

UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SAN MARTÍN  
COMISIÓN NACIONAL DE ENERGÍA ATÓMICA  
INSTITUTO DE TECNOLOGÍA  
“Prof. Jorge A. Sabato”

Modelos de quarks no-locales a temperatura  
y potencial químico finitos: Diagrama de fases  
y observables hadrónicos (\*)

por Lic. Valeria Paula Pagura

Director

Dr. Norberto N. Scoccola

(\*) Tesis para optar por el título de *Doctor en Ciencia y Tecnología,*  
*mención Física*

República Argentina

2013

---

## Resumen

En esta tesis se estudian algunos aspectos del comportamiento de la materia fuertemente interactuante en el marco de modelos de quarks relativistas con interacciones no-locales entre quarks que incluyen el acoplamiento a un parámetro de orden asociado al confinamiento.

En el Cap. 1 se realiza una breve introducción a los temas que se desarrollan en la tesis, se presentan motivaciones y objetivos.

En el Cap. 2 se hace una revisión de algunas nociones de la Cromodinámica Cuántica. Se presta especial atención a las simetrías que están relacionadas con las transiciones de fase de restauración de simetría quiral y deconfinamiento.

En el Cap. 3 se describen el modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) y el formalismo necesario para incluir en el modelo temperatura y potencial químico finitos. Se explica además el acoplamiento de los campos fermiónicos al *loop* de Polyakov, dando lugar al modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL). Se introducen dos potenciales alternativos para la descripción de la termodinámica del *loop* de Polyakov.

En el Cap. 4 se detalla el modelo de NJL no-local (nlNJL), en el que las interacciones entre quarks son no-locales con lo que se alcanza una descripción más realista de las mismas. Con este modelo se describen propiedades mesónicas a temperatura cero. Se describe asimismo la inclusión del *loop* de Polyakov, con lo que queda presentado el modelo de PNJL no-local (nlPNJL), marco en el que se desarrolla la parte central de esta tesis.

En el Cap. 5 se analizan las transiciones de restauración de simetría quiral y deconfinamiento para el caso de potencial químico cero utilizando el modelo nlPNJL. Se estudian el efecto de modificar el parámetro de escala que aparece en el potencial del *loop* de Polyakov y la dependencia de las temperaturas críticas con la ruptura explícita de la simetría quiral.

En el Cap. 6 se estudian los diagramas de fases para materia fuertemente interactuante considerando los casos de potencial químico imaginario y real.

En el Cap. 7 se describe el comportamiento de algunas propiedades mesónicas como funciones de la temperatura.

En el Cap. 8 se resume el trabajo realizado y se exponen las conclusiones.

---

## Abstract

In this thesis, we study some aspects of the behavior of strongly interacting matter within relativistic quark models with non local interactions that include coupling to an order parameter associated with confinement.

In Chap. 1, a brief introduction of the relevant subjects is made, and motivations and objectives are presented.

In Chap. 2, we go over some basic ideas of Quantum Chromodynamics. Special attention is paid to the symmetries that are related to deconfinement and chiral symmetry restoration phase transitions.

In Chap. 3 we describe the Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model and the formalism required to include finite temperature and chemical potential. Moreover, we present the coupling between the Polyakov loop and the fermionic fields, resulting in the Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL) model. Two alternative potentials for the description of the thermodynamics of the Polyakov Loop are introduced.

In Chap. 4 the non local NJL (nlNJL) model is described, where interactions among quarks are non local with which a more realistic description of these is achieved. With this model, mesonic properties at zero temperature are described. The inclusion of the Polyakov Loop is described giving rise to the non-local PNJL (nlPNJL) model, which is used in the main part of this work.

In Chap. 5 the transitions of chiral symmetry restoration and deconfinement are analyzed using the nlPNJL model, for the case of zero chemical potential. We study the effect of modifying the scale parameter that appears in the potential of the Polyakov loop and the dependence of critical temperatures with explicit breaking of chiral symmetry.

In Chap. 6 we study the phase diagrams of strongly interacting matter, considering the cases of real and imaginary chemical potential.

In Chap. 7 the behavior of some mesonic properties as functions of temperature is described.

In Chap. 8 we summarize the work and show our conclusions.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Revisión de algunos aspectos generales de la Cromodinámica Cuántica</b>	<b>7</b>
2.1. El lagrangiano de QCD . . . . .	7
2.2. Simetría quiral y su ruptura espontánea . . . . .	9
2.3. QCD a temperatura y potencial químico finitos: Formalismo de Matsubara y tiempo imaginario . . . . .	11
2.4. Loop de Polyakov, simetría $Z_3$ y confinamiento . . . . .	13
2.4.1. $Z_3$ center symmetry . . . . .	13
2.4.2. <i>Loop</i> de Polyakov . . . . .	15
2.5. QCD en la red. Limitaciones y algunos resultados . . . . .	16
<b>3. Los modelos de Nambu-Jona-Lasinio y Polyakov Nambu-Jona-Lasinio</b>	<b>21</b>
3.1. El modelo de NJL local . . . . .	22
3.1.1. Aproximación de campo medio . . . . .	22
3.1.2. Bosón de Goldstone pseudoescalar . . . . .	24
3.2. Modelo de PNJL . . . . .	27
<b>4. Extensiones no-locales del modelo de NJL</b>	<b>33</b>
4.1. Núcleos de interacción no-locales . . . . .	33
4.2. Modelo quiral de quarks no-local . . . . .	36
4.2.1. Aproximación de campo medio . . . . .	40
4.2.2. Masas mesónicas . . . . .	41
4.2.3. Constante de decaimiento débil del pión . . . . .	41
4.2.4. Ancho de decaimiento . . . . .	42
4.2.5. Parametrizaciones del modelo NJL no-local . . . . .	44
4.2.6. Resultados numéricos a temperatura y densidad nulas . . . . .	46
4.3. Acoplamiento al PL: modelo nPNJL . . . . .	47

<b>5. Transiciones de fase a potencial químico cero</b>	<b>49</b>
5.1. Modelo no-local de quarks quirales a temperatura finita . . . .	50
5.2. Estudio de la temperatura crítica en función del parámetro $T_0$	52
5.3. Dependencia de las temperaturas críticas con la cantidad de ruptura explícita de la simetría quiral . . . . .	54
<b>6. Transiciones de fase a potencial químico finito. Diagrama de fases</b>	<b>63</b>
6.1. Modificaciones para la extensión a potencial químico finito . .	64
6.2. Diagrama de fases para potencial químico imaginario . . . . .	65
6.3. Diagrama de fases para potencial químico real . . . . .	72
<b>7. Propiedades mesónicas a temperatura finita</b>	<b>79</b>
<b>8. Conclusiones</b>	<b>91</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Actualmente se considera que las partículas que son sensibles a las interacciones fuertes, es decir los mesones y bariones conocidos en forma conjunta bajo el nombre de hadrones, están compuestos por quarks que interactúan por medio del intercambio de gluones. En el marco del llamado Modelo Estándar de partículas elementales [1] la teoría que describe dichas interacciones es la Cromodinámica Cuántica (o QCD por su nombre en inglés) [2]. Esta teoría tiene dos características principales: la *libertad asintótica* y el *confinamiento*. En procesos en los cuales el momento transferido es muy grande, tales como dispersiones profundamente inelásticas, la interacción mediada por gluones es poco intensa (libertad asintótica) lo cual permite obtener predicciones a partir del lagrangiano fundamental de la teoría, considerando a las interacciones como perturbaciones a un sistema de quarks no-interactuantes. Sin embargo, en el régimen de bajas energías ( $E \lesssim 1 \text{ GeV}$ ), o equivalentemente distancias largas, la constante de acoplamiento se vuelve grande y la teoría no-perturbativa. En este régimen los quarks no existen como partículas libres sino sólo formando hadrones (confinamiento), y la simetría quiral, presente en el lagrangiano de QCD en el límite en que los quarks tienen masa nula, se encuentra espontáneamente rota. Estas características de QCD hacen que, en principio, se puedan distinguir dos fases de la misma: i) fase hadrónica de quarks y gluones confinados y simetría quiral rota; ii) fase deconfinada y de simetría quiral restaurada, a la que se denomina genéricamente *plasma de quarks y gluones* (QGP). En condiciones normales la materia fuertemente interactuante se encuentra en la fase hadrónica. Sin embargo, bajo ciertas condiciones extremas de temperatura y/o densidad puede producirse una transición a la otra fase. Se cree que en la Naturaleza el plasma de quarks y gluones existió en el universo temprano, es decir en los primeros microsegundos posteriores al Big Bang cuando la temperatura era muy elevada, y que luego, a medida que el Universo se fue enfriando, tuvo lugar el proce-

so de hadronización. Hoy en día se considera que es posible que aún exista alguna forma de materia de quarks deconfinados en el interior de objetos compactos, como las estrellas de neutrones [3, 4]. El fuerte interés por estudiar las propiedades de este tipo de materia y las condiciones bajo las cuales es posible producirla ha motivado en los últimos años la construcción de grandes facilidades experimentales que permitan obtenerla en el laboratorio. Una de las facilidades donde se llevan a cabo estudios relacionados con el plasma de quark y gluones es el *Relativistic Heavy Ion Collider* (RHIC) en Brookhaven, USA [5], donde tienen lugar colisiones entre iones pesados a energías relativistas. También en el *Large Hadron Collider* (LHC) ubicado en el CERN en la frontera franco-suiza cerca de Ginebra se realizan experimentos de este tipo, estando el detector *Alice* especialmente dedicado a este fin [6]. Además de éstas, existen otras facilidades en construcción, el *Facility for Antiproton and Ion Research* (FAIR)[7] en Darmstadt, Alemania, y el NICA [8] en Dubna, Rusia.

Desde el punto de vista teórico, hasta casi finales de los '90 en general se creía que el diagrama de fases de QCD constaba solamente de las fases antes mencionadas, es decir fase hadrónica a bajas temperaturas y densidades y QGP a altas temperaturas y/o densidades, separadas por algún tipo de línea de transición de fases. Recién en ese momento, y a pesar de que ya había sido sugerido a partir de mediados de los '70 [9], se comenzó a aceptar mayoritariamente la posibilidad de que se formen pares de Cooper en la materia de quarks a bajas temperaturas y altas densidades. De esta manera, el correspondiente condensado rompe la simetría local de color  $SU(3)$  dando lugar a la existencia de fases superconductoras de materia de quarks. Cuando se comenzó a estudiar en detalle la superconductividad de color surgieron otras fases posibles [10]. En una de estas fases, para potenciales químicos suficientemente grandes, la materia se halla distribuida de manera tal que los quarks up, down y strange están apareados en un condensado conocido como *Color-Flavor Locked* (CFL). Sin embargo, dado que la masa del quark strange es un orden de magnitud superior a las de los quarks up y down, se cree que para potenciales químicos más bajos deben aparecer condensados que sólo contengan estos últimos, dando lugar así a la fase conocida como *Two Color-Flavor Superconductivity* (2SC). También se ha sugerido la posibilidad de que existan fases no-homogéneas [11]. Otra cuestión que aún está bajo estudio es la relación que existe entre la transición de deconfinamiento y la de restauración de simetría quiral. Por ejemplo, si bien se cree que a bajas densidades dichas transiciones ocurren de manera más o menos simultánea, a densidades mayores puede que exista una fase de quarks confinados con simetría quiral restaurada llamada usualmente fase *quarkónica* [12]. En la Fig. (1.1), tomada de la Ref. [13], se puede observar un esquema de como se

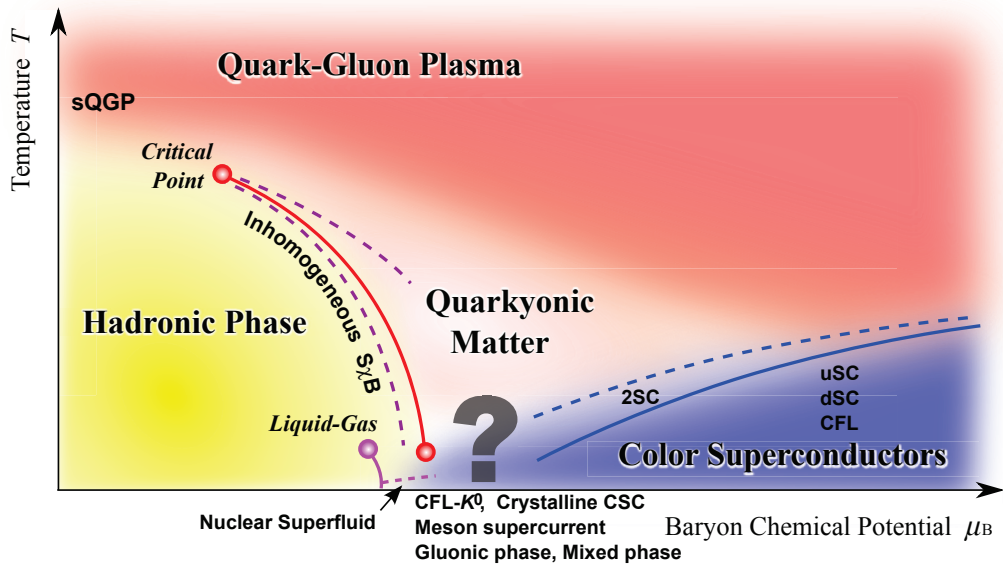


Figura 1.1: Esquema de como se cree actualmente puede ser el diagrama de fases de QCD [13].

cree actualmente puede ser el diagrama de fases de QCD.

Para poder describir la materia hadrónica y de quarks, así como sus distintas fases, es esencial disponer de métodos que permitan analizar la dinámica asociada a QCD. Como ya ha sido mencionado, en el rango de momento transferido grande es posible utilizar teoría de perturbaciones en términos de la constante de acoplamiento quark-gluon. Sin embargo, para momentos transferidos pequeños no es posible abordar el estudio de QCD de esta forma. Dado que para describir las propiedades estáticas de los hadrones (masas, constantes de decaimiento, etc.), así como para estudiar la transición entre la fase hadrónica y la de materia de quarks es necesario considerar el rango de momentos transferidos pequeños, resulta fundamental desarrollar formalismos que permitan estudiar la teoría en esta región. Uno de ellos consiste en resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento en un espacio-tiempo discretizado, lo que se denomina QCD en la red o *lattice QCD* (LQCD)[14]. Disponiendo de suficiente poder de cómputo es posible disminuir el espaciamiento de la red e incrementar el tamaño del sistema de manera de acercarse tanto al límite del continuo como al termodinámico. Al mismo tiempo es posible muestrear un número suficientemente grande de configuraciones de manera de disminuir el error estadístico. Sin embargo, los métodos tipo Monte Carlo comúnmente utilizados para evaluar la función de partición son confiables solamente en el caso en el que el potencial químico es cero. La

extensión de los cálculos a potencial químico finito presenta grandes dificultades y, como veremos en el Cap. 2, si bien existen ya algunos resultados, se encuentran aún en discusión.

Una alternativa frente a estos inconvenientes es utilizar modelos efectivos que incorporan las simetrías de la teoría y permiten estudiar los observables de interés recién mencionados. Uno de los modelos efectivos más utilizados para estudiar las propiedades hadrónicas en el régimen no perturbativo es el modelo propuesto por Nambu y Jona-Lasinio en 1961 [15]. Originalmente fue utilizado para describir nucleones interactuantes como campos fermiónicos sin masa que adquieren la misma por medio del mecanismo de ruptura espontánea de la simetría quiral cuando la interacción es lo suficientemente intensa. Más adelante el modelo fue reinterpretado en términos de campos fermiónicos de quarks que interactúan localmente. Este modelo permite entender el mecanismo de ruptura espontánea de simetría quiral y la consecuente aparición de los piones como bosones de Goldstone. En particular, ha sido ampliamente utilizado para estudiar, por ejemplo, propiedades hadrónicas tales como masas, amplitudes de decaimiento, etc, así como el fenómeno de restauración de simetría quiral por efecto de la temperatura y/o densidad [16]. También ha sido uno de los modelos más usados para investigar sobre la existencia de fases superconductoras de color [17]. Sin embargo, para dar cuenta del mecanismo de deconfinamiento no basta con un modelo puramente fermiónico sino que es necesario incluir en forma explícita la dinámica de los grados de libertad gluónicos. Recientemente ha sido propuesto incorporar los mismos mediante el acoplamiento de los quarks a un campo de fondo de color asociado al parámetro de orden usualmente utilizado para describir el deconfinamiento, es decir el llamado *loop de Polyakov* [18, 19]. El modelo así obtenido se conoce bajo el nombre de modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL) [20, 21, 22, 23].

Sin embargo, tanto el modelo de NJL como el de PNJL presentan algunos inconvenientes. En efecto, el precio a pagar por la simplicidad de los mismos, básicamente debida a la localidad del acoplamiento entre quarks, es la necesidad de regularizar las integrales que aparecen en el cálculo de los diagramas involucrados en la determinación de la autoenergía de los quarks, las masas de los mesones, las constantes de acoplamiento, etc. En general esto se lleva a cabo adoptando una forma extremadamente esquemática de la interacción debida a QCD: se la considera constante para bajos momentos  $p < \Lambda_{NJL} \simeq 0,6 - 0,7$  GeV y cero para  $p > \Lambda_{NJL}$ . Este tipo de prescripción da lugar a ambigüedades en el tratamiento de los órdenes superiores de la expansión en lazos, inconsistencias en el tratamiento de los procesos anómalos, etc. Para evitar este tipo de inconvenientes y a la vez incluir una descripción más realista de las interacciones entre quarks se ha suge-

---

rido utilizar interacciones no locales [24]. En verdad, el carácter no-local de las interacciones surge naturalmente en el contexto de diversos métodos bien establecidos para describir la dinámica de bajo momento de los quarks, como por ejemplo el modelo de líquido de instantones [25] o las técnicas de resumación de Schwinger-Dyson [26]. Más aún, utilizando este tipo de interacciones es posible obtener dependencias en el momento del propagador efectivo de quarks que son consistentes con las obtenidas mediante técnicas de QCD en la red [27]. También ha sido mostrado [28, 29, 30, 31] que los modelos con interacciones no-locales proveen una descripción satisfactoria de las propiedades hadrónicas a temperatura y densidad nula. Finalmente, se ha encontrado que bajo ciertas condiciones es posible derivar los ingredientes principales de los modelos no-locales comenzando directamente a partir de QCD [32].

A partir de estas consideraciones surge el interés del principal objetivo de esta tesis que es investigar el comportamiento de la materia fuertemente interactuante a temperatura y/o densidad finita en el marco de modelos de quarks con interacciones no-locales que incluyen el acoplamiento al loop de Polyakov. Por motivos de simplicidad sólo nos concentraremos en rangos de temperatura y potencial químico donde no es de esperar que existan fases superconductoras de color. La tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se describen las características principales de QCD, sus simetrías y algunas pautas de su comportamiento a temperatura y densidad finitas conocidos a partir de cálculos de QCD en la red. En el Capítulo 3 se introducen en cierto detalle los modelos de NJL y PNJL. En el Capítulo 4 se consideran las extensiones no locales de los mismos. En el Capítulo 5 se analizan los resultados para la temperatura crítica a potencial químico nulo, así como su dependencia con el parámetro de escala del potencial para el loop de Polyakov, y con la masa corriente de los quarks. En el Capítulo 6 se aborda el análisis del diagrama de fases de QCD tanto para potencial químico real como imaginario. En el Capítulo 7 se describen algunas propiedades mesónicas, masas y ancho de decaimiento del mesón sigma para temperatura finita. En el Capítulo 8 se exponen las conclusiones de este trabajo.



# Capítulo 2

## Revisión de algunos aspectos generales de la Cromodinámica Cuántica

Como hemos anticipado en la introducción, en esta tesis abordamos el estudio de propiedades de la materia formada por quarks y gluones utilizando un modelo efectivo de la Cromodinámica Cuántica (QCD). Los modelos efectivos son teorías aproximadas que se construyen imitando características de la teoría original. Por lo tanto, antes de adentrarnos en la descripción del tipo particular de modelo efectivo utilizado en este trabajo, hacemos una breve revisión de algunos aspectos generales de la QCD. En este capítulo dedicamos especial atención a las simetrías de QCD que están directamente vinculadas con las transiciones de fase que describimos más adelante. Exponemos además el formalismo utilizado para incluir temperatura y potencial químico finitos, así como algunos resultados obtenidos utilizando técnicas de QCD en la red.

### 2.1. El lagrangiano de QCD

La Cromodinámica Cuántica es una teoría de gauge no abeliana que describe las interacciones fuertes entre quarks y gluones. La densidad lagrangiana de QCD está dada por [2]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QCD} &= \mathcal{L}_{quark} + \mathcal{L}_{masa} + \mathcal{L}_{gauge} \\ &= \bar{\psi}(x) i\gamma_{\mu} D^{\mu} \psi(x) - \bar{\psi}(x) \hat{m} \psi(x) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu},\end{aligned}\quad (2.1)$$

donde  $\psi(x) = (u(x), d(x), s(x) \dots)^T$  es el campo de quarks de  $N_c = 3$  colores y  $N_f$  sabores,  $\bar{\psi}(x) = \psi(x)^{\dagger} \gamma_0$  y  $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$  es la matriz formada

por las masas desnudas de los quarks. La derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - i g \lambda^a A_\mu^a \quad (2.2)$$

que incluye los campos de gauge  $A_\mu^a$ , con  $a = 1 \dots 8$ , acopla los sectores fermiónico y gluónico. Aquí  $g$  es la constante de acoplamiento fuerte y  $\lambda^a$  son las matrices de Gell-Mann, que constituyen la representación fundamental de los generadores del grupo de color  $SU(3)$ . Estas matrices satisfacen las relaciones

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2i f^{abc} \lambda^c, \quad \text{tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}, \quad (2.3)$$

donde  $f^{abc}$  son las constantes de estructura totalmente antisimétricas. El tensor de campo gluónico  $G_{\mu\nu}^a$  que aparece en el último término de la Ec. (2.1) se define como

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.4)$$

Este término del lagrangiano es responsable de la autointeracción de los campos de gauge, muy relacionada con el confinamiento, que es una de las características principales de QCD.

Tal como está constituido, el lagrangiano de QCD es invariante ante transformaciones de gauge  $SU(3)$  en el espacio de color. Por el carácter no abeliano del grupo de gauge, QCD tiene ciertas características que la diferencian de una teoría de gauge abeliana como la Electrodinámica Cuántica (QED). Algunas de estas particularidades son:

- *Universalidad:* Existe sólo una constante de acoplamiento  $g$  para todas las interacciones entre quarks y gluones. Esta es una consecuencia directa de la invariancia de gauge local sobre el grupo  $SU(N_c)$ . Además, el lagrangiano de QCD contiene autoacoplamientos gluónicos (vértices de tres y cuatro gluones), por lo que los gluones transportan carga de color.
- *Libertad asintótica:* A muy altas energías los quarks se comportan como partículas libres. Esto es, el acoplamiento se vuelve débil a cortas distancias o, equivalentemente, grandes valores del cuadrado del momento euclídeo  $Q^2$ . A orden de un lazo, dicho acoplamiento resulta

$$\alpha_s(Q^2) \equiv \frac{g^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{4\pi}{(11 - \frac{2}{3}N_f) \ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)}, \quad (2.5)$$

donde  $\Lambda_{QCD}$  es el parámetro de escala de QCD, el cual puede determinarse, por ejemplo, ajustando la última ecuación a datos experimentales para grandes valores de  $Q^2$ . De esta forma, se encuentra que  $\Lambda_{QCD} \simeq 200$  MeV. La Ec. (2.5) es la base fundamental para el tratamiento perturbativo de QCD en el régimen de momentos grandes.

## 2.2. Simetría quiral y su ruptura espontánea

---

- *Confinamiento*: Inversamente, la Ec. (2.5) muestra que el acoplamiento se vuelve intenso a bajas energías. Por tal motivo, no es posible aplicar teoría de perturbaciones en QCD para describir ningún proceso con energías menores que  $\sim 1 - 2$  GeV. Esto hace que resulte difícil comprender en detalle el fenómeno de confinamiento, es decir, el hecho de que objetos de color, como quarks y gluones, no existan como grados de libertad físicos en el vacío. Es esta característica la que nos obliga a proponer modelos efectivos que puedan reproducir las propiedades y simetrías de QCD, pero que ofrezcan un mecanismo más simple, para poder estudiar ciertas propiedades hadrónicas (como masas, constantes de acoplamiento, constantes de decaimiento débil, etc.) y de materia de quarks (condensados, campos efectivos, etc.), que se observan dentro de este rango de energías.
- *Simetría quiral*: En el límite de masas de quarks nulas, el lagrangiano de QCD es invariante ante el grupo quiral  $SU(N_f)_R \otimes SU(N_f)_L$  de transformaciones globales. Esta propiedad se explica con más detalle en la próxima sección, para el caso de dos sabores de quarks.
- *Invariancia de escala*: Dentro del límite quiral, el lagrangiano de QCD no contiene parámetros dimensionales, por lo que resulta invariante ante la transformación de escala  $\psi(x) \rightarrow \lambda^{-3/2}\psi(\lambda x)$ . La corriente dilatacional correspondiente no es una corriente conservada debido a correcciones cuánticas que llevan a la anomalía de traza.

## 2.2. Simetría quiral y su ruptura espontánea

Consideremos el lagrangiano (2.1) para dos sabores,  $u$  y  $d$ , en el caso que se conoce como *límite quiral*, esto es, considerando que  $m_u = m_d = 0$ . De esta manera resulta  $\mathcal{L}_{masa} = 0$ , entonces tenemos que

$$\mathcal{L}_{QCD}^{m=0} = \bar{\psi}(x) i\gamma_\mu D^\mu \psi(x) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Gracias a la quiralidad bien definida que tienen los campos fermiónicos en este caso,  $\mathcal{L}_{QCD}^{m=0}$  puede separarse en dos partes iguales e independientes. Si introducimos los campos *dextrógiro*  $\psi_R$  y *levógiro*  $\psi_L$  según

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi, \quad \psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi. \quad (2.7)$$

el primer término del lagrangiano (2.6) se puede reescribir como

$$\mathcal{L}_{quark} = \bar{\psi}_R i\gamma_\mu D^\mu \psi_R + \bar{\psi}_L i\gamma_\mu D^\mu \psi_L \quad (2.8)$$

y es invariante ante transformaciones globales del grupo

$$U(2)_R \otimes U(2)_L = SU(2)_R \otimes U(1)_R \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_L$$

cuya acción sobre los campos  $\psi_R$  y  $\psi_L$  está dada por

$$\begin{aligned} U(2)_R : \quad \psi_R &\rightarrow e^{i\tau_s \alpha_R^s} \psi_R \\ U(2)_L : \quad \psi_L &\rightarrow e^{i\tau_s \alpha_L^s} \psi_L \quad (s = 0, 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Aquí  $\alpha_{R,L}^s$  son los parámetros de las transformaciones, y  $\tau_0 = \mathbb{1}_{2 \times 2}$  y  $\tau_s$ , con  $s = 1, 2, 3$  son las matrices de Pauli. Las corrientes de Noether asociadas son

$$J_{sR}^\mu = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \tau_s \psi_R, \quad J_{sL}^\mu = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \tau_s \psi_L \quad (2.10)$$

y se verifica que  $\partial_\mu J_{sR}^\mu = \partial_\mu J_{sL}^\mu = 0$ . De manera alternativa podemos escribir estas corrientes conservadas en términos de las corrientes vectorial y axial

$$V_s^\mu = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \tau_s \psi(x), \quad A_s^\mu = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \tau_s \psi(x), \quad (2.11)$$

que están relacionadas con las corrientes  $R, L$  según

$$J_{sR,L}^\mu(x) = \frac{1}{2} [V_s^\mu \pm A_s^\mu(x)]. \quad (2.12)$$

Como resulta que  $\partial_\mu V_s^\mu = \partial_\mu A_s^\mu = 0$  la simetría quiral es equivalente a la invariancia frente a las transformaciones

$$\begin{aligned} U(2)_V : \quad \psi &\rightarrow \exp(i\tau_s \alpha_V^s) \psi \\ U(2)_A : \quad \psi &\rightarrow \exp(i\gamma_5 \tau_s \alpha_A^s) \psi, \end{aligned} \quad (2.13)$$

del grupo

$$U(2)_V \otimes U(2)_L = SU(2)_V \otimes U(1)_V \otimes SU(2)_A \otimes U(1)_A.$$

Podemos observar que en el término  $\mathcal{L}_{gauge}$  no están presentes los campos fermiónicos, por lo tanto el lagrangiano (2.6) es invariante ante transformaciones quirales. Sin embargo, cuando consideramos el término de masa  $\mathcal{L}_{masa}$  presente en el lagrangiano (2.1) encontramos que en general las cuadrdivergencias de las corrientes no son nulas. En efecto, tenemos que

$$\partial_\mu V_s^\mu(x) = 2i\bar{\psi}(x) [\hat{m}, \tau_s] \psi(x), \quad (2.14)$$

$$\partial_\mu A_s^\mu(x) = 2i\bar{\psi}(x) \{ \hat{m}, \tau_s \} \gamma_5 \psi(x). \quad (2.15)$$

Las transformaciones  $SU(2)_V$  y  $U(1)_V$  son las transformaciones unitarias correspondientes a la conservación del isoespín y del número bariónico, respectivamente. Las transformaciones quirales  $SU(2)_A$  y axiales  $U(1)_A$  alteran

la paridad de un estado dado. Por ello, la realización de dichas simetrías en la naturaleza, debería implicar para cada multiplete la existencia de otro multiplete de paridad opuesta. Esto no es lo que se observa experimentalmente, de ahí se induce que tanto  $SU(2)_A$  como  $U(1)_A$  son simetrías que, de alguna manera, están rotas.

Se sabe que  $SU(2)_A$  es una simetría espontáneamente rota. Al ocurrir esto, en el caso de quarks de masa nula, aparecen tres modos de excitación de los campos de quarks y gluones, de masa nula, llamados bosones de Goldstone. Estos tres bosones se asocian con los piones, ya que se observa experimentalmente que la masa de los piones, si bien es no nula, es mucho menor que la de los nucleones. La expresión matemática de una simetría es la conmutación del hamiltoniano del sistema con el operador  $U$  correspondiente a la cantidad conservada, esto es,  $[H, U] = 0$ . Cuando una simetría está espontáneamente rota, lo que ocurre no es que el conmutador deja de ser nulo, sino que el vacío deja de ser invariante frente a las transformaciones del grupo de simetría del operador  $U$ . Como consecuencia de esto, el estado fundamental deja de ser único y pasa a estar degenerado. Esto se puede expresar como  $[H, U] = 0$ , pero con  $U | 0 \rangle \neq | 0 \rangle$ , lo que implica que los generadores  $A$  del álgebra del grupo al que pertenece el operador  $U$ , no aniquilan el vacío, esto es  $A | 0 \rangle \neq 0$ .

Por otro lado, la simetría  $U(1)_A$ , está rota a nivel cuántico por la llamada anomalía axial. Esto significa que, si bien la teoría clásica posee una simetría dada, en el proceso de cuantización ésta se pierde porque la corriente de Noether recibe una contribución extra que hace que su cuadridivergencia deje de ser nula.

### 2.3. QCD a temperatura y potencial químico finitos: Formalismo de Matsubara y tiempo imaginario

Para estudiar una teoría cuántica de campos incluyendo temperatura y potencial químico finitos es usual considerar la matriz densidad  $\hat{\rho}$ , cuyos valores de expectación  $\langle \phi | \hat{\rho} | \phi \rangle$  indican la probabilidad de que, para una temperatura  $T$  y un potencial químico  $\mu$  específicos, el sistema se encuentre en el estado  $|\phi\rangle$ . El factor de normalización es la función de partición

$$\mathcal{Z} = \text{Tr } \hat{\rho}, \tag{2.16}$$

donde la traza es evaluada tomando la suma sobre todos los valores de expectación posibles en una base completa. La función de partición  $\mathcal{Z}$  es la

herramienta mediante la cual se obtienen todas las propiedades termodinámicas del sistema. En general, el valor medio de un operador  $\hat{A}$  se puede obtener usando

$$\langle \hat{A} \rangle = \mathcal{Z}^{-1} \text{Tr} \hat{\rho} \hat{A}. \quad (2.17)$$

La matriz densidad se puede construir a partir del hamiltoniano  $\hat{\mathcal{H}}$

$$\hat{\rho} = e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}}, \quad (2.18)$$

donde  $\beta$  es la inversa de la temperatura (suponiendo que la constante de Boltzman es  $k = 1$ ). Como en general nos interesa estudiar la estadística de sistemas con la posibilidad de creación y destrucción de partículas, utilizamos el hamiltoniano correspondiente al ensamble gran canónico

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{H} - \mu \hat{N} \quad (2.19)$$

donde  $\hat{N}$  es el operador de número de partículas.

