物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

多能级系统中的动力学解耦

张治达　易康源　陈远珍　燕飞

Dynamic decoupling for multi-level systems

Zhang Zhi-Da　Yi Kang-Yuan　Chen Yuan-Zhen　Yan Fei

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 72, 100305 (2023)　DOI: 10.7498/aps.72.20222398

在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.72.20222398

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

多能级系统中的动力学解耦

张治达[1)2)3)4)#] 易康源[1)2)3)4)#] 陈远珍[1)2)3)4)†] 燕飞[1)2)3)‡]

1) (南方科技大学, 深圳量子科学与工程研究院, 深圳 518055)

2) (国际量子研究院, 深圳 518055)

3) (南方科技大学, 广东省量子科学与工程重点实验室, 深圳 518055)

4) (南方科技大学物理系, 深圳 518055)

(2022 年 12 月 16 日收到; 2023 年 3 月 2 日收到修改稿)

动力学解耦技术能有效地抑制由低频环境噪声导致的退相干过程, 因此在量子信息领域获得了广泛的应用. 传统的动力学解耦方案通过对简单的二能级体系, 如量子比特, 施加特定的 π 脉冲序列来实现解耦效果. 随着量子计算研发的深入, 对于像超导量子比特这种天然的多能级系统, 研究者不再局限于二能级子空间, 而是提出和实现了一系列基于多能级体系的量子调控手段和量子算法. 目前对于如何抑制这些体系中的退相干尚缺乏深入研究. 本文利用较易在实验中实现的紧邻能级间的 π 脉冲, 构建了多种针对多能级系统的动力学解耦序列. 结果表明这些序列可以很好地消除准静态噪声的影响. 此外, 通过计算滤波函数, 还分析了这些序列及其拓展方案对于高斯噪声的抑制作用, 并结合控制函数对滤波效果给出了物理解释. 研究结果对于多能级体系中的相关噪声研究, 包括噪声功率谱密度和关联性的刻画以及退相干的抑制等, 均具有启发意义.

关键词: 多能级系统, 噪声, 退相干, 动力学解耦, 滤波函数

PACS: 03.67.Lx, 03.67.Pp, 85.25.–j **DOI:** 10.7498/aps.72.20222398

1 引 言

量子计算使用量子叠加和量子纠缠等资源进行计算, 有望提供经典计算难以企及的算力, 解决社会生活中一些难以求解的问题. 对于任何量子系统, 由环境噪声造成的退相干过程都是不可避免的, 它使得量子态中存储的信息会逐渐流失到环境中去, 从而导致体系量子性的消失. 信息流失越多, 错误发生的概率也越大, 因此有效执行量子算法 (包括纠错算法) 所需的容错阈值将确定算法执行时间的上限. 过快的退相干是实现通用量子计算的瓶颈之一, 因此如何抑制系统的退相干是量子计算发展过程中非常重要的问题. 在各种形式的环境噪声中, 低频噪声的主要影响体现在对量子比特频率产生扰动, 从而导致比特的相位退相干现象, 物理上可以用相位相干时间 T_2 表征这种影响[1]. 由于低频噪声的特征时间远大于相位退相干时间, 所以其对比特频率的扰动具有准静态特性. 对于这样的准静态噪声, 动力学解耦是一类行之有效的抑制其影响的技术[2–4]. 其中最常见的是 Hahn[2] 提出的自旋回波 (spin echo) 方法, 以及在此基础上由 Carr, Purcell[5] 和 Meiboom, Gill 等[6] 拓展得到的, 可以修正更高阶噪声的 CPMG 方法. 通过对动力学解耦序列进行嵌套得到的所谓级联动力学解耦 (concatenated dynamical decoupling, CDD) 方法, 理论上可以修正任意阶数的噪声, 但代价是消耗的资源指数上升[7–9]. 为了克服这一问题, Uhrig[10–13]

同等贡献作者.

† 通信作者. E-mail: chenyz@sustech.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: yanf7@sustech.edu.cn

提出了新的动力学解耦 (Uhrig's dynamical decoupling, UDD) 方法, 只用n个脉冲即可实现对噪声的第n阶修正.

实验方面, Bylander 等[14] 首先在超导量子线路上用动力学解耦提升了比特的相干时间, 并完成了对噪声的频谱分析, 后来他们又在实验上实现了针对连续参数驱动过程的旋转回波 (rotary echo) 方法[15]. 此后动力学解耦方法被广泛应用于超导量子计算和量子模拟的相关实验, 包括在不同比特的能级之间的动力学解耦也已经实现[16]. 值得一提的是, 最近 Google 在量子纠错方向上的突破性工作[17] 中也使用了 CPMG 动力学解耦方案.

除了利用动力学解耦延长比特寿命, 节省量子计算所需的时间, 如何通过更加有效地利用硬件资源来提高算力也是非常关键的问题. 对于像超导量子比特这类天然就是多能级体系的情形, 一个自然的想法是将其高能级也利用起来进行量子信息编码, 从而获得比只使用二能级情形更大的可用计算空间[18–20]. 尤其是作为当前主流超导量子比特类型之一的 transmon 比特, 它是一个弱非谐系统, 因此作为二能级比特使用时, 本来也需要考虑如何抑制高能级的影响, 例如从计算空间向高能级的泄露等. 所以, 如果能够在其上实现更好的多能级操控, 则不但可以扩展计算空间的维度, 提升硬件资源的使用效率[21–24], 由此发展的技术也可以帮助优化现有的基于二能级的操控方案.

