Raskaiden kvarkkiparien tuotto protoni–protoni- ja protoni–antiprotoni-törmäyksissä kvanttiväridynamiikan häiriöteorian alimmassa kertaluvussa

Pro gradu -tutkielma, 28.6.2021

Tekijä:

Teemu Kovanen

Ohjaaja:

Kari J. Eskola

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
FYSIIKAN LAITOS

© 2021 Teemu Kovanen
Julkaisu on tekijänoikeussäännösten alainen. Teosta voi lukea ja tulostaa henkilökohtaista käyttöä varten. Käyttö kaupallisiin tarkoituksiin on kielletty.
This publication is copyrighted. You may download, display and print it for Your own personal use. Commercial use is prohibited.

Tiivistelmä

Tässä opinnäytetyössä on tutkittu kvanttiväridynamiikan häiriöteorian alimman kertaluvun c-, b- ja t-kvarkkiparien tuottoa protoni–protoni- ja protoni–antiprotoni-törmäyksissä. Useita alimman kertaluvun kokonais-, differentioituja ja kinemaattisesti leikattuja vaikutusaloja on laskettu käsitellen lopputilan kvarkkeja massiivisina. Vaikutusalojen herkkyyttä raskaan kvarkin massan, renormalisaatio- ja faktorisaatioskaalojen arvojen vaihteluille on tarkasteltu. Teoreettisten ja vastaavien kokeellisten vaikutusalojen eroavaisuudet on kvantifioitu K-kertoimien avulla. Tuloksista selviää, että K-kertoimet ovat samat alimman kertaluvun vaikutusaloille, joiden tarkasteltu törmäysprosessi, renormalisaatio- ja faktorisaatioskaalat ovat samat.

Abstract

In this master's thesis the theoretical yields of c, b and t quark pairs in proton-proton and proton-antiproton collisions have been studied via the lowest order perturbation theory of quantum chromodynamics. Several lowest order total, differential and kinematically cut cross sections have been calculated while treating the final state quarks massive. Sensitivity of the cross sections to variations of heavy quark mass, renormalization and factorization scales are examined. Differences between the theoretical and corresponding experimental cross sections have been quantified with K factors. The results indicate that K factors of two different lowest order cross sections correspond to each other if the cross sections examine the same collision process and have the same renormalization and factorization scales.

Kiitokset

Sain apua tämän pro gradu-tutkielman työstämiseen ohjaajani lisäksi myös muilta fysiikan laitoksen henkilökunnan jäseniltä. Haluan erityisesti kiittää yliopistonlehtori Sami Räsästä numeerisen ohjelman ja ROOTin ongelmien kanssa auttamisesta. Ilman hänen lukuisia neuvojaan ohjelman työstäminen olisi vaikeutunut huomattavasti. Kiitän myös professori Tuomas Lappia hänen antamistaan kvanttiväridynamiikan teorian ominaisuuksia koskevista selvennyksistä ja väitöskirjatutkija Oskari Saarimäkeä ROOTin käsittelyssä neuvomisesta. Isot kiitokset vielä professori Kari J. Eskolalle mielenkiintoisesta gradun aiheesta ja työn ohjaamisesta.

Sisällysluettelo

1 Johdanto **1**

2 Taustatietoa **2**
2.1 Raskaat kvarkit standardimallissa 2
2.2 Keskeisiä määritelmiä, yhtälöitä ja kinematiikkaa 8
2.2.1 Nelivektoreista 8
2.2.2 Kinematiikkaa 10
2.2.3 Vaikutusaloista 13
2.2.4 Diracin γ-matriiseista ja hiukkasspinoreista 16
2.3 Kvanttiväridynamiikan häiriöteoria ja partonimalli 18

3 Vaikutusalojen lausekkeet **27**
3.1 Aliprosessi $q + \overline{q} \to Q + \overline{Q}$ 28
3.2 Aliprosessi $g + g \to Q + \overline{Q}$ 37
3.3 Poikittaisliikemäärän ja rapiditeettien suhteen differentioitu vaikutusala 70

4 Numeerinen ohjelma **77**
4.1 Vaikutusalafunktiot 77
4.2 Ohjelman tuottamat tulokset 78

5 Tulokset **80**
5.1 Käytetyt parametrit ja partonijakaumafunktiot 80
5.1.1 Massa- ja skaalavalinnat 80
5.1.2 Alimman kertaluvun partonijakaumafunktiot 82
5.2 c-kvarkkiparien tuotto 82
5.3 b-kvarkkiparien tuotto 103
5.4 t-kvarkkiparien tuotto 141

6 Yhteenveto ja johtopäätökset **164**

Lähteet **168**

A Invarianttien amplitudien neliöiden yhtäpitävyys

B makefile

C Int.cc

D Plot.C

E Muuttujanvaihdot

F NLO-partonijakaumafunktiot

1 Johdanto

Kvanttiväridynamiikka on hiukkasfysiikan standardimallin mittakenttäteoria, joka kuvaa vahvaa vuorovaikutusta kvarkkien, antikvarkkien ja gluonien välillä. Kvanttiväridynamiikan soveltamiseen käytetään pääasiassa kvanttiväridynamiikan häiriöteoriaa. Häiriöteorian avulla on mahdollista laskea muun muassa eri hiukkastörmäysprosessien vaikutusaloja, jotka mittaavat hiukkastuottoa ja reaktiotodennäköisyyttä. [1]

Raskaiden kvarkkiparien ($c\bar{c}$, $b\bar{b}$, $t\bar{t}$) tuotto hadroni- ja ydintörmäyksissä on yksi tärkeistä hiukkasfysiikan tutkimusalueista. Näiden prosessien teoreettiset vaikutusalat ovat laskettavissa kvanttiväridynamiikan häiriöteorialla, koska sen soveltamisen edellytys, vahvan kytkentävakion pienuus, toteutuu hyvin kvarkkien suurten massojen ansiosta [1]. Vertaamalla teoreettisia ja kokeellisia tuloksia keskenään saadaan tietoa kvanttiväridynamiikan toimivuudesta sekä tarkennettua sitä. Raskaiden kvarkkiparien tuottoa käsittelevät vaikutusalat antavat tietoa esimerkiksi vahvan kytkentävakion [2] ja partonijakaumafunktioiden arvoista [3, 4]. Lisäksi monet muut hiukkasfysiikan tutkimusalueet, kuten kvarkkigluoniplasma, Higgsin fysiikka ja standardimallin ulkopuoliset teoriat, hyötyvät c-, b- ja t-kvarkkiparien tuottojen tutkimuksesta [5–8].

Tässä pro gradu-tutkielmassa on tarkasteltu kvanttiväridynamiikan häiriöteorian alimman kertaluvun raskaiden kvarkkiparien tuottoa protoni–protoni- ja protoni–antiprotoni-törmäyksissä. Olen laskenut ja analysoinut useita alimman kertaluvun vaikutusaloja, sisältäen kokonaisvaikutusaloja sekä eri kinemaattisten muuttujien suhteen differentioituja ja leikattuja vaikutusaloja. Vaikutusalojen tarkastelemiseksi laskin alimman kertaluvun kvarkki- ja gluonitason vaikutusalat analyyttisesti (lopputilakvarkkien massoilla $m_Q > 0$) ja tein numeerisen ohjelman, joka laskee kokonaisprosessien vaikutusalat kollineaarisen faktorisaatioteoreeman avulla. Olen tarkastellut, miten eri parametrien, kuten raskaan kvarkin massan, vaihtelut vaikuttavat vaikutusaloihin. Huomasin työskentelyn aikana, että renormalisaatio- ja faktorisaatioskaalavalinnat vaikuttavat huomattavasti alimman kertaluvun vaikutusaloihin, joten olen siksi keskittynyt erityisesti niihin analyysissäni. Kvantifioin teoreettisten ja vastaavien kokeellisten tulosten eroavaisuudet K-kertoimien avulla ja vertasin niitä keskenään.

Tämä tutkielma on jaettu kuuteen lukuun. Luku 2 antaa keskeiset pohjatiedot raskaiden kvarkkiparien tuottoon liittyvästä tutkimuksesta ja teoriasta. Luvussa 3

johdan Feynmanin säännöistä aliprosessien vaikutusalat sekä muodostan lausekkeen poikittaisliikemäärän ja rapiditeettien suhteen differentioidulle kokonaisprosessin vaikutusalalle. Luku 4 esittelee lyhyesti vaikutusalojen laskemiseksi tekemäni numeerisen ohjelman. Tulokset ja niiden analyysi käydään läpi luvussa 5 ja yhteenveto ja lopulliset johtopäätökset ovat luvussa 6. Lisäksi tutkielman osana on kuusi erillistä liitettä.

2 Taustatietoa

Tässä osiossa esitän pohjustuksena työssä tarvitsemani perustiedot hiukkasfysiikan teoriasta sekä matemaattiset metodit. Luvussa 2.1 esittelen raskaiden kvarkkien ominaisuuksia ja merkitystä hiukkasfysiikalle. Luku 2.2 käsittelee yleisesti hiukkasfysiikan kvantitatiivista kuvaamista ja laskumetodeja. Kvanttiväridynamiikan häiriöteoria, hadronitörmäysten käsittely ja laskuissa tarvittavat Feynmanin säännöt on esitelty lyhyesti luvussa 2.3.

Käytän tässä luvussa, kuten jatkossakin, luonnollisia yksiköitä eli valonnopeudelle sovitaan pätevän $c = 299\ 792\ 458$ m/s $= 1$ [9, 10]. Tällöin valonnopeus tulee olemaan useissa yhtälöissä implisiittisenä ja esimerkiksi massan ja liikemäärän yksiköt ilmoitetaan eri muodossa, jotka voivat poiketa totutusta: $[m] = \mathrm{eV}/c^2 = \mathrm{eV}$ ja $[|\overline{p}|] = \mathrm{eV}/c = \mathrm{eV}$, missä eV on energian yksikkö elektronivoltti.

2.1 Raskaat kvarkit standardimallissa

Kaikki kappaleisiin kohdistuvat vuorovaikutukset ovat selitettävissä neljän, fundamentaalisen, perusvuorovaikutuksen avulla. Nämä perusvuorovaikutukset ovat vahva, sähkömagneettinen ja heikko vuorovaikutus sekä gravitaatio. Hiukkasfysiikan tutkimuksen tärkeimpiä tavoitteita on kehittää teoria, joka kuvaa näitä kaikkia perusvuorovaikutuksia ja materiaa, samanaikaisesti. [11, 12]

Hiukkasfysiikan standardimalli on mittakenttäteoria, joka kuvaa vahvaa, sähkömagneettista ja heikkoa vuorovaikutusta (kuva 1) [13]. Sitä on kehitetty 1900-luvun puolivälistä lähtien, ja se on nykyään todettu kauttaaltaan pitäväksi lukuun ottamatta paria ristiriitaa, kuten esimerkiksi neutriinojen nollasta poikkeavat massat. Lisäksi standardimallin avulla ei ole selitetty esimerkiksi pimeää ainetta, materia-antimateria-asymmetriaa tai gravitaatiota, ja useita sen parametreja on vielä selvittämättä. [11,

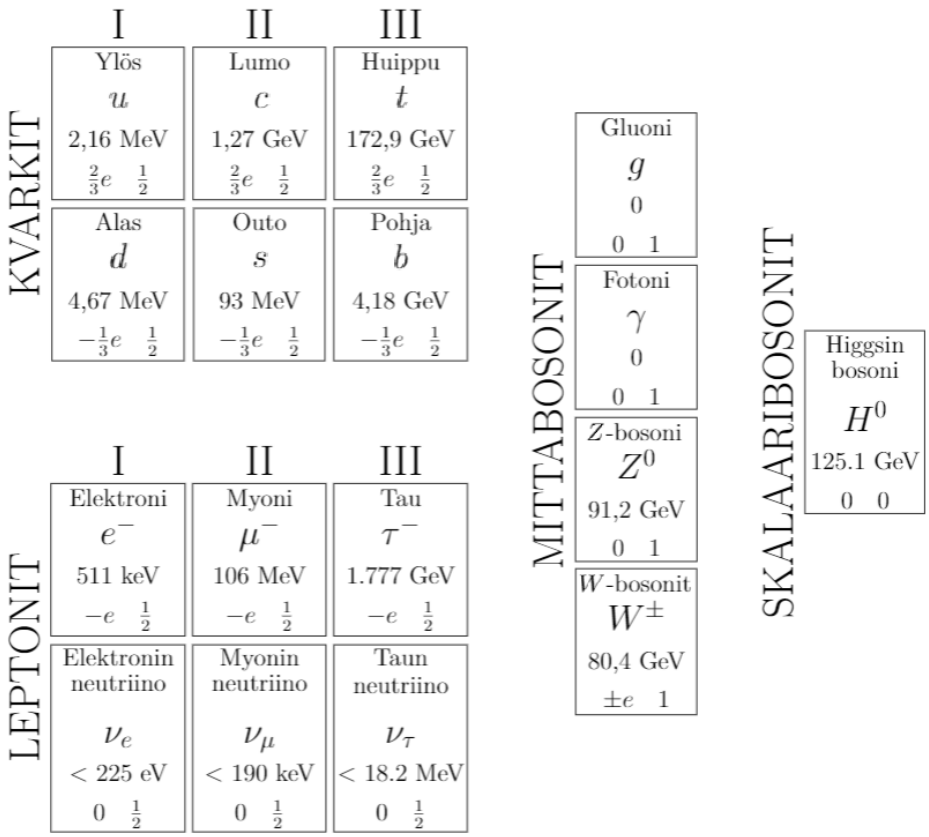
12]

Kvarkit (ja antikvarkit) ja välittäjähiukkanen gluoni ovat ainoat standardimallin alkeishiukkaset, jotka kokevat vahvan vuorovaikutuksen. Standardimallin kvarkki-gluoni-vuorovaikutuksia kuvaavaa mittakenttäteoriaa nimitetään kvanttiväridynamiikaksi (luku 2.3). Jatkossa kvarkilla viitataan kvarkkiin tai vastaavaan antikvarkkiin, ellei toisin ole mainittu. Tätä nimityskonventiota käytetään vastaavasti leptoneille ja neutriinoille. [1]

Kvarkit ovat massallisia, varattuja, spin-$\frac{1}{2}$-hiukkasia [20]. Spin on hiukkasen luontainen pyörimisliikemäärä (sisäinen ominaisuus, toisin kuin mahdollinen ratapyörimismäärä) [22]. Spinin suuruutta kuvataan spin-kvanttiluvulla s [22], joka on nyt siis $\frac{1}{2}$ kvarkeille. Spinin kvanttimekaanisista ominaisuuksista johtuen sen z-komponentti (tai x- tai y-komponentti) voi saada mitattessa vain kaksi erilaista arvoa [22]. Nimitetään näitä tiloja spin-ylös- ja spin-alas-tiloiksi (z-akselin/hiukkassuihkun suunnan kanssa samansuuntainen ja vastakkaissuuntainen komponentti) [23]. Massan, sähköisen varauksen ja spinin lisäksi kvarkeilla on vain niille (ja gluoneille) ominainen ominaisuus, värivaraus. Mahdollisia kvarkkien väritiloja on kuusi: punainen, sininen ja vihreä kvarkeille sekä antipunainen, antisininen ja antivihreä antikvarkeille. Kokonaisvärivaraus säilyy aina prosessissa [1]. Vaikka kvarkin väri ei ole mitattavissa oleva ominaisuus, niin se on kuitenkin todettu kokeellisesti todelliseksi ilmiöksi [1] ja tämän kvanttiluvun olemassaolo selittää muun muassa kevyimpien hadronien havaitun tilaspektrin [24].

Gluoni on massaton spin-1-hiukkanen [1]. Se on vahvan vuorovaikutuksen mittabosoni eli se välittää vahvaa vuorovaikutusta kvanttiväridynamiikan teoriassa [20]. Fotonin tavoin vapaalla (massakuorellaan olevalla) gluonilla on kaksi fysikaalista (poikittaista) polarisaatiotilaa [25, 26]. Lisäksi gluonilla on kahdeksan mahdollista väritilaa (mitkä eivät siis ole samoja kuin kvarkkien väritilat). Näiden väritilojen avulla gluoni välittää värivarausta kvarkkien ja muiden gluonien välillä sekä säilyttää kokonaisvärivarauksen prosessissa [1].

Hadroni on kvarkeista (ja gluoneista) muodostunut komposiittihiukkanen. Kvarkista ja antikvarkista muodostunutta hadronia kutsutaan mesoniksi ja kolmesta (anti)kvarkista muodostunutta hadronia (anti)baryoniksi. Myös useammasta kvarkista koostuvat tilat (eksoottiset mesonit/baryonit) ovat mahdollisia, mutta ne ovat



Kuva 1. Hiukkasfysiikan standardimallin alkeishiukkaset (ei sisäistä rakennetta). Hiukkaset jaotellaan kvarkkeihin, leptoneihin, mittabosoneihin sekä skalaaribosoniin. Kvarkit ja leptonit (fermionit) voidaan jakaa kolmeen kvarkkigeneraatioon ja kolmeen leptonigeneraatioon, jotka yhdessä muodostavat kolme materian generaatiota (I, II, III). [12] Alkeishiukkasen massa (eV = $1{,}783 \cdot 10^{-36}$ kg [9]), sähkövaraus ($e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C [9]) ja spin-kvanttiluku on ilmoitettuna symbolin/nimen alapuolella [14–20]. Kvarkit kokevat kaikki kolme standardimallin vuorovaikutusta, varatut leptonit sähkömagneettisen ja heikon, ja neutriinot pelkästään heikon vuorovaikutuksen [20]. Vuorovaikutuksia välittävät mittabosonit gluoni (vahva), fotoni (sähkömagneettinen) sekä Z- ja W-bosonit (heikko) [20]. Standardimallin ainoa skalaaribosoni on Higgsin bosoni, jonka ominaisuudet vaikuttavat useisiin standardimallin (ja sen ulkopuolisten mallien) mekanismeihin [21]. Lisäksi alkeishiukkasiin kuuluvat myös kvarkkien antihiukkaset $\overline{u}$, $\overline{d}$, $\overline{s}$, $\overline{c}$, $\overline{b}$ ja $\overline{t}$, sekä leptonien antihiukkaset e^+, μ^+, τ^+, $\overline{\nu}_e$, $\overline{\nu}_\mu$ ja $\overline{\nu}_\tau$ [20]. Hiukkasen ja sen antihiukkasen massa ja spin ovat samat, mutta sähkövaraukset ovat vastakkaismerkkiset [20].

huomattavasti harvinaisempia. Hadroni muodostuu aina siten, että sen sähkövaraus on alkeisvarauksen e monikerta ja että sen kokonaisväritila on muuttumaton kvanttiväridynamiikan SU(3)-värirotaatioissa (värisinglettitila, joskus sanotaan, että hadronin kokonaisvärivaraus on nolla). [27]

Hadronisoitumiseksi kutsutaan prosessia, jossa kvarkki muodostaa hadronin muiden kvarkkien (ja gluonien) kanssa [1]. Tätä muodostumisprosessia ei nykyäänkään ymmärretä hyvin, ja useita hadronisaatiomalleja on kehitetty sen mallintamiseksi [28]. Hiukkastörmäysprosessissa tuotettu kvarkki voi esimerkiksi emittoida gluonin, joka sitten muodostaa kvarkki-antikvarkki-parin, ja toinen näistä parinmuodostuksen seurauksen syntyneistä kvarkeista muodostaa mesonin alkuperäisen kvarkin kanssa [29]. Kvarkki voi myös muodostaa hadronin muiden törmäysprosessissa syntyneiden hiukkasten tai niiden jatkotuotteiden kanssa [30, 31]. Hadronisaatiolle on siis törmäysprosessista riippuvia ja riippumattomia malleja. Kun ollaan kiinnostuneita siitä, millä todennäköisyydellä tietty hadroni syntyy yhdestä kvarkista tai gluonista, hadronisaatiota voidaan kvantitatiivisesti kuvata fragmentaatiofunktioilla. Nämä ovat oleellisesti todennäköisyystiheysjakaumia, jotka ovat funktioita hadronin ja kvarkin liikemäärien tai energioiden suhteista [32, 33].

Hiukkastörmäyksissä tuotettuja kvarkkeja ja gluoneja ei voida koskaan havaita suoraan erittäin nopeasti tapahtuvien hadronisaatio- ja hajoamisprosessien vuoksi (ns. värivankeus) [1, 27, 34]. Keskimääräinen kvarkin hadronisoitumiseen kuluva aika on noin 10^{-23} s [34]. Koska t-kvarkin keskimääräinen hajoamisaika on noin 10^{-25} s, niin se on ainoa kvarkki, joka ei hadronisoidu [34]. Protonia (uud) (ja antiprotonia, $\bar{u}\bar{u}\bar{d}$) lukuun ottamatta kaikki hadronit ovat epästabiileja, ja lisäksi huomattava osa hadronien (tai t-kvarkin) hajoamisten lopputuotteista ovat myöskin epästabiileja [34]. Tästä johtuen vapaan kvarkin syntyminen aiheuttaa hajoamisketjuja, joissa tapahtuu useita hadronisaatioita ja hajoamisreaktioita. Hajoamisketjuja on useita mahdollisia eri kvarkeille [35, 36], ja tutkimalla näistä syntyneitä hiukkasia on mahdollista havaita törmäysprosesseissa syntyneet kvarkit [1]. Kvarkin hadronisoitumisesta syntyvää kollimoitunutta hadronisuihkua nimitetään jetiksi [1].

Kolme raskainta standardimallin kvarkkia ovat c (*charm*, lumo), b (*bottom, beauty*, pohja, kaunis) ja t (*top, truth*, huippu, tosi) [14]. Niiden olemassaolot ennustettiin 60- ja 70-luvuilla [37], ja jokainen niistä on tämän jälkeen löydetty kokeellisesti [20]. Raskailla kvarkeilla on tärkeä asema hiukkasfysiikan tutkimuksessa niiden erityisten

ominaisuuksien vuoksi.

Massat c- ja b-kvarkeille ovat $m_c = 1{,}27$ GeV ja $m_b = 4{,}18$ GeV ja sähkövaraukset $Q_c = \frac{2}{3}e$ ja $Q_b = -\frac{1}{3}e$ [14]. c-kvarkki löydettiin marraskuussa 1974, kun SLACin ja BNLn tutkimusryhmät (*Stanford Linear Accelerator Center, Brookhaven National Laboratory*) löysivät erikseen ja samanaikaisesti ψ-mesonin (tunnetaan myös J-mesonina), joka koostuu c-kvarkista ja $\bar{c}$-antikvarkista. Tätä löytöä ja siitä seurannutta läpimurtojen sarjaa nimitetään joskus marraskuun vallankumoukseksi (*November Revolution*) [38]. Vastaavasti b-kvarkki havaittiin kokeellisesti vuonna 1977 Fermilabin kiihdytinlaboratoriossa (*Fermi National Accelerator Laboratory*), kun $b\bar{b}$-mesoni Υ löydettiin [37].

Kvarkkien värivankeudesta johtuen hiukkastörmäyksissä syntyneet vapaat c- ja b-kvarkit hadronisoituvat välittömästi epästabiiileiksi c- ja b-hadroneiksi [34]. Syntyneet c-hadronit tunnistetaan pääasiassa kahdella tavalla: tutkimalla niiden semileptonisista hajoamisista syntyneitä leptoneita tai tutkimalla hadronisista hajoamisista syntyneitä c-hadroneja [39]. Semileptonisessa hajoamisessa hadroni hajoaa yhdeksi leptoniksi, leptonia vastaavaksi neutriinoksi ja ainakin yhdeksi hadroniksi [40] (esim. $D^0 \to K^- e^+ \nu_e$ [41]). Hadronisiksi hajoamisiksi kutsutaan hajoamisia, joissa syntyy hadroneita [34] (esim. $D^*(2007)^0 \to D^0\pi^0$ [41] on puhtaasti hadroninen hajoaminen, lopputuotteina vain hadroneja). b-kvarkkien tunnistamiseen käytetään pääasiassa b-hadronien semileptonisia hajoamiskanavia [5, 7, 42–44]. Parhaimman tunnistusmetodin valintaan vaikuttavat muun muuassa käytetyn laitteiston kyky erotella vuorovaikutuspisteitä (luku 2.3), taustaprosessien vaikutukset mittaukseen sekä tuntemus tarkastellusta prosessista [39, 42]. c- ja b-kvarkkeja tarkastellessa tulee ottaa huomioon, että niitä sisältäviä hadroneja voi syntyä raskaampien hiukkasten hajoamisketjuista (*feed down*), eikä ainoastaan niin sanotusti suoraan törmäysprosessista [45]. Esimerkiksi b-hadroni voi hajota c-hadroniksi [46] ja t-kvarkki hajoaa aina b-kvarkiksi ja W-bosoniksi [6].

Ydintörmäysten c- ja b-kvarkkituottojen vaikutusalat ovat tärkeä mittaamisen kohde useista syistä. Niiden avulla testataan kvanttiväridynamiikan häiriöteorian toimivuutta (luku 2.3) [43] sekä erilaisia hadronisaatio- ja fragmentaatiomalleja [45]. Vaikutusalamittaukset toimivat myös luotaimena kvanttiväridynamiikalle. Esimerkiksi c-kvarkkituoton mittauksia protoni–protoni-törmäyksissä käytetään partonijakaumafunktioiden eli kvarkkien ja gluonien lukumäärätiheysjakaumien tarkentamiseen pienillä partoneiden pitkittäisliikemääräosuuksien x arvoilla (noin 10^{-4},

yhtälö (81)) [47]. Mittaukset voivat auttaa tarkentamaan erityisesti protonin gluonipartonijakaumafunktiota $f_{g/p}$, joka on selvästi hallitseva partonijakaumafunktio pp-törmäyksissä ja jonka suhteellinen virhe pienillä x:n arvoilla on jopa 30 % [3]. c- ja b-kvarkkien vaikutusalat luotaavat myös ytimien törmäyksessä syntynyttä välitilaa [5]. Nämä raskaat kvarkit muodostuvat törmäyksessä aikaisin ja kantavat siksi mukanaan informaatiota systeemin aikaisista vaiheista [5]. Tämä informaatio on erityisen tarpeellista tutkittaessa kvarkkigluoniplasmaa, jota saadaan muodostettua törmäyttäessä raskaita ytimiä (esim. lyijy- tai kultaytimiä) [5, 48]. Lisäksi b-karkkien tarkan tuoton tunteminen on tärkeää tutkittaessa standardimallin ulkopuolisia teorioita (*Beyond Standard Model*), CP-rikkoa sekä harvinaisia hajoamisprosesseja [7].

Raskain kvarkeista, t-kvarkki, löytyi kokeellisesti Fermilabin Tevatron-protoni–antiprotoni-kiihdyttimen avulla vuonna 1995 [20]. Sen massa on $m_t = 172.9$ GeV ja sähkövaraus $Q_t = \frac{2}{3}e$ [14]. Vapaa t-kvarkki hajoaa välittömästi reaktion $t \to W^+b$ ($\bar{t} \to W^-\bar{b}$) mukaisesti, ja prosessi luokitellaan joko leptoniseksi tai hadroniseksi W-bosonin hajoamistavan mukaan ($W^\pm$ voi hajota joko leptoniksi ja vastaavaksi neutriinoksi tai kvarkiksi ja antikvarkiksi) [6]. Siten $t\bar{t}$-tuoton lopputilat jaotellaan täysin hadroniseen kanavaan, leptoni + jetit-kanavaan ja dileptoniseen kanavaan [6]. Kaikkia kolmea käytetään kvarkkiparien tuoton havaitsemiseen ydintörmäyskokeissa [49].

Kuten c- ja b-kvarkkien tapauksessa, ydintörmäysten t-kvarkkituottojen vaikutusalat testaavat ja luotaavat kvanttiväridynamiikkaa, erityisesti häiriöteoriaa [49]. Protonin gluonipartonijakaumafunktio $f_{g/p}$ on vähemmän tutkittu korkeilla pitkittäisliikemääräosuuksien x arvoilla, ja t-kvarkin suuri massa antaa keinon päästä tähän alueeseen (yhtälö (81)) [4]. Vaikutusalamittaukset parantavat t-kvarkin massan tarkkuutta [2] ja auttavat vastaavan napamassan selvittämisessä [4]. Häiriöteoriassa massan m_t tarkka tuntemus vaikuttaa esimerkiksi useiden prosessien korkeamman kertaluvun korjauksiin [50]. t-kvarkki on tärkeä myös monille standardimallin ulkopuolisille malleille, ja $t\bar{t}$-tuotto luotaa näiden ennustettuja prosesseja [8]. Lisäksi t-kvarkkituoton ominaisuudet vaikuttavat vahvasti Higgsin fysiikkaan (Higgsin bosoni) ja sähköheikkoon teoriaan [6].

Kuten edellä korostettiinkin, raskaiden kvarkkien massojen arvot vaikuttavat suuresti hiukkasfysiikan teoriaan ja ilmiöihin. Nykyään näiden massojen suhteelliset

virheet saadaan määritettyä melko pieniksi (0,23 - 1,57 % yllä mainituille Particle Data Groupin ilmoittamille arvoille). Kuitenkin, kvarkin massan arvoa määrittäessä joudutaan aina tekemään teoriaan liittyviä, osittain mielivaltaisia, valintoja, jotka vaikuttavat lopputulokseen. Esimerkiksi kvarkin massan määrityksessä käytetty teoreettinen viitekehys voi olla riippuvainen käytetystä skeemasta (*scheme*, esim. MS-, $\overline{\text{MS}}$- ja 1S-skeemat) ja massaskaalavalinnasta. Näiden lisäksi on olemassa vielä erillinen napamassan käsite (*pole mass*), joka vastaa hiukkaspropagaattorin napaa. Esimerkiksi elektronin massan on määritelty olevan sen napamassa, mutta samaa yksikäsitteistä määrittelyä ei voida tehdä kvarkeille kvanttiväridynamiikan infrapunaefektien (*non-perturbative infrared effects in QCD*) ja kvarkkien värivankeuden vuoksi. Siispä raskaan kvarkin massan arvo on melko epäyksikäsitteinen, ja hyvä valinta laskussa tai mittauksessa käytettäväksi massan määritelmäksi riippuu tilanteesta. Lisää massavalinnoista ja niiden vaikutuksista teoreettisiin vaikutusaloihin on luvussa 5. [51, 52]

2.2 Keskeisiä määritelmiä, yhtälöitä ja kinematiikkaa

Tulen käyttämään osassa yhtälöistä Einsteinin notaatiota. Tämä tarkoittaa, että summan merkki $\sum$ jätetään implisiittiseksi ja summa tunnistetaan kahdesta samasta indeksistä (esim. $\sum_\mu p^\mu p_\mu = p^\mu p_\mu$) [10]. Käytän Einsteinin notaatiota nelivektori-, γ- ja värisummissa, mutten spin- ja polarisaatiosummissa.

2.2.1 Nelivektoreista

Erilaiset nelivektorit ovat tärkeitä matemaattisen mallintamisen työkaluja hiukkasfysiikassa. Esimerkiksi

$$a = \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

on (kontravariantti) nelivektori, jonka komponentit ovat a^0, a^1, a^2 ja a^3. Vastaava kovariantti nelivektori on

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3, \end{pmatrix} \tag{2}$$

missä $a_0 = a^0$, $a_1 = -a^1$, $a_2 = -a^2$ ja $a_3 = -a^3$. Nelivektoreiden komponenttien indeksejä nimitetään Lorentzin indekseiksi. [10]

Olkoon b nelivektori, jolla on komponentit b^0, b^1, b^2 ja b^3 vastaavasti kuin edellä. Nelivektoreiden a ja b välinen skalaaritulo on (kontravariantin ja kovariantin nelivektorin välinen pistetulo) [10]

$$a \cdot b \equiv a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu. \tag{3}$$

Määritellään lisäksi merkintä

$$a^2 \equiv a \cdot a. \tag{4}$$

Olkoon a, b ja c ovat mielivaltaisia nelivektorita ja h_1 ja h_2 vakioita. Nelivektoreiden skalaaritulolle pätee selvästi seuraavat ominaisuudet (vaihdannaisuus, bilineaarisuus ja vakiolla kertomisen vaikutus):

$$\begin{aligned} a \cdot b &= b \cdot a, \\ a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \\ (h_1 a) \cdot (h_2 b) &= h_1 h_2 (a \cdot b) \end{aligned} \tag{5}$$

Määritellään Minkowskin 4-avaruuden metrinen tensori, jonka avulla on voidaan ilmaista kontravarianttien ja kovarianttien komponettien suhde sekä esittää skalaaritulot. Tensorin komponenteille $g_{\mu\nu}$, μ,$\nu = 0, 1, 2, 3$, pätee $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ ja $g_{\mu(\nu \neq \mu)} = 0$, sekä vastaavasti käänteiselle metriselle tensorille $(g^{\mu\nu})$ $g^{00} = 1$, $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$ ja $g^{\mu(\nu \neq \mu)} = 0$ [10]. Tälloin voidaan käyttää esimerkiksi seuraavia esityksiä:

$$\begin{aligned} a_\nu &= g_{\mu\nu} a^\mu, \\ a^\nu &= g^{\mu\nu} a_\mu \end{aligned} \tag{6}$$

ja

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu \tag{7}$$

(Huomio: Saman lausekkeen kaksi samaa Lorentzin indeksiä esitetään aina siten, että toinen on yläindeksi ja toinen alaindeksi. Siten metristen tensorien voidaan ajatella "nostavan" ja "laskevan" Lorentzin indeksejä. [10])

Määritellään, että merkintä $g^{\mu}{}_{\nu}$ vastaa Kroneckerin deltaa $\delta^{\mu}{}_{\nu}$, jolle pätee [10]

$$\delta^{\mu}{}_{\nu} = \begin{cases} 1, \text{ kun } \mu = \nu \\ 0, \text{ kun } \mu \neq \nu. \end{cases} \tag{8}$$

Nyt (esimerkiksi)

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \tag{9}$$

ja siten

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4. \tag{10}$$

2.2.2 Kinematiikkaa

Vapaan relativistisen hiukkasen energia on

$$E = \sqrt{m^2 + |\overline{p}|^2}, \tag{11}$$

kun m on hiukkasen massa ja $\overline{p}$ liikemäärä [10]. Vapaalla hiukkasella tarkoitetaan tässä tapauksessa hiukkasta, johon ei kohdistu ulkoisia vuorovaikutuksia (tai ne voidaan jättää huomiotta). Kun kappaleen sanotaan olevan relativistinen, niin se tarkoittaa, että kappaleen ominaisuuksien tarkaksi kuvaamiseksi tulee ottaa huomioon (suppea tai yleinen) suhteellisuusteoria (esimerkiksi kun hiukkasen nopeus on lähellä valonnopeutta) [53].

Massallisen relativistisen kappaleen liikemäärä on

$$\overline{p} = \frac{m\overline{v}}{\sqrt{1 - |\overline{v}|^2}}, \tag{12}$$

missä $\overline{v}$ on kappaleen nopeus [53]. Massattomalle hiukkaselle ($|\overline{v}| = 1$)

$$|\overline{p}| = E \tag{13}$$

yhtälön (11) mukaisesti.

Hiukkasen neliliikemäärävektorin p ensimmäinen komponentti on hiukkasen

energia E ja loput komponentit hiukkasen liikemäärän $\overline{p} = (p_x, p_y, p_z)$ komponentit:

$$p = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ \overline{p} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Neliliikemäärävektorien väliset skalaaritulot ovat Lorentz-invariantteja eli ne eivät muutu Lorentz-muunnoksissa. Tällöin esimerkiksi skalaaritulon lopputulos on sama koordinaatistoissa, jotka liikkuvat vakionopeuksilla toisiinsa nähden. Energian ja liikemäärän säilymislakien nojalla neliliikemäärien summa säilyy missä tahansa (eristetyn systeemin) prosessissa. [10]

Vapaan hiukkasen neliliikemäärävektorille p pätee

$$p^2 = E^2 - |\overline{p}|^2 = m^2 \tag{15}$$

yhtälön (11) perusteella. Kun tämä relaatio $p^2 = m^2$ on tosi, niin hiukkasen sanotaan "olevan sen massakuorella". [10]

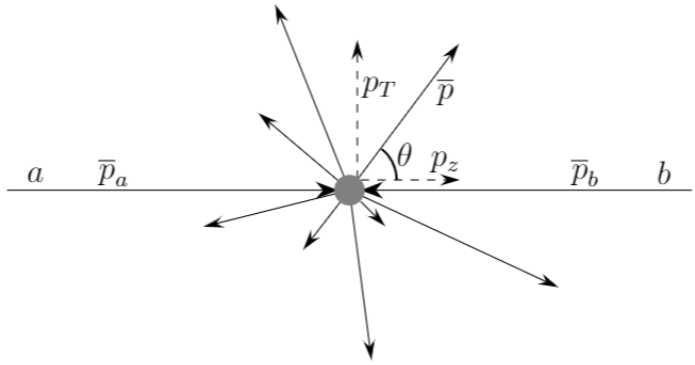
Kuvassa 2 on esitettynä useita lopputilahiukkasia sisältävä törmäysprosessi, CMS-koordinaatistossa. CMS-koordinaatistossa (*center of momentum*) kappaleiden kokonaisliikemäärä on nolla ($\overline{p}_a + \overline{p}_b = \sum_f \overline{p}_f = 0$, f lopputilahiukkanen) [10]. Sovitaan tavanomaisen konvention mukaisesti ensimmäisen alkutilahiukkasen (vasemmanpuoleinen, a, 1) liikemäärä samansuuntaiseksi z-akselin kanssa. Olkoon θ lopputilahiukkasen liikemäärän ja z-akselin välinen sirontakulma.

Yllä esitetyn koordinaatistokonvention mukaisesti voimme määritellä hiukkasen poikittaisliikemäärän seuraavasti:

$$p_T \equiv \sqrt{p_x^2 + p_y^2}, \tag{16}$$

missä p_x ja p_y ovat liikemäärän x- ja y-komponentti. Tämän avulla voidaan määritellä toinen hyödyllinen suure, nk. poikittaismassa (*transverse mass*), [10]

$$m_T \equiv \sqrt{m^2 + p_T^2}. \tag{17}$$



Kuva 2. Törmäysprosessi, jonka lopputila sisältää useita hiukkasia (nyt 8 kpl), esitettynä CMS-koordinaatistossa. Harmaa pallo esittää reaktiota ja koordinaatiston keskipistettä. Siihen kohdistuvat nuolet ovat alkutilahiukkasten a ja b liikemäärät $\overline{p}_a$ ja $\overline{p}_b$, ja siitä poispäin osoittavat nuolet lopputilahiukkasten liikemäärät. Yhden lopputilahiukkasen liikemäärän $\overline{p}$ poikittais- ja z-komponentit p_T ja p_z sekä sirontakulma θ ovat esitettyinä kuvassa.

Hiukkasen rapiditeetti (suhteessa z-akseliin/hiukkassuihkuun) on

$$y \equiv \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{E+p_z}{E-p_z}\Big). \tag{18}$$

Rapiditeettiä y käytetään relativistisen hiukkasen tilan ja "sirontakulman" kuvaamiseen. Vastaava pseudorapiditeetti on

$$\eta \equiv \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{|\overline{p}|+p_z}{|\overline{p}|-p_z}\Big). \tag{19}$$

Selvästi $y = \eta$, kun $m = 0$. Pseudorapiditeetti on rapiditeettia parempi kulmamuuttujana, sillä sille on vaihtoehtoinen esitystapa, joka on riippuvainen ainoastaan sirontakulmasta:

$$\eta = -\ln\Big[\tan(\frac{\theta}{2})\Big]. \tag{20}$$

Esimerkiksi sirontakulmat 0°, 45°, 90°, 135° ja 180° vastaavat pseudorapiditeetteja ∞, 0,881, 0, $-0{,}881$ ja $-\infty$. [10]

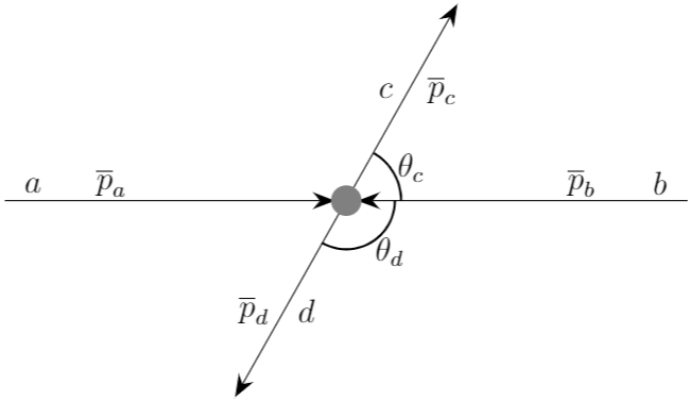
Hiukkasen energia ja hiukkassuihkun suuntainen liikemäärän komponentti on mahdollista ilmoittaa massan, poikittaisliikemäärän ja rapiditeetin avulla:

$$\begin{aligned} E &= m_T\cosh(y) \\ p_z &= m_T\sinh(y). \end{aligned} \tag{21}$$

Vastaavalla tavoin [10]

$$\begin{aligned} |\overline{p}| &= p_T \cosh(\eta) \\ p_z &= p_T \sinh(\eta). \end{aligned} \tag{22}$$

Tärkeä törmäysprosessien erikoistapaus on $2 \to 2$-prosessit (kuva 3). Olkoon



Kuva 3. Törmäysprosessi $a + b \to c + d$ CMS-koordinaatistossa. $\overline{p}_a$, $\overline{p}_b$, $\overline{p}_c$ ja $\overline{p}_d$ ovat hiukkasia vastaavat liikemäärät, sekä θ_c ja θ_d sirontakulmat.

prosessin $a + b \to c + d$ hiukkasia vastaavat neliliikemäärät p_a, p_b, p_c ja p_d. Yllä esitettyjen hiukkasten kinemaattisten suureiden lisäksi $2 \to 2$-törmäysprosessin kuvaamiseen voidaan käyttää Lorentz-invariantteja Mandelstamin muuttujia s, t ja u:

$$\begin{aligned} s &\equiv (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2 \\ t &\equiv (p_a - p_c)^2 = (p_b - p_d)^2 \\ u &\equiv (p_a - p_d)^2 = (p_b - p_c)^2, \end{aligned} \tag{23}$$

missä jälkimmäiset esitykset muuttujille saadaan neliliikemäärän säilymisestä ($p_a + p_b = p_c + p_d$). Neliliikemäärän säilymisen ja yhtälön (15) avulla saadaan myös seuraava hyödyllinen relaatio:

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2, \tag{24}$$

missä m_a, m_b, m_c ja m_d ovat vapaita hiukkasia vastaavat massat [10].

2.2.3 Vaikutusaloista

Tarkastellaan prosessia r, $a + b \to S_f$, missä S_f on tarkasteltu lopputila mahdollisine leikkauksineen. Oletetaan, että a-hiukkassuihku kattaa (ainakin) alueen V_{ab}, joka

sisältää hiukkasia b lukumäärän N_b. Olkoon J_a a-hiukkasten vuo tässä alueessa. Törmäysprosessin r vaikutusala on

$$\sigma_r \equiv \frac{W_r}{J_a N_b}, \tag{25}$$

missä W_r on prosessin r reaktiotaajuus alueessa V_{ab} [34]. Vaikutusala on tärkeä suure hiukkasfysiikassa, ja yleensä sen arvo ilmoitetaan barneissa (1 b = 10^{-28} m) [34]. Se voidaan ajatella Lorentz-invarianttina reaktiotaajuuden, reaktiotodennäköisyyden tai reaktiota vastaavan vuorovaikutuksen voimakkuuden mittana (joillakin leikkauksilla/differentiaatioilla vaikutusala ei ole Lorentz-invariantti) [34, 54]. Nimitys vaikutusala (*cross section*) tulee siitä, että alunperin sirontakokeissa on pyritty mittaamaan tutkittavan törmäyksen hiukkasen kokoa reaktiotaajuuden avulla [54].

Törmäyskokeen luminositeetti on

$$L \equiv J_a N_b. \tag{26}$$

Mitä suurempi kokeen luminositeetti on, sitä enemmän haluttuja reaktioita r tapahtuu ja vastaavaa dataa saadaan tutkittavaksi (detektorilaitteiston tehokkuuden rajoissa, ja olettaen, että suihku- tai kohdehiukkasten tiheydet eivät ole liian suuria). Luminositeetti ei ole vakio ajan funktiona, ja usein se kuvataan eksponentiaalisesti laskevana. Luminositeettia merkitsevämpi mitta törmäysten määrälle on integroitu luminositeetti

$$L_{\text{int}} \equiv \int_0^T L \; dt, \tag{27}$$

missä T on mittausaika. Useassa osassa tehtävissä törmäyskokeissa pyritään maksimoimaan (integroidun) luminositeetin keskiarvo kokonaiskokeen aikana. [34, 55]

Hiukkasfysiikan teorian antama lauseke prosessin $a + b \to f_1 + f_2 + ... + f_n$ differentiaaliselle vaikutusalalle on

$$d\sigma(ab \to f_1 f_2 ... f_n) = \frac{|\mathcal{M}(ab \to f_1 f_2 ... f_n)|^2}{2\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{n} p_i) \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 p_i}{2E_i (2\pi)^3}. \tag{28}$$

Tässä $\mathcal{M}(ab \to f_1 f_2 ... f_n)$ on prosessin invariantti amplitudi, joka muodostetaan Feynmanin sääntöjen avulla, $\delta^{(4)}$ on (neliulotteinen) Diracin deltafunktio, m_a ja

m_b alkutilahiukkasten massat, ja E_i ja p_i lopputilahiukkasia vastaavat energiat ja neliliikemäärät (differentiaalinen alkio d^3p_i viittaa liikemääriin $\overline{p}_i$). λ on kolmen muuttujan funktio, jonka lauseke on

$$\lambda(a,b,c) \equiv a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca, \tag{29}$$

missä $a,b,c \in \mathbb{R}$. [34]

$2 \rightarrow 2$-tapauksissa t-differentioidun vaikutusalan lauseke on huomattavasti yksinkertaisempi [34]:

$$\frac{d\sigma(ab \rightarrow cd)}{dt} = \frac{|\mathcal{M}(ab \rightarrow cd)|^2}{16\pi\lambda(s,m_a^2,m_b^2)}. \tag{30}$$

Edellä mainittu Diracin deltafunktio on jakauma, jonka käyttäytymistä voidaan kuvata (löyhästi) seuraavan kahden yhtälön avulla:

$$\delta^{(n)}(x) = \begin{cases} \infty, \text{kun } x = 0 \\ 0, \text{kun } x \neq 0 \end{cases} \tag{31}$$

ja

$$\int_{V_n} \delta^{(n)}(x)dx = 1, \tag{32}$$

missä x on vektori n-ulotteisessa avaruudessa ja V_n tämän avaruuden osa, joka sisältää luvun nolla ja jonkin nollan ympäristön [56]. Luonnollisesti ($x = (x_1, x_2, ..., x_n)$)

$$\delta^{(n)}(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)...\delta(x_n). \tag{33}$$

Yksiulotteiselle deltafunktiolle voidaan todistaa pätevän seuraavat ominaisuudet ($a,b \in \mathbb{R}$ ja viimeisessä yhtälössä $a \neq 0$) [56]:

$$\begin{aligned} \delta(a) &= \delta(-a) \\ \delta(a)\delta(b) &= 2\delta(a+b)\delta(a-b) \\ \delta(ab) &= \frac{1}{|a|}\delta(b). \end{aligned} \tag{34}$$

Kokeellisen ja teoreettisen vaikutusalan vastaavuutta kuvataan K-kertoimella, joka

on kokeellinen tulos jaettuna teorettisella. (Määritelmä vaihtelee hieman tilanteesta riippuen.) [57]

2.2.4 Diracin γ-matriiseista ja hiukkasspinoreista

Kvanttiväridynamiikan häiriöteorian Feynmanin sääntöjen soveltamisen ymmärtämiseksi on tarpeen esitellä Diracin γ-matriisit γ^0, γ^1, γ^2 ja γ^3, missä yläindeksi on Lorentz-indeksi. Alun perin Paul Dirac kehitti nämä Diracin yhtälöä varten, joka kuvaa vapaita relativistisia spin-$\frac{1}{2}$-hiukkasia, ja myöhemmin γ-matriiseista ja niihin liittyvistä laskusäännöistä tuli erittäin oleellisia Feynmanin sääntöjen ja invarianttien amplitudien laskemisen kannalta [23, 25].

γ-matriisit ovat ei-yksikäsitteisiä $N \times N$-neliömatriiseja, $N \geq 4$, jotka noudattavat Cliffordin algebraa $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathrm{I}_4$. Seuraavat yhtäpitävyydet pätevät Diracin γ-matriiseille, kun käytämme niille Dirac-Pauli-esitystä (4×4) [23, 25]:

$$\begin{aligned}
(\gamma^0)^2 &= \mathrm{I}_4 \\
\gamma^{\mu\dagger} &= \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \\
\gamma^\mu &= g^{\mu\nu}\gamma_\nu
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{TR}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \Leftrightarrow \mathrm{TR}(\not{a}\not{b}) = 4a\cdot b \\
\mathrm{TR}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\varphi\gamma^\kappa) &= 4(g^{\mu\nu}g^{\varphi\kappa} - g^{\mu\varphi}g^{\nu\kappa} + g^{\mu\kappa}g^{\nu\varphi}) \\
\Leftrightarrow \mathrm{TR}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) &= 4\Big[(a\cdot b)(c\cdot d) - (a\cdot c)(b\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c)\Big]
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma_\mu &= 4 \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -2\gamma^\nu \Leftrightarrow \gamma^\mu\not{a}\gamma_\mu = -2\not{a} \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\varphi\gamma_\mu &= 4g^{\nu\varphi} \Leftrightarrow \gamma^\mu\not{a}\not{b}\gamma_\mu = 4a\cdot b \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\varphi\gamma^\kappa\gamma_\mu &= -2\gamma^\kappa\gamma^\varphi\gamma^\nu \Leftrightarrow \gamma^\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma_\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\not{a}^2 = a^2, \tag{38}$$

missä a, b, c ja d ovat mielivaltaisia nelivektoreita, μ, ν, φ ja κ Lorentzin indeksejä, $(\gamma^j)^2 \equiv \gamma^j\gamma^j$, $j = 0,1,2,3$, ja $\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu$. Osassa yhtälöistä yksikkömatriisi I_4 on

jätetty implisiittiseksi.

Laskujen helpottamiseksi on hyvä tietää, että γ-matriisien parittoman määrän tulon jälki on aina nolla. Olkoon γ-matriisit γ^{μ_1}, γ^{μ_2}, ... $\gamma^{\mu_{2n}}$, $\gamma^{\mu_{2n+1}}$, $n \in \mathbb{N} \cup 0$, siten, että indeksi μ_i voi vastata mitä tahansa neljästä matriisista (eli $\mu_i = 0, 1, 2, 3$). Tällöin [25]

$$\mathrm{TR}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{2n}}\gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0. \tag{39}$$

Edellä mainittu Diracin yhtälö voidaan jakaa kahteen, hiukkasia ja antihiukkasia kuvaavaan, osaan:

$$\begin{aligned} (\not{p} - m)u &= 0 \\ (\not{p} + m)v &= 0. \end{aligned} \tag{40}$$

$u = u(p,s)$ ja $v = v(p,s)$ ovat ratkaisuspinorit, missä p on vapaan hiukkasen neliliikemäärävektori ja s spin-tila* ($s = 1$ (ylös) tai 2 (alas)). Vastaavat konjugoidut spinorit ovat

$$\begin{aligned} \overline{u} &\equiv u^\dagger \gamma^0 \\ \overline{v} &\equiv v^\dagger \gamma^0. \end{aligned} \tag{41}$$

Koska valitsin Diracin matriiseille tyyppiä 4×4 olevan esityksen, niin siitä johtuen spinorit ovat 4-ulotteisia pystyvektoreita ja konjugoidut spinorit 4-ulotteisia vaakavektoreita. [23]

Tavanomaisella normalisaatiolla ($u^\dagger(p,s)u(p,s) = 2E$) saadaan tulos

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u(p,s)\overline{u}(p,s) &= \not{p} + m \\ \sum_{s=1,2} v(p,s)\overline{v}(p,s) &= \not{p} - m. \end{aligned} \tag{42}$$

Näitä yhtäpitävyyksiä nimitetään projektio-operaattoreiksi. [23]

Olkoon γ-matriisit γ^{μ_1}, $\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{n-1}}$ ja γ^{μ_n}, $n \in \mathbb{N}$, $\mu_i = 0$, 1, 2 tai 3, sekä hiukkas-/antihiukkasspinorit w_1 ja w_2. Nyt voidaan laskea

*Tarkalleen ottaen spinorit edustavat spin-ylös- ja spin-alas-tiloja ainoastaan tapauksissa, joissa hiukkasen liikemäärä on 0 tai yhdensuuntainen z-akselin kanssa (muulloin spinorit eivät ole spin-operaattorin $\hat{S}_z$ ominaistiloja). Emme kuitenkaan käsittele spin-polarisoituneita suureita ja summaamme siten aina spinorien tilojen yli (yhtälö (42)), jolloin tämä spinoritilojen eksakti luonne ei vaikuta lopputuloksiin.

$$
\begin{aligned}
(\overline{w}_1\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{n-1}}\gamma^{\mu_n}w_2)^* &= (w_1^\dagger\gamma^0\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{n-1}}\gamma^{\mu_n}w_2)^\dagger \\
&= w_2^\dagger\gamma^{\mu_n\dagger}\gamma^{\mu_{n-1}\dagger}...\gamma^{\mu_2\dagger}\gamma^{\mu_1\dagger}\gamma^{0\dagger}w_1 \\
&= w_2^\dagger\gamma^0\gamma^{\mu_n}\gamma^0\gamma^0\gamma^{\mu_{n-1}}\gamma^0...\gamma^0\gamma^{\mu_2}\gamma^0\gamma^0\gamma^{\mu_1}\gamma^0\gamma^0 w_1 \\
&= \overline{w}_2\gamma^{\mu_n}\gamma^{\mu_{n-1}}...\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_1}w_1, \qquad (43)
\end{aligned}
$$

missä käytimme konjugoidun spinorin määritelmää (41) sekä relaatioita $(\gamma^0)^2 = \mathrm{I}_4$ ja $\gamma^{j\dagger} = \gamma^0\gamma^j\gamma^0$ (35). Tämä niin kutsuttu konjugaattirelaatio on tärkeä tulevien laskujen kannalta. [25]

Vielä on tarpeen esitellä Feynmanin sääntöjä varten polarisaationelivektori $\varepsilon(p,\lambda)$ (komponentit $\varepsilon^\mu(p,\lambda)$), joka kuvaa gluonia (tai fotonia) ja jossa λ on polarisaatiotila [25, 26]. Vektoria vastaava polarisaatiotensori on

$$
P^{\mu\nu}(p) \equiv \sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^\mu(p,\lambda)\varepsilon^{\nu*}(p,\lambda) = -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu\hat{p}^\nu + \hat{p}^\mu p^\nu}{p\cdot\hat{p}}, \qquad (44)
$$

missä

$$
\hat{p} \equiv \begin{pmatrix} E \\ -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ -\overline{p} \end{pmatrix}. \qquad (45)
$$

2.3 Kvanttiväridynamiikan häiriöteoria ja partonimalli

Neljästä perusvuorovaikutustyypistä vahva vuorovaikutus on selvästi vahvin. Tämä manifestoituu muun muassa siten, että vahvan vuorovaikutuksen prosessien vaikutusalat ovat useita kertaluokkia suurempia kuin sähkömagneettisen ja heikon vuorovaikutuksen prosessien vaikutusalat (esim. $\sigma(\gamma\gamma \to X) \ll \sigma(pp \to X)$) [34]. Siten tutkittaessa esimerkiksi kvarkkituottoa protoni–protoni-törmäyksissä on hyväksyttävää keskittyä ainoastaan vahvaan vuorovaikutukseen ja jättää huomiotta sähkömagneettisen ja heikon vuorovaikutuksen kontribuutiot [20].

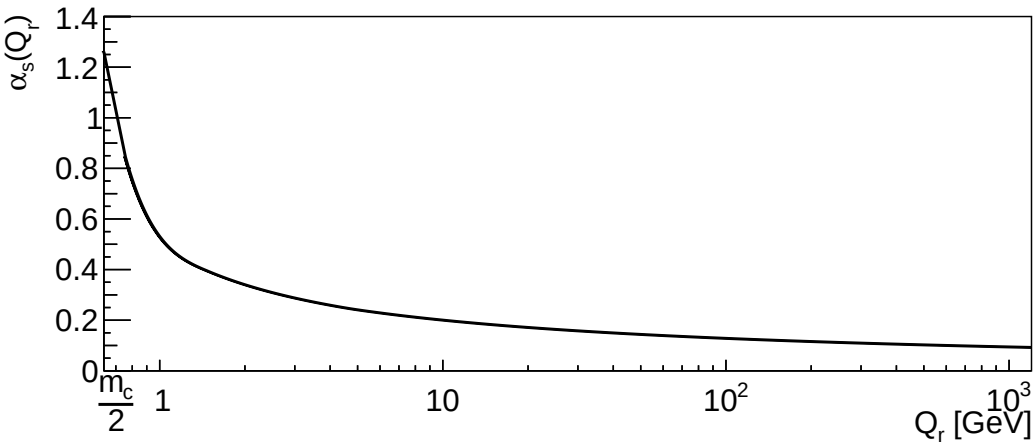
Kvanttiväridynamiikka (*Quantum Chromodynamics, QCD*) on lokaalisti symmetrinen SU(3)-mittakenttäteoria, joka kuvaa kvarkkien ja gluonien välistä vahvaa

vuorovaikutusta [1]. Kenttäteoria esiteltiin pitkän kehityksen jälkeen vuonna 1972 Harald Fritzschin, Heinrich Leutwylerin ja Murray Gell-Mannin toimesta [58]. Useiden kokeiden avulla teoria ollaan todettu erittäin pitäväksi ja nykyään kvanttiväridynamiikkaa käsitellään tärkeänä hiukkasfysiikan standardimallin kulmakivenä [1, 13]. Kvanttiväridynamiikan keskeisiä nykytutkimuksen osa-alueita ovat muun muassa hadronien [59] ja ytimien partonijakaumafunktiot [60] sekä kvarkkigluoniplasma [61].

