



Universidad de Concepción

Dirección de Postgrado

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas – Programa de
Magíster en Ciencias con Mención en Física

Agujeros de Gusano Fantasma de tamaño finito con una función de forma cuadrática

Tesis presentada a la Dirección de Postgrado de la Universidad
de Concepción para optar al grado de Magíster en Ciencias con
Mención en Física

FABIÁN ENRIQUE ORELLANA VERDUGO

Concepción – Chile

2017

Profesor Guía: Mauricio Cataldo Monsalves

Profesor Cotutor: Julio Eduardo Oliva Zapata

Dpto. de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Concepción

Tabla de Contenido

Índice de figuras	III
Resumen	IV
Abstract	V
Agradecimientos	VI
1. Introducción	1
2. La Métrica	3
2.1. Relatividad Especial	3
3. Agujero Negro Esférico	5
3.1. La métrica de Schwarzschild	6
3.1.1. Limite de campo débil	9
3.1.2. El radio de Schwarzschild	11
3.1.3. Teorema de Birkhoff's	11
4. Déficit Angular	12
5. Condiciones de Energía	15
5.1. Condición de Energía Débil (WEC)	16
5.2. Condición de energía Nula (NEC)	17
5.3. Condición de Energía Fuerte (SEC)	17
5.4. Condición de Energía Dominante (DEC)	18
6. Agujero de Gusano	19
6.1. La métrica de Morris y Thorne	20
6.1.1. Ecuaciones de Campo y Tensor energía momentum	21
6.2. Embebimiento	24
6.3. Condición de <i>Flare Out</i> o de ensanchamiento	26
6.4. Condiciones de energía	26

6.5. Defecto topológico	28
7. Agujero de Gusano Fantasma con una función de forma cuadrática	30
7.1. Condiciones para la construcción de un agujero de gusano	33
7.1.1. Casos en los que es posible la construcción de un agujero de gusano	34
7.2. Densidad de Energía y Condiciones de Energía	35
7.2.1. Densidad de Energía	35
7.2.2. Condiciones de energía	38
7.2.3. Agujeros de Gusano de tamaño finito	41
7.3. Construcción de agujeros de Gusano	42
7.3.1. Agujero de Gusano con densidad de energía positiva	43
7.3.2. Agujeros de Gusano Microscópicos	44
7.3.3. Agujero de Gusano con densidad de energía negativa	45
7.3.4. Agujero de gusano con dependencia de energía mixta	47
8. Discusión final y Conclusiones	50
Bibliografía	52



Índice de figuras

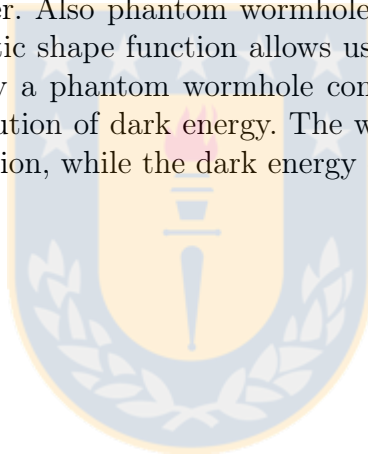
7.1.	La figura muestra el comportamiento de la densidad de energía para los casos donde: (a) $a_1 < 0$ y $a_3 > 0$; y (b) $a_1 < 0$ y $a_3 < 0$. Fuente: Elaboración propia.	37
7.2.	La figura muestra el comportamiento de la densidad de energía para el caso $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$. La línea discontinua representa el caso para el cual $\rho(r_0) < 0$. La línea sólida y la línea punteada, representan los casos donde $\rho(r_0) > 0$ y $\rho(r_0) = 0$, respectivamente. Podemos ver que en el caso de la línea sólida, la densidad de energía es siempre positiva, mientras que para la línea discontinua, la densidad de energía es negativa para $r_0 \leq r < r_2$, y comienza a ser positiva para $r > r_2$. Fuente: Elaboración propia.	38
7.3.	En la figura (a) se muestra el comportamiento de las ecuaciones (7.42)-(7.44) y de la ecuación de estado $P_r(r)/\rho(r)$; y en la figura (b) se muestra el comportamiento de la función de embebimiento, para valores de $a_1 = 1/5$ y $a_3 = 4/5$ en ambos casos. Podemos ver en (a) y (b), que el agujero de gusano fantasma esta conectado a una distribución de energía oscura. Fuente: Elaboración propia.	44
7.4.	La figura muestra el comportamiento de las ecuaciones (7.56)-(7.60). Podemos ver, que la densidad de energía es negativa para $1 \leq r < 2$ y positiva para $2 < r \leq 4$, mientras que la presión radial es siempre negativa, la presión lateral es positiva para $1 \leq r < 2$, y negativa para $2 < r \leq 4$. por otro lado, $\rho(r) + P_r(r)$ y $\rho(r) + P_r(r)$ son negativas para $1 \leq r < 2$, y positivas para $2 < r \leq 4$. Fuente: Elaboración propia.	47
7.5.	Las líneas negras de la figura muestran el intervalo donde existe un agujero de gusano fantasma, es decir, entre $1 \leq r \leq 2$. Los puntos grises muestran el sector del espacio tiempo que esta compuesto por energía oscura, este sector esta limitado por en $2 < r \leq 4$. Fuente: Elaboración propia.	49

Resumen

En la presente tesis se presentan soluciones estáticas de agujeros de gusano fantasma con una función de forma cuadrática sobre la coordenada radial r . Principalmente, el estudio se centra en agujeros de gusano sustentados por materia exótica con densidad de energía positiva (vista por cualquier observador estático) y una ecuación variable de estado $P_r(r)/\rho(r) < -1$, denominada materia fantasma. Además de un agujero de gusano fantasma que se extiende hasta el infinito en el espacio tiempo, se muestra que una función de forma cuadrática nos permite construir un espacio tiempo estático de tamaño finito, compuesto por un agujero de gusano fantasma conectado a una distribución anisotrópica de energía oscura esféricamente simétrica. La parte del espacio tiempo del agujero de gusano no cumple con la condición de energía dominante, mientras que la parte de la distribución de energía oscura si lo hace.

Abstract

In this thesis we derive new static phantom traversable wormhole by assuming a shape function with a quadratic dependence on the radial coordinate r . We mainly focus our study on wormholes sustained by exotic matter with positive energy density (as seen by any static observer) and a variable equation of state $P_r(r)/\rho(r) < -1$ dubbed phantom matter. Also phantom wormhole spacetime extending to infinity, we show that a quadratic shape function allows us to construct static spacetimes of finite size, composed by a phantom wormhole connected to an anisotropic spherically symmetric distribution of dark energy. The wormhole part does not fulfill the dominant energy condition, while the dark energy distribution part does.



Agradecimientos

El camino del conocimiento es un bonito trayecto si nos decidimos por él, este camino es largo, y muchas veces se presentan dificultades para recorrerlo. Es ahí donde las personas que te rodean hacen el camino más llevadero, más agradable, con muchos más colores para pintar la vida.

Deseo agradecer principalmente a mi familia, por su incondicional apoyo frente a mi formación académica, a mis padres, Nelly Verdugo y Juan Orellana, por sus ánimos y consejos cuando me encontré en situaciones adversas y favorables; a mis hermanos, Pablo Orellana y Nicolle Orellana, por su cariño y entusiasmo entregados a lo largo de este trayecto, a ustedes agradezco inmensamente.

Debo agradecer también al cuerpo docente que ha sido parte de mi formación, por su disposición de resolver las dudas que fueron surgiendo en el camino y por todo el conocimiento entregado. De igual manera al cuerpo paradoscente por permitirme desarrollar mis estudios de la mejor manera posible.

Agradezco a Soledad Daroch por gestionar y solucionar amablemente todos los inconvenientes que fueron surgiendo a lo largo de mi formación, a Patricia Luarte por su simpatía, consejos y tiempos agradables de conversación, a Don Juan Carlos Burgos y a Don Herardo Maríquez, por la amena conversación que se producía cada vez que nos encontrábamos en el departamento de Física. Así también agradezco a todos los otros funcionarios de la FCFYM, por su apoyo frente a nuestra labor.

Agradezco a los compañeros y amigos encontrados en el desarrollo de mi carrera, un especial saludo a Francisco Alvial, Luis Saldaña, Alvaro Placencia, Ignacio Ormazábal, Luis Liempi, Marco Rivera, Carlos Eyzaguirre, Diego Ramirez y al laboratorio de Cosmología y sus participantes, gestionado y guiado por Patricio Mella, una gran persona y amigo, quién me ha mostrado el mundo de la investigación.

Agradezco a aquellos amigos que se han transformado en mi familia Penquista, Joaquín Morales, Renato Miranda, Claudio Miranda, Yocelyn Ibañez y Valentina Opazo, por todo el tiempo de amena y alegre convivencia. Y por sobre todo, agradezco el apoyo de aquellos grandes amigos, Gustavo Rubio, Felipe Toledo y Luis Avilés, por su apoyo y fraternidad todos estos años.

Agradezco a mi profesor guía, Mauricio Cataldo, por guiarme en la preparación de

mi tesis, por comprenderme en los momentos difíciles y por toda la paciencia que ha tenido con migo.

Deseo Agradecer a todos ustedes por haber sido parte de mi formación profesional, pero antes que todo, por mi formación como persona.



Capítulo 1

Introducción

La expansión acelerada del universo es uno de los descubrimientos más interesantes y significantes de la cosmología moderna. En el marco de la Relatividad General, la energía oscura es una de las hipótesis más aceptadas que explica este comportamiento. Sin embargo, existe evidencia observacional de que el fluido cósmico que conduce al universo a la aceleración puede ser debido también a otro tipo de materia, llamado "Fluido Fantasma".

Un agujero de gusano es una de las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein, que describen una configuración del espacio-tiempo que conecta dos regiones lo suficientemente lejanas de éste, o, que conecta dos Universos diferentes.

La manera de estudiar estos cuerpos geométricos es a través de su función de forma $b(r)$. Generalmente la función de forma utilizada para estudiar agujeros de gusano es de tipo potencia, y no se han estudiado funciones de forma más complejas, como lo son las de tipo cuadrática.

Una función de forma cuadrática engloba otras funciones más simples consideradas anteriormente para Agujeros de Gusano y permite además un estudio de configuraciones más complejas, ofreciéndonos una amplia gama de soluciones.

Los agujeros de gusano son soportados por un tipo especial de materia cuya presión es negativa, le llamamos **Materia exótica** al tipo de materia que cumple con esta propiedad. Pero también es posible modelar agujeros de gusano con otro tipo de materia, con materia tipo fantasma. Esta materia cumple con ciertas características que discutiremos en el transcurso de la presente tesis.

Los agujeros de gusano son modelados desde una distancia mínima, llamada garganta (punto donde la distancia radial toma el mínimo valor posible) hasta un punto r_{max} que generalmente tiene la misma extensión que el espacio tiempo que lo contiene. En el presente estudio se analizará este tipo de solución y discutiremos además casos

donde es posible construir agujeros de gusano de tamaño finito, es decir, la extensión donde existe tal agujero de gusano es menor que el espacio tiempo sobre el cual esta definido.

El presente trabajo esta ordenado de tal manera que pueda darle una fácil lectura, comenzando por un rápido repaso de Relatividad Especial para poder definir el concepto de métrica, con ello nos es posible estudiar agujeros negros esféricos y la relación que existe entre la materia y la geometría. Esto nos permitirá adentrarnos en el estudio de los agujeros de gusano y los elementos que lo caracterizan. Es por ello que antes de hacer un análisis completo de ellos, presentamos conceptos que nos ayudarán a entender mejor los agujeros de gusano.

Finalmente nos centraremos en el estudio de agujeros de gusano de tamaño finito soportados por una distribución de energía fantasma.



Capítulo 2

La Métrica

2.1. Relatividad Especial

Einstein utilizó dos postulados para desarrollar la Teoría Especial de la Relatividad

1. Las leyes de la física son las mismas para todos los observadores inerciales
2. La velocidad de la luz es la misma para todos los observadores inerciales

Entonces, la velocidad de la luz es la misma para todos los sistemas de referencia, es razonable entonces considerar el valor numérico para c como un factor de conversión entre las unidades usadas en la medición del espacio y en la medición del tiempo. Entonces $c dt$ es un intervalo de tiempo medido en las mismas unidades usadas para medir unidades de espacio.

No es posible asumir a priori que dos observadores realizan la misma medida para el tiempo y el espacio de igual manera. Pero podemos saber de algo en lo que si coinciden, en el valor de una distancia en el espaciotiempo Δs^2 dada por

$$\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad (2.1)$$

donde el intervalo del espaciotiempo medido se encuentra entre los sucesos A y B . Si la separación de los intervalos es considerada infinitesimal, entonces la diferencia Δ puede ser reemplazada por el simbolo diferencial d . Así en el límite de los pequeños desplazamientos tenemos.

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.2)$$

Ahora, un punto en el espaciotiempo consiste de una especificación del valor de la coordenada tres espacial y del valor de la coordenada temporal, la convención usual es referirnos a este punto del espacio tiempo como un **evento**.

Podemos definir el intervalo entre dos eventos A y B de un espacio cuatridimensional (como se vió en las ecuaciones (2.1) y (2.2)) a partir de un tensor métrico dado por:

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

donde a y b tienen el rango $0, 1, 2, 3$ y $x^0 = cdt$.

Estos eventos estan definidos en un intervalo en el **espacio de Minkowski**, que difiere del espacio Euclidean por el signo menos de la primera coordenada. Por ello es que podemos escribir la ecuación (2.2) de una forma más compacta utilizando el tensor métrico η_{ab} :

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b \quad (2.4)$$

donde hemos utilizado el **convenio de suma de Einstein**¹ para los indices a y b de la ecuación (2.4).

La métrica (2.4) es usada para representar eventos en espacios planos. Para representar eventos en espacios curvos pero que localmente sean planos utilizamos el tensor métrico g_{ab} , por lo tanto escribimos nuestra representación de un evento en un espacio curvo dado por

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b \quad (2.5)$$

Teniendo este tensor métrico podemos definir conceptos como distancia, ángulo y volumen y así poder caracterizar geoméricamente el espaciotiempo sobre el cual se está trabajando.²

¹En el convenio de suma de Einstein, se han suprimido los simbolos de sumatorias, para abreviar la escritura

²Para escribir este capitulo se ha utilizada [7].

Capítulo 3

Agujero Negro Esférico

En este capítulo nos centraremos en el estudio de un agujero negro esférico. Un agujero negro puede ser definido como una región del espaciotiempo en la que existe un horizonte de eventos.

Un horizonte de eventos es una superficie que separa dos regiones del espaciotiempo desconectadas causalmente. Estas dos regiones son llamadas región interior y región exterior del agujero negro.

Consideraremos que nuestro objeto de estudio tiene una simetría esférica, por lo tanto nuestra métrica elegida debe tener dicha configuración. La otra característica de estudio será que la solución de este agujero negro debe ser estática.

¿Estático o Estacionario?

Para proseguir con el estudio, debemos hacer primero la distinción de una solución estática y una estacionaria, entender a que se refiere cada una.

Una **solución** es **estacionaria** si esta es independiente del tiempo, lo que no significa que no evoluciones, es decir, puede evolucionar pero su cambio es independiente del tiempo. Por ejemplo, un río que fluye siempre de la misma manera, se mantendrá fluyendo independiente del tiempo.

Entonces, en una solución estacionaria la métrica debe ser independiente del tiempo, pero el elemento de línea seguirá teniendo en general términos fuera de la diagonal ($dx^0 dx^\alpha$ con $\alpha = 1, 2, 3$).

