

# Estudo Cosmológico da Métrica de Kantowski-Sachs

## Cosmological Study of the Kantowski-Sachs Metric

B.B. Silva<sup>\*1</sup>, W. Spalenza<sup>2</sup>, and S.V.B. Gonçalves<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Física, Programa de Pós-Graduação em Física, CEP 29075-910, Vitória, ES, Brasil.

<sup>2</sup>Instituto Federal do Espírito Santo, 29150-410, Cariacica, ES, Brasil.

Recebido em 15 de novembro de 2024. Revisado em 02 de janeiro de 2025. Aceito em 22 de janeiro de 2025.

A métrica de Kantowski-Sachs é uma solução exata das equações de campo de Einstein que descreve um universo anisotrópico e homogêneo, diferindo das soluções isotrópicas e homogêneas do modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Este modelo cosmológico é particularmente relevante para o estudo de regimes em que a simetria esférica é mantida, mas com diferentes fatores de escala nas direções radial e angular, o que pode representar o colapso gravitacional em buracos negros ou fases iniciais do universo primordial. A análise cosmológica nessa métrica permite explorar cenários onde a isotropia é violada, fornecendo elementos sobre a evolução do universo em condições extremas e contribuindo para a compreensão de fenômenos como singularidades e a dinâmica de regimes onde a curvatura tem um papel preponderante na evolução do universo.

**Palavras-chave:** Kantowski-Sachs, Métrica, Raychaudhuri, Anisotropia, Cosmologia.

The Kantowski-Sachs metric is an exact solution to Einstein's field equations that describes an anisotropic and homogeneous universe, differing from the isotropic and homogeneous solutions of the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) model. This cosmological model is particularly relevant for studying regimes where spherical symmetry is preserved but with different scale factors in the radial and angular directions, which can represent gravitational collapse in black holes or early phases of the primordial universe. Cosmological analysis using this metric allows for the exploration of scenarios where isotropy is broken, providing insights into the evolution of the universe under extreme conditions and contributing to the understanding of phenomena such as singularities and the dynamics of regimes where curvature plays a dominant role in the evolution of the universe.

**Keywords:** Kantowski-Sachs, Metric, Raychaudhuri, Anisotropy, Cosmology.

## 1. Introdução

A cosmologia contemporânea fundamenta-se amplamente em modelos isotrópicos e homogêneos [1–6], como o modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), muito usado para descrever a evolução do universo em larga escala [7]. No entanto, a radiação cósmica de fundo, que confirma a homogeneidade e isotropia do universo em grandes escalas, levanta também questões sobre as limitações dessa teoria, especialmente quando confrontada com observações que parecem desviar do princípio cosmológico. Essas anomalias, observadas tanto no universo primordial (como alinhamento de modos multipolares, assimetria hemisférica e variações de parâmetros cosmológicos) quanto no universo atual (anisotropias em fluxos de massa e aglomerados de galáxias) [8–10], indicam a necessidade de explorar modelos que não assumam isotropia e homogeneidade absolutas. Nesse contexto, a métrica de Kantowski-Sachs emerge como uma solução relevante das equações de campo de Einstein, permitindo a investigação de universos homogêneos, porém anisotrópicos.

A métrica de Kantowski-Sachs se destaca por preservar a simetria esférica, mas com fatores de escala distintos nas direções radial e angular [11, 12]. Essa característica a torna especialmente útil para modelar fenômenos quânticos que ocorrem dentro de buracos negros [13] e para explorar teoricamente as singularidades de buracos negros [14, 15]. Além disso, essa métrica é empregada em estudos sobre energia escura [16–19] e em teorias alternativas de gravitação, como  $f(R)$ ,  $f(Q)$ , e  $f(T, B)$  [20–23], assim como em modelos de cosmologia quântica [24, 25]. Essa métrica também é relevante no estudo das condições extremas do universo primordial, onde as suposições de isotropia podem ser violadas em seu limite [26]. Dessa forma, a métrica de Kantowski-Sachs oferece uma base poderosa para compreender a dinâmica do universo, sendo importante para o avanço da cosmologia e da relatividade geral.

Este artigo visa explorar a aplicação da métrica de Kantowski-Sachs na cosmologia, revisando os principais avanços teóricos, resultados e implicações desse modelo. Ao reunir e analisar a literatura existente, busca-se não apenas sintetizar o conhecimento atual, mas também identificar lacunas e possíveis direções de pesquisa que possam contribuir para a expansão do entendimento

\*Endereço de correspondência: breno.silva.80@edu.ufes.br

cosmológico em cenários anisotrópicos e homogêneos. O público-alvo deste trabalho inclui estudantes em fase final da graduação e alunos de pós-graduação, com interesse e conhecimento geral em cosmologia e relatividade geral.

O artigo está estruturado da seguinte forma. Na seção 2, apresentamos uma breve introdução à relatividade geral. Na seção 3, discutimos o modelo cosmológico padrão. A seção 4 aborda a equação de Raychaudhuri e suas componentes. Na seção 5, introduzimos a métrica e o modelo de Kantowski-Sachs. Finalmente, na seção 6, são apresentadas as considerações finais.

## 2. Relatividade Geral

A relatividade geral baseia-se na ideia de que o espaço-tempo é um contínuo curvo, onde a gravidade não atua como uma força, mas resulta da própria curvatura do espaço-tempo. Essa curvatura, por sua vez, é determinada pela distribuição de massa e energia no universo.

Uma das principais ferramentas matemáticas para descrever o espaço-tempo é a métrica, que fornece a distância infinitesimal entre dois pontos em um espaço dotado de medida. Formalmente, a métrica é representada por um tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , que em muitos casos pode ser descrito por uma matriz diagonal.

A equação do elemento de linha, expressa como,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1)$$

fornece a relação entre as coordenadas espaciais e temporais. Para coordenadas esféricas, por exemplo, temos  $x^\mu = \{t, r, \theta, \phi\}$ , com o índice  $\mu = \{0, 1, 2, 3\}$ , onde  $\mu = 0$  corresponde à componente temporal e os demais valores representam as componentes espaciais. O tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  é de ordem dois e contém as informações necessárias para descrever as propriedades geométricas do espaço-tempo, como curvatura e distâncias.

