





43  
Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.002/94

**Algumas consequências observacionais de universos  
multiplamente conexos**

Fernando Kokubun

Orientador

*Helio Vasconcelos Fagundes*



Fevereiro 1994

Recomendação:

São Paulo, 02/10/1994.

- 1) corrigir, numa errata, a seção (1.3) sobre forma espacial, pág 10-11, em relação à passagem de eq. (1.22) a' eq. (1.23).
- 2) esclarecer a questão do <sup>fator de</sup> escala, na relação entre as distâncias definidas em (1.2) e (1.4) (escrever a métrica explícite e a suposição que o fator de escala no tempo atual seja = 1.).

Adiciono a errata a esta cópia original.

~~Wall Valley~~  
soans domingos  
Paulo Henrique  
F. Matos  
H. Guedes

Com todo carinho, aos três caminhos da minha vida:  
Helena, Yuri e Akira.

### **Agradecimentos**

Aos meus pais, pelo fato de serem o que são e que nunca deixarão de ser.

Ao Professor Helio V. Fagundes, pela oportunidade oferecida, pela orientação, e sobre-tudo pela paciência e generosidade.

Aos amigos do IFT que muito contribuiram para tornar esta longa jornada, menos árdua.

Aos funcionários do IFT que no dia-a-dia contribuiram para o andamento do trabalho.

À FAPESP e ao CNPq pelo apoio financeiro.

**PROCURADOR** - Eu vim tratar do seu pedido de aumento; o senhor quer ganhar mil escudos. Infelizmente, o meu parecer não era favorável. . .

**GALILEU** (mexendo em seus papéis) - Meu caro amigo, com quinhentos escudos eu não vivo.

**GALILEU** - . . . Quem sabe um belo dia o senhor mostra aos cavalheiros do Conselho esta pesquisa sobre a lei da queda dos corpos (mostra um maço de papéis), e pergunta se isto não vale uns escudos a mais.

**PROCURADOR** - Vale infinitamente mais, Senhor Galileu.

**GALILEU** - Infinitamente não, senhor, quinhentos escudos.

(in *A vida de Galileu*, Bertold Brecht. Abril Cultural, SP)

**GALILEU** - .... A prática da ciência me parece exigir notável coragem, .... Ela negocia com o saber obtido através da dúvida. Arranjando saber a respeito de tudo e para todos, ela procura fazer com que todos duvidem. Ora, a maior parte da população é conservada, pelos seus príncipes, donos de terra e padres, numa bruma luminosa de supertições e afirmações antigas, que encobre as maquinações dessa gente. A miséria de muitos é velha como as montanhas e segundo os púlpitos e as catedras, ela é indestrutível como as montanhas. O nosso recurso novo, a dúvida, encantou o grande público, que arrancou o telescópio de nossas mãos, para apontá-lo para os seus carrascos. Estes homens egoístas e violentos, que haviam se aproveitado avidamente dos frutos da ciência, logo sentiram que o olho frio da ciência pousara numa miséria milenar, mas artificial que obviamente poderia ser eliminada, através da eliminação deles. Eles nos cobriram de ameaças e de ofertas de suborno, irresistíveis para almas fracas. Entretanto, seremos ainda cientistas, se nos desligarmos da multidão? Os movimentos dos astros tornaram mais claros, mas os movimentos dos poderosos continuam imprevisíveis. .... Vocês trabalham para quê? Eu sustento que a única finalidade da ciência está em aliviar a canseira da existência humana. E se os cientistas, intimidados pela prepotência dos poderosos, acham que basta amontoar saber, por amor ao saber, a ciência pode ser transformada em aleijão, e as suas novas máquinas serão novas aflições, nada mais. Com o tempo, é possível que vocês descubram tudo o que haja por descobrir, e ainda assim o seu avanço há de ser apenas um avanço para longe da humanidade. O precipício entre vocês e a humanidade pode crescer tanto, que ao grito alegre de vocês, grito de quem descobriu alguma coisa nova, responda um grito universal de horror. ....

(in *A vida de Galileu*, Bertold Brecht. Abril Cultural, SP)

## RESUMO

Neste trabalho desenvolvemos um estudo de algumas consequências observacionais de universos multiplamente conexos. Para o caso de um universo plano, escolhemos a topologia de um toro plano  $T^3$ , e estudamos a distribuição de imagens neste tipo de universo. Em um universo com topologia  $T^3$  com dimensões compatíveis com os dados obtidos pelo satélite COBE, demonstramos que existe a possibilidade de efetuar observações impossíveis de serem efetuadas em um universo com topologia trivial. Para o caso de um universo hiperbólico, utilizamos a topologia descrita por H.V. Fagundes (Ap.J.(1989)338,618) e estudamos associações de galáxia e quasares com redshifts discordantes. Obtivemos que existe a possibilidade de que o número de conjunções seja superior ao esperado em um universo com topologia trivial.

Palavras chaves: cosmologia – quasares – galáxias

Áreas de Conhecimento: 1.05.01.03-07 1.04.04.04-0 1.04.04.03-1 1.04.04.01-5

## ABSTRACT

In this work, we analised some observational consequences of a multiply connected universes. In the flat universe with torus-like topology  $T^3$ , we analysed the images distributions. The size of  $T^3$  universe was constrained through analysis of Cosmic Microwave Backgound Anisotropy obtained by COBE satelite, and we obtained that in this kind of universe we can do some observations that are impossible to be done in universe with trivial topology. For hyperbolic universe, we used a toplogy described in [23] to study quasar-galaxy associations with discordant redshift. We concluded that in these universe, the number of quasar-galaxy associations may be higher that the expected in universe with trivial topology.

Key words: cosmology – quasars – galaxies

# Índice

<b>Relação das Figuras</b>	iii
<b>Relação das Tabelas</b>	iv
<b>INTRODUÇÃO</b>	1
<b>1 COSMOLOGIA</b>	6
1.1 O modelo de Friedmann . . . . .	6
1.2 Variedades 3-D em Cosmologia . . . . .	9
1.3 Forma espacial . . . . .	10
1.4 Construindo espaços compactos . . . . .	12
1.5 Espaços globalmente inomogêneos . . . . .	13
<b>2 UNIVERSO PLANO COMPACTO – <math>T^3</math></b>	16
2.1 O toro plano $T^3$ . . . . .	16
2.1.1 Dimensões da célula fundamental . . . . .	18
2.2 Imagens com o mesmo redshift . . . . .	19
2.3 Simulações numéricas . . . . .	23
<b>3 UNIVERSO HIPERBÓLICO COMPACTO</b>	32
3.1 Espaços globalmente inomogêneos . . . . .	32
3.2 Coordenadas de Minkowski e Klein . . . . .	33
3.3 Construção da seção espacial hiperbólica compacta . . . . .	35

3.3.1	Distribuição de imagens	42
3.4	Cálculo das conjunções	43
3.5	Simulação numérica	44
3.6	Resultados	47
3.6.1	Número relativo de conjunções e Número de pares qso-galaxia de origem topológica	49
<b>4</b>	<b>COMENTÁRIOS FINAIS</b>	<b>55</b>
<b>A.</b>	<b>Relação dos geradores</b>	<b>57</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>61</b>

## Relação das Figuras

2.1	Poliedro fundamental para o toro $T^3$	17
2.2	Representação de uma distribuição de imagens em um universo com topologia $T^2$	30
3.1	Icosaedro utilizado como Poliedro Fundamental (reproduzido de [23])	35
3.2	Configuração para o cálculo da conjunção entre uma galáxia (G) e um quasar (Q)	43
3.3	Localização dos pares qso-galáxia de origem topológica, para o observador localizado em $(\chi, \theta, \phi) = (0.75, 0^\circ, 0^\circ)$ . Galáxia (*), quasar (o), vértices (+)	53
3.4	Localização dos pares qso-galáxia de origem topológica, para o observador localizado em $(\chi, \theta, \phi) = (0.75, 57^\circ.00, 173^\circ.00)$ . Galáxia (*), quasar (o), vértices (+)	54

## Relação das Tabelas

2.1	Distribuição das imagens em um universo com topologia $T^3$ . Coordenadas das fontes em Mpc. (a)=(2400, 2400, 2400); (b)=(2390, 2390, 2390); (c)=(2300, 2300, 2300) . . . . .	24
2.2	Distribuição das imagens em um universo com topologia $T^3$ . Coordenadas das fontes em Mpc. (a)=(0, 0, 1750); (b)=(50, 0, 1750); (c)=(150, 0, 1750) . . . . .	25
2.3	Distribuição das imagens em um universo com topologia $T^3$ . Coordenadas das fontes em Mpc. (a)=(2400, 100, -1450); (b)=(2390, 100, -1450); (c)=(2300, 100, -1450) . . . . .	26
2.4	Distribuição das imagens em um universo com topologia $T^3$ . Coordenadas das fontes em Mpc. (a)=(2400, 2400, 945); (b)=(2390, 2390, 945); (c)=(2300, 2300, 945) . . . . .	27
3.1	Coordenadas dos vértices do Poliedro Fundamental . . . . .	36
3.2	Faces do Poliedro Fundamental. . . . .	37
3.3	Dimensões do Poliedro Fundamental . . . . .	38
3.4	Relações entre os geradores $g_i$ . . . . .	39
3.5	Relação das palavras de comprimento maior do que um, utilizadas para o cálculo das imagens. . . . .	40
3.6	Imagens de dois observadores até um redshift $Z_{max} = 4.0$ . $\delta$ e $\phi$ em graus. . . . .	42



# INTRODUÇÃO

## Cosmologia

O modelo padrão da cosmologia, conhecido como o modelo do Big-Bang, é construído tendo como base as equações de Einstein da Relatividade Geral conjuntamente com o Princípio Cosmológico que estabelece que o Universo é homogêneo e isotrópico.

O Princípio Cosmológico aparenta a primeira vista, ser uma aproximação para descrever o Universo, no entanto, os dados observacionais indicam fortemente a sua validade. A isotropia sendo confirmada pelas observações da radiação cósmica de fundo que possui um espectro de corpo negro, com uma temperatura atual da ordem de  $T_0 \simeq 3K$ . Esta radiação foi detectada pela primeira vez por Penzias e Wilson em 1964 [51], e interpretada por Dicke e colaboradores [16], como sendo a radiação cósmica de fundo prevista por G. Gamow na década de 40 (veja p.ex., [8]). Medidas recentes do satélite COBE [46] e experimentos com foguetes [37], indicam para a radiação cósmica de fundo, um espectro de corpo negro a uma temperatura de  $T_0 = 2.735 \pm 0.017K$ . Mas a extrema isotropia da radiação cósmica de fundo foi utilizada por alguns autores para criticar o modelo do Big-Bang [4], sob a alegação de que no momento do desacoplamento o raio do Universo seria muito menor do que as dimensões da região atualmente observada através da radiação cósmica de fundo [15], gerando o chamado *Problema do Horizonte*. Um outro problema alegado para a não aceitação do modelo do Big-Bang é a de que este modelo não explica de maneira satisfatória a geração de flutuações na densidade necessárias para a

formação das estruturas em grande escala observadas no Universo. No entanto com o advento dos modelos inflacionários [1, 38, 43] tornou-se possível uma solução para o Problema do Horizonte, além de fornecer possíveis mecanismos para gerar as flutuações necessárias para a geração das estruturas em grande escala observadas no Universo (para uma revisão recente veja [11, 47]). Os resultados recentes obtidos com o satélite COBE [54] indicam a existência de uma anisotropia na radiação cósmica de fundo que pode ser interpretada como tendo origem nas flutuações na densidade para a formação das estruturas em grande escala observadas no Universo.

A homogeneidade do Universo é obtida – indiretamente – pela medida da recessão das galáxias, observadas pela primeira vez por E.Hubble na década de 20 [41]. A chamada lei de Hubble, estabelece que a velocidade de recessão  $v$  das galáxias é proporcional a sua distância à nossa Galáxia, isto é,  $v = H_0 d$  onde  $H_0$  é a constante de Hubble, cujo valor estimado é (citado em [50])

$$H_0 = 67 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}.$$

A radiação cósmica de fundo, a sua isotropia, a recessão das galáxias, conjuntamente com a abundância de elementos leves, notadamente hidrogênio, deutério, hélio e o lítio [50, 61] são fortes evidências que confirmam as previsões do modelo padrão para o Universo.

## Quasares

Os quasares desde a sua descoberta, tem gerado polêmicas a cerca da sua origem e natureza. O que era surpreendente para muitos era a luminosidade extremamente elevada associada aos quasares, muito maior do que a observada em qualquer objeto até então detectado no Universo. Uma das saídas para explicar a alta luminosidade associada aos quasares, era assumir que o redshift associado a eles não era de origem cosmológica. Com isso, a luminosidade destes objetos seria muito reduzida. No

entanto, com o acúmulo de dados observacionais e a elaboração de modelos mais acurados para os quasares, tornou-se claro que o redshift dos quasares era realmente de origem cosmológica. Análises de dados de outras galáxias com núcleos ativos, indicam a existência de uma continuidade evolutiva entre estes objetos [60]. Dessa forma a natureza cosmológica do redshift dos quasares possui atualmente uma boa base observacional.

No entanto, alguns autores (veja [4] e suas referências e [50] para um contraponto) defendem o ponto de vista de que a origem dos quasares não deve ser cosmológica, estando na verdade associados com galáxias, podendo inclusive ter a sua origem como objetos ejetados das galáxias. A origem fundamental dos argumentos utilizados pelos autores acima<sup>1</sup> (especialmente por Arp), é de que existem associações de quasares de alto redshift com galáxias de baixo redshift muito acima do esperado estatisticamente, e de que em alguns casos, esta associação se faz através de uma ligação física entre a galáxia e o quasar, o que seria impossível se o redshift do quasar fosse de origem cosmológica (v. p.ex. [2, 3, 4, 10]). Apesar da origem cosmológica do redshift dos quasares ter originado uma série de debates (v. p.ex. [32, 60]), atualmente é aceito que a sua origem é realmente cosmológica. Em relação ao excesso de associações entre galáxias e quasares, Weedman argumenta que ([60, pagina 29]):

*... These arguments are strictly statistical in nature and easy to check, in the sense that necessary calculations are straightforward. What has not easy is that curious features of quasar configurations are pointed out after the fact, without predictive power.*

e ([60, pagina 37])

*... only requirement for obtaining meaningful scientific results is to define before testing<sup>2</sup> what correlations are to be tested with the sample available.*

---

<sup>1</sup>além da questão da luminosidade associada a estes objetos

<sup>2</sup>enfatizado no original

## Topologia do Universo

As equações correspondentes ao modelo padrão para o Universo descrevem apenas as suas propriedades locais. As propriedades globais do Universo, tem sido muito pouco exploradas em cosmologia, e quando isto é efetuada, a sua aplicação e confrontação com dados observacionais não são diretas (veja p.ex. [19, 33, 34]), dificultando a sua comprovação. É interessante notar que alguns autores ([39, página 136], veja também [59, página 95]), descartam a possibilidade de que o Universo possua uma topologia não trivial, mais especificamente, que seja multiplamente conexo, pois neste caso o grupo de isometria seria reduzido, e o Universo deixaria de ser isotrópico em contradição com os dados observacionais. Zeldovich [63], argumenta que essa anisotropia levaria a um momento de quadrupolo suficientemente alto para ser medido. No entanto, trabalhos posteriores mostram claramente que a não isotropia inerente à variedade, não implica necessariamente em um alto valor para anisotropia da radiação cósmica de fundo, podendo inclusive ser invocada para explicar não somente a isotropia [35, 21], como uma possível anisotropia de origem topológica [58]. Em relação ao momento de quadrupolo, Fang e Houjun [29] demonstram que a sua influência não seria suficiente para gerar dados contraditórios com as observações. Dessa forma o argumento inicial da redução do grupo de isometria para universos multiplamente conexos, não traz consequências mensuráveis na radiação cósmica de fundo – um dos principais dados observacionais que qualquer modelo para o Universo deve satisfazer. Trabalhos recentes indicam que caso a topologia do Universo seja toroidal, a detecção da anisotropia na radiação cósmica de fundo pelo satélite COBE [54] estabelece um limite inferior para as dimensões da célula fundamental [55, 57, 58].

As prováveis consequências observacionais de um Universo com topologia não trivial, passaram a ser exploradas apenas recentemente [14, 20, 23, 28, 30, 35, 40, 56]. Estes trabalhos assumem uma seção espacial compacta para o Universo, mesmo

nos casos em que a curvatura é nula ou negativa. Um dos atrativos dos espaços compactos para a seção espacial do Universo, é de que teríamos um Universo de dimensões finitas e consequentemente com um número finito de objetos. E no caso das dimensões do Universo, isto é, da célula fundamental, serem suficientemente reduzidas, teríamos um acesso a **todo** Universo, o que não seria possível se a seção espacial não fôr compacta. Neste caso, as dimensões da célula ou poliedro fundamental (ver seção 1.2 para mais detalhes) assumem um papel importante, pois caso ela não seja suficientemente pequena ou pelo menos menor do que as dimensões do horizonte visível do Universo, as diferenças observacionais de um Universo com topologia trivial não serão perceptíveis.

## Objetivos

No nosso trabalho, procuramos ampliar o estudo das consequências observacionais de universos com topologia não trivial, procurando explorar os efeitos possíveis de serem medidos com técnicas observacionais atualmente disponíveis. Analisamos dois tipos de universos com seção espacial compacta, um para o caso hiperbólico, com o objetivo de explorar a sua propriedade de serem localmente homogêneos mas globalmente inomogêneos, com o intuito de verificar a possibilidade de explicar de uma maneira topológica as associações de quasares e galáxias com redshifts discordantes. O outro caso foi de um universo com topologia de um toro plano  $T^3$ , no qual analisamos como a topologia afeta a distribuição dos objetos no céu. Ao contrário dos outros autores que basicamente analisaram ou estruturas em grande escala [20, 26, 30, 40, 56] ou objetos que assumiam como sendo pontuais ou sem estrutura aparente [14, 28] para um universo com topologia de um toro plano, nós analisamos a influência em objetos com estruturas tais como jatos e similares.

