P. A. Valinevich, Mellin–Barnes representation for $SL(2,\mathbb{C})$ magnet, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2020, Volume 494, 125–143

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 494, 2020 г.

П. А. Валиневич

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕЛЛИНА–БАРНСА ДЛЯ $SL(2,\mathbb{C})$-МАГНЕТИКА

§1. Введение

Магнетик с группой симметрии $SL(2,\mathbb{C})$ изучался многими авторами [1–4] как по причине фундаментального интереса, так и в связи с работами Л. Н. Липатова [11] об амплитудах рассеяния в физике высоких энергий. Поскольку данная модель является интегрируемой, к ней может быть применен весь аппарат квантового метода обратной задачи рассеяния [9, 10]. Для нее были построены все основные объекты, которые представляют интерес: Q-оператор Бакстера, универсальная $R-$матрица и др.

В данной работе будут изучаться собственные функции отдельных элементов матрицы монодромии. Один из методов построения таких собственных функций [5] дает для них интегральные представления, которые мы будем называть представлением Гаусса–Гивенталя. Между тем для цепочки Тоды (более простой модели) в работах [6, 7] были получены другие представления для тех же собственных функций в виде интегралов Меллина–Барнса.

В данной работе мы обобщаем результаты [6, 7] на случай $SL(2,\mathbb{C})$-магнетика и доказываем, что они совпадают с ранее построенными функциями [5].

§2. Представления основной унитарной серии и $SL(2,\mathbb{C})$- магнетик

Для группы $SL(2,\mathbb{C})$ существует серия бесконечномерных представлений [8], реализуемых на пространстве функций комплексного переменного z. Для элемента группы

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ключевые слова: интегралы Меллина–Барнса.
Работа была поддержана грантом РФФИ No. 18-01-00271.

действие оператора представления $T(g)$ на функцию $f(z,\bar z)$ дается формулой

$$T(g)f(z,\bar z) = (a-cz)^{-2l}(\bar d-\bar b\bar z)^{-2\bar l} f\left(\frac{-c+az}{d-bz},\ \frac{-\bar c+\bar a\bar z}{\bar d-\bar b\bar z}\right). \quad (1)$$

Оно определяется парой чисел $(l,\bar l)$ и будет унитарным относительно скалярного произведения $(f,g)=\int d^2z\,\overline{f(z)}g(z)$ при условии

$$l=\frac{1+n}{2}+i\nu; \quad \bar l=\frac{1-n}{2}+i\nu; \quad 2n\in\mathbb{Z},\ \nu\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Генераторы соответствующей алгебры Ли $sl_2(\mathbb{C})$ определяются стандартным образом как коэффициенты разложения элемента группы в окрестности единицы. Из (1) они имеют вид

$$S_+ = z^2\partial_z + 2lz; \quad S_3 = z\partial_z + l; \quad S_- = -\partial_z \quad (3)$$

$$\bar S_+ = \bar z^2\partial_{\bar z} + 2\bar l\bar z; \quad \bar S_3 = \bar z\partial_{\bar z} + \bar l; \quad \bar S_- = -\partial_{\bar z} \quad (4)$$

и подчиняются стандартным коммутационным соотношениям

$$[S_+,S_-]=2S_3; \quad [S_3,S_\pm]=\pm S_\pm; \quad [\bar S_+,\bar S_-]=2\bar S_3; \quad [\bar S_3,\bar S_\pm]=\pm\bar S_\pm.$$

Генераторы $S_\pm, S_3$ будем называть голоморфными, $\bar S_\pm, \bar S_3$ – антиголоморфными. Эти наборы генераторов коммутируют и связаны друг с другом с помощью сопряжения: $(S_\pm)^+ = -\bar S_\pm$; $(S_3)^+ = -\bar S_3$.

Рассмотрим спиновую цепочку (магнетик), состоящую из N узлов, с каждым из которых свяжем пространство представления основной унитарной серии $SL(2,\mathbb{C})$. Будем рассматривать случай, когда во всех узлах параметры l и $\bar l$ одинаковы (т.е. будем иметь дело с однородной цепочкой), а граничные условия положим периодическими.

Гильбертовым пространством модели является $L_2(\mathbb{C}^N)$, элементы которого $f(z_1,\dots,z_N,\bar z_1,\dots,\bar z_N)$ в дальнейшем для краткости будем обозначать $f(z)$.

Для каждого узла определим локальные $L-$операторы: голоморфный L и антиголоморфный $\bar L$:

$$L(u)=\begin{pmatrix} u+S_3 & S_- \\ S_+ & u-S_3\end{pmatrix}; \qquad \bar L(\bar u)=\begin{pmatrix} \bar u+\bar S_3 & -\bar S_- \\ \bar S_+ & \bar u-\bar S_3\end{pmatrix}, \quad (5)$$

зависящие от дополнительной переменной – спектрального параметра u.

Матрицы монодромии для голоморфного и антиголоморфного секторов определяются следующим образом:

$$T_N(u) = L_1(u) \dots L_N(u) = \begin{pmatrix} A_N(u) & B_N(u) \\ C_N(u) & D_N(u) \end{pmatrix}; \tag{6}$$

$$\bar{T}_N(\bar{u}) = \bar{L}_1(\bar{u}) \dots \bar{L}_N(\bar{u}) = \begin{pmatrix} \bar{A}_N(\bar{u}) & \bar{B}_N(\bar{u}) \\ \bar{C}_N(\bar{u}) & \bar{D}_N(\bar{u}) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $L_k(u)$ означает L-оператор, принадлежащий k-му узлу. Как видно из сказанного, выражения для голоморфного и антиголоморфного секторов отличаются только заменой S на $\bar{S}$, l на $\bar{l}$, z на $\bar{z}$ и т.п. Поэтому далее в тексте мы будем приводить формулы только для голоморфной части.

Матрицы монодромии задают набор интегралов движения модели. Для нахождения их общих собственных функций существует большое количество приемов в рамках квантового метода обратной задачи рассеяния [9, 10].