Recordemos que en una teoría cuántica de campos a temperatura cero, la amplitud de transición entre dos estados se puede escribir, utilizando integrales funcionales, como

$$\langle \phi(\vec{x}_1, t_1) | \phi(\vec{x}_2, t_2) \rangle = \langle \phi_1 | \exp(-i\mathcal{H}(t_1 - t_2)) | \phi_2 \rangle = N' \int \mathcal{D}\phi e^{-iS}, \quad (2.20)$$

donde  $\phi$  es la variable de campo,  $N'$  es una constante de normalización y  $S$  la acción definida por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}, \quad (2.21)$$

siendo  $\mathcal{L}$  la densidad lagrangiana del sistema. Si escribimos la función de partición utilizando una base de estados  $|\phi_a\rangle$

$$\mathcal{Z} = \int d\phi_a \langle \phi_a | e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} | \phi_a \rangle \quad (2.22)$$

vemos que podemos identificarla con la amplitud de transición (2.20) si interpretamos la acción de  $e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$  como la de un operador de evolución en un tiempo imaginario  $t = i\beta$ , con la condición de que los estados inicial y final coincidan (para campos bosónicos). Así entonces es posible expresar  $\mathcal{Z}$  como una integral de camino [33]

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{S}_E}, \quad (2.23)$$

la relación entre  $\mathcal{S}_E$  y la acción en espacio-tiempo euclídeo está dada por

$$\mathcal{S}_E = S_E + \beta\mu N = \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \mathcal{L}_E + \beta\mu N, \quad (2.24)$$

## 2.4. Loop de Polyakov, simetría $Z_3$ y confinamiento

---

la integración en  $\tau$  es entre 0 y  $\beta$ , y los campos satisfacen condiciones de contorno periódicas o anti-periódicas

$$\phi(\vec{x}, \beta) = \pm\phi(\vec{x}, 0) \quad (2.25)$$

según se trate de campos bosónicos o fermiónicos.

Cuando pasamos al espacio de momentos, encontramos que la integración sobre un intervalo finito implica que las frecuencias en la transformada de Fourier asumen valores discretos en vez de continuos. Las distintas condiciones de contorno determinan los posibles valores para dichas frecuencias, conocidas como *frecuencias de Matsubara*, y éstas resultan

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{2n\pi}{\beta} & \text{para bosones} \\ \frac{(2n+1)\pi}{\beta} & \text{para fermiones} \end{cases} \quad (2.26)$$

## 2.4. *Loop* de Polyakov, simetría $Z_3$ y confinamiento

En la introducción hemos mencionado que según predicciones realizadas por cálculos de QCD en la red (LQCD por su nombre en inglés), en forma aproximadamente conjunta con la transición de restauración de simetría quiral, para cierta temperatura finita y potencial químico nulo, ocurre la transición de fase de confinamiento - deconfinamiento, cuyo parámetro de orden asociado es el *loop de Polyakov* [18]. En el caso de la teoría de gauge pura las fases confinada y deconfinada se pueden distinguir haciendo uso de otra simetría de QCD. Esto se detalla a continuación siguiendo los pasos de la Ref.[34].

### 2.4.1. $Z_3$ center symmetry

Tomamos como punto de partida el límite  $m_q \rightarrow \infty$  para el que el lagrangiano (2.1) toma la forma

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Ante las transformaciones del grupo de gauge  $SU(3)$  de color

$$\Omega(x) = e^{iw_a(x)\lambda_a}, \quad (2.28)$$

los campos gluónicos transforman según

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A'_\mu = \Omega (A_\mu + \partial_\mu) \Omega^\dagger \\ G_{\mu\nu} &\rightarrow G'_{\mu\nu} = \Omega G_{\mu\nu} \Omega^\dagger \end{aligned} \quad (2.29)$$

y, dado que  $\Omega \Omega^\dagger = 1$  y que la traza es cíclica, tenemos que

$$\text{Tr } G'_{\mu\nu} G'^{\mu\nu} = \text{Tr } \Omega G_{\mu\nu} \Omega^\dagger \Omega G^{\mu\nu} \Omega^\dagger = \text{Tr } G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

es decir que el lagrangiano (2.27) resulta invariante.

Por otra parte, como fue probado por t'Hooft [19], en una teoría de gauge local  $SU(N)$  aparece una simetría global  $Z_N$ , que se conoce como el centro del grupo. Los elementos de  $Z_N$  conmutan con todos los elementos de  $SU(N)$ , por lo tanto son proporcionales a la identidad,

$$\Omega_c = e^{-i\psi} \mathbf{1}. \quad (2.31)$$

Como además son elementos de  $SU(N)$  el determinante de  $\Omega_c$  es uno, por lo que debe ser

$$\psi = \frac{2\pi j}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (2.32)$$

Si consideramos la teoría a temperatura finita, según lo expuesto en la sección anterior tenemos que la función de partición es

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A \exp \left( - \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \mathcal{L}_{gauge}^E \right), \quad (2.33)$$

donde  $\mathcal{L}_{gauge}^E$  es la versión en espacio-tiempo Euclídeo de (2.27). En la medida de integración  $\mathcal{D}A$  aparecen campos que, como también hemos descrito en la sección previa, obedecen condiciones periódicas de contorno. Es fácil ver que estas condiciones siguen satisfaciéndose cuando actúa sobre los campos  $A_\mu$  un operador que también es periódico en  $\tau$ , es decir, que  $\Omega(\vec{x}, \tau + \beta) = \Omega(\vec{x}, \tau)$ . Ahora bien, existe otra posibilidad para preservar dichas condiciones, y es la acción de transformaciones de gauge periódicas a menos de un elemento del centro del grupo.

$$\Omega(\vec{x}, \tau + \beta) = \Omega_c \Omega(\vec{x}, \tau). \quad (2.34)$$

Aplicando un elemento tal a  $A_\mu$  encontramos

$$\begin{aligned} A'_\mu(\vec{x}, \tau + \beta) &= \Omega(\vec{x}, \tau + \beta) (A_\mu(\vec{x}, \tau + \beta) + \partial_\mu) \Omega^\dagger_\mu(\vec{x}, \tau + \beta) \\ &= \Omega_c \Omega(\vec{x}, \tau) (A_\mu(\vec{x}, \tau) + \partial_\mu) \Omega^\dagger_\mu(\vec{x}, \tau) \Omega_c^\dagger \\ &= \Omega_c A'_\mu(\vec{x}, \tau) \Omega_c^\dagger \\ &= A'_\mu(\vec{x}, \tau). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Es decir que en general existe una simetría  $Z_N$  que, en principio, puede estar espontáneamente rota. Esto permite distinguir entre las fases con quarks confinados y deconfinados. Por otra parte, debe notarse que en presencia de campos de quarks, que son anti-periódicos en tiempo Euclídeo, la simetría  $Z_N$  está explícitamente rota. Esto es así porque ante una transformación como (2.34) tenemos que los campos de quarks transforman verificando

$$\begin{aligned}\psi'(\vec{x}, \tau + \beta) &= \Omega(\vec{x}, \tau + \beta)\psi(\vec{x}, \tau + \beta) \\ &= -\Omega_c\Omega(\vec{x}, \tau)\psi(\vec{x}, \tau) \\ &= -\psi'(\vec{x}, \tau),\end{aligned}\tag{2.36}$$

y sólo se mantiene la condición de contorno (2.25) si  $\Omega_c = \mathbb{1}$ . Es decir que mientras existen  $N$  maneras de satisfacer las condiciones de borde para los campos bosónicos, y por lo tanto  $N$  formas equivalentes de describir la teoría de gauge pura a temperatura finita, existe una única forma de hacerlo si incluimos en ella quarks dinámicos. Por lo tanto, en el caso de QCD con quarks dinámicos la simetría  $Z_3$  es sólo una simetría aproximada.

### 2.4.2. *Loop de Polyakov*

Un parámetro de orden para la transición de ruptura espontánea de la simetría  $Z_3$  se puede construir utilizando la línea de Wilson térmica

$$L(\vec{x}) = \mathcal{P} \exp \left( ig \int_0^\beta A_0(\vec{x}, \tau) d\tau \right),\tag{2.37}$$

donde  $\mathcal{P}$  indica ordenamiento del camino en la exponencial,  $g$  es la constante de acoplamiento fuerte y  $A_0$  es la componente temporal del campo de gauge Euclídeo. Ante transformaciones del grupo  $SU(3)$  la línea de Wilson térmica transforma como un objeto de la representación adjunta.

A partir de  $L$  se define el *loop de Polyakov*

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{3} \text{Tr} L(\vec{x})\tag{2.38}$$

El *loop de Polyakov* es un campo escalar complejo que depende de la posición espacial de una fuente de color estática. Ante la acción de un elemento de  $Z_3$  transforma como un campo con carga uno

$$\phi(\vec{x}) \rightarrow \phi'(\vec{x}) = e^{-i\varphi} \phi(\vec{x}).\tag{2.39}$$

Para comprender qué representa el *loop de Polyakov* tomemos la función de partición para un sistema de gluones en presencia de un quark de prueba

infinitamente pesado:

$$\mathcal{Z}_Q = \int \mathcal{D}A \phi(\vec{x}) e^{-S_{gauge}[A]}, \quad (2.40)$$

donde

$$S_{gauge} = \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \mathcal{L}_{gauge}^E. \quad (2.41)$$

Podemos calcular el valor medio del *loop* de Polyakov, esto es

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}A \phi(\vec{x}) e^{-S_{gauge}[A]} = \frac{\mathcal{Z}_Q}{\mathcal{Z}} = e^{-\beta F}. \quad (2.42)$$

Es decir que hallamos que  $\langle \phi \rangle$  es el cociente entre las funciones de partición para el sistema de gluones con y sin una fuente externa de color, por lo tanto es una medida para la energía libre  $F$  de un quark estático externo. Entonces, en el caso de quarks confinados, debe cumplirse que  $\langle \phi \rangle = 0$ , ya que la energía libre de un solo quark es infinita. En cambio, si los quarks se encuentran deconfinados,  $F$  es finita y  $\langle \phi \rangle \neq 0$ .

Como hemos discutido, en presencia de quarks dinámicos la simetría  $Z_3$  está explícitamente rota, entonces el *loop* de Polyakov deja de ser un parámetro de orden riguroso. Sin embargo, aún se lo puede utilizar como un indicador de la transición confinamiento - deconfinamiento.

## 2.5. QCD en la red. Limitaciones y algunos resultados

Hemos mencionado en la introducción que existe un método *ab initio* para tratar la dinámica de QCD a bajas energías. Éste consiste en discretizar el espacio-tiempo y reescribir la acción de QCD en forma también discretizada [14]. En este contexto la función de partición se puede estimar utilizando el método Monte Carlo, es decir, aproximando la integral como una suma sobre configuraciones que están pesadas por la acción. El método de muestreo por importancia permite reducir los cálculos a un número limitado de configuraciones, según la probabilidad con la que ellos pueden ocurrir,  $e^{-S_E}$ . Claramente, este método tiene sentido si la acción Euclídea es una cantidad definida-positiva. El formalismo de tiempo imaginario que hemos visto en este capítulo, útil para estudiar QCD a densidad finita, implica reemplazar  $p_4$  por  $i\mu$ , por lo que la acción en este caso es en general una cantidad compleja. Esto implica a su vez que no hay manera de comparar las probabilidades asociadas a distintas configuraciones. Esto es lo que se conoce como el *problema del signo*. Para  $\mu = 0$ , utilizando LQCD libre del problema del signo,

se estima que para dos sabores livianos la restauración de la simetría quiral ocurre como una transición suave (crossover) a  $T_c = 173(8)$  MeV [35], mientras que cuando se incluye el quark strange masivo la temperatura crítica es levemente más baja [36, 37, 38, 39]. Estos cálculos predicen además, que la transición de deconfinamiento ocurre en forma aproximadamente conjunta con la transición quiral [40].

En cuanto a la posibilidad de extender los cálculos a potencial químico finito existen varias alternativas. Una posibilidad es hacer un desarrollo en serie de potencias de  $\mu/T$  alrededor de  $\mu = 0$  [41], donde no está presente el problema del signo. En esta expansión el radio de convergencia está limitado por la singularidad más cercana en el potencial termodinámico que es, a lo sumo en un punto crítico. Por lo tanto, esta alternativa puede ser útil para estimar la posición del punto crítico final, que es el punto sobre la línea que separa las fases con simetría quiral rota y restaurada en la que el carácter de la misma cambia. Se ha utilizado además para estudiar la curvatura de la línea de transición quiral en la zona de crossover [42]. Otra alternativa es utilizar una técnica conocida como *multi-parameter reweighting* [43, 44], que consiste en tomar para  $\mu \neq 0$  el mismo ensamble que para  $\mu = 0$ , cambiando los valores de las masas de quarks y constante de acoplamiento de manera tal que ciertas cantidades físicas no cambien. Pero los resultados que se obtienen de esta forma presentan muchas fluctuaciones debido al hecho de que en realidad las configuraciones a potencial químico finito que ocurren con más probabilidad no son las mismas que a  $\mu = 0$ . Finalmente, es posible estudiar qué ocurre con un potencial químico imaginario [40, 45, 46] y, usando argumentos de continuidad analítica, extrapolar los resultados a potencial químico real y finito. De esta manera se han calculado varios puntos del diagrama de fases para  $\mu$  imaginario, estimándose en particular la posición del punto crítico asociado a la así llamada transición Roberge-Weiss (RW), que es un cambio de fase asociado a la ruptura de la simetría  $Z_3$  extendida que posee QCD en el caso de potencial químico imaginario [47]. Esta transición se describe en detalle en el Cap. 6, pero vale la pena mencionar aquí que por ejemplo en la Ref. [40], se encuentra que para el correspondiente punto crítico es de primer orden y que ocurre a  $T_{RW} = 185(9)$  MeV. En cualquier caso, estas estrategias se han utilizado para realizar cálculos para valores pequeños del potencial químico y los resultados se encuentran aún en discusión.

Por otra parte, una limitación que se encuentra en los cálculos con técnicas de LQCD, es que en la función de partición aparece el determinante fermiónico que resulta muy difícil de calcular. Por este motivo, muchos cálculos se han llevado a cabo utilizando el llamado *quenched limit*, que consiste en suponer una masa infinita para los quarks lo que hace que los mismos permanezcan estáticos en los sitios de la red. Si bien hoy en día el gran pro-

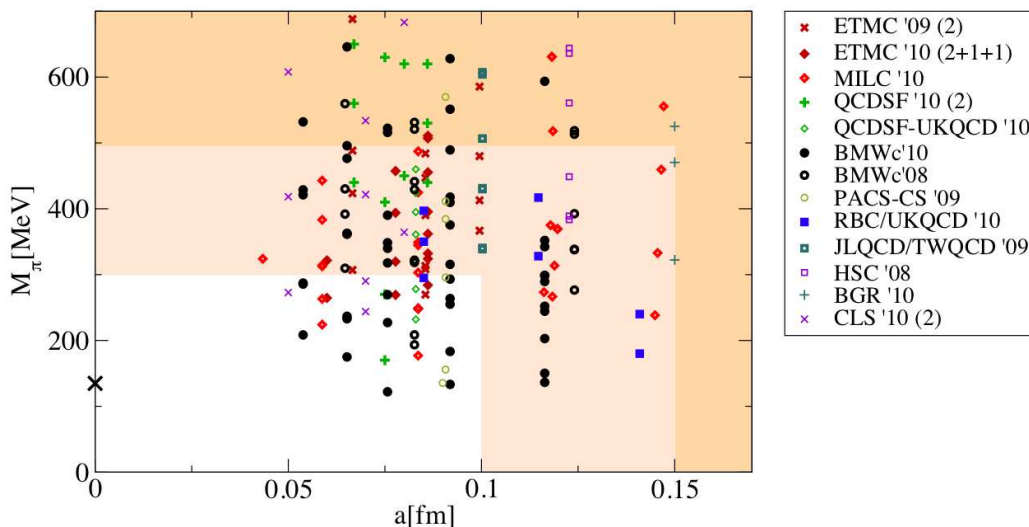


Figura 2.1: Valores de masa de pión  $M_\pi$  y espaciamento de la red  $a$ , para los que han sido realizados cálculos con técnicas de LQCD para 2, 2 + 1 y 2 + 1 + 1 sabores [52].

greso en las facilidades de cálculo ha hecho posible incluir quarks dinámicos, en general los cálculos todavía se realizan con valores de masa por encima de los valores físicos procediendo luego a algún tipo de extrapolación para alcanzar los mismos. Asimismo, en relación a las limitaciones debidas a los altos costos computacionales, debemos mencionar la imposibilidad de hacer cálculos tomando un espaciamento de red pequeño, es decir, en un espacio discretizado pero tendiendo al continuo. En la Fig. (2.1) se esquematizan las regiones a las que hasta ahora se ha accedido para realizar cálculos con técnicas de LQCD en el plano  $M_\pi$ - $a$ , donde  $a$  es el espaciamento de la red. Se puede observar que, si bien se ha avanzado notablemente tanto en el sentido del límite del continuo como hacia el valor de la masa de pión físico, los mismos aún no se han alcanzado. Estudiando la temperatura crítica en función de la masa del pión para valores de masa fuera del punto físico, resultados de LQCD indican que  $T_c$  aumenta linealmente con la masa, y que el parámetro de la pendiente es  $A \lesssim 0,05$  [48, 49, 50, 51].

Considerando, además de  $T$  y  $\mu$ , la masa de los quarks como un parámetro variable es posible construir diagramas de fases teóricos que facilitan el estudio conceptual del comportamiento de la materia de quarks, y pueden compararse con resultados de LQCD. En la Fig. (2.2) se muestra lo que se espera resulte de generalizar el diagrama de fases a potencial químico cero tomando como parámetros libres las masas corrientes de quarks livianos,  $u$ ,

$d$  y strange  $s$ , considerando  $m_u = m_d$ . En este diagrama encontramos para qué valores de masa de quark la transición de restauración de simetría quiral es un crossover o una transición de primer orden. Tanto en el límite de la teoría de gauge pura,  $m_u = m_d = m_s = \infty$ , como en el límite quiral de tres sabores,  $m_u = m_d = m_s = 0$ , se espera que la transición sea de primer orden, mientras que se espera encontrar un crossover en el punto físico.

En los Caps. 5 y 6 de esta tesis investigamos el comportamiento de las transiciones de fase en condiciones en las que los resultados pueden compararse con resultados provistos por cálculos de LQCD. Esto es de gran importancia ya que la consistencia entre ambos resultados permite validar el modelo utilizado, así como también extrapolar los resultados de LQCD. Antes de presentar nuestros resultados, debemos introducir el modelo que hemos utilizado. Comenzamos en el capítulo siguiente presentando el modelo de NJL.

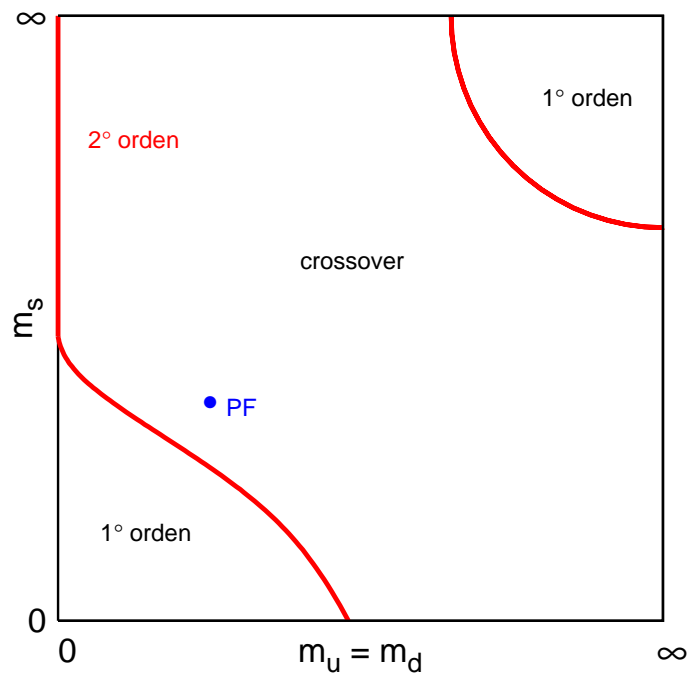


Figura 2.2: *Columbia Plot*. Indica el orden de la transición de fase para distintas masas corrientes para los quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$ . PF corresponde a la posición esperada del punto físico.

## Capítulo 3

# Los modelos de Nambu-Jona-Lasinio y Polyakov Nambu-Jona-Lasinio

Como se mencionó en la introducción, el así llamado modelo de Nambu-Jona-Lasinio [15] (NJL) fue originalmente introducido en 1961 para describir un sistema de nucleones fuertemente interactuantes en el cual los mismos adquieren su masa mediante el mecanismo de ruptura espontánea de simetría. Con el advenimiento de QCD, hacia mediados de los años '70, los grados de libertad fermiónicos del modelo fueron reinterpretados en términos de quarks, y las interacciones locales entre ellos como interacciones efectivas resultantes de los procesos gluónicos.

El modelo de NJL permite incorporar las simetrías globales de QCD, en particular la simetría quiral así como su ruptura espontánea a baja temperatura y densidad. En el contexto de este modelo es posible estudiar en detalle el mecanismo de generación dinámica de la masa de quarks, la formación de condensados y el rol de los piones como bosones de Goldstone [16]. El modelo de NJL también ha sido muy frecuentemente utilizado para estudiar la restauración de la simetría quiral por efecto de la densidad y/o temperatura [16], así como la aparición de fases superconductoras de color [17]. Sin embargo, para dar cuenta del mecanismo de deconfinamiento no basta con un modelo puramente fermiónico sino que es necesario incluir un acoplamiento con el campo de fondo de color asociado al parámetro de orden usualmente utilizado para describir dicho fenómeno, es decir el llamado *loop de Polyakov* (PL) [18, 19]. El modelo así obtenido se conoce bajo el nombre de modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL) [20, 21, 22, 23]. En este capítulo describimos primeramente el modelo de NJL local mostrando cómo aparecen los piones como bosones de Goldstone. Luego exponemos cómo

mo extender el modelo a temperatura y potencial químico finitos e incluir el acoplamiento con el PL.

### 3.1. El modelo de NJL local

En el modelo de NJL más simple se consideran como grados de libertad fermiónicos los quarks livianos  $u$  y  $d$ , mientras que los grados de libertad gluónicos son tenidos en cuenta a través de una interacción quiral efectiva local entre los quarks. En tal caso se puede escribir el lagrangiano como

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - \hat{m})\psi + \mathcal{L}_{int}, \quad (3.1)$$

donde  $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d)$  es la matriz formada por las masas desnudas y

$$\mathcal{L}_{int} = G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] \quad (3.2)$$

es la interacción local de cuatro fermiones. Este término es invariante ante transformaciones de los grupos  $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$  y  $SU(3)_{color}$  y posee simetría CPT.

#### 3.1.1. Aproximación de campo medio

Para estudiar el comportamiento del sistema se suele utilizar primeramente la aproximación de campo medio de Hartree en la cual se reemplazan en la interacción (3.2) los términos  $(\bar{\psi}\Gamma\psi)^2$  por  $2\bar{\psi}\Gamma\psi\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle$ , donde  $\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle$  es el valor de expectación en el vacío y  $\Gamma$  cualquiera de los operadores de dicha interacción. Como el vacío es invariante de Lorentz y tiene buena paridad, el único valor de expectación no nulo posible es  $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ , es decir, el condensado asociado con la densidad escalar  $\bar{\psi}\psi$ . La ecuación de Dirac en la aproximación de Hartree resulta entonces

$$\left[ i\cancel{\partial} - \hat{m} + 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle \right] \psi(x) = 0. \quad (3.3)$$

Vemos por lo tanto que cuando la interacción escalar entre fermiones es lo suficientemente fuerte se genera una masa efectiva

$$M = m + 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle. \quad (3.4)$$

La Ec. (3.4) es conocida como *ecuación del gap*, en analogía con la ecuación que determina el gap de energía en un superconductor. Dicha ecuación se puede representar diagramáticamente como se muestra en la Fig. (3.1).

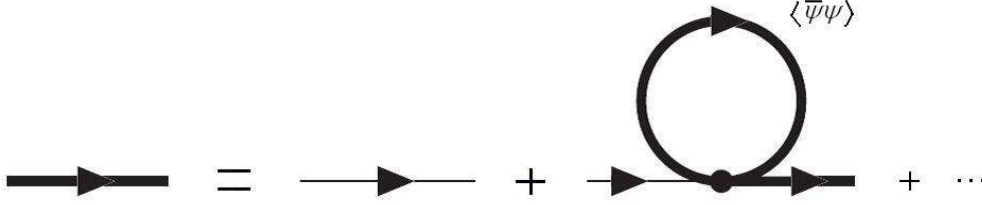


Figura 3.1: Representación diagramática de la *ecuación del gap* (3.4). Las líneas fina y gruesa representan el propagador del quark desnudo y vestido respectivamente. El lazo fermiónico representa al condensado de quarks.

En la aproximación de campo medio, el condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  está dado por

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -i \text{Tr}[S_F(0)] \quad (3.5)$$

donde  $S_F$  es el propagador de Dirac, definido como

$$S_F(x-y) = -i \langle T[\psi(x)\bar{\psi}(y)] \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{\not{p} - M + i\epsilon}. \quad (3.6)$$

En la Ec. (3.5)  $S_F(0)$  refleja el lazo cerrado de la Fig. (3.1), con la línea fermiónica comenzando y terminando en el mismo punto del espacio-tiempo. Como la masa dinámica  $M$  aparece en la integral de  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ , la ecuación del gap es una ecuación autoconsistente.

La integral  $S_F$  es cuadráticamente divergente y requiere, por lo tanto, de un procedimiento de regularización apropiado. El método más sencillo consiste en introducir un *cut-off* para las componentes espaciales de momento  $\Lambda_3$  e integrar sobre la componente temporal  $p_0$  en la Ec. (3.6). De esta forma se obtiene

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^{\Lambda_3} \vec{p}^2 dp \frac{M}{\sqrt{\vec{p}^2 - M^2}}, \quad (3.7)$$

donde  $N_c$  y  $N_f$  son el número de colores y el número de sabores respectivamente. Por lo tanto, el condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  representa la densidad escalar de la energía negativa de Dirac, integrada hasta el momento  $|\vec{p}| \leq \Lambda_3$ . La ecuación del gap describe la interacción de un fermión con la parte “activa” del mar de Dirac. De la ecuación (3.7) se obtiene la ecuación del gap

$$M = m + \frac{2GN_c N_f}{\pi^2} \int_0^{\Lambda_3} \vec{p}^2 dp \frac{M}{\sqrt{\vec{p}^2 - M^2}}. \quad (3.8)$$

Considerando el límite quiral,  $m = 0$ , es sencillo ver que esta ecuación tiene una solución no trivial con  $M \neq 0$  cuando la constante de acoplamiento  $G$

### 3. Los modelos de Nambu-Jona-Lasinio y Polyakov Nambu-Jona-Lasinio

excede un valor crítico  $G_{crit} = \pi^2/\Lambda_3^2$ . Cuando  $G > G_{crit}$  los quarks adquieren una masa dinámica, y, junto con esta generación dinámica de masa, encontramos una reestructuración del vacío: aparece un condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  no nulo. Como la densidad escalar  $\bar{\psi}\psi$  rompe la simetría quiral, el estado fundamental no tiene la simetría  $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$  del lagrangiano. La simetría quiral es espontáneamente rota, y el condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  es útil como parámetro de orden para este cambio de fases.

Se distinguen dos casos de realización de la simetría quiral (ver Fig.(3.2)):

1. La fase Wigner-Weyl, en la cual  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$  y los fermiones no tienen masa. Equivalentemente, la carga axial  $Q_5 = \int d^3x A_0(x)$  aniquila el vacío:  $Q_5 | 0 \rangle = 0$ . En el modelo NJL este es el caso para  $G < G_{crit}$ .
2. La fase Nambu-Goldstone en la cual  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$  y los fermiones tienen masa. En esta fase existe un bosón de Nambu-Goldstone no masivo. La carga axial no aniquila el vacío:  $Q_5 | 0 \rangle \neq 0$ . En el modelo NJL esto sucede cuando  $G > G_{crit}$ .

Por otro lado, para el caso de  $m \neq 0$ , a pesar de que la masa dinámica nunca es estrictamente cero, se obtiene un comportamiento similar al descrito para  $m = 0$ , resultando una curva asintótica (curva de trazos de la Fig.(3.2)) a la respectiva al límite quiral, tanto para el rango de  $G$  pequeños como también para  $G \gg 1$ .

#### 3.1.2. Bosón de Goldstone pseudoescalar

La ruptura espontánea de simetría global implica la existencia de un modo de frecuencia cero, llamado bosón de Nambu-Goldstone. En este caso se trata de un modo fermión-antifermión pseudoescalar neutro ( $J^\pi = 0^-$ ), identificado con el pión. Su espín y paridad reflejan la simetría axial  $U(1)_A$  rota.

Para ver cómo emerge del modelo el pión de Goldstone sin masa, construimos la matriz  $T$ , que surge de resolver la ecuación de Bethe-Salpeter (ecuación de dos cuerpos) en el canal fermión-antifermión pseudoescalar para un dado cuadrimomento cuadrático  $q^2$  del mesón:

$$T_\pi(q^2) = K_\pi + K_\pi J_\pi(q^2) K_\pi + \dots = \frac{K_\pi}{1 - K_\pi J_\pi(q^2)}. \quad (3.9)$$

En la Fig. (3.3) se ilustra esta ecuación autoconsistente.

La interacción en este canal está dada por el término  $G(\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2$  del lagrangiano (3.2). Entonces,  $K_\pi = 2G$  es el núcleo de la interacción, y  $J_\pi$  es la

### 3.1. El modelo de NJL local

---

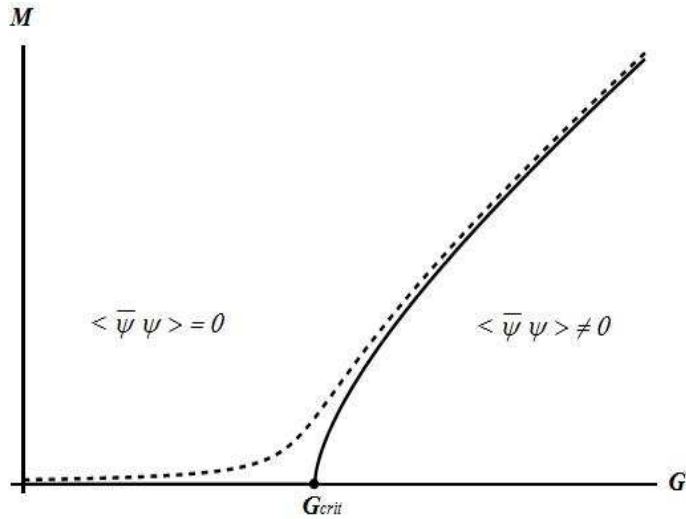


Figura 3.2: Representación de las masas dinámicas en función de la constante de acoplamiento. Se observan las dos realizaciones de la simetría quiral: á la Wigner-Weyl para  $G < G_{crit}$  y á la Nambu-Golstone para  $G > G_{crit}$ . La línea de trazos representa el caso físico, mientras que la línea sólida corresponde al límite quiral, con  $m = 0$ .



Figura 3.3: Representación esquemática de la ecuación de Bethe-Salpeter para la matriz quark-antiquark  $T$ . Los propagadores de mesones aparecen como bandas sombreadas, las líneas sólidas corresponden a los propagadores de quarks vestidos en la aproximación de Hartree (ver Fig. (3.1)).

integral del lazo de interacción dada por

$$J_\pi(q^2) = i \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ i\gamma_5 \frac{1}{\not{p} + \frac{\not{q}}{2} - M + i\epsilon} i\gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \frac{\not{q}}{2} - M + i\epsilon} \right] \quad (3.10)$$

El proceso de regularización de esta integral es idéntico al usado en la ecuación del gap (3.4).

La masa  $m_\pi$  del pión queda determinada por los polos de la matriz  $T$ , es decir, por la condición

$$1 - 2GJ_\pi|_{q^2=m_\pi^2} = 0. \quad (3.11)$$

A partir de la ecuación del gap (3.4) se puede ver que en el límite quiral una solución de esta ecuación es  $m_\pi = 0$ . Esto significa que el pión es un pseudo-bosón de Goldstone, un modo de masa nula como consecuencia de una ruptura espontánea de simetría. Para ver esto notamos que fijando  $q^2 = 0$  en la Ec. (3.10) y utilizando que  $\text{Tr}_D[\gamma_5(\not{p} + M)\gamma_5(\not{p} + M)] = \text{Tr}(M^2 - \not{p}\not{p}) = -4(p^2 - M^2)$ , se puede obtener que

$$J_\pi|_{q^2=0} = 4N_f N_c i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{M} \text{Tr} S_F(0). \quad (3.12)$$

Comparando con las ecuaciones (3.4) y (3.5) se observa que

$$K_\pi J_\pi|_{q^2=0} = -\frac{2G}{m} \langle \bar{\psi}\psi \rangle = 1, \quad (3.13)$$

por lo que se verifica la validez del teorema de Nambu-Goldstone.