# Capítulo 1

## COSMOLOGIA

### 1.1 O modelo de Friedmann

Utilizando apenas o Princípio Cosmológico, podemos obter tanto a métrica como o tensor energia momento do Universo. A métrica para um Universo homogêneo e isotrópico deve ser do tipo Robertson-Walker [61]

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (1.1)$$

onde  $a(t)$  é denominado fator de escala, e  $k = 0, \pm 1$  é uma constante relacionada com a curvatura do Universo. O tensor energia-momento deve ser semelhante a de um fluido perfeito [61]

$$T_{ij} = pg_{ij} + (p + \rho)u_i u_j \quad (1.2)$$

onde  $i, j = 0, 1, 2, 3$  e  $p, \rho$  são funções apenas de  $t$ , e  $u_i$  é o quadri-vetor velocidade do observador em comovimento com o fluido cósmico. É importante notar que tanto a métrica como o tensor energia-momento dados acima, são independentes da equação do campo gravitacional, estando relacionados apenas com as propriedades de simetria contidos no Princípio Cosmológico (ver por exemplo capítulo 13 de [61]).

Utilizando apenas a métrica de Robertson-Walker (equação 1.1) é possível obter uma série de informações sobre o Universo que são independentes da equação de campo utilizado para descrever o campo gravitacional.

A distância própria entre dois observadores é dada em função da métrica por [42]

$$\int dl = \int \left[ \left( g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \right) dx^\alpha dx^\beta \right]^{1/2} \quad (1.3)$$

onde  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ . Com isso, a distância da origem a um ponto  $r$  com  $\theta, \phi$  fixos, para o caso da métrica de Robertson-Walker é dada por

$$l(t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1.4)$$

$$\equiv \begin{cases} a(t) \arcsin r & \text{se } k = +1 \\ a(t)r & \text{se } k = 0 \\ a(t)\operatorname{arcsinh} r & \text{se } k = -1 \end{cases} \quad (1.5)$$

Derivando a equação 1.4 em relação ao tempo próprio  $t$ , obtemos a lei de Hubble relativística

$$\dot{l} = \dot{a}(t)f(r) \quad (1.6)$$

$$= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}l(t) \quad (1.7)$$

de forma que a constante de Hubble é dada por  $H = \dot{a}(t)/a(t)$ .

Outra relação importante obtida apenas com a utilização da métrica, é o *redshift*  $Z$  dado por

$$Z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} \quad (1.8)$$

$$= \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1. \quad (1.9)$$

Utilizando  $g_{ij}$  e  $T_{ij}$  dados nas equações 1.1 e 1.2 podemos resolver a equação de Einstein,

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = -8\pi GT_{ij} \quad (1.10)$$

obtendo as soluções relativas aos modelos de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}[\rho + 3p] \quad (1.11)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (1.12)$$

$$a^3 \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}[a^3(\rho + p)] \quad (1.13)$$

A equação 1.12 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{k}{a^2} &= H^2 \left[ \frac{8\pi G}{3H^2} - 1 \right] \\ &\equiv H^2[\Omega - 1] \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde  $\Omega = \rho/\rho_c$  é o parâmetro de densidade, e  $\rho_c = 3H^2/(8\pi G)$  é a densidade crítica, que corresponde a densidade de um universo plano, isto é,  $k = 0$ . Obtemos assim, uma relação entre a geometria da seção espacial do Universo, e o seu conteúdo de matéria, dada por

$$\Omega \begin{cases} < 0 & \text{espaço hiperbólico,} \\ = 0 & \text{espaço plano,} \\ > 0 & \text{espaço esférico.} \end{cases} \quad (1.15)$$

Como trabalharemos com espaço hiperbólico (capítulo 3), é conveniente expressar a métrica de Robertson-Walker em outro sistema de coordenadas além do cartesiano. Para um espaço hiperbólico é conveniente reescrever a equação 1.1 como

$$ds^2 = a^2(\eta) \{ d\eta^2 - d\chi^2 - \sinh^2 \chi [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2] \} \quad (1.16)$$

onde introduzimos a variável  $\eta$  que está relacionada com a coordenada temporal  $t$  através de  $dt = a d\eta$ . A variável  $\chi$  corresponde à distância própria medida em unidades do fator de escala  $a(t)$ , isto é, pela relação (ver equação 1.5)

$$l/a = \chi. \quad (1.17)$$

Com estas coordenadas, a trajetória de um raio de luz é dada pela equação  $d\eta = \pm d\chi$ . Neste caso, um raio de luz que parte em um instante  $t(\eta)$  e atinge a origem do sistema de coordenadas em um instante  $t(\eta_o)$  satisfaz a equação  $\chi = \eta_o - \eta$ . No

caso de um Universo sem pressão,  $p = 0$ , que corresponde ao período dominado pela matéria, obtemos como soluções para o modelo de Friedmann as equações :

$$a = a_o(\cosh \eta - 1) \quad (1.18)$$

$$t = a_o(\sinh \eta - \eta) \quad (1.19)$$

Com isso, podemos obter uma relação entre  $\Omega$  e  $\eta$

$$\Omega = \frac{2}{\cosh \eta + 1} \quad (1.20)$$

Utilizando a métrica dada em 1.16, o redshift  $Z$  é dado por

$$Z(\chi) = \frac{\cosh \eta_o - 1}{\cosh(\chi - \eta_o) - 1} - 1 \quad (1.21)$$

onde  $\chi, \eta_o$  correspondem respectivamente ao instante de emissão e recepção da luz. Notemos que  $\eta_o$  corresponde ao horizonte visível do observador. Com isso, da equação 1.20 obtemos uma relação entre a densidade e as dimensões do horizonte visível do Universo.

## 1.2 Variedades 3-D em Cosmologia

Na seção 1.1 desenvolvemos um modelo que depende das equações do campo gravitacional utilizadas para descrever o Universo. No entanto, é desejável sempre que possível, analisar o Universo de maneira independente das particularidades da teoria utilizada. Para isso, podemos considerar o Universo como sendo uma variedade  $(M, g)$ , onde  $g$  é uma métrica lorentziana. A imposição de uma métrica lorentziana para variedade não é uma restrição forte, pois basta que a variedade admita uma métrica positiva definida, para que possua uma métrica lorentziana [34]. No caso específico da cosmologia, assumiremos que a seção espacial seja uma variedade riemanniana completa. Onde uma variedade  $M$  é denominada completa, se para qualquer ponto  $p \in M$ , uma geodésica  $\lambda : R \rightarrow M$  partindo de  $p$  é definida para qualquer parâmetro  $t \in R$  [13].

O Princípio Cosmológico pode ser descrito de uma maneira formal para uma dada variedade, utilizando a noção de isometria. Para isso representamos o espaço-tempo como uma variedade 4-dimensional, que é folheado com subvariedades 3-dimensionais do tipo espaço, isto é, o Universo é descrito por  $M = \Sigma(t) \times R$ , onde  $\Sigma(t)$  corresponde à seção espacial do Universo, que é ortogonal as linhas de mundo dos observadores em comovimento com o fluido cósmico. Assim, temos a seguinte descrição do Princípio Cosmológico [59]

**homogeneidade** : se dados dois pontos  $p, q \in \Sigma(t)$ , existe uma isometria que leva  $p$  em  $q$ ,  $\Sigma(t)$  é homogêneo.

**isotropia** : seja uma congruência de curvas do tipo tempo, ortogonais a  $\Sigma(t)$ , e um ponto  $p$  pertencente a uma dessas curvas com vetor tangente  $u$  em  $p$ . Sejam dois vetores  $s_1, s_2$  unitários e ortogonais a  $u$  em  $p$ . Se existir uma isometria que mantém  $p$  e  $u$  fixos, e leva  $s_1$  em  $s_2$ , então  $\Sigma(t)$  é isotrópico em  $p$ .

Notemos que um espaço que é isotrópico em todos os pontos é também homogêneo, a recíproca não sendo verdadeira.

### 1.3 Forma espacial

Consideremos dois vetores  $X, Y$  de  $M$  linearmente independentes, que formam um subespaço 2-dimensional  $\sigma$  de  $T_p(M)$ . A curvatura seccional  $K(p, \sigma)$  em um ponto  $p \in M$  é definido em termos dos vetores  $X, Y$  através da relação [9]

$$K(p, \sigma) = -\frac{\langle R(X, Y) \cdot X, Y \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \quad (1.22)$$

ou utilizando as coordenadas locais  $E_i$ , tais que  $X = \sum a^i E_i, Y = \sum b^i E_i$  onde  $g_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle$ , podemos expressar as componentes do tensor de curvatura através de

$$R_{ijkl} = -K(p, \sigma) \sum (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \quad (1.23)$$

Se  $K(p, \sigma) = K_o$  para todo  $\sigma \in T_p(M)$ , e todo  $p \in M$ , então a variedade  $M$  é um espaço de curvatura constante. Neste caso é possível demonstrar (Teorema de Cartan [13, Corolário 2.3, página 133]) que existem vizinhanças  $U$  de  $p$  e  $V$  de  $q$ , e uma isometria  $\phi : U \rightarrow V$ . Esta é a definição de homogeneidade local (veja por exemplo [17]), sendo que anteriormente na definição de homogeneidade para o Princípio Cosmológico foi apresentada a sua versão global. No modelo padrão para a Cosmologia, com a utilização do Princípio Cosmológico, a seção espacial do Universo é descrita por um espaço de curvatura constante. As variedades completas de curvatura constante recebem o nome de formas espaciais. Neste tipo de variedade, basta a curvatura seccional  $K_o$  para determinarmos o tensor de curvatura. Se multiplicarmos a métrica por uma constante positiva arbitrária, a curvatura seccional será dividida pela mesma constante (veja equação 1.23), logo o que importa é o sinal da curvatura seccional, e não o seu valor numérico para caracterizar o espaço. Assim, temos três possíveis valores para a curvatura seccional de um espaço de curvatura constante  $K_o = \pm 1, 0$ , caracterizando as três possíveis geometrias para o Universo.

A Relatividade Geral nos fornece apenas informações locais, e não globais. Assim, qualquer variedade que satisfaça localmente as soluções obtidas pela Relatividade Geral, é a princípio uma variedade aceitável como modelo para o Universo. Apesar de termos apenas três possíveis valores para a curvatura seccional, existem outros espaços que apesar de serem caracterizados localmente por uma das três geometrias, são globalmente distintos. Normalmente são explorados somente os espaços simplesmente conexos  $R^n$ ,  $S^n$  ou  $H^n$ , no entanto é possível obter outras variedades que sejam isométricas a uma das três variedades anteriores, portanto que satisfazem localmente os modelos de Friedmann. No caso de espaços planos é possível construir seis diferentes espaços orientáveis, e nos outros casos, as possibilidades são infinitas (ver p.ex. [19]). Isto quer dizer que temos a disposição uma grande gama de possíveis seções espaciais para o Universo a serem exploradas.

## 1.4 Construindo espaços compactos

Como a seção espacial dos Universos de Friedmann são 3-dimensionais, seria útil se houvesse um esquema de classificação destas variedades. Mas esta é ainda uma área de intensa pesquisa entre os matemáticos (veja por exemplo [53]) e ainda não existe uma classificação das variedades 3-dimensionais disponível para aplicação. No entanto é possível construir algumas variedades 3-dimensionais compactas que podem ser utilizadas em cosmologia. Uma dessas maneiras, é criar uma rede de células de forma a preencher todo espaço, tal como é feito por exemplo no estudo das redes cristalinas em estado sólido.

Como vimos na seção 1.3, os únicos espaços de curvatura constante que temos são  $R^3$ ,  $S^3$ , ou  $H^3$  (em três dimensões), ou são isométricos a um destes espaços.

Para construir estas variedade compactas, utilizamos um grupo com ação totalmente descontínua em uma variedade  $M$ . A definição de um grupo  $\Gamma$  que age de maneira totalmente descontínua em uma variedade  $\tilde{M}$  sendo [9, 13]:

- para cada  $\gamma \in \Gamma$  sendo  $\gamma \neq e$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $\tilde{x} \in \tilde{M}$  que satisfaz a condição  $\gamma U \cap U = \emptyset$ .

Assim, construimos as variedades compactas através da ação de um subgrupo do grupo de isometrias  $\Gamma$ , que age de maneira totalmente descontínua, no espaço de recobrimento universal  $\tilde{M}$ . Onde  $\tilde{M}$  é isométrico a  $R^3$ ,  $S^3$  ou  $H^3$ . Com isso, podemos obter uma variedade  $M$  que é isométrica a  $\tilde{M}/\Gamma$ , com a métrica induzida pela aplicação de recobrimento  $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$  [45].

Assim, consideremos uma variedade  $M$  qualquer com um certo grupo de isometria  $\Gamma$ . Seja um subconjunto (subespaço)  $F$  de  $M$ , que seja fechado e convexo, e que satisfaça as seguintes condições :

1. as faces de  $F$  são identificadas pela ação de  $\Gamma$ , onde as faces são variedades de dimensão  $m - 1$ , sendo  $m = \dim(M)$ , de forma que a fronteira de  $F$

é obtida pela união das faces de  $F$ ;

2.  $M = \bigcup \gamma F$ , onde  $\gamma \in \Gamma$ ;

3.  $\overset{\circ}{F} \cap \gamma \overset{\circ}{F} = \emptyset$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , onde  $\overset{\circ}{F}$  é o interior de  $F$ .

Nesse caso dizemos que  $F$  é um Poliedro Fundamental sob a ação de  $\Gamma$  [6].

Neste processo de construção, temos uma conexão entre a topologia e a teoria dos grupos, ou seja, transformamos um problema topológico – a obtenção das formas espaciais – em um problema algébrico, mais especificamente a um problema da teoria dos grupos.

Consideremos por exemplo, o toro  $T^3$  que é obtido pela identificação em pares das faces de um paralelepípedo (veja a figura 2.1). Esta identificação pode ser descrita através das relações

$$\begin{aligned} g_x^{n_x} : x &\mapsto x + n_x l_x & n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ g_y^{n_y} : y &\mapsto y + n_y l_y & n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ g_z^{n_z} : z &\mapsto z + n_z l_z & n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \tag{1.24}$$

onde  $l_x, l_y, l_z$  são as dimensões das bordas do paralelepípedo. As transformações acima pertencem a um subgrupo do grupo de isometrias de  $R^3$ , e correspondem ao grupo  $Z^3$  das translações finitas, de forma que  $T^3$  é isométrico à  $R^3/Z^3$ .

## 1.5 Espaços globalmente inomogêneos

Como vimos acima, a homogeneidade de uma variedade  $M$  é descrita pela existência de uma isometria  $\phi$  entre dois abertos  $U, V \in M$ . Esta definição de homogeneidade, define na realidade uma homogeneidade local da variedade. As variedades simplesmente conexas  $R^n$ ,  $S^n$  e  $H^n$  são todas globalmente homogêneas, no entanto as variedades construídas pela ação de um subgrupo  $\Gamma$  de isometrias, formando o espaço quociente  $\tilde{M}/\Gamma$  não são necessariamente homogêneas globalmente [19].

Para que uma variedade  $M/\Gamma$  seja homogênea, é necessário que  $\Gamma$  seja um grupo de translação de Clifford de  $M$  [62]. Dizemos que uma isometria  $\phi$  é uma translação de Clifford, se a distância  $\delta_\phi$  de  $p$  a  $\phi(p)$  fôr constante. No caso do espaço plano  $R^n$ , a translação de Clifford é simplesmente a translação usual, enquanto no espaço hiperbólico, a translação de Clifford se reduz à transformação identidade [62, Lema 2.7.4.]. Dessa forma, o espaço compacto obtido por  $R^n/\Gamma$  será homogêneo, somente se  $\Gamma$  fôr o grupo das translações finitas de  $R^n$ . No caso hiperbólico  $H^n/\Gamma$ , a única variedade homogênea é somente  $H^n$ . Portanto, qualquer espaço hiperbólico compacto será necessariamente não homogêneo globalmente.

Vamos considerar o grupo  $\tilde{\Gamma}$  completo de isometrias de  $\tilde{M}$ , de forma que dados  $\tilde{q}, \tilde{p} \in \tilde{M}$ , existe um  $\sigma \in \tilde{\Gamma}$  tal que  $\sigma(\tilde{p}) \mapsto \tilde{q}$ . Seja agora um subgrupo  $\Gamma$  de  $\tilde{\Gamma}$ , com  $\gamma \in \Gamma$ , sendo que no espaço quociente  $\tilde{M}/\Gamma$ , temos que  $p = \pi \circ \tilde{q} = \pi \circ \gamma(\tilde{p})$ , onde  $\pi$  é a aplicação de recobrimento  $\pi : \tilde{M} \mapsto M$ . Se  $\tilde{M}/\Gamma$  fôr homogêneo,  $\gamma$  é uma translação de Clifford, pela definição acima. Logo,  $\delta_\gamma$  é constante, isto é, dados dois pontos  $\tilde{p}, \tilde{q} \in \tilde{M}$ , a distância entre  $\tilde{p}$  e  $\gamma(\tilde{p})$  é a mesma que a distância entre  $\tilde{q}$  e  $\gamma(\tilde{q})$ . Isto é, se definirmos a distância entre dois pontos  $x, y$  por  $D(x, y)$ , temos em um espaço homogêneo a igualdade

$$D(\tilde{p}, \gamma(\tilde{p})) = D(\tilde{q}, \gamma(\tilde{q})). \quad (1.25)$$

Outra maneira de descrever a homogeneidade global é utilizando as noções de *laço geodésico* e *ângulo de laço* (veja [24, teorema 3.2, pag 211], para uma demonstração da equivalência entre as duas construções). Seja  $x(\lambda)$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$  um segmento de geodésica em  $\Sigma$ , tal que  $x(1) = x(0)$ , e  $\gamma \in \Gamma$ , onde  $\Sigma$  é isométrico a  $\tilde{\Sigma}/\Gamma$ . Dizemos que o par  $(x, \gamma)$  forma um laço geodésico em  $\Sigma$ . Com isso, temos o levantamento  $\tilde{x}$  e o segmento de geodésica  $(\tilde{x}, \gamma\tilde{x})$  em  $\tilde{\Sigma}$ . A distância entre dois pontos  $x, y$  é definido por  $D(x, y)$  e o comprimento de um laço por  $L(x, \gamma)$ . No caso de um laço geodésico e a curva obtida pelo seu levantamento, temos a relação  $L(x, \gamma) = D(\tilde{x}, \gamma\tilde{x})$ . O ângulo do laço  $\angle(x, \gamma)$  é definido como o ângulo entre as direções iniciais  $x(0)$  e finais  $x(1)$

do laço  $(x, \gamma)$ , e é dado por  $\cos^{-1} < \vec{t}(0), \vec{t}(1) >$ , onde  $< , >$  é o produto interno definido pela métrica em  $\Sigma$ , e  $\vec{t}$  é um vetor unitário dado por  $d/d\lambda$ . Com essas definições dizemos que  $\Sigma$  é globalmente homogêneo se, dados  $x, x' \in \Sigma$ , tivermos [24]

$$L(x, \gamma) = L(x', \gamma) \quad (1.26)$$

$$\cos^{-1} < \vec{t}(0), \vec{t}(1) > = \cos^{-1} < \vec{t}'(0), \vec{t}'(1) > . \quad (1.27)$$

Caso uma dessas condições sejam violadas, a variedade é dita globalmente inhomogênea.