Vuorovaikutustyypin kytkentävakiolla kuvataan vuorovaikutuksen voimakkuutta. Kvanttiväridynamiikassa vahvalle kytkentävakiolle pätee

$$\alpha_s(Q_r) \equiv \frac{g_s^2(Q_r)}{4\pi}, \tag{46}$$

missä Q_r on renormalisaatioskaala ja $g_s = g_s(Q_r)$ kytkentävoimakkuus. (Hämäävästi molempia muuttujia g_s ja α_s nimitetään usein kirjallisuudessa vahvaksi kytkentävakioksi, teen nyt erilaisen nimitysvalinnan sekaannusten välttämiseksi.) Kvanttiväridynamiikka on asymptoottisesti vapaa teoria eli sen kytkentävakiolle pätee $\alpha_s(Q_r) \xrightarrow{Q_r \to \infty} 0$. [1] Käyttämäni kytkentävakio on esitettynä kuvassa 4 [62].



Kuva 4. Vahva kytkentävakio. Laskettu viitteen [62] perusteella.

Skaala $Q = \sqrt{Q^2}$ kuvaa energian ja liikemäärän siirtymistä prosessissa. Jos q on prosessin hiukkasten välillä siirtynyt neliliikemäärä, niin tavanomaisesti määritellään $Q^2 = |q^2|$. Raskaiden kvarkkiparien tuotossa tyypillisesti $Q \sim m_T$. [1]

Tarkemmin katsottuna skaala on kuitenkin monimerkityksellisempi asia kvanttiväridynamiikassa. On mahdollista määritellä skaalan Q lisäksi erikseen edellä

mainittu renormalisaatioskaala Q_r ja faktorisaatioskaala Q_f, joille $Q_r \sim Q$ ja $Q_f \sim Q$. Faktorisaatioskaala liittyy lyhyen ja pitkän kantaman vuorovaikutusefektien erotteluun ja se toimii näin partonijakaumien määrittelyssä tarvittavana skaalana. Tavanomaisesti valitaan vain yksi skaala $Q = Q_r = Q_f$ prosessille, koska se on kätevää ja koska nämä kolme skaalaa ovat kohtalaisen analogiset keskenään. Tällöin kuitenkin tarkka ymmärrys skaalavalintojen vaikutuksesta hadronitörmäysprosessien vaikutusaloihin saattaa jäädä pimentoon, ja siksi käsittelemme nyt renormalisaatio- ja faktorisaatioskaaloja erikseen (luku 5.1.1). [63]

Useita laskumetodeja on kehitetty kvanttiväridynamiikan käsittelyä varten. Näistä kaikista menestynein on häiriöteoria (*perturbative quantum chromodynamics, pQCD*) [1]. Sen ideana on approksimoida haluttua lopputulosta vahvan kytkentävakion α_s potenssien sarjana ($\alpha_s^2, \alpha_s^3, \alpha_s^4$,..., kun muiden vuorovaikutustyyppien kontribuutioita ei tarkastella) [1, 64]. Mitä korkeamman kertaluvun approksimaatio, niin sitä useampi termi on otettu huomioon ja sitä tarkempi lopputulos (lähempänä kokeellista tulosta). Tässä työssä tarkastelluille raskaiden kvarkkien tuottoprosesseille alimman kertaluvun approksimaatio (LO, *leading order*) ottaa huomioon α_s^2-termit [26], sitä seuraava kertaluku (NLO, *next-to leading order*) myös korkeampien potenssien termejä, ja sitä seuraava vielä korkeampia (NNLO, *next-to-next-to leading order*). Usein NNNLO- ja sitä korkeampien kertalukujen korjauksia pidetään mitättöminä, ja NLO- tai NNLO-tulosta käytetään vertailutuloksena kokeelliselle datalle. (Tarkkaa teoreettista tulosta määrittäessä otetaan myös huomioon korkeamman kertaluvun korjauksiin vertautuvat korjaukset, kuten partonisuihkujen kontribuutio [65].) Teoreettisen tuloksen herkkyys eri renormalisaatio- ja faktorisaatioskaalavalinnoille indikoi korkeamman kertaluvun korjausten suuruuksia [66, 67]. Siten skaalavalintojen epäyksikäsitteisyydestä kumpuava epävarmuus on pienempi korkeammilla kertaluvuilla [66]. Häiriöteorian soveltamiseksi edellytetään, että $Q_r \gtrsim 1$ GeV [1]. Tälloin $\alpha_s(Q_r) \ll 1$ (kuva 4) ja halutun tuloksen approksimointi kytkentävakion potenssien sarjana toimii hyvin [1].

Häiriöteorian antaman aliprosessin vaikutusalan (invariantin amplitudin) laskemisessa käytetään Feynmanin sääntöjä [68]. Näiden Feynmanin sääntöjen soveltamiseksi on tarpeen esitellä SU(3):n virittäjämatriisit $t^a, a = 1, 2, ..., 8$, ja niitä vastaavan algebran laskusääntöjä.

Virittäjämatriisit t^a vastaavat gluonien kahdeksaa mahdollista väritilaa, ovat her-

miittisiä (eli $(t^a)^\dagger = t^a$ ja $(t^a)^*_{ij} = (t^a)_{ji}$), ja ne eivät ole yksikäsitteisiä. Valitsemme niille tavanomaisen, ns. fundamentaaliesityksen (F), jolloin ne ovat 3×3-matriiseja ($\mathrm{I}_F = \mathrm{I}_3$) ja jolloin esitysriippuvaisille vakioille C_2 (Casimirin operaattori) ja T pätee

$$\begin{aligned} t^a t^a &= C_2(F)\mathrm{I}_F \\ \mathrm{TR}(t^a t^b) &= T(F)\delta^{ab}, \end{aligned} \tag{47}$$

missä

$$\begin{aligned} C_2(F) &= \frac{4}{3} \\ T(F) &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{48}$$

(Fundamentaaliesityksessä virittäjämatriisit ovat Gell-Mann-matriisit λ^a jaettuna kahdella, $t^a = \frac{\lambda^a}{2}$.) [68]

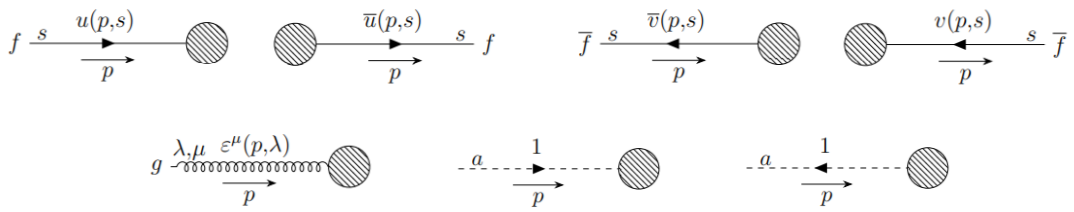
Virittäjämatriisien käsittelyssä tärkeitä työkaluja ovat täysin antisymmetrinen struktuurivakio $f^{abc} \in \mathbb{R}$ (kahden indeksin vaihtaminen keskenään vaihtaa luvun merkin) sekä täysin symmetrinen struktuurivakio $d^{abc} \in \mathbb{R}$ (kahden indeksin vaihtaminen keskenään ei vaikuta luvun arvoon), missä indeksit a, b ja c vastaavat gluonien väritiloja tai virittäjämatriisien indeksejä (lisää struktuurivakioista ja niiden arvoista lähteessä [68]). Seuraavat relaatiot pätevät fundamentaaliesityksessä:

$$\begin{aligned} f^{acd} f^{bcd} &= N\delta^{ab} \\ f^{acd} d^{bcd} &= 0 \\ (t^a t^b t^a)_{ij} &= -\frac{T(F)}{N}(t^b)_{ij} \\ \mathrm{TR}(t^a t^b t^c) &= \frac{1}{2}T(F)(d^{abc} + i f^{abc}), \end{aligned} \tag{49}$$

missä $N = 3$, koska käytämme 3×3-matriiseja. [68]

Olkoon μ, ν ja φ Lorentzin indeksejä, a, b ja c gluonien (tai aaveiden) väritiloja, i ja j kvarkkien väritiloja, m vapaan hiukkasen massa, p, p_1, p_2 ja p_3 hiukkasten neliliikemääriä, s fermionin f (tai antifermionin $\overline{f}$) spin-tila sekä $\lambda = 1{,}2$ gluonin g polarisaatiotila.

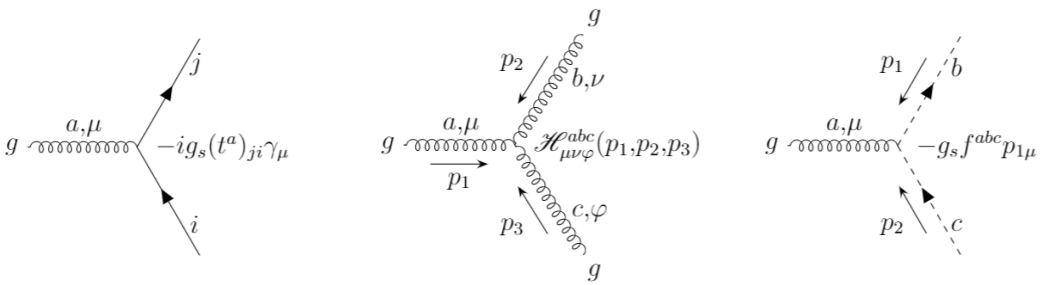
Ulkoisten hiukkasten Feynmanin säännöt ja graafiset esitykset ovat seuraavat prosessin alku- ja lopputilafermioneille, alku- ja lopputila-antifermioneille, alkutilagluonille, alkutila-aaveelle sekä alkutila-antiaaveelle:



Pallo edustaa muuta prosessia ja viivojen keskelle piirretyt kolmiot hiukkasnuolia. Hiukkasten hiukkasnuolet ovat samansuuntaisia ja antihiukkasten erisuuntaisia vastaavan neliliikemäärän kanssa. [68]

Aaveet ovat tekninen työkalu, joiden avulla on mahdollista helpottaa gluonin polarisaatiotilojen käsittelemistä laskuissa. Ne voidaan ajatella fermionien kaltaisina hiukkasina, jotka omaavat gluonin tavoin värivarauksen. [26] Lisää aaveista ja polarisaatiotensorin $P^{\mu\nu}(p,\lambda)$ käsittelystä on luvussa 3.2.

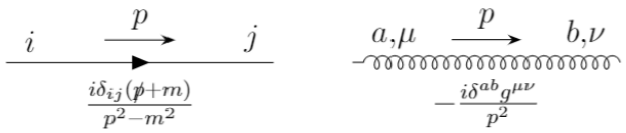
Vuorovaikutuspisteille (verteksit) pätevät seuraavat Feynmanin säännöt (etumerkkikonventio voi vaihdella lähteestä riippuen) [68]:



Kolmen gluonin itseiskytkennässä [68]

$$\mathscr{K}^{abc}_{\mu\nu\varphi}(p_1,p_2,p_3) \equiv -g_s f^{abc}\Big[g_{\mu\nu}(p_1-p_2)_\varphi + g_{\nu\varphi}(p_2-p_3)_\mu + g_{\varphi\mu}(p_3-p_1)_\nu\Big]. \qquad (50)$$

Propagaattori yhdistää kahden Feynmanin diagrammin vuorovaikutuspisteen. Feynmanin säännöt kvarkki- ja gluonipropagaattoreille Feynmanin mittavalinnalla (Greenin funktiosta tulevat nimittäjien $+i\epsilon$-termit on jätetty huomiotta) [68]:



Huomaa, että propagaattori ei ole vapaa hiukkanen eli sille ei päde (yleisesti) $p^2 = m$. Alimman kertaluvun Feynmanin diagrammeja nimitetään usein s-, t- tai

u-kanavan diagrammeiksi propagaattorin neliliikemäärän luonteen mukaan ($p^2 = s$, t tai u, määritelmät (23)). [1, 25]

Feynmanin diagrammit edustavat invariantteja amplitudeja, joiden lausekkeet muodostetaan Feynmanin säännöillä (luvut 3.1 ja 3.2). Mikäli samaa prosessia vastaa useampi Feynmanin diagrammi, niin prosessin invariantti amplitudi saadaan summaamalla diagrammeja vastaavat invariantit amplitudit. Jos diagrammissa on ristiinpiirretyt identtiset fermionit, niin vastaavan invariantin amplitudin eteen laitetaan miinusmerkki. [25]

Nyt voidaan muodostaa (esimerkiksi) invariantit amplitudit $\mathcal{M}(q\overline{q} \to Q\overline{Q})$ ja $\mathcal{M}(gg \to Q\overline{Q})$ (q mielivaltainen kvarkki ja Q raskas kvarkki), ja laskea luvussa 2.2 kerrottujen laskusääntöjen avulla vastaavat vaikutusalat. Kuitenkin, Feynmanin säännöt ottavat kantaa alku- ja lopputilahiukkasten spin-, väri- ja polarisaatiotiloihin, joita ei tulla huomioimaan tulevassa analyysissä. Siten on tarpeen määritellä polarisoitumaton invariantin amplitudin neliö $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ [25]. Se on invariantin amplitudin neliö, joka on keskiarvoistettu alkutilan mahdollisten spin-, väri- ja polarisaatiotilojen yli ja summattu lopputilan vastaavien tilojen yli. Prosesseille $q + \overline{q} \to Q + \overline{Q}$ ja $g + g \to Q + \overline{Q}$ [26]

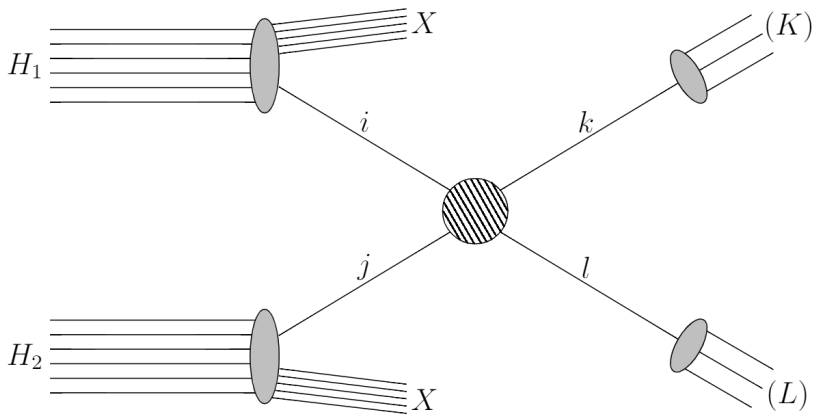
$$\overline{\left|\mathcal{M}(q\overline{q} \to Q\overline{Q})\right|^2} = \frac{1}{2 \cdot 2}\frac{1}{3 \cdot 3}\sum_{\substack{\text{Spin}\\ \text{Väri}}} \mathcal{M}(q\overline{q} \to Q\overline{Q})\mathcal{M}(q\overline{q} \to Q\overline{Q})^* \tag{51}$$

$$\overline{\left|\mathcal{M}(gg \to Q\overline{Q})\right|^2} = \frac{1}{2 \cdot 2}\frac{1}{8 \cdot 8}\sum_{\substack{\text{Spin}\\ \text{Väri}\\ \text{Pol.}}} \mathcal{M}(gg \to Q\overline{Q})\mathcal{M}(gg \to Q\overline{Q})^*. \tag{52}$$

Käytännössä esimerkiksi yksittäisten kvarkkien törmäyttäminen hiukkaskiihdyttimen avulla ei ole mahdollista, joten vahvan vuorovaikutuksen prosesseja joudutaan tutkimaan erilaisten hadroni- ja ydintörmäysten avulla. Hadronitörmäysten teoreettinen käsittely onnistuu partonimallin avulla. [1]

Richard Feynman esitteli partonimallin idean vuonna 1969 [69]. Siinä korkealla energialla törmääviä hadroneja käsitellään pistemäisinä partonikimppuina, missä partonit ovat hadronin rakenneosia eli kvarkkeja, antikvarkkeja ja gluoneja, joiden väliset vuorovaikutukset jätetään huomiotta. Näiden hadronien rakenneosasten törmäykset aiheuttavat aliprosesseja, jotka muodostavat (mahdollisesti huomioitu-

jen hadronisoitumisten ja hajoamisten kanssa) kokonaisprosessin. Partonimallin mukainen hadronitörmäysprosessi $2 \to 2$-aliprosessilla on esitettynä kuvassa 5. Malli toimii hyvin, mikäli törmäysenergialle pätee $\sqrt{s} \gg m_{H_1} + m_{H_2}$. [1]



Kuva 5. Törmäysprosessi $H_1 + H_2 \to k + l + X$ $(H_1 + H_2 \to K + L + X)$ esitettynä partoneittain. H_1 ja H_2 ovat hadroneja, jotka törmäävät korkealla energialla $\sqrt{s} \gg m_{H_1} + m_{H_2}$. Hadronin H_1 partoni i ja hadronin H_2 partoni j ovat $2 \to 2$-aliprosessin alkutilahiukkasia, ja k ja l ovat lopputilahiukkasia. Törmäysprosessissa reagoimattomat partonit ja niiden hajoamisketjujen tuotteet jätetään huomiotta (X). Koska yksittäisten kvarkkien/gluonien havaitseminen ei ole mahdollista, mittauksissa tulee tarkastella hiukkasten k ja l hajoamisketjujen seurauksena syntyneitä lopputiloja K ja L. [1]

Hadronin liikemäärästä osa $x \in [0,1]$ kuuluu aliprosessiin osallistuvalle partonille. Koska törmäysenergiat ovat erittäin suuria, niin hadronin H ja aliprosessiin osallistuvan partonin i neliliikemäärille pätee

$$p_H = \begin{pmatrix} E_H \\ 0 \\ 0 \\ \pm|\overline{p}_H| \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} |\overline{p}_H| \\ 0 \\ 0 \\ \pm|\overline{p}_H| \end{pmatrix} \tag{53}$$

ja

$$p_i = \begin{pmatrix} E_i \\ 0 \\ 0 \\ \pm|\overline{p}_i| \end{pmatrix} \approx x \begin{pmatrix} |\overline{p}_H| \\ 0 \\ 0 \\ \pm|\overline{p}_H| \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Toki x voi olla erittäin pieni, jolloin yllä oleva approksimaatio partonin neliliike-

määrälle ei toimi. Kuitenkin tämänlaisten aliprosessien kontribuutio hadronitason vaikutusalaan on mitätön korkealla energialla, ja approksimaatioiden (53) ja (54) kuvaama mallinnus on tavanomainen hadronitörmäyksiä käsitellessä. [1]

Hadronien rakennetta kuvataan partonijakaumafunktioilla $f_{i/H} = f_{i/H}(x,Q_f)$, $i = g$, u, d, s, c, b, t, $\overline{u}$, $\overline{d}$, $\overline{s}$, $\overline{c}$, $\overline{b}$, $\overline{t}$, jotka ovat riippuvaisia hadronityypistä H, pitkittäisliikemääräosuudesta x ja faktorisaatioskaalasta Q_f. (Yleensä nimityksellä partonijakaumafunktio viitataan protonin partonijakaumafunktioon, $f_i \equiv f_{i/p}$.) Arvo $f_{i/H}(x,Q_f)dx$ kertoo kuinka monta partonia i löytyy väliltä $[x,\, x + dx]$, skaalalla Q_f. Täten liikemäärän säilymislain nojalla pätee

$$\int_0^1 dx \sum_{i=g,q,\overline{q}} x f_{i/H}(x,Q_f) = 1. \tag{55}$$

Protoneilla gluonit kuljettavat noin puolet koko hiukkasen liikemäärästä (faktorisaatioskaala vaikuttaa jonkin verran). [1]

Hadroni sisältää valenssikvarkkien ja gluonien lisäksi myös virtuaalisten kvanttifluktuaatioiden synnyttämiä kvarkki-antikvarkkipareja (ns. merikvarkit) [1]. Siten esimerkiksi protonin rakennetta kuvattaessa tulee ottaa u-kvarkin, d-kvarkin ja gluonin partonijakaumafunktioiden lisäksi myös muidenkin kvarkkien ja antikvarkkien partonijakaumafunktiot huomioon. Sähkövarauksen säilymisen nojalla voidaan päätellä, että protonin partonijakaumafunktioille

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dx(f_{u/p} - f_{\overline{u}/p}) = 2 \\ &\int_0^1 dx(f_{d/p} - f_{\overline{d}/p}) = 1 \\ &\int_0^1 dx(f_{i/p} - f_{\overline{i}/p}) = 0, \text{ kun } i \neq u,\, d. \end{aligned} \tag{56}$$

Protonin gluonin partonijakaumafunktio hallitsee pienillä x ja valenssikvarkit hallitsevat alueessa $x \gtrapprox 10^{-1}$ (kuvat 10, 11, 12 ja 13).

Koska partonijakaumafunktiot ovat tarpeellinen elementti lähes kaikissa korkeaenergisten hadroni- ja ydintörmäysreaktioiden teoreettisissa ennusteissa [70], niiden tarkkuuden parantaminen on yksi kvanttiväridynamiikan tutkimuksen keskeisimpiä tavoitteita [71]. Häiriöteorian eri kertaluvuille on omat partonijakaumafunktionsa [71]. Mikäli partonijakaumafunktion käyttäytyminen tiedetään kokeellisesti skaalalla

$Q_f = Q_0 \sim 1$ GeV, niin se voidaan ennustaa korkeammille skaaloille $Q_f > Q_0$ DGLAP-yhtälöiden (*Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli, Parisi*, 1977) avulla [72]. Tässä korkeampien skaalojen käyttäytymisen määrityksessä käytetään jakautumis- ja kerroinfunktioita (*splitting functions, coefficient functions*), joiden tarkkuus riippuu niiden laskemisessa käytettyjen laskentasilmukoiden määrästä (*1-loop, 2-loop, 3-loop,...*) [73]. Vastaavanlaisia laskentasilmukoita käytetään myös vahvan kytkentävakion määrityksessä [62]. Yleensä häiriöteorian alimman kertaluvun approksimaatiossa käytetään yhden laskentasilmukan funktioita molemmille $f_{i/H}(x,Q_f)$ ja $\alpha_s(Q_r)$.

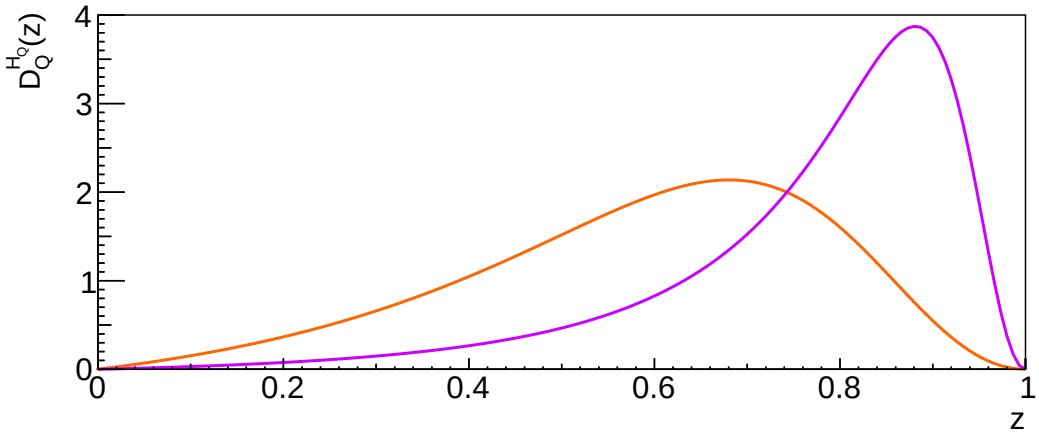
Mikäli hadronitörmäysprosessin mahdollisten aliprosessien vaikutusalat sekä hadronien partonijakaumafunktiot ovat tiedossa, koko prosessin vaikutusala on mahdollista muodostaa kvanttiväridynamiikan kollineaarisen faktorisaatioteoreeman avulla:

$$d\sigma(H_1H_2 \to kl + X) = \sum_{i,j=g,q,\overline{q}} \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 f_{i/H_1}(x_1,Q_f) f_{j/H_2}(x_2,Q_f) d\hat{\sigma}(ij \to kl), \quad (57)$$

missä $\hat{\sigma}$ on aliprosessin vaikutusala sekä x_1 ja x_2 partoneja i ja j vastaavat pitkittäisliikemääräosuudet. Teoreeman soveltamiseksi edellytetään, että törmäysprosessille pätee $\sqrt{s} \gg m_{H_1} + m_{H_2}$ (ja $Q_r \gtrsim 1$ GeV). [1]

Edellä olevasta lausekkeesta on jätetty kokonaan huomiotta mahdolliset lopputilakvarkkien hadronisaatiot $k \to K + X$ ja $l \to L + X$, joita ei ole mahdollista kuvata häiriöteorian avulla [1]. Hadronisaatio esitettäisiin tavanomaisesti lausekkeessa fragmentaatiofunktio-osuuden $D_Q^{H_Q}$ avulla [32]. Raskaiden kvarkkien $Q = c, b$ hadronisoitumista $Q \to H_Q + X$ on kuvattu usein Petersonin fragmentaatiofunktiolla, joka on hadronin kvarkin liikemäärän suuntaisen liikemäärän komponentin ja kvarkin liikemäärän suhteen z funktio (kuva 6) [74].

Koska raskaan kvarkin massa on huomattavan suuri, niin sen liikemäärä muuttuu yleensä hyvin vähän sen muodostaessa hadronin kevyen kvarkin kanssa [5]. Tästä johtuen on perusteltua approksimoida kvarkin ja hadronin liikemäärät samoiksi ja korvata fragmentaatiofunktiot mahdollisten lopputilahadronien H_Q fragmentaatio-osuuksilla $f(Q \to H_Q) = \int_0^1 D_Q^{H_Q}(z)dz$ [75]. Luonnollisesti kvarkkia (poislukien t)



Kuva 6. Petersonin fragmentaatiofunktiot c- (oranssi) ja b-kvarkeille (violetti). $D_Q^{H_Q}(z) = \frac{N}{z(1-\frac{1}{z}-\frac{\epsilon_Q}{1-z})^2}$, missä $\epsilon_c = 0{,}15$ ja $\epsilon_b = 0{,}016$, ja N on valittu siten, että $\int_0^1 D_Q^{H_Q}(z)dz = 1$. Siten tässä tapauksessa fragmentaatiofunktiot eivät ota kantaa muodostuneen hadronin H_Q tyyppiin. [74]

vastaavien fragmentaatio-osuuksien summa on 1. Määritellään

$$F(k,l \to K,L) \equiv \begin{cases} f(k \to K) \cdot f(l \to L), \text{ kun } k \text{ ja } l \text{ hadronisoituvat} \\ f(k \to K), \text{ kun } k \neq K \text{ ja } l = L \\ f(l \to L), \text{ kun } k = K \text{ ja } l \neq L \\ 1, \text{ kun hadronisaatioita ei tarkastella} \end{cases} \tag{58}$$

Tällöin käyttämällä edellä kuvattua hadronisaatioapproksimaatiota voidaan kirjoittaa

$$d\sigma(H_1H_2 \to KL + X) = F(k,l \to K,L)d\sigma(H_1H_2 \to kl + X). \tag{59}$$

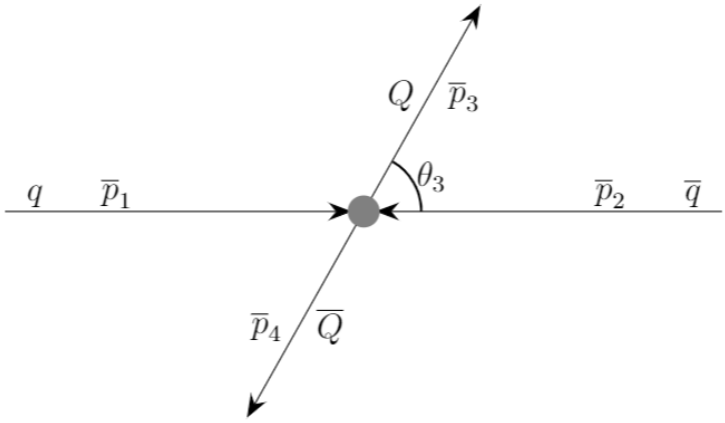
Tämän arvion luotettavuutta on tarkasteltu kriittisesti luvussa 5.2.

3 Vaikutusalojen lausekkeet

Johdan luvuissa 3.1 ja 3.2 aliprosessien $q + \overline{q} \to Q + \overline{Q}$ ja $g + g \to Q + \overline{Q}$, missä q on mielivaltainen kvarkki ja Q raskas kvarkki, kvanttiväridynamiikan häiriöteorian alinta kertalukua vastaavat $\hat{t}$-differentioidut vaikutusalat sekä kokonaisvaikutusalat. Kokonaisvaikutusalalla tarkoitetaan nyt leikkaamatonta ja differentioimatonta vaikutusalaa ($\hat{\sigma}(\sqrt{\hat{s}})$, $\sigma(\sqrt{s})$). Jatkossa Mandelstamin muuttujat $\hat{s}$, $\hat{t}$ ja $\hat{u}$ edustavat

aliprosessia, ja s, t ja u kokonaisprosessia. Lisäksi johdan luvussa 3.3 prosessin $p + \overline{p} \to Q + \overline{Q} + X$ lopputilakvarkkien poikittaisliikemäärän ja rapiditeettien suhteen differentioidun vaikutusalan (LO). Nämä lausekkeiden johtamiset ovat pääpiirteissään analogisia lähteessä [26] esitettyjen laskujen kanssa, mutta nyt $m_Q \neq 0$.

3.1 Aliprosessi $q + \overline{q} \to Q + \overline{Q}$



Kuva 7. Törmäysprosessi $q + \overline{q} \to Q + \overline{Q}$ CMS-koordinaatistossa.

Olkoon m_q alkutila- ja m_Q lopputila(anti)kvarkin massa. Indeksit 1, 2, 3 ja 4 vastaavat prosessin hiukkasia q, $\overline{q}$, Q ja $\overline{Q}$ (kuva 7). CMS-koordinaatistossa pätee (yhtälö (11))

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{m_q^2 + |\overline{p}_1|^2} = \sqrt{m_q^2 + |\overline{p}_2|^2} = E_2 \\ E_3 &= \sqrt{m_Q^2 + |\overline{p}_3|^2} = \sqrt{m_Q^2 + |\overline{p}_4|^2} = E_4. \end{aligned} \tag{60}$$

Täten

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \Leftrightarrow \; E_1 = E_3. \tag{61}$$

Koska $E_1 = E_2$ ja $\overline{p}_1 + \overline{p}_2 = 0$, niin (määritelmä (23))

$$\hat{s} = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 = (2E_1)^2 = 4E_1^2. \tag{62}$$

Mandelstamin muuttujalle $\hat{t}$

$$
\begin{aligned}
\hat{t} &= (p_1 - p_3)^2 \\
&= p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 \cdot p_3 \\
&= m_q^2 + m_Q^2 - 2\Big[E_1 E_3 - |\overline{p}_1||\overline{p}_3|\cos(\theta_3)\Big] \\
&= m_q^2 + m_Q^2 - 2E_1^2\Big[1 - \frac{\sqrt{E_1^2 - m_q^2}}{E_1}\frac{\sqrt{E_1^2 - m_Q^2}}{E_1}\cos(\theta_3)\Big] \\
&= m_q^2 + m_Q^2 - \frac{\hat{s}}{2}\Big[1 - \sqrt{(1 - \frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1 - \frac{4m_Q^2}{\hat{s}})}\cos(\theta_3)\Big],
\end{aligned}
$$

missä käytimme pistetuloa $\overline{p}_1 \cdot \overline{p}_3 = |\overline{p}_1||\overline{p}_3|\cos(\theta_3)$ ja identiteettejä $p^2 = m^2$, $E^2 = m^2 + |p|^2$, $E_1 = E_3$ sekä $\hat{s} = 4E_1^2$ (yhtälöt (15), (11), (61) ja (62)). Koska $\cos(\theta_3) \in [-1,1]$, niin muuttujan $\hat{t}$ minimi ja maksimi ovat

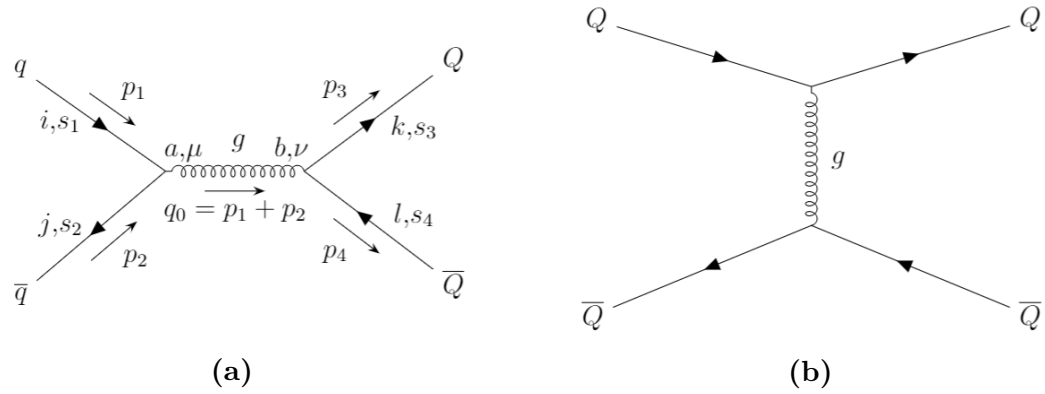
$$
\begin{aligned}
\hat{t}_{\min} &= m_q^2 + m_Q^2 - \frac{\hat{s}}{2}\Big[1 + \sqrt{(1 - \frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1 - \frac{4m_Q^2}{\hat{s}})}\Big] \\
\hat{t}_{\max} &= m_q^2 + m_Q^2 - \frac{\hat{s}}{2}\Big[1 - \sqrt{(1 - \frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1 - \frac{4m_Q^2}{\hat{s}})}\Big].
\end{aligned} \tag{63}
$$

Yhtälön (24) nojalla

$$
\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 2m_q^2 + 2m_Q^2. \tag{64}
$$

Prosessin nelivektorien skalaarituloille pätevät nyt seuraavat yhtäsuuruudet (määritelmät (23)):

$$
\begin{aligned}
\hat{s} &= (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 = 2m_q^2 + 2p_1 \cdot p_2 \\
\hat{s} &= (p_3 + p_4)^2 = p_3^2 + p_4^2 + 2p_3 \cdot p_4 = 2m_Q^2 + 2p_3 \cdot p_4 \\
\hat{t} &= (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 \cdot p_3 = m_q^2 + m_Q^2 - 2p_1 \cdot p_3 \\
\hat{t} &= (p_2 - p_4)^2 = p_2^2 + p_4^2 - 2p_2 \cdot p_4 = m_q^2 + m_Q^2 - 2p_2 \cdot p_4 \\
\hat{u} &= (p_1 - p_4)^2 = p_1^2 + p_4^2 - 2p_1 \cdot p_4 = m_q^2 + m_Q^2 - 2p_1 \cdot p_4 \\
\hat{u} &= (p_2 - p_3)^2 = p_2^2 + p_3^2 - 2p_2 \cdot p_3 = m_q^2 + m_Q^2 - 2p_2 \cdot p_3
\end{aligned}
$$



Kuva 8. Alimman kertaluvun Feynmanin diagrammit prosesseille $q+\overline{q} \to Q+\overline{Q}$ ($Q + \overline{Q} \to Q + \overline{Q}$), missä q on mielivaltainen kvarkki ja Q raskas kvarkki. Neliliikemäärät p_1, p_2, p_3, p_4 ja q_0, kvarkkien väritilat i, j, k ja l, gluonin väritilat a ja b, kvarkkien spin-tilat s_1, s_2, s_3 ja s_4 sekä Lorentzin indeksit μ ja ν ovat merkittynä ensimmäiseen diagrammiin (polarisoitumattoman) invariantin amplitudin muodostamisen helpottamiseksi. Neliliikemääriä, hiukkasten tiloja ja indeksejä ei ole merkittynä jälkimmäiseen Feynmanin diagrammiin, sillä sitä ei tulla huomioimaan laskussa.

eli

$$\begin{aligned}
p_1 \cdot p_2 &= \frac{\hat{s}}{2} - m_q^2 \\
p_3 \cdot p_4 &= \frac{\hat{s}}{2} - m_Q^2 \\
p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 &= \frac{m_q^2 + m_Q^2 - \hat{t}}{2} \\
p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 &= \frac{m_q^2 + m_Q^2 - \hat{u}}{2}.
\end{aligned} \tag{65}$$

Kuvassa 8 on esitettynä prosessia $q + \overline{q} \to Q + \overline{Q}$ vastaavat alimman kertaluvun Feynmanin diagrammit. Jälkimmäinen diagrammi ($Q + \overline{Q} \to Q + \overline{Q}$) jätetään huomiotta sen pienen kontribuution vuoksi, kuten lähteessä [76].

Prosessin $q + \overline{q} \to Q + \overline{Q}$ invariantti amplitudi on nyt (kuva 8a, $q_0 = p_1 + p_2$)

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M}(q\overline{q} \to Q\overline{Q}) &= \overline{u}_3(-ig_s(t^b)_{kl}\gamma_\nu)v_4(-\frac{i\delta^{ab}g^{\mu\nu}}{q_0^2})\overline{v}_2(-ig_s(t^a)_{ji}\gamma_\mu)u_1 \\
&= \frac{ig_s^2}{q_0^2}(t^a)_{ji}(t^a)_{kl}\overline{u}_3\gamma^\mu v_4\overline{v}_2\gamma_\mu u_1,
\end{aligned}$$

missä on käytetty luvussa 2.3 esitettyjä Feynmanin sääntöjä sekä metrisen tensorin $g^{\mu\nu}$ ominaisuuksia (yhtälö (6)). Käytin merkintää $u_1 \equiv u(p_1,s_1)$ ja vastaavasti muille spinoreille.

Polarisoitumattoman invariantin amplitudin neliö (yhtälö (51)) on

$$
\begin{aligned}
&\overline{\left|\mathcal{M}(q\overline{q} \to Q\overline{Q})\right|^2} \\
&= \frac{1}{2\cdot 2}\frac{1}{3\cdot 3}\sum_{\substack{s_1,s_2\\ s_3,s_4}}\sum_{\substack{i,j\\ k,l}} \mathcal{M}(q\overline{q} \to Q\overline{Q})\mathcal{M}(q\overline{q} \to Q\overline{Q})^* \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{9}\frac{g_s^4}{q_0^4}\sum_{\substack{s_1,s_2\\ s_3,s_4}}\sum_{\substack{i,j\\ k,l}} (t^a)_{ji}(t^a)_{kl}(t^c)^*_{ji}(t^c)^*_{kl}\overline{u}_3\gamma^\mu v_4\overline{v}_2\gamma_\mu u_1(\overline{u}_3\gamma^\varphi v_4)^*(\overline{v}_2\gamma_\varphi u_1)^* \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{9}\frac{g_s^4}{q_0^4}\sum_{\substack{s_1,s_2\\ s_3,s_4}}\sum_{\substack{i,j\\ k,l}} (t^a)_{ji}(t^c)_{ij}(t^a)_{kl}(t^c)_{lk}\overline{u}_3\gamma^\mu v_4\overline{v}_2\gamma_\mu u_1\overline{v}_4\gamma^\varphi u_3\overline{u}_1\gamma_\varphi v_2 \\
&= (\frac{1}{9}\sum_{a,b}\mathrm{TR}(t^at^c)\mathrm{TR}(t^at^c))\frac{g_s^4}{q_0^4}(\frac{1}{2}\sum_{s_1,s_2}\overline{v}_2\gamma_\mu u_1\overline{u}_1\gamma_\varphi v_2)(\frac{1}{2}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma^\mu v_4\overline{v}_4\gamma^\varphi u_3) \\
&= C_0\frac{g_s^4}{q_0^4}L_{q,\mu\varphi}L_Q^{\mu\varphi},
\end{aligned}
$$

kun

$$
\begin{aligned}
C_0 &\equiv \frac{1}{9}\mathrm{TR}(t^at^c)\mathrm{TR}(t^at^c) \\
L_{q,\mu\varphi} &\equiv \frac{1}{2}\sum_{s_1,s_2}\overline{v}_2\gamma_\mu u_1\overline{u}_1\gamma_\varphi v_2 \\
L_Q^{\mu\varphi} &\equiv \frac{1}{2}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma^\mu v_4\overline{v}_4\gamma^\varphi u_3.
\end{aligned}
$$

Nimitetään näitä väritekijäksi, alkutilan kvarkkitensoriksi ja lopputilan kvarkkitensoriksi. Edellä hyödynnettiin konjugaattirelaatiota (43) ($(\overline{w}_1\gamma^\mu w_2)^* = \overline{w}_2\gamma^\mu w_1$) ja SU(3):n virittäjämatriisien hermiittisyyttä $(t^c)^*_{ji} = (t^c)_{ij}$. Väritekijä saadaan laskettua yhtälöitä (47) ja (48) hyödyntäen:

$$
C_0 = \frac{1}{9}\mathrm{TR}(t^at^c)\mathrm{TR}(t^at^c) = \frac{1}{9}T(F)\delta^{ac}(F)\delta^{ac} = \frac{1}{9}(T(F))^2\delta^{aa} = \frac{1}{9}(\frac{1}{2})^2\cdot 8 = \frac{2}{9}.
$$

Esitetään alkutilan kvarkkitensorin lauseke spinorien ja matriisien alkioiden avulla:

$$
\begin{aligned}
L_{q,\mu\varphi} &\equiv \frac{1}{2}\sum_{s_1,s_2} \overline{v}_2\gamma_\mu u_1\overline{u}_1\gamma_\varphi v_2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{s_1,s_2} (\overline{v}_2)_a(\gamma_\mu)_{ab}(u_1)_b(\overline{u}_1)_c(\gamma_\varphi)_{cd}(v_2)_d \\
&= \frac{1}{2}\Big[\sum_{s_2}(v_2)_d(\overline{v}_2)_a\Big](\gamma_\mu)_{ab}\Big[\sum_{s_1}(u_1)_b(\overline{u}_1)_c\Big](\gamma_\varphi)_{cd}.
\end{aligned}
$$

Nyt voimme käyttää projektio-operaattoreita $\sum_{s=1,2} u(p,s)\overline{u}(p,s) = \not{p} + m$ ja $\sum_{s=1,2} v(p,s)\overline{v}(p,s) = \not{p} - m$ (yhtälö (42)):

$$
\begin{aligned}
L_{q,\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\not{p}_2 - m_q)_{da}(\gamma_\mu)_{ab}(\not{p}_1 + m_q)_{bc}(\gamma_\varphi)_{cd} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{TR}\Big[(\not{p}_2 - m_q)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m_q)\gamma_\varphi\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{TR}(\not{p}_2\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\varphi) + m_q\mathrm{TR}(\not{p}_2\gamma_\mu\gamma_\varphi) - m_q\mathrm{TR}(\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\varphi) - m_q^2\mathrm{TR}(\gamma_\mu\gamma_\varphi)\Big].
\end{aligned}
$$

γ-matriisien parittoman määrän tulon jälki on nolla (yhtälö (39)). Täten

$$
L_{q,\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{TR}(\not{p}_2\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\varphi) - m_q^2\mathrm{TR}(\gamma_\mu\gamma_\varphi)\Big].
$$

Loput jäljet on mahdollista ilmaista metristen tensorien avulla käyttämällä identiteettejä $\mathrm{TR}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$ ja $\mathrm{TR}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\varphi\gamma^\kappa) = 4(g^{\mu\nu}g^{\varphi\kappa} - g^{\mu\varphi}g^{\nu\kappa} + g^{\mu\kappa}g^{\nu\varphi})$, ja skalaaritulon esitystä $a \cdot b = a^\mu b^\nu g_{\mu\nu}$ (yhtälöt (36) ja (7)):

$$
\begin{aligned}
L_{q,\mu\nu} &= \frac{1}{2}\Big[p_2^\alpha p_1^\beta\mathrm{TR}(\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\varphi) - m_q^2\mathrm{TR}(\gamma_\mu\gamma_\varphi)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[p_2^\alpha p_1^\beta \cdot 4(g_{\alpha\mu}g_{\beta\varphi} - g_{\alpha\beta}g_{\mu\varphi} + g_{\alpha\varphi}g_{\mu\beta}) - m_q^2 \cdot 4g_{\mu\varphi}\Big] \\
&= 2\Big[p_{2\mu}p_{1\varphi} - (p_2 \cdot p_1)g_{\mu\varphi} + p_{2\varphi}p_{1\mu} - m_q^2 g_{\mu\varphi}\Big] \\
&= 2\Big[p_{1\mu}p_{2\varphi} + p_{1\varphi}p_{2\mu} - (m_q^2 + p_1 \cdot p_2)g_{\mu\varphi}\Big] \\
&= 2(p_{1\mu}p_{2\varphi} + p_{1\varphi}p_{2\mu} - \frac{\hat{s}}{2}g_{\mu\varphi}).
\end{aligned}
$$

Vastaavalla tavoin

$$
\begin{aligned}
L_Q^{\mu\varphi} &\equiv \frac{1}{2}\sum_{s_3,s_4} \overline{u}_3\gamma^\mu v_4\overline{v}_4\gamma^\varphi u_3 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{s_3,s_4} (\overline{u}_3)_a(\gamma^\mu)_{ab}(v_4)_b(\overline{v}_4)_c(\gamma^\varphi)_{cd}(u_3)_d \\
&= \frac{1}{2}\Big[\sum_{s_3}(u_3)_d(\overline{u}_3)_a\Big](\gamma^\mu)_{ab}\Big[\sum_{s_4}(v_4)_b(\overline{v}_4)_c\Big](\gamma^\varphi)_{cd} \\
&= \frac{1}{2}(\not{p}_3 + m_Q)_{da}(\gamma^\mu)_{ab}(\not{p}_4 - m_Q)_{bc}(\gamma^\varphi)_{cd} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{TR}\Big[(\not{p}_3 + m_Q)\gamma^\mu(\not{p}_4 - m_Q)\gamma^\varphi\Big].
\end{aligned}
$$

Siispä lopputilan kvarkkitensori saadaan alkutilan kvarkkitensorista korvaamalla p_1, p_2 ja m_q suureilla p_3, p_4 ja m_Q ja muuttamalla Lorentzin indeksejä:

$$
L_Q^{\mu\varphi} = 2(p_3^\mu p_4^\varphi + p_3^\varphi p_4^\mu - \frac{\hat{s}}{2}g^{\mu\varphi}).
$$

Tensorisumma on ($a \cdot b = a_\mu b^\mu$, $g^\mu g_\mu = 4$, yhtälöt (7) ja (10))

$$
\begin{aligned}
L_{q,\mu\varphi}L_Q^{\mu\varphi} &= 4(p_{1\mu}p_{2\varphi} + p_{1\varphi}p_{2\mu} - \frac{\hat{s}}{2}g_{\mu\varphi})(p_3^\mu p_4^\varphi + p_3^\varphi p_4^\mu - \frac{\hat{s}}{2}g^{\mu\varphi}) \\
&= 4\Big[(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) + (p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) - \frac{\hat{s}}{2}(p_1\cdot p_2) + (p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) \\
&+ (p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) - \frac{\hat{s}}{2}(p_1\cdot p_2) - \frac{\hat{s}}{2}(p_3\cdot p_4) - \frac{\hat{s}}{2}(p_3\cdot p_4) + \frac{\hat{s}^2}{4}\cdot 4\Big] \\
&= 4\Big[2(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) + 2(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) - \hat{s}((p_1\cdot p_2) + (p_3\cdot p_4)) + \hat{s}^2\Big] \\
&= 4\Big[2(\frac{m_q^2 + m_Q^2 - \hat{t}}{2})^2 + 2(\frac{m_q^2 + m_Q^2 - \hat{u}}{2})^2 - \hat{s}(\frac{\hat{s}}{2} - m_q^2 + \frac{\hat{s}}{2} - m_Q^2) + \hat{s}^2\Big] \\
&= 2\Big[\hat{t}^2 + \hat{u}^2 + 2m_q^2\hat{s} + 2m_Q^2\hat{s} - 2m_q^2\hat{t} - 2m_Q^2\hat{t} - 2m_q^2\hat{u} - 2m_Q^2\hat{u} + 2m_q^4 \\
&+ 2m_Q^4 + 4m_q^2m_Q^2\Big] \\
&= 2\Big[\hat{t}^2 + \hat{u}^2 + 2(m_q^2 + m_Q^2)\hat{s} - 2(m_q^2 + m_Q^2)(\hat{t} + \hat{u}) + 2(m_q^2 + m_Q^2)^2\Big] \\
&= 2\Big[\hat{t}^2 + \hat{u}^2 + 2(m_q^2 + m_Q^2)\hat{s} - 2(m_q^2 + m_Q^2)(2m_q^2 + 2m_Q^2 - \hat{s}) + 2(m_q^2 + m_Q^2)^2\Big] \\
&= 2\Big[\hat{t}^2 + \hat{u}^2 + 4(m_q^2 + m_Q^2)\hat{s} - 2(m_q^2 + m_Q^2)^2\Big].
\end{aligned}
$$

Koska $g_s^2 = 4\pi\alpha_s$ (yhtälö (46)) ja $q_0^2 = (p_1 + p_2)^2 = \hat{s}$, niin

$$\overline{\left|\mathcal{M}(q\overline{q} \to Q\overline{Q})\right|^2} = C_0 \frac{g_s^4}{q_0^4} L_{q,\mu\varphi} L_Q^{\mu\varphi}$$
$$= \frac{64\pi^2\alpha_s^2}{9\hat{s}^2}\Big[\hat{t}^2 + \hat{u}^2 + 4(m_q^2 + m_Q^2)\hat{s} - 2(m_q^2 + m_Q^2)^2\Big]. \tag{66}$$

Prosessia $q + \overline{q} \to Q + \overline{Q}$ vastaava λ on (määritelmä (29))

$$\lambda(\hat{s},m_q^2,m_q^2) = \hat{s}^2 + m_q^4 + m_q^4 - 2m_q^2\hat{s} - 2m_q^4 - 2m_q^2\hat{s}$$
$$= \hat{s}^2 - 4m_q^2\hat{s}$$
$$= \hat{s}^2(1 - \frac{4m_q^2}{\hat{s}}).$$

Yhtälön (30) nojalla

$$\frac{d\hat{\sigma}(q\overline{q} \to Q\overline{Q})}{d\hat{t}} = \frac{\overline{\left|\mathcal{M}(q\overline{q} \to Q\overline{Q})\right|^2}}{16\pi\lambda(\hat{s},m_q^2,m_q^2)}$$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^4(1 - \frac{4m_q^2}{\hat{s}})}\Big[\hat{t}^2 + \hat{u}^2 + 4(m_q^2 + m_Q^2)\hat{s} - 2(m_q^2 + m_Q^2)^2\Big] \tag{67}$$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^4(1 - \frac{4m_q^2}{\hat{s}})}\Big[\hat{t}^2 + (2m_q^2 + 2m_Q^2 - \hat{s} - \hat{t})^2$$
$$+ 4(m_q^2 + m_Q^2)\hat{s} - 2(m_q^2 + m_Q^2)^2\Big]$$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^4(1 - \frac{4m_q^2}{\hat{s}})}\Big[\hat{s}^2 + 2\hat{t}^2 + 2\hat{s}\hat{t} - 4(m_q^2 + m_Q^2)\hat{t} + 2(m_q^2 + m_Q^2)^2\Big]. \tag{68}$$

Prosessin $q + \overline{q} \to Q + \overline{Q}$ $\hat{t}$-differentioidun vaikutusalan integroimiseksi on tarpeen laskea sijoitukset $\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \hat{t}$, $\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \hat{t}^2$ ja $\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \hat{t}^3$. Näistä ensimmäiselle, yhtälöä (63) käyttäen, saadaan

$$\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \hat{t} = \hat{t}_{\max} - \hat{t}_{\min} = \hat{s}\sqrt{(1 - \frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1 - \frac{4m_Q^2}{\hat{s}})}.$$

Määritellään laskujen helpottamiseksi

$$A \equiv m_q^2 + m_Q^2 \qquad B \equiv \frac{\hat{s}}{2} \qquad C \equiv \sqrt{(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}})}.$$

Nyt voidaan kirjoittaa $\hat{t}_{\max} = A - B(1-C)$ ja $\hat{t}_{\min} = A - B(1+C)$. Toisen potenssin sijoitukselle

$$\begin{aligned}
\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \hat{t}^2 &= \Big|_{A-B(1+C)}^{A-B(1-C)} \hat{t}^2 \\
&= (A - B(1-C))^2 - (A - B(1+C))^2 \\
&= (4AB - 4B^2)C \\
&= \Big[2(m_q^2 + m_Q^2)\hat{s} - \hat{s}^2\Big]\sqrt{(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}})}.
\end{aligned}$$

Kolmannen potenssin sijoitus:

$$\begin{aligned}
\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \hat{t}^3 &= \Big|_{A-B(1+C)}^{A-B(1-C)} \hat{t}^3 \\
&= (A - B(1-C))^3 - (A - B(1+C))^3 \\
&= (6A^2B - 12AB^2 + 6B^3 + 2B^3C^2)C \\
&= \Big[6(m_q^2 + m_Q^2)^2\frac{\hat{s}}{2} - 12(m_q^2 + m_Q^2)(\frac{\hat{s}}{2})^2 + 6(\frac{\hat{s}}{2})^3 \\
&+ 2(\frac{\hat{s}}{2})^3\Big(\sqrt{(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}})}\Big)^2\Big]\sqrt{(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}})} \\
&= \Big[3\hat{s}(m_q^4 + 2m_q^2m_Q^2 + m_Q^4) - 3\hat{s}^2(m_q^2 + m_Q^2) + \frac{3\hat{s}}{4} \\
&+ \frac{\hat{s}^3}{4}(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}})\Big]\sqrt{(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}})} \\
&= \Big[3m_q^4\hat{s} + 6m_q^2m_Q^2\hat{s} + 3m_Q^4\hat{s} - 3m_q^2\hat{s}^2 - 3m_Q^2\hat{s}^2 + \frac{3\hat{s}^3}{4} \\
&+ \frac{\hat{s}^3}{4} - m_q^2\hat{s}^2 - m_Q^2\hat{s}^2 + 4m_q^2m_Q^2\hat{s}\Big]\sqrt{(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}})} \\
&= \Big[\hat{s}^3 - 4(m_q^2 + m_Q^2)\hat{s}^2 + 10m_q^2m_Q^2\hat{s} + 3(m_q^4 + m_Q^4)\hat{s}\Big]\sqrt{(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}})}.
\end{aligned}$$

Täten prosessin $q + \overline{q} \to Q + \overline{Q}$ kokonaisvaikutusalaksi saadaan

$$
\begin{aligned}
&\hat{\sigma}(q\overline{q} \to Q\overline{Q}) \\
&= \int_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} d\hat{t} \frac{d\hat{\sigma}(q\overline{q} \to Q\overline{Q})}{d\hat{t}} \\
&= \int_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} d\hat{t} \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^4(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})} \Big\{ \hat{s}^2 + 2\hat{t}^2 + 2\hat{s}\hat{t} - 4(m_q^2+m_Q^2)\hat{t} + 2(m_q^2+m_Q^2)^2 \Big\} \\
&= \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^4(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})} \Big\{ \frac{2}{3}\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \hat{t}^3 + \Big[2\hat{s} - 4(m_q^2+m_Q^2)\Big]\frac{1}{2}\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \hat{t}^2 + \Big[\hat{s}^2 + 2(m_q^2+m_Q^2)^2\Big]\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \hat{t} \Big\} \\
&= \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^4(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})} \Big\{ \frac{2}{3}\Big[\hat{s}^3 - 4(m_q^2+m_Q^2)\hat{s}^2 + 10m_q^2m_Q^2\hat{s} + 3(m_q^4+m_Q^4)\hat{s}\Big] \\
&\cdot \sqrt{(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}})} + \Big[\hat{s} - 2(m_q^2+m_Q^2)\Big]\Big[2(m_q^2+m_Q^2)\hat{s} - \hat{s}^2\Big] \\
&\cdot \sqrt{(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}})} + \Big[\hat{s}^2 + 2(m_q^2+m_Q^2)^2\Big]\hat{s}\sqrt{(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}})} \Big\} \\
&= \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^4(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})} \Big\{ \frac{2\hat{s}^3}{3} - \frac{8}{3}(m_q^2+m_Q^2)\hat{s}^2 + \frac{20}{3}m_q^2m_Q^2\hat{s} + 2(m_q^4+m_Q^4)\hat{s} \\
&+ 2(m_q^2+m_Q^2)\hat{s}^2 - \hat{s}^3 - 4m_q^4\hat{s} - 8m_q^2m_Q^2\hat{s} - 4m_Q^4\hat{s} + 2(m_q^2+m_Q^2)\hat{s}^2 \\
&+ \hat{s}^3 + 2m_q^4\hat{s} + 4m_q^2m_Q^2\hat{s} + 2m_Q^4\hat{s} \Big\} \sqrt{(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}})} \\
&= \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^4(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})} \Big\{ \frac{2\hat{s}^3}{3} + \frac{4}{3}(m_q^2+m_Q^2)\hat{s}^2 + \frac{8}{3}m_q^2m_Q^2\hat{s} \Big\} \sqrt{(1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}})(1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}})} \\
&= \frac{8\pi\alpha_s^2}{27\hat{s}}(1 + 2\frac{m_q^2+m_Q^2}{\hat{s}} + 4\frac{m_q^2m_Q^2}{\hat{s}^2})\sqrt{\frac{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}{1-\frac{4m_q^2}{\hat{s}}}}. \qquad (69)
\end{aligned}
$$

