



UNC

Universidad  
Nacional  
de Córdoba



FAMAF

Facultad de Matemática,  
Astronomía, Física y  
Computación

# Aplicaciones de transporte radiativo relativista a la astrofísica de estrellas de neutrones y objetos compactos exóticos

por  
Lic. Joaquín Pelle

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación como  
parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Astronomía de la

Universidad Nacional de Córdoba

2 de Agosto, 2024

*Director* Dr. Oscar A. Reula

Tribunal Especial

*Titulares:*

Dr. Diego García Lambas  
FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba  
Dr. Federico García  
FCAG, Universidad Nacional de La Plata  
Dr. Emanuel Gallo  
FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba

*Suplentes:*

Dr. Mariano Domínguez  
FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba  
Dr. Ernesto Eiroa  
FCEyN, Universidad de Buenos Aires



Este trabajo se distribuye bajo una licencia

Creative Commons Atribución - No Comercial - Sin Obra Derivada 4.0 Internacional.







# Resumen

En esta tesis realizamos investigaciones sobre el comportamiento de la materia bajo el régimen extremo del campo gravitacional de objetos compactos tales como estrellas de neutrones, estrellas de bosones y núcleos galácticos compactos de materia oscura fermiónica, haciendo énfasis, particularmente, en las señales electromagnéticas producidas en sus entornos.

Inicialmente, investigamos la emisión térmica de rayos X producida en púlsares de milisegundo impulsados por rotación. Usualmente, se supone que esta radiación proviene de regiones sobre la superficie estelar calentadas por el bombardeo de partículas relativistas aceleradas en la magnetosfera. A partir de nuestras simulaciones *force-free* de la magnetosfera, conectamos la estructura global de los campos y corrientes con la emisión local sobre la superficie, a través de un modelo en que definimos las regiones de emisión como aquellas donde la corriente es de tipo espacial, y determinamos la temperatura por medio del balance entre la potencia depuesta por la corriente y la potencia radiada. Para el cálculo de espectros y curvas de luz, que implica el transporte de la radiación emitida sobre la geometría relativista alrededor de la estrella, desarrollamos un código numérico de trazado de rayos y transporte radiativo en relatividad general, una herramienta común a las investigaciones que componen esta tesis. Finalmente, comparando nuestro modelo con observaciones altamente precisas de púlsares, obtenemos buenos ajustes. En particular, para uno de estos púlsares, nuestro modelo ofrece una interpretación alternativa que evita la necesidad de campos magnéticos significativamente no dipolares que fuera conjeturada anteriormente en la literatura.

Posteriormente, en el marco de un modelo de materia oscura fermiónica compatible con observaciones galácticas desde la escala del núcleo hasta la del halo, estudiamos la radiación térmica de un disco alrededor de un núcleo compacto de materia oscura en distintas configuraciones. Genéricamente, encontramos imágenes con depresiones centrales de brillo y una estructura anular circundante, aún no existiendo un horizonte de eventos. Además, verificamos la ausencia de anillos de luz, una característica distintiva de este modelo respecto al caso de un agujero negro supermasivo, que podría ser contrastable observationalmente en el futuro cercano.

Finalmente, en otro proyecto, exploramos propiedades observacionales de estrellas de bosones, tomando como fuente de emisión un modelo simple de disco de acreción geométricamente delgado y ópticamente grueso. Analizamos la radiación térmica del disco y el ensanchamiento de líneas de emisión en estrellas de bosones con autointeracciones de cuarto y sexto orden, mostrando el potencial de algunos de estos modelos como imitadores de agujeros negros.



# Abstract

In this thesis, we conducted research on the behavior of matter under the extreme regime of the gravitational field of compact objects such as neutron stars, boson stars, and galactic nuclei of fermionic dark matter, with particular emphasis on the electromagnetic signals produced in their environments.

Initially, we investigated the thermal X-ray emission produced in rotation-powered millisecond pulsars. It is usually assumed that this radiation comes from regions on the stellar surface heated by the bombardment of relativistic particles accelerated in the magnetosphere. Using our *force-free* simulations of the magnetosphere, we connected the global structure of the fields and currents to the local emission on the surface, through a model in which we defined the emission regions as those where the current is spacelike, and determined the temperature by balancing the power deposited by the current and the radiated power. For calculating spectra and light curves, which involve the transport of radiation emitted over the relativistic geometry around the star, we developed a numerical code for ray tracing and radiative transport in general relativity, a common tool in the research that composes this thesis. Finally, by comparing our model with highly accurate observations of pulsars, we achieved good fits. In particular, for one of these pulsars, our model provides an alternative interpretation that avoids the need for significantly non-dipolar magnetic fields that had been conjectured earlier in the literature.

Subsequently, within the framework of a fermionic dark matter model compatible with galactic observations from the core to the halo scale, we studied the thermal radiation of a disk around a compact dark matter core in various configurations. Generically, we found ring-like featured images, even in the absence of an event horizon. Additionally, we verified the absence of light rings, a distinctive feature of this model compared to the case of a supermassive black hole, that might be observationally contrasted in the near future.

Finally, in another project, we explored the observational properties of boson stars, using a simple model of a geometrically thin and optically thick accretion disk as a source of emission. We analyzed the thermal radiation of the disk and the broadening of emission lines in boson stars with quartic and sextic self-interactions, demonstrating the potential of some of these models as black hole mimickers.



# Agradecimientos

Deseo expresar mi profunda gratitud a las personas e instituciones que contribuyeron a este trabajo y a mi desarrollo académico durante esta etapa.

A mi director, Leco, por su guía, por la amplitud y profundidad de sus enseñanzas, y sobre todo por su calidad humana y su amistad. A Fede Carrasco, por su calidez, por confiar en mis capacidades y por ayudarme a abrir puertas para mi desarrollo profesional. A Manuela Campanelli y Masaru Shibata, por sus valiosos consejos y por recibirme cálidamente en sus grupos de investigación, brindándome oportunidades únicas para mi crecimiento académico. A Carlos Palenzuela, por ayudarme también a progresar en mi carrera.

A los miembros del jurado, Diego García Lambas, Federico García y Emanuel Gallo, por su interés en este trabajo y las valiosas sugerencias que han enriquecido tanto el mismo como sus continuaciones futuras. También a los miembros suplentes, Mariano Domínguez y Ernesto Eiroa, por su predisposición a evaluar esta tesis. A los miembros de mi Comisión Asesora, Federico Stasyszyn, Omar Ortiz y Carlos Kozameh, por su seguimiento durante mi doctorado.

A Nicolás Wolovick y Carlos Bederián, por su ayuda con el uso de las máquinas del CCAD y la optimización de códigos numéricos.

A Gustavo Dotti, por sus extraordinarias clases de Simetrías en Relatividad General y Teorías de Campos.

A la Universidad Nacional de Córdoba y a la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, por la formación. Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, por otorgarme la beca doctoral que posibilitó mis estudios de posgrado. Al Centro de Cómputo de Alto Desempeño, por las herramientas computacionales indispensables para los resultados de esta tesis. Al Center for Computational Relativity and Gravitation del Rochester Institute of Technology y al Max Planck Institute for Gravitational Physics, por financiar mis respectivas estadías en esos centros de investigación.

A todos los colegas con quienes he tenido provechosas discusiones científicas. Entre ellos, a Fede Carrasco, Pablo Montes, Daniela Stauber, Martín Abrudsky, Fabrizio Venturi, Daniele Viganò, Carlos Palenzuela, Manuela Campanelli, Carlos Lousto, Scott Noble, Fede López Armengol, Edu Gutiérrez, Luciano Combi, Liwei Ji, Jay Kalinani, Mark Avara, Lorenzo Ennoggi, Kaitlyn Porter, Masaru Shibata, Kunihito Ioka, Enping Zhou, Carlos Argüelles, Florencia Vieyro, Martín Mestre, Valentina Crespi, Carolina Millauro, Daniela Pérez, João Luis Rosa, Mário Raia Neto, Emanuel Gallo, Jonathan Claros, Osvaldo Moretti, Marcelo Rubio, Fernando Ábalos, Bernardo Araneda, Miguel Megevand, Ezequiel Boero y Juan Perotti.

A todos mis amigos, del colegio, del Obser, de la Oficina 324, del Grupo de Relatividad y de la vida, por estar presentes, tanto cerca como lejos, y por hacer la vida más

## VIII

amena. A Juli, por su amor y compañía, que me ha dado felicidad y ha sido mi sostén en los momentos más desafiantes de esta etapa. Finalmente, a mi familia, por su apoyo incondicional, que ha sido imprescindible a lo largo de este camino.

# Publicaciones

Esta tesis incluye resultados de artículos que han sido publicados o enviados para publicación en revistas internacionales con referato:

1. Pelle, J., Reula, O., Carrasco, F., & Bederian, C. (2022). Skylight: A new code for general-relativistic ray-tracing and radiative transfer in arbitrary spacetimes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 515(1), 1316-1327.
2. Carrasco, F., Pelle, J., Reula, O., Viganò, D., & Palenzuela, C. (2023). Relativistic force-free models of the thermal X-ray emission in millisecond pulsars observed by NICER. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 520(2), 3151-3163.
3. Pelle, J., Argüelles, C., Vieyro, F., Crespi, V., Millauro, C., Mestre, M., Reula, O., & Carrasco, F. (2024). Imaging fermionic dark matter cores at the center of galaxies. Manuscrito enviado para publicación.
4. Rosa, J. L., Pelle, J., & Pérez, D. (2024). Accretion disks and relativistic line broadening in boson star spacetimes. arXiv preprint arXiv:2403.11540. Manuscrito enviado para publicación.

Además, los siguientes artículos fueron realizados durante el desarrollo de esta tesis, aunque no se incluyen en la misma:

1. Neto, M. R., Pérez, D., & Pelle, J. (2023). The shadow of charged traversable wormholes. *International Journal of Modern Physics D*, 32(2), 2250137.
2. Porter, K., Noble, S. C., Gutierrez, E. M., Pelle, J., Campanelli, M., Schnittman, J., & Kelly, B. J. (2024). A parameter study of the electromagnetic signatures of an analytical mini-disk model for supermassive binary black hole systems. arXiv preprint arXiv:2407.04089. Manuscrito enviado para publicación.



## *Software*

En el marco de este trabajo, desarrollamos el código `skylight`, un código para trazado de rayos y transporte radiativo en espacio–tiempos arbitrarios. Este código ha sido esencial para la producción de los resultados presentados. `skylight` está disponible públicamente en [github.com/joaquinpelle/Skylight.jl](https://github.com/joaquinpelle/Skylight.jl).



# Índice general

Índice de figuras	XV
Índice de tablas	XVII
Lista de acrónimos	XIX
<b>1. Introducción</b>	1
<b>2. Transporte radiativo relativista</b>	5
2.1. Ecuación de transporte . . . . .	5
2.2. Descripción del código numérico . . . . .	6
2.2.1. Trazado de rayos . . . . .	8
2.2.2. Método de emisor a observador . . . . .	9
2.2.3. Método de observador a emisor . . . . .	11
2.3. Verificación del trazado de rayos . . . . .	12
2.3.1. Conservación de las constantes de movimiento en el espacio–tiempo de Kerr . . . . .	12
2.3.2. Comparación con la función de trazado de rayos . . . . .	14
2.3.3. Interpolación de una métrica numérica . . . . .	15
2.4. Tests astrofísicos . . . . .	15
2.4.1. Ensanchamiento relativista de una línea de emisión en un disco de acreción delgado . . . . .	15
2.4.2. Círculo caliente orbitando un agujero negro de Schwarzschild . . . . .	18
2.4.3. Emisión de rayos X de un círculo caliente sobre una estrella de neutrones . . . . .	21
2.5. Tests de convergencia . . . . .	23
2.5.1. Método de observador a emisor . . . . .	23
2.5.2. Método de emisor a observador . . . . .	24
<b>3. Emisión térmica de rayos X en púlsares de milisegundo</b>	27
3.1. Introducción . . . . .	27
3.2. Modelo astrofísico . . . . .	29
3.2.1. Estrella de neutrones . . . . .	29
3.2.2. Magnetósfera del púlsar . . . . .	29
3.2.3. Regiones de emisión sobre la superficie estelar . . . . .	30
3.2.4. Mapa de corrientes a temperaturas . . . . .	31
3.2.5. Intensidad específica de la radiación emergente . . . . .	31

3.2.6. Espacio de parámetros . . . . .	32
3.3. Metodología . . . . .	32
3.3.1. Simulaciones <i>force-free</i> . . . . .	33
3.3.2. Cálculo de espectros y curvas de luz . . . . .	34
3.4. Resultados . . . . .	34
3.4.1. Regiones de emisión sobre la superficie estelar . . . . .	34
3.4.2. Curvas de luz y espectros . . . . .	35
3.5. Conclusiones . . . . .	42
<b>4. Imágenes de núcleos de materia oscura fermiónica en centros galácticos</b>	<b>45</b>
4.1. Introducción . . . . .	45
4.2. Modelo astrofísico . . . . .	46
4.2.1. Materia oscura fermiónica . . . . .	46
4.2.2. Disco de acreción . . . . .	47
4.3. Resultados . . . . .	48
4.4. Conclusiones . . . . .	52
<b>5. Radiación de discos de acreción alrededor de estrellas de bosones</b>	<b>55</b>
5.1. Introducción . . . . .	55
5.2. Modelo astrofísico . . . . .	56
5.2.1. Estrella de bosones . . . . .	56
5.2.2. Disco de acreción . . . . .	58
5.3. Resultados . . . . .	59
5.3.1. Emisión térmica . . . . .	60
5.3.2. Ensanchamiento relativista de líneas de emisión . . . . .	60
5.4. Conclusiones . . . . .	65
<b>6. Comentarios finales</b>	<b>69</b>
<b>A. Espacio–tiempo de Kerr en coordenadas cartesianas de Kerr–Schild</b>	<b>85</b>
<b>B. Método de emisor a observador en simetría helicoidal</b>	<b>87</b>
<b>C. Aproximación de plano imagen</b>	<b>89</b>
<b>D. Procedimientos para ajustar las observaciones de rayos X de MSPs</b>	<b>91</b>
<b>E. Distancia del punto de observación en el modelo RAR</b>	<b>93</b>

# Índice de figuras

2.1. Errores absolutos de las constantes de movimiento . . . . .	13
2.2. Errores relativos de las constantes de movimiento . . . . .	13
2.3. Errores angulares del test de la función de trazado de rayos . . . . .	14
2.4. Errores angulares del test de interpolación de una métrica numérica . . . . .	16
2.5. Ensanchamiento relativista de una línea de emisión en un disco de acreción alrededor de un agujero negro rotante (observador a emisor) . . . . .	17
2.6. Ensanchamiento relativista de una línea de emisión en un disco de acreción alrededor de un agujero negro rotante (emisor a observador) . . . . .	17
2.7. Imagen de un disco de acreción alrededor de un agujero negro rotante extremo	18
2.8. Espectrograma del test del círculo caliente orbitante (observador a emisor)	20
2.9. Curvas de luz del test del círculo caliente orbitante (observador a emisor) .	20
2.10. Curvas de luz del test del círculo caliente orbitante (emisor a observador) .	21
2.11. Curvas de luz del test SD1c . . . . .	22
2.12. Curvas de luz del test SD1d . . . . .	22
2.13. Curvas de luz del test SD1e . . . . .	23
2.14. Test de convergencia del método de observador a emisor . . . . .	24
2.15. Test de convergencia del método de emisor a observador . . . . .	25
3.1. Regiones de emisión de rayos X de nuestro modelo . . . . .	36
3.2. Densidades de carga y corriente eléctrica en la magnetósfera del púlsar . .	37
3.3. Mejor ajuste para PSR J0437–4715 con cuerpo negro anisotrópico . . . . .	39
3.4. Mejor ajuste para PSR J1231–1411 con cuerpo negro anisotrópico. . . . .	40
3.5. Mejor ajuste para PSR J2124–3358 con cuerpo negro anisotrópico. . . . .	41
3.6. Mejor ajuste para PSR J0030–0451 con cuerpo negro anisotrópico. . . . .	41
3.7. Mejor ajuste para PSR J0030+0451 con atmósfera de Hidrógeno. . . . .	43
3.8. Mejor ajuste para PSR J0437–4715 con atmósfera de Hidrógeno. . . . .	43
3.9. Mejor ajuste para PSR J1231–1411 con atmósfera de Hidrógeno. . . . .	44
4.1. Espectros térmicos de discos de acreción en el modelo RAR . . . . .	49
4.2. Imágenes bolométricas de discos de acreción en el modelo RAR . . . . .	50
4.3. Imágenes bolométricas de discos de acreción alrededor de un agujero negro	51
4.4. Comparación de tamaños de las sombras a $\xi = 45^\circ$ . . . . .	51
4.5. Imágenes bolométricas de un disco en el modelo RAR (tipo Vía Láctea) .	52
5.1. Perfiles de temperatura de discos de acreción alrededor de estrellas de bosones	59
5.2. Imágenes bolométricas de discos de acreción alrededor de estrellas de bosones $\Lambda$ . . . . .	61

5.3. Imágenes bolométricas de discos de acreción alrededor de estrellas de bosones solitónicas . . . . .	62
5.4. Imágenes bolométricas de discos de acreción alrededor de un agujero negro . . . . .	63
5.5. Espectros térmicos de discos de acreción alrededor de estrellas de bosones y agujeros negros . . . . .	63
5.6. Perfiles de emisividad para estrellas de bosones y agujeros negros . . . . .	66
5.7. Ensanchamiento relativista de líneas de emisión alrededor de estrellas de bosones y agujeros negros . . . . .	67
C.1. Esquema del plano imagen . . . . .	89

# Índice de tablas

2.1. Parámetros de los tests del círculo caliente en una estrella de neutrones . . . . .	22
3.1. Parámetros físicos de los MSPs objetivo . . . . .	33
3.2. Parámetros de mejor ajuste con cuerpo negro anisotrópico . . . . .	38
3.3. Temperaturas efectivas y áreas de las regiones de emisión . . . . .	42
3.4. Parámetros de mejor ajuste con atmósfera de Hidrógeno . . . . .	42
4.1. Parámetros de las soluciones RAR . . . . .	48
5.1. Parámetros de las soluciones de estrellas de bosones . . . . .	57
E.1. Normas de las desviaciones en el límite newtoniano . . . . .	94



# Lista de acrónimos

<b>EHT</b>	Event Horizon Telescope (Telescopio de Horizonte de Eventos)
<b>ISCO</b>	Innermost Stable Circular Orbit (Órbita Circular Estable Más Interna)
<b>MSP</b>	Millisecond Pulsar (Púlsar de Milisegundo)
<b>ngEHT</b>	next-generation Event Horizon Telescope (Telescopio de Horizonte de Eventos de próxima generación)
<b>NICER</b>	Neutron Star Interior Composition ExploreR (Explorador de la Composición Interior de Estrellas de Neutrones)



# Capítulo 1

## Introducción

El objetivo general de esta tesis es investigar el comportamiento de la materia en condiciones extremas como el régimen de campo fuerte de la gravedad. Esto permite poner a prueba, por ejemplo, tanto la composición interna y la ecuación de estado de estrellas de neutrones como, en última instancia, los aspectos fundamentales de la gravedad. La descripción más avanzada de la gravedad disponible hasta el momento proviene de la teoría de la relatividad general. Esta teoría ha sido experimentalmente verificada en una amplia variedad de contextos, desde escalas terrestres hasta cosmológicas, en diversos grados de no linealidad. Particularmente en el régimen de campo débil, la relatividad general ha sido verificada con gran precisión, por ejemplo, a través del retardo de relojes y corrimiento al rojo de fotones en el Sistema Solar [1]. Sin embargo, las pruebas en el campo gravitacional fuerte son comparativamente más escasas y elusivas. La más significativa de estas surgió a partir de GW150914 [2], el primer evento de ondas gravitacionales detectado, de extraordinaria luminosidad, para el cual se confirmó la predicción de la relatividad general sobre la emisión gravitacional de una fusión de agujeros negros con una precisión del orden del 1 % [3].

Una de las predicciones fundamentales en el régimen de campo fuerte es la *hipótesis de Kerr*, que postula que los agujeros negros astrofísicos, una vez asentados en un estado estacionario, son descritos por la métrica de Kerr, determinada únicamente por dos magnitudes físicas: su masa y su momento angular. Esta hipótesis subyace a una gran proporción de modelos astrofísicos, y por ese motivo la métrica de Kerr es seguramente la solución más relevante de las ecuaciones de Einstein. No obstante, si bien la evidencia disponible hasta la fecha es compatible con esta hipótesis [1, 4], aún no se ha logrado ningún test directo y preciso de ella. Por ello, es crucial progresar en esta dirección, ya sea para proporcionar una base más sólida a los modelos astrofísicos estándar, o para abrir nuevas avenidas de investigación.

Un hecho robustamente establecido en la astrofísica contemporánea es la existencia de objetos altamente compactos en el universo. Esta certeza se basa en una abrumadora cantidad de observaciones astronómicas que indican la concentración de grandes cantidades de masa en regiones muy pequeñas. Por ejemplo, se piensa que en el centro de la mayoría de las galaxias existe un objeto compacto supermasivo, lo cual es apoyado por observaciones tales como: (i) el movimiento de estrellas cercanas a SgrA\* en la escala de  $10^3 r_g$  [5–8], donde  $r_g = GM/c^2$  es el radio gravitacional, siendo  $M$  la masa del objeto central, (ii) el movimiento de destellos infrarrojos alrededor de SgrA\* en la escala de  $10r_g$  [9, 10], (iii)

el gran ensanchamiento gravitacional de la líneas de Hierro  $K\alpha$  (6.4 keV) de SgrA\* [11] provenientes de la región en la escala de  $10r_g$ , (iv) el movimiento Kepleriano de máseres de agua en el centro de otras galaxias [12–14], (v) la dispersión de velocidades estelares en el núcleo de otras galaxias [15, 16] y (vi) más recientemente, la radiointerferometría de alta resolución que ha permitido capturar imágenes del entorno inmediato de M87\* [17] y SgrA\* [18], revelando depresiones centrales de brillo consistentes con la existencia de un pozo gravitacional profundo, posiblemente un agujero negro.

La ausencia de emisión desde una superficie en el centro de los núcleos galácticos [19], que debería estar calentada por la acreción del gas circundante [20], indica que el objeto supermasivo central no posee una superficie dura<sup>1</sup> [23]. Además, estos objetos son demasiado masivos, compactos y antiguos para ser cúmulos de objetos no luminosos de masa estelar [24]. Por lo tanto, casi irónicamente, la explicación más mundana conocida para estas observaciones es que se trata de agujeros negros supermasivos [25].

Alternativas posibles a la propuesta de agujeros negros son los llamados objetos compactos exóticos, tales como estrellas de bosones [26], condensados de materia oscura fermiónica [27, 28], o incluso *gravastars* [29] (estrellas sostenidas por una presión de vacío negativa) o agujeros de gusano [30]. Actualmente, se encuentran en marcha esfuerzos considerables para poner a prueba la viabilidad de estos candidatos a través del modelado de la acreción y la radiación electromagnética en sus entornos [31–40] (ver la Ref. [30] para una revisión).

Una excelente oportunidad para investigar la naturaleza de los objetos compactos supermasivos es la ofrecida por la interferometría directa de su entorno. No obstante, el entrelazamiento de los efectos de la geometría del espacio–tiempo con los detalles particulares de la fuente de emisión plantea una gran dificultad. A primera vista, parecería que las incertidumbres inherentes al modelo astrofísico de la fuente de emisión hacen imposible separar estos efectos para testear directamente la geometría del espacio–tiempo. Afortunadamente, existen características geométricas prácticamente independientes de la fuente de emisión que podrían ser detectables. Probablemente, la más prometedora de estas características sea el “anillo de fotones” de los agujeros negros [41–45]. Dado que la luz puede seguir órbitas cerradas inestables alrededor de ellos, para una fuente que emite en todas direcciones una porción de los fotones debería circular alrededor del agujero negro, incluso múltiples veces. Esto forma una sucesión de imágenes que convergen a una “curva crítica”, delimitando la sombra<sup>2</sup> del agujero negro [41]. Estos anillos son insensibles a los detalles de la emisión [42] y son persistentes, por lo que deberían dominar las observaciones promediadas en el tiempo en líneas de base adecuadas [43]. Esta cuestión toma más relevancia con las mejoras esperadas en las observaciones, tanto desde la Tierra, con el Event Horizon Telescope de próxima generación (ngEHT, por sus siglas en inglés) [46, 47], como desde el espacio [48]. Sin embargo, es importante señalar que la detectabilidad de los anillos de fotones sigue siendo objeto de debate debido a los entornos altamente dinámicos, con opacidades cambiantes, de los objetos centrales en los núcleos

---

<sup>1</sup>Cabe destacar que esta conclusión ha sido disputada [21, 22].

<sup>2</sup>Existe cierta ambigüedad en la literatura respecto a la definición de la sombra del agujero negro. Mientras algunos usan el término para referirse a la región delimitada por la curva crítica a la cual convergen los sucesivos anillos, otros se refieren simplemente a la depresión central de brillo observada en las imágenes, que depende de la fuente de emisión, y cuyo límite es difuso y en general no coincide con el concepto matemático anterior.

galácticos [49].

Otro excelente laboratorio natural para investigar el comportamiento de la materia en el régimen extremo son las estrellas de neutrones [50]. Estas se forman luego del colapso gravitatorio del núcleo de Hierro de estrellas masivas, con varias veces la masa del Sol. El rango de masas de las estrellas de neutrones es aproximadamente de  $1.44M_{\odot}$  a  $1.46\text{--}2.48M_{\odot}$ , donde el límite superior teórico es el llamado límite de Oppenheimer–Volkoff, por encima del cual una estrella de neutrones colapsaría a un agujero negro. Este límite depende de la ecuación de estado, que aún no es bien conocida [51]. La primera confirmación de la existencia de estrellas de neutrones ocurrió con el descubrimiento de los púlsares [52]. Estos son estrellas de neutrones con campos magnéticos superficiales de  $10^{8\text{--}13}$  G que emiten pulsaciones en radio con períodos que van entre 1 ms y 30 s, con contadas excepciones alcanzando cerca de los 80 s. Desde el primer descubrimiento, se han identificado más de 3000 púlsares [53, 54]. Entre ellos, los que rotan más rápido son los púlsares de milisegundo (MSPs), con períodos de unos pocos milisegundos, de los cuales se conocen alrededor de 300. Se considera que los MSPs son púlsares “reciclados”, formados a partir de púlsares lentos en binarias de rayos X de baja masa y posteriormente acelerados por la acreción de materia y momento angular de una estrella compañera [55, 56]. Tienen tasas de frenado extremadamente pequeñas de  $\dot{P} \sim 10^{-20}$ , por lo que su estabilidad en los mejores casos es comparable a la de los relojes atómicos [57]. Los MSPs son relativamente antiguos, con edades características de  $\tau_c = P/2\dot{P} \sim 0.1\text{--}10$  Gyr, y tienen campos magnéticos superficiales en el rango inferior de los púlsares, alrededor de  $B \sim 10^{8\text{--}9}$  G.

Además, se piensa que emiten radiación, que ocasionalmente se detecta, a lo largo de todo el espectro electromagnético [58, 59]. Fuera de la banda de radio, la mayor actividad de los MSPs se produce en el rango de rayos X suaves (0.1–10 keV) y es esencialmente de origen térmico, aunque también existen componentes no térmicas [60]. Los rayos X térmicos son emitidos en regiones calientes sobre la superficie de la estrella [60–69]. Debido a la extrema estabilidad de los pulsos de rayos X de MSPs, la observación y el modelado precisos de los mismos ofrecen una excelente vía para testear los aspectos fundamentales de la física de estrellas de neutrones, especialmente bajo el régimen extremo de la gravedad cerca de su superficie donde se produce la radiación [70–82].

Tal como permite anticipar la diversidad de temas abordados en los párrafos anteriores, en esta tesis realizamos investigaciones sobre la astrofísica de diversos tipos de objetos compactos. Un ingrediente fundamental para este tipo de estudios es el transporte radiativo relativista, que permite predecir lo detectado por un instrumento a partir de la radiación que se emite y se propaga en el entorno de objetos compactos con fuertes campos gravitacionales. Para este fin, también desarrollamos un código numérico de transporte radiativo relativista en espacio–tiempos arbitrarios, que utilizamos en todas las investigaciones presentadas en esta tesis y que se encuentra disponible públicamente [83, 84].

La estructura de la tesis es la siguiente: en el Capítulo 2 describimos los aspectos esenciales del código de transporte radiativo que desarrollamos. En el Capítulo 3, investigamos la emisión térmica de rayos X de MSPs. Presentamos un modelo de emisión que integra

simulaciones numéricas de la magnetósfera y establece una relación entre las corrientes en la superficie estelar y la emisión de rayos X. Luego, comparamos este modelo con datos precisos obtenidos por el telescopio NICER de cuatro MSPs, logrando buenos ajustes simultáneos de las curvas de luz y espectros observados. Los capítulos subsiguientes se dedican a explorar las propiedades observacionales de ciertos objetos compactos exóticos, incluyendo la existencia de anillos de luz, buscando distinguirlos de agujeros negros. En el Capítulo 4, analizamos núcleos galácticos de materia oscura fermiónica con discos de acreción de tipo  $\alpha$ , considerando diversas masas del fermión. Posteriormente, en el Capítulo 5, nos centramos en ciertos modelos de estrellas de bosones, también con discos de acreción geométricamente delgados y ópticamente gruesos. Finalmente, en el Capítulo 6, realizamos algunos comentarios finales sobre conclusiones y perspectivas futuras.

# Capítulo 2

## Transporte radiativo relativista

*En este capítulo, introducimos la ecuación covariante de transporte radiativo y describimos el código numérico de trazado de rayos y transporte radiativo en relatividad general que desarrollamos, una herramienta común a las investigaciones que constituyen esta tesis. En primer lugar, describimos el algoritmo de trazado de rayos y, luego, los métodos de transporte alternativos que el código posee: de emisor a observador y de observador a emisor. La mayoría de lo expuesto en este capítulo se encuentra publicado en la Ref. [83], y constituye una parte importante de mis aportes en esta tesis. El código se encuentra disponible públicamente [84].*

### 2.1. Ecuación de transporte

La propagación de la radiación electromagnética sobre un espacio–tiempo curvo está descrita por la ecuación de transporte radiativo covariante. La distribución con la que se representa el campo radiativo usualmente en astrofísica es la intensidad específica. En términos de ésta, la ecuación de transporte toma la siguiente forma, donde cada término es un invariante de Lorentz [85]:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{I_\nu}{\nu^3} \right) = \frac{j_\nu}{\nu^2} - \nu \alpha_\nu \left( \frac{I_\nu}{\nu^3} \right), \quad (2.1)$$

donde  $\lambda$  es el parámetro afín de las geodésicas,  $\nu$  es la frecuencia de la radiación,  $I_\nu$  es la intensidad específica, y  $j_\nu$  y  $\alpha_\nu$  son los coeficientes de emisividad y absorptividad del medio, respectivamente. Nótese que, por ejemplo,  $\nu$  y  $I_\nu$  no son invariantes de Lorentz separadamente, sólo el cociente  $I_\nu/\nu^3$  lo es. La ecuación de transporte se resuelve a lo largo de las geodésicas nulas del espacio–tiempo, pues los fotones siguen esas trayectorias cuando se encuentran en caída libre. Las ecuaciones de las geodésicas son

$$\begin{aligned} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} &= k^\alpha, \\ \frac{dk^\alpha}{d\lambda} &= -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha k^\mu k^\nu, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $x^\alpha$  es la posición,  $k^\alpha$  es el momento, y  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  son los símbolos de Christoffel. En el caso de geodésicas nulas, el momento satisface  $k^\mu k_\mu = 0$ . Los símbolos de Christoffel pueden

escribirse como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\mu\rho} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}), \quad (2.3)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es la métrica del espacio–tiempo.

En las aplicaciones astrofísicas de esta tesis, solo consideraremos escenarios donde  $\alpha_{\nu} = 0$  y donde el soporte de  $j_{\nu}$  es una hipersuperficie espacialmente acotada. Esto incluye, por ejemplo, discos de acreción geométricamente delgados y regiones calientes sobre la superficie de una estrella de neutrones. Por este motivo, si bien el código numérico descrito en este capítulo funciona con coeficientes de emisividad y absorptividad genéricos, vale la pena examinar cómo se simplifica el tratamiento en el caso antes mencionado. Cuando los términos del lado derecho de la ecuación (2.1) son nulos, se sigue que la distribución  $\nu^{-3}I_{\nu}$  es constante a lo largo del flujo geodésico. De este modo, en el vacío, el transporte radiativo se reduce simplemente a la conexión de la distribución invariante entre el punto de observación y la superficie emisora por medio de geodésicas, utilizando su doble invariancia, tanto geodésica como de Lorentz. Asimismo, cabe destacar que, así como  $\nu^{-3}$  e  $I_{\nu}$  no son invariantes de Lorentz separadamente, tampoco son constantes ante el flujo geodésico por separado, sino que sufren el efecto de corrimiento al rojo gravitacional.

## 2.2. Descripción del código numérico

La integración precisa de la ecuación de transporte y de las geodésicas en un espacio–tiempo curvo es fundamental para modelar las signaturas electromagnéticas de objetos compactos. Los primeros esfuerzos en este campo corresponden a las Refs. [86–88], donde se realizaron por primera vez cálculos de la apariencia de agujeros negros con discos de acreción.

En las últimas décadas, se ha desarrollado una variedad de códigos para el trazado de rayos y transporte radiativo en relatividad general, los cuales pueden agruparse en dos grandes enfoques. Por un lado, los que siguen el método de observador a emisor, en el que los rayos de luz se trazan hacia el pasado desde el observador hasta la fuente de emisión. Ejemplos de códigos que emplean este enfoque incluyen las Refs. [89–107]. Por otro lado, el enfoque basado en métodos Monte Carlo, en el cual el campo radiativo se muestrea estadísticamente en la fuente de emisión en forma de paquetes de fotones que se propagan hacia el observador, como las Refs. [108, 109].

En el marco de esta tesis, desarrollamos un nuevo código de trazado de rayos y transporte radiativo en relatividad general aplicable a una amplia variedad de escenarios astrofísicos, llamado `skylight` [83]<sup>1</sup>. Este código implementa ambos métodos, de observador a emisor y viceversa<sup>2</sup>, una característica solo compartida con la Ref. [109], lo que permite realizar chequeos de consistencia interna y tratar distintos problemas utilizando el enfoque que resulte más natural.

Muchos de los códigos existentes, como las Refs. [89, 90, 92, 93, 95–98, 103, 107, 109], están diseñados para trabajar en espacio–tiempos con ciertas simetrías, como la métrica

---

<sup>1</sup>[github.com/joaquinpelle/Skylight.jl](https://github.com/joaquinpelle/Skylight.jl)

<sup>2</sup>Por el momento, el método de emisor a observador se encuentra solo parcialmente disponible en la versión pública del código.

de Kerr, lo que permite reducir la dimensionalidad del sistema de ecuaciones y acelerar los cálculos. Sin embargo, esta simplificación limita la aplicabilidad a geometrías más complejas, como por ejemplo las de sistemas binarios compactos. En contraste, `skylight` admite espacio–tiempos arbitrarios, sin suposiciones sobre simetrías particulares, permitiendo así trabajar en escenarios astrofísicos más diversos.

Otra aspecto común en muchos códigos [89, 90, 92–99, 104, 105, 107] es la hipótesis implícita de un marco de observación lejano a la fuente de emisión y estático en un espacio–tiempo asintóticamente plano. Si bien esto es adecuado para la mayoría de aplicaciones, limita el uso del código en ciertos contextos donde el espacio–tiempo no es asintóticamente plano, como en cosmología, o con marcos de referencia en movimiento, relativamente cercanos a la fuente de emisión. `skylight` se distingue al no imponer tales restricciones, otorgando mayor flexibilidad para aplicaciones cosmológicas y con marcos de referencia arbitrarios, sin demandar un mayor costo computacional debido a esto (ver la Sec. 2.2.3 y el Ap. C).

El lenguaje de programación utilizado en el desarrollo de los códigos influye tanto en su rendimiento como en su facilidad de uso y extensibilidad. Algunos de los primeros códigos fueron escritos en Fortran [89, 92], mientras que otros más recientes utilizan C o C++ [94, 96, 97, 99–101, 103], permitiendo un manejo más eficiente de memoria y optimizaciones de bajo nivel. No obstante, estos lenguajes tienden a dar lugar a códigos más rígidos y difíciles de extender. En contraste, `skylight` está escrito en Julia, un lenguaje de programación moderno que combina alto rendimiento con flexibilidad y facilidad de desarrollo. Julia permite escribir código que, además de ser rápido, es fácil de extender y adaptar a necesidades particulares de los usuarios. Luego de la publicación de `skylight`, han aparecido otros códigos de alto rendimiento en lenguajes de alto nivel como Python/JAX [104] y Julia [106, 107].

Un requerimiento importante para el transporte radiativo es el cálculo de derivadas de la métrica para la integración de las ecuaciones de las geodésicas. La mayoría de los códigos resuelven esto por medio de derivadas manuales o diferencias finitas, métodos que pueden ser propensos a errores de implementación o ineficientes. Los lenguajes dinámicos como Julia ofrecen un entorno propicio para la diferenciación automática, una técnica moderna que provee derivadas con precisión de máquina y más eficientemente que las diferencias finitas. Esta técnica, implementada en `skylight` y otros códigos recientes [104, 107], facilita la extensión a métricas no convencionales y reduce la posibilidad de errores de programación.

