Domain wall solitons and Hopf algebraic translational symmetries in noncommutative field theories

京都大学基礎物理学研究所　笹井　裕也
E-mail: sasai@yukawa.kyoto-u.ac.jp

近年、非可換時空上の場の理論におけるHopf代数的対称性に関する研究が注目を浴びている。これまでの研究によって明らかになったことを以下に述べる。事の始まりはChaichianらによって発見された、Moyal plane $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$ 上の非可換時空上の場の理論のtwisted Poincaré不変性である[1]。この対称性の代数はLorentz生成子に関して拡張されたLeibnitz則を持っており、Hopf代数的な対称性の一例になっている。しかし最近の研究で、この対称性が量子場の理論でも存在するためには、braidと呼ばれる非自明な統計性を理論に導入しなければならないことがわかった[2]。この事実はMoyal planeだけに限らず、一般にHopf代数的対称性を持つ理論であれば、必要であることを以前の研究で明らかにした[3]。

今回の我々の研究は、Hopf代数的対称性の物理的な側面を理解するため、Hopf代数的対称性の破れについて議論した[4]。取り扱った理論は座標の交換関係が $[x^i, x^j] = 2i\kappa\epsilon^{ijk}x_k$ $(i, j, k = 0, 1, 2)$ で与えられる3次元の非可換時空上の ϕ^4 理論である。この理論は運動量空間が $SL(2, R)$ で与えられる群空間であり、運動量空間が曲がっているため、並進対称性がHopf代数的に拡張されている。我々はこの理論のドメインウォール解を構成することにより、この並進対称性の破れを議論した。通常の可換な理論の場合、ドメインウォール解はそのドメインウォールの位置に相当する1個のパラメータ（モジュライパラメータ）を持っており、そのパラメータの生成子は並進の生成子 P で与えられる。我々は具体的に非可換時空上の場の理論におけるドメインウォール解を構成し、このモジュライパラメータの生成子 θ が

$$\theta \equiv \frac{1}{\kappa}\sinh^{-1}(\kappa P)$$

で与えられることを発見した。但し、θ のcoproductは $\Delta\theta = \theta \otimes 1 + 1 \otimes \theta$ で与えられる[1]。実際、$\kappa \to 0$ 極限で P に一致することが確かめられる。また、一般にどんなHopf代数的並進対称性を持つ理論でも、ドメインウォール解のモジュライパラメータの生成子 $\theta(P)$ は次の微分方程式を解くことにより得られることがわかった。

$$\frac{d\theta(P)}{dP} = \lim_{P_\epsilon \to 0} \frac{P_\epsilon}{P_\epsilon \oplus P - P}$$

但し、$\oplus$ はその理論のHopf代数により指定される運動量の和である。また初期条件は $\theta(0) = 0$ である。

次に、ドメインウォール上を走るモジュライ場について考えた。通常の可換な理論の場合、モジュライ場は質量0である。今回の我々の非可換時空上の場の理論においても、モジュライ場はbraidを考慮することで質量が0であることがわかった。

References

[1] M. Chaichian, P. P. Kulish, K. Nishijima and A. Tureanu, Phys. Lett. B **604**, 98 (2004).

[2] A. P. Balachandran, T. R. Govindarajan, G. Mangano, A. Pinzul, B. A. Qureshi and S. Vaidya, Phys. Rev. D **75**, 045009 (2007).

[3] Y. Sasai and N. Sasakura, Prog. Theor. Phys. **118**, 785 (2007).

[4] Y. Sasai and N. Sasakura, Phys. Rev. D **77**, 045033 (2008).