Koska prosessit $c + \overline{c} \to Q + \overline{Q}$ ja $b + \overline{b} \to Q + \overline{Q}$ vaikuttavat hyvin vähän kokonaisprosessin vaikutusalaan ja $m_u, m_d, m_s \ll m_Q < 2m_Q = (\sqrt{\hat{s}})_{\min}$, niin voimme jättää massat m_q huomiotta. Tällöin vaikutusalojen lausekkeet saavat muodot

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{\sigma}(q\overline{q} \to Q\overline{Q})}{d\hat{t}} &= \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^4}(\hat{t}^2 + \hat{u}^2 + 4m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^4) \qquad (70) \\
&= \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^4}(\hat{s}^2 + 2\hat{t}^2 + 2\hat{s}\hat{t} - 4m_Q^2\hat{t} + 2m_Q^4) \qquad (71)
\end{aligned}
$$

ja

$$\hat{\sigma}(q\overline{q} \to Q\overline{Q}) = \frac{8\pi\alpha_s^2}{27\hat{s}}(1 + \frac{2m_Q^2}{\hat{s}})\sqrt{1 - \frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}. \tag{72}$$

3.2 Aliprosessi $g + g \to Q + \overline{Q}$

Indeksit 1, 2, 3 ja 4 vastaavat nyt prosessin hiukkasia g, g, Q ja $\overline{Q}$ (kuva 9a). Kinemaattisesti törmäysprosessi on sama kuin tapauksessa $q + \overline{q} \to Q + \overline{Q}$, lukuun ottamatta nyt massattomia alkutilahiukkasia. Siten yhtälöiden (63), (64) ja (65) nojalla pätee

$$\begin{aligned} \hat{t}_{\min} &= m_Q^2 - \frac{\hat{s}}{2}(1 + \sqrt{1 - \frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}) \\ \hat{t}_{\max} &= m_Q^2 - \frac{\hat{s}}{2}(1 - \sqrt{1 - \frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}), \end{aligned} \tag{73}$$

$$\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 2m_Q^2, \tag{74}$$

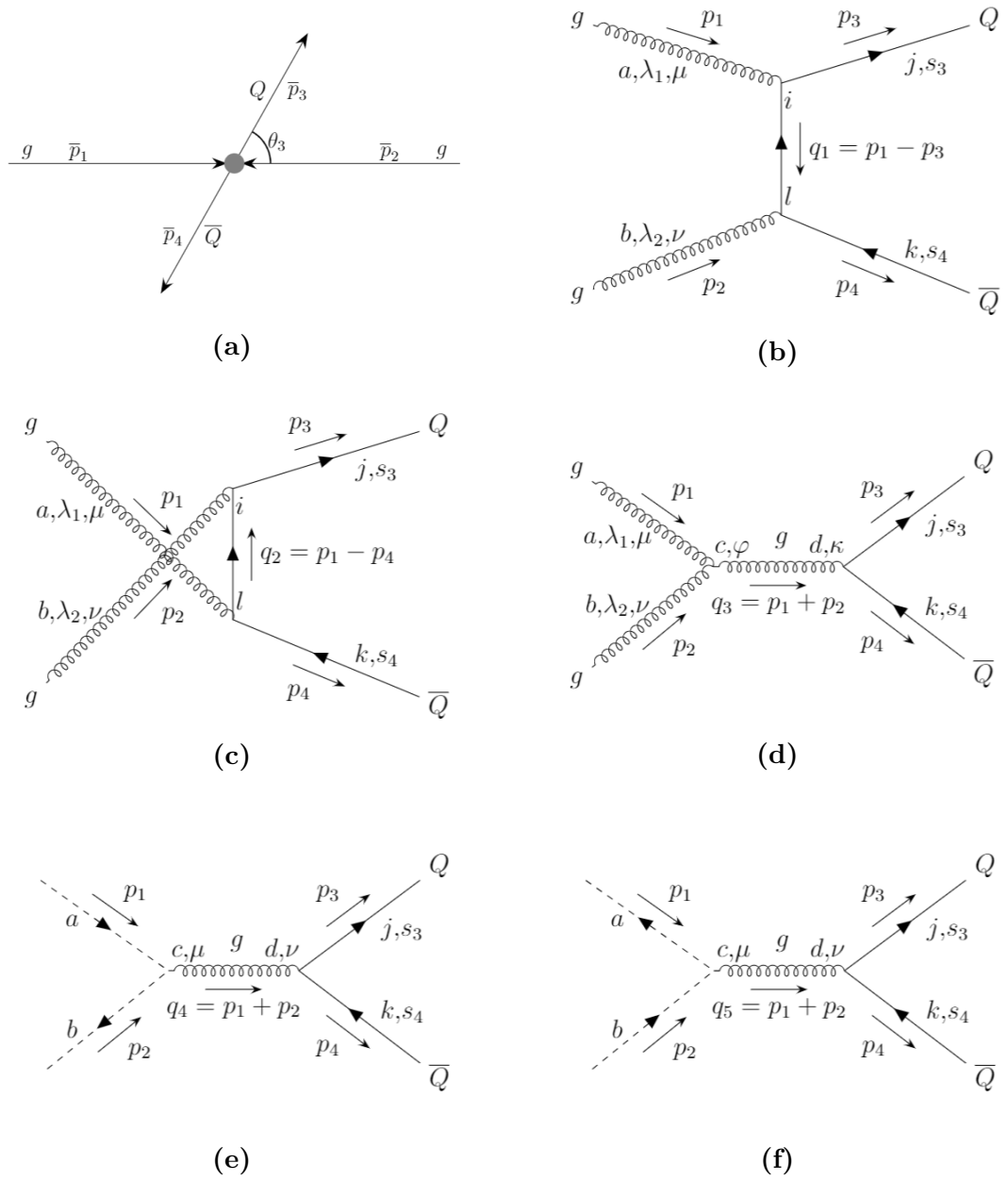
ja

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= \frac{\hat{s}}{2} \\ p_3 \cdot p_4 &= \frac{\hat{s}}{2} - m_Q^2 \\ p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 &= \frac{m_Q^2 - \hat{t}}{2} \\ p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 &= \frac{m_Q^2 - \hat{u}}{2}. \end{aligned} \tag{75}$$

Ensimmäistä Feynmanin diagrammia (t-kanava, kuva 9b) vastaava invariantti amplitudi on

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_1 &= \varepsilon_1^\mu \overline{u}_3(-ig_s(t^a)_{ji}\gamma_\mu)\frac{i\delta_{li}(-\not{q}_1 + m_Q)}{q_1^2 - m_Q^2}(-ig_s(t^b)_{lk}\gamma_\nu)v_4\varepsilon_2^\nu \\ &= -\frac{ig_s^2}{q_1^2 - m_Q^2}(t^a t^b)_{jk}\overline{u}_3\gamma_\mu(m_Q - \not{q}_1)\gamma_\nu v_4 \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu \end{aligned}$$

ja toista (u-kanava, kuva 9c) vastaa



Kuva 9. Prosessi $g + g \to Q + \overline{Q}$ CMS-koordinaatistossa ja vastaavat alimman kertaluvun Feynmanin diagrammit. Vapaiden hiukkasten neliliikemäärät p_1, p_2, p_3, p_4, propagaattorien neliliikemäärät q_1, q_2, q_3, q_4 ja q_5, kvarkkien väritilat i, j, k ja l, gluonien/aaveiden väritilat a, b, c ja d, gluonien polarisaatiotilat λ_1 ja λ_2, kvarkkien spin-tilat s_3 ja s_4 sekä Lorentzin indeksit μ, ν, φ ja κ ovat merkittyinä diagrammeihin.

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_2 &= \varepsilon_2^\nu \overline{u}_3(-ig_s(t^b)_{ji}\gamma_\nu)\frac{i\delta_{li}(\not{q}_2+m_Q)}{q_2^2-m_Q^2}(-ig_s(t^a)_{lk}\gamma_\mu)v_4\varepsilon_1^\mu \\
&= -\frac{ig_s^2}{q_2^2-m_Q^2}(t^bt^a)_{jk}\overline{u}_3\gamma_\nu(\not{q}_2+m_Q)\gamma_\mu v_4\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu.
\end{aligned}
$$

Kolmas invariantti amplitudi (s-kanava, kuva 9d) on

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_3 &= \overline{u}_3(-ig_s(t^{jk})\gamma_\kappa)v_4(-\frac{i\delta^{cd}g^{\varphi\kappa}}{q_3^2})\varepsilon_1^\mu\mathscr{H}^{abc}_{\mu\nu\varphi}(p_1,p_2,-q_3)\varepsilon_2^\nu \\
&= -\frac{g_s}{q_3^2}(t^c)_{jk}\Big\{-g_sf^{abc}\Big[g_{\mu\nu}(p_1-p_2)_\varphi+g_{\nu\varphi}(p_2-(-p_1-p_2))_\mu \\
&+ g_{\varphi\mu}(-p_1-p_2-p_1)_\nu\Big]\Big\}\overline{u}_3\gamma^\varphi v_4\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu \\
&= \frac{g_s^2}{q_3^2}(t^c)_{jk}f^{abc}\overline{u}_3\gamma^\varphi v_4\Big[g_{\mu\nu}(p_1-p_2)_\varphi+g_{\nu\varphi}(p_1+2p_2)_\mu+g_{\varphi\mu}(-2p_1-p_2)_\nu\Big]\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu \\
&= \frac{g_s^2}{q_3^2}(t^c)_{jk}f^{abc}\overline{u}_3\gamma^\varphi v_4K_{\mu\nu\varphi}\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu,
\end{aligned}
$$

missä on määritelty

$$
K_{\mu\nu\varphi} \equiv g_{\mu\nu}(p_1-p_2)_\varphi+g_{\nu\varphi}(p_1+2p_2)_\mu+g_{\varphi\mu}(-2p_1-p_2)_\nu.
$$

Prosessia vastaavat aaveamplitudit ovat (kuva 9e)

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{G1} &= \overline{u}_3(-ig_s(t^d)_{jk}\gamma_\nu)v_4(-\frac{i\delta^{cd}g^{\mu\nu}}{q_4^2})\cdot 1\cdot(-g_sf^{cba}p_{2\mu})\cdot 1 \\
&= -\frac{g_s^2}{q_4^2}(t^c)_{jk}f^{abc}\overline{u}_3\not{p}_2v_4
\end{aligned}
$$

ja (kuva 9f)

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{G2} &= \overline{u}_3(-ig_s(t^d)_{jk}\gamma_\nu)v_4(-\frac{i\delta^{cd}g^{\mu\nu}}{q_5^2})\cdot 1\cdot(-g_sf^{cab}p_{1\mu})\cdot 1 \\
&= \frac{g_s^2}{q_5^2}(t^c)_{jk}f^{abc}\overline{u}_3\not{p}_1v_4,
\end{aligned}
$$

missä $f^{abc}=-f^{cba}=f^{cab}$.

Määritellään invarianttien amplitudien lausekkeiden pohjalta

$$\mathcal{M}_{1\mu\nu} \equiv \frac{g_s^2}{q_1^2 - m_Q^2}(t^a t^b)_{jk}\overline{u}_3\gamma_\mu(m_Q - \not{q}_1)\gamma_\nu v_4,$$
$$\mathcal{M}_{2\mu\nu} \equiv \frac{g_s^2}{q_2^2 - m_Q^2}(t^b t^a)_{jk}\overline{u}_3\gamma_\nu(\not{q}_2 + m_Q)\gamma_\mu v_4,$$
$$\mathcal{M}_{3\mu\nu} \equiv \frac{ig_s^2}{q_3^2}(t^c)_{jk}f^{abc}\overline{u}_3\gamma^\varphi v_4 K_{\mu\nu\varphi},$$

ja

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} \equiv \mathcal{M}_{1\mu\nu} + \mathcal{M}_{2\mu\nu} + \mathcal{M}_{3\mu\nu}.$$

Tällöin

$$\mathcal{M}(gg \to Q\overline{Q}) = \mathcal{M}_{\mu\nu}\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu$$

Nyt prosessin $g + g \to Q + \overline{Q}$ polarisoitumaton invariantin amplitudin neliö (yhtälö (52)) on

$$\begin{aligned}
\overline{\left|\mathcal{M}(gg \to Q\overline{Q})\right|^2} &= \frac{1}{8\cdot 8}\frac{1}{2\cdot 2}\sum_{a,b}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\sum_{s_3.s_4}\left|\mathcal{M}(gg \to Q\overline{Q})\right|^2 \\
&= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\sum_{s_3,s_4}\left|\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3\right|^2 \\
&= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}(\mathcal{M}_{1\mu\nu} + \mathcal{M}_{2\mu\nu} + \mathcal{M}_{3\mu\nu}) \\
&(\mathcal{M}_{1\alpha\beta} + \mathcal{M}_{2\alpha\beta} + \mathcal{M}_{3\alpha\beta})^*(\sum_{\lambda_1}\varepsilon_1^\mu\varepsilon_1^{\alpha *})(\sum_{\lambda_2}\varepsilon_2^\nu\varepsilon_2^{\beta *}) \\
&= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}\mathcal{M}_{\mu\nu}\mathcal{M}^*_{\alpha\beta}P^{\mu\alpha}(p_1)P^{\nu\beta}(p_2) \\
&= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}((-g^{\mu\alpha})(-g^{\nu\beta})\mathcal{M}_{\mu\nu}\mathcal{M}^*_{\alpha\beta} - \mathcal{M}_{G1}\mathcal{M}^*_{G1} \\
&- \mathcal{M}_{G2}\mathcal{M}^*_{G2}) \\
&= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}(\mathcal{M}_{\mu\nu}\mathcal{M}^{\mu\nu *} - \left|\mathcal{M}_{G1}\right|^2 - \left|\mathcal{M}_{G2}\right|^2),
\end{aligned}$$

joka muokattiin lopulliseen, aaveamplitudit sisältävään, muotoon käyttämällä polarisaatiotensorin $P^{\mu\nu}(p) \equiv \sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^{\mu}(p,\lambda)\varepsilon^{\nu *}(p,\lambda) = -g^{\mu\nu} + \frac{p^{\mu}\hat{p}^{\nu}+\hat{p}^{\mu}p^{\nu}}{p\cdot\hat{p}}$ (yhtälö (44)) ominaisuuksia, kuten lähteessä [26]. Tässä esityksessä termi $\mathcal{M}_{\mu\nu}\mathcal{M}^{\mu\nu *}$ sisältää, Feynmanin mitassa laskettuna, gluonien fysikaalisten polarisaatiotilojen $\lambda_{1,2} = 1{,}2$ lisäksi epäfysikaaliset, ei-poikittaiset, polarisaatiotilat. Näiden ylimääräisten polarisaatiotilojen kontribuutio supistetaan pois kahden aaveamplitudin avulla. Polarisoitumattoman invariantin amplitudin neliö $\overline{\left|\mathcal{M}(gg \to Q\overline{Q})\right|^2}$ voitaisiin laskea myös ilman aaveita kolmella Feynmanin diagrammilla, mutta yllä esitetyllä tavalla lasku saadaan suoraviivaisesti tehdyksi kovariantissa (Feynmanin) mitassa ottamalla polarisaatiotensoriksi yksinkertaisesti $-g^{\mu\nu}$. [26]

Edeltävän lausekkeen ensimmäinen termi voidaan jakaa kuuteen osaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}\mathcal{M}_{\mu\nu}\mathcal{M}^{\mu\nu *} &= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}(\mathcal{M}_{1\mu\nu}+\mathcal{M}_{2\mu\nu}+\mathcal{M}_{3\mu\nu}) \\
&\quad (\mathcal{M}_1^{\mu\nu}+\mathcal{M}_2^{\mu\nu}+\mathcal{M}_3^{\mu\nu})^* \\
&= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}(\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_1^{\mu\nu *}+\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}+\mathcal{M}_{3\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *} \\
&\quad + 2\mathrm{Re}(\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}+\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}+\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *})) \\
&= \overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_1^{\mu\nu *}}+\overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}}+\overline{\mathcal{M}_{3\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}} \\
&\quad + 2\mathrm{Re}(\overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}}+\overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}}+\overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}}),
\end{aligned}$$

missä on määritelty, τ, $\epsilon = 1, 2, 3$,

$$\overline{\mathcal{M}_{\tau\mu\nu}\mathcal{M}_{\epsilon}^{\mu\nu *}} \equiv \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}\mathcal{M}_{\tau\mu\nu}\mathcal{M}_{\epsilon}^{\mu\nu *}.$$

Täten

$$\begin{aligned}
\overline{\left|\mathcal{M}(gg \to Q\overline{Q})\right|^2} &= \overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_1^{\mu\nu *}}+\overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}}+\overline{\mathcal{M}_{3\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}} \\
&\quad + 2\mathrm{Re}(\overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}}+\overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}}+\overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}}) \\
&\quad - \overline{|\mathcal{M}_{G1}|^2} - \overline{|\mathcal{M}_{G2}|^2}.
\end{aligned}$$

Ensimmäinen termi (t-kanava):

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_1^{\mu\nu *}} \\
&= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_1^{\mu\nu *} \\
&= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}\Big[\frac{g_s^2}{q_1^2-m_Q^2}(t^a t^b)_{jk}\overline{u}_3\gamma_\mu(m_Q-\not{q}_1)\gamma_\nu v_4\Big]\Big[\frac{g_s^2}{q_1^2-m_Q^2}(t^a t^b)_{jk}\overline{u}_3\gamma^\mu(m_Q-\not{q}_1)\gamma^\nu v_4\Big]^* \\
&= \frac{g_s^4}{(q_1^2-m_Q^2)^2}\frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}(t^a t^b)_{jk}(t^b t^a)_{kj}\overline{u}_3\gamma_\mu(m_Q-\not{q}_1)\gamma_\nu v_4\overline{v}_4\gamma^\nu(m_Q-\not{q}_1)\gamma^\mu u_3 \\
&= \Big(\sum_{a,b}\frac{\mathrm{TR}(t^a t^b t^b t^a)}{64}\Big)\frac{g_s^4}{(q_1^2-m_Q^2)^2}\frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\mu(\not{q}_1-m_Q)\gamma_\nu v_4\overline{v}_4\gamma^\nu(\not{q}_1-m_Q)\gamma^\mu u_3 \\
&= C_{11}\frac{g_s^4}{(q_1^2-m_Q^2)^2}S_{11},
\end{aligned}
$$

missä

$$((t^a t^b)_{jk})^* = ((t^a)_{ji}(t^b)_{ik})^* = (t^a)_{ij}(t^b)_{ki} = (t^b t^a)_{kj}$$

ja

$$
\begin{aligned}
C_{11} &\equiv \frac{\mathrm{TR}(t^a t^b t^b t^a)}{64} \\
S_{11} &\equiv \frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\mu(\not{q}_1-m_Q)\gamma_\nu v_4\overline{v}_4\gamma^\nu(\not{q}_1-m_Q)\gamma^\mu u_3.
\end{aligned}
$$

Väritekijä on ($t^a t^a = C(F)\mathrm{I}_F$, $C_2(F)=\frac{4}{3}$, $\mathrm{I}_F=\mathrm{I}_3$, yhtälöt (47) ja (48))

$$
\begin{aligned}
C_{11} &\equiv \frac{\mathrm{TR}(t^a t^b t^b t^a)}{64} = \frac{1}{64}\mathrm{TR}(t^a t^a t^b t^b) = \frac{1}{64}\mathrm{TR}(C_2(F)\mathrm{I}_F C_2(F)\mathrm{I}_F) \\
&= \frac{1}{64}(C_2(F))^2\mathrm{TR}(\mathrm{I}_F) = \frac{1}{64}(\frac{4}{3})^2\cdot 3 = \frac{1}{12}.
\end{aligned}
$$

Jälkimmäinen summa:

$$S_{11} \equiv \frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\mu(\not{q}_1-m_Q)\gamma_\nu v_4\overline{v}_4\gamma^\nu(\not{q}_1-m_Q)\gamma^\mu u_3$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\Big[\sum_{s_3}(u_3)_h(\overline{u}_3)_a\Big](\gamma_\mu)_{ab}(\not{q}_1 - m_Q)_{bc}(\gamma_\nu)_{cd}\Big[\sum_{s_4}(v_4)_d(\overline{v}_4)_e\Big](\gamma^\nu)_{ef}(\not{q}_1 - m_Q)_{fg}(\gamma^\mu)_{gh} \\
&= \frac{1}{4}(\not{p}_3 + m_Q)_{ha}(\gamma_\mu)_{ab}(\not{q}_1 - m_Q)_{bc}(\gamma_\nu)_{cd}(\not{p}_4 - m_Q)_{de}(\gamma^\nu)_{ef}(\not{q}_1 - m_Q)_{fg}(\gamma^\mu)_{gh} \\
&= \frac{1}{4}\mathrm{TR}\Big[(\not{p}_3 + m_Q)\gamma_\mu(\not{q}_1 - m_Q)\gamma_\nu(\not{p}_4 - m_Q)\gamma^\nu(\not{q}_1 - m_Q)\gamma^\mu\Big] \\
&= \frac{1}{4}\mathrm{TR}\Big[\gamma^\mu(\not{p}_3 + m_Q)\gamma_\mu(\not{q}_1 - m_Q)\gamma_\nu(\not{p}_4 - m_Q)\gamma^\nu(\not{q}_1 - m_Q)\Big] \\
&= \frac{1}{4}\mathrm{TR}\Big[(\gamma^\mu\not{p}_3\gamma_\mu + m_Q\gamma^\mu\gamma_\mu)(\not{q}_1 - m_Q)(\gamma_\nu\not{p}_4\gamma^\nu - m_Q\gamma_\nu\gamma^\nu)(\not{q}_1 - m_Q)\Big].
\end{aligned}
$$

Käyttämällä relaatioita $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4$ ja $\gamma^\mu\not{a}\gamma_\mu = -2\not{a}$ (yhtälö (37)) saadaan

$$
\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{1}{4}\mathrm{TR}\Big[(-2\not{p}_3 + 4m_Q)(\not{q}_1 - m_Q)(-2\not{p}_4 - 4m_Q)(\not{q}_1 - m_Q)\Big] \\
&= \mathrm{TR}\Big[(\not{p}_3 - 2m_Q)(\not{q}_1 - m_Q)(\not{p}_4 + 2m_Q)(\not{q}_1 - m_Q)\Big] \\
&= \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_1\not{p}_4\not{q}_1) - m_Q\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_1\not{p}_4) + 2m_Q\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_1\not{q}_1) - 2m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_1) \\
&- m_Q\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{q}_1) + m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4) - 2m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_1) + 2m_Q^3\mathrm{TR}(\not{p}_3) \\
&- 2m_Q\mathrm{TR}(\not{q}_1\not{p}_4\not{q}_1) + 2m_Q^2\mathrm{TR}(\not{q}_1\not{p}_4) - 4m_Q^2\mathrm{TR}(\not{q}_1\not{q}_1) + 4m_Q^3\mathrm{TR}(\not{q}_1) \\
&+ 2m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_4\not{q}_1) - 2m_Q^3\mathrm{TR}(\not{p}_4) + 4m_Q^3\mathrm{TR}(\not{q}_1) - 4m_Q^2\mathrm{TR}(\mathrm{I}_4) \\
&= \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_1\not{p}_4\not{q}_1) - 2m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_1) + m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4) - 2m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_1) \\
&+ 2m_Q^2\mathrm{TR}(\not{q}_1\not{p}_4) - 4m_Q^2\mathrm{TR}(\not{q}_1\not{q}_1) + 2m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_4\not{q}_1) - 16m_Q^4 \\
&= \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_1\not{p}_4\not{q}_1) + m_Q^2\Big[-2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_1) + \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4) - 2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_1) \\
&+ 2\mathrm{TR}(\not{q}_1\not{p}_4) - 4\mathrm{TR}(\not{q}_1\not{q}_1) + 2\mathrm{TR}(\not{p}_4\not{q}_1)\Big] - 16m_Q^4.
\end{aligned}
$$

Tässä voimme käyttää identiteettejä $\mathrm{TR}(\not{a}\not{b}) = 4a\cdot b$ ja $\mathrm{TR}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})$
$= 4\Big[(a\cdot b)(c\cdot d) - (a\cdot c)(b\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c)\Big]$ (yhtälö (36)):

$$
\begin{aligned}
S_{11} &= 4\Big[(p_3\cdot q_1)(p_4\cdot q_1) - (p_3\cdot p_4)(q_1\cdot q_1) + (p_3\cdot q_1)(q_1\cdot p_4)\Big] + m_Q^2\Big[-2\cdot 4(p_3\cdot q_1) \\
&+ 4(p_3\cdot p_4) - 2\cdot 4(p_3\cdot q_1) + 2\cdot 4(q_1\cdot p_4) - 4\cdot 4(q_1\cdot q_1) + 2\cdot 4(p_4\cdot q_1)\Big] - 16m_Q^4 \\
&= 4\Big[2(p_3\cdot q_1)(p_4\cdot q_1) - (p_3\cdot p_4)q_1^2\Big] \\
&+ m_Q^2\Big[-16(p_3\cdot q_1) + 4(p_3\cdot p_4) + 16(p_4\cdot q_1) - 16q_1^2\Big] - 16m_Q^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\Big\{2(p_3\cdot q_1)(p_4\cdot q_1) - (p_3\cdot p_4)q_1^2 \\
&+ m_Q^2\Big[-4(p_3\cdot q_1) + p_3\cdot p_4 + 4(p_4\cdot q_1) - 4q_1^2\Big] - 4m_Q^4\Big\} \\
&= 4\Big\{2(p_3\cdot p_1 - p_3^2)(p_4\cdot p_1 - p_4\cdot p_3) - (p_3\cdot p_4)(p_1-p_3)^2 \\
&+ m_Q^2\Big[-4(p_3\cdot p_1 - p_3^2) + p_3\cdot p_4 + 4(p_4\cdot p_1 - p_4\cdot p_3) - 4(p_1-p_3)^2\Big] - 4m_Q^4\Big\} \\
&= 4\Big\{2(\frac{m_Q^2-\hat{t}}{2} - m_Q^2)(\frac{m_Q^2-\hat{u}}{2} - (\frac{\hat{s}}{2} - m_Q^2)) - (\frac{\hat{s}}{2} - m_Q^2)\hat{t} \\
&+ m_Q^2\Big[-4(\frac{m_Q^2-\hat{t}}{2} - m_Q^2) + \frac{\hat{s}}{2} - m_Q^2 + 4(\frac{m_Q^2-\hat{u}}{2} - (\frac{\hat{s}}{2} - m_Q^2)) - 4\hat{t}\Big] - 4m_Q^4\Big\} \\
&= 4\Big\{(-\hat{t} - m_Q^2)(\frac{3m_Q^2}{2} - \frac{\hat{s}}{2} - \frac{\hat{u}}{2}) - (\frac{\hat{s}}{2} - m_Q^2)\hat{t} \\
&+ m_Q^2\Big[2\hat{t} + 2m_Q^2 + \frac{\hat{s}}{2} - m_Q^2 + 4(\frac{3m_Q^2}{2} - \frac{\hat{s}}{2} - \frac{\hat{u}}{2}) - 4\hat{t}\Big] - 4m_Q^4\Big\} \\
&= 4\Big\{-\frac{3m_Q^2\hat{t}}{2} + \frac{\hat{s}\hat{t}}{2} + \frac{\hat{t}\hat{u}}{2} - \frac{3m_Q^4}{2} + \frac{m_Q^2\hat{s}}{2} + \frac{m_Q^2\hat{u}}{2} - \frac{\hat{s}\hat{t}}{2} + m_Q^2\hat{t} \\
&+ m_Q^2\Big[2\hat{t} + m_Q^2 + \frac{\hat{s}}{2} + 6m_Q^2 - 2\hat{s} - 2\hat{u} - 4\hat{t}\Big] - 4m_Q^4\Big\} \\
&= 4\Big\{\frac{\hat{t}\hat{u}}{2} + \frac{m_Q^2\hat{s}}{2} - \frac{m_Q^2\hat{t}}{2} + \frac{m_Q^2\hat{u}}{2} - \frac{11m_Q^4}{2} + m_Q^2\Big[-\frac{3\hat{s}}{2} - 2\hat{t} - 2\hat{u} + 7m_Q^2\Big]\Big\} \\
&= 4\Big\{\frac{\hat{t}\hat{u}}{2} - m_Q^2\hat{s} - \frac{5m_Q^2\hat{t}}{2} - \frac{3m_Q^2\hat{u}}{2} + \frac{3m_Q^4}{2}\Big\} \\
&= 2(\hat{t}\hat{u} - 2m_Q^2\hat{s} - 5m_Q^2\hat{t} - 3m_Q^2\hat{u} + 3m_Q^4) \\
&= 2(\hat{t}\hat{u} - 2m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2\hat{t} - 3m_Q^2(\hat{t}+\hat{u}) + 3m_Q^4) \\
&= 2(\hat{t}\hat{u} - 2m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2\hat{t} - 3m_Q^2(2m_Q^2 - \hat{s}) + 3m_Q^4) \\
&= 2(\hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2\hat{t} - 3m_Q^4).
\end{aligned}
$$

Siispä

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_1^{\mu\nu *}} &= C_{11}\frac{g_s^4}{(q_1^2 - m_Q^2)^2}S_{11} \\
&= \frac{1}{12}\cdot\frac{g_s^4}{(\hat{t} - m_Q^2)^2}\cdot 2(\hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2\hat{t} - 3m_Q^4) \\
&= \frac{g_s^4}{6(m_Q^2 - \hat{t})^2}(\hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2\hat{t} - 3m_Q^4).
\end{aligned}
$$

Toinen termi (u-kanava):

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}} &= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *} \\
&= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}\Big[\frac{g_s^2}{q_2^2-m_Q^2}(t^b t^a)_{jk}\overline{u}_3\gamma_\nu(\not{q}_2+m_Q)\gamma_\mu v_4\Big] \\
&\Big[\frac{g_s^2}{q_2^2-m_Q^2}(t^b t^a)_{jk}\overline{u}_3\gamma^\nu(\not{q}_2+m_Q)\gamma^\mu v_4\Big]^* \\
&= \frac{g_s^4}{(q_2^2-m_Q^2)^2}\frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}(t^b t^a)_{jk}(t^a t^b)_{kj}\overline{u}_3\gamma_\nu(\not{q}_2+m_Q)\gamma_\mu v_4 \\
&\overline{v}_4\gamma^\mu(\not{q}_2+m_Q)\gamma^\nu u_3 \\
&= \Big(\sum_{a,b}\frac{\mathrm{TR}(t^b t^a t^a t^b)}{64}\Big)\frac{g_s^4}{(q_2^2-m_Q^2)^2}\frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\nu(\not{q}_2+m_Q)\gamma_\mu v_4 \\
&\overline{v}_4\gamma^\mu(\not{q}_2+m_Q)\gamma^\nu u_3.
\end{aligned}
$$

Vaihtamalla indeksejä ja kertomalla molemmat matriisit $\not{q}_2+m_Q$ luvulla -1 saadaan

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}} &= \frac{\mathrm{TR}(t^a t^b t^b t^a)}{64}\frac{g_s^4}{(q_2^2-m_Q^2)^2}\frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\mu(-\not{q}_2-m_Q)\gamma_\nu v_4 \\
&\overline{v}_4\gamma^\nu(-\not{q}_2-m_Q)\gamma^\mu u_3.
\end{aligned}
$$

Koska $q_1 = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$, $q_2 = p_1 - p_4 = p_3 - p_2$ ja

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_1^{\mu\nu *}} &= \frac{\mathrm{TR}(t^a t^b t^b t^a)}{64}\frac{g_s^4}{(q_1^2-m_Q^2)^2}\frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\mu(\not{q}_1-m_Q)\gamma_\nu v_4 \\
&\overline{v}_4\gamma^\nu(\not{q}_1-m_Q)\gamma^\mu u_3,
\end{aligned}
$$

niin amplitudi $\overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}}$ saadaan amplitudista $\overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_1^{\mu\nu *}}$ vaihtamalla neliliikemäärät p_1 ja p_2 keskenään ($q_1 \xrightarrow{p_1\leftrightarrow p_2} -q_2$). Tämä vaihdos vaikuttaa Mandelstamin muuttujiin seuraavasti:

$$
\hat{s} \equiv (p_1+p_2)^2 \xrightarrow{p_1\leftrightarrow p_2} (p_2+p_1)^2 \equiv \hat{s}
$$

$$\hat{t} \equiv (p_1 - p_3)^2 \xrightarrow{p_1 \leftrightarrow p_2} (p_2 - p_3)^2 \equiv \hat{u}$$
$$\hat{u} \equiv (p_1 - p_4)^2 \xrightarrow{p_1 \leftrightarrow p_2} (p_2 - p_4)^2 \equiv \hat{t}.$$

Täten siis

$$\overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}} = \frac{g_s^4}{6(m_Q^2 - \hat{u})^2}(\hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2\hat{u} - 3m_Q^4).$$

Kolmas termi (s-kanava):

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}_{3\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}} &= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}\mathcal{M}_{3\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *} \\
&= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}(\frac{ig_s^2}{q_3^2}(t^c)_{jk}f^{abc}\overline{u}_3\gamma^\varphi v_4 K_{\mu\nu\varphi})(\frac{ig_s^2}{q_3^2}(t^d)_{jk}f^{abd}\overline{u}_3\gamma^\kappa v_4 K^{\mu\nu}{}_\kappa)^* \\
&= \Big(\sum_{a,b}\frac{(t^c)_{jk}(t^d)_{kj}f^{abc}f^{abd}}{64}\Big)\frac{g_s^4}{2q_3^4}(\frac{1}{2}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma^\varphi v_4\overline{v}_4\gamma^\kappa u_3)K_{\mu\nu\varphi}K^{\mu\nu}{}_\kappa \\
&= C_{33}\frac{g_s^4}{2q_3^4}L_Q^{\varphi\kappa}K_{\mu\nu\varphi}K^{\mu\nu}{}_\kappa,
\end{aligned}$$

missä väritekijä on

$$C_{33} \equiv \frac{\mathrm{TR}(t^c t^d)f^{abc}f^{abd}}{64}.$$

$L_Q^{\varphi\kappa}$ on luvussa 3.1 laskettu lopputilan kvarkkitensori

$$L_Q^{\varphi\kappa} \equiv \frac{1}{2}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma^\varphi v_4\overline{v}_4\gamma^\kappa u_3 = 2(p_3^\varphi p_4^\kappa + p_3^\kappa p_4^\varphi - \frac{\hat{s}}{2}g^{\varphi\kappa}).$$

Väritekijä:

$$\begin{aligned}
C_{33} &\equiv \frac{1}{64}\mathrm{TR}(t^c t^d)f^{abc}f^{abd} = \frac{1}{64}\mathrm{TR}(t^c t^d)\cdot 3\delta^{cd} \\
&= \frac{3}{64}\mathrm{TR}(t^c t^c) = \frac{3}{64}T(F)\delta^{cc} = \frac{3}{64}\cdot\frac{1}{2}\cdot 8 = \frac{3}{16},
\end{aligned}$$

missä käytettiin relaatiota $f^{acd}f^{bcd} = N\delta^{ab}$ (yhtälö (49)).

K-tensorisumma:

$$
\begin{aligned}
K_{\mu\nu\varphi}K^{\mu\nu}{}_{\kappa} &= \Big[g_{\mu\nu}(p_1-p_2)_\varphi + g_{\nu\varphi}(p_1+2p_2)_\mu + g_{\varphi\mu}(-2p_1-p_2)_\nu\Big] \\
&\Big[g^{\mu\nu}(p_1-p_2)_\kappa + g^{\nu}{}_{\kappa}(p_1+2p_2)^\mu + g_\kappa{}^\mu(-2p_1-p_2)^\nu\Big] \\
&= g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}(p_1-p_2)_\varphi(p_1-p_2)_\kappa + g_{\mu\nu}g^{\nu}{}_{\kappa}(p_1-p_2)_\varphi(p_1+2p_2)^\mu \\
&+ g_{\mu\nu}g_\kappa{}^\mu(p_1-p_2)_\varphi(-2p_1-p_2)^\nu + g_{\nu\varphi}g^{\mu\nu}(p_1+2p_2)_\mu(p_1-p_2)_\kappa \\
&+ g_{\nu\varphi}g^{\nu}{}_{\kappa}(p_1+2p_2)_\mu(p_1+2p_2)^\mu + g_{\nu\varphi}g_\kappa{}^\mu(p_1+2p_2)_\mu(-2p_1-p_2)^\nu \\
&+ g_{\varphi\mu}g^{\mu\nu}(-2p_1-p_2)_\nu(p_1-p_2)_\kappa + g_{\varphi\mu}g^{\nu}{}_{\kappa}(-2p_1-p_2)_\nu(p_1+2p_2)^\mu \\
&+ g_{\varphi\mu}g_\kappa{}^\mu(-2p_1-p_2)_\nu(-2p_1-p_2)^\nu \\
&= 4(p_1-p_2)_\varphi(p_1-p_2)_\kappa + (p_1-p_2)_\varphi(p_1+2p_2)_\kappa \\
&+ (p_1-p_2)_\varphi(-2p_1-p_2)_\kappa + (p_1+2p_2)_\varphi(p_1-p_2)_\kappa \\
&+ g_{\varphi\kappa}(p_1+2p_2)^2 + (p_1+2p_2)_\kappa(-2p_1-p_2)_\varphi \\
&+ (-2p_1-p_2)_\varphi(p_1-p_2)_\kappa + (-2p_1-p_2)_\kappa(p_1+2p_2)_\varphi \\
&+ g_{\kappa\varphi}(-2p_1-p_2)^2 \\
&= 4p_{1\varphi}p_{1\kappa} - 4p_{1\varphi}p_{2\kappa} - 4p_{2\varphi}p_{1\kappa} + 4p_{2\varphi}p_{2\kappa} + p_{1\varphi}p_{1\kappa} + 2p_{1\varphi}p_{2\kappa} - p_{2\varphi}p_{1\kappa} \\
&- 2p_{2\varphi}p_{2\kappa} - 2p_{1\varphi}p_{1\kappa} - p_{1\varphi}p_{2\kappa} + 2p_{2\varphi}p_{1\kappa} + p_{2\varphi}p_{2\kappa} + p_{1\varphi}p_{1\kappa} - p_{1\varphi}p_{2\kappa} \\
&+ 2p_{2\varphi}p_{1\kappa} - 2p_{2\varphi}p_{2\kappa} + g_{\varphi\kappa}(p_1^2 + 2p_1\cdot p_2 + 2p_1\cdot p_2 + 4p_2^2) \\
&- 2p_{1\varphi}p_{1\kappa} - p_{2\varphi}p_{1\kappa} - 4p_{1\varphi}p_{2\kappa} - 2p_{2\varphi}p_{2\kappa} - 2p_{1\varphi}p_{1\kappa} + 2p_{1\varphi}p_{2\kappa} - p_{2\varphi}p_{1\kappa} \\
&+ p_{2\varphi}p_{2\kappa} - 2p_{1\varphi}p_{1\kappa} - 4p_{2\varphi}p_{1\kappa} - p_{1\varphi}p_{2\kappa} - 2p_{2\varphi}p_{2\kappa} \\
&+ g_{\varphi\kappa}(4p_1^2 + 2p_1\cdot p_2 + 2p_2\cdot p_1 + p_2^2) \\
&= -2p_{1\varphi}p_{1\kappa} - 7p_{1\varphi}p_{2\kappa} - 7p_{2\varphi}p_{1\kappa} - 2p_{2\varphi}p_{2\kappa} + 4g_{\varphi\kappa}\cdot 2(p_1\cdot p_2) \\
&= -2p_{1\varphi}p_{1\kappa} - 7p_{1\varphi}p_{2\kappa} - 7p_{2\varphi}p_{1\kappa} - 2p_{2\varphi}p_{2\kappa} + 4g_{\varphi\kappa}\hat{s},
\end{aligned}
$$

missä hyödynnettiin tietoa $p_1^2 = p_2^2 = m_g^2 = 0$ (yhtälö (15)).

Lopullinen tensorisumma:

$$
L_Q^{\varphi\kappa}K_{\mu\nu\varphi}K^{\mu\nu}{}_{\kappa} = 2(p_3^\varphi p_4^\kappa + p_3^\kappa p_4^\varphi - \frac{\hat{s}}{2}g^{\varphi\kappa})(-2p_{1\varphi}p_{1\kappa} - 7p_{1\varphi}p_{2\kappa} - 7p_{2\varphi}p_{1\kappa} - 2p_{2\varphi}p_{2\kappa} + 4g_{\varphi\kappa}\hat{s})
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\Big\{ -2(p_1\cdot p_3)(p_1\cdot p_4) - 7(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) - 7(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) - 2(p_2\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) \\
&+ 4(p_3\cdot p_4)\hat{s} - 2(p_1\cdot p_3)(p_1\cdot p_4) - 7(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) - 7(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) \\
&- 2(p_2\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) + 4(p_3\cdot p_4)\hat{s} - \frac{\hat{s}}{2}\Big[-2p_1^2 - 7(p_1\cdot p_2) - 7(p_1\cdot p_2) - 2p_2^2 + 16\hat{s}\Big]\Big\} \\
&= 2\Big\{ -4(p_1\cdot p_3)(p_1\cdot p_4) - 4(p_2\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) - 14(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) \\
&- 14(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) + 8(p_3\cdot p_4)\hat{s} + 7(p_1\cdot p_2)\hat{s} - 8\hat{s}^2\Big\} \\
&= 2\Big\{ -4(p_1\cdot p_3)(p_1\cdot p_4) - 4(p_1\cdot p_4)(p_1\cdot p_3) - 14(p_1\cdot p_3)(p_1\cdot p_3) \\
&- 14(p_1\cdot p_4)(p_1\cdot p_4) + 8(p_3\cdot p_4)\hat{s} + 7(p_1\cdot p_2)\hat{s} - 8\hat{s}^2\Big\} \\
&= 2\Big\{ -8(p_1\cdot p_3)(p_1\cdot p_4) - 14\Big[(p_1\cdot p_3)^2 + (p_1\cdot p_4)^2\Big] + 8(p_3\cdot p_4)\hat{s} + 7(p_1\cdot p_2)\hat{s} - 8\hat{s}^2\Big\} \\
&= 2\Big\{ -8(\frac{m_Q^2-\hat{t}}{2})(\frac{m_Q^2-\hat{u}}{2}) - 14\Big[(\frac{m_Q^2-\hat{t}}{2})^2 + (\frac{m_Q^2-\hat{u}}{2})^2\Big] + 8(\frac{\hat{s}}{2} - m_Q^2)\hat{s} + 7\frac{\hat{s}}{2}\hat{s} - 8\hat{s}^2\Big\} \\
&= 2\Big\{ -8\frac{m_Q^4 - m_Q^2\hat{t} - m_Q^2\hat{u} + \hat{t}\hat{u}}{4} - 14\Big[\frac{m_Q^4 - 2m_Q^2\hat{t} + \hat{t}^2}{4} + \frac{m_Q^4 - 2m_Q^2\hat{u} + \hat{u}^2}{4}\Big] \\
&+ 4\hat{s}^2 - 8m_Q^2\hat{s} + \frac{7}{2}\hat{s}^2 - 8\hat{s}^2\Big\} \\
&= 2\Big\{ -2m_Q^4 + 2m_Q^2\hat{t} + 2m_Q^2\hat{u} - 2\hat{t}\hat{u} - \frac{7}{2}\Big[2m_Q^4 - 2m_Q^2\hat{t} - 2m_Q^2\hat{u} + \hat{t}^2 + \hat{u}^2\Big] - \frac{1}{2}\hat{s}^2 - 8m_Q^2\hat{s}\Big\} \\
&= 2\Big\{ -\frac{1}{2}\hat{s}^2 - \frac{7}{2}\hat{t}^2 - \frac{7}{2}\hat{u}^2 - 2\hat{t}\hat{u} - 8m_Q^2\hat{s} + 9m_Q^2\hat{t} + 9m_Q^2\hat{u} - 9m_Q^4\Big\} \\
&= -\hat{s}^2 - 5\hat{t}^2 - 5\hat{u}^2 - 2(\hat{t}+\hat{u})^2 - 16m_Q^2\hat{s} + 18m_Q^2(\hat{t}+\hat{u}) - 18m_Q^4 \\
&= -\hat{s}^2 - 5\hat{t}^2 - 5\hat{u}^2 - 2(2m_Q^2 - \hat{s})^2 - 16m_Q^2\hat{s} + 18m_Q^2(2m_Q^2 - \hat{s}) - 18m_Q^4 \\
&= -\hat{s}^2 - 5\hat{t}^2 - 5\hat{u}^2 - 8m_Q^4 + 8m_Q^2\hat{s} - 2\hat{s}^2 - 16m_Q^2\hat{s} + 36m_Q^4 - 18m_Q^2\hat{s} - 18m_Q^4 \\
&= -3\hat{s}^2 - 5\hat{t}^2 - 5\hat{u}^2 - 26m_Q^2\hat{s} + 10m_Q^4.
\end{aligned}
$$

Siispä

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}_{3\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}} &= C_{33}\frac{g_s^4}{2q_3^4}L_Q^{\varphi\kappa}K_{\mu\nu\varphi}K^{\mu\nu}{}_{\kappa} \\
&= \frac{3}{16}\cdot\frac{g_s^4}{2\hat{s}^2}(-3\hat{s}^2 - 5\hat{t}^2 - 5\hat{u}^2 - 26m_Q^2\hat{s} + 10m_Q^4) \\
&= \frac{3g_s^4}{32\hat{s}^2}(-3\hat{s}^2 - 5\hat{t}^2 - 5\hat{u}^2 - 26m_Q^2\hat{s} + 10m_Q^4).
\end{aligned}
$$

Neljäs termi (tu-interferenssi):

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}} &= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *} \\
&= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}\Big[\frac{g_s^2}{q_1^2-m_Q^2}(t^a t^b)_{jk}\overline{u}_3\gamma_\mu(m_Q-\not{q}_1)\gamma_\nu v_4\Big] \\
&\Big[\frac{g_s^2}{q_2^2-m_Q^2}(t^b t^a)_{jk}\overline{u}_3\gamma^\nu(\not{q}_2+m_Q)\gamma^\mu v_4\Big]^* \\
&= \Big(\sum_{a,b}\frac{(t^a t^b)_{jk}(t^a t^b)_{kj}}{64}\Big)\frac{g_s^4}{(q_1^2-m_Q^2)(q_2^2-m_Q^2)} \\
&\frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\mu(m_Q-\not{q}_1)\gamma_\nu v_4\overline{v}_4\gamma^\mu(\not{q}_2+m_Q)\gamma^\nu u_3 \\
&= C_{12}\frac{g_s^4}{(q_1^2-m_Q^2)(q_2^2-m_Q^2)}S_{12},
\end{aligned}
$$

missä on määritelty

$$
\begin{aligned}
C_{12} &\equiv \frac{\mathrm{TR}(t^a t^b t^a t^b)}{64} \\
S_{12} &\equiv \frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\mu(m_Q-\not{q}_1)\gamma_\nu v_4\overline{v}_4\gamma^\mu(\not{q}_2+m_Q)\gamma^\nu u_3.
\end{aligned}
$$

Koska $(t^a t^b t^a)_{ij} = -\frac{T(F)}{3}(t^b)_{ij}$ (yhtälö (49)), niin

$$
\begin{aligned}
C_{12} &\equiv \frac{1}{64}\mathrm{TR}(t^a t^b t^a t^b) = \frac{1}{64}(t^a)_{ij}(t^b t^a t^b)_{ji} = \frac{1}{64}(t^a)_{ij}(-\frac{T(F)}{3}(t^a)_{ji}) \\
&= \frac{1}{64}(-\frac{\frac{1}{2}}{3})\mathrm{TR}(t^a t^a) = -\frac{1}{384}T(F)\delta^{aa} = -\frac{1}{384}\cdot\frac{1}{2}\cdot 8 = -\frac{1}{96}.
\end{aligned}
$$

Jälkimmäinen summa on

$$
\begin{aligned}
S_{12} &\equiv \frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\mu(m_Q-\not{q}_1)\gamma_\nu v_4\overline{v}_4\gamma^\mu(\not{q}_2+m_Q)\gamma^\nu u_3 \\
&= \frac{1}{4}\Big[\sum_{s_3}(u_3)_h(\overline{u}_3)_a\Big](\gamma_\mu)_{ab}(m_Q-\not{q}_1)_{bc}(\gamma_\nu)_{cd}\Big[\sum_{s_4}(v_4)_d(\overline{v}_4)_e\Big](\gamma^\mu)_{ef} \\
&(\not{q}_2+m_Q)_{fg}(\gamma^\nu)_{gh}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(\not{p}_3 + m_Q)_{ha}(\gamma_\mu)_{ab}(m_Q - \not{q}_1)_{bc}(\gamma_\nu)_{cd}(\not{p}_4 - m_Q)_{de}(\gamma^\mu)_{ef}(\not{q}_2 + m_Q)_{fg}(\gamma^\nu)_{gh} \\
&= \frac{1}{4}\mathrm{TR}\Big[(\not{p}_3 + m_Q)\gamma_\mu(m_Q - \not{q}_1)\gamma_\nu(\not{p}_4 - m_Q)\gamma^\mu(\not{q}_2 + m_Q)\gamma^\nu\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[m_Q\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\mu\gamma_\nu\not{p}_4\gamma^\mu\not{q}_2\gamma^\nu) + m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\mu\gamma_\nu\not{p}_4\gamma^\mu\gamma^\nu) \\
&- m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu\not{q}_2\gamma^\nu) - m_Q^3\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu) \\
&- \mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\mu\not{q}_1\gamma_\nu\not{p}_4\gamma^\mu\not{q}_2\gamma^\nu) - m_Q\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\mu\not{q}_1\gamma_\nu\not{p}_4\gamma^\mu\gamma^\nu) \\
&+ m_Q\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\mu\not{q}_1\gamma_\nu\gamma^\mu\not{q}_2\gamma^\nu) + m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\mu\not{q}_1\gamma_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu) \\
&+ m_Q^2\mathrm{TR}(\gamma_\mu\gamma_\nu\not{p}_4\gamma^\mu\not{q}_2\gamma^\nu) + m_Q^3\mathrm{TR}(\gamma_\mu\gamma_\nu\not{p}_4\gamma^\mu\gamma^\nu) \\
&- m_Q^3\mathrm{TR}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu\not{q}_2\gamma^\nu) - m_Q^4\mathrm{TR}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu) \\
&- m_Q\mathrm{TR}(\gamma_\mu\not{q}_1\gamma_\nu\not{p}_4\gamma^\mu\not{q}_2\gamma^\nu) - m_Q^2\mathrm{TR}(\gamma_\mu\not{q}_1\gamma_\nu\not{p}_4\gamma^\mu\gamma^\nu) \\
&+ m_Q^2\mathrm{TR}(\gamma_\mu\not{q}_1\gamma_\nu\gamma^\mu\not{q}_2\gamma^\nu) + m_Q^3\mathrm{TR}(\gamma_\mu\not{q}_1\gamma_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu)\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\mu\gamma_\nu\not{p}_4\gamma^\mu\gamma^\nu) - m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu\not{q}_2\gamma^\nu) \\
&- \mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\mu\not{q}_1\gamma_\nu\not{p}_4\gamma^\mu\not{q}_2\gamma^\nu) + m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\mu\not{q}_1\gamma_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu) \\
&+ m_Q^2\mathrm{TR}(\gamma_\mu\gamma_\nu\not{p}_4\gamma^\mu\not{q}_2\gamma^\nu) - m_Q^4\mathrm{TR}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu) \\
&- m_Q^2\mathrm{TR}(\gamma_\mu\not{q}_1\gamma_\nu\not{p}_4\gamma^\mu\gamma^\nu) + m_Q^2\mathrm{TR}(\gamma_\mu\not{q}_1\gamma_\nu\gamma^\mu\not{q}_2\gamma^\nu)\Big].
\end{aligned}
$$

Käyttämällä γ-matriisien ominaisuuksia $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4$, $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu$, $\gamma^\mu\not{a}\gamma_\mu = -2\not{a}$, $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\varphi\gamma_\mu = 4g^{\nu\varphi}$, $\gamma^\mu\not{a}\not{b}\gamma_\mu = 4a\cdot b$,$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\varphi\gamma^\kappa\gamma_\mu = -2\gamma^\kappa\gamma^\varphi\gamma^\nu$ ja $\gamma^\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma_\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}$ (yhtälöt (37)) saadaan

$$
\begin{aligned}
S_{12} = \frac{1}{4}\Big\{&m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3(4p_{4\nu})\gamma^\nu) - m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3(-2\gamma_\nu)\not{q}_2\gamma^\nu) \\
&- \mathrm{TR}(\not{p}_3(-2\not{p}_4\gamma_\nu\not{q}_1)\not{q}_2\gamma^\nu) + m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3(4q_{1\nu})\gamma^\nu) \\
&+ m_Q^2\mathrm{TR}((4p_{4\nu})\not{q}_2\gamma^\nu) - m_Q^4\mathrm{TR}((-2\gamma_\nu)\gamma^\nu) \\
&- m_Q^2\mathrm{TR}((-2\not{p}_4\gamma_\nu\not{q}_1)\gamma^\nu) + m_Q^2\mathrm{TR}((4q_{1\nu})\not{q}_2\gamma^\nu)\Big\} \\
= \frac{1}{4}\Big\{&2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\gamma_\nu\not{q}_1\not{q}_2\gamma^\nu) + m_Q^2\Big[4\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4) + 2\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\nu\not{q}_2\gamma^\nu) + 4\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_1) \\
&+ 4\mathrm{TR}(\not{q}_2\not{p}_4) + 2\mathrm{TR}(\not{p}_4\gamma_\nu\not{q}_1\gamma^\nu) + 4\mathrm{TR}(\not{q}_2\not{q}_1)\Big] + 2m_Q^4\mathrm{TR}(\gamma_\nu\gamma^\nu)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\Big\{8(q_1\cdot q_2)\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4) + m_Q^2\Big[4\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4) - 4\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_2) + 4\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_1)\\
&+ 4\mathrm{TR}(\not{q}_2\not{p}_4) - 4\mathrm{TR}(\not{p}_4\not{q}_1) + 4\mathrm{TR}(\not{q}_2\not{q}_1)\Big] + 2m_Q^4\mathrm{TR}(4\mathrm{I}_4)\Big\}\\
&= 2(q_1\cdot q_2)\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4) + m_Q^2\Big[\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4) - \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_2) + \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_1)\\
&+ \mathrm{TR}(\not{q}_2\not{p}_4) - \mathrm{TR}(\not{p}_4\not{q}_1) + \mathrm{TR}(\not{q}_2\not{q}_1)\Big] + 8m_Q^4\\
&= 2(q_1\cdot q_2)\cdot 4(p_3\cdot p_4) + m_Q^2\Big[4p_3\cdot p_4 - 4p_3\cdot q_2\\
&+ 4p_3\cdot q_1 + 4q_2\cdot p_4 - 4p_4\cdot q_1 + 4q_2\cdot q_1\Big] + 8m_Q^4\\
&= 8((p_1-p_3)\cdot(p_1-p_4))(p_3\cdot p_4) + 4m_Q^2\Big[p_3\cdot p_4 - p_3\cdot(p_1-p_4)\\
&+ p_3\cdot(p_1-p_3) + (p_1-p_4)\cdot p_4 - p_4\cdot(p_1-p_3) + (p_1-p_4)\cdot(p_1-p_3)\Big] + 8m_Q^4\\
&= 8(p_1^2 - p_1\cdot p_4 - p_1\cdot p_3 + p_3\cdot p_4)(p_3\cdot p_4) + 4m_Q^2\Big[p_3\cdot p_4 - p_1\cdot p_3 + p_3\cdot p_4 + p_1\cdot p_3\\
&- p_3^2 + p_1\cdot p_4 - p_4^2 - p_1\cdot p_4 + p_3\cdot p_4 + p_1^2 - p_1\cdot p_3 - p_1\cdot p_4 + p_3\cdot p_4\Big] + 8m_Q^4\\
&= 8(-p_2\cdot p_3 - p_1\cdot p_3 + p_4\cdot p_3)(p_3\cdot p_4)\\
&+ 4m_Q^2\Big[-p_1\cdot p_3 - p_1\cdot p_4 + 4p_3\cdot p_4 - p_3^2 - p_4^2\Big] + 8m_Q^4.
\end{aligned}
$$