Otra ventaja significativa de Julia es su robusto ecosistema de paquetes, que ofrece una amplia gama de funcionalidades especializadas. En el desarrollo de `skylight`, incorporamos el paquete `DifferentialEquations.jl`, el cual proporciona una extensa colección de métodos para la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta librería supera en extensión a las tradicionales e incluye métodos de integración más recientes y eficientes que utilizados comúnmente, como los métodos de Runge–Kutta de segundo orden (Heun) o de cuarto orden, que son empleados por la mayoría de los códigos existentes [93, 94, 96–98, 100–106] (ver Sec. 2.2.1).

Además, a diferencia de muchos códigos transporte radiativo que no están disponibles públicamente, `skylight` es de acceso abierto. Otros códigos públicos incluyen las Refs. [92–94, 96–103, 105–107].

Actualmente, `skylight` cuenta con diversos espacio–tiempos implementados: los pa-

radigmáticos espacio–tiempos de Minkowski, Schwarzschild y Kerr; el espacio–tiempo de Johannsen [110] de un agujero negro con parámetros de deformación respecto de Kerr; el espacio–tiempo de un agujero negro rotante en una teoría  $f(R)$  de gravedad modificada [111]; el espacio–tiempo de un agujero de gusano atravesable con carga eléctrica [112]; el espacio–tiempo de un gas autogravitante de materia oscura fermiónica [113] (Capítulo 4); y el espacio–tiempo de ciertas estrellas de bosones [114] (Capítulo 5). En particular, admite espacio–tiempos numéricos tabulados, como se demuestra en la aplicación del Capítulo 4 a núcleos galácticos de materia oscura fermiónica, donde la métrica está determinada por ecuaciones de equilibrio que deben resolverse numéricamente.

En cuanto a los modelos radiativos, en la versión pública están disponibles: los modelo de disco de acreción de Shakura–Sunyaev [115] y Novikov–Thorne [116]; un modelo de disco de acreción geométricamente delgado con perfil de temperatura provisto por el usuario; el modelo de disco de acreción geométricamente grueso y ópticamente delgado, llamado toro de iones o “dona polaca” [117], con emisión sincrotrón y *bremsstrahlung*; líneas de emisión de discos de acreción delgados con perfiles de emisividad provistos por el usuario; y un modelo de corona de tipo “farol” sobre un objeto compacto [118]. Cabe destacar que el código está modularizado de manera que los espacio–tiempos y modelos radiativos son interoperables, siempre que sean mutuamente consistentes; por ejemplo, se puede colocar un toro de iones tanto en el espacio–tiempo de Schwarzschild como en el de un agujero negro en gravedad  $f(R)$  de manera autoconsistente.

En lo que sigue, proveemos una descripción más detallada de la estructura del código. En la Sección 2.2.1 comenzamos describiendo el algoritmo de trazado de rayos, y más adelante, en las Secciones 2.2.2 y 2.2.3, proporcionamos los detalles relativos a cada método de transporte del código. En la Secs. 2.3, 2.4, 2.5, presentamos una validación extensiva del código, incluyendo verificaciones del trazado de rayos, tests astrofísicos y tests de convergencia, que además complementan los tests unitarios disponibles en el repositorio del código.

## 2.2.1. Trazado de rayos

### Métodos de integración

Para la integración de las ecuaciones recurrimos a los métodos estándar para la integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de primer orden. En particular, utilizamos el paquete de Julia DifferentialEquations.jl [119], que ofrece una amplia variedad de algoritmos para la solución numérica de EDOs, mucho más amplia que las librerías tradicionales. Aparte de los algoritmos estándar, esta librería incluye muchos algoritmos que son el resultado de investigaciones recientes y se sabe que son más eficientes que las opciones tradicionales. Esto permite disponer de muchos métodos diferentes para elegir según el tamaño del sistema, la precisión requerida, la memoria disponible, la necesidad de paso adaptable, la presencia de *stiffness*, etc. Además, las tolerancias relativas y absolutas pueden configurarse como parámetros del método, y el paquete también cuenta con un seleccionador automático de método de integración. En todas las aplicaciones de esta tesis utilizamos el método VCABM [120], un método de Adams–Moulton de orden y paso adaptables, que es especialmente adecuado cuando se requiere alta precisión en sistemas grandes. La adaptabilidad del paso también es útil,

puesto que requerimos pasos pequeños cerca de la fuente del campo gravitatorio para asegurar la precisión, pero lejos de la fuente donde la gravedad es muy débil y las geodésicas son esencialmente rectas, conviene dar pasos grandes para reducir el costo computacional.

## Paralelización

Por otro lado, `DifferentialEquations.jl` cuenta con una interfaz simple para la paralelización automática de los problemas de EDOs. Puesto que nuestro problema, en esencia, consiste en resolver las ecuaciones de las geodésicas independientemente para una gran cantidad de condiciones iniciales, aprovechamos esta interfaz ofrecida para paralelizar fácilmente las integraciones en los múltiples hilos de CPUs que haya disponibles en la máquina. Además, se encuentra en desarrollo la aceleración en GPUs de nuestro código, que permitirá reducir drásticamente los tiempos de cómputo, una capacidad que actualmente tienen los códigos de las Refs. [95–97, 101, 104]. Julia ofrece un entorno propicio para ello, enteramente nativo, sin necesidad de recurrir a librerías externas como CUDA.

## Diferenciación automática

Otra característica distintiva de `skylight` es el uso de diferenciación automática, incorporando la librería `ForwardDiff.jl`, para calcular los símbolos de Christoffel a partir de una función métrica dada. La diferenciación automática es una técnica moderna, que proporciona derivadas rápidas de funciones programáticas generales con precisión de máquina. Esto se logra, esencialmente, descomponiendo las funciones como un árbol, posiblemente muy complejo, de operaciones elementales para las cuales se conocen las derivadas en forma exacta, y aplicando la regla de la cadena sobre él. En general, el costo de evaluar una derivada con esta técnica es el mismo que el de evaluar la propia función que se deriva. La diferenciación automática supera a la técnica tradicional de diferencias finitas, utilizada en otros códigos de trazado de rayos, tanto en velocidad como en precisión: lo primero porque requiere menos evaluaciones, y lo segundo porque, al conocerse con exactitud las derivadas de las operaciones elementales, provee precisión de máquina. También es mucho más rápida que la diferenciación simbólica, ya que solo se calculan valores numéricos de las derivadas y no sus expresiones algebraicas completas. La técnica se desarrolló y estableció, esencialmente, en la última década, debido al gran impulso recibido por parte de la comunidad de inteligencia artificial, donde se utiliza para optimizar funciones con enorme cantidad de parámetros. En nuestro caso es muy útil, por ejemplo, para calcular los símbolos de Christoffel de espacio–tiempos complejos como los que aproximan a sistemas binarios compactos cerca de la fusión [121–123], un escenario en el que pensamos trabajar en el futuro para estudiar signaturas electromagnéticas en distintas bandas del espectro.

### 2.2.2. Método de emisor a observador

#### Condiciones iniciales

En este método, el modelo de emisión entra en el código a través de la emisividad  $j_\nu$ , que depende de la posición, la frecuencia y la dirección de emisión. Esta distribución codifica la información relevante sobre los procesos astrofísicos que ocurren en la región

de interés. En términos de la emisividad, la densidad de número de fotones satisface

$$dn = \frac{j_\nu}{h\nu} \sqrt{-g} d^4x d\nu d\Omega, , \quad (2.4)$$

donde  $h$  es la constante de Planck,  $\nu$  es la frecuencia del fotón,  $d\Omega$  es el elemento de ángulo sólido y  $\sqrt{-g} d^4x$  es el elemento de volumen. La frecuencia y la dirección de emisión se refieren al marco de referencia donde se define la emisividad. En la mayoría de los casos, existe una clase preferida de marcos, a saber, el marco ortonormal donde los fenómenos locales que dan origen a los fotones se encuentran en reposo, al que llamamos marco de reposo local. Estos marcos están dados por tétradas de la forma  $\{e_{(a)}^\mu : 0 \leq a \leq 3\}$ , donde la letra griega es un índice vectorial contravariante y la letra latina es una etiqueta, satisfaciendo

$$g_{\mu\nu} e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu = \eta_{(a)(b)}, \quad (2.5)$$

donde el lado derecho es la métrica plana en su forma diagonal. Para que la región de emisión esté en reposo en este marco, el vector temporal debe ser igual a la cuadrvivelocidad  $u^\mu$  de la materia emisora, es decir,  $e_{(0)}^\mu = u^\mu$ . Para los campos vectoriales espaciales hay cierta libertad, siempre y cuando satisfagan la ortonormalidad de la Ec. (2.5). Cuando los necesitamos, obtenemos los vectores espaciales mediante la ortogonalización de un conjunto de prueba con el algoritmo de Gram–Schmidt.

Para representar la emisividad local, debemos muestrear una distribución de paquetes de fotones siguiendo

$$dN = \frac{dn}{w} = \frac{1}{w} \frac{j_\nu}{h\nu} \sqrt{-g} d^4x d\nu d\Omega, , \quad (2.6)$$

donde  $w$  es el peso del paquete, es decir, la cantidad relativa de fotones que lleva. Esto es análogo a lo que se hace en simulaciones Monte Carlo. Asociar un peso a los paquetes no es estrictamente necesario, pero puede ser muy conveniente en algunas situaciones.

Para comenzar, tomamos un conjunto de posiciones iniciales distribuidas según la versión integrada en momentos de la Ec. (2.6). En presencia de simetrías esto puede simplificarse. Por ejemplo, para un sistema estacionario, puede tomarse un único tiempo inicial para todos los paquetes, digamos  $t = 0$ , defiriendo todas las consideraciones temporales al postprocesamiento de los datos de salida, como describimos en la Sección 2.2.2.

Luego, en cada punto inicial hacemos un muestreo aleatorio de los cuadrimomentos iniciales de los paquetes de fotones. El cuadrimomento de un paquete puede escribirse como

$$k^\mu = k^{(a)} e_{(a)}^\mu, \quad (2.7)$$

donde  $k^{(a)} = \nu(1, \Omega)$  son las componentes del momento en el marco de reposo local,  $\nu$  es la frecuencia y  $\Omega$  es la dirección de emisión. La frecuencia y las distribuciones angulares se muestrean según la Ec. (2.6) evaluada en cada punto. En el caso en que  $\alpha_\nu = 0$ , puede tomarse una sola frecuencia como representativa de todo el espectro, evitando el muestreo espectral, ya que las trayectorias no dependen de la frecuencia, defiriendo, en ese caso, las consideraciones espetrales al postprocesamiento.

Finalmente, convertimos los cuadrimomentos al marco de coordenadas según la Ec. (2.7), utilizando los vectores  $e_{(a)}^\mu$  calculados en cada punto inicial. Una vez que el conjunto inicial de paquetes está listo, los propagamos como se describe en la Sección 2.2.1 hasta la

distancia en que se desea calcular los flujos.

### Cálculo de flujos

Estimamos el flujo monocromático a tiempo  $t$  y frecuencia  $\nu$  a través de un pequeño detector de área  $\Delta A$  como

$$F_\nu = \frac{1}{\Delta A \Delta t \Delta \nu} \sum_i (h\nu)_i w_i, \quad (2.8)$$

donde la suma es sobre todos los paquetes de fotones que atraviesan el detector en un intervalo temporal centrado en  $t$  de ancho  $\Delta t$ , y un rangopectral centrado en  $\nu$  de ancho  $\Delta \nu$ . En la práctica, tomaremos detectores virtuales correspondientes a una partición de una esfera lejana en celdas de área  $\Delta A \approx R^2 \sin \xi \Delta \xi \Delta \varphi$ , donde  $R$  es el radio al que colocamos los detectores virtuales, y  $\xi$  y  $\varphi$  son los ángulos polar y azimutal, respectivamente, en alguna elección de coordenadas sobre la esfera.

#### 2.2.3. Método de observador a emisor

En este método, partimos del punto de observación y calculamos los flujos directamente a través del tensor de energía–momento del campo de radiación<sup>3</sup>, que tiene la forma

$$T^{ab} = \int k^a k^b \left( \frac{I_\nu}{\nu^3} \right) dK, \quad (2.9)$$

donde  $dK = \nu d\nu d\Omega$  es el elemento de volumen invariante en el espacio de momentos de tipo luz. Esto también puede escribirse como

$$T^{ab} = \int_{S^2} \int_0^\infty n^a n^b I_\nu d\nu d\Omega, \quad (2.10)$$

donde  $n^a = k^a / \nu$ . El flujo radiativo de energía en la dirección de  $\bar{n}^a$  en un sistema de referencia con cuadrvíelocidad  $u^a$  se obtiene como  $T^{ab} u_a \bar{n}_b$ . Para discretizar esta integral en la posición  $x^\mu$ , construimos una tétrada ortonormal partiendo de los vectores

$$e_0 = \partial_t, \quad e_1 = -\partial_r, \quad e_2 = \partial_\phi, \quad e_3 = -\partial_\theta, \quad (2.11)$$

donde  $(r, \theta, \phi)$  son algunas coordenadas topológicamente esféricas en el espacio–tiempo<sup>4</sup>, y los ortonormalizamos con respecto a la métrica en esa posición,  $g_{\alpha\beta}(x^\mu)$ , a través del algoritmo de Gram–Schmidt siguiendo el orden de sus subíndices. En espacio–tiempo plano con coordenadas esféricas usuales, la interpretación de esta terna es simple:  $e_1$  apunta hacia el origen,  $e_2$  es azimutal y  $e_3$  es polar. Cabe destacar que la elección de la tétrada no es relevante, sólo es un artificio para parametrizar la integral de flujo, pero

<sup>3</sup>Esta construcción suele llamarse “cámara estenopeica”, en contraposición con la aproximación del “plano imagen” también implementada en el código y descrita en el Apéndice C, en que se supone que el punto de observación es lejano y los rayos de luz llegan mutuamente paralelos.

<sup>4</sup>Aquí media la hipótesis de que existen una coordenada temporal  $t$  y tres coordenadas espaciales de las cuales hay una manera de transformar a coordenadas topológicamente esféricas. Esto parece restrictivo en teoría, pero es genérico en la práctica.

ésta no depende de la parametrización. Esta construcción es suficientemente general para permitir posición y cuadrvélocidad arbitrarias, pero es particularmente conveniente para grandes distancias en espacio–tiempos asintóticamente planos donde la fuente puede ser cubierta por un pequeño sector esférico centrado en la dirección radial. A continuación, para calcular la integral de flujo, tomamos coordenadas angulares  $(\alpha, \beta)$  en  $S^2$  tales que las componentes en la tétrada de un vector se pueden escribir como

$$k^0 = \nu, \quad k^1 = \nu \cos \alpha \cos \beta, \quad k^2 = \nu \sin \alpha \cos \beta, \quad k^3 = \nu \sin \beta.$$

Las coordenadas varían sobre  $-\pi \leq \alpha < \pi$  y  $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$ . En particular,  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$  se mapea a la dirección de  $e_1$ . Además, en estas coordenadas,  $d\Omega = \cos \beta d\alpha d\beta$ . En la práctica, para la integración angular no necesitamos cubrir toda la esfera celeste del punto de observación, sino que basta con tomar rangos de  $(\alpha, \beta)$  que cubran la imagen de la fuente emisora.

Luego, tomamos una grilla angular uniforme dada por

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{s_\alpha}{2} + \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta\alpha, & \beta_j &= -\frac{s_\beta}{2} + \left(j - \frac{1}{2}\right) \Delta\beta, \\ \Delta\alpha &= \frac{s_\alpha}{N_\alpha}, & \Delta\beta &= \frac{s_\beta}{N_\beta}, & 1 \leq i &\leq N_\alpha, & 1 \leq j &\leq N_\beta, \end{aligned}$$

donde  $s_\alpha, s_\beta$  son las aperturas angulares horizontal y vertical respectivamente, y  $N_\alpha, N_\beta$  son los números de puntos por cada lado de la grilla. Tomamos una partición en sectores esféricos  $D_{ij} = [\alpha_i - \Delta\alpha/2, \alpha_i + \Delta\alpha/2] \times [\beta_j - \Delta\beta/2, \beta_j + \Delta\beta/2]$  centrados en los  $(\alpha_i, \beta_j)$ , cuyo ángulo sólido es

$$\Delta\Omega_{ij} = \int_{D_{ij}} \cos \beta d\alpha d\beta = 2 \cos(\beta_j) \sin\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right) \Delta\alpha, \quad (2.12)$$

Finalmente, aproximamos numéricamente la integral de la ecuación (2.10) como

$$\int_{S^2} \int_0^\infty n^a n^b I_\nu d\nu d\Omega \approx \sum_{ijk} I_{ijk} n_{ij}^a n_{ij}^b \Delta\Omega_{ij} \Delta\nu, \quad (2.13)$$

donde  $I_{ijk} = I_{\nu_k}(n_{ij}^a)$  y las componentes de los vectores  $n_{ij}^a$  en la tétrada son

$$(1, \cos \alpha_i \cos \beta_j, \sin \alpha_i \cos \beta_j, \sin \beta_j), \quad (2.14)$$

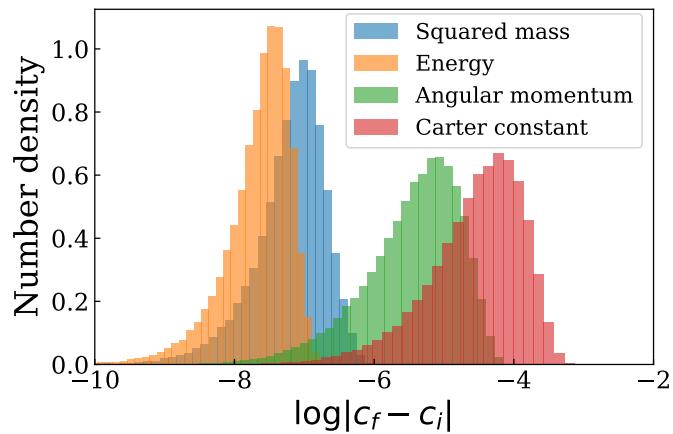
que son transformadas al marco coordenado antes de la contracción con  $u_a$  y  $\bar{n}_a$ .

## 2.3. Verificación del trazado de rayos

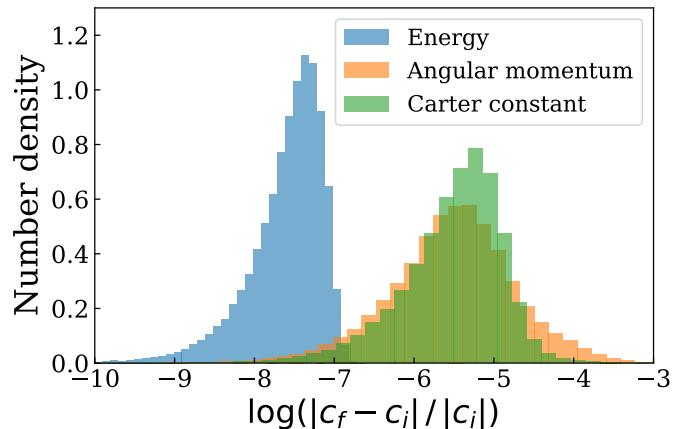
### 2.3.1. Conservación de las constantes de movimiento en el espacio–tiempo de Kerr

Utilizamos las cuatro constantes de movimiento geodésico en el espacio–tiempo de Kerr (ver Apéndice A) como un test de la precisión de nuestro algoritmo de trazado de

rayos. Como ejemplo, tomamos 100 posiciones iniciales sobre un meridiano de la superficie  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (5M)^2$  (en coordenadas de Kerr–Schild) con  $a/M = 0.99$ . En cada punto inicial tomamos  $10^3$  momentos iniciales, con direcciones espaciales distribuidas isotrópicamente sobre el hemisferio centrado en la dirección radial, lo que da un total de  $N = 10^5$  condiciones iniciales. Calculamos las geodésicas correspondientes hasta la superficie  $r = 1000M$  utilizando el método de integración VCABM (ver Sección 2.2.1) con una tolerancia relativa de  $10^{-8}$ . En la Figura 2.1 y la Figura 2.2 mostramos los resultados obtenidos para los errores absolutos y relativos en la conservación de las constantes de movimiento al cabo de la integración (no incluimos el error relativo en la masa porque su valor exacto es cero). Las desviaciones de las constantes son muy pequeñas y, especialmente, la conformidad con la precisión esperada es excelente dada la tolerancia del método.



**Figura 2.1:** Errores absolutos en la conservación de las constantes de movimiento para condiciones iniciales sobre un meridiano en  $\rho = 5M$  en el espacio–tiempo de Kerr con  $a/M = 0.99$ .



**Figura 2.2:** Errores relativos en la conservación de las constantes de movimiento para condiciones iniciales sobre un meridiano en  $\rho = 5M$  en el espacio–tiempo de Kerr con  $a/M = 0.99$ .

### 2.3.2. Comparación con la función de trazado de rayos

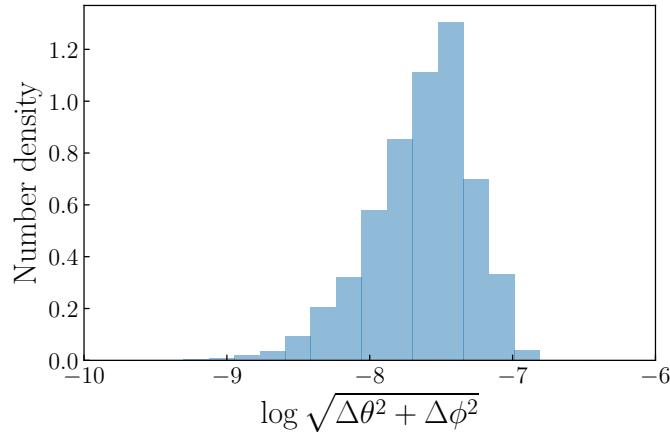
Algunos códigos que están restringidos al espacio–tiempo de Schwarzschild han utilizado lo que se llama la función de trazado de rayos para calcular el ángulo de deflexión de las geodésicas de manera semianalítica [61, 124, 125]. Aquí utilizamos esta función como verificación de nuestro algoritmo de trazado de rayos. En el espacio–tiempo de Schwarzschild, tomamos una posición inicial con radio  $r$ , y tomamos un momento espacial inicial que forma un ángulo  $\delta$  con el vector radial  $\partial_r$  en el marco estático. El ángulo  $\delta$  satisface

$$\sin \delta = \frac{b}{r} \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}, \quad (2.15)$$

donde  $b = L/E$  es el parámetro de impacto de la geodésica,  $E$  es su energía y  $L$  su momento angular. Entonces, el ángulo de deflexión se puede escribir como

$$\alpha_\delta = \int_0^{\frac{R_s}{2r}} du \sin \delta \left[ \left( 1 - \frac{R_s}{r} \right) \left( \frac{R_s}{2r} \right)^2 - (1 - 2u) u^2 \sin^2 \delta \right]^{-1/2} - \delta, \quad (2.16)$$

donde  $R_s = 2M$  es el radio de Schwarzschild. Tomamos  $10^4$  condiciones iniciales en  $(x, y, z) = (0, 0, 5M)$  con momentos iniciales distribuidos isotrópicamente sobre el hemisferio centrado en la dirección radial. Calculamos las geodésicas correspondientes hasta  $r = 1000M$  utilizando el método VCABM (Sección 2.2.1) con una tolerancia relativa de  $10^{-8}$  tal como en el test anterior. En la Figura 2.3 mostramos la cantidad  $\sqrt{\Delta\theta^2 + \Delta\phi^2}$ , una medida del error entre los ángulos finales obtenidos con nuestro código y los ángulos finales calculados a partir de la Ec. (2.16). Nuevamente, encontramos una excelente concordancia entre los métodos.



**Figura 2.3:** Diferencia entre los ángulos finales obtenidos con nuestro código y aquellos obtenidos con la función de trazado de rayos de la Ec. (2.16) para un total de  $10^4$  fotones inicialmente en  $(x, y, z) = (0, 0, 5M)$  en el espacio–tiempo de Schwarzschild y con direcciones isotrópicamente distribuidas en el hemisferio orientado hacia afuera.

### 2.3.3. Interpolación de una métrica numérica

El código también puede manipular métricas numéricas (al menos con ciertas simetrías que alivianen el costo computacional de la interpolación). Para testear esta posibilidad implementamos una métrica esféricamente simétrica

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.17)$$

donde  $\alpha(r)$  y  $\beta(r)$  son funciones arbitrarias que pueden proporcionarse en forma de tablas. Los símbolos de Christoffel se pueden calcular directamente a partir de la expresión anterior, tabulando también una aproximación para las derivadas radiales de los coeficientes de la métrica. A partir de ello, construimos funciones interpoladoras que aproximan la métrica y los símbolos de Christoffel en un punto arbitrario del espacio–tiempo.

Con la parametrización elegida arriba, la métrica de Schwarzschild se obtiene tomando

$$\alpha(r) = \frac{1}{2} \log \left( 1 - \frac{2M}{r} \right), \quad (2.18)$$

$$\beta(r) = -\alpha(r). \quad (2.19)$$

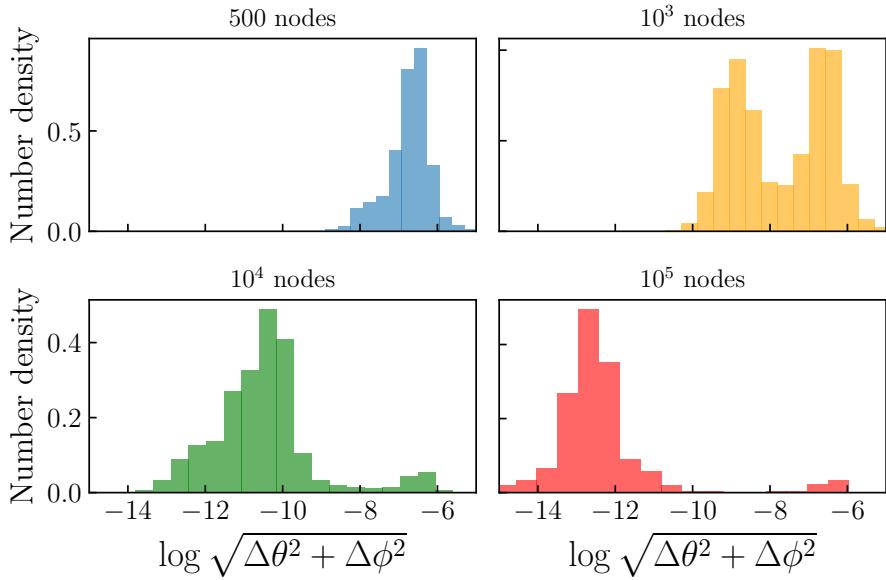
Lo que hacemos es crear tablas simuladas de la métrica de Schwarzschild y sus símbolos de Christoffel para testear nuestro método de interpolación en espacio–tiempos numéricos. Para este test, aplicamos el mismo procedimiento que en la sección anterior: como condiciones iniciales, tomamos  $10^4$  fotones en  $r = 5M$  con direcciones de emisión distribuidas isotrópicamente en el hemisferio centrado en la dirección radial y propagamos esos fotones hasta  $r = 1000M$ , comparando los resultados al usar la métrica de Schwarzschild analítica y la métrica interpolada correspondiente. Usamos cuatro resoluciones distintas para las tablas, con 500, 1000,  $10^4$  y  $10^5$  nodos espaciados logarítmicamente entre  $r = 2.1M$  (cerca del horizonte de eventos) y  $r = 1000M$ . La tolerancia relativa del método de integración es  $10^{-8}$ . En la Figura 2.4 mostramos el error  $\sqrt{\Delta\theta^2 + \Delta\phi^2}$  entre los ángulos esféricos finales en los cuatro casos. En todos los casos, la coincidencia es excelente y mejora con el aumento de la resolución.

## 2.4. Tests astrofísicos

### 2.4.1. Ensanchamiento relativista de una línea de emisión en un disco de acreción delgado

Aquí reproducimos los resultados de la Ref. [92] para el ensanchamiento de una línea de emisión en un modelo simple de disco de acreción alrededor de un agujero negro de Kerr. El disco es geométricamente delgado y ópticamente grueso y yace en el plano ecuatorial del agujero negro. El radio interno del disco se define como el radio de la ISCO [86], y el radio externo es  $r_{\text{out}} = 15M$ . Las partículas del disco siguen órbitas circulares con una velocidad angular dada por

$$\omega_{\pm} = \frac{\pm\sqrt{M}}{r^{3/2} \pm a\sqrt{M}}, \quad (2.20)$$



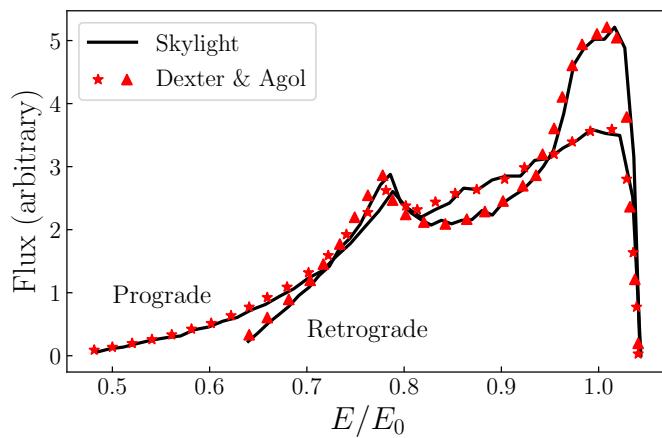
**Figura 2.4:** Diferencia en los ángulos esféricos finales para la evolución de  $10^4$  geodésicas con condición inicial en  $r = 5M$  con la métrica de Schwarzschild interpolada y la métrica analítica. Cada panel corresponde a una resolución diferente de la métrica numérica, con 500, 1000,  $10^4$  y  $10^5$  nodos espaciados logarítmicamente, respectivamente.

donde  $\omega_+$  y  $\omega_-$  corresponden a discos prógrados y retrógrados, respectivamente. La emisividad se define en el marco de reposo local del disco, es monocromática, isotrópica y está pesada por un factor  $r^{-2}$ :

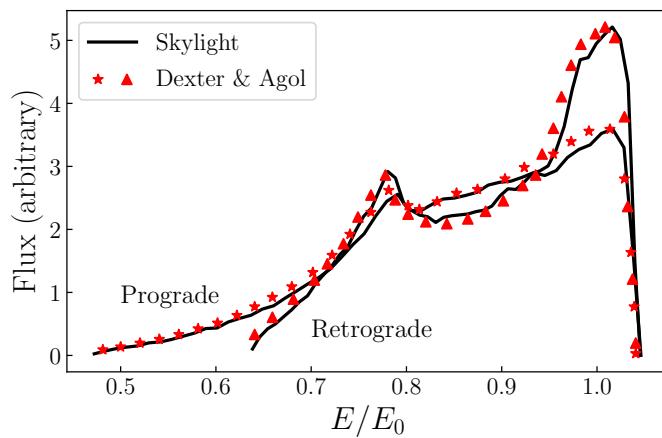
$$j_\nu(x^\mu) \propto \frac{1}{r^2} \delta(z) \delta(\nu - \nu_0), \quad (2.21)$$

donde  $\nu_0$  es la frecuencia de emisión en el marco de reposo local del disco.

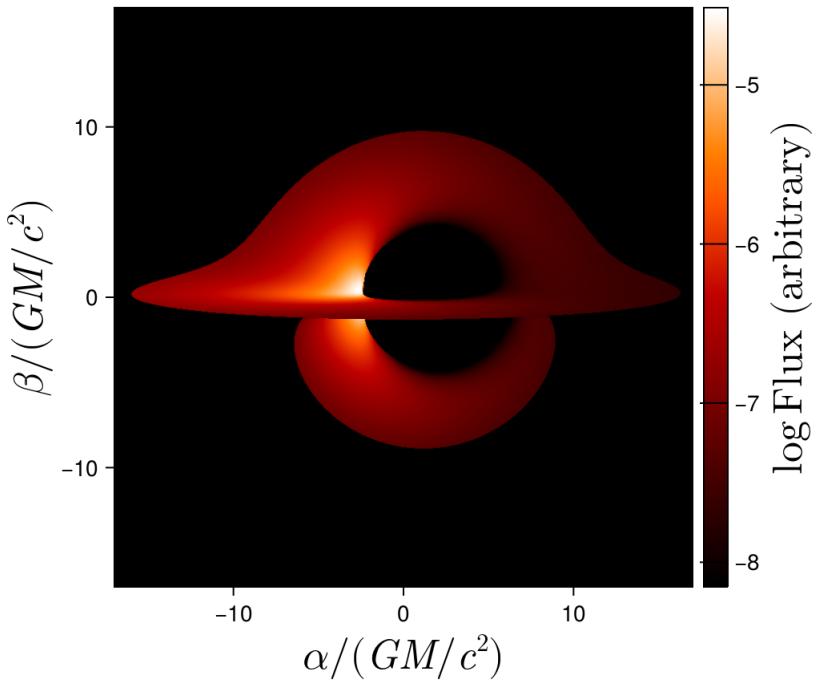
Calculamos el espectro para un observador a una distancia  $r = 10^3 M$  y un ángulo de inclinación de  $\xi = 30^\circ$  tanto con rotación prógrada como retrógrada, usando ambos métodos de transporte de `skylight`. El *spin* del agujero negro es  $a/M = 0.5$ . En el método de observador a emisor, utilizamos un plano imagen cuadrado (ver Apéndice C) de lado  $L = 2.1r_{\text{out}}$  a una distancia  $d = 10^3 M$  con  $N = 200$  puntos por lado de la grilla. En el método de emisor a observador, tomamos  $5 \times 10^3$  puntos iniciales en el disco y  $5 \times 10^3$  direcciones de emisión muestreadas uniformemente en el marco comóvil, con un total de  $N = 2.5 \times 10^7$  fotones. Los detectores virtuales están ubicados en  $d = 10^3 M$ . En la Figura 2.5 y la Figura 2.6 comparamos los resultados de ambos métodos con los de la Ref. [92], encontrando un excelente acuerdo en ambos casos. Además, en la Figura 2.7 mostramos una imagen del modelo de disco para un *spin* de agujero negro de  $a/M = 0.99$  visto desde un ángulo de inclinación de  $\xi = 85^\circ$  obtenido con el método de observador a emisor de `skylight` usando el mismo tamaño de plano imagen que arriba pero aumentando la resolución a  $N = 500$  puntos por lado del plano imagen.



**Figura 2.5:** *Ensanchamiento relativista de una línea de emisión en un disco de acreción delgado con el método de observador a emisor. El spin del agujero negro es  $a/M = 0.5$  y el ángulo de visión es  $\xi = 30^\circ$ .*



**Figura 2.6:** *Ensanchamiento relativista de una línea de emisión en un disco de acreción delgado con el método de emisor a observador. El spin del agujero negro es  $a/M = 0.5$  y el ángulo de visión es  $\xi = 30^\circ$ .*



**Figura 2.7:** Imagen del modelo simple de disco delgado con spin de agujero negro  $a/M = 0.99$  con el método de observador a emisor en un ángulo de visión de  $\theta = 85^\circ$ .

#### 2.4.2. Círculo caliente orbitando un agujero negro de Schwarzschild

Dado que el disco de acreción del test anterior es estacionario y axialmente simétrico, sirve principalmente como un test de la dependencia espectral de *skylight* pero no tanto de la dependencia temporal. Para testear este aspecto en nuestro código, implementamos el modelo de círculo caliente<sup>5</sup> orbitante descrito en la Ref. [90]. La región de emisión es un círculo pequeño orbitando un agujero negro de Schwarzschild en el plano ecuatorial. El centro del círculo se mueve sobre la ISCO, de radio  $r = 6M$ , a una velocidad angular  $\omega = -\sqrt{M/r^3}$ . La emisividad es monocromática e isotrópica en el marco de reposo del centro del círculo, y está modulada por un perfil gaussiano

$$j_\nu(\mathbf{x}^\mu) \propto \delta(z)\delta(\nu - \nu_0) \exp\{-|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{spot}}(t)|^2/2R_{\text{spot}}^2\}, \quad (2.22)$$

donde  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{x}_{\text{spot}}(t)$  es la posición del centro del círculo,  $\nu_0$  es la frecuencia de emisión en el marco de reposo local del centro, y la desviación estándar del perfil gaussiano es  $R_{\text{spot}} = 0.25M$ . Además, por simplicidad truncamos la emisividad a una distancia  $4R_{\text{spot}}$  desde el centro, donde está muy cerca de cero. La cuadrvelocidad de todos los puntos dentro del círculo se toma igual a la de la trayectoria geodésica guía. Esto significa que la energía en el marco de reposo local de una geodésica con cuadrimomento  $k^\mu$  en un punto dentro del círculo se calcula como  $-k_\mu v^\mu(\mathbf{x}_{\text{spot}})$ , donde  $v^\mu(\mathbf{x}_{\text{spot}})$  es la cuadrvelocidad de

<sup>5</sup>Originalmente punto caliente, del inglés *hot spot*. Aquí usamos “círculo” para no confundir con el otro significado de la palabra “punto”, correspondiente al inglés *point*.

la trayectoria geodésica guía del centro del círculo.

Para el método de observador a emisor, utilizamos un plano imagen de lado  $L = 20M$  a una distancia  $d = 10^3M$  con  $N = 800$  puntos de cuadrícula por lado. En la Figura 2.8 mostramos el espectrograma obtenido con este método para un ángulo de visión de  $i = 60^\circ$  y en la Figura 2.9 mostramos las curvas de luz bolométricas en varios ángulos de observación. Cada curva de luz está normalizada escalada al valor máximo de la curva de  $i = 80^\circ$ . A medida que aumenta la inclinación, las curvas de luz se vuelven más puntiagudas porque el efecto Doppler se vuelve más notorio y el corrimiento al rojo gravitacional se intensifica para las geodésicas que provienen de atrás del agujero negro. Ambas figuras están en excelente acuerdo con los resultados de la Ref. [90].