El modelo de NJL satisface diversos teoremas válidos en QCD para el límite de masa de quarks pequeña. Por ejemplo, introduciendo un término de ruptura explícita de simetría quiral,  $\delta\mathcal{L} = -m\bar{\psi}\psi$ , donde  $m$  es una masa fermiónica desnuda no nula, es posible encontrar la relación de Gell-Mann-Oakes-Renner:

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -m \langle \bar{\psi}\psi \rangle. \quad (3.14)$$

donde  $f_\pi$  es la constante de decaimiento del pión, definida por el elemento de matriz

$$\langle 0 | A_\mu(0) | \pi(q) \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi(0) | \pi(q) \rangle = 2if_\pi q_\mu \quad (3.15)$$

el cual describe el decaimiento del pión vía la corriente axial  $A_\mu$ . La Ec. (3.14) es de gran importancia puesto que conecta los parámetros de la ruptura explícita y espontánea de la simetría quiral con las constantes de estructura correspondientes del pión: el condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  en términos de la constante de

decaimiento del pión  $f_\pi$ . La masa fermiónica desnuda finita  $m$  eleva la masa del pión  $m_\pi$  desde el valor nulo que tenía en el límite quiral, de tal manera que  $m_\pi$  es proporcional a  $\sqrt{m}$ . Se puede notar que el teorema de Goldstone se verifica nuevamente a medida que  $m \rightarrow 0$ .

Como ya ha sido mencionado el modelo de NJL ha sido muy frecuentemente utilizado para estudiar las propiedades de los hadrones (incluyendo aquellos que contiene quarks extraños), estudiar la restauración de la simetría quiral por efecto de la densidad y/o temperatura, así como para la aparición de fases superconductoras de color, etc. [16, 17]. Sin embargo, para dar cuenta del mecanismo de deconfinamiento no basta con un modelo puramente fermiónico sino que es necesario incluir un acoplamiento con el llamado *loop de Polyakov* (PL). Las características principales del modelo resultante, llamado usualmente modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL), son discutidas en la sección siguiente.

## 3.2. Modelo de PNJL

Teniendo en cuenta lo mencionado al final de la sección anterior, para poder investigar sobre el comportamiento de la materia fuertemente interactuante a temperatura y densidad finitas incorporando una descripción del deconfinamiento debemos extender lo detallado en ella de manera de: i) incluir estas cantidades en el formalismo, ii) incorporar el acoplamiento al PL. En cuanto al punto i), como se ha mencionado en el Cap. 2, la acción a temperatura  $T$  y potencial químico  $\mu$  finitos se puede obtener utilizando el formalismo de Matsubara de tiempo imaginario, lo cual implica:

- Hacer para la componente cero del impulso el reemplazo

$$p_0 \rightarrow i\omega_n + \mu, \quad (3.16)$$

donde  $\omega_n$  son las frecuencias de Matsubara que correspondan, según se trate de bosones o fermiones, como se indica en la Ec. (2.26);

- Modificar la integración sobre el espacio de momentos cambiando la integral sobre dicha componente por sumas sobre frecuencias según

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \rightarrow iT \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \quad (3.17)$$

En cuanto al punto ii) se puede hacer uso de algunas características conocidas del comportamiento del PL en función de la temperatura para construir un modelo efectivo para una teoría de gauge pura, que luego se acople

### 3. Los modelos de Nambu-Jona-Lasinio y Polyakov Nambu-Jona-Lasinio

---

al modelo de NJL. Dentro de estas características podemos mencionar, como hemos visto en el capítulo anterior, que  $\langle \phi^* \rangle = \langle \phi \rangle = 0$  implica confinamiento. Además, existen cálculos de LQCD para el valor del PL como función de la temperatura que indican que la transición de deconfinamiento en ausencia de quarks dinámicos ocurre a una temperatura  $T_0 = 270$  MeV y que es una transición de primer orden [53]. Por lo tanto, es posible construir un potencial efectivo para  $\Phi$ , el valor de expectación del PL en la aproximación de campo medio, de manera tal que el valor del mismo obtenido por minimización de dicho potencial vaya desplazándose de acuerdo a las estimaciones de LQCD, esto es: en  $\Phi = 0$  si  $T < T_0$ , y en  $T = T_0$  pasar a tener un máximo local en cero y un mínimo en un valor de  $\Phi > 0$  como señal de la transición de fase. Esto se corresponde con la ruptura de simetría  $Z_3$  que se describió en el capítulo anterior. Este mínimo debe acercarse a  $\Phi = 1$  cuando la temperatura continúa aumentando por encima de  $T_0$ .

De los potenciales para describir la termodinámica del PL que pueden construirse con estas características en esta tesis utilizamos dos. El primero, basado en el ansatz de Ginzburg-Landau [23] que tiene la forma polinómica:

$$\frac{\mathcal{U}_{Poly}(\Phi, \Phi^*, T)}{T^4} = -\frac{b_2(T)}{2}\Phi\Phi^* - \frac{b_3}{3}(\Phi^3 + \Phi^{*3}) + \frac{b_4}{4}(\Phi\Phi^*)^2 \quad (3.18)$$

donde

$$b_2(T) = a_0 + a_1\frac{T_0}{T} + a_2\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 + a_3\left(\frac{T_0}{T}\right)^3. \quad (3.19)$$

Los parámetros del potencial están ajustados de manera tal que se puede reproducir la ecuación de estado para la teoría de gauge pura y el valor de expectación del *loop* de Polyakov.

$$\begin{aligned} a_0 &= 6,75, & a_1 &= -1,95, & a_2 &= 2,625, \\ a_3 &= -7,44, & b_3 &= 0,75, & b_4 &= 7,5. \end{aligned} \quad (3.20)$$

La segunda forma alternativa, que está basada en la forma logarítmica de la medida de Haar de integración asociada con el grupo  $SU(3)$  de color [54], es

$$\frac{\mathcal{U}_{Log}(\Phi, \Phi^*, T)}{T^4} = -\frac{1}{2}a(T)\Phi\Phi^* + b(T)\ln(1 - 6\Phi\Phi^* - 3(\Phi\Phi^*)^2 + 4(\Phi^3 + \Phi^{*3})) \quad (3.21)$$

con los coeficientes parametrizados según

$$a(T) = a_o + a_1\left(\frac{T_0}{T}\right) + a_2\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \quad \text{y} \quad b(T) = b_3\left(\frac{T_0}{T}\right)^3 \quad (3.22)$$

Ajustando una vez más el valor de las constantes a resultados de la teoría de gauge pura en la red se obtiene

$$a_0 = 3,51, \quad a_1 = -2,47, \quad a_2 = 15,2, \quad b_3 = -1,75. \quad (3.23)$$

En relación al parámetro  $T_0$  que fija la escala para el potencial del PL, ha sido argumentado [55] que su valor debe ser modificado en presencia de quarks dinámicos según  $T_0 = 208$  MeV para  $N_f = 2$  y  $T_0 = 180$  MeV para  $N_f = 3$ . En los cálculos llevados a cabo en esta tesis se analiza el efecto de este cambio sobre las distintas magnitudes de interés para el caso en el que  $\mu = 0$ .

En el panel superior de la Fig. (3.4) se muestra la sección correspondiente a  $\Phi = \Phi^*$  de estos dos potenciales para una temperatura  $T = 100$  MeV, para la que todavía la transición de deconfinamiento no ha ocurrido: la simetría  $Z(3)$  no está rota, y el único mínimo del potencial se encuentra en  $\Phi = 0$ . Una vez superada la transición de fase, a medida que la temperatura aumenta el mínimo del potencial se va desplazando a valores finitos de  $\Phi$ , y  $\Phi = 0$  se convierte en un máximo local. En el panel inferior de la Fig. (3.4) se puede ver este comportamiento. En la Fig. (3.5) se muestra el comportamiento del PL en función de la temperatura para ambos potenciales, junto con los resultados de LQCD a los que se ajustan los parámetros (3.22) y (3.23).

Hasta aquí tenemos el modelo de NJL para los quarks por un lado y, por otra parte un potencial para el PL que involucra al sector gluónico. El acoplamiento entre ellos se puede llevar a cabo utilizando la derivada covariante. Esto es, en la Ec. (3.1) reemplazar

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - iA_\mu \quad (3.24)$$

con  $A_\mu = g G_a^\mu \lambda^a / 2$ , donde  $G_a^\mu$  son los campos de gauge de color de  $SU(3)$ .

Por simplicidad, en general no se toma en cuenta la dependencia espacial del PL, es decir que se asume que los quarks se mueven en un fondo constante de un campo de gauge de color,  $A_4 = iA_0$ . Además, trabajando en el llamado *gauge de Polyakov*, la matriz  $A_4$  tiene representación diagonal

$$A_4 = \phi_3 \lambda_3 + \phi_8 \lambda_8 \quad (3.25)$$

de manera que hay sólo dos variables independientes:  $\phi_3$  y  $\phi_8$ .

Entonces, la traza del PL,  $\Phi = \frac{1}{3} \text{Tr} \exp(\frac{i}{T}(\phi_3 \lambda_3 + \phi_8 \lambda_8))$ , que puede tomarse como parámetro de orden para el confinamiento, se puede escribir a nivel campo medio como

$$\Phi = \frac{1}{3} \left[ \exp\left(-\frac{2i}{\sqrt{3}} \frac{\phi_8}{T}\right) + 2 \exp\left(\frac{i}{\sqrt{3}} \frac{\phi_8}{T}\right) \cos(\phi_3/T) \right]. \quad (3.26)$$

El modelo de PNJL ha sido ampliamente utilizado para estudiar el diagrama de fases de materia de quarks [23, 54, 56, 57, 58], así como también para describir propiedades hadrónicas [59, 60, 61]. Se ha empleado además en el estudio de estrellas compactas [62]. Sin embargo, los modelos de NJL

### 3. Los modelos de Nambu-Jona-Lasinio y Polyakov Nambu-Jona-Lasinio

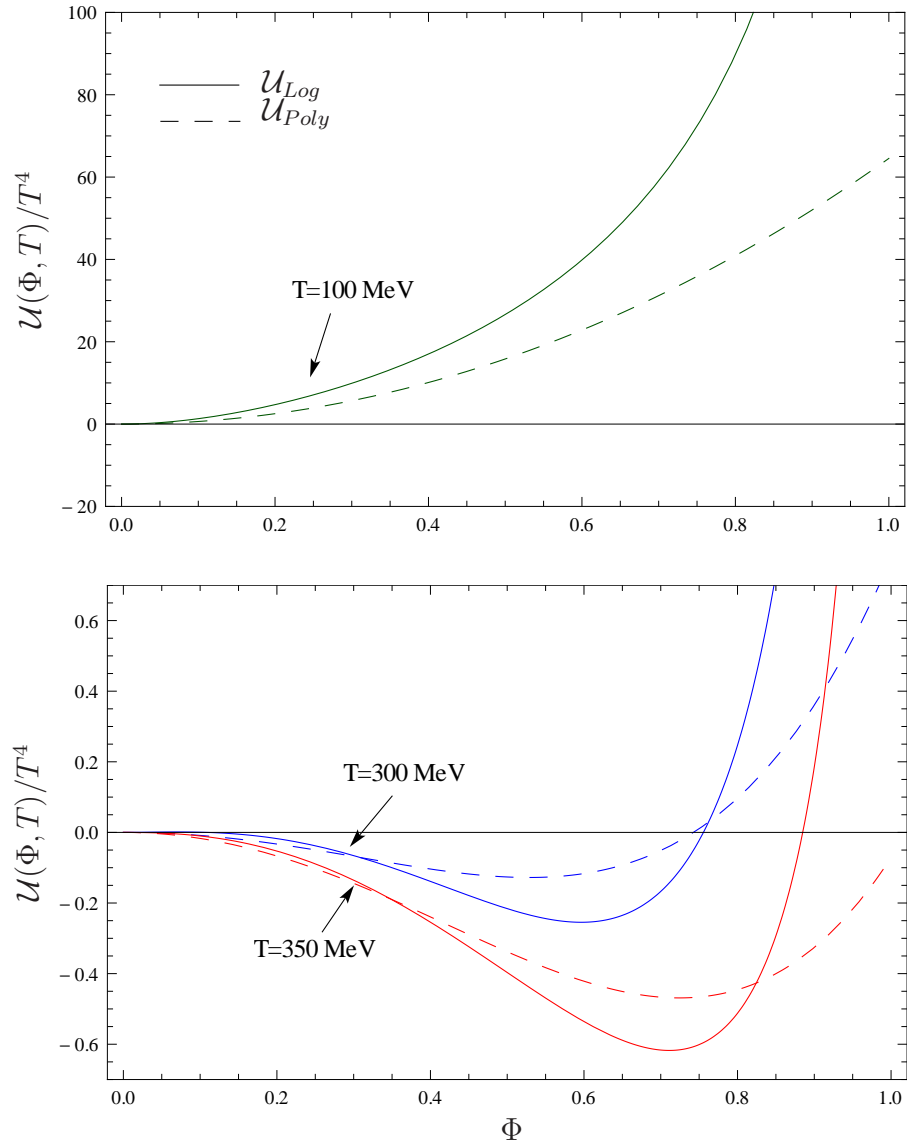


Figura 3.4: Potencial termodinámico del *loop* de Polyakov para  $T = 100$  MeV (arriba) y para  $T = 300$  y  $350$  MeV (abajo). La línea sólida representa al potencial logarítmico y la línea de trazos al potencial polinómico. Se observa cómo ambos potenciales pasan de tener un mínimo en  $\Phi = 0$ , a tener allí un máximo relativo y un mínimo en algún valor de  $\Phi > 0$  que se desplaza hacia la derecha al aumentar la temperatura.

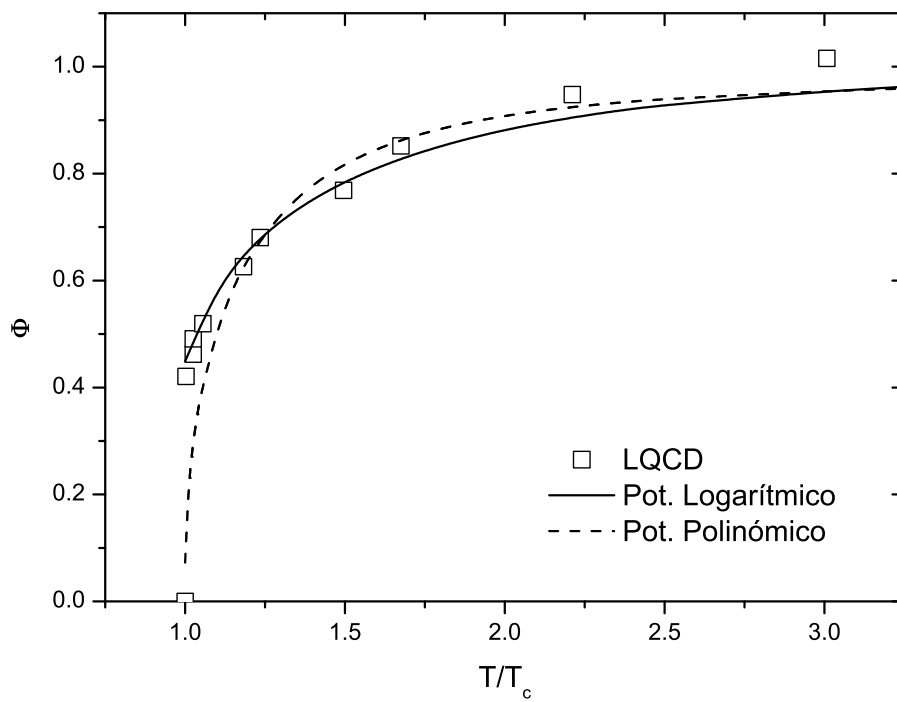


Figura 3.5: *Loop* de Polyakov en función de la temperatura para los potenciales polinómico y logarítmico. Se muestran con puntos cuadrados resultados de LQCD tomados de la Ref. [53].

### 3. Los modelos de Nambu-Jona-Lasinio y Polyakov Nambu-Jona-Lasinio

y PNJL presentan ciertas limitaciones. Podemos mencionar por ejemplo que aparecen cantidades divergentes que deben ser regularizadas de alguna manera. Para resolver este inconveniente una posibilidad que ha sido sugerida es reemplazar el término de interacción por una interacción no local y separable, como se describe en el próximo capítulo.

# Capítulo 4

## Extensiones no-locales del modelo de NJL

En el Cap. 3 hemos visto un modelo para la descripción de un sistema de quarks interactuantes, con interacciones invariantes quirales y locales. El carácter local de las interacciones es un aspecto ventajoso dado que simplifica enormemente los cálculos. Sin embargo da lugar a ciertas inconsistencias y ambigüedades, además de ser ciertamente poco realista.

En este capítulo introducimos una generalización del modelo de NJL que representa un paso hacia una descripción más realista de las interacciones entre quarks. Explicamos asimismo el procedimiento de bosonización, mediante el cual pasamos de describir el sistema en términos de quarks a hacerlo en términos de campos mesónicos. Mostramos cómo obtener los valores de expectación en el vacío de los campos bosónicos a nivel de campo medio, y cómo encontrar, incluyendo las fluctuaciones mesónicas, propiedades como masas mesónicas, constantes de acoplamiento, etc. Finalmente, y luego de detallar cómo parametrizar el modelo introducido, presentamos resultados numéricos para estas propiedades en el caso de temperatura y densidad cero.

### 4.1. Núcleos de interacción no-locales

La forma más general para la acción efectiva en el caso de dos sabores de quarks está dada por la acción euclídea

$$S_E = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p) [\not{p} - \hat{m}] \psi(p) + S_{int}, \quad (4.1)$$

con el término de interacción

$$S_{int} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_2}{(2\pi)^4} K_{12,1'2'}(P, p; P', p') \times \bar{\psi}_1(p_1) \psi_2(p_2) \bar{\psi}_{2'}(p'_2) \psi_{1'}(p'_1). \quad (4.2)$$

Aquí hemos usado la notación  $P = (p_1 + p_2)/2$ ,  $p = p_1 - p_2$ . Los índices 1, 2, 1' y 2' corren sobre color, sabor y espacio de Dirac. Por supuesto el núcleo de la interacción  $K_{12,1'2'}(P, p; P', p')$  debe respetar la conservación total de momentos así como las simetrías básicas de QCD detalladas en el Cap. 2. Estas restricciones no alcanzan sin embargo para especificar completamente su forma explícita. Para ello se debe recurrir a modelos fenomenológicos que den lugar a ecuaciones relativamente sencillas de tratar. Una posibilidad frecuentemente utilizada en la literatura (ver p.ej. Ref.[63]) es suponer que la interacción corresponde al intercambio de un gluón efectivo entre corrientes vectoriales con color de quarks. Es decir

$$S_{int} = - \int d^4 x d^4 y j_\mu^a(x) G_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j_\nu^b(y) \quad (4.3)$$

donde

$$j_\mu^a(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\lambda_a}{2} \psi(x). \quad (4.4)$$

Suponiendo que las componentes diagonales del propagador efectivo de gluones son las dominantes (es decir,  $G_{\mu\nu}^{ab}(x-y) \sim \delta_{\mu\nu} \delta^{ab} G(x-y)$ ) y utilizando las transformaciones de Fierz [17, 24] se obtiene que esta interacción da lugar a un núcleo de la forma

$$K_{12,1'2'}(P, p; P', p') = -\delta_{pp'} G(P - P') \sum_\alpha c_\alpha \Lambda_{12}^\alpha \Lambda_{2'1'}^\alpha. \quad (4.5)$$

En esta ecuación  $\Lambda^\alpha$  representa productos de matrices de color, sabor y Dirac, y  $c_\alpha$  son los coeficientes que surgen de las transformaciones de Fierz. En general, en los modelos más simples sólo se retienen las componentes singletes de color relevantes para el mecanismo de ruptura de simetría. Es decir

$$\sum_\alpha c_\alpha \Lambda_{12}^\alpha \Lambda_{2'1'}^\alpha \rightarrow \sum_\alpha \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{2'1'}^\alpha, \quad (4.6)$$

donde  $\Gamma_\alpha = (\mathbb{1}, i\gamma_5 \tau_a)$  con  $a = 1, 2, 3$ . En cuanto a lo que hace a la dependencia en los momentos, la dada por la función  $G(P - P')$  lleva a ecuaciones del gap tipo ecuaciones integrales no lineales que son complicadas de resolver. Por ese motivo, es conveniente introducir una simplificación adicional que consiste en asumir que la interacción es separable, es decir

$$G(P - P') \rightarrow G g(P) g(P') \quad (4.7)$$

#### 4.1. Núcleos de interacción no-locales

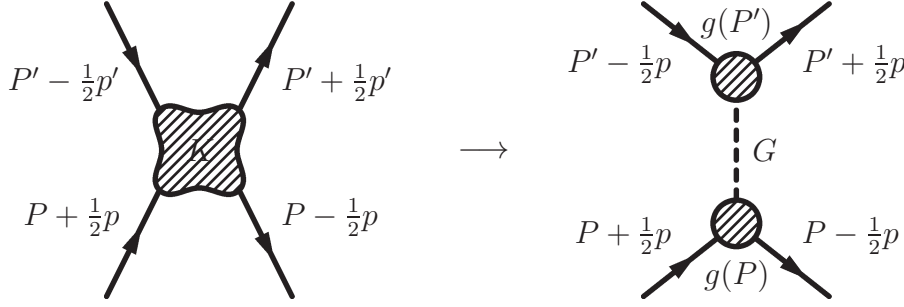


Figura 4.1: Representación diagramática de la Ec. (4.8). En el diagrama de la izquierda  $K$  es un núcleo de interacción de cuatro puntos que depende de todos los momentos, mientras que en la derecha aparece en cada vértice el factor de forma  $g(p)$ , que depende de un solo momento.

donde  $g(0) = 1$ . Teniendo en cuenta las aproximaciones hasta aquí mencionadas una forma adecuada para el núcleo de interacción es

$$K_{12,1'2'}^{ch}(P, p; P', p') = -\delta_{pp'} G g(P) g(P') \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{2'1'}^\alpha, \quad (4.8)$$

donde la suma sobre  $\alpha = 0, 1, 2, 3$  está sobreentendida. El reemplazo (4.7) está representado en la Fig. (4.1). En la función  $g(P)$  se encuentra la información acerca de la no-localidad de la interacción, y es por esto que en general recibe el nombre de regulador o factor de forma. Notemos aquí que desde el punto de vista del núcleo de interacción el modelo de NJL corresponde a utilizar la Ec. (4.8) con  $g(p) = 1$ .

En este punto es importante notar que la forma más general del propagador fermiónico es

$$S(p) = \frac{Z(p)}{-\not{p} + M(p)} \quad (4.9)$$

donde  $M(p)$  es la masa efectiva y  $Z(p)$  la llamada *renormalización de función de onda* (WFR por las iniciales en inglés) de los quarks. Si bien el núcleo dado en la Ec. (4.8) puede dar lugar a una masa efectiva no trivial el mismo implica  $Z(p) = 1$ , lo cual no está de acuerdo, por ejemplo, con los resultados encontrados en cálculos de QCD en la red que indican que a momento cero las correcciones de la WFR pueden ser hasta del orden del 30% [64, 65, 66]. Para dar cuenta de estas correcciones es necesario introducir una interacción entre quarks adicional. Una forma conveniente es [67]

$$K_{12,1'2'}^P(P, p; P', p') = G_P \delta_{pp'} f(P) f(P') P^\mu P'^\nu \gamma_{12}^\mu \gamma_{2'1'}^\nu. \quad (4.10)$$

Por lo tanto, en lo que sigue utilizaremos la suma de los núcleos dados en las Ecs. (4.8) y (4.10) para modelar las interacciones entre quarks generadas por

QCD en el régimen no perturbativo. Antes de terminar esta sección conviene aclarar que la forma dada en (4.10) no es la única que da lugar a una función  $Z(p)$  no trivial. Una forma alternativa ha sido introducida en [68], la misma es

$$K_{12,1'2'}^P(P, p; P', p') = G \delta_{pp'} f(P) f(P') P \cdot P'. \quad (4.11)$$

Es posible ver que dentro de las aproximaciones usualmente utilizadas para tratar este tipo de modelos efectivos (ver secciones siguientes) este tipo de interacción alternativa conduce a resultados muy similares.

## 4.2. Modelo quiral de quarks no-local

De aquí en adelante consideramos un modelo de quarks quiral no-local para dos sabores, con acoplamiento entre los quarks dados por la suma de los núcleos (4.8) y (4.10). Expresada en términos de campos definidos en espacio de coordenadas, la acción efectiva euclídea correspondiente está dada por

$$S_E = \int d^4x \left\{ \bar{\psi}(x) (-i\gamma_\mu \partial_\mu + \hat{m}) - \frac{G_S}{2} [j_a(x) j_a(x) + j_P(x) j_P(x)] \right\}, \quad (4.12)$$

donde  $\psi \equiv (u, d)^T$  es el doblete de fermiones, y  $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d)$  es la matriz de masas corrientes. Así como en el caso local, consideramos simetría de isoespín,  $m_u = m_d = m$ . El término de energía cinética en la Ec. (4.12) incluye el operador  $\gamma_\mu \partial_\mu$  que en espacio Euclídeo está definido como  $\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + \gamma_4 \partial / \partial \tau$ , con  $\gamma_4 = i\gamma_0$ . En el término de interacción aparecen las corrientes no-locales  $j_a(x)$  y  $j_P(x)$  que están dadas por

$$\begin{aligned} j_a(x) &= \int d^4z \mathcal{G}(z) \bar{\psi} \left( x + \frac{z}{2} \right) \Gamma_a \psi \left( x - \frac{z}{2} \right) \\ j_P(x) &= \int d^4z \mathcal{F}(z) \bar{\psi} \left( x + \frac{z}{2} \right) \frac{i \overleftrightarrow{\not{\partial}}}{2\kappa_p} \psi \left( x - \frac{z}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde  $\Gamma_a = (\mathbf{1}, i\gamma_5 \vec{\tau})$ , y  $u(x') \overleftrightarrow{\partial} v(x) = u(x') \partial_x v(x) - \partial_x u(x') v(x)$ . Las funciones  $\mathcal{G}(z)$  y  $\mathcal{F}(z)$  en (4.13) son factores de forma covariantes no-locales que caracterizan las interacciones correspondientes. Notemos que las cuatro corrientes  $j_a(x)$  requieren el mismo factor  $\mathcal{G}(z)$  para garantizar invariancia quiral, mientras que el acoplamiento  $j_P(x) j_P(x)$  es invariante ante transformaciones quirales. La componente escalar-isoescalar de  $j_a(x)$  genera en el propagador una masa de quark que depende de su impulso, mientras que la corriente  $j_P(x)$  es la responsable de la renormalización de función de onda que depende del impulso. Por conveniencia definimos una constante de

acoplamiento común  $G_S$  para ambos términos de interacción, notando que la fuerza relativa entre estos acoplamientos está regulada por el parámetro dimensional  $\kappa_p$  introducido en (4.13).

Conviene en este punto realizar una bosonización de la teoría lo cual nos permite tratar directamente con los grados de libertad físicos de bajas energías, es decir los mesones, en lugar de con grados de libertad de quarks. Para esto, tomamos como punto de partida la funcional generatriz

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp[-S_E], \quad (4.14)$$

donde  $S_E$  está dada por la Ec. (4.12). Es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[ - \int d^4x \bar{\psi}(x) (-i \not{\partial} + m) \psi(x) \right] \times \\ & \exp \left[ \frac{G_S}{2} \int d^4x [j_a(x)j_a(x) + j_P(x)j_P(x)] \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Si consideramos la relación

$$f[j(x)] = \int \mathcal{D}S \delta[\theta(x) - j(x)] f(S(x)), \quad (4.16)$$

donde hemos introducido el campo auxiliar  $\theta(x)$ , y hacemos uso de la representación de la función  $\delta$  dada por

$$\delta[\theta(x) - j(x)] = N \int \mathcal{D}M \exp \left[ \int d^4x M(x)[\theta(x) - j(x)] \right], \quad (4.17)$$

donde  $M(x)$  es un campo bosónico y  $N$  es un factor de normalización, vemos que

$$f[j(x)] = N \int \mathcal{D}\theta\mathcal{D}M \exp \left[ \int d^4x M(x) [\theta(x) - j(x)] \right] f(\theta(x)). \quad (4.18)$$

Utilizando la relación (4.18) es posible escribir las exponenciales de los productos corriente-corriente que aparecen en la segunda línea de la Ec. (4.15) de una manera más conveniente. Obtenemos así

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \int \mathcal{D}\sigma_1\mathcal{D}\pi_k\mathcal{D}\sigma_2 \times \\ & \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[ - \int d^4x \bar{\psi}(x) \left[ -i \not{\partial} + m + \sigma_1(x)j_0(x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \pi_k(x)j_k(x) + \sigma_2(x)j_P(x) \right] \psi(x) \right] \times \\ & \int \mathcal{D}S_1\mathcal{D}\mathcal{P}_k\mathcal{D}S_2 \exp \left[ \int d^4x \left[ (\sigma_1(x)S_1(x) + \pi_k(x)P_k(x) + \sigma_2(x)S_2(x)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{G_S}{2}(S_1^2(x) + \mathcal{P}_k(x)\mathcal{P}_k(x) + S_2^2(x)) \right] \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde  $S_1$ ,  $P_k$  y  $S_2$  son los campos auxiliares asociados con las corrientes  $j_0$ ,  $j_k$  y  $j_P$  respectivamente y  $\sigma_1$ ,  $\pi_k$  y  $\sigma_2$  los correspondientes campos bosónicos. Notemos asimismo que no hemos incluido los factores de normalización ya que los mismos no son relevantes para los cálculos posteriores. Utilizando la forma explícita de las corrientes dada en la Ec. (4.13) junto con el formalismo convencional que se puede encontrar, por ejemplo en [69], la integral sobre los campos fermiónicos se puede realizar en forma sencilla. Por otro lado, la integral sobre los campos auxiliares que aparece en la tercera línea de la Ec. (4.19) se puede hacer en forma inmediata completando cuadrados. Transformando por conveniencia todos los campos al espacio de momentos se obtiene finalmente

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\sigma_1 \mathcal{D}\sigma_2 \mathcal{D}\vec{\pi} \exp[-S_E^{bos}], \quad (4.20)$$

donde

$$-S_E^{bos} = -\ln \det A + \frac{1}{2G_S} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [\sigma_1(p)\sigma_1(-p) + \vec{\pi}(p)\vec{\pi}(-p) + \sigma_2(p)\sigma_2(-p)]. \quad (4.21)$$

y el operador  $A$  es, en espacio de momentos

$$\begin{aligned} A(p, p') &= -(\not{p} + m_c)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') \\ &+ g \left( \frac{p + p'}{2} \right) [\sigma_1(p' - p) + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(p' - p)] \\ &+ f \left( \frac{p + p'}{2} \right) \frac{\not{p} + \not{p}'}{2\kappa_p} \sigma_2(p' - p). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Debido a la invariancia de Lorentz las transformadas de Fourier de  $\mathcal{G}(z)$  y  $\mathcal{F}(z)$ ,  $g(p)$  y  $f(p)$  respectivamente, pueden ser funciones solo de  $p^2$ . Asumimos que los campos  $\sigma_{1,2}$  tienen valores medios no triviales, mientras que el valor medio de los campos pseudoescalares  $\pi_i$  son cero, debido a que el vacío tiene buena paridad. De esta manera podemos escribir

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= \bar{\sigma}_1 + \delta\sigma_1(x) \\ \sigma_2(x) &= \kappa_p \bar{\sigma}_2 + \delta\sigma_2(x) \\ \vec{\pi} &= \delta\vec{\pi}(x). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Reemplazando en la acción bosonizada, y expandiendo en potencias de las fluctuaciones mesónicas, obtenemos

$$S_E^{bos} = S_E^{MFA} + S_E^{quad} + \dots \quad (4.24)$$

## 4.2. Modelo quiral de quarks no-local

---

La acción por unidad de volumen a nivel campo medio es

$$\frac{S_E^{MFA}}{V^{(4)}} = -2N_c \int \frac{d^4 p}{(4\pi)^4} \text{Tr}_D \ln[\mathcal{D}_0^{-1}(p)] + \frac{\bar{\sigma}_1^2}{2G_S} + \frac{\kappa_p^2 \bar{\sigma}_2^2}{2G_S}, \quad (4.25)$$

donde el propagador de quark en la aproximación de campo medio  $\mathcal{D}_0(p)$  está dado por

$$\mathcal{D}_0(p) = \frac{Z(p)}{-\not{p} + M(p)} \quad (4.26)$$

con

$$\begin{aligned} Z(p) &= (1 - \bar{\sigma}_2 f(p))^{-1} \\ M(p) &= Z(p)(m_c + \bar{\sigma}_1 g(p)). \end{aligned} \quad (4.27)$$