近年来研究者沿着这一思路取得了一系列实验进展. 例如, 通过利用高能级来替代辅助比特, 大幅减少门线路所需的比特数量, 研究人员实现了三能级量子与门[25]. 此外, 三能级控制相位门具有更高的效率和更好的可扩展性[26]; 基于三能级体系的量子模拟则可以展示更多的演化模式和预测更多的物理性质[27]. 在量子精密测量[28] 和量子通讯[29] 等领域, 多能级体系也存在一定的优势.

当然, 使用更多的能级进行量子信息处理, 也意味着需要面对更为复杂的退相干过程和更高的错误率, 因此多能级体系中退相干的抑制是一个更具有挑战性的难题. 相较于针对二能级体系丰富的动力学解耦方案, 目前还较少有面向多能级系统的相关技术. 现有的一些理论研究都存在局限性, 例如最近提出的通用连续动力学解耦方案 (general continuous dynamical decoupling, GCDD)[30], 它使用连续波形, 原则上可以实现具有动力学解耦效果的任意能级的门操作, 但是该方法的实验实现具有很大难度. 另外, 将 UDD 应用于N能级体系的方案[31] 只能保护特定的量子态, 且同样具有较高的实验难度.

本文提出了一种针对N能级体系中量子操作的动力学解耦方案. 这个方案只需要使用相邻能级间的π脉冲. 首先考虑了准静态噪声, 求得具有噪声解耦性质的脉冲序列结构; 然后研究这些序列对于更普遍的高斯噪声的作用, 通过计算得到了高斯噪声情形中不同序列对应的滤波函数, 并对滤波函数做出了物理解释; 最后研究了这些序列的可扩展性.

2 多能级体系动力学解耦序列的构造

2.1 多能级解耦序列结构

考虑一个N能级体系, 其能级间距受到准静态噪声影响而存在涨落. 在远小于准静态噪声的特征时间的时间尺度上, 可以近似认为体系的能级间距的变化是一些定值, 因此其哈密顿量可以写成如下形式:

$$H=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \delta_1 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \delta_{N-1} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中δ_i代表第i个激发态和基态之间能量差的准静态涨落值. 这种准静态噪声会造成体系在演化时, 各能量本征态积累不同但均正比于时间的额外相位. 因此, 为了消除其影响, 可以基于 spin echo 方法的原理来构造脉冲序列. 一种可行的方法是只使用紧邻能级之间的π脉冲来构造序列. 对于一个N能级体系, 存在$N-1$个这样的π脉冲: $\pi_{01},\pi_{12},\ldots,\pi_{(N-1)N}$.

考虑如下的序列:

$$\left(\xrightarrow{\tau_1}\Omega_1\xrightarrow{\tau_2}\Omega_2\cdots\xrightarrow{\tau_{N-1}}\Omega_{N-1}\xrightarrow{\tau_N}\right)^N, \tag{2}$$

其中Ω_i代表从$\pi_{01},\pi_{12},\cdots,\pi_{(N-1)N}$中随机但不重复选取的脉冲, τ_i代表相邻脉冲之间的自由演化时间, 指数N代表将括号内序列重复N次. 因此, 整个演化过程可以表示为

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}H\tau_N}\Omega_{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}H\tau_{N-1}}\cdots\Omega_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}H\tau_2}\Omega_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}H\tau_1}\right)^N=\mathrm{e}^{\mathrm{i}C}. \tag{3}$$

假定自由演化部分的时间远大于π脉冲的持续时间, 则在上述演化后, 各能量本征态积累的由准静态噪声引起的额外相位将彼此相等, 相当于体系演化的波函数多了一个整体相位, 从而等效消除了准

静态噪声的影响. 以三能级为例, 按照 (3) 式只需要将 π_{01},π_{12} 两个脉冲重复 3 次即可, 实际的动力学解耦序列结构可以用图 1(a) 表示, 为了方便展示, 这里令 $\tau_3=0$. 图 1(b) 为在这个序列下不同初始态的演化过程, 可以看到每个态在不同能级上停留的时间都相同, 所以由准静态噪声积累的额外相位都相等.

另外在实际实验中像 π_{01} 和 π_{12} 这两个涉及到同一个能级的脉冲是不能同时施加的. 但可以选择以下组合方式:

$$\left[\xrightarrow{\tau_1}\left(\pi_{01}\pi_{23}\cdots\pi_{(N-2)(N-1)}\right)\xrightarrow{\tau_2}\left(\pi_{12}\pi_{34}\cdots\pi_{(N-1)N}\right)\xrightarrow{\tau_3}\right]^N,\ N\text{为偶数}. \tag{4}$$

在这种组合方式下括号内的脉冲可以同时施加, 这将大大缩短序列的长度.

2.2 高斯噪声和滤波函数

2.1 节讨论了准静态噪声的情形, 但实际环境中存在的噪声一般都会包含非准静态的成分, 所以此时 (1) 式中的能级间距应表示为含时形式 $\delta_i(t)$. 假定所考虑的噪声仍可归属于高斯噪声的范畴, 则其导致的相位误差 $\Delta\phi=\int_{t_0}^{t}\delta_i(t')\,\mathrm{d}t'$ 也是满足高斯分布的随机信号, 因此有 $\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\phi}\rangle=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\langle\Delta\phi^2\rangle}$. 所以不同噪声导致的退相干的具体形式, 以及不同动力学解耦序列的效果, 均可通过计算 $\langle\Delta\phi^2\rangle$ 加以确定. 下面首先介绍控制函数的概念, 这是计算 $\langle\Delta\phi^2\rangle$ 的重要辅助工具.