В данной же работе нас будут интересовать собственные функции операторов A_N и $\bar{A}_N$:

$$A_N(u)\psi_\lambda(z) = \prod_{k=1}^{N}(u - \lambda_k)\psi_\lambda(z); \quad \bar{A}_N(\bar{u})\psi_\lambda(z) = \prod_{k=1}^{N}(\bar{u} - \bar{\lambda}_k)\psi_\lambda(z), \tag{8}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_N)$ – набор собственных значений функции. Задачи такого типа встречаются, например, в физике высоких энергий при изучении амплитуд рассеяния (см., например, [12]).

Из коммутационных соотношений $A(u)$ и $B(u)$ следует, что

$$B(\lambda_k)\psi_\lambda(z) \sim \psi_{\lambda+e_k}(z),$$

где $\lambda + e_k = (\lambda_1, \dots, \lambda_k + 1, \dots, \lambda_N, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_N)$. Коэффициент пропорциональности может быть выбран произвольно, и его выбор фиксирует нормировку функции $\psi_\lambda(z)$. Мы выберем её следующим образом:

$$B(\lambda_k)\psi_\lambda(z) = (-1)^N(\lambda_k + l)(\lambda_k - l + 1)\psi_{\lambda+e_k}(z). \tag{9}$$

Из (9) с помощью интерполяции получается формула для действия $B(u)$ на $\psi_\lambda(z)$ при произвольном значении спектрального параметра u :

$$B(u)\psi_\lambda(z) = (-1)^N\sum_{k=1}^{N}(\lambda_k + l)(\lambda_k - l + 1)\psi_{\lambda+e_k}(z)\prod_{m\neq k}\frac{u - \lambda_m}{\lambda_k - \lambda_m}. \tag{10}$$

Аналогичные формулы имеют место и для антиголоморфного сектора.

В следующих двух разделах будет приведено два различных метода построения этих собственных функций.

§3. Представление Гаусса–Гивенталя

Представление Гаусса–Гивенталя для собственных функций матричных элементов $T(u)$ описано в работе [5].

Введем более удобные обозначения для локальных L операторов (см. (5)):

$$L_k(u) = \begin{pmatrix} u_1 + 1 + z_k\partial_k & -\partial_k \\ z_k(z_k\partial_k + u_1 - u_2 + 1) & u_2 - z_k\partial_k \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Здесь введены обозначения $u_1 = u + l - 1$, $u_2 = u - l$, где l – спин представления. Спин и спектральный параметр входят в $L-$оператор только в таких комбинациях, поэтому мы будем писать $L = L(u_1, u_2)$.

Матрица монодромии в этих обозначениях записывается как

$$\begin{aligned} T_N(u_1,u_2) &= L_1(u_1,u_2)L_2(u_1,u_2)\dots L_N(u_1,u_2) \\ &= \begin{pmatrix} A(u_1,u_2) & B(u_1,u_2) \\ C(u_1,u_2) & D(u_1,u_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

Для $SL(2,\mathbb{C})-$магнетика существует универсальная $R-$матрица, удовлетворяющая уравнению Янга–Бакстера [13]

$$\mathcal{R}_{12}(u-v)L_1(u_1,u_2)L_2(v_1,v_2) = L_2(v_1,v_2)L_1(u_1,u_2)\mathcal{R}_{12}(u-v), \tag{13}$$

где L – операторы действуют в разных пространствах представления $SL(2,\mathbb{C})$ и в общем вспомогательном пространстве, т. е. перемножаются как матрицы. Оператор $\mathcal{R}(u-v)$ действует в тензорном произведении произвольных представлений и зависит от разностей $u_i - v_j$. Если L_1 действует по переменной z_1, а L_2 – по переменной z_2, то $\mathcal{R}(u-v)$ будет оператором, действующим по переменным z_1, z_2.

Оказывается, его можно искать в виде

$$\mathcal{R}_{12}(u-v) = P_{12}\, R^{(1)}_{12}(u_1-v_1, u_1-u_2)R^{(2)}_{12}(u_1-v_2, u_2-v_2), \tag{14}$$

где P_{12} – оператор перестановки (заменяет z_1 на z_2 и наоборот), а

$$\begin{aligned} &R^{(1)}_{12}(u_1-v_1, u_1-v_2)L_1(u_1,u_2)L_2(v_1,v_2) \\ &= L_1(v_1,u_2)L_2(u_1,v_2)R^{(1)}_{12}(u_1-v_1,u_1-v_2), \end{aligned} \tag{15}$$

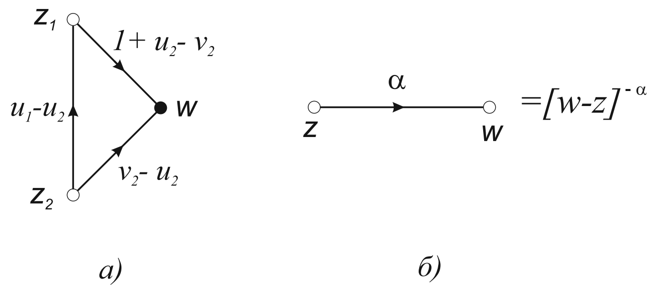


Рис. 1. а) Диаграммное представление оператора $R_{12}^{(2)}$, уравнение (17); б) Обозначение линии на диаграмме.

$$
\begin{aligned}
&R_{12}^{(2)}(u_1 - v_2, u_2 - v_2) L_1(u_1, u_2) L_2(v_1, v_2) \\
&= L_1(u_1, v_2) L_2(v_1, u_2) R_{12}^{(2)}(u_1 - v_2, u_2 - v_2).
\end{aligned} \tag{16}
$$

Для операторов $R^{(1,2)}$ существуют удобные интегральные представления [5, 13], из которых нам понадобится следующее:

$$
\begin{aligned}
&\left[R_{12}^{(2)}(u_1 - v_2, u_2 - v_2)\Phi\right](z_1, z_2) \\
&= \int d^2w \frac{[z_1 - z_2]^{u_2 - u_1}}{[w - z_1]^{1 + u_2 - v_2}[w - z_2]^{v_2 - u_1}} \Phi(w, z_2).
\end{aligned} \tag{17}
$$

Здесь введено сокращенное обозначение, которое будет использоваться повсеместно: $[z]^\alpha = z^\alpha \bar{z}^{\bar{\alpha}}$, где подразумевается, что $\alpha - \bar{\alpha} \in \mathbb{Z}$, чтобы функция $[z]^\alpha$ была однозначной.