## Capítulo 2

# UNIVERSO PLANO COMPACTO – $T^3$

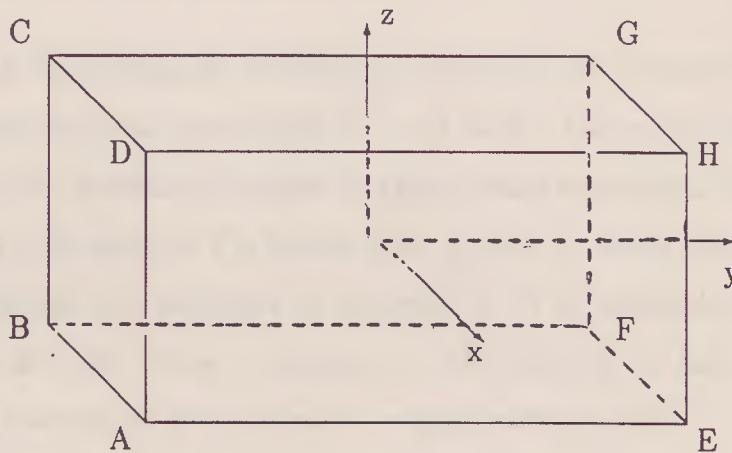
### 2.1 O toro plano $T^3$

Vamos considerar o caso de um universo plano, com topologia de um toro  $T^3$ . Como vimos no capítulo anterior, este tipo de universo pode ser obtido através da identificação em pares das faces de um paralelepípedo, onde identificamos as faces  $ABCD$  com  $EFGH$ ,  $DCGH$  com  $ABFE$ , e  $ADHE$  com  $BCGF$  (figura 2.1). Neste caso, o espaço de recobrimento universal é  $R^3$ , e o subgrupo das isometrias é dado pelas translações em  $R^3$ , representado pelo gerador  $g^n \equiv g_x^{n_x} g_y^{n_y} g_z^{n_z}$ , onde

$$\begin{aligned} g_x^{n_x}(x, y, z) &= (x + n_x l_x, y, z) \\ g_y^{n_y}(x, y, z) &= (x, y + n_y l_y, z) \\ g_z^{n_z}(x, y, z) &= (x, y, z + n_z l_z). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como localmente as propriedades do Universo com topologia  $T^3$  são as mesmas de um Universo plano com topologia trivial, as fórmulas obtidas para o universo de Friedmann padrão podem ser usadas mesmo no caso de um universo com topologia  $T^3$ . Assim, para as simulações utilizamos as fórmulas padrão para um universo plano; a distância própria  $D$  de um objeto ao observador em função do redshift  $Z$  sendo [52]

$$D(Z) = \frac{2c}{H} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+Z}} \right] \tag{2.2}$$

Figura 2.1: Poliedro fundamental para o toro  $T^3$ 

e o “look-back time”  $\tau$ :

$$\tau = \frac{2}{3H} \left[ 1 - \frac{1}{(1+Z)^{3/2}} \right]. \quad (2.3)$$

Sei que a distância  $D$  de uma imagem ao observador é dada por

$$D = \sqrt{(x_o + n_x l_x)^2 + (y_o + n_y l_y)^2 + (z_o + n_z l_z)^2} \equiv |g^n(x_o, y_o, z_o)| \quad (2.4)$$

O número de imagens possíveis de serem observadas depende claramente das dimensões  $l_x, l_y, l_z$  da célula fundamental. Se  $Z_{max}$  é a distância máxima que um objeto pode ser observado, o número de células necessários na direção do eixo  $i$  é dado por

$$n_i = \mathcal{INT} \left\{ \frac{1}{l_i} \left[ \frac{2c}{H} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+Z_{max}}} \right) \right]^{1/2} \right\} \quad (2.5)$$

onde  $\mathcal{INT}$  indica que devemos extrair a parte inteira mais um da expressão entre as chaves.

### 2.1.1 Dimensões da célula fundamental

Do ponto de vista observational, precisamos determinar as dimensões da célula fundamental, assim como as orientações das suas faces. Foram propostos alguns métodos para esse fim, utilizando imagens de aglomerados de galáxias [56], quasares e galáxias [31, 14] e imagens da Via Láctea [28]. Apesar de ainda não ser possível determinar com certeza se a topologia do Universo é  $T^3$ , os resultados obtidos pelos autores acima indicam que se a topologia do Universo for de fato  $T^3$ , as suas dimensões seriam maiores do que o proposto originalmente [20, 56].

As propostas para obter as dimensões da célula fundamental, dependem da hipótese de que ou conhecemos a evolução dos objetos, ou assumimos que estes objetos não evoluam muito entre uma imagem e outra. Estas condições não são sempre possíveis de serem obtidas. Uma outra maneira para determinar as dimensões da célula fundamental é com a utilização dos resultados obtidos pelo satélite COBE nas medidas da anisotropia da radiação cósmica de fundo [54]. Resultados recentes indicam que se a topologia do Universo for toroidal, então os dados do COBE são incompatíveis com um Universo de dimensões reduzidas como proposto em [20].

Em [58] utilizando a hipótese de uma perturbação (adiabática) na densidade para a formação de estruturas em grande escala no Universo, de forma que a flutuação na temperatura em grande escala seja dada (em um Universo de Einstein – de Sitter) por [29, 49]:

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}) = -\frac{1}{2} \frac{H_o^2}{c^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\delta_{\mathbf{k}} \exp(iy\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})}{k^2} \quad (2.6)$$

$$= \sum_{l,m} a_l^m Y_l^m(\mathbf{n}) \quad (2.7)$$

onde

$$a_l^m = -2\pi i^l \frac{H_o^2}{c^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\delta_{\mathbf{k}}}{k^2} j_l(ky) Y_l^m(\mathbf{n}), \quad (2.8)$$

sendo  $j_l$  a função esférica de Bessel de ordem  $l$ . Assumindo uma invariância por

rotação para o coeficiente  $a_l^m$ , obtemos [58]

$$\langle a_l^2 \rangle \propto \sum_{p_x, p_y, p_z} \left( \frac{L}{2\pi y p} \right)^3 j_l^2 \left( \frac{2\pi y p}{L} \right) \quad (2.9)$$

onde  $p_x, p_y, p_z$  são números inteiros. A grandeza  $L/y$  (veja 2.9) fornece a razão entre a escala da célula fundamental e do horizonte. Em [58] foi efetuado um estudo com diversas razões  $L/y$ , obtendo que a escala mínima aceitável é de  $L/y = 0.8$  correspondendo a um valor  $L = 2400 h^{-1}$  Mpc, com um nível de confiança de 95%. Como comparação, as análises de Fagundes e Wichowski [28] através da procura de possíveis imagens da Via Láctea em um catálogo de galáxias e quasares, resultaram em uma estimativa de  $L \simeq 2300 h^{-1}$ , um valor bem próximo do obtido em [58].

Assim para os nossos cálculos utilizamos o valor mínimo obtido no trabalho de Stevens, Scott e Silk [58] para o tamanho da célula fundamental. Utilizamos para a constante de Hubble o valor  $H_o = 50$  km/(s Mpc) de forma que a célula fundamental (uma célula cúbica, isto é,  $l_x = l_y = l_z$ ) neste trabalho tem a dimensão de  $L = 4800$  Mpc. O sistema de coordenadas está orientado de forma que a origem está no centro geométrico da célula fundamental, e os eixos das coordenadas interceptam as faces ortogonalmente. Denominamos fonte qualquer objeto localizado dentro da célula fundamental, imagem os objetos localizados fora da célula fundamental e simplesmente objeto quando esta distinção não for necessária.

## 2.2 Imagens com o mesmo redshift

Para que duas ou mais imagens possuam o mesmo redshift a condição

$$|g^n(x_o, y_o, z_o)| = |g^m(x_o, y_o, z_o)| \quad (2.10)$$

deve ser satisfeita, onde  $(x_o, y_o, z_o)$  são as coordenadas da fonte. Podemos escrever as coordenadas em termos das dimensões  $l_x, l_y, l_z$  da célula fundamental:

$$x_o = \alpha_x l_x$$

$$y_o = \alpha_y l_y$$

$$z_o = \alpha_z l_z$$

onde no caso de um objeto dentro da célula fundamental, os  $\alpha_i$  satisfazem a condição:

$$-\frac{1}{2} \leq \alpha_i \leq \frac{1}{2}.$$

Utilizando a equação 2.4, a condição 2.10 pode ser reescrita como:

$$\sum_{i=1}^3 \{(n_i - m_i) [n_i + m_i + 2\alpha_i]\} l_i^2 = 0 \quad (2.11)$$

onde  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ,  $x_3 \equiv z$ . Como os  $n, m$  são números inteiros a equação 2.11 impõe uma forte restrição para que uma fonte possua mais de uma imagem com o **mesmo** redshift.

Para  $l_x, l_y$  e  $l_z$  arbitrários temos as possíveis soluções:

$$1 \ n_i = m_i;$$

$$2 \ n_i + m_i = -2\alpha_i,$$

sendo que no máximo dois termos devem satisfazer o critério 1 para que a solução não seja trivial. No caso de se satisfazer o item 2, como  $n_i$  e  $m_i$  são números inteiros, obtemos a restrição:

$$\alpha_i = \begin{cases} \pm \frac{1}{2} \\ 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

No caso em que  $\alpha_i = \pm 1/2$  a fonte está exatamente sobre a face na qual o eixo  $x_i$  é ortogonal, assim a fonte com  $\alpha_i = 1/2$  é a mesma que a fonte com  $\alpha = -1/2$ . A condição  $\alpha_i = 0$  indica que a fonte está no plano  $x_i = 0$ .

Dessa forma, para que tenhamos mais de uma imagem com o mesmo redshift para *qualquer*  $l_x, l_y, l_z$  a fonte deve satisfazer um dos critérios, dados a seguir, onde os índices  $i, j, k$  representam qualquer permutação do terno (1, 2, 3):

1.  $n_i = m_i, \forall i$ , corresponde a solução trivial;

2.  $n_i = m_i$ ,  $n_j = m_j$ ,  $n_k + m_k = -2\alpha_k$ :

- (a) se  $\alpha_k = 0$  então a fonte está no plano  $x_k = 0$ ;
- (b) se  $\alpha_k = \pm 1/2$ , a fonte está em uma das faces  $x_k = \pm l_k/2$ ;

3.  $n_i = m_i$ ,  $n_j + m_j = -2\alpha_j$ ,  $n_k + m_k = -2\alpha_k$ :

- (a) se  $\alpha_j = \alpha_k = 0$ , a fonte está sobre o eixo  $x_i$ ;
- (b) se  $\alpha_j = 0$  e  $\alpha_k = \pm 1/2$ , a fonte está na intersecção do plano  $x_j = 0$  e a face  $x_k = \pm 1/2$ ;
- (c) se  $\alpha_j = \pm 1/2$  e  $\alpha_k = \pm 1/2$ , a fonte está na intersecção dos planos  $x_j = \pm 1/2$  e  $x_k = \pm 1/2$ , isto é, em uma das arestas da célula fundamental, paralela ao eixo  $x_i$ ;

4.  $n_i + m_i = -2\alpha_i$ ,  $n_j + m_j = -2\alpha_j$ ,  $n_k + m_k = -2\alpha_k$ :

- (a) se  $\alpha_i = 0$ ,  $\forall_i$ , a fonte está no centro da célula fundamental, isto é, a fonte é o observador;
- (b) se  $\alpha_i = 0$ ,  $\alpha_j = 0$  e  $\alpha_k = \pm 1/2$ , a fonte está na intersecção dos planos  $x_i = 0$  e  $x_j = 0$  e o eixo  $x_k$ ;
- (c) se  $\alpha = \pm 1/2$ ,  $\alpha = \pm 1/2$ ,  $\alpha = \pm 1/2$ , a fonte está em um dos vértices da célula fundamental.

As condições acima podem ser resumidas basicamente em: fontes localizadas em um dos planos  $x_i = 0$ , ou em uma das faces  $x_i = \pm l_i/2$ , ou nas intersecções destes planos.

Notemos que as restrições acima são válidas para valores arbitrários das dimensões da célula fundamental. As restrições aos *valores numéricos* de  $n, m$  são obtidas pelo redshift máximo com a qual um objeto pode ser visto, e neste caso as dimensões da célula são importantes. Como ainda não existe um resultado confiável para uma possível dimensão para a célula, utilizaremos o resultado obtido em [58] (veja também [28]), e assumiremos que  $l_x = l_y = l_z = 2400h^{-1}$  (no entanto, veja

[57] que utilizando os dados do COBE obteve valores diferentes de [58]). Neste caso utilizando a equação 2.5 obtemos que  $|n_i|_{max} = 3$  para  $h = 0.5$  e  $|n_i|_{max} = 2$  para  $h = 1$ .

O ângulo de separação de duas imagens de uma mesma fonte com o mesmo redshift pode ser obtido através da fórmula usual

$$\cos \Lambda = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\sqrt{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}} \quad (2.13)$$

onde  $\vec{x}, \vec{y}$  são as coordenadas das imagens. No nosso caso sendo

$$|\vec{x}| = |\vec{y}| = \frac{2c}{H} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+Z}} \right) \quad (2.14)$$

a equação acima se reduz a

$$\cos \Lambda = \frac{1}{\left[ \frac{2c}{H} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+Z}} \right) \right]^2} \sum_{x,y,z} (\alpha_i + n_i)(\alpha_i + m_i) l_i^2 \quad (2.15)$$

de forma que medindo o ângulo de separação  $\Lambda$  entre as imagens com o mesmo redshift torna-se possível determinar as dimensões da célula fundamental.

Do resultado acima, temos que somente se a fonte estiver localizada em alguma região ou pontos privilegiados dentro da célula fundamental ela apresentará imagens com o mesmo redshift, sendo que estas imagens estarão distribuídas de maneira simétrica no céu. Dessa forma a existência de alguma fonte em uma das posições privilegiadas dadas acima, faz com que seja possível a determinação das dimensões e orientação das faces da célula fundamental. Caso a fonte não esteja localizada *exatamente* em uma das posições privilegiadas dadas acima, as imagens sofrerão um desvio no redshift. Dependendo do deslocamento, essa diferença no redshift pode ser suficientemente pequena, de forma que as imagens ainda estariam próximas das posições simétricas. A diferença  $\delta Z$  no redshift das imagens de uma fonte em  $(x_o, y_o, z_o)$  e em  $(x_o + \delta_x, y_o + \delta_y, z_o + \delta_z)$  é dada por

$$\delta Z = \frac{1+Z}{\sqrt{1+Z}-1} \delta \quad (2.16)$$

onde  $Z_{n_i} \equiv Z_{n_x, n_y, n_z}$  é o redshift da imagem localizada em

$$D = \sqrt{(x_o + n_x l_x)^2 + (y_o + n_y l_y)^2 + (z_o + n_z l_z)^2} \quad (2.17)$$

e

$$\delta = 2 \sum_{i=1}^3 (\alpha_i + n_i) \delta_i l_i + \mathcal{O}(\delta_i^2) \quad (2.18)$$

Dessa forma o desvio  $\delta Z$  depende da posição da fonte e das dimensões da célula, respectivamente  $\alpha_i$ , e  $l_i$  além do redshift  $Z_{n_i}$  da imagem e do desvio  $\delta_i$  da posição privilegiada.

Neste caso o ângulo  $\tilde{\Lambda}$  será dado por

$$\cos \tilde{\Lambda} \simeq \left[ 1 + \frac{2}{D^2} \sum_{x,y,z} \delta_i l_i (2\alpha_i + n_i + m_i) \right] \cos \Lambda \quad (2.19)$$

onde  $D$  é dado pela equação 2.17 e  $\cos \Lambda$  por 2.15.