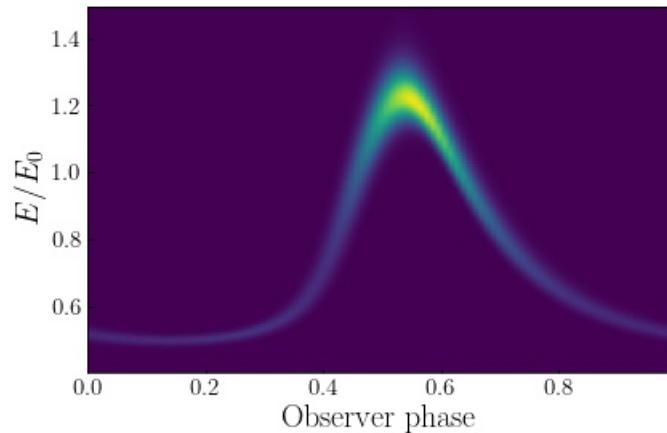
Para el método de emisor a observador, realizamos una modificación al modelo que lo dote de simetría helicoidal. Hacemos esto para poder tomar un único conjunto de condiciones iniciales a un mismo tiempo. El problema en su planteo original no tiene simetría helicoidal por la sutileza en cómo se extiende la cuadrivelocidad del punto central al resto del círculo de manera uniforme, lo que no se corresponde con la situación física en que suponemos que el círculo orbita manteniendo su forma. Por lo tanto, la modificación que introducimos es tomar un círculo que orbita rígidamente con la velocidad angular de la geodésica guía, pero con las cuadrivelocidades que se desprenden de esa hipótesis.<sup>6</sup> Por construcción, la cuadrivelocidad coincide en el punto central con el modelo original y la diferencia se acentúa a mayor distancia del centro. Estas son las cuadrivelocidades que utilizamos para establecer el marco de reposo local en cada punto. Además, reducimos el radio del punto a  $R_{\text{spot}} = 0.05M$  para enfatizar la región donde se concentra la emisión y el acuerdo entre los modelos es cercano.

Para verificar que esto tenga sentido, primero calculamos las curvas de luz con el modelo modificado utilizando el método de observador a emisor (que no presenta esta dificultad), sin encontrar diferencias respecto al modelo original. Luego, concluimos que la modificación es físicamente insignificante, por lo que es válido hacerla con el fin de utilizar la reducción helicoidal y aún así comparar con la Ref. [90]. Esto se debe a que, al fin y al cabo, lo que más determina el resultado es lo que sucede realmente cerca del centro del círculo, donde ambos modelos son aproximadamente iguales.

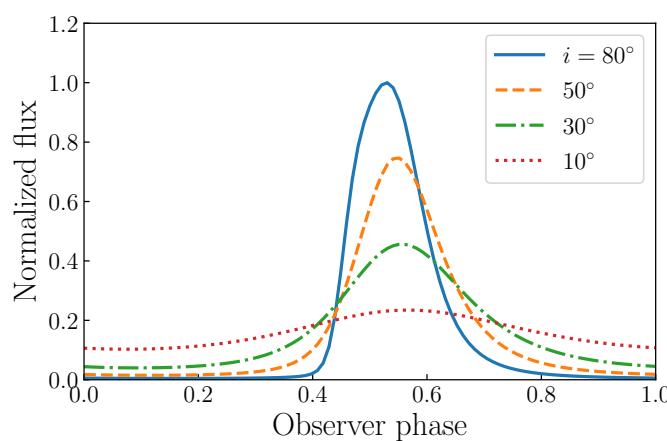
Finalmente, utilizamos el método de emisor a observador con el modelo modificado con un total de  $N = 128$  millones de fotones propagados desde la superficie del círculo hasta los detectores virtuales a una distancia  $d = 1000M$ . En la Figura 2.10 mostramos las curvas de luz de este modelo modificado para varios ángulos de observación. Las curvas de luz están escaladas de la misma manera que en el método de observador a emisor. Nuevamente, el acuerdo tanto con los resultados del otro método como con los de la Ref. [90] es muy bueno. Aunque la curva de luz a  $i = 80^\circ$  es algo más ancha que en el otro método, consideramos que la similitud es aceptable, considerando que las relaciones de las amplitudes de los pulsos y las fases de los picos son correctas. Otras diferencias notables aparecen para las curvas de luz de menor inclinación. Esto se debe a que el área colectora de fotones se reduce en un factor de  $\sin i$ , por lo que la estadística de fotones a inclinaciones más bajas es peor en comparación con inclinaciones más altas para el mismo conjunto de datos.

---

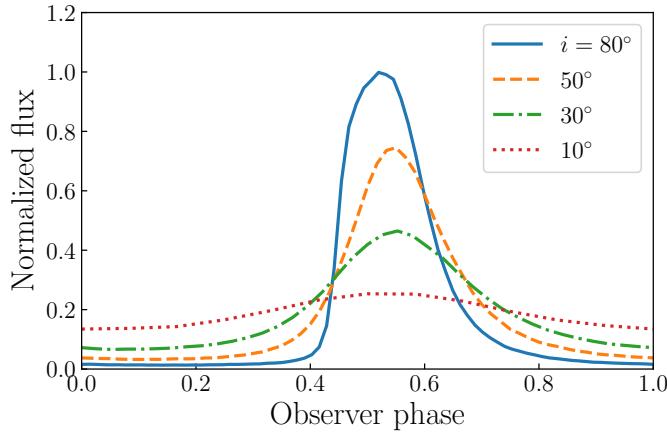
<sup>6</sup>Como mostraré enseguida, esta modificación es insignificante a nivel físico pero, curiosamente, si utilizamos el cálculo reducido con simetría helicoidal sin tener en cuenta esta sutileza los resultados son malos y no coinciden con lo esperado.



**Figura 2.8:** Espectrograma de un círculo caliente de radio  $R = 0.25M$  para un ángulo de visión de  $i = 60^\circ$  en el método de observador a emisor.



**Figura 2.9:** Curvas de luz para un círculo caliente de radio  $R = 0.25M$  en varios ángulos de visión utilizando el método de observador a emisor. Las curvas de luz están normalizadas a 1 y escaladas al valor máximo de la curva a  $i = 80^\circ$ .



**Figura 2.10:** Curvas de luz para un punto caliente circular de radio  $R = 0.05M$  en varios ángulos de visión utilizando el método de emisor a observador. Las curvas de luz están normalizadas a 1 y escaladas al valor máximo de la curva a  $i = 80^\circ$ .

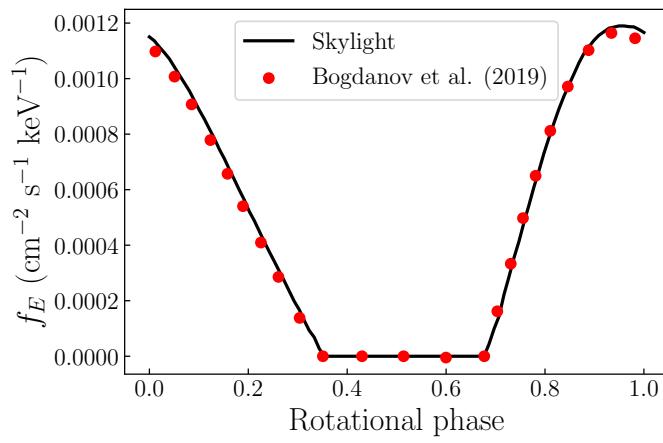
### 2.4.3. Emisión de rayos X de un círculo caliente sobre una estrella de neutrones

En la Ref. [126] se proporcionó un conjunto de perfiles de pulsos de rayos X de estrellas de neutrones sintéticos de alta precisión verificados, para que otros códigos sean evaluados en comparación. Implementamos algunos de estos tests, implicando en este caso una prueba simultánea de las dependencias temporal y espectral de `skylight`. Además, a diferencia de los tests anteriores, los perfiles de referencia están en unidades físicas, por lo que también sirven como un test de la normalización de nuestras curvas y nuestro tratamiento de las unidades en general. Los múltiples códigos comparados en la Ref. [126] utilizan las aproximaciones de Schwarzschild + Doppler (S+D) y Oblate-Schwarzschild (OS), en las cuales el espacio–tiempo de la estrella se approxima como Schwarzschild y la superficie estelar se supone una esfera o un esferoide oblato, respectivamente.

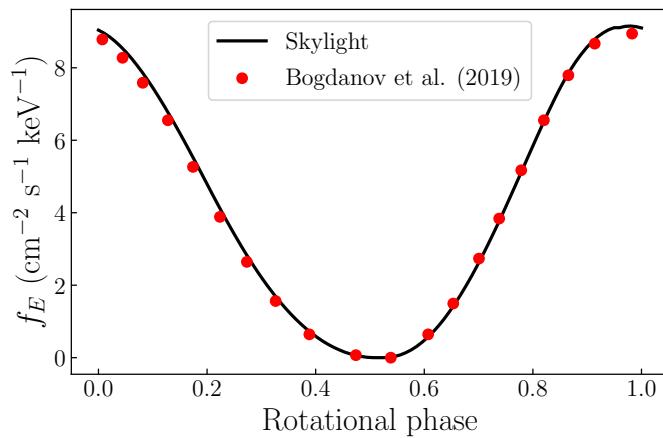
Siguiendo la nomenclatura de la Ref. [126], hemos implementado la clase SD1 de modelos en los que la estrella de neutrones se approxima como una esfera rotante en el espacio–tiempo de Schwarzschild, la masa y el radio de la estrella de neutrones son  $M = 1.4M_\odot$  y  $R = 12$  km respectivamente, y la emisión proviene de un único círculo caliente sobre la superficie de la estrella. La intensidad específica se supone isotrópica y planckiana con  $k_B T = 0.35$  keV (todo referido al marco de reposo local de la superficie de la estrella). La distancia al observador es  $D = 200$  pc. El resto de los parámetros del modelo son la colatitud del centro del círculo  $\theta_c$ , el radio angular del círculo  $\Delta\theta$ , la colatitud de observación  $\xi$ , y la frecuencia de rotación de la estrella de neutrones  $\nu$ . Los valores de estos parámetros para los casos que reproducimos (SD1c–e) se listan en la Tabla 2.1. En las Figuras 2.11–2.13 comparamos el flujo monocromático de partículas observado a 1 keV obtenido con el método de observador a emisor de `skylight` contra los perfiles de la Ref. [126], encontrando un muy buen acuerdo entre ellos.

**Tabla 2.1:** Parámetros de los tests de referencia del círculo caliente en la estrella de neutrones

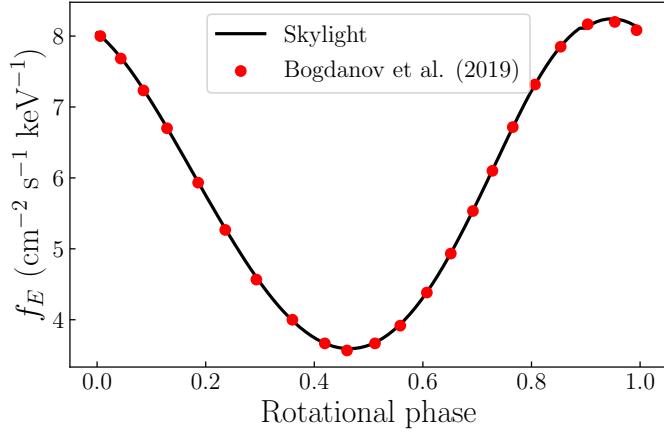
Parámetro	test SD1c	test SD1d	test SD1e
Colatitud del centro del círculo (°)	90	90	60
Radio angular del círculo (rad)	0.01	1	1
Colatitud del observador (°)	90	90	30
Frecuencia de rotación (Hz)	200	200	400



**Figura 2.11:** Flujo de partículas monocromáticas a 1 keV para el modelo de círculo caliente en la estrella de neutrones SD1c de la Ref. [126]. Los parámetros son  $\theta_c = 90^\circ$ ,  $\Delta\theta = 0.01$ ,  $\xi = 90^\circ$  y  $\nu = 200$  Hz.



**Figura 2.12:** Flujo de partículas monocromáticas a 1 keV para el modelo de círculo caliente en la estrella de neutrones SD1d de la Ref. [126]. Los parámetros son  $\theta_c = 90^\circ$ ,  $\Delta\theta = 1$ ,  $\xi = 90^\circ$  y  $\nu = 200$  Hz.



**Figura 2.13:** Flujo de partículas monocromáticas a 1 keV para el modelo de círculo caliente en la estrella de neutrones SD1e de la Ref. [126]. Los parámetros son  $\theta_c = 60^\circ$ ,  $\Delta\theta = 1$ ,  $\xi = 60^\circ$  y  $\nu = 400$  Hz.

## 2.5. Tests de convergencia

### 2.5.1. Método de observador a emisor

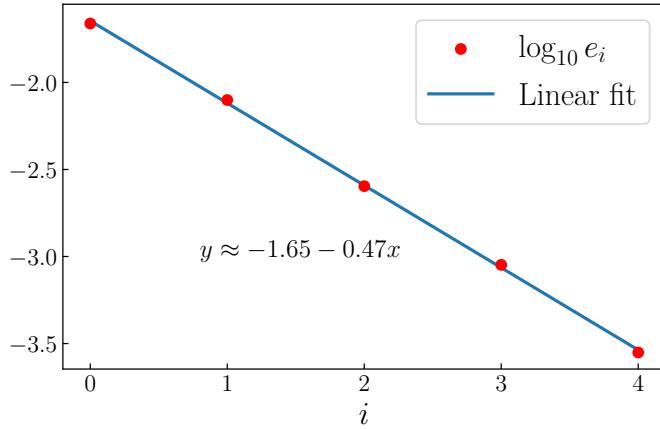
Realizamos un test de convergencia para el método de observador a emisor con el modelo de círculo caliente SD1d descrito en la Sección 2.4.3. Comparamos seis simulaciones diferentes usando un plano imagen de lado  $L \approx 2.75R$  y  $N_i = 25 \times 2^i$  puntos por lado ( $0 \leq i \leq 5$ ). En la Figura 2.14 mostramos los errores relativos  $L_2$  del flujo con respecto a la simulación de más alta resolución, es decir

$$e_i = \frac{\|f_i(t) - f_5(t)\|_{L_2}}{\|f_5(t)\|_{L_2}}, \quad 0 \leq i \leq 4. \quad (2.23)$$

Un ajuste lineal por mínimos cuadrados de los datos del error da la relación  $\log_{10}(e_i) \approx -1.65 - 0.47i$ , lo que significa que el error sigue aproximadamente una ley de potencias

$$e_i \approx 8 \times 10^{-4} \left( \frac{N_i}{200} \right)^{-1.57} \quad (2.24)$$

en términos del número de puntos por lado del plano imagen. En otras palabras, para esta configuración encontramos que una resolución de  $N = 200$  puntos por lado es suficiente para obtener un error relativo aproximado del orden de  $10^{-4}$ , y que este error escala como una ley de potencias de índice  $p \approx -1.57$  con respecto a  $N$ . La resolución requerida para lograr el mismo error será mayor si la región de emisión tiene una mayor complejidad o una estructura más detallada. Sin embargo, este ejemplo simple es útil como estimación del rango donde nuestro código opera con precisión.



**Figura 2.14:** Los puntos corresponden a los errores relativos  $L_2$  para el test de convergencia utilizando el modelo SD1d de la Ref. [126] con  $N_i = 25 \times 2^i$  puntos por lado del plano imagen. La línea sólida es el ajuste lineal por mínimos cuadrados de los datos. El error sigue aproximadamente una ley de potencias con índice  $p = -1.57$  en términos del número de puntos por lado del plano imagen.

### 2.5.2. Método de emisor a observador

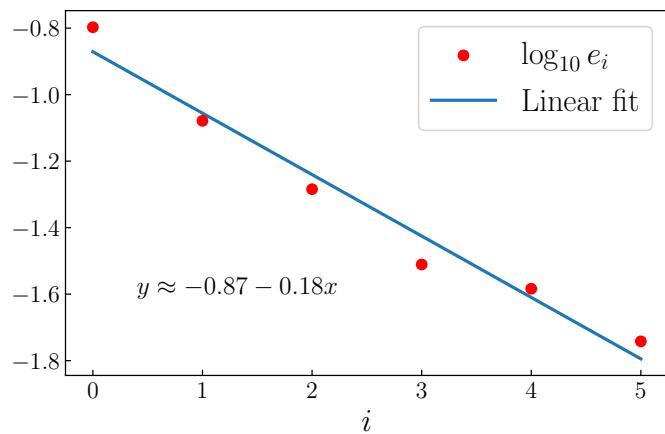
Para un test de convergencia del método de emisor a observador tomamos el modelo de círculo caliente que orbita rígidamente (modificado) descrito en la Sección 2.4.2. Comparamos siete simulaciones diferentes muestreando  $N_i = 2 \times 2^i$  millones de paquetes de fotones ( $0 \leq i \leq 6$ ). En la Figura 2.15 mostramos los errores relativos bajo la norma  $L_2$  para las curvas de luz con respecto a la ejecución de más alta resolución, es decir

$$e_i = \frac{\|F_i(t) - F_6(t)\|_{L_2}}{\|F_6(t)\|_{L_2}}, \quad 0 \leq i \leq 5. \quad (2.25)$$

Un ajuste lineal por mínimos cuadrados de los datos del error da la relación  $\log_{10}(e_i) \approx -0.87 - 0.18i$ , lo que significa que el error sigue aproximadamente una ley de potencias

$$e_i \approx 10^{-2} \left( \frac{N_i}{64 \times 10^6} \right)^{-0.6} \quad (2.26)$$

en términos del número de paquetes de fotones en la muestra. Nótese que el índice de la ley de potencias, 0.6, es consistente con la convergencia típica con  $\sqrt{N}$  de las simulaciones Monte Carlo.



**Figura 2.15:** Los puntos corresponden a los errores relativos bajo la norma  $L_2$  para el test de convergencia del método de emisor a observador en el modelo de círculo caliente orbitante con un total de  $N_i = 2 \times 2^i$  millones de paquetes de fotones. La línea sólida es el ajuste lineal por mínimos cuadrados de los datos. El error sigue aproximadamente una ley de potencias con índice  $p = -0.6$  respecto del número de paquetes de fotones.



# Capítulo 3

## Emisión térmica de rayos X en púlsares de milisegundo

*En este capítulo, presentamos investigaciones sobre la emisión térmica de rayos X en MSPs. En primer lugar, introducimos nuestro nuevo modelo: el espacio–tiempo, la magnetósfera force–free, el mapa de temperaturas sobre la superficie, y la intensidad específica local de la radiación emergente. Para la intensidad específica consideramos dos modelos distintos: un cuerpo negro local con anisotropía y un modelo de atmósfera estelar de Hidrógeno. Luego, mostramos ajustes de observaciones de NICER de cuatro MSPs y comentamos algunas limitaciones encontradas y cómo logramos superarlas.*

*Los resultados correspondientes al primer modelo de cuerpo negro anisotrópico se encuentran publicados en la Ref. [127], mientras que los resultados posteriores con el modelo de atmósfera se encuentran aún sin publicar. Mis contribuciones a este proyecto fueron: la realización de simulaciones force–free con el código `onion` y su postprocesamiento; la implementación del modelo radiativo en el código `skylight`, incluyendo un interpolador de los datos de `onion`, el cuerpo negro anisotrópico, y el modelo de atmósfera de Hidrógeno; el método de cálculo de las curvas de luz; y, salvo mención explícita, el desarrollo de las figuras presentadas. Cabe destacar que los ajustes y las correspondientes figuras fueron producidas por F. Carrasco.*

### 3.1. Introducción

Como introdujimos en el Capítulo 1, los MSPs son una clase de púlsares extremadamente estables. Sus períodos están alrededor de 1–30 ms, y sus tasas de frenado son del orden de  $\dot{P} \sim 10^{-20}$ . Son púlsares antiguos, con edades características  $\tau_c = P/2\dot{P} \sim 0.1–10$  Gyr, y campos magnéticos superficiales de  $B \sim 10^{8–9}$  G. Su emisión de rayos X es esencialmente de origen térmico y se produce en regiones calientes sobre la superficie de la estrella [60–69]. Estas regiones son calentadas a temperaturas de hasta  $T \sim 10^6$  K por el bombardeo constante de partículas que se aceleran a energías muy altas en brechas magnetosféricas [128]. La hipótesis usual, que en este capítulo revisaremos, es que estas regiones de emisión corresponden a la base de las líneas abiertas del campo magnético sobre la superficie estelar, los llamados “casquetes polares”.

Un buen método para medir indirectamente las propiedades físicas de las estrellas de neutrones es a través de la observación y el modelado precisos de las curvas de luz de

rayos X de MSPs [70–82, 129]. Los MSPs son especialmente propicios para ello debido a su alta estabilidad. Aún así, la tarea continúa siendo no trivial y es un problema con bastante degeneración. Una aplicación importante de este método es para la restricción de la relación masa–radio de las estrellas de neutrones y, a través de ella, de su ecuación de estado. Dado que los rayos X térmicos se emiten sobre la superficie de la estrella, la compacidad estelar tiene un fuerte impacto en los pulsos emitidos a través de la influencia del campo gravitacional. Muchos esfuerzos teóricos y observacionales recientes se han dirigido en este sentido. En particular, el Explorador de la Composición Interior de Estrellas de Neutrones (NICER, por sus siglas en inglés; [130]) que comenzó a operar en junio de 2017, ha medido curvas de luz de rayos X de algunos MSPs cercanos con una sensibilidad sin precedentes (e.g., [76, 131]). Uno de sus principales objetivos científicos es, precisamente, obtener datos de alta calidad para inferir la masa y el radio de los MSPs observados, así como la geometría de sus campos magnéticos superficiales, mediante el modelado de las observaciones.

Un ejemplo notable de esta metodología son los modelados bayesianos de la curva de luz de rayos X de PSR J0030+0451 de las Refs. [68, 78, 81, 82, 129]. Estos trabajos parten de modelos analíticos con un par de regiones calientes sobre la superficie estelar, cada una de forma circular o anular y de temperatura uniforme, permitiendo configuraciones antipodales y no antipodales. Ajustando la curvas de luz del púlsar a partir de esas regiones de emisión, encontraron que al menos una de las regiones de PSR J0030+0451 tendría una forma significativamente alargada y las configuraciones antipodales resultaron desfavorecidas por su análisis estadístico [129]. A partir de estas inferencias, si se supone como es usual que las regiones de emisión son los casquetes polares del campo magnético, esto implicaría que el campo magnético de PSR J0030+0451 debe tener una fuerte componente no dipolar, ya que un campo dipolar produce casquetes antipodales. En base a esto, trabajos posteriores [79, 80] encontraron configuraciones de campo magnético tales que los casquetes polares se asemejaran a las regiones inferidas para PSR J0030+0451, incluyendo componentes dipolares y cuadrupolares descentradas, logrando reproducir hasta cierto punto las observaciones de rayos X.

En este trabajo, optamos por un enfoque diferente. En vez de suponer la existencia de multipolos magnéticos más altos para explicar las regiones de emisión alargadas y no antipodales, modificamos la hipótesis que define las regiones de emisión, adoptando un modelo alternativo. Para eso, partimos de simulaciones numéricas en relatividad general de la magnetósfera de una estrella de neutrones rotante dotada de un campo magnético dipolar. Luego, conectamos las corrientes eléctricas resultantes con la emisión térmica superficial de la estrella, siguiendo esencialmente una propuesta realizada en la Ref. [67]. Finalmente, calculamos los espectros y curvas de luz con el código de transporte `skylight` y ajustamos las observaciones de NICER de PSR J0030+0451, además de otros tres MSPs: PSR J0437–4715, PSR J1231–1411 y PSR J2124–3358. Al final, encontramos que nuestro enfoque permite reproducir las observaciones con sorprendente precisión. En particular, para PSR J0030+0451 ofrecemos una interpretación alternativa de la curva de luz, que no requiere más que un momento dipolar del campo magnético, sino un modelo de emisión distinto.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 3.2 introducimos el modelo astrofísico propuesto. En la Sección 3.3 describimos nuestra metodología. En la Sección 3.4, primero mostramos las regiones emisoras derivadas de las simulaciones

*force-free* y luego presentamos nuestros mejores ajustes a los datos de rayos X de los cuatro MSPs objetivo. Finalmente, en la Sección 3.5, resumimos algunas conclusiones y perspectivas futuras.

## 3.2. Modelo astrofísico

### 3.2.1. Estrella de neutrones

Aproximamos el espacio–tiempo exterior de la estrella de neutrones por el espacio–tiempo de Kerr, parametrizado por la masa  $M$  y el *spin*  $a$ . Esta es una aproximación razonable para frecuencias de rotación de  $\nu \lesssim 300$  Hz [63, 132, 133], como las de los MSPs observados por NICER que estudiamos en este trabajo. Suponemos que la masa del espacio–tiempo está dada por la masa de la estrella,  $M = M_{\text{NS}}$ . Para determinar el *spin*  $a$ , suponemos que la estrella es una esfera de radio  $R$ , y fijamos el momento de inercia adimensional  $\mathcal{I} := I/(MR^2)$  en  $2/5$ , basándonos en estudios previos [134, 135]. Esto proporciona la siguiente relación entre la velocidad angular de la estrella  $\Omega$  y el *spin*:

$$\frac{a}{R} = \frac{2}{5}\Omega R. \quad (3.1)$$

Sintetizamos estas propiedades en los siguientes parámetros: la velocidad de rotación superficial  $v_s := R/R_{LC}$ , donde  $R_{LC} = c/\Omega$  es el radio del cilindro de luz, y la compacidad estelar

$$\mathcal{C} := \frac{M}{R} \left( \frac{G}{c^2} \right). \quad (3.2)$$

### 3.2.2. Magnetósfera del púlsar

Los púlsares están rodeados por un plasma tenue, la magnetósfera, donde se supone que vale la condición *force-free*, según la cual la inercia del plasma es despreciable frente a la energía del campo magnético. En ese caso, no hay intercambio de energía y los tensores de energía–impulso del campo electromagnético y del plasma se conservan separadamente, es decir:

$$\nabla_\mu T_{\text{EM}}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.3)$$

$$\nabla_\mu T_{\text{plasma}}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.4)$$

El tensor de energía–impulso electromagnético satisface idénticamente

$$\nabla_\mu T_{\text{EM}}^{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}j^\mu, \quad (3.5)$$

donde  $F_{\mu\nu}$  es el tensor de Maxwell,  $j^\mu$  la cuadridensidad de corriente, y el término del lado derecho es la densidad de fuerza de Lorentz que el campo ejerce sobre el plasma. Por lo tanto, en la aproximación *force-free*, la fuerza de Lorentz debe ser nula en todas partes (de ahí el nombre de la aproximación). Las ecuaciones de Maxwell para el campo

electromagnético pueden expresarse como

$$\nabla_\mu F^{*\mu\nu} = 0, \quad (3.6)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (3.7)$$

de donde, aplicando la condición *force-free*, se obtienen las ecuaciones de la electrodinámica *force-free*

$$\nabla_\mu F^{*\mu\nu} = 0, \quad (3.8)$$

$$F_{\mu\nu} \nabla_\rho F^{\rho\nu} = 0, \quad (3.9)$$

que permiten evolucionar el campo electromagnético en forma autónoma, independientemente de las variables del plasma. La cuadricorriente puede obtenerse luego a partir  $j^\nu = \nabla_\mu F^{\mu\nu}$ .

Adicionalmente, suponemos que el púlsar es un sistema aislado, por lo que los campos deben decaer a grandes distancias. Por otro lado, suponemos que la superficie estelar es perfectamente conductora, y fijamos la componente normal del campo magnético sobre la superficie en el marco de reposo local a un campo dipolar, posiblemente desalineado respecto del eje de rotación estelar. Denotamos como  $\chi$  el ángulo de desalineamiento del dipolo. Estas hipótesis imponen condiciones de contorno para el campo electromagnético sobre la superficie estelar<sup>12</sup>. Esta suposición de campo dipolar es mucho más simple que las realizadas en trabajos anteriores, las cuales incluyen dipolos y cuadrupolos descentrados.

Bajo estas condiciones, las soluciones *force-free* en su régimen estacionario<sup>3</sup> quedan esencialmente determinadas por tres parámetros: (i) el ángulo de desalineamiento  $\chi$  entre el momento magnético y el eje de rotación estelar, (ii) la velocidad de rotación superficial, que hemos fijado en  $v_s = 0.05$ , y (iii) la compacidad estelar  $\mathcal{C}$ . Nótese que las ecuaciones *force-free* son invariantes respecto de la escala del campo electromagnético, por lo cual esta puede modificarse *a posteriori* rescaleando, por ejemplo, el momento magnético o la intensidad del campo en el polo magnético a partir de una solución dada.

### 3.2.3. Regiones de emisión sobre la superficie estelar

Se acepta comúnmente que la emisión térmica de rayos X en los MSPs proviene de regiones calentadas por el bombardeo de partículas de alta energía que se aceleran en la magnetósfera. El origen de la energía de estas partículas relativistas sería el enorme reservorio de energía magnética que existe en el entorno de los MSPs. Sin embargo, recordemos que la condición *force-free* implica la anulación de la fuerza de Lorentz, impidiendo en principio la aceleración de partículas a altas energías por parte del campo electromagnético.

<sup>1</sup>El sistema de ecuaciones *force-free* es hiperbólico [136] y admite soluciones estacionarias con las condiciones de contorno supuestas [137].

<sup>2</sup>Estas hipótesis no determinan las cuadricorrientes sobre la superficie, un ingrediente esencial de nuestro modelo como describimos más adelante, ya que aquellas dependen de las componentes tangenciales del campo, que evolucionan dinámicamente.

<sup>3</sup>Las soluciones desarrollan genéricamente una estructura conocida como hojas de corriente, donde el campo magnético es discontinuo y necesariamente se rompe la condición *force-free*. Las soluciones numéricas dependen en cierta medida del tratamiento que se haga de estas hojas de corriente, lo que típicamente incluye algún proceso disipativo.

tico. Por lo tanto, para que este cuadro sea válido, la aceleración debe darse en regiones donde la condición *force-free* se rompa. En nuestro modelo, adoptamos el argumento presentado en la Ref. [67], suponiendo que la aceleración de partículas ocurre en regiones donde la cuadricorriente es de tipo espacial (es decir,  $j_\mu j^\mu > 0$ ). Esto se basa en que para sustentar una cuadricorriente de tipo espacial debe existir un contraflujo de partículas de carga opuesta que puede dar lugar a inestabilidades del plasma. En esas inestabilidades puede desarrollarse una componente de campo eléctrico paralela al campo magnético capaz de acelerar partículas a altas energías [128, 138].

Por último, en una segunda etapa de este proyecto que discutiremos luego, introdujimos un parámetro de umbral, de modo que las regiones de emisión sobre la superficie quedan determinadas por una condición más excluyente,  $j_\mu j^\mu > j_{\text{umbral}}^2$ , donde  $j_{\text{umbral}}^2$  permite, esencialmente, reducir el área de la región emisora. Más adelante, mostraremos resultados bajo ambas prescripciones, tanto sin umbral como con umbral y discutiremos cómo la introducción del umbral contribuyó a superar limitaciones encontradas en la primera etapa del proyecto.

### 3.2.4. Mapa de corrientes a temperaturas

Para determinar el mapa de temperaturas sobre las regiones de emisión a partir de las corrientes, hacemos una suposición sencilla de balance entre la tasa de energía depuesta por la corriente y la tasa de energía radiada como cuerpo negro. Específicamente, la tasa de energía cinética depuesta por las partículas relativistas sobre la superficie estelar está dada por

$$P_{\text{in}} = \kappa(\bar{\gamma} - 1)m_e c^2 |\mathbf{j}|/e, \quad (3.10)$$

donde  $\kappa$  es la fracción de la corriente compuesta de partículas relativistas,  $\bar{\gamma}$  es el factor de Lorentz medio de las partículas relativistas,  $\mathbf{j}$  es la corriente espacial en el marco de reposo local de la estrella de neutrones, y  $e$ ,  $m_e$  representan la carga y la masa del electrón, respectivamente. Luego, el balance de la potencia depuesta con la potencia radiada por un cuerpo negro implica un mapa de temperaturas efectivas sobre la región de emisión dado por

$$T_{\text{eff}} = \left( \frac{c^2 m_e \kappa(\bar{\gamma} - 1) |\mathbf{j}|}{e \sigma} \right)^{1/4} \quad (3.11)$$

donde  $\sigma$  es la constante de Stefan–Boltzmann (ver la Ref. [66] para una discusión detallada de estas hipótesis). Dado que las partículas son altamente relativistas se cumple que  $\kappa(\bar{\gamma} - 1) \approx \kappa\bar{\gamma}$ , donde este producto actúa efectivamente como un único parámetro en nuestro modelo.

### 3.2.5. Intensidad específica de la radiación emergente

Para obtener la intensidad específica del campo de radiación emergente a partir de la temperatura efectiva, se debe tener en cuenta que la estrella de neutrones posee una atmósfera que interactúa con la radiación. Para eso, en este proyecto consideramos, sucesivamente, dos alternativas, que explicamos a continuación.

### Cuerpo negro con anisotropía

En una primera etapa, supusimos que la intensidad corresponde a la de un cuerpo negro a la temperatura local  $T_{\text{eff}}$  con un factor de anisotropía (e.g., Ref. [67])

$$I_{\nu} = \frac{\nu^3 \mathcal{B}(\Theta)}{\exp[\nu/T_{\text{eff}}] - 1}, \quad (3.12)$$

donde el factor de anisotropía está dado por

$$\mathcal{B}(\Theta) = \cos^b(\Theta) \quad (3.13)$$

### Atmósfera de Hidrógeno

En la segunda etapa de este proyecto, introdujimos un modelo detallado de atmósfera delgada de Hidrógeno alrededor de la estrella de neutrones, el mismo utilizado, por ejemplo, en las Refs. [66, 69]. En este escenario, la radiación es redistribuida tanto angular como energéticamente, resultando en un mapa de intensidades específicas modificada respecto al de cuerpo negro. Para incluir este modelo de atmósfera implementamos una interfaz de nuestro código con el paquete *X-ray Pulse Simulation and Inference* (<https://github.com/xpsi-group/xpsi.git>, [139]) que permite calcular la intensidad específica emergente en función de la temperatura efectiva y la gravedad superficial sobre la estrella de neutrones.

#### 3.2.6. Espacio de parámetros

Resumimos aquí los parámetros de nuestro modelo. Fijamos valores de referencia como el radio de la estrella de neutrones en 11.5 km, y el período en 4.8 ms, cercano a los períodos de los cuatro MSPs objetivo. Esto fija la velocidad de rotación superficial en  $v_s = 0.05$  (de modo que  $R_{\text{LC}} = 20R$ ). Esto lo hacemos para reducir el espacio de parámetros, especialmente los asociados a las simulaciones *force-free* que son las más computacionalmente costosas. Además, en la Tabla 3.1 mostramos para cada púlsar objetivo los valores adoptados para sus distancias e intensidades del campo magnético en el polo, provenientes del catálogo de púlsares de la Australia Telescope National Facility [53, 54].

Los parámetros comunes a ambas etapas del trabajo son la compacidad estelar  $\mathcal{C}$ , el desalineamiento del momento magnético  $\chi$ , el ángulo de observación respecto del eje de rotación estelar  $\xi$ , el parámetro  $\kappa\bar{\gamma}$  y, además, un posible desfasaje de las curvas,  $\Delta\phi$ . Adicionalmente, en la primera etapa con el modelo de cuerpo negro anisotrópico, introducimos el índice de anisotropía  $b$ , y un posible factor de rescaleo  $\lambda = F_{\text{max}}/\bar{F}_{\text{max}}$ , donde  $F_{\text{max}}$  es el flujo máximo predicho y  $\bar{F}_{\text{max}}$  el flujo máximo observado. Mientras tanto, en la segunda etapa, además de los parámetros comunes, introducimos el parámetro de umbral de las cuadricorrientes  $j_{\text{umbral}}^2$ .

### 3.3. Metodología

Nuestra metodología consiste, esencialmente, de cuatro instancias. En primer lugar, resolvemos numéricamente la magnetósfera *force-free* del púlsar en relatividad general,

**Tabla 3.1:** Parámetros de los cuatro MSPs objetivo. Datos tomados del catálogo de la Australia Telescope National Facility [53, 54].

PSR	Período [ms]	$B_{\text{polar}} [10^8 \text{ G}]^a$	Distancia [pc]
J0437-4715	5.75	5.80	157
J1231-1411	3.68	2.93	420
J2124-3358	4.93	3.22	410
J0030+0451	4.87	2.25	324

**Notas:**

a El campo magnético polar corresponde a la fórmula de frenado estándar para un dipolo en el vacío [140].

dotado de un campo magnético dipolar, y extraemos los campos y densidades de corriente. Luego, determinamos las regiones de emisión sobre la superficie y obtenemos los mapas de temperatura e intensidades específicas, ya sea como un cuerpo negro con anisotropía o con el modelo de atmósfera de Hidrógeno. Posteriormente, realizamos el transporte radiativo relativista para calcular las correspondientes curvas de luz y espectros. Finalmente, comparamos nuestro modelo con observaciones de NICER y XMM-Newton de los cuatro MSPs objetivo, buscando las configuraciones que mejor ajustan los datos. A continuación, en la Sección 3.3.1 damos algunos detalles de las simulaciones *force-free*, y en la Sección 3.3.2 describimos el cálculo de las curvas de luz y espectros con el código de transporte. En el Apéndice D discutimos brevemente el procedimiento de ajuste de las observaciones de rayos X con nuestro modelo.