Todas as formas pelas quais a curvatura se manifesta dependem de uma estrutura matemática denominada de conexão afim, que nos dá um meio de relacionar vetores nos espaços tangentes de pontos próximos. Existe uma conexão única que podemos construir a partir da métrica, e ela está contida em um objeto chamado símbolo de Christoffel [27], dado por,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (2)$$

onde  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  é a derivada parcial. O papel fundamental da conexão é nos permitir definir a derivada covariante em um espaço curvo, generalizando a derivada usual em espaços planos. No caso de um campo vetorial covariante e quadridimensional  $V_\alpha$ , a sua derivada covariante é definida como,

$$\nabla_\beta V_\alpha = \partial_\beta V_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda V_\lambda, \quad (3)$$

ou, reescrevendo em outra notação,

$$V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda V_\lambda, \quad (4)$$

onde o ponto e vírgula denota a derivada covariante e apenas a vírgula indica a derivada parcial. A partir da comutação da derivada covariante de um vetor  $X^\rho$  qualquer [28], onde,

$$\nabla_\mu \nabla_\nu X^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu X^\rho = \frac{1}{2} R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} X^\sigma, \quad (5)$$

podemos definir o tensor de Riemann, como sendo,

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda, \quad (6)$$

um tensor de quarta ordem. A curvatura é quantificada pelo tensor de Riemann, que é derivado das conexões [27]. Em um espaço curvo, ao realizar o transporte paralelo de um vetor ao longo de um caminho fechado, ocorre uma transformação nesse vetor. O tensor de Riemann determina o quanto esse vetor varia ao longo do seu deslocamento [29]. Em um espaço plano, naturalmente, o tensor de Riemann é nulo.

Fazendo dois índices iguais do tensor de Riemann, o primeiro e o terceiro, podemos reduzi-lo para outro de ordem dois, nomeado como tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}. \quad (7)$$

Por fim, temos, com o auxílio da métrica, o escalar de Ricci,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (8)$$

Todos estes elementos irão retornar diversas vezes na construção da equações de Einstein.

As equações de campo de Einstein podem ser derivadas a partir de um princípio variacional aplicado à ação, que descreve a interação entre a gravidade e a matéria no universo. A ação é dada por,

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} S_{EH} + S_m, \quad (9)$$

onde  $S_m$  a ação da matéria,  $S_{EH}$  é a ação de Einstein-Hilbert,  $G$  é a constante de gravitação universal e  $c$  é a velocidade da luz, que neste artigo será descrito em unidades naturais, ou seja,  $c = 1$ . Logo,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{16\pi G} + \mathcal{L}_m \right) \quad (10)$$

onde,  $R$  é o escalar de Ricci, que descreve a curvatura do espaço-tempo,  $g$  é o determinante do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , e  $\mathcal{L}_m$  é a densidade lagrangiana da matéria. A variação dessa ação em relação à métrica  $g_{\mu\nu}$  nos leva às equações de campo de Einstein, onde,

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (11)$$

$$= \frac{1}{16\pi G} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (12)$$

$$= \frac{1}{16\pi G} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (13)$$

Definindo o tensor energia-momento como sendo,

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (14)$$

teremos, por fim, as equações de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (15)$$

onde,  $G$  é constante de gravitação universal e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento. Existem diferentes tipos de tensores energia-momento [30], como os associados ao campo escalar e ao campo eletromagnético. No entanto, um estudo cosmológico não considera características específicas de galáxias ou outros corpos menores, mas foca no comportamento geral do universo como um todo. Para isso, todas as componentes são agrupadas em um único fluido, tornando o tensor energia-momento do fluido perfeito a escolha ideal para o desenvolvimento de um modelo cosmológico, sendo este conhecido como,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (16)$$

onde,  $p$  é a pressão,  $\rho$  é a densidade de energia e  $U_\mu$  é a quadri-velocidade do fluido, conhecida como,

$$U^\mu = \left( \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx^i}{d\tau} \right). \quad (17)$$

onde  $i = \{1, 2, 3\}$ , representa as componentes espaciais, e  $\tau$  o tempo próprio [3]. Assim,

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (18)$$

ou seja, consideramos  $U^\mu$  como um vetor do tipo-tempo normalizado [31]. Dessa maneira, para assinatura da métrica  $(+, -, -, -)$ , temos que,

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 1. \quad (19)$$

A equação de estado relaciona a pressão e a densidade,  $p = \omega\rho$ , onde  $\omega$  pode assumir, entre outros valores,  $1, 1/3, 0, -1$ , representando, respectivamente, matéria rígida, radiação, poeira e vácuo. A cosmologia atual indica que passamos da era da radiação para um estágio de poeira, porém com uma expansão acelerada, relacionando assim poeira e vácuo.

### 3. Modelo Cosmológico Padrão

Há em português diversos textos, muitos desta revista, que abordam de maneira qualitativa a expansão do universo e o modelo padrão [32–39]. Essa seção busca fazer uma breve introdução do modelo padrão apresentando as equações fundamentais do modelo e as questões que as observações atuais levantam.

A premissa do modelo padrão é um universo homogêneo e isotrópico. E a métrica que possui essas

características é a de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW),

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (20)$$

onde  $r$  indica a direção radial,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  é a parte angular,  $a(t)$  é o fator de escala que relaciona a distância própria ( $d_p$ ) com a distância observada hoje ( $d_o$ ), e  $\kappa$  determina as possíveis geometrias do universo, para  $\kappa = 0$  o universo seria plano, para  $\kappa = -1$  seria aberto, e para  $\kappa = 1$  seria fechado. Ao solucionar as equações de Einstein, equação (15), com essa métrica e o tensor energia-momento do fluido perfeito, equação (16), temos como resultado duas equações de movimento, onde,

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (21)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p). \quad (22)$$

Essas expressões são conhecidas como equações de Friedmann. Além delas, a conservação de energia é essencial para desenvolver o modelo, logo temos,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (23)$$

Para o tensor momento energia de um fluido perfeito, equação (16), temos a seguinte equação de conservação de energia,

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p). \quad (24)$$

Ao adicionar a equação de estado,  $p = \omega\rho$ , e integrar a equação acima, teremos,

$$\rho = \sum_{\omega} \rho_0 a^{-3(\omega+1)}, \quad (25)$$

que no caso de Friedmann é uma somatória de  $\omega$  devido ao interesse de estudar ao mesmo tempo todas as contribuições.