Una **solución** es **estática** si esta no evoluciona, es decir, que se mantendrá una simetría temporal si elegimos un origen cualquiera para el tiempo, en tal situación, en la métrica no existirán términos fuera de la diagonal, solo habrán términos del tipo $dx^\mu dx^\mu$ donde $\mu = 0, 1, 2, 3$.

3.1. La métrica de Schwarzschild

Una de las primeras soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein de la Relatividad General fue la que nos entregó el físico alemán Karl Schwarzschild (1873-1916) en el año 1916, aproximadamente un mes después de publicada la Teoría de la Relatividad General, y describe la geometría de un cuerpo masivo, tanto así, que nada puede escapar de la región interior de este, estos objetos cosmológicos son llamados **Agujeros Negros**.

A continuación veremos la manera de encontrar la métrica de Schwarzschild que describe un agujero negro estático.

Consideraremos al espaciotiempo descrito por una simetría esférica, por lo tanto nuestra métrica estará escrita en coordenadas que respeten tal simetría.

Considere la métrica generalizada:

$$ds^2 = -A(t, r)dt^2 + 2B(t, r)dtdr + C(t, r)dr^2 + D(t, r)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (3.1)$$

Introducimos ahora una nueva coordenada radial dada por la transformación $r \Rightarrow r' = D(t, r)^{1/2}$, así la ecuación (3.1) nos queda:

$$ds^2 = -A'(t, r')dt^2 + 2B'(t, r')dtdr' + C'(t, r')dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (3.2)$$

Sabemos que cuando las ecuaciones diferenciales son inhomogeneas podemos multiplicarle un factor integrante para volverlas homogeneas. Entonces multiplicamos el factor integrante $I(t, r')$ a la ecuación diferencial $B'(t, r')dr' - A'(t, r')dt$, y definamos un nuevo tiempo t' dado por:

$$dt' = I(t, r')[B'(t, r')dr' - A'(t, r')dt] \quad (3.3)$$

Para asegurar la existencia de este nuevo tiempo t' , se debe cumplir que:

$$\frac{\partial}{\partial t}I(t, r')B'(t, r') = \frac{\partial}{\partial r'}(-I(t, r')A'(t, r'))$$

Siguiendo con la ecuación (3.3) tenemos:

$$dt'^2 = I^2(t, r')[B'^2(t, r')dr'^2 - 2B'(t, r')A'(t, r')dtdr' + A'^2(t, r')dt^2] - A'(t, r')dt^2 + 2B'(t, r')dtdr' = -A'^{-1}(t, r')I^{-2}(t, r')dt^2 + A'^{-1}B'(t, r')2dr'^2$$

para reescribir la ecuación (3.2) como:

$$ds^2 = -A'^{-1}(t, r')I^{-2}(t, r')dt^2 + [C'(t, r') + A'^{-1}(t, r')B'^2(t, r')]dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (3.4)$$

Definimos unas nuevas funciones:

$$\begin{aligned} A'^{-1}(t, r') I^{-2}(t, r') &= e^\nu \\ C'(t, r') + A'^{-1}(t, r') B'^2(t, r') &= e^\lambda \end{aligned}$$

donde $\nu = \nu(t, r)$ y $\lambda = \lambda(t, r)$. En un principio estas nuevas funciones no tienen por que ser como se eligieron ahora, podrían ser $f(t, r)$ y $g(t, r)$. La razón de eligirlas así es por la forma de la derivada de las funciones exponenciales que nos simplificarán el trabajo al calcular las ecuaciones de campo de Einstein. Ahora hacemos una nueva transformación de coordenadas que consiste en retirar la cremilla (') de la métrica (3.4), y reemplazamos las nuevas funciones en ella, quedándonos:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (3.5)$$

Para encontrar las ecuaciones de campo de Einstein utilizaremos el formalismo de Cartan, con ello podremos encontrar la solución estática sujeta a las condiciones de vacío (esto significa tener una configuración del tensor energía momentum sin materia en la región exterior del agujero negro, es decir, $T_{\mu\nu} = 0$).

Introducimos entonces el sistema de referencia ortonormal:

$$\begin{aligned} \omega^{\hat{t}} &= e^\nu dt \\ \omega^{\hat{r}} &= e^\lambda dr \\ \omega^{\hat{\theta}} &= r d\theta \\ \omega^{\hat{\phi}} &= r \sin(\theta) d\phi \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ahora debemos utilizar la primera ecuación estructural de Cartan:

$$d\omega^{\hat{\rho}} = -\Omega^{\hat{\rho}}_{\hat{\nu}} \wedge \omega^{\hat{\nu}} \quad (3.7)$$

donde $d\omega^{\hat{\rho}}$ corresponde a la derivada exterior de la uno forma base elegida. Utilizaremos además la antisimetría de la conexión de spin $\Omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\Omega_{\hat{\nu}\hat{\mu}}$ para encontrar las componentes no nulas de la conexión de espin sin torsión.

$$\begin{aligned} \Omega^{\hat{t}}_{\hat{r}} &= \Omega^{\hat{r}}_{\hat{t}} = \nu' e^{-\lambda} \omega^{\hat{t}} + \dot{\lambda} e^{-\nu} \omega^{\hat{r}} \\ \Omega^{\hat{\theta}}_{\hat{r}} &= -\Omega^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r} e^{-\lambda} \omega^{\hat{\theta}} \\ \Omega^{\hat{\phi}}_{\hat{r}} &= -\Omega^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r} e^{-\lambda} \omega^{\hat{\phi}} \\ \Omega^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}} &= -\Omega^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r} \cot(\theta) \omega^{\hat{\phi}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Donde la cremilla (') significa derivada con respecto a r , y el punto (·) significa la derivada con respecto t .

Utilizando ahora la segunda ecuación estructural de Cartan:

$$R_{\hat{\nu}}^{\hat{\mu}} = d\Omega_{\hat{\nu}}^{\hat{\mu}} + \Omega_{\hat{\sigma}}^{\hat{\mu}} \wedge \Omega_{\hat{\nu}}^{\hat{\sigma}} \quad (3.9)$$

podemos encontrar las componentes no nulas de la curvatura sin torsión.

$$R_{\hat{r}}^{\hat{t}} = - \left\{ e^{-2\lambda}(\nu'' + (\nu')^2 - \nu'\lambda') - e^{-2\nu}(\ddot{\lambda} + (\dot{\lambda})^2 - \dot{\nu}\dot{\lambda}) \right\} \omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{r}} \quad (3.10)$$

$$R_{\hat{\theta}}^{\hat{t}} = -\frac{1}{r}e^{-\lambda}(\nu'e^{-\lambda}\omega^{\hat{t}} + \dot{\lambda}e^{-\nu}\omega^{\hat{r}}) \wedge \omega^{\hat{\theta}} \quad (3.11)$$

$$R_{\hat{\phi}}^{\hat{t}} = -\frac{1}{r}e^{-\lambda}(\nu'e^{-\lambda}\omega^{\hat{t}} + \dot{\lambda}e^{-\nu}\omega^{\hat{r}}) \wedge \omega^{\hat{\phi}} \quad (3.12)$$

$$R_{\hat{\theta}}^{\hat{r}} = \frac{1}{r}e^{-\lambda}d - b(r)\omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} \quad (3.13)$$

$$R_{\hat{\phi}}^{\hat{r}} = \frac{1}{2r^3}(rb'(r) - b(r))\omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} \quad (3.14)$$

$$R_{\hat{\phi}}^{\hat{\theta}} = \frac{b(r)}{r^3}\omega^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} \quad (3.15)$$

Ahora si escribimos esta 2-forma curvatura usando la expresión $R_{\hat{\nu}}^{\hat{\mu}} = \frac{1}{2}R_{\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}^{\hat{\mu}}\omega^{\hat{\rho}}\wedge\omega^{\hat{\sigma}}$ podemos obtener las componentes no nulas del tensor de Riemann. Las que utilizaremos para escribir el tensor de Ricci¹, y el escalar de curvatura de Ricci². Con esto finalmente podemos construir el tensor de Einstein³, sus componentes no nulas son:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{1}{r}\lambda'e^{-2\lambda} + \frac{1}{2r^2}(1 - e^{-2\lambda}) \quad (3.16)$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = \frac{1}{r}\nu'e^{-2\lambda} - \frac{1}{2r^2}(1 - e^{-2\lambda}) \quad (3.17)$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \frac{1}{r}e^{-2\lambda}(r\nu'' + r(\nu')^2 - r\nu'\lambda' + \nu' - \lambda') \quad (3.18)$$

$$G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} \quad (3.19)$$

Sabemos además que la solución de Schwarzschild, es una solución de vacío, es por esto que las ecuaciones anteriores son nulas. Por lo que obtenemos tres ecuaciones independientes a resolver:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (3.20)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \quad (3.21)$$

$$\dot{\lambda} = 0 \quad (3.22)$$

¹ $R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R_{\hat{\mu}\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}}\omega^{\hat{\alpha}}\wedge\omega^{\hat{\beta}}$

² $R = g^{\hat{\mu}\hat{\nu}}R_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$

³ $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2}Rg_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$

Además si sumamos las ecuaciones (3.20) y (3.21) encontramos que $\nu' + \lambda' = 0$, integrando:

$$\nu + \lambda = h(t) \quad (3.23)$$

donde $h(t)$ es una función de integración.

Con esto podemos resolver la ecuación (3.20):

$$e^{-\lambda} - re^{-\lambda}\lambda' = 1 \quad (3.24)$$

$$(re^{-\lambda})' = 1 \quad (3.25)$$

$$re^{-\lambda} = r + C \quad (3.26)$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{C}{r} \quad (3.27)$$

Donde C es una constante de integración.

Si exponenciamos la ecuación (3.23) obtenemos:

$$e^{\nu} = e^{h(t)} e^{-\lambda} \quad (3.28)$$

Luego, haciendo un reescalamiento para la coordenada temporal⁴ encontramos que:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{C}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (3.29)$$

3.1.1. Limite de campo débil

Consideremos un campo gravitacional débil, entonces el espaciotiempo se encuentra ligeramente curvado, es decir, es un espacio plano pero con una ligera curvatura. Podemos escribir la metrica que describe esta configuración del espaciotiempo como una metrica de Minkowski más una pequeña perturbación.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (3.30)$$

Asumiendo que los cuerpos se mueven muy lentamente podemos aproximar $d\tau \approx dt$, entonces $\frac{dx^0}{d\tau} \approx c$ y $\frac{dx^i}{d\tau} \approx \frac{dx^i}{dt}$. Así la ecuación de la geodésica:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (3.31)$$

queda

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} c^2 = 0 \quad (3.32)$$

⁴ $e^{h(t)} d\bar{t} = dt$

Consideremos además un campo gravitacional estacionario ($\partial_t h_{\mu\nu} = 0$)

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{00} &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\nu g_{00} \\ &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\nu(\eta_{00} + h_{00}) \\ &= -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h_{00}\end{aligned}\tag{3.33}$$

Reemplazando (3.33) en (3.32) tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} &\approx -\Gamma^\mu_{00}c^2 \\ &\approx -\frac{c^2}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h_{00} \\ \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} &\approx -\frac{c^2}{2}\eta^{00}\partial_0 h_{00} = -\frac{c}{2}\partial_t h_{00} \\ \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} &\approx -\frac{c^2}{2}\eta^{i\nu}\partial_\nu h_{00} = -\frac{c^2}{2}\nabla h_{00} = -\nabla\phi \Leftrightarrow h_{00} = \frac{2}{c^2}\phi\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$g_{00} \approx 1 + 2\frac{\phi}{c^2}\tag{3.34}$$

Ahora, un punto situado en el origen de un cuerpo de masa M tiene como potencial gravitatorio $\phi = -\frac{GM}{r}$. Así:

$$1 + \frac{2\phi}{c^2} = 1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\tag{3.35}$$

Comparando ahora la ecuación (3.29) con (3.35) obtenemos:

$$1 - 2\frac{GM}{c^2 r} = 1 - \frac{C}{r} \implies C = \frac{2GM}{c^2}\tag{3.36}$$

Por lo que la ecuación (3.29) queda de la forma:⁵

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)\tag{3.37}$$

Donde $r_s = \frac{2GM}{c^2}$.

Debemos notar que cuando nos acercamos al infinito ($r \longrightarrow \infty$), la métrica es asintóticamente plana.

⁵Siempre podemos elegir $c = 1$

3.1.2. El radio de Schwarzschild

El valor $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ es llamado el **radio de Schwarzschild** y tiene los diferentes comportamientos según la región en la que nos ubiquemos.

Si una masa esférica tiene radio $R > r_s$, entonces la métrica de Schwarzschild en la región $r > R$ nos entrega su campo gravitacional exterior; si la región $r > r_s$ es vacía entonces la métrica de Schwarzschild para $r > r_s$ nos entrega el campo gravitacional exterior de un agujero negro.

Dentro de $r = r_s$, la métrica de Schwarzschild es nuevamente una solución de vacío de las ecuaciones de campo de Einstein, y nos entrega la geometría interior de un agujero negro.

Para $r = 0$ el coeficiente de la parte temporal de la métrica va hacia el infinito en contraste a la singularidad aparente del radio de Schwarzschild, esta singularidad no puede ser removida por una elección diferente de coordenadas. Esta es una singularidad física donde el espaciotiempo se curva infinitamente y las líneas de mundo tipo tiempo terminan.

Notar que la superficie donde $r = r_s$ es llamado el horizonte de eventos, este es el límite en el cual una partícula puede escapar de la atracción gravitatoria. Cuando se encuentra en algún punto de $r < r_s$, la partícula no puede escapar.

3.1.3. Teorema de Birkhoff's

“Una solución de vacío esféricamente simétrica en la región exterior es necesariamente estática”.

La métrica de Schwarzschild es la única con simetría esférica, y con una solución exterior de vacío cuyo campo gravitacional satisface las ecuaciones de campo de Einstein.⁶

⁶Para escribir este capítulo se ha utilizado [4].

Capítulo 4

Déficit Angular

La teoría gravitatoria tridimensional (2+1) es una teoría sin un campo gravitatorio, donde no hay materia presente, puesto que el espacio es plano¹. Una curvatura podría surgir solo si el tensor de Ricci fuese distinto de cero, es decir, si hubiese materia presente.

Supongamos que existe un punto en el espacio que contiene un cuerpo pesado, aislado y muy pequeño. Entonces estamos tratando con una configuración del espacio donde generalmente la métrica es plana, excepto talvés en el punto en el que existe el cuerpo puntual y muy pesado. Se debe hacer notar que estamos tratando con una métrica estática. Por lo tanto, la única superficie que cumple con estas características es un cono.

Una métrica estática, axialmente simétrica en su forma general es dada por:

$$ds^2 = -e^{2M(r)}dt^2 + e^{2N(r)}dr^2 + r^2d\phi^2 \quad (4.1)$$

donde $0 \leq r \leq \infty$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Debe ser mencioando que 0 y 2π estan identificados. Ahora si el tensor de Ricci es cero $R_{\mu\nu} = 0$ entonces encontramos que $M = \text{constante}$ y $N = \text{constante}$. Sin perdida de generalidad podemos hacer un reescalamiento del tiempo $t' = e^M t$ y luego sacar la cremilla (') del nuevo tiempo. Así, la ecuación (4.1) queda como:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2N}dr^2 + r^2d\phi^2 \quad (4.2)$$

Si hacemos una transformación a las coordenadas

$$R = e^N r \quad \Phi = e^{-N} \phi \quad (4.3)$$

obtenemos la siguiente métrica

$$ds^2 = -dt^2 + dR^2 + R^2d\Phi \quad (4.4)$$

¹Si hubiese materia presente, entonces el espacio tendría una curvatura, por lo que éste dejaría de ser plano

Aunque la métrica presentada en (4.4) es localmente plana, el espacio descrito por ella no necesariamente lo es, puesto que el defecto presentado en la parte angular agrega unas modificaciones al espacio descrito. Estas modificaciones se encuentran en los límites $0 \leq \Phi < e^{-N}2\pi < 2\pi$, donde N es un número entero. Así, el espacio descrito con tales características corresponde a un cono, que localmente es plano, pero globalmente no lo es.