### 2.3 Simulações numéricas

Para ilustrar os resultados apresentados na seção anterior, efetuamos algumas simulações. Para isso consideramos fontes nas seguintes posições (os números entre parênteses são relativos às localizações dadas no parágrafo anterior):

- em um dos vértices da célula fundamental (4c):

$$n_x + m_x = 1 \quad n_y + m_y = 1 \quad n_z + m_z = 1;$$

- no eixo  $z$  do sistema de coordenadas (3a):

$$n_x + m_x = 0 \quad n_y + m_y = 0 \quad n_z = m_z;$$

- na face da célula fundamental ortogonal ao eixo  $x$  (2a):

$$n_x + m_x = 1 \quad n_y = m_y \quad n_z = m_z;$$

#	fonte	$n_x$	$n_y$	$n_z$	Z	$\theta$	$\phi$	$\varphi$
1	a	-1	-1	-1	1.3427	125.26	225.00	180.00
	b	-1	-1	-1	1.3530	125.26	225.00	180.00
	c	-1	-1	-1	1.4498	125.26	225.00	180.00
2	a	-1	-1	0	1.3427	54.74	225.00	109.47
	b	-1	-1	0	1.3461	54.96	225.00	109.70
	c	-1	-1	0	1.3795	56.95	225.00	111.69
3	a	-1	0	-1	1.3427	125.26	135.00	109.47
	b	-1	0	-1	1.3461	125.38	135.24	109.70
	c	-1	0	-1	1.3795	126.35	137.39	111.69
4	a	-1	0	0	1.3427	54.74	135.00	70.53
	b	-1	0	0	1.3392	54.85	135.24	70.75
	c	-1	0	0	1.3104	55.90	137.39	72.81
5	a	0	-1	-1	1.3427	125.26	315.00	109.47
	b	0	-1	-1	1.3461	125.38	314.76	109.70
	c	0	-1	-1	1.3795	126.35	312.61	111.69
6	a	0	-1	0	1.3427	54.74	315.00	70.53
	b	0	-1	0	1.3392	54.85	314.76	70.75
	c	0	-1	0	1.3104	55.90	312.61	72.81
7	a	0	0	-1	1.3427	125.26	45.00	70.53
	b	0	0	-1	1.3392	125.49	45.00	70.75
	c	0	0	-1	1.3104	127.55	45.00	72.81
8	a	0	0	0	1.3427	54.74	45.00	0.00
	b	0	0	0	1.3323	54.74	45.00	0.00
	c	0	0	0	1.2424	54.74	45.00	0.00

Tabela 2.1: Distribuição das imagens em um universo com topologia  $T^3$ . Coordenadas das fontes em Mpc. (a)=(2400, 2400, 2400); (b)=(2390, 2390, 2390); (c)=(2300, 2300, 2300)

- em uma das arestas da célula fundamental (3c):

$$n_x + m_x = 1 \quad n_y + m_y = 1 \quad n_z = m_z.$$

Para cada uma das fontes acima, efetuamos um pequeno desvio nas coordenadas para determinarmos o desvio  $\delta Z$  no redshift.

Nas tabelas 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 apresentamos os resultados dos nossos cálculos, mostrando as seguintes informações: coluna (1) identificação arbitrária do objeto; coluna (2) identificação da fonte; colunas (3), (4) e (5) identificação da célula a que

#	fonte	$n_x$	$n_y$	$n_z$	Z	$\theta$	$\phi$	$\varphi$
1	a	0	0	1	3.8562	0.00	—	0.00
	b	0	0	1	3.8565	0.44	—	1.20
	c	0	0	1	3.8592	1.31	—	3.59
2	a	-1	0	-1	2.6178	122.43	180.00	122.43
	b	-1	0	-1	2.5699	122.70	180.00	124.34
	c	-1	0	-1	2.4774	123.26	180.00	128.16
3	a	0	-1	-1	2.6178	122.43	270.00	122.43
	b	0	-1	-1	2.6180	122.43	270.60	122.40
	c	0	-1	-1	2.6200	122.42	271.79	122.13
4	a	0	1	-1	2.6178	122.43	90.00	122.43
	b	0	1	-1	2.6180	122.43	89.40	122.40
	c	0	1	-1	2.6200	122.42	88.21	122.13
5	a	1	0	-1	2.6178	122.43	0.00	122.43
	b	1	0	-1	2.6668	122.16	0.00	120.53
	c	1	0	-1	2.7682	121.64	0.00	116.74
6	a	-1	0	0	2.0356	69.97	180.00	69.97
	b	-1	0	0	1.9947	69.78	180.00	71.41
	c	-1	0	0	1.9153	69.38	180.00	74.28
7	a	0	-1	0	2.0356	69.97	270.00	69.97
	b	0	-1	0	2.0359	69.97	270.60	69.96
	c	0	-1	0	2.0376	69.98	271.79	69.90
8	a	0	1	0	2.0356	69.97	90.00	69.97
	b	0	1	0	2.0359	69.97	89.40	69.96
	c	0	1	0	2.0376	69.98	88.21	69.90
9	a	1	0	0	2.0356	69.97	0.00	69.97
	b	1	0	0	2.0775	70.16	0.00	68.52
	c	1	0	0	2.1641	70.53	0.00	65.63
10	a	0	0	-1	0.7985	180.00	—	180.00
	b	0	0	-1	0.7987	179.06	—	177.42
	c	0	0	-1	0.8000	177.18	—	172.29
11	a	0	0	0	0.3709	0.00	—	0.00
	b	0	0	0	0.3711	1.64	—	0.00
	c	0	0	0	0.3727	4.90	—	0.00

Tabela 2.2: Distribuição das imagens em um universo com topologia  $T^3$ . Coordenadas das fontes em Mpc. (a)=(0, 0, 1750); (b)=(50, 0, 1750); (c)=(150, 0, 1750)

#	fonte	$n_x$	$n_y$	$n_z$	Z	$\theta$	$\phi$	$\varphi$
1	a	-1	1	1	3.6033	58.45	116.10	55.68
	b	-1	1	1	3.6095	58.47	116.19	55.59
	c	-1	1	1	3.6668	58.66	117.03	54.73
2	a	0	1	1	3.6033	58.45	63.90	85.55
	b	0	1	1	3.5971	58.43	64.00	85.69
	c	0	1	1	3.5433	58.25	64.86	86.95
3	a	-1	-1	1	3.3632	57.59	242.95	50.79
	b	-1	-1	1	3.3690	57.62	242.85	50.68
	c	-1	-1	1	3.4232	57.82	241.99	49.66
4	a	0	-1	1	3.3632	57.59	297.05	88.59
	b	0	-1	1	3.3573	57.57	296.95	88.74
	c	0	-1	1	3.3064	57.37	296.08	89.87
5	a	-1	1	0	2.5706	104.88	116.10	101.53
	b	-1	1	0	2.5754	104.87	116.19	101.56
	c	-1	1	0	2.6198	104.77	117.03	101.77
6	a	0	1	0	2.5706	104.88	63.90	121.82
	b	0	1	0	2.5659	104.89	64.00	121.75
	c	0	1	0	2.5241	105.00	64.86	121.13
7	a	0	-1	0	2.3840	105.36	297.05	118.78
	b	0	-1	0	2.3794	105.38	296.95	118.69
	c	0	-1	0	2.3396	105.49	296.08	117.94
8	a	-1	-1	0	2.3840	105.36	242.95	105.59
	b	-1	-1	0	2.3885	105.35	242.85	105.63
	c	-1	-1	0	2.4307	105.24	241.99	105.92
9	a	-1	0	1	1.3220	35.64	177.61	23.49
	b	-1	0	1	1.3255	35.75	177.62	23.27
	c	-1	0	1	1.3572	36.75	177.71	21.32
10	a	0	0	1	1.3220	35.64	2.39	85.48
	b	0	0	1	1.3186	35.53	2.40	85.69
	c	0	0	1	1.2885	34.50	2.49	87.71
11	a	-1	0	0	0.7042	121.12	177.61	117.60
	b	-1	0	0	0.7074	121.01	177.62	117.60
	c	-1	0	0	0.7366	120.09	177.71	117.54
12	a	0	0	0	0.7042	121.12	2.39	179.98
	b	0	0	0	0.7010	121.22	2.40	180.00
	c	0	0	0	0.6731	122.20	2.49	180.00

Tabela 2.3: Distribuição das imagens em um universo com topologia  $T^3$ . Coordenadas das fontes em Mpc. (a)=(2400, 100, -1450); (b)=(2390, 100, -1450); (c)=(2300, 100, -1450)

#	fonte	$n_x$	$n_y$	$n_z$	Z	$\theta$	$\phi$	$\varphi$
1	a	0	0	1	$> 4.0$	—	—	—
	b	0	0	1	$> 4.0$	—	—	—
	c	0	0	1	3.9501	29.52	45.00	44.28
2	a	-1	-1	-1	2.0598	138.64	225.00	146.92
	b	-1	-1	-1	2.0681	138.52	225.00	147.10
	c	-1	-1	-1	2.1459	137.48	225.00	148.72
3	a	-1	0	-1	2.0598	138.64	135.00	101.61
	b	-1	0	-1	2.0598	138.64	135.24	101.81
	c	-1	0	-1	2.0615	138.61	137.39	103.64
4	a	0	-1	-1	2.0598	138.64	315.00	101.61
	b	0	-1	-1	2.0598	138.64	314.76	101.81
	c	0	-1	-1	2.0615	138.61	312.61	103.64
5	a	0	0	-1	2.0598	138.64	45.00	115.80
	b	0	0	-1	2.0515	138.76	45.00	115.62
	c	0	0	-1	1.9790	139.84	45.00	113.96
6	a	-1	-1	0	1.0052	74.44	225.00	31.12
	b	-1	-1	0	1.0116	74.50	225.00	31.12
	c	-1	-1	0	1.0714	75.04	225.00	31.16
7	a	-1	0	0	1.0052	74.44	135.00	85.87
	b	-1	0	0	1.0052	74.44	135.24	86.08
	c	-1	0	0	1.0065	74.45	137.39	87.92
8	a	0	-1	0	1.0052	74.44	315.00	85.87
	b	0	-1	0	1.0052	74.44	314.76	86.08
	c	0	-1	0	1.0065	74.45	312.61	87.92
9	a	0	0	0	1.0052	74.44	45.00	0.00
	b	0	0	0	0.9987	74.38	45.00	0.00
	c	0	0	0	0.9423	73.80	45.00	0.00

Tabela 2.4: Distribuição das imagens em um universo com topologia  $T^3$ . Coordenadas das fontes em Mpc. (a)=(2400, 2400, 945); (b)=(2390, 2390, 945); (c)=(2300, 2300, 945)

pertence o objeto; colunas (6),(7) e (8) coordenadas do objeto em termos de  $(Z, \theta, \phi)$ ; coluna (9) ângulo  $\varphi$ , ver adiante (página 29) para maiores detalhes. Para cada fonte, separamos as imagens em grupos com o mesmo redshift básico (nas tabelas separados por linhas horizontais duplas) e dentro de cada grupo como varia o redshift ao deslocarmos a fonte (nas tabelas separados por linhas horizontais simples). Os objetos identificados com a letra (a) correspondem as imagens de fontes localizadas em uma das posições privilegiadas. Os objetos identificados com as letras (b) e (c) correspondem as imagens com fontes deslocadas das respectivas posições privilegiadas.

Notemos que as fontes produzem sempre grupos de imagens com o mesmo redshift. Sendo que no caso mais favorável (fonte em um dos vértices, tabela 2.1) é produzida um grupo com oito imagens com o mesmo redshift  $Z = 1.3427$  distribuídas de forma simétrica no céu. Temos quatro pares de imagens diametralmente opostas no céu: 1 e 8, 6 e 3, 2 e 4. Cada par estando separado do par mais próximo por um ângulo  $\Delta\theta \simeq 70.55^\circ$  de acordo com a equação 2.15. Mesmo no caso em que a fonte esteja em outras posições (ver tabelas 2.2,2.3 e 2.4) as imagens continuam distribuídas de maneira relativamente simétrica no céu.

Mesmo que as fontes não estejam localizadas *exatamente* sobre as posições particulares, mas com um desvio  $\delta_i$  destas posições, as imagens continuam distribuídas de maneira simétrica no céu, e com redshifts muito próximos. Nas simulações efetuamos dois desvios para cada fonte: uma de pequeno valor, e outra de cerca de 100  $Mpc$  da posição privilegiada. Na primeira situação procuramos limitar o desvio a uma região de maneira que o desvio  $\delta Z/Z$  ficasse limitado a um valor inferior a cerca de 5%.

Desta forma se tornaria possível determinar as dimensões e a orientação da célula fundamental com a obtenção de um conjunto de objetos com valores do redshift próximos. Note que como estamos observando as imagens de uma mesma fonte em instantes da sua evolução muito próximos não é necessário que tenhamos

antecipadamente qualquer conhecimento sobre o processo evolutivo destes objetos. Esta é uma diferença significativa dos métodos propostos por outros autores ([14, 20, 23, 28, 30, 35]), na qual o conhecimento prévio pelo menos parcial do processo evolutivo se faz necessário.

Temos assim a possibilidade de seguir a evolução de um objeto individualmente, de forma que não precisamos recorrer a uma amostra completa de objetos para um estudo evolutivo de uma classe específica de objetos.

Com a existência de mais de uma imagem com o mesmo redshift de uma mesma fonte, temos a possibilidade de observar essas imagens de diferentes ângulos (ver figura 2.2). Nas tabelas 2.1,2.2,2.3 e 2.4 apresentamos na coluna 9, a grandeza  $\varphi$  , que definimos como sendo o ângulo entre a linha de visada do observador com uma orientação arbitrária do objeto. Escolhemos como sendo  $\varphi = 0$  o ângulo da linha de visada com a fontes. De forma que  $\varphi$  determina de quanto a imagem está rodada em relação a imagem da fontes. Assumimos por simplicidade que uma eventual estrutura tenha simetria axial.

No caso mais simples de pares diametralmente opostos no céu temos a possibilidade de observar a parte posterior de um objeto (ver nas tabelas 2.1–2.4, a coluna referente a  $\varphi$ ). No caso favorável de a fonte estar em um dos vértices da célula fundamental, temos condição de observar o objeto de diferentes ângulos, de forma que podemos reconstruir a sua imagem tri-dimensional . Tal tipo de observação é impossível de ser efetuada em um Universo de topologia trivial.

Dessa forma teríamos a possibilidade de seguir a evolução não somente da luminosidade do objeto, mas igualmente seguir a evolução das suas estruturas. Temos condição de testar a hipótese de que os quasares, blasares e as radio-galáxias são um mesmo objeto, apenas vistos de ângulos diferentes [5]. Este teste podendo ser efetuado com a observação efetiva de um mesmo objeto, o que nos permitiria determinar de maneira inequívoca a hipótese do modelo unificado.

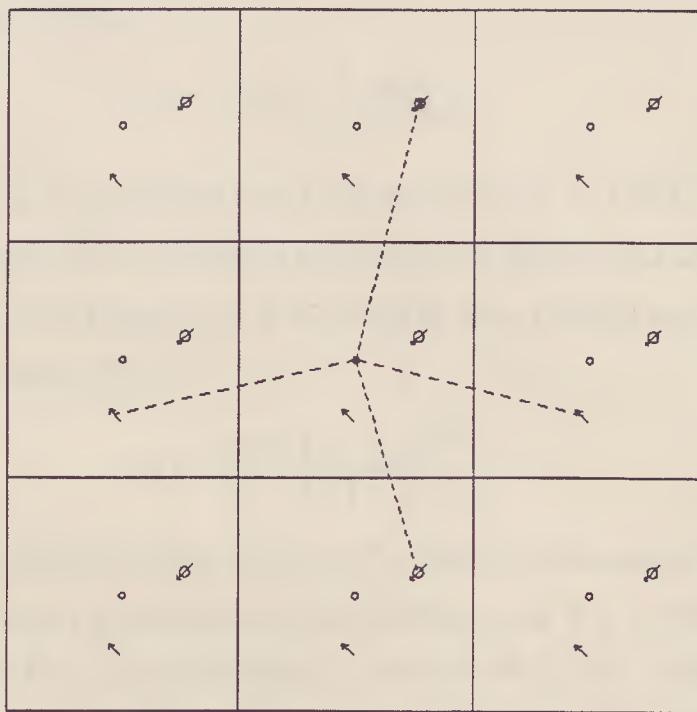


Figura 2.2: Representação de uma distribuição de imagens em um universo com topologia  $T^2$ .

Uma outra possibilidade seria a de observar a evolução de um processo de colisão entre galáxias. Dependendo das condições seria possível observar a aproximação, a colisão e o processo de relaxamento após a colisão, de maneira que existiria a possibilidade de reconstruir a imagem 3-d de todo o processo. Consideremos por exemplo, que na tabela 2.3 a fonte designada pela letra  $a$  (coordenadas  $(x,y,z)=(2400,100, -1450)$  em Mpc) seja o centro geométrico de duas galáxias em colisão, e que essa colisão tenha ocorrido em  $Z = 2.3840$ . Neste exemplo, poderíamos observar as duas galáxias em processo de aproximação, por um período correspondente ao intervalo de redshift de  $Z = 3.6033$  a  $Z = 2.3840$  que corresponde a cerca de  $\Delta\tau_1 \simeq 8 \times 10^8$  anos, e o processo posterior a colisão de  $Z = 2.3840$  a  $Z = 0.7042$  ou cerca de  $\Delta\tau_2 \simeq 4.54 \times 10^9$  anos. Nestes intervalos de tempo podemos estimar a distância percorrida, utilizando uma aproximação newtoniana para a queda livre de um campo

em um campo gravitacional:

$$r^{2/3} - r_o^{2/3} = \frac{3}{2} \sqrt{GM_g} \Delta\tau \quad (2.20)$$

onde consideramos as duas galáxias com a mesma massa  $M_g \simeq 10^{11} M_\odot \simeq 2 \times 10^{44}$  g. No intervalo de tempo  $\Delta\tau_1$ , a distância percorrida pela galáxia será assim da ordem de  $\Delta r \simeq 0.11$  Mpc. Dessa forma, em  $Z = 3.6033$  as duas galáxias estarão separadas por um ângulo dado por [52]:

$$\Theta = \frac{\Delta r H_o}{2c} \left[ \frac{(1+Z)^{3/2}}{\sqrt{1+Z}-1} \right] \quad (2.21)$$

que neste caso corresponde a cerca de  $\Theta \simeq 16''$ . Após a colisão, assumindo que uma galáxia passe pela outra e continuem a sua trajetória, em  $Z = 0.7042$  elas estarão separadas por 0.35 Mpc, correspondendo a cerca de  $\Theta \simeq 44''$ . Estas separações angulares podem ser resolvidas pelos instrumentos atualmente disponíveis, de forma que estas observações seriam a princípio passíveis de serem efetuadas. Notemos que se considerarmos que as duas galáxias estavam em repouso no “infinito”, a velocidade com a qual elas se aproximam no instante  $Z = 3.6033$ , pode ser estimado através da relação  $v = \sqrt{GM_g/r}$ , de forma que neste caso obtemos  $v \simeq 0.28$  km/s. Dessa maneira, caso estas galáxias possuam uma velocidade peculiar, a separação angular poderia ser maior do que as obtidas acima, o que facilitaria a sua observação.