Avançando, iremos explorar a questão da expansão do universo. Em 1929, Hubble encontrou uma relação de proporcionalidade,  $v \propto d_o$ , entre a distância do observador e a velocidade com que uma galáxia observada se afasta [40]. A razão entre velocidade e distância foi conhecida como constante de Hubble ( $H_0$ ). Um interessante trabalho a respeito da lei de Hubble encontra-se nesta revista [41]. No entanto, em um universo em expansão, o fator de escala relaciona a distância própria e a distância observada ao longo do tempo,  $d_p = a(t)d_o$ . Assim, a taxa de expansão do universo, atualmente representada pelo parâmetro de Hubble, é definida como,

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (26)$$

O próximo passo é definir o parâmetro de densidade. Esse termo determina a porcentagem de matéria no

universo e a influência que a geometria do universo tem nessa quantidade. Logo temos,

$$\Omega = \frac{8\pi G \rho}{3H^2}, \quad (27)$$

onde  $\Omega$  é o parâmetro de densidade. Expandindo  $\Omega$ , a partir da expressão (25), temos,

$$\Omega = \sum_{\omega} \frac{8\pi G \rho_0}{3H^2} a^{-3(\omega+1)}, \quad (28)$$

$$= \Omega_m + \Omega_{\Lambda} + \Omega_r, \quad (29)$$

onde  $\Omega_m$  é o parâmetro de densidade da matéria, quando  $\omega = 0$ ,  $\Omega_r$  é o parâmetro de densidade da radiação, quando  $\omega = 1/3$ , e  $\Omega_{\Lambda}$  é o parâmetro de densidade relacionado a energia escura e ao vácuo, quando  $\omega = -1$ .

Retornando a equação (21), adicionando as equações (26) e (27), temos a seguinte expressão,

$$\frac{\kappa}{a^2 H^2} = \Omega - 1, \quad (30)$$

definindo uma expressão da contribuição da geometria do universo, expresso pelo fator  $\kappa$ , ao parâmetro de densidade,

$$\Omega_{\kappa} = -\frac{\kappa}{a^2 H^2}. \quad (31)$$

Logo, partir das expressões (29) e (30), temos,

$$\Omega_m + \Omega_{\Lambda} + \Omega_r + \Omega_{\kappa} = 1, \quad (32)$$

onde, a quantidade de matéria está condicionada a geometria do universo, se  $k = 0$ , o universo é plano e  $\Omega = 1$ , equação (29), porém para  $k \neq 0$ , o parâmetro de densidade da matéria será  $\Omega < 1$  ou  $\Omega > 1$ , compensando a influência existente da geometria.

As observações de supernovas tipo Ia são hoje, devido as suas características bem particulares, a principal indicação de que o universo está em expansão acelerada [42]. Acredita-se que a causa dessa aceleração seja a energia escura, que compõe aproximadamente cerca de 68.5% do conteúdo do universo ( $\Omega_{\Lambda} = 0.685$ ). Esse elemento ainda desconhecido não interage com ondas eletromagnéticas, o que torna suas observações ainda mais desafiadoras.

Por outro lado, a matéria contribui com cerca de 31.5% do conteúdo do universo ( $\Omega_m = 0.315$ ), desconsiderando a radiação [43]. Deste total, apenas 4.9% é a matéria bariônica conhecida [44], enquanto o restante é composto por matéria escura, um elemento que interage apenas gravitacionalmente.

Uma outra forma de observar o tipo de expansão do universo é por meio do parâmetro de desaceleração, que leva esse nome pois acreditava-se que o universo não estava expandindo de maneira acelerada. Este é definido como,

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (33)$$

Introduzindo as equações (22), (26) e (32), na equação acima, temos,

$$q = 1 - \frac{1}{2}\Omega_m - 2\Omega_{\Lambda} - \Omega_{\kappa}, \quad (34)$$

o que indica que se um universo plano fosse dominado por matéria não relativística, onde  $\Omega_m = 1$  e  $\Omega_{\Lambda} = \Omega_{\kappa} = 0$ , teríamos um universo com expansão desacelerada, onde  $q = 0.5$ . Porém, para um universo plano com os valores aproximados atuais,  $\Omega_m = 0.3$  e  $\Omega_{\Lambda} = 0.7$ , temos um valor negativo para o parâmetro de desaceleração, com  $q = -0.55$ . Ou seja, indica um universo em expansão acelerada.

#### 4. Equação de Raychaudhuri

Para analisar métricas anisotrópicas, como a de Kantowski-Sachs, precisamos adotar uma abordagem mais geral do que aquela usada em modelos isotrópicos, como o de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Na métrica de FLRW, a taxa de expansão do universo é descrita pelo parâmetro de Hubble, equação (26), onde  $a(t)$  é o fator de escala que descreve a expansão isotrópica do universo. No entanto, em métricas anisotrópicas, com mais de um fator de escala, como no modelo Kantowski-Sachs, a análise se torna mais complexa.

Para lidar com essa complexidade, recorreremos a conceitos da Hidrodinâmica Relativística, em particular à equação de Raychaudhuri, que descreve a evolução da expansão em contextos tanto isotrópicos quanto anisotrópicos. Essa equação é fundamental para compreender como a geometria do espaço-tempo responde à presença de matéria e energia [30, 45, 46].

Os elementos hidrodinâmicos são derivados a partir da decomposição da derivada covariante da quadri-velocidade do fluido. Essa decomposição nos permite entender como as diferentes quantidades cinemáticas, como aceleração, cisalhamento e vorticidade, interagem em um espaço curvo. Assim, temos,

$$U_{\alpha;\beta} = \dot{U}_{\alpha} U_{\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\Theta(g_{\alpha\beta} - U_{\alpha} U_{\beta}), \quad (35)$$

onde  $\dot{U}_{\alpha}$  é o vetor aceleração,  $\sigma_{\alpha\beta}$  é o tensor de cisalhamento,  $\omega_{\alpha\beta}$  é o tensor de torção (ou vorticidade), e  $\Theta$  é a expansão escalar. O tensor de torção,  $\omega_{\alpha\beta}$ , é a parte antissimétrica da decomposição, enquanto  $\sigma_{\alpha\beta}$  e  $\Theta$  correspondem às partes simétricas.