一个 N 能级体系在经历由 (3) 式给出的演化之后, 其第 n 个和第 m 个能级积累的由噪声导致的额外相位的差可以通过下式计算:

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{nm}&=\phi_n-\phi_m\\&=\sum_{i=1}^{N-1}\int_{t_0}^{t_{\mathrm{end}}}\delta_i(t)\,f_i^{nm}(t_{\mathrm{end}}-t_0,t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{5}$$

这里的 $f_i^{nm}(\tau=t_{\mathrm{end}}-t_0,t)$ 即为控制函数. 它是一个分段函数, 通过在不同的自由演化时段中取 1, –1 或 0 等不同的值, 来体现作用于不同能级的噪声对 $\Delta\phi_{nm}$ 的贡献 (图 1). 例如, 考虑 $|n\rangle,|m\rangle$ 两个初态的演化, 它们将在一系列 π 脉冲的翻转作用下遍历所有的能级后再回到自身. 当它们被翻转到 i 能级的时候会受到噪声 $\delta_i(t)$ 的影响, 所以可以在 $|n\rangle$ 受影响的时间区间内取 $f_i^{nm}(\tau,t)=1$, 在 $|m\rangle$ 受影响时取 $f_i^{nm}(\tau,t)=-1$, 其他时候取 $f_i^{nm}(\tau,t)=0$. 图 1 给出了三能级情形的一个实例. 由于一般只需考虑激发态和基态之间的相位差, 所以下文将这种情形的控制函数 f_i^{n0} 简记为 f_i^n, 而将相应的相位差涨落记为 $\langle\Delta\phi_n^2\rangle$, 后者由下面的计算给出:

$$\begin{aligned}\left\langle\Delta\phi_n^2\right\rangle&=\left\langle\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{N}\delta_i(t_1')\,f_i^n(\tau,t_1')\sum_{j=1}^{N}\delta_j(t_2')\,f_j^n(\tau,t_2')\,\mathrm{d}t_1'\mathrm{d}t_2'\right\rangle\\&=\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\langle\delta_i(t_1')\,\delta_j(t_2')\rangle f_i^n(\tau,t_1')\,f_j^n(\tau,t_2')\,\mathrm{d}t_1'\mathrm{d}t_2'\\&=\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}S_{ij}(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}w\left(t_2'-t_1'\right)}f_i^n(\tau,t_1')\,f_j^n(\tau,t_2')\,\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\mathrm{d}t_1'\mathrm{d}t_2'\\&=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}S_{ij}(\omega)\,\widetilde{f_i^n}(\tau,\omega)\,\widetilde{f_j^n}(\tau,\omega)^*\\&=\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}S_i(\omega)\,F_i^n(\tau,\omega)+2\sum_{i<j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}S_{ij}(\omega)\,F_{ij}^n(\tau,\omega),\end{aligned}\tag{6}$$

这里 S,F 分别是噪声 δ_i 或 δ_i,δ_j 之间关联的功率密度函数和滤波函数. 如果两个噪声之间没有关联, 则 $\langle\delta_i(t_1)\,\delta_j(t_2)\rangle=0, S_{ij}(\omega)=0$.

利用 (6) 式可以计算高斯噪声在特定动力学解耦序列下的相位积累, 进而评价该序列对噪声的抑制效果. 另外还可以根据实际噪声的功率谱密度来调整解耦序列的参数, 从而优化其噪声抑制表现.

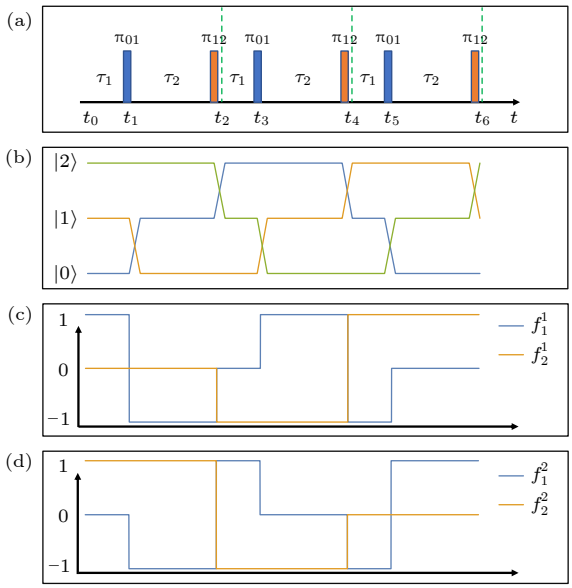

图 1 针对三能级体系的动力学解耦脉冲序列、能级演化及控制函数 (a) 动力学解耦序列, 脉冲施加的时刻分别为 $t_1, t_2, \cdots, t_6$, t_0, t_6 是整个序列开始和结束的时刻; (b) 不同初态在演化过程中的变化, 每个初态都走遍了不同的能级; (c), (d) 分别是 $|0\rangle$, $|1\rangle$之间和 $|0\rangle$, $|2\rangle$之间的控制函数

Fig. 1. Pulse sequence for dynamical decoupling, state evolution and control function in the case of a three-level system: (a) The pulse sequence; π pulses are applied at time $t_1, t_2, \cdots, t_6$, t_0, t_6 are the start and end moments of the whole sequence; (b) evolution of different initial states; each state is sequentially flipped into all other states by the π pulses in the sequence; (c), (d) plot the control functions linking states $|0\rangle$, $|1\rangle$ and $|0\rangle$, $|2\rangle$, respectively.