Для ядра этого оператора будем использовать графическое представление, приведенное на рис 1а, где линия обозначает функцию, изображенную на рис 1б. Полые кружки обозначают внешние переменные, закрашенные – переменные, по которым ведется интегрирование (на рис 1а это переменная w).

Такое графическое представление удобно тем, что для интегралов, содержащих функции вида $[w - z]^\alpha$ существует целое семейство соотношений [13], которые имеют компактное диаграммное представление. На рис. 2 приведены основные соотношения, которые понадобятся в дальнейших вычислениях. На них в правой части написан множитель, который возникает перед диаграммой. Функция $a(\alpha)$ является

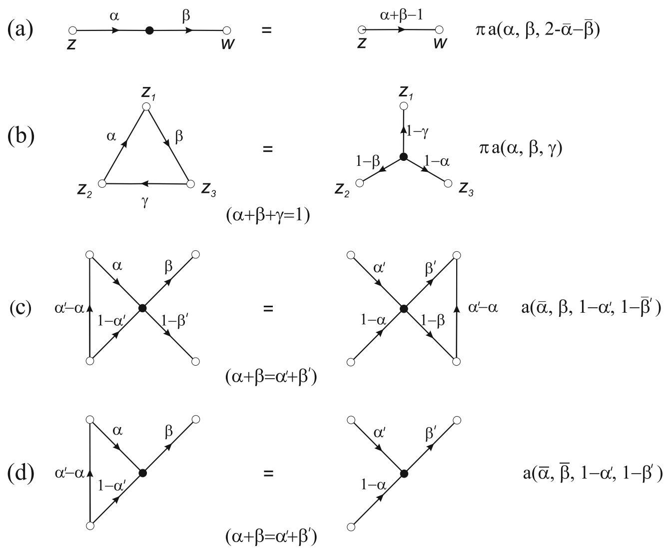


Рис. 2. Правила диаграммной техники.

гамма-функцией на поле комплексных чисел [14, 15]:

$$a(\alpha)=\frac{\Gamma(1-\bar{\alpha})}{\Gamma(\alpha)};\quad a(\bar{\alpha})=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\bar{\alpha}}, \tag{18}$$

где аргументом функции является пара чисел $\alpha, \bar{\alpha}$, удовлетворяющих условию $\alpha-\bar{\alpha}\in\mathbb{Z}$, но для краткости мы будем писать только “голоморфный” аргумент. Кроме того, $a(\alpha,\beta,\gamma,\dots)=a(\alpha)a(\beta)a(\gamma)\dots$.

Вернемся к вопросу построения собственных функций $A(u_1,u_2)=T_{11}(u_1,u_2)$. Для этого нам понадобится матрица монодромии с измененным параметром в первом узле:

$$\begin{aligned} T_N(u_1,u_2|v) &= L_1(u_1,v)L_2(u_1,u_2)\dots L_N(u_1,u_2)\\ &= \begin{pmatrix} A(u_1,u_2) & B(u_1,u_2)\\ * & * \end{pmatrix}. \end{aligned}\tag{19}$$

Второе равенство означает, что при изменении параметра u_2 в первом узле элементы в первой строке матрицы монодромии не меняются. Элементы же во второй строке меняются и они обозначены звездочками, так как нам не понадобятся.

Рассмотрим также оператор

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Lambda}_N(u_1,u_2|v)\\&=R^{(2)}_{12}(u_1-v,u_2-v)R^{(2)}_{23}(u_1-v,u_2-v)\dots R^{(2)}_{N-1,N}(u_1-v,u_2-v).\end{aligned}\tag{20}$$

С помощью (15) можно получить следующее коммутационное соотношение

$$T_N(u_1,u_2|v)\mathbf{\Lambda}_N(u_1,u_2|v)=T_{N-1}(u_1,u_2)L_N(u_1,v)\mathbf{\Lambda}_N(u_1,u_2|v).\tag{21}$$

Его матричные элементы “11” и “12” будут иметь вид

$$\begin{aligned}&A_N(u_1,u_2)\mathbf{\Lambda}_N(u_1,u_2|v)=\mathbf{\Lambda}_N(u_1,u_2|v)(A_{N-1}(u_1,u_2)(u+l+z_N\partial_N)\\&+B_{N-1}(u_1,u_2)z_N(z_N\partial_N+u_1-v+1))\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}&B_N(u_1,u_2)\mathbf{\Lambda}_N(u_1,u_2|v)=\mathbf{\Lambda}_N(u_1,u_2|v)(A_{N-1}(u_1,u_2)(-\partial_N)\\&+B_{N-1}(u_1,u_2)(v-z_N\partial_N)).\end{aligned}\tag{23}$$

Подействуем правой и левой частью (22) на функцию $\tilde\Psi(z_1,\dots,z_N)$ со специальной зависимостью от последней переменной:

$$\tilde\Psi(z_1,\dots,z_N)=\Psi(z_1,\dots,z_{N-1})[z_N]^{v-u_1-1}\tag{24}$$

и получим следующее соотношение

$$\begin{aligned}&A_N(u_1,u_2)\mathbf{\Lambda}_N(u_1,u_2|v)\tilde\Psi(z_1,\dots,z_N)\\&=v\mathbf{\Lambda}_N(u_1,u_2|v)[z_N]^{v-u_1-1}A_{N-1}(u_1,u_2)\Psi(z_1,\dots,z_{N-1}).\end{aligned}\tag{25}$$

Из него видно, что если $\Psi(z_1,\dots,z_{N-1})$ – собственная функция $A_{N-1}(u_1,u_2)$, то $\mathbf{\Lambda}_N(u_1,u_2|v)\ [z_N]^{v-u_1-1}\cdot\ \Psi(z_1,\dots,z_{N-1})$ будет собственной функцией $A_N(u_1,u_2)$.