Neliliikemäärän säilymisen ($p_1 + p_2 = p_3 + p_4$) nojalla

$$
\begin{aligned}
S_{12} &= -8p_3^2(p_3\cdot p_4) + 4m_Q^2\Big[-p_1\cdot(p_1+p_2) + 4p_3\cdot p_4 - p_3^2 - p_4^2\Big] + 8m_Q^4\\
&= -8m_Q^2(\frac{\hat{s}}{2} - m_Q^2) + 4m_Q^2\Big[-\frac{\hat{s}}{2} + 4(\frac{\hat{s}}{2} - m_Q^2) - m_Q^2 - m_Q^2\Big] + 8m_Q^4\\
&= -4m_Q^2\hat{s} + 8m_Q^4 + 6m_Q^2\hat{s} - 24m_Q^2 + 8m_Q^4\\
&= 2m_Q^2\hat{s} - 8m_Q^4.
\end{aligned}
$$

Täten

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}} &= C_{12}\frac{g_s^4}{(q_1^2 - m_Q^2)(q_2^2 - m_Q^2)}S_{12}\\
&= -\frac{1}{96}\cdot\frac{g_s^4}{(\hat{t} - m_Q^2)(\hat{u} - m_Q^2)}(2m_Q^2\hat{s} - 8m_Q^4)\\
&= \frac{g_s^4}{48(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u})}(-m_Q^2\hat{s} + 4m_Q^4).
\end{aligned}
$$

Viides termi (su-interferenssi):

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}} \\
&= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *} \\
&= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}\Big[\frac{g_s^2}{q_2^2-m_Q^2}(t^b t^a)_{jk}\overline{u}_3\gamma_\nu(\not{q}_2+m_Q)\gamma_\mu v_4\Big]\Big[\frac{ig_s^2}{q_3^2}(t^c)_{jk}f^{abc}\overline{u}_3\gamma^\varphi v_4 K^{\mu\nu}{}_\varphi\Big]^* \\
&= \Big(\sum_{a,b}\frac{(t^b t^a)_{jk}(t^c)_{kj}f^{abc}}{64}\Big)\frac{-ig_s^4}{q_3^2(q_2^2-m_Q^2)}\Big(\frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\nu(\not{q}_2+m_Q)\gamma_\mu v_4\overline{v}_4\gamma^\varphi u_3\Big)K^{\mu\nu}{}_\varphi \\
&= C_{23}\frac{-ig_s^4}{q_3^2(q_2^2-m_Q^2)}T_{\mu\nu}{}^\varphi K^{\mu\nu}{}_\varphi,
\end{aligned}
$$

kun määritellään

$$
\begin{aligned}
C_{23} &\equiv \frac{\mathrm{TR}(t^b t^a t^c)f^{abc}}{64} \\
T_{\mu\nu}{}^\varphi &\equiv \frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\nu(\not{q}_2+m_Q)\gamma_\mu v_4\overline{v}_4\gamma^\varphi u_3.
\end{aligned}
$$

Relaatiot $f^{acd}d^{bcd}=0$ ja $\mathrm{TR}(t^a t^b t^c)=\frac{1}{2}T(F)(d^{abc}+if^{abc})$ (yhtälöt (49)) tarvitaan väritekijän laskemiseksi:

$$
\begin{aligned}
C_{23} &\equiv \frac{1}{64}\mathrm{TR}(t^b t^a t^c)f^{abc} = \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{2}T(F)(d^{bac}+if^{bac})f^{abc} \\
&= \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(d^{abc}f^{abc}-if^{abc}f^{abc}) = \frac{1}{256}(0-i\cdot 3\delta^{aa}) \\
&= \frac{1}{256}\cdot(-3i)\cdot 8 = \frac{-3i}{32}.
\end{aligned}
$$

T-tensorille pätee

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu}{}^\varphi &\equiv \frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\nu(\not{q}_2+m_Q)\gamma_\mu v_4\overline{v}_4\gamma^\varphi u_3 \\
&= \frac{1}{4}\Big[\sum_{s_3}(u_3)_f(\overline{u}_3)_a\Big](\gamma_\nu)_{ab}(\not{q}_2+m_Q)_{bc}(\gamma_\mu)_{cd}\Big[\sum_{s_4}(v_4)_d(\overline{v}_4)_e\Big](\gamma^\varphi)_{ef} \\
&= \frac{1}{4}(\not{p}_3+m_Q)_{fa}(\gamma_\nu)_{ab}(\not{q}_2+m_Q)_{bc}(\gamma_\mu)_{cd}(\not{p}_4-m_Q)_{de}(\gamma^\varphi)_{ef}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\mathrm{TR}\Big[(\not{p}_3 + m_Q)\gamma_\nu(\not{q}_2 + m_Q)\gamma_\mu(\not{p}_4 - m_Q)\gamma^\varphi\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\nu\not{q}_2\gamma_\mu\not{p}_4\gamma^\varphi) - m_Q\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\nu\not{q}_2\gamma_\mu\gamma^\varphi) + m_Q\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\nu\gamma_\mu\not{p}_4\gamma^\varphi) \\
&- m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\varphi) + m_Q\mathrm{TR}(\gamma_\nu\not{q}_2\gamma_\mu\not{p}_4\gamma^\varphi) - m_Q^2\mathrm{TR}(\gamma_\nu\not{q}_2\gamma_\mu\gamma^\varphi) \\
&+ m_Q^2\mathrm{TR}(\gamma_\nu\gamma_\mu\not{p}_4\gamma^\varphi) - m_Q^3\mathrm{TR}(\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\varphi)\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\nu\not{q}_2\gamma_\mu\not{p}_4\gamma^\varphi) - m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\varphi) \\
&- m_Q^2\mathrm{TR}(\gamma_\nu\not{q}_2\gamma_\mu\gamma^\varphi) + m_Q^2\mathrm{TR}(\gamma_\nu\gamma_\mu\not{p}_4\gamma^\varphi)\Big] \\
&= \frac{1}{4}\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\nu\not{q}_2\gamma_\mu\not{p}_4\gamma^\varphi + \frac{m_Q^2}{4}\Big[\mathrm{TR}(\gamma_\nu\gamma_\mu\not{p}_4\gamma^\varphi) \\
&- \mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\varphi) - \mathrm{TR}(\gamma_\nu\not{q}_2\gamma_\mu\gamma^\varphi)\Big] \\
&= V_{\mu\nu}{}^\varphi + m_Q^2 W_{\mu\nu}{}^\varphi,
\end{aligned}
$$

missä

$$
\begin{aligned}
V_{\mu\nu}{}^\varphi &\equiv \frac{1}{4}\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\nu\not{q}_2\gamma_\mu\not{p}_4\gamma^\varphi) \\
W_{\mu\nu}{}^\varphi &\equiv \frac{1}{4}\Big[\mathrm{TR}(\gamma_\nu\gamma_\mu\not{p}_4\gamma^\varphi) - \mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\varphi) - \mathrm{TR}(\gamma_\nu\not{q}_2\gamma_\mu\gamma^\varphi)\Big].
\end{aligned}
$$

Näistä tensoreista jälkimmäinen yksinkertaistuu seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
W_{\mu\nu}{}^\varphi &\equiv \frac{1}{4}\Big[\mathrm{TR}(\gamma_\nu\gamma_\mu\not{p}_4\gamma^\varphi) - \mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\varphi) - \mathrm{TR}(\gamma_\nu\not{q}_2\gamma_\mu\gamma^\varphi)\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[p_4^\alpha\mathrm{TR}(\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma^\varphi) - p_3^\beta\mathrm{TR}(\gamma_\beta\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\varphi) - q_2^\eta\mathrm{TR}(\gamma_\nu\gamma_\eta\gamma_\mu\gamma^\varphi)\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[p_4^\alpha\cdot 4(g_{\nu\mu}g_\alpha{}^\varphi - g_{\nu\alpha}g_\mu{}^\varphi + g_\nu{}^\varphi g_{\mu\alpha}) - p_3^\beta\cdot 4(g_{\beta\nu}g_\mu{}^\varphi - g_{\beta\mu}g_\nu{}^\varphi + g_\beta{}^\varphi g_{\nu\mu}) \\
&- (p_1^\eta - p_4^\eta)\cdot 4(g_{\nu\eta}g_\mu{}^\varphi - g_{\nu\mu}g_\eta{}^\varphi + g_\nu{}^\varphi g_{\eta\mu})\Big] \\
&= g_{\nu\mu}p_4^\varphi - g_\mu{}^\varphi p_{4\nu} + g_\nu{}^\varphi p_{4\mu} - g_\mu{}^\varphi p_{3\nu} + g_\nu{}^\varphi p_{3\mu} - g_{\nu\mu}p_3^\varphi \\
&- g_\mu{}^\varphi p_{1\nu} + g_{\nu\mu}p_1^\varphi - g_\nu{}^\varphi p_{1\mu} + g_\mu{}^\varphi p_{4\nu} - g_{\nu\mu}p_4^\varphi + g_\nu{}^\varphi p_{4\mu} \\
&= 2g_\nu{}^\varphi p_{4\mu} - g_\mu{}^\varphi p_{3\nu} + g_\nu{}^\varphi p_{3\mu} - g_{\nu\mu}p_3^\varphi - g_\mu{}^\varphi p_{1\nu} + g_{\nu\mu}p_1^\varphi - g_\nu{}^\varphi p_{1\mu}.
\end{aligned}
$$

VK-tensorisummalle pätee

$$
\begin{aligned}
V_{\mu\nu}{}^{\varphi}K^{\mu\nu}{}_{\varphi} &= \frac{1}{4}\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\nu\not{q}_2\gamma_\mu\not{p}_4\gamma^\varphi)\Big[g^{\mu\nu}(p_1-p_2)_\varphi + g^\nu{}_\varphi(p_1+2p_2)^\mu + g_\varphi{}^\mu(-2p_1-p_2)^\nu\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[\mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma^\mu\not{q}_2\gamma_\mu\not{p}_4(\not{p}_1-\not{p}_2)) + \mathrm{TR}(\not{p}_3\gamma_\varphi\not{q}_2(\not{p}_1+2\not{p}_2)\not{p}_4\gamma^\varphi) \\
&+ \mathrm{TR}(\not{p}_3(-2\not{p}_1-\not{p}_2)\not{q}_2\gamma_\mu\not{p}_4\gamma^\mu)\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[\mathrm{TR}(\not{p}_3(-2\not{q}_2)\not{p}_4(\not{p}_1-\not{p}_2)) + \mathrm{TR}(\not{p}_3(-2\not{p}_4(\not{p}_1+2\not{p}_2)\not{q}_2)) \\
&+ \mathrm{TR}(\not{p}_3(-2\not{p}_1-\not{p}_2)\not{q}_2(-2\not{p}_4))\Big] \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{q}_2\not{p}_4(\not{p}_1-\not{p}_2)) + \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4(\not{p}_1+2\not{p}_2)\not{q}_2) \\
&+ \mathrm{TR}(\not{p}_3(-2\not{p}_1-\not{p}_2)\not{q}_2\not{p}_4)\Big] \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\mathrm{TR}(\not{p}_3(\not{p}_1-\not{p}_4)\not{p}_4(2\not{p}_1-\not{p}_3-\not{p}_4)) \\
&+ \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4(-\not{p}_1+2\not{p}_3+2\not{p}_4)(\not{p}_1-\not{p}_4)) \\
&+ \mathrm{TR}(\not{p}_3(-\not{p}_1-\not{p}_3-\not{p}_4)(\not{p}_1-\not{p}_4)\not{p}_4)\Big] \\
&= -\frac{1}{2}\Big[2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_1\not{p}_4\not{p}_1) - \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_1\not{p}_4\not{p}_3) - \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_1\not{p}_4\not{p}_4) \\
&- 2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_4\not{p}_1) + \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_4\not{p}_3) + \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_4\not{p}_4) \\
&- \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_1\not{p}_1) + \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_1\not{p}_4) + 2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_3\not{p}_1) \\
&- 2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_3\not{p}_4) + 2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_4\not{p}_1) - 2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_4\not{p}_4) \\
&- \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_1\not{p}_1\not{p}_4) + \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_1\not{p}_4\not{p}_4) - \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_3\not{p}_1\not{p}_4) \\
&+ \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_4) - \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_1\not{p}_4) + \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_4\not{p}_4)\Big] \\
&= -\frac{1}{2}\Big[2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_1\not{p}_4\not{p}_1) - \mathrm{TR}(\not{p}_3^2\not{p}_1\not{p}_4) - \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_1\not{p}_4^2) \\
&- 2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4^2\not{p}_1) + \mathrm{TR}(\not{p}_3^2\not{p}_4^2) + \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_4^2) \\
&- \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_1^2) + \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_1\not{p}_4) + 2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_3\not{p}_1) \\
&- 2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_3\not{p}_4) + 2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4^2\not{p}_1) - 2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_4^2) \\
&- \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_1^2\not{p}_4) + \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_1\not{p}_4^2) - \mathrm{TR}(\not{p}_3^2\not{p}_1\not{p}_4) \\
&+ \mathrm{TR}(\not{p}_3^2\not{p}_4^2) - \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_1\not{p}_4) + \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_4^2)\Big].
\end{aligned}
$$

Koska $\not{p}^2 = p^2$ ja vapaille hiukkasille $p^2 = m^2$ (yhtälöt (38) ja (15)), niin

$$
\begin{aligned}
V_{\mu\nu}{}^{\varphi}K^{\mu\nu}{}_{\varphi} &= -\frac{1}{2}\Big[2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_1\not{p}_4\not{p}_1) - m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_1\not{p}_4) - m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_1) \\
&- 2m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_1) + m_Q^4\mathrm{TR}(\mathrm{I}_4) + m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4) + 2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_3\not{p}_1) \\
&- 2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_3\not{p}_4) + 2m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_1) - 2m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4) \\
&+ m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_1) - m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_1\not{p}_4) + m_Q^4\mathrm{TR}(\mathrm{I}_4) + m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4)\Big] \\
&= -\frac{1}{2}\Big[2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_1\not{p}_4\not{p}_1) + 2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_3\not{p}_1) - 2\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_3\not{p}_4) \\
&- 2m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_1\not{p}_4) + 2m_Q^4\mathrm{TR}(\mathrm{I}_4)\Big] \\
&= -\mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_1\not{p}_4\not{p}_1) - \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_3\not{p}_1) + \mathrm{TR}(\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_3\not{p}_4) \\
&+ m_Q^2\mathrm{TR}(\not{p}_1\not{p}_4) - m_Q^4\mathrm{TR}(\mathrm{I}_4) \\
&= -4\Big[(p_3\cdot p_1)(p_4\cdot p_1) - (p_3\cdot p_4)p_1^2 + (p_3\cdot p_1)(p_1\cdot p_4)\Big] \\
&- 4\Big[(p_3\cdot p_4)(p_3\cdot p_1) - p_3^2(p_4\cdot p_1) + (p_3\cdot p_1)(p_4\cdot p_3)\Big] \\
&+ 4\Big[(p_3\cdot p_4)(p_3\cdot p_4) - p_3^2p_4^2 + (p_3\cdot p_4)(p_4\cdot p_3)\Big] + 4m_Q^2(p_1\cdot p_4) - 4m_Q^4 \\
&= 4\Big[-(p_1\cdot p_3)(p_1\cdot p_4) - (p_1\cdot p_3)(p_1\cdot p_4) - (p_1\cdot p_3)(p_3\cdot p_4) + m_Q^2(p_1\cdot p_4) \\
&- (p_1\cdot p_3)(p_3\cdot p_4) + (p_3\cdot p_4)^2 - m_Q^4 + (p_3\cdot p_4)^2 + m_Q^2(p_1\cdot p_4) - m_Q^4\Big] \\
&= 8\Big[-(p_1\cdot p_3)(p_1\cdot p_4) - (p_1\cdot p_3)(p_3\cdot p_4) + (p_3\cdot p_4)^2 + m_Q^2(p_1\cdot p_4) - m_Q^4\Big] \\
&= 8\Big[-\frac{m_Q^2-\hat{t}}{2}\cdot\frac{m_Q^2-\hat{u}}{2} - \frac{m_Q^2-\hat{t}}{2}(\frac{\hat{s}}{2}-m_Q^2) \\
&+ (\frac{\hat{s}}{2}-m_Q^2)^2 + m_Q^2\frac{m_Q^2-\hat{u}}{2} - m_Q^4\Big] \\
&= 8\Big[-\frac{m_Q^4}{4} + \frac{m_Q^2\hat{t}}{4} + \frac{m_Q^2\hat{u}}{4} - \frac{\hat{t}\hat{u}}{4} - \frac{m_Q^2\hat{s}}{4} + \frac{m_Q^4}{2} + \frac{\hat{s}\hat{t}}{4} - \frac{m_Q^2\hat{t}}{2} \\
&+ \frac{\hat{s}^2}{4} - m_Q^2\hat{s} + m_Q^4 + \frac{m_Q^4}{2} - \frac{m_Q^2\hat{u}}{2} - m_Q^4\Big] \\
&= 8(\frac{\hat{s}^2}{4} + \frac{\hat{s}\hat{t}}{4} - \frac{\hat{t}\hat{u}}{4} - \frac{5m_Q^2\hat{s}}{4} - \frac{m_Q^2\hat{t}}{4} - \frac{m_Q^2\hat{u}}{4} + \frac{3m_Q^4}{4}) \\
&= 2(\hat{s}^2 + \hat{s}\hat{t} - \hat{t}\hat{u} - 5m_Q^2\hat{s} - m_Q^2(\hat{t}+\hat{u}) + 3m_Q^4) \\
&= 2(\hat{s}^2 + \hat{s}\hat{t} - \hat{t}\hat{u} - 5m_Q^2\hat{s} - m_Q^2(2m_Q^2-\hat{s}) + 3m_Q^4) \\
&= 2(\hat{s}^2 + \hat{s}\hat{t} - \hat{t}\hat{u} - 4m_Q^2\hat{s} + m_Q^4).
\end{aligned}
$$

WK-tensorisumma on

$$
\begin{aligned}
W_{\mu\nu}{}^{\varphi}K^{\mu\nu}{}_{\varphi} &= \Big[2g_{\nu}{}^{\varphi}p_{4\mu} - g_{\mu}{}^{\varphi}p_{3\nu} + g_{\nu}{}^{\varphi}p_{3\mu} - g_{\nu\mu}p_3^{\varphi} - g_{\mu}{}^{\varphi}p_{1\nu} + g_{\nu\mu}p_1^{\varphi} - g_{\nu}{}^{\varphi}p_{1\mu}\Big] \\
&\Big[g^{\mu\nu}(p_1-p_2)_{\varphi} + g^{\nu}{}_{\varphi}(p_1+2p_2)^{\mu} + g_{\varphi}{}^{\mu}(-2p_1-p_2)^{\nu}\Big] \\
&= \Big[2g_{\nu}{}^{\varphi}p_{4\mu} - g_{\mu}{}^{\varphi}p_{3\nu} + g_{\nu}{}^{\varphi}p_{3\mu} - g_{\nu\mu}p_3^{\varphi} - g_{\mu}{}^{\varphi}p_{1\nu} + g_{\nu\mu}p_1^{\varphi} - g_{\nu}{}^{\varphi}p_{1\mu}\Big] \\
&\Big[g^{\mu\nu}(2p_1-p_3-p_4)_{\varphi} + g^{\nu}{}_{\varphi}(-p_1+2p_3+2p_4)^{\mu} + g_{\varphi}{}^{\mu}(-p_1-p_3-p_4)^{\nu}\Big] \\
&= 2g_{\nu}{}^{\varphi}p_{4\mu}g^{\mu\nu}(2p_1-p_3-p_4)_{\varphi} + 2g_{\nu}{}^{\varphi}p_{4\mu}g^{\nu}{}_{\varphi}(-p_1+2p_3+2p_4)^{\mu} \\
&+ 2g_{\nu}{}^{\varphi}p_{4\mu}g_{\varphi}{}^{\mu}(-p_1-p_3-p_4)^{\nu} - g_{\mu}{}^{\varphi}p_{3\nu}g^{\mu\nu}(2p_1-p_3-p_4)_{\varphi} \\
&- g_{\mu}{}^{\varphi}p_{3\nu}g^{\nu}{}_{\varphi}(-p_1+2p_3+2p_4)^{\mu} - g_{\mu}{}^{\varphi}p_{3\nu}g_{\varphi}{}^{\mu}(-p_1-p_3-p_4)^{\nu} \\
&+ g_{\nu}{}^{\varphi}p_{3\mu}g^{\mu\nu}(2p_1-p_3-p_4)_{\varphi} + g_{\nu}{}^{\varphi}p_{3\mu}g^{\nu}{}_{\varphi}(-p_1+2p_3+2p_4)^{\mu} \\
&+ g_{\nu}{}^{\varphi}p_{3\mu}g_{\varphi}{}^{\mu}(-p_1-p_3-p_4)^{\nu} - g_{\nu\mu}p_3^{\varphi}g^{\mu\nu}(2p_1-p_3-p_4)_{\varphi} \\
&- g_{\nu\mu}p_3^{\varphi}g^{\nu}{}_{\varphi}(-p_1+2p_3+2p_4)^{\mu} - g_{\nu\mu}p_3^{\varphi}g_{\varphi}{}^{\mu}(-p_1-p_3-p_4)^{\nu} \\
&- g_{\mu}{}^{\varphi}p_{1\nu}g^{\mu\nu}(2p_1-p_3-p_4)_{\varphi} - g_{\mu}{}^{\varphi}p_{1\nu}g^{\nu}{}_{\varphi}(-p_1+2p_3+2p_4)^{\mu} \\
&- g_{\mu}{}^{\varphi}p_{1\nu}g_{\varphi}{}^{\mu}(-p_1-p_3-p_4)^{\nu} + g_{\nu\mu}p_1^{\varphi}g^{\mu\nu}(2p_1-p_3-p_4)_{\varphi} \\
&+ g_{\nu\mu}p_1^{\varphi}g^{\nu}{}_{\varphi}(-p_1+2p_3+2p_4)^{\mu} + g_{\nu\mu}p_1^{\varphi}g_{\varphi}{}^{\mu}(-p_1-p_3-p_4)^{\nu} \\
&- g_{\nu}{}^{\varphi}p_{1\mu}g^{\mu\nu}(2p_1-p_3-p_4)_{\varphi} - g_{\nu}{}^{\varphi}p_{1\mu}g^{\nu}{}_{\varphi}(-p_1+2p_3+2p_4)^{\mu} \\
&- g_{\nu}{}^{\varphi}p_{1\mu}g_{\varphi}{}^{\mu}(-p_1-p_3-p_4)^{\nu} \\
&= 4p_1\cdot p_4 - 2p_3\cdot p_4 - 2p_4^2 - 8p_1\cdot p_4 + 16p_3\cdot p_4 + 16p_4^2 \\
&- 2p_1\cdot p_4 - 2p_3\cdot p_4 - 2p_4^2 - 2p_1\cdot p_3 + p_3^2 + p_3\cdot p_4 \\
&+ p_1\cdot p_3 - 2p_3^2 - 2p_3\cdot p_4 + 4p_1\cdot p_3 + 4p_3^2 + 4p_3\cdot p_4 \\
&+ 2p_1\cdot p_3 - p_3^2 - p_3\cdot p_4 - 4p_1\cdot p_3 + 8p_3^3 + 8p_3\cdot p_4 \\
&- p_1\cdot p_3 - p_3^2 - p_3\cdot p_4 - 8p_1\cdot p_3 + 4p_3^2 + 4p_3\cdot p_4 \\
&+ p_1\cdot p_3 - 2p_3^3 - 2p_3\cdot p_4 + p_1\cdot p_3 + p_3^2 + p_3\cdot p_4 \\
&- 2p_1^2 + p_1\cdot p_3 + p_1\cdot p_4 + p_1^2 - 2p_1\cdot p_3 - 2p_1\cdot p_4 \\
&+ 4p_1^2 + 4p_1\cdot p_3 + 4p_1\cdot p_4 + 8p_1^2 - 4p_1\cdot p_3 - 4p_1\cdot p_4 \\
&- p_1^2 + 2p_1\cdot p_3 + 2p_1\cdot p_4 - p_1^2 - p_1\cdot p_3 - p_1\cdot p_4 \\
&- 2p_1^2 + p_1\cdot p_3 + p_1\cdot p_4 + 4p_1^2 - 8p_1\cdot p_3 - 8p_1\cdot p_4 \\
&+ p_1^2 + p_1\cdot p_3 + p_1\cdot p_4 \\
&= -12p_1\cdot p_3 - 12p_1\cdot p_4 + 24p_3\cdot p_4 + 24m_Q^2 \\
&= -12p_1\cdot(p_1+p_2) + 24p_3\cdot p_4 + 24m_Q^2 \\
&= -12\cdot\frac{\hat{s}}{2} + 24(\frac{\hat{s}}{2} - m_Q^2) + 24m_Q^2 \\
&= 6\hat{s}.
\end{aligned}
$$

Siispä

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}} &= C_{23}\frac{-ig_s^4}{q_3^2(q_2^2-m_Q^2)}T_{\mu\nu}{}^{\varphi}K^{\mu\nu}{}_{\varphi} \\
&= C_{23}\frac{-ig_s^4}{q_3^2(q_2^2-m_Q^2)}(V_{\mu\nu}{}^{\varphi}K^{\mu\nu}{}_{\varphi}+m_Q^2W_{\mu\nu}{}^{\varphi}K^{\mu\nu}{}_{\varphi}) \\
&= \frac{-3i}{32}\cdot\frac{-ig_s^4}{\hat{s}(\hat{u}-m_Q^2)}(2(\hat{s}^2+\hat{s}\hat{t}-\hat{t}\hat{u}-4m_Q^2\hat{s}+m_Q^4)+m_Q^2\cdot 6\hat{s}) \\
&= -\frac{3g_s^4}{32\hat{s}(\hat{u}-m_Q^2)}\cdot 2(\hat{s}^2+\hat{s}\hat{t}-\hat{t}\hat{u}-m_Q^2\hat{s}+m_Q^4) \\
&= \frac{3g_s^4}{16\hat{s}(m_Q^2-\hat{u})}(\hat{s}^2+\hat{s}\hat{t}-\hat{t}\hat{u}-m_Q^2\hat{s}+m_Q^4).
\end{aligned}
$$

Kuudes termi (st-interferenssi):

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}} \\
&\equiv \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *} \\
&= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}\Big[\frac{g_s^2}{q_1^2-m_Q^2}(t^at^b)_{jk}\overline{u}_3\gamma_\mu(m_Q-\not{q}_1)\gamma_\nu v_4\Big]\Big[\frac{ig_s^2}{q_3^2}(t^c)_{jk}f^{abc}\overline{u}_3\gamma^\varphi v_4K^{\mu\nu}{}_{\varphi}\Big]^* \\
&= \Big(\sum_{a,b}\frac{(t^at^b)_{jk}(t^c)_{kj}f^{abc}}{64}\Big)\frac{-ig_s^4}{q_3^2(q_1^2-m_Q^2)}(\frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\mu(m_Q-\not{q}_1)\gamma_\nu v_4\overline{v}_4\gamma^\varphi u_3)K^{\mu\nu}{}_{\varphi} \\
&= \Big(-\sum_{a,b}\frac{\mathrm{TR}(t^at^bt^c)f^{bac}}{64}\Big)\frac{-ig_s^4}{q_3^2(q_1^2-m_Q^2)}(\frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\mu(m_Q-\not{q}_1)\gamma_\nu v_4\overline{v}_4\gamma^\varphi u_3) \\
&\Big[g^{\mu\nu}(p_1-p_2)_\varphi+g^\nu{}_\varphi(p_1+2p_2)^\mu+g_\varphi{}^\mu(-2p_1-p_2)^\nu\Big] \\
&= \Big(\sum_{a,b}\frac{\mathrm{TR}(t^bt^at^c)f^{abc}}{64}\Big)\frac{-ig_s^4}{q_3^2(q_1^2-m_Q^2)}(\frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\mu(m_Q-\not{q}_1)\gamma_\nu v_4\overline{v}_4\gamma^\varphi u_3) \\
&\Big[g^{\mu\nu}(-p_1+p_2)_\varphi+g^\nu{}_\varphi(-p_1-2p_2)^\mu+g_\varphi{}^\mu(2p_1+p_2)^\nu\Big] \\
&= C_{23}\frac{-ig_s^4}{q_3^2(q_1^2-m_Q^2)}(\frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\nu(-\not{q}_1+m_Q)\gamma_\mu v_4\overline{v}_4\gamma^\varphi u_3) \\
&\Big[g^{\nu\mu}(p_2-p_1)_\varphi+g_\varphi{}^\nu(p_2+2p_1)^\mu+g^\mu{}_\varphi(-2p_2-p_1)^\nu\Big].
\end{aligned}
$$

Viidennen termin lauseke oli

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}} &= C_{23}\frac{-ig_s^4}{q_3^2(q_2^2-m_Q^2)}T_{\mu\nu}{}^{\varphi}K^{\mu\nu}{}_{\varphi} \\ &= C_{23}\frac{-ig_s^4}{q_3^2(q_2^2-m_Q^2)}(\frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma_\nu(\not{q}_2+m_Q)\gamma_\mu v_4\overline{v}_4\gamma^\varphi u_3) \\ &\Big[g^{\mu\nu}(p_1-p_2)_\varphi + g^\nu{}_\varphi(p_1+2p_2)^\mu + g_\varphi{}^\mu(-2p_1-p_2)^\nu\Big].\end{aligned}$$

Täten $\overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}}$ saadaan amplitudista $\overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}}$, kun neliliikemäärät p_1 ja p_2 vaihdetaan keskenään ($q_1 = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$ ja $q_2 = p_1 - p_4 = p_3 - p_2$). Vaihdos muokkaa Mandelstamin muuttujia seuraavasti:

$$\begin{aligned}\hat{s} &\equiv (p_1+p_2)^2 \xrightarrow{p_1\leftrightarrow p_2} (p_2+p_1)^2 \equiv \hat{s} \\ \hat{t} &\equiv (p_1-p_3)^2 \xrightarrow{p_1\leftrightarrow p_2} (p_2-p_3)^2 \equiv \hat{u} \\ \hat{u} &\equiv (p_1-p_4)^2 \xrightarrow{p_1\leftrightarrow p_2} (p_2-p_4)^2 \equiv \hat{t}.\end{aligned}$$

Siten

$$\overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}} = \frac{3g_s^4}{16\hat{s}(m_Q^2-\hat{t})}(\hat{s}^2+\hat{s}\hat{u}-\hat{t}\hat{u}-m_Q^2\hat{s}+m_Q^4).$$

Ensimmäinen aaveamplitudi:

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}_{G1}|^2} &\equiv \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}\mathcal{M}_{G1}\mathcal{M}_{G1}^* \\ &= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}(-\frac{ig_s^2}{q_4^2}(t^c)_{jk}f^{abc}\overline{u}_3\not{p}_2 v_4)(-\frac{ig_s^2}{q_4^2}(t^d)_{jk}f^{abd}\overline{u}_3\not{p}_2 v_4)^* \\ &= \Big(\sum_{a,b}\frac{(t^c)_{jk}(t^d)_{kj}f^{abc}f^{abd}}{64}\Big)\frac{g_s^4}{q_4^4}(\frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\not{p}_2 v_4\overline{v}_4\not{p}_2 u_3) \\ &= C_{G1}\frac{g_s^4}{q_4^4}S_{G1},\end{aligned}$$

missä

$$C_{G1} \equiv \frac{\mathrm{TR}(t^c t^d) f^{abc} f^{abd}}{64} = C_{33} = \frac{3}{16}$$
$$S_{G1} \equiv \frac{1}{4} \sum_{s_3,s_4} \overline{u}_3 \not{p}_2 v_4 \overline{v}_4 \not{p}_2 u_3.$$

Jälkimmäiselle summalle pätee

$$\begin{aligned}
S_{G1} &\equiv \frac{1}{4} \sum_{s_3,s_4} \overline{u}_3 \not{p}_2 v_4 \overline{v}_4 \not{p}_2 u_3 \\
&= \frac{1}{2} p_{2\mu} p_{2\nu} (\frac{1}{2} \sum_{s_3,s_4} \overline{u}_3 \gamma^\mu v_4 \overline{v}_4 \gamma^\nu u_3) \\
&= \frac{1}{2} p_{2\mu} p_{2\nu} L_Q^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} p_{2\mu} p_{2\nu} (2(p_3^\mu p_4^\nu + p_3^\nu p_4^\mu - \frac{\hat{s}}{2} g^{\mu\nu})) \\
&= (p_2 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_2 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - \frac{\hat{s}}{2} p_2^2 \\
&= 2(p_2 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) \\
&= 2 \frac{m_Q^2 - \hat{u}}{2} \cdot \frac{m_Q^2 - \hat{t}}{2} \\
&= \frac{1}{2} (\hat{t}\hat{u} - m_Q^2 (\hat{t} + \hat{u}) + m_Q^4) \\
&= \frac{1}{2} (\hat{t}\hat{u} - m_Q^2 (2m_Q^2 - \hat{s}) + m_Q^4) \\
&= \frac{1}{2} (\hat{t}\hat{u} + m_Q^2 \hat{s} - m_Q^4).
\end{aligned}$$

Täten

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}_{G1}|^2} &= C_{G1} \frac{g_s^4}{q_4^4} S_{G1} \\
&= \frac{3}{16} \cdot \frac{g_s^4}{\hat{s}^2} \cdot \frac{1}{2} (\hat{t}\hat{u} + m_Q^2 \hat{s} - m_Q^4) \\
&= \frac{3 g_s^4}{32 \hat{s}^2} (\hat{t}\hat{u} + m_Q^2 \hat{s} - m_Q^4).
\end{aligned}$$

Toinen aaveamplitudi:

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}_{G2}|^2} &\equiv \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}\mathcal{M}_{G2}\mathcal{M}_{G2}^* \\
&= \frac{1}{64}\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{s_3,s_4}(\frac{ig_s^2}{q_5^2}(t^c)_{jk}f^{abc}\overline{u}_3\not{p}_1 v_4)(\frac{ig_s^2}{q_5^2}(t^d)_{jk}f^{abd}\overline{u}_3\not{p}_1 v_4)^* \\
&= \Big(\sum_{a,b}\frac{(t^c)_{jk}(t^d)_{kj}f^{abc}f^{abd}}{64}\Big)\frac{g_s^4}{q_5^4}(\frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\not{p}_1 v_4\overline{v}_4\not{p}_1 u_3) \\
&= C_{G2}\frac{g_s^4}{q_5^4}S_{G2},
\end{aligned}
$$

missä

$$
\begin{aligned}
C_{G2} &\equiv \frac{\mathrm{TR}(t^c t^d)f^{abc}f^{abd}}{64} = C_{G1} = \frac{3}{16} \\
S_{G2} &\equiv \frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\not{p}_1 v_4\overline{v}_4\not{p}_1 u_3.
\end{aligned}
$$

Summalle

$$
\begin{aligned}
S_{G2} &\equiv \frac{1}{4}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\not{p}_1 v_4\overline{v}_4\not{p}_1 u_3 \\
&= \frac{1}{2}p_{1\mu}p_{1\nu}(\frac{1}{2}\sum_{s_3,s_4}\overline{u}_3\gamma^\mu v_4\overline{v}_4\gamma^\nu u_3) \\
&= \frac{1}{2}p_{1\mu}p_{1\nu}L_Q^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}p_{1\mu}p_{1\nu}(2(p_3^\mu p_4^\nu + p_3^\nu p_4^\mu - \frac{\hat{s}}{2}g^{\mu\nu})) \\
&= (p_1\cdot p_3)(p_1\cdot p_4) + (p_1\cdot p_3)(p_1\cdot p_4) - \frac{\hat{s}}{2}p_1^2 \\
&= 2(p_1\cdot p_3)(p_1\cdot p_4) \\
&= 2\frac{m_Q^2-\hat{t}}{2}\cdot\frac{m_Q^2-\hat{u}}{2} \\
&= \frac{1}{2}(\hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} - m_Q^4)
\end{aligned}
$$

kuten edellä.

Siispä

$$
\overline{|\mathcal{M}_{G2}|^2} = \overline{|\mathcal{M}_{G1}|^2}.
$$

Lasketaan etukäteen erotus

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{M}_{3\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}} - \overline{|\mathcal{M}_{G1}|^2} - \overline{|\mathcal{M}_{G2}|^2} \\
&= \frac{3g_s^4}{32\hat{s}^2}(-3\hat{s}^2 - 5\hat{t}^2 - 5\hat{u}^2 - 26m_Q^2\hat{s} + 10m_Q^4) - 2\cdot\frac{3g_s^4}{32\hat{s}^2}(\hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} - m_Q^4) \\
&= \frac{3g_s^4}{32\hat{s}^2}(-3\hat{s}^2 - 5\hat{t}^2 - 5\hat{u}^2 - 2\hat{t}\hat{u} - 28m_Q^2\hat{s} + 12m_Q^4) \\
&= \frac{3g_s^4}{32\hat{s}^2}(-3\hat{s}^2 + 8\hat{t}\hat{u} - 5\hat{t}^2 - 10\hat{t}\hat{u} - 5\hat{u}^2 - 28m_Q^2\hat{s} + 12m_Q^4) \\
&= \frac{3g_s^4}{32\hat{s}^2}(-3\hat{s}^2 + 8\hat{t}\hat{u} - 5(\hat{t}+\hat{u})^2 - 28m_Q^2\hat{s} + 12m_Q^4) \\
&= \frac{3g_s^4}{32\hat{s}^2}(-3\hat{s}^2 + 8\hat{t}\hat{u} - 5(2m_Q^2 - \hat{s})^2 - 28m_Q^2\hat{s} + 12m_Q^4) \\
&= \frac{3g_s^4}{32\hat{s}^2}(-3\hat{s}^2 + 8\hat{t}\hat{u} - 20m_Q^4 + 20m_Q^2\hat{s} - 5\hat{s}^2 - 28m_Q^2\hat{s} + 12m_Q^4) \\
&= \frac{3g_s^4}{32\hat{s}^2}(-8\hat{s}^2 + 8\hat{t}\hat{u} - 8m_Q^2\hat{s} - 8m_Q^4) \\
&= \frac{3g_s^4}{4\hat{s}^2}(-\hat{s}^2 + \hat{t}\hat{u} - m_Q^2\hat{s} - m_Q^4).
\end{aligned}
$$

Nyt prosessin $g + g \to Q + \overline{Q}$ polarisoitumaton invariantin amplitudin neliö on

$$
\begin{aligned}
\overline{\left|\mathcal{M}(gg \to Q\overline{Q})\right|^2} &= \overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_1^{\mu\nu *}} + \overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}} + \overline{\mathcal{M}_{3\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}} \\
&+ 2\mathrm{Re}(\overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}} + \overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}} + \overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}}) \\
&- \overline{|\mathcal{M}_{G1}|^2} - \overline{|\mathcal{M}_{G2}|^2} \\
&= \frac{g_s^4}{6(m_Q^2 - \hat{t})^2}(\hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2\hat{t} - 3m_Q^4) \\
&+ \frac{g_s^4}{6(m_Q^2 - \hat{u})^2}(\hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2\hat{u} - 3m_Q^4) \\
&+ \frac{3g_s^4}{32\hat{s}^2}(-3\hat{s}^2 - 5\hat{t}^2 - 5\hat{u}^2 - 26m_Q^2\hat{s} + 10m_Q^4) \\
&+ 2\mathrm{Re}(\frac{g_s^4}{48(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u})}(-m_Q^2\hat{s} + 4m_Q^4) \\
&+ \frac{3g_s^4}{16\hat{s}(m_Q^2 - \hat{u})}(\hat{s}^2 + \hat{s}\hat{t} - \hat{t}\hat{u} - m_Q^2\hat{s} + m_Q^4) \\
&+ \frac{3g_s^4}{16\hat{s}(m_Q^2 - \hat{t})}(\hat{s}^2 + \hat{s}\hat{u} - \hat{t}\hat{u} - m_Q^2\hat{s} + m_Q^4))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 2 \cdot \frac{3g_s^4}{32\hat{s}^2}(\hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} - m_Q^4) \\
&= \frac{g_s^4}{6(m_Q^2 - \hat{t})^2}(\hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2\hat{t} - 3m_Q^4) + \frac{g_s^4}{6(m_Q^2 - \hat{u})^2}(\hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2\hat{u} - 3m_Q^4) \\
&+ \frac{3g_s^4}{4\hat{s}^2}(-\hat{s}^2 + \hat{t}\hat{u} - m_Q^2\hat{s} - m_Q^4) + \frac{g_s^4}{24(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u})}(-m_Q^2\hat{s} + 4m_Q^4) \\
&+ \frac{3g_s^4}{8\hat{s}(m_Q^2 - \hat{u})}(\hat{s}^2 + \hat{s}\hat{t} - \hat{t}\hat{u} - m_Q^2\hat{s} + m_Q^4) + \frac{3g_s^4}{8\hat{s}(m_Q^2 - \hat{t})}(\hat{s}^2 + \hat{s}\hat{u} - \hat{t}\hat{u} - m_Q^2\hat{s} + m_Q^4) \\
&= \frac{g_s^4}{24}\Big[\frac{4}{(m_Q^2 - \hat{t})^2}(\hat{t}(2m_Q^2 - \hat{s} - \hat{t}) + m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2\hat{t} - 3m_Q^4) \\
&+ \frac{4}{(m_Q^2 - (2m_Q^2 - \hat{s} - \hat{t}))^2}(\hat{t}(2m_Q^2 - \hat{s} - \hat{t}) + m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2(2m_Q^2 - \hat{s} - \hat{t}) - 3m_Q^4) \\
&+ \frac{18}{\hat{s}^2}(-\hat{s}^2 + \hat{t}(2m_Q^2 - \hat{s} - \hat{t}) - m_Q^2\hat{s} - m_Q^4) \\
&+ \frac{1}{(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - (2m_Q^2 - \hat{s} - \hat{t}))}(-m_Q^2\hat{s} + 4m_Q^4) \\
&+ \frac{9}{\hat{s}(m_Q^2 - (2m_Q^2 - \hat{s} - \hat{t}))}(\hat{s}^2 + \hat{s}\hat{t} - \hat{t}(2m_Q^2 - \hat{s} - \hat{t}) - m_Q^2\hat{s} + m_Q^4) \\
&+ \frac{9}{\hat{s}(m_Q^2 - \hat{t})}(\hat{s}^2 + \hat{s}(2m_Q^2 - \hat{s} - \hat{t}) - \hat{t}(2m_Q^2 - \hat{s} - \hat{t}) - m_Q^2\hat{s} + m_Q^4)\Big] \\
&= \frac{g_s^4}{24}\Big[\frac{4}{(m_Q^2 - \hat{t})^2}(-\hat{t}^2 - \hat{s}\hat{t} + m_Q^2\hat{s} - 3m_Q^4) \\
&+ \frac{4}{(\hat{s} + \hat{t} - m_Q^2)^2}(-\hat{t}^2 - \hat{s}\hat{t} + 3m_Q^2\hat{s} + 4m_Q^2\hat{t} - 7m_Q^4) \\
&+ \frac{18}{\hat{s}^2}(-\hat{s}^2 - \hat{t}^2 - \hat{s}\hat{t} - m_Q^2\hat{s} + 2m_Q^2\hat{t} - m_Q^4) \\
&+ \frac{1}{(m_Q^2 - \hat{t})(\hat{s} + \hat{t} - m_Q^2)}(-m_Q^2\hat{s} + 4m_Q^4) \\
&+ \frac{9}{\hat{s}(\hat{s} + \hat{t} + m_Q^2)}(\hat{s}^2 + \hat{t}^2 + 2\hat{s}\hat{t} - m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2\hat{t} + m_Q^4) \\
&+ \frac{9}{\hat{s}(m_Q^2 - \hat{t})}(\hat{t}^2 + m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2\hat{t} + m_Q^4)\Big].
\end{aligned}
$$

Muokataan tämä lauseke erilaiseen muotoon, jotta se on selkeämpi ja helpommin integroitavissa muuttujan $\hat{t}$ suhteen. Kuusi termiä muuttuvat seuraavasti:

$$\frac{4}{(m_Q^2-\hat{t})^2}(-\hat{t}^2-\hat{s}\hat{t}+m_Q^2\hat{s}-3m_Q^4)$$
$$=\frac{4}{(m_Q^2-\hat{t})^2}(-m_Q^4+2m_Q^2\hat{t}-\hat{t}^2+m_Q^2\hat{s}-\hat{s}\hat{t}+2m_Q^4-2m_Q^2\hat{t}-4m_Q^4)$$
$$=\frac{4}{(m_Q^2-\hat{t})^2}(-(m_Q^2-\hat{t})^2+\hat{s}(m_Q^2-\hat{t})+2m_Q^2(m_Q^2-\hat{t})-4m_Q^4)$$
$$=-4+\frac{4\hat{s}+8m_Q^2}{m_Q^2-\hat{t}}-\frac{16m_Q^4}{(m_Q^2-\hat{t})^2}$$

$$\frac{4}{(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)^2}(-\hat{t}^2-\hat{s}\hat{t}+3m_Q^2\hat{s}+4m_Q^2\hat{t}-7m_Q^4)$$
$$=\frac{4}{(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)^2}(-\hat{s}^2-\hat{s}\hat{t}+m_Q^2\hat{s}-\hat{s}\hat{t}-\hat{t}^2+m_Q^2\hat{t}+m_Q^2\hat{s}+m_Q^2\hat{t}-m_Q^4+\hat{s}^2+\hat{s}\hat{t}$$
$$-m_Q^2\hat{s}+2m_Q^2\hat{s}+2m_Q^2\hat{t}-2m_Q^4-4m_Q^4)$$
$$=\frac{4}{(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)^2}(-(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)^2+\hat{s}(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)+2m_Q^2(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)-4m_Q^4)$$
$$=-4+\frac{4\hat{s}+8m_Q^2}{\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2}-\frac{16m_Q^4}{(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)^2}$$

$$\frac{18}{\hat{s}^2}(-\hat{s}^2-\hat{t}^2-\hat{s}\hat{t}-m_Q^2\hat{s}+2m_Q^2\hat{t}-m_Q^4)$$
$$=\frac{9}{\hat{s}^2}(-2\hat{s}^2-2\hat{t}^2-2\hat{s}\hat{t}-2m_Q^2\hat{s}+4m_Q^2\hat{t}-2m_Q^4)$$

$$\frac{1}{(m_Q^2-\hat{t})(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)}(-m_Q^2\hat{s}+4m_Q^4)$$
$$=\frac{\hat{s}}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{t})(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)}(-m_Q^2\hat{s}+4m_Q^4)$$
$$=\frac{\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2+m_Q^2-\hat{t}}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{t})(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)}(-m_Q^2\hat{s}+4m_Q^4)$$
$$=(\frac{1}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{t})}+\frac{1}{\hat{s}(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)})(-m_Q^2\hat{s}+4m_Q^4)$$
$$=-\frac{m_Q^2}{m_Q^2-\hat{t}}+\frac{4m_Q^4}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{t})}-\frac{m_Q^2}{\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2}+\frac{4m_Q^4}{\hat{s}(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{9}{\hat{s}(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)}(\hat{s}^2+\hat{t}^2+2\hat{s}\hat{t}-m_Q^2\hat{s}-2m_Q^2\hat{t}+m_Q^4)\\
&=\frac{9}{\hat{s}(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)}(\hat{s}^2+\hat{s}\hat{t}^2-m_Q^2\hat{s}+\hat{s}\hat{t}+\hat{t}^2-m_Q^2\hat{t}-m_Q^2\hat{s}-m_Q^2\hat{t}+m_Q^4+m_Q^2\hat{s})\\
&=\frac{9}{\hat{s}(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)}((\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)^2+m_Q^2\hat{s})\\
&=\frac{9}{\hat{s}}(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)+\frac{9m_Q^2}{\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2}\\
&=\frac{9}{\hat{s}^2}(\hat{s}^2+\hat{s}\hat{t}-m_Q^2\hat{s})+\frac{9m_Q^2}{\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{9}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{t})}(\hat{t}^2+m_Q^2\hat{s}-2m_Q^2\hat{t}+m_Q^4)\\
&=\frac{9}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{t})}((m_Q^2-\hat{t})^2+m_Q^2\hat{s})\\
&=\frac{9}{\hat{s}}(m_Q^2-\hat{t})+\frac{9m_Q^2}{m_Q^2-\hat{t}}\\
&=\frac{9}{\hat{s}^2}(-\hat{s}\hat{t}+m_Q^2\hat{s})+\frac{9m_Q^2}{m_Q^2-\hat{t}}.
\end{aligned}
$$

Nyt voidaan kirjoittaa

$$
\begin{aligned}
\overline{\left|\mathcal{M}(gg\to Q\overline{Q})\right|^2} = \frac{g_s^4}{24}\Big[&\frac{4}{(m_Q^2-\hat{t})^2}(-\hat{t}^2-\hat{s}\hat{t}+m_Q^2\hat{s}-3m_Q^4)\\
&+\frac{4}{(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)^2}(-\hat{t}^2-\hat{s}\hat{t}+3m_Q^2\hat{s}+4m_Q^2\hat{t}-7m_Q^4)\\
&+\frac{18}{\hat{s}^2}(-\hat{s}^2-\hat{t}^2-\hat{s}\hat{t}-m_Q^2\hat{s}+2m_Q^2\hat{t}-m_Q^4)\\
&+\frac{1}{(m_Q^2-\hat{t})(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)}(-m_Q^2\hat{s}+4m_Q^4)\\
&+\frac{9}{\hat{s}(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)}(\hat{s}^2+\hat{t}^2+2\hat{s}\hat{t}-m_Q^2\hat{s}-2m_Q^2\hat{t}+m_Q^4)\\
&+\frac{9}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{t})}(\hat{t}^2+m_Q^2\hat{s}-2m_Q^2\hat{t}+m_Q^4)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(4\pi\alpha_s)^2}{24}\Big[-4+\frac{4\hat{s}+8m_Q^2}{m_Q^2-\hat{t}}-\frac{16m_Q^4}{(m_Q^2-\hat{t})^2} \\
&-4+\frac{4\hat{s}+8m_Q^2}{\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2}-\frac{16m_Q^4}{(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)^2} \\
&+\frac{9}{\hat{s}^2}(-2\hat{s}^2-2\hat{t}^2-2\hat{s}\hat{t}-2m_Q^2\hat{s}+4m_Q^2\hat{t}-2m_Q^4) \\
&-\frac{m_Q^2}{m_Q^2-\hat{t}}+\frac{4m_Q^4}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{t})}-\frac{m_Q^2}{\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2}+\frac{4m_Q^4}{\hat{s}(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)} \\
&+\frac{9}{\hat{s}^2}(\hat{s}^2+\hat{s}\hat{t}-m_Q^2\hat{s})+\frac{9m_Q^2}{\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2}+\frac{9}{\hat{s}^2}(-\hat{s}\hat{t}+m_Q^2\hat{s})+\frac{9m_Q^2}{m_Q^2-\hat{t}}\Big] \\
&= \frac{2\pi^2\alpha_s^2}{3}\Big[-8+\frac{9}{\hat{s}^2}(-\hat{s}^2-2\hat{t}^2-2\hat{s}\hat{t}-2m_Q^2\hat{s}+4m_Q^2\hat{t}-2m_Q^4) \\
&+(4\hat{s}+16m_Q^2+\frac{4m_Q^4}{\hat{s}})(\frac{1}{m_Q^2-\hat{t}}+\frac{1}{\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2}) \\
&-16m_Q^4(\frac{1}{(m_Q^2-\hat{t})^2}+\frac{1}{(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)^2})\Big] \\
&= \frac{2\pi^2\alpha_s^2}{3}\Big[-17+\frac{18}{\hat{s}^2}(-\hat{t}^2-\hat{s}\hat{t}-m_Q^2\hat{s}+2m_Q^2\hat{t}-m_Q^4) \\
&+4(\hat{s}+4m_Q^2+\frac{m_Q^4}{\hat{s}})(\frac{1}{m_Q^2-\hat{t}}+\frac{1}{\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2}) \\
&-16m_Q^4(\frac{1}{(m_Q^2-\hat{t})^2}+\frac{1}{(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)^2})\Big]. \qquad (76)
\end{aligned}
$$

Siten $\hat{t}$-differentioitu vaikutusala on (yhtälö (30))

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{\sigma}(gg\to Q\overline{Q})}{d\hat{t}} &= \frac{\overline{\left|\mathcal{M}(gg\to Q\overline{Q})\right|^2}}{16\pi\lambda(\hat{s},0,0)} \\
&= \frac{\pi\alpha_s^2}{24\hat{s}^2}\Big[-17+\frac{18}{\hat{s}^2}(-\hat{t}^2-\hat{s}\hat{t}-m_Q^2\hat{s}+2m_Q^2\hat{t}-m_Q^4) \\
&+4(\hat{s}+4m_Q^2+\frac{m_Q^4}{\hat{s}})(\frac{1}{m_Q^2-\hat{t}}+\frac{1}{\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2}) \\
&-16m_Q^4(\frac{1}{(m_Q^2-\hat{t})^2}+\frac{1}{(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)^2})\Big]. \qquad (77)
\end{aligned}
$$

Toisin ilmaistuna

$$\frac{d\hat{\sigma}(gg \to Q\overline{Q})}{d\hat{t}} = \frac{\pi\alpha_s^2}{24\hat{s}^2}\Big[-17 + \frac{18}{\hat{s}^2}(\hat{t}\hat{u} - m_Q^2\hat{s} - m_Q^4)$$
$$+ 4(\hat{s} + 4m_Q^2 + \frac{m_Q^4}{\hat{s}})(\frac{1}{m_Q^2 - \hat{t}} + \frac{1}{m_Q^2 - \hat{u}})$$
$$- 16m_Q^4(\frac{1}{(m_Q^2 - \hat{t})^2} + \frac{1}{(m_Q^2 - \hat{u})^2})\Big]. \tag{78}$$

Kokonaisvaikutusalan laskemiseksi tarvitaan sijoitusten $\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \hat{t}$, $\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \hat{t}^2$, $\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \hat{t}^3$, $\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} (-\ln(m_Q^2 - \hat{t}))$, $\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \ln(\hat{s} + \hat{t} - m_Q^2)$, $\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \frac{1}{m_Q^2 - \hat{t}}$ ja $\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \frac{-1}{\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2}$ arvot. Näistä kolme ensimmäistä on laskettu massallisilla alkutilahiukkasilla tapauksessa $q + \overline{q} \to Q + \overline{Q}$. Asettamalla vastaaville lausekkeille $m_q = m_g = 0$ saadaan

$$\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \hat{t} = \hat{s}\sqrt{1 - \frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}$$
$$\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \hat{t}^2 = (2m_Q^2\hat{s} - \hat{s}^2)\sqrt{1 - \frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}$$
$$\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \hat{t}^3 = (\hat{s}^3 - 4m_Q^2\hat{s}^2 + 3m_Q^4\hat{s})\sqrt{1 - \frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}.$$

Neljäs sijoitus:

$$\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} (-\ln(m_Q^2 - \hat{t})) = -\Big\{\ln\Big[m_Q^2 - \hat{t}_{\max}\Big] - \ln\Big[m_Q^2 - \hat{t}_{\min}\Big]\Big\}$$
$$= -\Big\{\ln\Big[m_Q^2 - (m_Q^2 - \frac{\hat{s}}{2}(1 - \sqrt{1 - \frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}))\Big]$$
$$- \ln\Big[m_Q^2 - (m_Q^2 - \frac{\hat{s}}{2}(1 + \sqrt{1 - \frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}))\Big]\Big\}$$
$$= -\Big\{\ln\Big[\frac{\hat{s}}{2}(1 - \sqrt{1 - \frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})\Big] - \ln\Big[\frac{\hat{s}}{2}(1 + \sqrt{1 - \frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})\Big]\Big\}$$

$$= -\ln\left(\frac{\frac{\hat{s}}{2}(1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})}{\frac{\hat{s}}{2}(1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}{1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}\right).$$

Viides sijoitus:

$$\begin{aligned}
\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \ln(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2) &= \ln(\hat{s}+\hat{t}_{\max}-m_Q^2) - \ln(\hat{s}+\hat{t}_{\min}-m_Q^2) \\
&= \ln(\hat{s}+m_Q^2-\frac{\hat{s}}{2}(1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})-m_Q^2) \\
&- \ln(\hat{s}+m_Q^2-\frac{\hat{s}}{2}(1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})-m_Q^2) \\
&= \ln\left(\frac{\frac{\hat{s}}{2}(1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})}{\frac{\hat{s}}{2}(1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}{1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}\right).
\end{aligned}$$

Kuudes sijoitus:

$$\begin{aligned}
\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \frac{1}{m_Q^2-\hat{t}} &= \frac{1}{m_Q^2-\hat{t}_{\max}} - \frac{1}{m_Q^2-\hat{t}_{\min}} \\
&= \frac{1}{m_Q^2-(m_Q^2-\frac{\hat{s}}{2}(1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}))} - \frac{1}{m_Q^2-(m_Q^2-\frac{\hat{s}}{2}(1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}))} \\
&= \frac{1}{\frac{\hat{s}}{2}(1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})} - \frac{1}{\frac{\hat{s}}{2}(1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})} \\
&= \frac{2}{\hat{s}} \cdot \frac{1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}-(1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})}{(1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})(1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\hat{s}} \cdot \frac{2\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}{1-(1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}})} \\
&= \frac{4\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}{\hat{s}\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}} \\
&= \frac{1}{m_Q^2}\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}.
\end{aligned}
$$

Seitsemäs sijoitus:

$$
\begin{aligned}
\Bigg|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} \frac{-1}{\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2} &= \frac{1}{\hat{s}+\hat{t}_{\min}-m_Q^2} - \frac{1}{\hat{s}+\hat{t}_{\max}-m_Q^2} \\
&= \frac{1}{\hat{s}+m_Q^2-\frac{\hat{s}}{2}(1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})-m_Q^2} \\
&- \frac{1}{\hat{s}+m_Q^2-\frac{\hat{s}}{2}(1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})-m_Q^2} \\
&= \frac{1}{\frac{\hat{s}}{2}(1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})} - \frac{1}{\frac{\hat{s}}{2}(1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}})} \\
&= \frac{1}{m_Q^2}\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}
\end{aligned}
$$

kuten edellä.