2.3 三能级动态解耦滤波函数的分析

首先在图 1(a) 所示的三能级动力学序列下可以得到$|0\rangle$, $|1\rangle$之间和$|0\rangle$, $|2\rangle$之间的控制函数, 见图 1(c), (d). 对控制函数 $f(\tau, t)$进行傅里叶分析得到 $\widetilde{f}(\tau, \omega)$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{f_1^1}(\tau, w) &= \frac{1}{\mathrm{i}\omega}(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_3} \\
&\quad + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_4} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_5}), \\
\widetilde{f_2^1}(\tau, w) &= \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_2} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_4} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_6}\right), \\
\widetilde{f_1^2}(\tau, w) &= \frac{1}{\mathrm{i}\omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_1} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_3} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_4} \\
&\quad - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_5} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_6}), \\
\widetilde{f_2^2}(\tau, w) &= \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_4}\right). \qquad (7)
\end{aligned}$$

考虑两种典型的时间间隔选取方式, 一种是令 (3) 式中的 $\tau_1 = \tau_2 = \dfrac{\tau}{6}, \tau_3 = 0$, 即所有的π脉冲之间都是等间隔的. 将 $t_j = j\dfrac{\tau}{6}$代入 (7) 式可以得到 (6) 式中的滤波函数:

$$\begin{aligned}
F_1^1 &= F_1^2(\tau, \omega) = \frac{1}{\omega^2} 64 \cos\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)^2 \sin\left(\frac{\omega\tau}{12}\right)^4, \\
F_2^1 &= F_2^2(\tau, \omega) = \frac{1}{\omega^2} 16 \sin\left(\frac{\omega\tau}{6}\right)^4, \\
F_{12}^1 &= F_{12}^2(\tau, \omega) = \frac{1}{\omega^2}\Bigg[- 128 \cos\left(\frac{\omega\tau}{12}\right)^3 \\
&\quad \times \left(-1 + 2\cos\left(\frac{\omega\tau}{6}\right)\right) \sin\left(\frac{\omega\tau}{12}\right)^4 \\
&\quad \times \left(\cos\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\right)\Bigg]. \qquad (8)
\end{aligned}$$

这里的 F_{ij}^n的虚部为奇函数, 如果关联噪声密度 S_{ij}是实对称函数, 比如线性关联的白噪声或$1/f$噪声, 那么只需要考虑 F_{ij}^n的实部, 这是因为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} S_{ij}(\omega) F_{ij}^n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} S_{ij}(\omega) \,\mathrm{Re}\left[F_{ij}^n\right], \qquad (9)$$

这里关联项实部的符号与自身项的符号相反, 所以在此序列下, 噪声间的正关联会抑制退相干效应, 负关联则会增强退相干效应.

另一种时间间隔选取方式是令 $\tau_1 = \dfrac{\tau}{3}$, $\tau_2 = 0$, $\tau_3 = 0$. 将 $t_1 = t_2 = \dfrac{\tau}{3}, t_3 = t_4 = \dfrac{2\tau}{3}, t_5 = t_6 = \tau$代入 (7) 式得到滤波函数:

$$\begin{aligned}
F_1^1(\omega, \tau) &= \frac{1}{\omega^2} 16 \sin\left(\frac{\omega\tau}{6}\right)^2 \sin\left(\frac{\omega\tau}{3}\right)^2, \\
F_2^1(\omega, \tau) &= F_1^2(\omega, \tau) = F_2^2(\omega, \tau) \\
&= \frac{1}{\omega^2} 16 \sin\left(\frac{\omega\tau}{6}\right)^4. \qquad (10)
\end{aligned}$$

F_{12}^n的形式较为复杂, 没有在 (10) 式中详细写出. 图 2 给出了两种不同的间隔选取方式所对应的滤波函数.

3 滤波函数的物理解释及拓展

3.1 滤波函数的物理解释

如果忽略滤波函数中的$1/\omega^2$衰减项, 则它们都是ωt的周期函数. 通过对比控制函数和序列内噪声周期数量的关系, 可以直观地理解这些函数的周期性. 为了方便理解, 先来看最简单的二能级体系中的 Ramsey 过程, 见图 3. 这个过程的控制函数始终取常数值 1, 其滤波函数则满足 $F\omega^2 = \sin(\omega\tau/2)^2$.

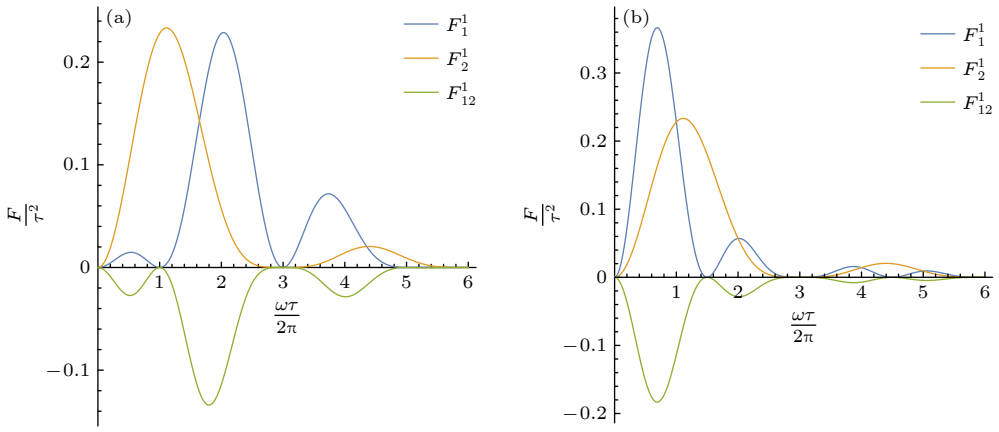

图 2 滤波函数 (a) 所有π脉冲等间隔分布; (b) 一次重复中的两个π脉冲间隔为零

Fig. 2. Filter functions: (a) For equal intervals between consecutive pulses; (b) for zero interval between the two pulses during one repetition.