Если теперь представим v в виде $v=u-\lambda$, то получим, что

$$\begin{aligned}&A_N(u_1,u_2)\Lambda_N(\lambda)\Psi(z_1,\dots,z_{N-1})\\&\quad=(u-\lambda)\Lambda_N(\lambda)A_{N-1}(u_1,u_2)\Psi(z_1,\dots,z_{N-1}),\end{aligned}\tag{26}$$

где

$$\Lambda_N(\lambda)=r(\lambda)\ [z_N]^{v-u_1-1}\mathbf{\Lambda}(u_1,u_2|v)\big|_{v=u-\lambda}.\tag{27}$$

В последней формуле правая часть не зависит от u благодаря специальной зависимости $R^{(2)}$ от своих параметров, см. (20) и (17).

Нормировочный множитель $r(\lambda)$ имеет вид

$$r_k(\lambda_k)=\big(a(l-\lambda_k)a(\bar l+\bar\lambda_k)\big)^k\tag{28}$$

и нужен для того, чтобы было выполнено перестановочное соотношение

$$\Lambda_k(\lambda_k)\Lambda_{k-1}(\lambda_{k-1}) = \Lambda_k(\lambda_{k-1})\Lambda_{k-1}(\lambda_k), \tag{29}$$

которое обеспечивает симметричность функций $\Psi_\lambda(z)$ относительно перестановки параметров λ.

Таким образом, собственная функция $\Psi_{\lambda_1\ldots\lambda_N}(z)$ оператора $A(u)$ имеет вид

$$\Psi_{\lambda_1\ldots\lambda_N}(z) = \Lambda_N(\lambda_N)\Lambda_{N-1}(\lambda_{N-1})\ldots\Lambda_1(\lambda_1). \tag{30}$$

Последний оператор в предыдущей формуле – это просто $[z_1]^{-l-\lambda_1}$. Графическое представление $\Lambda_N(\lambda)$ для $N = 4$ приведено на рис. 3а, а на рис. 3б изображена собственная функция $\Psi_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(z_1, z_2, z_3, z_4)$. На рисунке переменные, по которым производится интегрирование, обозначены закрашенными кружками. Параметры линий $\alpha = 1-l+\lambda$, $\beta = 1 - l - \lambda$, $\gamma = 2l - 1$.

§4. Представление Меллина–Барнса

4.1. Общий вид собственной функции. Рассмотрим теперь другой метод построения собственных функций $A(u)$, который приведет к интегральным представлениям другого типа – представлениям в виде интегралов Меллина–Барнса. Такого типа формулы были получены для цепочки Тоды в работах Харчева и Лебедева [6, 7]. Наши вычисления для $SL(2,\mathbb{C})$ магнетика во многом аналогичны.

Пусть нам известна собственная функция $\phi_\gamma(z')$ для $N-1$ узла. Для кратности мы ввели обозначение для аргумента

$$z' = (z_1, \ldots, z_{N-1}, \bar z_1, \ldots, \bar z_{N-1}),$$

а набор параметров γ

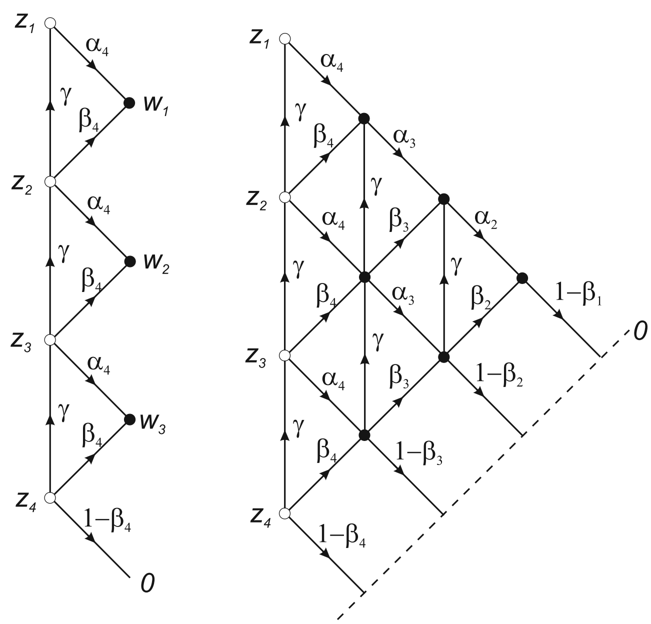
$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{N-1}, \bar\gamma_1, \ldots, \bar\gamma_{N-1}).$$

Эта функция удовлетворяет условиям

$$A_{N-1}(u)\phi_\gamma(z') = \prod_{k=1}^{N-1}(u-\gamma_k)\phi_\gamma(z'); \tag{31}$$

$$B_{N-1}(\gamma_k)\phi_\gamma(z') = (-1)^{N-1}(\gamma_k + l)(\gamma_k - l + 1)\phi_{\gamma+e_k}(z') \tag{32}$$

и аналогичным уравнениям для антиголоморфного сектора (про который в дальнейшем будем упоминать редко, т.к. для него все вычисления практически не отличаются).



а) б)

Рис. 3. а) Ядро оператора $\Lambda_k(\lambda_k)$ для $k=4$; б) Функция $\Psi_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(z)$ $(N=4)$.

Собственную функцию $\psi_\lambda(z)$ для N узлов, удовлетворяющую (8) и (9) будем искать в виде

$$\psi_\lambda(z)=\int D^{N-1}\gamma\,\mu_\gamma\,D_\gamma\,\phi_\gamma(z')\,[z_N]^{t-s-l}. \tag{33}$$

В этой формуле использовано много новых обозначений; определим их.