El mecanismo con el cuál analizaremos el defecto topológico en el caso cuatridimensional (3+1), es similar al utilizado en el caso antes mencionado para la teoría gravitatoria tridimensional (2+1).

Para analizar este caso consideraremos una dimensión extra que no habíamos incluido en el caso tridimensional, y la asociamos a un ángulo de nuestra métrica, esto para tener una simetría esférica que describa nuestro objeto de estudio. En consecuencia, esto nos traerá un defecto topológico asociado a la parte angular de la métrica (4.5) donde serán los dos ángulos que varían en vez de uno. Tenemos presente entonces la variación de un ángulo sólido en el caso de tener algún tipo de defecto topológico. Consideremos la siguiente métrica estática y con simetría esférica:

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.5)$$

donde $0 \leq t < \infty$ y $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ con $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Si hacemos una transformación a las coordenadas:

$$R = \alpha r \quad \bar{\Omega} = \frac{1}{\alpha} \Omega \quad (4.6)$$

Obtenemos la siguiente métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + dR^2 + R^2 d\bar{\Omega}^2 \quad (4.7)$$

con $d\bar{\Omega} = d\bar{\theta}^2 + \sin^2(\bar{\theta})d\bar{\phi}^2$, y donde $\bar{\theta} = \frac{1}{\alpha}\theta$ y $\bar{\phi} = \frac{1}{\alpha}\phi$.

Claramente aquí podemos distinguir tres posibles casos para el análisis de la ecuación (4.7).

1. Si $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$ entonces nuestra métrica presenta un déficit angular, es decir,
 $0 \leq \frac{1}{\alpha}\theta < \theta \leq \pi$ y $0 \leq \frac{1}{\alpha}\phi < \phi \leq 2\pi$.
2. Si $\alpha = 1$, entonces nuestra métrica no presenta defecto topológico asociado al ángulo.
3. Si $0 < \alpha < 1$, entonces nuestra métrica presenta un exceso angular, es decir,
 $0 \leq \theta \leq \pi < \frac{1}{\alpha}\theta$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi < \frac{1}{\alpha}\phi$.

Como podemos ver, en su forma general la métrica (4.7) tiene simetría esférica, pero el factor $\frac{1}{\alpha}$ le agrega un defecto topológico asociado al ángulo, por lo tanto la simetría de nuestro objeto de estudio cambia levemente. Y puede presentar un déficit o un exceso angular.²



²Para escribir este capítulo se ha consultado a [32]

Capítulo 5

Condiciones de Energía

En el contexto de la relatividad general es razonable esperar que el tensor energía momentum satisfaga ciertas condiciones, tal como que la densidad de energía sea positiva o que esta domine por sobre las presiones.

En este capítulo revisaremos aquellas condiciones de energía que fueron propuestas por Hawking and Ellis en 1973.¹ que serán necesarias para el análisis de las próximas secciones. Estas son la condición de energía débil (o WEC por sus siglas en inglés); la condición de energía nula (NEC); la condición de energía fuerte (SEC); y la condición de energía dominante (DEC).

Para describir las condiciones de energía debemos saber las contribuciones de los diferentes campos de materia que dan descripción del tensor energía momentum. Consideramos una simetría esférica para la descripción del tensor energía momentum, cuyo campo de materia es diferente de cero. Además la descripción se realizará para métricas cuyos componentes fuera de la diagonal son ceros, por lo tanto, el tensor a utilizar será:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\phi \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Algunas condiciones de energías son formuladas en función de un vector tipo tiempo v^μ normalizado que representa la cuadrivelocidad de un observador arbitrario en el espaciotiempo. Tal vector puede ser escrito como.

$$v^\mu = \gamma(1, a, b, c) \quad \gamma = (1 - a^2 - b^2 - c^2)^{-1/2} \quad (5.2)$$

donde a, b y c son funciones arbitrarias de las coordenadas, restringidas por $a^2 + b^2 +$

¹The large scale structure of space-time [35]

$c^2 < 1$.². Necesitaremos además de un vector tipo nulo k^μ arbitrario:

$$k^\mu = (1, a', b', c') \quad (5.3)$$

donde a', b' y c' son funciones arbitrarias de las coordenadas, restringidas por $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$.

5.1. Condición de Energía Débil (WEC)

La condición de energía débil establece que la densidad de energía de cualquier distribución de materia, medida por un observador con cuadrivelocidad v^μ no puede ser negativa, esto es:

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0 \quad (5.4)$$

Así, con la ecuaciones (5.1) y (5.2) la ecuación (5.4) queda como:

$$\rho + a^2 P_r + b^2 P_\theta + c^2 P_\phi \geq 0 \quad (5.5)$$

Como a, b y c son parámetros arbitrarios, podemos hacer diferentes elecciones para sus componentes que cumplan con $a^2 + b^2 + c^2 < 1$.

- Elegimos $a = b = c = 0$, lo que nos entrega que:

$$\rho \geq 0 \quad (5.6)$$

- Si elegimos $b = c = 0$, encontramos que $\rho + a^2 P_r \geq 0$. Recordando que a^2 debe ser menor a 1, obtenemos entonces que $0 \leq \rho + a^2 P_r < \rho + P_r$. Por lo tanto:

$$\rho + P_r > 0 \quad (5.7)$$

- Si $a = c = 0$, encontramos que $\rho + b^2 P_\theta \geq 0 \implies 0 \leq \rho + b^2 P_\theta < \rho + P_\theta$, por lo tanto

$$\rho + P_\theta > 0 \quad (5.8)$$

- Si $a = b = 0$, encontramos que $\rho + c^2 P_\phi \geq 0 \implies 0 \leq \rho + c^2 P_\phi < \rho + P_\phi$. Por lo tanto:

$$\rho + P_\phi > 0 \quad (5.9)$$

Resumiendo entonces, las ecuaciones (5.6)-(5.9) nos dicen que la condición de energía débil debe cumplir que:

$$\rho \geq 0 \quad \rho + P_i > 0 \quad (5.10)$$

donde $i = (r, \theta, \phi)$

²Notar que $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

5.2. Condición de energía Nula (NEC)

La condición de energía nula se encuentra de la misma manera que la condición de energía débil, pero ahora, utilizamos un vector arbitrario tipo nulo k^μ . Entonces, se debe cumplir que:

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0 \quad (5.11)$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones (5.1) y (5.3) en la ecuación (5.11) encontramos que se debe cumplir que:

$$\rho + a'^2 P_r + b'^2 P_\theta + c'^2 P_\phi \geq 0 \quad (5.12)$$

Eligiendo $b' = c' = 0$ encontramos que $a' = 1$, así la ecuación (5.12) queda como $\rho + P_r \geq 0$, con un tratamiento similar al de la sección 5.1 para P_θ y P_ϕ podemos construir la condición de energía nula expresada como:

$$\rho + P_i \geq 0 \quad (5.13)$$

donde nuevamente $i = (r, \theta, \phi)$.

Note además que la condición de energía débil implica la condición de energía nula.

5.3. Condición de Energía Fuerte (SEC)

La condición de energía fuerte nos dice que para cualquier vector tipo tiempo v^μ , se debe cumplir que:

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) v^\mu v^\nu \geq 0 \quad (5.14)$$

o equivalentemente $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu > -\frac{1}{2}T$. Sustituyendo las ecuaciones (5.1) y (5.2) en esta última encontramos que:

$$\gamma^2(\rho + a^2 P_r + b^2 P_\theta + c^2 P_\phi) \geq \frac{1}{2}(\rho - P_r - P_\theta - P_\phi) \quad (5.15)$$

Podemos hacer diferentes elecciones para los parámetros a, b y c de la misma manera que en la sección 5.1.

- Elegiendo $a = b = c = 0$ encontramos que $\gamma = 1$ y obtenemos que

$$\rho + P_r + P_\theta + P_\phi \geq 0 \quad (5.16)$$

- Ahora si elegimos $b = c = 0$ vemos que $\gamma^2 = \frac{1}{1-a^2}$ que con manipulación simple encontramos:

$$\rho + P_r + P_\theta + P_\phi \geq a^2(P_\theta + P_\phi - \rho - P_r) \quad (5.17)$$

como $a^2 < 1$ entonces se debe cumplir que $\rho + P_r \geq 0$. Con un procedimiento similiar para las otras componentes construimos finalmente la condición de energía fuerte dada por:

$$\rho + \sum_i P_i \geq 0 \quad \rho + P_i \geq 0 \quad (5.18)$$

donde $i = (r, \theta, \phi)$. Debe ser notado que esta condición no implica la condición de energía débil.

5.4. Condición de Energía Dominante (DEC)

La condición de energía dominante nos dice que para cualquier vector tipo tiempo v^μ se debe cumplir que:

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0 \quad \text{y} \quad T_{\mu\nu}v^\nu \quad \text{no es tipo espacio} \quad (5.19)$$

Esto nos dice que la densidad de energía local medida es siempre positiva, y que el flujo de energía es tipo tiempo o tipo nulo. Entonces con las ecuaciones (5.1) y (5.2), y exigiendo que $T_{\mu\nu}v^\nu$ no sea tipo espacio, tenemos que:

$$\rho^2 - a^2 P_r^2 - b^2 P_\theta^2 - c^2 P_\phi^2 \geq 0 \quad (5.20)$$

Si elegimos ahora $a = b = c = 0$ encontramos que $\rho^2 \geq 0$, y por la condición sobre $T_{\mu\nu}v^\nu$ tenemos que $\rho \geq 0$.

Ahora, si elegimos $b = c = 0$ nos encontramos con que $\rho^2 \geq a^2 P_r^2$, y como $a^2 < 1$ tenemos que $\rho \geq |P_r|$. Un tratamiento similar para P_θ y P_ϕ nos entregan las condiciones de energía dominante dadas por:

$$\rho \geq 0 \quad \rho \geq |P_i| \quad (5.21)$$

donde $i = (r, \theta, \phi)$.

Se debe mencionar que la condición de energía dominante implica la condición de energía débil, y así también la condición de energía nula, pero no necesariamente implica la condición de energía fuerte.

También existen otras tres condiciones de energías: Condición de energía Promedio (ANEC); Condición de energía débil promedio (AWEC); y la condición de energía fuerte promedio (ASEC). Dichas condiciones no serán analizadas en este trabajo por no ser necesarias para el análisis de las siguientes secciones.³

³Para redactar este capítulo se han utilizado los libros: [23], [4], [35]

Capítulo 6

Agujero de Gusano

Imagine que el Universo es una manzana, ahora visualice a un gusano viajando por la superficie de ésta. Si este gusano viaja desde algún punto de la manzana a su antípoda, éste deberá recorrer la mitad de la circunferencia de la manzana. Ahora, si el gusano se percata que puede cavar un agujero por la manzana, entonces éste decide llegar desde el punto en el que se encuentra a su antípoda cavando un agujero a través de la manzana, entonces ahora recorre una distancia menor que si hubiese llegado por la superficie. Esta es la analogía que utilizó el físico teórico estadounidense *John Wheeler* en 1957 para describir lo que es un agujero de gusano, hasta ese entonces conocido como puente Einstein-Rosen.

Un agujero de gusano es una de las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein, que describen una configuración del espaciotiempo que conecta dos regiones lo suficientemente lejanas de éste, o, que conecta dos Universos diferentes.

En 1935 A. Einstein y N. Rosen [1] postularon la posibilidad de usar la métrica de Schwarzschild como un puente entre dos regiones del espaciotiempo. Esto a través de un conveniente cambio de variable en la coordenada radial, para así evitar la singularidad en $r = 0$ y lograr conectar de forma suave dos espaciotiempos asintóticamente planos. El problema con esto, es que un cambio de coordenada no evita la singularidad, puesto que el espacio tiempo sigue siendo el mismo. El puente Einstein-Rosen no corresponde realmente a un puente (o agujero de gusano) entre dos espaciotiempos asintóticamente planos, no a uno atravesable por lo menos, esto debido a que existiría un horizonte de eventos en la garganta siendo así imposible atravesar el hipotético agujero de gusano sin pasara través del horizonte de eventos y caer en el agujero negro. Sin embargo, esto fundo la base para el entendimiento de lo que hoy en día conocemos como agujeros de gusano.

En este capítulo estudiaremos la solución de Morris y Thorne de un agujero de

gusano. Para ello analizaremos la geometría de dicho objeto geométrico y la materia que lo soporta. Estudiaremos además las condiciones de energía que están involucradas en el agujero de gusano y la función de embebimiento, que nos permite entender de forma gráfica estos objetos.

6.1. La métrica de Morris y Thorne

Carl Sagan en su novela *Contacto* hace una descripción sobre los viajes interestelares. A raíz de esto, Morris y Thorne en 1987 describieron este tipo de viajes con los mejores conocimientos de las leyes de física que se tenían en 1987. Fue ahí donde nació la descripción física de un agujero de gusano atravesable, y es estudiado a través de la métrica de Morris y Thorne (6.1)

La solución de Morris y Thorne [17] describe un agujero de gusano estático, atravesable, con simetría esférica y que conecta dos regiones asintóticamente planas. La métrica utilizada por Morris y Thorne para describir este puente espaciotemporal es dada por

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (6.1)$$

donde $\Phi(r)$ y $b(r)$ son dos funciones arbitrarias que dependen solo de la coordenada radial.

La función redshift $\Phi(r)$ determina el corrimiento al rojo gravitacional, es decir, el estiramiento de objetos en formas finas y delgadas debido a extremas fuerzas de marea que presenta un cuerpo en presencia de un campo gravitatorio. Y la función de forma $b(r)$ determina la forma geométrica del agujero de gusano.

Notar que la ecuación (6.1) tiene simetría esférica que se visualiza en la componente $d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ de la métrica, donde $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$, donde 0 y 2π están identificados.

Para tener la geometría de un agujero de gusano exigimos que la función de forma y la función redshift cumpla algunas condiciones discutidas por Morris y Thorne.

1. **Condición de no horizonte**, es decir $\Phi(r)$ es finita en todo el espaciotiempo, para asegurar la ausencia de horizonte de eventos y de singularidades
2. **Existencia de un mínimo para la coordenada radial**, correspondiente a la garganta del agujero de gusano, esto es, $b(r) = r = r_0$, donde r_0 es un número que nos entrega el tamaño de la garganta.
3. **Distancia radial propia finita** $\frac{b(r)}{r} \leq 1$, esto significa que la coordenada radial debe ser bien comportada cerca de la garganta, esto es, la distancia

radial propia

$$l(r) = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}} + C \quad (6.2)$$

debe ser bien comportada en todas partes, es decir que $l(r)$ debe ser finito a través del espaciotiempo. El signo $\pm$ nos dice si nos encontramos en la parte superior del universo (+) o si nos encontramos en la parte inferior de éste (-). Debe ser notado que C es una constante de integración.

Notar además que cuando se cumple la condición 2, $b(r_0) = r_0$ la coordenada $l(r) \rightarrow \pm\infty$ se va a infinito.