### 3.3.1. Simulaciones *force-free*

Para resolver las ecuaciones de la magnetósfera *force-free* de una estrella rotante en relatividad general, utilizamos el código numérico tridimensional `onion` [141]. Este código ha sido aplicado en diversos contextos astrofísicos, incluyendo agujeros negros [141, 142], púlsares [143], magnetares [144] y sistemas binarios de agujero negro-estrella de neutrones [121, 145]. Para más detalles técnicos sobre la implementación numérica, remitimos al lector a las Refs. [141, 143].

El dominio numérico cubre la región entre la superficie de la estrella de neutrones de radio  $R$  y una superficie esférica exterior ubicada en  $64R \gtrsim 3R_{\text{LC}}$ . Las simulaciones *force-free* conllevan un alto costo computacional, por lo que tenemos limitaciones en la exhaustividad del muestreo del espacio de parámetros que podemos realizar. Para este trabajo, tomamos una muestra discreta de 25 simulaciones, dada por cinco ángulos de desalineamiento  $\chi = \{15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ\}$  y cinco compacidades estelares  $\mathcal{C} = \{0.15, 0.18, 0.2, 0.22, 0.25\}$ . Estas compacidades corresponden para una estrella de 11.5,km de radio a masas de  $M \sim \{1.2, 1.4, 1.6, 1.7, 1.9\} M_\odot$  respectivamente.

Como ya hemos mencionado, las condiciones de contorno sobre la superficie estelar son las de una superficie perfectamente conductora y un campo magnético dipolar. Por otro lado, las condiciones sobre la frontera exterior son maximalmente disipativas, garantizando que no ingresen señales al dominio, y que no haya reflexiones de ondas salientes. Para encontrar las soluciones *force-free* estacionarias, partimos de un campo magnético

inicialmente dipolar en todo el dominio numérico y evolucionamos el sistema por algo más de dos rotaciones estelares, hasta que los campos convergen a un valor estable. Una vez alcanzada la configuración estacionaria, extraemos el campo magnético y la densidad de corriente sobre la superficie estelar que luego usamos para definir las regiones de emisión y obtener el mapa local de temperaturas efectivas.

### 3.3.2. Cálculo de espectros y curvas de luz

Una vez halladas las regiones de emisión y calculado el mapa de intensidades específicas, debemos transportar la radiación desde la superficie estelar hasta el sistema de referencia de observación, considerando la influencia del intenso campo gravitacional de la estrella de neutrones. Para esto, utilizamos el código `skylight` desarrollado en esta tesis, y, en particular, el método de observador a emisor con la aproximación del plano imagen (Apéndice C). Para todas las simulaciones de trazado de rayos tomamos puntos de observación a  $r = 750r_g$ , donde  $r_g = GM/c^2$  es el radio gravitacional de la estrella, y tomamos grillas de  $600 \times 600$  nodos sobre el plano imagen, habiendo comprobado que en tales condiciones las curvas de luz y espectros se encuentran adecuadamente convergidos. En esta instancia interviene otro parámetro del modelo, a saber,  $\xi$ , el ángulo de inclinación del observador respecto al eje rotacional de la estrella. Para cada compacidad estelar utilizada en las simulaciones *force-free*, realizamos simulaciones de trazado de rayos para distintos ángulos de observación, con un refinamiento de hasta  $\Delta\xi = 1^\circ$ . El resto de los parámetros, como los listados en la Tabla 3.1, solo entran en el cálculo al final del mismo, al recuperar las unidades físicas de los flujos calculados.

## 3.4. Resultados

A continuación mostramos los resultados de este capítulo. En la Sección 3.4.1 mostramos algunas regiones de emisión ilustrativas obtenidas con las simulaciones *force-free* (sin filtrar con el parámetro de umbral sobre las corrientes). En particular, discutimos la existencia de una región de emisión adicional dentro de la zona cerrada del púlsar, es decir, fuera de los casquetes polares tradicionales. Luego, en la Sección 3.4.2, mostramos los mejores ajustes obtenidos para las curvas de luz y espectros en ambas etapas del trabajo: primero utilizando el cuerpo negro con factor de anisotropía, sin umbral de corrientes en las regiones de emisión; y, luego, incluyendo el modelo de la atmósfera estelar con el umbral en las corrientes. Además, discutimos las limitaciones surgidas en la primera etapa y cómo logramos superarlas después.

### 3.4.1. Regiones de emisión sobre la superficie estelar

En la Figura 3.1 mostramos las regiones de emisión sobre la superficie de una estrella de neutrones de compacidad intermedia  $\mathcal{C} = 0.2$ , para diferentes desalineamientos del eje magnético  $\chi$ . Obtenemos regiones complejas, incluyendo un par de regiones de emisión<sup>4</sup> principal dentro de los casquetes polares, y además, notoriamente, una segunda región de

---

<sup>4</sup>Aunque no se vea en las figuras, recordar que las configuraciones tienen simetría antipodal, debido a la simetría del campo magnético dipolar.

emisión no estándar dentro de la zona cerrada del púlsar, que coincide con la intersección de la superficie estelar con la superficie de carga nula de la magnetósfera [146].

Un aspecto sumamente interesante de las regiones de emisión no convencionales dentro de la zona cerrada es que resultan ser un efecto de la gravedad de la estrella de neutrones. Para demostrar esto, realizamos simulaciones *force-free* con la mismas condiciones descritas en la Sección 3.3.1, excepto que sobre un espacio–tiempo plano, es decir, despreciando la gravedad de la estrella. En la Figura 3.2 mostramos las regiones de emisión obtenidas, junto con la densidad de corriente paralela al campo magnético y la densidad de carga eléctrica en un corte meridional, tanto sobre el espacio–tiempo plano como sobre el espacio–tiempo de Kerr. La comparación muestra que las corrientes de tipo espacial dentro de la zona cerrada están presentes en el espacio–tiempo de Kerr, pero no en espacio–tiempo plano<sup>5</sup>. También realizamos una prueba análoga sobre el espacio–tiempo de Schwarzschild (es decir, con spin  $a = 0$ ), y encontramos las mismas corrientes de tipo espacial en la zona cerrada. Esto indica que no son un efecto del arrastre de marcos de referencia del espacio–tiempo de Kerr, sino que se deben al orden monopolar de la gravedad.

También es interesante notar la semejanza, a grandes rasgos, de las regiones de emisión no estándar en la zona cerrada del púlsar con el tipo de regiones de emisión inferidas por la colaboración NICER para el pulsar PSR J0030+0451 [129], dada su forma alargada. Esto no es un hecho menor, ya que como discutiremos más adelante, la existencia de estas regiones no estándar es crucial en nuestro modelo para poder lograr buenos ajustes de las observaciones.

### 3.4.2. Curvas de luz y espectros

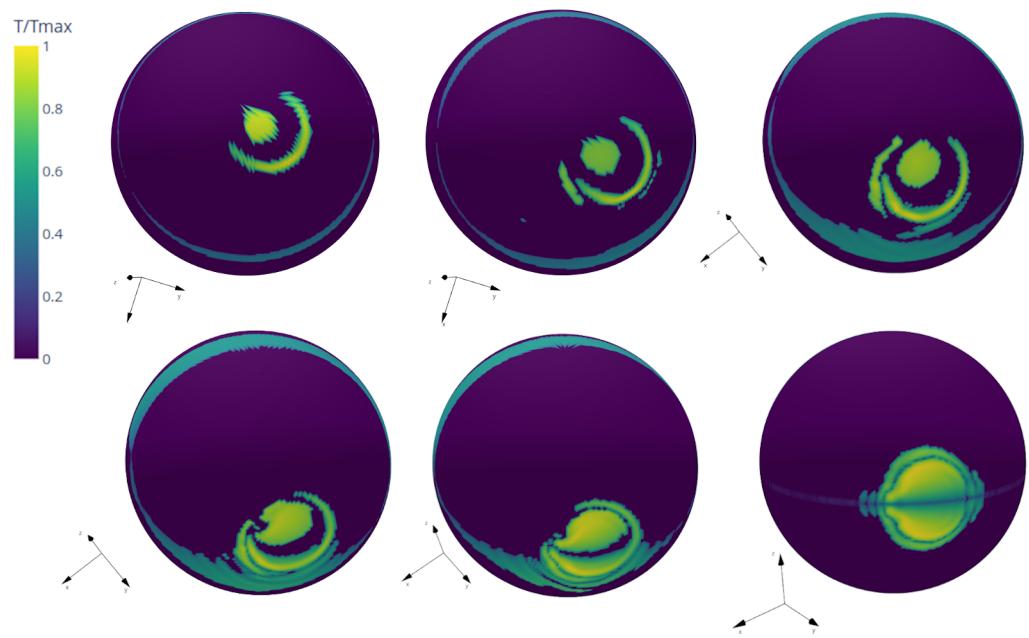
#### Modelo de cuerpo negro con anisotropía

En las Figuras 3.3 a 3.6, presentamos nuestros mejores ajustes a las curvas de luz y espectros, y en la Tabla 3.2 resumimos la información relevante sobre los parámetros de ajuste. Aunque nuestro muestreo del espacio de parámetros no es exhaustivo debido a las limitaciones impuestas por el costo computacional de las simulaciones *force-free*, logramos buenos ajustes tanto para las curvas de luz como para los espectros de todos los púlsares objetivo bajo este modelo inicial. En particular, para PSR J0437–4715 y PSR J2124–3358, los ajustes son excelentes. Considerando que el modelo no tiene muchos parámetros (al menos en comparación con otros de la literatura que incluyen dipolos y cuadrupolos magnéticos descentrados [79, 80]) y que las observaciones son muy precisas, los resultados obtenidos aquí son especialmente alentadores.

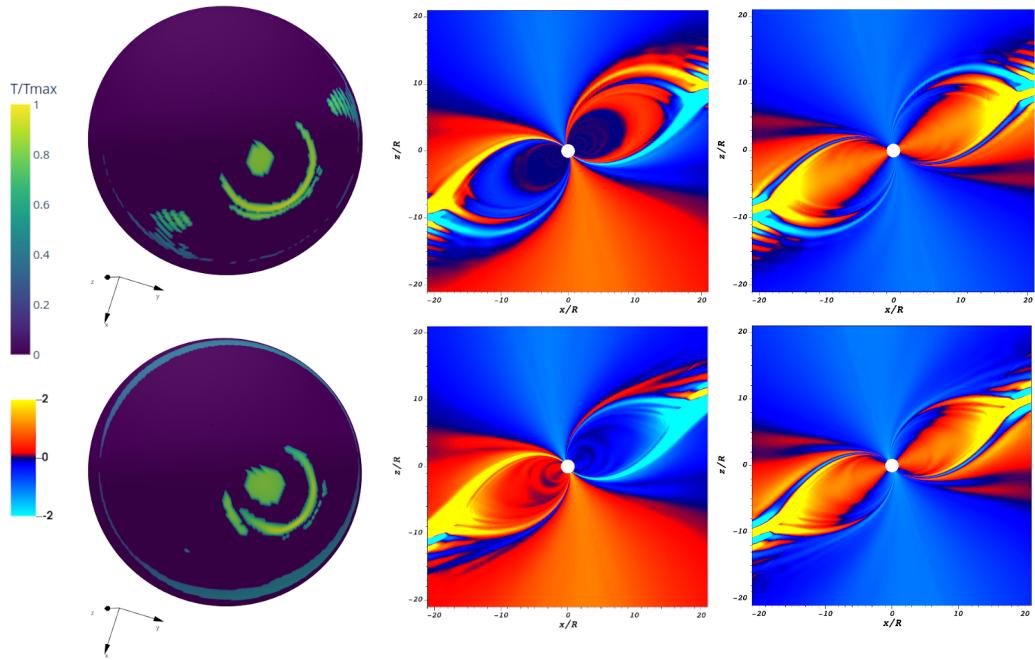
Como se puede ver en la Tabla 3.2, existen degeneraciones entre los parámetros geométricos del sistema, como los ángulos  $\chi$  y  $\xi$  (por ejemplo, en el caso de PSR J0437–4715), o  $\mathcal{C}$  (como el caso de PSR J2124–3358). Estas degeneraciones son comunes y podrían resolverse en principio considerando modelos de emisión multibanda, incluyendo radio y/o rayos  $\gamma$ . Actualmente, estamos trabajando en incorporar también este tipo de fenomenología.

---

<sup>5</sup>Cabe mencionar que estas corrientes no son un efecto transitorio, lo que verificamos extendiendo una simulación *force-free* representativa a escalas de tiempo más largas. Además, verificamos que tampoco dependen significativamente de la resolución numérica empleada, puesto que nuestras soluciones se encuentran apropiadamente convergidas. Esto puede constatarse, adicionalmente, en la Fig. 2 de la Ref. [143].



**Figura 3.1:** *Regiones de emisión para un púlsar con período  $P \sim 4.8$  ms y compacidad  $C = 0.2$ , para varios ángulos de desalineamiento  $\chi = \{15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ\}$  (de izquierda a derecha y de izquierda abajo). Los mapas de color representan la temperatura en la superficie de la estrella de neutrones dada por la Ecuación (3.11) normalizada por su valor máximo.*



**Figura 3.2:** Región de emisión para un púlsar con período  $P \sim 4.8$  ms y ángulo de desalineamiento  $\chi = 30^\circ$ . Configuraciones force-free en espacio-tiempo plano (paneles superiores) y en Kerr (paneles inferiores). Mapa de temperatura sobre las regiones de emisión (izquierda); corriente eléctrica a lo largo del campo magnético  $J_{\parallel}$  (centro) y distribución de carga  $\rho$  (derecha) en el plano meridional, normalizados respectivamente por  $\Omega B/2\pi$  y  $\Omega B/2\pi c$ . Los paneles del centro y la derecha son figuras desarrolladas por F. Carrasco.

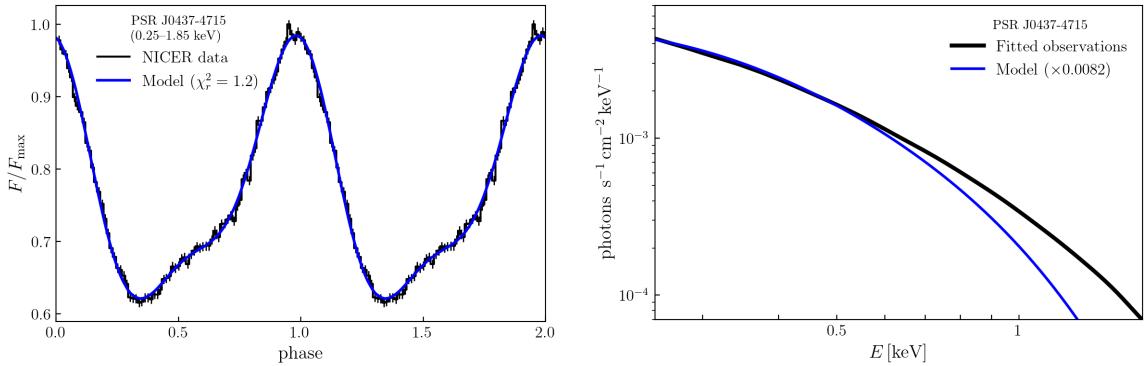
**Tabla 3.2:** Parámetros de mejor ajuste con el modelo de cuerpo negro con anisotropía para las señales de rayos X de los cuatro MSPs objetivo.

PSR	$\mathcal{C}$	$\chi$	$\xi$	$b$	$\kappa\bar{\gamma}$	$\chi_r^2$
J0437-4715	0.25	20°	53°	0.94	$7.0 \times 10^6$	1.2
	0.25	15°	61°	1.00	$7.0 \times 10^6$	1.2
J1231-1411	0.18	75°	12°	0.81	$2.5 \times 10^7$	3.0
	0.22	43°	30°	0.60	$2.5 \times 10^7$	5.3
J2124-3358	0.22	60°	24°	0.67	$1.3 \times 10^8$	0.8
	0.20	75°	17°	0.67	$1.3 \times 10^8$	0.9
J0030+0451	0.22	25°	85°	1.09	$3.8 \times 10^7$	10.0

En la curva de luz de PSR J1231-1411 hay un pequeño pico secundario, que resulta difícil de capturar con precisión. Sin embargo, encontramos otras configuraciones con ajustes cuantitativamente peores, pero que capturan cualitativamente esta estructura (ver panel medio de la Fig. 3.4).

**Relevancia de las regiones de emisión en la zona cerrada del púlsar** Vale la pena mencionar la importancia de las regiones de emisión no estándar dentro de la zona cerrada para lograr los ajustes. Las contribuciones separadas de cada tipo de region de emisión (en la zona abierta y en la zona cerrada) son pulsos altamente simétricos. Pero como las contribuciones de cada par están mutuamente desfasadas, al combinarse se pueden obtener interpulsos asimétricos, como en las curvas de luz de PSR J0437-4715 y PSR J2124-3358, o se pueden reproducir las diferencias de altura entre los dos picos y los dos valles de PSR J00451+0030. Además, confirmamos que no es posible encontrar ajustes tan buenos si se descartan las regiones no estándar, con la excepción de PSR J1231-1411. Esto es consistente con los resultados previos para PSR J0030+0451, según los cuales no es posible reproducir la curva de luz con solo un par de regiones antipodales [78–80, 129]. Esos trabajos resuelven la tensión introduciendo multipolos magnéticos superiores descentrados, dando lugar a casquetes polares no antipodales. Por el contrario, en nuestro caso la solución es la aparición de un par adicional de regiones antipodales en la zona cerrada, consecuencia de una distinta definición de las regiones de emisión.

**Problemas de normalización** La principal limitación de este modelo consiste en la normalización de los flujos predichos, que, como se indica en las figuras, son de dos a cuatro órdenes de magnitud mayores que lo observado. Aquí examinamos en detalle el caso de PSR J0030+0451 para identificar el origen del problema y proponer posibles soluciones. Para ello, tomamos su configuración de mejor ajuste de la Tabla 3.2 y estimamos las áreas y las temperaturas efectivas promedio de ambos tipos de región de emisión, tanto en la zona cerrada como en la zona abierta. Los valores resultantes se resumen en la Tabla 3.3, junto con parámetros análogos de algunos ajustes espectrales de la Ref. [150] para modelos de cuerpo negro y atmósfera de Hidrógeno, así como dos ajustes con modelos de atmósfera de Hidrógeno de las Refs. [78] y [129]. Observamos que, mientras que las temperaturas promedio de nuestro modelo son similares a las del ajuste de cuerpo negro de la Ref. [150], nuestras áreas emisoras son un factor  $\gtrsim 100$  más grandes, explicando así un exceso de



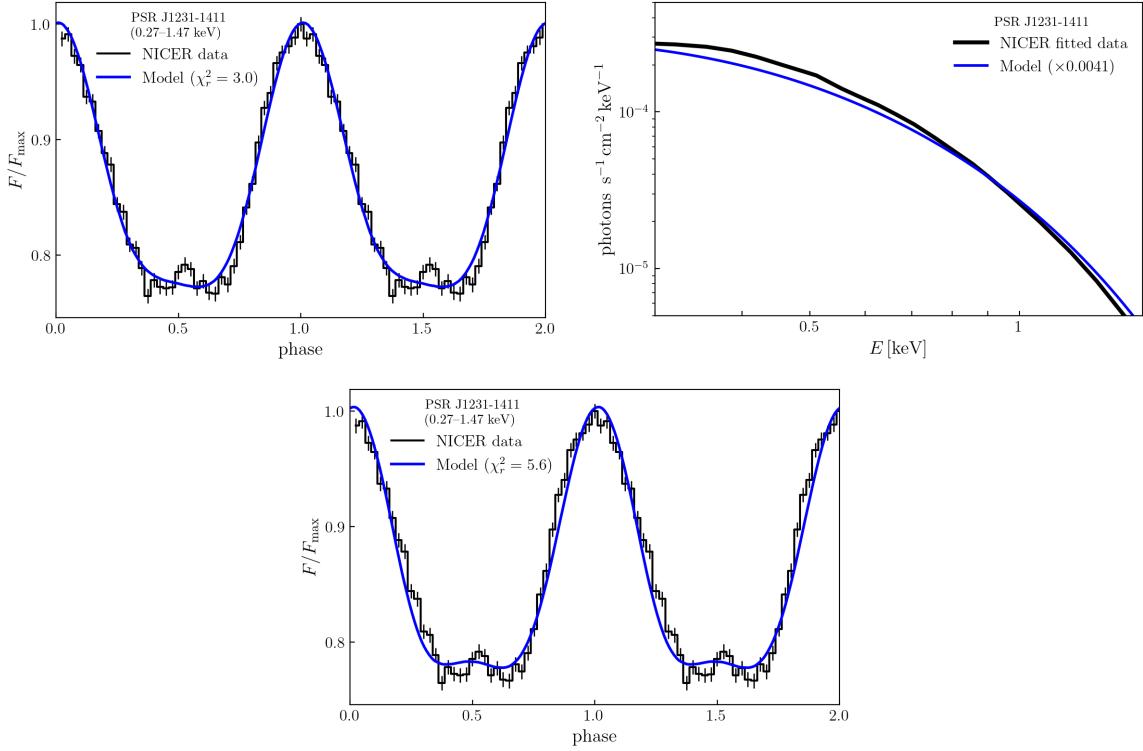
**Figura 3.3:** Mejor ajuste a los datos de rayos X de NICER de PSR J0437-4715. Comparación de nuestra configuración de mejor ajuste contra la curva de luz observada (izquierda) y el espectro (derecha). La curva de luz mostrada en negro, con sus barras de error, corresponde a los datos de NICER tomados de la Ref. [76]. Nuestra curva de luz modelada (en azul) fue integrada en la misma ventana de energía, como se indica en el gráfico. Los datos espectrales, por otro lado, provienen de XMM-Newton X-ray EPIC MOS1/2, ajustados con un modelo 2Hatm+BB+PL [147], y hemos trazado (en negro) la componente no absorbida. Nuestro espectro modelado (en azul) fue reescalado por un factor de  $8.2 \times 10^{-3}$  para la comparación.

aproximadamente dos órdenes de magnitud en nuestros flujos. Sin embargo, las áreas emisoras inferidas para PSR J0030+0451 con los modelos de atmósfera de Hidrógeno están mucho más cerca de las nuestras (aunque aún menores, por un factor  $\sim 10$ ).

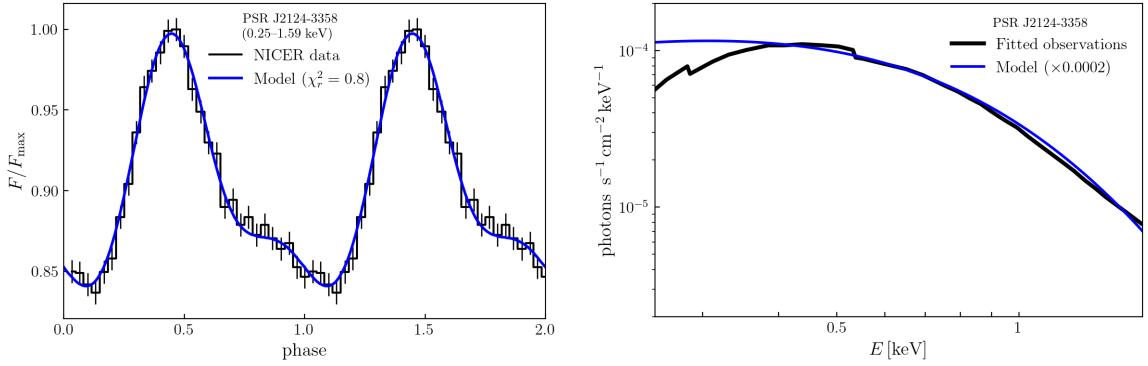
De estas observaciones proviene la motivación para las mejoras propuestas en la segunda etapa de este proyecto: incluir el modelo de atmósfera utilizado en las Refs. [78, 129], y reducir las áreas emisoras introduciendo un umbral en la definición de las regiones de emisión, como  $j_\mu j^\mu > j_{\text{umbral}}^2$ . Con estas modificaciones, podemos esperar normalizaciones de flujo consistentes para todos nuestros púlsares objetivo, manteniendo a la vez la calidad de los ajustes de curvas de luz. Cabe destacar que esta modificación no implica un mayor número de parámetros sino, por el contrario, uno menor: mientras que eliminamos el índice de anisotropía  $b$  y el factor de rescaleo  $\lambda$ , agregamos un solo parámetro  $j_{\text{umbral}}^2$ . A continuación, presentamos algunos resultados preliminares con estas actualizaciones.

### Modelo de atmósfera de Hidrógeno

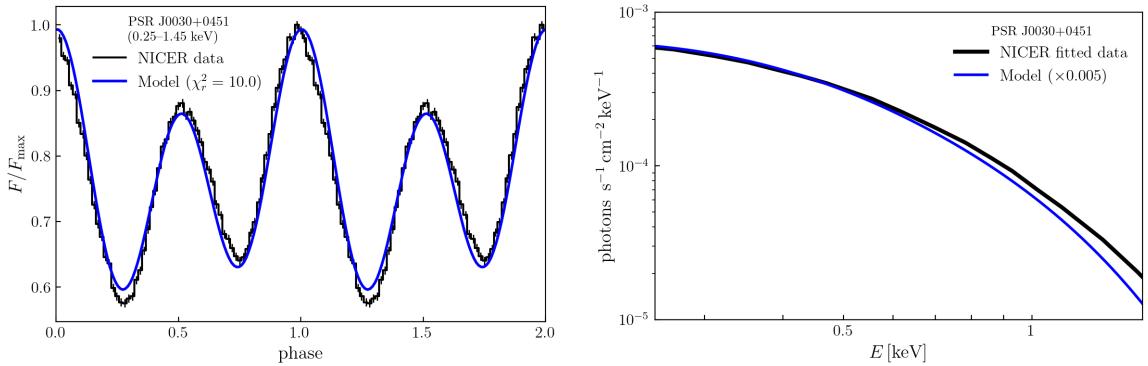
En las Figuras de 3.7 a 3.9 mostramos los resultados obtenidos para tres de los cuatro MSPs objetivo, incluyendo las regiones de emisión definidas con el umbral, las curvas de luz y los espectros. En la Tabla 3.4 disponemos los parámetros correspondientes a los ajustes presentados. En los tres casos los ajustes son muy buenos, tanto de las curvas de luz como de los espectros. Recordamos que, en este caso, la predicción del modelo coincide con las observaciones en unidades absolutas. Notablemente, para PSR 1231-1411 logramos capturar incluso el pequeño interpulso que era tan difícil bajo el modelo anterior. Por otro lado, excluimos aquí el caso de PSR J2124-3358 ya que, lamentablemente, no logramos ningún ajuste simultáneo razonable con este modelo de atmósfera, al menos con



**Figura 3.4:** Mejor ajuste a los datos de rayos X de NICER de PSR J1231-1411. Comparación de nuestra configuración de mejor ajuste contra la curva de luz observada (izquierda superior) y el espectro (derecha superior). La curva de luz mostrada en negro, con sus barras de error, corresponde a los datos de NICER tomados de la Ref. [76]. Nuestra curva de luz modelada (en azul) fue integrada en la misma ventana de energía, como se indica en el gráfico. Los datos espectrales provienen de NICER, ajustados con un modelo de atmósfera de Hidrógeno (nsatmos) [148], y hemos trazado (en negro) la componente no absorbida. Nuestro espectro modelado (en azul) fue reescalado por un factor de  $4.1 \times 10^{-3}$  para la comparación. El panel inferior corresponde a un ajuste alternativo de la curva de luz (cuarta fila en la Tabla 3.2) que captura mejor las características cualitativas de la señal.



**Figura 3.5:** Mejor ajuste a los datos de rayos X de NICER de PSR J2124-3358. Comparación de nuestra configuración de mejor ajuste contra la curva de luz observada (izquierda) y el espectro (derecha). La curva de luz mostrada en negro, con sus barras de error, corresponde a los datos de NICER tomados de la Ref. [76]. Nuestra curva de luz modelada (en azul) fue integrada en la misma ventana de energía, como se indica en el gráfico. Los datos espectrales se toman de observaciones de XMM-Newton, ajustadas con un modelo de atmósfera de Hidrógeno más una ley de potencias [149], y graficamos (en negro) la componente absorbida. Nuestro espectro modelado (en azul) fue reescalado por un factor de  $2.1 \times 10^{-4}$  para la comparación.



**Figura 3.6:** Mejor ajuste a los datos de rayos X de NICER de PSR J0030+0451. Comparación de nuestra configuración de mejor ajuste contra la curva de luz observada (izquierda) y el espectro (derecha). La curva de luz mostrada en negro, con sus barras de error, corresponde a los datos de NICER tomados de la Ref. [76]. Nuestra curva de luz modelada (en azul) fue integrada en la misma ventana de energía, como se indica en el gráfico. Los datos espectrales se toman del espectro promediado en fase deabsorbido con un modelo de atmósfera de Hidrógeno [129], consistente con los datos de XMM-Newton y NICER. Nuestro espectro modelado (en azul) fue reescalado por un factor de  $5 \times 10^{-3}$  para la comparación.

**Tabla 3.3:** Temperaturas efectivas promedio y áreas estimadas de las regiones de emisión de nuestro modelo, comparadas con parámetros análogos de diferentes ajustes espectrales para PSR J0030+0451.

Modelo espectral	$T_{\text{eff},1}$ [ $10^6$ K]	$A_{\text{eff},1}$ [km $^2$ ]	$T_{\text{eff},2}$ [ $10^6$ K]	$A_{\text{eff},2}$ [km $^2$ ]
Este trabajo (cuerpo negro con anisotropía <sup>a</sup> )	3.2	17.2	1.5	158.4
Cuerpo negro (doble temperatura) [150]	3.1	0.008	1.5	0.25
Atmósfera de Hidrógeno (doble temperatura) [150]	1.7	0.2	0.7	15.2
Atmósfera de Hidrógeno (una temperatura) [78]	1.38	3.4	1.38	8.7
Atmósfera de Hidrógeno (una temperatura) [129]	1.29	3.5	1.29	13.6

Notas:

- a En este caso,  $T_{\text{eff},1/2}$  representan las temperaturas efectivas promedio sobre las regiones de emisión de la zona abierta (1) y la zona cerrada (2), mientras que  $A_{\text{eff},1/2}$  son sus correspondientes áreas.

**Tabla 3.4:** Parámetros de mejor ajuste con el modelo de atmósfera de Hidrógeno para las señales de rayos X de los cuatro MSPs objetivo

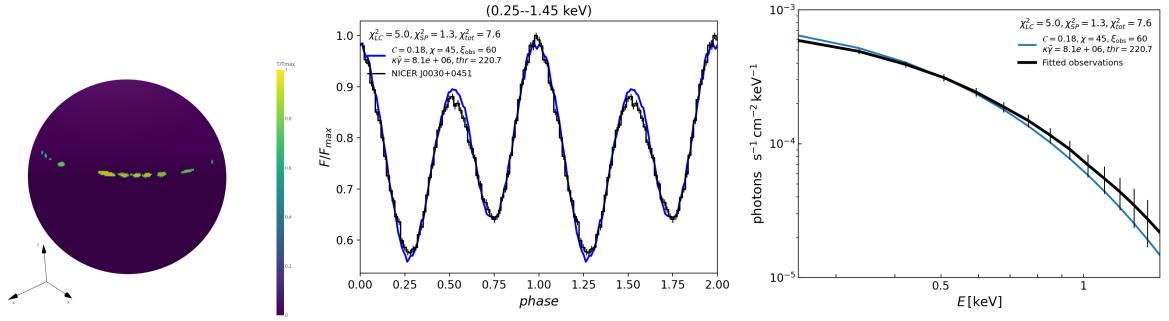
PSR	$\mathcal{C}$	$\chi$	$\xi$	$j_{\text{umbral}}^2$	$\kappa\bar{\gamma}$	$\chi_{\text{tot}}^2$
J0437-4715	0.22	30°	36°	14.4	$4.7 \times 10^5$	7.5
J1231-1411	0.15	60°	12°	78.8	$6.2 \times 10^6$	5.9
J0030+0451	0.18	45°	60°	220.7	$8.1 \times 10^6$	7.6

el muestreo del espacio de parámetros relativamente modesto del que disponemos.

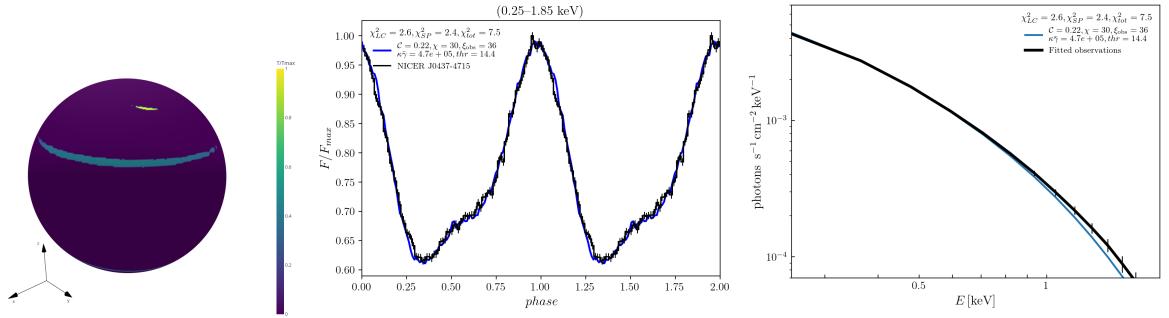
Debemos mencionar que las regiones de emisión en los casos de PSR J0030+0451 y PSR J1231+1411 poseen una estructura compleja, con múltiples subregiones mutuamente desconexas, a una escala que queda apenas unas veces por encima de la resolución espacial de las simulaciones *force-free*, poniendo en cuestión la fisicalidad de los resultados. Por el momento, no tenemos certeza de en qué medida la bondad de nuestros ajustes depende de esos detalles finos. Pero si suponemos que los resultados son relativamente robustos respecto de esos detalles, la perspectiva de nuestro modelo es muy buena, al menos para los MSPs incluidos en este estudio. En el futuro próximo analizaremos esta dependencia, ya sea realizando simulaciones *force-free* de más alta resolución, o bien filtrando las estructuras por medio de un modelado analítico que capture las características de las simulaciones a grandes rasgos.

### 3.5. Conclusiones

En este capítulo, modelamos los pulsos de rayos X térmicos de MSPs y ajustamos datos observacionales de cuatro púlsares objetivo: PSR J0437-4715, PSR J1231-1411, PSR J2124-3358 y PSR J0030+0451. Nuestro enfoque se basa en simulaciones *force-free* de la magnetósfera del púlsar, suponiendo un campo magnético dipolar sobre la



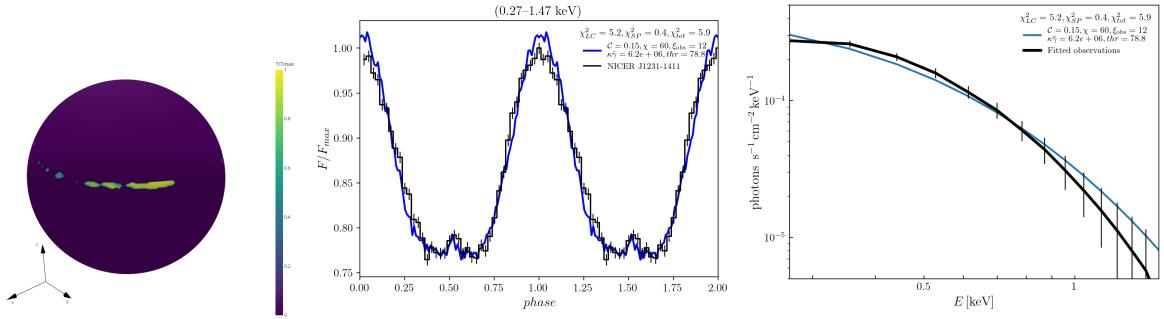
**Figura 3.7:** Mejor ajuste a los datos de rayos X de NICER de PSR J0030+0451. Región de emisión sobre la superficie estelar (izquierda), comparación de nuestra configuración de mejor ajuste contra la curva de luz observada (centro) y el espectro (derecha). La curva de luz mostrada en negro corresponde a los datos de NICER tomados de la Ref. [76]. Nuestra curva de luz modelada (en azul) fue integrada en la misma ventana de energía, como se indica en el gráfico. Los datos espectrales se toman del espectro promediado en fase no absorbido para ST+PST de la Ref. [129], consistente con los datos de XMM-Newton y NICER.



**Figura 3.8:** Mejor ajuste a los datos de rayos X de NICER de PSR J0437-4715. Región de emisión sobre la superficie estelar (izquierda), comparación de nuestra configuración de mejor ajuste contra la curva de luz observada (centro) y el espectro (derecha). La curva de luz mostrada en negro corresponde a los datos de NICER tomados de la Ref. [76]. Nuestra curva de luz modelada (en azul) fue integrada en la misma ventana de energía, como se indica en el gráfico. Los datos espectrales provienen de XMM-Newton X-ray EPIC MOS1/2, ajustados con un modelo 2Hatm+BB+PL [147], y hemos trazado (en negro) la componente no absorbida.

superficie estelar. Las soluciones se conectan a la emisión térmica a través de un modelo de bombardeo por partículas relativistas, donde suponemos que ésta se da en las regiones donde la corriente es de tipo espacial.