Como o número de imagens de uma fonte depende das dimensões da célula fundamental, caso as dimensões sejam menores do que as obtidas com os resultados do satélite COBE [58], o número de imagens por fonte seria bem maior (veja a equação 2.5). Sendo o número de imagens  $n_{im}$  proporcional à  $L^{-3}$ , caso as dimensões sejam as propostas por [20], isto é,  $L \simeq 600$  Mpc teríamos cerca de 500 vezes o número de imagens em relação ao caso por nós analisado ( $L \simeq 4800$  Mpc), de maneira que os efeitos seriam bem mais intensos do que os obtidos neste trabalho.

## Capítulo 3

# UNIVERSO HIPERBÓLICO COMPACTO

### 3.1 Espaços globalmente inomogêneos

Como vimos na introdução, a existência de associações quasares-galáxias com redshift discordante em número maior do que o esperado, levou alguns autores a descartar a hipótese da origem cosmológica para o redshift dos quasares (veja [4] e suas referências). No entanto as indicações são de que os argumentos utilizados por Arp e colaboradores são falhos, pois o excesso de associações está dentro da margem de erro estatístico.

Os argumentos contra a hipótese de Arp e colaboradores repousa na hipótese de que a topologia do Universo é trivial, ou pelo menos de que a seção espacial não é compacta. No entanto é possível buscar outras explicações para esse aparente excesso de associações , utilizando uma topologia diferente da usual para o Universo. Vimos no capítulo 2 de que efeitos devido a topologia do Universo podem nos levar a resultados distintos de um Universo com topologia trivial. Devido a sua propriedade de não homogeneidade global (seção 1.2), os universos com seção espacial hiperbólica e compacta nos permite uma riqueza maior de possibilidades do que o caso plano. Uma possibilidade é justamente de tentar explicar o excesso de associações quasar-galáxia como efeito de origem topológica.

Analisamos esta possibilidade neste capítulo, e para isso nós escolhemos como

Poliedro Fundamental dentre as listadas no artigo de Best [6], um icosaedro. Esta escolha sendo efetuada por ter sido a que melhor se adaptava ao projeto iniciado por H.V. Fagundes há alguns anos atrás para o estudo de consequências observacionais em variedades hiperbólicas compactas (veja [23] e suas referências).

### 3.2 Coordenadas de Minkowski e Klein

Por estarmos trabalhando em um espaço hiperbólico, escolhemos um sistema de coordenadas denominadas coordenadas de Minkowski, e que satisfazem a relação:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 = -1. \quad (3.1)$$

No entanto ao invés das coordenadas de Minkowski, é conveniente utilizar as coordenadas de Klein que são coordenadas em um sistema projetivo [18], que nos permite uma representação compacta do espaço hiperbólico  $H^3$  [23]. Com as coordenadas de Klein, estabelecemos uma correspondência entre os pontos de  $H^3$  e o interior de uma bola de raio unitário no espaço euclidiano ordinário. As coordenadas de Klein são obtidas das coordenadas de Minkowski, simplesmente dividindo  $X_1, X_2, X_3$  por  $X_4$ . Nós representaremos as coordenadas de Klein sempre por letras minúsculas e as de Minkowski por letras maiúsculas.

Para os nossos cálculos é conveniente utilizar as coordenadas  $\chi, \theta, \phi$  que estão relacionadas com  $X_1, X_2, X_3, X_4$  através de

$$X_1 = \sinh \chi \sin \theta \cos \phi \quad (3.2)$$

$$X_2 = \sinh \chi \sin \theta \sin \phi \quad (3.3)$$

$$X_3 = \sinh \chi \cos \theta \quad (3.4)$$

$$X_4 = \cosh \chi. \quad (3.5)$$

ou em termos das coordenadas de Klein

$$x_1 = \tanh \chi \sin \theta \cos \phi \quad (3.6)$$

$$x_2 = \tanh \chi \sin \theta \sin \phi \quad (3.7)$$

$$x_3 = \tanh \chi \cos \theta \quad (3.8)$$

Onde  $\chi$  é a mesma coordenada utilizada na métrica de Robertson-Walker (equação 1.16). Utilizando as coordenadas de Klein, a distância  $d(\vec{x}, \vec{y})$  de um ponto  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  é dada por

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \operatorname{acosh} \left\{ \frac{1 - \vec{x} \cdot \vec{y}}{\sqrt{(1 - \vec{x}^2)(1 - \vec{y}^2)}} \right\} \quad (3.9)$$

Caso o observador esteja localizado na origem do sistema de coordenadas, a distância de um ponto qualquer à origem tem uma forma mais simplificada, dada por ( $\vec{y} = 0$ )

$$d(\vec{x}, 0) = \operatorname{atanh} |\vec{x}| \quad (3.10)$$

que é justamente  $\chi$ . Neste caso, o redshift do objeto localizado na coordenada  $\vec{x}$  é calculada diretamente pela equação 1.21. Assim, é conveniente localizar sempre o observador na origem do sistema de coordenadas. Para efetuar a mudança de coordenadas com origem no centro do Poliedro Fundamental para um sistema com a origem nas coordenadas  $X_{obs,1}, X_{obs,2}, X_{obs,3}, X_{obs,4}$  do observador, notemos que a equação 3.1 é a equação de um hiperbolóide. Dessa maneira, as transformações que procuramos deve ser análoga à transformação de Lorentz [18]

$$\vec{x}' = \left[ \vec{x} + (\gamma - 1) \vec{\beta} \frac{\beta \cdot \vec{x}}{\beta^2} - \gamma \vec{\beta} \right] \frac{1}{\gamma(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{x})} \quad (3.11)$$

onde

$$\gamma = X_{obs,4} \quad (3.12)$$

e

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \\ \beta &\equiv \tanh \chi_{obs} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Das equações 3.13 e 3.10 podemos ver que  $\vec{\beta}$  é o vetor posição  $\vec{x}_{obs}$  do observador.

### 3.3 Construção da seção espacial hiperbólica compacta

Escolhemos como Poliedro Fundamental, um icosaedro que é um sólido regular, com vinte faces, e 12 vértices (figura 3.1). Esta escolha é a mesma de [23], e é uma das listadas no artigo de L.A. Best [6]. Na tabela 3.1 apresentamos a identificação e as coordenadas angulares dos vértices, na tabela 3.2 as faces do Poliedro Fundamental – utilizamos a mesma notação de [23] – as faces identificadas estando colocadas lado a lado.

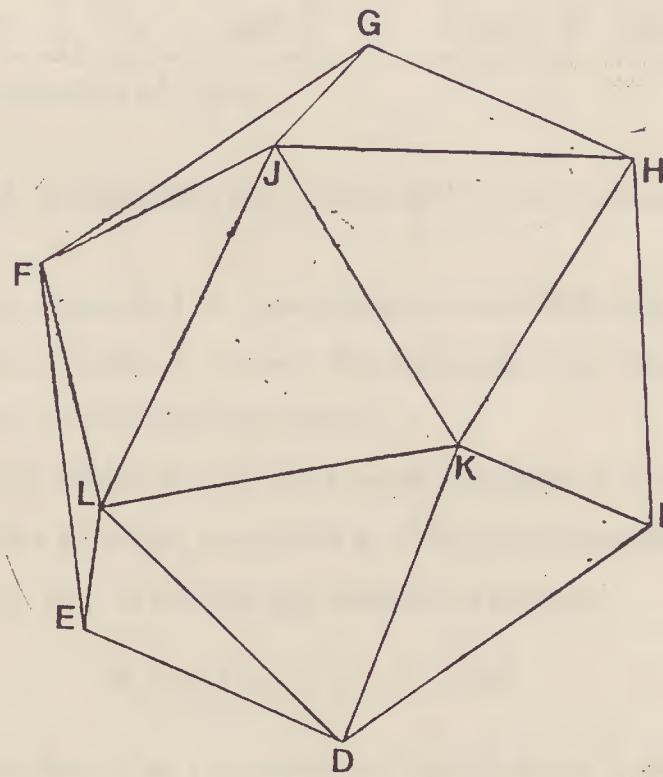


Figura 3.1: Icosaedro utilizado como Poliedro Fundamental (reproduzido de [23]).

A escolha de um icosaedro para o Poliedro Fundamental, se fez basicamente devido às suas dimensões. Lembrando que os efeitos devido a topologia são mais perceptíveis nos casos em que as dimensões do Poliedro Fundamental são reduzidas. Ao contrário de espaços euclidianos, as dimensões de um Poliedro Fundamental em espaços hiperbólicos não são arbitrários. No caso do icosaedro que utilizamos; as

vértices	$\theta$	$\phi$	vértices	$\theta$	$\phi$
A	$180^\circ$ - W	$36^\circ$	G	$0^\circ$	...
B	W*	$0^\circ$	H	W	$144^\circ$
C	W	$72^\circ$	I	$180^\circ$ - W	$108^\circ$
D	$180^\circ$	...	J	W	$216^\circ$
E	$180^\circ$ - W	$324^\circ$	K	$180^\circ$ - W	$180^\circ$
F	W	$288^\circ$	L	$180^\circ$ - W	$252^\circ$

$$W = \arctan 2 \simeq 63.^\circ 4349$$

Tabela 3.1: Coordenadas dos vértices do Poliedro Fundamental

sua dimensões foram obtidas de [12], e são dadas na tabela 3.3, onde  $\chi_{face}$ ,  $\chi_{ins}$ ,  $\chi_{ext}$  são respectivamente as bordas do Poliedro Fundamental, o raio da esfera inscrita e da esfera circunscrita ao Poliedro Fundamental.

Com os dados das tabelas 3.1, 3.2 e 3.3 temos condições de recalcular a representação matricial dos geradores associados ao Poliedro Fundamental dado acima, tal como efetuado em [23]. A notação que usamos é a seguinte

$$F_j = g_k F_k \quad j, k = 1, 2, \dots, 20 \quad (3.14)$$

onde  $F_j$  é a  $j$ -ésima face, e  $g_k$  é a matriz que transforma a  $k$ -ésima face para a  $j$ -ésima face, sendo que  $g_j$  é uma matriz  $4 \times 4$ .

Da tabela 3.2 sabemos quais vértices devem ser identificados, p.ex, os vértices das face 1 e 11 estão identificados da seguinte maneira  $A \rightarrow B$ ,  $D \rightarrow G$ ,  $I \rightarrow C$  e de maneira análoga para as outras faces. Como a matriz  $g_k$  é  $4 \times 4$ , e temos apenas 3 vértices por face, precisamos de mais um ponto que seja linearmente independente dos 3 vértices. Para isso, localizamos a origem do sistema de coordenadas no centro geométrico do Poliedro Fundamental. Este ponto será transformado em uma

	face		face
1	ADI	11	BGC
2	ICA	12	ABC
3	EFL	13	DIK
4	DEL	14	KLD
5	GEB	15	HJK
6	FGJ	16	GJH
7	ABE	17	LJF
8	FEB	18	CGH
9	AED	19	KIH
10	JKL	20	CHI

Tabela 3.2: Faces do Poliedro Fundamental.

imagem, cujas coordenadas são dadas por

$$\begin{pmatrix} O_1 \\ O_2 \\ O_3 \\ O_4 \end{pmatrix} = g_k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Podemos obter as coordenadas da imagem  $(O_1, O_2, O_3, O_4)^t$ , de maneira direta, notando que a distância entre a origem e a imagem será a mesma para todos os geradores, e corresponde ao dobro do raio da esfera inscrita  $\chi$  dada na tabela 3.3. As coordenadas angulares da imagem da origem são calculadas utilizando

$$\begin{aligned} O_1 &= \sinh \chi_{\text{imagem}} \sin \theta_{\text{imagem}} \cos \psi_{\text{imagem}} = \frac{\sinh \chi_{\text{ins}}}{3} \sum_{i=1}^3 \sin \theta_i \cos \psi_i \\ O_2 &= \sinh \chi_{\text{imagem}} \sin \theta_{\text{imagem}} \sin \psi_{\text{imagem}} = \frac{\sinh \chi_{\text{ins}}}{3} \sum_{i=1}^3 \sin \theta_i \sin \psi_i \\ O_3 &= \sinh \chi_{\text{imagem}} \cos \theta_{\text{imagem}} = \frac{\sinh \chi_{\text{ins}}}{3} \sum_{i=1}^3 \cos \theta_i \\ O_4 &= \cosh \chi_{\text{imagem}} = \cosh 2\chi_{\text{ins}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$\cosh^2 \chi_{face}$	$\cosh^2 \chi_{ins}$	$\cosh^2 \chi_{ext}$
$\frac{3}{4}\tau^2$	$\frac{3}{4}\tau^2$	$\frac{1}{4}\tau^6$

$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Tabela 3.3: Dimensões do Poliedro Fundamental

onde  $\theta_i, \psi_i$  são as coordenadas angulares do  $i$ -ésimo vértice,  $\chi_{ins}$  o raio da esfera inscrita e  $\chi_{imagem} = 2\chi_{ins}$  a distância da origem à sua imagem.

Com isso temos condição de obter as matrizes  $g_k$ , resolvendo a equação matricial

$$g_k = M_j M_k^{-1} \quad (3.17)$$

onde as três primeiras colunas das matrizes  $M$  são as coordenadas dos vértices, e a última coluna as coordenadas da origem e da sua imagem respectivamente em  $M_k, M_j$  (ver equação 3.15). Para obter as matrizes  $g_k$  foi desenvolvido um programa em FORTRAN 77 denominado CALC\_GER primeiramente para  $\mu$ -Vax, e posteriormente adaptado para a estação de trabalho HP 9000. Com isso re-obtivemos os geradores, como em [23], listados na tabela A.1 do apêndice A, com precisão de seis dígitos, sendo que em nossos cálculos utilizamos dupla precisão referente ao compilador HP-Fortran. Estes geradores formam um grupo não abeliano, e satisfazem as relações listadas na tabela 3.4[6]. Utilizaremos a seguir a nomenclatura usual no estudo de grupos combinatórios [44]. Denominaremos *palavra* uma sequência finita<sup>1</sup> de geradores  $g_i g_j \dots g_r$ , relações as palavras idênticas à unidade (tabela 3.4), mas que não sejam as palavras triviais  $g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = 1$ , e usaremos indistintamente *letras* ou geradores para os  $g_i$ . O número de letras em uma palavra, define o seu

<sup>1</sup>Inclusive no caso de um único gerador, e sendo a “palavra vazia” o elemento unidade

$g_1g_{12}g_{12} = 1$	$g_1g_{18}g_3 = 1$
$g_3g_{14}g_{14} = 1$	$g_6g_{18}g_7 = 1$
$g_5g_{16}g_{16} = 1$	$g_{10}g_{18}g_5 = 1$
$g_5g_{19}g_1 = 1$	$g_{10}g_{19}g_4 = 1$
$g_3g_{19}g_7 = 1$	$g_{10}g_2g_7 = 1$

Tabela 3.4: Relações entre os geradores  $g_i$ 

tamanho. Cada palavra corresponde a um elemento do grupo, e portanto a uma célula do espaço  $H^3$ , que é uma réplica do PF, e o lugar da imagem em potencial.

Para determinarmos todas as palavras necessárias para gerar os icosaedros vizinhos ao Poliedro Fundamental, seguimos o procedimento dado a seguir:

1. escolhemos um dos vértices  $v_i$ , e listamos todos os geradores que transformam algum outro vértice no vértice  $v_i$ , isto é,  $g_m : v_m \rightarrow v_i$ ;
2. selecionamos todos os geradores  $g_p$  que satisfaça  $g_p : v_p \rightarrow v_m$ , obtendo a palavra de duas letras  $g_m g_p : v_p \rightarrow v_i$ ;
3. repetimos os procedimentos acima para cada um dos vértices  $v_m$
4. para cada palavra de duas letras que não são triviais, ou não são relações (ver tabela 3.4, selecionamos os geradores  $g_q$ , que satisfaça  $g_m g_p g_q : v_q \rightarrow v_i$ , obtendo assim as palavras de três letras
5. repetimos os procedimentos acima para todos os vértices  $v_i$  – na realidade são necessários calcular apenas 6 vértices, pois para os outros 6 vértices as palavras podem ser obtidas simplesmente achando as transformações inversas.