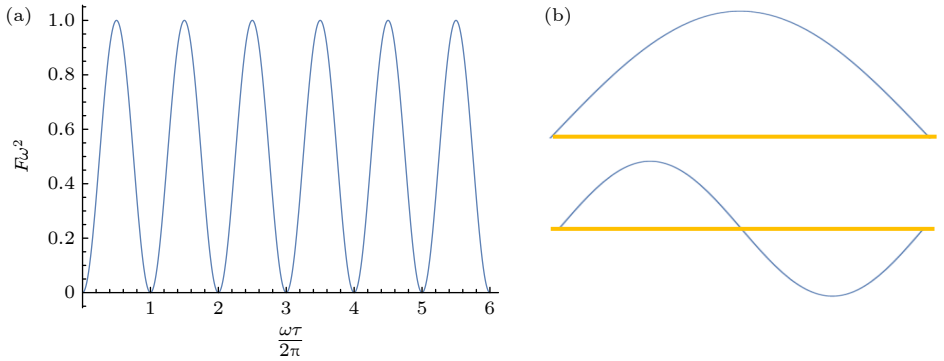

图 3 二能级体系 Ramsey 过程的滤波函数的周期性 (a) 去掉衰减项后的滤波函数; (b) 操作时间内的噪声周期数

Fig. 3. Periodicity of the Ramsey filter function: (a) The filter function without the attenuation term; (b) noise period during operation time.

不难发现, 满足$\omega\tau$为2π的整数倍的噪声频率分量, 其在一个演化周期τ内的累积相位为零, 因此这些频率处的滤波函数达到最小值 0. 相反, 如果$\omega\tau$等于$\pi/2$的奇数倍, 则噪声累积相位为局部最大, 从而滤波函数达到最大值.

对于具有不含时频谱的噪声, 即$\delta(t)=\int C(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$, 相应的相位积累为

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \int_0^\tau \delta(t)\,f(\tau,t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\tau C(\omega)\,f(\tau,t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\,\widetilde{f}(\tau,\omega)^*\mathrm{d}\omega. \end{aligned}\tag{11}$$

而对于频谱随时间变化的噪声, 虽然$\delta(t)$不是一个稳定的函数, 因此不能进行傅里叶展开, 但是噪声的关联函数$\langle\delta(0)\,\delta(\tau')\rangle=\int S(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau'}\mathrm{d}\omega$是一个稳定的函数, 所以依然可以对本文所关注的$\langle\Delta\phi^2\rangle$进行傅里叶展开:

$$\begin{aligned}\langle\Delta\phi^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\tau\int_0^\tau S(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}w\left(t_2'-t_1'\right)} \\ &\quad\times f(\tau,t_1')\,f(\tau,t_2')\,\mathrm{d}t_1'\mathrm{d}t_2'\mathrm{d}\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\left|\widetilde{f}(\tau,\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega. \end{aligned}\tag{12}$$

注意 (12) 式只保留了对应于 (6) 式的自身项, 而忽略了关联项, 因此以下讨论将不包含不同能级感受到的噪声之间关联的贡献. 此外, (12) 式省略了$1/2\pi$系数, 因为可以将之合并到$C(\omega)\,S(\omega)$中. 频谱变化噪声的滤波函数$F(\omega)=|\widetilde{f}(\tau,\omega)|^2$是由$\widetilde{f}(\tau,\omega)$决定的, 通过和 (11) 式对比可以发现, 这就是某一频率的稳定噪声在控制函数下积累的相位:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(\tau,\omega)=\Delta\phi_\omega &= \int_0^\tau f(\tau,t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\tau f(\tau,t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_0^\tau f(\tau,t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t. \end{aligned}\tag{13}$$

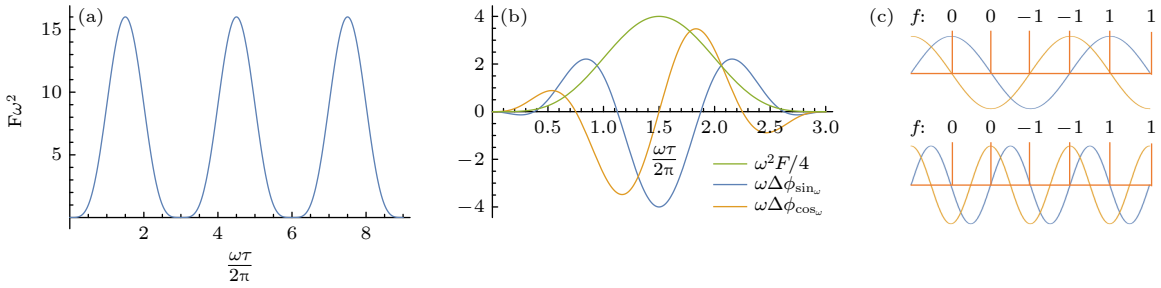

图 4 三能级体系滤波函数的周期性 (a) $F=\frac{1}{\omega^2}16\sin\left(\frac{\omega\tau}{6}\right)^4$ 中的周期部分; (b) $F\omega^2,\omega\Delta\phi_{\sin\omega}$ 和 $\omega\Delta\phi_{\cos\omega}$ 之间的关系 (为了方便比较将 $F\omega^2$ 除以 4); (c) 噪声与控制函数的比较, 上图中噪声周期数为 1.5, sin 类型的噪声积累了最大的相位, cos 类型的噪声与自身完全抵消; 下图中噪声周期数为 3, 两种类型的噪声都与自身完全抵消

Fig. 4. Periodicity of the filter function in the case of a three-level system; (a) Periodic part of $F=\frac{1}{\omega^2}16\sin\left(\frac{\omega\tau}{6}\right)^4$; (b) relation among $F\omega^2,\omega\Delta\phi_{\sin\omega}$ and $\omega\Delta\phi_{\cos\omega}$; (c) comparison between some periods of noise and control function. The number of noise cycles in the upper figure is 1.5. sin-type of noise accumulates a maximum phase, while the cos-type of noise completely cancels out itself. The number of noise cycles in the bottom figure is 3, and both types of noise completely cancel out themselves.