Мера интегрирования $D^{N-1}\gamma$ понимается следующим образом: если, согласно (2), $\gamma_j=\frac{n_j}{2}+i\nu_j$; $\bar\gamma_j=-\frac{n_j}{2}+i\nu_j$, то

$$D^{N-1}\gamma=D\gamma_1\ldots D\gamma_{N-1},$$

$$D\gamma_j=\sum_{n_j=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\nu_j, \tag{34}$$

и суммирование по n_j ведется либо по всем целым числам (для целого n_j), либо по всем полуцелым (для полуцелого n_j).

Мера интегрирования μ_γ имеет вид

$$\mu_\gamma = \prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N-1} a(\gamma_i - \gamma_j)\, a(\gamma_j - \gamma_i), \tag{35}$$

где функция $a(\gamma)$ дается формулой (18). Из определения (35) легко доказать, что

$$\mu_{\gamma - e_k} = (-1)^{N-2} \prod_{m \neq k} \frac{\gamma_k - \gamma_m - 1}{\gamma_k - \gamma_m} \mu_\gamma. \tag{36}$$

Степенная функция $[z]^\gamma$ в (33) определяется как $z^\gamma \bar{z}^{\bar{\gamma}}$, а s и t обозначают суммы параметров:

$$s = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k; \quad t = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k.$$

И, наконец, в (33) присутствует функция D_γ, которую мы найдем в процессе вычислений. (Она также зависит и от λ, но эту зависимость мы будем указывать только когда это будет необходимо).

4.2. Действие $A(u)$ и $B(u)$ на собственные функции. Из (6) следуют формулы, которые связывают элементы матрицы T_N с элементами T_{N-1} :

$$A_N(u) = A_{N-1}(u)(u + l + z_N \partial_N) + B_{N-1}(u) z_N (z_N \partial_N + 2l); \tag{37}$$

$$B_N(u) = A_{N-1}(u)(-\partial_N) + B_{N-1}(u - l - z_N \partial_N). \tag{38}$$

Подействуем $A(u)$ на (33), пользуясь (31)-(32):

$$\begin{aligned} A(u)\psi_\lambda(z) = \int D^{N-1}\gamma\, \mu_\gamma\, D_\gamma \Big\{ &\prod_{k=1}^{N-1} (u - \gamma_k)(u + t - s)\phi_\gamma(z')\, [z_N]^{t-s-l} \\ &+ (-1)^{N-1}(t - s + l) \sum_{k=1}^{N-1} (\gamma_k + l)(\gamma_k - l + 1) \\ &\times \prod_{m \neq k} \frac{u - \gamma_m}{\gamma_k - \gamma_m} \phi_{\gamma + e_k}(z')[z_N]^{t-s-l+1} \Big\}. \end{aligned}$$

Во каждом слагаемом из второй строки сделаем замену переменной интегрирования $\gamma_k \to \gamma_k - 1$. Тогда весь интеграл превратится в

$$\int D^{N-1}\gamma\, \phi_\gamma(z')[z_N]^{t-s-l} \Big\{ \prod_{k=1}^{N-1} (u-\gamma_k)(u+t-s)\mu_\gamma D_\gamma$$

$$+ (-1)^{N-1}(t-s+l-1) \sum_{k=1}^{N-1} (\gamma_k+l-1)(\gamma_k - l)\mu_{\gamma-e_k} D_{\gamma-e_k}$$

$$\times \prod_{m\neq k} \frac{u-\gamma_m}{\gamma_k - \gamma_m - 1} \Big\}.$$

Мы хотим подобрать D_γ так, чтобы выполнялось (8). Пользуясь свойством меры (36), получаем уравнение на D_γ :

$$\prod_{m=1}^{N} (u-\lambda_m) D_\gamma = \prod_{k=1}^{N-1} (u-\gamma_k)(u+t-s) D_\gamma$$

$$- (t-s+l-1) \sum_{k=1}^{N-1} (\gamma_k+l-1)(\gamma_k-l)$$

$$\times \prod_{m\neq k} \frac{u-\gamma_m}{\gamma_k-\gamma_m} D_{\gamma-e_k}. \tag{39}$$

В правой и левой части этого уравнения стоят полиномы степени N по спектральному параметру u. Коэффициенты при u^N и u^{N-1} у них одинаковы. Следовательно, для того, чтобы они совпадали, они должны давать одинаковые значения в $N-1$ точке. В качестве таких точек выберем $u = \gamma_k$, $k = 1, \ldots, N-1$. Это даст нам более простые уравнения на D_γ :

$$D_{\gamma-e_k} = -\frac{\prod\limits_{m=1}^{N} (\gamma_k - \lambda_m)}{(\gamma_k+l-1)(\gamma_k-1)(t-s+l-1)} D_\gamma. \tag{40}$$

Аналогичные уравнения имеют место при сдвигах антиголоморфных параметров $D_{\gamma-\bar{e}_k}$. Решение всего этого набора уравнений имеет вид

$$D_\gamma = \prod_{m=1}^{N} \prod_{k=1}^{N-1} a(\gamma_k - \lambda_m + 1) \prod_{k=1}^{N-1} \frac{a(l-\gamma_k)}{a(l+\gamma_k)} \cdot \frac{1}{a(t-s+l)}. \tag{41}$$

Теперь докажем, что $\psi_\lambda(z)$ с выбранным таким образом D_γ будет удовлетворять (9). По формуле (38) имеем

$$B_N(\lambda_k)\psi_\lambda(z){=}\int D^{N-1}\gamma\mu_\gamma D_\gamma\Big\{(s{-}t{+}l)\prod_{m=1}^{N-1}(\lambda_k{-}\gamma_m)\phi_{\gamma(z')}[z_N]^{t-s-l-1}$$
$$+(-1)^{N-1}(\lambda_k-t+s)\sum_{n=1}^{N-1}(\gamma_n+l)(\gamma_n-l+1)$$
$$\times\prod_{m\neq n}\frac{\lambda_k-\gamma_m}{\gamma_n-\gamma_m}\phi_{\gamma+e_n}(z')[z_N]^{t-s-l}\Big\}.$$