A expansão escalar  $\Theta$  é definida como,

$$\Theta = U^{\alpha}{}_{;\alpha}, \quad (36)$$

que, numa representação matricial, corresponde aos termos da diagonal. Definindo o raio de curvatura,  $l$ , que pode ser interpretada como uma redução para um único fator de escala, a exemplo do modelo de FLRW, para métricas com mais de um fator de escala, podemos

encontrar a expansão escalar da seguinte maneira,

$$\frac{\Theta}{3} = \frac{\dot{l}}{l}, \tag{37}$$

do mesmo jeito podemos reescrever o parâmetro de Hubble, expressão (26), em função do raio de curvatura, logo,

$$H = \frac{\dot{l}}{l}. \tag{38}$$

Comparando as últimas duas expressões temos a seguinte proporcionalidade [45],

$$\Theta = 3H. \tag{39}$$

Outro termo importante é o tensor de cisalhamento  $\sigma_{\alpha\beta}$ , que mede a deformação anisotrópica do fluido. Em uma matriz, o cisalhamento está associado aos elementos fora da diagonal, complementando a matriz da expansão escalar. Ele é definido como,

$$\sigma_{\alpha\beta} = U_{(\alpha;\beta)} - \dot{U}_{(\alpha}U_{\beta)} - \frac{1}{3}\Theta(g_{\alpha\beta} - U_{\alpha}U_{\beta}), \tag{40}$$

onde os parênteses nos índices indicam simetria, isto é,  $A_{\alpha\beta} = +A_{\beta\alpha}$ . O cisalhamento é uma medida de anisotropia no modelo, e a relação entre o escalar de cisalhamento e o parâmetro de Hubble nos dá a porcentagem de anisotropia do modelo [47].

O vetor que determina a quadri-aceleração do fluido é definido da seguinte maneira,

$$\dot{U}_{\alpha} = U_{\alpha;\nu}U^{\nu}. \tag{41}$$

O tensor de torção, que mede a vorticidade, é definido como,

$$\omega_{\alpha\beta} = U_{[\alpha;\beta]} - \dot{U}_{[\alpha}U_{\beta]}, \tag{42}$$

onde os colchetes indicam antissimetria, isto é,  $A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}$ . Os escalares de  $\omega_{\alpha\beta}$  e  $\sigma_{\alpha\beta}$  são,

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}, \tag{43}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}. \tag{44}$$

Esses parâmetros cinemáticos são usados para analisar modelos isotrópicos e anisotrópicos e os seus escalares são reunidos na equação de Raychaudhuri [48]. Esta equação é fundamental para a análise de singularidades, também podendo ser aplicada, por exemplo, no estudo de congruências geodésicas e de ondas gravitacionais [49]. Uma das maneiras de enunciá-la é a partir da identidade de Riemann [28],

$$U^{\alpha}_{;\beta\gamma} - U^{\alpha}_{;\gamma\beta} = R^{\alpha}_{\nu\gamma\beta}U^{\nu}, \tag{45}$$

que comprimindo, em busca do tensor de Ricci, expressão (7), e multiplicando pela quadri-velocidade, fica sendo,

$$U^{\alpha}_{;\beta\alpha}U^{\beta} - U^{\alpha}_{;\alpha\beta}U^{\beta} = R_{\nu\beta}U^{\nu}U^{\beta}. \tag{46}$$

Desenvolvendo esta expressão, adicionando todos os elementos hidrodinâmicos definidos nesta seção, teremos no fim a equação de Raychaudhuri,

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3}\Theta^2 + \dot{U}^{\alpha}_{;\alpha} - 2\sigma^2 + 2\omega^2 - R_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\beta}, \tag{47}$$

onde o último termo, envolvendo o tensor de Ricci ( $R_{\alpha\beta}$ ), está relacionado à condição de energia forte. Para valores positivos desse termo, a condição de energia forte é satisfeita, o que implica que o universo está em um estado de desaceleração. No entanto, quando essa condição é violada, ou seja, quando  $R_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\beta} < 0$ , o universo experimenta uma expansão acelerada, o que pode indicar um período inflacionário nas fases iniciais do universo [50].

A equação de Raychaudhuri, como dito, é uma ferramenta importante para identificar a presença de singularidades. Sob as condições assumidas de  $\omega = 0 = \dot{U}^{\alpha}_{;\alpha}$ , e introduzindo a expressão (37), a equação de Raychaudhuri assume a forma,

$$3\frac{\ddot{l}}{l} + 2\sigma^2 + R_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\beta} = 0. \tag{48}$$

A análise dessa equação revela que  $\ddot{l} < 0$  indica uma concavidade voltada para baixo. Se atualmente o fluido está em expansão ( $\Theta > 0$ ), a evolução pode ser representada por uma reta tangente à concavidade. Nesse cenário, em algum momento no passado, essa reta necessariamente interceptou o eixo, ou seja,  $l$  tornou-se nulo. Isso implica que  $R_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\beta} \rightarrow \infty$ , evidenciando a ocorrência de uma singularidade em um ponto do passado [45].

### 5. Modelo de Kantowski-Sachs

No início desta seção e na primeira subseção, replicamos as soluções encontradas por Kantowski e Sachs em seu artigo [12], como base para discutir um estudo moderno do comportamento anisotrópico nas subseções seguintes.

Em 1966, Kantowski e Sachs publicaram o artigo intitulado *Some spatially homogeneous anisotropic relativistic cosmological models*, no qual apresentaram uma solução para uma métrica com dois fatores de escala, conforme a equação abaixo,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dr^2 - b^2(t)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \tag{49}$$

que hoje é conhecida como a métrica de Kantowski-Sachs. Observa-se que há um fator de escala,  $a(t)$ , para a direção radial e outro,  $b(t)$ , para as coordenadas angulares. Se esses termos não se comportarem de maneira igual, ocorrerá uma anisotropia.

Para o presente caso, foi considerado um fluido de poeira, ou seja, um fluido sem pressão ( $p = 0$ ), o que resulta no seguinte tensor energia-momento,

$$T_{\mu\nu} = \rho U_{\mu}U_{\nu}, \tag{50}$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia e  $U_{\mu}$  é a quadri-velocidade do fluido.