4. **Región asintóticamente plana**, es decir, la coordenada radial lejos de la garganta debe ser asintóticamente plana, esto se traduce en pedir que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{b(r)}{r} \rightarrow 0 \quad (6.3)$$

6.1.1. Ecuaciones de Campo y Tensor energía momentum

Necesitamos ahora encontrar las ecuaciones de campo de Einstein para poder entender la forma en que la geometría de un agujero de gusano afecta a la materia que lo soporta. Para ello utilizaremos el formalismo de Cartan. Introducimos el sistema de referencia ortonormal:

$$\begin{aligned} \omega^{\hat{t}} &= e^{\Phi(r)} dt \\ \omega^{\hat{r}} &= \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1/2} dr \\ \omega^{\hat{\theta}} &= r d\theta \\ \omega^{\hat{\phi}} &= r \sin(\theta) d\phi \end{aligned} \quad (6.4)$$

Utilizando ahora la primera ecuación estructural de Cartan (3.7), podemos encontrar las componentes no nulas de la conexión de spin sin torsión.

$$\begin{aligned} \Omega^{\hat{t}}_{\hat{r}} &= \Omega^{\hat{r}}_{\hat{t}} = \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}} \Phi'(r) \omega^{\hat{t}} \\ \Omega^{\hat{\theta}}_{\hat{r}} &= -\Omega^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} = \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}} \frac{1}{r} \omega^{\hat{\theta}} \\ \Omega^{\hat{\phi}}_{\hat{r}} &= -\Omega^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}} \frac{1}{r} \omega^{\hat{\phi}} \\ \Omega^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}} &= -\Omega^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}} = \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}} \frac{1}{r} \omega^{\hat{\theta}} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Donde la ' significa derivada con respecto a r .

Utilizando ahora la segunda ecuación estructural de Cartan (3.9) podemos encontrar las componentes no nulas de la curvatura sin torsión.

$$R^{\hat{t}}_{\hat{r}} = \left\{ - \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) [\Phi''(r) + (\Phi')^2] + \frac{1}{2r^2} (rb'(r) - b(r)) \right\} \omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{r}} \quad (6.6)$$

$$R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} = -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) \Phi'(r) \omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} \quad (6.7)$$

$$R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} = -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) \Phi'(r) \omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} \quad (6.8)$$

$$R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{2r^3} (rb'(r) - b(r)) \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} \quad (6.9)$$

$$R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{2r^3} (rb'(r) - b(r)) \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} \quad (6.10)$$

$$R^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}} = \frac{b(r)}{r^3} \omega^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} \quad (6.11)$$

Ahora si escribimos esta 2-forma curvatura usando la expresión $R^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}} = \frac{1}{2} R^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} \omega^{\hat{\rho}} \wedge \omega^{\hat{\sigma}}$ podemos obtener las componentes no nulas del tensor de Riemann.

$$R^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = -R^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\theta}} = R^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}} = -R^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\phi}} = \frac{b(r)}{r} \quad (6.12)$$

$$R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = -R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{r}} = R^{\hat{\phi}}_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}} = -R^{\hat{\phi}}_{\hat{r}\hat{r}\hat{\phi}} = \frac{rb'(r) - b(r)}{2r^3} \quad (6.13)$$

$$R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = -R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{r}} = R^{\hat{\theta}}_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}} = -R^{\hat{\theta}}_{\hat{r}\hat{r}\hat{\theta}} = \frac{rb'(r) - b(r)}{2r^3} \quad (6.14)$$

$$R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = -R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{t}} = R^{\hat{\phi}}_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}} = -R^{\hat{\phi}}_{\hat{t}\hat{t}\hat{\phi}} = -\frac{\Phi'(r)}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) \quad (6.15)$$

$$R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = -R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{t}} = R^{\hat{\theta}}_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}} = -R^{\hat{\theta}}_{\hat{t}\hat{t}\hat{\theta}} = -\frac{\Phi'(r)}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}} &= -R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{r}\hat{t}} = R^{\hat{r}}_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}} = -R^{\hat{r}}_{\hat{t}\hat{t}\hat{r}} \\ &= \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) \{ -\Phi''(r) + (rb'(r) - b(r))[2r(r - b(r))]^{-1}\Phi'(r) - (\Phi'(r))^2 \} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Las que utilizaremos para escribir el tensor de Ricci y el escalar de curvatura de Ricci. Con esto podemos construir finalmente el tensor de Einstein, cuyas componentes no

nulas son:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{b'(r)}{r^2} \quad (6.18)$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = 2 \frac{\Phi'(r)}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) \quad (6.19)$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) \left(\Phi''(r) - \frac{rb'(r) - b(r)}{2r(r - b(r))} \Phi'(r) + (\Phi'(r))^2 + \frac{\Phi'(r)}{r} - \frac{rb'(r) - b(r)}{2r(r - b(r))} \right) \quad (6.20)$$

El tensor energía-momentum

El teorema de Birkhoff nos dice que existe una única solución esféricamente simétrica cuyo campo gravitacional satisface las ecuaciones de Campo de Einstein, esta es la solución de vacío de Schwarzschild. Como sabemos, un agujero de gusano de Scharzschild no es atravesable, además es una solución a las ecuaciones de campo para el vacío. Por lo tanto un agujero de gusano atravesable debe contener materia o un campo cuyo tensor energía momentum sea diferente de cero.

Dada la simetría esférica de (6.1), y la solución para el tensor de Einstein dada en (6.18)-(6.20), entonces las únicas componentes distintas de cero del tensor energía momentum serán $T_{\hat{t}\hat{t}}$, $T_{\hat{r}\hat{r}}$ y $T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}}$.

Como estamos utilizando una base cuyos observadores están en reposo con respecto al sistema de referencia, entonces la interpretación física de las componentes del tensor será la siguiente:

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho(r) \quad T_{\hat{r}\hat{r}} = P_r(r) \quad T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = P_l(r) \quad (6.21)$$

donde $\rho(r)$ es la densidad total de energía medida en g/cm^3 , $P_r(r)$ es la presión radial medida en dyn/cm^2 , y $P_l(r)$ es la presión lateral (que es ortogonal a la presión radial) medida en dyn/cm^2

Las ecuaciones de campo de Einstein

Teniendo ahora ambos lados de las ecuaciones de campo de Einstein, podemos proseguir con su construcción a través de la expresión

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \kappa T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \quad (6.22)$$

Donde $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$.

Entonces, introduciendo los valores de las ecuaciones (6.18)-(6.21) en la ecuación

(6.22), podemos finalmente obtener la relación entre la geometría de un agujero de gusano y la materia que lo soporta, esta es:

$$\kappa\rho(r) = \frac{b'(r)}{r^2} \quad (6.23)$$

$$\kappa P_r(r) = \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \Phi'(r) - \frac{b(r)}{r^3} \quad (6.24)$$

$$\kappa P_l(r) = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \left[\Phi''(r) + \Phi'(r)^2 - \frac{rb'(r) + b(r) - 2r}{2r(r - b(r))} \Phi'(r) - \frac{rb'(r) - b(r)}{2r^2(r - b(r))} \right] \quad (6.25)$$

De las ecuaciones (6.23)-(6.25) podemos obtener la ecuación del equilibrio hidrostático para la materia que soporta el agujero de gusano:

$$P_r'(r) = \frac{2}{r} [P_l(r) - P_r(r)] - [\rho(r) + P_r(r)] \Phi'(r) \quad (6.26)$$

Conocida también como **ecuación de conservación de la energía**, y nos habla justamente de la invariancia con la cual permanece una cantidad total de energía en un sistema aislado, lo que no quita que ésta se pueda transformar en otra forma de energía.

La ecuación (6.26) también puede derivarse de la conservación del tensor energía momentum¹.

Las ecuaciones de campo (6.23)-(6.25) son un conjunto de tres ecuaciones diferenciales que relacionan cinco funciones desconocidas de r : $b(r)$, $\Phi(r)$, $\rho(r)$, $P_r(r)$ y $P_l(r)$. El procedimiento usual para resolver dicho sistema de ecuaciones es introducir algún tipo específico de materia o campo que describa la fuente del tensor energía momentum, y mediante el análisis físico de dicha fuente, obtener las ecuaciones de estado para las presiones como función de la densidad de energía, es decir, $P_r = P_r(\rho)$ y $P_l = P_l(\rho)$. Sin embargo, en el estudio de agujeros de gusano atravesables, la filosofía de como resolver estas ecuaciones de campos es diferente de lo usual. Esto ya que deseamos encontrar una solución que cumpla con ciertas propiedades geométricas, luego ver que el tensor de energía momentum pueda soportar tal geometría y finalmente ver que tipo de fuente es descrita por este tensor. Matemáticamente, esto nos permite imponer condiciones solo sobre las funciones $b(r)$ y $\Phi(r)$, y las funciones ρ , P_r y P_l quedan sujetas a las ecuaciones de campo junto con las restricciones elegidas por nuestros $b(r)$ y $\Phi(r)$ para describir un agujero de gusano atravesable.

6.2. Embebimiento

Sabemos que la métrica de Morris y Thorne es simétricamente esférica, por lo tanto, sin pérdida de generalidad nos enfocamos en un plano ecuatorial de la esfera,

¹ $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$

y para ello hacemos $\theta = \pi/2$. Además, nos enfocamos en un instante fijo en el espacio tridimensional, es decir, fijamos el tiempo t .

Por lo tanto la métrica (6.1) queda escrita como:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 d\phi^2 \quad (6.27)$$

Deseamos ahora visualizar este plano ecuatorial como si fuese removido desde el espaciotiempo y embebido en un espacio Euclideo, para ello introducimos el espacio Euclideo en coordenadas cilíndricas.

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (6.28)$$

La superficie embebida será axialmente simétrica, entonces la podemos describir por una función $z = z(r)$, así podemos escribir:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (6.29)$$

Este elemento de línea es igual a nuestro plano ecuatorial de la garganta del agujero de gusano (6.27) si identificamos la coordenada (r, ϕ) del espacio embebido con la coordenada (r, ϕ) del espaciotiempo del agujero de gusano. Podemos ver que la función $z(r)$ describe la superficie embebida, así, esta quedaría descrita por

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2} \quad (6.30)$$

Podemos ver de esta expresión que al alejarnos de la garganta del agujero de gusano ($r \rightarrow \infty$), el diagrama de embebimiento nos entrega dos regiones asintóticamente planas. Matemáticamente esto significa que

$$\left. \frac{dz}{dr} \right|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (6.31)$$

Nota sobre la componente radial de la métrica

Notemos que la signatura utilizada en la métrica (6.1) es $(-, +, +, +)$ y ésta se debe preservar en toda la extensión del espaciotiempo definido, esto se logra exigiendo que la componente radial de (6.1) sea siempre positiva, así se preserva la signatura Lorentziana utilizada, esto es

$$g_{rr} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}}} > 0 \Leftrightarrow b(r) < r \quad (6.32)$$

6.3. Condición de *Flare Out* o de ensanchamiento

Cuando hablamos de un agujero de gusano, hablamos de una configuración del espaciotiempo en la cual existen dos regiones asintóticamente planas conectadas a través de una garganta que no se cierre, una manera de lograr esto es pedir que el agujero de gusano se ensanche constantemente. Para esto utilizamos entonces al criterio de la segunda derivada.

Para analizar dicha condición utilizamos el inverso de la función $z(r)$ en la ecuación (6.30)

$$\frac{dr}{dz} = \pm \sqrt{\frac{r}{b(r)} - 1} \quad (6.33)$$

derivando con respecto a z la ecuación (6.33), entonces $z(r_0)$ será un mínimo relativo si en dicho punto o en su cercanía, dicha función es mayor a cero

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b(r) - b'(r)r}{2b^2(r)} > 0 \quad (6.34)$$

Dicha condición es conocida como la **Condición de *Flare-Out*** o **Condición de ensanchamiento** y nos entrega la condición necesaria para que exista una garganta que no se cierre en el agujero de gusano.

Evaluando la ecuación (6.34) en la garganta encontramos que $b'(r_0) < 1$.

6.4. Condiciones de energía

Analizaremos ahora lo que sucede con las condiciones de energía, para esto nos enfocaremos en el punto de radio mínimo para el agujero de gusano, es decir, su garganta (r_0).

La condición de *Flare Out* evaluada en la garganta nos dice algo sobre esto:

$$\left. \frac{d^2r}{dz^2} \right|_{r=r_0} = \frac{b(r_0) - b'(r_0)r_0}{2b^2(r_0)} > 0 \iff r_0(1 - b'(r_0)) > 0 \quad (6.35)$$

Elegimos el parámetro r_0 positivo, para evitar posibles problema más adelante². Por lo tanto, la ecuación (6.35) queda como:

$$b'(r_0) < 1 \quad (6.36)$$

Ahora, analizando la ecuación (6.23) en la garganta, y utilizando lo encontrado en la ecuación anterior encontramos que:

$$\kappa\rho(r_0) = \frac{b'(r_0)}{r_0^2} < \frac{1}{r_0^2} \quad (6.37)$$

² r_0 es un parámetro libre, podemos fijar a mano cualquier valor para este.

Como vemos esta expresión es positiva, solo se nos exige que $\kappa\rho(r_0) < 1/r_0^2$, por lo tanto, hasta ahora es innecesario el uso de algún tipo de materia especial para construir un agujero de gusano del tipo de Morris y Thorne. Debemos seguir avanzando para ver cuales son las restricciones que nos arrojarán las ecuaciones. Si vemos ahora que sucede con la presión radial (6.24) encontramos que:

$$\begin{aligned}\kappa P_r(r_0) &= \frac{2}{r_0} \left(1 - \frac{b(r_0)}{r_0}\right) - \frac{b(r_0)}{r_0^3} \\ &= -\frac{1}{r_0^2} < 0\end{aligned}\tag{6.38}$$

Podemos ver aquí que, para que se sostenga el agujero de gusano es necesario un tipo de materia cuya presión radial sea negativa en la garganta. Además podemos ver que si sumamos las ecuaciones (6.23) y (6.24) tenemos:

$$\begin{aligned}\kappa(\rho(r) + P_r(r)) &= \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \phi'(r) - \frac{b(r) - b'(r)r}{r^3} \\ &= \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \phi'(r) - \frac{2b^2(r)}{r^3} \frac{b(r) - b'(r)r}{2b^2} \\ &= \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \phi'(r) - \frac{2b^2(r)}{r^3} \frac{d^2r}{dz^2}\end{aligned}\tag{6.39}$$

Que evaluado en la garganta ($r = r_0$) encontramos:

$$\begin{aligned}\kappa(\rho(r_0) + P_r(r_0)) &= \frac{2}{r_0} \left(1 - \frac{b(r_0)}{r_0}\right) \phi'(r_0) - \frac{2b^2(r_0)}{r_0^3} \frac{d^2r}{dz^2} \Big|_{r=r_0} \\ &= -\frac{r_0^2}{r_0^3} \frac{d^2r}{dz^2} \Big|_{r=r_0} \\ &= -\frac{2}{r_0} \frac{d^2r}{dz^2} \Big|_{r=r_0}\end{aligned}\tag{6.40}$$

Vemos que en la expresión anterior esta presente la condición de *Flare Out*, la cual es positiva siempre, incluyendo la garganta, por lo tanto dicha expresión es negativa, es decir:

$$\kappa(\rho(r_0) + P_r(r_0)) < 0\tag{6.41}$$

Esta expresión viola las condiciones de energía débil, fuerte y nula.

Si bien la densidad de energía de la garganta del agujero de gusano es positiva (6.37), su presión radial es negativa (6.38) y además se violan algunas condiciones de energía (6.41). Podemos concluir entonces que se necesita de algún tipo de materia especial que soporte estos agujeros de gusano, a ésta tipo de materia con esas características especiales le llamamos **materia exótica**.