В каждом слагаемом второй строки сделаем замену переменной $\gamma_n\to\gamma_n-1$. Тогда правая часть превратится в

$$\int D^{N-1}\gamma\,\phi_\gamma(z')[z_N]^{t-s-l-1}\cdot\Big[(s-t+l)\prod_{m=1}^{n-1}(\lambda_k-\gamma_m)\mu_\gamma D_\gamma$$
$$+(-1)^{N-1}(\lambda_k-t+s+1)\sum_{n=1}^{N-1}(\gamma_n+l-1)(\gamma_n-l)$$
$$\times\prod_{m\neq n}\frac{\lambda_k-\gamma_m}{\gamma_n-\gamma_m-1}\mu_{\gamma-e_n}D_{\gamma-e_n}.$$

Согласно (9), это должно быть равно

$$C_\lambda\int D^{N-1}\gamma\,\phi_\gamma(z')[z_N]^{t-s-l-1}\,\mu_\gamma\,D_\gamma(\lambda+e_k),\tag{42}$$

где C_λ – числовой коэффициент. Докажем, что он равен $(-1)^N(\lambda_k+l)(\lambda_k-l+1)$.

Для $D_\gamma(\lambda+e_k)$ из явного вида D_γ имеем

$$D_\gamma(\lambda+e_k)=\frac{\prod_{s=1}^{N-1}(\gamma_s-\lambda_k)}{t-s+l-1}D_\gamma\tag{43}$$

Из предыдущих выражений пользуясь свойством меры (36), а также (43) и (40), получаем следующее соотношение

$$C_\lambda \frac{\prod\limits_{s=1}^{N-1}(\gamma_s-\lambda_k)}{(t-s+l-1)} = (s-t+l)\prod_{m=1}^{N-1}(\lambda_k-\gamma_m)$$
$$+\frac{(\lambda_k-t+s+1)}{(t-s+l-1)}\sum_{n=1}^{N-1}\prod_{s=1}^{N}(\gamma_n-\lambda_s)\prod_{m\neq n}\frac{\lambda_k-\gamma_m}{\gamma_n-\gamma_m}. \tag{44}$$

Отсюда после сокращений получаем, что

$$C_\lambda = (-1)^{N-1}(s-t+l)(t-s+l-1)$$
$$+(-1)^N(\lambda_k-t+s+1)\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{N}(\gamma_n-\lambda_m)}{\prod\limits_{m\neq n}(\gamma_n-\gamma_m)}. \tag{45}$$

Далее воспользуемся формулой

$$\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\prod\limits_{m\neq k}(\gamma_n-\lambda_m)}{\prod\limits_{m\neq n}(\gamma_n-\gamma_m)} = t-s+\lambda_k, \tag{46}$$

которая легко доказывается, если записать левую часть в виде определителя. Тогда (45) превращается в

$$C_\lambda \;=\; (-1)^{N-1}\left\{(s-t+l)(t-s+l-1)-(t-s+\lambda_k)(\lambda_k-t+s+1)\right\}.$$

и после некоторых алгебраических преобразований получаем

$$C_\lambda = (-1)^N(\lambda_k+l)(\lambda_k-l+1),$$

что соответствует (9).

Таким образом, функция (33) с D_γ определяемой (41) удовлетворяет (8) и (9).

§5. Эквивалентность двух представлений

Докажем теперь, что два разных представления для собственных функций $A(u)$ ($\Psi_\lambda(z)$ – представление Гаусса–Гивенталя (30), и $\psi_\lambda(z)$ – представление Меллина–Барнса (33)) совпадают.

Однако у этих функций разные нормировки; найдем множитель, который бы обеспечивал выполнение условия (9) для функции в представлении Гаусса-Гивенталя.

5.1. Нормировка. Как было доказано в [5], функции Ψ_λ нормированы условием

$$\int Dz\, \Psi_\lambda(z)\, \overline{\Psi_{\lambda'}(z)} = \mu_\lambda^{-1}\delta(\lambda-\lambda'), \tag{47}$$

где интегрирование ведется по всем переменным $z : Dz \equiv d^2z_1 \ldots d^2z_N$, а функция μ_λ в правой части дается формулой (35). Формула (47) следует из локальных перестановочных соотношений для операторов Λ

$$\Lambda_k^\dagger(\lambda'_k)\Lambda_k(\lambda_k) = \frac{\pi^2}{(\lambda_k-\lambda'_k)(\bar\lambda_k-\bar\lambda'_k)}\Lambda_{k-1}(\lambda'_k)\Lambda_{k-1}^\dagger(\lambda_k). \tag{48}$$

Найдем множитель, который бы обеспечивал $\Psi_\lambda(z)$ такую же нормировку (9), как и у функций $\psi_\lambda(z)$ в представлении Меллина-Барнса.