Prosessin $g+g \to Q+\overline{Q}$ kokonaisvaikutusala on

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}(gg \to Q\overline{Q}) &= \int_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} d\hat{t} \frac{d\hat{\sigma}(gg \to Q\overline{Q})}{d\hat{t}} \\
&= \int_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} d\hat{t} \frac{\pi\alpha_s^2}{24\hat{s}^2} \Bigg\{ -17 + \frac{18}{\hat{s}^2}\Big[-\hat{t}^2 - \hat{s}\hat{t} - m_Q^2\hat{s} + 2m_Q^2\hat{t} - m_Q^4\Big] \\
&+ 4\Big[\hat{s} + 4m_Q^2 + \frac{m_Q^4}{\hat{s}}\Big]\Big[\frac{1}{m_Q^2-\hat{t}} + \frac{1}{\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2}\Big] \\
&- 16m_Q^4\Big[\frac{1}{(m_Q^2-\hat{t})^2} + \frac{1}{(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)^2}\Big]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi\alpha_s^2}{24\hat{s}^2}\Bigg\{ -\frac{18}{\hat{s}^2}\Big[\int_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} d\hat{t}\ \hat{t}^2 + (\hat{s}-2m_Q^2)\int_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} d\hat{t}\ \hat{t}\Big] \\
&- \Big[17+\frac{18}{\hat{s}^2}(m_Q^2\hat{s}+m_Q^4)\Big]\int_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} d\hat{t} \\
&+ 4\Big[\hat{s}+4m_Q^2+\frac{m_Q^4}{\hat{s}}\Big]\Big[\int_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} d\hat{t}\frac{1}{m_Q^2-\hat{t}} + \int_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} d\hat{t}\frac{1}{\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2}\Big] \\
&- 16m_Q^4\Big[\int_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} d\hat{t}\frac{1}{(m_Q^2-\hat{t})^2} + \int_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}} d\hat{t}\frac{1}{(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)^2}\Big]\Bigg\} \\
&= \frac{\pi\alpha_s^2}{24\hat{s}^2}\Bigg\{ -\frac{18}{\hat{s}^2}\Big[\frac{1}{3}\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}}\hat{t}^3 + (\hat{s}-2m_Q^2)\frac{1}{2}\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}}\hat{t}^2\Big] \\
&- \Big[17+\frac{18}{\hat{s}^2}(m_Q^2\hat{s}+m_Q^4)\Big]\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}}\hat{t} \\
&+ 4\Big[\hat{s}+4m_Q^2+\frac{m_Q^4}{\hat{s}}\Big]\Big[\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}}(-\ln(m_Q^2-\hat{t})) + \Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}}\ln(\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2)\Big] \\
&- 16m_Q^4\Big[\Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}}\frac{1}{m_Q^2-\hat{t}} + \Big|_{\hat{t}_{\min}}^{\hat{t}_{\max}}\frac{-1}{\hat{s}+\hat{t}-m_Q^2}\Big]\Bigg\} \\
&= \frac{\pi\alpha_s^2}{24\hat{s}^2}\Bigg\{ -\frac{18}{\hat{s}^2}\Big[\frac{1}{3}(\hat{s}^3-4m_Q^2\hat{s}^2+3m_Q^4\hat{s})\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}} \\
&+ \frac{\hat{s}-2m_Q^2}{2}(2m_Q^2\hat{s}-\hat{s}^2)\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}\Big] \\
&- \Big[17+\frac{18}{\hat{s}^2}(m_Q^2\hat{s}+m_Q^4)\Big]\hat{s}\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}} \\
&+ 4\Big[\hat{s}+4m_Q^2+\frac{m_Q^4}{\hat{s}}\Big]\left[\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}{1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}\right) + \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}{1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}\right)\right] \\
&- 16m_Q^4\Big[\frac{1}{m_Q^2}\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}} + \frac{1}{m_Q^2}\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}\Big]\Bigg\} \\
&= \frac{\pi\alpha_s^2}{24\hat{s}^2}\Bigg\{\Big[-\frac{6}{\hat{s}^2}(\hat{s}^3-4m_Q^2\hat{s}^2+3m_Q^4\hat{s}) + (\frac{18m_Q^2}{\hat{s}^2}-\frac{9}{\hat{s}})(2m_Q^2\hat{s}-\hat{s}^2) \\
&- (17\hat{s}+\frac{18}{\hat{s}}(m_Q^2\hat{s}+m_Q^4)) - 16m_Q^4\cdot\frac{2}{m_Q^2}\Big]\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}} \\
&+ 8\Big[\hat{s}+4m_Q^2+\frac{m_Q^4}{\hat{s}}\Big]\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}{1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}\right)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi\alpha_s^2}{24\hat{s}^2}\Bigg\{\Big[-6\hat{s}+24m_Q^2-\frac{18m_Q^4}{\hat{s}}+\frac{36m_Q^4}{\hat{s}}-18m_Q^2-18m_Q^2 \\
&+9\hat{s}-17\hat{s}-18m_Q^2-\frac{18m_Q^4}{\hat{s}}-32m_Q^2\Big]\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}} \\
&+8\Big[\hat{s}+4m_Q^2+\frac{m_Q^4}{\hat{s}}\Big]\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}{1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}\right)\Bigg\} \\
&= \frac{\pi\alpha_s^2}{24\hat{s}^2}\Bigg\{\Big[-14\hat{s}-62m_Q^2\Big]\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}+8\Big[\hat{s}+4m_Q^2+\frac{m_Q^4}{\hat{s}}\Big]\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}{1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}\right)\Bigg\} \\
&= \frac{\pi\alpha_s^2}{12\hat{s}}\Bigg[-\Big(7+\frac{31m_Q^2}{\hat{s}}\Big)\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}+4\Big(1+\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}+\frac{m_Q^4}{\hat{s}^2}\Big)\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}{1-\sqrt{1-\frac{4m_Q^2}{\hat{s}}}}\right)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{79}
$$

Tarkistin laskemani invariantit amplitudit ja aliprosessien vaikutusalat vertaamalla niitä vastaaviin lähteessä [76] esitettyihin tuloksiin. Invarianttien amplitudien lausekkeiden muodot poikkeavat toisistaan, erityisesti prosessin $g+g \to Q+\overline{Q}$ tapauksessa, jossa laskentatavat ovat olleet erilaiset (käyttäen aaveita ja ilman). Invarianttien amplitudien yhtäpitävyydet on näytetty liitteessä A.

3.3 Poikittaisliikemäärän ja rapiditeettien suhteen differentioitu vaikutusala

Johdan tässä osiossa prosessin $p+\overline{p} \to Q+\overline{Q}+X$ alimman kertaluvun vaikutusalan, joka on differentioitu poikittaisliikemäärän ja molempien lopputilakvarkkien rapiditeettien suhteen. Mahdolliset hadronisaatiot $Q \to H_Q+X$ ja $\overline{Q} \to H_{\overline{Q}}+X$ on otettu huomioon fragmentaatio-osuuksien avulla.

Indeksit 1 ja 2 edustavat alkutilapartoneja i ja j ($q+\overline{q}$, $\overline{q}+q$, $g+g$) ja indeksit 3 ja 4 raskaita kvarkkeja Q ja $\overline{Q}$. Kokonaisprosessin $p+\overline{p} \to Q+\overline{Q}+X$ CMS-koordinaatistossa

$$p_1 = \frac{x_1\sqrt{s}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad p_2 = \frac{x_2\sqrt{s}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \quad p_3 = \begin{pmatrix}E_3\\p_{3x}\\p_{3y}\\p_{3z}\end{pmatrix} \quad p_4 = \begin{pmatrix}E_4\\p_{4x}\\p_{4y}\\p_{4z}\end{pmatrix}$$

approksimaatioiden (53) ja (54) mukaisesti. Tästä voidaan laskea

$$\hat{s} = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 = x_1 x_2 s. \tag{80}$$

Yhtälön (28) nojalla aliprosessin $i + j \to Q + \overline{Q}$ (polarisoitumaton) vaikutusala on

$$\begin{aligned}
&d\hat{\sigma}(ij \to Q\overline{Q}) \\
&= \frac{\overline{\left|\mathcal{M}(ij \to Q\overline{Q})\right|^2}}{2\sqrt{\lambda(\hat{s},m_1^2,m_2^2)}}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)\frac{d^3p_3}{2E_3(2\pi)^3}\frac{d^3p_4}{2E_4(2\pi)^3} \\
&= \frac{\overline{\left|\mathcal{M}(ij \to Q\overline{Q})\right|^2}}{32\pi^2\hat{s}}\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)\frac{d^3p_3}{E_3}\frac{d^3p_4}{E_4}.
\end{aligned}$$

Käyttämällä relaatiota $\frac{d\hat{\sigma}(ij\to Q\overline{Q})}{d\hat{t}} = \frac{\overline{\left|\mathcal{M}(ij\to Q\overline{Q})\right|^2}}{16\pi\lambda(s,m_1^2,m_2^2)}$ (yhtälö (30)) saadaan

$$d\hat{\sigma}(ij \to Q\overline{Q}) = \frac{\hat{s}}{2\pi}\frac{d\hat{\sigma}(ij \to Q\overline{Q})}{d\hat{t}}\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)\frac{d^3p_3}{E_3}\frac{d^3p_4}{E_4}.$$

Koska $p_z = m_T\cosh(y)$ ja $E = m_T\cosh(y)$ (yhtälöt (21)), niin ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$\frac{dp_{iz}}{dy_i} = \frac{d}{dy_i}(m_T\sinh(y_i)) = m_T\cosh(y_i) = E_i$$

ja siten

$$\frac{d^3p_i}{E_i} = \frac{d^2p_{iT}dp_{iz}}{E_i} = d^2p_{iT}dy_i.$$

Aliprosessin differentiaalisen vaikutusalan lausekkeesta saadaan nyt

$$E_3E_4\frac{d\hat{\sigma}(ij\to Q\overline{Q})}{d^3p_3d^3p_4} = \frac{d\hat{\sigma}(ij\to Q\overline{Q})}{d^2p_{3T}dy_3d^2p_{4T}dy_4}$$
$$= \frac{\hat{s}}{2\pi}\frac{d\hat{\sigma}(ij\to Q\overline{Q})}{d\hat{t}}\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4).$$

Koska nyt käsitellään raskaita lopputilakvarkkeja, niin approksimoin fragmentaatio-funktioiden kontribuutiota vastaavilla fragmentaatio-osuuksilla ja oletan liikemäärät muuttumattomiksi hadronisaatioissa. Käyttämällä tätä approksimaatiota ja kollineaarista faktorisaatioteoreemaa (yhtälöt (57) ja (59)) saadaan

$$\frac{d\sigma(p\overline{p}\to H_QH_{\overline{Q}}+X)}{d^2p_{3T}dy_3d^2p_{4T}dy_4}$$
$$= F(Q,\overline{Q}\to H_Q,H_{\overline{Q}})\sum_{i,j=g,q,\overline{q}}\int_0^1\int_0^1 dx_1dx_2f_{i/p}(x_1,Q_f)f_{j/\overline{p}}(x_2,Q_f)\frac{d\hat{\sigma}(ij\to Q\overline{Q})}{d^2p_{3T}dy_3d^2p_{4T}dy_4}$$
$$= F\sum_{i,j=g,q,\overline{q}}\int_0^1\int_0^1 dx_1dx_2f_{i/p}(x_1,Q_f)f_{j/\overline{p}}(x_2,Q_f)\frac{\hat{s}}{2\pi}\frac{d\hat{\sigma}(ij\to Q\overline{Q})}{d\hat{t}}\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4),$$

missä on lyhennetty $F\equiv F(Q,\overline{Q}\to H_Q,H_{\overline{Q}})$ (ja missä mahdollisesti $H_Q=Q$ ja/tai $H_{\overline{Q}}=\overline{Q}$).

Muokataan lausekkeen Diracin deltafunktiota:

$$\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4)$$
$$=\delta(E_1+E_2-E_3-E_4)\delta^{(2)}(\overline{p}_{1T}+\overline{p}_{2T}-\overline{p}_{3T}-\overline{p}_{4T})\delta(p_{1z}+p_{2z}-p_{3z}-p_{4z}).$$

Kokonaisprosessin CMS-koordinaatistossa päti $\overline{p}_{1T}=\overline{p}_{2T}=0$, $E_1=\frac{x_1\sqrt{s}}{2}$, $E_2=\frac{x_2\sqrt{s}}{2}$, $p_{1z}=\frac{x_1\sqrt{s}}{2}$ ja $p_{2z}=-\frac{x_2\sqrt{s}}{2}$. Täten ($\delta(a)=\delta(-a)$, yhtälö (34))

$$\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4)$$
$$=\delta^{(2)}(\overline{p}_{3T}+\overline{p}_{4T})\delta(\frac{\sqrt{s}}{2}(x_1+x_2)-E_3-E_4)\delta(\frac{\sqrt{s}}{2}(x_1-x_2)-p_{3z}-p_{4z}).$$

Koska $\delta(a)\delta(b)=2\delta(a+b)\delta(a-b)$ (yhtälö (34)), niin

$$
\begin{aligned}
&\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4)\\
&=2\delta^{(2)}(\overline{p}_{3T}+\overline{p}_{4T})\delta\Big[\sqrt{s}x_1-(E_3+p_{3z})-(E_4+p_{4z})\Big]\\
&\delta\Big[\sqrt{s}x_2-(E_3-p_{3z})-(E_4-p_{4z})\Big]\\
&=2\delta^{(2)}(\overline{p}_{3T}+\overline{p}_{4T})\\
&\delta\Big[\sqrt{s}x_1-(m_{3T}\cosh(y_3)+m_{3T}\sinh(y_3))-(m_{4T}\cosh(y_4)+m_{4T}\sinh(y_4))\Big]\\
&\delta\Big[\sqrt{s}x_2-(m_{3T}\cosh(y_3)-m_{3T}\sinh(y_3))-(m_{4T}\cosh(y_4)-m_{4T}\sinh(y_4))\Big]\\
&=2\delta^{(2)}(\overline{p}_{3T}+\overline{p}_{4T})\delta(\sqrt{s}x_1-m_{3T}e^{y_3}-m_{4T}e^{y_4})\delta(\sqrt{s}x_2-m_{3T}e^{-y_3}-m_{4T}e^{-y_4}).
\end{aligned}
$$

Kaksiulotteisen deltafunktion nojalla $\overline{p}_{3T}=-\overline{p}_{4T}$. Siten voidaan määritellä $|\overline{p}_{3T}|=|\overline{p}_{4T}|\equiv p_T$. Lisäksi $m_3=m_4=m_Q$, joten määritellään myös $m_{3T}=m_{4T}\equiv m_T$. Täten

$$
\begin{aligned}
&\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4)\\
&=2\delta^{(2)}(\overline{p}_{3T}+\overline{p}_{4T})\delta(\sqrt{s}x_1-m_T(e^{y_3}+e^{y_4}))\delta(\sqrt{s}x_2-m_T(e^{-y_3}+e^{-y_4}))\\
&=\frac{2}{s}\delta^{(2)}(\overline{p}_{3T}+\overline{p}_{4T})\delta(x_1-\frac{m_T}{\sqrt{s}}(e^{y_3}+e^{y_4}))\delta(x_2-\frac{m_T}{\sqrt{s}}(e^{-y_3}+e^{-y_4})),
\end{aligned}
$$

missä käytettiin lopuksi relaatiota $\delta(ab)=\frac{1}{|a|}\delta(b)$ (yhtälö (34)).

Nyt differentioitu vaikutusala on ($\hat{s}=x_1x_2s$)

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\sigma(p\overline{p}\to H_QH_{\overline{Q}}+X)}{d^2p_{3T}dy_3d^2p_{4T}dy_4}\\
&=F\sum_{i,j=g,q,\overline{q}}\int_0^1 dx_1dx_2f_{i/p}(x_1,Q_f)f_{j/\overline{p}}(x_2,Q_f)\frac{x_1x_2s}{2\pi}\frac{d\hat{\sigma}(ij\to Q\overline{Q})}{d\hat{t}}\frac{2}{s}\delta^{(2)}(\overline{p}_{3T}+\overline{p}_{4T})\\
&\delta(x_1-\frac{m_T}{\sqrt{s}}(e^{y_3}+e^{y_4}))\delta(x_2-\frac{m_T}{\sqrt{s}}(e^{-y_3}+e^{-y_4}))\\
&=\frac{F}{\pi}\sum_{i,j=g,q,\overline{q}}x_1f_{i/p}(x_1,Q_f)x_2f_{j/\overline{p}}(x_2,Q_f)\frac{d\hat{\sigma}(ij\to Q\overline{Q})}{d\hat{t}}\delta^{(2)}(\overline{p}_{3T}+\overline{p}_{4T}),
\end{aligned}
$$

missä

$$
\begin{aligned}
x_1&=\frac{m_T}{\sqrt{s}}(e^{y_3}+e^{y_4})\\
x_2&=\frac{m_T}{\sqrt{s}}(e^{-y_3}+e^{-y_4}).
\end{aligned}
\tag{81}
$$

Poikittaisliikemäärävektori on esitettävissä sen pituuden ja atsimuuttikulman ϕ_3 avulla: $\overline{p}_{3T} = (p_{3x},p_{3y}) = (p_T\cos(\phi_3), p_T\sin(\phi_3))$. Tätä muuttujanvaihtoa vastaava Jacobin determinantti on $J(p_T,\phi_3) = p_T$, joten differentiaalisille alkoille pätee [77]

$$d^2p_{3T} = dp_{3x}dp_{3y} = J(p_T,\phi_3)dp_Td\phi_3 = p_Tdp_Td\phi_3.$$

Vaikutusala $\frac{d\sigma(pp\to H_QH_{\overline{Q}}+X)}{d^2p_{3T}dy_3d^2p_{4T}dy_4}$ ei ole riippuvainen tuotetun kvarkin atsimuuttikulmasta. Siten saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{d\sigma(p\overline{p} \to H_QH_{\overline{Q}} + X)}{dp_Tdy_3dy_4} \\
&= p_T\int_0^{2\pi} d\phi_3 \frac{d\sigma(p\overline{p} \to H_QH_{\overline{Q}} + X)}{p_Tdp_Td\phi_3dy_3dy_4} \\
&= p_T\int_0^{2\pi} d\phi_3 \int_{\overline{p}_{4T}} d^2p_{4T} \frac{d\sigma(p\overline{p} \to H_QH_{\overline{Q}} + X)}{d^2p_{3T}dy_3d^2p_{4T}dy_4} \\
&= p_T\int_0^{2\pi} d\phi_3 \int_{\overline{p}_{4T}} d^2p_{4T}\ \frac{F}{\pi} \sum_{i,j=g,q,\overline{q}} x_1f_{i/p}(x_1,Q_f)x_2f_{j/\overline{p}}(x_2,Q_f)\frac{d\hat{\sigma}(ij \to Q\overline{Q})}{d\hat{t}}\delta^{(2)}(\overline{p}_{3T} + \overline{p}_{4T}) \\
&= 2Fp_T \sum_{i,j=g,q,\overline{q}} x_1f_{i/p}(x_1,Q_f)x_2f_{j/\overline{p}}(x_2,Q_f)\frac{d\hat{\sigma}(ij \to Q\overline{Q})}{d\hat{t}}, \qquad (82)
\end{aligned}$$

kun $\overline{p}_{3T} = -\overline{p}_{4T}$. (Huomio: y_3 ja y_4 viittaavat nimenomaan kvarkkeihin, eivätkä niiden hadroneihin.)

Määritetään rapiditeettien y_3 ja y_4 ylä- ja alarajat sovitulle poikittaisliikemäärälle p_T. Koska vapaille hiukkasille $E = \sqrt{m^2 + |\overline{p}|^2}$ ja koska kokonaisprosessin CMS-koordinaatistossa kvarkki-antikvarkkiparin suurin mahdollinen energian arvo on $\sqrt{s}$ ($x_1 = x_2 = 1$), niin

$$\begin{aligned}
&\sqrt{s} \geq 2\sqrt{m_Q^2 + p_T^2} \\
\Leftrightarrow\ &p_T \leq \sqrt{\frac{s}{4} - m_Q^2}. \qquad (83)
\end{aligned}$$

Kvarkin energialle pätee

$$E_3 = m_T \cosh(y_3)$$
$$\Leftrightarrow \ |y_3| = \operatorname{arcosh}(\frac{E_3}{m_T}),$$

joten

$$|y_3| \leq \operatorname{arcosh}(\frac{\sqrt{s}}{2m_T}). \tag{84}$$

Ensimmäisen protonin luovuttamalle pitkittäisliikemääräosuudelle pätee

$$x_1 = \frac{m_T}{\sqrt{s}}(e^{y_3} + e^{y_4}) \Leftrightarrow \ e^{y_4} = \frac{\sqrt{s}}{m_T}x_1 - e^{y_3}$$

eli

$$e^{y_4} \leq \frac{\sqrt{s}}{m_T} - e^{y_3} \Leftrightarrow \ y_4 \leq \ln(\frac{\sqrt{s}}{m_T} - e^{y_3}).$$

Toista protonia (tai antiprotonia) vastaavalle liikemääräosuudelle

$$x_2 = \frac{m_T}{\sqrt{s}}(e^{-y_3} + e^{-y_4}) \Leftrightarrow \ e^{-y_4} = \frac{\sqrt{s}}{m_T}x_2 - e^{-y_3}$$

eli

$$e^{-y_4} \leq \frac{\sqrt{s}}{m_T} - e^{-y_3} \Leftrightarrow \ y_4 \geq -\ln(\frac{\sqrt{s}}{m_T} - e^{-y_3}).$$

Siispä

$$-\ln(\frac{\sqrt{s}}{m_T} - e^{-y_3}) \leq y_4 \leq \ln(\frac{\sqrt{s}}{m_T} - e^{y_3}). \tag{85}$$

Voidaan myös halutessa määrittää ensin antikvarkin rapiditeetin y_4 ylä- ja alarajat, jolloin $|y_4| \leq \operatorname{arcosh}(\frac{\sqrt{s}}{2m_T})$ ja $-\ln(\frac{\sqrt{s}}{m_T} - e^{-y_4}) \leq y_3 \leq \ln(\frac{\sqrt{s}}{m_T} - e^{y_4})$. Mahdolliset rapiditeettiparit (y_3,y_4) ovat luonnollisesti kuitenkin samat.

Differentioidut vaikutusalat $\frac{d\hat{\sigma}(q\overline{q}\to Q\overline{Q})}{d\hat{t}}$ ja $\frac{d\hat{\sigma}(gg\to Q\overline{Q})}{d\hat{t}}$ ilmoitetaan Mandelstamin muuttujien $\hat{s}$, $\hat{t}$ ja $\hat{u}$ avulla (yhtälöt (70), (71), (77) ja (78)). Siten vaikutusalojen $\frac{d\sigma(p\overset{(-)}{p}\to H_Q H_{\overline{Q}}+X)}{dp_T dy_3 dy_4}$ laskemiseksi on tarpeen ilmoittaa Mandelstamin muuttujat poikit-

taisliikemäärän p_T sekä rapiditeettien y_3 ja y_4 funktioina.

Aliprosessien neliliikemäärille päti

$$p_1 = \frac{x_1\sqrt{s}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad p_3 = \begin{pmatrix}E_3\\p_{3x}\\p_{3y}\\p_{3z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m_T\cosh(y_3)\\\overline{p}_{3T}\\m_T\sinh(y_3)\end{pmatrix}.$$

Siten

$$\begin{aligned}\hat{s} &= x_1x_2s\\ &= \frac{m_T}{\sqrt{s}}(e^{y_3}+e^{y_4})\frac{m_T}{\sqrt{s}}(e^{-y_3}+e^{-y_4})s\\ &= 2m_T^2(1+\cosh(y_3-y_4))\end{aligned} \tag{86}$$

$$\begin{aligned}\hat{t} &= (p_1-p_3)^2\\ &= p_1^2+p_3^2-2p_1\cdot p_3\\ &= 0+m_Q^2-2\frac{x_1\sqrt{s}}{2}(m_T\cosh(y_3)-m_T\sinh(y_3))\\ &= m_Q^2-\frac{m_T}{\sqrt{s}}(e^{y_3}+e^{y_4})\sqrt{s}m_T(\frac{e^{y_3}+e^{-y_3}}{2}-\frac{e^{y_3}-e^{-y_3}}{2})\\ &= m_Q^2-m_T^2(1+e^{y_4-y_3})\end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned}\hat{u} &= 2m_Q^2-\hat{s}-\hat{t}\\ &= 2m_Q^2-2m_T^2(1+\cosh(y_3-y_4))-(m_Q^2-m_T^2(1+e^{y_4-y_3}))\\ &= 2m_Q^2-2m_T^2-2m_T^2\frac{e^{y_3-y_4}+e^{y_4-y_3}}{2}-m_Q^2+m_T^2+m_T^2e^{y_4-y_3}\\ &= m_Q^2-m_T^2(1+e^{y_3-y_4}).\end{aligned} \tag{88}$$

Mandelstamin muuttujan $\hat{s}$ lausekkeista voidaan päätellä, että

$$\frac{4m_Q^2}{s} \leq \frac{4m_T^2}{s} \leq x_{1,2}. \tag{89}$$

4 Numeerinen ohjelma

Edellä esitettyjen vaikutusalalausekkeiden integroimiseksi tulee käyttää numeerisia metodeja. Esittelen näitä laskuja varten tekemäni ohjelman lyhyesti tässä luvussa.

Tein numeerisen ohjelman C++-ohjelmointikielellä, hyödyntäen CERNin ROOT-ohjelmakirjastoa [78]. Ohjelma koostuu laskentaohjelmasta Int.cc sekä vastaavasta piirto-ohjelmasta Plot.C. Int.cc tarvitsee toimiakseen ns. makefile-tiedoston (joka luo ajettavan tiedoston int) ja alimman kertaluvun CT14-partonijakaumafunktiot. Vaikutusalojen laskemisen ja analysoinnin lisäksi Int.cc tuottaa kuvaajadatan Petersonin fragmentaatiofunktioille (c- ja b-kvarkit), vahvalle kytkentävakiolle $\alpha_s(Q_r)$ ja CT14-partonijakaumafunktioille (kuvat 4, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15). Int.cc-, Plot.C- ja makefile-tiedostot ovat esitettyinä liitteissä B, C ja D.

4.1 Vaikutusalafunktiot

Kaikki laskentaohjelmani vaikutusalafunktiot pohjautuvat lausekkeisiin (yhtälöt (57), (59) ja (82))

$$\sigma(p\overset{(-)}{p} \to H_Q H_{\overline{Q}} + X) = F \sum_{i,j=g,q,\overline{q}} \int_0^1 \int_0^1 dx_2 dx_1 f_{i/p}(x_1,Q_f) f_{j/\overset{(-)}{p}}(x_2,Q_f) \hat{\sigma}(ij \to Q\overline{Q}) \tag{90}$$

ja

$$\frac{d\sigma(p\overset{(-)}{p} \to H_Q H_{\overline{Q}} + X)}{dp_T dy_3 dy_4} = 2Fp_T \sum_{i,j=g,q,\overline{q}} x_1 f_{i/p}(x_1,Q_f) x_2 f_{j/\overset{(-)}{p}}(x_2,Q_f) \frac{d\hat{\sigma}(ij \to Q\overline{Q})}{d\hat{t}},$$

missä $\hat{\sigma}(q\overline{q} \to Q\overline{Q})$, $\hat{\sigma}(gg \to Q\overline{Q})$, $\frac{d\hat{\sigma}(q\overline{q}\to Q\overline{Q})}{d\hat{t}}$ ja $\frac{d\hat{\sigma}(gg\to Q\overline{Q})}{d\hat{t}}$ ovat tunnettuja ($\hat{\sigma}(ij \to Q\overline{Q}) = 0$, kun $\hat{s} = x_1 x_2 s \leq 4m_Q^2$). Lasketut vaikutusalat ovat muotoa $\sigma(\sqrt{s})$, $\sigma_{p_T^{\min}<p_T<p_T^{\max},\ y_{\min}<y<y_{\max}}(\sqrt{s})$, $\sigma_{\eta_{\min}<\eta<\eta_{\max}}(\sqrt{s})$, $\frac{d\sigma}{dp_T}(p_T)$, $\frac{d\sigma_{y_{\min}<y<y_{\max}}}{dp_T}(p_T)$, $\frac{d\sigma}{dy}(y)$ tai $\frac{d\sigma}{d\eta}(\eta)$, missä y ja η edustavat toisen tuotetun kvarkin/hadronin rapiditeettia ja pseudorapiditeettia (kokonaisprosessin CMS-koordinaatistossa), ja $p_T^{\min}$, $p_T^{\max}$, $y_{\min}$, $y_{\max}$, $\eta_{\min}$ ja $\eta_{\max}$ ovat kinemaattisten leikkausten ala- ja ylärajat. Näistä vaikutusaloista ensimmäinen edustaa yhtälöä (90) ja loput saadaan yhtälöstä (82) muuttujanvaihdoilla ja integroimalla.

Muutin vaikutusalojen integroimisalueet muuttujanvaihdoilla hyperkuutioiksi

(näissä tapauksissa neliöiksi tai kuutioiksi), joiden sisällä integrandit poikkeavat nollasta (paitsi tapauksessa $\sigma_{p_T^{\min}<p_T<p_T^{\max},\ y_{\min}<y<y_{\max}}$) ja ovat jatkuvia. Integroinnin lopputulos voi vääristyä, mikäli integrandissa on epäjatkuvuuskohtia. Muuttujanvaihdot ja lopulliset vaikutusalafunktioiden lausekkeet on esitettynä liitteessä E.

Vaikutusalafunktioille asetettavia parametreja ovat muun muuassa tuotetun kvarkin massa, lopputilahadronin massa (voi vaikuttaa integroitavaan kvarkin rapiditeettiväliin, $y_Q \neq y_{H_Q}$, kun $\overline{p}_Q = \overline{p}_{H_Q}$ ja $m_Q \neq m_{H_Q}$, liite E), törmäystyyppi ($p+p$ tai $p+\overline{p}$), skaalojen tyypit (kvarkin massan m_Q, poikittaismassan m_T tai aliprosessin Mandelstamin muuttujan $\hat{s}$ monikerta), fragmentaatio-osuuden $f(Q \to H_Q)$ arvo sekä kinemaattiset leikkaukset (rapiditeetin, pseudorapiditeetin ja poikittaisliikemäärän rajoitukset). Int.cc:n tärkeimmät yleiset parametrit ovat laskentapisteiden lukumäärä ja käytetyt partonijakaumafunktiot. Käyttämäni laskentapisteiden lukumäärä oli joko 150, 300 tai 1200 pistettä, tilanteesta riippuen.

Faktorisaatioskaalan valinnan vaikutuksia tarkastellessa tulee ottaa huomioon seuraava asia: Kaikkien kertalukujen CT14-partonijakaumafunktiot on generoitu pitkittäisliikemääräosuuksilla $10^{-9} < x < 1$ ja faktorisaatioskaaloilla 1,3 GeV $< Q_f < 10^5$ GeV, ja tämän kaksiulotteisen alueen ulkopuolella funktioiden arvot ekstrapoloidaan [79]. Tämä ekstrapolointi on epäluotettavaa, sillä esimerkiksi skaalalla $Q_f = \frac{m_c}{2} = 635$ MeV alimman kertaluvun gluonipartonijakaumafunktio saa negatiivisia arvoja liikemääräosuuksilla $x < 0{,}3$ (kuva 10a), minkä ei pitäisi olla mahdollista. Pahimmillaan vaikutusalat ovat negatiivisia alle 1,3 GeV:n skaalavalinnoilla. Olen siksi asettanut vaikutusalafunktioiden faktorisaatioskaalojen minimiksi 1,3 GeV. Mikäli funktiolle yritetään antaa tätä pienempi skaala, niin skaala kasvatetaan automaattisesti minimiarvoon. Renormalisaatioskaalan valintaa en ole manipuloinut, kaikki arvot välillä 635 MeV $\leq Q_r \leq$ 1,2 TeV kelpaavat vahvalle kytkentävakiolle $\alpha_s(Q_r)$ sellaisenaan, koska ollaan alueessa, jossa $Q_r \gtrsim 1$ GeV.

4.2 Ohjelman tuottamat tulokset

Olkoon raskaan kvarkin massan ja skaalojen oletus-, minimi- ja maksimiarvot m_Q^{def}, $m_Q^{\min}$, $m_Q^{\max}$, Q_r^{def}, $Q_r^{\min}$, $Q_r^{\max}$, Q_f^{def}, $Q_f^{\min}$, $Q_f^{\max}$ (muuttujan m_Q, m_T tai $\hat{s}$ monikerta). Int.cc laskee alimman kertaluvun vaikutusalan halutulla x-akselin ($\sqrt{s}$, p_T, y tai η) välillä oletusparametreilla (m_Q^{def}, Q_r^{def}, Q_f^{def}), massan minimi- ja maksimiarvolla ja kuudella vaihtoehtoisella skaalavalinnalla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$),

($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Vaihtoehtoisia skaalavalintoja käsiteltäessä pätee aina $m_Q = m_Q^{\text{def}}$. Skaalavalinnat ($Q_r^{\max}$, $Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\min}$, $Q_f^{\max}$) on jätetty pois liian suuren skaalaeron välttämiseksi, kuten lähteessä [67]. Ohjelma muodostaa vaihtoehtoisilla massa- ja skaalavalinnoilla lasketuista vaikutusaloista virheverhokäyrät massalle ja skaalavalinnalle (esimerkiksi kuva 16b). Lisäksi renormalisaatio- ja faktorisaatioskaalan vaihteluille muodostetaan omat erilliset virheverhokäyrät (($Q_r^{\min}$ – $Q_r^{\max}$, Q_f^{def}) ja (Q_r^{def}, $Q_f^{\min}$ – $Q_f^{\max}$), esim. kuva 17a). Mikäli vaikutusalan laskemisessa on käytetty fragmentaatio-osuutta ($F(Q,\overline{Q} \to H_Q,H_{\overline{Q}}) < 1$), niin myös fragmentaatio-osuuden virheestä muodostetaan oma virheverhokäyrä (esim. kuva 24b). Massan, skaalan ja mahdollisen fragmentaatio-osuuden aiheuttamista suhteellisista virheistä muodostetaan erilliset virheverhokäyrät (esim. kuva 25b).

CT14-LO-partonijakaumafunktioille ei ole määritetty virhepartonijakaumafunktioita, joiden avulla laskettaisiin LO-partonijakaumafunktioiden epävarmuudesta johtuva virhe. CT14-NLO-partonijakaumafunktioille virhefunktiot on kuitenkin määritetty. [62] Laskin vaikutusalan LO-lausekkeita ja NLO-partonijakaumafunktioita käyttäen virheineen, ja approksimoin LO-tuloksen virhettä asettamalla sille saman suhteellisen virheen kuin NLO-partonijakaumafunktioita käyttämällä saadulla tuloksella (esim. kuva 16a). Vaikutusalan partonijakaumafunktiovirheen määritystapa on esitettynä ohjelmassa Int.cc sekä lähteessä [80].

Int.cc ei laske vaikutusaloja, mikäli kokeellisia vertailutuloksia ei ole määritetty. Kokeelliset tulokset voivat olla piste- tai histogrammimuodossa. Histogrammitapauksissa teoreettisen tuloksen keskiarvo lasketaan histogrammipylväitä vastaavilla väleillä tarkan vertailutuloksen saamiseksi (esim. kuva 24). Pistetuloksille voidaan määrittää asymmetrinen kokonaisvirhe (esim. kuva 16), ja histogrammituloksille symmetrinen statistinen virhe ja asymmetrinen systemaattinen virhe, jotka esitetään erikseen (esim. kuva 24). Lisäksi histogrammituloksille on määritettävissä lisävirheet, jotka eivät lukeudu statistiseksi tai systemaattiseksi virheeksi (nämä vaikuttavat edempänä mainittaviin K-kerroinsovituksiin).

Ohjelma laskee teoreettista tulosta vastaavat K-kertoimet jokaiselle seitsemälle skaalavalinnalle. Kokeellisen vertailutuloksen muodosta riippuen K-kertoimet ovat joko pisteiden arvot jaettuna vastaavilla teoreettisilla arvoilla (esim. kuvat 18 ja 19) tai histogrammipylväiden arvot jaettuna pylväitä vastaavilla teoreettisilla keskiarvoilla (esim. kuvat 26 ja 27). Pistetuloksen kokonaisvirheet ja histogrammituloksen statistiset ja systemaattiset virheet jaetaan myös teoreettisilla tuloksilla

ja esitetään kuvaajissa. Ohjelma tekee K-kerroinsovitukset skaaloja vastaavien kokonais-K-kertoimen selvittämiseksi. Histogrammitapausten K-kerroinsovituksissa teoreettisella tuloksella jaetut statistiset, systemaattiset ja lisävirheet yhdistetään neliöllisesti. Oletusskaalavalintaa vastaavalle vaikutusalalle lasketaan sovituksen pohjalta K-kertoimella skaalattu vaikutusala (esim. kuva 16b).

Int.cc laskee myös eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot kokonaisprosessin vaikutusalaan, tarkastellun muuttujan funktioina (esim. kuva 17c). Tämä suhteellinen osuus, merkitään $r(ij)$, lasketaan jakamalla prosessin vaikutusala, jonka laskemisessa on otettu huomioon vain yksi partonityyppi ($g+g$, $u+\overline{u}$, $d+\overline{d}$, $s+\overline{s}$, $c+\overline{c}$ tai $b+\overline{b}$, t-kvarkille/$\overline{t}$-antikvarkille CT14-LO-partonijakaumafunktioita ei ole määritetty), normaalisti lasketulla vaikutusalalla. Luonnollisesti $r(gg)+r(u\overline{u})$ $+r(d\overline{d})+r(s\overline{s})+r(c\overline{c})+r(b\overline{b})=1$. Suhteellisista kontribuutioista tulee ottaa huomioon se, että aliprosessin $Q+\overline{Q}\to Q+\overline{Q}$ t-kanavaa vastaavaa Feynmanin diagrammia ja (raskaiden) alkutilakvarkkien massoja ei ole otettu huomioon vaikutusalan laskussa (luku 3.1). Siten $r(c\overline{c})$ ja $r(b\overline{b})$ eivät ole tarkkoja, vaan enemmänkin approksimoivat c- ja b-kvarkkien kontribuutioiden suhteellisten osuuksien suuruuksien kertaluokkia.

5 Tulokset

Esitän vaikutusalojen laskemisessa käyttämäni massa- ja skaalavalinnat sekä CT14-LO-partonijakaumafunktioiden kuvaajat luvussa 5.1. Raskaiden kvarkkiparien tuottojen vaikutusalat sekä niden analyysi ovat esitettyinä luvuissa 5.2, 5.3 ja 5.4.

5.1 Käytetyt parametrit ja partonijakaumafunktiot

5.1.1 Massa- ja skaalavalinnat

Kuten luvussa 2.1 korostettiinkin, c-, b- ja t-kvarkkien massat ovat lopulta hyvin epäyksikäsitteiset. Olen valinnut kvarkkien oletus-, minimi ja maksimimassat siten, että ne edustavat mahdollisimman laajasti erilaisia määritys- ja määrittelytapoja. Massan vaihtelun vaikutuksia tutkailtaessa käytetetään aina oletusskaaloja Q_r^{def} ja Q_f^{def}.

c-kvarkin oletusmassa $m_c^{\mathrm{def}} = 1{,}27(\pm 0{,}02)$ GeV edustaa $\overline{\mathrm{MS}}$-skeemaavalintaa massaskaalalla $\mu = m_c$ ($m_c = m_c(\mu = m_c)$) [81]. Tätä oletusmassaa vastaava napa-

massa on 1,67(±0,07) GeV [81], ja käytän tätä arvoa c-kvarkin massan maksimina. Minimimassaksi olen valinnut $m_c^{\min} = 0{,}993(\pm 0{,}008)$ GeV, joka määritetty myös $\overline{\text{MS}}$-skeemassa, mutta massaskaalalla $\mu = 3$ GeV [82–84].

b-kvarkin massan oletusarvo $4{,}18(^{+0{,}03}_{-0{,}02})$ GeV [14] ja minimiarvo 3,610(±0,016) GeV [82, 83] ovat molemmat määritetty $\overline{\text{MS}}$-skeemassa, massaskaaloilla $\mu = m_b$ ($m_b = m_b(\mu = m_b)$) ja 3 GeV. Olen käyttänyt maksimiarvona napamassaa 4,78(±0,06) GeV [85].

t-kvarkin massat 172,9(±0,4) GeV, $160(^{+5}_{-4})$ GeV ja $173{,}1 \pm 0{,}9$ GeV edustavat suoraa massan arvon mittausta, vaikutusalamittausten avulla määritystä ja vaikutusalamittausten avulla saatua napamassaa [14]. Käytän ensimmäistä ja toista arvoa t-kvarkin massan oletus- ja minimiarvoina. Napamassa ei poikkea juuri lainkaan oletusarvosta, joten en käytä sitä maksimiarvona sellaisenaan, vaan käytän sen ylärajaa 173,1 GeV + 0,9 GeV = 174,0 GeV. Kaikki massavalinnat ovat esitettynä tiivistetysti taulukossa 1.

Olen käsitellyt raskaiden kvarkkien hadronien massoja virheettöminä. Tämä johtuu siitä, että hadronien massojen suhteelliset virheet ovat mitättömiä verrattuna valittuihin kvarkkien massojen vaihteluväleihin (luku 5.2).

Taulukko 1. Käytetyt raskaiden kvarkkien massojen arvot, ilmoitettuna gigaelektronivolteissa.

Q	m_Q^{def}	$m_Q^{\min}$	$m_Q^{\max}$
c	1,27	0,993	1,67
b	4,18	3,610	4,78
t	172,9	160	174,0

Olen valinnut p_T-riippuvaiseen integrandiin (yhtälö (82)) perustuvien vaikutusalojen oletus-, minimi- ja maksimiskaaloiksi m_T, $\frac{1}{2}m_T$ ja $2m_T$, kuten lähteissä [67], [86] ja [42] on tehty. Vastaavat skaalat kokonaisvaikutusaloille ovat $2m_Q$, m_Q ja $4m_Q$ (yhtälö (90)). Faktorisaatioskaalavalinnoissa tulee kuitenkin ottaa huomioon asetettu minimiarvo 1,3 GeV $\leq Q_f$. Kaikkien laskettujen vaikutusalojen faktorisaatioskaalavalinnat on tiivistetty taulukkoon 2.

Taulukko 2. Käytetyt faktorisaatioskaalat. Nämä arvot pätevät myös vaihtoehtoisilla massavalinnoilla $m_Q^{\max}$ ja $m_Q^{\min}$, sillä ne vaikuttavat vain oletusskaalavalintaan. Jokainen differentioiduista vaikutusaloista on laskettu ainakin kahdella eri CMS-energialla. Vaikutusalat, joiden törmäysprosessien lopputilat ovat muotoa $H_Q + X$, edustavat moniosaisia prosesseja $p + p \to Q + \overline{Q} + X \to H_Q + X$.

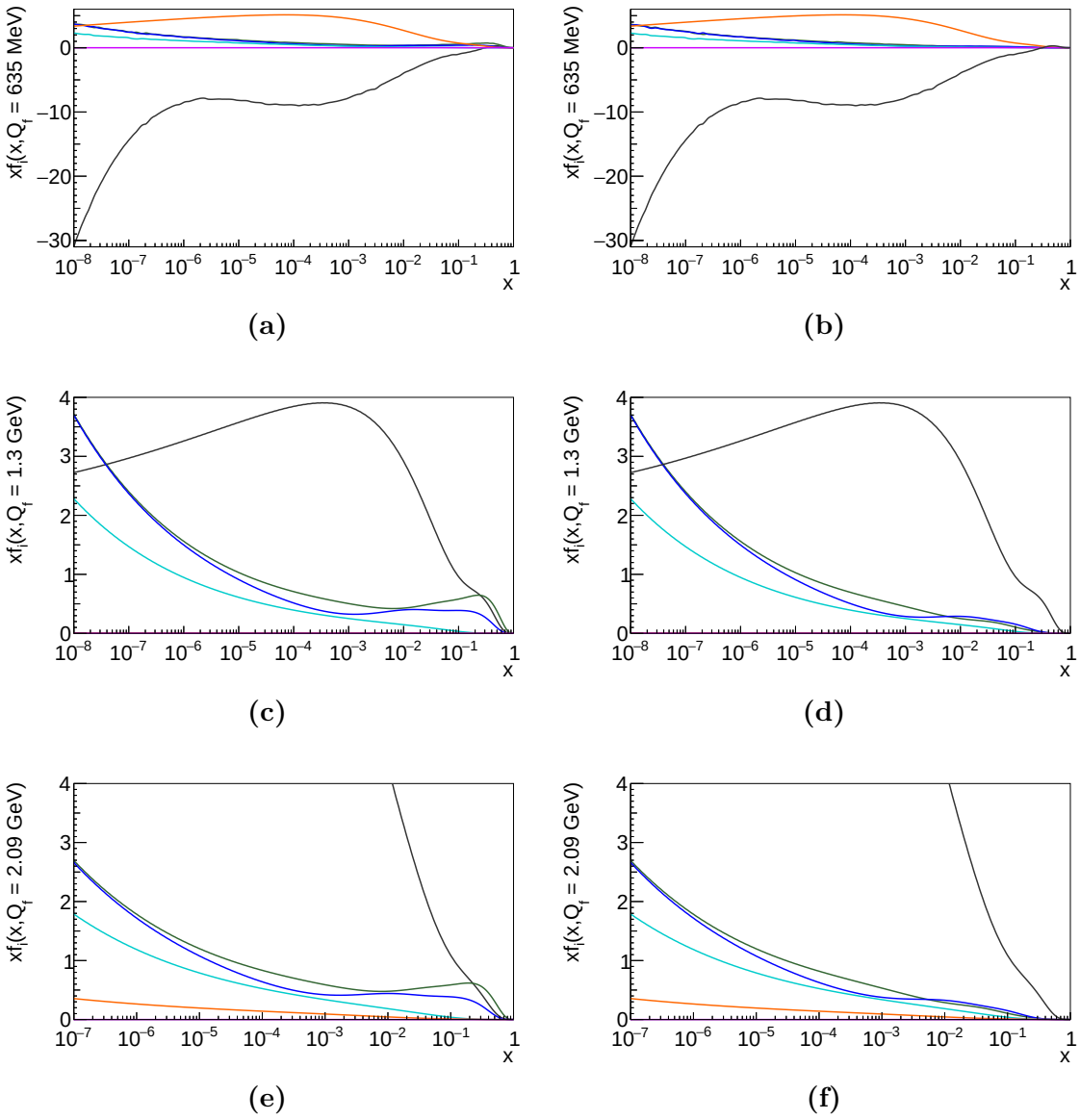
Vaikutusala	Q_f^{def}	$Q_f^{\min}$	$Q_f^{\max}$
$\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}(\sqrt{s})$	$2m_c$	1,3 GeV	$4m_c$
$\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\text{ GeV},\ 2.0<y<4.5}(\sqrt{s})$	max{1,3 GeV,m_T}	max{1,3 GeV,$\frac{1}{2}m_T$}	$2m_T$
$\frac{d\sigma^{pp\to H_c+X}_{\lvert y\rvert<0.5}}{dp_T}(p_T)$	max{1,3 GeV,m_T}	max{1,3 GeV,$\frac{1}{2}m_T$}	$2m_T$
$\sigma^{pp\to b\bar{b}+X}(\sqrt{s})$	$2m_b$	m_b	$4m_b$
$\sigma^{pp\to H_b+X}_{2.0<\eta<5.0}(\sqrt{s})$	m_T	$\frac{1}{2}m_T$	$2m_T$
$\frac{d\sigma^{pp\to H_b+X}}{d\eta}(\eta)$	m_T	$\frac{1}{2}m_T$	$2m_T$
$\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}(\sqrt{s})$	$2m_t$	m_t	$4m_t$
$\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{dp_T}(p_T)$	m_T	$\frac{1}{2}m_T$	$2m_T$
$\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{dy}(y)$	m_T	$\frac{1}{2}m_T$	$2m_T$

5.1.2 Alimman kertaluvun partonijakaumafunktiot

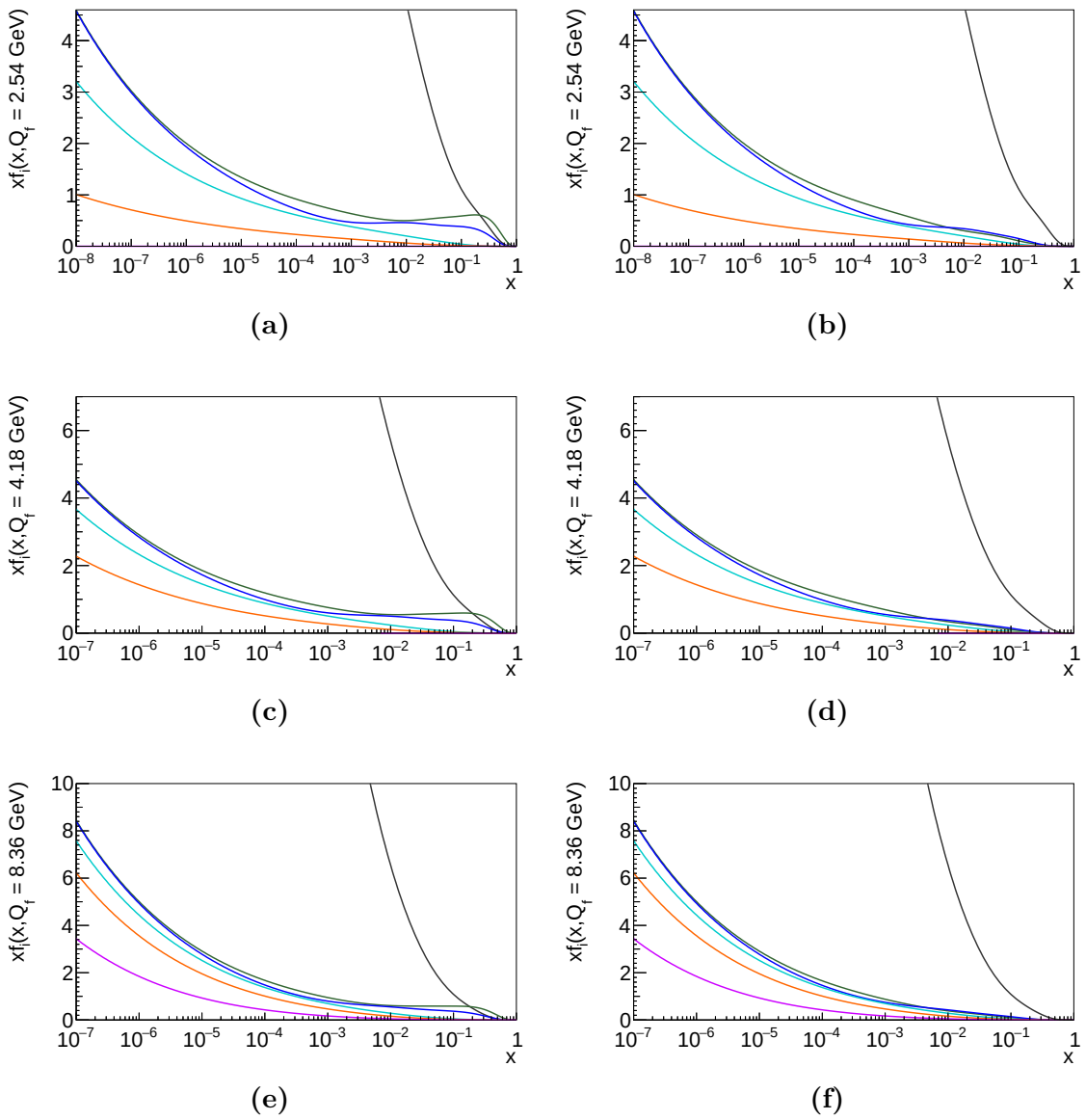
Alimman kertaluvun CT14-partonijakaumafunktiot ovat esitettyinä pitkittäisliikemääräosuuden x funktiona, faktorisaatioskaaloilla $Q_f = 635$ MeV ($\frac{1}{2}m_c$), 1,3 GeV, 2,09 GeV ($\frac{1}{2}m_b$), 2,54 GeV ($2m_c$), 4,18 GeV (m_b), 8,36 GeV ($2m_b$), 16,72 GeV ($4m_b$), 86,45 GeV ($\frac{1}{2}m_t$), 172,9 GeV (m_t), 345,8 GeV ($2m_t$), 691,6 GeV ($4m_t$) ja 1 TeV, kuvissa 10, 11, 12 ja 13. Partonijakaumafunktiot ovat esitettynä myös faktorisaatioskaalan funktioina, eri x:n arvoilla, kuvissa 14 ja 15. LO-partonijakaumafunktiot (ja vahva kytkentävakio α_s) vastaavat yhden laskentasilmukan jakautumis- ja kerroinfunktioita [62]. CT14-NLO-partonijakaumafunktiot ovat liitteessä F. Keskimäärin LO-funktiot saavat selvästi korkeampia arvoja kuin NLO-funktiot.

5.2 c-kvarkkiparien tuotto

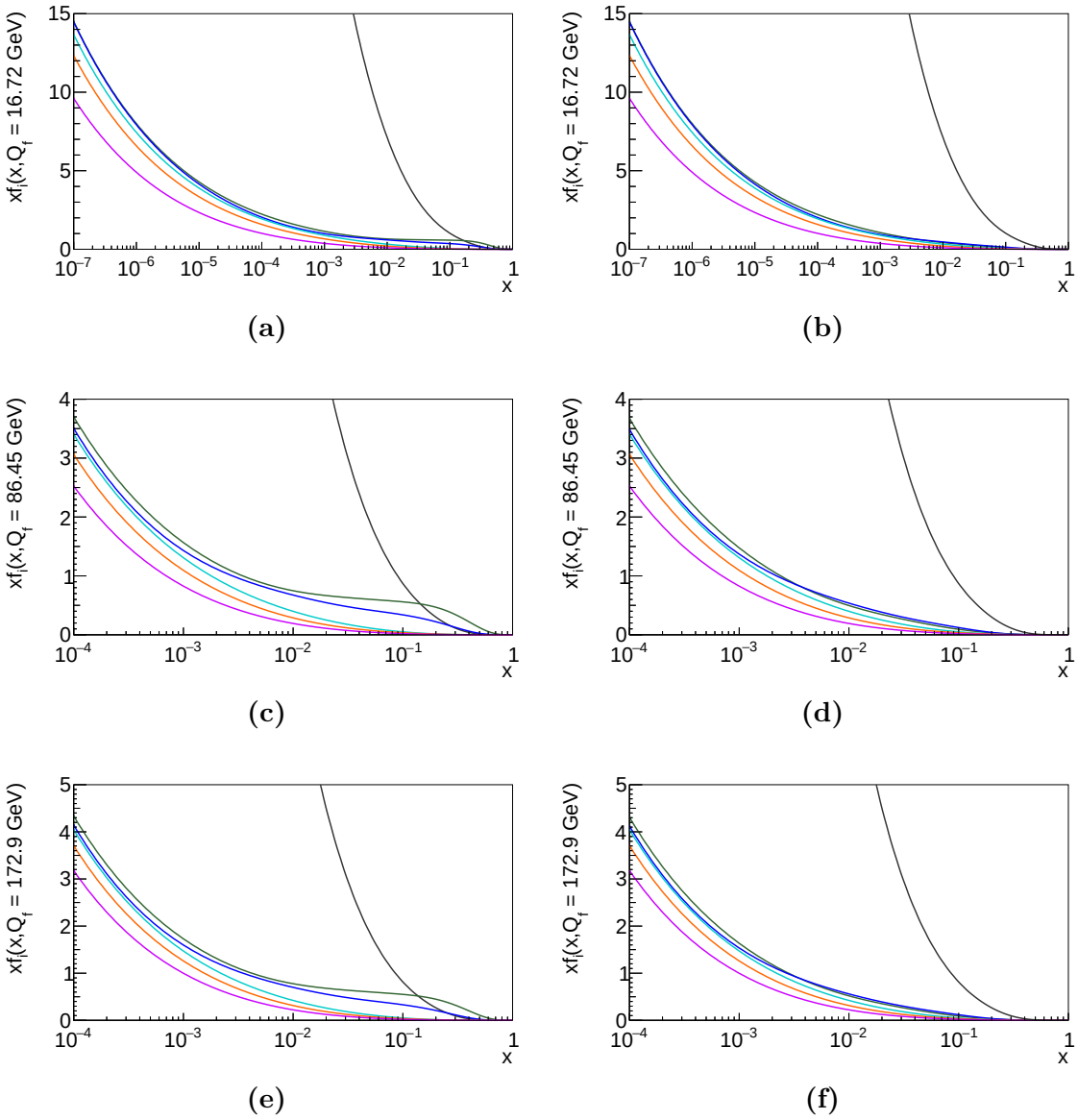
Käsittelemäni c-kvarkkiparivaikutusalat ovat kokonaisvaikutusala $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}(\sqrt{s})$, leikattu vaikutusala $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\text{ GeV},\ 2.0<y<4.5}(\sqrt{s})$ sekä kuusi differentioitua vaikutusalaa $\frac{d\sigma^{pp\to D+X}_{\lvert y\rvert<0.5}}{dp_T}(p_T)$, D-mesonityypeillä D^0 ja D^{*+} ja törmäysenergioilla $\sqrt{s} = 2{,}76$, 5,02 ja 7 TeV. Vaikutusalat, jotka käsittelevät c-hadronien tuottoa, edustavat kaksiosaista prosessia $p + p \to c + \bar{c} + X \to H_{\bar{c}} + X$.