A cada nova palavra obtida, verificamos se ela pode ser reduzida a uma palavra de tamanho menor, ou se pode ser reescrita como uma outra palavra de mesmo

palavras de duas letras					
$g_7g_4$	$D \rightarrow A$	$g_5g_{14}$	$D \rightarrow B$	$g_{11}g_{19}$	$E \rightarrow C$
$g_{12}g_{19}$	$E \rightarrow A$	$g_{12}g_{18}$	$F \rightarrow B$	$g_{18}g_6$	$G \rightarrow C$
$g_2g_{18}$	$F \rightarrow A$	$g_7g_{16}$	$G \rightarrow B$	$g_2g_8$	$H \rightarrow C$
$g_1g_8$	$H \rightarrow A$	$g_{11}g_{12}$	$I \rightarrow B$	$g_{12}g_9$	$K \rightarrow C$
$g_1g_7$	$J \rightarrow A$	$g_{11}g_7$	$L \rightarrow B$	$g_{11}g_{20}$	$L \rightarrow C$
$g_1g_{16}$	$F \rightarrow D$	$g_8g_5$	$H \rightarrow E$	$g_{16}g_3$	$I \rightarrow G$
$g_{13}g_9$	$I \rightarrow D$	$g_7g_5$	$J \rightarrow E$	$g_{11}g_4$	$K \rightarrow G$
$g_1g_6$	$J \rightarrow D$	$g_3g_4$	$K \rightarrow E$	$g_{11}g_{14}$	$L \rightarrow G$
$g_5g_6$	$H \rightarrow F$	$g_{13}g_5$	$J \rightarrow I$	$g_{19}g_{14}$	$L \rightarrow H$
$g_{17}g_4$	$L \rightarrow F$	$g_2g_9$	$K \rightarrow I$	$g_6g_{20}$	$K \rightarrow J$

palavras de três letras					
$g_9g_{14}g_{11}$	$G \rightarrow A$	$g_7g_{16}g_{18}$	$E \rightarrow B$	$g_9g_{16}g_{10}$	$C \rightarrow D$
$g_5g_6g_{20}$	$K \rightarrow F$	$g_{15}g_{16}g_3$	$I \rightarrow H$	$g_{15}g_3g_{20}$	$L \rightarrow J$

Tabela 3.5: Relação das palavras de comprimento maior do que um, utilizadas para o cálculo das imagens.

tamanho, utilizando as relações dadas na tabela 3.4, além das relações triviais  $g_j g_j^{-1} = g_j^{-1} g_j = 1$ . Efetuando os procedimentos acima, obtivemos um total de 12 icosaedros em torno de cada vértice. Estes 12 icosaedros são gerados por 5 palavras de uma letra, 5 palavras de duas letras e 1 palavra de uma letra, sendo que a décima-segunda palavra é gerada pela transformação identidade, isto é,  $g = 1$ . Na tabela 3.5 apresentamos as palavras de duas e três letras obtidas com o procedimento acima, as outras palavras necessárias são obtidas das inversas das palavras listadas.

Com este procedimento, obtemos 92 palavras (20 palavras de uma letra, 30 palavras de duas letras e suas inversas, 6 palavras de três letras e suas inversas) para preencher todo o espaço vizinho ao Poliedro Fundamental, formando uma “camada” completa adjacente ao Poliedro Fundamental. Para gerarmos a segunda camada o número de palavras necessárias é muito maior do que as 92 necessárias para formar a primeira camada. No entanto, dependendo do que pretendemos calcular a primeira camada é suficiente.

Para isso consideremos um observador com coordenadas  $\vec{x}_o$ . Calculamos a distância  $d(\vec{x}_v, \vec{x}_o)$  (ver equação 3.9) dos vértices do Poliedro Fundamental (com coordenadas  $\vec{x}_v$ ) ao observador e determinamos o seu redshift  $Z_{o,v}$ . Repetimos o procedimento para as imagens dos icosaedros gerados nas faces próximas do observador, obtendo os redshifts  $Z'_{o,v}$ . Se  $Z'_{o,v}$  dos vértices que não estão identificados com os vértices do Poliedro Fundamental satisfaz o critério  $Z'_{o,v} > Z_{max}$ , então não há necessidade de preencher a segunda camada. Por exemplo considere um observador sobre o eixo z localizado a uma distância  $\chi = 0.75$  da origem. Na face BGC é identificado a face ADI (ver tabela 3.2 e a figura 3.1), o vértice C' desse icosaedro colado está a um redshift  $Z'_{o,C} \simeq 8.39$ , para  $\Omega = 0.1$ . Assim se limitarmos o redshift a um máximo de  $Z_{max} = 3.5$  não será necessário a introdução de uma nova camada de icosaedros, bastando a primeira camada. Esta verificação foi efetuada para cada observador durante as nossas simulações.

Notemos que a necessidade ou não de colocar mais de uma camada depende não apenas de  $Z_{max}$  mas também do valor do parâmetro de densidade  $\Omega$ . Por exemplo na mesma situação tratada anteriormente, mas com  $\Omega = 0.2$  o vértice C' terá um redshift  $Z'_{o,C} \simeq 14.26$ . No entanto caso se deseje que os efeitos devido a topologia não trivial do Universo sejam visíveis, o valor de  $\Omega$  não pode ser arbitrariamente próximo da unidade. Utilizando as equações 1.20 e 1.21 obtemos a relação

$$\chi = \cosh^{-1} \left( \frac{2}{\Omega} - 1 \right) - \cosh^{-1} \left( \frac{Z + 2/\Omega - 1}{1 + Z} \right) \quad (3.18)$$

e no limite  $Z \rightarrow \infty$ ,  $\chi \rightarrow \eta_o$ . No caso de um universo multiplamente conexo como o por nós utilizado, devemos ter o raio da esfera circunscrita  $\chi_{ext}$  menor do que  $\eta_o$  para que os efeitos da topologia possam ser detectados observationalmente. No nosso caso na qual utilizamos um icosaedro como Poliedro Fundamental, temos que  $\chi_{ext} \simeq 1.38$ , o que nos fornece um limite  $\Omega < 0.64$  como condição para que os efeitos da topologia possam ser considerados. O caso  $\Omega \rightarrow 1.0$  corresponde a um universo com  $\chi_{ext} \gg \eta_o$ , de maneira que os efeitos devido a topologia não trivial do universo

seriam totalmente desprezíveis.

### 3.3.1 Distribuição de imagens

Vamos calcular a imagem de uma fonte localizada em um ponto  $p$  dentro do Poliedro Fundamental, com coordenadas de Klein  $(0, 0, \tanh 0.75)$ . As imagens até a distância máxima  $Z_{max} = 4.0$  são dadas na tabela 3.6. Aonde listamos os geradores utilizados  $g_i$  para gerar a imagem; o redshift  $Z$ ; e as coordenadas angulares  $\delta$ ,  $\phi$ , onde  $\delta = 90^\circ - \theta$  de maneira que o vértice G está sempre no norte ( $\delta > 0^\circ$ ) e o vértice D sempre no sul ( $\delta < 0^\circ$ ). Nesta tabela apresentamos também as imagens de uma fonte com coordenadas de Klein  $(0, 0, \tanh 0.5)$ . Notamos que os laços geodésicos (ver definição na página 14)  $(p, \gamma)$  geram laços de diferentes comprimentos para distintos pontos.

$\vec{x}_{obs} = (0, 0, \tanh 0.75)$				$\vec{x}_{obs} = (0, 0, \tanh 0.5)$			
$g_i$	$Z$	$\delta$	$\phi$	$g_i$	$Z$	$\delta$	$\phi$
$g_5$	3.7315	23.60	299.95	$g_5$	3.8838	35.47	307.60
$g_6$	2.2336	-6.17	271.82	$g_6$	2.4653	-19.41	264.15
$g_{15}$	3.7315	-29.43	164.63	$g_{15}$	3.8838	-16.62	171.47
$g_{16}$	2.2336	-6.17	199.82	$g_{16}$	2.4653	19.41	192.14

Tabela 3.6: Imagens de dois observadores até um redshift  $Z_{max} = 4.0$ .  $\delta$  e  $\phi$  em graus.

Por exemplo, sendo  $p = (0, 0, \tanh 0.75)$ ,  $q = (0, 0, \tanh 0.5)$ , temos que  $L(p, g_5) \neq L(q, g_5)$ . Logo, temos que a variedade utilizada não é homogênea. Uma consequência direta dessa não homogeneidade, é de que a localização do observador dentro do Poliedro Fundamental, torna-se importante. Não sendo dessa forma uma escolha arbitrária tal como no caso do toro plano tratado no capítulo 2

### 3.4 Cálculo das conjunções

Para determinarmos as conjunções entre as galáxias e os quasares, precisamos determinar o ângulo entre estes objetos. Como estamos em um espaço hiperbólico, as formas utilizadas para o seu cálculo deve obviamente utilizar a trigonometria hiperbólica.

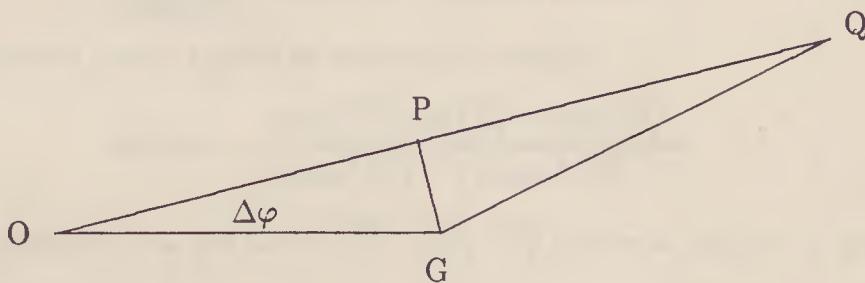


Figura 3.2: Configuração para o cálculo da conjunção entre uma galáxia (G) e um quasar (Q).

Na figura 3.2 apresentamos a configuração utilizada para o cálculo do ângulo entre uma galáxia (G) e um quasar (Q), do ponto de vista de um observador O. Observacionalmente conhecemos os redshifts associados a cada objeto, de forma que podemos obter as distâncias  $\overline{OG}$ ,  $\overline{OQ}$  e também a distância da galáxia para o quasar  $\overline{GQ}$ . O ângulo  $\Delta\varphi$  de conjunção entre a galáxia e o quasar (figura 3.2) é dado pela relação da trigonometria hiperbólica [18]

$$\cos \Delta\varphi = \frac{\tanh \overline{OP}}{\tanh \overline{OG}} \quad (3.19)$$

mas

$$\cosh \overline{OG} = \cosh \overline{OP} \cosh \overline{GP} \quad (3.20)$$

$$\cosh \overline{GQ} = \cosh \overline{PQ} \cosh \overline{GP} \quad (3.21)$$

logo

$$\frac{\cosh \overline{GQ}}{\cosh \overline{OG}} = \frac{\cosh \overline{PQ}}{\cosh \overline{OP}} \quad (3.22)$$

Mas, da figura 3.2 temos que  $\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ}$ , de forma que a equação 3.22 pode ser reescrita como

$$\frac{\cosh \overline{GQ}}{\cosh \overline{OG}} = \cosh \overline{OQ} - \sinh \overline{OQ} \tanh \overline{OP}. \quad (3.23)$$

Portanto, obtemos para o ângulo de conjunção a relação

$$\cos \Delta\varphi = \frac{\cosh \overline{OG} \cosh \overline{OQ} - \cosh \overline{GQ}}{\sqrt{(\cosh^2 \overline{OG} - 1)(\cosh^2 \overline{OQ} - 1)}} \quad (3.24)$$

Assim, conhecendo as distâncias  $\overline{OG}$ ,  $\overline{OQ}$ ,  $\overline{GQ}$  podemos calcular o ângulo de conjunção  $\Delta\varphi$  entre dois objetos.

### 3.5 Simulação numérica

Utilizamos na primeira etapa do nosso trabalho, o computador  $\mu$ -Vax instalado no Instituto. Mas devido a uma séries de problemas com esse computador, e com a aquisição da estação de trabalho HP 9000, transferimos os nossos programas para estas estações. Os programas foram todos escritos em linguagem HP-FORTRAN, que é uma versão melhorada do ANSI-FORTRAN. A seguir apresentamos uma breve descrição dos programas utilizados no nosso trabalho.

**Ger\_Fonte** – gerador de fontes randômicas

Para as nossas simulações desenvolvemos um programa para criar uma distribuição randômica utilizando a função interna RAN do HP-FORTRAN para gerar as fontes tanto para o universo compacto, como para o universo aberto. A geração

de fontes dentro do Poliedro Fundamental foi dividida em duas etapas, a primeira gerando as fontes entre  $\chi = 0$  até  $\chi_{int}$  que é o raio da esfera inscrita ao Poliedro Fundamental. A distribuição das fontes até este raio sendo a mesma tanto para o caso compacto, como para o caso aberto. A partir desse raio até  $\chi_{ext}$ , o programa verifica se a fonte gerada está dentro do Poliedro Fundamental ou não. Essa verificação se faz de uma maneira simples. Primeiramente verificamos próximo a qual face a fonte foi gerada. Formamos uma pirâmide tendo como base esta face, e o ápice estando localizado na fonte gerada. Ordenando de maneira adequada os vértices da base, calculamos o determinante

$$\det(\vec{v}, \vec{x}) \equiv \begin{vmatrix} v_{1,2} - v_{1,1} & v_{2,2} - v_{2,1} & v_{3,2} - v_{3,1} \\ v_{1,3} - v_{1,1} & v_{2,3} - v_{2,1} & v_{3,3} - v_{3,1} \\ x_1 - v_{1,1} & x_2 - v_{2,1} & x_3 - v_{3,1} \end{vmatrix} \quad (3.25)$$

onde  $v_{i,j}$  é a i-ésima coordenada do j-ésimo vértice da face próxima a qual a fonte está localizada, e  $x_i$  a i-ésima componente da coordenada da fonte. Para cada face ordenamos os vértices de forma que o determinante  $\det(\vec{v}, \vec{x})$  seja positivo se a fonte estiver localizada dentro do Poliedro Fundamental. A partir de  $\chi_{ext}$ , as fontes geradas pertencem apenas ao universo aberto.

Para gerar as fontes, fornecemos como parâmetro de entrada o número de fontes  $n_{fontes}$  dentro do Poliedro Fundamental, o redshift máximo  $Z_{max}$  para as fontes no caso do universo aberto, e o parâmetro de densidade  $\Omega_o$ . O número de fontes a ser gerado para o caso do universo aberto, depende de  $\rho_{fonte}$  que é a densidade númerica de fontes dentro do Poliedro Fundamental, que depende por sua vez do número de fontes  $n_{fontes}$ , sendo que:

$$\rho_{fonte} = \frac{n_{fontes}}{V_{ico}}$$

onde  $V_{ico} \simeq 4.686034$  é o volume do icosaedro.

**G\_Im** – cálculo das imagens para um universo compacto

Uma vez gerado a distribuição de fontes dentro do Poliedro Fundamental, introduzimos as coordenadas  $X_{obs}$  do observador, e recalculamos as coordenadas das fontes, tendo como origem as coordenadas  $X_{obs}$ , utilizando a transformação dada pela equação 3.11. As imagens são obtidas através da relação

$$X_{\text{imagem}} = G \cdot X_{\text{fonte}} \quad (3.26)$$

onde  $X_{\text{fonte}}$ ,  $X_{\text{imagem}}$  são respectivamente as coordenadas da fonte e da imagem, e  $G$  é uma das palavras listadas na tabela 3.5 ou uma das suas inversas. As imagens são calculadas até uma distância máxima  $Z_{max}$ , que é a mesma utilizada no cálculo da distribuição em um universo aberto.

**Conjunção** – cálculo das conjunções

As conjunções são calculadas utilizando os arquivos gerados pelos programas **G\_Im** para o caso de um universo compacto, e **Ger\_Fonte** para o caso de um universo aberto. Utilizamos como parâmetro de entrada o ângulo máximo para a conjunção  $\Delta\varphi_{max}$  (equação 3.24), e o redshift  $Z_g$  máximo para uma galáxia, e o redshift  $Z_q$  mínimo para um quasar. Com este programa, determinamos a razão

$$n_r = \frac{n_{\text{conjuncao}}}{n_{\text{total}}} \quad (3.27)$$

onde  $n_{\text{conjuncao}}$  é o número de conjunções obtidas, e  $n_{\text{total}}$  é o número de todas as possíveis combinações dois a dois de galáxias com quasares, isto é  $n_g \times n_q$ , onde  $n_g, n_q$  são respectivamente o número de galáxias e quasares da simulação. Determinamos também se a conjunção é de origem topológica, verificando se o par quasar-galáxia

corresponde a um par fonte-imagem. São apresentados os redshifts de cada par de origem topológica e o ângulo de conjunção.

### 3.6 Resultados

Para o cálculo das conjunções efetuamos sempre simulações com uma distribuição em um universo de topologia trivial com curvatura negativa e uma distribuição em um universo com seção espacial hiperbólica compacta, tendo como PF um icosaedro. As simulações foram sempre efetuadas em pares de forma que pudessemos comparar os nossos resultados com um padrão, no caso um universo de topologia trivial, para determinarmos a razão dada pela equação 3.27.

Como não temos ainda a disposição um modelo definitivo para quasares e galáxias, consideramos como quasar os objetos com redshift maior que  $Z = 1.0$  e galáxia os objetos com redshift  $Z < 0.9$ . Esta escolha tendo sido feita para evitar a introdução de modelos de evolução para os referidos objetos. Em todas as simulações foram escolhidas 10000 fontes dentro do Poliedro Fundamental. Para as imagens geradas foi introduzida um redshift de corte  $Z_{max} = 3.5$ , e o ângulo máximo de conjunção o valor de  $\Delta\varphi = 5^\circ$ . Este valor bastante alto<sup>2</sup> para o ângulo de “conjunção”, foi escolhido devido ao pequeno número – em relação ao Universo real – de objetos utilizados nas nossas simulações. Para o parâmetro de densidade utilizamos  $\Omega = 0.2$ , sendo que em [23] foi utilizado o valor  $\Omega = 0.1$ . Como o número de objetos  $N_{obj}$  é proporcional ao volume<sup>3</sup> limitado por  $Z_{max}$ , obtemos

$$N_{obj}(\Omega = 0.2) \simeq 0.67 N_{obj}(\Omega = 0.1). \quad (3.28)$$

Como o esforço computacional para os nossos cálculos é proporcional a  $N_{obj}^2$ , a

---

<sup>2</sup>Como comparação,  $5^\circ$  é aproximadamente o comprimento do braço do Cruzeiro do Sul, ou ainda dez vezes o diâmetro da Lua cheia.

<sup>3</sup>No caso em que a densidade de objetos é constante.

escolha de  $\Omega = 0.2$  ao invés de  $\Omega = 0.1$ , reduz o tempo  $T$  de :

$$T(\Omega = 0.2) \simeq 0.45 T(\Omega = 0.1) \quad (3.29)$$

Efetuamos simulações com observadores em distintas posições dentro do PF para podermos verificar a influência da localização do observador nos resultados. Para cada observador foram efetuadas pelo menos dez simulações, sempre em conjunto com uma simulação em um universo de topologia trivial.