Encontramos regiones de emisión no convencionales sobre la superficie estelar en la zona cerrada del púlsar, que sólo están presentes cuando se considera la gravedad de la estrella de neutrones en la dinámica de la magnetósfera. Con estas regiones de emisión dentro de la zona cerradas, logramos excelentes ajustes a las curvas de luz de los MSPs considerados. Esto es notable, en particular, para PSR J0030+0451 dado que sus pulsos



**Figura 3.9:** Mejor ajuste a los datos de rayos X de NICER de PSR J1231-1411. Región de emisión sobre la superficie estelar (izquierda), comparación de nuestra configuración de mejor ajuste contra la curva de luz observada (centro) y el espectro (derecha). La curva de luz mostrada en negro corresponde a los datos de NICER tomados de la Ref. [76]. Nuestra curva de luz modelada (en azul) fue integrada en la misma ventana de energía, como se indica en el gráfico. Los datos espectrales provienen de NICER, ajustados con un modelo de atmósfera de Hidrógeno (nsatmos) [148], y hemos trazado (en negro) la componente no absorbida.

de rayos X se han asociado a la presencia de fuertes componentes no dipolares del campo magnético [68, 79, 80]. Nuestros resultados ofrecen una interpretación alternativa interesante a estas observaciones, ya que en vez de requerir multipolos magnéticos superiores, modificamos el modelo de emisión.

En el futuro planeamos continuar trabajando en este proyecto, por un lado mejorando nuestro tratamiento de los datos observacionales, realizando un procedimiento de ajuste más riguroso que considere el espectrograma completo en sus dependencias temporal y espectral, sin integrarlo en fase ni en la ventana de energía; y por otro lado, extendiendo nuestro modelo a otras bandas del espectro electromagnético, incluyendo simultáneamente emisión en ondas de radio y rayos  $\gamma$ .

# Capítulo 4

## Imágenes de núcleos de materia oscura fermiónica en centros galácticos

*En este capítulo, analizamos imágenes relativistas de núcleos galácticos de materia oscura fermiónica bajo el supuesto de que la radiación proviene de discos alrededor de los mismos. Realizamos un análisis para diferentes masas del fermión y ángulos de visión. Interesantemente, las imágenes muestran depresiones centrales de brillo. Además, no presentan anillos de luz, una característica potencialmente observable que distingue este modelo de un agujero negro.*

*Los resultados aquí presentados corresponden a la Ref. [151] que se encuentra en preparación, pronta a ser enviada a publicar. Mis contribuciones en esta parte consistieron en la implementación del espacio–tiempo RAR y el modelo de disco de acreción en el código de transporte radiativo, la realización de las simulaciones y el desarrollo y producción de las figuras mostradas.*

### 4.1. Introducción

En este capítulo centramos nuestra atención en los núcleos de materia oscura fermiónica como candidato alternativo al objeto supermasivo en el centro de las galaxias. Este candidato tiene varios aspectos particularmente interesantes. Por un lado, el modelo de distribución de materia oscura fermiónica tal como se define en la Ref. [27] incorpora la naturaleza cuántica de las partículas proveyendo así una fuente de presión cuántica, que predomina hacia el centro de las configuraciones. Como consecuencia, el modelo predice perfiles de densidad de materia oscura con una morfología de tipo núcleo denso–halo difuso que depende de la masa del fermión. Por otro lado, las distribuciones con masas del fermión del orden de 10 – 100 keV, pueden explicar las curvas de rotación de diferentes tipos de galaxias [113, 152], mientras que el núcleo de fermiones degenerados puede ser un imitador de agujero negro [39] o incluso eventualmente colapsar en uno [153–155].

En el contexto de galaxias de tipo activo, en la Ref. [156] recientemente se extendió la solución de discos delgados de Shakura & Sunyaev al caso del modelo de materia oscura fermiónica mencionado. Allí se mostró que para cada masa del núcleo fermiónico existe una masa del fermión que produce un espectro de luminosidad esencialmente indistinguible del de un agujero negro no rotante con la misma masa que el núcleo. Además, se mostró que el disco puede ingresar al núcleo, alcanzando eficiencias de acreción de hasta

28 %, comparables a las de un agujero negro de Kerr. En este capítulo, el objetivo es extender este análisis considerando los efectos relativistas sobre la radiación. En particular, investigando las imágenes producidas por el disco alrededor del núcleo compacto de materia oscura. De esta manera, completamos la secuencia análoga realizada para el caso de estrellas de bosones, desde el modelo de disco [157] a las imágenes relativistas [158], aunque en nuestro caso lo aplicamos a galaxias de tipo activo.

En este capítulo tomamos unidades geometrizadas tales que  $c = G = 1$ . El capítulo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 4.2 describimos brevemente las soluciones RAR y las soluciones de disco de acreción alrededor del núcleo compacto de fermiones. En la Sección 4.3 mostramos los resultados para diferentes ángulos de visión y masas de partículas. Y finalmente, en la Sección 4.4 damos una discusión general y perspectivas futuras.

## 4.2. Modelo astrofísico

### 4.2.1. Materia oscura fermiónica

Utilizamos el modelo RAR [27, 113] que considera la materia oscura como un fluido perfecto autogravitante de fermiones neutros masivos de espín 1/2 en equilibrio hidrostático en relatividad general. A partir de un principio de máxima entropía, puede verse que los fermiones en equilibrio siguen una distribución de tipo Fermi-Dirac truncada, dada por

$$f_c(\epsilon \leq \epsilon_c, r) = \frac{1 - e^{(\epsilon - \epsilon_c)/k_B T(r)}}{e^{(\epsilon - \mu)/k_B T(r)} + 1} \quad ; \quad f_c(\epsilon > \epsilon_c, r) = 0 \quad (4.1)$$

donde  $\epsilon = \sqrt{p^2 + m^2} - m^2$  es la energía cinética de la partícula,  $\epsilon_c$  es una energía cinética de truncamiento<sup>1</sup>,  $\mu$  es el potencial químico con la energía en reposo sustraída,  $T(r)$  es la temperatura del fluido y  $k_B$ ,  $m$  son la constante de Boltzmann y la masa del fermión, respectivamente.

Además de estático, el sistema se supone esféricamente simétrico, por lo que la métrica del espacio-tiempo puede escribirse como

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (4.2)$$

En este trabajo utilizamos dos familias de soluciones dentro del modelo RAR: la primera familia corresponde a halos típicos de galaxias de tipo activo con un objeto central supermasivo de masa  $10^7 M_\odot$  y rodeado por un halo de masa total de  $10^{12} M_\odot$ . En este caso, consideramos masas del fermión de  $m = 48$  keV, 155 keV y 200 keV, en orden creciente de la compacidad del núcleo. Para la otra solución, adoptamos una masa central de  $3.5 \times 10^6 M_\odot$  rodeada por un halo similar a la Vía Láctea, de manera similar a lo estudiado en [33]. En este caso, adoptamos una masa del fermión de 300 keV que conduce a un núcleo de materia oscura relativamente cercano a la masa crítica de colapso gravitacional a un agujero negro.

---

<sup>1</sup>El corte está relacionado al escape de partículas con energías cinéticas por encima de cierto umbral en un sistema autogravitante.

### 4.2.2. Disco de acreción

En la Ref. [156] se introdujo una extensión del modelo estándar de Shakura–Sunyaev [115] de disco geométricamente delgado y ópticamente grueso al contexto de la distribución de masa compacta de materia oscura RAR. En esta solución, las partículas del disco siguen órbitas newtonianas<sup>2</sup> con una velocidad angular

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \left( \frac{GM(r)}{r^3} \right)^{1/2}. \quad (4.3)$$

La viscosidad cinemática  $\nu$  del disco está dada por la prescripción  $\alpha$ , según la cual  $\nu = \alpha c_s H$ , donde  $c_s$  es la velocidad del sonido,  $H \ll r$  es la escala de altura del disco, y  $\alpha$  es un parámetro adimensional menor que 1. Con esta hipótesis, el disco resulta ópticamente grueso en la dirección vertical, por lo que se supone que cada elemento del disco radia como un cuerpo negro. La temperatura local en el modelo RAR está dada por

$$T(r) = \left\{ \frac{3\dot{M}}{8\pi\sigma} \frac{GM(r)}{r^3} \left[ 1 - \left( \frac{M_{\text{in}}r_{\text{in}}}{M(r)r} \right)^{1/2} \right] \right. \quad (4.4)$$

$$\left. \times \left[ 1 - \frac{r}{3M(r)} \frac{dM(r)}{dr} \right] \right\}^{1/4}, \quad (4.5)$$

donde  $\dot{M}$  es la tasa de acreción,  $r_{\text{in}}$  es el radio interno del disco. Para este estudio, fijamos la tasa de acreción en 10 % de la tasa de acreción de Eddington<sup>3</sup>, con una eficiencia de conversión a luminosidad de 10 % también. El último término en el lado derecho de la Ec. (4.5), no tiene correlato en la solución estándar alrededor de un agujero negro, pues resulta de la distribución extendida de masa. Para más detalles sobre la solución del disco, remitimos al lector a la Ref. [156].

Dado que el espacio–tiempo RAR no posee una órbita circular estable más interna (ISCO, por sus siglas en inglés), en este modelo adoptamos como radio interno del disco el radio en el cual la eficiencia de acreción alcanza una diferencia relativa del 1 % respecto de su valor de saturación [156]. Denotamos el radio donde esto ocurre como  $r_{\text{sat}}$ . Esto típicamente corresponde a  $r_{\text{in}} \sim 0.1r_c$ , donde  $r_{\text{in}}$  es el radio interno del disco y  $r_c$  es el radio del núcleo. En la Tabla 4.1 mostramos los valores de  $r_{\text{sat}}$  para cada solución RAR considerada. Además, con el fin de mostrar que nuestros resultados no son sensibles a esta hipótesis sobre el radio interno, consideramos también escenarios en que el disco se

<sup>2</sup>La corrección relativista de la velocidad angular es de alrededor de 0,1 % o menos en todos los escenarios considerados en este trabajo.

<sup>3</sup>La luminosidad de Eddington se define como la máxima luminosidad que puede alcanzar un sistema en equilibrio hidrostático. Para un gas de hidrógeno ionizado, esta es

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} \simeq 1.26 \times 10^{38} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{erg/s}, \quad (4.6)$$

donde  $m_p$  es la masa del protón y  $\sigma_T$  es la sección eficaz de Thomson del electrón. En un sistema acretante, donde la energía acretada se convierte en luminosidad con cierta eficiencia  $\eta$ , se define la tasa de acreción de Eddington como  $\dot{M}_{\text{Edd}} = \frac{L_{\text{Edd}}}{\eta c^2}$ .

$M_c [M_\odot]$	$m [\text{keV}]$	$r_{\text{sat}} [\text{cm}]$	$\theta_{\text{sat}} = r_{\text{sat}}/1\text{pc} (\text{as})$
$10^7$	48	$1.16 \times 10^{14}$	7.71
$10^7$	155	$4.56 \times 10^{12}$	0.3
$10^7$	200	$1.98 \times 10^{12}$	0.13
$3.5 \times 10^6$	300	$1.08 \times 10^{12}$	0.07

**Tabla 4.1:** *Masa del núcleo  $M_c$ , masa del fermión  $m$ , radios de saturación  $r_{\text{sat}}$  y radio angular correspondiente medido por un observador ubicado en  $r = 1\text{ pc}$  para las diferentes soluciones RAR utilizadas.*

extiende hasta el origen, es decir  $r_{\text{in}} = 0$ . El radio externo del disco de acreción se fija en  $10^3 r_{\text{sat}}$ .

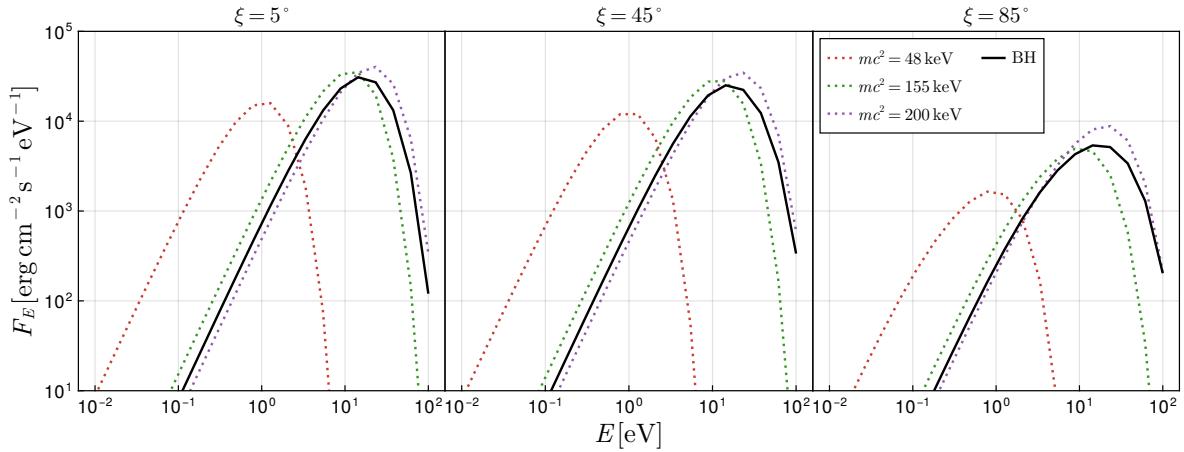
### 4.3. Resultados

Para este análisis utilizamos `skylight`, el código de transporte radiativo desarrollado en esta tesis. Dado que las ecuaciones de equilibrio del sistema fermiónico con condiciones de contorno deben resolverse numéricamente, los coeficientes de la métrica y sus derivadas se obtienen tabulados sobre una grilla. Para manipular estos datos, implementamos en `skylight` un método de interpolación para calcular los coeficientes métricos y los símbolos de Christoffel utilizando los datos numéricos de las soluciones RAR.

Suponiendo que la distribución de materia oscura no ejerce una influencia significativa sobre la radiación más allá de  $r = 1\text{ pc}$  (Apéndice E), tomamos los puntos de observación para el código en  $r = 1\text{ pc}$ . Además, tomamos ángulos de inclinación con respecto al eje de rotación del disco de acreción de  $\xi = 5^\circ, 45^\circ, 85^\circ$ , es decir, una vista casi de cara, una intermedia y una casi de canto, respectivamente. Fijamos la apertura angular de las cámaras en  $60\theta_{\text{sat}}$ , donde  $\theta_{\text{sat}} := r_{\text{sat}}/1\text{ pc}$  es una estimación del ángulo subtendido por el radio  $r_{\text{sat}}$  desde el punto de observación. Como referencia, en la Tabla 4.1 mostramos los valores de  $\theta_{\text{sat}}$  para cada configuración. Tomamos resoluciones de la cámara de  $1200 \times 1200$  píxeles. Por último, medimos los flujos en el marco estático,  $u^\mu \propto (\partial_t)^\mu$ , y a lo largo de la dirección radial,  $\bar{n}^\mu \propto (\partial_r)^\mu$ .

A modo de comparación, también realizamos simulaciones en un escenario donde el objeto compacto central es un agujero negro sin rotación con una masa de  $M = 10^7 M_\odot$ . En este caso, empleamos el disco estándar de Shakura–Sunyaev, cuyo radio interno es el de la ISCO ( $r = 6M$ ), con la misma tasa de acreción que en el escenario RAR (10 % de la tasa de acreción de Eddington al 10 % de eficiencia). Para la escala de las imágenes, adoptamos el valor de  $\theta_{\text{sat}}$  correspondiente a la solución RAR de 200 keV.

En la Fig. 4.2 mostramos imágenes bolométricas de las soluciones RAR para las galaxias de tipo activo (las primeras tres filas de la Tabla 4.1) con el radio interno del disco de acreción puesto a cero. Lo mismo se muestra en la Fig. 4.3 para el caso del agujero negro. En la Fig. 4.4 mostramos los diferentes tamaños de las soluciones correspondientes a 155 y 200 keV, para un ángulo de inclinación de  $\xi = 45^\circ$ . La solución de 48 keV, que es la menos compacta, no se incluye en este figura dada su extensión mucho mayor. La Fig. 4.5 muestra la imagen de la solución RAR para una galaxia de tipo Vía Láctea, en este caso tomando  $r_{\text{in}} = r_{\text{sat}}$ . Además, en este caso adoptamos una escala angular correspondiente



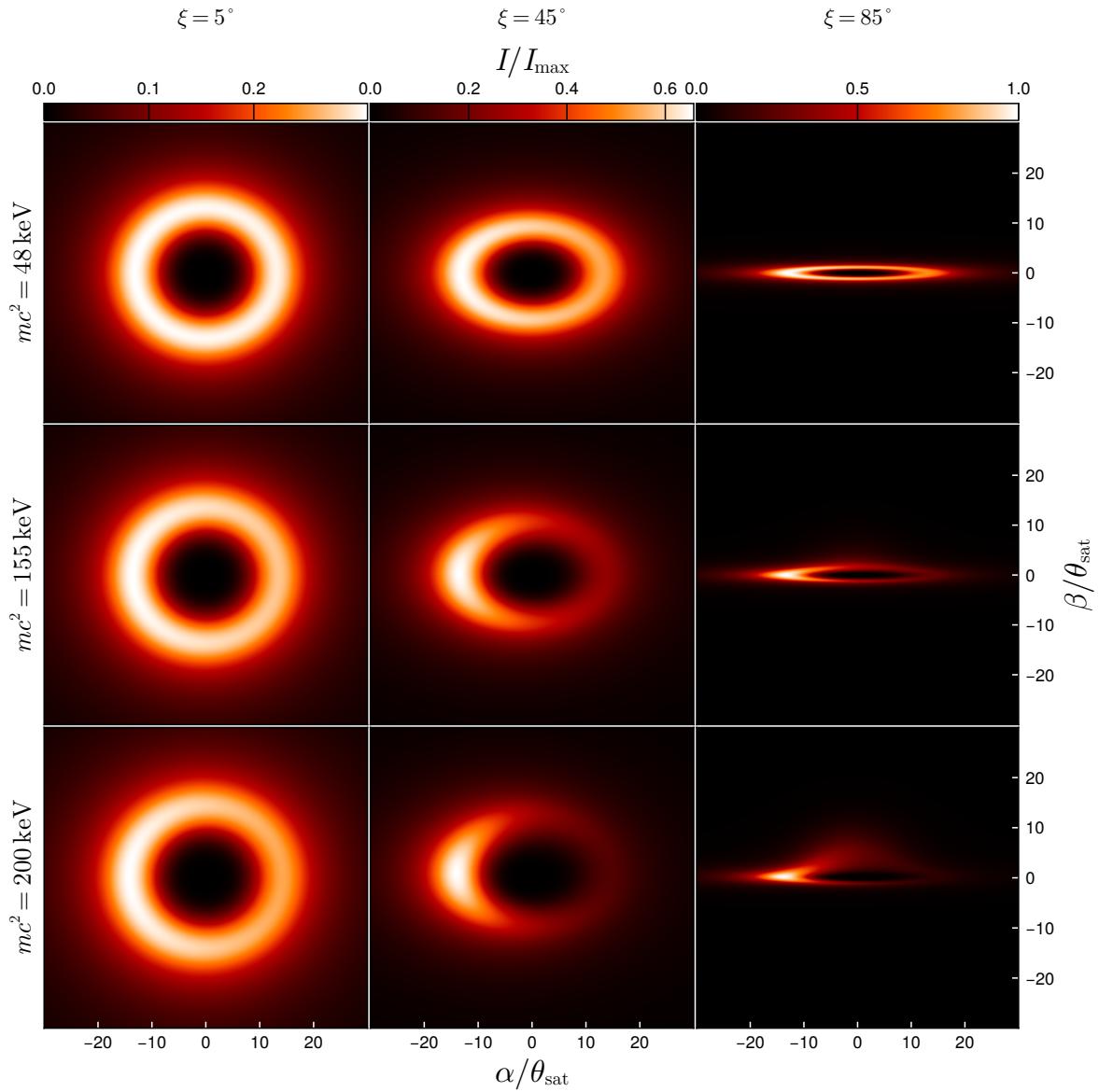
**Figura 4.1:** Flujos específicos para un disco de acreción que se extiende hasta el origen. El punto de observación está en  $r = 1\text{ pc}$ , y el flujo se mide en el marco estático, a lo largo de la dirección radial.

a un observador en  $r = 8.277\text{ kpc}$ , aplicando una decaimiento efectivo de ángulos sólidos como en espacio–tiempo plano desde el punto de observación del código en  $r = 1\text{ pc}$ .

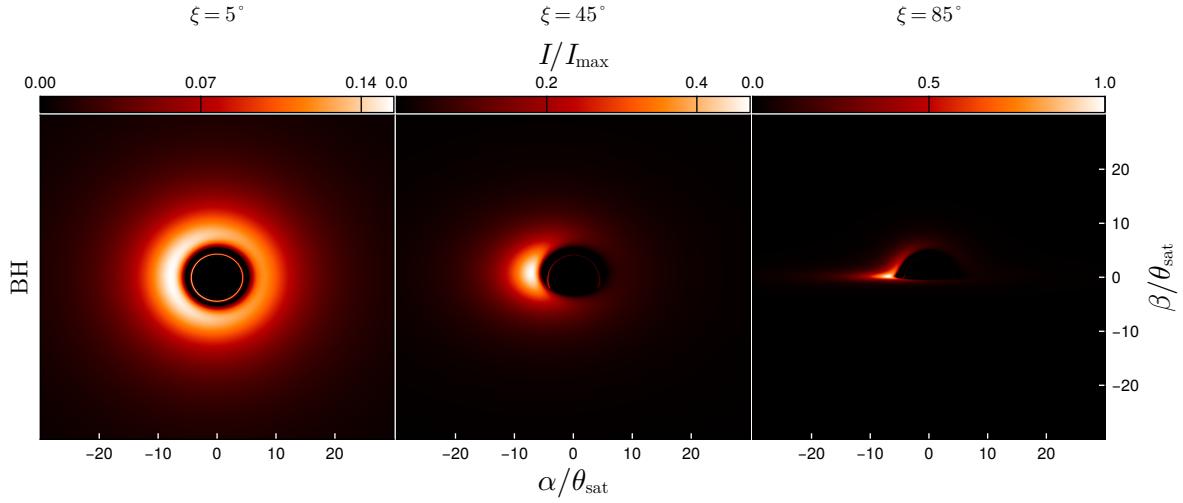
Las imágenes muestran diferencias en el brillo máximo a diferentes inclinaciones de observación debido al intenso efecto de *beaming* relativista especialmente en vistas de canto. Como es de esperar, para distribuciones de materia oscura con núcleos menos compactos, las imágenes de canto no presentan una fuerte deflexión de la luz, que sí comienza a apreciarse en los núcleos más compactos como, por ejemplo, para  $m = 200, 300\text{ keV}$ . Sin embargo, incluso en estos casos más compactos hay una gran diferencia con el caso de agujeros negros, que muestra una típica distorsión severa de la imagen de la porción del disco detrás del agujero negro. Además, e independientemente del ángulo de visión, el caso del agujero negro posee anillos de luz, mientras que este no sucede en los núcleos RAR (ni siquiera en el caso de masa crítica del núcleo), donde el ángulo de deflexión de la luz es siempre menor que  $\pi$ .

Además, todas las imágenes revelan depresiones centrales de brillo debidas a la caída de la temperatura hacia el centro. Por otro lado, las configuraciones de disco con  $r_{\text{in}} = 0$  y  $r_{\text{in}} = r_{\text{sat}}$  son casi indistinguibles visualmente. Esto se debe a que las temperaturas alcanzan su punto máximo en radios similares y descienden abruptamente hacia el centro en ambos casos. Confirmamos esta similitud cuantitativamente, hallando diferencias relativas de alrededor de 0.1 % en promedio en píxeles donde  $r_0(\alpha, \beta) \geq r_{\text{sat}}$ , siendo  $r_0(\alpha, \beta)$  el radio del elemento fluido observado en las coordenadas  $(\alpha, \beta)$  de la imagen. Naturalmente, los píxeles donde  $r_0 < r_{\text{sat}}$  tienen el mayor contraste. Además, entre las configuraciones con  $r_{\text{in}} = 0$  y  $r_{\text{in}} = r_{\text{sat}}$ , las diferencias relativas bajo la norma  $L_2$  de los espectros observados están por debajo de 0.1 % en todos los escenarios que consideramos.

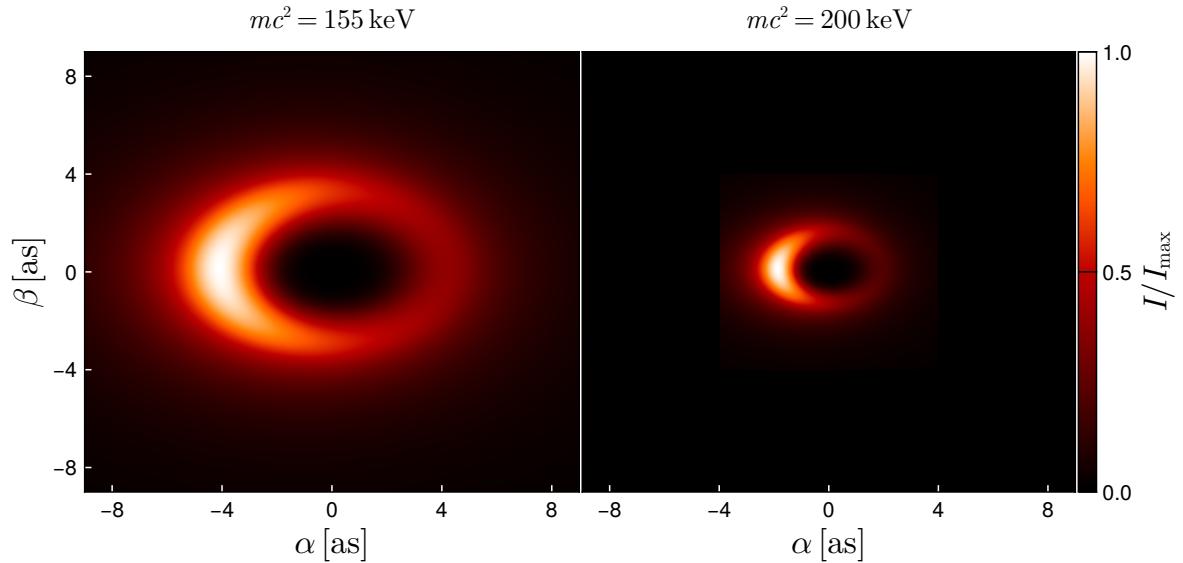
Finalmente, en la Fig.4.1 mostramos los espectros observados a diferentes ángulos de inclinación, comparando los modelos RAR con  $r_{\text{in}} = 0$  con el escenario del agujero negro. A partir de los espectros, se puede ver que cuanto más compacto es el núcleo de materia oscura (es decir, mayor masa del fermión) las soluciones son más luminosas en general, de modo que existe una compacidad del núcleo tal que el flujo emitido es similar a la del de



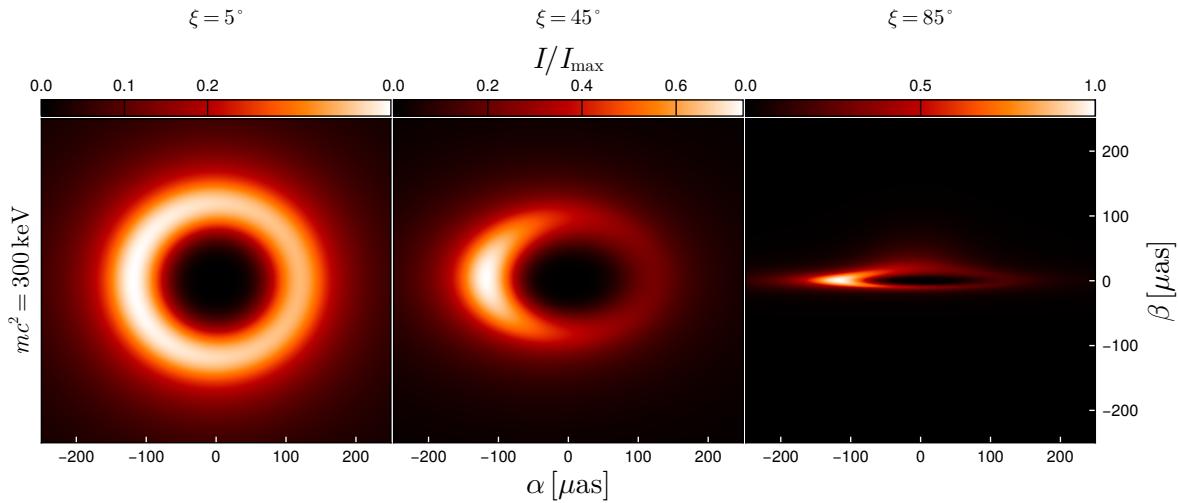
**Figura 4.2:** Intensidad bolométrica para un disco de acreción que se extiende hasta el origen. Las columnas corresponden a las inclinaciones relativas al eje de rotación del disco de  $\xi = 5^\circ, 45^\circ, 85^\circ$ . El punto de observación está en  $r = 1\text{ pc}$ , y la intensidad se mide en el marco estático. Aquí,  $\alpha$  y  $\beta$  denotan las coordenadas angulares en el cielo centradas alrededor de la dirección radial, y  $\theta_{\text{sat}} = r_{\text{sat}}/r$ , es decir, el radio angular correspondiente a  $r_{\text{sat}}$ , que está tabulado en Table 4.1. La intensidad se ha escalado a  $I_{\text{max}} = 9 \times 10^{15} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sr}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .



**Figura 4.3:** Intensidad bolométrica para un disco de acreción alrededor de un agujero negro. Las columnas corresponden a las inclinaciones relativas al eje de rotación del disco de  $\xi = 5^\circ, 45^\circ, 85^\circ$ . El punto de observación está en  $r = 1\text{ pc}$ , y la intensidad se mide en el marco estático. Aquí,  $\alpha$  y  $\beta$  denotan las coordenadas angulares en el cielo centradas alrededor de la dirección radial, y  $\theta_{\text{sat}} = r_{\text{sat}}/r$ , es decir, el radio angular correspondiente a  $r_{\text{sat}}$  para la configuración RAR de 200 keV. La intensidad se ha escalado a  $I_{\text{max}} = 1,8 \times 10^{16} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sr}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .



**Figura 4.4:** Intensidad bolométrica para un disco de acreción que se extiende hasta el origen con una inclinación de observación relativa al eje de rotación del disco de  $\xi = 45^\circ$ . El punto de observación está en  $r = 1\text{ pc}$ , y la intensidad se mide en el marco estático. Aquí,  $\alpha$  y  $\beta$  denotan las coordenadas angulares en el cielo centradas alrededor de la dirección radial. La intensidad se ha escalado a  $I_{\text{max}} = 6 \times 10^{15} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sr}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .



**Figura 4.5:** Intensidad bolométrica para un disco de acreción con radio interno  $r_{in} = r_{sat}$  alrededor de una solución RAR para una galaxia de tipo Vía Láctea. Las columnas corresponden a las inclinaciones de observación relativas al eje de rotación del disco de  $\xi = 5^\circ, 45^\circ, 85^\circ$ . El punto de observación está en  $r = 1\text{ pc}$ , y la intensidad se mide en el marco estático. Aquí,  $\alpha$  y  $\beta$  denotan las coordenadas angulares en el cielo centradas alrededor de la dirección radial correspondientes a un punto de observación a  $r = 8.277\text{ kpc}$ . La intensidad se ha escalado a  $I_{max} = 5,7 \times 10^{15}\text{ erg cm}^{-2}\text{ sr}^{-1}\text{ s}^{-1}$ .

un agujero negro para la misma masa del núcleo. Los flujos monocromáticos en los casos RAR alcanzan su punto máximo a frecuencias más altas para masas de partículas más grandes, correspondientes a las temperaturas más altas de sus discos (ver la Ref. [156] para una discusión general sobre este punto).

## 4.4. Conclusiones

Hemos calculado las imágenes sintéticas producidas por un disco de acreción geométricamente delgado y ópticamente grueso sobre núcleos fermiónicos de materia oscura, desde puntos de observación lejanos a diferentes ángulos de visión. Aplicamos nuestro modelo a galaxias de tipo activo con masas centrales de  $10^7 M_\odot$ , y usando tres masas diferentes del fermión: 48, 155 y 200 keV. Además, estudiamos una galaxia hipotética similar a la Vía Láctea que tiene un núcleo más pequeño de  $3.6 \times 10^6 M_\odot$  para una masa del fermión de 300 keV.

Una diferencia notable entre las soluciones RAR con los agujeros negros es la no existencia de una ISCO. Los núcleos fermiónicos poseen órbitas circulares estables a todo radio. Por lo tanto, en nuestro modelo consideramos que la materia puede caer hacia la región central mientras emite radiación observable. La depresión central de brillo en las imágenes de las soluciones RAR surge de una combinación de dos efectos: el alto corrimiento al rojo de los fotones provenientes de la región central dentro del núcleo y, lo más importante, la caída de temperatura hacia el centro debido a la supresión de los esfuerzos viscosos.

Además, las soluciones RAR no poseen anillos de fotones, al contrario de los agujeros negros, para los cuales los anillos de fotones son una predicción universal, como discutimos en el Capítulo 1. La presencia de anillos de fotones cerca del objeto supermasivo central de M87 y Sgr A\* podría ser observable [41–44] luego de las mejoras planeadas en la interferometría directa tanto desde la Tierra con el ngEHT [46, 47], como desde el espacio [48]. Sin embargo, esta posibilidad ha sido debatida, debido al entorno dinámico, con opacidades cambiantes, de esos objetos [49].

Enfatizamos, además, que nuestro modelo de acreción no es adecuado para Sgr A\*, ya que las características espectrales observadas son compatibles con radiación sincrotrón proveniente de un disco grueso y caliente, con una tasa de acreción baja, y no con radiación de cuerpo negro en un disco de tasa de acreción alta. Dicho esto, es importante que obtenemos estructuras globales que al menos son prometedoras para trabajos futuros, como el tamaño de la sombra que es de unos pocos  $r_g$ , similar al obtenido por el EHT para Sgr A\*.



# Capítulo 5

## Radiación de discos de acreción alrededor de estrellas de bosones

*En este capítulo, analizamos imágenes y espectros de estrellas de bosones rodeadas por un disco de acreción relativista, geométricamente delgado y ópticamente grueso, considerando la emisión del continuo térmico y el ensanchamiento relativista de líneas de emisión. Consideramos estrellas de bosones con potenciales de autointeracción de cuarto y sexto orden, y comparamos con el escenario de un agujero negro. En particular, encontramos que bajo algunas circunstancias las estrellas más compactas pueden ser imitadoras de agujeros negros.*

*Los resultados aquí presentados corresponden a la Ref. [114] y se encuentran enviados para publicación. Mis contribuciones en esta parte de la tesis fueron la implementación de los espacio–tiempos de estrellas de bosones, el modelo de disco de acreción, y el modelo de corona en el código de transporte radiativo, la realización de las simulaciones y el desarrollo y producción de las figuras.*

### 5.1. Introducción

Entre los objetos compactos exóticos propuestos como alternativas a los agujeros negros, uno de los más populares son los condensados autogravitantes de campos bosónicos, comúnmente conocidos como estrellas de bosones [159]. Una ventaja de estos modelos en comparación con otras alternativas es que se conocen mecanismos dinámicos para su formación [160–162]. Este marco admite una amplia variedad de modelos compuestos por campos con diferentes espines y sujetos a diferentes potenciales de interacción [163, 164], con implicancias en varios contextos fenomenológicos, tales como la espectroscopía de rayos X [165, 166], la materia oscura cosmológica [167] y las ondas gravitacionales [168].

Las dos herramientas principales para testear la geometría del espacio–tiempo alrededor de los objetos compactos son el estudio de la emisión térmica de discos geométricamente delgados y del ensanchamiento relativista de líneas de emisión, como la línea de Hierro K $\alpha$  [169, 170]. Sin embargo, el espectro térmico suele ser bastante simple y presentar degeneración, mientras que el perfil de las líneas es más complejo y permite distinguir más detalladamente los efectos de la geometría [170].

Las investigaciones de este capítulo tienen como objetivo ampliar la literatura existente acerca de las propiedades observacionales de una clase de estrellas de bosones escalar

con potenciales de autointeracción de cuarto y sexto orden [35–37]. Estos potenciales constituyen ejemplos paradigmáticos contrastantes, pues el último posee soluciones estables con curvas críticas y ISCOs, mientras que el primero no, siendo características importantes que influencian las propiedades observacionales. En particular, utilizamos un modelo de disco de acreción geométricamente delgado y ópticamente grueso basado en la construcción de Novikov–Thorne [116] para un agujero negro rotante, en vez de los perfiles de intensidad *ad-hoc* que se han considerado anteriormente [35–37], introduciendo así un modelo basado en principios físicos para el cálculo del perfil de temperaturas.

Además, calculamos el ensanchamiento relativista de líneas de emisión, como la línea de Hierro. En este caso extendemos trabajos previos que han estudiado líneas de emisión en estrellas de bosones [165, 166] donde se usaron perfiles de intensidad *ad-hoc*. En este trabajo, en cambio, incorporamos un modelo de corona que tiene en cuenta los efectos relativistas de deflexión de la luz y corrimiento al rojo en el perfil de iluminación del disco bajo la corona, que determina el perfil de intensidad de la línea a lo largo del disco.

En este capítulo adoptamos un unidades geometrizadas tales que  $c = G = 1$ . El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 5.2 describimos brevemente el espacio–tiempo y el modelo de disco de acreción alrededor de las estrellas de bosones. En la Sección 5.3 mostramos los resultados para la emisión del continuo térmico y el ensanchamiento de las líneas de emisión. Y finalmente, en la Sección 5.4 terminamos con algunas conclusiones generales.