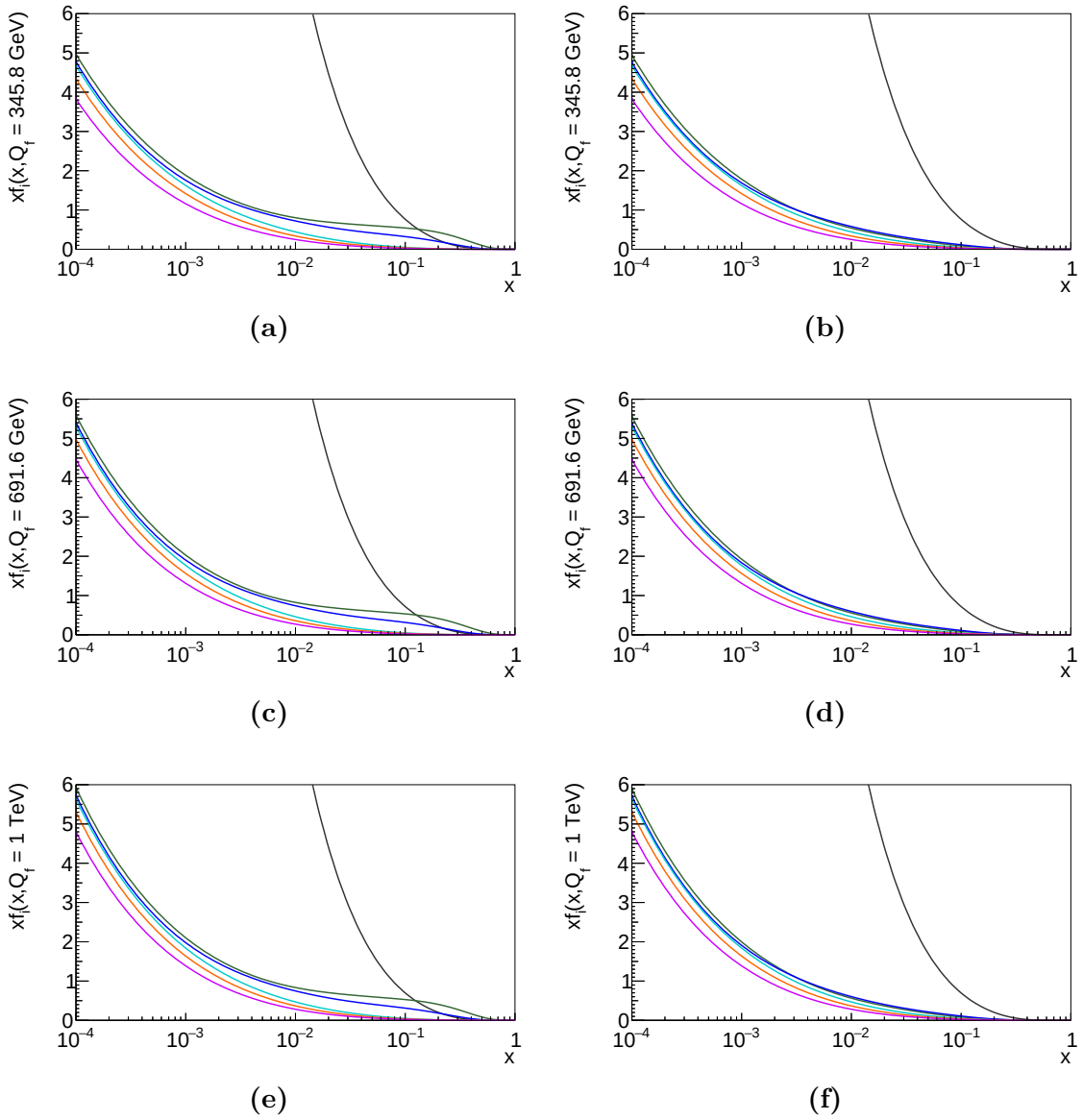
Kuva 10. CT14-partonijakaumafunktiot $xf_i(x,Q_f)$ pitkittäisliikemääräosuuden x funktiona, faktorisaatioskaaloilla $Q_f = 635$ MeV, 1,3 GeV ja 2,09 GeV [62]. Vasemmanpuoleiset kuvaajat edustavat ns. tavanomaisten hiukkasten, g (musta), u (vihreä), d (sininen), s (vaaleansininen), c (oranssi) ja b (violetti), partonijakaumafunktioita ja oikeanpuoleiset antihiukkasten g, $\overline{u}$, $\overline{d}$, $\overline{s}$, $\overline{c}$ ja $\overline{b}$ partonijakaumafunktioita (värit vastaavasti kuin tavanomaisilla hiukkasilla). Gluonipartonijakaumafunktion negatiiviset, epäfysikaaliset, arvot faktorisaatioskaalalla $Q_f = 635$ MeV havainnollistavat ekstrapoloinnin epäluotettavuutta (luku 4.1).



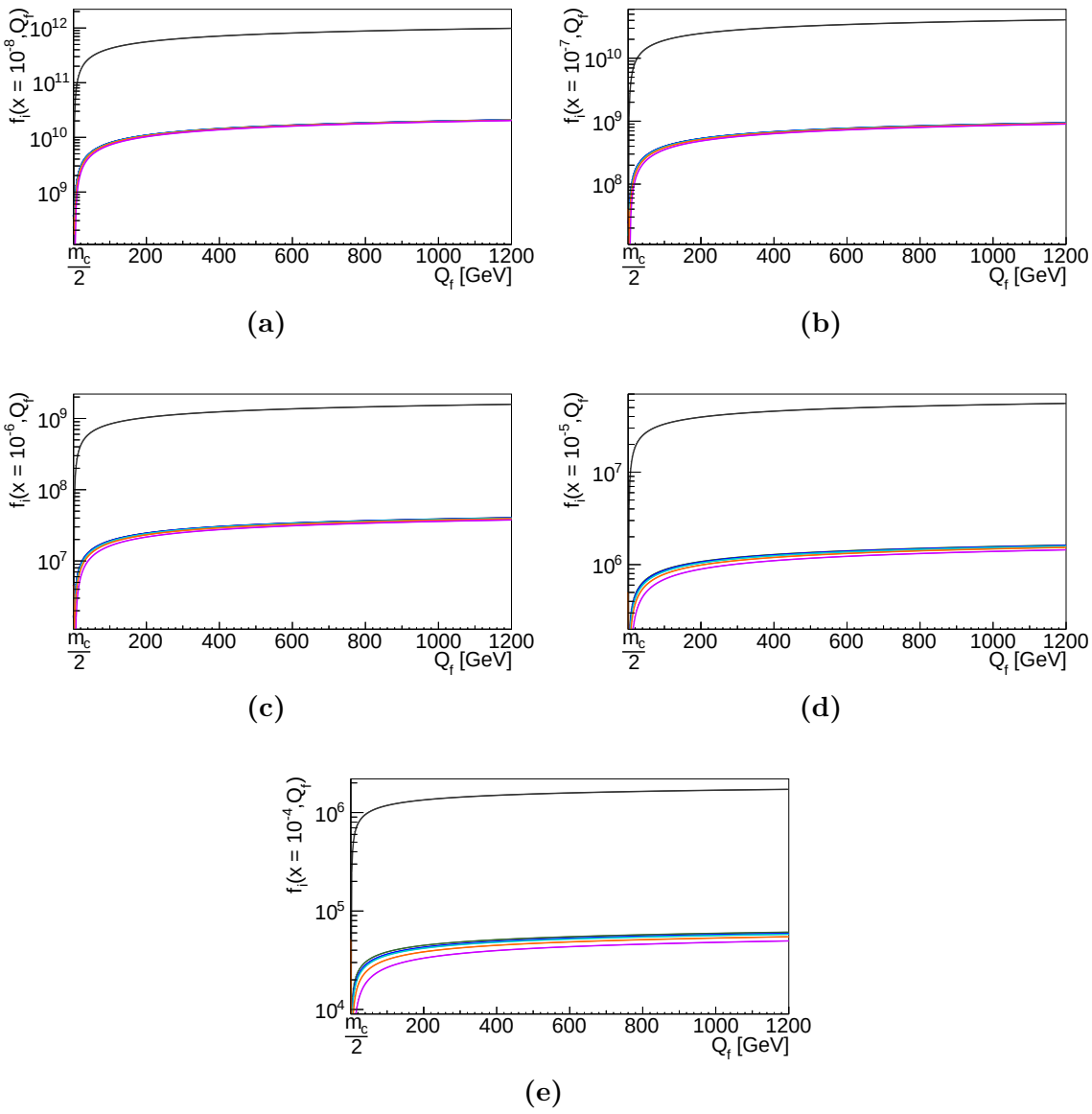
Kuva 11. CT14-partonijakaumafunktiot $xf_i(x,Q_f)$ pitkittäisliikemääräosuuden x funktiona, faktorisaatioskaaloilla Q_f = 2,54 GeV, 4,18 GeV ja 8,36 GeV [62]. Käyrien värit ja kuvien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 10.



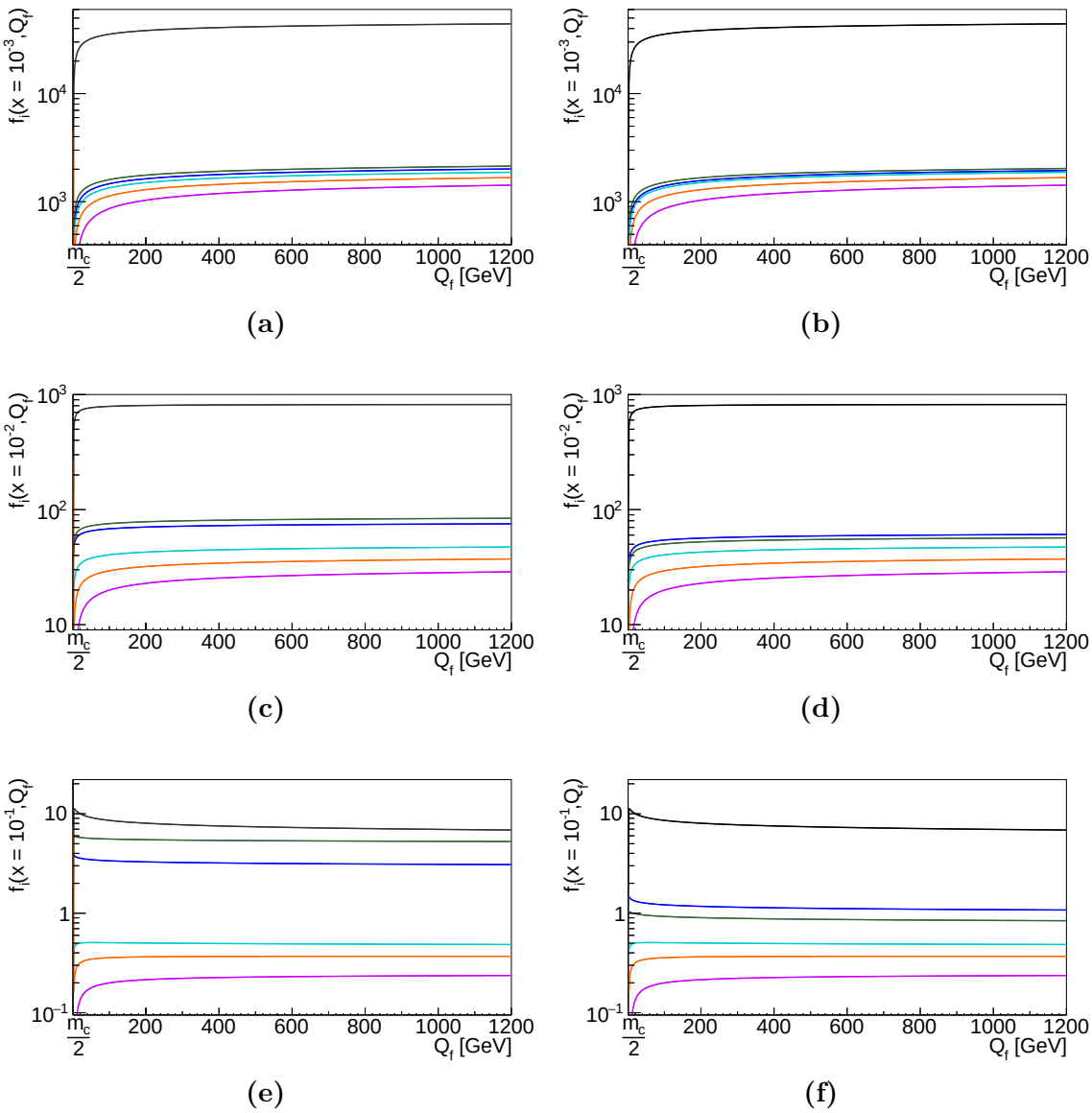
Kuva 12. CT14-partonijakaumafunktiot $xf_i(x,Q_f)$ pitkittäisliikemääräosuuden x funktiona, faktorisaatioskaaloilla Q_f = 16,72 GeV, 86,45 GeV ja 172,9 GeV [62]. Käyrien värit ja kuvien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 10.



Kuva 13. CT14-partonijakaumafunktiot $xf_i(x,Q_f)$ pitkittäisliikemääräosuuden x funktiona, faktorisaatioskaaloilla Q_f = 345,8 GeV, 691,8 GeV ja 1 TeV [62]. Käyrien värit ja kuvien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 10.



Kuva 14. CT14-partonijakaumafunktiot muuttujan Q_f funktioina, pitkittäisliikemääräosuuden arvoilla $x = 10^{-8}$, 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5} ja 10^{-4} [62]. Näillä x:n arvoilla tavanomaisten hiukkasten ja vastaavien antihiukkasten partonijakaumafunktioiden arvoissa ei ollut näkyviä eroja (logaritmisella asteikolla $f_i(x,Q_f) \approx f_{\bar{i}}(x,Q_f)$). Käyrien värit ovat samat kuin kuvassa 10.



Kuva 15. CT14-partonijakaumafunktiot muuttujan Q_f funktioina, pitkittäisliikemääräosuuden arvoilla $x = 10^{-3}$, 10^{-2} ja 10^{-1} [62]. Vasemmanpuoleiset kuvat edustavat ns. tavanomaisia hiukkasia ja oikeanpuoleiset antihiukkasia. Käyrien värit ovat samat kuin kuvassa 10.

Prosessin $p + p \to c + \bar{c} + X$ alimman kertaluvun kokonaisvaikutusala virheineen, vastaavat kokeelliset tulokset ja K-kertoimella skaalattu vaikutusala ovat esitettyinä kuvassa 16. Skaalavalintojen vaikutukset, massan ja skaalan epävarmuuksien aiheuttamat suhteelliset virheet ja eri partonityyppien kontribuutiot vaikutusalaan ovat esitettynä kuvassa 17. Vaikutusalan oletusskaalavalintaa vastaavat K-kertoimet ovat esitettynä kuvassa 18 ja muita skaalavalintoja vastaavat K-kertoimet kuvassa 19.

Kokonaisvaikutusalan kokeelliset vertailutulokset on mitattu törmäysenergioilla $\sqrt{s}$ = 200 GeV (RHIC, STAR-kollaboraatio) [39], 2,76 TeV (LHCb) [45, 87] ja 7 TeV (LHCb) [47]. Vaikutusalat määritettiin tarkastelemalla D-mesonien täysin hadronisia hajoamisia $D^0 \to K^-\pi^+$, $D^{*+} \to D^0\pi^+ \to K^-\pi^+\pi^+$, $D^+ \to K^-\pi^+\pi^+$ ja $D_s^+ \to \phi\pi^+ \to K^-K^+\pi^+$ sekä vastaavien antimesonien hajoamisprosesseja.

Olen etsinyt kokeellisen vertailutuloksen mahdollisimman monelle CMS-energian arvolle. Valitsin vertailutuloksen eri vaihtoehdoista käyttämällä tärkeimpänä kriteerinä suhteellisen virheen pienuutta, toiseksi tärkeimpänä analyysin laajuutta (määritykseen osallistuneiden kollaboraatioiden määrä ja tutkittujen hajoamiskanavien lukumäärä) ja kolmanneksi tärkeimpänä tuloksen tuoreutta. Käytin näitä samoja kriteerejä myös muiden kokeellisten tulosten valinnassa, jotka eivät ole esitettynä histogrammeina (tapaukset $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\text{ GeV},\ 2.0<y<4.5}$, $\sigma^{pp\to b\bar{b}+X}$, $\sigma^{pp\to H_b+X}_{2.0<\eta<5.0}$, $\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}$ ja $\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}$).

Kuvista 16 ja 17 nähdään, että massan ja skaalan vaihtelujen aiheuttamat epävarmuudet ovat huomattavan isot. Erityisesti skaala vaikuttaa teoreettiseen vaikutusalaan suuresti: sovitetut kokonais-K-kertoimet eroavat suurimmillaan noin tekijällä 22 ((Q_r^{def},Q_f^{max}) ja (Q_r^{def},Q_f^{min}), kuvat 18 ja 19, taulukko 3). Arvioitu partonijakaumafunktioiden epävarmuudesta tuleva vaikutusalan virhe on noin puolet massan vaihtelun aiheuttamasta epävarmuudesta.

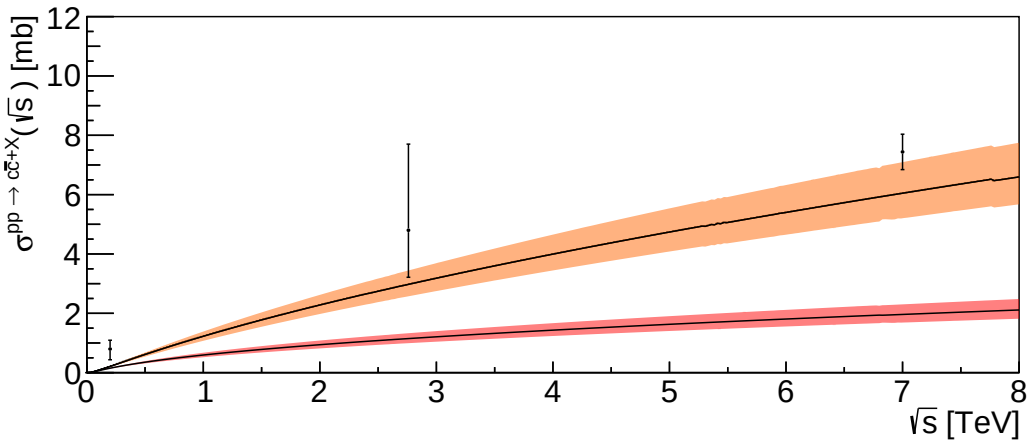
Gluoni-gluoni-reaktiot hallitsevat c-kvarkkiparien tuottoa törmäysenergiasta riippumatta (kuva 17c). Partonivuorovaikutusten suhteellisista kontribuutioista (sekä ylipäätään vaikutusaloista) tulee muistaa, että ne ovat sitä epätarkempia mitä heikommin partonimallin soveltamisen kriteeri $\sqrt{s} \gg 2m_p$ toteutuu (luku 2.3).

Seitsemää teraelektronivolttia vastaava K-kerroin hallitsee selvästi kokonais-K-kerroinsovituksia kaikilla skaalavalinnoilla (kuvat 18 ja 19). K-kerroin, joka vastaa törmäysenergiaa 200 GeV, poikkeaa aina selvästi sovitetusta K-kertoimesta. Tämä voi selittyä osittain sillä, että ehto $\sqrt{s} \gg 2m_p$ (m_p = 938 MeV [9]) toteutuu paremmin korkeammilla törmäysenergioilla.

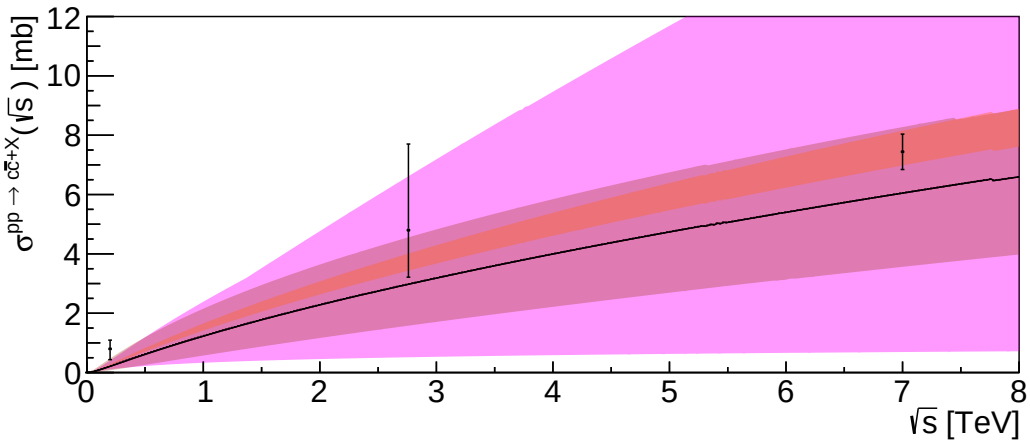
Seuraavaksi tarkastelen leikattua vaikutusalaa $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\text{ GeV},\ 2.0<y<4.5}$, jonka kokeelliset vertailutulokset on mitattu CMS-energioilla 5 , 7 ja 13 TeV (LHCb-kollaboraatio) [88, 89]. Rapiditettiväli $2{,}0 < y < 4{,}5$ koskee nyt mittauksissa tarkasteltujen hadronien D^0, D^+, D^{*+}, D_s^+ ja Λ_c^+ rapiditeetteja. Käsitellyt hadronien hajoamiskanavat olivat $D^0 \to K^-\pi^+$, $D^+ \to K^-\pi^+\pi^+$, $D^{*+} \to D^0\pi^+$, $D_s^+ \to \phi\pi^+$ ja $\Lambda_c^+ \to pK^-\pi^+$ (sekä vastaavat antihadronien hajoamiskanavat). Viiden ja kolmentoista teraelektronivoltin mittaukset käsittelivät vain mesoneja ja seitsemän teraelektronivoltin mittaus lisäksi myös Λ_c^+-baryonia. Lopulliset vaikutusalat $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\text{ GeV},\ 2.0<y<4.5}$ saatiin laskemalla keskiarvot hadronien H_c vaikutusalojen $\sigma^{pp\to H_c+X}_{0<p_T<8\text{ GeV},\ 2.0<y<4.5}$ ja vastaavien fragmentaatio-osuuksien osamääristä. Hadronien vaikutusalat ja fragmentaatio-osuudet $f(c \to D^0) = 0{,}565 \pm 0{,}032$, $f(c \to D^+) = 0{,}246 \pm 0{,}020$, $f(c \to D^{*+}) = 0{,}224 \pm 0{,}028$, $f(c \to D_s^+) = 0{,}080 \pm 0{,}017$ ja $f(c \to \Lambda_c^+) = 0{,}094 \pm 0{,}035$ [75] sisältävät suoran c-kvarkin hadronisoitumisen lisäksi myös mahdolliset raskaampien mesonien hajoamiset kevyemmiksi mesoneiksi (esim. $D^{*+} \to D^0\pi^+$, siten c-hadronien fragmentaatio-osuuksien summa on enemmän kuin yksi). Kuitenkaan b-hadronien hajoamisista lähtöisin olevia c-hadroneja ei ole sisällytetty mittaukseen. [88, 89]

Koska en ole ottanut huomioon c-hadronien fragmentaatiofunktioita, niin vain hadronien massat (integrointiväli) ja fragmentaatio-osuudet vaikuttavat teoreettiseen vaikutusalaan $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\text{ GeV},\ 2.0<y<4.5}$. Käsiteltyjen c-hadronien massat, $m_{D^0} = 1864{,}83 \pm 0{,}05$ MeV, $m_{D^+} = 1869{,}65 \pm 0{,}05$ MeV, $m_{D^{*+}} = 2010{,}26 \pm 0{,}05$ MeV, $m_{D_s^+} = 1968{,}34 \pm 0{,}07$ MeV ja $m_{\Lambda_c^+} = 2286{,}46 \pm 0{,}14$ MeV [36, 41, 90], ovat keskimäärin kohtalaisen lähellä toisiaan. En ole siksi laskenut teoreettista c-hadronin vaikutusalaa erikseen, vaan olen laskenut vain yhden vaikutusalan $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\text{ GeV},\ 2.0<y<4.5}$, efektiivisellä hadronin massalla $m^{\text{eff}}_{H_c}$, ja olen verrannut tätä vaikutusalaa kokeellisiin tuloksiin. Laskin efektiivisen massan painotettuna keskiarvona käyttäen painoina fragmentaatio-osuuksia (jätin massojen ja fragmentaatio-osuuksien virheet huomiotta):

$$
\begin{aligned}
m_{H_c^{\text{eff}}} &= \frac{\sum_{H_c} f(c \to H_c) m_{H_c}}{\sum_{H_c} f(c \to H_c)} \\
&\approx \begin{cases} 1{,}90254 \text{ GeV}, & \text{kun vain } D\text{-mesonit on otettu huomioon} \\ 1{,}93239 \text{ GeV}, & \text{kun } \Lambda_c^+ \text{ on otettu myös huomioon} \end{cases} .
\end{aligned}
$$

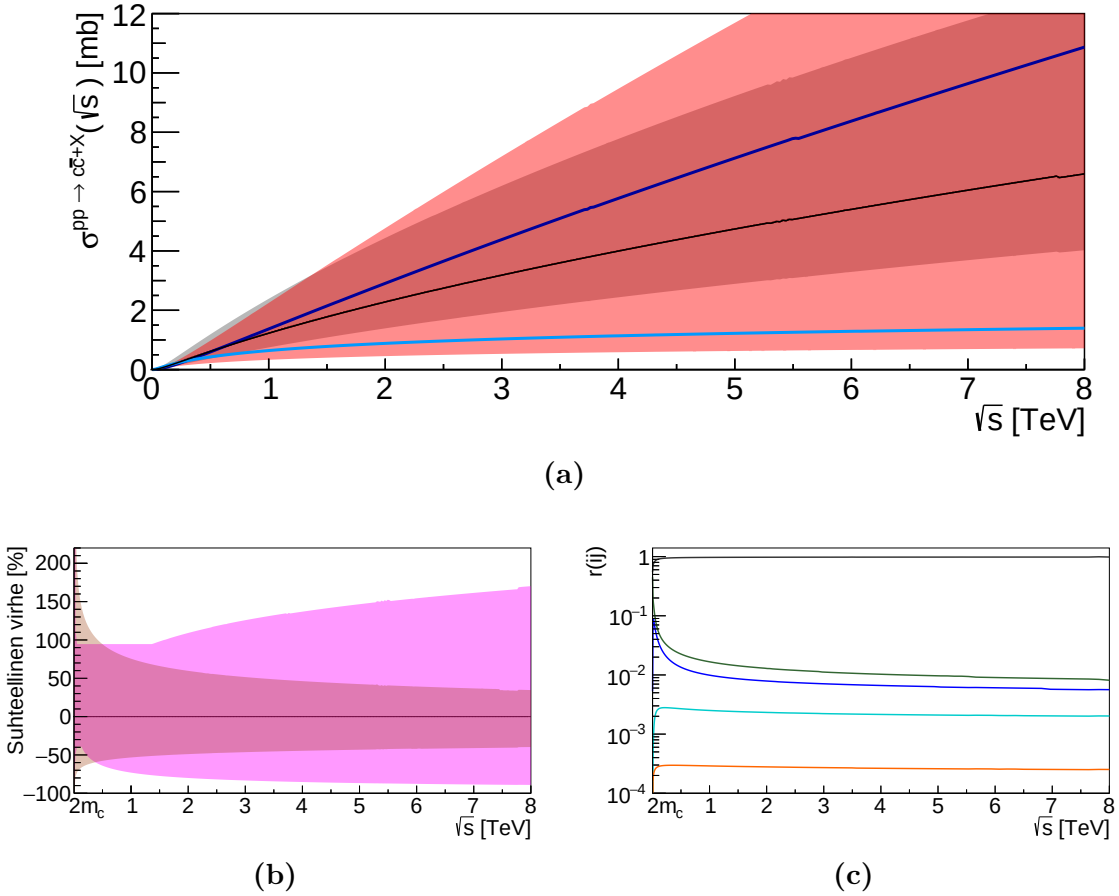


(a)

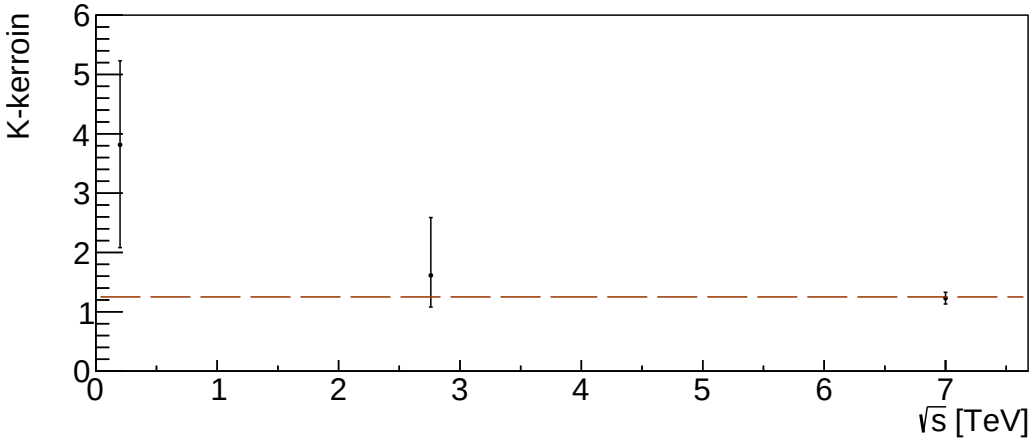


(b)

Kuva 16. Kokonaisvaikutusala $\sigma^{pp \to c\bar{c}+X}$. Ensimmäisessä kuvassa alempi käyrä on NLO-partonijakaumafunktioilla (ja alimman kertaluvun aliprosessin vaikutusalan lausekkeella) laskettu vaikutusala virheineen (punainen), ja ylempi käyrä LO-vaikutusala, jonka partonijakaumafunktioiden virhe (oranssi) on approksimoitu olettamalla LO- ja NLO-partonijakaumafunktioilla laskettujen vaikutusalojen suhteelliset virheet samoiksi. Kuvassa on esitetty myös kokeelliset vertailutulokset energioilla $\sqrt{s} = 0{,}200$, 2,76 ja 7 TeV [39, 45, 47, 87]. Toisessa kuvassa on esitettynä LO-vaikutusalan skaalavalintojen epäyksikäsitteisyydestä syntyvä epävarmuus (violetti) ja c-kvarkin massan epäyksikäsitteisyydetä tuleva epävarmuus (harmaanruskea/tumma violetti). Oranssi verhokäyrä on LO-tulos skaalattuna oletusskaalavalintaa vastaavalla K-kertoimella (kuva 18).



Kuva 17. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot kokonaisvaikutusalalle $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}$. Kuvassa (a) punainen verhokäyrä edustaa faktorisaatioskaalan vaihtelua (Q_r^{def}, Q_f^{min}–Q_f^{max}) ja musta (tummanpunainen) renormalisaatioskaalan vaihtelua (Q_r^{min}–Q_r^{max}, Q_f^{def}). Tummansininen käyrä on vaikutusala skaalavalinnalla (Q_r^{max},Q_f^{max}) ja vaaleansininen skaalavalinnalla (Q_r^{min},Q_f^{min}). Kuvassa (b) on esitettynä massan (harmaanruskea/tumma violetti) ja skaalavalintojen (violetti) epävarmuuksien aiheuttamat vaikutusalan suhteelliset virheet. Verhokäyrien ylärajat edustavat ylävirheitä (positiiviset arvot) ja alarajat alavirheitä (negatiiviset arvot). Kuvassa (c) on esitettynä partonivuorovaikutusten $g+g$ (musta), $u+\overline{u}$ (vihreä), $d+\overline{d}$ (sininen), $s+\overline{s}$ (vaaleansininen), $c+\overline{c}$ (oranssi) ja $b+\overline{b}$ (violetti, nyt alle 10^{-4}) suhteelliset osuudet vaikutusalasta. Osuuksista $r(c\overline{c})$ ja $r(b\overline{b})$ tulee muistaa, että ne eivät ole tarkkoja, vaan enemmänkin kertaluokkien suuruuksien arvioita (luku 4.2).



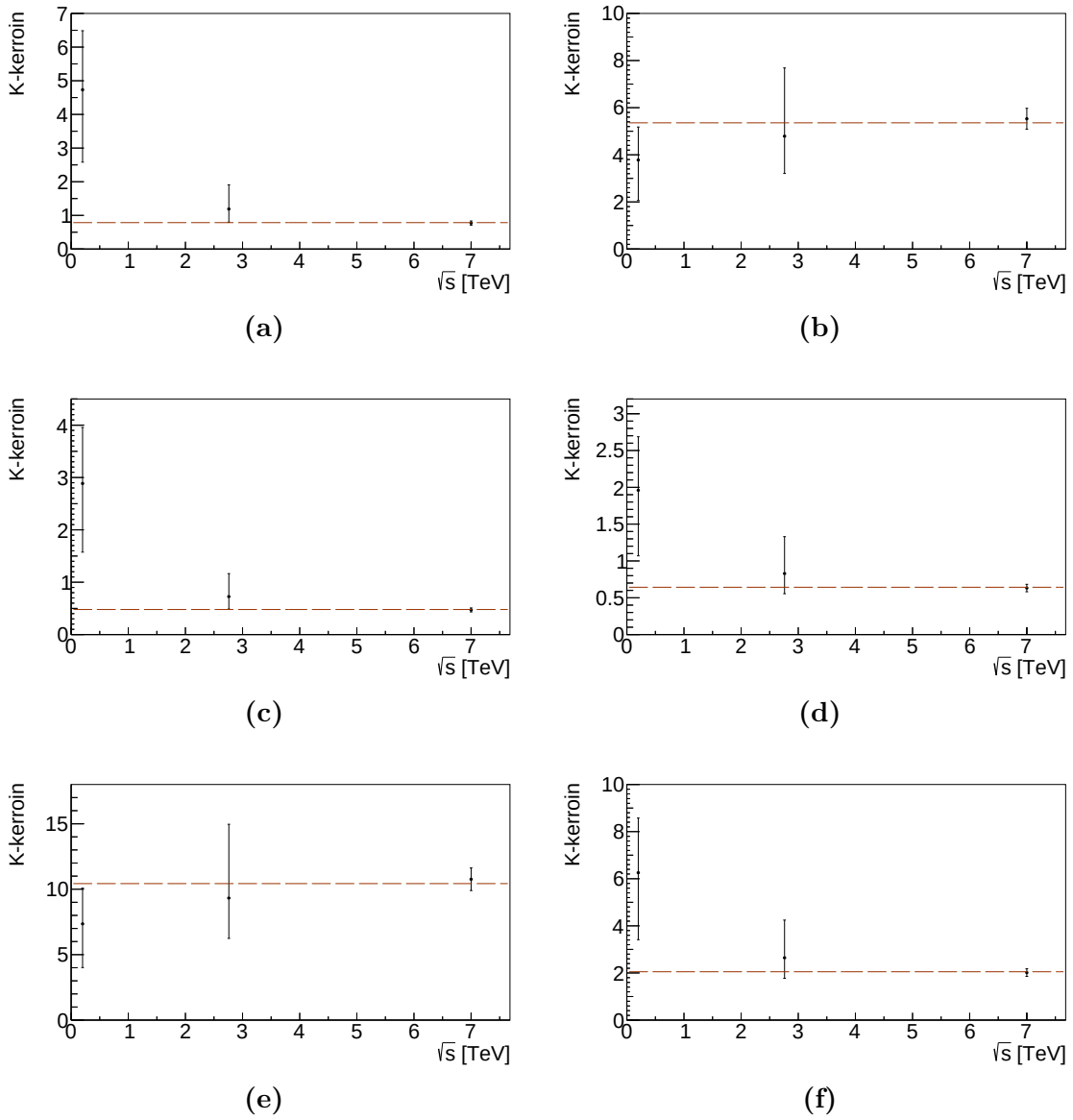
Kuva 18. Kokonaisvaikutusalan $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}$ K-kertoimet oletusskaalavalinnalla ($Q_r^{\rm def}$,$Q_f^{\rm def}$). K-kertoimen virheet ovat kokeellisen tuloksen virheet jaettuna vastaavalla teoreettisella tuloksella (teor. tuloksen virheitä ei ole huomioitu). Ruskea katkoviiva on K-kerroinsovituksesta saatu kokonais-K-kerroin.

Asetin c-hadronin massaksi 1,9 GeV.

Leikattu vaikutusala $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\ \rm GeV,\ 2.0<y<4.5}$ ja sen analyysikuvat ovat esitettyinä CMS-energian funktiona kuvissa 20 ja 21. Seitsemää eri skaalavalintaa vastaavat K-kertoimet ovat esitettynä kuvissa 22 ja 23. Kuvien merkintä $(\sqrt{s})_{\rm min}$ merkitsee nyt pienintä mahdollista CMS-energian arvoa reaktion tapahtumiseksi minimirapiditeetilla 2,0.

Kuten kokonaisvaikutusalan tapauksessa, skaalavalinta vaikuttaa erittäin paljon alimman kertaluvun vaikutusalan arvoihin. Massan vaihtelua vastaava suhteellinen virhe on myös lähes samansuuruinen kuin aiemmin. Nyt kuitenkin arvioitu partonijakaumafunktioiden virhe on korkeilla energioilla melkein yhtä suuri kuin massan virhe.

Myös eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot leikattuun vaikutusalaan ovat lähes samat kuin kokonaisvaikutusalan tapauksessa. Näissä, sekä myöhemmin käsiteltävissä b- ja t-kvarkkiparien tuottojen kokonais- ja leikattujen vaikutusalojen, tapauksissa osuudet $r(u\bar{u})$ ja $r(d\bar{d})$ laskevat ja $r(gg)$ nousee törmäysenergian $\sqrt{s}$ kasvaessa. Tämä johtuu siitä, että pienemmillä pitkittäisliikemääräosuuden $x_{1,2}$ arvoilla gluonipartonijakaumafunktion arvot ovat suurempia suhteessa u-, $\bar{u}$-, d- ja $\bar{d}$-partonijakaumafunktioiden arvoihin, kun skaala on pieni ($Q_f \gtrsim 1{,}3$ GeV, kuvat 14 ja 15), ja $\frac{4m_T^2}{s} \leq x_{1,2}$ (tai $\frac{4m_Q^2}{s} \leq x_{1,2}$). Alhaisilla poikittaisliikemäärän arvoilla ja siten alhaisilla skaaloilla ($Q_f = m_T$) on suurin kontribuutio vaikutusalaan, mikä on havaittavissa esimerkiksi kuvista 24, 28, 32, 36, 40, 44.



Kuva 19. Kokonaisvaikutusalan $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}$ K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 18.

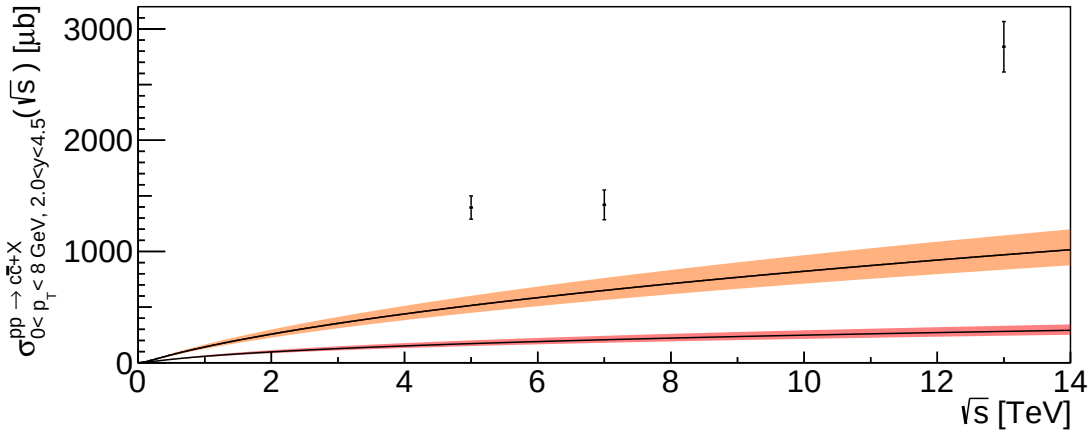
Taulukko 3. Vaikutusalojen $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}$ ja $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\text{ GeV},\ 2.0<y<4.5}$ kokonais-K-kertoimien arvot seitsemällä eri skaalavalinnalla (kuvat 18, 19, 22 ja 23).

(Q_r,Q_f)	$K(\sigma^{pp\to c\bar{c}+X})$	$K(\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\text{ GeV},\ 2.0<y<4.5})$
$(Q_r^{\text{def}},Q_f^{\text{def}})$	$1{,}25 \pm 0{,}10$	$2{,}58 \pm 0{,}13$
$(Q_r^{\max},Q_f^{\max})$	$0{,}79 \pm 0{,}07$	$1{,}15 \pm 0{,}06$
$(Q_r^{\min},Q_f^{\min})$	$5{,}4 \pm 0{,}5$	$2{,}03 \pm 0{,}10$
$(Q_r^{\text{def}},Q_f^{\max})$	$0{,}48 \pm 0{,}04$	$0{,}65 \pm 0{,}04$
$(Q_r^{\min},Q_f^{\text{def}})$	$0{,}64 \pm 0{,}05$	$0{,}83 \pm 0{,}04$
$(Q_r^{\text{def}},Q_f^{\min})$	$10{,}4 \pm 0{,}9$	$8{,}1 \pm 0{,}4$
$(Q_r^{\max},Q_f^{\text{def}})$	$2{,}1 \pm 0{,}2$	$4{,}4 \pm 0{,}3$

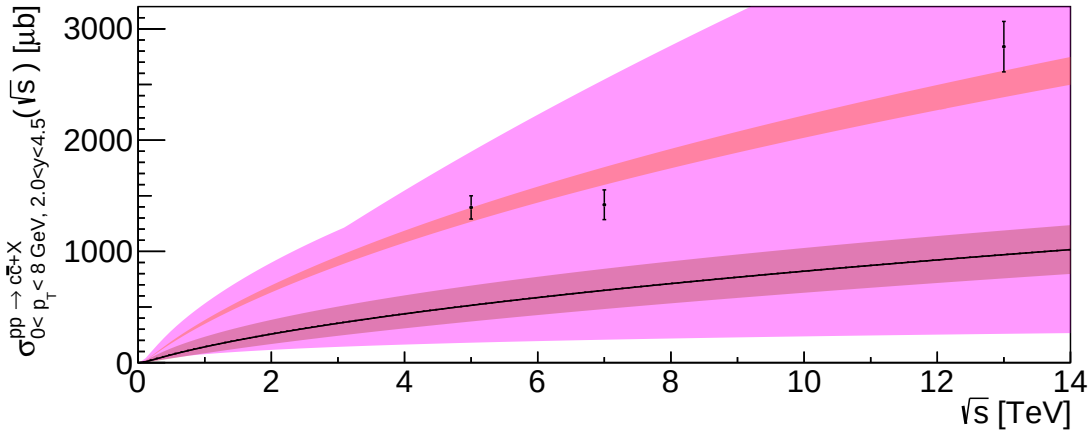
K-kertoimet vastaavat kokonais-K-kerrointa paremmin kuin kokonaisvaikutusalan tapauksessa. 7 TeV-tuloksen K-kerroin on aina sovitusarvoa ja muita K-kertoimia pienempi. Tähän voi vaikuttaa se, että 7 TeV-mittaus tarkasteli hieman eri lopputilaa (Λ_c^+-hadroni mukana) kuin 5 TeV- ja 13 TeV-mittaukset.

CMS-energioita $\sqrt{s} = 5$, 7 ja 13 TeV vastaavat leikatun vaikutusalan $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\text{ GeV},\ 2.0<y<4.5}$ teoreettiset arvot ovat 515, 650 ja 970 µb. Mikäli olisin käyttänyt p_T-riippumatonta oletusskaalaa $2m_c$ skaalan m_T (max{1,3 GeV,m_T}) sijasta, niin vaikutusalan arvot olisivat olleet 874, 1135 ja 1767 µb eli huomattavasti suuremmat. Tämä selittyy sillä, että p_T-differentioitu vaikutusala on korkeimmillaan alhaisilla poikittaisliikemäärän arvoilla, missä $m_T < 2m_c$, ja sillä, että partonijakaumafunktioiden arvot kasvavat hyvin nopeasti faktorisaatioskaalan funktiona alueessa $Q_f \in$ [1,3 GeV,$2m_c$]. Partonijakaumafunktioden vaihtelu vaikuttaa selvästi enemmän vaikutusaloihin kuin vahvan kytkentävakion vaihtelu näin pienillä skaaloilla (kuvat 16 ja 20). Skaalavalinnalla $2m_c$ K-kertoimet ovat 41 – 45 prosenttia pienemmät, jolloin kokonais-K-kerroin on arviolta noin 1,47. Tämä vastaa paremmin kokonaisvaikutusalan $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}$ oletusskaalavalintaa vastaavaa K-kerrointa $1{,}25 \pm 0{,}10$ kuin $2{,}58 \pm 0{,}13$ (taulukko 3).

Osa käyttämistäni D-mesonien vaikutusalojen kokeellisista vertailutuloksista koskevat yleisesti D-mesonien tuottoa $p + p \to D + X$ eivätkä kaksiosaista prosessia $p + p \to c + \bar{c} + X \to D + X$. Tämä johtuu siitä, että c-hadronien teoreettisien tuottojen laskemisessa jätetään usein huomiotta yksittäisten c-kvarkkien syntymekanismit niiden pienen kontribuution vuoksi (kuten lähteissä [91] ja [92]). Siten laskemani teoreettiset tulokset ja käyttämäni kokeelliset tulokset ovat vertailukelpoisia.

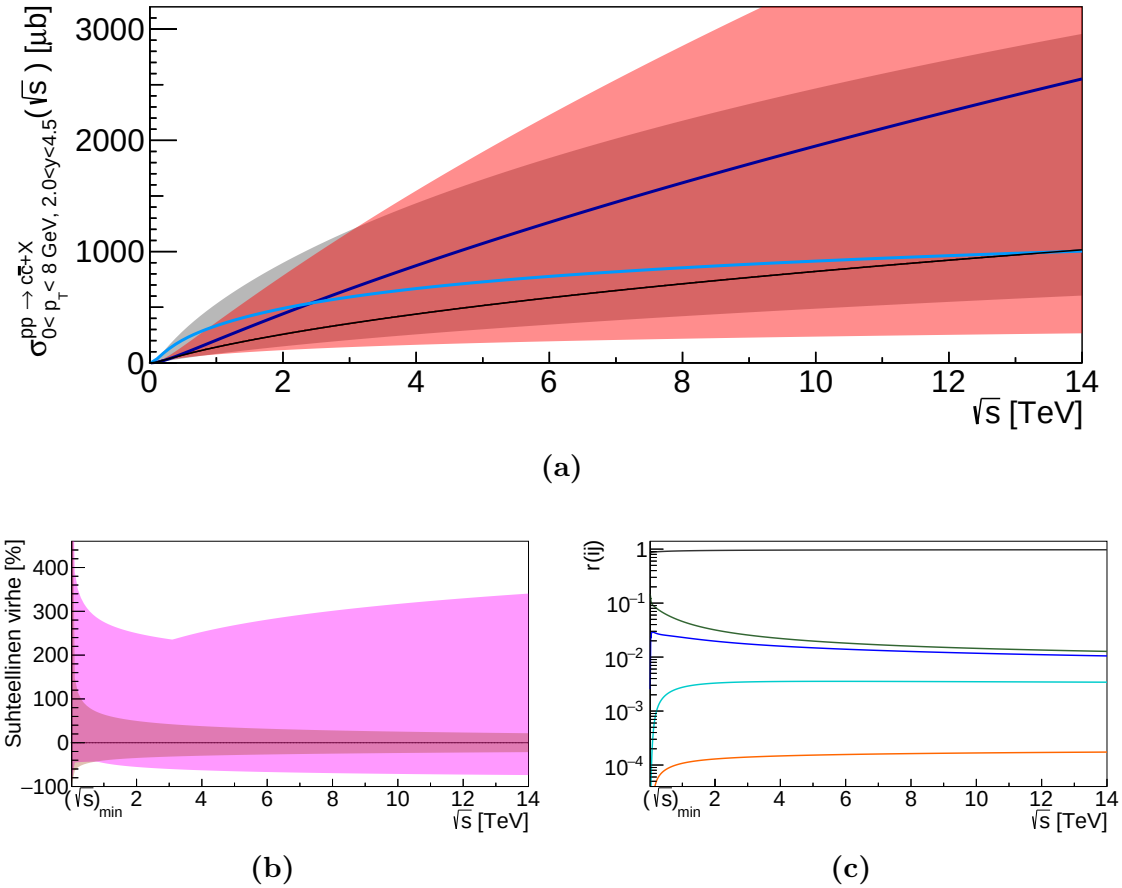


(a)

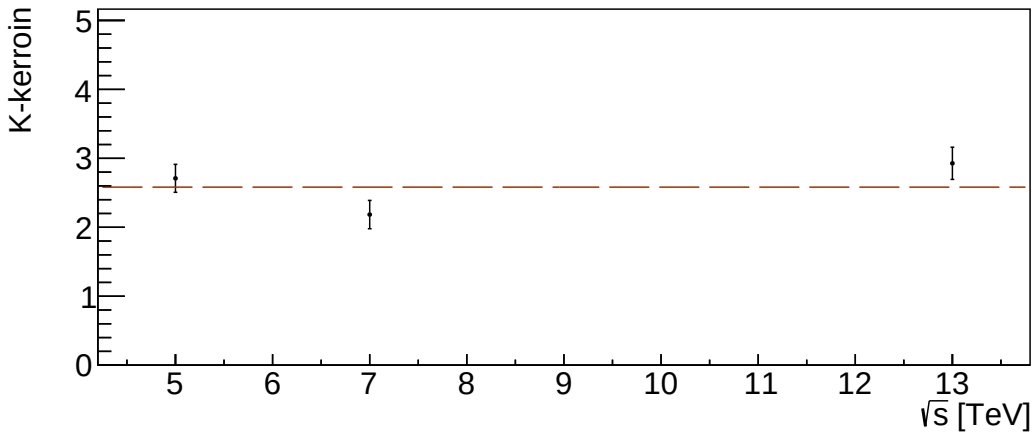


(b)

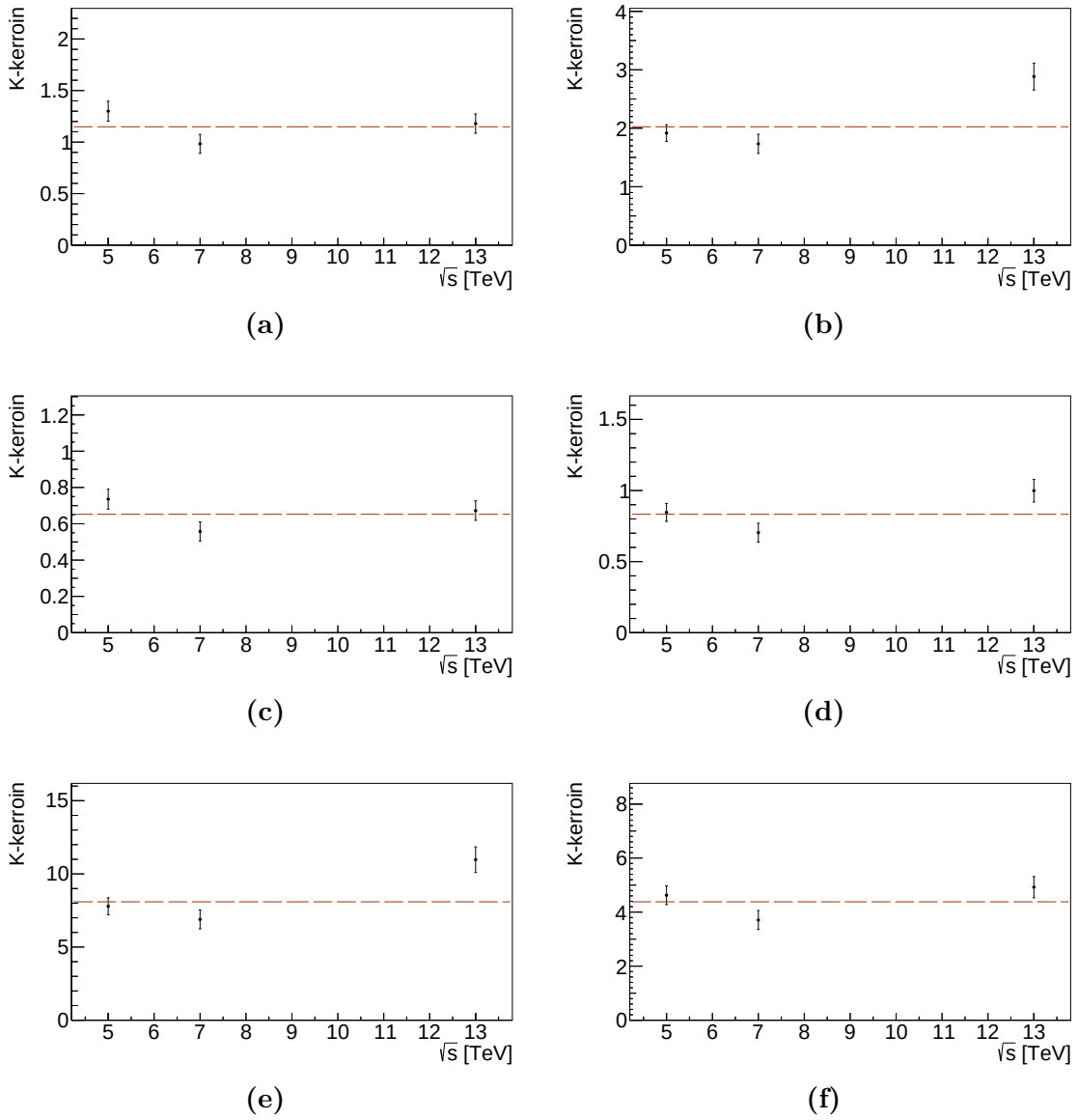
Kuva 20. Leikattu vaikutusala $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\ \mathrm{GeV},\ 2.0<y<4.5}$. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 16. Kokeelliset vertailutulokset ovat lähteistä [88, 89].



Kuva 21. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot leikatulle vaikutusalalle $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\ \mathrm{GeV},\ 2.0<y<4.5}$. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 17.



Kuva 22. Leikatun vaikutusalan $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\ \mathrm{GeV},\ 2.0<y<4.5}$ K-kertoimet oletusskaalavalinnalla $(Q_r^{\mathrm{def}}, Q_f^{\mathrm{def}})$. Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 18.



Kuva 23. Leikatun vaikutusalan $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\ \mathrm{GeV},\ 2.0<y<4.5}$ K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 18.

Ennen D-mesonien p_T-jakaumien tarkastelemista on syytä ottaa huomioon seuraava asia: Tein luvussa 2.3. approksimaation, jossa hadronisoituvan raskaan kvarkin ja sen hadronin liikemäärät oletetaan samoiksi sekä fragmentaatiofunktiot korvataan vastaavilla fragmentaatio-osuuksilla (yhtälöt (58) ja (59)). Tämän tekemäni hadronisaatioapproksimaation vaikutuksia p_T-differentioituihin vaikutusaloihin on mahdollista arvioida tarkastelemalla p_T-jakaumien muotoja.