所以滤波函数正比于固定频率噪声在控制方程下积累相位的模平方. 图 4 是三能级滤波函数的例子, 通过对比不同频率噪声的贡献 (图 4(b), (c)) 可以很好地理解滤波函数的周期部分.

3.2 滤波函数的关联项

以上讨论是针对同一能级噪声的滤波函数 F_i, 而用来刻画不同能级间噪声关联贡献的滤波函数 F_{ij} 的解析形式一般非常复杂, 但从三能级体系的例子中可以发现, $|1\rangle,|2\rangle$ 能级间关联滤波函数的实部是负值, 也就是说如果两个噪声之间是正相关的, 那么关联项积累的效果可以对各个能级起到一定的抵消作用. 一个最简单的例子是在频率可调的比特中, 磁通噪声会造成比特频率 ω 的涨落, 但是这种涨落并不会改变三能级体系哈密顿量的形式, 后者将保持 $0,\omega,2\omega-\alpha$ 的形式, 所以此时 $|1\rangle,|2\rangle$ 能级之间的噪声为线性关联 $\delta_2(t)=2\delta_1(t)$, 因此可以将方程 (5) 中的关联项写成:

$$S_{12}(\omega)=\int\langle\delta_1(0)\,\delta_2(\tau)\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$
$$=2\int\langle\delta_1(0)\,\delta_1(\tau)\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=2S_1(\omega). \tag{14}$$

最终积累的相位为

$$\langle\Delta\phi\rangle_n^2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}S_1(\omega)\left[F_1^n(\tau,\omega)+4F_2^n(\tau,\omega)\right.$$
$$\left.+4\mathrm{Re}[F_{12}^n(\tau,\omega)]\right],\ n=1,2. \tag{15}$$

这里总的滤波函数是 $F^n=F_1^n(\tau,\omega)+4F_2^n(\tau,\omega)+4\mathrm{Re}[F_{12}^n(\tau,\omega)]$. 如果假设一二能级的噪声是非同源的, 但是仍具有 $S_2(\omega)=4S_1(\omega)$ 的关系, 则有 $F^{n'}=F_1^n(\tau,\omega)+4F_2^n(\tau,\omega)$

将上述结果代入 (7) 式, 结果如图 5 所示, 其中蓝线为有关联项的滤波函数, 可以看出噪声之间的关联性加强了滤波的效果.

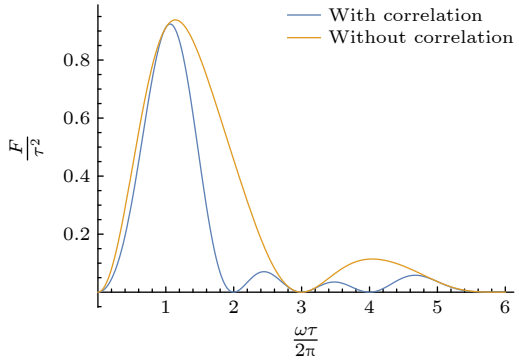

图 5 关联与非关联噪声滤波函数

Fig. 5. Filter function with and without correlation.

另一方面, 电荷噪声 n_g 则会改变哈密顿量的形式, 所以能级之间不再满足上文所述的固定关系, 而且相邻能级的能量随电荷噪声变化的方向相反 [32], 如图 6 所示, 因而此时噪声之间的关联会导致 $\langle\Delta\phi\rangle_n^2$ 增大.

3.3 动力学解耦序列的扩展

对于二能级体系, 可以通过重复或嵌套的方式来拓展简单的动力学解耦序列, 这一思想同样可用于多能级体系的动力学解耦序列. 以下仍以三能级体系为例进行讨论. 如果规定 (2) 式给出的一个完

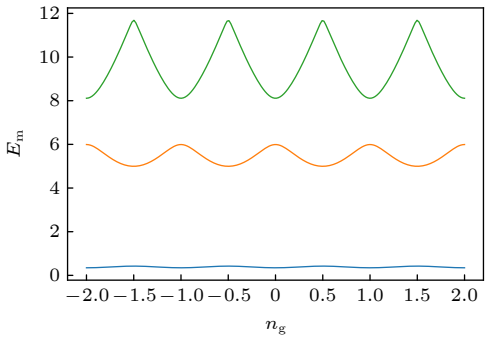

图 6 电荷比特能级与电荷噪声的关系

Fig. 6. Energy levels of a charge qubit as a function of charge noise.