Debe ser mencionado que la presión lateral evaluada en la garganta es dada por:

$$\begin{aligned}\kappa P_l(r_0) &= \left(1 - \frac{b(r_0)}{r_0}\right) \left[\Phi''(r_0) + \Phi'(r_0)^2 - \frac{rb'(r) + b(r) - 2r}{2r(r - b(r))} \Phi'(r_0) - \frac{rb'(r) - b(r)}{2r^2(r - b(r))} \right] \\ &= \frac{b(r_0) - b'(r_0)r_0}{2r_0^3}\end{aligned}\quad (6.42)$$

que como vemos es positivo si y solo si $b'(r_0) < 1$, pero esto ya lo sabíamos. Si sumamos la ecuación (6.23) y (6.25), y si evaluamos en la garganta obtenemos:

$$\begin{aligned}\kappa(\rho(r_0) + P_l(r_0)) &= \frac{b(r_0) + r_0 b'(r_0)}{2r_0^3} \\ &= \frac{1 + b'(r_0)}{2r_0^2} < \frac{1}{r_0^2}\end{aligned}\quad (6.43)$$

que como vemos es positivo. Si sumamos las ecuaciones (6.23)-(6.25) y evaluamos en la garganta tenemos:

$$\kappa(\rho(r_0) + P_r(r_0) + 2P_l(r_0)) = 0$$

6.5. Defecto topológico

Como bien sabemos, podemos escribir la métrica (6.1) en función del tensor métrico, como se muestra en la ecuación (2.5). Hacemos esto para poder describir mejor el defecto topológico asociado a los agujeros de gusano descritos, y con esto poder ver si tienen déficit o exceso angular.

Escribimos entonces la métrica (6.1) usando el tensor métrico.

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 \quad (6.44)$$

donde

$$\begin{aligned}g_{tt} &= e^{-2\phi(r)} \\ g_{rr} &= \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} \\ g_{\theta\theta} &= r^2 \\ g_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2(\theta)\end{aligned}$$

Ahora, queremos ver si la métrica (6.1) tiene algún defecto topológico. Para ello es que reescribimos la parte radial de la métrica en función de una nueva coordenada $l(r)$:

$$l(r) = \pm \int \sqrt{g_{rr}} dr + C \quad (6.45)$$

Que reemplazando el valor de la componente radial g_{rr} podemos escribir como

$$l(r) = \int \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}}} dr + C \quad (6.46)$$

Analizando la ecuación (6.46) podemos deducir que $l(r)$ existe si y solo si $b(r) < r$. Luego de encontrar esta nueva función (6.46) debemos encontrar su inversa $r(l)$, para así construir la función $r^2(l) = \alpha R^2$ (donde $R \propto l(r)$) y poder deducir si el Agujero de Gusano estudiado corresponde a uno que tenga algún tipo de déficit o exceso angular.

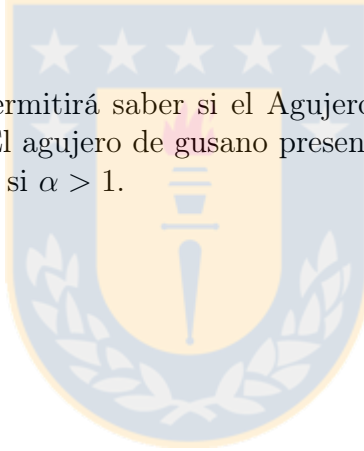
Así podemos reescribir la ecuación (6.1) como:

$$ds^2 = -e^{-2\phi(r)} dt^2 + dl(r)^2 + R^2(d\bar{\theta}^2 + \sin^2(\bar{\theta})d\bar{\phi}^2) \quad (6.47)$$

donde $\bar{\theta} = \alpha\theta$ y $\bar{\phi} = \alpha\phi$

La función α nos permitirá saber si el Agujero de Gusano presenta algún tipo de defecto topológico. El agujero de gusano presenta déficit angular si $0 < \alpha < 1$, y presenta exceso angular si $\alpha > 1$.

3



³En este capítulo se ha utilizado [17], [2] y [24]

Capítulo 7

Agujero de Gusano Fantasma con una función de forma cuadrática

El tipo de materia del que está compuesto nuestro universo puede ser entendido a través de la ecuación de estado $\omega = \frac{P_r(r)}{\rho(r)}$. En el marco de la Relatividad General, sabemos que si $-1 < \omega(r) < -1/3$ entonces estamos en presencia de energía oscura, según los descubrimientos de la cosmología moderna, esta es la hipótesis más aceptada que explica la aceleración observada del Universo. Sin embargo, existe evidencia observacional de que el fluido cósmico que conduce al universo a la aceleración puede satisfacer también una ecuación de estado de la forma $P(r)/\rho(r) < -1$, con densidad de energía positiva. Un fluido cósmico que cumple con tal ecuación de estado es llamado "fluido fantasma", y si dicho fluido dominase la expansión cósmica del universo, entonces este podría terminar en una singularidad tipo *Big Rip*, es decir, en un desgarramiento cósmico.¹

El fluido fantasma tiene una presión negativa tan fuerte que viola la condición de energía dominante (DEC), pero esta es una condición necesaria para la existencia de agujeros de gusano estáticos.

La energía cósmica fantasma es un campo homogéneo con presión isotrópica, además, los agujeros de gusano son configuraciones inhomogéneas del espacio tiempo. Específicamente, para agujeros de gusano estáticos, la materia fantasma es considerada como un fluido inhomogéneo y anisotrópico, con una presión radial que satisface la relación $P_r(r)/\rho(r) < -1$.

En general, en un espacio tiempo esféricamente simétrico la presión radial y lateral son diferentes, entonces debemos pedir que el modelo satisfaga DEC, dado por $\rho(r) \geq 0$ y $-\rho(r) \leq P_i(r) \leq \rho(r)$, donde P_i son las presiones radial y lateral.

¹En un *Big Rip*, la energía fantasma presente en todo el universo, sería tan fuerte que la energía dentro de los átomos no lograría contrarrestar la expansión acelerada producida por el fluido fantasma, desgarrando así el átomo debido a la enorme fuerza tratando de separarlo

En este capítulo estudiaremos una ecuación de estado variable con dependencia radial $\omega(r) = \frac{P_r(r)}{\rho(r)}$ y analizaremos el caso en que $\omega(r) < -1$.

Estudiaremos además la solución de Morris y Thorne [17] con una función redshift dada $\Phi(r) = \Phi_0 = cte$, y una función de forma cuadrática del tipo

$$b(r) = a_1 r^2 + a_2 r + a_3 \quad (7.1)$$

donde a_1, a_2 y a_3 son parámetros constantes.

La función de forma (7.1) tiene en principio 3 parámetros libres, donde la libertad de estos parámetros depende de las condiciones necesarias para construir un agujero de gusano discutidas en el capítulo 6. Lo que haremos será reemplazar uno de estos parámetros por el valor de la garganta del agujero de gusano r_0 que es algo que podemos fijar con más libertad, y así trabajaremos solo con dos parámetros en vez de tres.

Para ello utilizaremos la condición de un mínimo para la coordenada radial $b(r_0) = r_0$, para reescribir la ecuación (7.1) y dejarla solo en función de los parámetros a_1, a_3 y de la garganta r_0 .

$$b(r) = a_1 r^2 - \left(a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1\right)r + a_3 \quad (7.2)$$

Consideremos entonces una solución atravesable de un agujero de gusano estático, no cargado, con simetría esférica y que conecte dos regiones asintóticamente planas, para ello introducimos entonces la métrica de Morris y Thorne (6.1). Reemplazamos luego el valor para la función de forma a estudiar (7.2) y encontramos la métrica con la cual trabajaremos en adelante.

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{a_1 r^2 - (a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1)r + a_3}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (7.3)$$

Analizaremos entonces las condiciones necesarias para hacer posible un viaje a través de este tipo de agujero de gusano con las respectivas restricciones mostradas en el capítulo 6.

Consideremos ahora la función redshift $\Phi(r) = \Phi_0 \implies \Phi'(r) = 0$, introduciendo además la función de forma (7.2) y considerando el parámetro $\kappa = 1$ encontramos que las ecuaciones de campo de Einstein (6.23)-(6.25) quedan escritas como

$$\rho(r) = \frac{a_1 r_0(2r - r_0) + r_0 - a_3}{r^2 r_0} \quad (7.4)$$

$$P_r(r) = -\frac{(r - r_0)(a_1 r - \frac{a_3}{r_0}) + r}{r^3} \quad (7.5)$$

$$P_l(r) = \frac{a_3 - a_1 r^2}{2r^3} \quad (7.6)$$

notar que la ecuación (7.5) puede ser escrita en función de $\rho(r)$.²

Si sumamos ahora las ecuaciones (7.4) y (7.5) tenemos:

$$\rho(r) + P_r(r) = \frac{a_1 r^2 - a_3}{r^3} \quad (7.7)$$

Si sumamos las ecuaciones (7.1) y (7.6) tenemos:

$$\begin{aligned} \rho(r) + P_l(r) &= \frac{b(r) + r b'(r)}{2r^3} \\ &= \frac{3a_1 r^2 - 2(a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1)r + a_3}{2r^3} \end{aligned} \quad (7.8)$$

La positividad de las ecuaciones (7.4)-(7.8) dependerá en general de los valores elegidos para los parámetros a_1 , a_3 y r_0 , y si estamos analizando el agujero de gusano o el espacio tiempo en el cual está contenido.

Ahora si sumamos las ecuaciones (7.4)-(7.6) tenemos:

$$\rho(r) + P_r(r) + 2P_l(r) = 0 \quad (7.9)$$

En un analisis posterior mostraremos que el agujero de gusano construido con la función de forma (7.2), viola las condiciones de energía débil, fuerte y nula.

La función de estado variable

Una ecuación de estado variable nos entrega información sobre el tipo de materia del que esta compuesto nuestro universo. Analizaremos esta ecuación para caracterizar nuestro agujero de gusano estático en estudio y el espacio tiempo sobre el cuál éste vive. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \omega(r) &= \frac{P_r}{\rho} \\ &= -\frac{r_0}{r} \frac{(r - r_0)(a_1 r - \frac{a_3}{r_0}) + r}{a_1 r_0 (2r - r_0) + r_0 - a_3} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Al analizar la ecuación de estado (7.10) en la garganta del agujero de gusano encontramos que:

$$\omega = \frac{1}{\frac{a_3}{r_0} - a_1 r_0 - 1} \quad (7.11)$$

Esta se convierte en un parámetro constante que depende del punto donde ubiquemos la garganta y los valores para los parámetros a_1 y a_3 .

² $P_r(r) = \frac{1}{r^3}(a_1 r^2 - a_3) - \rho(r)$

7.1. Condiciones para la construcción de un agujero de gusano

Lo primero que debemos analizar para ver si es posible construir un agujero de gusano es la condición de *Flare-Out*, que nos entrega la información necesaria para la existencia de una garganta estable, es decir, que no colapse en su proceso de formación. Para ello analizamos la ecuación (6.34) que es válida cuando $b(r) - b'(r)r > 0$, reemplazando ahora por el valor de la función de forma (7.2) esto se traduce en pedir que

$$a_3 - a_1 r^2 > 0 \quad (7.12)$$

Entonces, para todo conjunto de valores de a_1 y a_3 que cumplan con (7.12), existe un agujero de gusano cuya garganta no se cierra en su proceso de formación.

Por otro lado la componente radial de la métrica (7.3) la podemos escribir como

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} = \frac{rr_0}{(r - r_0)(a_3 - a_1 rr_0)} \quad (7.13)$$

claramente tanto r como r_0 son positivos, por lo tanto el numerador de la ecuación (7.13) es positivo. Por definición, $r - r_0 > 0$ porque el agujero de gusano tiene un radio mínimo en $r = r_0$ (su garganta), por lo mismo el factor $(a_3 - a_1 rr_0) > 0$ en todo lugar en que se cumpla la condición de Flare-Out (7.12).

Podemos decir entonces que la componente radial de (7.3) es positiva en toda extensión donde se cumpla la ecuación (7.12), por lo tanto el agujero de gusano generado está contenido en todo el espacio definido en (7.3).

Lo que queremos ver ahora es el rango de validez de la inmersión, es decir, si la inmersión es acotada (sobre que rango de valores) o si no lo es. Para esto reescribimos la ecuación (6.30) como

$$dz = \pm \frac{\sqrt{b(r)}}{\sqrt{r - b(r)}} dr \quad (7.14)$$

El denominador de la ecuación (7.14) es positivo por definición, por lo tanto, para ver el rango de validez de la inmersión debemos analizar los ceros de la función $b(r)$, y esto lo hacemos teniendo en cuenta la condición de *Flare-Out* y los valores que toma la componente radial.

Así, los ceros de la función (7.2) quedan dados por

$$r_{\pm} = \frac{a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1}{2a_1} \pm \frac{1}{2a_1} \sqrt{\left(a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1\right)^2 - 4a_1 a_3} \quad (7.15)$$

Definamos ahora a $\Delta = \left(a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1\right)^2 - 4a_1 a_3$, entonces

- Si $\Delta = 0$ entonces existe una solución que corta al eje r en un punto
- Si $\Delta > 0$ existen dos soluciones que cortan al eje r en dos puntos
- Si $\Delta < 0$ no existen soluciones que corten al eje r en algún punto

Lo que se intenta encontrar con la ecuación (7.15) son los valores positivos de la función $b(r)$ y los puntos en los que corta al eje r de la gráfica $b(r)$ *v/s* r , esto porque ello tiene estrecha relación con la construcción del agujero de gusano cuando queremos graficar $z(r)$ *v/s* r .

Reconocemos entonces tres casos en los que es posible construir un agujero de gusano en función de los valores que pueden tomar los parámetros a_1 y a_3 según lo expone la ecuación (7.12)

7.1.1. Casos en los que es posible la construcción de un agujero de gusano

En el análisis de la ecuación (7.12) podemos clasificar tres tipos de soluciones que nos permiten construir agujeros de gusanos. Además de la ecuación (7.13) podemos ver la extensión del espacio tiempo en el cual estos están contenidos.

1. Caso I:

Cuando $a_1 < 0$ y $a_3 > 0$, el agujero de gusano existe para $0 < r_0 \leq r < \infty$.

Más adelante, para analizar este caso escribiremos $a_1 = -|a_1|$ y así tener una mejor visualización del fenómeno.

2. Caso II:

Cuando $a_1 < 0$ y $a_3 < 0$, la existencia del agujero de gusano se encuentra en el rango $\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} < r_0 < r < \infty$.

En un análisis posterior escribimos $a_1 = -|a_1|$ y $a_3 = -|a_3|$, para este caso. Notemos que:

3. Caso III:

Si $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$, el agujero de gusano existe en $0 < r_0 < r < \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$ y el espacio tiempo queda definido hasta $r \leq a_3/a_1 r_0$.

Podemos notar además que existe un cuarto caso de posibles valores para los parámetros: $a_1 > 0$ y $a_3 < 0$, pero para estos, no se cumple la ecuación (7.12), por lo tanto no existe un agujero de gusano en esta configuración gravitacional.

En la sección que sigue analizaremos los posibles casos donde se cumple la ecuación (7.12) que mantiene los parámetros a_1 y a_3 diferentes de cero.

7.2. Densidad de Energía y Condiciones de Energía

Nos enfocaremos ahora en estudiar la densidad de energía de la materia que sostiene el agujero de gusano, además veremos el tipo de materia que esta presente en el espacio tiempo que sostiene contiene el agujero de gusano.

Analizaremos además las condiciones de energía de los agujeros de gusano y del espacio tiempo que lo contiene, para ver si el tenosr energía momentum cumple o no con las restricciones analizadas en el capítulo 5.

7.2.1. Densidad de Energía

La construcción de agujeros de gusano cuya densidad de energía sea positiva, nos asegura que cualquier observador estático puede medir una densidad de energía positiva para nuestro cuerpo geométrico de estudio. La positividad de la densidad de energía se analiza estudiando las condiciones que debiesen cumplir los parámetros a_1 y a_3 en la ecuación (7.4). Por ello es que se analizan tres casos.