El término cuadrático se puede escribir como

$$S_E^{quad} = \frac{1}{2} \sum_M \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G_M(p^2) \delta M(p) \delta M(-p), \quad M = \sigma_1, \sigma_2, \pi \quad (4.28)$$

donde  $\sigma$  y  $\sigma'$  están relacionados con  $\sigma_{1,2}$  por

$$\delta\sigma = \cos\theta \delta\sigma_1 - \sin\theta \delta\sigma_2 \quad (4.29)$$

$$\delta\sigma' = \sin\theta \delta\sigma_1 + \cos\theta \delta\sigma_2 \quad (4.30)$$

y el ángulo de mezcla  $\theta$  está definido de manera que no exista mezcla entre  $\sigma$  y  $\sigma'$  a nivel cuadrático. Las funciones  $G_M(p^2)$  introducidas en la Ec. (4.28) son

$$G_\pi(p^2) = \frac{1}{G_S} - 8N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} g^2(q) \frac{Z(q^+)Z(q^-)}{D(q^+)D(q^-)} \times [q^+ \cdot q^- + M(q^+)M(q^-)], \quad (4.31)$$

con  $q^\pm = q \pm p/2$  y  $D(q) = q^2 + M(q^2)$ , y

$$G_{\sigma,\sigma'}(p^2) = \frac{G_{\sigma_1\sigma_1}(p^2) + G_{\sigma_2\sigma_2}(p^2)}{2} \mp \sqrt{[G_{\sigma_1\sigma_2}(p^2)]^2 + \left[ \frac{G_{\sigma_1\sigma_1}(p^2) - G_{\sigma_2\sigma_2}(p^2)}{2} \right]^2} \quad (4.32)$$

donde

$$\begin{aligned}
 G_{\sigma_1\sigma_1}(p^2) &= \frac{1}{G_S} - 8N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2(q) \frac{Z(q^+)Z(q^-)}{D(q^+)D(q^-)} [q^+ \cdot q^- - M(q^+)M(q^-)] \\
 G_{\sigma_2\sigma_2}(p^2) &= \frac{1}{G_S} + \frac{8N_c}{\kappa_p^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} q^2 f^2(q) \frac{Z(q^+)Z(q^-)}{D(q^+)D(q^-)} \\
 &\quad \times \left[ q^+ \cdot q^- - M(q^+)M(q^-) + \frac{(q^+)^2(q^-)^2 - (q^+ \cdot q^-)^2}{2q^2} \right] \\
 G_{\sigma_1\sigma_2}(p^2) &= -\frac{8N_c}{\kappa_p} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g(q)f(q) \frac{Z(q^+)Z(q^-)}{D(q^+)D(q^-)} \\
 &\quad \times q \cdot [q^- M(q^+) + q^+ M(q^-)].
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

#### 4.2.1. Aproximación de campo medio

En una primera aproximación trabajamos a nivel de campo medio (MFA), en la que sólo tenemos en cuenta los valores de expectación no-nulos de los campos bosónicos,  $\bar{\sigma}_{1,2}$ . Estos deben ser tales que minimizan la acción. Es decir,

$$\frac{\partial S_E^{MFA}}{\partial \bar{\sigma}_{1,2}} = 0 \tag{4.34}$$

de donde obtenemos las ecuaciones del gap

$$\bar{\sigma}_1 - 8N_c G_S \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} g(p) \frac{Z(p)M(p)}{D(p)} = 0 \tag{4.35}$$

$$\bar{\sigma}_2 + 8N_c G_S \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{f(p)}{\kappa_p^2} \frac{Z(p)}{D(p)} = 0. \tag{4.36}$$

a partir de las que podemos encontrar los valores de expectación requeridos. Luego, a partir de ellos se pueden obtener cantidades relevantes como el valor medio del condensado de quarks,  $\langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$ . Estos condensados se calculan haciendo la variación de  $\ln \mathcal{Z}^{MFA} = -S_E^{MFA}$  con respecto de las masas corrientes de los quarks. Como esta cantidad resulta divergente la regularizamos sustrayendo el valor del condensado para quarks no interactuantes. Obtenemos así

$$\langle \bar{q}q \rangle = -4N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( \frac{Z(p)M(p)}{D(p)} - \frac{m_c}{p^2 + m_c^2} \right). \tag{4.37}$$

### 4.2.2. Masas mesónicas

Para hacer contacto con la fenomenología hadrónica es necesario ir más allá de la aproximación de campo medio e incluir fluctuaciones mesónicas. De hecho, a partir de la acción cuadrática (4.28) se pueden obtener las masas de los mesones resolviendo la ecuación

$$G_M(-m_M^2) = 0. \quad (4.38)$$

En el caso del sistema  $\sigma - \sigma'$  el ángulo de mezcla está dado por  $\theta(-m_{\sigma, \sigma'}^2)$ , donde

$$\tan 2\theta(p^2) = \frac{2G_{\sigma_1\sigma_2}(p^2)}{G_{\sigma_2\sigma_2}(p^2) - G_{\sigma_1\sigma_1}(p^2)}. \quad (4.39)$$

Las constantes de acoplamiento mesón-quark  $g_{Mq\bar{q}}$  están dadas por

$$g_{Mq\bar{q}}^{-1} \equiv G_{Mq\bar{q}}^{-2}(-m_M^2) = \left. \frac{dG_M(p)}{dp^2} \right|_{p^2=-m_M^2}. \quad (4.40)$$

Notemos que, debido a la mezcla presente en el canal escalar, el correspondiente vértice tiene dos componentes. Entonces, para el vértice  $\sigma q\bar{q}$  tenemos

$$V_{\sigma q\bar{q}} = g_{\sigma q\bar{q}}^{(0)} \mathbf{1} + g_{\sigma q\bar{q}}^{(1)} \frac{\not{p} + \not{p}'}{2\kappa_p} \quad (4.41)$$

donde

$$g_{\sigma q\bar{q}}^{(0)} = g_{\sigma q\bar{q}} \cos \theta; \quad g_{\sigma q\bar{q}}^{(1)} = g_{\sigma q\bar{q}} \sin \theta. \quad (4.42)$$

### 4.2.3. Constante de decaimiento débil del pión

En la Ec. (3.15) definimos la constante de decaimiento débil del pión. Con el objeto de obtener una expresión explícita para la corriente axial, debemos aplicar una transformación de gauge a la acción efectiva  $S_E$ , introduciendo un conjunto de campos de gauge axiales  $\mathcal{A}_\mu^\alpha(x)$ . Para una teoría local, usualmente esta transformación de gauge se realiza haciendo el siguiente reemplazo

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + \frac{i}{2} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\mathcal{A}}_\mu(x). \quad (4.43)$$

Pero en este caso, debido a la no-localidad de los campos involucrados, se deben realizar reemplazos adicionales en los términos de interacción [70]

$$\begin{aligned} \psi(x - z/2) &\rightarrow W_A(x, x - z/2) \psi(x - z/2) \\ \psi^\dagger(x + z/2) &\rightarrow \psi^\dagger(x + z/2) W_A(x + z/2, x). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Aquí,  $x$  y  $z$  son las variables que aparecen en las definiciones de las corrientes no-locales (4.13), y la función  $W_A(x, y)$  está definida por

$$W_A(x, y) = P \exp \left[ \frac{i}{2} \int_x^y ds_\mu \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\mathcal{A}}_\mu(s) \right], \quad (4.45)$$

donde  $s$  corre a través de un camino arbitrario que conecta  $x$  con  $y$ .

Una vez construida esta acción efectiva “gaugeada”, resulta fácil obtener la corriente axial como la derivada de esta acción con respecto a  $\mathcal{A}_\mu^a(x)$ , evaluada en  $\vec{\mathcal{A}}_\mu(x) = 0$ . Realizando luego la derivada de las expresiones resultantes con respecto a los campos de mesones renormalizados, se puede finalmente identificar las correspondientes constantes de decaimiento débil de los mesones. Luego de algunos cálculos se puede obtener

$$f_\pi = \frac{m}{m_\pi^2} g_{\pi q \bar{q}} F_0(-m_\pi^2), \quad (4.46)$$

con

$$F_0(p^2) = 8N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g(q) \frac{Z(q^+) Z(q^-)}{D(q^+) D(q^-)} \times [q^+ \cdot q^- + M(q^+) M(q^-)]. \quad (4.47)$$

Es importante notar que la integral sobre la variable de camino  $s$  de la Ec. (4.45) se puede resolver en forma exacta, lo que implica que la misma es independiente del camino de integración. En el límite quiral, la expresión de la Ec. (4.46) tiene una forma relativamente simple, dada por

$$f_\pi = \frac{M(0)}{g_{\pi q \bar{q}} Z(0)}, \quad (4.48)$$

la cual conecta con la relación de Goldberger-Treiman.

#### 4.2.4. Ancho de decaimiento

Si expandimos la acción hasta tercer orden en las fluctuaciones mesónicas podemos calcular el ancho de decaimiento del mesón  $\sigma$  a dos piones  $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi}$ . Para tal fin es necesario calcular

$$\frac{\delta S_E^{bos}}{\delta\sigma(q)\delta\pi^a(q_1)\delta\pi^b(q_2)} = (2\pi)^4 \delta^4(q + q_1 + q_2) \delta_{ab} G_{\sigma\pi\pi}(q^2, q_1^2, q_2^2), \quad (4.49)$$

donde los campos mesónicos están ya renormalizados. En términos de los campos sin renormalizar, y teniendo en cuenta la mezcla  $\sigma_1 - \sigma_2$ , tenemos

$$G_{\sigma\pi\pi}(q^2, q_1^2, q_2^2) = G_{\sigma q \bar{q}}(q^2) G_{\pi q \bar{q}}(q_1^2) G_{\pi q \bar{q}}(q_2^2) \tilde{G}_{\sigma\pi\pi}(q^2, q_1^2, q_2^2), \quad (4.50)$$

## 4.2. Modelo quiral de quarks no-local

---

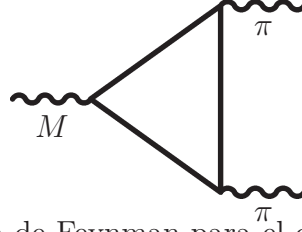


Figura 4.2: Diagrama de Feynman para el decaimiento  $\sigma \rightarrow \pi\pi$

donde

$$\tilde{G}_{\sigma\pi\pi}(q^2, q_1^2, q_2^2) = G_{\sigma_1\pi\pi}(q^2, q_1^2, q_2^2) \cos \theta(q^2) - G_{\sigma_2\pi\pi}(q^2, q_1^2, q_2^2) \sin \theta(q^2), \quad (4.51)$$

y las expresiones de las constantes de acoplamiento entre  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  y dos piones sin renormalizar se pueden obtener de la expansión de la acción. Obtenemos

$$\begin{aligned} G_{\sigma_1\pi\pi}(q^2, q_1^2, q_2^2) &= -16N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right) g\left(\frac{k+k_1}{2}\right) g\left(\frac{k+k_2}{2}\right) \\ &\quad \times \frac{Z(k)Z(k_1)Z(k_2)}{D(k)D(k_1)D(k_2)} [M(k)k_1 \cdot k_2 - M(k_1)k \cdot k_2 \\ &\quad \quad \quad - M(k_2)k \cdot k_1 - M(k)M(k_1)M(k_2)] \\ G_{\sigma_2\pi\pi}(q^2, q_1^2, q_2^2) &= -\frac{8N_c}{\kappa_p} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right) g\left(\frac{k+k_1}{2}\right) g\left(\frac{k+k_2}{2}\right) \\ &\quad \times \frac{Z(k)Z(k_1)Z(k_2)}{D(k)D(k_1)D(k_2)} [k_2^2 k \cdot k_1 + k_1^2 k \cdot k_2 \\ &\quad \quad \quad + (k_1+k_2) \cdot [M(k_1)M(k)k_2 - M(k_2)M(k_1)k \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \quad + M(k_2)M(k)k_1]] \end{aligned} \quad (4.52)$$

donde  $k_1 = k + q_1$ ,  $k_2 = k - q_2$  y  $q^2 = (q_1 + q_2)^2$ . De manera similar para  $\sigma'$  tenemos

$$G_{\sigma'\pi\pi}(q^2, q_1^2, q_2^2) = G_{\sigma'q\bar{q}}(q^2)G_{\pi q\bar{q}}(q_1^2)G_{\pi q\bar{q}}(q_2^2)\tilde{G}_{\sigma'\pi\pi}(q^2, q_1^2, q_2^2), \quad (4.53)$$

donde

$$\tilde{G}_{\sigma'\pi\pi}(q^2, q_1^2, q_2^2) = G_{\sigma_1\pi\pi}(q^2, q_1^2, q_2^2) \sin \theta(q^2) + G_{\sigma_2\pi\pi}(q^2, q_1^2, q_2^2) \cos \theta(q^2). \quad (4.54)$$

En términos de  $g_{M\pi\pi} = G_{M\pi\pi}(m_M^2, m_\pi^2, m_\pi^2)$ , el ancho de decaimiento se puede expresar como

$$\Gamma_{M \rightarrow \pi\pi} = \frac{3}{2} \frac{g_{M\pi\pi}^2}{16\pi m_\sigma} \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{m_\sigma^2}} \quad (4.55)$$

Otras cantidades de interés como las constantes asociadas a la dispersión pión-pión se pueden obtener incluyendo en la acción potencias más grandes de las fluctuaciones.

#### 4.2.5. Parametrizaciones del modelo NJL no-local

Para completar la descripción del modelo que hemos presentado debemos fijar los valores de los parámetros y elegir una dependencia funcional para los factores de forma  $f(p)$  y  $g(p)$  que caracterizan la interacción entre quarks. Siguiendo la referencia [27] utilizamos tres sets de parámetros diferentes.

En primer lugar consideramos un set de parámetros en el que fijamos  $Z(p) = 1$  y utilizamos un factor de forma exponencial para  $g(p)$ . Lo llamamos set A y resulta útil para analizar los efectos de considerar WFR.

Para el que llamamos set B tomamos los frecuentemente utilizados factores de forma exponenciales

$$g(p) = \exp(-p^2/\Lambda_0^2), \quad f(p) = \exp(-p^2/\Lambda_1^2) \quad (4.56)$$

Los parámetros  $\Lambda_0$  y  $\Lambda_1$  determinan el rango de no-localidad de la interacción para cada canal en espacio de momentos. Fijando la masa corriente de los quarks y el condensado quiral a los valores  $m_c = 5,7$  MeV y  $\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} = 240$  MeV, el resto de los parámetros se determinan de manera tal que se reproduzcan los valores empíricos  $f_\pi = 92,4$  MeV y  $m_\pi = 139$  MeV, y  $Z(0) = 0,7$ , valor que está dentro del rango sugerido por resultados de LQCD [66].

Y en el tercer caso, que llamamos set C, usamos como factores de forma funciones Lorentzianas

$$g(p) = \frac{1 + \alpha_z}{1 + \alpha_z f_z(p)} f_z(p), \quad f(p) = \frac{1 + \alpha_z}{1 + \alpha_z f_z(p)} \frac{\alpha_m f_m(p) - m_c \alpha_z f_z(p)}{\alpha_m - m_c \alpha_z} \quad (4.57)$$

donde

$$f_m(p) = \left[1 + (p^2/\Lambda_0^2)^{3/2}\right]^{-1}, \quad f_z(p) = \left[1 + (p^2/\Lambda_1^2)\right]^{-5/2} \quad (4.58)$$

Eligiendo  $m_c = 2,37$  MeV,  $\alpha_m = 309$  MeV,  $\alpha_z = -0,3$ ,  $\Lambda_0 = 850$  MeV y  $\Lambda_1 = 1400$  MeV se pueden reproducir bien los resultados de LQCD para las dependencias con el momento de la función de masa  $f_m(p)$  y la función de renormalización  $Z(p)$ , así como los valores empíricos de  $m_\pi$  y  $f_\pi$ . Esto se puede observar en la Fig. (4.3).

En la tabla (4.1) se resumen los valores de los parámetros correspondientes a las tres parametrizaciones propuestas.

## 4.2. Modelo quiral de quarks no-local

		Set A	Set B	Set C
$m_c$	MeV	5.78	5.70	2.37
$G_s \Lambda_0^2$		20.65	32.03	20.818
$\Lambda_0$	MeV	752.2	814.42	850.0
$\Lambda_1$	MeV	...	1034.5	1400.
$\kappa_p$	GeV	...	4.180	6.034

Cuadro 4.1: Sets de parámetros utilizados en el modelo de NJL no-local.

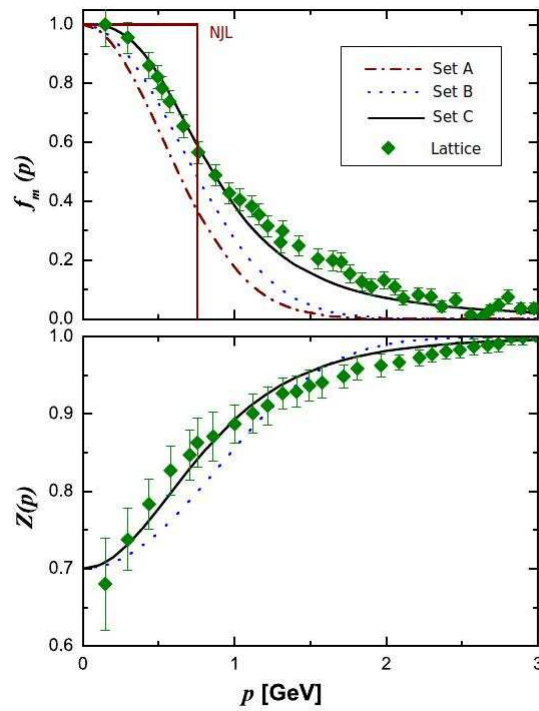


Figura 4.3: Funciones  $f(p)$  (arriba) y WFR,  $Z(p)$  (abajo), para las tres parametrizaciones del modelo de NJL no-local comparados con resultados de LQCD [66]. En el panel superior se muestra también la forma escalonada de la función de masa en el modelo de NJL local.

### 4.2.6. Resultados numéricos a temperatura y densidad nulas

En la tabla (4.2) se presentan los resultados para las propiedades de campo medio, las masas de los mesones y los parámetros de decaimiento, para los tres sets de parámetros descritos en la sección anterior. Como se puede observar en esta tabla para las parametrizaciones exponenciales (sets A y B) los valores empíricos de  $f_\pi$  y  $m_\pi$  son consistentes con condensados de quarks que están dentro del rango de los valores fenomenológicos citados usualmente  $-\langle\bar{q}q\rangle^{1/3} \simeq 200 - 260$  MeV [71, 72] mientras que con el set C se obtiene un valor del condensado de quarks un poco por encima de ese rango. Por otro lado, la masa de quarks corriente obtenida con el set C es un poco menor a las obtenidas con los sets A y B. Esto merece cierta atención. Tanto el condensado como las masas de quarks son cantidades que dependen de la escala. En particular, los valores fenomenológicos citados anteriormente corresponden a una elección de escala de renormalización  $\mu = 1$  GeV. En el set C algunos parámetros han sido determinados para obtener una buena aproximación a los resultados de LQCD para la función  $Z(p)$  [66], con una elección para la escala de renormalización  $\mu = 3$  GeV. Pero dado que el lagrangiano de este modelo satisface [67] la relación de Gell-Mann-Oakes-Renner (3.14), y que para todos los sets  $f_\pi$  y  $m_\pi$  se ajustan a sus valores empíricos, está claro que la calidad de la descripción del condensado de quarks y de las masas corrientes están muy relacionadas entre sí. Utilizando las relaciones estándar para pasar de la escala de 3 GeV a la de 1 GeV, se obtiene que  $-\langle\bar{q}q\rangle^{1/3} \simeq 284$  MeV lo cual está alrededor del 10 % por encima del límite empírico superior. Una posible forma de reducir el valor del condensado en este set sería reducir el parámetro  $\Lambda_0$ . Para  $\Lambda_0 \sim 600$  MeV por ejemplo, se pueden obtener valores para las masas y condensados de quarks que estén dentro de los límites fenomenológicos. Sin embargo, este valor implica reducir demasiado el campo de aplicabilidad del modelo.

Por otro lado, la masa y el ancho del mesón  $\sigma$  muestran cierta dependencia de la parametrización. Sin embargo esta dependencia es menor que la que se encuentra en el modelo de NJL local. Los valores obtenidos para las masas son algo mayores que los valores obtenidos experimentalmente  $478^{+24}_{-23} \pm 17$  MeV [73] y  $390^{+60}_{-36}$  MeV [74], mientras que los anchos son compatibles con los valores experimentales  $324^{+42}_{-40}$  MeV [73] y  $282^{+77}_{-50}$  MeV [74].

### 4.3. Acoplamiento al PL: modelo nPNJL

		Set A	Set B	Set C
$\bar{\sigma}_1$	MeV	424	529	442
$\bar{\sigma}_2$		...	-0.43	-0.43
$M(0)$	MeV	430	375	311
$Z(0)$		1.0	0.7	0.7
$-\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}$	MeV	240	240	326
$m_\pi$	MeV	139	139	139
$g_{\pi q\bar{q}}$		4.62	5.74	4.74
$f_\pi$	MeV	92.4	92.4	92.4
$m_\sigma$	MeV	683	622	522
$g_{\sigma q\bar{q}}^{(0)}$		5.08	5.97	4.60
$g_{\sigma q\bar{q}}^{(1)}$		...	-0.77	-0.26
$\Gamma_{\sigma\pi\pi}$	MeV	347	263	182

Cuadro 4.2: Algunos resultados obtenidos utilizando tres sets de parámetros, en el caso de temperatura cero.

### 4.3. Acoplamiento al PL: modelo nPNJL

De la misma manera que describimos en la Sec. 3.2, es posible acoplar el modelo NJL no-local al PL para construir un único modelo que incluya la descripción de los grados de libertad de quarks y gluones. Como ya lo hemos detallado en el capítulo anterior, para esto se procede utilizando la derivada covariante.  $D_\mu \equiv \partial_\mu - iA_\mu$ , donde  $A_\mu$  son los campos de gauge de color. De esta forma se puede escribir la acción efectiva Euclídea [75]

$$S_E = \int d^4x \left\{ \bar{\psi}(x) (-i\gamma_\mu D_\mu + \hat{m}) \psi(x) - \frac{G_S}{2} [j_a(x)j_a(x) + j_P(x)j_P(x)] + \mathcal{U}(\Phi[A(x)]) \right\}, \quad (4.59)$$

donde  $\psi \equiv (u, d)^T$  es el doblete fermiónico de  $N_f = 2$  sabores, y  $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d)$  es la matriz de masas corrientes de los quarks. Así como en el capítulo anterior, asumimos simetría de isospín,  $m_u = m_d = m$ . El operador  $\gamma_\mu \partial_\mu$  en espacio Euclídeo se define como  $\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + \gamma_4 \partial / \partial \tau$ , y las corrientes no-locales  $j_a(x)$  y  $j_P(x)$  que describen la interacción entre quarks son las definidas en las Ec. (4.13). Los parámetros que empleamos son los que figuran en la tabla (4.1).

Este modelo es el que se utiliza en los próximos capítulos, tomando como punto de partida la acción (4.59). Valiéndonos del formalismo de Matsubara y tiempo imaginario una vez más, podemos incluir temperatura y densidad

finitas. En cuanto al potencial  $\mathcal{U}(\Phi, T)$ , que controla la termodinámica del PL hemos introducido dos formas alternativas, una expresión polinómica (3.18) y otra logarítmica (3.21). Además, la teoría se puede bosonizar, tal como en la Sec. 4.2. Haciendo una aproximación a nivel campo medio podemos obtener el potencial termodinámico que nos permita obtener los valores de expectación de los campos bosónicos y a partir de ellos, las cantidades que son de nuestro interés. En particular, en el capítulo que sigue nos concentramos en estudiar las temperaturas críticas para las transiciones de restauración de simetría quiral y deconfinamiento en el caso en el que el potencial químico es cero.

## Capítulo 5

# Transiciones de fase a potencial químico cero

En este capítulo analizamos, en el contexto del modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio no-local (nlPNJL) para  $SU(2)$ , las temperaturas críticas para las transiciones de restauración de simetría quiral y deconfinamiento cuando el potencial químico es nulo. La inspección de las transiciones en estas condiciones es de fundamental importancia debido a que para  $\mu = 0$  es posible estudiar QCD a bajas energías utilizando técnicas de LQCD, por lo tanto, existen resultados de este método *ab initio* con los cuales contrastar aquellos obtenidos utilizando modelos efectivos como el nlPNJL.

Tal como mencionamos en el Cap. 2, la mayoría de los cálculos de LQCD utilizan valores de masa corriente de los quarks  $m$  que equivalen a masas de pión superiores a su valor experimental. Por lo tanto, es de gran interés analizar si las predicciones del modelo muestran consistencia con los resultados de LQCD, tanto para comprobar la validez del modelo, como para poder extrapolar los resultados de LQCD hasta el valor físico de la masa del pión.

Por otro lado, resulta que uno de los problemas del modelo de PNJL local es que, una vez que el potencial del PL ha sido ajustado para reproducir los resultados de LQCD para la teoría de gauge pura se encuentra [23] que la temperatura crítica para las transiciones de restauración de simetría quiral y deconfinamiento para  $\mu = 0$ ,  $T_c \approx 220$  MeV, es un poco alta en relación al valor que provee LQCD aceptado actualmente para dos sabores livianos, que es  $T_c = 173(8)$  MeV [35]. Una solución para esta dificultad sigue de la observación hecha en el contexto del modelo “Polyakov quark-meson” [55] donde se afirma que en presencia de quarks dinámicos el parámetro  $T_0$  que fija la escala del potencial del PL debe reducirse. Sin embargo, en contradicción con resultados de LQCD, en el modelo PNJL local esto causa una separación notable entre las temperaturas críticas para ambas transiciones [76]. Si bien

es posible subsanar este inconveniente, esto requiere incorporar acoplamientos adicionales con nuevos parámetros libres. Se ha sugerido incluir una interacción extra entre ocho quarks [76] o bien asumir que la constante de acoplamiento quark-quark es una función *ad hoc* del PL [77].

Dedicamos la primera parte de este capítulo a estudiar cuál es el impacto sobre las temperaturas críticas de variar el parámetro  $T_0$  en el marco del modelo de PNJL no-local para dos sabores. Mostramos que en este caso la temperatura crítica puede hacerse naturalmente compatible con las estimaciones de LQCD sin estropear el entrelazamiento entre las temperaturas de transición para el deconfinamiento y la restauración quiral.

En la segunda parte de este capítulo, analizamos la dependencia de las temperaturas críticas con la ruptura explícita de la simetría quiral, determinada por la masa corriente de los quarks comparando los resultados con los que se obtienen utilizando el modelo de PNJL local así como también con cálculos realizados con técnicas de LQCD.

## 5.1. Modelo no-local de quarks quirales a temperatura finita

Para abordar el estudio de las temperaturas críticas a potencial químico nulo, consideramos el modelo de quarks quiral no-local de dos sabores que incluye acoplamiento entre los quarks y los campos de gauge de color que se ha descrito en el Cap. 4.

En el caso en el que el potencial químico es cero, debido a las propiedades de conjugación de carga del lagrangiano de QCD, se espera que la traza del *loop* de Polyakov sea una cantidad real. Puesto que  $\phi_3$  y  $\phi_8$ , las dos variables en términos de quienes escribimos al PL en la Ec. (3.25), adquieren valores reales, esta condición implica que  $\phi_8 = 0$ . Por lo tanto, la expresión (3.26) para la traza del *loop* de Polyakov se reduce a

$$\Phi = \Phi^* = [1 + 2 \cos(\phi_3/T)] / 3. \quad (5.1)$$

Partiendo de la acción (4.59), haciendo una bosonización y la correspondiente extensión a temperatura finita encontramos que, en la aproximación de campo medio, el potencial termodinámico se puede escribir como

$$\Omega^{MFA} = -\frac{4T}{\pi^2} \sum_{n,c} \int d\vec{p} \ln \left[ \frac{(\rho_{n,\vec{p}}^c)^2 + M^2(\rho_{n,\vec{p}}^c)}{Z^2(\rho_{n,\vec{p}}^c)} \right] + \frac{\sigma_1^2 + \kappa_p^2 \sigma_2^2}{2G_S} + \mathcal{U}(\Phi, T) \quad (5.2)$$

donde  $M(p)$  y  $Z(p)$  están dados por

$$Z(p) = (1 - \sigma_2 f(p))^{-1} \quad M(p) = Z(p)(m + \sigma_1 g(p)). \quad (5.3)$$

## 5.1. Modelo no-local de quarks quirales a temperatura finita

---

También hemos definido

$$(\rho_{n,\vec{p}}^c)^2 = [(2n+1)\pi T + \phi_c]^2 + \vec{p}^2 \quad (5.4)$$

donde las cantidades  $\phi_c$  provienen de la relación  $\phi = \text{diag}(\phi_r, \phi_g, \phi_b) = \text{diag}(\phi_3, -\phi_3, 0)$ .

Para regularizar  $\Omega^{MFA}$  utilizamos la prescripción que puede encontrarse en la Ref. [78], esto es

$$\Omega_{reg}^{MFA} = \Omega_E^{MFA} - \Omega^{free} + \Omega_{reg}^{free} + \Omega_0, \quad (5.5)$$

donde  $\Omega^{free}$  se obtiene de  $\Omega_E^{MFA}$  tomando  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ , y  $\Omega_{reg}^{free}$  es la expresión regularizada para el potencial termodinámico de los quarks en ausencia de interacciones fermiónicas,

$$\Omega_{reg}^{free} = -4T \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sum_{c=r,g,b} \sum_{s=\pm 1} \text{Re} \ln \left[ 1 + \exp \left( -\frac{\epsilon_p + is\phi_c}{T} \right) \right] \quad (5.6)$$

con  $\epsilon_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ . Finalmente, el último término en (5.5) es una constante fijada por la condición  $\Omega_{reg}^{MFA} = 0$  para  $T = 0$ .

Una vez que se ha obtenido el potencial termodinámico regularizado, se pueden encontrar los valores medios  $\bar{\sigma}_{1,2}$  y  $\phi_3$  resolviendo el sistema de las ecuaciones del gap

$$\frac{\partial \Omega_{reg}^{MFA}}{\partial \bar{\sigma}_1} = \frac{\partial \Omega_{reg}^{MFA}}{\partial \bar{\sigma}_2} = \frac{\partial \Omega_{reg}^{MFA}}{\partial \phi_3} = 0 \quad (5.7)$$

Entonces, a partir de estos valores medios, es posible estudiar el comportamiento de otras cantidades relevantes. Nos concentramos en particular en el condensado de quarks quiral

$$\langle \bar{q}q \rangle = \partial \Omega_{reg}^{MFA} / \partial m, \quad (5.8)$$

y en el módulo del *loop* de Polyakov  $|\Phi|$ , que sirven como parámetros de orden para las transiciones de fase de restauración de simetría quiral y deconfinamiento respectivamente. Las susceptibilidades asociadas se definen como

$$\chi_{ch} = \partial \langle \bar{q}q \rangle / \partial m \quad (5.9)$$

$$\chi_{\Phi} = d|\Phi|/dT. \quad (5.10)$$

Cuando las transiciones son de primer orden, las mismas están señaladas por una discontinuidad tanto en los parámetros de orden como en todas las funciones termodinámicas. En cambio, cuando éstas ocurren como un crossover no existe una única y clara manera de definir las. En lo que sigue, tomamos como temperaturas críticas en esos casos aquellas temperaturas para las que encontramos un máximo en las susceptibilidades recién definidas.

## 5.2. Estudio de la temperatura crítica en función del parámetro $T_0$

Comenzamos analizando las transiciones de fase para potencial químico cero en función del parámetro  $T_0$ . Para ello, resolvemos las ecuaciones del gap considerando los sets de parámetros A, B y C y, para cada uno de los sets, los dos potenciales del PL, logarítmico (3.21) y polinómico (3.18). A modo de ejemplo, en la Fig.(5.1) se muestra el comportamiento de los parámetros de orden relevantes para las transiciones de restauración de simetría quiral y deconfinamiento y las susceptibilidades correspondientes para el set C y algunos valores de  $T_0$ , el parámetro que fija la escala en el potencial del PL. En particular hemos considerado los valores característicos 270, 208 y 180 MeV, que corresponden a los casos de 0, 2 y 3 quarks dinámicos respectivamente [55]. En primer lugar, encontramos que las temperaturas críticas coinciden para un amplio rango de  $T_0$ , siendo el entrelazamiento entre estas transiciones notablemente fuerte en el caso del potencial logarítmico. Además, notamos que para este set las transiciones son de tipo *crossover*, y encontramos también, que éstas son siempre más suaves para el potencial polinómico. En particular, en el caso del potencial logarítmico las transiciones ocurren básicamente a la misma temperatura crítica, como indican los picos de las susceptibilidades correspondientes. Se puede observar que a medida que  $T_0$  decrece la susceptibilidad quiral tiende a volverse asimétrica alrededor de  $T_c$ , haciéndose más ancha en el lado de temperaturas más altas. Esto podría ser una indicación de que para valores pequeños de  $T_0$  la simetría quiral es restaurada a temperaturas levemente más grandes que las señaladas, sin embargo, aún a  $T_0 = 180$  MeV la separación entre el pico principal y lo que podría considerarse un segundo pico es menor a 10 MeV. Para el potencial polinómico observamos que los picos en las susceptibilidades están en general levemente separados, y esta separación es mayor para valores menores de  $T_0$ . Sin embargo, la diferencia entre las temperaturas críticas para ambas transiciones no llega a superar los 10 MeV para el rango de  $T_0$  considerado. Para  $T_0 = 208$  MeV la diferencia entre las temperaturas críticas es tan sólo  $\Delta T_c = 3$  MeV para los sets A y B y de  $\Delta T_c = 5$  MeV para el set C. Estos valores son mucho menores a la separación que se encuentra en los modelos locales que es  $\sim 40$  MeV. Asimismo, es interesante señalar que el crecimiento del PL con la temperatura resulta más suave que el que se observa en los modelos locales, estando en mejor acuerdo con recientes resultados de LQCD [37].