## 5.2. Modelo astrofísico

### 5.2.1. Estrella de bosones

La estrella de bosones se representa por un campo escalar complejo autogravitante. Las ecuaciones dinámicas de este sistema son las ecuaciones de Einstein–Klein–Gordon:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu - V') \Phi = 0, \quad (5.2)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein,  $\Phi$  es el campo escalar,  $\nabla_\mu$  es la derivada covariante,  $V(|\Phi|^2)$  es el potencial de interacción, una prima denota la derivada de una función de un único argumento, y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía–impulso del campo escalar dado por

$$T_{\mu\nu} = \nabla_{(\mu} \Phi^* \nabla_{\nu)} \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla_\sigma \Phi^* \nabla^\sigma \Phi + V). \quad (5.3)$$

Además, suponemos que el sistema estático y esféricamente simétrico, por lo que introducimos el *ansatz*

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.4)$$

$$\Phi = \phi(r) e^{-i\omega t}, \quad (5.5)$$

donde  $m(r)$  es la función de masa,  $\phi(r)$  es la función de onda radial, y  $\omega$  es la frecuencia

Modelo	$\phi_c$	$\mu M$	$\mu R$	$\mathcal{C}$	$\omega/\mu$	$r_{\text{ISCO}}/M$	$T_{\text{max}} [\text{K}]$	$r_{\text{max}}/M$
ABS1	0.03045	1.6321	16.1577	0.10101	0.88124	-	$3.58 \times 10^6$	6.70
ABS2	0.03457	1.7356	14.9648	0.11597	0.86410	-	$4.05 \times 10^6$	5.84
ABS3	0.04582	1.8368	12.4524	0.14750	0.82786	-	$5.14 \times 10^6$	4.44
SBS1	0.0827	1.7531	11.5430	0.1518	0.25827	6.74968	$1.67 \times 10^6$	9.85
SBS2	0.0827	4.220	16.6520	0.25342	0.17255	6.00000	$1.70 \times 10^6$	9.72
SBS3	0.0850	5.655	17.6470	0.32045	0.13967	6.00000	$1.71 \times 10^6$	9.55

**Tabla 5.1:** *Configuraciones de estrellas bosónicas consideradas en este estudio. Los parámetros son el campo escalar en el origen  $\phi_c$ , la masa del campo escalar  $\mu$ , el radio de la estrella  $R$ , la masa  $M$ , la compacidad  $\mathcal{C} \equiv M/R$ , y la frecuencia del campo escalar  $\omega$ . Además, se muestran otras propiedades físicas como el radio de la ISCO, la temperatura máxima del disco  $T_{\text{max}}$ , el radio de máxima temperatura  $r_{\text{max}}$ .*

del campo escalar. Además suponemos que el sistema es aislado y regular (no existen singularidades), lo que impone condiciones de contorno sobre el campo. Para los detalles sobre las ecuaciones resultantes y su resolución numérica, remitimos al lector a la Sección II de la Ref. [114]. Dado que el campo escalar típicamente decae exponencialmente con  $r \rightarrow \infty$ , definimos el radio de la estrella de bosones  $R$  como aquel que encierra el 98 % de la masa, es decir  $m(R) = 0.98M$ .

En este estudio, consideramos dos funciones potenciales alternativas: por un lado, un potencial con autointeracción de cuarto orden,  $V = \mu^2|\Phi|^2 + \Lambda|\Phi|^4$  [171], donde  $\mu$  es la masa del campo y  $\Lambda$  es una constante. A esta clase de modelos los denominamos ABS. Estas estrellas pueden ser muy masivas, ya que la masa máxima escala según  $M_{\text{max}} \sim \Lambda^{1/2}$  para valores grandes de  $\Lambda$ . Sin embargo, no pueden alcanzar grandes compacidades, pues la compacidad satura para valores altos de  $\Lambda$  con el radio  $R$  nunca siendo menor que  $6M$ . En particular, esto asegura la estabilidad de las órbitas circulares a todo radio sin importar el valor de  $\Lambda$  [172].

Por otro lado, también consideramos un potencial con autointeracción de sexto orden<sup>1</sup>,  $V = \mu^2|\Phi|^2(1 + |\Phi|^2/\alpha^2)^2$  [173], donde  $\alpha$  es una constante. Estos modelos se denominan estrellas de bosones solitónicas (SBS). En este escenario, se pueden obtener soluciones ultra-compactas cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , con un radio mínimo de  $R \approx 2.81M$  [164].

A modo de comparación, seleccionamos las mismas tres configuraciones consideradas en la Ref. [37] para cada uno de los potenciales, ABS y SBS. Éstas adoptan valores de  $\Lambda = 400$  o  $\alpha = 0.08$ , según corresponda. En la Tabla 5.1 listamos el resto de parámetros que caracterizan las soluciones elegidas, junto con algunos parámetros relativos al modelo de disco de acreción descrito en la sección siguiente. Para más detalles sobre los coeficientes de la métrica, curvas de masa–radio, curvas críticas y órbitas circulares de estas soluciones de estrellas bosónicas, remitimos al lector a la Ref. [37].

<sup>1</sup>En principio, podrían considerarse potenciales con autointeracciones de mayor orden, pero en trabajos anteriores [35, 114] se ha mostrado que las características que más fuertemente influyen en las propiedades observacionales son las curvas críticas e ISCOs. Dado que las soluciones con autointeracciones de cuarto orden no pueden simultáneamente ser estables y poseer curvas críticas e ISCOs, mientras que con autointeracciones de sexto orden sí es posible, estos dos casos son ejemplos contrastantes suficientes para este análisis.

### 5.2.2. Disco de acreción

Suponemos que en el entorno de la estrella de bosones existe un flujo de acreción y adoptamos el modelo de Novikov–Thorne [116] de un disco de acreción relativista geométricamente delgado y ópticamente grueso en un espacio–tiempo estacionario y axisimétrico. En este modelo las partículas del disco se mueven en órbitas geodésicas circulares alrededor del objeto central y el calor radiado localmente en un punto del disco está dado por

$$Q(r) = -\frac{\dot{M}}{4\pi\sqrt{-g}} \frac{\partial_r\Omega}{\left(\tilde{E} - \Omega\tilde{L}\right)^2} \int_{r_{\text{ISCO}}}^r \left(\tilde{E} - \Omega\tilde{L}\right) \partial_r\tilde{L} dr, \quad (5.6)$$

donde  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{L}$ ,  $\Omega$  son la energía específica, el momento angular específico y la velocidad angular de las órbitas geodésicas,  $g$  es el determinante de la métrica,  $\dot{M}$  es la tasa de acreción, y  $r_{\text{ISCO}}$  denota el radio de la ISCO. En un espacio–tiempo estático y esféricamente simétrico como el del presente estudio, las cantidades orbitales toman la forma

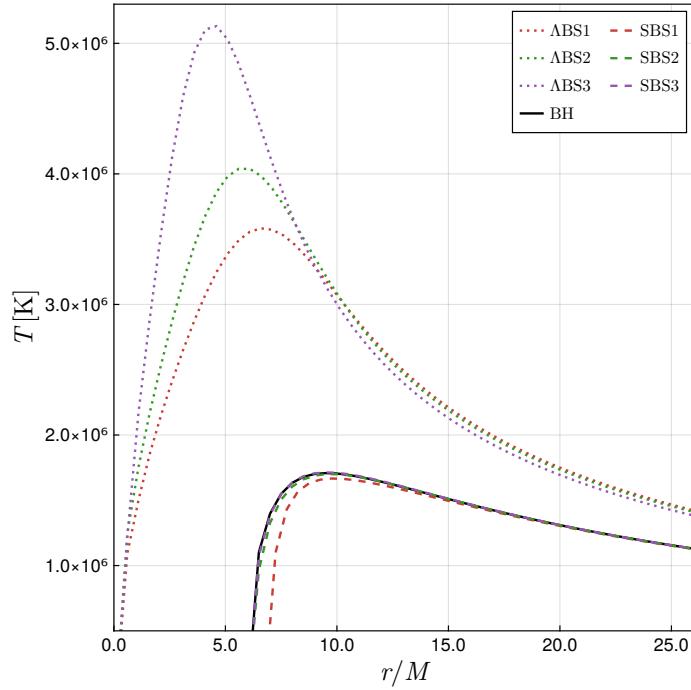
$$\tilde{E} = -\frac{g_{tt}}{\sqrt{-g_{tt} - g_{\phi\phi}\Omega^2}}, \quad \tilde{L} = \frac{g_{\phi\phi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - g_{\phi\phi}\Omega^2}}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{-\partial_r g_{tt}}{\partial_r g_{\phi\phi}}}. \quad (5.7)$$

Una diferencia notable entre los modelos ABS y SBS radica en la existencia de una ISCO. De hecho, en los modelos ABS las órbitas circulares son estables a todo radio, mientras que los modelos SBS no. Esta característica de los modelos  $\Lambda$  presenta dificultades a la hora de modelar discos de acreción alrededor de estos objetos. Debido a la ausencia de un horizonte de eventos o de una superficie dura en estos modelos, la materia acretada puede acumularse en el centro de la estrella, lo que podría conducir a la formación de un “agujero negro bariónico”. Sin embargo, como se discute en la Ref. [174], debido a las bajas tasas de acreción, incluso si se formase un agujero negro en una escala de tiempo del orden de la edad del universo, la masa de dicho agujero negro sería varios órdenes de magnitud menor que la masa inicial de la estrella de bosones. Por lo tanto, bajo ciertas condiciones podemos ignorar esta dificultad.

En este estudio, adoptamos una masa de referencia de  $M = 14.8 M_{\odot}$ . Esto corresponde a la antigua medición de la masa del objeto compacto en Cygnus X-1 [175], una fuente de rayos X galáctica<sup>2</sup>. La tasa de acreción de este objeto es  $\dot{M} \approx 0.3 \times 10^{-8} M_{\odot}/\text{yr}$ , es decir, toma del orden de  $10^8$  años acumular  $1 M_{\odot}$  en el centro de la estrella. Luego, la influencia gravitacional de este “centro bariónico” sobre la materia acretada puede suponerse despreciable en comparación con la influencia gravitacional de la estrella de bosones. En vista de esto, consideramos aquí que los discos de acreción se extienden hasta el centro de la estrella de bosones para los modelos ABS.

Finalmente, suponemos que cada elemento de superficie radía como un cuerpo negro con una temperatura efectiva local  $T(r) = (Q(r)/\sigma)^{1/4}$ . En la Fig. 5.1 mostramos los perfiles de temperatura en función del radio para los modelos ABS y SBS. Como referencia, también hemos incluido el perfil de temperatura correspondiente al caso de un agujero negro de Schwarzschild, que denominamos el modelo BH. Además, en la Tabla 5.1, especificamos la temperatura máxima del disco y el radio en el que se alcanza dicha temperatura.

<sup>2</sup>La masa de este objeto ha sido determinada más recientemente en  $21.2 \pm 2.2 M_{\odot}$  [176]



**Figura 5.1:** Perfiles de temperatura para un disco de acreción relativista alrededor de las estrellas  $\Lambda$ BS y SBS, con una masa de  $M = 14.8 M_{\odot}$ . La línea negra representa los resultados para el espacio–tiempo de un agujero negro con la misma masa como referencia.

Los resultados indican que las temperaturas más altas se alcanzan en los modelos ABS, con las estrellas más compactas asociadas a discos de acreción más calientes. Esto es esperable dado que la integral en la Ecuación (5.6) se extiende hasta  $r = 0$  en las estrellas  $\Lambda$ . Por otro lado, los perfiles de temperatura de los modelos SBS son más similares a los del agujero negro, dada la cercanía de sus correspondientes ISCOs. En particular, el perfil de temperatura del modelo SBS3 imita cercanamente al del agujero negro.

### 5.3. Resultados

Calculamos observables correspondientes tanto al continuo térmico como a líneas de emisión de los discos de acreción alrededor de las estrellas de bosones, recurriendo a `skylight`, el código de transporte desarrollado como parte de esta tesis. Para esto, incorporamos la métrica del espacio–tiempo de la Ec. (5.4) y sus símbolos de Christoffel asociados en `skylight`, a partir de expresiones analíticas que ajustan con precisión las soluciones numéricas<sup>3</sup>. Aunque `skylight` es capaz de calcular los símbolos de Christoffel de manera eficiente mediante la diferenciación automática de los coeficientes métricos, optamos por proporcionar una forma explícita de estas cantidades. Esto mejora la velocidad computacional aproximadamente cuatro veces en este escenario esféricamente simétrico, en comparación con la versión agnóstica de diferenciación automática. El código para las

<sup>3</sup>Los errores relativos de las aproximaciones analíticas son menores que el 1% en todas partes, y del orden de 0.01% en promedio.

simulaciones de producción y visualizaciones de este capítulo está disponible públicamente [177].

Los puntos de observación están ubicados en  $r = 1000M$ , y en varios ángulos de inclinación con respecto al eje de rotación del disco,  $\xi = 5^\circ, 45^\circ, 85^\circ$ , con una resolución de cámara de  $1200 \times 1200$  píxeles para todas las simulaciones. Las aperturas angulares de la cámara varían según el modelo, detalladas más adelante en cada caso, y los flujos se miden en el marco estático,  $u^\mu \propto (\partial_t)^\mu$ , a lo largo de la dirección radial. Además, en todos los casos fijamos el radio externo del disco en  $80M$ . Como referencia, hemos reproducido los análisis en el espacio–tiempo de Schwarzschild, denotado como modelo BH. En este contexto, el radio interno del disco se establece en  $r_{\text{ISCO}} = 6M$ , con el perfil de temperatura radial calculado igual que se describe en la Sección 5.2.2.

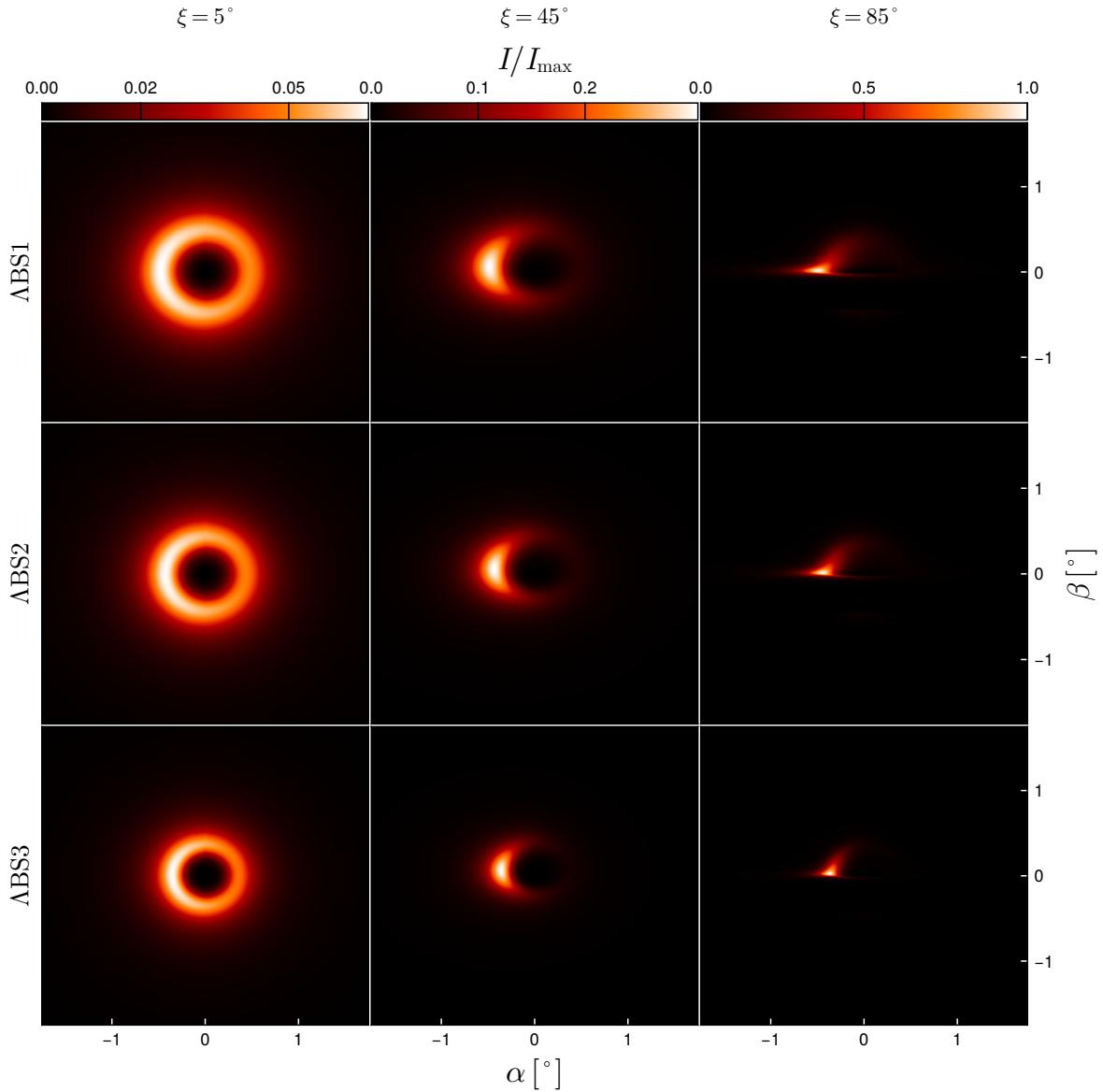
### 5.3.1. Emisión térmica

Las Figs. de 5.2 a 5.4 muestran imágenes bolométricas a varios ángulos de inclinación ( $5^\circ, 45^\circ$  y  $85^\circ$ ) para los modelos ABS, SBS y BH, respectivamente. Los espectros térmicos correspondientes se muestran en la Fig. 5.5. Una característica notable de los modelos ABS y SBS es la depresión central del brillo, a pesar de la ausencia de horizontes de eventos, y aún habiendo un disco que se extiende hasta el origen en el primer caso. Esto se debe tanto a la caída de la temperatura del disco como al alto corrimiento al rojo gravitacional que sufre la radiación emitida desde la región central. Por otro lado, la intensidad varía entre los diferentes modelos, ya que los discos en los modelos ABS son más calientes que los discos en los modelos SBS y BH, lo cual también se traduce en un espectro térmico más duro.

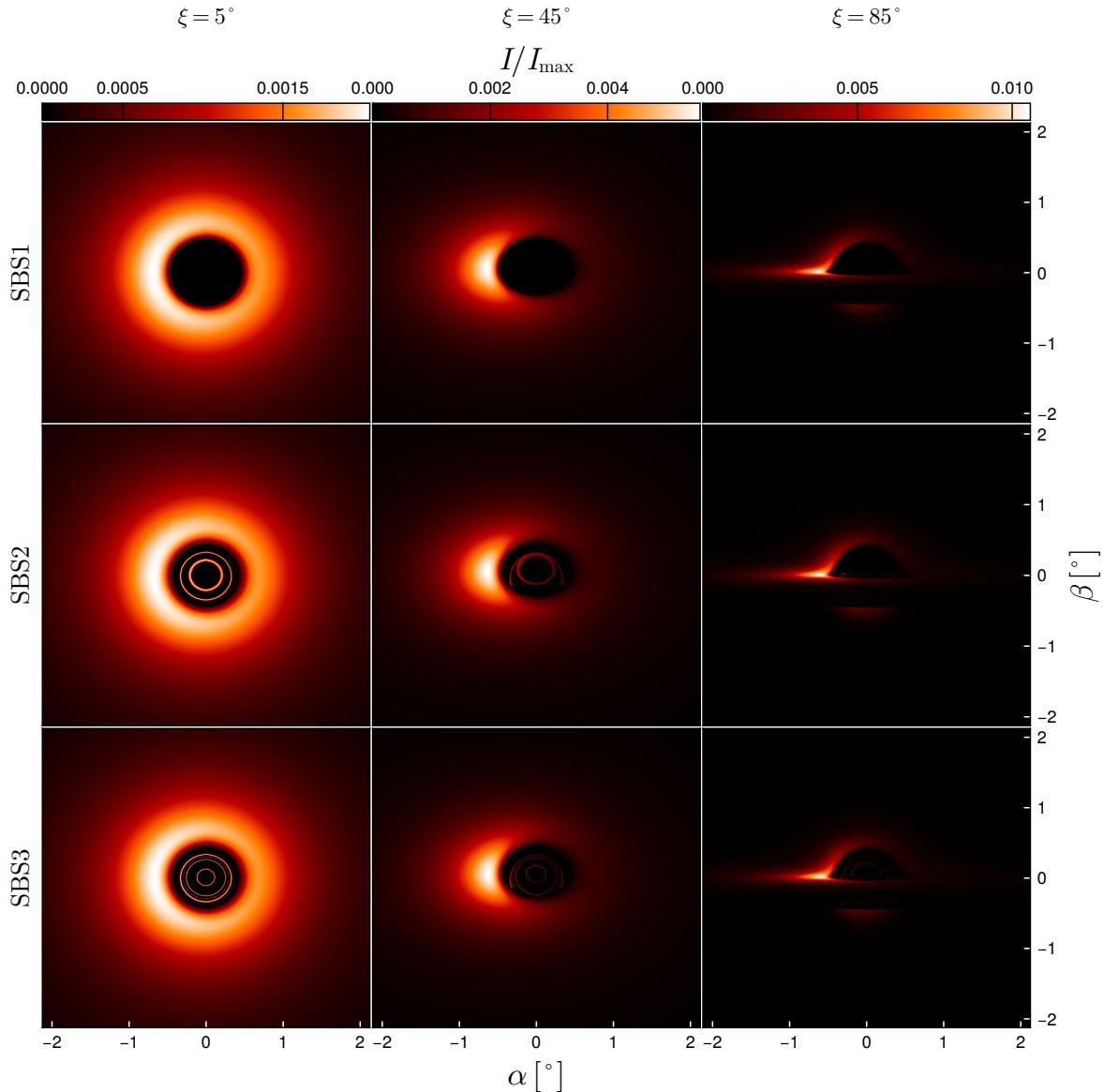
También vale la pena mencionar el efecto de *beaming* relativista que se observa especialmente a la inclinación de  $85^\circ$ , exhibiendo intensidades máximas más altas debido a las velocidades negativas más altas de las partículas del disco a lo largo de la visual. Además, los modelos bosónicos presentan deflexión de la luz significativa, particularmente notorio a inclinación de  $85^\circ$ , similarmente al escenario BH. Además, los modelos SBS, debido a su alta compacidad, muestran intrincadas estructuras de anillos de fotones, cuya alta complejidad es posible gracias a la ausencia de un horizonte de eventos, que permite que la radiación alcance al observador a través del interior de la estrella bosónica. En particular, el modelo más compacto (SBS3) presenta cuatro anillos de fotones adicionales en comparación con el agujero negro. Por el contrario, las distribuciones de masa de los modelos ABS y SBS1 no son lo suficientemente compactas como para desviar la luz suficientemente como para producir anillos de fotones.

### 5.3.2. Ensanchamiento relativista de líneas de emisión

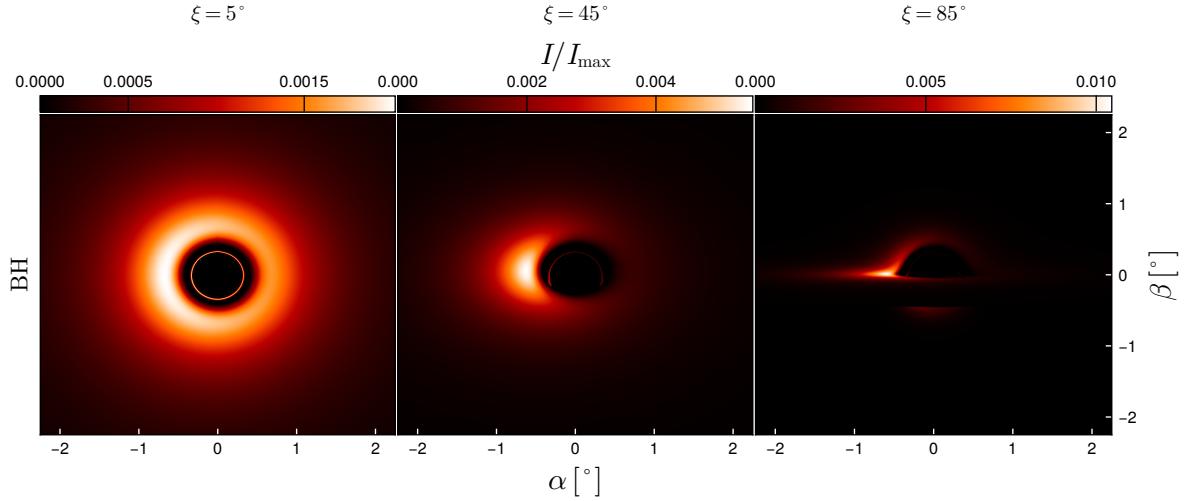
Consideramos aquí la emisión monocromática del disco de acreción iluminado por una corona. La corona, un gas más caliente que rodea al disco de acreción, contiene electrones que dispersan los fotones térmicos del disco a energías más altas. Parte de estos fotones iluminan el disco de acreción y estimulan emisiones monocromáticas, como líneas de Hierro, según las abundancias de iones en el disco. En el marco local de reposo, las líneas espectrales son delgadas, pero los efectos del corrimiento al rojo gravitacional y Doppler desde distintas partes del disco ensanchan la línea observada en un marco de



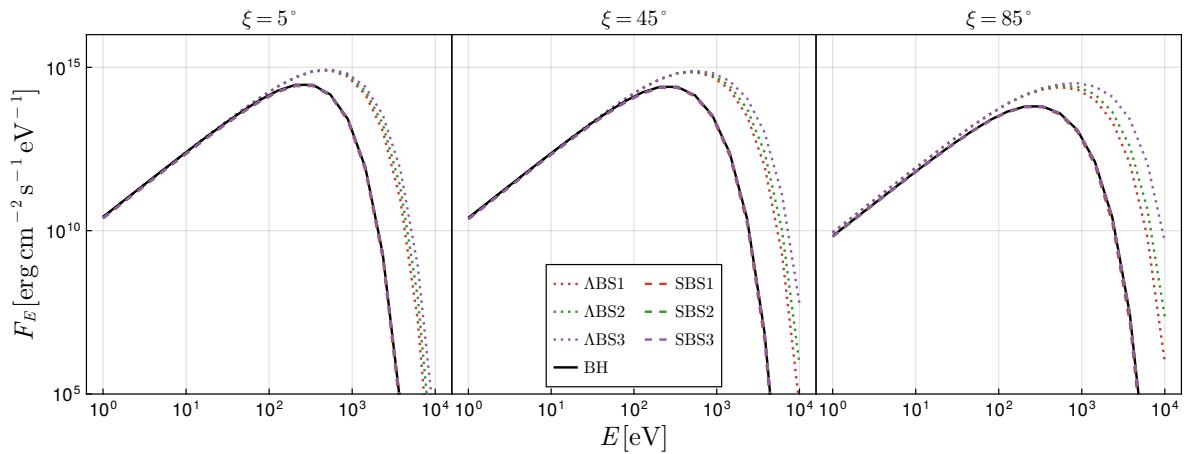
**Figura 5.2:** Imágenes bolométricas del disco de acreción alrededor de las estrellas de bosones  $\Lambda$ BS, a inclinaciones  $\xi = 5^\circ, 45^\circ, 85^\circ$  con respecto al eje de rotación de el disco. La masa de la estrella es  $M = 14,8M_\odot$ . El punto de observación está en  $r = 1000M$ , y la intensidad se mide en el marco estático. Aquí,  $\alpha$  y  $\beta$  denotan las coordenadas angulares en el cielo del observador. La intensidad bolométrica del campo de radiación se ha escalado a  $I_{\max} = 4,26 \times 10^{22} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sr}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .



**Figura 5.3:** Imágenes bolométricas del disco de acreción alrededor de las estrellas de bosones SBS, a inclinaciones  $\xi = 5^\circ, 45^\circ, 85^\circ$  con respecto al eje de rotación de el disco. La masa de la estrella es  $M = 14,8 M_\odot$ . El punto de observación está en  $r = 1000 M$ , y la intensidad se mide en el marco estático. Aquí,  $\alpha$  y  $\beta$  denotan las coordenadas angulares en el cielo del observador. La intensidad bolométrica del campo de radiación se ha escalado a  $I_{\max} = 4,26 \times 10^{22} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sr}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .



**Figura 5.4:** Imágenes bolométricas del disco de acreción alrededor de un agujero negro de Schwarzschild, a inclinaciones  $\xi = 5^\circ, 45^\circ, 85^\circ$  con respecto al eje de rotación de el disco. La masa del agujero negro es  $M = 14,8M_\odot$ . El punto de observación está en  $r = 1000 M$ , y la intensidad se mide en el marco estático. Aquí,  $\alpha$  y  $\beta$  denotan las coordenadas angulares en el cielo del observador. La intensidad bolométrica del campo de radiación se ha escalado a  $I_{\max} = 4,26 \times 10^{22} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sr}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .



**Figura 5.5:** Flujos específicos observados para la emisión del continuo térmico en los modelos  $\Lambda$ BS, SBS y BH, a inclinaciones  $\xi = 5^\circ, 45^\circ, 85^\circ$  con respecto a la rotación eje del disco. La masa del objeto central es  $M = 14,8M_\odot$ . El punto de observación está en  $r = 1000 M$ , y el flujo se mide en el marco estático y a lo largo de la dirección radial.

referencia lejano. El ensanchamiento depende también del perfil de emisividad de la línea a lo largo del disco, denotado como  $I_e$ , que a su vez depende del patrón de iluminación.

La geometría de la corona, que determina el perfil de emisividad  $I_e$ , es esencialmente desconocida, incluso en el caso estándar de un agujero negro, debido a la alta complejidad de los procesos que deben modelarse, y a la sensibilidad de los resultados respecto de estas hipótesis. Trabajos previos han considerado perfiles de emisividad *ad-hoc*, como el llamado modelo de farol [165, 166], en que la corona se representa como un único punto a una altura  $h$  sobre el eje rotacional del disco de acreción en espacio–tiempo plano. Un cálculo sencillo muestra que el perfil de emisividad de este modelo es

$$I_e \propto \frac{h}{(h^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (5.8)$$

Sin embargo, en presencia de gravedad, este perfil puede ser afectado por la deflexión de la luz. En este trabajo, exploramos una mejora, incorporando los efectos relativistas de los espacio–tiempos de las estrellas de bosones, siguiendo la metodología aplicada previamente en el contexto de agujeros negros en la Ref. [118]. Suponemos que la corona puntual emite radiación isotrópicamente, y modelamos esto tomando un conjunto de  $5 \times 10^6$  fotones comenzando en  $r = h$  a lo largo del eje polar, con momentos espaciales distribuidos isotrópicamente en el marco estático. Trazamos las geodésicas nulas correspondientes con `skylight` y recopilamos aquellas que intersectan el disco de acreción. Tomamos 50 radios,  $r_i$ , entre los radios interior y exterior del disco de acreción, y agrupamos las geodésicas en pequeños anillos delimitados por  $r_i$ . El área  $A_i$  de cada anillo en el marco coordenado es, aproximadamente,

$$A_i \approx 2\pi\sqrt{g_{rr}g_{\varphi\varphi}}\Delta r_i, \quad (5.9)$$

donde la métrica se evalúa en  $r_i$  y  $\Delta r_i$  es la extensión radial del anillo. El área correspondiente en el marco en reposo se obtiene multiplicando la Ec. (5.9) por el factor de Lorentz de las partículas del disco,  $\gamma = u^t$ , donde  $u^\mu$  es la cuadrvelocidad de las partículas del disco. La densidad numérica de los rayos entonces resulta

$$n_i = \frac{\mathcal{N}_i}{A_i\gamma_i}, \quad (5.10)$$

donde  $\mathcal{N}_i$  es el número de rayos por anillo.

Por otro lado, aproximamos el flujo de fotones en la corona como una ley de potencias de la forma

$$dN = KE_0^{-\Gamma} dt_0 dE_0, \quad (5.11)$$

donde  $K$  es una constante,  $\Gamma$  es el índice fotónico,  $E$  es la energía de la línea de emisión y el subíndice cero se refiere a cantidades evaluadas en el marco estático de la corona. Dado que el número de fotones se conserva a lo largo de cada rayo, en el disco de acreción debemos tener

$$dN = Kg^\Gamma E^{-\Gamma} dt dE, \quad (5.12)$$

donde  $g = E/E_0$  es el cociente de energías entre el disco y la corona, y hemos usado el hecho de que  $dE/dE_0 = dt_0/dt = g$ . Por lo tanto, la densidad de energía que ilumina el disco es

$$d\mathcal{E} = EndN = Kg^\Gamma E^{-\Gamma+1}ndtdE, \quad (5.13)$$

y el perfil de emisividad radial puede escribirse como

$$\varepsilon \propto \frac{d\mathcal{E}}{dt dE} = K g^\Gamma E^{-\Gamma+1} n. \quad (5.14)$$

Los perfiles de emisividad para los escenarios ABS, SBS y BH, correspondientes a tres alturas diferentes de la corona, se presentan en la Fig. 5.6, junto con el perfil analítico del espacio–tiempo plano de la Ec. (5.8). Curiosamente, los perfiles son similares en diferentes escenarios y parecen alinearse con las prescripciones del espacio–tiempo plano. Sin embargo, esta semejanza no debe conducir a la interpretación de que el espacio–tiempo plano es una aproximación adecuada en este modelo. Para ilustrar esto, en la Fig. 5.6 proporcionamos una vista ampliada de los perfiles de emisividad para los escenarios SBS y BH cerca del borde interior de los discos. Esta región interior, donde la emisividad es más alta y la semejanza es menos precisa, es la que contribuye de manera más significativa a las líneas observadas. Incluso diferencias moderadas en esta área crítica pueden influir fuertemente en la línea resultante. Aclaramos estos puntos en el análisis que sigue.

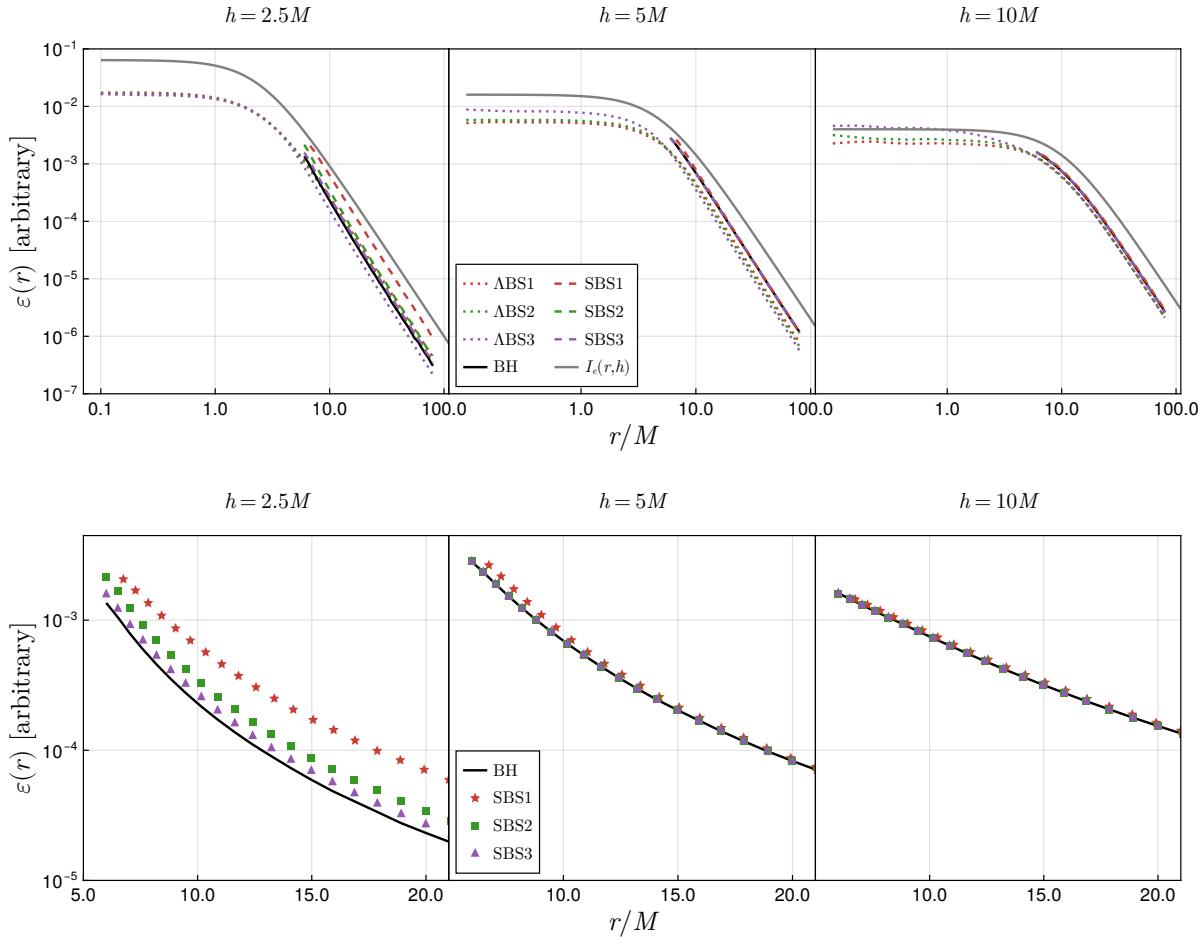
En los modelos ABS, donde el radio interno del disco es cero, el perfil de emisividad tiene una meseta en radios pequeños. Esta característica amplifica desproporcionadamente la contribución de la región central en el espectro, dando lugar a líneas que están muy concentradas en energías más bajas debido al fuerte corrimiento al rojo de los fotones provenientes de esa región. Consideramos esta situación como no física por lo que hemos optado por excluir los modelos ABS de las consideraciones que siguen.