Caso I:

Para el caso en que $a_1 < 0$ y $a_3 > 0$, la densidad de energía (7.4) es dada por:

$$\rho(r) = \frac{-|a_1|r_0(2r - r_0) + r_0 - a_3}{r^2 r_0} \quad (7.16)$$

donde vemos que:

- a) Si $a_3 \geq r_0 - r_0^2|a_1|$, entonces $\rho(r_0) \leq 0$, por lo que la densidad de energía es negativa para todo lugar donde $r > r_0$.
- b) Si $a_3 < r_0 - r_0^2|a_1|$, entonces $\rho(r_0) > 0$ y obtenemos que $\rho(r) < 0$ para $r > r_3$, y $\rho(r) \geq 0$ para $r_0 < r \leq r_3$, donde $r_3 = \frac{r_0 - a_3 + |a_1|r_0^2}{2|a_1|r_0}$

Caso II

Ahora si tenemos valores de $a_1 < 0$ y $a_3 < 0$ ecuación (7.4) queda escrita como:

$$\rho(r) = \frac{-|a_1|r_0(2r - r_0) + r_0 + |a_3|}{r^2 r_0} \quad (7.17)$$

donde podemos considerar dos casos a analizar:

- a) Si $|a_3| \leq r_0^2|a_1| - r_0$, entonces $\rho(r_0) \leq 0$, por lo que la densidad de energía es negativa para todo sector donde $r > r_0$.
- b) Si $|a_3| > r_0^2|a_1| - r_0$, entonces $\rho(r_0) > 0$ y obtenemos que $\rho(r) > 0$ para $r_0 < r < r_1$, y $\rho(r) \leq 0$ para $r \geq r_1$, donde $r_1 = \frac{|a_3| + r_0 + |a_1|r_0^2}{2|a_1|r_0}$

Caso III

Finalmente, cuando $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$ la ecuación (7.4) queda como sigue:

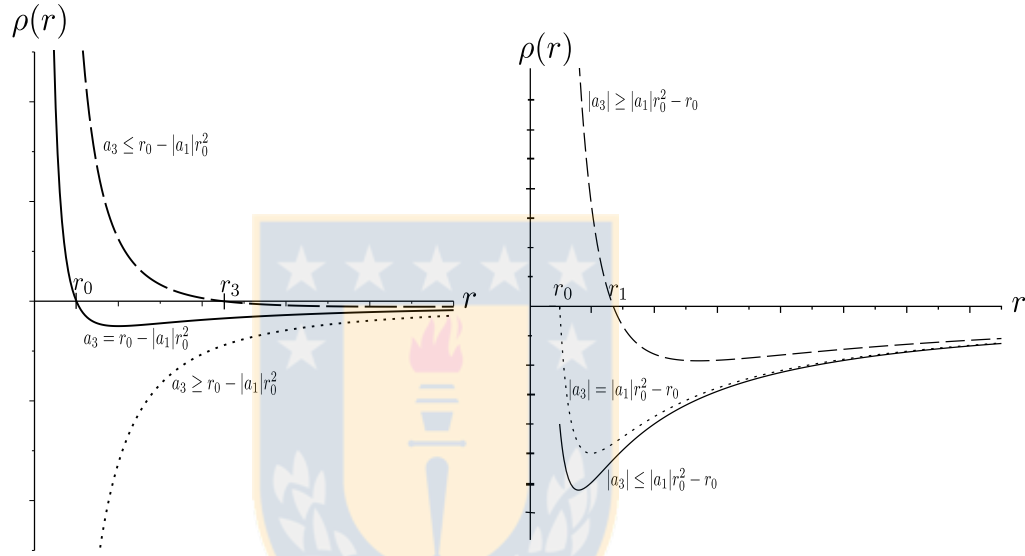
$$\rho(r) = \frac{a_1 r_0 (2r - r_0) + r_0 - a_3}{r^2 r_0} \quad (7.18)$$

De aquí podemos analizar dos posibilidades:

- a) Si $a_3 \leq a_1 r_0^2 + r_0$ entonces $\rho(r_0) \geq 0$, y la densidad de energía $\rho(r) > 0$ para $r > r_0$.
- b) Si $a_3 > a_1 r_0^2 + r_0$ entonces $\rho(r_0) < 0$. Así, obtenemos que $\rho(r) < 0$ para $r_0 < r < r_2$, y $\rho(r) \geq 0$ para $r \geq r_2$, donde $r_2 = \frac{a_3 + a_1 r_0^2 - r_0}{2a_1 r_0}$

En conclusión, para los tres casos analizados es posible construir agujeros de gusano tipo fantasma. En las figura (7.1) y (7.2), se muestra el comportamiento de la densidad de energía para estos tres casos.





- (a) La línea discontinua representa el caso para el cual $\rho(r_0) > 0$. La línea sólida y la línea punteada, representan los casos donde $\rho(r_0) = 0$ y $\rho(r_0) < 0$, respectivamente. Podemos ver que en los casos de la línea sólida y la línea punteada, la densidad de energía es siempre negativa para todo $r > r_0$, mientras que para la línea discontinua, la densidad de energía es positiva para $r_0 \leq r < r_3$, y comienza a ser negativa para $r > r_3$.
- (b) La línea discontinua representa el caso para el cual $\rho(r_0) > 0$. La línea sólida y la línea punteada, representan los casos donde $\rho(r_0) < 0$ y $\rho(r_0) = 0$, respectivamente. Podemos ver que en los casos de la línea sólida y la línea punteada, la densidad de energía es siempre negativa, mientras que para la línea discontinua, la densidad de energía es positiva para $r_0 \leq r < r_1$, y comienza a ser negativa para $r > r_1$.

Figura 7.1: La figura muestra el comportamiento de la densidad de energía para los casos donde: (a) $a_1 < 0$ y $a_3 > 0$; y (b) $a_1 < 0$ y $a_3 < 0$. Fuente: Elaboración propia.

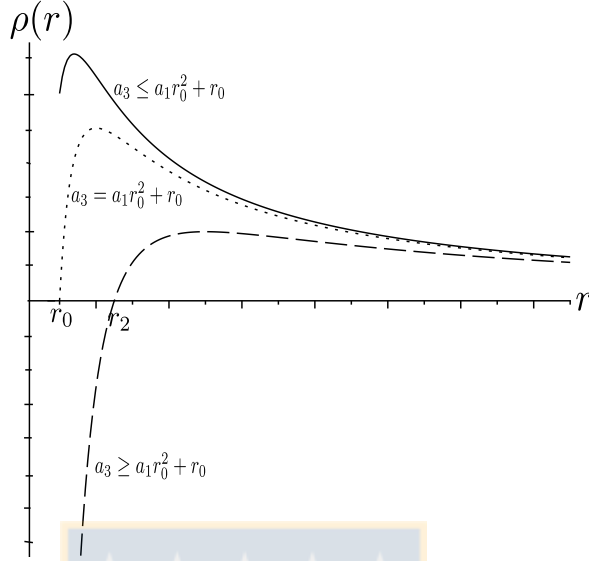


Figura 7.2: La figura muestra el comportamiento de la densidad de energía para el caso $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$. La línea discontinua representa el caso para el cual $\rho(r_0) < 0$. La línea sólida y la línea punteada, representan los casos donde $\rho(r_0) > 0$ y $\rho(r_0) = 0$, respectivamente. Podemos ver que en el caso de la línea sólida, la densidad de energía es siempre positiva, mientras que para la línea discontinua, la densidad de energía es negativa para $r_0 \leq r < r_2$, y comienza a ser positiva para $r > r_2$. Fuente: Elaboración propia.

7.2.2. Condiciones de energía

Sabemos que la violación de la Condiciones de Energía Dominante (DEC)

$$\rho \geq 0, \quad \rho + p_r \geq 0, \quad \rho + p_l \geq 0 \quad (7.19)$$

es una condición necesaria para la existencia de agujeros de gusano estáticos. Debe ser mencionado que la condición de energía fuerte (SEC) (5.18) es satisfecha para el caso en que $\phi(r) = \text{cte}$. Por lo tanto, la relación $\rho + P_r + 2P_l = 0$ será siempre válida.

Si evaluamos la presión radial (7.5) en la garganta nos percatamos que esta es negativa, $P_r = -1/r_0^2$, mientras que la presión lateral se mantiene positiva $P_l = (a_3 - a_1 r_0^2)/2r_0^3$ según la condición de *Flare Out* (7.12) evaluada en la garganta.

Ahora si queremos analizar DEC, debemos fijarnos en los valores que toman los parámetros a_1 y a_3 . Es por ello que analizamos tres casos, a diferencia con los casos anteriores, es que ahora analizaremos todo el espacio tiempo de definición, no solo donde es posible construir el agujero de gusano, sino que en toda la extensión donde vive.

Caso I

Para el caso en que $a_1 < 0$ y $a_3 > 0$, podemos escribir la ecuación (7.16), la presión radial y lateral como:

$$\rho(r) = \frac{-2|a_1|}{r} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 - a_3}{r^2 r_0} \quad (7.20)$$

$$P_r(r) = \frac{|a_1|r^2 - a_3}{r^3} - \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 - a_3}{r^2 r_0} \quad (7.21)$$

$$P_l(r) = \frac{a_3 + |a_1|r^2}{2r^3} \quad (7.22)$$

Podemos ver que la ecuación (7.20) es negativa siempre que:

$$|a_1|r_0^2 + r_0 - a_3 \leq 0 \quad (7.23)$$

Si no se cumple esta expresión, entonces la densidad de energía se anula para algún valor de r cambiando su signo, como se pudo ver en el **Caso I** de la sección 7.2.1.

En tanto que la presión radial puede ser positiva como negativa, y en la garganta tiene un valor de $P_r(r_0) = -1/r_0^2$ que será negativa para todo valor donde $r > r_0$. Mientras que la presión lateral es siempre positiva.

Por otro lado, las ecuaciones (7.7) y (7.8) quedan como:

$$\rho(r) + P_r(r) = -\frac{|a_1|r^2 + a_3}{r^3} \quad (7.24)$$

$$\rho(r) + P_l(r) = -\frac{3|a_1|r^2 - a_3}{2r^3} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 - a_3}{r^2 r_0} \quad (7.25)$$

La expresión (7.24) es negativa para todo valor donde $r > r_0$. En la garganta, $\rho(r_0) + P_l(r_0) = \frac{2r_0 - |a_1|r_0^2 - a_3}{2r_0^3}$, que puede ser tanto negativo como positivo, al igual que la ecuación (7.25).

Caso II

Si los parámetros $a_1 < 0$ $a_3 < 0$ podemos escribir la ecuación (7.17), la presión radial y lateral como:

$$\rho(r) = \frac{-2|a_1|}{r} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 + |a_3|}{r^2 r_0} \quad (7.26)$$

$$P_r(r) = \frac{|a_1|r^2 + |a_3|}{r^3} - \frac{|a_3| + |a_1|r_0^2 + r_0}{r^2 r_0} \quad (7.27)$$

$$P_l(r) = \frac{|a_1|r^2 - |a_3|}{2r^3} \quad (7.28)$$

La densidad de energía puede ser tanto positiva como negativa, como se analizó en el **Caso II** de la sección 7.2.1.

En la garganta, la presión radial es negativa para todo $r > r_0$, y la expresión (7.27) puede ser tanto negativa como positiva, dependiendo de los valores de a_1 y a_3 . Mientras que la presión lateral es negativa para $r < \sqrt{a_3/a_1}$ y positiva para valores de $r > \sqrt{a_3/a_1}$.

Si analizamos ahora las ecuaciones (7.7) y (7.8):

$$\rho(r) + P_r(r) = \frac{|a_3| - |a_1|r^2}{r^3} \quad (7.29)$$

$$\rho(r) + P_l(r) = -\frac{|a_1|r^2 + |a_3|}{r^3} + \frac{|a_3| + |a_1|r_0^2 + r_0}{r^2 r_0} \quad (7.30)$$

Podemos ver que la ecuación (7.29) se anula para $r = \sqrt{|a_3|/|a_1|}$, y que esta es positiva cuando $r \leq \sqrt{|a_3|/|a_1|}$, y negativa cuando $\sqrt{a_3/a_1} < r_0 < r$.

En la garganta encontramos que $\rho(r_0) + P_l(r_0) = 1/r_0^2$, que como vemos es positiva. La ecuación (7.30) puede tomar tanto valores positivos como negativos.

Caso III

Ahora cuando los parámetros $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$, podemos reescribir la densidad, la presión radial y la presión lateral como:

$$\rho(r) = \frac{2a_1}{r} - \frac{a_3 + a_1 r_0^2 - r_0}{r^2 r_0} \quad (7.31)$$

$$P_r(r) = -\frac{a_1}{r} - \frac{a_3}{r^3} + \frac{a_3 + a_1 r_0^2 - r_0}{r^2 r_0} \quad (7.32)$$

$$P_l(r) = \frac{a_3 - a_1 r^2}{2r^3} \quad (7.33)$$

Es claro que la expresión (7.31) es positiva siempre que:

$$a_3 + a_1 r_0^2 - r_0 \leq 0 \quad (7.34)$$

Si esta ecuación no es satisfecha, entonces la densidad de energía se anula para algún r cambiando su signo, como se pudo ver en el **caso III** de la sección 7.2.1.

De la ecuación (7.32) podemos concluir que la presión radial es negativa siempre que se cumpla la ecuación (7.34). Podemos ver además, de la ecuación (7.33) que la presión lateral desaparece para $r = \sqrt{a_3/a_1}$ y ocurre que $P_l > 0$ para $r_0 \leq r < \sqrt{a_3/a_1}$.

Si analizamos el comportamiento de $\rho(r) + P_r(r)$ y de $\rho(r) + P_l(r)$ tenemos para la primera:

$$\rho(r) + P_l(r) = \frac{a_1 r^2 - a_3}{r^3} \quad (7.35)$$

En la garganta esta relación nos dice que:

$$\rho(r) + P_r(r) = \frac{1}{r_0} \left(a_1 - \frac{a_3}{r_0^2} \right) \quad (7.36)$$

Podemos notar que la expresión (7.35) se anula para $r = \sqrt{a_3/a_1}$.

Del **Caso III** de la sección 7.1.1 podemos ver que $r_0 < \sqrt{a_3/a_1}$, lo que implica que $a_1 < a_3/r_0^2$, por lo tanto en la garganta se viola WEC, es decir, $\rho(r) + P_r(r) \leq 0$. Como era de esperarse, la condición de energía débil es violada para $r_0 \leq r < \sqrt{a_3/a_1}$. Para el rango $\sqrt{a_3/a_1} \leq r \leq a_3/a_1$ se cumple que $\rho(r) + P_r(r) \geq 0$, entonces se cumple DEC en este intervalo de valores para la componente radial.

La otra expresión queda como:

$$\rho(r) + P_l(r) = \frac{3a_1}{2r} + \frac{a_3}{2r^3} - \frac{a_3 + a_1r_0^2 - r_0}{r^2r_0} \quad (7.37)$$

Si se cumple con la ecuación (7.34), entonces la ecuación (7.37) es siempre positiva. Y en la garganta del agujero de gusano, tiene un valor de $\rho(r_0) + P_l(r_0) = \frac{a_1r_0^2 - a_3 + 2r_0}{2r_0^3}$, que en general puede ser positivo como negativo.

7.2.3. Agujeros de Gusano de tamaño finito

En esta sección nos enfocaremos en estudiar agujeros de gusano de tamaño finito. Para hacer este estudio nos hemos centrado en el **Caso III**, es decir, consideraremos agujeros de Gusano donde los parámetros a_1 y a_3 son positivos.