También es importante señalar que si bien la buena coincidencia entre ambas temperaturas de transición se encuentra en los tres sets de parámetros, en

## 5.2. Estudio de la temperatura crítica en función del parámetro $T_0$

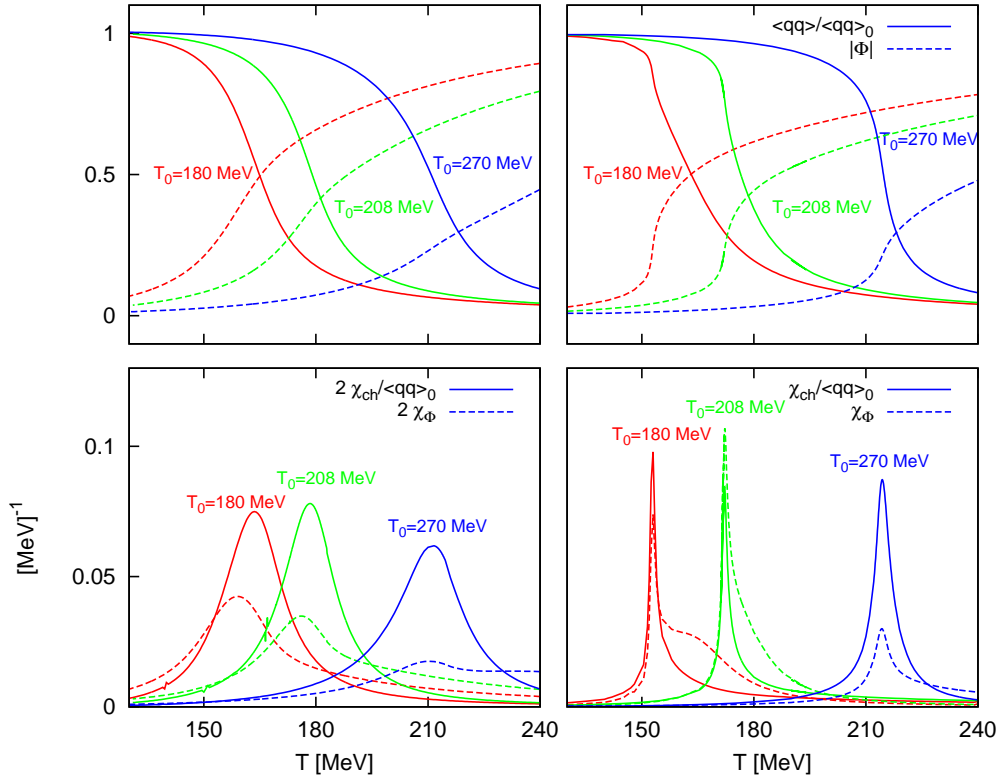


Figura 5.1: Parámetros de orden (arriba) y las susceptibilidades asociadas a ellos (abajo) para  $\mu = 0$  para valores de  $T_0$  correspondientes a 0, 2 y 3 quarks dinámicos. En los paneles de la derecha se muestran los resultados correspondientes al potencial logarítmico, y en los de la izquierda aquellos obtenidos utilizando el potencial polinómico. Todos los resultados corresponden al set C. Notar que en el último caso las susceptibilidades que se muestran están multiplicadas por un factor 2.

el caso del potencial logarítmico el carácter de las mismas puede ser diferente en uno u otro set. Se puede observar esto en la Fig. (5.2) donde graficamos los valores de temperatura crítica como función de  $T_0$ . Para el set A, que es el que no incluye renormalización de la función de onda, la transición se vuelve de primer orden para valores de  $T_0$  por debajo de  $\simeq 235$  MeV. Por otro lado, para el set B esto ocurre a un valor más bajo,  $T_0 \simeq 180$  MeV. Finalmente, para el set C las transiciones son tipo crossover para todos los valores de  $T_0$  considerados. En el caso del potencial polinómico no encontramos ningún valor de  $T_0$  dentro del rango considerado para el que las transiciones sean de primer orden. Cabe destacar que para  $T_0 = 208$  MeV, que es el valor de este parámetro que corresponde a nuestro modelo de dos sabores, las temperaturas críticas están en buen acuerdo con las estimaciones de LQCD. Estos valores son  $T_c(0) = 173, 171$  y  $173$  MeV para los sets A, B y C, con el potencial logarítmico, y  $T_c(0) = 178, 178$  y  $180$  MeV para los sets A, B y C, con el potencial polinómico, respectivamente. Es de gran importancia remarcar que la naturaleza de estas transiciones para dos sabores livianos es aún un tema de discusión en LQCD. Mientras la mayoría de los estudios [79, 80, 81, 82, 83] están a favor de que la transición quiral es de segundo orden en el límite quiral, hay también quienes señalan [84, 85] que ésta es una transición de primer orden. El presente modelo favorece la posibilidad de que la transición sea tipo crossover ya que eso es lo que se encuentra para ambos tipos de potenciales de PL en el caso de las parametrizaciones más realistas que incluyen renormalización de la función de onda.

### 5.3. Dependencia de las temperaturas críticas con la cantidad de ruptura explícita de la simetría quiral

Como ya hemos mencionado, es interesante estudiar la dependencia de las predicciones del modelo PNJL no-local con la cantidad de ruptura explícita de la simetría quiral para poder compararla con los resultados obtenidos en LQCD. Para llevar esto a cabo, se puede variar  $m$ , la masa corriente de los quarks, manteniendo el resto de los parámetros del modelo fijos en sus valores para el punto físico. Como primer paso analizamos en esta sección cuán bien esto permite describir el comportamiento de la masa del pión y su constante de decaimiento a temperatura cero determinados por cálculos de LQCD, para luego estudiar qué ocurre con las temperaturas críticas cuando modificamos el valor de  $m$ .

Nuestros resultados para la masa del pión y su constante de decaimiento

### 5.3. Dependencia de las $T_c$ con la ruptura explícita de la simetría quiral

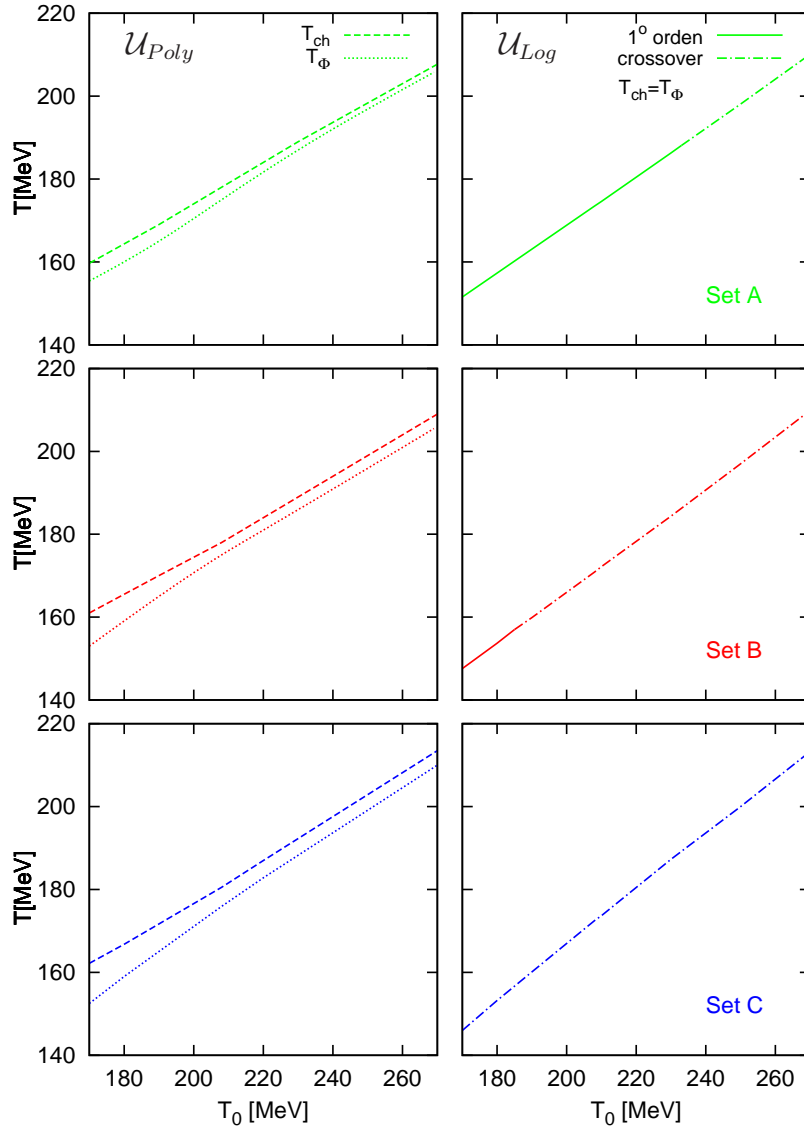


Figura 5.2: Temperaturas críticas como funciones de  $T_0$  para los sets de parámetros A (arriba), B (medio) y C (abajo), y para los potenciales del PL polinómico (izquierda) y logarítmico (derecha). Para el potencial logarítmico las  $T_c$  para ambas transiciones coinciden, y para los sets A y B existe un  $T_0$  por debajo del que las transiciones son de primer orden. Para el potencial polinómico las transiciones siempre son tipo crossover, las  $T_c$  son levemente distintas sin que la separación entre ellas supere los 10 MeV, disminuyendo al aumentar  $T_0$ .

a temperatura cero en función de la ruptura explícita de simetría quiral se muestran en la Fig. (5.3). También se muestran en dicha figura los resultados que se encuentran en el contexto del modelo de (P)NJL local así como los provenientes de cálculos de LQCD. Como es usual en la literatura relacionada con LQCD elegimos utilizar  $m_\pi$  en lugar de  $m$  como variable independiente en los gráficos. La razón principal para esto es que  $m_\pi$  es un observable, es decir, una cantidad que no depende de la escala, mientras que, como  $m$  sí depende de la escala, está sujeta a posibles ambigüedades relacionadas con la elección del punto de renormalización. En la figura, las líneas de punto-trazo, trazo y sólida corresponden a los sets de parámetros A, B y C respectivamente, mientras que la línea de puntos corresponde a las curvas obtenidas con el modelo de NJL, utilizando los parámetros de las Refs. [54, 86]. Los puntos representan resultados de *lattice* QCD que se encuentran en la Ref. [87]. En el panel superior se muestra el comportamiento del cociente  $m_\pi^2/m$  como función de  $m_\pi$ . Notemos que para dar cuenta de las posibles ambigüedades relacionadas con el punto de renormalización, las masas corrientes correspondientes han sido normalizadas como para coincidir con el valor  $m_{u,d}^{MS} \simeq 4,452$  MeV en el punto físico [87]. En la figura observamos que tanto el modelo local NJL como los nPNJL reproducen adecuadamente los resultados de LQCD. Particularmente, la curva correspondiente al set C es la que muestra mejor acuerdo. Sin embargo, la situación para  $f_\pi$ , que se muestra en el panel de abajo, es diferente: mientras que los resultados de los modelos nPNJL describen el crecimiento de  $f_\pi$  con  $m_\pi$  de acuerdo con la predicción de LQCD, el modelo local falla en la reproducción de este resultado. Es posible mostrar que este problema no se resuelve aún modificando en forma simultánea el valor de la constante de acoplamiento  $G_S$ , que hemos tomado constante en los modelos no-locales [86].

Hemos analizado esta discrepancia considerando distintas parametrizaciones para el modelo de NJL, así como también regularizaciones con cutoff 3D y 4D. En todos los casos los parámetros fueron determinados como para obtener en el punto físico los valores empíricos de la masa del mesón pseudoescalar y su constante de decaimiento, además de una masa efectiva de quarks  $M$  en un rango fenomenológicamente adecuado de 300 – 600 MeV (ver Ref. [17]). Verificamos que (i) para un dado valor de  $M$ , el comportamiento de  $f_\pi$  como función de  $m_\pi$  es similar para ambas regularizaciones, y que (ii) para valores más bajos de  $M$  (y por lo tanto, cutoffs más altos [17]) la discrepancia entre los resultados de LQCD y el modelo de NJL disminuye. Sin embargo, ya para  $M = 300$  MeV la diferencia es básicamente tan grande como se observa en la Fig. (5.3) (la correspondiente parametrización lleva a  $M = 325$  MeV [54, 86]). Encontramos que  $M$  debería reducirse hasta valores cerca de 250 MeV, demasiado bajo desde el punto de vista fenomenológi-

### 5.3. Dependencia de las $T_c$ con la ruptura explícita de la simetría quiral

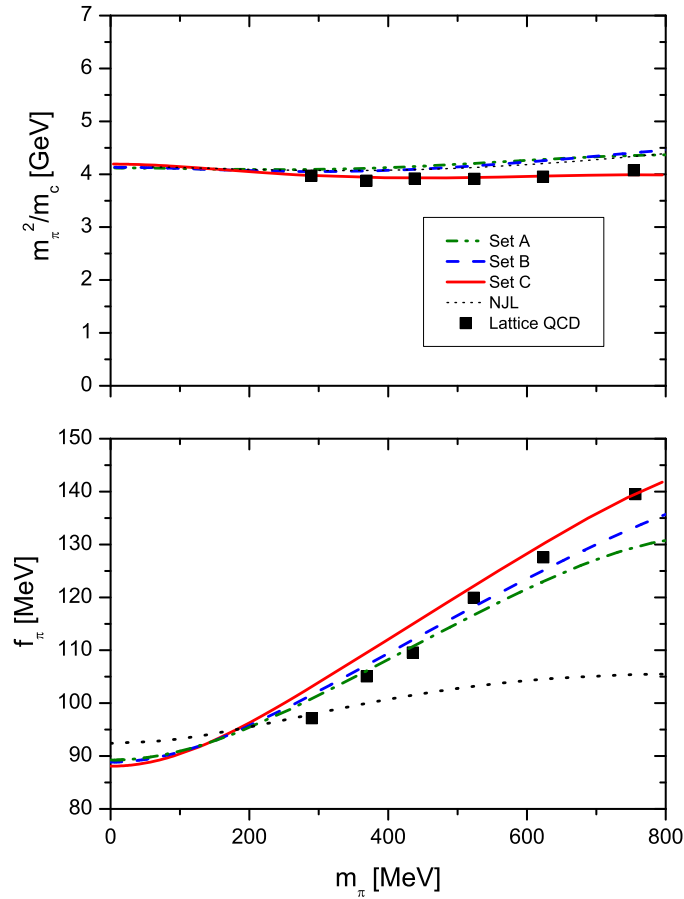


Figura 5.3: Propiedades del pión a temperatura cero como funciones de la masa del pión en modelos quirales de quarks con interacciones local y no-local. Los paneles superior e inferior corresponden al cociente  $m_\pi^2/m_c$  y constante de decaimiento débil del pión  $f_\pi$  respectivamente. Los resultados de LQCD están tomados de la Ref. [87].

co, para reproducir de manera aceptable los resultados de LQCD. De esta manera, los resultados que hemos obtenidos se pueden considerar como una indicación más a favor de la inclusión de interacciones no-locales como un avance hacia una descripción realista de la dinámica de QCD a bajas energías. La concordancia con los resultados de LQCD indica además que los parámetros del modelo no deberían cambiar significativamente con  $m$ . En relación a la dependencia explícita que aparece en la ecuación (4.57) correspondiente al set C, podemos mencionar que a pesar de haber considerado por consistencia que  $m$  varía como la masa corriente de quark, el efecto de este cambio es completamente despreciable.

Analizamos ahora la dependencia con la masa de la temperatura crítica para las transiciones de deconfinamiento y restauración de simetría quiral en el caso de potencial químico cero. Comenzamos considerando la dependencia con la temperatura de los parámetros de orden asociados a estas transiciones junto con las correspondientes susceptibilidades, para algunos valores típicos de la masa del pión. Los resultados para el set C y  $T_0 = 270$  MeV se muestran en la Fig. (5.4). Como ya hemos mencionado, consideramos dos potenciales para la descripción de la termodinámica del *loop* de Polyakov, mostramos los resultados para el potencial polinómico en los paneles de la izquierda y para el potencial logarítmico en los paneles de la derecha. Para los otros sets de parámetros y/o valores del parámetro  $T_0$  se obtienen resultados que son cualitativamente similares, con excepción del caso set A para  $T_0$  dependiendo de la masa de los quarks (por ejemplo,  $T_0 = 208$  MeV para el valor físico de  $m_\pi$ ) donde la transición es de primer orden para todas las masas indicadas. Discutamos primero los resultados para el potencial polinómico. Podemos ver en la figura que ambas transiciones ocurren como un crossover, tal como se espera según predicciones de LQCD. Observamos que, a medida que  $m_\pi$  aumenta, las posiciones de los picos de  $\chi_{ch}$  y  $\chi_\Phi$  se mueven simultáneamente hacia valores más altos de  $T$ , manteniendo siempre una diferencia entre ellos que no excede los 5 MeV. También vemos que, al aumentar  $m_\pi$  la transición quiral tiende a ser más suave mientras que la de deconfinamiento se vuelve cada vez más pronunciada. En el caso del potencial logarítmico también observamos que las temperaturas de transición aumentan con  $m_\pi$ . Sin embargo, en este caso, para un dado valor de  $m_\pi$ , la restauración quiral y el deconfinamiento son ambas transiciones más abruptas que el caso del potencial polinómico y la correlación entre ellas es más fuerte (la diferencia entre las temperaturas críticas es de alrededor de 0,02 MeV para  $m_\pi^{phys}$ ). De hecho vemos que ya para  $m_\pi = 500$  MeV las transiciones son de primer orden. En el caso del potencial polinómico, la masa crítica para la que la transición comienza a ser de primer orden es más alta,  $m_\pi^{crit} \gtrsim 700$  MeV. Según resultados de LQCD, se espera que para cierto valor crítico para la cantidad explícita de

### 5.3. Dependencia de las $T_c$ con la ruptura explícita de la simetría quiral

---

ruptura de simetría quiral las transiciones de fase comiencen a ser de primer orden [88]. Sin embargo, estimaciones actuales [89, 90, 91], indican que la correspondiente masa del mesón pseudoescalar debería estar en el rango de algunos GeV (por ejemplo, Ref. [90] indica  $m_\pi^{crit} \sim 40 T_c$ ); por lo tanto el cambio temprano en el carácter de la transición se puede interpretar como una aspecto poco realista de los modelos efectivos. En este sentido es muy importante señalar que nuestras predicciones son confiables dentro de un rango limitado de valores de  $m_\pi$ , con una cota superior que estimamos alrededor de 600 MeV. Además, se puede considerar el efecto de correcciones que van más allá de la aproximación de campo medio. A pesar de que se espera que el rol de estas correcciones sea menos importante a medida que aumenta la masa de los quarks [92], en el rango de masas aquí considerado pueden ser lo suficientemente considerables como para suavizar las transiciones y bajar las temperaturas críticas [93]. Aunque no esperamos que este efecto aumente los valores de  $m_\pi^{crit}$  tanto como para alcanzar el rango de los GeV, debería contribuir en la dirección correcta para llevar la masa crítica hasta valores por encima del límite superior de validez de nuestra aproximación. Algunas correcciones más allá de campo medio han sido estudiadas [92, 94, 95], sin embargo aún no existe un formalismo totalmente no perturbativo para considerar fluctuaciones mesónicas en modelos no-locales. Tal como se indica en la Ref.[96], estas fluctuaciones podrían también ayudar a evitar las inestabilidades termodinámicas que pueden aparecer en este tipo de modelos.

Los resultados para la dependencia con la masa de las temperaturas críticas para el deconfinamiento y la restauración quiral, determinadas con nuestros modelos no-locales, se muestran en la Fig. (5.5) para los dos potenciales de PL considerados con  $T_0 = 270$  MeV y  $T_0$  dependiente de la masa. Se muestran también resultados típicos obtenidos en el marco del modelo de PNJL local de la Ref. [54], para ser comparados. Antes de discutir en detalle los resultados del modelo no-local hacemos algunos comentarios en relación a aquellos que se obtienen con el modelo PNJL local. En la Fig. (5.5) observamos que en todos los casos ya en el valor físico de  $m_\pi$  hay una separación notable entre la temperatura de restauración de simetría quiral  $T_{ch}$  (línea discontinua) y la de deconfinamiento  $T_\Phi$  (línea de puntos). En cuanto a la dependencia en  $m_\pi$ , notamos que ésta es más fuerte en el caso de  $T_{ch}$  cuando la comparamos con  $T_\Phi$ . Como consecuencia de esto la separación entre  $T_{ch}$  y  $T_\Phi$  aumenta con  $m_\pi$ , resultado que no es respaldado por los resultados existentes de LQCD [49, 97] que indican que ambas transiciones coinciden hasta valores de  $m_\pi$  aún mas grandes que los aquí considerados. También es interesante notar que, comparando los resultados para los dos potenciales de PL alternativos, los correspondientes al potencial logarítmico exhiben una separación más grande entre ambas transiciones.

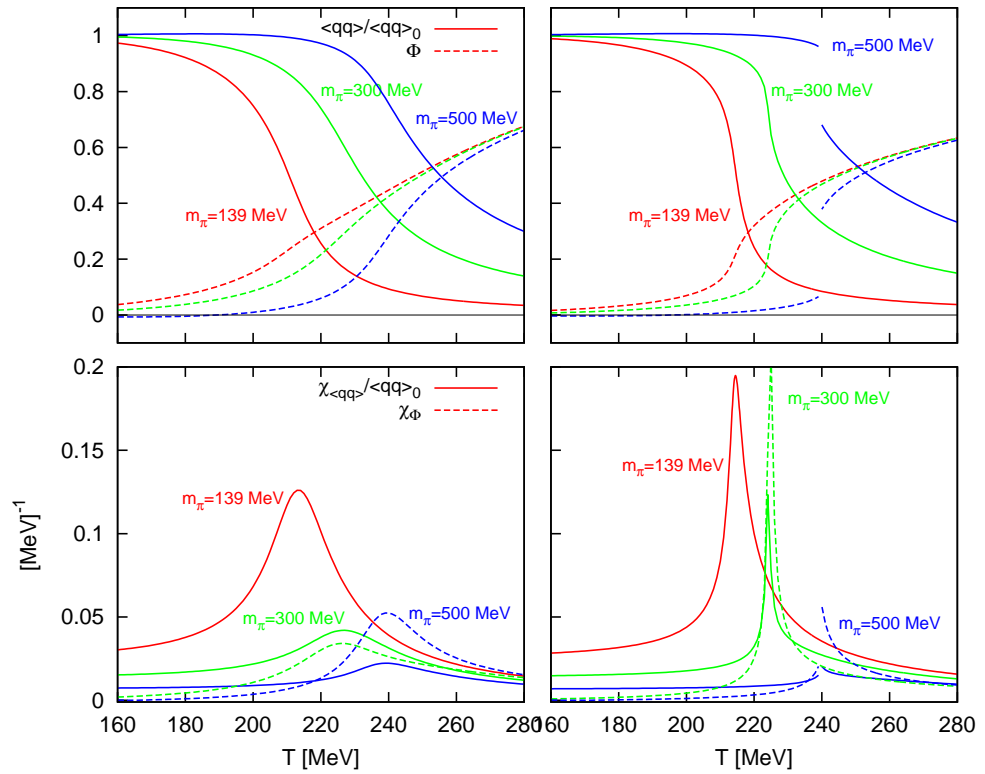


Figura 5.4: Parámetros de orden (paneles superiores) y las correspondientes susceptibilidades (paneles inferiores) como funciones de la temperatura para algunos valores representativos de masa del pión. Los paneles de la izquierda y derecha corresponden a las formas polinómica y logarítmica del potencial del PL respectivamente.

### 5.3. Dependencia de las $T_c$ con la ruptura explícita de la simetría quiral

---

Pasamos ahora a los resultados para el modelo no-local, comenzando por el caso  $T_0 = 270$  MeV. El primer punto para mencionar es que las distintas parametrizaciones llevan a resultados que son cualitativamente similares. Además es importante remarcar que, contrariamente a la situación en el modelo de PNJL local, en el modelo no-local las transiciones de restauración quiral y deconfinamiento ocurren básicamente a la misma temperatura para todos los valores de  $m_\pi$  considerados. Aún más, comparando los resultados para los dos potenciales alternativos para el *loop* de Polyakov vemos que la única diferencia cualitativa es el hecho de que en el caso del potencial logarítmico existe una masa de pión crítica ( $\approx 400$  MeV) donde el carácter de la transición cambia de crossover a primer orden. En cuanto a la dependencia más detallada en la masa pseudoescalar de las temperaturas críticas vemos que para valores encima de  $m_\pi^{phys}$  los resultados del modelo no-local se ajustan muy bien por una recta de la forma

$$T_c(m_\pi) = A m_\pi + B. \quad (5.11)$$

Esto está en buen acuerdo con lo que se encuentra a partir de los cálculos de LQCD de las Refs. [49, 97]. Nuestros resultados para el parámetro de la pendiente  $A$  se encuentran en un rango de  $0,06 - 0,07$  para todas las parametrizaciones y potenciales del PL. Por comparación, a pesar de que la mayoría de los resultados de LQCD indican que  $A \lesssim 0,05$  [48, 49, 50, 51], algunos cálculos recientes [97, 98] señalan que las predicciones de LQCD podrían estar encima de esa cota. Dados estos resultados podemos decir que la pendiente encontrada con los modelos PNJL no-locales es consistente con las estimaciones de LQCD existentes. Esto puede ser contrastado con resultados de modelos puramente quirales donde se encuentra un fuerte aumento de la temperatura de la restauración quiral con  $m_\pi$  [99, 100, 101]. Por ejemplo, en la Ref. [101] se indica el valor  $A = 0,243$  obtenido en el contexto de un modelo de quarks quiral.

Comentamos ahora los efectos de considerar un valor de  $T_0$  que depende de las masas corrientes de quarks, como se sugiere en la Ref. [55]. Esta modificación lleva a una disminución de las temperaturas de transición que básicamente mantiene su crecimiento lineal con  $m_\pi$  con una pendiente que se ve reducida levemente, alrededor de un  $15 - 20\%$ . La diferencia más notable es que en todos los casos la transición resulta más abrupta. Esto implica un cambio del carácter de las transiciones de fase para  $m_\pi$  menores. Por ejemplo, para el set C encontramos que esta transición comienza a ser de primer orden para  $m_\pi \simeq 500$  MeV en el caso del potencial polinómico. Para el potencial logarítmico dicho valor se reduce a la mitad para los sets de parámetros que incluyen WFR, mientras que para el set A la transición es siempre de primer orden.

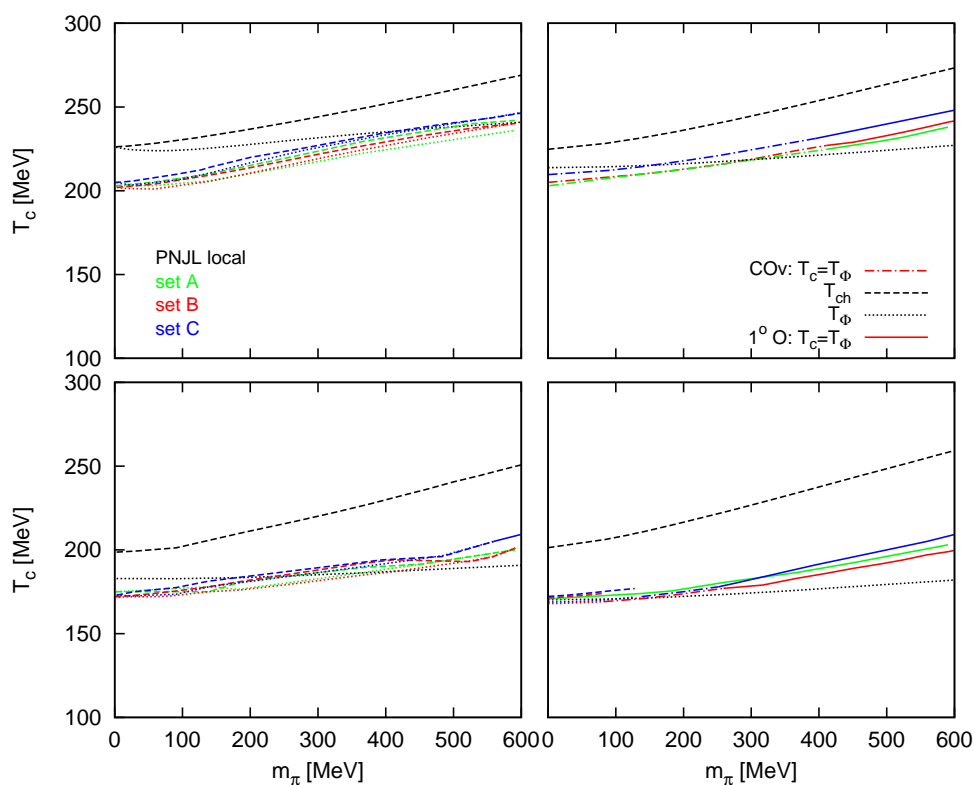


Figura 5.5: Temperaturas críticas como función de la masa del pión para los modelos de PNJL local y no-local, considerando las formas del potencial del PL polinómica (izquierda) y logarítmica (derecha) con  $T_0 = 270$  MeV (arriba) y 208 MeV (abajo). Las líneas discontinuas y de puntos corresponden respectivamente a las temperaturas críticas asociadas a las transiciones tipo crossover de restauración de simetría quiral y deconfinamiento. Para el modelo nPNJL considerando el potencial logarítmico, ambas transiciones ocurren a la misma temperatura, y su carácter puede ser de primer orden (línea sólida) o pueden tener lugar como un crossover suave (líneas de trazos y puntos). Notamos que en el caso excepcional del set A, potencial logarítmico,  $T_0 = 208$  MeV las transiciones son siempre de primer orden.

## Capítulo 6

# Transiciones de fase a potencial químico finito. Diagrama de fases

En este capítulo nos concentramos en el análisis de las transiciones de fase para el caso de potencial químico finito de manera de poder construir los correspondientes diagramas de fases. Como ya hemos mencionado, la estructura de dicho diagrama aún no se conoce de forma certera y tanto las temperaturas críticas como el carácter de las transiciones de fase son aspectos que se encuentran en discusión. En el capítulo anterior, cuando analizamos las temperaturas críticas a potencial químico cero, pudimos contrastar los resultados obtenidos en el contexto del modelo nPNJL con datos que se encuentran al estudiar la situación con técnicas de LQCD. Ahora bien, como hemos discutido en el Cap. 2, no es posible con estas técnicas estudiar directamente el caso de interés físico asociado al potencial químico real. Sin embargo, para potenciales químicos imaginarios dicho problema no aparece por lo que sí se cuenta con resultados de LQCD. Por lo tanto, resulta de interés describir el comportamiento de las transiciones de fase no sólo para potencial químico real sino también imaginario. Nuevamente, esto permite contrastar las predicciones del modelo nPNJL con las de LQCD de manera de tener un indicio de la confiabilidad de nuestros resultados en las regiones que no son accesibles con técnicas *ab initio*, constituyendo a su vez una guía para la extrapolación de los resultados de LQCD a dichas regiones.

Luego de presentar las modificaciones que deben hacerse al potencial termodinámico que se utilizó en el Cap. 5 para incluir un potencial químico finito, calculamos las temperaturas críticas y construimos el diagrama de fases tanto para potencial químico real como imaginario. Examinamos además cual es el efecto de variar tanto la forma como el parámetro de escala del

potencial del *loop* de Polyakov,  $T_0$ .

## 6.1. Modificaciones para la extensión a potencial químico finito

Trabajamos aquí con la extensión a temperatura finita del modelo de PNJL no-local para dos sabores livianos descrito en el Cap. 4 y que ya hemos utilizado en el Cap. 5, incluyendo también potencial químico finito. Debido a esta extensión, y en particular por considerar potencial químico imaginario, hay algunas diferencias respecto del formalismo utilizado en el capítulo anterior, las que explicamos a continuación.