Para as posições dos observadores procuramos escolher pontos com localização privilegiada e um observador localizado arbitrariamente dentro do PF:

**i** - na origem do PF (1);

**ii** - na linha que liga a origem a um dos vértices (2 a 6);

**iii** - na linha que liga a origem ao ponto central de uma das faces (7 a 10);

**iv** - em um ponto arbitrário distinto das escolhas acima (11 a 14);

onde os números entre os parenteses correspondem aos números de identificação dada na tabela 3.8 na coluna indicado por #.

A distância  $\chi$  da origem ao observador foi escolhida como sendo  $\chi = 0.75$  em acordo com [23]. Mas em alguns caso variamos esta distância utilizando  $\chi = 0.55$  e  $\chi = 0.25$  para verificarmos a influência da distância do observador ao centro do Poliedro Fundamental, na distribuição de imagens de origem topológica. Para cada observador localizado à distância  $\chi = 0.75$  do centro do PF, escolhemos no mínimo dois observadores distintos, de forma que para cada situação acima efetuamos pelo menos vinte simulações (para os caso em que  $\chi = 0.75$ ). Cada par de simulação utilizou de 5 a 6 horas de CPU nas estações Apolo da HP instalados no IFT, resultando em um total aproximado de 700 horas de CPU.

O número de  $n_q$ , quasares e  $n_g$  galáxias para cada simulação foi em torno  $n_q \simeq 18000$  e  $n_g \simeq 1700$ , dependendo da simulação. Para as fontes 8,9 e 10 (ver tabela

#	$\langle n_q \rangle$	$\langle n_g \rangle$
8	18668.36 $\pm$ 68.89	1653.71 $\pm$ 36.01
9	18626.73 $\pm$ 87.33	1766.27 $\pm$ 29.47
10	18296.27 $\pm$ 75.65	1782.64 $\pm$ 31.64
†	18923.64 $\pm$ 72.62	1608.82 $\pm$ 4.72

Tabela 3.7: Número médio de de quasares e galáxias para algumas simulações

3.8), obtivemos as médias dadas na tabela 3.7, onde apresentamos também as médias obtidas para o caso de um universo com topologia trivial (indicado com †), para o mesmo conjunto de simulações.

### 3.6.1 Número relativo de conjunções e Número de pares qso-galaxia de origem topológica

Se utilizarmos como nível de confiança uma relação de pelo menos  $2\sigma$ , notamos que apenas as simulações com observadores 11 e 12 apresentam um número maior de conjunções do que a obtida em um Universo com topologia trivial, se considerearmos uma condição um pouco mais fraca  $\sim 1.5\sigma$ , o observador 7 também apresenta um número maior de conjunções relativo a um Universo com topologia trivial. As outras posições para os observadores não apresentam resultados significativos em relação aos obtidos para um Universo hiperbólico com topologia trivial.

Dessa forma dependendo da localização do observador dentro do Poliedro Fundamental, podemos obter um número maior de conjunções do que o seria obtido em um Universo com topologia trivial. O número de conjunções dependendo da distância ao centro do Poliedro Fundamental, e da posição angular.

Em relação ao número de pares qso-galáxia de origem topológica, temos que exceto no caso dos observadores localizados em  $\chi = 0.25$  (observadores 6,10 e 14) todos os outros observadores apresentam pares qso-galáxia de origem topológica.

#	$x$	$\theta$	$\phi$	$\Delta\%$	$\langle N_{par} \rangle$
1	0.00	0.00	0.00	$-0.83 \pm 0.55$	0
2	0.75	180.00	0.00	$-0.20 \pm 0.89$	$3.90 \pm 1.66$
3	0.75	63.43	72.00	$-0.54 \pm 0.73$	$4.10 \pm 1.85$
4	0.75	0.00	0.00	$-0.19 \pm 1.12$	$3.50 \pm 0.53$
5	0.55	0.00	0.00	$-0.09 \pm 1.06$	$3.60 \pm 1.43$
6	0.25	0.00	0.00	$-0.72 \pm 0.96$	0
7	0.75	37.38	324.00	$1.36 \pm 0.91$	$1.90 \pm 1.10$
8	0.75	100.81	72.00	$0.87 \pm 0.78$	$4.30 \pm 1.64$
9	0.55	100.81	72.00	$-0.14 \pm 0.93$	$5.00 \pm 1.41$
10	0.25	100.81	72.00	$-0.87 \pm 1.41$	0
11	0.75	57.00	173.00	$+2.77 \pm 0.61$	$4.20 \pm 2.57$
12	0.75	79.00	54.00	$+1.86 \pm 0.77$	$3.30 \pm 1.57$
13	0.55	79.00	54.00	$-0.42 \pm 1.20$	$4.30 \pm 2.21$
14	0.25	57.00	173.00	$-0.68 \pm 0.95$	0

Tabela 3.8: Porcentagem ( $\Delta = \langle (\frac{n_r^{ico}}{n_r^h} - 1) * 100 \rangle$ ) de conjunções de um universo com topologia não trivial em relação a um universo com topologia trivial;  $\langle N_{par} \rangle$ : número de pares qso-galáxia de origem topológica.

Dessa forma caso o Universo tenha  $\Omega < 1$  e a topologia não seja trivial, existe a possibilidade de se obter um número maior de conjunções qso-galáxia com redshifts discordantes do que seria esperado em um Universo de topologia trivial. Esta diferença depende da localização do observador dentro do Poliedro Fundamental. Assim a existência de um excesso de conjunções como proposto por alguns autores [2, 3, 10] no caso de um Universo Hiperbólico Compacto não gera necessariamente uma contradição com uma distribuição homogênea de quasares e galáxias, e de que a origem do quasares seja de fato cosmológica. O efeito de excesso sendo apenas devido a topologia não usual do Universo. Apesar de o efeito ser menor do que o proposto por H.C. Arp, talvez para um Poliedro Fundamental de menor dimensão (ver por exemplo [25]) o efeito possa ser mais acentuado devido a existência de um número maior de imagens de um mesmo objeto.

Um outro resultado interessante é de que os pares qso-galáxia de origem topológica podem se apresentar como pequenos aglomerados, em concordância com o obtido

em [23]. Nas figuras 3.3 e 3.4 apresentamos algumas distribuições das conjunções de origem topológica obtidas com as nossas simulações. Sendo que a figura 3.3 é relativo ao observador localizado em  $(\chi, \theta, \phi) = (0.75, 0^\circ, 0^\circ)$  e a figura 3.4 ao observador localizado em  $(\chi, \theta, \phi) = (0.75, 57^\circ.00, 173^\circ.00)$ . Nestas figuras apresentamos além da localização das galáxias e quasares, a localização dos vértices do Poliedro Fundamental. A orientação dos eixos foi escolhida de forma que a origem esteja localizada no observador, e os eixos orientados de tal forma a manter a direção paralela aos eixos dados na figura 3.1, isto é, o eixo  $z$  paralelo ao eixo que liga os vértices  $G$  e  $D$  e o eixo  $x$ , paralelo ao eixo que liga o centro do Poliedro Fundamental ao centro da face  $ABC$ . Nas tabelas 3.9a,b apresentamos os redshifts das galáxias e dos quasares, e o ângulo de conjunção e a palavra<sup>4</sup> utilizada para gerar a imagem de algumas das simulações apresentadas nas figuras 3.3 e 3.4.

Das figuras 3.3 e 3.4 temos que as conjunções de origem topológica estão sempre concentrados em determinadas regiões. Isto ocorre devido ao fato de que apenas fontes localizadas nas vizinhanças de algumas posições podem apresentar imagens cujas geodésicas sejam vizinhas das geodésicas das suas fontes [23]. Dessa forma a procura de conjunções topológicas devem ser efetuadas em regiões que apresentam um número relativamente alto de conjunções.

---

<sup>4</sup>Neste contexto, “palavra” tem o significado dado na página 38

(a)

#	$Z_{gal}$	$\theta$	$\phi$	palavra	$Z_{qso}$	$\theta$	$\phi$	palavra	$\Delta\varphi$
1	0.5693	70.54	314.11	—	2.6804	67.27	317.78	$g_{16}$	4.73
2	0.5666	66.44	318.76	—	2.6414	68.99	317.04	$g_{16}$	3.01
3	0.6549	66.14	320.43	—	2.8214	70.15	317.97	$g_{16}$	4.61
4	0.7440	71.59	170.65	$g_{15}$	3.1356	67.23	168.38	$g_{16}g_{15}$	4.84
5	0.1010	51.36	177.03	—	1.8293	54.13	175.04	$g_{16}$	3.19
6	0.8056	68.30	171.45	$g_{15}$	3.1708	68.89	168.57	$g_{16}g_{15}$	2.75
7	0.8197	68.82	170.10	$g_{15}$	3.2461	68.75	168.83	$g_{16}g_{15}$	1.19
8	0.2626	58.07	170.37	$g_{16}$	2.0619	59.94	173.55	$g_{15}$	3.31
9	0.7440	66.81	167.76	$g_{16}$	3.0871	68.14	170.21	$g_{15}$	2.63

(b)

#	$Z_{gal}$	$\theta$	$\phi$	palavra	$Z_{qso}$	$\theta$	$\phi$	palavra	$\Delta\varphi$
1	0.6898	104.42	185.96	—	3.1559	105.35	182.59	$g_{16}$	3.39
2	0.5185	84.32	283.41	$g_{05}$	2.9431	86.46	284.36	$g_{06}g_{05}$	2.34
3	0.4296	100.90	186.41	$g_{18}$	2.8558	103.58	188.04	$g_{15}g_{17}$	3.11
4	0.5376	104.82	181.33	$g_{16}$	3.1280	103.57	185.68	$g_{15}$	4.40

Tabela 3.9: Pares qso-galáxia de origem topológica, para o observador localizado em (a):  $(Z, \theta, \phi) = (0.75, 57^\circ.00, 173^\circ.00)$ , (b)  $(Z, \theta, \phi) = (0.75, 0^\circ, 0^\circ)$ .  $\theta$  e  $\phi$  em graus.

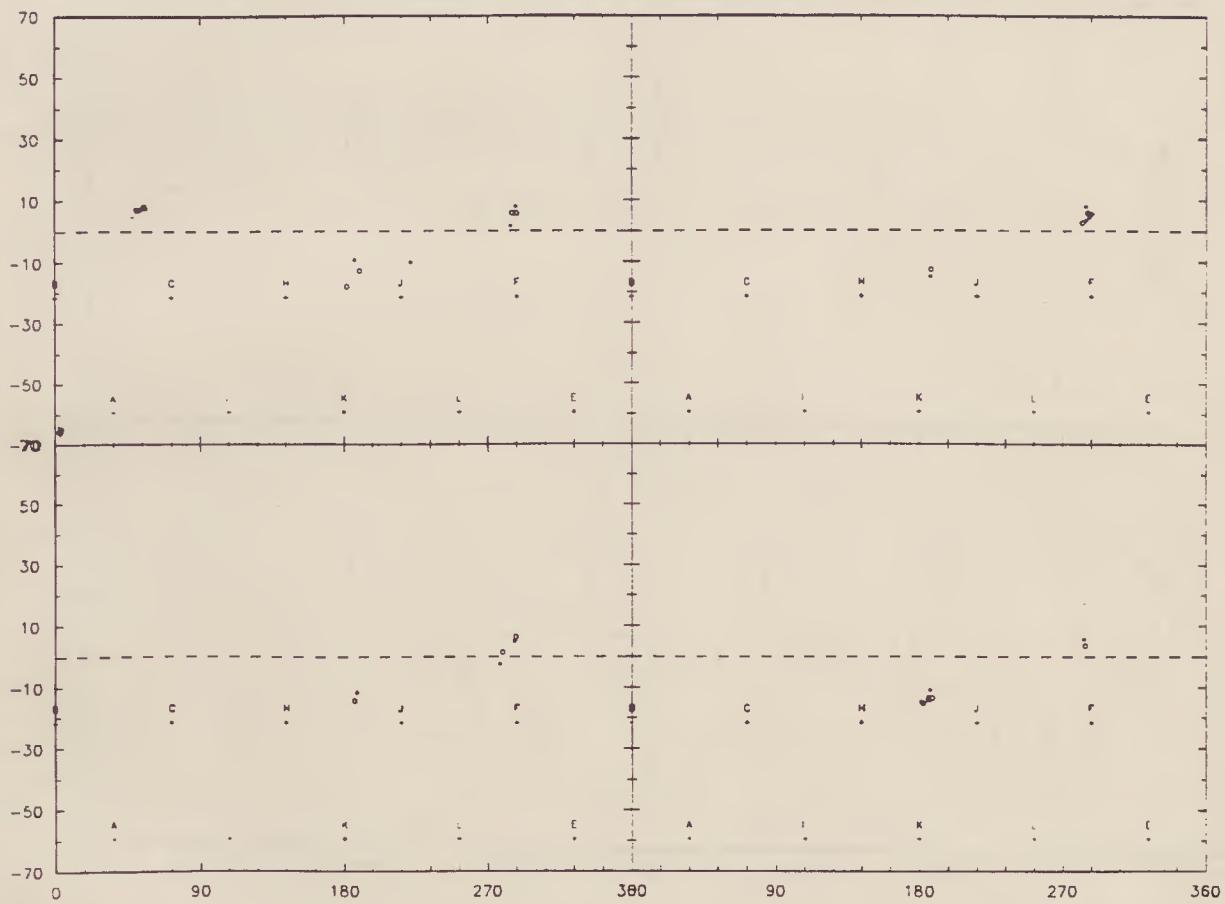


Figura 3.3: Localização dos pares qso-galáxia de origem topológica, para o observador localizado em  $(\chi, \theta, \phi) = (0.75, 0^\circ, 0^\circ)$ . Galáxia (\*), quasar (o), vértices (+).

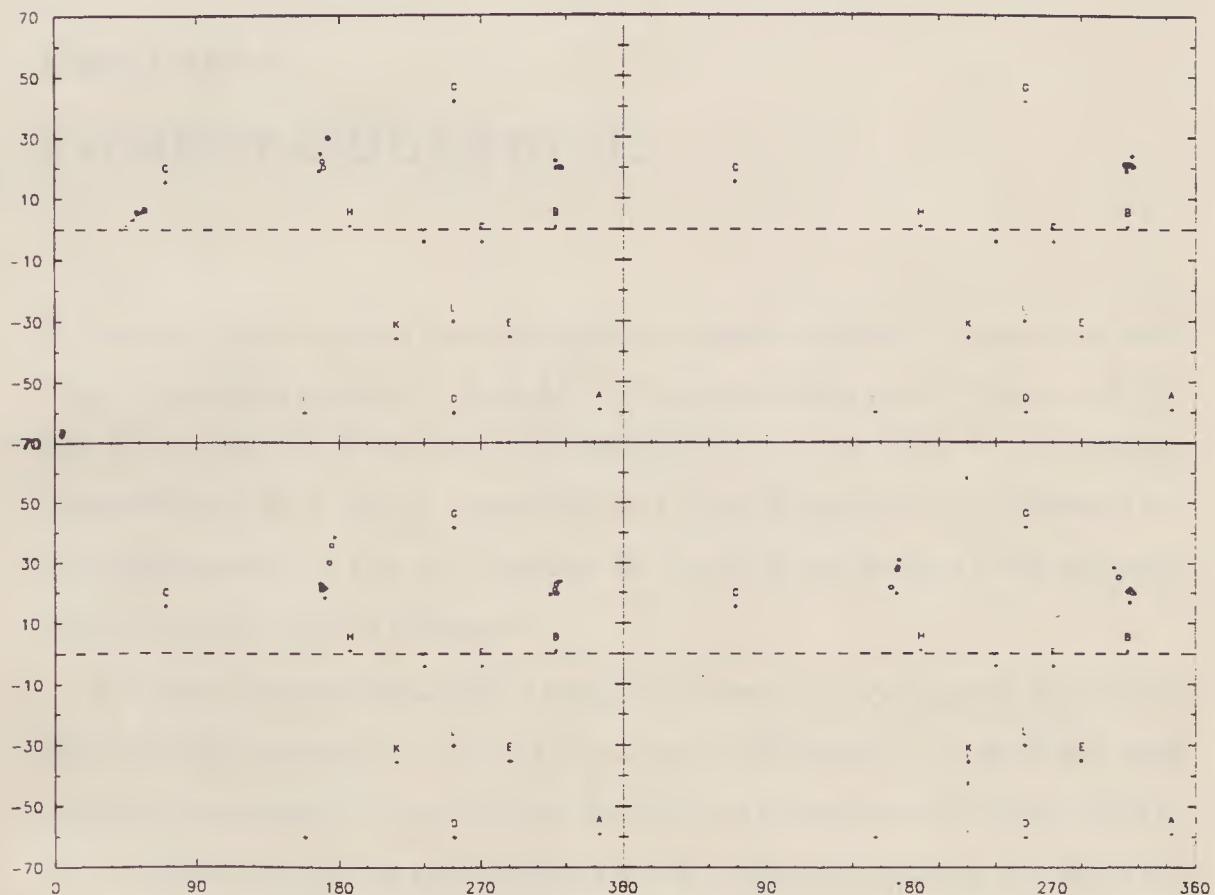


Figura 3.4: Localização dos pares qso-galáxia de origem topológica, para o observador localizado em  $(\chi, \theta, \phi) = (0.75, 57^\circ.00, 173^\circ.00)$ . Galáxia (\*), quasar (o), vértices (+).

## Capítulo 4

# COMENTÁRIOS FINAIS

O nosso estudo de algumas consequências observacionais de um Universo com seção espacial compacta permitiu a obtenção de alguns resultados muito interessantes. No caso de um Universo Plano, mas com topologia de um toro plano  $T^3$ , examinamos a possibilidade de se efetuar observações de objetos individuais com diferentes orientações espaciais, de forma a podermos reconstruir a sua imagem tri-dimensional, que de outra forma seria impossível.