Desenvolvendo as componentes da equação de Einstein, equação (15), temos

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \frac{1}{b^2} = \rho, \tag{51}$$

$$2\frac{\ddot{b}}{b} + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \frac{1}{b^2} = 0, \tag{52}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 0. \tag{53}$$

Podemos verificar que as equações (52) e (53) são diferentes entre si. No modelo de FLRW isso não ocorre, e essa é mais uma consequência da anisotropia. Além disso, a equação (52) é caracterizada apenas pelo fator de escala  $b(t)$ , assim, ela será utilizada para encontrar uma solução para esse fator de escala. Usando o método da substituição, após alguns cálculos, temos que

$$\frac{db}{dt} = \sqrt{\frac{c_0}{b} - 1}, \tag{54}$$

onde  $c_0$  é uma constante. Para resolver os autores propuseram,

$$b = c_0 \cos^2 \lambda(t), \tag{55}$$

onde  $\lambda(t)$  é um parâmetro temporal adicionado para facilitar a compreensão do problema. Com isso, após introduzir a equação (55) em (54) e fazer a integração necessária, temos o tempo cosmológico igual a

$$t - t_o = c_0 \left( \lambda + \frac{1}{2} \sin 2\lambda \right). \tag{56}$$

O próximo passo é encontrar o outro fator de escala,  $a(t)$ . Para isso, assume-se que os fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  são variáveis independentes. Assim, os resultados obtidos de (55) são inseridos na expressão (53), e o fator de escala  $a$  agora varia em função de  $\lambda$ . Após simplificações, a equação diferencial resultante é,

$$\frac{d^2a}{d\lambda^2} - 2a \sec^2 \lambda = 0. \tag{57}$$

Ao resolver essa equação diferencial, obtemos,

$$a = \epsilon + (\epsilon\lambda + c_1) \tan \lambda. \tag{58}$$

onde  $\epsilon = 0$  ou  $\epsilon = 1$  representam as duas possíveis soluções para a equação diferencial.

Como mostrado na Figura (1), os fatores de escala apresentam comportamentos opostos, indicando uma anisotropia. Porém, convergem em um determinado instante. Esse encontro indica que, em um momento específico, o modelo alcança uma isotropia temporária. Além disso, os valores das constantes foram indicados no trabalho de Kantowski [51], sendo  $\epsilon = 1$ ,  $c_0 = 1$  e  $c_1 = 0$ .

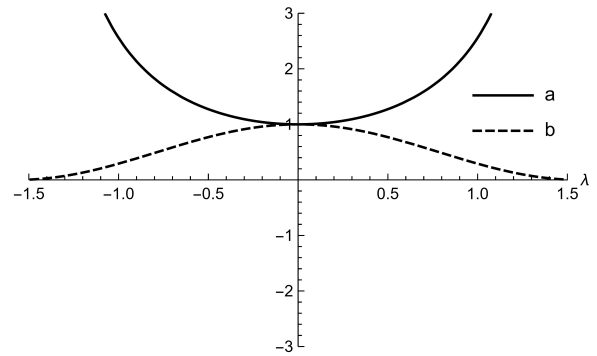


Figura 1: Evolução dos fatores de escala em função de  $\lambda(t)$ .

### 5.1. Densidade

Com os fatores de escala determinados, podemos retornar à equação (51) para calcular a densidade de energia do modelo. Após algumas simplificações matemáticas, obtemos,

$$\rho = \frac{\epsilon \sec^4 \lambda}{c_0^2 [\epsilon + (\epsilon\lambda + c_1) \tan \lambda]}. \tag{59}$$

Devido à natureza de  $\epsilon$ , que pode assumir os valores  $\epsilon = 0$  ou  $\epsilon = 1$ , podemos reescrever a expressão como,

$$\rho = \frac{\epsilon \sec^4 \lambda}{c_0^2 [1 + (\lambda + c_1) \tan \lambda]}. \tag{60}$$

### 5.2. Parâmetros Cinemáticos

Nesta subseção e nas próximas, apresentamos um estudo cosmológico não abordado no artigo original de 1966, oferecendo uma análise atual de modelos anisotrópicos. Os parâmetros cinemáticos introduzidos anteriormente, seção (4), permitem que qualquer modelo cosmológico, incluindo o modelo de Kantowski-Sachs, seja analisado de forma abrangente. Isso é possível porque esses parâmetros, juntamente com a equação de Raychaudhuri, não dependem das especificidades do modelo padrão de Friedmann. Assim, podemos explorar diferentes modelos, independentemente de sua anisotropia ou outras características.

Para o caso aqui abordado temos que a expansão escalar, equação (36), é dada por,

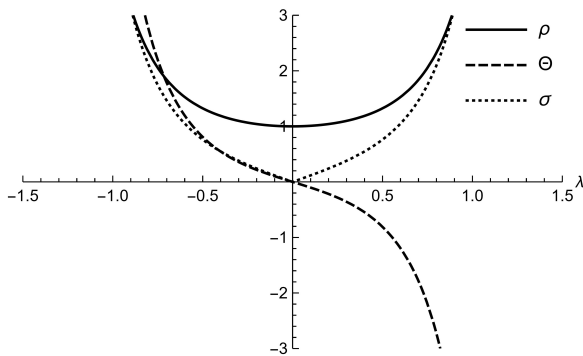
$$\Theta = \frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{b}}{b}. \tag{61}$$

Ao inserir as equações (55) e (58), juntamente com suas respectivas derivadas, a expressão para  $\Theta$  torna-se,

$$\Theta = \frac{\sec^2 \lambda}{2c_0} \left[ \frac{(\epsilon\lambda + c_1)(1 - 3 \tan^2 \lambda) - 3\epsilon \tan \lambda}{\epsilon + (\epsilon\lambda + c_1) \tan \lambda} \right]. \tag{62}$$

Já o escalar do cisalhamento, proveniente da equação (43), para o modelo de Kantowski-Sachs, será

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b} \right|, \tag{63}$$



**Figura 2:** Evolução da densidade de energia  $\rho$ , da expansão escalar  $\Theta$  e do cisalhamento  $\sigma$  em função de  $\lambda(t)$ .