En primer lugar, recordemos que hemos escrito la traza del *loop* de Polyakov en términos de las dos variables independientes  $\phi_3$  y  $\phi_8$ . Hemos visto que para el caso en que el potencial químico es cero, las condiciones de conjugación de carga de QCD hacen que el PL sea una cantidad real, lo que implica  $\phi_8 = 0$  y lleva a la expresión (5.1). Como se discute en la Ref. [54] en el caso del potencial químico real finito, para definir correctamente la aproximación de campo medio dentro de la cual estamos trabajando, lo que se debe minimizar es la parte de real del potencial termodinámico lo que conduce nuevamente a  $\phi_8 = 0$ . Ahora bien, cuando consideramos potencial químico imaginario, se pierde la restricción de que  $\Phi$  sea real para el potencial termodinámico lo sea, por lo tanto tanto  $\phi_3$  como  $\phi_8$  pueden ser no nulas resultando entonces

$$\Phi = \frac{1}{3} \left[ \exp \left( -\frac{2i \phi_8}{\sqrt{3} T} \right) + 2 \exp \left( \frac{i \phi_8}{\sqrt{3} T} \right) \cos \left( \frac{\phi_3}{T} \right) \right], \quad (6.1)$$

y el correspondiente potencial es función de tres variables,  $\Phi, \Phi^*, T$ . Por otra parte, como hemos detallado anteriormente, al utilizar el formalismo de Matsubara y tiempo imaginario con potencial químico finito es necesario reemplazar  $p_4$  por  $\omega_n - i\mu$ , por lo tanto debemos modificar la definición (5.4) que hemos hecho de la variable  $\rho_{n,\vec{p}}^c$  que aparece en la aproximación de campo medio del potencial termodinámico. Tenemos ahora

$$(\rho_{n,\vec{p}}^c)^2 = [(2n+1)\pi T - i\mu + \phi_c]^2 + \vec{p}^2. \quad (6.2)$$

Recordamos que las cantidades  $\phi_c$  vienen de la relación  $\phi = \text{diag}(\phi_r, \phi_g, \phi_b)$ , y para el caso de potencial químico finito esto es

$$\begin{aligned} \phi_r &= \phi_3 + \phi_8/\sqrt{3}, \\ \phi_g &= -\phi_3 + \phi_8/\sqrt{3}, \\ \phi_b &= -2\phi_8/\sqrt{3}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

## 6.2. Diagrama de fases para potencial químico imaginario

---

Finalmente, puesto que ahora las dos variables que utilizamos para parametrizar la traza del PL pueden ser no nulas, hay una ecuación adicional en el sistema de las ecuaciones del gap. Entonces, las ecuaciones que se deben resolver para hallar los valores de expectación de los campos  $\bar{\sigma}_{1,2}$  y  $\phi_{3,8}$  son

$$\frac{\partial \text{Re}[\Omega_{reg}^{MFA}]}{\partial \bar{\sigma}_1} = \frac{\partial \text{Re}[\Omega_{reg}^{MFA}]}{\partial \bar{\sigma}_2} = \frac{\partial \text{Re}[\Omega_{reg}^{MFA}]}{\partial \phi_3} = \frac{\partial \text{Re}[\Omega_{reg}^{MFA}]}{\partial \phi_8} = 0. \quad (6.4)$$

De la misma forma que lo hicimos en el capítulo anterior, a partir de estos valores obtenemos los parámetros de orden y susceptibilidades que permiten caracterizar las transiciones de restauración de simetría quiral y deconfinamiento. Utilizamos los sets de parámetros A, B y C que ya hemos descrito y usado anteriormente, así como también los potenciales logarítmico y polinómico para el PL, considerando dos valores alternativos para el parámetro  $T_0$ .

## 6.2. Diagrama de fases para potencial químico imaginario

Comencemos por analizar la situación para potencial químico imaginario. Es sabido que Roberge y Weiss encontraron [47] que el potencial termodinámico de QCD en presencia de un potencial químico  $\mu = i\theta T$  es una función periódica de  $\theta$  con período  $2\pi/3$ . Esto significa que QCD es invariante ante una combinación de transformaciones de  $Z_3$  para los campos de quarks y de gauge y una traslación  $\theta \rightarrow \theta + 2k\pi/3$ , con  $k$  entero, para el potencial químico. Recientemente ha sido demostrado que esta simetría  $Z_3$  extendida, es también una simetría del modelo Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio local [102]. De hecho en el contexto de este modelo el potencial termodinámico es invariante ante las transformaciones

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &\rightarrow \Phi(\theta) \exp(-i 2 k \pi/3) \\ \Phi^*(\theta) &\rightarrow \Phi^*(\theta) \exp(i 2 k \pi/3) \\ \theta &\rightarrow \theta + 2 k \pi/3. \end{aligned} \quad (6.5)$$

La periodicidad RW es un remanente de la simetría  $Z_3$  en el límite de la teoría de gauge pura. En QCD con quarks dinámicos, si la temperatura es más alta que un cierto valor  $T_{RW}$  se puede ver que aparecen tres vacíos de  $Z_3$ . Estos vacíos se pueden clasificar según sus fases de PL, dadas por  $\varphi$ ,  $\varphi + 2\pi/3$  y  $\varphi + 4\pi/3$ . Roberge y Weiss mostraron que para  $T > T_{RW}$  hay

una transición de primer orden para  $\theta = \pi/3 \bmod 2\pi/3$ , donde el vacío salta a una de sus imágenes de  $Z_3$ . Ésta es conocida como la *transición Roberge-Weiss*, y el último punto en la línea de la transición RW en el plano  $T - \theta$ , es decir  $(T, \theta) = (T_{RW}, \pi/3)$  es conocido como *punto final RW*. El orden de la transición RW en el punto final RW ha sido asunto de gran interés en el último tiempo en el marco de LQCD [103, 104, 105, 106] debido a las implicaciones que podría tener en el diagrama de fase de QCD para  $\mu$  finito real. De acuerdo con estos cálculos de LQCD, para dos sabores livianos el punto final RW es de primer orden para valores pequeños (pero realistas) de masa corriente de quark. Siguiendo estas consideraciones es importante verificar si el potencial termodinámico del modelo de PNJL no-local estudiado respeta la simetría  $Z_3$  extendida. Esto es lo que se demuestra a continuación. Los dos últimos términos en el gran potencial (5.2), con los apropiados cambios para incluir potencial químico finito, son obviamente invariantes ante las transformaciones definidas en la Ec. (6.6). Para comprobar la invariancia del primer término es conveniente reescribir dichas transformaciones de una manera equivalente

$$\begin{aligned}\phi_3(\theta) &\rightarrow \phi_3(\theta) \\ \phi_8(\theta) &\rightarrow \phi_8(\theta) - 2k\pi T/\sqrt{3} \\ \theta &\rightarrow \theta + 2k\pi/3.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Es fácil ver que cualquier suma de la forma

$$\sum_{c=r,g,b} F[(\rho_{n,\vec{p}}^c)^2]$$

donde  $F$  es una función arbitraria, resulta invariante bajo las transformaciones de la simetría  $Z_3$  extendida. La invariancia de los términos introducidos en la regularización del gran potencial se prueba de la misma manera.

Una vez verificado que el modelo de PNJL no-local es invariante ante transformaciones del grupo extendido  $Z_3$  podemos mostrar los resultados del análisis numérico del comportamiento de los distintos parámetros de orden como funciones de  $T$  y  $\theta$ . En primera instancia mantenemos fija la temperatura, y verificamos que la periodicidad de las distintas cantidades termodinámicas como funciones de  $\theta$  se satisface. En lo que sigue nos concentraremos en el caso del potencial de PL logarítmico. La situación correspondiente al potencial polinómico será discutida más adelante. En la Fig. (6.1) encontramos, de arriba hacia abajo, el módulo del *loop* de Polyakov extendido, su fase, el valor medio  $\bar{\sigma}_1$ , el condensado quiral, y el potencial termodinámico en función de  $\theta/(\pi/3)$  para varias temperaturas. Es importante notar que

## 6.2. Diagrama de fases para potencial químico imaginario

---

el PL extendido, definido por  $\Psi = \exp(i\theta)\Phi$  es invariante ante las transformaciones dadas en Eq. (6.6) por construcción, y la fase  $\psi$  puede ser tomada como parámetro de orden de la transición RW [102]. Los resultados que se presentan corresponden al set B con  $T_0 = 208$  MeV, siendo cualitativamente similares para el set C y/o  $T_0 = 270$  MeV. Para el set A con  $T_0 = 208$  MeV, si bien se observa la misma periodicidad, en la zona de transición (es decir, temperaturas equivalentes a los casos de  $T = 177, 185$  MeV mostrados en Fig. (6.1)) las curvas son siempre discontinuas. En cambio, para el set A con  $T_0 = 270$  MeV la situación es similar a la indicada en Fig. (6.1). Se puede ver que para  $T > T_{RW}$  encontramos la transición RW de primer orden para  $\theta = \pi/3$ , esto se muestra como una discontinuidad en la fase del PL. Si nos concentramos en la región donde  $0 \leq \theta \leq \pi/3$  observamos que para valores de la temperatura  $T_c(\theta = 0) \leq T \leq T_{RW}$  los parámetros de orden para el deconfinamiento y simetría quiral muestran signos de una transición de fase. Esto se puede observar en la Fig. (6.2) donde presentamos el comportamiento de los parámetros de orden y las susceptibilidades correspondientes como función de la temperatura, tomando ahora  $\theta$  fijo para dos valores representativos  $\theta = \pi/6$  y  $\pi/3$ . Las curvas graficadas corresponden al set B con  $T_0 = 208$  MeV. Notamos que para  $\theta = \pi/6$  ambas son transiciones suaves. Asimismo, se puede observar que en este caso las funciones respuesta asociadas a ambos parámetros presentan un pico en la misma temperatura. Esto puede interpretarse como una señal del entrelazamiento que existe entre estas transiciones. Sin embargo, vemos que la susceptibilidad quiral muestra además un pico más ancho en la zona de altas temperaturas, y al crecer  $\theta$  este pico se va haciendo cada vez más importante. Ya para  $\theta = \pi/3$  encontramos una transición de primer orden señalada por la discontinuidad de todas las funciones de la temperatura que mostramos. Sin embargo, más allá de esta discontinuidad podemos ver el pico ancho en la susceptibilidad quiral recién mencionado. Todo esto lleva a interpretar como temperatura para la restauración de la simetría quiral a la temperatura donde se encuentra el máximo de este pico ancho, por lo que entendemos que la transición de deconfinamiento es la que cambia de carácter, mientras que la restauración quiral es un crossover para ambos valores de  $\theta$ . Para el set C y/o  $T_0 = 270$  MeV y set A con  $T_0 = 270$  MeV observamos una situación muy similar, mientras que para el set A con  $T_0 = 208$  MeV se encuentra que la transición es de primer orden para cualquier valor de  $\theta$  en el rango de temperaturas consideradas.

En la Fig. (6.3) podemos ver la dependencia de la temperatura crítica  $T_c$  como función de  $\theta$  para los tres sets de parámetros utilizando el potencial logarítmico para el PL con  $T_0 = 270$  MeV. Junto con nuestros resultados mostramos los valores obtenidos con técnicas de LQCD que se encuentran en la Ref. [40]. Dado que, como ya se ha mencionado en el Cap.5, en este

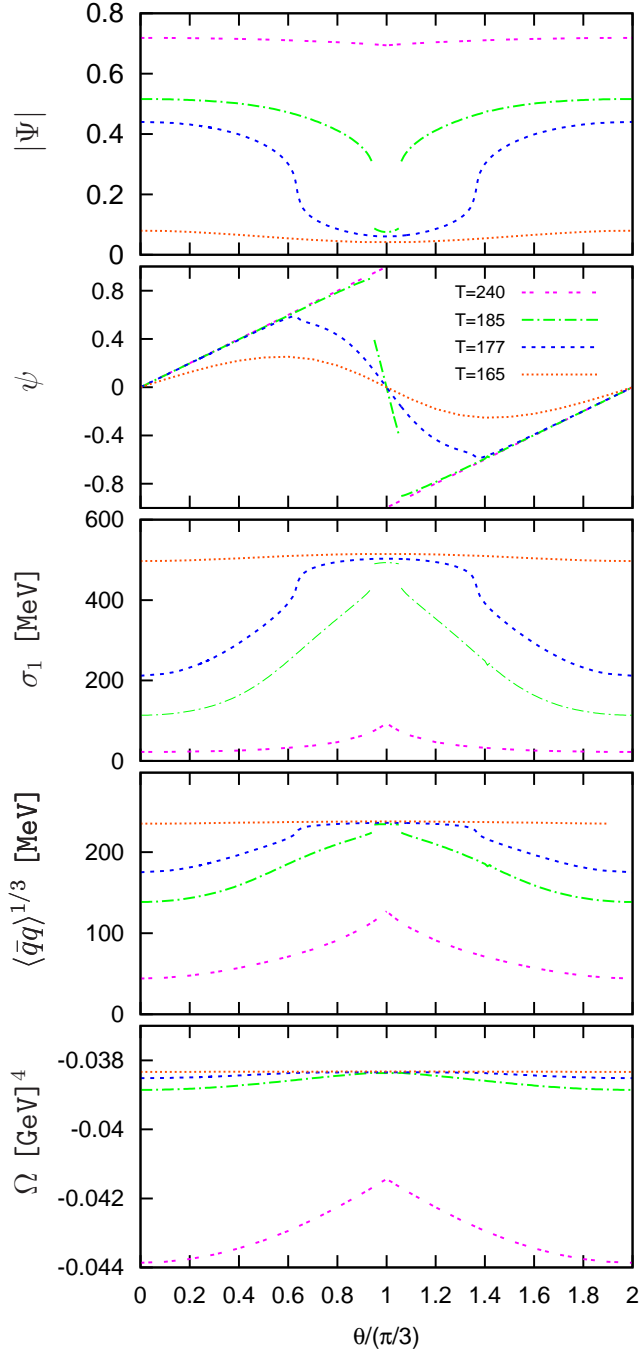


Figura 6.1: Algunas funciones termodinámicas en función de  $\theta/(\pi/3)$ , con  $T$  fija. La periodicidad que se observa es debida a que el modelo nPNJL es invariante ante transformaciones del grupo extendido  $Z_3$ . Los resultados corresponden al set B.

## 6.2. Diagrama de fases para potencial químico imaginario

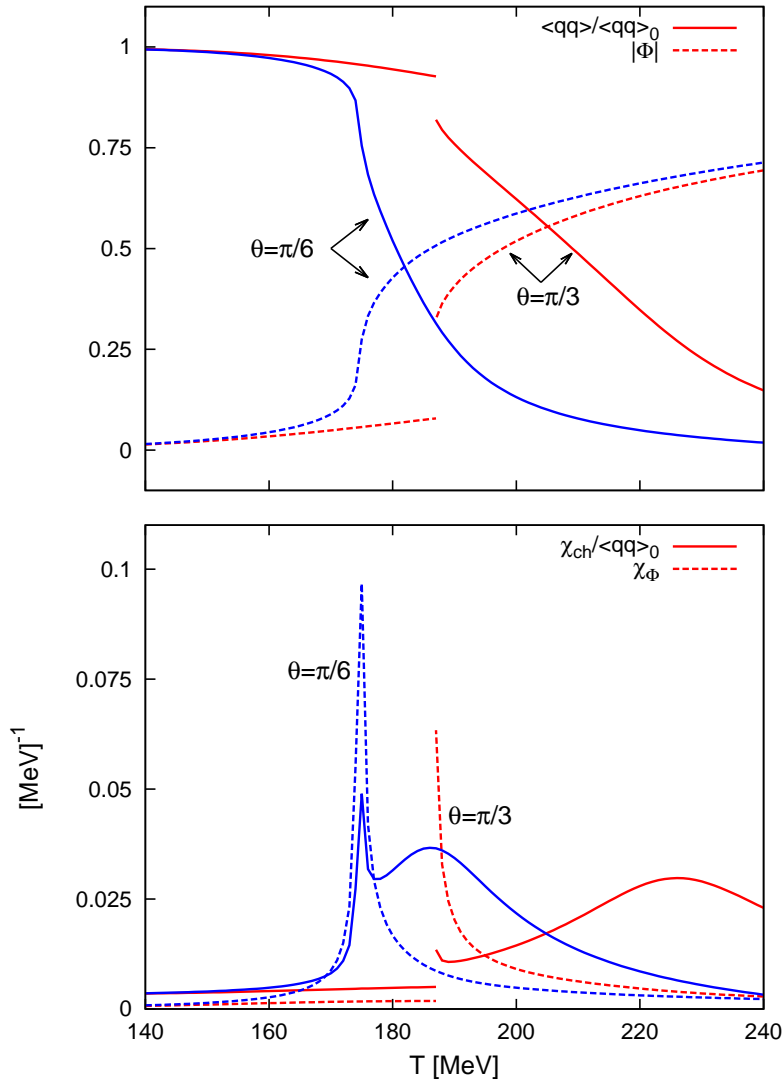


Figura 6.2: Parámetros de orden para las transiciones de deconfinamiento y restauración de la simetría quiral (arriba) y sus correspondientes susceptibilidades (abajo) como funciones de  $T$  para  $\theta = \pi/6$  y  $\theta = \pi/3$ . Las curvas corresponden al set B.

caso el modelo nPNJL predice temperaturas críticas a  $\mu = 0$ ,  $T_c(0)$ , bastante superiores a las de LQCD hemos normalizado todas las temperaturas con los correspondientes valores de  $T_c(0)$ . Vemos que si bien la dependencia en  $\theta$  es similar a los resultados de LQCD, las temperaturas predichas se encuentran fuera de las barras de error de dichos resultados. Además vemos que a medida que  $\theta$  crece se observa una creciente separación entre las temperaturas de deconfinamiento y las de restauración de simetría quiral, lo cual no es consistente con los resultados de LQCD. Tal como se muestra en la Fig. (6.4) la situación muestra una cierta mejora si se considera  $T_0 = 208$  MeV. En este caso la comparación puede hacerse directamente con los valores absolutos de las temperaturas notando que los resultados de LQCD tienen un error del orden del 10 % debido a la incerteza en la determinación de  $T_c(\theta = 0)$ . Vemos que ahora las temperaturas de deconfinamiento se encuentran razonablemente próximas a los resultados de LQCD. En particular, los valores obtenidos para  $T_{RW}$  son 191 MeV, 188 MeV y 191 MeV para los sets A, B y C respectivamente, resultados compatibles con el valor estimado con LQCD,  $T_{RW} = 185(9)$  MeV [40]. Por el contrario, al igual que en el caso  $T_0 = 270$  MeV, las temperaturas de restauración de simetría quiral muestran un creciente apartamiento respecto de las de deconfinamiento a medida que  $\theta$  crece. Recientemente ha sido sugerido que la incorporación de una interacción vectorial [107] puede ayudar a solucionar esta discrepancia con los resultados de LQCD. Como ya hemos mencionado, en este caso mientras que para el set A el deconfinamiento es siempre una transición de primer orden, en los casos de los sets B y C existe un valor crítico  $\theta_{CEP} \sim 0,7 \times \pi/3$  por debajo del que ésta ocurre como un crossover. Por lo tanto, encontramos que al igual de lo que sucede para  $T_0 = 270$  MeV para los tres sets de parámetros las líneas de transición correspondientes son de primer orden cuando alcanzan el punto final RW. Esto implica que el punto final RW es un punto triple, siendo la transición RW también de primer orden allí. El carácter de la transición RW en el punto final se puede ver en la Fig. (6.2) donde graficamos el comportamiento de la fase del PL extendido  $\Psi$  en  $\theta = \pi/3$  como función de  $T$ .

Hasta aquí nos hemos concentrado en los resultados obtenidos para el potencial de PL logarítmico. Discutiremos ahora los correspondientes al potencial polinómico. La principal diferencia es que en este caso no existen nunca transiciones de deconfinamiento de primer orden. En particular esto implica que para este potencial el carácter de la transición RW en el punto final es de segundo orden para todos los casos estudiados. Esto se ilustra en la Fig. (6.2) para el set C con  $T_0 = 208$  MeV. Esta característica del potencial polinómico está en contradicción con los resultados de LQCD [103, 104, 105, 106] que indican en el RW la transición es de primer orden para masas de quarks físicas.

## 6.2. Diagrama de fases para potencial químico imaginario

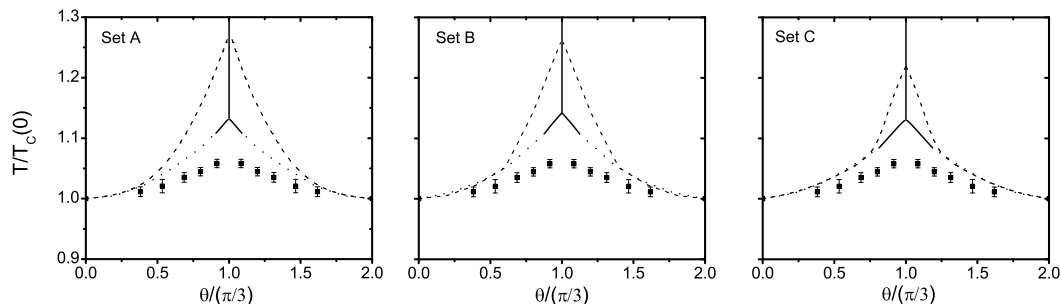


Figura 6.3: Temperatura crítica normalizada a su valor en  $\theta = 0$  como función de  $\theta = \pi/3$  para los sets de parámetros A (izquierda), B (centro) y C (derecha). Las líneas sólidas representan transiciones de primer orden, y discontinuas corresponden a las transiciones de primer orden y crossover respectivamente. Los puntos corresponden a resultados de LQCD [40]. Las líneas sólidas verticales corresponden a la transición RW de primer orden. Los resultados corresponden al potencial logarítmico con  $T_0 = 270$  MeV.

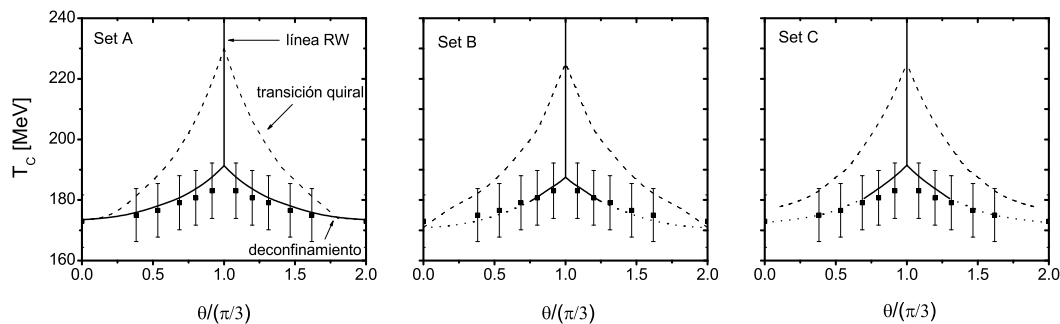


Figura 6.4: Temperatura crítica como función de  $\theta = \pi/3$  para los sets de parámetros A (izquierda), B (centro) y C (derecha). Las líneas sólidas representan transiciones de primer orden. Las líneas de puntos y discontinuas corresponden a las transiciones de deconfinamiento y restauración quiral respectivamente cuando éstas son tipo crossover. Las curvas fueron obtenidas considerando el potencial logarítmico con  $T_0 = 208$  MeV. Los puntos corresponden a resultados de LQCD [40].

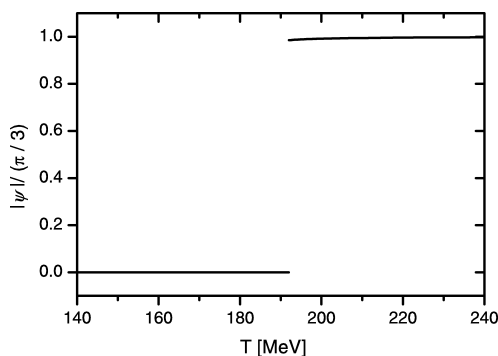


Figura 6.5: Fase del *loop* de Polyakov extendido  $\Psi = \exp(i\theta)\Phi$  como función de  $T$  para  $\theta = \pi/3$ . La curva corresponde al set C usando potencial logarítmico con  $T_0 = 208$  MeV.

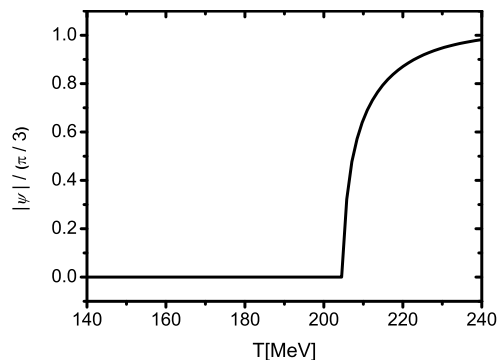


Figura 6.6: Fase del *loop* de Polyakov extendido en función de la temperatura para el caso de potencial polinómico usando set C con  $T_0 = 208$  MeV.

En cuanto a las predicciones para  $T_{RW}/T_c(0)$ , estas son algo mayores que las encontradas en el caso del potencial logarítmico. Por otro lado, las predicciones para los cocientes  $T_{ch}/T_c(0)$  en  $\theta = 1$  son semejantes a las obtenidas con el potencial logarítmico cuando se considera  $T_0 = 208$  MeV, y mayores en el caso de  $T_0 = 270$  MeV.

### 6.3. Diagrama de fases para potencial químico real

Pasemos ahora a discutir los resultados para el potencial químico real. Para obtener el diagrama de fases en el plano  $T - \mu$  estudiamos el comportamiento de los parámetros de orden para las transiciones de deconfinamiento

### 6.3. Diagrama de fases para potencial químico real

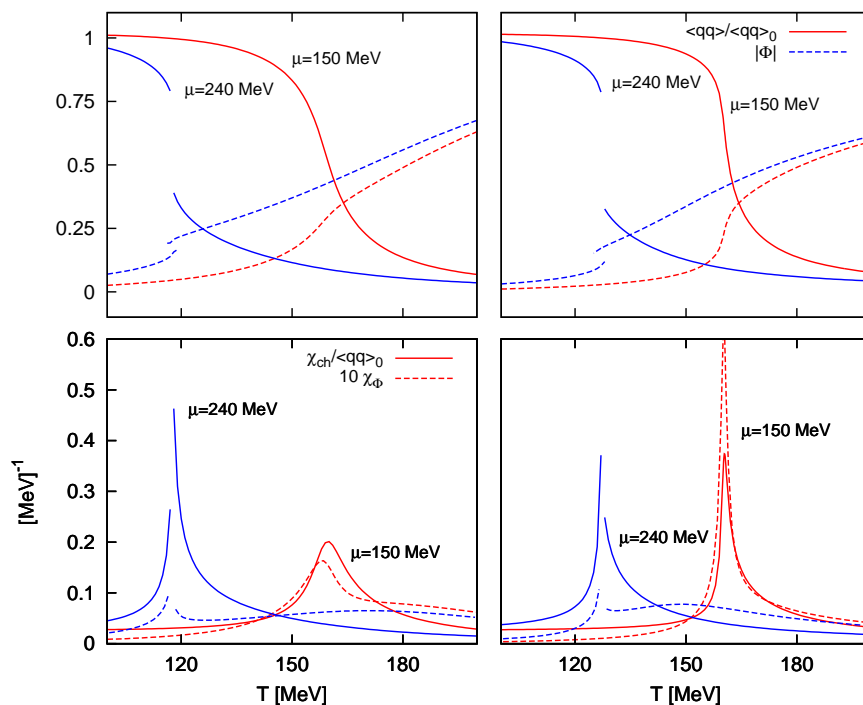


Figura 6.7: Parámetros de orden y sus correspondientes susceptibilidades para dos valores representativos de potencial químico real. Los paneles de la izquierda corresponden a la forma polinómica del potencial del PL, y los de la derecha a la expresión logarítmica. En ambos casos los resultados fueron obtenidos tomando  $T_0 = 208$  MeV y la parametrización del set C.

y restauración de simetría quiral como funciones de la temperatura, variando el valor del potencial químico. Ilustramos esto en la Fig. (6.7), donde se pueden ver el condensado quiral normalizado a su valor en  $T = 0$  y  $\Phi$ , en los paneles superiores, y las correspondientes susceptibilidades en los inferiores, para dos valores representativos del potencial químico, y las dos formas alternativas del potencial para el PL que ya hemos utilizado (polinómico a la izquierda y logarítmico a la derecha), con  $T_0 = 208$  MeV. Las curvas de la figura corresponden al set C. En la Fig. (6.7) se puede observar que para  $\mu = 150$  MeV existe una temperatura para la que el condensado cae rápidamente, señal de la restauración de simetría quiral, mientras que de manera simultánea  $\Phi$  aumenta, indicando que comienza la transición confinamiento-deconfinamiento. Notamos que para este valor de potencial químico ambas transiciones son tipo crossover. Además, si observamos las susceptibilidades correspondientes encontramos que, para el potencial logarítmico los picos coinciden exactamente, mientras que para el potencial polinómico encon-

tramos un leve desfase, es decir que hay una pequeña diferencia entre las temperaturas críticas asociadas a las dos transiciones. Este comportamiento es similar al que hallamos en el caso de potencial químico cero. Asimismo volvemos a encontrar que las transiciones ocurren más suavemente cuando tomamos para el PL el potencial polinómico.

Si comenzamos a aumentar el potencial químico encontramos que existe un valor a partir del cual hay una discontinuidad en el condensado quiral, lo cual indica que la transición es ahora de primer orden. En particular aquí mostramos el caso  $\mu = 240$  MeV. El carácter de esta transición induce una discontinuidad también en el parámetro de orden para el deconfinamiento. Sin embargo, esta transición ocurre en realidad a temperaturas más altas, y siempre de forma suave. Para caracterizar su posición utilizamos el pico en la susceptibilidad del PL el cual, en la región en la que la restauración quiral es una transición de primer orden, aparece luego de la discontinuidad.

En la Fig. (6.8) se muestra una recopilación de diagramas de fases. Recorriendo las filas de arriba hacia abajo encontramos resultados correspondientes a los sets A, B y C. Las columnas de la izquierda y derecha corresponden a cálculos realizados utilizando los potenciales polinómico y logarítmico respectivamente. Además, en cada panel tenemos en realidad dos diagramas: uno para cada valor alternativo del parámetro  $T_0$ . Observamos en primer lugar que, así como en el caso de potencial químico cero, las transiciones de restauración quiral y deconfinamiento ocurren prácticamente a la misma temperatura crítica en todo el rango de valores de  $\mu$  en el que la restauración quiral es un crossover. Encontramos que para el potencial logarítmico las transiciones están fuertemente entrelazadas (líneas discontinuas con puntos), mientras que para el potencial polinómico, si bien existe una diferencia entre las temperaturas críticas, la máxima separación se encuentra para el caso ya estudiado de  $\mu = 0$ , es decir que  $\Delta T_c < 10$  MeV.

En cuanto al carácter de las transiciones, observamos que el caso del set A,  $T_0 = 208$  MeV es el único en el que se encuentra que la transición quiral es siempre de primer orden. Para el resto de las combinaciones de sets de parámetros y potenciales del PL, la línea de transición quiral tiene un punto para el que el cambio de fase deja de ser de primer orden y pasa a ser un crossover. A este punto en el que ocurre el cambio de carácter se lo conoce como punto crítico final (CEP por su nombre en inglés). Vemos que para el set que tiene en cuenta la WFR el CEP se encuentra más cerca de la línea de  $T = 0$  MeV que para los otros sets. Si pasamos de éste al set B y luego al C, hallamos que el potencial químico para el punto crítico final es cada vez más alto y la temperatura más baja. En todos los casos lo encontramos para un valor de  $\mu$  entre 130 MeV y 233 MeV y  $T$  entre 125 MeV y 198 MeV.

Adicionalmente, como ya hemos mencionado, el hecho de que la tran-

### 6.3. Diagrama de fases para potencial químico real

---

sición quiral sea de primer orden implica una discontinuidad en todas las cantidades que estamos observando. También señalamos unos párrafos más arriba que tomamos como signatura para la transición de deconfinamiento el máximo en la susceptibilidad del PL, coincidiendo éste con el de la susceptibilidad quiral en la región de crossover. Ahora bien, cuando nos acercamos al CEP existe cierta dificultad para determinar la temperatura de deconfinamiento (línea de puntos) debido a que el pico en  $\chi_\Phi$  se encuentra cerca de la discontinuidad. Existe una alternativa para caracterizar dicha transición, y es tomar como  $T_\Phi$ , la temperatura para la que  $\Phi = 0,3$ . En la región de crossover, es muy parecida a las otras dos  $T_c$ , por ejemplo, para el set C, con el potencial polinómico y  $T_0 = 208$  MeV, encontramos que cuando  $\mu = 0$  estas temperaturas son  $T_{ch} = 180,5$  MeV,  $T_\Phi = 175,9$  MeV y  $T_{\Phi=0,3} = 174,3$  MeV. Usando el criterio de  $\Phi = 0,3$ , la línea de deconfinamiento es una curva suave que acompaña a la transición quiral crossover y luego continúa casi como una línea recta al crecer  $\mu$ .