Для этого воспользуемся рекуррентной формулой (38)

$$B_k(u)\Lambda_k(\lambda_k) = \Lambda_k(\lambda_k)\left[B_{k-1}(u-\lambda_k-z_k\partial_k) - A_{N-1}(u)\partial_N\right]. \tag{49}$$

Применим правую и левую часть к $\Psi_{N-1}(z)$ и воспользуемся формулой

$$\Psi_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1},\lambda_N)}(z) = \Lambda_N(\lambda_N)\,\Psi_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1})}(z') \tag{50}$$

которая напрямую следует из (30). Тогда при $u=\lambda_1$ второе слагаемое исчезает, и мы приходим к

$$B_N(\lambda_1)\Psi_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)}(z) = (\lambda_1+l)B_{N-1}(\lambda_1)\Psi_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1})}(z'). \tag{51}$$

Применяя такое же разложение к $B_{N-1}(\lambda_1)$ в конечном счете придем к $B_1(\lambda_1)\Lambda_1(\lambda_1)$. Последнее легко вычисляется и равно $(\lambda_1+l)\Lambda_1(\lambda_1+1)$. Таким образом,

$$B_N(\lambda_1)\Psi_\lambda(z) = (\lambda_1+l)^N\Psi_{\lambda+e_1}(z)$$

В силу симметрии функции $\Psi_\lambda(z)$ по параметрам λ_k, такие же формулы можно написать для $u=\lambda_k$, т. е.

$$B_N(\lambda_k)\Psi_\lambda(z) = (\lambda_k+l)^N\Psi_{\lambda+e_k}(z), \qquad k=1,\ldots,N. \tag{52}$$

Зная это, можно подобрать такой множитель C_λ, чтобы $C_\lambda\Psi_\lambda(z)$ удовлетворяло (9). Тогда утверждение, которое мы доказываем будет иметь вид $\psi_\lambda(z) = C_\lambda \Psi_\lambda(z)$. Подставляя сюда явный вид C_λ, имеем

$$\psi_\lambda(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{a(\lambda_k - l + 1)}{[a(\lambda_k + l)]^{N-1}} \Psi_\lambda(z). \tag{53}$$

Идея доказательства (53) изложена в следующем параграфе.

5.2. Идея доказательства. Предположим, что система функций $\Psi_\lambda(z)$ в представлении Гаусса-Гивенталя является полной. Тогда функцию $\Psi_\lambda^{(N)}(z)$ для цепочки из N узлов можно разложить по полному набору функций $\Psi_\gamma^{(N-1)}(z')\Psi_\xi^{(1)}(z_N)$, где функции в одном узле $\Psi_1(z_N) = [z_N]^{-\xi-l}$. Условие однородности функций Ψ приводит к тому, что параметр ξ должен быть равен $s - t$. Таким образом, разложение будет иметь вид

$$\Psi_\lambda^{(N)}(z) = \int D\gamma\, \mu_\gamma\, \tilde{D}_\gamma(\lambda) \Psi_\gamma^{(N-1)}(z')[z_N]^{t-s-l}. \tag{54}$$

Здесь для удобства мы явно выделили меру μ_γ, чтобы сделать формулу (54) похожей на (33). Умножим правую и левую часть (54) на $\overline{\Psi^{(N-1)}}_{\lambda'}(z')$ и проинтегрируем по z'. Тогда, пользуясь ортогональностью (47) получим

$$\tilde{D}_\gamma(\lambda) = [z_N]^{s-t+l} \int Dz'\, \Psi_\lambda^{(N)}(z) \overline{\Psi_\gamma^{(N-1)}(z')}. \tag{55}$$

Пусть (53) верно для $N-1$. Тогда оно будет верно для N, если будет доказано, что

$$\tilde{D}_\gamma(\lambda) = D_\gamma(\lambda) \prod_{m=1}^{N-1} \frac{a(l-\gamma_m)}{[a(1-l-\gamma_m)]^{N-2}} \prod_{k=1}^{N} \frac{a(\lambda_k - l + 1)}{[a(\lambda_k + l)]^{N-1}}, \tag{56}$$

где $D_\gamma(\lambda)$ – коэффициенты, возникающие в (33), для которых было получено выражение (41). Для этого нужно вычислить скалярное произведение в правой части (55).

5.3. Вычисление скалярного произведения. Первым шагом к вычислению скалярного произведения является упрощение вида функции $\Psi_\lambda^{(N)}(z)$. Это удобно делать на языке диаграмм, используя представление 3б. С помощью многократного применения правил (c) и (d) преобразования диаграмм с рис. 2 к вертикальным линиям рис. 3б, диаграмма для функции $\Psi_\lambda^{(N)}(z)$ станет такой как на рис. 4. В результате такого преобразования возникнет множитель.

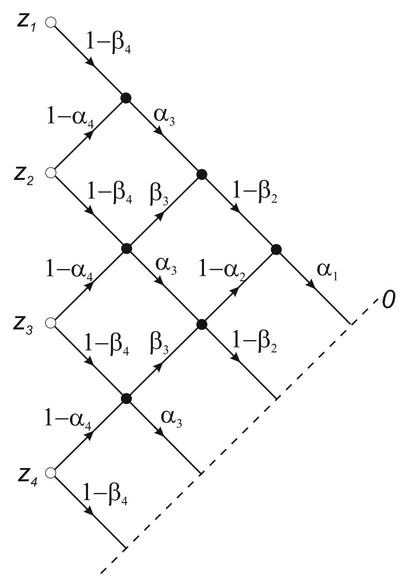


Рис. 4. Преобразованная диаграмма собственной функции ($N = 4$).

Поскольку γ_k, λ_k имеют вид

$$\gamma_k = \frac{1}{2}n_k + i\nu_k; \quad \bar{\gamma}_k = -\frac{1}{2}n_k + i\nu_k; \qquad n \in \mathbb{Z},\ \nu \in \mathbb{R}.$$

а $l, \bar{l}$ даются формулой (2), то при сопряжении степени меняются следующим образом: $\alpha_i \to 1 - \alpha_i,\ \beta_i \to 1 - \beta_i$.

Скалярное произведение $\int Dz'\, \Psi_\lambda^{(N)}(z)\overline{\Psi_\gamma^{(N-1)}(z')}$ тогда изобразится в виде диаграммы на рис 5. На ней штрихованные переменные соответствуют параметрам $\gamma : \alpha'_k = 1-l+\gamma_k,\ \beta'_k = 1-l-\gamma_k$. Единственной внешней переменной будет z_N.