整序列为一个单元, 则后续可以重复施加 m 个不同或相同的单元, 假定其中单个单元的长度为 T_i, 那么序列总长度就是 $T=\sum_{i=1}^{m}T_i$. 最终的控制函数是每部分控制函数的求和:

$$f'(T,t)=\sum_{i=1}^{m}f^i(T_i,t). \tag{16}$$

为简洁起见, 这里没有写出具体涉及的能级的指标, 只是用新的上标 i 代表不同单元. 下面考虑最简单的情形, 即所有单元都包含相同的序列, 因此所有 f^i 也是相同的. 这样可以将控制函数的傅里叶级数写成:

$$f'(T,\omega)=\sum_{n=1}^{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}6(n-1)\omega t}f(\tau,\omega). \tag{17}$$

利用 $F'=|f'|^2$ 得到:

$$F'(T,\omega)=\left|\sum_{n=1}^{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}6(n-1)\omega t}\right|^2F(\tau,\omega)=\begin{cases}\left[-1+2\sum\limits_{n=1}^{2n-1=m}\cos\left[(n-1)\omega\tau\right]\right]^2F(\tau,\omega), & m\text{ 为奇数},\\ 4\left[\sum\limits_{n=1}^{2n=m}\cos\left[\dfrac{2n-1}{2}\omega\tau\right]\right]^2F(\tau,\omega), & m\text{ 为偶数}.\end{cases} \tag{18}$$

代入 (7) 式中的 $F(\tau,\omega)$ 可以得到新的滤波函数:

$$F_1'(T,\omega)=\frac{1}{\omega^2}64\left[\sum_{n=1}^{m}\cos\left[\frac{(2n-1)}{4}\omega\tau)\right]\right]\sin\left(\frac{1}{12}\omega\tau\right)^4,$$

$$F_2'(T,\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega^2}16\left[-1+2\sum\limits_{n=1}^{2n-1=m}\cos\left[(n-1)\omega\tau\right]\right]^2\sin\left(\dfrac{1}{6}\omega\tau\right)^4, & m\text{为奇数},\\ \dfrac{1}{\omega^2}64\left[\sum\limits_{n=1}^{2n=m}\cos\left[\dfrac{2n-1}{2}\omega\tau\right]\right]^2\sin\left(\dfrac{1}{6}\omega\tau\right)^4, & m\text{为偶数}.\end{cases} \tag{19}$$

从图 7 可以看出, 随着 m 的增加, 滤波函数的峰宽在逐渐变窄, 这也代表可以被过滤的频率范围在增加, 而代价是峰值位置的噪声会被加强.

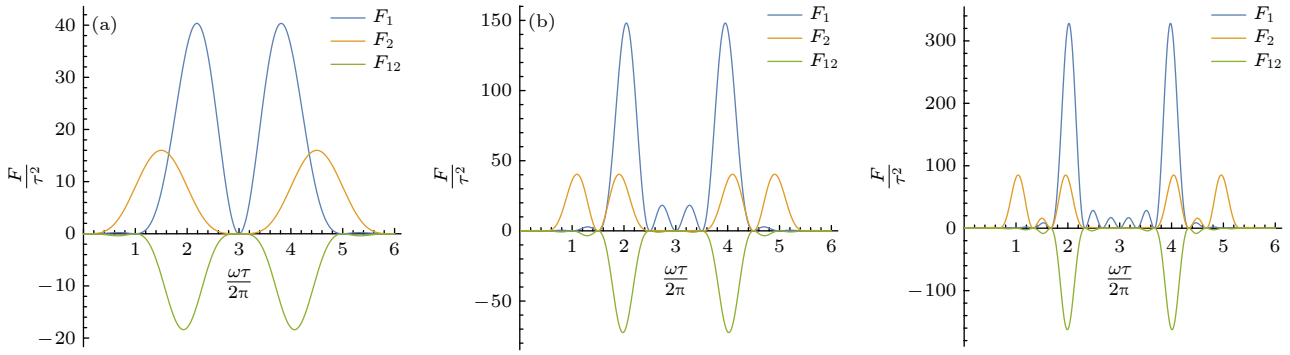

图 7 m 不同时, 重复序列下的滤波函数周期性 (a) $m=1$; (b) $m=2$; (c) $m=3$

Fig. 7. Periodicity of filter functions for repeated sequences with different m: (a) $m=1$; (b) $m=2$; (c) $m=3$.

4 结 论

本文讨论了一个针对多能级体系的动力学解耦方案. 该方案只需要使用紧邻能级的 π 脉冲, 因此具有很好的实验可行性. 通过巧妙地构造由这样的 π 脉冲组成的序列, 可以有效地消除由准静态噪声导致的额外相位积累. 然后进一步分析了这些解耦序列在高斯噪声情形下的滤波函数, 通过滤波函数来反向调整序列结构, 可以实现更加针对性的噪声抑制效果. 滤波函数本质上是控制函数的傅里叶变换, 它可以被视为是不同频率的噪声分量在解耦序列调制下导致的相位积累. 此外还发现, 关联项的存在可以对正关联的噪声起到抑制效果, 而对反关联的噪声起到增强效果. 最后, 还对简单的动力学解耦序列进行了拓展, 结果显示同一单元的重复施加可以收窄滤波函数进而扩大滤波的频率范围.

在二能级情形中, 研究者已经实现了将动力学解耦和量子门结合, 得到具有动力学解耦效果的量子门, 即所谓的 dynamically corrected gate. 对于基于多能级体系的量子线路, 也可以按照这一思路去发展相应的方案, 本文研究结果可以作为这类探索的基础.