Finalmente, y con la intención de ilustrar en forma simultánea los resultados que hemos obtenido estudiando las transiciones de fase para potencial químico imaginario y real, mostramos en la Fig. (6.3) un diagrama de fases en el plano  $T - \mu^2$ . Las curvas que mostramos corresponden al set C, utilizando el potencial logarítmico con  $T_0 = 208$  MeV. Debe notarse que, en función de todo lo discutido aquí, dicho caso es el que mejor acomoda las distintas restricciones impuestas por los resultados de LQCD. En la zona de potencial químico real encontramos la transición de restauración de simetría quiral representada con una línea sólida cuando es de primer orden. Por debajo de esta curva encontramos quarks confinados, y la simetría quiral se halla espontáneamente rota. Siguiendo esta línea hacia valores más chicos de  $\mu$  nos encontramos con el punto crítico final, a partir del cual esta transición tiene lugar como un suave crossover. En esta región, la transición quiral y el deconfinamiento ocurren en simultáneo, esto se muestra con una línea de punto y trazo. Mientras la transición quiral es de primer orden, antes de encontrarnos con el punto crítico final, observamos, representada en línea de puntos, la transición de deconfinamiento. Vemos así delimitada una zona en la que la simetría quiral está restaurada pero aún hay confinamiento, a esta fase se la conoce como *quarkonia*. Si pasamos a la zona de potencial químico imaginario, encontramos una imagen “deformada” de la Fig. (6.4), por el efecto de pasar de graficar en función de  $\theta/(\pi/3)$  a tomar como variable  $\mu^2$ . Si mirásemos el diagrama para valores del cuadrado del potencial químico más negativos, encontraríamos copias de lo que observamos en este intervalo, debido a la periodicidad RW. Partiendo desde potencial químico cero hacia valores negativos de  $\mu^2$  encontramos dos líneas que corresponden a transiciones tipo crossover: deconfinamiento (línea de puntos) y restauración

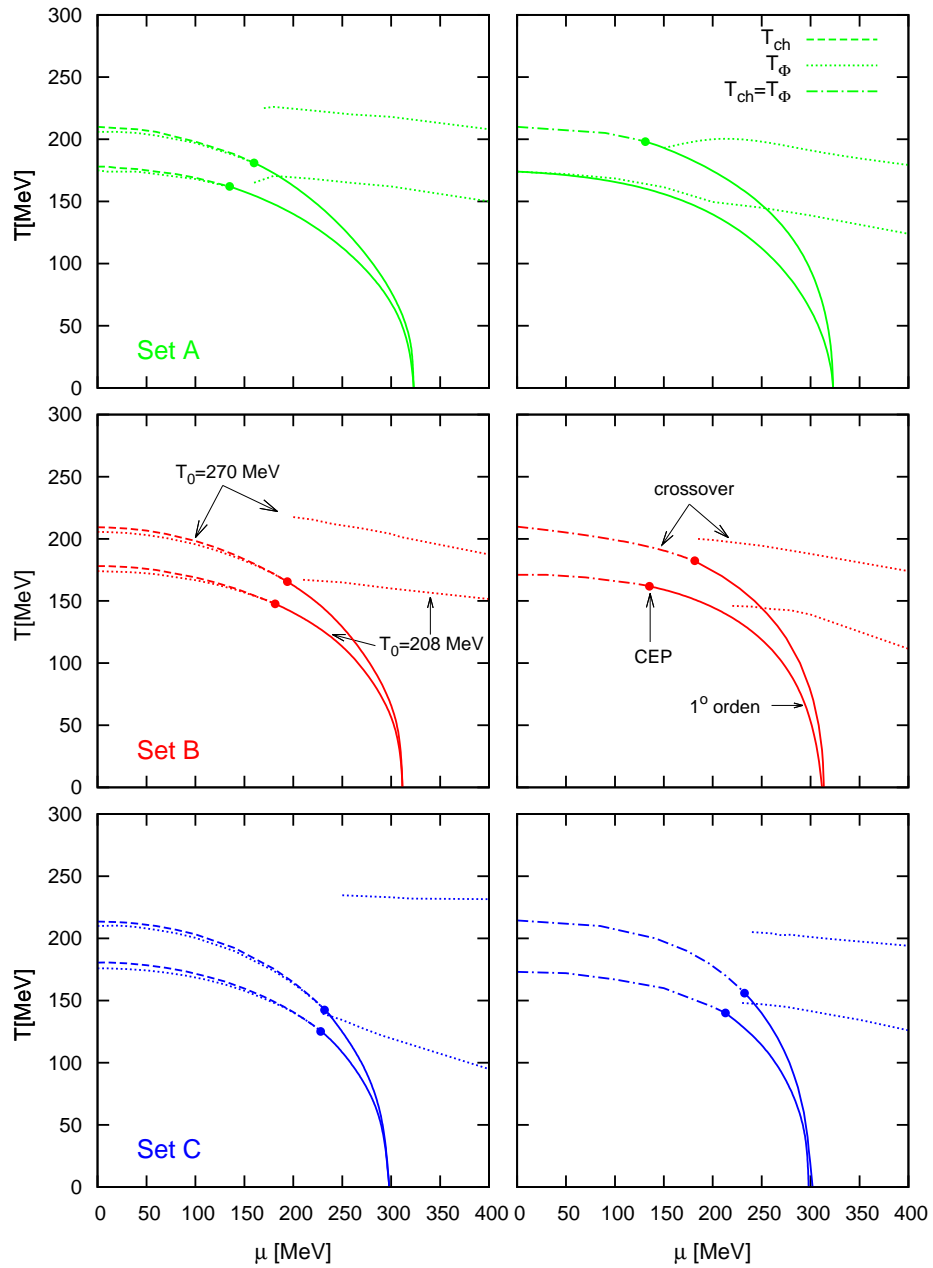


Figura 6.8: Diagramas de fases para los sets A (arriba), B (centro) y C (abajo) obtenidos considerando los potenciales polinómico (izquierda) y logarítmico (derecha) para el PL. Las líneas sólidas corresponden a transiciones quirales de primer orden. Las líneas discontinuas y de puntos representan transiciones tipo crossover quirales y de deconfinamiento respectivamente. La transición de deconfinamiento está indicada con línea de puntos.





# Capítulo 7

## Propiedades mesónicas a temperatura finita

En los dos capítulos anteriores hemos examinado, utilizando el modelo de PNJL no-local en la aproximación de campo medio, las transiciones de fase de restauración de simetría quiral y confinamiento-deconfinamiento bajo distintas condiciones. Por otra parte, en el Cap. 2, hemos visto que una consecuencia de la ruptura espontánea de la simetría quiral es la existencia del mesón pseudoescalar  $\pi$  y su compañero quiral el mesón  $\sigma$ . Asimismo hemos discutido en el Cap. 4 cómo calcular algunas propiedades de estos mesones incluyendo el ancho de decaimiento asociado al proceso  $\sigma \rightarrow \pi\pi$ , lo cual requiere tomar el desarrollo de la acción hasta tercer orden en las fluctuaciones de los campos mesónicos.

En este último capítulo nos dedicamos al estudio de las propiedades de los mesones  $\sigma$  y  $\pi$  en función de la temperatura, nos concentramos específicamente en las masas, la constante de decaimiento débil del pión y el ancho de decaimiento del mesón  $\sigma$ . Para llevar esta tarea a cabo necesitamos hacer la correspondiente extensión del formalismo desarrollado en la Sec. 4.2, considerando también el acoplamiento de los campos fermiónicos al *loop* de Polyakov. Concretamente, teniendo en cuenta estas dos cuestiones, el término cuadrático de la acción que escribimos en la Ec. (4.28) resulta

$$S_E^{quad} = \frac{1}{2} \sum_M \int_{q,m} G_M(\vec{q}^2, \nu_m^2) \delta M(q_m) \delta M(-q_m), \quad M = \sigma_1, \sigma_2, \pi, \quad (7.1)$$

donde hemos definido  $q_m = (\vec{q}, \nu_m)$  con  $\nu_m = 2m\pi T$  y además hemos usado la notación  $\int_{q,m} = T \sum_m \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}$ . En la extensión a temperatura finita las funciones  $G_M(\vec{q}^2, \nu_m^2)$  resultan ser las siguientes. Para el caso pseudoscalar

se obtiene

$$G_\pi(\vec{q}^2, \nu_m^2) = \frac{1}{G_S} - 8 \sum_c \int_{p,n} g^2(p_{nc} + \frac{q_m}{2}) \frac{Z(p_{nc} + q_m)Z(p_{nc})}{D(p_{nc} + q_m)D(p_{nc})} \times \\ \left[ p_{nc}^2 + p_{nc} \cdot q_m + M(p_{nc} + q_m)M(p_{nc}) \right], \quad (7.2)$$

con  $p_{nc} = (\vec{p}, 2n\pi T + \phi_c)$  y  $D(q) = q^2 + M^2(q^2)$ , mientras para el sistema  $\sigma, \sigma'$  el resultado es

$$G_{\sigma, \sigma'}(\vec{q}^2, \nu_m^2) = \frac{G_{\sigma_1 \sigma_1}(\vec{q}^2, \nu_m^2) + G_{\sigma_2 \sigma_2}(\vec{q}^2, \nu_m^2)}{2} \\ \mp \sqrt{[G_{\sigma_1 \sigma_2}(\vec{q}^2, \nu_m^2)]^2 + \left[ \frac{G_{\sigma_1 \sigma_1}(\vec{q}^2, \nu_m^2) - G_{\sigma_2 \sigma_2}(\vec{q}^2, \nu_m^2)}{2} \right]^2} \quad (7.3)$$

donde

$$G_{\sigma_1 \sigma_1}(\vec{q}^2, \nu_m^2) = \frac{1}{G_S} - 8 \sum_c \int_{p,n} g^2(p_{nc} + \frac{q_m}{2}) \frac{Z(p_{nc} + q_m)Z(p_{nc})}{D(p_{nc} + q_m)D(p_{nc})} \times \\ \left[ p_{nc}^2 + p_{nc} \cdot q_m - M(p_{nc} + q_m)M(p_{nc}) \right], \\ G_{\sigma_2 \sigma_2}(\vec{q}^2, \nu_m^2) = \frac{1}{G_S} + \frac{8}{\kappa_p^2} \sum_c \int_{p,n} (p_{nc} + \frac{q_m}{2})^2 f^2(p_{nc} + \frac{q_m}{2}) \frac{Z(p_{nc} + q_m)Z(p_{nc})}{D(p_{nc} + q_m)D(p_{nc})} \\ \times \left[ p_{nc}^2 + p_{nc} \cdot q_m - M(p_{nc} + q_m)M(p_{nc}) + \frac{p_{nc}^2(p_{nc} + q_m)^2 - (p_{nc}^2 + p_{nc} \cdot q_m)^2}{2(p_{nc} + q_m/2)^2} \right] \\ G_{\sigma_1 \sigma_2}(\vec{q}^2, \nu_m^2) = -\frac{8}{\kappa_p^2} \sum_c \int_{p,n} g(p_{nc} + \frac{q_m}{2}) f(p_{nc} + \frac{q_m}{2}) \frac{Z(p_{nc} + q_m)Z(p_{nc})}{D(p_{nc} + q_m)D(p_{nc})} \\ \times (p_{nc} + \frac{q_m}{2}) \cdot [p_{nc}M(p_{nc} + q_m) + (p_{nc} + q_m)M(p_{nc})]. \quad (7.4)$$

Para el caso de  $T = 0$  las masas se pueden encontrar buscando los polos del propagador correspondiente, como indica la Ec. (4.2.2). En el caso de temperatura utilizaremos

$$G_M(-m_M^2, 0) = 0. \quad (7.5)$$

Las masas determinadas mediante estas ecuaciones corresponden a las masas mesónicas espaciales de apantallamiento (*screening-masses*) asociadas a los modos cero de Matsubara. Sus inversas describen la longitud de persistencia de dichos modos en equilibrio con el baño térmico. Se debe notar que existe

---

una masa de apantallamiento por cada modo de Matsubara. El propagador completo del estado ligado puede calcularse a partir de cualquier tensor de polarización que reciba una contribución del estado ligado, pero sólo una vez que todas las masas de apantallamiento hayan sido determinadas. El propagador que se obtiene de esa manera sólo está definido en un número discreto de puntos sobre lo que sería el eje imaginario de energías. La *masa de polo*, es decir la masa que da la energía del polo asociado al estado ligado para  $q = 0$ , se obtiene luego de realizar una continuación analítica del propagador sobre el eje real. Debe notarse que el hecho de que la invarianza de Lorentz este rota para  $T > 0$  implica que en general la *masa de polo* y las masas de apantallamiento no sean iguales (ver p.ej. Ref. [108]). Si bien la continuación analítica involucrada en este procedimiento no es unívoca, es posible obtener un resultado libre de ambigüedades requiriendo que la función esté acotada en el infinito complejo y que sea analítica sobre el eje real [109]. De esto resulta claro que las masas de apantallamiento determinan completamente las propiedades de los estados ligados a  $T > 0$ . Las masas asociadas con los modos cero de Matsubara aquí estudiadas son las masas espaciales de apantallamiento correspondientes al comportamiento  $\exp(-m_M r)$  en el 3 – espacio conjugado de coordenadas, y están asociadas al estado más bajo en cada canal de mesón. En verdad, estas son las cantidades que usualmente se determinan en los cálculos de LQCD [35].

Otra propiedad que hemos discutido para temperatura cero es la constante de decaimiento débil del pión,  $f_\pi$ , que es otro observable útil para investigar la restauración de simetría quiral. Para describir su comportamiento a temperatura finita es necesario reemplazar en la Ec. (4.46) la función  $F_0$  por su correspondiente extensión, que es

$$F_0(\vec{q}^2, \nu_m^2) = 8 \sum_c \int_{p,n} g^2(p_{nc} + \frac{q_m}{2}) \frac{Z(p_{nc} + q_m)Z(p_{nc})}{D(p_{nc} + q_m)D(p_{nc})} \times [p_{nc}^2 + p_{nc} \cdot q_m + M(p_{nc} + q_m)M(p_{nc})]. \quad (7.6)$$

Además, como ya hemos mencionado, tomando la expansión hasta tercer orden en las fluctuaciones mesónicas es posible encontrar el ancho para el decaimiento  $\sigma \rightarrow \pi\pi$  (Ec. (4.55)). Si deseamos analizar su comportamiento a temperatura finita debemos obtener también en función de  $T$  la constante de acoplamiento  $g_{M\pi\pi}$  que obtenemos evaluando el diagrama que se muestra en la Fig. (4.2). Para esto utilizamos las correspondientes expresiones para los vértices (4.52), que se pueden obtener de la misma manera.

A continuación presentamos los resultados que hemos obtenido en el contexto del modelo nPNJL para estas propiedades mesónicas. Comenzamos analizando el comportamiento de las masas de los mesones  $\sigma$  y  $\pi$ . Ante todo

debemos notar que, como ya se ha mencionado en el Sec. 4.2.6, que cuando la temperatura es cero encontramos para las masa del mesón  $\sigma$  los valores 683, 622 y 554 MeV para los sets de parámetros A, B y C respectivamente. De estos tres el valor obtenido utilizando el set C es el muestra mejor acuerdo con los valores empíricos con los que contamos actualmente que son  $478^{+24}_{-23}$  [73] y  $390^{+60}_{-36}$  [74]. Recordamos que el valor de  $m_\pi(0) = 139$  MeV es un input para fijar los parámetros de cada set. En la Fig. (7.1) se muestran las masas del pión y  $\sigma$  en función de  $T/T_c$  para cada uno de los potenciales considerados para el PL, polinómico en el panel de la izquierda y logarítmico a la derecha. Estos son resultados que se han obtenido considerando  $T_0 = 208$  MeV, y en cada panel se muestran para los tres sets de parámetros. En esta figura se puede observar que las masas permanecen aproximadamente constantes en sus valores para temperatura cero, hasta que, alcanzando la temperatura crítica para la restauración de la simetría quiral, la masa del mesón  $\sigma$  comienza a decaer hasta alcanzar un mínimo. Aproximadamente a la misma temperatura, la masa  $m_\pi$  comienza a crecer, y una vez que se ha superado la  $T_c$ , la masa del pión y la de su compañero quiral  $\sigma$  crecen juntas, tendiendo a su valor asintótico que es el valor correspondiente a un par quark-antiquark sin masa no correlacionados, es decir  $2\pi T$  [108, 110]. Si observamos el comportamiento en función de la temperatura sin normalizar encontramos que este límite aún no se ha alcanzado para las mayores temperaturas consideradas. Esto se debe a que cuando  $T/T_c \simeq 1,4$  el PL aún no ha alcanzado su valor asintótico  $\phi_3/T|_{T \rightarrow \infty} = 0$ , por lo que todavía contribuye de una manera no despreciable a la masa de apantallamiento de los quarks. Por lo tanto, alrededor de dichas temperaturas se espera  $m_M = 2(\pi T - \phi_3)$  lo que hace que de todas maneras una vez restaurada la simetría quiral todas las curvas tiendan a ser rectas que tienen aproximadamente la misma pendiente. Notamos que, como es esperable, en el caso del set A con el potencial logarítmico (línea de puntos en el panel de la derecha) para el que la restauración quiral es una transición de primer orden, se observa una discontinuidad en las masas. Con la salvedad de este caso, en el resto los resultados son cualitativamente semejantes.

En la Fig. (7.2) podemos comparar el comportamiento de las masas para los dos potenciales del PL con el modelo de NJL no-local, sin inclusión del PL. Esto se muestra para  $T_0 = 270$  MeV en el panel de la izquierda y para el valor de  $T_0 = 208$  MeV, correspondiente a considerar el efecto de los quarks dinámicos sobre dicho parámetro, en el panel de la derecha. Todos los resultados corresponden al set C. En general, una consecuencia del acoplamiento de los quarks al PL es que la transición de fase se vuelve más abrupta [111], efecto que se observa claramente en ambos paneles de la figura. Se encuentra además, en relación a los potenciales que describen la termodinámica del PL

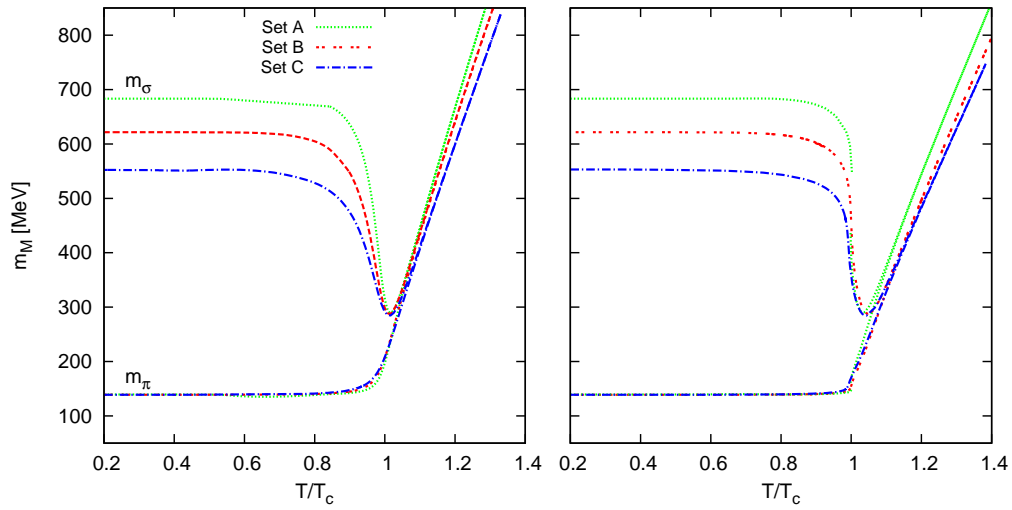


Figura 7.1: Masas de los mesones  $\sigma$  y  $\pi$  en función de  $T/T_c$  para los potenciales para el PL polinómico (izquierda) y logarítmico (derecha), considerando  $T_0 = 208$  MeV. En cada panel se muestran los resultados para los sets A, B y C, que, excluyendo el caso del set A, potencial polinómico, son cualitativamente parecidos. A una temperatura lo suficientemente alta  $m_\sigma$  y  $m_\pi$  están degeneradas, señalando la restauración de la simetría quiral.

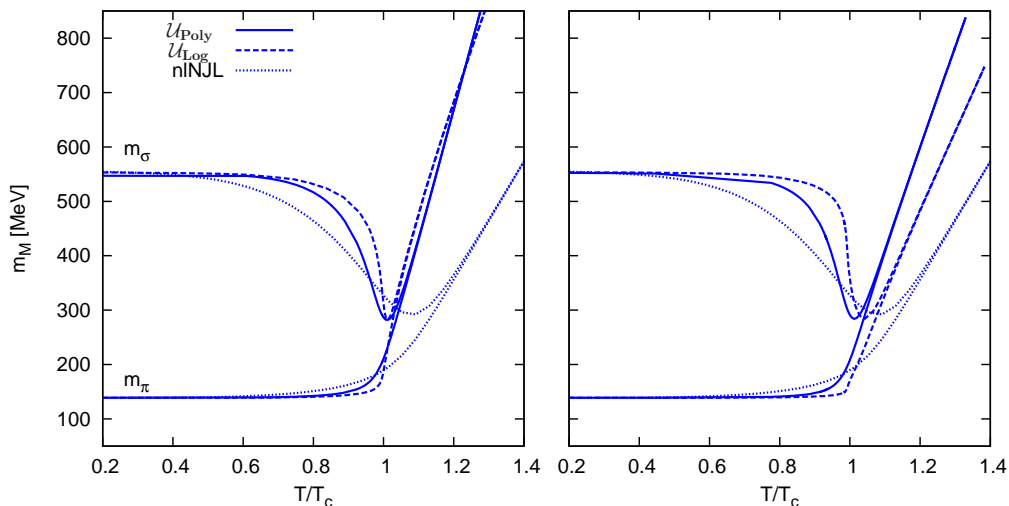


Figura 7.2: Masas de los mesones  $\sigma$  y  $\pi$  en función de  $T/T_c$  para el modelo nPNJL con los potenciales polinómico y logarítmico considerando  $T_0 = 270$  MeV (izquierda) y  $T_0 = 208$  MeV (derecha). En ambos paneles se muestran también los resultados para el modelo nNJL.

que consideramos en esta tesis, y como ya hemos observado en los capítulos anteriores, que con el potencial polinómico se encuentra que las transiciones son más suaves que con el logarítmico. La diferencia en cuanto a la suavidad de la transición estos tres casos, nNJL, y nPNJL con potencial polinómico o logarítmico, se ve acentuada cuando pasamos de considerar para el parámetro  $T_0$  el valor 270 MeV a 208 MeV. Para el modelo nNJL la transición es en verdad muy suave,  $m_\sigma$  comienza a decaer antes que en los otros casos y se encuentra con la masa de su compañero quiral a temperaturas mayores. Considerando las curvas correspondientes al potencial polinómico, vemos que los cambios en ellas que señalan la transición de fase son más pronunciados, y tomando el potencial logarítmico observamos que  $m_\sigma$  se mantiene en su valor para temperatura cero casi hasta llegar a  $T/T_c = 1$ , donde repentinamente ocurre la restauración de la simetría quiral. Por este motivo se observa que el mínimo de  $m_\sigma$  no se encuentra exactamente en  $T/T_c = 1$  para todos los casos.

Una vez que se ha obtenido la masa del pión, es posible encontrar la

---

constante de decaimiento débil  $f_\pi$ . En las Figs. (7.3) y (7.4) se presenta su comportamiento en función de  $T/T_c$ . Como ya hemos mencionado,  $f_\pi$  puede utilizarse como un parámetro de orden más para la restauración de la simetría quiral, transición de fase está señalada por su caída abrupta alrededor de  $T/T_c = 1$ . En la Fig. (7.3), donde encontramos los resultados para los tres sets de parámetros tomando  $T_0 = 208$  MeV para los dos potenciales del PL, nuevamente vemos que el único caso que presenta un comportamiento cualitativamente diferente es el del set A, con el potencial logarítmico, que presenta una discontinuidad al igual que las masas. Podemos comparar los resultados para  $f_\pi$  para el set C con el modelo sin PL, y con los dos potenciales para el PL, considerando la variación de  $T_0$ , en la Fig. (7.4). Allí observamos, como ya lo hicimos al estudiar las masas, que cuando tomamos  $T_0 = 208$  MeV hay una marcada diferencia en relación a la forma en la que ocurre la transición, siendo ésta escarpada para el potencial logarítmico y muy suave en el modelo nlNJL.

Pasemos ahora a analizar los resultados para el ancho de decaimiento del mesón escalar en el canal  $\sigma \rightarrow \pi\pi$ . Los valores que encontramos para  $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi}^{(T=0)}$  son 348, 262 y 184 MeV para los sets A, B y C respectivamente. En primer lugar podemos mencionar que, teniendo en cuenta los resultados que se obtienen en el contexto del modelo de NJL local, 129 – 779 MeV [112], en nuestro caso los resultados muestran una menor sensibilidad a la elección de los parámetros. Además, podemos comparar con los valores empíricos  $324_{-40}^{+42}$  [73] y  $282_{-50}^{+77}$  [74], y vemos que los valores que hallamos, tanto para los sets que incluyen WFR como para el que no, son aceptables.

En cuanto a la dependencia con la temperatura, en la figura (7.5) podemos ver el comportamiento de  $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi} / \Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi}^{(T=0)}$  en función de  $T/T_c$  obtenido con los dos potenciales para el PL, tomando  $T_0 = 208$  MeV. En ambos casos encontramos curvas correspondientes a los tres sets de parámetros, que se muestran cualitativamente muy similares entre si. Podemos observar allí que para todos los casos, el valor de  $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi} / \Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi}^{(T=0)}$  se mantiene aproximadamente constante hasta acercarse a  $T/T_c = 1$ , y allí cae a cero. Si volvemos a la Ec. (4.55) encontramos que en ella aparece el factor cinemático  $\sqrt{1 - 4m_\pi^2/m_\sigma^2}$ , que impone la restricción  $m_\sigma \leq 2m_\pi$ . Justamente, como hemos visto estudiando las masas, al restaurarse la simetría quiral  $m_\sigma$  decae,  $m_\pi$  aumenta, se viola la condición recién mencionada y el canal se cierra.

En la Fig. (7.6) encontramos el comportamiento con la temperatura de  $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi} / \Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi}^{(T=0)}$  obtenido con el modelo nlPNJL, considerando los potenciales polinómico y logarítmico para el parámetro  $T_0$  los valores 270 MeV (izquierda) y 208 MeV (derecha). En ambos casos se comparan las curvas con aquellas que se obtienen en el modelo no-local sin PL, y con resultados del modelo

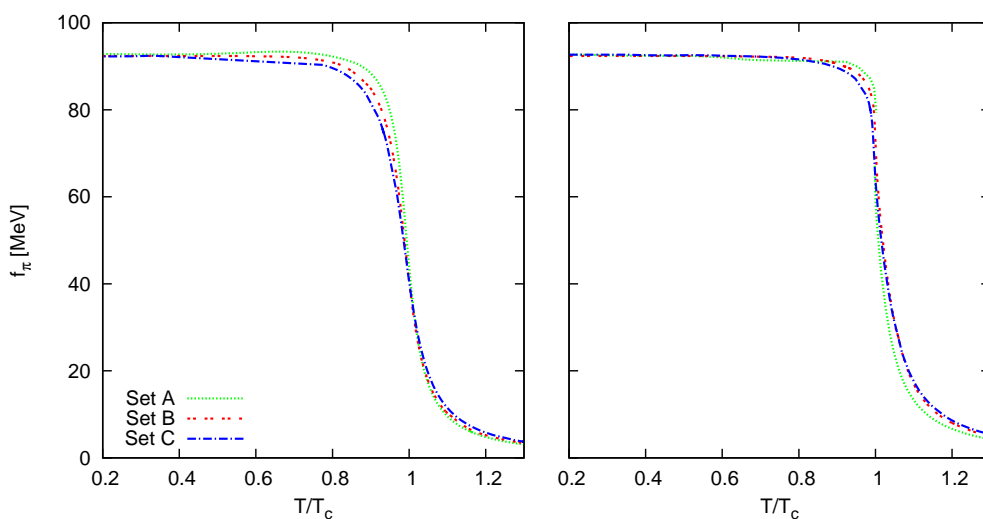


Figura 7.3: Constante de decaimiento débil del pión como función de  $T/T_c$ , para los potenciales para el PL polinómico (izquierda) y logarítmico (derecha), considerando  $T_0 = 208$  MeV. En cada panel se muestran los resultados para los sets A, B y C. La caída abrupta para  $T/T_c = 1$  es una signature de la restauración de la simetría quiral. Notamos que para el set A, potencial logarítmico, (línea de puntos) se observa una discontinuidad ya que la transición para este caso es de primer orden.

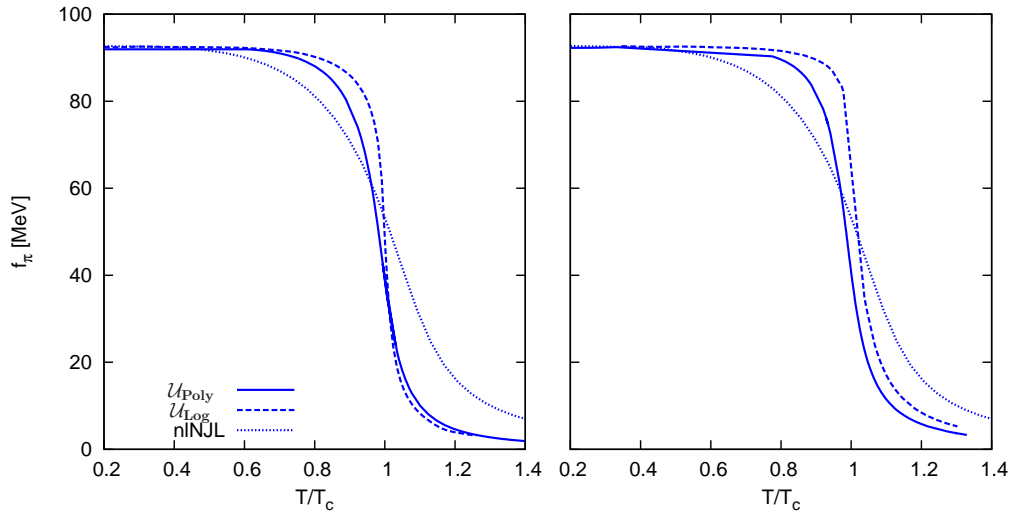


Figura 7.4: Constante de decaimiento débil del pión como función de  $T/T_c$ . para el modelo nPNJL con los potenciales polinómico y logarítmico considerando  $T_0 = 270$  MeV (izquierda) y  $T_0 = 208$  MeV (derecha). En ambos paneles se muestran también los resultados para el modelo nNJL, para el que la transición es mucho más suave.

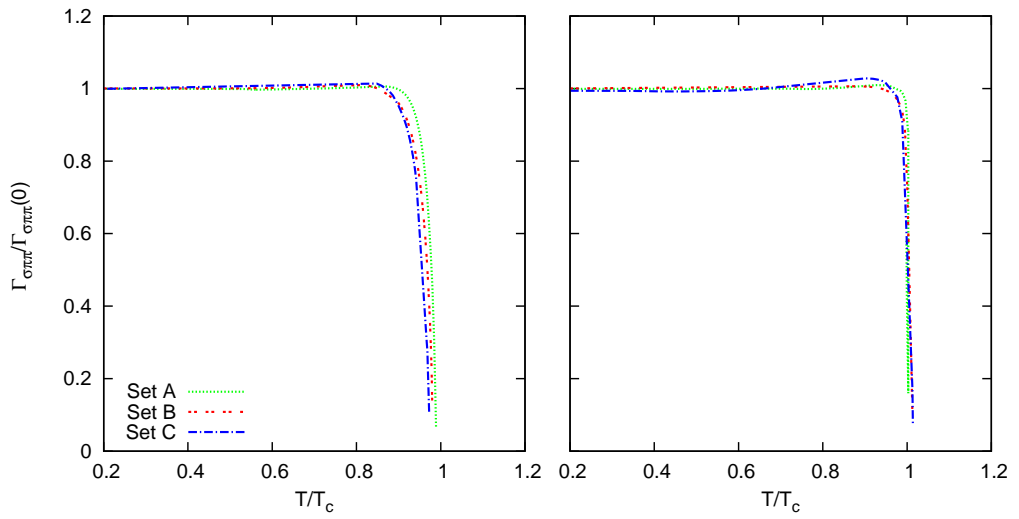


Figura 7.5: Ancho de decaimiento normalizado  $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi}/\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi}^{(T=0)}$  en función de  $T/T_c$  para los tres sets de parámetros, utilizando los potenciales polinómico (izquierda) y logarítmico (derecha) con  $T = 208$  MeV.