No caso do Universo Hiperbólico Compacto, o estudo de conjunções qso-galáxias com redshifts discordantes, que foi a nossa motivação inicial, a obtenção dos resultados em que se mostra a possibilidade de obter um número maior de conjunções do que o caso de um Universo com topologia trivial é muito interessante, e pode ser utilizado para explicar o aparente excesso dessas conjunções reportado por Arp e seus colaboradores. O importante a ser ressaltado é de que não se faz necessário nenhuma hipótese extra sobre a natureza dos quasares, bastando apenas que a sua distribuição seja homogênea. Simulações com outras topologias ou com um número mais realista de objetos dentro do Poliedro fundamental podem nos indicar de maneira mais clara a possibilidade da seção espacial do nosso Universo ter topologia não trivial. Topologias como a explorada em [25] pode ser uma extensão interessante para esse trabalho.

É interessante notar que alguns autores tem desenvolvido estudos em universo

com topologia não trivial, especialmenet no caso de Universo plano em contextos diferentes do nosso. Por exemplo [36, 48] desenvolvem estudo da geração da pertubação na densidade inicial no Universo com topologia não trivial, sendo que em [36] assume-se que as dimensões da  $L_i$  da célula fundamental sejam maiores do que as dimensões do Universo observável, de forma que os resultados sejam semelhantes aos obtidos para um Universo com topologia trivial. Em [48] é efetuada a extensão para o caso em que  $L_i$  seja compatível com as dimensões do Universo visível de forma que o espectro das pertubações seja discreto. Em [26] é efetuado um estudo dessas pertubações para o caso de um Universo com seção espacial  $S^1 \times R^2$ , e em [27] é efetuada uma extensão para o caso  $T^2 \times R$ .

Universos com topologia não trivial, em especial do tipo  $T^3$  tem sido utilizados por vários outros autores. Além de [57, 58] Sokolov [55] analisa os dados do satélite COBE utilizando uma topologia não trivial para o Universo, e recentemente M. Biesiada [7] analisou a possibilidade de que algumas fontes de raios- $\gamma$  poderiam ser explicadas assumindo uma topologia não trivial para o Universo.

O estudo de modelos cosmológicos com seção espacial compacta e topologias não triviais ainda é um campo ainda a ser explorado, seja do ponto de vista das consequências observacionais, seja do ponto de vista teórico, em especial para os casos em que a geometria não é plana ([24, 25]), devido entre outros motivos, a inexistência de uma classificação de variedades com dimensão maior que dois (veja por exemplo [45] para o caso 2-dimensional, e [53] para o caso 3-dimensional)(veja também [22], onde é efetuado um estudo da classificação de geometrias 3-dimensionais desenvolvido por W.P. Thurston [53], com utilização na classificação dos modelos de Bianchi e Kantowski-Sachs).

Esperamos continuar nossos estudos dos modelos com topologia não trivial, ampliando os nossos estudos através da análise de modelos de volumes menores, tais como o analisado em [25], para obter uma melhor compreensão destes modelos de universos compactos.

## Apêndice A

### Relação dos geradores

Tabela A.1: Geradores

$g_1 : BGC \rightarrow ADI$

$$\begin{pmatrix} 0.447214 & -0.850651 & -0.585410 & 0.516054 \\ -0.525731 & 0.000000 & -1.801707 & 1.588251 \\ 1.532624 & 1.113516 & 1.479837 & -2.186041 \\ -1.351047 & -0.981593 & -2.186041 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

$g_{11} : ADI \rightarrow BGC$

$$\begin{pmatrix} 0.447214 & -0.525731 & 1.532654 & 1.351047 \\ -0.850651 & 0.000000 & 1.113516 & 0.981593 \\ -0.585410 & -1.801707 & 1.479837 & 2.186041 \\ -0.516054 & -1.588251 & 2.186041 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

$g_2 : ABC \rightarrow ICA$

$$\begin{pmatrix} -1.085410 & -0.262866 & 0.670820 & 0.834993 \\ -1.964167 & -1.809017 & -0.688191 & 2.569845 \\ 0.861803 & -0.425325 & 0.585410 & -0.516054 \\ -2.186041 & -1.588251 & -0.516054 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

$g_{12} : ICA \rightarrow ABC$

$$\begin{pmatrix} -1.085410 & -1.964167 & 0.861803 & 2.186041 \\ -0.262866 & -1.809017 & -0.425325 & 1.588251 \\ 0.670820 & -0.688191 & 0.585410 & 0.516054 \\ -0.834993 & -2.569845 & 0.516054 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

$g_3 : DIK \rightarrow EFL$

$$\begin{pmatrix} 1.256231 & -0.262866 & 0.223607 & 0.834993 \\ -1.113516 & 0.809017 & -2.389493 & -2.569845 \\ -0.085410 & 1.113516 & -0.138197 & -0.516054 \\ 1.351047 & -0.981593 & 2.186041 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

$g_{13} : EFL \rightarrow DIK$

$$\begin{pmatrix} 1.256231 & -1.113516 & -0.085410 & -1.351047 \\ -0.262866 & 0.809017 & 1.113516 & 0.981593 \\ 0.223607 & -2.389493 & -0.138197 & -2.186041 \\ -0.834993 & 2.569845 & 0.516054 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

$g_4 : KLD \rightarrow DEL$ 

$$\begin{pmatrix} 0.223607 & -0.688191 & 0.861803 & 0.516054 \\ -1.538842 & -0.500000 & -0.951057 & -1.588251 \\ -0.638197 & -1.113516 & -2.032624 & -2.186041 \\ 1.351047 & 0.981593 & 2.186041 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

 $g_{14} : DEL \rightarrow KLD$ 

$$\begin{pmatrix} 0.223067 & -1.538842 & -0.638197 & -1.351047 \\ -0.688191 & -0.500000 & -1.113516 & -0.981593 \\ 0.861803 & -0.951057 & -2.032624 & -2.186041 \\ -0.516054 & 1.588251 & 2.186041 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

 $g_5 : HJK \rightarrow GFB$ 

$$\begin{pmatrix} 1.256231 & -0.262866 & -1.085410 & 1.351047 \\ -1.113516 & 0.809017 & -0.262866 & -0.981593 \\ 2.341641 & 0.525731 & -0.138197 & 2.186041 \\ 2.702095 & 0.000000 & -0.516054 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

 $g_{15} : GFB \rightarrow HJK$ 

$$\begin{pmatrix} 1.256231 & -1.113516 & 2.341641 & -2.702095 \\ -0.262866 & 0.809017 & 0.525731 & 0.000000 \\ -1.085410 & -0.262866 & -0.138197 & 0.516054 \\ -1.351047 & 0.981593 & -2.186041 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

 $g_6 : GJH \rightarrow FGJ$ 

$$\begin{pmatrix} 0.223607 & -0.688191 & 0.861803 & -0.516054 \\ -1.538842 & -0.500000 & 0.951057 & -1.588251 \\ 1.170820 & -0.525731 & -2.032624 & 2.186041 \\ 1.669986 & 0.000000 & -2.186041 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

 $g_{16} : FGJ \rightarrow GJH$ 

$$\begin{pmatrix} 0.223607 & -1.538842 & 1.170820 & 1.669986 \\ -0.688191 & -0.500000 & -0.525730 & 0.000000 \\ 0.861803 & 0.951057 & -2.032624 & 2.186041 \\ 0.516054 & 1.588251 & -2.186041 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

 $g_7 : LJF \rightarrow ABE$ 

$$\begin{pmatrix} 0.723607 & 2.752764 & -0.447214 & 2.702095 \\ -0.525731 & 0.000000 & -0.850651 & 0.000000 \\ -0.947214 & -0.162460 & 0.585410 & -0.516054 \\ 0.834993 & 2.569845 & -0.516054 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

 $g_{17} : ABE \rightarrow LJF$ 

$$\begin{pmatrix} 0.723607 & -0.525731 & -0.947214 & -0.834993 \\ 2.752764 & 0.000000 & -0.162460 & -2.569845 \\ -0.447214 & -0.850651 & 0.585410 & 0.516054 \\ -2.702095 & 0.000000 & 0.516054 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

 $g_8 : CGH \rightarrow FEB$ 

$$\begin{pmatrix} -0.085410 & -1.639247 & -1.756231 & 2.186041 \\ -1.113516 & 0.809017 & 1.275976 & -1.588251 \\ -0.138197 & 0.425325 & -1.032624 & 0.516054 \\ 0.516054 & -1.588251 & -2.186041 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

 $g_{18} : FEB \rightarrow CGH$ 

$$\begin{pmatrix} -0.085410 & -1.113516 & -0.138197 & -0.516054 \\ -1.639247 & 0.809017 & 0.425325 & 1.588251 \\ -1.756231 & 1.275976 & -1.032624 & 2.186041 \\ -2.186041 & 1.588251 & -0.516054 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

 $g_9 : KIH \rightarrow AED$ 

$$\begin{pmatrix} 1.532624 & -1.113516 & -0.447214 & 1.669986 \\ -0.587785 & -0.809017 & 0.000000 & 0.000000 \\ -1.756231 & 1.275976 & -1.032624 & -2.186041 \\ 2.186041 & -1.588251 & 0.516054 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

 $g_{19} : AED \rightarrow KIH$ 

$$\begin{pmatrix} 1.532624 & -0.587785 & -1.756231 & -2.186041 \\ -1.113516 & -0.809017 & 1.275976 & 1.588251 \\ -0.447214 & 0.000000 & -1.032624 & -0.516054 \\ -1.669986 & 0.000000 & 2.186041 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

$g_{10} : CHI \rightarrow JKL$ 

$$\begin{pmatrix} -0.585410 & 2.327438 & -0.138197 & -2.186041 \\ -0.951057 & 1.309017 & 0.951057 & -1.588251 \\ 0.670820 & 0.688191 & 0.585410 & -0.516054 \\ 0.834993 & -2.569845 & -0.516054 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

 $g_{20} : JKL \rightarrow CHI$ 

$$\begin{pmatrix} -0.585410 & -0.951057 & 0.670820 & -0.834993 \\ 2.327438 & 1.309017 & 0.688191 & 2.569845 \\ -0.138197 & 0.951057 & 0.585410 & 0.516054 \\ 2.186041 & 1.588251 & 0.516054 & 2.927051 \end{pmatrix}$$

## Referências Bibliográficas

- [1] Albrecht, A.; Steinhardt, P.J. (1982). *Phys.Rev.Lett* **48**,1220.
- [2] Arp,H.C. (1981). *Ap.J.***250**,31.
- [3] Arp, H.C. (1982). *Ap.J.* **263**,L9.
- [4] Arp,H.C.; Burbidge, G.; Hoyle, F.; Narlikar, J.V.; Wickramasinghe, N.C. (1990). *Nature*, **346**,807.
- [5] Barthel, P.D. (1989). *Ap.J.* **224**, 606.
- [6] Best, L.A. (1971). *Can.J.Math* **23**, 451.
- [7] Bieisiada, M. (1993). *Gamma-Ray Bursts and Topology of the Universe* pre-  
print NCAC-264. stembro 1993.
- [8] Bondi, H. (1960). *Cosmology*, Cambridge, Cambridge University Press.
- [9] Boothby, W.M. (1986). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Rie-  
mannian Geometry*, Academic Press.
- [10] Bowne, I.W. (1982). *Ap.J.***263**,L7.
- [11] Brandenberger, R. (1985). *Rev.Mod.Phys.***57**,1.
- [12] Coxeter, H.S.M. (1968). *Twelve Geometric Essays* (capítulo 10), Southern  
University Press.
- [13] Carmo, Manfredo Perdigão do (1976). *Geometria Riemanniana*, IMPA.
- [14] Demianski, M.;Lapucha, M. (1986). *Mon.Not.R.astr.Soc* **224**,527.

- [15] Dicke, R.H.; Peebles, P.J.E. (1979). em *General Relativity – An Einstein Centenary Survey*, ed. S.W. Hawking e W. Israel, Cambridge University Press.
- [16] Dicke, R.H.; Peebles, P.J.E.; Roll, P.G.; Wilkinson, D.T. (1965). *Ap.J.* **142**, 414.
- [17] Doubrovine, B.; Novikov, S.; Fomenko, A. (1985). *Géométrie Contemporaine* volume 2, Editora Mir.
- [18] Efimov, N.V. (1984). *Geometris Superior*, Editora Mir.
- [19] Ellis, G.F.R. (1971). *Gen.Rel.Grav.* **2**,7.
- [20] Ellis, G.F.R; Schreiber, G. (1986). *Phys.Lett.* **A115**, 97.
- [21] Fagundes, H.V. (1983). *Phys.Rev.Lett.* **51**, 517.
- [22] Fagundes, H.V. (1985). *Phys.Rev.Lett.* **54**, 1200.
- [23] Fagundes, H.V. (1989). *Ap.J.* **338**, 618.
- [24] Fagundes, H.V. (1992). *Gen.Rel.Grav.* **24**,199.
- [25] Fagundes, H.V. (1993). *Phys.Rev.Lett.* **70**,1579.
- [26] Fagundes, H.V.; Kwok, S.F. (1991). *Ap.J.* **368**,33.
- [27] Fagundes, H.V.; Silveira, F.E.M. (1993). em preparação. *Tese de Mestrado* de F.E.M. da Silveira, Instituto de Física Teórica.
- [28] Fagundes, H.V.; Wichowski, U.F. (1987). *Ap.J.Lett.* **332**, L5.
- [29] Fang, L.Z.; Houjun, M. (1987). *Mod.Phys.Lett.* **A2**,227.
- [30] Fang, L.Z.; Liu, Y.L. (1988). *Mod.Phys.Lett.* **A2**,1221.
- [31] Fang, L.Z.; Sato, H. (1983). *Comm.Theor.Phys.* **2**,1055.
- [32] Field, G. ed. (1973). *Redshift Controversy*, W.A.Benjamin.
- [33] Geroch, R.P. (1967). *J.Math.Phys.* **8**,782.

- [34] Geroch, R.P.; Horowitz, G.T. (1979). em *General Relativity - An Einstein Centenary Survey*, ed. S.W. Hawking e W. Israel, Cambridge University Press.
- [35] Gott, J.R. (1980). *Mon.Not.R.Astr.Soc.* **193**, 153.
- [36] Goncharov, Yu.P.; Nesteruk, A.V. (1993). *Europhys.Lett.* **14**, 719.
- [37] Gush, H.; Halpern, M.; Wishnow, E. (1990). *Phys.Rev.Lett.*, **65**, 537.
- [38] Gutt, A.H. (1981). *Phys.Rev.D* **23**, 347.
- [39] Hawking, S.W.; Ellis, G.F.R. 1973. *The Large-Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press.
- [40] Hayward, G.; Twanley, J. (1990). *Phys.Lett.* **A149**, 84.
- [41] Hubble, E. (1929). *Proc.Nat.Acad.Sci.* **15**, 168.
- [42] Landau, L.D.; Lifschitz, E. (1980). *Teoria do Campo*, Editora Mir.
- [43] Linde, A.D. (1984). *Phys.Lett.* **108B**, 389.
- [44] Magnus, W.; Karras, A.; Solitar, D. (1976). *Combinatorial Group Theory*, Dover.
- [45] Massey, W.S. (1977). *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer Verlag.
- [46] Mather, J.C. et all (1990). *Astrophys.J.* **354**, L37.
- [47] Mukhanov, V.F.; Feldman, H.A.; Brandenberger, R.H. (1992). *Phys.Rep.* **215**, 203.
- [48] Nesteruk, A.V. (1993). *Class.Quant.Grav.* **10**, L161.
- [49] Peebles, P.J.E. (1982). *Ap.J.Lett.* **263**, L1.
- [50] Peebles, P.J.E.; Schramm, D.N.; Turner, E.L.; Kron, R.G. (1991). *Nature*, **352**, 769.
- [51] Penzias, A.A.; Wilson, R.W. (1965). *Ap.J.* **142**, 419.

- [52] Sandage, A. (1988). *Ann.Rev.Astron.Astrophys.* **26**,561.
- [53] Scott, P. (1983). *Bull.London.Math.Soc.* **15**,401.
- [54] Smoot, G.F. et all (1992). *Ap.J.* **396**, L1.
- [55] Sokolov, I.Yu. (1993). *JETP Lett.* **57**,617.
- [56] Sokolov,D.D; Shvartzman, V.F. (1974). *Sov.Phys. JETP* **39**, 196.
- [57] Starobinsky, A.A. (1993). *JETP Lett.* **57**, 623.
- [58] Stevens, D.; Scott, D.; Silk, J. (1993). *Phys.Rev.Lett.* **71**,20.
- [59] Wald, R.M. (1984). *General Relativity*, Chicago University Press.
- [60] Weedman, D.W. (1988). *Quasar Astronomy*, Cambridge University Press.
- [61] Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons.
- [62] Wolf, J.A. (1967). *Spaces of Constant Curvature*, McGraw-Hill.
- [63] Zeldovich, Ya.B. (1976). *Comm.Astrophys.* **6**,157

## Errata

- na página 6, substituir o texto “... com a curvatura do Universo.” na segunda linha após a equação (1.1) por:  
com a curvatura da seção espacial do Universo.
- nas páginas 10-11, substituir o texto que se inicia após a equação (1.22) “ou utilizando as coordenadas ...” até “... espaço de curvatura constante.” na página 11, por  
Se  $K(p, \sigma) = K_o = \text{constante}$  para todo  $\sigma \in T_p(M)$ , e todo  $p \in M$ , então a variedade  $M$  é um espaço de curvatura constante. Neste caso utilizando coordenadas locais, tais que  $g_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle$ ,  $X = \sum a^i E_i$ ,  $Y = \sum b^i E_i$ , da equação (1.22) segue:

$$R_{ijkl} = -K_o(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \quad (1.23)$$

- na página 16, modificar o início do primeiro parágrafo: “Vamos considerar o caso de um universo plano, com topologia de um toro  $T^3$ .”  
por:  
Vamos considerar o caso de um universo de seção espacial plana, com topologia de um toro  $T^3$  e métrica de Einstein-de Sitter  $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2]$ , onde  $a(t) = (t/t_o)^{2/3}$  e  $t_o = 2/(3H_o)$  é a idade atual do universo.
- na página 18, a equação (2.6) deve ser substituída por:

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}) = -\frac{1}{2} \frac{H_o^2}{c^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\delta_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{y}\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})}{k^2} \quad (2.6)$$