Volviendo nuestra atención a los escenarios SBS y BH, las formas de las líneas observadas se presentan en la Fig. 5.7 para varios ángulos de inclinación del observador. Observamos que, como se mencionó anteriormente, las formas pueden diferir significativamente incluso si los perfiles de emisividad siguen patrones similares. Esto queda claro en las líneas observadas para  $\xi = 5^\circ$  y  $h = 2.5M, 5M$ . Sin embargo, algunas otras líneas en las configuraciones SBS se parecen mucho al escenario BH, como  $h = 5M, 10M$  y  $\xi = 45^\circ, 85^\circ$ . Esto sugiere que, bajo ciertas condiciones, i.e. valores relativamente grandes de  $h$  y  $\xi$ , podría ser difícil distinguir una estrella de bosones compacta de un agujero negro basándose en la espectroscopía de líneas de emisión. Estos resultados indican que las estrellas SBS más compactas pueden tener características observacionales similares y comportarse efectivamente como imitadores de agujeros negros en algunas circunstancias.

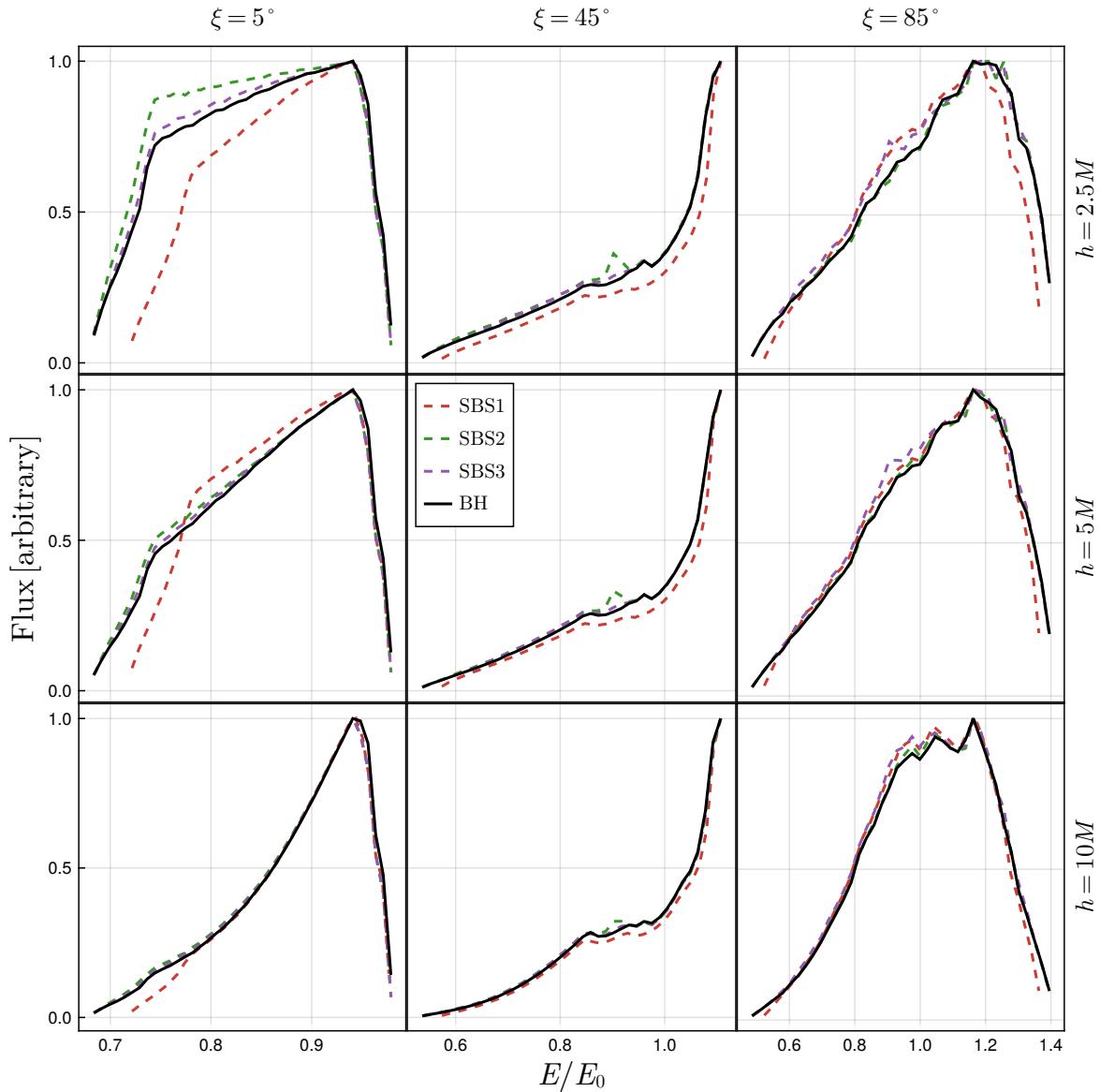
## 5.4. Conclusiones

Hemos analizado propiedades observacionales de modelos de estrellas de bosones escalares con autointeracciones de cuarto orden (ABS) y sexto orden (SBS), rodeadas por un disco de acreción relativista, ópticamente grueso y geométricamente delgado. Consideramos la radiación del continuo térmico del disco y el ensanchamiento relativista de líneas de emisión, incluyendo un modelo de corona de farol con efectos de la gravedad.

Para las estrellas de bosones con autointeracciones cuárticas, denominadas modelos ABS, hemos verificado que las propiedades observacionales de estas configuraciones difieren fuertemente del caso de un agujero negro. De hecho, debido a que estos modelos poseen órbitas estables a todo radio y, en consecuencia, los discos de acreción se extienden hasta el origen, las perfiles de temperatura alcanzan valores mayores en comparación con



**Figura 5.6:** Perfiles de emisividad en el modelo de farol para los escenarios ABS, SBS y BH. Fila superior: perfiles para varias alturas de la corona, junto con las contrapartes en espacio–tiempo plano de la ecuación (5.8). Fila inferior: vista ampliada de los mismos perfiles para los escenarios SBS y BH.



**Figura 5.7:** Líneas de emisión observadas en el modelo de farol para los escenarios SBS y BH, para varias alturas de la corona y ángulos de inclinación del observador. En este caso,  $E_0$  es la energía de la línea de emisión en el marco de reposo del disco de acreción.

los del agujero negro. Además, bajo el modelo de corona de farol, el amesetamiento de los perfiles de emisividad en radios pequeños provoca una concentración desproporcionada de las líneas de emisión a energías más bajas, una característica que consideramos no física. Aún así, el corrimiento al rojo gravitacional y la caída de la temperatura en la región central dan lugar a una depresión central del brillo en la imagen.

Los modelos SBS poseen una mayor similitud en las propiedades observadas con el caso de un agujero negro. Los perfiles de temperatura son similares, siendo el de SBS3 prácticamente idéntico. Por otro lado, los modelos SBS presentan fuerte deflexión de la luz, y una estructura de anillos de fotones significativamente distinta de la de un agujero negro. El ensanchamiento de las líneas de emisión es cualitativamente comparable, especialmente para grandes alturas de la corona. Estos resultados muestran que las estrellas de bosones SBS podrían ser posibles imitadores de agujeros negros bajo algunas circunstancias.

# Capítulo 6

## Comentarios finales

En esta tesis hemos realizado investigaciones sobre la astrofísica de distintas clases de objetos compactos, incluyendo púlsares de milisegundo, núcleos galácticos de materia oscura fermiónica y estrellas de bosones. Con ese fin desarrollamos `skylight` [83, 84], un código de transporte radiativo en relatividad general para espacio–tiempos arbitrarios, una herramienta que hemos aplicado en todas las investigaciones que componen esta tesis.

El código desarrollado está escrito en Julia, un lenguaje de programación moderno, de tipado dinámico y alto desempeño, y está disponible públicamente. Es una herramienta flexible, fácilmente extensible a otros escenarios con nuevos espacio–tiempos y modelos radiativos. Además, calcula los símbolos de Christoffel usando la técnica moderna de diferenciación automática, que sobrepasa a las diferencias finitas tradicionales tanto en velocidad como en precisión, lo cual es provechoso, por ejemplo, para problemas de transporte en espacio–tiempos complejos como los que aproximan a sistemas binarios compactos cerca de la fusión [121–123], un escenario en el que pensamos trabajar en el futuro para estudiar signaturas electromagnéticas en distintas bandas del espectro.

En el Capítulo 3, introdujimos un nuevo modelo de emisión térmica de rayos X en MSPs [127], basado en simulaciones numéricas de la magnetósfera y una relación entre las corrientes magnetosféricas y la temperatura sobre la superficie estelar. Este modelo modifica la hipótesis usual que define las regiones de emisión como la base de las líneas abiertas de campo magnético sobre la superficie. En cambio, supone que las regiones de emisión están definidas como aquellas donde la corriente es de tipo espacial. Esta modificación da lugar a regiones de emisión adicionales en la zona de líneas magnéticas cerradas, lo cual es un efecto de la gravedad y en sí es una novedad. Este modelo es interesante, ya que al comparar con observaciones de NICER altamente precisas de cuatro MSPs nos permite obtener buenos ajustes de las curvas de luz y espectros<sup>1</sup>. Notablemente, las regiones de emisión en la zona cerrada son cruciales para lograr los ajustes en la mayoría de los casos. De hecho, nuestros resultados ofrecen una interpretación alternativa a la curva de luz de PSR J0030+0451: mientras que en la literatura se ha tomado como indicativa de la presencia de un campo magnético significativamente no dipolar [79, 80, 129], nosotros logramos reproducirla con un campo dipolar a partir de un modelo de emisión distinto, gracias a las regiones de emisión no estándar que obtenemos en la zona cerrada. En el futuro, continuaremos trabajando en este modelo en varias líneas: por un lado buscando

---

<sup>1</sup>Excepto para uno de los MSPs cuando consideramos el modelo de atmósfera estelar, logrando ajustar la curva de luz solo cuando permitimos exceso de flujo con radiación de cuerpo negro con anisotropía

ajustar la curva del MSP que no logramos reproducir con el modelo de atmósfera de Hidrógeno, quizás con un refinamiento del espacio de parámetros. También queremos comprender más profundamente la naturaleza de las regiones de emisión en la zona cerrada y el rol del campo gravitacional, pues son ingredientes fundamentales del nuevo modelo. Además, buscaremos complementar este modelo con otros en las bandas de radio y rayos  $\gamma$ , que nos permitirían resolver degeneraciones y quizás aportar mayor certeza a nuestro enfoque.

Luego, en los siguientes capítulos, nos dedicamos a las investigaciones sobre propiedades observacionales de objetos compactos exóticos con discos de acreción geométricamente delgados y ópticamente gruesos. En el Capítulo 4 nos centramos en un gas autogravitante de materia oscura fermiónica descrito por el modelo RAR [27, 113], uno de los principales candidatos alternativos a objeto supermasivo en el centro de las galaxias. Este modelo es interesante porque aplica a diversos tipos de galaxias, y en el caso de la Vía Láctea es consistente con observaciones desde la escala del halo, como la curva de rotación galáctica, hasta la escala del objeto central, como el movimiento de las estrellas S. En esta tesis, analizamos las imágenes y espectros de los núcleos fermiónicos, y comparamos con el caso de un agujero negro. Aplicamos este enfoque a galaxias de tipo activo, con masas centrales de  $10^7 M_\odot$ , y al caso de una galaxia similar a la Vía Láctea con un núcleo de  $3.6 \times 10^6 M_\odot$ . Por un lado, obtuvimos características similares a los agujeros negros, como una depresión central de brillo, aún cuando el disco de acreción se extiende hasta el origen, debido a la caída de temperatura hacia el centro y al alto corrimiento al rojo gravitacional de los fotones que provienen de la zona central. Si bien nuestro modelo de acreción no es adecuado para Sgr A\*, el tamaño de las depresiones centrales de brillo que encontramos es cercano a lo observado por el EHT para Sgr A\*, del orden de algunos  $r_g$  dependiendo de la masa del fermión. Por otro lado, obtuvimos algunas características distintivas respecto de un agujero negro, como la ausencia de anillos de fotones. Esta es una característica que podría ser contrastable en el futuro cercano con las mejoras a la técnica de interferometría directa, tanto desde la Tierra con el ngEHT [46, 47], como desde el espacio [48], aunque la factibilidad de la medición es aún objeto de debate [41–44, 49].

Por último, en el Capítulo 5, nos centramos en un modelo de estrellas de bosones con interacciones de cuarto orden (ABS) y sexto orden (SBS) [114]. Analizamos tanto el espectro del continuo térmico del disco como el ensanchamiento relativista de las líneas de emisión. Calculamos imágenes y espectros comparando también con el caso de un agujero negro. En el caso de las estrellas  $\Lambda$  en que el disco de acreción se extiende hasta el origen, encontramos diferencias significativas con respecto al caso de un agujero negro, como temperaturas más altas, y una exagerada concentración de las líneas de emisión a energías bajas, que nos conducen a descartar este modelo como no físico. Los modelos SBS, en cambio, tienen perfiles de temperatura y espectros térmicos similares a los de un agujero negro. Por otro lado, presentan estructuras de anillos de fotones notoriamente distintas a las de un agujero negro en que la sucesión infinita de anillos converge exponencialmente a una curva crítica [41, 42]. Las líneas de emisión bajo el modelo de corona de farol también son similares a las de un agujero negro para ciertas configuraciones, por lo que puede ser difícil distinguir los escenarios. Las estrellas SBS, especialmente las más compactas, pueden actuar como buenos imitadores de agujeros negros.

# Bibliografía

- [1] C. M. Will, “The confrontation between general relativity and experiment,” *Living reviews in relativity*, vol. 17, no. 1, pp. 1–117, 2014.
- [2] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, *et al.*, “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger,” *Physical review letters*, vol. 116, no. 6, p. 061102, 2016.
- [3] L. Scientific, V. Collaborations, B. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, *et al.*, “Tests of general relativity with gw150914,” *Physical review letters*, vol. 116, no. 22, p. 221101, 2016.
- [4] K. Yagi and L. C. Stein, “Black hole based tests of general relativity,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 33, no. 5, p. 054001, 2016.
- [5] R. Genzel, F. Eisenhauer, and S. Gillessen, “The galactic center massive black hole and nuclear star cluster,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 82, no. 4, p. 3121, 2010.
- [6] T. Do, A. Hees, A. Ghez, G. D. Martinez, D. S. Chu, S. Jia, S. Sakai, J. R. Lu, A. K. Gautam, K. K. O’neil, *et al.*, “Relativistic redshift of the star s0-2 orbiting the galactic center supermassive black hole,” *Science*, vol. 365, no. 6454, pp. 664–668, 2019.
- [7] R. Abuter, A. Amorim, N. Anugu, M. Bauböck, M. Benisty, J.-P. Berger, N. Blind, H. Bonnet, W. Brandner, A. Buron, *et al.*, “Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star s2 near the galactic centre massive black hole,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 615, p. L15, 2018.
- [8] R. Abuter, A. Amorim, M. Bauböck, J. Berger, H. Bonnet, W. Brandner, V. Cardoso, Y. Clénet, P. De Zeeuw, J. Dexter, *et al.*, “Detection of the schwarzschild precession in the orbit of the star s2 near the galactic centre massive black hole,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 636, p. L5, 2020.
- [9] M. Bauböck, J. Dexter, R. Abuter, A. Amorim, J. Berger, H. Bonnet, W. Brandner, Y. Clénet, V. C. Du Foresto, P. de Zeeuw, *et al.*, “Modeling the orbital motion of sgr a\*’s near-infrared flares,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 635, p. A143, 2020.
- [10] R. Abuter, N. Aimar, P. A. Seoane, A. Amorim, M. Bauböck, J. Berger, H. Bonnet, G. Bourdarot, W. Brandner, V. Cardoso, *et al.*, “Polarimetry and astrometry of nir

- flares as event horizon scale, dynamical probes for the mass of sgr a,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 677, p. L10, 2023.
- [11] N. Lin, Z. Li, J. Arthur, R. Asquith, and C. Bambi, “Testing sgra\* with the spectrum of its accretion structure,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2015, no. 09, p. 038, 2015.
- [12] M. Miyoshi, J. Moran, J. Herrnstein, L. Greenhill, N. Nakai, P. Diamond, and M. Inoue, “Evidence for a black hole from high rotation velocities in a sub-parsec region of ngc4258,” *Nature*, vol. 373, no. 6510, pp. 127–129, 1995.
- [13] G. Zhu, I. Zaw, M. R. Blanton, and L. J. Greenhill, “Optical properties of host galaxies of extragalactic nuclear water masers,” *The Astrophysical Journal*, vol. 742, no. 2, p. 73, 2011.
- [14] D. W. Pesce, J. A. Braatz, J. J. Condon, F. Gao, C. Henkel, E. Litzinger, K. Lo, and M. J. Reid, “The megamaser cosmology project. vii. investigating disk physics using spectral monitoring observations,” *The Astrophysical Journal*, vol. 810, no. 1, p. 65, 2015.
- [15] G. Bower, R. Green, R. Bender, K. Gebhardt, T. Lauer, J. Magorrian, D. Richstone, A. Danks, T. Gull, J. Hutchings, *et al.*, “Evidence of a supermassive black hole in the galaxy ngc 1023 from the nuclear stellar dynamics,” *The Astrophysical Journal*, vol. 550, no. 1, p. 75, 2001.
- [16] N. Neumayer, A. Seth, and T. Böker, “Nuclear star clusters,” *The Astronomy and Astrophysics Review*, vol. 28, no. 1, p. 4, 2020.
- [17] E. H. T. Collaboration *et al.*, “First m87 event horizon telescope results. iv. imaging the central supermassive black hole,” *arXiv preprint arXiv:1906.11241*, 2019.
- [18] E. H. T. Collaboration *et al.*, “First sagittarius a\* event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole in the center of the milky way,” *Astrophysical Journal Letters*, vol. 930, no. 2, p. L12, 2022.
- [19] R. Abuter, A. Amorim, M. Bauböck, J. Berger, H. Bonnet, W. Brandner, V. Cardoso, Y. Clénet, P. de Zeeuw, Y. Dallilar, *et al.*, “The flux distribution of sgr a,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 638, p. A2, 2020.
- [20] R. Narayan and J. E. McClintock, “Advection-dominated accretion and the black hole event horizon,” *New Astronomy Reviews*, vol. 51, no. 10-12, pp. 733–751, 2008.
- [21] M. A. Abramowicz, W. Kluźniak, and J.-P. Lasota, “No observational proof of the black-hole event-horizon,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 396, no. 3, pp. L31–L34, 2002.
- [22] R. Carballo-Rubio, F. Di Filippo, S. Liberati, and M. Visser, “Constraints on thermalizing surfaces from infrared observations of supermassive black holes,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2023, no. 11, p. 041, 2023.

- [23] A. E. Broderick, A. Loeb, and R. Narayan, “The event horizon of sagittarius a,” *The Astrophysical Journal*, vol. 701, no. 2, p. 1357, 2009.
- [24] E. Maoz, “Dynamical constraints on alternatives to supermassive black holes in galactic nuclei,” *The Astrophysical Journal*, vol. 494, no. 2, p. L181, 1998.
- [25] R. Genzel, F. Eisenhauer, and S. Gillessen, “Experimental studies of black holes: status and future prospects,” *The Astronomy and Astrophysics Review*, vol. 32, no. 1, p. 3, 2024.
- [26] D. F. Torres, S. Capozziello, and G. Lambiase, “Supermassive boson star at the galactic center?,” *Physical Review D*, vol. 62, no. 10, p. 104012, 2000.
- [27] R. Ruffini, C. R. Argüelles, and J. A. Rueda, “On the core-halo distribution of dark matter in galaxies,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 451, no. 1, pp. 622–628, 2015.
- [28] C. R. Argüelles, A. Krut, J. Rueda, and R. Ruffini, “Novel constraints on fermionic dark matter from galactic observables ii: Galaxy scaling relations,” *Physics of the Dark Universe*, vol. 24, p. 100278, 2019.
- [29] M. Visser and D. L. Wiltshire, “Stable gravastars—an alternative to black holes?,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 21, no. 4, p. 1135, 2004.
- [30] V. Cardoso and P. Pani, “Testing the nature of dark compact objects: a status report,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 22, no. 1, p. 4, 2019.
- [31] H. Olivares, Z. Younsi, C. M. Fromm, M. De Laurentis, O. Porth, Y. Mizuno, H. Falcke, M. Kramer, and L. Rezzolla, “How to tell an accreting boson star from a black hole,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 497, no. 1, pp. 521–535, 2020.
- [32] F. Vincent, M. Wielgus, M. Abramowicz, E. Gourgoulhon, J.-P. Lasota, T. Pau-mard, and G. Perrin, “Geometric modeling of m87\* as a kerr black hole or a non-kerr compact object,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 646, p. A37, 2021.
- [33] E. Becerra-Vergara, C. R. Argüelles, A. Krut, J. Rueda, and R. Ruffini, “Geodesic motion of s2 and g2 as a test of the fermionic dark matter nature of our galactic core,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 641, p. A34, 2020.
- [34] C. A. Herdeiro, A. M. Pombo, E. Radu, P. V. Cunha, and N. Sanchis-Gual, “The imitation game: Proca stars that can mimic the schwarzschild shadow,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2021, no. 04, p. 051, 2021.
- [35] J. L. Rosa, P. Garcia, F. H. Vincent, and V. Cardoso, “Observational signatures of hot spots orbiting horizonless objects,” *Physical Review D*, vol. 106, no. 4, p. 044031, 2022.
- [36] J. L. Rosa and D. Rubiera-Garcia, “Shadows of boson and proca stars with thin accretion disks,” *Physical Review D*, vol. 106, no. 8, p. 084004, 2022.

- [37] J. L. Rosa, C. F. Macedo, and D. Rubiera-Garcia, “Imaging compact boson stars with hot spots and thin accretion disks,” *Physical Review D*, vol. 108, no. 4, p. 044021, 2023.
- [38] K. Gjorgjieski, J. Kunz, M. C. Teodoro, L. G. Collodel, and P. Nedkova, “Magnetized thick disks around boson stars,” *Physical Review D*, vol. 107, no. 10, p. 103043, 2023.
- [39] C. R. Argüelles, M. I. Díaz, A. Krut, and R. Yunis, “On the formation and stability of fermionic dark matter haloes in a cosmological framework,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 502, no. 3, pp. 4227–4246, 2021.
- [40] C. R. Argüelles, E. A. Becerra-Vergara, J. A. Rueda, and R. Ruffini, “Fermionic dark matter: physics, astrophysics, and cosmology,” *Universe*, vol. 9, no. 4, p. 197, 2023.
- [41] S. E. Gralla, D. E. Holz, and R. M. Wald, “Black hole shadows, photon rings, and lensing rings,” *Physical Review D*, vol. 100, no. 2, p. 024018, 2019.
- [42] S. E. Gralla and A. Lupsasca, “Lensing by kerr black holes,” *Physical Review D*, vol. 101, no. 4, p. 044031, 2020.
- [43] M. D. Johnson, A. Lupsasca, A. Strominger, G. N. Wong, S. Hadar, D. Kapec, R. Narayan, A. Chael, C. F. Gammie, P. Galison, *et al.*, “Universal interferometric signatures of a black hole’s photon ring,” *Science advances*, vol. 6, no. 12, p. eaaz1310, 2020.
- [44] Z. Younsi, D. Psaltis, and F. Özel, “Black hole images as tests of general relativity: effects of spacetime geometry,” *The Astrophysical Journal*, vol. 942, no. 1, p. 47, 2023.
- [45] P. Kocherlakota, L. Rezzolla, R. Roy, and M. Wielgus, “Hotspots and photon rings in spherically-symmetric spacetimes,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, p. stae1321, 2024.
- [46] M. D. Johnson, K. Akiyama, L. Blackburn, K. L. Bouman, A. E. Broderick, V. Cardoso, R. P. Fender, C. M. Fromm, P. Galison, J. L. Gómez, *et al.*, “Key science goals for the next-generation event horizon telescope,” *Galaxies*, vol. 11, no. 3, p. 61, 2023.
- [47] D. Ayzenberg, L. Blackburn, R. Brito, S. Britzen, A. E. Broderick, R. Carballo-Rubio, V. Cardoso, A. Chael, K. Chatterjee, Y. Chen, *et al.*, “Fundamental physics opportunities with the next-generation event horizon telescope,” *arXiv preprint arXiv:2312.02130*, 2023.
- [48] L. I. Gurvits, Z. Paragi, R. I. Amils, I. van Bemmel, P. Boven, V. Casasola, J. Conway, J. Davelaar, M. C. Díez-González, H. Falcke, *et al.*, “The science case and challenges of space-borne sub-millimeter interferometry,” *Acta astronautica*, vol. 196, pp. 314–333, 2022.
- [49] P. Tiede, M. D. Johnson, D. W. Pesce, D. C. Palumbo, D. O. Chang, and P. Galison, “Measuring photon rings with the ngeht,” *Galaxies*, vol. 10, no. 6, p. 111, 2022.

- [50] O. Benhar, A. Lovato, A. Maselli, and F. Pannarale, *Nuclear Theory in the Age of Multimessenger Astronomy*. CRC Press, 2024.
- [51] P. Hansel, A. Y. Potekhin, and D. G. Yakovlev, “Neutron stars 1: Equation of state and structure, vol. 326 of,” *Astrophysics and Space Science Library*, 2007. Revisado en 2019.
- [52] A. Hewish, S. J. Bell, J. D. Pilkington, P. Frederick Scott, and R. A. Collins, “Observation of a rapidly pulsating radio source,” in *A Source Book in Astronomy and Astrophysics, 1900–1975*, pp. 498–504, Harvard University Press, 1979.
- [53] R. N. Manchester, G. B. Hobbs, A. Teoh, and M. Hobbs, “The australia telescope national facility pulsar catalogue,” *The Astronomical Journal*, vol. 129, no. 4, p. 1993, 2005.
- [54] ATNF/CSIRO, “ATNF Pulsar Catalogue.” Web interface to database, 2008. URL (citada en Junio 2024): <http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat/>.
- [55] D. R. Lorimer, “Binary and millisecond pulsars,” *Living reviews in relativity*, vol. 11, pp. 1–90, 2008.
- [56] R. Manchester, “Millisecond pulsars, their evolution and applications,” *Journal of Astrophysics and Astronomy*, vol. 38, no. 3, p. 42, 2017.
- [57] G. Hobbs, W. Coles, R. Manchester, M. Keith, R. M. Shannon, D. Chen, M. Bailes, N. Bhat, S. Burke-Spolaor, D. Champion, *et al.*, “Development of a pulsar-based time-scale,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 427, no. 4, pp. 2780–2787, 2012.
- [58] A. K. Harding, “Pulsar emission physics: The first fifty years,” *Proceedings of the International Astronomical Union*, vol. 13, no. S337, pp. 52–57, 2017.
- [59] A. Philippov and M. Kramer, “Pulsar magnetospheres and their radiation,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 60, pp. 495–558, 2022.
- [60] V. E. Zavlin, “Studying millisecond pulsars in x-rays,” *Astrophysics and Space Science*, vol. 308, no. 1, pp. 297–307, 2007.
- [61] K. Pechenick, C. Ftacclas, and J. Cohen, “Hot spots on neutron stars-the near-field gravitational lens,” *The Astrophysical Journal*, vol. 274, pp. 846–857, 1983.
- [62] D. Page, “Surface temperature of a magnetized neutron star and interpretation of the rosat data. i. dipolar fields,” *arXiv preprint astro-ph/9407015*, 1994.
- [63] T. M. Braje, R. W. Romani, and K. P. Rauch, “Light curves of rapidly rotating neutron stars,” *The Astrophysical Journal*, vol. 531, no. 1, p. 447, 2000.
- [64] A. K. Harding and A. G. Muslimov, “Pulsar polar cap heating and surface thermal x-ray emission. i. curvature radiation pair fronts,” *The Astrophysical Journal*, vol. 556, no. 2, p. 987, 2001.

- [65] A. K. Harding and A. G. Muslimov, “Pulsar polar cap heating and surface thermal x-ray emission. ii. inverse compton radiation pair fronts,” *The Astrophysical Journal*, vol. 568, no. 2, p. 862, 2002.
- [66] M. Bauböck, D. Psaltis, and F. Özel, “Atmospheric structure and radiation pattern for neutron-star polar caps heated by magnetospheric return currents,” *The Astrophysical Journal*, vol. 872, no. 2, p. 162, 2019.
- [67] W. Lockhart, S. E. Gralla, F. Özel, and D. Psaltis, “X-ray light curves from realistic polar cap models: inclined pulsar magnetospheres and multipole fields,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 490, no. 2, pp. 1774–1783, 2019.
- [68] A. V. Bilous *et al.*, “A nicer view of psr j0030+ 0451: evidence for a global-scale multipolar magnetic field,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 887, no. 1, p. L23, 2019.
- [69] T. Salmi, V. F. Suleimanov, J. Nättilä, and J. Poutanen, “Magnetospheric return-current-heated atmospheres of rotation-powered millisecond pulsars,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 641, p. A15, 2020.
- [70] A. M. Beloborodov, “Gravitational bending of light near compact objects,” *The Astrophysical Journal*, vol. 566, no. 2, p. L85, 2002.
- [71] S. Bogdanov, G. B. Rybicki, and J. E. Grindlay, “Constraints on neutron star properties from x-ray observations of millisecond pulsars,” *The Astrophysical Journal*, vol. 670, no. 1, p. 668, 2007.
- [72] S. Bogdanov, J. E. Grindlay, and G. B. Rybicki, “Thermal x-rays from millisecond pulsars: Constraining the fundamental properties of neutron stars,” *The Astrophysical Journal*, vol. 689, no. 1, p. 407, 2008.
- [73] F. Özel, “Surface emission from neutron stars and implications for the physics of their interiors,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 76, no. 1, p. 016901, 2012.
- [74] D. Psaltis, F. Özel, and D. Chakrabarty, “Prospects for measuring neutron-star masses and radii with x-ray pulse profile modeling,” *The Astrophysical Journal*, vol. 787, no. 2, p. 136, 2014.
- [75] M. C. Miller and F. K. Lamb, “Determining neutron star properties by fitting oblate-star waveform models to x-ray burst oscillations,” *The Astrophysical Journal*, vol. 808, no. 1, p. 31, 2015.
- [76] S. Bogdanov, S. Guillot, P. S. Ray, M. T. Wolff, D. Chakrabarty, W. C. Ho, M. Kerr, F. K. Lamb, A. Lommen, R. M. Ludlam, *et al.*, “Constraining the neutron star mass–radius relation and dense matter equation of state with nicer. i. the millisecond pulsar x-ray data set,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 887, no. 1, p. L25, 2019.

- [77] S. Bogdanov, F. K. Lamb, S. Mahmoodifar, M. C. Miller, S. M. Morsink, T. E. Riley, T. E. Strohmayer, A. K. Tung, A. L. Watts, A. J. Dittmann, *et al.*, “Constraining the neutron star mass–radius relation and dense matter equation of state with nicer. ii. emission from hot spots on a rapidly rotating neutron star,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 887, no. 1, p. L26, 2019.
- [78] M. Miller, F. K. Lamb, A. Dittmann, S. Bogdanov, Z. Arzoumanian, K. C. Gendreau, S. Guillot, A. Harding, W. Ho, J. Lattimer, *et al.*, “Psr j0030+ 0451 mass and radius from nicer data and implications for the properties of neutron star matter,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 887, no. 1, p. L24, 2019.
- [79] A. Y. Chen, Y. Yuan, and G. Vasilopoulos, “A numerical model for the multiwavelength lightcurves of psr j0030+ 0451,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 893, no. 2, p. L38, 2020.
- [80] C. Kalapotharakos, Z. Wadiasingh, A. K. Harding, and D. Kazanas, “The multipolar magnetic field of the millisecond pulsar psr j0030+ 0451,” *The Astrophysical Journal*, vol. 907, no. 2, p. 63, 2021.
- [81] T. Salmi, S. Vinciguerra, D. Choudhury, A. L. Watts, W. C. Ho, S. Guillot, Y. Kini, B. Dorsman, S. M. Morsink, and S. Bogdanov, “Atmospheric effects on neutron star parameter constraints with nicer,” *The Astrophysical Journal*, vol. 956, no. 2, p. 138, 2023.
- [82] S. Vinciguerra, T. Salmi, A. L. Watts, D. Choudhury, T. E. Riley, P. S. Ray, S. Bogdanov, Y. Kini, S. Guillot, D. Chakrabarty, *et al.*, “An updated mass–radius analysis of the 2017–2018 nicer data set of psr j0030+ 0451,” *The Astrophysical Journal*, vol. 961, no. 1, p. 62, 2024.
- [83] J. Pelle, O. Reula, F. Carrasco, and C. Bederian, “Skylight: a new code for general-relativistic ray tracing and radiative transfer in arbitrary spacetimes,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 07 2022. stac1857.
- [84] J. Pelle, “Skylight.jl: relativistic ray tracing and radiative transfer in arbitrary spacetimes.” GitHub repository, 2024. Available online: <https://github.com/joaquinpelle/Skylight.jl>.
- [85] R. W. Lindquist, “Relativistic transport theory,” *Annals of Physics*, vol. 37, no. 3, pp. 487–518, 1966.
- [86] J. M. Bardeen, “Timelike and null geodesics in the kerr metric,” *Black holes*, vol. 215, 1973.
- [87] C. Cunningham, “The effects of redshifts and focusing on the spectrum of an accretion disk around a kerr black hole,” *Astrophysical Journal*, vol. 202, Dec. 15, 1975, pt. 1, p. 788-802., vol. 202, pp. 788–802, 1975.
- [88] J.-P. Luminet, “Image of a spherical black hole with thin accretion disk,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 75, no. 1-2, May 1979, p. 228-235., vol. 75, pp. 228–235, 1979.

- [89] V. Karas, D. Vokrouhlický, and A. Polnarev, “In the vicinity of a rotating black hole: a fast numerical code for computing observational effects,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 259, no. 3, pp. 569–575, 1992.
- [90] J. D. Schnittman and E. Bertschinger, “The harmonic structure of high-frequency quasi-periodic oscillations in accreting black holes,” *The Astrophysical Journal*, vol. 606, no. 2, p. 1098, 2004.
- [91] S. C. Noble, P. K. Leung, C. F. Gammie, and L. G. Book, “Simulating the emission and outflows from accretion discs,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 24, no. 12, p. S259, 2007.
- [92] J. Dexter and E. Agol, “A fast new public code for computing photon orbits in a kerr spacetime,” *The Astrophysical Journal*, vol. 696, no. 2, p. 1616, 2009.
- [93] D. Psaltis and T. Johannsen, “A ray-tracing algorithm for spinning compact object spacetimes with arbitrary quadrupole moments. i. quasi-kerr black holes,” *The Astrophysical Journal*, vol. 745, no. 1, p. 1, 2011.
- [94] F. H. Vincent, T. Paumard, E. Gourgoulhon, and G. Perrin, “Gyoto: a new general relativistic ray-tracing code,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 28, no. 22, p. 225011, 2011.
- [95] Z. Younsi, K. Wu, and S. V. Fuerst, “General relativistic radiative transfer: formulation and emission from structured tori around black holes,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 545, p. A13, 2012.
- [96] C.-k. Chan, D. Psaltis, and F. Özel, “Gray: A massively parallel gpu-based code for ray tracing in relativistic spacetimes,” *The Astrophysical Journal*, vol. 777, no. 1, p. 13, 2013.
- [97] H.-Y. Pu, K. Yun, Z. Younsi, and S.-J. Yoon, “Odyssey: a public gpu-based code for general relativistic radiative transfer in kerr spacetime,” *The Astrophysical Journal*, vol. 820, no. 2, p. 105, 2016.
- [98] C.-k. Chan, L. Medeiros, F. Özel, and D. Psaltis, “Gray2: A general purpose geodesic integrator for kerr spacetimes,” *The Astrophysical Journal*, vol. 867, no. 1, p. 59, 2018.
- [99] P. Pihajoki, M. Mannerkoski, J. Nätilä, and P. H. Johansson, “General purpose ray tracing and polarized radiative transfer in general relativity,” *The Astrophysical Journal*, vol. 863, no. 1, p. 8, 2018.
- [100] M. Mościbrodzka and C. F. Gammie, “Ipole–semi-analytic scheme for relativistic polarized radiative transport,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 475, no. 1, pp. 43–54, 2018.
- [101] T. Bronzwaer, J. Davelaar, Z. Younsi, M. Mościbrodzka, H. Falcke, M. Kramer, and L. Rezzolla, “Raptor-i. time-dependent radiative transfer in arbitrary spacetimes,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 613, p. A2, 2018.