---

PNJL local, tomados de la Ref. [113]. Primeramente observamos que las curvas correspondientes al modelo sin PL presentan un crecimiento por encima del valor  $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi} / \Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi}^{(T=0)} = 1$  y luego una caída a cero muy pronunciada cuando la temperatura se aproxima a la temperatura crítica para la transición quiral. Encontramos que este efecto desaparece en los modelos que sí incluyen el acoplamiento de los campos fermiónicos al PL. Podemos mencionar que si al calcular el ancho para este decaimiento se incluye un factor de Bose-Einstein que tenga en cuenta la estadística del estado final  $\pi\pi$ , como por ejemplo en la Ref. [113], también se observa un efecto de este estilo. Asimismo, y como es de esperar luego del examen de las masas al aumentar la temperatura, en las curvas de la Fig. (7.6) correspondientes a los modelos no-locales se encuentran las mismas diferencias en cuanto a la suavidad con la que la restauración de simetría quiral es restaurada que ya hemos comentado antes. Vemos una vez más que el modelo utilizando para el PL el potencial logarítmico, con  $T_0 = 208$  MeV es el caso que presenta la caída más pronunciada para  $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi} / \Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi}^{(T=0)} = 1$ . Cabe agregar que, para el modelo de PNJL local, esta transición se muestra aún más suave que en el modelo no-local sin PL. Inclusive observamos que el ancho de decaimiento comienza a disminuir para temperaturas aún más bajas que en ese caso y que el canal se cierra completamente para una temperatura levemente mayor a la indicada en [113] como temperatura crítica, siendo esto posible debido a la característica tipo crossover de la transición.

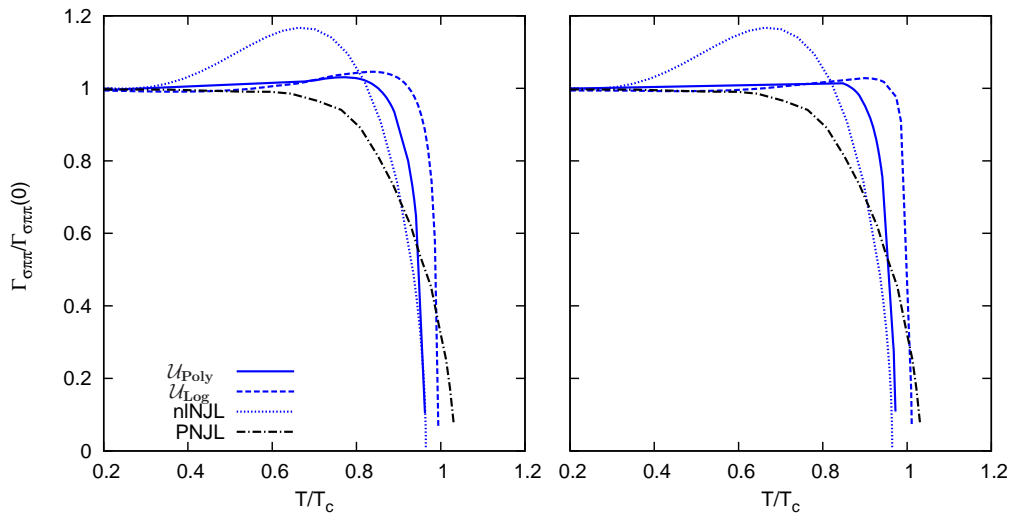


Figura 7.6: Ancho de decaimiento normalizado  $\Gamma_{\sigma\rightarrow\pi\pi}/\Gamma_{\sigma\rightarrow\pi\pi}^{(T=0)}$  en función de  $T/T_c$  para el set C y los dos potenciales para el PL en comparación con resultados de los modelos nNJL y PNJL local. Los resultados considerando  $T_0 = 270$  y  $208$  MeV se muestran a la izquierda y derecha respectivamente.

# Capítulo 8

## Conclusiones

En esta tesis se han estudiado distintos aspectos del comportamiento de la materia fuertemente interactuante a temperatura y/o potencial químico finitos en el marco de modelos de quarks relativistas con interacciones entre quarks no-locales y que incorporan el acoplamiento de los mismos con un parámetro de orden asociado al confinamiento. Comenzamos en el primer capítulo haciendo una introducción a los temas desarrollados en esta tesis. En el Cap. 2 revisamos algunos conceptos de la Cromodinámica Cuántica, sobre todo en relación a las simetrías que tienen que ver con las transiciones de fase que luego estudiamos. En el Cap. 3 introducimos el modelo de NJL, mostrando que describe la ruptura espontánea de simetría quiral y cómo aparecen los piones como los correspondientes bosones de Goldstone. Describimos también el formalismo necesario para incorporar en este modelo temperatura y potencial químico finitos, y mostramos cómo acoplar los grados de libertad fermiónicos al loop de Polyakov, dando lugar al modelo de PNJL. Vimos que éstos son modelos relativamente sencillos que permiten estudiar algunos aspectos de QCD a bajas energías, pero que presentan ciertos inconvenientes, como la necesidad de elegir una forma para regularizar cantidades divergentes y las ambigüedades que esto conlleva. Presentamos dos formas alternativas para el potencial termodinámico del PL: una forma polinómica basada en el ansatz de Ginzburg-Landau y otra basada en la forma logarítmica de la medida de Haar de integración asociada con el grupo  $SU(3)$  de color. Describimos además el formalismo necesario para incorporar en estos modelos temperatura y potencial químico finitos.

A partir de estos modelos, vimos en el Cap. 4 es posible alcanzar una descripción más realista de las interacciones entre quarks incorporando interacciones no-locales. Presentamos parametrizaciones alternativas para el modelo NJL no-local, dos de ellas con los frecuentemente usados factores de forma exponenciales, de estas, la más sencilla no incluye WFR (set A),

y alternativamente utilizamos una parametrización en la que sí se tiene en cuenta (set B). Además, consideramos un tercer set de parámetros, para el que se ajustan las funciones de masa  $M(p)$  y renormalización  $Z(p)$  a resultados de LQCD. Mostramos que a nivel de campo medio es posible obtener los valores de expectación de los campos  $\bar{\sigma}_{1,2}$  y que tomando el desarrollo en las fluctuaciones mesónicas a orden cuadrático se pueden encontrar también las masas de los mesones escalar y pseudoescalar así como la constante de decaimiento débil del pión. Llevando el desarrollo hasta tercer orden vimos cómo calcular el ancho de decaimiento del mesón  $\sigma$  en el proceso  $\sigma \rightarrow \pi\pi$ . Luego presentamos los resultados numéricos para estas propiedades a temperatura cero, que se resumen en la tabla (4.2). Sobre el final de este capítulo mostramos como acoplar los quarks al loop de Polyakov para obtener así el modelo nPNJL.

La parte central y novedosa de esta tesis se detalla a partir del Cap. 5 donde se presentan y analizan los resultados originales obtenidos. En el primer capítulo de resultados estudiamos, utilizando el modelo nPNJL, el comportamiento de las temperaturas críticas asociadas a las transiciones de fase de restauración de simetría quiral y deconfinamiento cuando el potencial químico es cero. En la primera parte de ese capítulo consideramos el efecto de suponer que el parámetro  $T_0$  que fija la escala del potencial termodinámico del PL depende de la masa de los quarks, como ha sido recientemente sugerido [55]. En todos los casos estudiados encontramos que las transiciones están entrelazadas, siendo esto más fuerte en el caso del potencial logarítmico para el PL. Considerando el potencial polinómico encontramos una leve separación,  $\Delta T_c < 10$  MeV, que de cualquier manera es mucho menor a la que se encuentra empleando modelos locales,  $\approx 40$  MeV. Al tomar el valor de  $T_0$  correspondiente a la teoría de gauge pura, es decir 270 MeV, encontramos una temperatura crítica para la transición quiral, entre 209 MeV y 214,5 MeV, que resulta un poco alta en relación a los valores encontrados utilizando técnicas de LQCD, esto es 173(8) MeV [35]. Sin embargo, al utilizar el valor de  $T_0$  sugerido para el caso de dos quarks livianos conseguimos un descenso en la temperatura crítica al rango 171 – 180,5 MeV, en muy buen acuerdo con el valor estimado por LQCD, y, lo que es muy importante, sin estropear el entrelazamiento como ocurre al tomar este valor de  $T_0$  en el modelo de PNJL local. Por otro lado, una consecuencia de considerar  $T_0$  dependiente de la masa es que las transiciones se hacen un poco más abruptas. En particular encontramos al tomar  $T_0 = 208$  MeV para el set A, con el potencial logarítmico, la restauración de simetría quiral es una transición de primer orden, lo que se puede interpretar como un aspecto poco realista del set de parámetros que no incluye renormalización de la función de onda. Para los otros casos encontramos que para ese valor del parámetro, que es el que

---

corresponde a nuestro modelo de dos sabores livianos, la transición es tipo crossover, tal como se encuentra en el contexto de LQCD [79, 80, 81, 82, 83].

En la segunda parte del Cap. 5 investigamos la dependencia de las temperaturas críticas con la ruptura explícita de simetría quiral. Aquí también hallamos un entrelazamiento entre las transiciones, y observamos que el mismo se mantiene al variar la masa, en todo el rango considerado. Esta característica, que concuerda con resultados de LQCD [49, 97], es típica de los modelos no-locales, ya que se observa en el modelo local una separación entre las temperaturas críticas que aumenta con la masa [54]. Asimismo, encontramos que la dependencia con la masa del pión de las temperaturas críticas en los modelos no locales es básicamente lineal, con un valor para el parámetro de la pendiente,  $A$ , que se encuentra en el rango  $0,06 - 0,07$ , bastante más cercano a las estimaciones de LQCD,  $A \lesssim 0,05$  [48, 49, 50, 51], que el valor que se obtiene utilizando modelos puramente quirales. El principal defecto de nuestra descripción es que encontramos que el carácter de la transición quiral cambia de crossover a primer orden para un valor de masa del pión relativamente baja, viéndose esto acentuado si consideramos el efecto de los quark dinámicos sobre el parámetro  $T_0$ . Los valores de masa crítica que encontramos utilizando  $T_0 = 270$  MeV son  $m_\pi^{crit} \approx 400$  MeV para el potencial logarítmico y  $m_\pi^{crit} \gtrsim 700$  MeV para el potencial polinómico, mientras que con lattice QCD se estima que la correspondiente masa del mesón pseudoescalar debería estar en el rango de algunos GeV [89, 90, 91]. Sin embargo, es esencial destacar que nuestras predicciones son confiables dentro de un rango limitado de valores de  $m_\pi$ , con una cota superior que estimamos alrededor de 600 MeV. Acerca de cómo corregir este inconveniente y elevar la masa crítica hasta la cota recién mencionada cuando consideramos el potencial logarítmico, podemos decir que es esperable que la inclusión de fluctuaciones mesónicas suavicen las transiciones haciendo un aporte en esa dirección.

En el Cap. 6 investigamos las transiciones de fase para potencial químico finito, describimos en primer lugar las modificaciones necesarias en el modelo para llevar esto a cabo. En la Sec. 6.2 consideramos el caso de potencial químico imaginario,  $\mu = i\theta T$ , y vimos que el modelo nPNJL es invariante ante transformaciones del grupo extendido  $Z_3$ , encontrando consecuentemente que las funciones termodinámicas de  $\theta$  correspondientes son periódicas con un período  $2\pi/3$ . Construimos los diagramas de fase en el plano  $T - \theta$  considerando primeramente la forma logarítmica para el potencial del PL. Hallamos que para el set A el deconfinamiento ocurre siempre como una transición de primer orden, mientras que para el resto de los casos es tipo crossover para valores bajos de  $\theta$  existiendo un punto final para  $\theta/(\pi/3) \approx 0,7 - 0,8$  a partir del cual la transición es de primer orden. En cuanto a la restauración de simetría quiral, observamos que siempre tiene

lugar como una transición tipo crossover a una temperatura superior a la de deconfinamiento. En todos los casos encontramos una separación creciente entre las transiciones quiral y de deconfinamiento a medida que  $\theta$  aumenta. Esto indica que el entrelazamiento encontrado para  $\mu = 0$  se pierde en la región de  $\mu$  imaginario lo cual está en discrepancia con lo encontrado en LQCD. Además si utilizamos  $T_0 = 270$  MeV, las líneas correspondientes a la transición de deconfinamiento caen fuera de las barras de error de los puntos de LQCD [40]. En cambio, tomando  $T_0 = 208$  MeV, encontramos un buen acuerdo entre los valores para la temperatura crítica obtenidos con nuestro modelo y los de LQCD. Asimismo para el punto final RW encontramos una temperatura crítica entre 188 y 191 MeV, que concuerda con el valor estimado utilizando técnicas de LQCD, 185(9) MeV [40], y que, además, en ese punto la transición es de primer orden. Para el potencial polinómico, en cambio, vimos que nunca existen transiciones de deconfinamiento de primer orden, implicando esto que en el punto RW la transición es de segundo orden en contradicción con los resultados de LQCD.

En la Sec. 6.3 construimos diagramas de fase para  $\mu$  real considerando los tres sets de parámetros, A, B y C, las formas polinómica y logarítmica para el potencial del PL y dos valores alternativos para su parámetro de escala. Con la salvedad del caso set A, potencial logarítmico,  $T_0 = 208$  MeV, para el que la transición quiral es siempre de primer orden, encontramos que para valores bajos de potencial químico existe una zona en la que las transiciones quiral y de deconfinamiento son tipo crossover y, además ocurren en simultáneo para el potencial logarítmico, y con una diferencia siempre menor a 10 MeV para el polinómico. Esto indica que, contrariamente a lo encontrado para  $\mu$  imaginario, existe un fuerte entrelazamiento entre las transiciones en esta región. Encontramos que en estos casos existe un punto del diagrama en el que la transición quiral cambia de carácter, y para este punto crítico final encontramos que el potencial químico está entre 130 MeV y 233 MeV y la temperatura entre 125 MeV y 198 MeV. Más allá de dicho punto, la transición quiral es de primer orden mientras que la transición de deconfinamiento ocurre suavemente, y a una temperatura más alta. Esto hace que a partir de dicho punto comience a existir una región en la cual los quarks están confinados y la simetría quiral está restaurada, esta es la que se conoce como fase quarkónica. Finalmente, presentamos los resultados para  $\mu$  imaginario y real en un único diagrama de fases en el plano  $T - \mu^2$  en el que se puede ver resumida toda esta información.

En el Cap. 7 nos dedicamos al análisis de algunas propiedades mesónicas en función de la temperatura. En particular investigamos el comportamiento de las masas del pión y su compañero quiral el mesón  $\sigma$ , la constante de decaimiento débil del pión y el ancho de decaimiento para  $\sigma$  en el pro-

---

ceso  $\sigma \rightarrow \pi\pi$ . Partiendo de los valores que se encuentran en el contexto del modelos nPNJL a temperatura cero [27], que son compatibles con los valores empíricos, observamos que al aumentar la temperatura todas estas cantidades dan muestras de la restauración quiral, esto es: las masa del pión y la del mesón  $\sigma$  se vuelven degeneradas después de la temperatura crítica, se viola la restricción  $m_\sigma \leq 2m_\pi$ , por lo que el canal para el decaimiento del mesón  $\sigma$  a dos piones se cierra, y esto se distingue por la caída abrupta del ancho  $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi}$  desde un valor muy próximo a su valor en cero. Las masas crecen de manera aproximadamente lineal con  $T$  luego de la transición. Comparamos en todos los casos los resultados obtenidos con el modelo de NJL no-local que no tiene en cuenta el acoplamiento de los quarks al loop de Polyakov con los que se encuentran en el contexto del modelo nPNJL considerando los potenciales polinómico y logarítmico, tomando para el parámetro  $T_0$  los valores 270 MeV y 208 MeV. En general encontramos el efecto conocido que tiene la inclusión del PL [111], hacer las transiciones más abruptas y, observamos que con el potencial polinómico las transiciones son siempre más suaves que con el logarítmico. Comparamos además el comportamiento del ancho de decaimiento  $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi}$  con el que se encuentra empleando el modelo de PNJL local [113] y encontramos que nuestro modelo describe una transición quiral que es notablemente más abrupta, en particular con el potencial logarítmico y el parámetro  $T_0 = 208$  MeV.

En conclusión podemos decir que respecto de los modelos locales, los modelos nPNJL constituyen un avance hacia una descripción más realista y consistente de la materia fuertemente interactuante en condiciones extremas de temperatura y/o densidad. Resulta claro, sin embargo que en el marco de las aproximaciones utilizadas en este trabajo dichos modelos conducen a algunos resultados que no son compatibles con las predicciones obtenidas mediante técnicas de QCD en la red. Es de esperar que distintas mejoras tales como, la inclusión de fluctuaciones, de interacciones entre quarks adicionales, etc. ayuden a resolver dichas discrepancias.



# Bibliografía

- [1] W.N. Cottingham and D.A. Greenwood, “*An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*” (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [2] F. J. Yndurain, “*The theory of quark and gluon interactions*” (Springer Verlag, Berlin, 1999).
- [3] N. K. Glendenning, “*Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity*”, 2nd Edition, (Springer Verlag, NY, 2000).
- [4] S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, “*Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*”, (Wiley-Interscience, NY, 1983).
- [5] Ver por ejemplo: L. Ruan, *Front. Phys. China* **5**, 205 (2010) [arXiv:1007.2882 [nucl-ex]]. Para más detalles ver el sitio <http://www.bnl.gov/RHIC/>
- [6] Ver por ejemplo: R. Preghenella [ALICE Collaboration], [arXiv:1302.0763v1 [hep-ex]]. Para más detalles ver el sitio <http://aliceinfo.cern.ch/>
- [7] Ver por ejemplo: G. Rosner, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **167**, 29 (2007). Para más detalles ver el sitio <http://www.fair-center.eu/>
- [8] Ver por ejemplo: G. Trubnikov, A. Kovalenko, V. Kekelidze, I. Meshkov, R. Lednicky, A. Sissakian and A. Sorin, *PoS ICHEP* **2010**, 523 (2010). Para más detalles ver el sitio <http://nucloweb.jinr.ru/nica/index1.htm>
- [9] B. C. Barrois, *Nucl. Phys.* **B129**, 390 (1977); S.C. Frautschi, in “*Hadronic matter at extreme energy density*”, edited by N. Cabibbo and L. Serot (Plenum Press, 1980); D. Bailin and A. Love, *Phys. Rep.* **107**, 325 (1984).

- 
- [10] K. Rajagopal and F. Wilczek, in “*At the Frontier of Particle Physics / Handbook of QCD*”, M. Shifman, ed. (World Scientific, Singapore, 2001); M. Alford, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **51**, 131 (2001); D. H. Rischke, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **52**, 197 (2004).
- [11] R. Casalbuoni and G. Nardulli, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 263 (2004).
- [12] L. McLerran and R.D. Pisarski, *Nucl. Phys. A* **796**, 83 (2007); L. McLerran, K. Redlich and C. Sasaki, *Nucl. Phys. A* **824**, 86 (2009).
- [13] K. Fukushima and T. Hatsuda, *Rept. Prog. Phys.* **74**, 014001 (2011).
- [14] C. Gatttringer and C. B. Lang, *Lect. Notes Phys.* **788**, 1 (2010).
- [15] Y. Nambu y G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961); *Phys. Rev.* **124**, 246 (1961).
- [16] U. Vogl and W. Weise, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **27**, 195 (1991); S. Klevansky, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 649 (1992); T. Hatsuda and T. Kunihiro, *Phys. Rep.* **247**, 221 (1994).
- [17] M. Buballa, *Phys. Rept.* **407**, 205 (2005).
- [18] A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B* **72**, 477 (1978).
- [19] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **138**, 1 (1978); G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **153**, 141 (1979).
- [20] P. N. Meisinger and M. C. Ogilvie, *Phys. Lett. B* **379**, 163 (1996).
- [21] K. Fukushima, *Phys. Lett. B* **591**, 227 (2004).
- [22] E. Megias, E. Ruiz Arriola and L. L. Salcedo, *Phys. Rev. D* **74**, 065005 (2006).
- [23] C. Ratti, M. A. Thaler and W. Weise, *Phys. Rev. D* **73**, 014019 (2006).
- [24] G. Ripka, *Quarks bound by chiral fields (Oxford University Press, Oxford, 1997)*.
- [25] T. Schafer and E. V. Shuryak, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 323 (1998).
- [26] C. D. Roberts and A. G. Williams, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **33**, 477 (1994); C. D. Roberts and S. M. Schmidt, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **45**, S1 (2000).

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [27] S. Noguera and N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **78**, 114002 (2008).
- [28] R. D. Bowler and M. C. Birse, Nucl. Phys. A **582**, 655 (1995); R. S. Plant and M. C. Birse, Nucl. Phys. A **628**, 607 (1998).
- [29] W. Broniowski, B. Golli and G. Ripka, Nucl. Phys. A **703**, 667 (2002); A. H. Rezaeian, N. R. Walet and M. C. Birse, Phys. Rev. C **70**, 065203 (2004).
- [30] A. Scarpettini, D. Gomez Dumm and N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **69**, 114018 (2004).
- [31] D. Gomez Dumm, A. G. Grunfeld and N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **74**, 054026 (2006).
- [32] K.-I. Kondo, Phys. Rev. D **82**, 065024 (2010); K.-I. Kondo, Phys. Rev. D **84**, 061702 (2011).
- [33] J. I. Kapusta and C. Gale, “*Finite-temperature field theory: Principles and applications*” (Cambridge Univ. Press, Cambridge UK, 2006).
- [34] R. D. Pisarski, in “*QCD perspectives on hot and dense matter. Proceedings, NATO Advanced Study Institute, Summer School, Cargese, France, August 6-18, 2001*” J. P. Blaizot and E. Iancu ed. [hep-ph/0203271].
- [35] F. Karsch and E. Laermann, in *Quark Gluon Plasma III*, edited by R.C. Hwa and X. N. Wang (World Scientific, Singapore, 2004), arXiv:hep-lat/0305025.
- [36] A. Bazavov *et al.*, Phys. Rev. D **80**, 014504 (2009).
- [37] S. Borsanyi, Z. Fodor, C. Hoelbling, S. D. Katz, S. Krieg, C. Ratti and K. K. Szabo [Wuppertal-Budapest Collaboration], JHEP **1009**, 073 (2010).
- [38] Y. Aoki *et al.*, JHEP **06**, 088 (2009).
- [39] A. Bazavov *et al.*, J. Phys. Conf. Serv. **230**, 012014 (2010).
- [40] L.-K. Wu, X.-Q. Luo, H.-S. Chen, Phys. Rev. D **76**, 034505 (2007).
- [41] C. R. Allton *et al.*, Phys. Rev. D **68**, 014507 (2003); R. V. Gavai, S. Gupta, Phys. Rev. D **68**, 034506 (2003).
- [42] O. Kaczmarek *et al.* Phys. Rev. D **83**, 014504 (2011).

- 
- [43] Z. Fodor and S. D. Katz, JHEP **03**, 014 (2002); **04**, 050 (2004).
- [44] S. Ejiri, Phys. Rev. D **78**, 074507 (2008).
- [45] M. D'Elia, M.-P. Lombardo, Phys. Rev. D **67**, 014505 (2003).
- [46] P. de Forcrand, O. Philipsen, Nucl. Phys. B **642**, 290 (2002).
- [47] A. Roberge, N. Weiss, Nucl. Phys. B **275**, 734 (1986).
- [48] F. Karsch, PoS LAT **2007**, 015 (2007).
- [49] F. Karsch, E. Laermann and A. Peikert, Nucl. Phys. B **605**, 579 (2001).
- [50] V. G. Bornyakov, M. N. Chernodub, Y. Mori, S. M. Morozov, Y. Nakamura, M. I. Polikarpov, G. Schierholz and A. A. Slavnov *et al.*, PoS LAT **2005**, 157 (2006).
- [51] M. Cheng, N. H. Christ, S. Datta, J. van der Heide, C. Jung, F. Karsch, O. Kaczmarek and E. Laermann *et al.*, Phys. Rev. D **74**, 054507 (2006).
- [52] Z. Fodor, C. Hoelbling, Rev. Mod. Phys. **84**, 449 (2012).
- [53] O. Kaczmarek, F. Karsch, P. Petreczky, F. Zantow, Phys. Lett. B **543**, 41 (2002).
- [54] S. Roessner, C. Ratti and W. Weise, Phys. Rev. D **75**, 034007 (2007).
- [55] B.-J. Schaefer, J. M. Pawłowski and J. Wambach, Phys. Rev. D **76**, 074023 (2007); B.-J. Schaefer, M. Wagner and J. Wambach, Phys. Rev. D **81**, 074013 (2010); T. K. Herbst, J. M. Pawłowski and B. J. Schaefer, Phys. Lett. B **696**, 58 (2011).
- [56] S. K. Ghosh, T. K. Mukherjee, M. G. Mustafa and R. Ray, Phys. Rev. D **73**, 114007 (2006).
- [57] K. Fukushima, Phys. Rev. D **77**, 114028 (2008) [Erratum-ibid. D **78**, 039902 (2008)].
- [58] D. Gomez Dumm, D. B. Blaschke, A. G. Grunfeld and N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **78**, 114021 (2008).
- [59] H. Hansen, W. M. Alberico, A. Beraudo, A. Molinari, M. Nardi and C. Ratti, Phys. Rev. D **75**, 065004 (2007).
- [60] P. Costa, M. C. Ruivo, C. A. de Sousa, H. Hansen and W. M. Alberico, Phys. Rev. D **79**, 116003 (2009).

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [61] W.-j. Fu and Y.-x. Liu, Phys. Rev. D **79**, 074011 (2009).
- [62] D. Blaschke, J. Berdermann and R. Lastowiecki, Prog. Theor. Phys. Suppl. **186**, 81 (2010).
- [63] S. M. Schmidt, D. Blaschke and Y. .L. Kalinovsky, Phys. Rev. C **50**, 435 (1994).
- [64] P. O. Bowman, U. M. Heller y A. G. Williams, Phys. Rev. D **66**, 014505 (2002); P. O. Bowman, U. M. Heller, D. B. Leinweber y A. G. Williams, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119**, 323 (2003).
- [65] S. Furui y H. Nakajima, Phys. Rev. D **73**, 074503 (2006).
- [66] M. B. Parappilly, P. O. Bowman, U. M. Heller, D. B. Leinweber, A. G. Williams y J. B. Zhang, Phys. Rev. D **73**, 054504 (2006).
- [67] S. Noguera, Int. J. Mod. Phys. E **16**, 97 (2007); S. Noguera y V. Vento, Eur. Phys. J. A **28**, 227 (2006).
- [68] C. J. Burden, L. Qian, C. D. Roberts, P. C. Tandy and M. J. Thomson, Phys. Rev. C **55**, 2649 (1997); D. Blaschke, G. Bureau, Y. .L. Kalinovsky, P. Maris and P. C. Tandy, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 2267 (2001).
- [69] C. Itzykson, J. Zuber, “*Quantum Field Theory*” (McGraw-Hill, 1980).
- [70] J. W. Bos, J. H. Koch and H. W. L. Naus, Phys. Rev. C **44**, 485 (1991).
- [71] H.G. Dosch, S. Narison, Phys. Lett. B **417**, 173 (1998).
- [72] L. Giusti, F. Rapuano, M. Talevi, A. Vladikas, Nucl. Phys. B **538**, 249 (1999).
- [73] E. M. Aitala et al. (E791 Collaboration), Phys. Rev. Lett. **86**, 770 (2001).
- [74] N. Wu, en Proceedings de “*XXXVIth Rencontres De Moriond, QCD High Energy Hadronic Interactions*”, Les Arcs, Savoie, France, March 17-24, 2001.
- [75] G. A. Contrera, M. Orsaria, N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **82** , 054026 (2010).
- [76] Y. Sakai, K. Kashiwa, H. Kouno, M. Matsuzaki and M. Yahiro, Phys. Rev. D **79**, 096001 (2009).

- 
- [77] Y. Sakai, T. Sasaki, H. Kouno and M. Yahiro, Phys. Rev. D **82**, 076003 (2010).
- [78] D. Gomez Dumm and N. N. Scoccola, Phys. Rev. C **72**, 014909 (2005).
- [79] F. Karsch, E. Laermann, Phys. Rev. D **50**, 6954 (1994).
- [80] C. W. Bernard *et al.*, Phys. Rev. Lett. **78**, 598 (1997).
- [81] Y. Iwasaki, K. Kanaya, S. Kaya, T. Yoshie, Phys. Rev. Lett. **78**, 179 (1997).
- [82] S. Aoki *et al.* [ JLQCD Collaboration ], Phys. Rev. D **57**, 3910 (1998).
- [83] A. Ali Khan *et al.* [ CP-PACS Collaboration ], Phys. Rev. D **63**, 034502 (2001).
- [84] M. D’Elia, A. Di Giacomo, C. Pica, Phys. Rev. D **72**, 114510 (2005).
- [85] C. Bonati, G. Cossu, M. D’Elia, A. Di Giacomo, C. Pica, PoS LAT **2008**, 204 (2008).
- [86] T. Kahara and K. Tuominen, Phys. Rev. D **80**, 114022 (2009); Phys. Rev. D **82**, 114026 (2010).
- [87] J. Noaki *et al.* [JLQCD and TWQCD Collab.], Phys. Rev. Lett. **101**, 202004 (2008).
- [88] E. Laermann and O. Philipsen, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **53**, 163 (2003).
- [89] C. Alexandrou, A. Borici, A. Feo, P. de Forcrand, A. Galli, F. Jegerlehner and T. Takaishi, Phys. Rev. D **60**, 034504 (1999).
- [90] H. Saito *et al.* [WHOT-QCD Collaboration], Phys. Rev. D **84**, 054502 (2011).
- [91] M. Fromm, J. Langelage, S. Lottini and O. Philipsen, JHEP **1201**, 042 (2012).
- [92] D. Blaschke, M. Buballa, A. E. Radzhabov and M. K. Volkov, Yad. Fiz. **71**, 2012 (2008) [Phys. Atom. Nucl. **71**, 1981 (2008)].
- [93] D. Horvatic, D. Blaschke, D. Klabucar and O. Kaczmarek, Phys. Rev. D **84**, 016005 (2011).

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [94] T. Hell, S. Roessner, M. Cristoforetti and W. Weise, Phys. Rev. D **79**, 014022 (2009); Phys. Rev. D **81**, 074034 (2010).
- [95] A. E. Radzhabov, D. Blaschke, M. Buballa, and M. K. Volkov, Phys. Rev. D **83**, 116004 (2011).
- [96] S. Benic, D. Blaschke, and M. Buballa, Phys. Rev. D **86**, 074002 (2012).
- [97] V. G. Bornyakov, R. Horsley, S. M. Morozov, Y. Nakamura, M. I. Polikarpov, P. E. L. Rakow, G. Schierholz and T. Suzuki, Phys. Rev. D **82**, 014504 (2010).
- [98] S. Ejiri, F. Karsch, E. Laermann, C. Miao, S. Mukherjee, P. Petreczky, C. Schmidt and W. Soeldner *et al.*, Phys. Rev. D **80**, 094505 (2009).
- [99] J. Berges, D. U. Jungnickel and C. Wetterich, Phys. Rev. D **59**, 034010 (1999).
- [100] A. Dumitru, D. Roder and J. Ruppert, Phys. Rev. D **70**, 074001 (2004).
- [101] J. Braun, B. Klein, H.-J. Pirner and A. H. Rezaeian, Phys. Rev. D **73**, 074010 (2006).
- [102] Y. Sakai, K. Kashiwa, H. Kouno, M. Yahiro, Phys. Rev. D **77**, 051901 (2008); Phys. Rev. D **78**, 036001 (2008).
- [103] M. D'Elia, F. Di Renzo, M. P. Lombardo, Phys. Rev. D **76**, 114509 (2007).
- [104] M. D'Elia, F. Sanfilippo, Phys. Rev. D **80**, 111501 (2009) .
- [105] P. de Forcrand, O. Philipsen, Phys. Rev. Lett. **105**, 152001 (2010).
- [106] C. Bonati, G. Cossu, M. D'Elia and F. Sanfilippo, Phys. Rev. D **83**, 054505 (2011).
- [107] K. Kashiwa, T. Hell and W. Weise, Phys. Rev. D **84**, 056010 (2011).
- [108] W. Florkowski, B. L. Friman, Z. Phys. A **347**, 271 (1994).
- [109] N.P. Landsman and Ch.G. van Weert, Phys. Rep. **145**, 141 (1987).
- [110] V.L. Eletsky, B. L. Ioffe, Yad. Fiz **48**, 661 (1988) [Sov. J. Nucl. Phys. **48**, 384 (1988)].

- [111] G. A. Contrera, D. Gomez Dumm and N. N. Scoccola, Phys. Lett. B **661**, 113 (2008); G. A. Contrera, D. Gomez Dumm and N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **81**, 054005 (2010).
- [112] K. Nakayama and S. Krewald, Phys. Lett. B **273**, 199 (1991).
- [113] A. V. Friesen, Y. .L. Kalinovsky and V. D. Toneev, Phys. Part. Nucl. Lett. **9**, 1 (2012).