参考文献

[1] Clerk A A, Devoret M H, Girvin S M, Marquardt F, Schoelkopf R J 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1155
[2] Hahn E L 1950 *Phys. Rev.* **80** 580
[3] Slichter C P 1990 *Principles of Nuclear Magnetic Resonance* (3rd Ed.) (NewYork: Springer) pp1–7
[4] Viola L, Lloyd S 1998 *Phys. Rev. A* **58** 2733
[5] Carr H Y, Purcell E M 1954 *Phys. Rev.* **94** 630
[6] Meiboom S, Gill D 1958 *Rev. Sci. Instrum.* **29** 688
[7] Grégoire I 2005 *Ph. D. Dissertation* (Paris: Université Pierre et Marie Curie - Paris VI)
[8] Khodjasteh K, Lidar D A 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 180501
[9] Khodjasteh K, Lidar D A 2007 *Phys. Rev. A* **75** 062310
[10] Uhrig G S 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 100504
[11] Uhrig G S 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 120502
[12] Uhrig G S 2008 *New J. Phys.* **10** 083024
[13] Uhrig G S, Pasini S 2010 *New J. Phys.* **12** 045001
[14] Bylander J, Gustavsson S, Yan F, Yoshihara F, Harrabi K, Fitch G, Oliver W D 2011 *Nat. Phys.* **7** 565
[15] Gustavsson S, Bylander J, Yan F, Forn-Díaz P, Bolkhovsky V, Braje D, Oliver W D 2012 *Phys, Rev. Lett.* **108** 170503
[16] Qiu J, Zhou Y, Hu C K, Yuan J, Zhang L, Chu J, Huang W, Liu W, Luo K, Ni Z, Pan X, Yu D 2021 *Phys. Rev. A* **16** 054047
[17] Google 2023 *Nature* **614** 676
[18] Gottesman D 1999 *Chaos Solitons Fractals* **10** 1749
[19] Grassl M, Rötteler M, Beth T 2003 *Inter. J. Foundat. Compu. Sci.* **14** 757
[20] Bullock S S, OLeary D P, Brennen G K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 230502
[21] Campbell E T, Anwar H, Browne D E 2012 *Phys. Rev. X* **2** 041021
[22] Campbell E T 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 230501
[23] Anwar H, Brown B J, Campbell E T, Browne D E 2014 *New J. Phys.* **16** 063038
[24] Krishna A, Tillich J P 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 070507
[25] Chu J, He X, Zhou Y, Yuan J, Zhang L, Guo Q, Hai Y, Han Z, Hu C K, Huang W, Jia H, Yu D 2023 *Nat. Phys.* **19** 126
[26] Luo K, Huang W, Tao Z, Zhang L, Zhou Y, Chu J, Liu W, Wang B, Cui J, Liu S, Yan F, Yu D 2023 *Phys. Rev. Lett.* **130** 030603
[27] Blok M S, Ramasesh V V, Schuster T, O' Brien K, Kreikebaum J M, Dahlen D, Morvan A, Yoshida B, Yao N Y, Siddiqi I 2021 *Phys. Rev. X* **11** 021010
[28] Suslov M V, Lesovik G B, Blatter G 2011 *Phys. Rev. A* **83** 052317
[29] Bouchard F, Fickler R, Boyd R W, Karimi E 2017 *Sci. Adv.* **3** e1601915
[30] Napolitano R J, Fanchini F F, da Silva A H, Bellomo B 2021 *Phys. Rev. Research* **3** 013235
[31] Mukhtar M, Saw T B, Soh W T, Gong J 2010 *Phys. Rev. A* **81** 012331
[32] Koch J, Terri M Y, Gambetta J, Houck A A, Schuster D I, Majer J, Blais A, Devoret M H, Girvin S M, Schoelkopf R J 2007 *Phys, Rev. A* **76** 042319

SPECIAL TOPIC —Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Dynamic decoupling for multi-level systems

Zhang Zhi-Da [1)2)3)4)#] Yi Kang-Yuan [1)2)3)4)#]

Chen Yuan-Zhen [1)2)3)4)†] Yan Fei [1)2)3)‡]

1) (*Shenzhen Institute for Quantum Science and Engineering, Southern University of Science and Technology, Shenzhen* 518055, *China*)

2) (*International Quantum Academy, Shenzhen* 518055, *China*)

3) (*Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Science and Engineering, Southern University of Science and Technology, Shenzhen* 518055, *China*)

4) (*Department of Physics, Southern University of Science and Technology, Shenzhen* 518055, *China*)

(Received 16 December 2022; revised manuscript received 2 March 2023)

Abstract

Dynamical decoupling refers to a family of techniques that are widely used to suppress decoherence in various quantum systems, caused by quasi-static environmental noise. They have broad applications in the field of quantum information processing. Conventional dynamical decoupling targets at noise in two-level system such as qubits and often consists of specifically engineered sequences of π pulses that swap between two different states. On the other hand, researchers do not limit their study within simple two-levels systems any more, but go and seek for even more efficient quantum hardware. A variety of quantum algorithms and schemes of quantum control using multi-level systems, such as qutrits and qudits, for quantum information processing have been proposed and implemented successfully. However, decoherence in such a multi-level system is inherently more sophisticated than that in two-level systems. So far there has been little systematic research on how to tackle decoherence problems in such systems.

In this work, we propose several sequences of dynamical decoupling for multi-level systems that only rely on π pulses linking neighboring levels, which is easy to implement experimentally. Our results show that these sequences can efficiently suppress quasi-static noise presented in multi-level systems. In addition, by calculating the corresponding filter functions of these sequences, we are able to further analyze their effect on generic Gaussian noise that may not be quasi-static. We also give a physical explanation of the noise filtering mechanism of these sequences by considering their control functions. Other topics discussed in our work include power spectral density and correlation of noise in multi-level systems. Our work may be regarded as a first step towards a more systematic investigation of dynamical decoupling techniques applicable to multi-level systems.

Keywords: multi-level system, noise, decoherence, dynamic decoupling, filter function

PACS: 03.67.Lx, 03.67.Pp, 85.25.–j **DOI:** 10.7498/aps.72.20222398

# These authors contributed equally.

† Corresponding author. E-mail: chenyz@sustech.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: yanf7@sustech.edu.cn