Она вычисляется с помощью преобразования (c) с рис. 2 и правила интегрирования цепочки (a). Сначала (a) применяется к двум верхним линиям, затем образовавшаяся линия переносится в низ диаграммы многократным использованием (c). В результате сверху образуется две цепочки, к которым снова применяется (a) и т. д. Результатом вычисления такой диаграммы, с учетом множителей r_k в определении

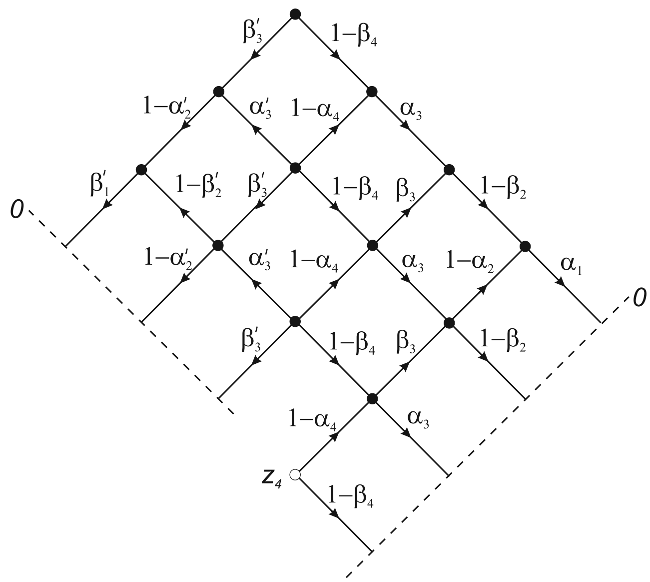


Рис. 5. Скалярное произведение $\int Dz'\, \Psi_\lambda^{(N)}(z)\overline{\Psi_\gamma^{(N-1)}(z')}$ для $N=4$.

оператора $\Lambda_k(\lambda_k)$, будет

$$\tilde{D}_\gamma(\lambda) = \prod_{k=1}^{N} a(\alpha_k)[a(1-\beta_k)]^{N-1} \prod_{m=1}^{N-1} [a(\beta'_m)]^{N-1} \tag{57}$$

Подставляя только что полученное выражение и (41) в (56) нетрудно убедиться, что оно выполняется. Следовательно, функция $\Psi_\lambda(z)$ в представлении Гаусса-Гивенталя и функция $\psi_\lambda(z)$ совпадают с точностью до нормировочного множителя, который дается формулой (53).

Благодарности. Автор благодарен С. Э. Деркачеву за ценные советы и обсуждения.

Список литературы

1. S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, A. N. Manashov, *Noncompact Heisenberg spin magnets from high-energy QCD: 1. Baxter Q operator and separation of variables.* — Nucl. Phys. **B 617** (2001), 375.
2. S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, J. Kotanski, A. N. Manashov, *Noncompact Heisenberg spin magnets from high-energy QCD. 2. Quantization conditions and energy spectrum.* — Nucl. Phys. **B 645** (2002) 237.
3. A. G. Bytsko, J. Teschner, *Quantization of models with non-compact quantum group symmetry: Modular XXZ magnet and lattice sinh-Gordon model.* — J. Phys. **A 39** (2006) 12927.
4. H. J. De Vega, L. N. Lipatov, *Interaction of reggeized gluons in the Baxter-Sklyanin representation*, Phys. Rev. **D 64** (2001) 114019.
5. S. E. Derkachov, A. N. Manashov, *Iterative construction of eigenfunctions of the monodromy matrix for $SL(2,\mathbb{C})$ magnet.* — J. Phys. **A47** (2014) 305204.
6. S. Kharchev, D. Lebedev, *Integral representation for the eigenfunctions of quantum open and periodic Toda chainf from QISM formalism.* — J. Phys. **A34** (2001), 2247–2258.
7. S. Kharchev, D. Lebedev, *Eigenfunctions of $GL(N,\mathbb{R})$ Toda chain: The Mellin-Barnes representation.* — JETP Lett. **71** (2000), 235–238.
8. I. M. Gel'fand, M. A. Naimark, *Unitary reprsentations of classical group.* — Trudy Mat. Inst. Steklov, Acad. Sci. USSR, Moscow–Leningrad **36** (1950), 3–288.
9. L. D. Faddeev, *How algebraic Bethe ansatz works for integable model.* — Quantum symmetries/Symmetries Quantiques, Proc. Les-Houches symmer school, LXIV, Eds. A. Connes, K. Kawedzki, J. Zinn-Justin. North Holland, 1998, 149–211.
10. E. K. Sklyanin, *Quantum Inverse Scattering Method.Selected Topics*, in "Quantum Group and Quantum Integrable Systems" (Nankai Lectures in Mathematical Physics), ed. Mo-Lin Ge,Singapore:World Scientific, 1992, pp. 63–97; hep-th/9211111.
11. L. N. Lipatov, *Small x physics in perturbative QCD.* — Phys. Rept. **286** (1997), 131.
12. L. N. Lipatov, *Integrability of scattering amplitudes in N=4 SUSY.* — J. Phys. **A 42** (2009), 304020.
13. S. E. Derkachov, A. N. Manashov, *Factorization of R-matrix and Baxter Q-operators for generic $sl(N)$ spin chains.* — J. Phys. **A42**, 075204, 2009; arXiv:0809.2050.
14. Y. A. Neretin, *Barnes–Ismagilov Integrals and Hypergeometric Functions of the Complex Field.* — SIGMA **16** (2020), 072.
15. I. M. Gel'fand, M. I. Graev, V. S. Retakh, *Hypergeometric functions over an arbitrary field.* — Russian Math. Surveys **59** (2004), 831–905.

Valinevich P. A. Mellin–Barnes representation for $SL(2,\mathbb{C})$ magnet.

We consider $SL(2,\mathbb{C})$ spin magnet and construct eigenfunctions for the element $A(u)$ of the monodromy matrix. We use recursive procedure which gives representations of these functions in the form of Mellin-Barnes type integrals. We compare these functions to those constructed earlier by S. Derkachov and A. Manashov (Gauss–Givental representation) and prove that they coincide up to normalization factor.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: valinevich@pdmi.ras.ru

Поступило 15 октября 2020 г.