Approksimoidaan D-mesonin fragmentaatiofunktiota mesonin fragmentaatio-osuuden ja Petersonin fragmentaatiofunktion tulona (nyt $\int_0^1 f(c \to D) D_c^{H_c}(z) dz = f(c \to D)$). Liikemääräosuus $z \in [0{,}1]$ oli määritelty hadronin kvarkin liikemäärän suuntaisen komponentin ja kvarkin liikemäärän suhteeksi. Merkitään c-kvarkin liikemäärää p^c ja D-mesonin liikemäärää p^D. Koska käsittelemme D-mesonien tuotoissa aina keskirapiditeettia $|y| < 0{,}5$ ja koska raskaan kvarkin liikemäärän suunta muuttuu keskimäärin vain vähän hadronisaatiossa, niin $p_T^D \approx z p_T^c$. Täten

$$\frac{d\sigma^{pp \to D+X}}{dp_T^D} = \int dp_T^c \frac{d\sigma^{pp \to c\bar{c}+X}}{dp_T^c} \int dz \; f(c \to D) D_c^{H_c}(z) \delta(p_T^D - z p_T^c).$$

Tarpeeksi korkeilla poikittaisliikemäärän p_T arvoilla $\frac{d\sigma^{pp \to c\bar{c}+X}}{dp_T^c} \approx \frac{A}{(p_T^c)^n}$, missä A on jokin vakio. Tässä tapauksessa $p_T \gtrapprox 4$ GeV (kuvat 24b, 28b, 32b, 36b, 40b ja 44b). Käyttäen hadronisaatioapproksimaatiota saadaan $\frac{d\sigma^{pp \to D+X}}{dp_T^D} = \frac{f(c \to D) A}{(p_T^c)^n}$, ja $p_T^c = p_T^D$.

Muokkaamalla arviota saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{pp \to D+X}}{dp_T^D} &= \int dp_T^c \frac{d\sigma^{pp \to c\bar{c}+X}}{dp_T^c} \int dz \; f(c \to D) D_c^{H_c}(z) \delta(p_T^D - z p_T^c) \\
&= f(c \to D) \int dp_T^c \frac{A}{(p_T^c)^n} \int dz \; D_c^{H_c}(z) \frac{1}{z} \delta(\frac{p_T^D}{z} - p_T^c) \\
&= f(c \to D) \int dz \; D_c^{H_c}(z) \frac{1}{z} \frac{A}{(\frac{p_T^D}{z})^n} \\
&= \frac{f(c \to D) A}{(p_T^D)^n} \int dz \; z^{n-1} D_c^{H_c}(z).
\end{aligned}$$

Siispä osuus $\int dz \; z^{n-1} D_c^{H_c}(z) \leq 1$ antaa arvion siitä, kuinka paljon pienempi p_T-differentioitu vaikutusala olisi laskevalla osuudella $p_T \gtrapprox 4$ GeV, mikäli olisin käyttänyt fragmentaatiofunktioita fragmentaatio-osuuksien sijaan. Kun vaikutusalan kuvaajan x- ja y-akselit esitetään logaritmisesti, niin potenssi n on määritettävissä laskevan suoran kulmakertoimena:

$$\log_{10}(\frac{d\sigma^{pp\to D+X}}{dp_T^D}) \approx \log_{10}(\frac{f(c\to D)A}{(p_T^c)^n}) = \log_{10}(f(c\to D)A) - n\log_{10}(p_T^c).$$

Logaritmisista kuvaajista arvioidut potenssit n ovat esitettynä taulukossa 4.

Taulukko 4. D-mesonien p_T-differentioitujen vaikutusalojen kuvaajista arvioidut potenssit n.

Vaikutusala	n
$\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{\lvert y\rvert<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s}$ = 2,76 TeV	4,06
$\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{\lvert y\rvert<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s}$ = 5,02 TeV	4,55
$\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{\lvert y\rvert<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s}$ = 7 TeV	3,71
$\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{\lvert y\rvert<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s}$ = 2,76 TeV	3,93
$\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{\lvert y\rvert<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s}$ = 5,02 TeV	4,46
$\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{\lvert y\rvert<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s}$ = 7 TeV	4,08

Potenssin n vaihtelu välillä 3,71 – 4,55 vastaa tekijän $\int dz\ z^{n-1}D_c^{H_c}(z)$ arvoja 0,221 – 0,294. Siispä käyttämäni hadronisaatioapproksimaatio arviolta jopa nelinkertaistaa p_T-differentioidut vaikutusalat laskevilla osuuksilla $p_T \gtrapprox 4$ GeV. Tämä vastaa K-kertoimien pienentymistä neljäsosaan fragmentaatiofunktiot huomioon ottavaan tulokseen nähden.

Vaikka tämä arvio osoittaa selvästi, että fragmentaatiofunktiot tulisi ottaa huomioon D-mesonien p_T-differentioituja vaikutusaloja laskiessa, niin esitän kuitenkin hadronisaatioapproksimaatiolla laskemani vaikutusalat. Tekijöiden $\int dz\ z^{n-1}D_c^{H_c}(z)$ ≤ 1, n = 3,71 – 4,55, vaikutukset vaikutusaloihin ovat kuitenkin kohtalaisen vakioita.

Tämä arvio alentaa myös leikatun vaikutusalan $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\ \mathrm{GeV},\ 2.0<y<4.5}$ luotettavuutta. Leikkaukset koskevat nimenomaan hadronien poikittaisliikemääriä ja rapiditeetteja (jotka ovat p_T-riippuvaisia).

ALICE-kollaboraatio on mitannut D^0- ja D^{*+}-mesonien p_T-differentioidut vaikutusalat protoni–protoni-törmäyksissä, keskirapiditeetissa $|y| < 0{,}5$, CMS-energioilla $\sqrt{s}$ = 2,76 TeV [45, 87], 5,02 TeV [93, 94] ja 7 TeV [95, 96]. Kuten tapauksessa $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\ \mathrm{GeV},\ 2.0<y<4.5}$, raskaampien D-mesonien hajoamisista syntyneet D-mesonit on otettu huomioon ja b-kvarkkien hajoamisista syntyneet jätetty huomiotta. Mesonit

tunnistettiin hajoamisten $D^0 \to K^-\pi^+$ ja $D^{*+} \to D^0\pi^+ \to K^-\pi^+\pi^+$ (ja vastaavien antimesonien hajoamisten) avulla.

Olen esittänyt vastaavat teoreettiset D-mesonien vaikutusalat sekä niiden analyysikuvat kuvissa 24, 25, 28, 29, 32, 33, 36, 37, 40, 41, 44 ja 45. Käytin fragmentaatio-osuuksia $f(c \to D^0) = 0{,}557 \pm 0{,}023$ ja $f(c \to D^{*+}) = 0{,}238 \pm 0{,}007$, joita käytettiin $\sqrt{s} = 2{,}76$ teraelektronivoltin mittauksessa [45], ja mesonien massoja $m_{D^0} = 1864{,}83(\pm 0{,}05)$ MeV ja $m_{D^{*+}} = 2010{,}26(\pm 0{,}05)$ MeV [41]. Oletus- ja vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla lasketut K-kertoimet ovat kuvissa 26, 27, 30, 31, 34, 35, 38, 39, 42, 43, 46 ja 47.

Poikittaisliikemääräjakaumien arvioidut CT14-partonijakaumafunktioiden virheet ovat nyt jopa suuremmat kuin vastaavat massan virheet. Skaalavalinnat aiheuttavat edelleen selvästi suurimman epävarmuuden tuloksiin. Kuitenkin nyt skaalojen vaihtelusta johtuvat suhteelliset epävarmuudet ovat huomattavasti pienemmät kuin kokonais- ja leikatun vaikutusalan tapauksissa (kuvat 25b, 29b, 33b, 37b, 41b ja 45b). Fragmentaatio-osuuksia vastaavat virheet ovat kaikissa tapauksissa lähes mitättömät.

Miksi massa vaikuttaa vaikutusaloihin näin vähän? Esimerkiksi $t\bar{t}$-tuoton p_T-differentioiduissa vaikutusaloissa massan virhe on paljon merkityksellisempi (luku 5.4, kuvat 74b ja 82b), vaikka t-kvarkin massan suhteelliset ylä- ja alavirheet ovat paljon pienemmät kuin c-kvarkin (luku 5.1.1). c-kvarkkien massan vähäinen efekti selittyy seuraavasti: Mandelstamin muuttujat ovat $\hat{s} = 2m_T^2(1 + \cosh(y_3 - y_4))$, $\hat{t} = m_c^2 - m_T^2(1 + e^{y_4 - y_3})$ ja $\hat{u} = m_c^2 - m_T^2(1 + e^{y_3 - y_4})$ (yhtälöt (86), (87) ja (88)). Mittauksissa tarkastellut poikittaisliikemäärien arvot ulottuvat varsin pitkälle (maksimiarvo 12 – 36 GeV), joten useimmiten $m_T \approx p_T$ ($m_c^{\text{def}} = 1{,}27$ GeV, $m_c^{\text{min}} = 993$ MeV ja $m_c^{\text{max}} = 1{,}67$ GeV). Tämä selittää osaltaan myös sitä, miksi vaikutusalojen massan ylävirheet (m_c^{min}) ovat pienempiä kuin alavirheet (m_c^{max}) jakaumien alkupäissä (kuvat 25b, 29b, 33b, 37b, 41b ja 45b). Lisäksi Mandelstamin muuttujien m_c^2-termit kumoutuvat osittain $\hat{t}$-differentioitujen aliprosessien vaikutusalojen lausekkeissa (yhtälöt (70) ja (78)). Massan muutos vaikuttaa myös skaalaan $Q_r^{\text{def}} = Q_f^{\text{def}} = m_T = \sqrt{m_c^2 + p_T^2}$. Siten massan kasvattamisesta (laskemisesta) tuleva aliprosessin vaikutusalan, vahvan kytkentävakion $\alpha_s(Q_r)$ ja integrointialueen (yhtälöt (85) ja (89), muissa tapauksissa myös (83) ja (84)) pienentyminen (kasvaminen) kumoutuu osittain partonijakaumafunktioiden $f_i(x,Q_f)$ kasvamisella (laskemisella), joka on hyvin nopeaa pienillä faktorisaatioskaalan arvoilla (kuva 14).

Kuvista 25a, 29a, 33a, 37a, 41a ja 45a nähdään, että p_T-asteikkojen alkupäissä

(pienemmät skaalat) faktorisaatioskaalan vaihtelu vaikuttaa enemmän vaikutusaloihin kuin renormalisaatioskaalan vaihtelu ja asteikkojen loppupäissä (suuremmat skaalat) taas päinvastoin. Tämä poikkeaa kokonais- ja leikatun vaikutusalan tapauksista, joissa faktorisaatioskaala vaikuttaa (lähes aina) selvästi enemmän.

Gluonivuorovaikutukset hallitsevat jälleen partonivuorovaikutusten suhteellisissa kontribuutioissa vaikutusaloihin. Kuitenkin prosessien $u + \overline{u} \to Q + \overline{Q}$ ja $d + \overline{d} \to Q + \overline{Q}$ osuudet alkavat nousemaan poikittaisliikemäärän kasvaessa. Kun p_T kasvaa, niin sen seurauksena (keskirapiditeettia vastaavat) pitkittäisliikemääräosuudet $x_{1,2} = \frac{m_T}{\sqrt{s}}(e^{\pm y_3} + e^{\pm y_4})$ kasvavat myös. Kun taas x_1 ja x_2 kasvavat, niin gluonin ja valenssikvarkkien (ja niiden antikvarkkien) partonijakaumafunktioiden arvojen väliset erot pienenevät (kuva 14), ja siten $r(u\overline{u})$ ja $r(d\overline{d})$ nousevat.

Skaalavalintoja koskevissa verhokäyrissä ja skaalavalintaa ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$) vastaavien vaikutusalojen kuvaajissa on nähtävissä ns. taitoksia pienillä poikittaisliikemäärän p_T arvoilla (kuvat 24b, 25a, 28b, 29a, 32b, 33a, 36b, 37a, 40b, 41a, 44b ja 45a). Vastaavat taitokset ovat myös skaalavalintojen suhteellisten epävarmuuksien kuvaajissa (kuvat 25b, 29b, 33b, 37b, 41b ja 45b). Lisäksi CMS-energialla $\sqrt{s} = 5{,}02$ TeV vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$ massan (suhteellisen) epävarmuuden ylärajassa on jyrkkä taitos (kuvat 28b ja 29b). Nämä kuvaajien käyttäytymiset johtuvat faktorisaatioskaalasta, jonka miniarvoksi asetin 1,3 GeV. Yhtäpitävyys $m_T = \sqrt{m_c^2 + p_T^2} = 1{,}3$ GeV toteutuu, kun $m_c = m_c^{\text{def}} = 1{,}27$ GeV ja $p_T \approx 0{,}28$ GeV tai kun $m_c = m_c^{\min} = 0{,}993$ GeV ja $p_T \approx 0{,}839$ GeV. Jälkimmäinen poikittaisliikemäärän arvo vastaa yksittäistä massan virheverhokäyrän taitosta. Voidaan myös laskea, että $\frac{1}{2}m_T = 1{,}3$ GeV, kun $p_T \approx 2{,}27$ GeV ($m_c = m_c^{\text{def}}$). Vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$) laskettujen vaikutusalojen taitokset tapahtuvat juuri tällä liikemäärän arvolla.

D-mesonien p_T-differentioitujen vaikutusalojen K-kertoimet käyttäytyvät hyvin samankaltaisesti: Skaalavalinnoilla (Q_r^{def},Q_f^{def}) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}) K-kertoimet sijoittuvat sovitusarvon ympärille ja niiden vaihtelut eivät ole suuria (kuvat 26, 27f, 30, 31f, 34, 35f, 38, 39f, 42, 43f, 46 ja 47f). Skaalavalintoja ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$) ja ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}) vastaavat K-kertoimet ovat p_T-asteikkojen aluissa nousevia (kuvat 27a, 27c, 27d, 31a, 31c, 31d, 35a, 35c, 35d, 39a, 39c, 39d, 43a, 43c, 43d, 47a, 47c ja 47d). Skaalavalinnoilla ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$) ja (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) K-kertoimet (nousevat aluksi jyrkästi ja sen jälkeen) laskevat (27b, 27e, 31b, 31e, 35b, 35e, 39b, 39e, 43b, 43e, 47b ja 47e). Useat tekijät vaikuttavat pieniä poikittaisliikemääriä vastaaviin K-kertoimiin ja siten mahdollisesti niiden heilahteluihin: Vahvan kytkentävakion $\alpha_s(Q_r)$

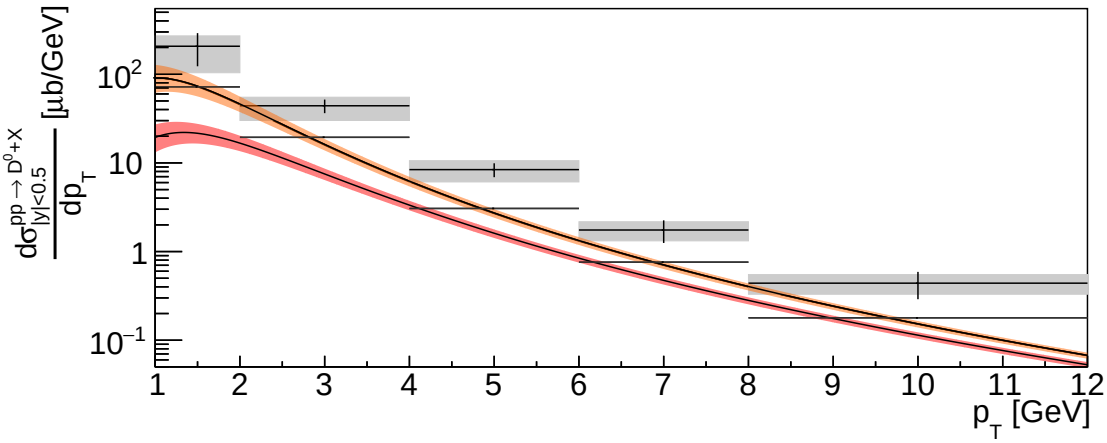
ja partonijakaumafunktioiden $f_i(x,Q_f)$ kasvu- ja laskunopeudet poikittaisliikemäärän suhteen vaihtelevat eri renormalisaatio- ja faktorisaatioskaalavalinnoilla. Häiriöteorian soveltamiseksi vaadittiin, että $Q_r \gtrsim 1$ GeV, ja tämä kriteeri ei täyty hyvin minimirenormalisaatioskaalalla $Q_r = \frac{1}{2}m_T$, kun $p_T < 1{,}55$ GeV. (Tosin tämä p_T-alue esiintyy vain vähän tarkastelluissa vaikutusaloissa.) Minimifaktorisaatioskaalalla $Q_f^{\min} = \max\{1{,}3 \text{ GeV}, \frac{1}{2}m_T\}$ vaikutusala ei kasva ns. normaalisti asetetun miniarvon 1,3 GeV vuoksi. Lisäksi fragmentaatiofunktioiden vaikutuksia teoreettisiin vaikutusaloihin on hankala arvioida, kun $\frac{d\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}}{dp_T} \approx \frac{A}{p_T^n}$ ei päde eli kun $p_T \lessapprox 4$ GeV. K-kertoimet kuitenkin stabiloituvat korkeammilla poikittaisliikemäärän arvoilla, ja nämä K-kertoimet ovat arviolta noin yhden neljäsosan fragmentaatiofunktioita hyödyntäen lasketuista K-kertoimista.

Prosessien $p+p \to c+\bar{c}+X \to D^0+X$ ja $p+p \to c+\bar{c}+X \to D^{*+}+X$ keskirapiditeetin $|y| < 0{,}5$ poikittaisliikemäärän suhteen differentioitujen vaikutusalojen kokonais-K-kertoimet ovat esitettyinä taulukoissa 5 ja 6. Arvoista nähdään, että samaa törmäysprosessia ja skaalavalintaa (Q_r,Q_f) vastaavat K-kertoimet ovat usein kohtalaisen lähellä toisiaan (heilahtelusta huolimatta).

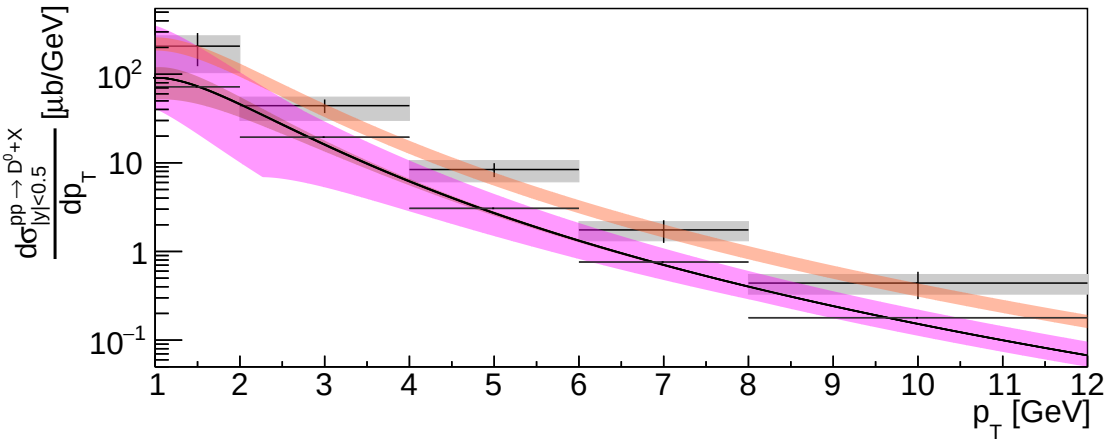
Tein K-kerroinsovitukset erikseen vielä poikittaisliikemäärillä $p_T \geq 4$ GeV, koska näissä p_T-alueissa hadronisaatioapproksimaation vaikutus on arviolta suunnilleen vakio (taulukot 7 ja 8). Sovitusten tuloksista havaitaan, että samaa prosessia ja skaalavalintaa vastaavat K-kertoimet alueissa $p_T \geq 4$ GeV vastaavat toisiaan selvästi paremmin kuin varsinaiset kokonais-K-kertoimet. Tosin näistä sovituksista tulee ottaa huomioon se, että hadronisaatioapproksimaation arvioitu vaikutus vaihtelee jonkin verran kulmakerroinpotenssin n mukaan (taulukko 4), johon skaalavalinta vaikuttaa. Lisäksi joillakin skaalavalinnoilla vaikutusalakäyrät ovat lievästi kaarevia esittäessä x- ja y-akselit logaritmisella asteikolla. Nämä seikat heikentävät hieman K-kertoimien vertailukelpoisuutta.

5.3 b-kvarkkiparien tuotto

Tarkastelemani b-kvarkkiparivaikutusalat ovat kokonaisvaikutusala $\sigma^{pp\to b\bar{b}+X}(\sqrt{s})$, leikattu vaikutusala $\sigma^{pp\to H_b+X}_{2.0<\eta<5.0}(\sqrt{s})$ sekä differentioidut vaikutusalat $\frac{d\sigma^{pp\to H_b+X}}{d\eta}(\eta)$ CMS-energioilla $\sqrt{s} = 7$ TeV ja 13 TeV. Kolme jälkimmäistä vaikutusalaa edustavat kaksiosaista prosessia $p+p \to b+\bar{b}+X \to H_{\bar{b}}+X$.

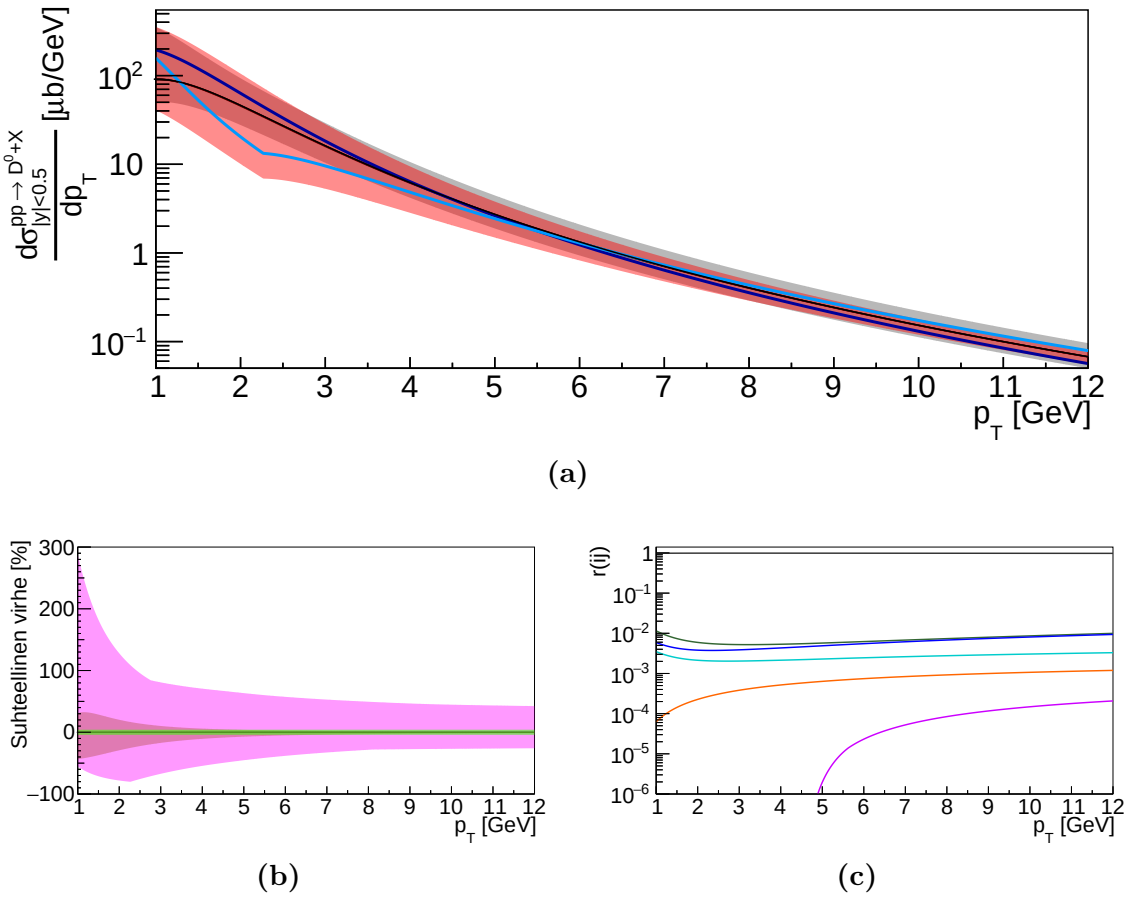


(a)



(b)

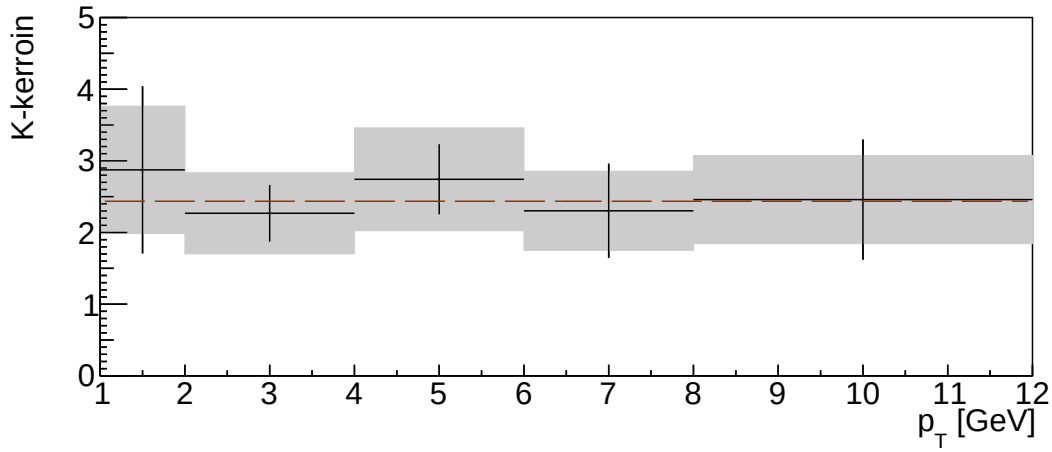
Kuva 24. p_T-differentioitu vaikutusala $\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, CMS-energialla $\sqrt{s} = 2{,}76$ TeV. Mustien ristien horisontaaliset viivat edustavat kokeellisten tulosten histogrammipylväitä ja vertikaaliset viivat statistista virhettä. Harmaat osuudet horisontaalisen viivan ylä- ja alapuolella ovat systemaattiset ylä- ja alavirheet. Teoreettista tulosta halkovat mustat horisontaaliset viivat ovat histogrammipylväsvälejä vastaavat teoreettiset keskiarvot. Kuvassa (b) vihreä verhokäyrä on fragmentaatio-osuuden virheen aiheuttama vaikutusalan virhe, joka ei näy nyt kunnolla pienuutensa vuoksi. Kuvaajien merkitykset ovat muuten samat kuin kuvassa 16. Kuviin ei ole merkittynä D^0-mesonin hajoamisen haarautumissuhteesta (*decay branching ratio*) ja normalisaatiosta (luminositeetti, yhtälö (26)) tulevia kokeellisten tulosten systemaattisia virheitä (1,3 % ja 1,9 %) [45, 87]. Nämä virheet on kuitenkin otettu huomioon K-kerroinsovituksissa (kuvat 26 ja 27).



Kuva 25. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot p_T-differentioidulle vaikutusalalle $\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 2{,}76$ TeV. Kuvassa (b) vihreä verhokäyrä on fragmentaatio-osuuden virheen aiheuttama vaikutusalan suhteellinen virhe. Kuvaajien merkitykset ovat muuten samat kuin kuvassa 17.

Taulukko 5. Vaikutusalojen $\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$ kokonais-K-kertoimet eri skaalavalinnoilla CMS-energioilla $\sqrt{s} = 2{,}76$, 5,02 ja 7 TeV (kuvat 26, 27, 30, 31, 34 ja 35).

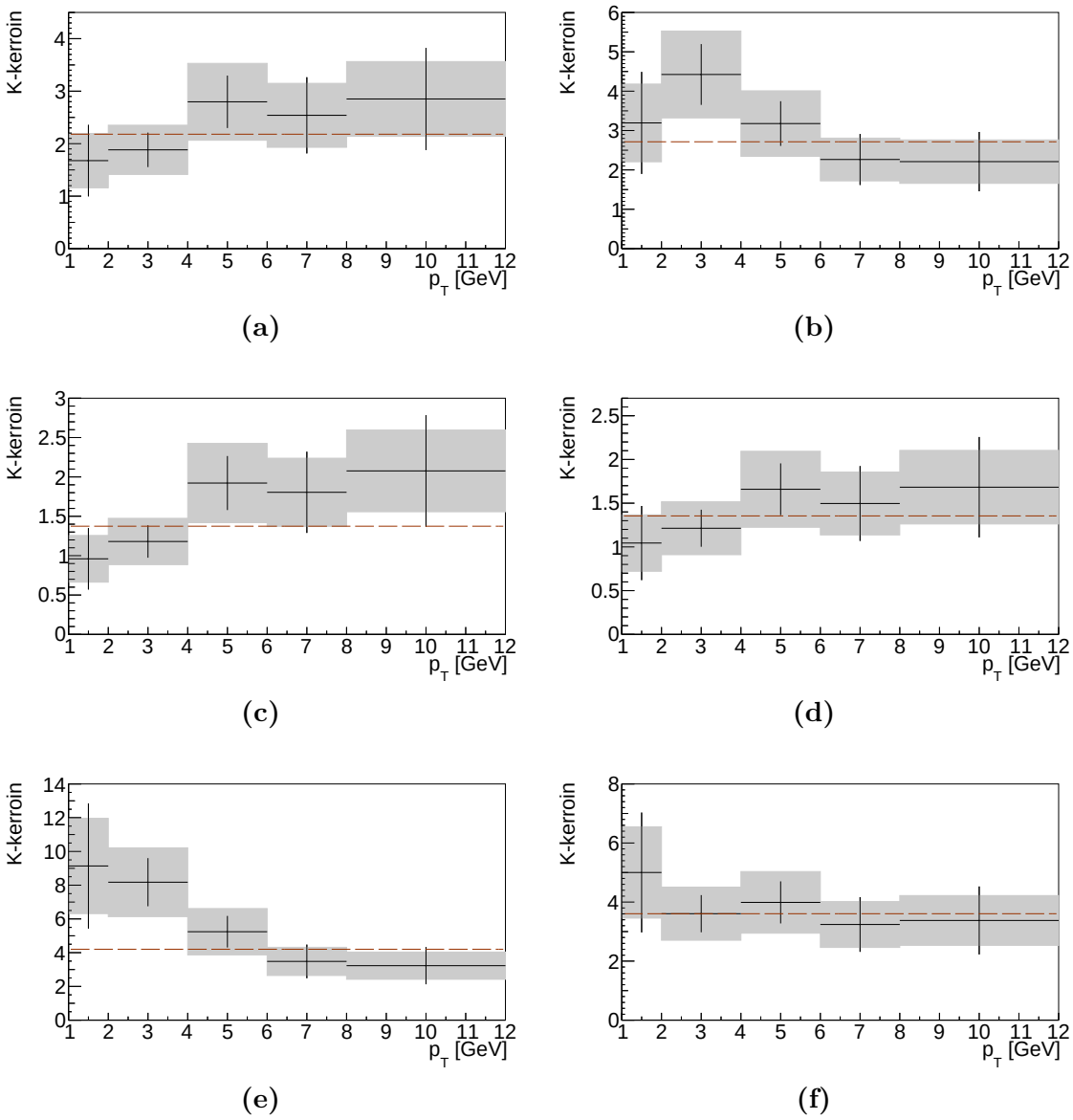
(Q_r,Q_f)	$\sqrt{s} = 2{,}76$ TeV	$\sqrt{s} = 5{,}02$ TeV	$\sqrt{s} = 7$ TeV
$(Q_r^{\mathrm{def}},Q_f^{\mathrm{def}})$	$2{,}4 \pm 0{,}5$	$2{,}26 \pm 0{,}06$	$2{,}3 \pm 0{,}2$
$(Q_r^{\mathrm{max}},Q_f^{\mathrm{max}})$	$2{,}2 \pm 0{,}4$	$1{,}40 \pm 0{,}04$	$1{,}62 \pm 0{,}14$
$(Q_r^{\mathrm{min}},Q_f^{\mathrm{min}})$	$2{,}7 \pm 0{,}5$	$1{,}51 \pm 0{,}05$	$2{,}7 \pm 0{,}3$
$(Q_r^{\mathrm{def}},Q_f^{\mathrm{max}})$	$1{,}4 \pm 0{,}3$	$0{,}78 \pm 0{,}03$	$0{,}98 \pm 0{,}09$
$(Q_r^{\mathrm{min}},Q_f^{\mathrm{def}})$	$1{,}4 \pm 0{,}3$	$0{,}92 \pm 0{,}03$	$1{,}22 \pm 0{,}10$
$(Q_r^{\mathrm{def}},Q_f^{\mathrm{min}})$	$4{,}2 \pm 0{,}8$	$4{,}04 \pm 0{,}11$	$4{,}0 \pm 0{,}4$
$(Q_r^{\mathrm{max}},Q_f^{\mathrm{def}})$	$3{,}6 \pm 0{,}7$	$3{,}37 \pm 0{,}08$	$3{,}3 \pm 0{,}3$



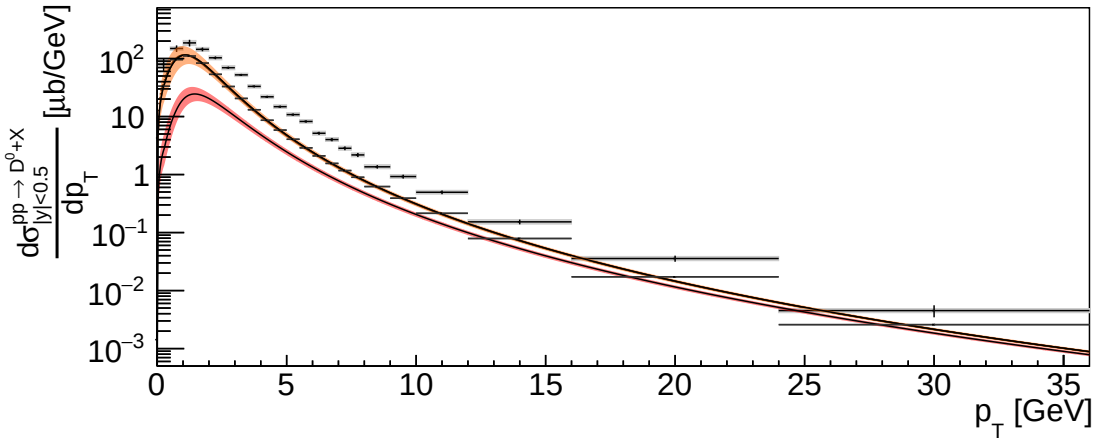
Kuva 26. p_T-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s}$ = 2,76 TeV, K-kertoimet oletusskaalavalinnalla (Q_r^{def},Q_f^{def}). Vertikaaliset mustat viivat ja harmaat laatikot ovat kokeellisten tulosten statistiset ja systemaattiset virheet jaettuna teoreettisilla tuloksilla (keskiarvo). Ruskea katkoviiva on K-kerroinsovituksesta saatu kokonais-K-kerroin. K-kerroinsovituksessa on otettu huomioon statistisen ja systemaattisen virheen lisäksi D^0-mesonin hajoamisen haarautumissuhteesta tuleva virhe 1,3 % ja normalisaatiosta tuleva virhe 1,9 %.

Taulukko 6. Vaikutusalojen $\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$ kokonais-K-kertoimet eri skaalavalinnoilla CMS-energioilla $\sqrt{s}$ = 2,76, 5,02 ja 7 TeV (kuvat 38, 39, 42, 43, 46 ja 47).

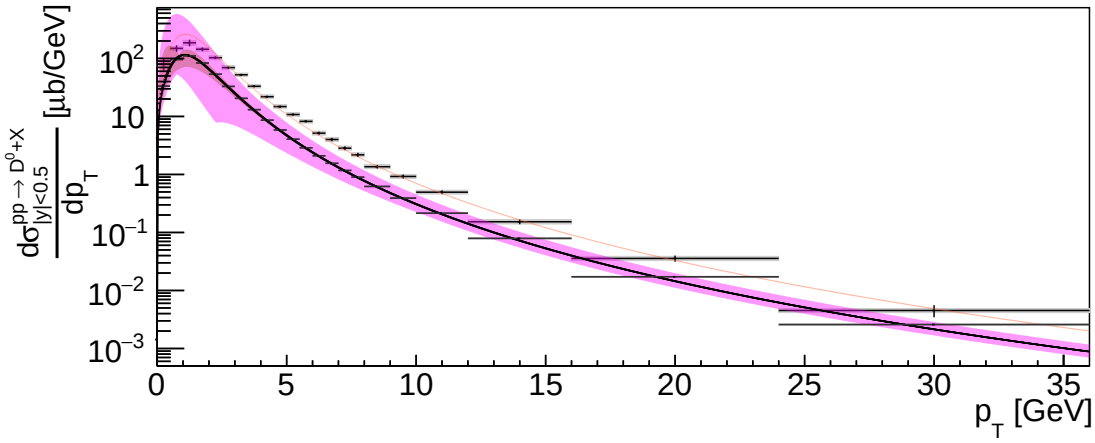
(Q_r,Q_f)	$\sqrt{s}$ = 2,76 TeV	$\sqrt{s}$ = 5,02 TeV	$\sqrt{s}$ = 7 TeV
(Q_r^{def},Q_f^{def})	3,1 ± 0,6	2,82 ± 0,07	2,7 ± 0,2
(Q_r^{max},Q_f^{max})	3,0 ± 0,6	2,43 ± 0,06	2,0 ± 0,2
(Q_r^{min},Q_f^{min})	3,2 ± 0,6	3,23 ± 0,08	3,3 ± 0,3
(Q_r^{def},Q_f^{max})	2,0 ± 0,4	1,56 ± 0,04	1,27 ± 0,10
(Q_r^{min},Q_f^{def})	1,9 ± 0,4	1,64 ± 0,04	1,50 ± 0,11
(Q_r^{def},Q_f^{min})	4,9 ± 1,0	4,86 ± 0,12	4,9 ± 0,4
(Q_r^{max},Q_f^{def})	4,4 ± 0,8	4,07 ± 0,10	3,9 ± 0,3



Kuva 27. p_T-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s}$ = 2,76 TeV, K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26. D^0-mesonin hajoamisen haarautumissuhteesta ja normalisaatiosta tulevat systemaattiset virheet on otettu huomioon K-kerroinsovituksissa.

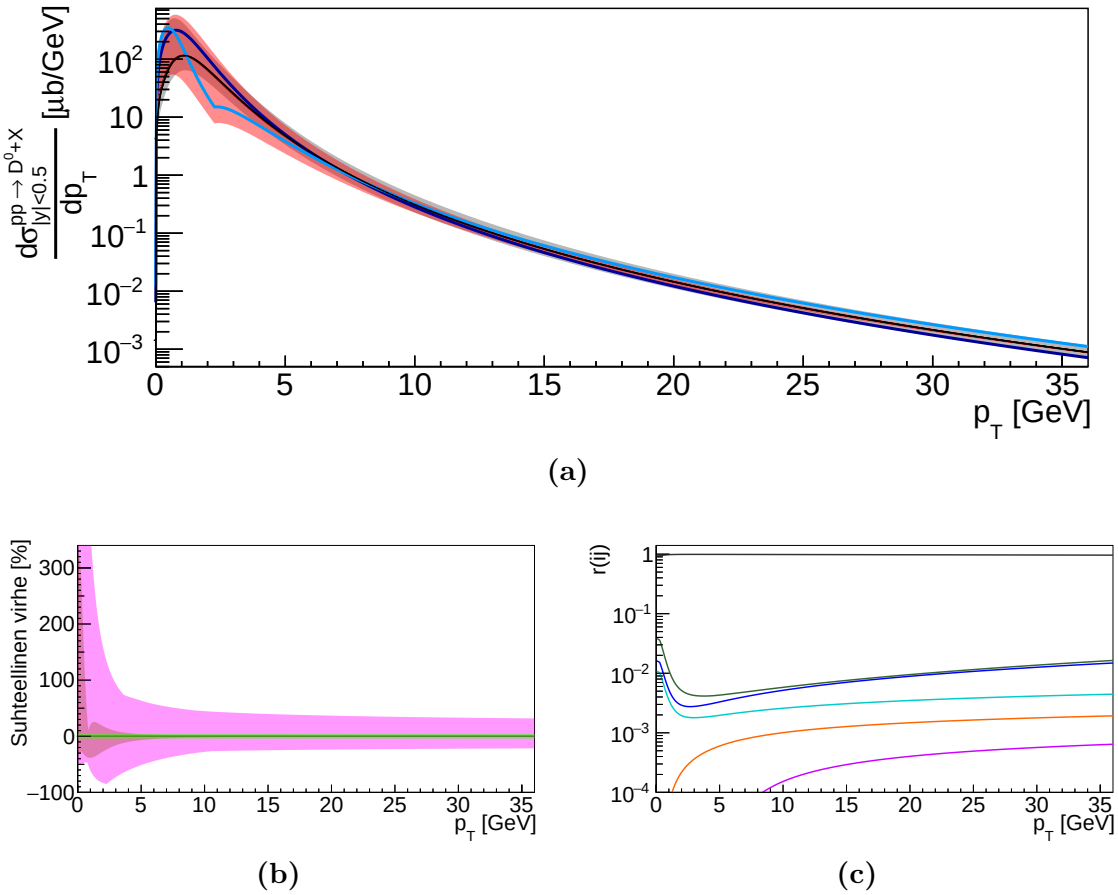


(a)



(b)

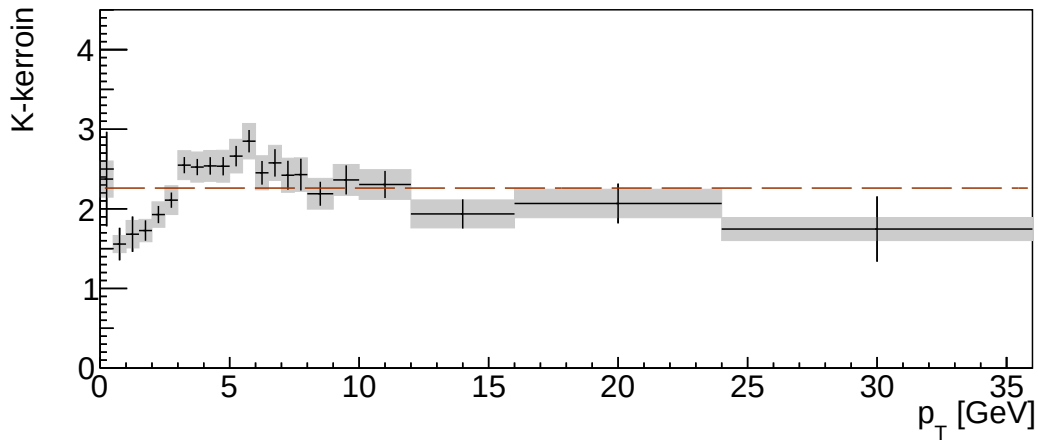
Kuva 28. p_T-differentioitu vaikutusala $\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, CMS-energialla $\sqrt{s} = 5{,}02$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 24. Kuviin ei ole merkittynä D^0-mesonin hajoamisen haarautumissuhteesta ja integroidusta luminositeetista (yhtälö (27)) tulevia kokeellisten tulosten systemaattisia virheitä (1,0 % ja 2,1 %, ovat otettuina huomioon K-kerroinsovituksissa) [93, 94].



Kuva 29. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot p_T-differentioidulle vaikutusalalle $\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 5{,}02$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 25.

Taulukko 7. Vaikutusalojen $\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$ sovitus-K-kertoimet poikittaisliikemääräalueissa $p_T \geq 4$ GeV eri skaalavalinnoilla CMS-energioilla $\sqrt{s} = 2{,}76$, 5,02 ja 7 TeV (kuvat 26, 27, 30, 31, 34 ja 35).

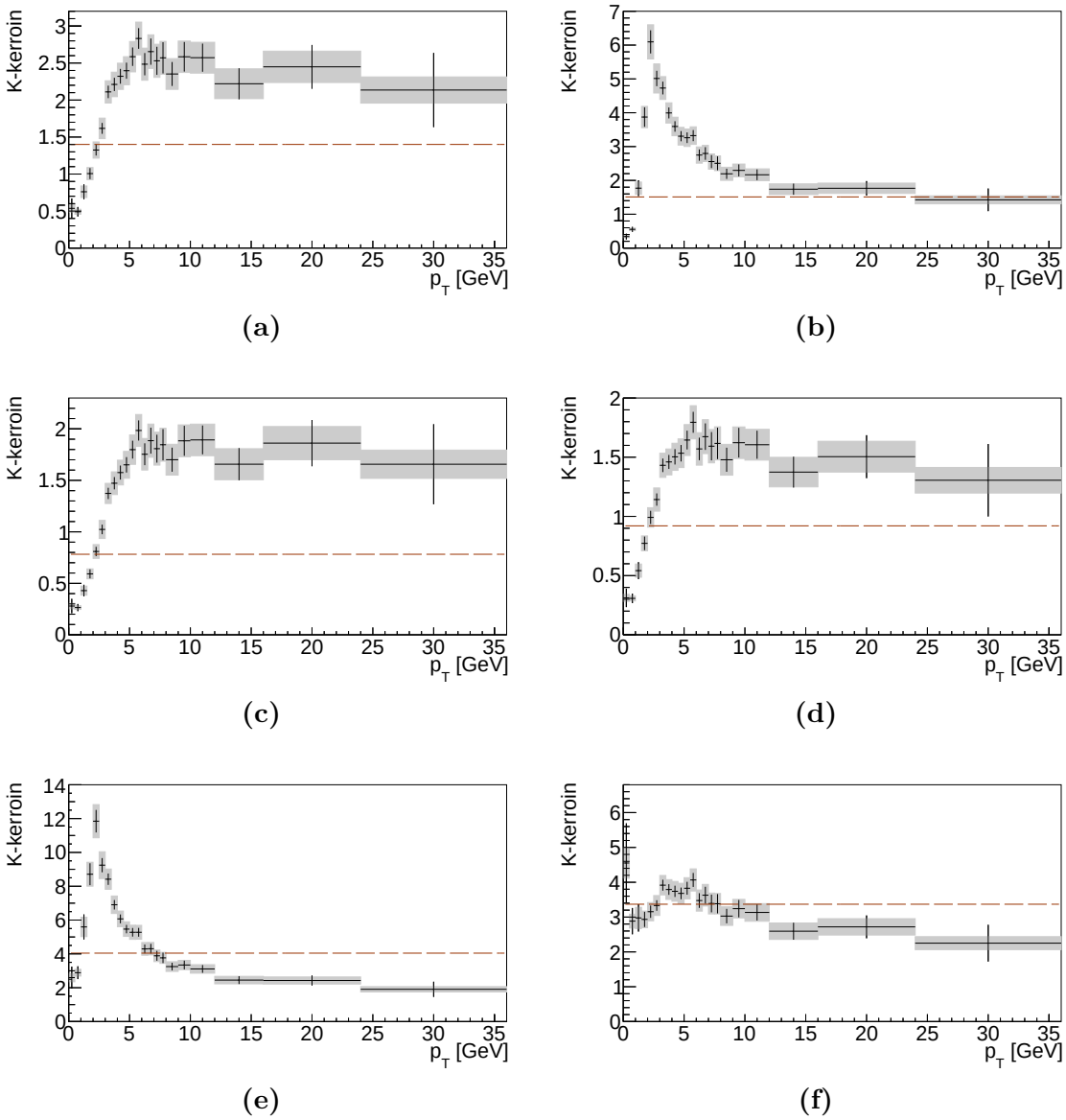
(Q_r,Q_f)	$\sqrt{s} = 2{,}76$ TeV	$\sqrt{s} = 5{,}02$ TeV	$\sqrt{s} = 7$ TeV
$(Q_r^{\mathrm{def}},Q_f^{\mathrm{def}})$	$2{,}5 \pm 0{,}6$	$2{,}41 \pm 0{,}07$	$2{,}4 \pm 0{,}3$
$(Q_r^{\mathrm{max}},Q_f^{\mathrm{max}})$	$2{,}7 \pm 0{,}6$	$2{,}50 \pm 0{,}08$	$2{,}4 \pm 0{,}3$
$(Q_r^{\mathrm{min}},Q_f^{\mathrm{min}})$	$2{,}5 \pm 0{,}6$	$2{,}51 \pm 0{,}08$	$2{,}5 \pm 0{,}3$
$(Q_r^{\mathrm{def}},Q_f^{\mathrm{max}})$	$1{,}9 \pm 0{,}5$	$1{,}77 \pm 0{,}06$	$1{,}7 \pm 0{,}2$
$(Q_r^{\mathrm{min}},Q_f^{\mathrm{def}})$	$1{,}6 \pm 0{,}4$	$1{,}58 \pm 0{,}05$	$1{,}56 \pm 0{,}15$
$(Q_r^{\mathrm{def}},Q_f^{\mathrm{min}})$	$3{,}8 \pm 0{,}9$	$3{,}70 \pm 0{,}11$	$3{,}8 \pm 0{,}4$
$(Q_r^{\mathrm{max}},Q_f^{\mathrm{def}})$	$3{,}5 \pm 0{,}8$	$3{,}37 \pm 0{,}10$	$3{,}3 \pm 0{,}3$



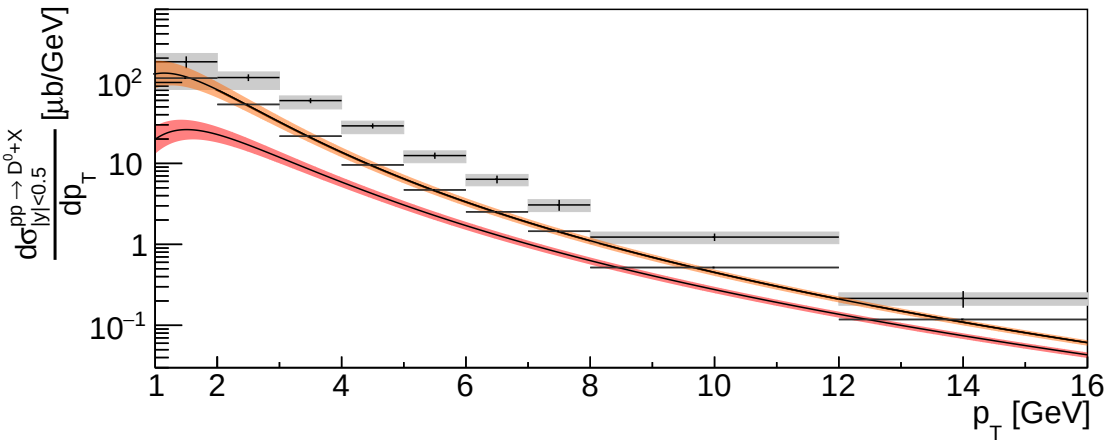
Kuva 30. p_T-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 5{,}02$ TeV, K-kertoimet oletusskaalavalinnalla (Q_r^{def},Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26. K-kerroinsovituksessa on otettu huomioon statistisen ja systemaattisen virheen lisäksi D^0-mesonin hajoamisen haarautumissuhteesta tuleva vaikutusalan virhe 1,0 % ja integroidusta luminositeetista tuleva virhe 2,1 %.

Taulukko 8. Vaikutusalojen $\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$ sovitus-K-kertoimet poikittaisliikemääräalueissa $p_T \geq 4$ GeV eri skaalavalinnoilla CMS-energioilla $\sqrt{s} = 2{,}76$, 5,02 ja 7 TeV (kuvat 38, 39, 42, 43, 46 ja 47).

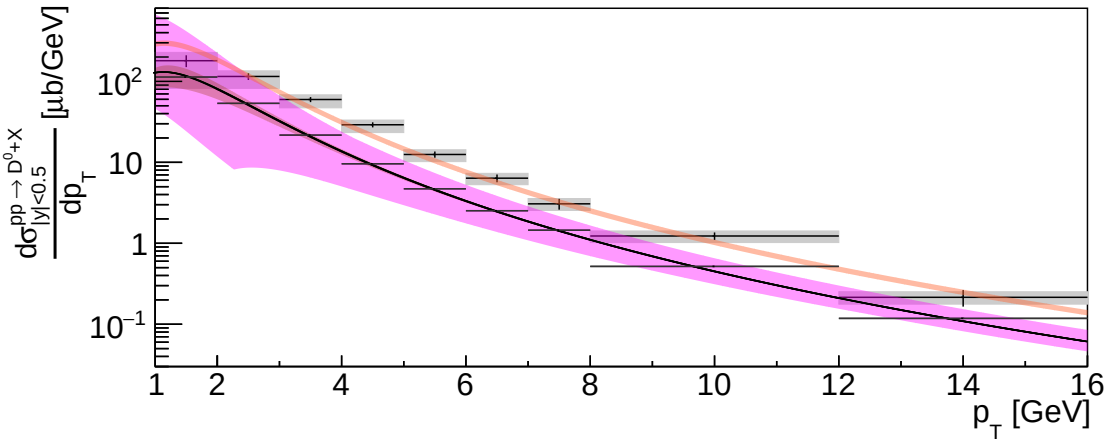
(Q_r,Q_f)	$\sqrt{s} = 2{,}76$ TeV	$\sqrt{s} = 5{,}02$ TeV	$\sqrt{s} = 7$ TeV
(Q_r^{def},Q_f^{def})	$3{,}2 \pm 0{,}7$	$2{,}98 \pm 0{,}08$	$2{,}8 \pm 0{,}3$
(Q_r^{max},Q_f^{max})	$3{,}5 \pm 0{,}7$	$3{,}07 \pm 0{,}08$	$2{,}8 \pm 0{,}3$
(Q_r^{min},Q_f^{min})	$3{,}1 \pm 0{,}7$	$3{,}11 \pm 0{,}08$	$3{,}1 \pm 0{,}3$
(Q_r^{def},Q_f^{max})	$2{,}5 \pm 0{,}5$	$2{,}18 \pm 0{,}06$	$2{,}0 \pm 0{,}2$
(Q_r^{min},Q_f^{def})	$2{,}1 \pm 0{,}5$	$1{,}94 \pm 0{,}05$	$1{,}84 \pm 0{,}15$
(Q_r^{def},Q_f^{min})	$4{,}6 \pm 1{,}0$	$4{,}61 \pm 0{,}12$	$4{,}6 \pm 0{,}4$
(Q_r^{max},Q_f^{def})	$4{,}4 \pm 0{,}9$	$4{,}16 \pm 0{,}11$	$4{,}0 \pm 0{,}4$



Kuva 31. p_T-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 5{,}02$ TeV, K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26. D^0-mesonin hajoamisen haarautumissuhteesta ja integroidusta luminositeetista tulevat systemaattiset virheet on otettu huomioon K-kerroinsovituksissa.