Para ésto, estudiaremos los diagramas de embebimiento (7.14) y el rango de validez de éste (7.15), para ello es que nos encausamos en el análisis del término $\Delta = (a_1r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1)^2 - 4a_1a_3$ que nos entrega el número de soluciones reales de la ecuación (7.15).

a) **Caso** $\Delta = 0$

En este caso existe una única raíz para la ecuación (7.15), donde se cumple que $b(r) \geq 0$. Esta condición nos entrega una restricción sobre a_3 dada por

$$a_3 = r_0 + a_1r_0^2 \pm 2r_0\sqrt{a_1r_0} \quad (7.38)$$

entregándonos así dos soluciones para la ecuación (7.15):

$$r_{\pm} = r_0 \pm \sqrt{\frac{r_0}{a_1}} \quad (7.39)$$

Y para este caso, la función de forma queda dada por:

$$b(r) = r_0 + (r - r_0)^2 - 2(r - r_0)\sqrt{a_1r_0} \quad (7.40)$$

Y el agujero de gusano se extiende desde r_0 hasta $r_{max} = \sqrt{\frac{r_0 + a_1 r_0^2 \pm 2r_0 \sqrt{a_1 r_0}}{a_1}}$. Algo que debemos considerar al momento de elegir la rama positiva o negativa de r_{max} es que:

$$r_0 < \sqrt{\frac{r_0 + a_1 r_0^2 - 2r_0 \sqrt{a_1 r_0}}{a_1}}$$

si $a_1 < 1/4r_0$ para la rama negativa de r_{max} . Mientras que para la rama positiva se cumple que:

$$r_0 < \sqrt{\frac{r_0 + a_1 r_0^2 + 2r_0 \sqrt{a_1 r_0}}{a_1}}$$

para cualquier $a_1 > 0$

b) **Caso $\Delta < 0$**

Cuando $\Delta < 0$, no hay soluciones reales para (7.15), pero sucede que $b(r) > 0$. Por lo tanto el embebimiento existe siempre que el parámetro a_3 satisfaga la restricción:

$$r_0(1 + a_1 r_0 - 2\sqrt{a_1 r_0}) < a_3 < r_0(1 + a_1 r_0 + 2\sqrt{a_1 r_0}) \quad (7.41)$$

Recordemos además que los parámetros a_1 y a_3 son positivos, entonces el agujero de gusano obtenido a partir de la restricción (7.41) puede ser embebido de forma completa en el espacio Euclideo, es decir, el espacio tiempo del agujero de gusano y al mismo tiempo su embebimiento, se extienden desde un r_0 hasta un $r_{max} = \frac{a_3}{a_1 r_0}$.

c) **Caso $\Delta > 0$**

Si la condición (7.41) no se cumple, entonces las raíces r_+ y r_- de la ecuación (7.15) son reales, puesto que el determinante Δ es positivo. Así, la función de forma para este caso es positiva en los intervalos $(-\infty, r_-) \cup (r_+, +\infty)$, entonces el diagrama de embebimiento de un agujero de gusano de tamaño finito puede existir parcialmente en un espacio Euclideo restringido por $(-\infty, r_-) \cup (r_+, +\infty)$, donde el agujero de gusano existe desde un r_0 hasta un $r_{max} = \frac{a_3}{a_1 r_0}$.

7.3. Construcción de agujeros de Gusano

En esta parte, nos centraremos en la construcción de agujeros de gusano estáticos tipo fantasma, es decir, agujeros de gusano que cumplan con la condición $P/\rho < -1$. Para realizar este estudio nos enfocamos en el **Caso III**, donde los parámetros a_1 y a_3 son positivos y en la condición (7.34). El cumplimiento de esta ecuación nos asegura que la densidad de energía, y $\rho(r) + P_l(r)$ serán siempre positivas, mientras que la presión radial será negativa en toda su extensión.

Para llevar a cabo este análisis dejaremos fijo los valores de los parámetros a_1 y a_3 para construir ejemplos específicos, y veremos el comportamiento de la densidad de energía, la presión radial y lateral, las condiciones de energía y el parámetro $\omega(r)$.

7.3.1. Agujero de Gusano con densidad de energía positiva

Consideremos los parámetros $a_1 = 1/5$ y $a_3 = 4/5$. Del **Caso III** de la sección 7.1 concluimos que el agujero de gusano se extiende desde $r_0 = 1$ hasta $r_{max} = 2$. La densidad de energía, y la presión radial y lateral estan dada por:

$$\rho(r) = \frac{2}{5r}, \quad P_r(r) = -\frac{r^2+4}{5r^3}, \quad P_l(r) = \frac{4-r^2}{10r^3} \quad (7.42)$$

Es claro que la densidad de energía es positiva para todo valor de r , y la presión radial es negativa. Mientras que la presión lateral es negativa para $1 \leq r < 2$ y positiva para $r > 2$. De la ecuación (7.42), encontramos que:

$$\rho(r) + P_r(r) = \frac{r^2 - 4}{5r^3} \quad (7.43)$$

$$\rho(r) + P_l(r) = \frac{3r^2 + 4}{10r^2} \quad (7.44)$$

Podemos ver que se viola DEC cuando $1 < r < 2$, es decir, $\rho(r) + P_r(r) < 0$. Note además que la métrica (7.3) dada por:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{4}{5} - \frac{r}{5}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (7.45)$$

deja de ser Lorentziana para $r > 4$, por lo tanto, el espacio tiempo se extiende desde la garganta en $r_0 = 1$ hasta $r = 4$

Entonces, el espacio tiempo completo es de tamaño finito, como tambien lo es el agujero de gusano que esta contenido dentro de este.

Se puede ver que el agujero de gusano esta conectado a un espacio tiempo compuesto por una distribución de energía oscura, que se extiende desde $r = 2$ hasta $r = 4$. En dicho sector se cumple DEC, es decir, $\rho(r) + P_r(r) > 0$. En este caso la función de forma es dada por:

$$b(r) = (r - 1) \left(\frac{r}{5} - \frac{4}{5} \right) + r \quad (7.46)$$

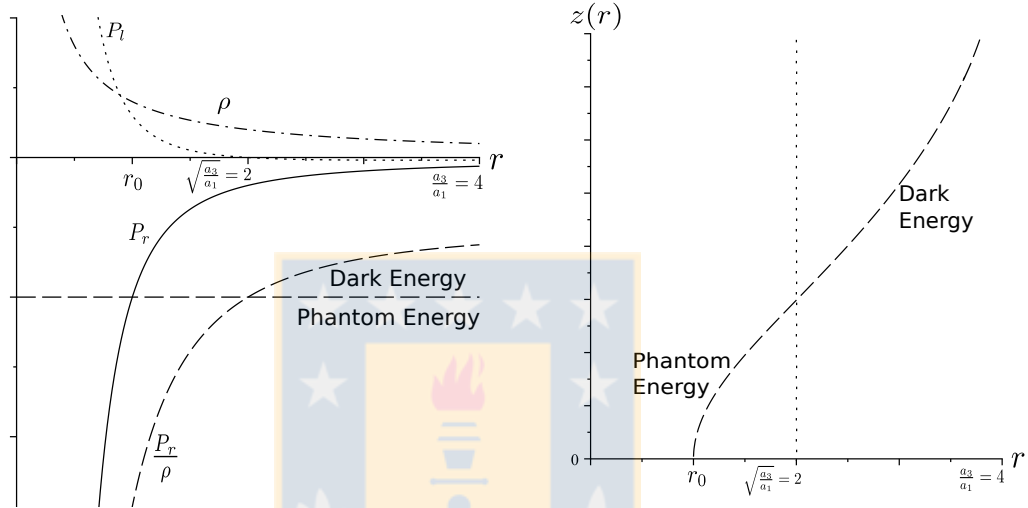
que en general es positiva para cualquier valor de la coordenada radial, en consecuencia, el embebimiento existe para el espacio tiempo completo (7.45).

Ahora, si analizamos el comportamiento del parámetro de estado $\omega(r) = P_r(r)/\rho(r)$, encontramos que:

- Para $1 \leq r < 2$ tenemos un comportamiento tipo fantasma, puesto que $-2.5 \leq \omega \leq -1$.

- Mientras que para $2 \leq r \leq 4$, encontramos que $-1 \leq \omega \leq -0.625$.

Lo que quiere decir que el agujero de gusano está conectado a una distribución de energía oscura. Esto lo podemos visualizar en la figura 7.3, donde además se muestra el comportamiento para las ecuaciones (7.42)-(7.44), para la ecuación de estado $P_r(r)/\rho(r) = \omega(r)$ y su diagrama de embebimiento.



(a) En la figura podemos ver que la densidad de energía es siempre positiva, y la presión radial siempre negativa. La presión lateral es positiva para $1 \leq r < 2$, y negativa para $2 < r \leq 4$. Por otro lado, para $1 \leq r < 2$ la ecuación de estado tiene un caracter tipo fantasma dado por $-2.5\omega(r)/\rho \leq -1$, mientras que para $2 \leq r < 4$ la ecuación de estado se comporta como energía oscura, esto es, $-1 \leq \omega(r) \leq -0.625$.

(b) La función de embebimiento es dada por $z(r) = \int \sqrt{\frac{r^2+4}{5r-r^2-4}} dr$, y su segunda derivada se anula en $r = 2$. El espacio tiempo se extiende desde $r_0 = 1$ hasta $r = 4$, y el agujero de gusano fantasma se extiende desde la garganta hasta $r = 2$, donde un punto de inflexión esta presente. Una distribución de energía oscura existe desde $r = 2$ hasta $r = 4$, la cual esta conectada a un agujero de gusano fantasma. Para $r < 2$, DEC es violada, mientras que para $r \geq 2$, DEC es cumplida.

Figura 7.3: En la figura (a) se muestra el comportamiento de las ecuaciones (7.42)-(7.44) y de la ecuación de estado $P_r(r)/\rho(r)$; y en la figura (b) se muestra el comportamiento de la función de embebimiento, para valores de $a_1 = 1/5$ y $a_3 = 4/5$ en ambos casos. Podemos ver en (a) y (b), que el agujero de gusano fantasma esta conectado a una distribución de energía oscura. Fuente: Elaboración propia.

7.3.2. Agujeros de Gusano Microscópicos

Es interesante notar que la parte del espacio tiempo donde existe el agujero de gusano puede ser arbitrariamente pequeña. Para esto los parámetros a_1 y a_3 deben ser

elegidos de tal manera que cumplan que $\sqrt{a_3/a_1} \approx r_0$. Podemos construir agujeros de gusano microscópicos usando la ecuación (7.34), e imponiendo la igualdad:

$$a_3 + a_1 r_0^2 - r_0 = 0 \quad (7.47)$$

Lo que implica que $a_1 \approx \frac{1}{2r_0}$ y $a_3 \approx \frac{r_0}{2}$.

Como ejemplo, consideraremos el caso en el cual $r_0 = 1$. Podemos construir un agujero de gusano arbitrariamente pequeño haciendo $a_1 = \frac{1}{2} - \delta$ y $a_3 = \frac{1}{2} + \delta$, donde $\delta \approx 0$.

Utilizaremos un valor de $\delta = 0.01$. El agujero de gusano se extiende desde $r_0 = 1$ hasta $r = 1.0202$, y el espacio tiempo total hasta $r = 1.04082$.

Para la densidad de energía y las presiones, tenemos que:

$$\rho(r) = \frac{0.98}{r}, \quad P_r(r) = -\frac{0.51+0.49r^2}{r^3}, \quad P_l(r) = \frac{0.51 - 0.49r^2}{2r^3} \quad (7.48)$$

Claramente $\rho(r) > 0$ y $P_r(r) < 0$ en todas partes donde esta definido el espacio tiempo.

Por otro lado:

$$\rho(r) + P_r(r) = \frac{-0.51 + 0.49r^2}{r^3} \quad (7.49)$$

$$\rho(r) + P_l(r) = \frac{0.51 + 1.47r^2}{2r^3} \quad (7.50)$$

La relación (7.49) es negativa para $1 \leq r < 1.0202$, mientras que se mantiene positiva para $1.0202 \leq r \leq 1.04082$. Para este caso, en el agujero de gusano encontramos que $-1.0204 \leq \omega(r) \leq -1$, y para la distribución de energía oscura del espacio tiempo, se tiene que $-1 \leq \omega(r) \leq -0.9804$.

7.3.3. Agujero de Gusano con densidad de energía negativa

También es posible construir un agujero de gusano finito con una densidad de energía negativa. Para hacer esto posible pedimos que la densidad de energía se anule en $r = \sqrt{a_3/a_1}$. Lo que implica que $\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} = \frac{a_3 + a_1 r_0^2 - r_0}{2a_1 r_0}$, según lo analizado en el **Caso III** de la sección 7.2.1. Esta condición se satisface, exigiendo que:

$$a_1 = \frac{a_3 + r_0 \pm 2\sqrt{a_3 r_0}}{r_0^2} \quad (7.51)$$

Esto nos permite escribir dos ramas de soluciones (una rama positiva y una negativa) para la densidad de energía y las presiones.

$$\rho(r) = -\frac{2(\sqrt{a_3} \pm \sqrt{r_0})(r_0\sqrt{a_3} - (\sqrt{a_3} \pm \sqrt{r_0})r)}{r^2 r_0^2} \quad (7.52)$$

$$P_r(r) = -\frac{((\sqrt{r_0} \pm \sqrt{a_3})r \mp r_0\sqrt{a_3})^2}{r^3 r_0^2} \quad (7.53)$$

$$P_l(r) = \frac{-(\sqrt{r_0} \pm \sqrt{a_3})^2 r^2 + r_0^2 a_3}{2r^3 r_0^2} \quad (7.54)$$

Estas relaciones nos permiten escribir el parámetro de estado:

$$\frac{P_r(r)}{\rho(r)} = -\frac{(\sqrt{r_0} \pm \sqrt{a_3})r \mp r_0\sqrt{a_3}}{2r(\sqrt{r_0} \pm \sqrt{a_3})} \quad (7.55)$$

Para un ejemplo específico, tomamos los valores $r_0 = 1$, $a_1 = 1$ y $a_3 = 4$. Para la rama negativa, las expresiones (7.52)-(7.54) quedan como:

$$\rho(r) = \frac{2r - 4}{r^2} \quad (7.56)$$

$$P_r(r) = -\frac{(r - 2)^2}{r^3} \quad (7.57)$$

$$P_l(r) = \frac{4 - r^2}{2r^3} \quad (7.58)$$

y además tenemos que

$$\rho(r) + P_r(r) = \frac{r^2 - 4}{r^3} \quad (7.59)$$

$$\rho(r) + P_l(r) = \frac{(3r - 2)(r - 2)}{2r^3} \quad (7.60)$$

El comportamiento general de estas magnitudes físicas es mostrado en la figura 7.4.

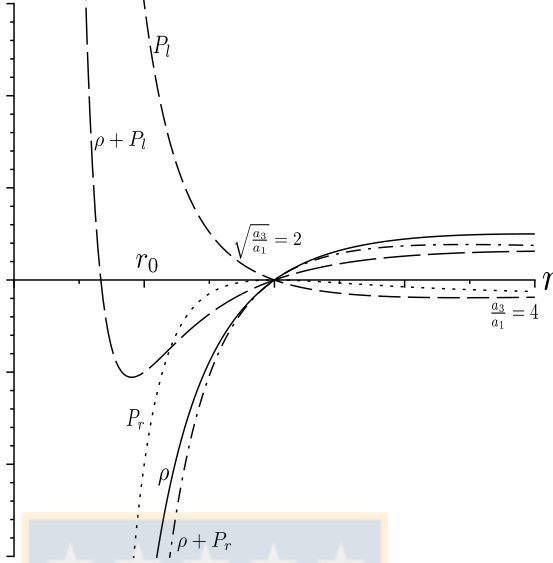


Figura 7.4: La figura muestra el comportamiento de las ecuaciones (7.56)-(7.60). Podemos ver, que la densidad de energía es negativa para $1 \leq r < 2$ y positiva para $2 < r \leq 4$, mientras que la presión radial es siempre negativa, la presión lateral es positiva para $1 \leq r < 2$, y negativa para $2 < r \leq 4$. por otro lado, $\rho(r) + P_r(r)$ y $\rho(r) + P_l(r)$ son negativas para $1 \leq r < 2$, y positivas para $2 < r \leq 4$. Fuente: Elaboración propia.