que ao adicionar os fatores de escala, as equações (55) e (58), e suas respectivas derivadas, teremos,

$$\sigma = \frac{\sec^2 \lambda}{2c_0\sqrt{3}} \left[ \frac{(\epsilon\lambda + c_1)(1 + 3 \tan^2 \lambda) + 3\epsilon \tan \lambda}{\epsilon + (\epsilon\lambda + c_1) \tan \lambda} \right]. \quad (64)$$

A Figura (2) é um gráfico recriado com base no trabalho de Kantowski [51], mostrando resultados consistentes entre ambos. As curvas descrevem um universo que, inicialmente, se expande e, após certo tempo, entra em contração. Isso pode ser observado no comportamento do traçado da expansão  $\Theta$ : uma forte expansão no lado esquerdo, que diminui gradualmente até se reverter, assumindo valores negativos e indicando contração. A densidade  $\rho$  acompanha essa dinâmica, crescendo nas extremidades e apresentando relativa estabilidade no momento da reversão. Já o cisalhamento  $\sigma$ , é mais significativo quando o universo está mais compacto, refletindo o aumento da anisotropia nesses períodos.

Esse comportamento está alinhado com um modelo sem expansão acelerada e com a geometria de um universo fechado, característico da métrica de Kantowski-Sachs. Durante esse ciclo de expansão e contração, a densidade do universo diminui e aumenta, respectivamente. Além disso, observa-se um ponto de transição em que o cisalhamento é nulo, indicando ausência momentânea de anisotropia. Outros termos cinemáticos, como a quadri-aceleração, equação (41), e a vorticidade, equação (42), são nulos devido à natureza da métrica de Kantowski-Sachs.

Por fim, para completar a equação de Raychaudhuri, equação (47), temos o elemento do tensor de Ricci, (7), multiplicado pela quadri-velocidade,

$$R_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = R_{00}U^0U^0, \quad (65)$$

$$= R_{00}, \quad (66)$$

$$= -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\ddot{b}}{b}\right). \quad (67)$$

Para o modelo apresentado temos,

$$R_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = \frac{\epsilon \sec^4 \lambda}{2c_0^2 [1 + (\lambda + c_1) \tan \lambda]}. \quad (68)$$

esta expressão é igual a metade do valor da densidade, equação (60), e isso pode ser verificado quando reescrevermos a equação de Einstein, equação (15), como

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \quad (69)$$

Ao introduzir o tensor de fluido perfeito, equação (16), e seu escalar, encontraremos, ao final da resolução, a seguinte relação,

$$R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = \frac{8\pi G}{2}(\rho + 3p). \quad (70)$$

É importante lembrar que estamos utilizando unidades naturais, onde  $8\pi G = 1$ . Além disso, considerando que a pressão é nula, podemos simplificar a expressão e encontrar a semelhança vista nas equações (60) e (68). Logo, temos,

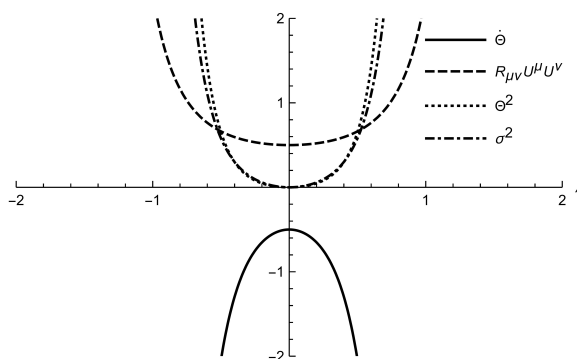
$$R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = \frac{\rho}{2}. \quad (71)$$

Por fim, temos a equação de Raychaudhuri para o modelo de Kantowski-Sachs,

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - 2\sigma^2 - R_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta. \quad (72)$$

Na Figura (3), observa-se que  $R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu$  é positivo, indicando que a condição de energia forte é respeitada, o que é esperado em um modelo composto apenas de poeira ( $p = 0$ ). O aumento desse termo no lado direito do gráfico reflete a influência gravitacional durante a fase de contração. De forma consistente, os valores negativos de  $\dot{\Theta}$  e sua concavidade para baixo também indicam uma contração após um período inicial de expansão. Os termos  $\Theta^2$  e  $\sigma^2$  seguem o comportamento apresentado na Figura (2), evidenciando uma evolução natural no contexto do cenário cosmológico analisado.

Singularidades aparecem quando os termos da equação tendem ao infinito, e na Figura (3) identificam-se uma singularidade à esquerda e outra à direita, representando uma singularidade inicial e um retorno a uma nova singularidade em um estágio posterior. Esse



**Figura 3:** Evolução das componentes da equação de Raychaudhuri.

ciclo, caracterizado por uma expansão seguida de contração, culmina no fenômeno conhecido como “o grande colapso” (*big crunch*), algo esperado em teorias clássicas para um universo fechado, como o descrito pelo modelo apresentado.

### 5.3. Parâmetros de Densidade

Construindo uma análise do modelo anisotrópico, podemos ver a influência de diversos fatores no parâmetro de densidade [52–54]. Para isso, vamos reescrever a equação (51) em termos dos parâmetros cinemáticos,

$$\frac{\Theta^2}{3} - \sigma^2 + \frac{1}{b^2} = \rho. \tag{73}$$

Introduzindo a expressão (39) na equação acima, temos agora a seguinte equação,

$$\Omega_{tot} = \Omega_m + \Omega_\sigma + \Omega_\kappa = 1, \tag{74}$$

sendo,

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{\rho}{3H^2} \\ &= \frac{12\epsilon [\epsilon + (\epsilon\lambda + c_1) \tan \lambda]}{[(\epsilon\lambda + c_1)(1 - 3 \tan^2 \lambda) - 3\epsilon \tan \lambda]^2}, \end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned} \Omega_\sigma &= \frac{\sigma^2}{3H^2} \\ &= \frac{[(\epsilon\lambda + c_1)(1 + 3 \tan^2 \lambda) + 3\epsilon \tan \lambda]^2}{[(\epsilon\lambda + c_1)(1 - 3 \tan^2 \lambda) - 3\epsilon \tan \lambda]^2}, \end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned} \Omega_\kappa &= -\frac{1}{b^2} \\ &= \frac{-12 [\epsilon + (\epsilon\lambda + c_1) \tan \lambda]^2}{[(\epsilon\lambda + c_1)(1 - 3 \tan^2 \lambda) - 3\epsilon \tan \lambda]^2}, \end{aligned} \tag{77}$$

onde,  $\Omega_{tot}$  é o parâmetro de densidade total,  $\Omega_m$  é o parâmetro de densidade da matéria,  $\Omega_\sigma$  é o parâmetro de densidade referente ao cisalhamento, e também a anisotropia, e  $\Omega_\kappa$  o parâmetro de densidade da curvatura do espaço.