- [102] T. Bronzwaer, Z. Younsi, J. Davelaar, and H. Falcke, “Raptor-ii. polarized radiative transfer in curved spacetime,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 641, p. A126, 2020.
- [103] C. J. White, “Blacklight: A general-relativistic ray-tracing and analysis tool,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 262, no. 1, p. 28, 2022.
- [104] A. Sharma, L. Medeiros, C.-k. Chan, G. Halevi, P. D. Mullen, J. M. Stone, and G. N. Wong, “Mahakala: a python-based modular ray-tracing and radiative transfer algorithm for curved space-times,” *arXiv preprint arXiv:2304.03804*, 2023.
- [105] N. Aimar, T. Paumard, F. Vincent, E. Gourgoulhon, and G. Perrin, “Gyoto 2.0: a polarized relativistic ray-tracing code,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 41, no. 9, p. 095010, 2024.
- [106] J. Huang, L. Zheng, M. Guo, and B. Chen, “Coport: A new public code for polarized radiative transfer in a covariant framework,” *arXiv preprint arXiv:2407.10431*, 2024.
- [107] A. G. Bristol, “Gradus.jl.” GitHub repository, 2024. Available online: <https://github.com/astro-group-bristol/Gradus.jl>.
- [108] J. C. Dolence, C. F. Gammie, M. Mościbrodzka, and P. K. Leung, “grmonty: A monte carlo code for relativistic radiative transport,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 184, no. 2, p. 387, 2009.
- [109] J. D. Schnittman and J. H. Krolik, “A monte carlo code for relativistic radiation transport around kerr black holes,” *The Astrophysical Journal*, vol. 777, no. 1, p. 11, 2013.
- [110] T. Johannsen, “Regular black hole metric with three constants of motion,” *Physical Review D*, vol. 88, no. 4, p. 044002, 2013.
- [111] J. Cembranos, A. De la Cruz-Dombriz, and P. J. Romero, “Kerr-newman black holes in f (r) theories,” *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, vol. 11, no. 01, p. 1450001, 2014.
- [112] M. R. Neto, D. Perez, and J. Pelle, “The shadow of charged traversable wormholes,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 32, no. 02, p. 2250137, 2023.
- [113] C. R. Argüelles, A. Krut, J. Rueda, and R. Ruffini, “Novel constraints on fermionic dark matter from galactic observables i: The milky way,” *Physics of the Dark Universe*, vol. 21, pp. 82–89, 2018.
- [114] J. L. Rosa, J. Pelle, and D. Pérez, “Accretion disks and relativistic line broadening in boson star spacetimes,” *arXiv preprint arXiv:2403.11540*, 2024.
- [115] N. I. Shakura and R. A. Sunyaev, “Black holes in binary systems. observational appearance.,” *Astronomy and Astrophysics*, Vol. 24, p. 337-355, vol. 24, pp. 337–355, 1973.
- [116] I. D. Novikov and K. S. Thorne, “Astrophysics of black holes,” *Black holes (Les astres occlus)*, vol. 1, pp. 343–450, 1973.

- [117] O. Straub, F. H. Vincent, M. A. Abramowicz, E. Gourgoulhon, and T. Paumard, “Modelling the black hole silhouette in sagittarius a\* with ion tori,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 543, p. A83, 2012.
- [118] T. Dauser, J. Garcia, J. Wilms, M. Böck, L. W. Brenneman, M. Falanga, K. Fukumura, and C. S. Reynolds, “Irradiation of an accretion disc by a jet: general properties and implications for spin measurements of black holes,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 430, no. 3, pp. 1694–1708, 2013.
- [119] C. Rackauckas and Q. Nie, “Differentialequations.jl—a performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in julia,” *Journal of Open Research Software*, vol. 5, no. 1, 2017.
- [120] E. Hairer, S. P. Nørsett, and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations. 1, Nonstiff problems*. Springer-Vlg, 1993.
- [121] F. Carrasco, M. Shibata, and O. Reula, “Magnetospheres of black hole-neutron star binaries,” *Physical Review D*, vol. 104, no. 6, p. 063004, 2021.
- [122] L. Combi, F. G. L. Armengol, M. Campanelli, B. Ireland, S. C. Noble, H. Nakano, and D. Bowen, “Superposed metric for spinning black hole binaries approaching merger,” *Physical Review D*, vol. 104, no. 4, p. 044041, 2021.
- [123] L. Combi and S. M. Ressler, “A binary black hole metric approximation from inspiral to merger,” *arXiv preprint arXiv:2403.13308*, 2024.
- [124] D. Page, “Surface temperature of a magnetized neutron star and interpretation of the rosat data. i. dipolar fields,” *arXiv preprint astro-ph/9407015*, 1994.
- [125] R. Perna and E. V. Gotthelf, “Constraints on the emission and viewing geometry of the transient anomalous x-ray pulsar xte j1810–197,” *The Astrophysical Journal*, vol. 681, no. 1, p. 522, 2008.
- [126] S. Bogdanov, F. K. Lamb, S. Mahmoodifar, M. C. Miller, S. M. Morsink, T. E. Riley, T. E. Strohmayer, A. K. Tung, A. L. Watts, A. J. Dittmann, *et al.*, “Constraining the neutron star mass–radius relation and dense matter equation of state with nicer. ii. emission from hot spots on a rapidly rotating neutron star,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 887, no. 1, p. L26, 2019.
- [127] F. Carrasco, J. Pelle, O. Reula, D. Viganò, and C. Palenzuela, “Relativistic force-free models of the thermal x-ray emission in millisecond pulsars observed by nicer,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 520, no. 2, pp. 3151–3163, 2023.
- [128] A. Timokhin and J. Arons, “Current flow and pair creation at low altitude in rotation-powered pulsars’ force-free magnetospheres: space charge limited flow,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 429, no. 1, pp. 20–54, 2013.

- [129] T. E. Riley, A. L. Watts, S. Bogdanov, P. S. Ray, R. M. Ludlam, S. Guillot, Z. Arzoumanian, C. L. Baker, A. V. Bilous, D. Chakrabarty, *et al.*, “A nicer view of psr j0030+ 0451: Millisecond pulsar parameter estimation,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 887, no. 1, p. L21, 2019.
- [130] K. C. Gendreau, Z. Arzoumanian, P. W. Adkins, C. L. Albert, J. F. Anders, A. T. Aylward, C. L. Baker, E. R. Balsamo, W. A. Bamford, S. S. Benegalrao, *et al.*, “The neutron star interior composition explorer (nicer): design and development,” in *Space telescopes and instrumentation 2016: Ultraviolet to gamma ray*, vol. 9905, pp. 420–435, SPIE, 2016.
- [131] S. Guillot, M. Kerr, P. S. Ray, S. Bogdanov, S. Ransom, J. S. Deneva, Z. Arzoumanian, P. Bult, D. Chakrabarty, K. C. Gendreau, *et al.*, “Nicer x-ray observations of seven nearby rotation-powered millisecond pulsars,” *The Astrophysical journal letters*, vol. 887, no. 1, p. L27, 2019.
- [132] C. Cadeau, S. M. Morsink, D. Leahy, and S. S. Campbell, “Light curves for rapidly rotating neutron stars,” *The Astrophysical Journal*, vol. 654, no. 1, p. 458, 2007.
- [133] S. M. Morsink, D. A. Leahy, C. Cadeau, and J. Braga, “The oblate schwarzschild approximation for light curves of rapidly rotating neutron stars,” *The Astrophysical Journal*, vol. 663, no. 2, p. 1244, 2007.
- [134] J. Pétri, “General-relativistic force-free pulsar magnetospheres,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 455, no. 4, pp. 3779–3805, 2015.
- [135] S. E. Gralla, A. Lupsasca, and A. Philippov, “Pulsar magnetospheres: beyond the flat spacetime dipole,” *The Astrophysical Journal*, vol. 833, no. 2, p. 258, 2016.
- [136] F. L. Carrasco and O. A. Reula, “Covariant hyperbolization of force-free electrodynamics,” *Physical Review D*, vol. 93, no. 8, p. 085013, 2016.
- [137] F. Carrasco, C. Palenzuela, and O. Reula, “Pulsar magnetospheres in general relativity,” *Physical Review D*, vol. 98, no. 2, p. 023010, 2018.
- [138] A. K. Harding, “The emission physics of millisecond pulsars,” *Millisecond Pulsars*, pp. 57–85, 2022.
- [139] T. E. Riley, D. Choudhury, T. Salmi, S. Vinciguerra, Y. Kini, B. Dorsman, A. L. Watts, D. Huppenkothen, and S. Guillot, “X-PSI: A Python package for neutron star X-ray pulse simulation and inference,” *Journal of Open Source Software*, vol. 8, no. 82, p. 4977, 2023.
- [140] D. R. Lorimer and M. Kramer, *Handbook of pulsar astronomy*, vol. 4. Cambridge university press, 2005.
- [141] F. Carrasco and O. Reula, “Novel scheme for simulating the force-free equations: Boundary conditions and the evolution of solutions towards stationarity,” *Physical Review D*, vol. 96, p. 063006, 2017.

- [142] R. Cayuso, F. Carrasco, B. Sbarato, and O. Reula, “Astrophysical jets from boosted compact objects,” *Phys. Rev. D*, vol. 100, p. 063009, Sep 2019.
- [143] F. Carrasco, C. Palenzuela, and O. Reula, “Pulsar magnetospheres in general relativity,” *Physical Review D*, vol. 98, p. 023010, 2018.
- [144] F. Carrasco, D. Vigano, C. Palenzuela, and J. A. Pons, “Triggering magnetar outbursts in 3d force-free simulations,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, vol. 484, no. 1, pp. L124–L129, 2019.
- [145] F. Carrasco and M. Shibata, “Magnetosphere of an orbiting neutron star,” *Physical Review D*, vol. 101, no. 6, p. 063017, 2020.
- [146] K. Hirotani and S. Shibata, “One-dimensional electric field structure of an outer gap accelerator—iii. location of the gap and the gamma-ray spectrum,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 325, no. 3, pp. 1228–1240, 2001.
- [147] S. Bogdanov, “The nearest millisecond pulsar revisited with xmm-newton: Improved mass–radius constraints for psr j0437–4715,” *The Astrophysical Journal*, vol. 762, no. 2, p. 96, 2012.
- [148] P. S. Ray, S. Guillot, S. M. Ransom, M. Kerr, S. Bogdanov, A. K. Harding, M. T. Wolff, C. Malacaria, K. C. Gendreau, Z. Arzoumanian, *et al.*, “Discovery of soft x-ray pulsations from psr j1231–1411 using nicer,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 878, no. 1, p. L22, 2019.
- [149] V. E. Zavlin, “Xmm-newton observations of four millisecond pulsars,” *The Astrophysical Journal*, vol. 638, no. 2, p. 951, 2006.
- [150] S. Bogdanov and J. E. Grindlay, “Deep xmm-newton spectroscopic and timing observations of the isolated radio millisecond pulsar psr j0030+ 0451,” *The Astrophysical Journal*, vol. 703, no. 2, p. 1557, 2009.
- [151] J. Pelle, C. Argüelles, F. Vieyro, V. Crespi, C. Millauro, M. Mestre, O. Reula, and F. Carrasco, “Imaging fermionic dark matter cores at the center of galaxies,” 2024. en prep.
- [152] A. Krut, C. R. Argüelles, P.-H. Chavanis, J. Rueda, and R. Ruffini, “Galaxy rotation curves and universal scaling relations: comparison between phenomenological and fermionic dark matter profiles,” *The Astrophysical Journal*, vol. 945, no. 1, p. 1, 2023.
- [153] P.-H. Chavanis and G. Alberti, “Gravitational phase transitions and instabilities of self-gravitating fermions in general relativity,” *Physics Letters B*, vol. 801, p. 135155, 2020.
- [154] C. Argüelles, K. Boshkayev, A. Krut, G. Nurbakhyt, J. Rueda, R. Ruffini, J. Uribe-Suárez, and R. Yunis, “On the growth of supermassive black holes formed from the gravitational collapse of fermionic dark matter cores,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 523, no. 2, pp. 2209–2218, 2023.

- [155] C. Argüelles, J. Rueda, and R. Ruffini, “Baryon-induced collapse of dark matter cores into supermassive black holes,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 961, no. 1, p. L10, 2024.
- [156] C. Millauro, C. Argüelles, F. Vieyro, V. Crespi, and M. Mestre, “Accretion discs onto supermassive compact objects: a portal to dark matter physics in active galaxies,” *arXiv preprint arXiv:2402.12491*, 2024.
- [157] F. S. Guzmán, “Accretion disk onto boson stars: A way to supplant black hole candidates,” *Physical Review D*, vol. 73, no. 2, p. 021501, 2006.
- [158] F. Vincent, Z. Meliani, P. Grandclément, E. Gourgoulhon, and O. Straub, “Imaging a boson star at the galactic center,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 33, no. 10, p. 105015, 2016.
- [159] L. Visinelli, “Boson stars and oscillatons: A review,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 30, no. 15, p. 2130006, 2021.
- [160] S. L. Liebling and C. Palenzuela, “Dynamical boson stars,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 26, no. 1, p. 1, 2023.
- [161] R. Brito, V. Cardoso, C. A. Herdeiro, and E. Radu, “Proca stars: Gravitating bose-einstein condensates of massive spin 1 particles,” *Physics Letters B*, vol. 752, pp. 291–295, 2016.
- [162] R. Brito, V. Cardoso, C. F. Macedo, H. Okawa, and C. Palenzuela, “Interaction between bosonic dark matter and stars,” *Physical Review D*, vol. 93, no. 4, p. 044045, 2016.
- [163] R. Brito, V. Cardoso, and H. Okawa, “Accretion of dark matter by stars,” *Physical review letters*, vol. 115, no. 11, p. 111301, 2015.
- [164] V. Cardoso, C. F. Macedo, K.-i. Maeda, and H. Okawa, “Eco-spotting: looking for extremely compact objects with bosonic fields,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 39, no. 3, p. 034001, 2022.
- [165] Z. Cao, A. Cardenas-Avendano, M. Zhou, C. Bambi, C. A. Herdeiro, and E. Radu, “Iron  $\text{k}\alpha$  line of boson stars,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2016, no. 10, p. 003, 2016.
- [166] Y. Lu and D. F. Torres, “The relativistic iron  $\text{k}\alpha$  line from an accretion disc onto a static non-baryonic compact object,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 12, no. 01, pp. 63–77, 2003.
- [167] L. Hui, J. P. Ostriker, S. Tremaine, and E. Witten, “Ultralight scalars as cosmological dark matter,” *Physical Review D*, vol. 95, no. 4, p. 043541, 2017.
- [168] C. Palenzuela, P. Pani, M. Bezares, V. Cardoso, L. Lehner, and S. Liebling, “Gravitational wave signatures of highly compact boson star binaries,” *Physical Review D*, vol. 96, no. 10, p. 104058, 2017.

- [169] T. Johannsen and D. Psaltis, “Testing the no-hair theorem with observations in the electromagnetic spectrum. iv. relativistically broadened iron lines,” *The Astrophysical Journal*, vol. 773, no. 1, p. 57, 2013.
- [170] C. Bambi, L. W. Brenneman, T. Dauser, J. A. Garcia, V. Grinberg, A. Ingram, J. Jiang, H. Liu, A. M. Lohfink, A. Marinucci, *et al.*, “Towards precision measurements of accreting black holes using x-ray reflection spectroscopy,” *Space Science Reviews*, vol. 217, pp. 1–55, 2021.
- [171] M. Colpi, S. L. Shapiro, and I. Wasserman, “Boson stars: Gravitational equilibria of self-interacting scalar fields,” *Physical review letters*, vol. 57, no. 20, p. 2485, 1986.
- [172] P. Amaro-Seoane, J. Barranco, A. Bernal, and L. Rezzolla, “Constraining scalar fields with stellar kinematics and collisional dark matter,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2010, no. 11, p. 002, 2010.
- [173] T. Lee, “Soliton stars and the critical masses of black holes,” *Physical Review D*, vol. 35, no. 12, p. 3637, 1987.
- [174] D. F. Torres, “Accretion disc onto a static non-baryonic compact object,” *Nuclear Physics B*, vol. 626, no. 1-2, pp. 377–394, 2002.
- [175] J. A. Orosz, J. E. McClintock, J. P. Aufdenberg, R. A. Remillard, M. J. Reid, R. Narayan, and L. Gou, “The mass of the black hole in cygnus x-1,” *The Astrophysical Journal*, vol. 742, no. 2, p. 84, 2011.
- [176] J. C. Miller-Jones, A. Bahramian, J. A. Orosz, I. Mandel, L. Gou, T. J. Maccarone, C. J. Neijssel, X. Zhao, J. Ziolkowski, M. J. Reid, *et al.*, “Cygnus x-1 contains a 21–solar mass black hole—implications for massive star winds,” *Science*, vol. 371, no. 6533, pp. 1046–1049, 2021.
- [177] J. Pelle, “Production runs and plots for .<sup>A</sup>ccretion disks and relativistic line broadening in boson star spacetimes” by J. L. Rosa, J. Pelle, and D. Perez..” GitHub repository, 2024. Available online: <https://github.com/joaquinpelle/BosonStars>.
- [178] P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant, M. Haberland, T. Reddy, D. Cournapeau, E. Burovski, P. Peterson, W. Weckesser, J. Bright, S. J. van der Walt, M. Brett, J. Wilson, K. J. Millman, N. Mayorov, A. R. J. Nelson, E. Jones, R. Kern, E. Larson, C. J. Carey, İ. Polat, Y. Feng, E. W. Moore, J. VanderPlas, D. Laxalde, J. Perktold, R. Cimrman, I. Henriksen, E. A. Quintero, C. R. Harris, A. M. Archibald, A. H. Ribeiro, F. Pedregosa, P. van Mulbregt, and SciPy 1.0 Contributors, “SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python,” *Nature Methods*, vol. 17, pp. 261–272, 2020.
- [179] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.

# Apéndice A

## Espacio–tiempo de Kerr en coordenadas cartesianas de Kerr–Schild

El espacio–tiempo de Kerr es la única solución de agujero negro de vacío, estacionaria y asintóticamente plana de las ecuaciones de Einstein. Es seguramente la solución más importante por su extrema utilidad en astrofísica. Además de estacionaria, es axialmente simétrica y está parametrizada por dos cantidades: la masa  $M$  y el *spin*  $a$ . En coordenadas cartesianas de Kerr–Schild, la métrica de Kerr toma la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2Hl_\mu l_\nu, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica plana y

$$H = \frac{Mr^3}{r^4 + a^2z^2}, \quad l_\mu = \left(1, \frac{rx + ay}{r^2 + a^2}, \frac{ry - ax}{r^2 + a^2}, \frac{z}{r}\right). \quad (\text{A.2})$$

La función radial  $r$  está definida implícitamente por

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1. \quad (\text{A.3})$$

Se dice que una métrica en la forma de la ecuación A.1, para una función escalar arbitraria  $H$  y una 1-forma nula arbitraria  $l_\mu$ , está en forma de Kerr–Schild. Para valores de  $M > 0$  y  $0 \leq a/M \leq 1$  hay un agujero negro en el espacio–tiempo. Otros valores de  $a$  se consideran no físicos debido a la existencia de una singularidad desnuda. El vector  $l^\mu$  es nulo tanto con respecto a  $g_{\mu\nu}$  como a  $\eta_{\mu\nu}$ . Además,  $l^\mu$  es geodésico con respecto a ambas métricas, es decir,  $l^\mu \partial_\mu l^\nu = l^\mu \nabla_\mu l^\nu = 0$ .

En estas coordenadas, los coeficientes de la métrica permanecen regulares a través del horizonte de eventos, lo cual es conveniente ya que evita problemas numéricos cerca del mismo. Estas coordenadas, por ser cartesianas, también son regulares sobre el eje de simetría axial, lo cual también es conveniente en la práctica. Además, tienen la propiedad atractiva de que la métrica resulta unimodular, es decir  $\sqrt{-g} \equiv 1$ . Esta propiedad es especialmente útil en el método de emisor a observador del código de transporte, ya que el elemento de volumen para el muestreo de paquetes de fotones es simplemente  $d^4x$ , por lo que basta con tomar una grilla rectangular uniforme para el dato inicial.

La estacionariedad y la simetría axial del espacio-tiempo están asociadas a los vectores de Killing  $K = \partial_t$ , generador de traslaciones temporales, y  $R = -y\partial_x + x\partial_y$ , generador de rotaciones azimutales. Estos vectores proporcionan dos constantes de movimiento geo-désico: la energía  $E = -K_\mu k^\mu$  y el momento angular  $L = R_\mu k^\mu$ , donde  $k^\mu$  es el vector tangente de la geodésica. La métrica misma, como tensor de Killing trivial, proporciona otra constante de movimiento  $m^2 = -g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu$ , es decir, la masa de la partícula. Además, notablemente, existe una cuarta constante de movimiento, la constante de Carter. Esta constante proviene de un tensor de Killing independiente de la métrica y de productos tensoriales de los vectores de Killing, y puede escribirse como

$$C_{\mu\nu} = -s_{(\mu} l_{\nu)} \Delta + r^2 g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.4})$$

donde  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ ,  $l_\mu$  es la 1-forma nula definida antes, y

$$s_\mu = l_\mu + \frac{2a}{\Delta} R_\mu + \frac{2(r^2 + a^2)}{\Delta} K_\mu. \quad (\text{A.5})$$

La constante de Carter resulta entonces

$$C = C_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = -\Delta (l_\mu k^\mu)^2 - 2l_\mu k^\mu [aL - (r^2 + a^2)E] - r^2 m^2. \quad (\text{A.6})$$

## Apéndice B

# Método de emisor a observador en simetría helicoidal

Dado que todas las aplicaciones de esta tesis poseen simetría helicoidal, tal que las cantidades físicas dependen del tiempo  $t$  y del ángulo azimutal  $\varphi$  a lo sumo a través de una fase  $\omega t - \varphi$ , donde  $\omega$  es la frecuencia del sistema, vale la pena examinar cómo se reduce el cálculo de los flujos en este caso para el método de emisor a observador. Estas consideraciones permiten reducir enormemente el costo con respecto a un problema sin simetrías.

En primer lugar, es claro que solo es necesario calcular los flujos a un único ángulo azimutal, digamos  $\varphi = 0$ . Esto es porque, dada la simetría helicoidal, el flujo a otro ángulo azimutal podrá obtenerse simplemente como una traslación temporal del primero. Luego, por simplicidad, en el resto de este apartado supondremos que los detectores están ubicados a  $\varphi_{\text{obs}} = 0$ . Además, antes de proseguir, definimos la fase de observación como  $\phi = (\omega t - \varphi)/2\pi$ , donde  $\varphi$  es el ángulo azimutal de observación. En el detector, la relación entre tiempo y fase se reduce simplemente a  $t = \phi T$ , donde  $T = 2\pi/\omega$  es el período del sistema.

Por otro lado, la simetría helicoidal permite tomar un único tiempo inicial para todos los paquetes de fotones, digamos  $t_0 = 0$ , y deferir el resto de consideraciones temporales al postprocesamiento. Esto funciona de la siguiente manera: los paquetes de fotones lanzados a  $t_0 = 0$  arriban a los detectores a tiempos distintos porque siguen distintas trayectorias; sin embargo, portan la información completa requerida para el cálculo de los flujos a cualquier tiempo (provisto, claro, un muestreo razonable de la región de emisión a  $t_0 = 0$ ). Si queremos calcular el flujo a través de un detector a un ángulo polar  $\xi_{\text{obs}}$ , recolectamos los paquetes de fotones que, luego de la propagación, yazcan en una franja de la esfera celeste dada por  $|\xi - \xi_{\text{obs}}| \leq \Delta\xi/2$  y  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , es decir, con aproximadamente el mismo ángulo polar que el detector, pero a cualquier ángulo azimutal. El ángulo sólido que ocupa esta franja es  $\Delta\Omega \approx 2\pi \sin \xi \Delta\xi$ . Cada paquete dentro de la franja anular corresponde a una contribución al flujo en el detector a un tiempo distinto, según su ángulo y tiempo de llegada a la esfera celeste. Para ver cuál es esa contribución, supongamos que un paquete llega a la franja anular a un tiempo final  $t_f$  y a un azimut final  $\varphi_f$ . Debido a la simetría helicoidal, se corresponde con otro paquete, emitido a un tiempo inicial posiblemente

distinto, que arriba al detector con la siguiente fase de observación:

$$\phi = \frac{t_f}{T} - \frac{\varphi_f}{2\pi}. \quad (\text{B.1})$$

Luego, el flujo monocromático en el detector se puede calcular como

$$F_\nu = \frac{1}{2\pi D^2 \sin \xi \Delta \xi T \Delta \phi \Delta \nu} \sum_i (h\nu)_i w_i, \quad (\text{B.2})$$

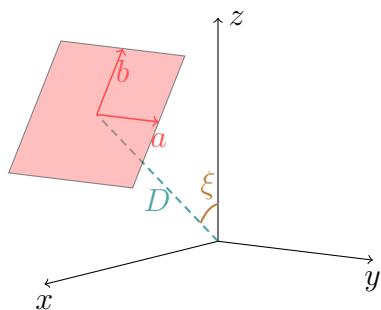
donde hemos utilizado que  $\Delta t = T\Delta\phi$  en el detector, y la suma es sobre todos los paquetes de fotones que se encuentran en la franja anular y dentro de los correspondientes rangos de fase y frecuencia.

## Apéndice C

# Aproximación de plano imagen

Para puntos de observación distantes en espacio–tiempos asintóticamente planos, se puede realizar la aproximación de que los rayos de luz arriban esencialmente paralelos. En este caso, se puede calcular el flujo de otra manera respecto de lo explicado en la Sección 2.2.3, recurriendo a lo que se llama comúnmente el plano imagen. Este es el enfoque con el que originalmente desarrollamos el esquema de observador a emisor del código, y es el que está descrito en la Ref. [83]. Además, es el enfoque que adoptan la mayoría de los códigos de trazado de rayos, especialmente aquellos con cuyos resultados comparamos para realizar los tests astrofísicos descritos más adelante. El enfoque de la cámara estenopeica, más riguroso, no depende de la condición de planitud asintótica, por lo que permite puntos de observación arbitrarios (no necesariamente lejanos), y en estado de movimiento arbitrario (no necesariamente estáticos). Si bien la aproximación del plano imagen es razonablemente buena en la práctica para la mayoría de aplicaciones astrofísicas, no necesariamente es menos computacionalmente demandante que la descripción rigurosa de la cámara estenopeica, ya que la cantidad de condiciones iniciales al fin y al cabo es la misma. Cabe destacar que la validez de la aproximación de plano imagen es delicada en algunos casos especiales, sin importar la distancia, como vistas de canto de objetos delgados como discos de acreción. No obstante, puesto que es el enfoque que utilizamos para comparar con resultados previos de la literatura, describimos aquí su implementación, que también se encuentra disponible en la versión pública del código.

Tomemos un sistema de coordenadas cartesianas  $(t, x, y, z)$  en que el punto de observación se encuentra sobre el plano  $x - z$  a una distancia  $D$  del origen, y la inclinación respecto



**Figura C.1:** El plano imagen con coordenadas rectangulares  $(a, b)$ .  $\xi$  es la inclinación del observador y  $D$  es su distancia.

al eje  $z$  es  $\xi$  (ver Fig. C.1). En el marco estático,  $u^a = (\partial_t)^a$ , tenemos que  $u^a n_a = 1$ , donde  $n^a$  es el vector unitario en la dirección de propagación de un fotón. Además, dado que el punto de observación es lejano, la imagen de la fuente emisora ocupa un pequeño sector esférico centrado alrededor de cierta dirección. Si tomamos  $\bar{n}^a$  como esa dirección, tenemos que  $\bar{n}^a n_a \approx 1$  dentro de la imagen de la fuente. Finalmente, dado que los rayos son aproximadamente paralelos, podemos aproximar el flujo como

$$F_\nu = \frac{1}{D^2} \int_{\mathcal{S}} I_\nu da db, \quad (\text{C.1})$$

donde  $\mathcal{S}$  es el plano imagen y  $(a, b)$  son coordenadas rectangulares sobre  $\mathcal{S}$ . Estas coordenadas están relacionadas con las coordenadas cartesianas a través de

$$x = -b \cos \xi + D \sin \xi, \quad (\text{C.2})$$

$$y = a, \quad (\text{C.3})$$

$$z = b \sin \xi + D \cos \xi. \quad (\text{C.4})$$

Para calcular esta integral, la aproximamos numéricamente como una suma de Riemann a partir de una grilla rectangular sobre el plano imagen. Luego, cada punto de la grilla se toma como la posición inicial de una geodésica, mientras que el momento espacial inicial es normal al plano imagen, y la componente temporal del momento se fija de modo que el cuadrivector resultante sea nulo. La intensidad específica correspondiente a cada rayo se calcula de la misma manera que en el caso de la cámara estenopeica.

## Apéndice D

# Procedimientos para ajustar las observaciones de rayos X de MSPs

Para hallar el conjunto de parámetros de nuestro modelo que mejor ajusta los datos observacionales de los MSPs, idealmente, se debería comparar el espectro resuelto en fase con los datos observacionales. Sin embargo, dado que estos datos no son fácilmente accesibles ni manipulables para nosotros, y que nuestro objetivo principal es reproducir las curvas de luz, realizamos un procedimiento simplificado, haciendo un tratamiento separado de los espectros y las curvas de luz.

En la primera etapa de nuestro trabajo, con el cuerpo negro anisotrópico, estimamos inicialmente el parámetro  $\kappa\bar{\gamma}$  para aproximar la forma del espectro promediado en fase en la ventana de energía relevante para cada púlsar, y luego ajustamos los parámetros restantes. Esto se justifica porque, esencialmente, el parámetro que determina la distribución espectral es  $\kappa\bar{\gamma}$ , pues controla directamente la temperatura efectiva, mientras que el resto de parámetros sólo afectan el espectro débilmente. Luego, obtenemos una muestra discreta en  $(\mathcal{C}, \chi, \xi)$ , para la cual podemos calcular sus curvas de luz dado un índice de anisotropía  $b$ .

Para encontrar los mejores ajustes de las curvas de luz, comparamos las curvas normalizadas por sus valores máximos de flujo. Es decir, comparamos  $F/F_{\max}$  y  $\bar{F}/\bar{F}_{\max}$ , siendo  $F$  y  $\bar{F}$  los flujos predicho y observado, respectivamente. Además, incorporamos un posible desfasaje  $\Delta\phi$  entre ambas curvas, así como un cambio de escala dado por un factor  $\lambda = F_{\max}/\bar{F}_{\max}$ . Así, lo que realmente comparamos es  $f(\phi; \lambda, \Delta\phi, b) := (\lambda F/F_{\max})(\phi + \Delta\phi; b)$  contra  $\bar{f}(\phi) := (\bar{F}/\bar{F}_{\max})(\phi)$  para los parámetros  $\{\lambda, \phi, b\}$ .

El desempeño en esta comparación lo capturamos mediante el factor *chi cuadrado reducido*,

$$\chi_r^2 := \chi^2/\varpi = \frac{1}{\varpi} \sum_{i=1}^n \frac{(f(\phi_i; \lambda, \Delta\phi, b) - \bar{f}(\phi_i))^2}{\varepsilon_i^2} \quad (\text{D.1})$$

donde la suma se extiende sobre los  $n$  intervalos de fase en el conjunto de datos observacionales,  $\varpi = n - k$  es el número de grados de libertad, con  $k = \#\{\mathcal{C}, \chi, \xi, b, \kappa\bar{\gamma}, \Delta\phi, \lambda\} = 7$  siendo el número de parámetros del modelo, y con  $\varepsilon_i$  siendo los errores observacionales para cada intervalo. Para la optimización, utilizamos un algoritmo L-BFGS-B de las librerías de optimización de SciPy en Python [178].

Luego, en la segunda etapa de nuestro trabajo, con el modelo de atmósfera de Hi-

drógeno, modificamos también el procedimiento de ajuste para incorporar información del espectro directamente. En vez de fijar inicialmente el parámetro  $\kappa\bar{\gamma}$  para obtener una forma espectral adecuada, y luego minimizar sobre los datos observacionales de la curva de luz, incluimos en la minimización tanto los datos de la curva de luz como del espectro promediado en fase. Para esto, tomamos una suerte de factor chi cuadrado total,  $\chi_{\text{tot}}^2 = \chi_{\text{LC}}^2 + \alpha\chi_{\text{SP}}^2$ , donde  $\chi_{\text{LC}}^2$  y  $\chi_{\text{SP}}^2$  son las componentes de la curva de luz y el espectro, respectivamente, y  $\alpha$  es un peso relativo entre ambas. Esto es solo una heurística para encontrar ajustes razonables, pero vale aclarar que se pierde la interpretación cuantitativa usual del factor chi cuadrado, ya que combina valores y errores de observables de distinta naturaleza, no habiendo una manera obvia de pesar uno respecto del otro. De todos modos, este procedimiento conduce a ajustes visiblemente buenos de curvas de luz y espectros, aún si no contamos con interpretación cuantitativa usual de la bondad de los mismos. Además, como los errores asociados a los datos de espectros promediados en fase no están informados en las publicaciones de las cuales los trajimos, para el cálculo de  $\chi_{\text{SP}}^2$  tomamos un error puesto a mano. En la misma línea, esto nubla aún más la interpretación de  $\chi_{\text{tot}}^2$ , pero nuevamente, solo buscamos una heurística para encontrar buenos ajustes, no pretendemos una medida cuantitativa de la bondad de los mismos.

## Apéndice E

# Distancia del punto de observación en el modelo RAR

La naturaleza multiescala del modelo RAR, desde la escala subparsec del núcleo galáctico hasta las decenas de kiloparsecs del halo, plantea un desafío para el cálculo del transporte radiativo. Esto es así porque, en principio, demanda integrar la ecuación de transporte a lo largo de enormes distancias, considerando al mismo tiempo variaciones espaciales en escalas pequeñas, lo que fácilmente conduce a inestabilidades numéricas. No obstante, si la influencia que ejerce el halo de materia oscura es insignificante más allá de cierta distancia, este problema puede mitigarse tomando puntos de observación relativamente cercanos a la fuente y corrigiendo la normalización de los flujos y escalas angulares con un decaimiento con el cuadrado inverso de la distancia como en espacio–tiempo plano para distancias mayores que la del punto de observación.

En este apéndice, justificamos la elección de  $r = 1 \text{ pc}$  como punto de observación realizada en el Capítulo 4, fundamentando que la distribución de materia oscura ejerce una influencia insignificante sobre la radiación a distancias mayores que esa. Para ello, consideramos los ángulos de deflexión en el límite newtoniano, que puede aplicarse a radios mayores que  $1 \text{ pc}$ .

Una métrica estática en el límite newtoniano tiene la forma

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)d\gamma^2, \quad (\text{E.1})$$

donde  $\phi$  se identifica como el potencial gravitacional newtoniano y  $d\gamma^2$  es la métrica plana tridimensional. La métrica anterior puede descomponerse como un fondo plano (cuadridimensional) más una pequeña perturbación newtoniana. De igual manera, las geodésicas del espacio–tiempo se descomponen en

$$x^\mu(\lambda) = x^{(0)\mu}(\lambda) + x^{(1)\mu}(\lambda), \quad (\text{E.2})$$

donde el primer término del lado derecho es la trayectoria de fondo y el segundo término es una pequeña desviación. Además, definimos

$$k^\mu = \frac{dx^{(0)\mu}}{d\lambda} \quad \text{y} \quad l^\mu = \frac{dx^{(1)\mu}}{d\lambda}. \quad (\text{E.3})$$

$m$ (keV)	Norma del vector de desviación
48	$6,2 \times 10^{-12}$
155	$2.5 \times 10^{-13}$
200	$1,1 \times 10^{-13}$
300	$2 \times 10^{-14}$

**Tabla E.1:** Norma del vector de desviación para una geodésica entrante en la aproximación newtoniana entre  $r = 8 \text{ kpc}$  y  $r = 1 \text{ pc}$  para las soluciones RAR que consideramos en este trabajo.

Expandiendo perturbativamente las ecuaciones geodésicas en términos de esta descomposición [179], se puede ver que la trayectoria de fondo resulta geodésica del espacio–tiempo plano (una línea recta). Como estamos interesados en geodésicas nulas,  $k^\mu$  debe satisfacer  $(k^t)^2 = \mathbf{k}^2 =: k^2$ , donde denotamos vectores espaciales tridimensionales en negrita. Sin pérdida de generalidad, suponemos  $k = 1$ . Además, se obtiene la siguiente relación de primer orden para el vector de desviación:

$$\frac{d\mathbf{l}}{d\lambda} = -2[\nabla\phi - (\nabla\phi \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}], \quad (\text{E.4})$$

donde se entiende que las cantidades están evaluadas sobre la trayectoria de fondo.

Para aplicar esto al espacio–tiempo del modelo RAR, como paso previo se debe poner la métrica de la Ec. (4.2) en la forma del límite newtoniano de la Ec. (E.1). Para eso, a radios mayores que 1 pc podemos aproximar  $e^\nu \approx 1 + \nu$ , ya que  $\nu$  es pequeño, identificando  $\phi = \nu/2$  como el potencial gravitacional. Finalmente, la métrica se convierte a la forma del límite newtoniano escalando el radio como

$$\tilde{r} = r \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^r \frac{\nu}{r'} dr'\right). \quad (\text{E.5})$$

El cociente  $\tilde{r}/r$  permanece por debajo de 3 % para  $r > 1 \text{ pc}$ .

Para evaluar en qué medida la distribución de materia oscura influye en la radiación a grandes distancias, integramos la Ec. (E.4) para cada solución RAR considerada en el Capítulo 4 a lo largo de una geodésica desde un punto en  $r = 8 \text{ kpc}$  hasta la superficie  $r = 1 \text{ pc}$ . El momento espacial inicial de la geodésica no es radial, sino que lo tomamos formando un ángulo  $\delta = 50r_{\text{sat}}/(8 \text{ kpc})$  con la dirección radial (del orden del radio angular aparente de la imagen de la fuente a 8 kpc). Como es esperable, las desviaciones finales de las geodésicas son insignificantes en todos los escenarios (en la Tabla E.1 mostramos los valores). Esto significa que la gravedad de la distribución de materia oscura tiene un efecto insignificante sobre la radiación de la fuente entre  $r = 1 \text{ pc}$  y  $r = 8 \text{ kpc}$ , por lo que cualquier efecto sobre la misma debe ocurrir dentro de  $r \leq 1 \text{ pc}$ . En conclusión, mostramos que es válido tomar los puntos de observación en 1 pc.