7.3.4. Agujero de gusano con dependencia de energía mixta

Estamos ahora interesados en la construcción de un agujero de gusano finito con una densidad de energía que muestre una dependencia mixta de fluidos, es decir, que la densidad de energía cambie su signo para alguna esfera de radio $r_0 < r_2 < a_3/a_1$, donde $\rho(r_2) = 0$, y $r_2 = \frac{a_3 + r_0^2 a_1 - r_0}{2a_1 r_0}$. Anteriormente habíamos discutido que si la densidad de energía se anula para algún r , entonces en la garganta siempre $\rho(r_0) < 0$. Por lo tanto, si $r_0 < r_2 < \sqrt{a_3/a_1}$, entonces $\rho(r) < 0$ en este rango, y para $r_2 < r < a_3/a_1$ la densidad de energía es positiva. De este modo, la condición $r_0 < \frac{a_3 + a_1 r_0^2 - r_0}{2a_1 r_0} < \sqrt{a_3/a_1}$ implica que el parámetro a_1 satisface que:

$$0 < a_1 < \frac{1}{4}(1 + \sqrt{17})$$

mientras que el parámetro a_3 satisface la condición

$$\frac{-a_1^2 + a_1 + 2}{a_1} < a_3 < \frac{-a_1^2 + a_1 + 2}{a_1} + 2\sqrt{-\frac{a_1^4 - a_1^3 - 1}{a_1^6}}$$

Podemos construir un agujero de gusano que cumpla con tales requisitos. Por ejemplo, para $r_0 = 1$, $a_1 = 1$ y $a_3 = 3$, obteniendo las cantidades:

$$\begin{aligned}\rho(r) &= \frac{2r-3}{r^2} \\ P_r(r) &= \frac{-r^2+3r-3}{r^3} \\ P_l(r) &= \frac{3-r^2}{2r^3} \\ \rho(r) + P_r(r) &= \frac{r^2-3}{r^3} \\ \rho(r) + P_l(r) &= \frac{3(r-1)^2}{2r^3}\end{aligned}$$

Los cambios de signo para la densidad de energía, pueden también ocurrir para algún radio entre $\sqrt{a_3/a_1}$ y a_3/a_1 . En este caso, exigimos que $a_3 > a_1 + 2\sqrt{a_1} + 1$. Esto implica que para la estructura del agujero de gusano, de la densidad de energía exótica es siempre positiva. mientras que para una distribución anisotrópica esféricamente simétrica de materia que respeta DEC, la densidad de energía cambia su signo.

Podemos también construir soluciones de agujeros de gusano para los cuales la densidad de energía es negativa para todo el espacio tiempo, es decir, en $r_0 \leq r \leq a_3/a_1$. Exigiendo que la densidad de energía se anule en a_3/a_1 , podemos asegurar que $\rho(r) < 0$ en todo el espacio.

De la condición $\frac{a_3+r_0^2a_1-r_0}{2a_1r_0} = \frac{a_3}{a_1}$, obtenemos que si $r_0 = 1/2$, se cumple que $a_1 = 2$ y $a_3 > 2$. Ahora si la garganta esta localizada entre $0 < r_0 < 1/2$, entonces $0 < a_1 < \frac{r_0}{r_0^2-2r_0+1}$, mientras que para $\frac{1}{2} < r_0 \leq a_3/a_1$ (con $r_0 \neq 1$) se cumple que $a_1 > \frac{r_0}{r_0^2-2r_0+1}$. Note que para $r_0 = 1$ no es posible la construcción de tal espacio tiempo con $\rho(a_3/a_1) = 0$.

Finalmente, podemos construir un agujero de gusano utilizando todo lo analizado, es por ello que para hacer este diagrama nos enfocamos en la sección 7.3.1. Utilizamos los mismos valores para los parámetros $a_1 = 1/5$ y $a_3 = 4/5$. Así el diagrama tridimensional de la figura 7.3.a mostrado en la figura 7.5 es:

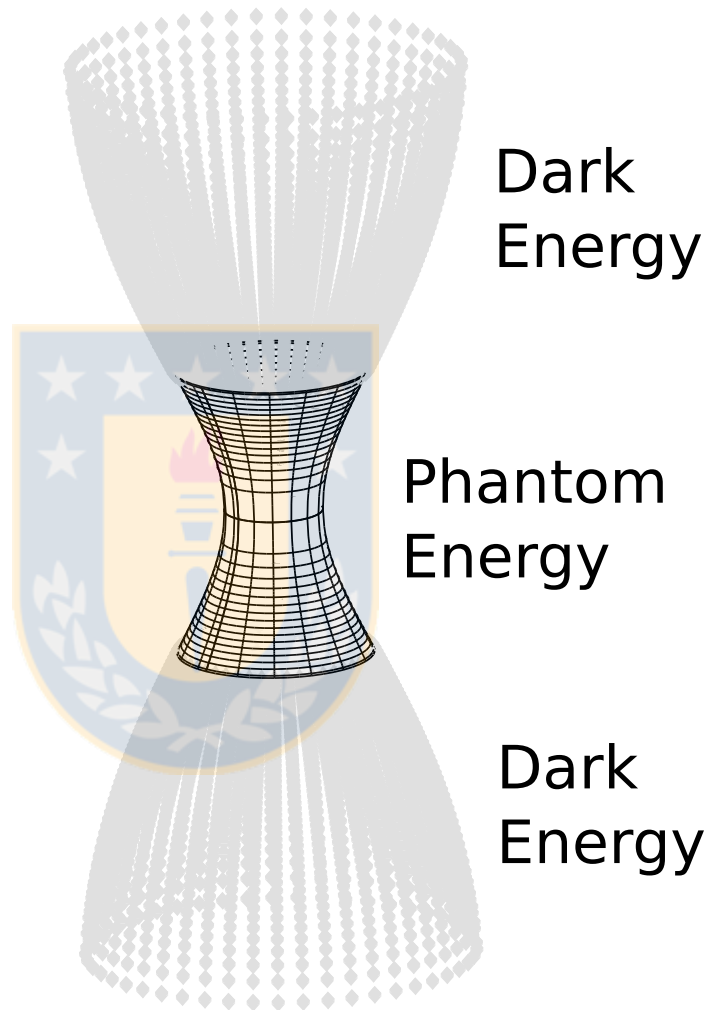


Figura 7.5: Las líneas negras de la figura muestran el intervalo donde existe un agujero de gusano fantasma, es decir, entre $1 \leq r \leq 2$. Los puntos grises muestran el sector del espacio tiempo que esta compuesto por energía oscura, este sector esta limitado por en $2 < r \leq 4$. Fuente: Elaboración propia.

Podemos ver en la figura, que un agujero de gusano compuesto por energía fantasma existe en el intervalo $1 \leq r \leq 2$, este agujero de gusano fantasma esta conectado con un espacio tiempo compuesto por energía oscura, la energía oscura se extiende en el intervalo $2 < r \leq 4$.

Capítulo 8

Discusión final y Conclusiones

En esta investigación hemos encontrado nuevos agujeros de gusano estaticos atravesables simétricamente esféricos con una función de forma cuadrática, cuya dependencia es sobre la coordenada radial. Mostramos además agujeros de gusano soportados por una distribución de **energía fantasma**.

Para realizar este estudio hemos analizado el caracter variable de la ecuación de estado $\omega(r) = \frac{P_r(r)}{\rho(r)}$. Principalmente nuestro estudio se centró en agujeros de gusano soportados por una materia exótica con densidad de energía positiva, vista por cualquier observador estático.

Una característica importante de la descripción de agujeros de gusano con una función de forma de tipo cuadrática, es que esta incluye agujeros de gusano tipo fantasma que se extienden hasta el infinito, al igual que el espacio tiempo que los contienen. Encontramos además, bajo este modelo, un espacio tiempo de tamaño finito compuesto por un agujero de gusano tipo fantasma unido a una distribución esféricamente simétrica, inhomogenea y anisotrópica de energía oscura.

Por último, se encontraron soluciones de agujeros de gusano con materia fantasma confinada a una región cercana a la garganta del agujero de gusano, que esta conectada a una distribución de energía oscura.

En la parte del espacio tiempo donde esta definido el agujero de gusano la condición de energía dominante no se cumple, como era de esperarse para agujeros de gusano estáticos, mientras que en la parte donde existe la distribución de energía oscura, si se cumple con DEC.

En general, para agujeros de gusano de tamaño finito, que se construyen a partir de la restricción $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$, para la función de forma $b(r) = (r - r_0) \left(a_1 r - \frac{a_3}{r_0} \right) + r$, la materia exótica de la que esta formado el agujero de gusano, se extiende desde la garganta en r_0 a una esfera de radio $r_{max} = \sqrt{a_3/a_1}$, y el espacio tiempo completo se extiende hasta un $r = a_3/a_1$. Ahora, la fuente de materia de la configuración

gravitacional para $\sqrt{a_3/a_1} \leq r \leq a_3/a_1$ es de energía oscura, y en este intervalo la condición de energía débil es satisfecha.

Finalmente, se muestra una imagen tridimensional de un agujero de gusano fantasma, conectado a un espacio tiempo con una distribución de energía oscura.



Bibliografía

- [1] A. Einstein and N. Rosen (1935), “The Particle Problem in the General Theory of Relativity,” *Phys. Rev.* **48**, 73.
- [2] D. McMahon (2006), “Relativity Demystified: A self-teaching guide”, USA: McGraw-Hill Companies, Inc.
- [3] D. Wang and X. H. Meng, (2016), “Wormholes supported by phantom energy from Shan-Chen cosmological fluids,” *Eur. Phys. J. C* **76**, no. 3, 171.
- [4] E. Poisson (2004), “A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics” (primera edición), USA: Cambridge University Press.
- [5] F. S. N. Lobo, F. Parsaei and N. Riazi, (2013), “New asymptotically flat phantom wormhole solutions,” *Phys. Rev. D* **87**, no. 8, 084030.
- [6] F. S. N. Lobo, (2005), “Phantom energy traversable wormholes,” *Phys. Rev. D* **71**, 084011.
- [7] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko (2000), “Classical Mechanics” (tercera edición), USA: Addison Wesley.
- [8] J. A. Gonzalez, F. S. Guzman, N. Montelongo-Garcia and T. Zannias, (2009), “On Wormholes supported by phantom energy,” *Phys. Rev. D* **79**, 064027.
- [9] M. Jamil, P. K. F. Kuhfittig, F. Rahaman and S. A. Rakib, (2010), “Wormholes supported by polytropic phantom energy,” *Eur. Phys. J. C* **67**, 513.
- [10] M. Jamil and M. U. Farooq, (2010), “Phantom Wormholes in (2+1)-dimensions,” *Int. J. Theor. Phys.* **49**, 835.
- [11] M. Cataldo and P. Meza, (2013), “Phantom evolving wormholes with big rip singularities,” *Phys. Rev. D* **87**, no. 6, 064012.
- [12] M. Cataldo and S. del Campo, (2012), “Two-fluid evolving Lorentzian wormholes,” *Phys. Rev. D* **85**, 104010.

- [13] M. Cataldo, P. Meza and P. Minning, (2011), “N-dimensional static and evolving Lorentzian wormholes with cosmological constant,” *Phys. Rev. D* **83**, 044050.
- [14] ; M. Cataldo, S. del Campo, P. Minning and P. Salgado, (2009), “Evolving Lorentzian wormholes supported by phantom matter and cosmological constant,” *Phys. Rev. D* **79**, 024005.
- [15] M. Cataldo, P. Labrana, S. del Campo, J. Crisostomo and P. Salgado, (2008), “Evolving Lorentzian wormholes supported by phantom matter with constant state parameters,” *Phys. Rev. D* **78**, 104006.
- [16] M. Cataldo, F. Aróstica and S. Bahamonde, (2013), “(N+1)-dimensional Lorentzian evolving wormholes supported by polytropic matter,” *Eur. Phys. J. C* **73**, no. 8, 2517.
- [17] M. S. Morris and K. S. Thorne, (1988), “Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity,” *Am. J. Phys.* **56**, 395.
- [18] ; M. S. Morris, K. S. Thorne and U. Yurtsever, (1988), “Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition,” *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1446 .
- [19] M. Visser, (AIP, New York, 1995), *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking*.
- [20] M. Jamil and M. U. Farooq, (2010), “Phantom Wormholes in (2+1)-dimensions,” *Int. J. Theor. Phys.* **49**, 835.
- [21] M. Jamil and M. Akbar, “Wormhole Thermodynamics at Apparent Horizons,” arXiv:0911.2556 [hep-th]
- [22] M. U. Farooq, M. Akbar and M. Jamil, (2010), “Dynamics and Thermodynamics of (2+1)-Dimensional Evolving Lorentzian Wormhole,” *AIP Conf. Proc.* **1295**, 176.
- [23] M. Visser (1996), “Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking”, USA, N.Y. :Springer.
- [24] Ø, Grøn and S. Hervik (2004), “Einstein’s General Theory of Relativity”(Version 21st November 2004).
- [25] P. K. F. Kuhfittig, (2009), “A Single model of traversable wormholes supported by generalized phantom energy or Chaplygin gas,” *Gen. Rel. Grav.* **41**, 1485.
- [26] P. K. F. Kuhfittig, (1999), “A wormhole with a special shape function,” *Am. J. Phys.* **67**, 125.

- [27] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski and N. N. Weinberg, (2003), “Phantom energy and cosmic doomsday,” *Phys. Rev. Lett.* **91**, 071301.
- [28] R. Lukmanova, A. Khaibullina, R. Izmailov, A. Yanbekov, R. Karimov and A. A. Potapov, (2016), “Note on the Schwarzschild-phantom wormhole,” *Indian J. Phys.* **90**, no. 11, 1319.
- [29] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, (2010), “Passage of radiation through wormholes of arbitrary shape,” *Phys. Rev. D* **81**, 124036.
- [30] S. Bahamonde, M. Jamil, P. Pavlovic and M. Sossich, (2016) “Cosmological wormholes in $f(R)$ theories of gravity,” *Phys. Rev. D* **94**, no. 4, 044041.
- [31] S. Bhattacharya and S. Chakraborty, “Evolving Wormholes in a viable $f(R)$ Gravity formulation,” arXiv:1506.03968 [gr-qc]
- [32] S. Carlip (2003), “Quantum Gravity in 2+1 Dimensions”, United Kingdom: Cambridge University Press
- [33] S. H. Mazharimousavi and M. Halilsoy, (2016), “Wormhole solutions in $f(R)$ gravity satisfying energy conditions,” *Mod. Phys. Lett. A* **31**, no. 34, 1650192.
- [34] S. V. Sushkov, (2005), “Wormholes supported by a phantom energy,” *Phys. Rev. D* **71**, 043520.
- [35] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis (1973), “The large scale structure of space-time”, USA: Cambridge University Press.
- [36] T. Bandyopadhyay, U. Debnath, M. Jamil, Faiz-ur-Rahman and R. Myrzakulov, (2015), “Generalized Second Law of Thermodynamics of Evolving Wormhole with Entropy Corrections,” *Int. J. Theor. Phys.* **54**, no. 6, 1750.
- [37] ; Y. Heydarzade, N. Riazi and H. Moradpour, (2015), “Phantom Wormhole Solutions in a Generic Cosmological Constant Background,” *Can. J. Phys.* **93**, no. 12, 1523.
- [38] Y. Heydarzade, N. Riazi and H. Moradpour, (2015), “Phantom Wormhole Solutions in a Generic Cosmological Constant Background,” *Can. J. Phys.* **93**, no. 12, 1523.