Na Figura (4), são apresentados os parâmetros de densidade. Observando a Figura (3) vemos que as

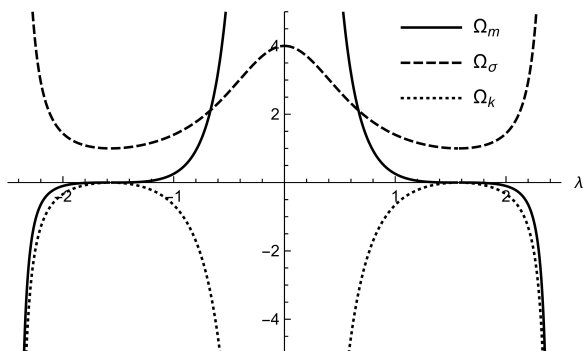


Figura 4: Evolução dos parâmetros de densidade  $\Omega_m$ ,  $\Omega_\sigma$  e  $\Omega_\kappa$ .

singularidades ocorrem próximas de  $\lambda = \pm 1$ . Esse comportamento também é evidenciado na Figura (4), onde  $\Omega_m$  e  $\Omega_\kappa$  tendem ao infinito em valores de  $\lambda$  próximos a esses limites. Para  $\lambda$  menores que  $-1$  ou maiores que  $1$ , a predominância de  $\Omega_\sigma$  torna-se evidente, seguida por um momento em que os outros parâmetros se anulam, indicando um período inicial de anisotropia.

### 5.4. Parâmetro de Desaceleração

Por fim, o parâmetro de desaceleração mostra o quanto a expansão do universo desacelera devido a gravidade. Aqui, a equação que expressa o parâmetro de desaceleração é formado a partir do raio de curvatura,

$$l = (ab^2)^{\frac{1}{3}}, \tag{78}$$

logo, temos

$$q \equiv -\frac{\ddot{l}}{\dot{l}^2}, \tag{79}$$

que após alguns cálculos chegamos a seguinte expressão,

$$q = 2 - 3 \frac{\left[ \frac{\ddot{a}}{a} + 4 \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + 2 \left( \frac{\dot{b}}{b} \right)^2 + 2 \frac{\ddot{b}}{b} \right]}{\left[ \frac{\dot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{b}}{b} \right]^2}. \tag{80}$$

Introduzindo as equações (39), (51), (61), (67) e (71), temos,

$$q = 2 - \frac{1}{3H^2} \left( \frac{3}{2} \rho - 2 \frac{1}{b^2} \right). \tag{81}$$

A partir das definições de parâmetro de densidade, equações (75) e (77), podemos, por fim, determinar a seguinte expressão para o parâmetro de desaceleração,

$$q = 2 - \frac{3}{2} \Omega_m - 2 \Omega_\kappa. \tag{82}$$

Como esperado, a Figura (5) mostra um parâmetro de desaceleração positivo. Isso ocorre porque o modelo inicial de Kantowski-Sachs para poeira ( $p = 0$ ) não

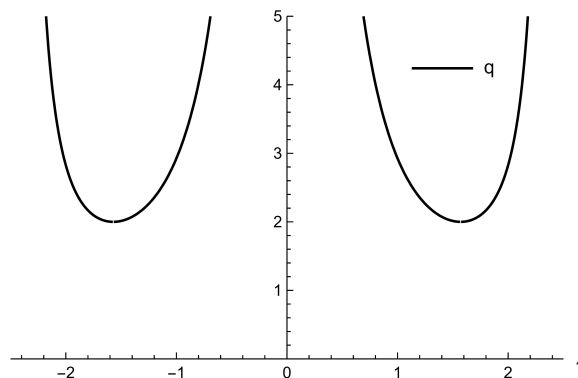


Figura 5: Evolução do parâmetro de desaceleração.

considera a influência da energia escura, resultando em um universo em expansão desacelerada, conforme se acreditava na época de sua publicação. Os menores valores de  $q$  ocorrem próximo de  $\lambda = \pm 1$  seguido por um grande aumento próximo a origem, o que indica que na singularidade a desaceleração era baixa, devido ao forte crescimento, e após essa expansão inicial a desaceleração cresce de tal maneira que próximo a origem temos o início da contração do modelo estudado.

## 6. Considerações Finais

A revisão realizada sobre a cosmologia na métrica de Kantowski-Sachs evidencia a importância deste modelo para a compreensão de cenários onde a anisotropia e a homogeneidade desempenham papéis cruciais na evolução do universo. A métrica de Kantowski-Sachs se destaca por sua capacidade de modelar situações extremas, como o colapso gravitacional e as condições iniciais do universo, oferecendo uma alternativa valiosa aos modelos isotrópicos tradicionais. Ao revisitar os avanços teóricos e as aplicações práticas desse modelo, fica claro que ele não apenas enriquece a compreensão da dinâmica do universo sob condições não convencionais, mas também abre novas possibilidades para explorar fenômenos como singularidades e períodos onde a curvatura tinha um papel preponderante na evolução do universo.

No entanto, a teoria clássica de Kantowski-Sachs, para o caso da poeira, estudada aqui é caracterizada por uma contração final, porém, observações atuais indicam que o universo está em expansão acelerada; esse comportamento também pode ser representado em uma variante do modelo de Kantowski-Sachs que considera a expansão acelerada, em vez de uma fase de expansão seguida por contração [54]. A revisão também aponta para a necessidade de estudos adicionais e a comparação com os dados observacionais. A compreensão plena da métrica de Kantowski-Sachs ainda requer investigações mais detalhadas em contextos onde a relatividade geral se aproxima de seus limites. Em suma, a métrica de Kantowski-Sachs representa uma peça importante no mosaico da cosmologia moderna, e seu estudo contínuo promete oferecer novas perspectivas e avanços significativos no campo.

## Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer aos árbitros anônimos por seus comentários positivos e úteis que, com certeza, melhoraram nosso artigo. O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (Fapes) – T.O. 365/2022, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

## Referências

- [1] C.W. Misner, K.S. Thorne e J.A. Wheeler, *Gravitation* (W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973).
- [2] B. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, New York, 2009).
- [3] L. Ryder, *Introduction to General Relativity* (Cambridge University Press, New York, 2009).
- [4] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press, New York, 2005).
- [5] T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe* (Cambridge University Press, New York, 1993).
- [6] S. Dodelson e F. Schmidt, *Modern Cosmology* (Academic Press, San Diego, 2020).
- [7] B. Ryden, *Introduction to Cosmology* (Cambridge University Press, New York, 2017).
- [8] P.K. Aluri, P. Cea, P. Chingangbam, M.C. Chu, R.G. Clowes, D. Hutsemékers, J.P. Kochappan, A.M. Lopez, L. Liu, N.C.M. Martens et al., *Class. Quantum Grav.* **40**, 094001 (2023).
- [9] T. Anton e T. Clifton, *Class. Quantum Grav.* **40**, 145004 (2023).
- [10] L.O. Scardini, *A classificação de Bianchi e a construção de Taub das métricas cosmológicas anisotrópicas*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória (2024).
- [11] C.B. Collins, *J. Math. Phys.* **18**, 2116 (1977).
- [12] R. Kantowski e R.K. Sachs, *J. Math. Phys.* **7**, 443 (1966).
- [13] L. Modesto, *Class. Quantum Grav.* **23**, 5587 (2006).
- [14] R. Casadio, A. Kamenshchik e J. Ovalle, *Phys. Rev. D* **110**, 044001 (2024).
- [15] F. Mercati e D. Sloan, *Phys. Rev. D* **106**, 044015 (2022).
- [16] G.G. Luciano, *Phys. Dark Univ.* **41**, 101237 (2023).
- [17] K.K. Chokyi, S. Chattopadhyay e A.N. Tawfik, *Phys. Scr.* **99**, 111501 (2024).
- [18] U.Y.D. Prasanthi e Y. Aditya, *Phys. Dark Univ.* **31**, 100782 (2021).
- [19] Y. Sobhanbabu e M. Vijaya Santhi, *Eur. Phys. J. C* **81**, 1040 (2021).
- [20] N. Dimakis, M. Roumeliotis, A. Paliathanasis e T. Christodoulakis, *Eur. Phys. J. C* **83**, 794 (2023).
- [21] A.D. Millano, K. Dialektopoulos, N. Dimakis, A. Giacomini, H. Shababi, A. Halder e A. Paliathanasis, *Phys. Rev. D* **109**, 124044 (2024).
- [22] A. Dixit, V.K. Bhardwaj, A. Pradhan e S. Krishnannair, *Indian J. Phys.* **97**, 3695 (2023).
- [23] A. Paliathanasis e G. Leon, *Eur. Phys. J. Plus* **137**, 165 (2022).
- [24] F.G. Alvarenga, R. Fracalossi, R.C. Freitas e S.V.B. Gonçalves, *Braz. J. Phys.* **48**, 370 (2018).
- [25] G.A. Mena Marugán e A. Mínguez-Sánchez, *Phys. Rev. D* **109**, 106009 (2024).
- [26] S. Ghosh, A. Acharya, S. Gangopadhyay e P.K. Pani-grahi, *Phys. Rev. D* **109**, 043524 (2024).
- [27] S.M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (Addison-Wesley, San Francisco, 2004).
- [28] R. d’Inverno e J. Vickers, *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*, (Oxford University Press, New York, 2022).

- [29] R. Bufalo e J.T.S.S. Junior, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **46**, e20240057 (2024).
- [30] A. Krasiński, *Inhomogeneous Cosmological Models* (Cambridge University Press, New York, 2006).
- [31] M. Novello, *Cosmologia* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2010).
- [32] P.D.C. Reis, E.G. Seifert, E.C. Gabrick, R.C.S. Jantsch, K.C. Iarosz, A.M. Batista e J. Trobia, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **44**, e20220196 (2022).
- [33] V.S. Aderaldo e V.P. Gonçalves, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **42**, e20200050 (2020).
- [34] J.A.S. Lima e R.C. Santos, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **40**, e1313 (2018).
- [35] I. Waga, *Cad. Astro.* **3**, 6 (2022).
- [36] J.F.D. Diniz e P.C. Holanda, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **36**, 4312 (2014).
- [37] I. Waga, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **27**, 157 (2005).
- [38] A. Viglioni e D. Soares, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **33**, 4702 (2011).
- [39] G.P. Silva Neto, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **40**, e2318 (2018).
- [40] E. Hubble, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **15**, 168 (1929).
- [41] V.R. Peçanha da Rocha and A.C. Tort, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **41**, e20180281 (2019).
- [42] R.R.R. Reis e B.B. Siffert, *Cad. Astro.* **3**, 21 (2022).
- [43] S. Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press, New York, 2008).
- [44] G. Carvalho Dorsch, *Cad. Astro.* **2**, 34 (2021).
- [45] J. Plebanski e A. Krasiński, *An Introduction to General Relativity and Cosmology* (Cambridge University Press, New York, 2006).
- [46] L. Rezzolla e O. Zanotti, *Relativistic Hydrodynamics* (Oxford University Press, New York, 2013).
- [47] K.S. Thorne, *ApJ* **148**, 51 (1967).
- [48] A. Raychaudhuri, *Phys. Rev.* **98**, 1123 (1955).
- [49] F.L. Carneiro e S.C. Ulhoa, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **43**, e20210122 (2021).
- [50] A. Liddle, *An introduction to modern cosmology* (John Wiley & Sons, Chichester, 2003).
- [51] R. Kantowski, *Gen. Relativ. Gravit.* **30**, 1665 (1998).
- [52] G.F.R. Ellis, C. Uggla e J. Wainwright, in *Dynamical Systems in Cosmology*, editado por J. Wainwright e G.F.R. Ellis (Cambridge University Press, New York, 1997).
- [53] C.R. Fadragas, G. Leon e E.N. Saridakis, *Class. Quantum Grav.* **31**, 075018 (2014).
- [54] B.B. Silva, W. Spalenza e S.V.B. Gonçalves, *Phys. Scr.* **99**, 055306 (2024).