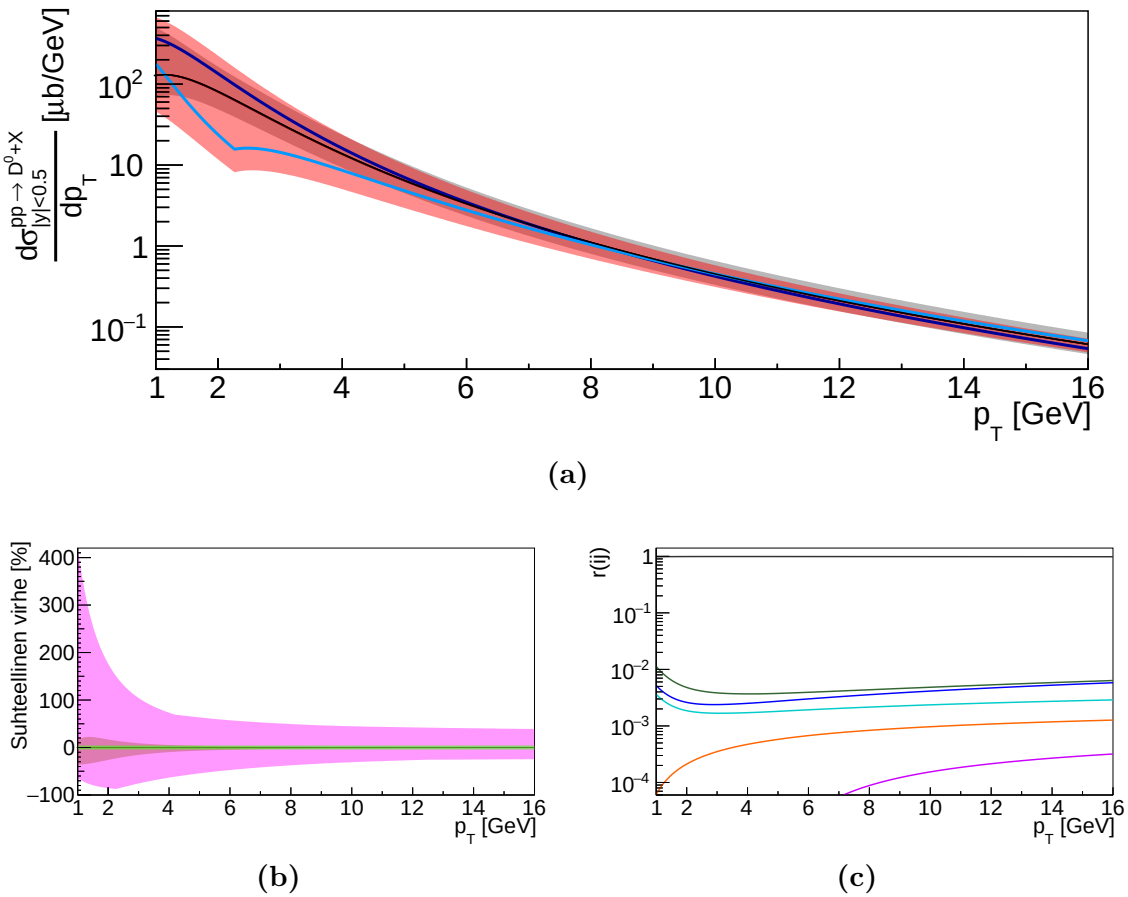


(a)

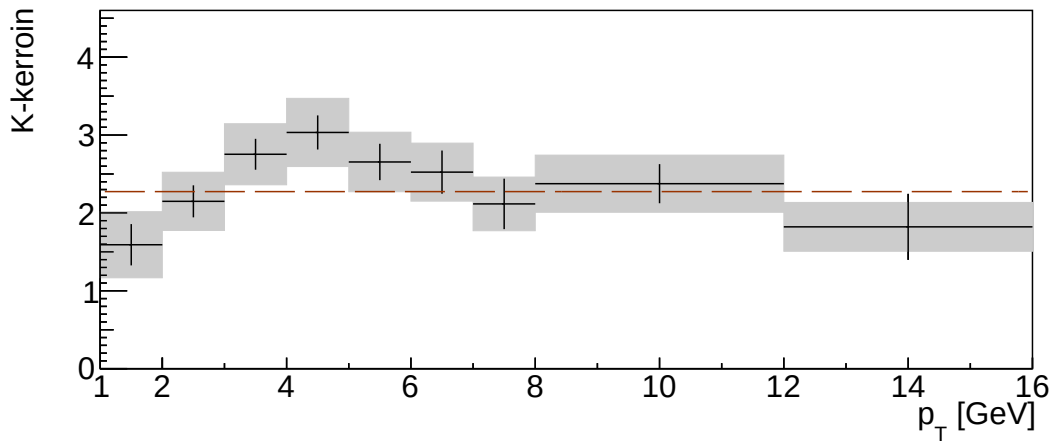


(b)

Kuva 32. p_T-differentioitu vaikutusala $\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, CMS-energialla $\sqrt{s} = 7$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 24. Kuviin ei ole merkittynä normalisaatiosta tulevaa kokeellisten tulosten systemaattista virhettä (3,7 %, otettu huomioon K-kerroinsovituksissa) [95, 96].



Kuva 33. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot p_T-differentioidulle vaikutusalalle $\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 7$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 25.



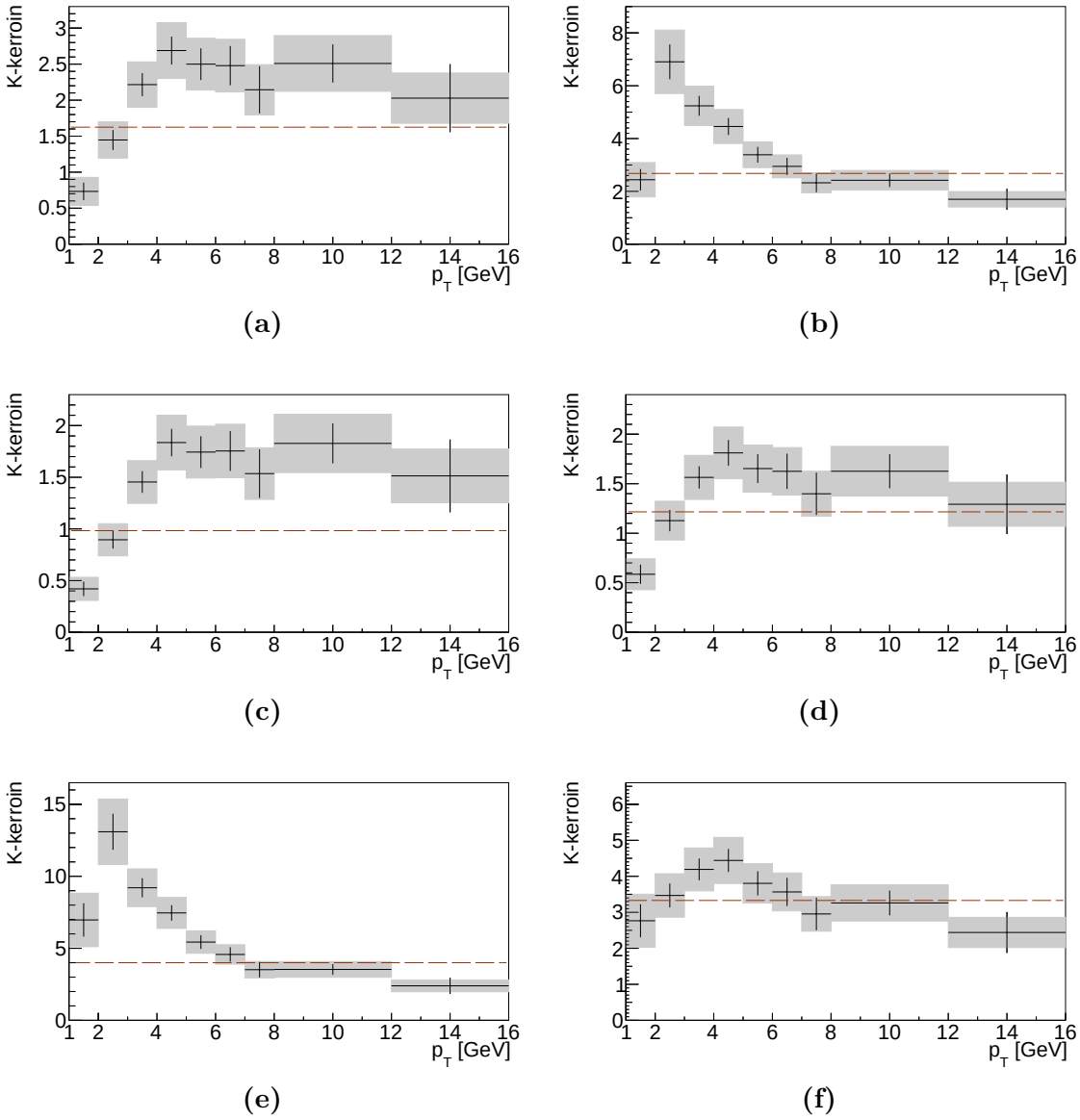
Kuva 34. p_T-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 7$ TeV, K-kertoimet oletusskaalavalinnalla (Q_r^{def},Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26. K-kerroinsovituksessa on otettu huomioon statistisen ja systemaattisen virheen lisäksi normalisaatiosta tuleva virhe 3,7 %.

Kokonaisvaikutusala $\sigma^{pp\to b\bar{b}+X}$ ja sen analyysikuvat ovat esitettynä kuvissa 48 ja 49. Eri skaalavalintoja vastaavat K-kertoimet ovat kuvissa 50 ja 51.

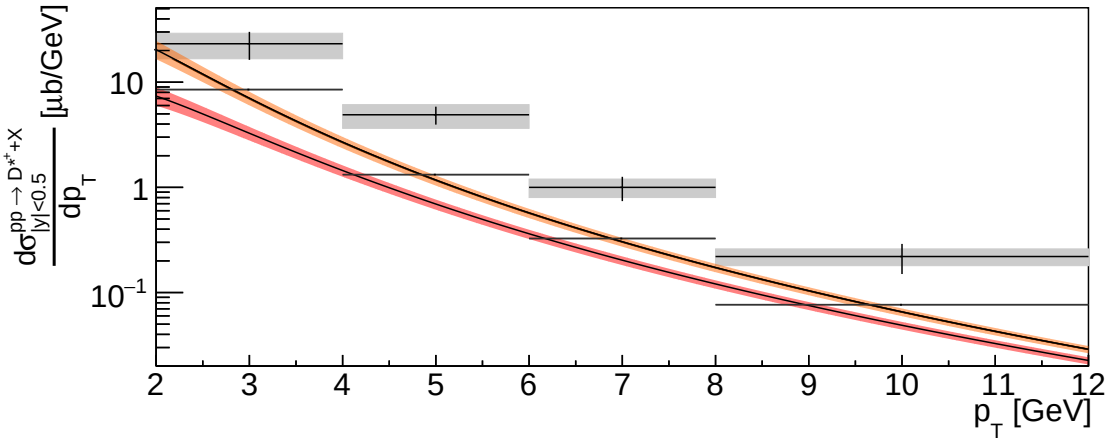
Kaikki kokeelliset vertailutulokset määritettiin tutkimalla b-hadronien, tai b-hadroneista syntyneiden c-hadronien, semileptonisia hajoamisia. Vaikutusalat, jotka mitattiin energioilla $\sqrt{s} = 200$ GeV (PHENIX-kollaboraatio) [42, 97], 2,76 TeV (ALICE) [45, 98] ja 7 TeV (ALICE) [44], käsittelivät hajoamisista syntyneitä elektroneja (ja positroneja). Törmäysenergialla $\sqrt{s} = 500$ GeV (PHENIX) [5] tehty mittaus tarkasteli b- ja $\bar{b}$-hadroneista syntyneitä samanmerkkisiä myonipareja $\mu^\pm\mu^\pm$.

Kuten $c\bar{c}$-kokonaisvaikutusalan tapauksessa, partonijakaumafunktioita vastaava virhe on mitätön. Skaalavalinnasta tuleva (suhteellinen) epävarmuus sen sijaan on nyt huomattavasti pienempi kuin c-kvarkkien tapauksissa (kuvat 48b ja 49b). Tämä johtuu siitä, että vahva kytkentävakio ja partonijakaumafunktiot stabiloituvat renormalisaatio-/faktorisaatioskaalan kasvaessa (kuvat 4, 14b, 14c, 14d, 14e, 15a ja 15b). Kuvasta 49a nähdään myös, että renormalisaatioskaalan vaihtelun merkitys on nyt suurempi.

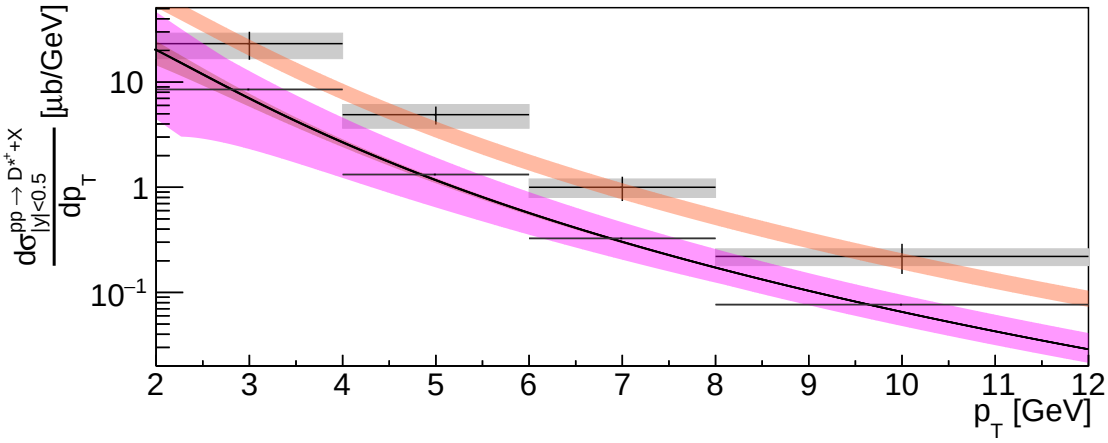
Massan vaihtelun vaikutus vaikutusalaan $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}$ on pienempi kuin vaikutusalaan $\sigma^{pp\to b\bar{b}+X}$ (kuvat 17b ja 49b), vaikka c-kvarkin massan suhteellinen vaihtelu on suurempaa kuin b-kvarkin ($m_c^{\text{def}} = 1{,}27$ GeV, $m_c^{\text{min}} = 993$ MeV, $m_c^{\text{max}} = 1{,}67$ GeV, $m_b^{\text{def}} = 4{,}18$ GeV, $m_b^{\text{min}} = 3{,}610$ GeV, $m_b^{\text{max}} = 4{,}78$ GeV). Tämä selittyy sillä, että massan nostaminen (laskeminen) nostaa (laskee) myös faktorisaatioskaalaa.



Kuva 35. p_T-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to D^0+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 7$ TeV, K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26. Normalisaatiosta tuleva virhe on otettu huomioon K-kerroinsovituksissa.

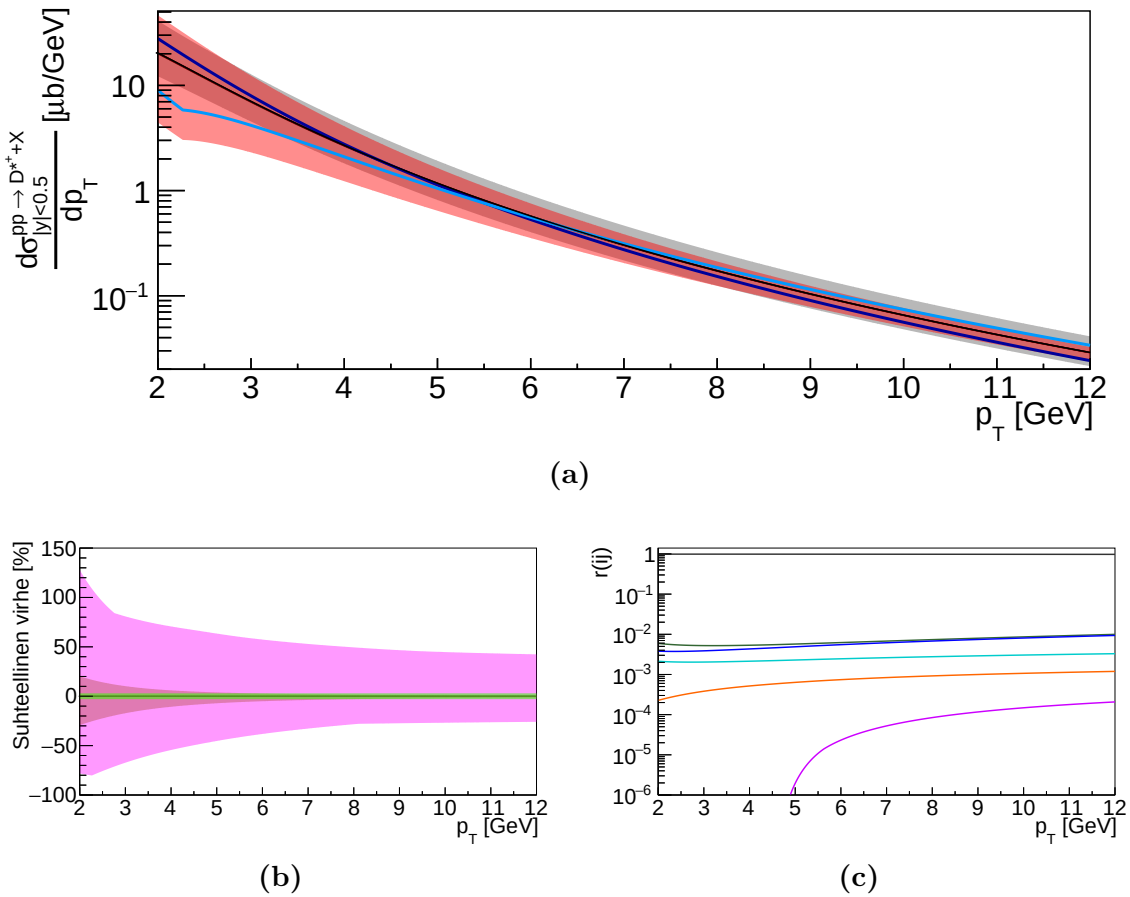


(a)

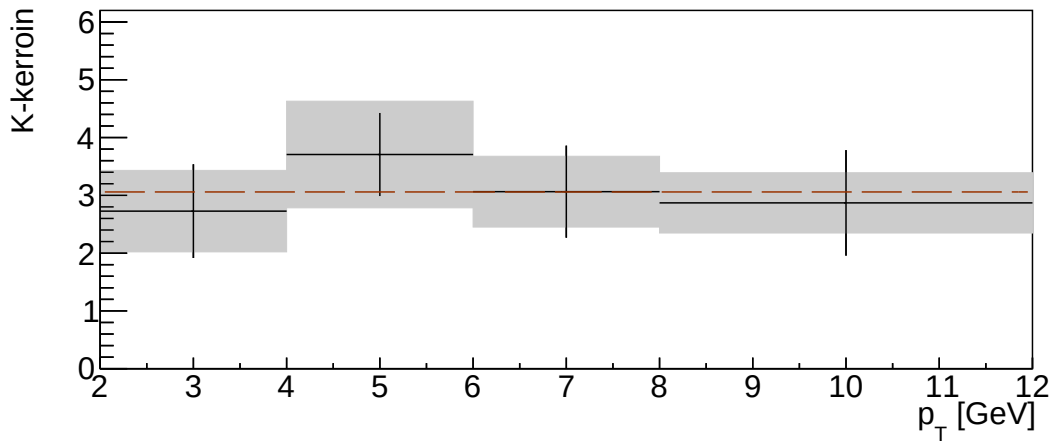


(b)

Kuva 36. p_T-differentioitu vaikutusala $\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, CMS-energialla $\sqrt{s} = 2{,}76$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 24. Kuviin ei ole merkittynä D^{*+}-mesonin hajoamisen haarautumissuhteesta ja normalisaatiosta tulevia kokeellisten tulosten systemaattisia virheitä (1,5 % ja 1,9 %, ovat otettuina huomioon K-kerroinsovituksissa) [45, 87].



Kuva 37. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot p_T-differentioidulle vaikutusalalle $\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 2{,}76$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 25.



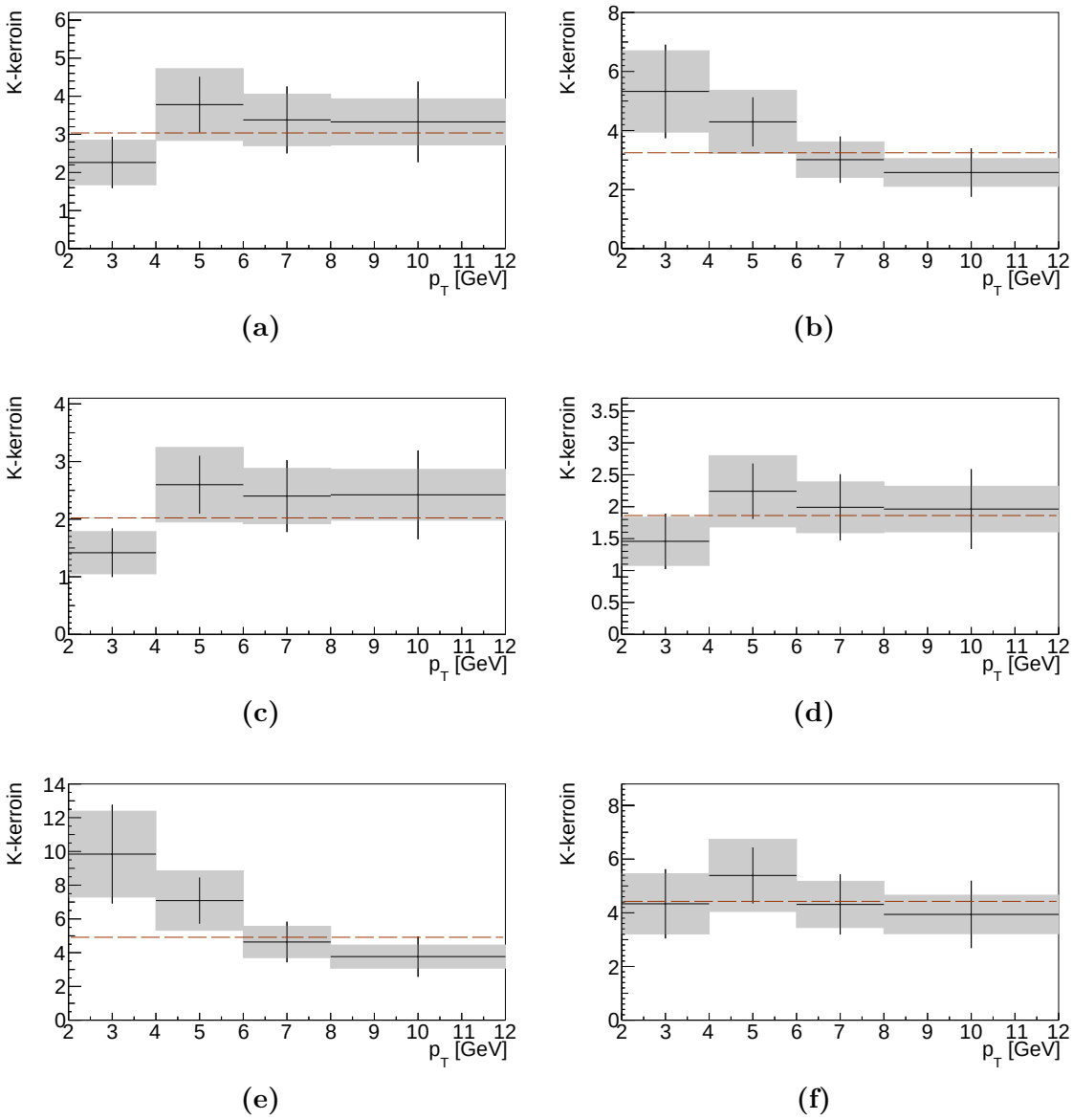
Kuva 38. p_T-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s}$ = 2,76 TeV, K-kertoimet oletusskaalavalinnalla (Q_r^{def},Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26. K-kerroinsovituksessa on otettu huomioon statistisen ja systemaattisen virheen lisäksi D^{*+}-mesonin hajoamisen haarautumissuhteesta tuleva vaikutusalan virhe 1,5 % ja normalisaatiosta tuleva virhe 1,9 %.

Partonijakaumafunktiot kasvavat faktorisaatioskaalan funktiona nopeammin välillä 1,3 GeV $\leq Q_f \leq 4m_c$ kuin välillä $m_b \leq Q_f \leq 4m_b$ (poislukien päällekkäinen osuus $m_b \leq Q_f \leq 4m_c$), ja siten massan vaihtelun vaikutus vaikutusalaan vaimenee vähemmän b-kvarkkiparituoton tapauksessa kuin c-kvarkkiparituoton.

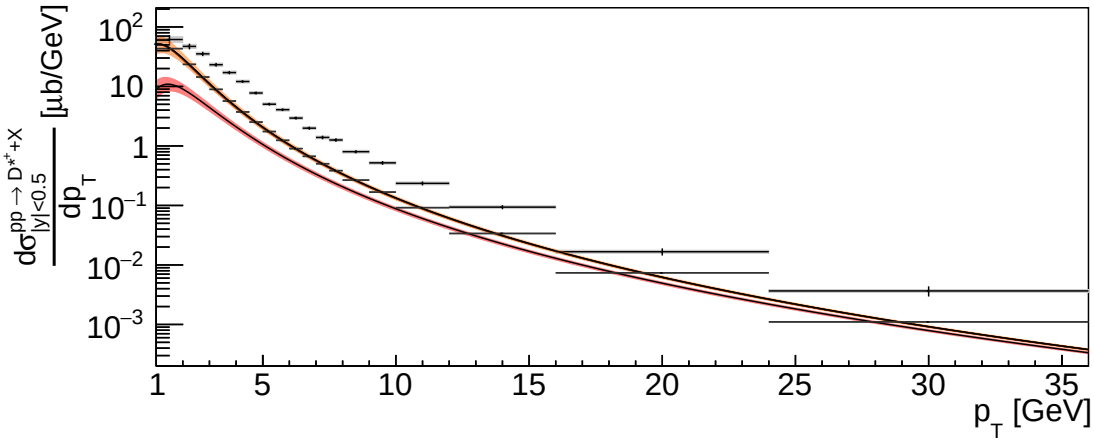
Seitsemää teraelektronivolttia vastaavat K-kertoimet hallitsevat kaikissa K-kerroinsovituksissa. Kahden alimman mittausenergian K-kertoimet poikkeavat aina eniten sovitusarvoista, erityisesti 500 GeV:n K-kerroin ei koskaan vastaa sovitusta. Toisaalta näillä kahdella K-kertoimella on suurimmat virheet. Lisäksi on havaittu, että häiriöteorian korkeamman kertaluvun $b\bar{b}$-tuoton vaikutusalat eivät vastaa hyvin kokeellisia tuloksia, kun törmäysenergia on alhainen [5]. Täten edellä havaitut K-kertoimien suuret poikkeamat eivät ole puhtaasti LO-tulosten ominaisuus.

Kokonaisvaikutusalan kokonais-K-kertoimissa on yksi erikoinen ominaisuus: ne ovat erittäin pienet, itse asiassa oletusskaalavalinnalla $K \approx 1$ (taulukko 9). Palaan tähän havaintoon myöhemmin, alaluvun lopussa.

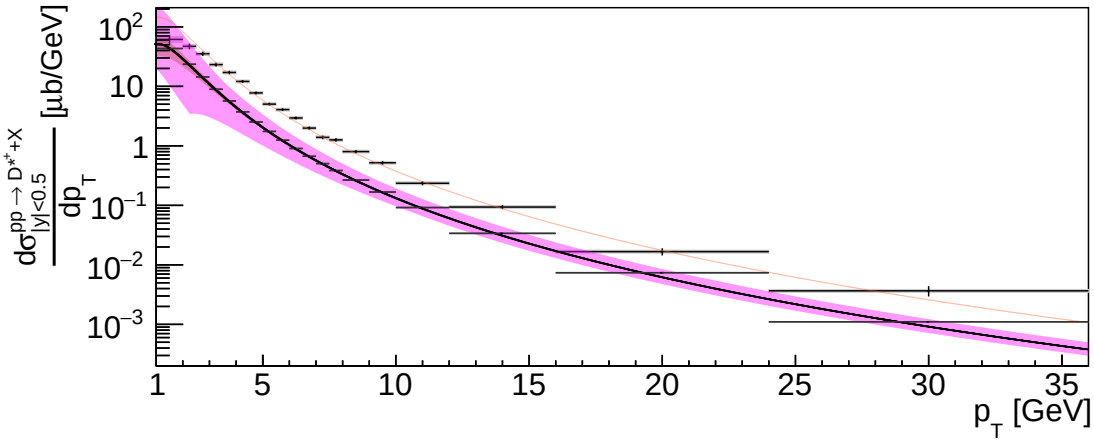
LHCb-kollaboraatio on mitannut leikatun vaikutusalan $\sigma^{pp\to H_b+X}_{2.0<\eta<5.0}$ CMS-energioilla 7 ja 13 TeV [7, 99, 100]. H_b on nyt b-hadroni, joka sisältää b-kvarkin, mutta ei $\bar{b}$-antikvarkkia ja joka on lähtöisin $b\bar{b}$-parintuotosta. Mittauksessa tarkasteltiin prosesseja, joissa hadroni hajoaa semileptonisesti myoniksi ja perustilassa olevaksi D-



Kuva 39. p_T-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s}$ = 2,76 TeV, K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26. D^{*+}-mesonin hajoamisen haarautumissuhteesta ja normalisaatiosta tulevat systemaattiset virheet on otettu huomioon K-kerroinsovituksissa.

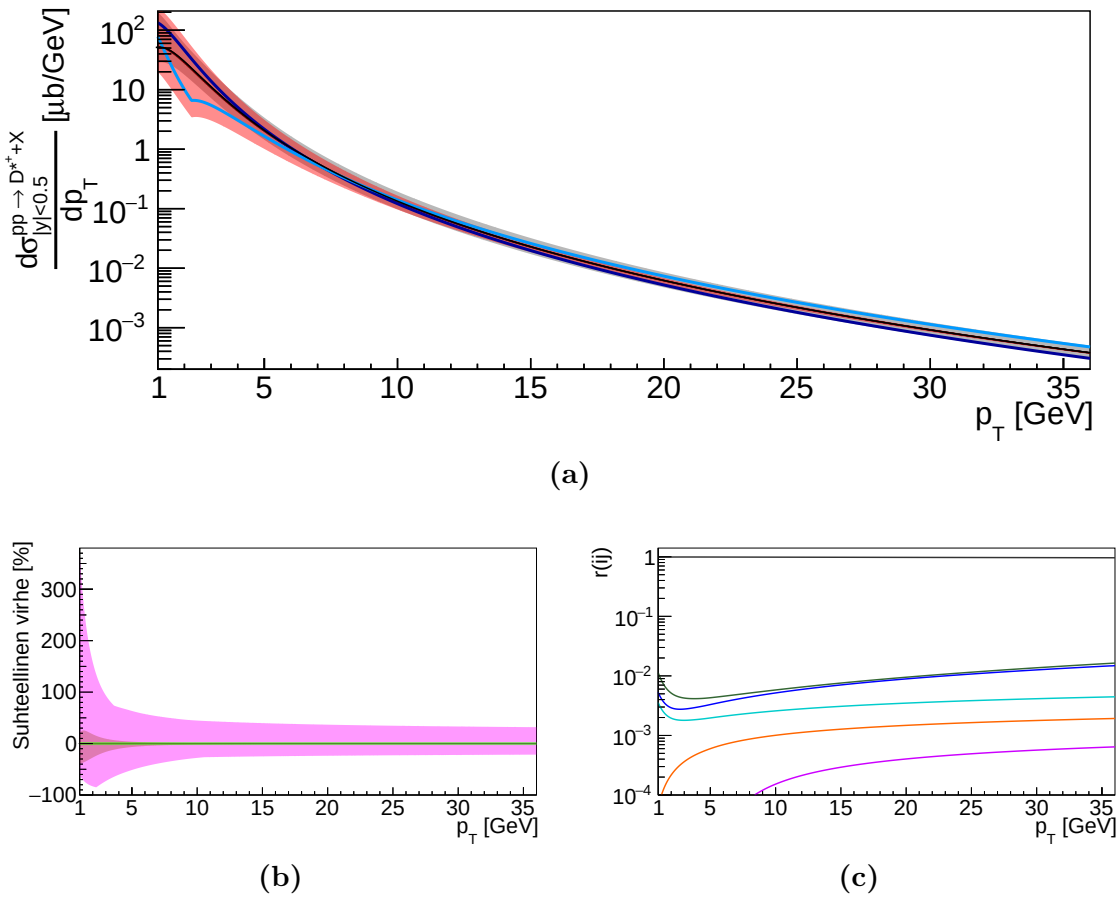


(a)

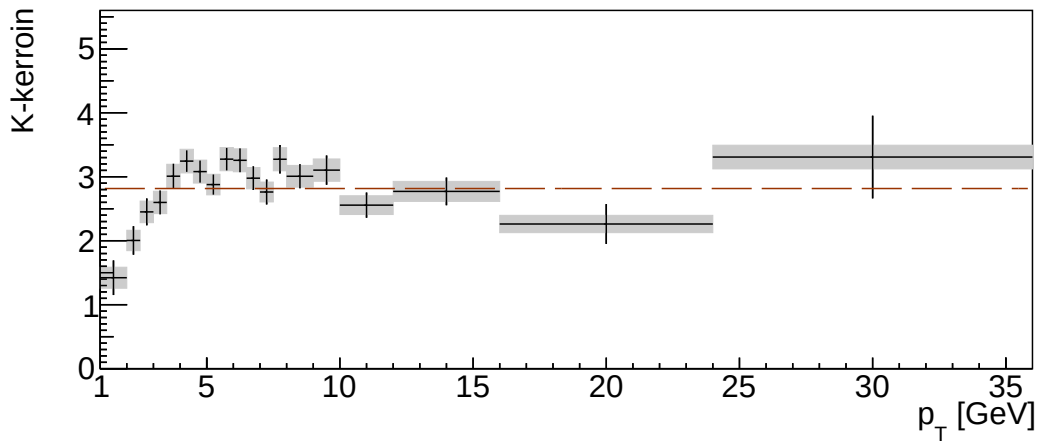


(b)

Kuva 40. p_T-differentioitu vaikutusala $\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, CMS-energialla $\sqrt{s} = 5{,}02$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 24. Kuviin ei ole merkittynä D^{*+}-mesonin hajoamisen haarautumissuhteesta ja integroidusta luminositeetista tulevia kokeellisten tulosten systemaattisia virheitä (1,3 % ja 2,1 %, ovat otettuina huomioon K-kerroinsovituksissa) [93, 94].



Kuva 41. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot p_T-differentioidulle vaikutusalalle $\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 5{,}02$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 25.



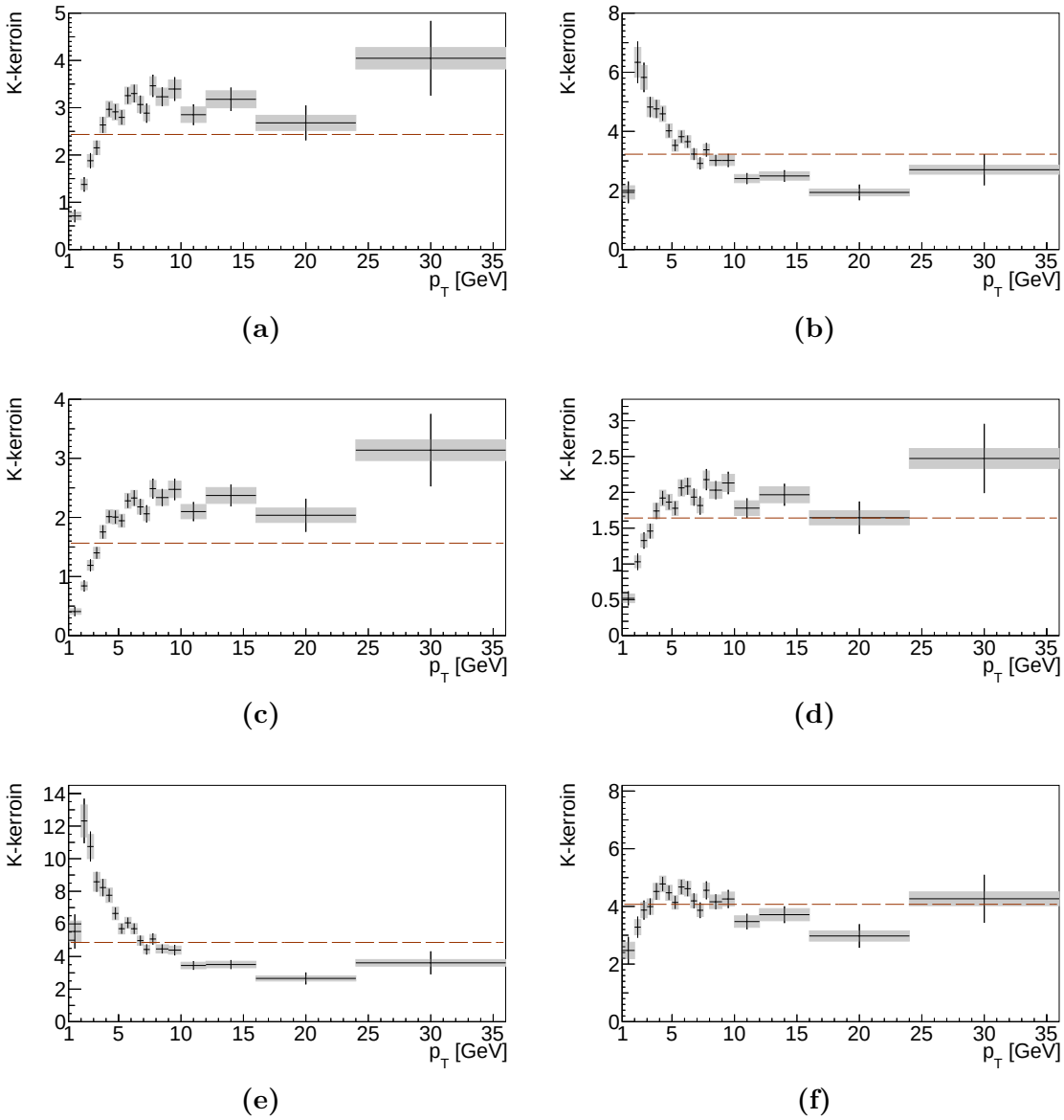
Kuva 42. p_T-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 5{,}02$ TeV, K-kertoimet oletusskaalavalinnalla (Q_r^{def},Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26. K-kerroinsovituksessa on otettu huomioon statistisen ja systemaattisen virheen lisäksi D^{*+}-mesonin hajoamisen haarautumissuhteesta tuleva vaikutusalan virhe 1,3 % ja integroidusta luminositeetista tuleva virhe 2,1 %.

mesoniksi. Mittauksessa määritettiin myös pseudorapiditeetin suhteen differentioidut vaikutusalat $\frac{d\sigma^{pp\to H_b+X}}{d\eta}$ ($2{,}0 \leq \eta \leq 5{,}0$ eli suunnilleen $0{,}77° \leq \theta \leq 15{,}41°$) molemmilla törmäysenergioilla.

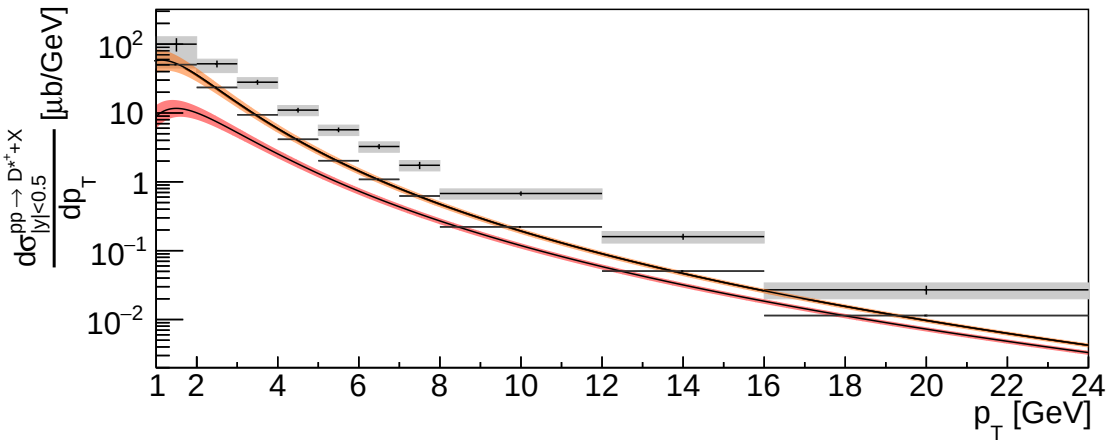
Olen esittänyt vastaavat teoreettiset vaikutusalat ja niiden analyysikuvat kuvissa 52, 53, 56, 57, 60 ja 61. K-kertoimet ovat kuvissa 54, 55, 58, 59, 62 ja 63. Koska mittaukseen sisältymättömien $b\bar{b}$-mesonien osuus b-hadronien kokonaistuotannosta on hyvin pieni (jo kevyempien $b\bar{c}$-mesonien osuus hadroneista on arviolta alle 0,1 prosettia [7]), niin asetin $f(b \to H_b) = 1$.

Arvioisin, että käyttämäni hadronisaatioapproksimaatio vääristää b-hadronien leikattua ja differentioituja vaikutusaloja huomattavasti vähemmän kuin c-hadronien: Hadronisaatiossa raskaan kvarkin liikemäärän suunnan muutos on yleensä pieni ja keskimäärin nolla. Siten hadronisaation yksinkertaistettu mallinnus vaikuttaa todennäköisesti vain vähäisesti b-hadronien pseudorapiditeetteihin ($\eta = -\ln\left[\tan(\frac{\theta}{2})\right]$).

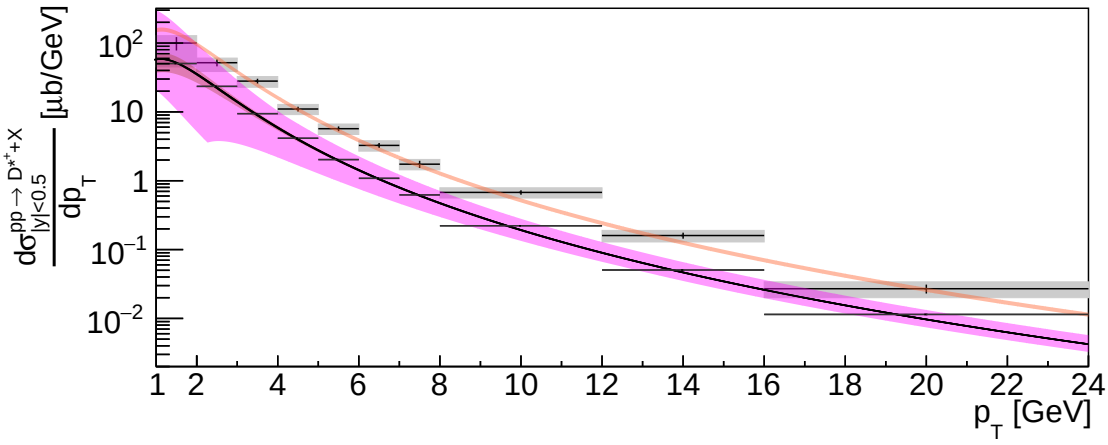
Leikatun ja η-differentioitujen vaikutusalojen arvioidut partonijakamaumafunktiovirheet ovat suuremmat kuin kokonaisvaikutusalan tapauksessa, mutta ne ovat kuitenkin vähäpätöiset verrattuna skaalavalintaa ja massaa vastaaviin epävarmuuksiin. Skaalavalinnan suhteelliset epävarmuudet ovat suunnilleen samat kuin kokonaisvaikutusalan. Massan vaihtelun vaikutus on pienempi, mikä selittyy samoin kuin D-mesonien p_T-differentioitujen vaikutusalojen tapauksessa (luku 5.2). (Kuitenkin



Kuva 43. p_T-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 5{,}02$ TeV, K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26. D^{*+}-mesonin hajoamisen haarautumissuhteesta ja integroidusta luminositeetista tulevat systemaattiset virheet on otettu huomioon K-kerroinsovituksissa.

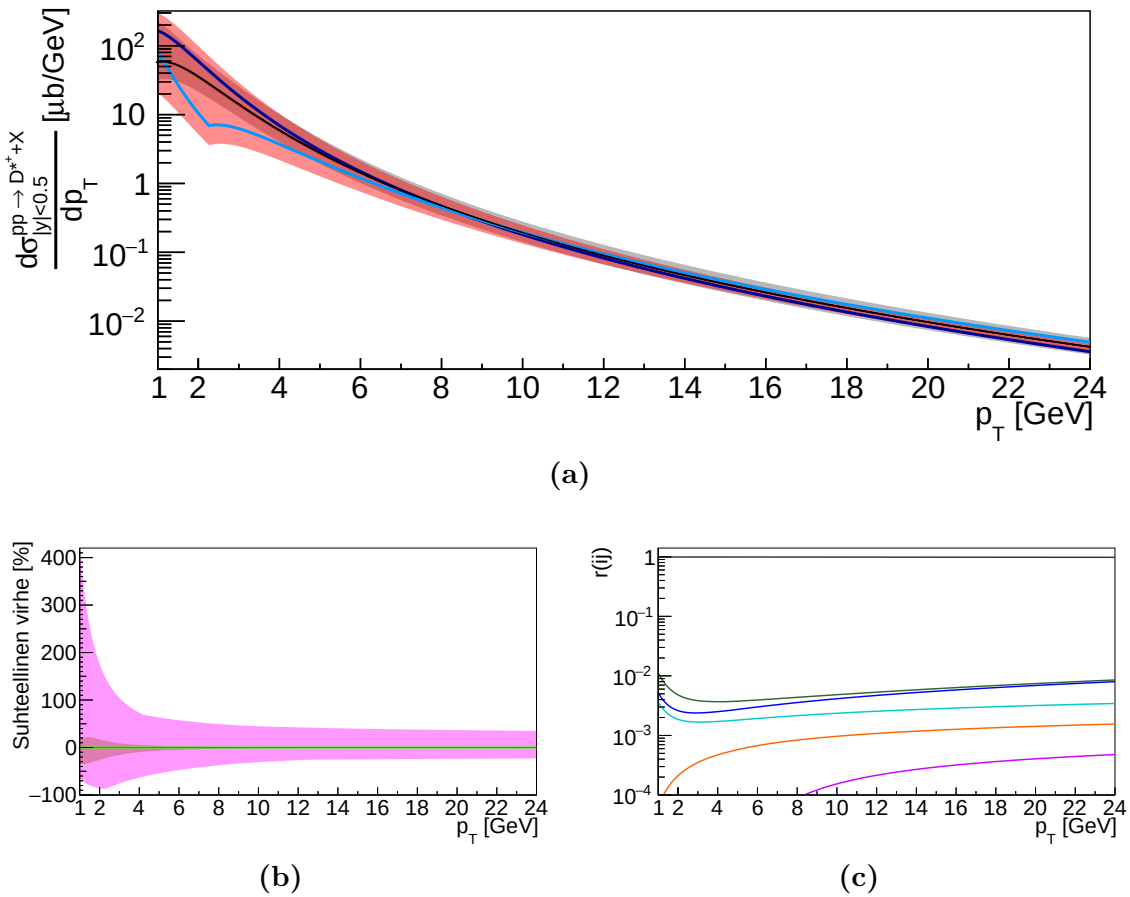


(a)

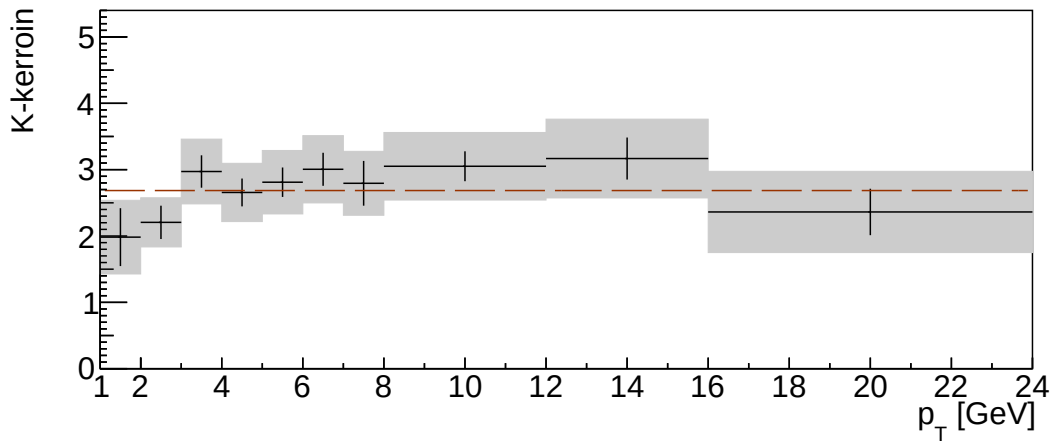


(b)

Kuva 44. p_T-differentioitu vaikutusala $\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, CMS-energialla $\sqrt{s} = 7$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 24. Kuviin ei ole merkittynä normalisaatiosta tulevaa kokeellisten tulosten systemaattista virhettä (3,8 %, otettu huomioon K-kerroinsovituksissa) [95, 96].



Kuva 45. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot p_T-differentioidulle vaikutusalalle $\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 7$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 25.



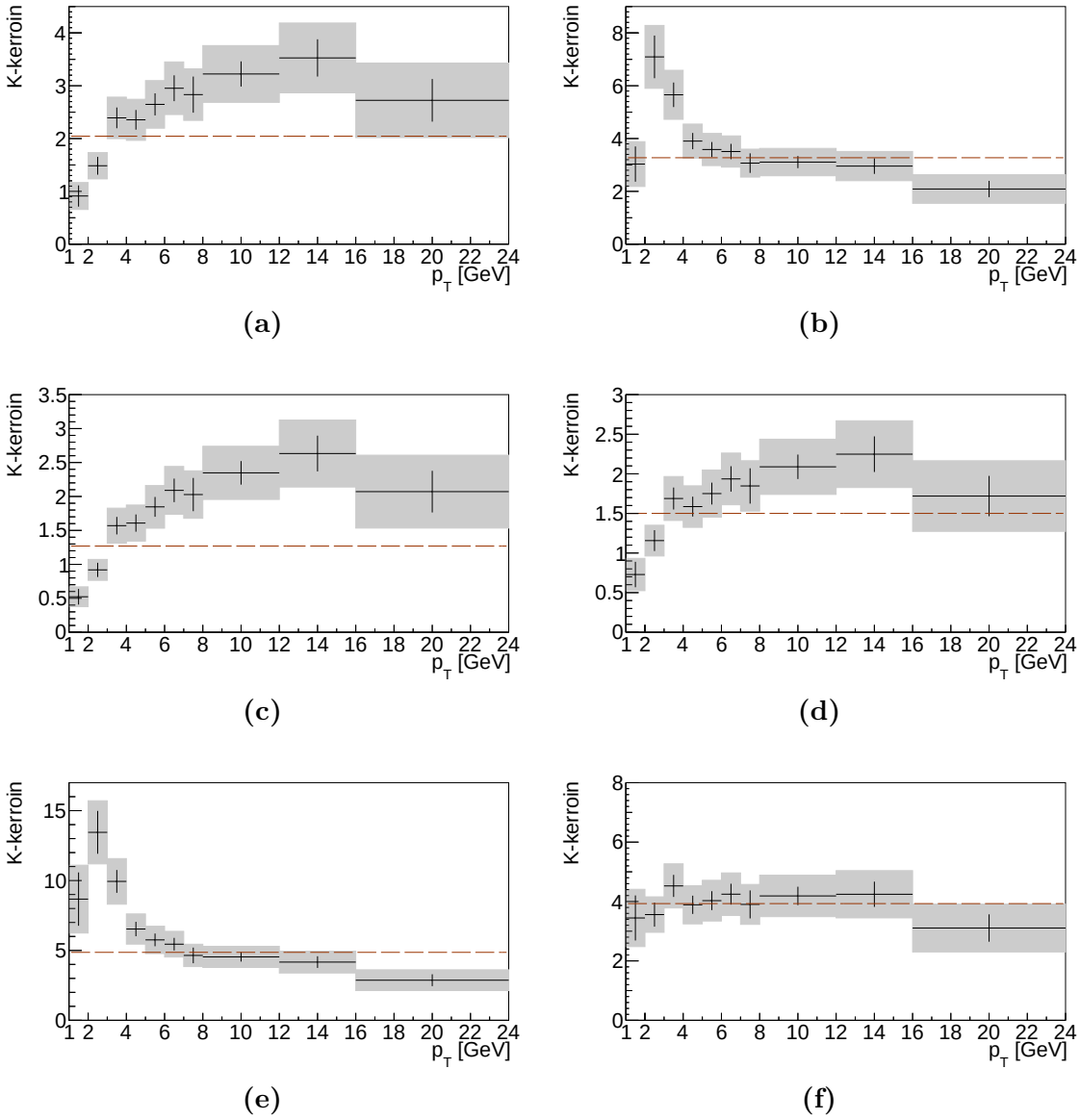
Kuva 46. p_T-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 7$ TeV, K-kertoimet oletusskaalavalinnalla (Q_r^{def},Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26. K-kerroinsovituksessa on otettu huomioon statistisen ja systemaattisen virheen lisäksi normalisaatiosta tuleva virhe 3,8 %.

nyt käsittelemme pseudorapiditeetin suhteen leikattua ja differentioituja vaikutusaloja, joihin suurin kontribuutio tulee alhaisilla poikittaisliikemäärän arvoilla, jolloin m_T-termit eivät vaimenna massan vaikutusta äärimmäisen paljon.)

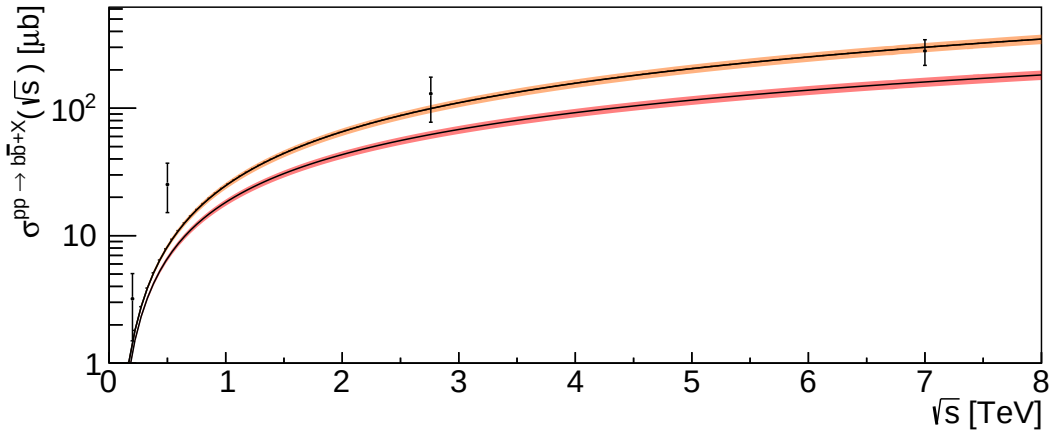
Häiriöteorian alimman kertaluvun leikatun vaikutusalan arvot energioilla 7 ja 13 TeV ovat 71,2 ja 133,4 µb. Mikäli olisin käyttänyt p_T-riippumattomatonta skaalaa $2m_b$ skaalan m_T sijasta, niin arvot olisivat olleet 75,9 ja 148,4 µb. Tämä on huomattavasti pienempi muutos kuin leikatun vaikutusalan $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\text{ GeV},\ 2.0<y<4.5}$ tapauksessa, jossa skaalatyypin vaihtaminen nosti kokeellisia tuloksia vastaavia teoreettisia arvoja 70 – 82 prosenttia. Tämä havainnollistaa sitä, että vahva kytkentävakio ja partonijakaumafunktiot stabiloituvat renormalisaatio- ja faktorisaatioskaalojen kasvaessa. Mahdollisesti vaikutusalan $\sigma^{pp\to H_b+X}_{2.0<\eta<5.0}$ lausekkeen integrandin (yhtälö (82)) suurin painoarvo on alueessa, jossa $m_T \approx 2m_b$.

η-differentioidut vaikutusalat käyttäytyvät hyvin samankaltaisesti (kuvat 56, 57, 60 ja 61). Suurin eroavaisuus näyttäisi olevan faktorisaatioskaalan vaikutuksen lievä kasvaminen suhteessa renormalisaatioskaalaan törmäysenergian kasvaessa (kuvat 57a ja 61a). Suuremmilla CMS-energioilla pitkittäisliikemääräosuuden $x_{1,2}$ miniarvo pienenee: $\frac{4m_T^2}{s} \leq x_{1,2}$ (yhtälö (89)). Liikemääräosuuden pienentyessä partonijakaumafunktioiden $xf_i(x,Q_f)$ arvot kasvavat (kuva 14) ja siten faktorisaatioskaala vaikuttaa enemmän η-differentioituun vaikutusalaan suuremmilla energioilla.

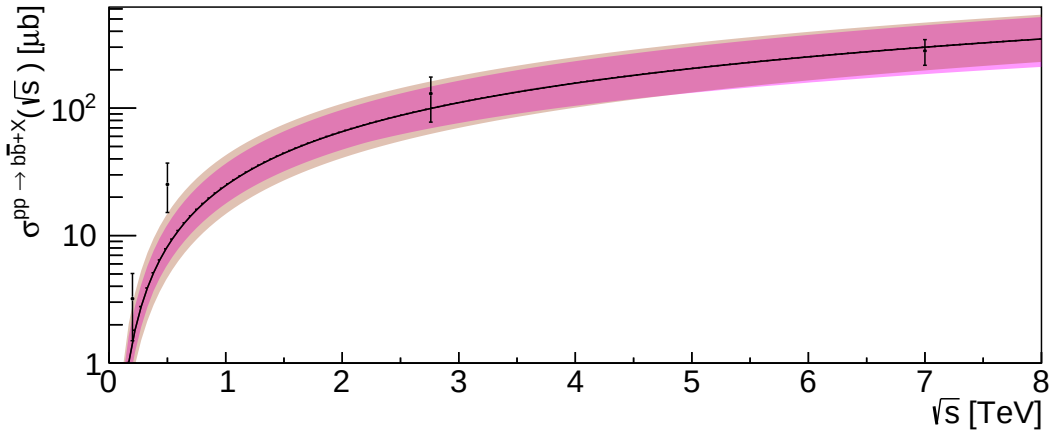
Kuvista 57c ja 61c nähdään, että $r(u\bar{u})$ ja $r(d\bar{d})$ kasvavat, kun pseudorapidi-



Kuva 47. p_T-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to D^{*+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 7$ TeV, K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26. Normalisaatiosta tuleva virhe on otettu huomioon K-kerroinsovituksissa.

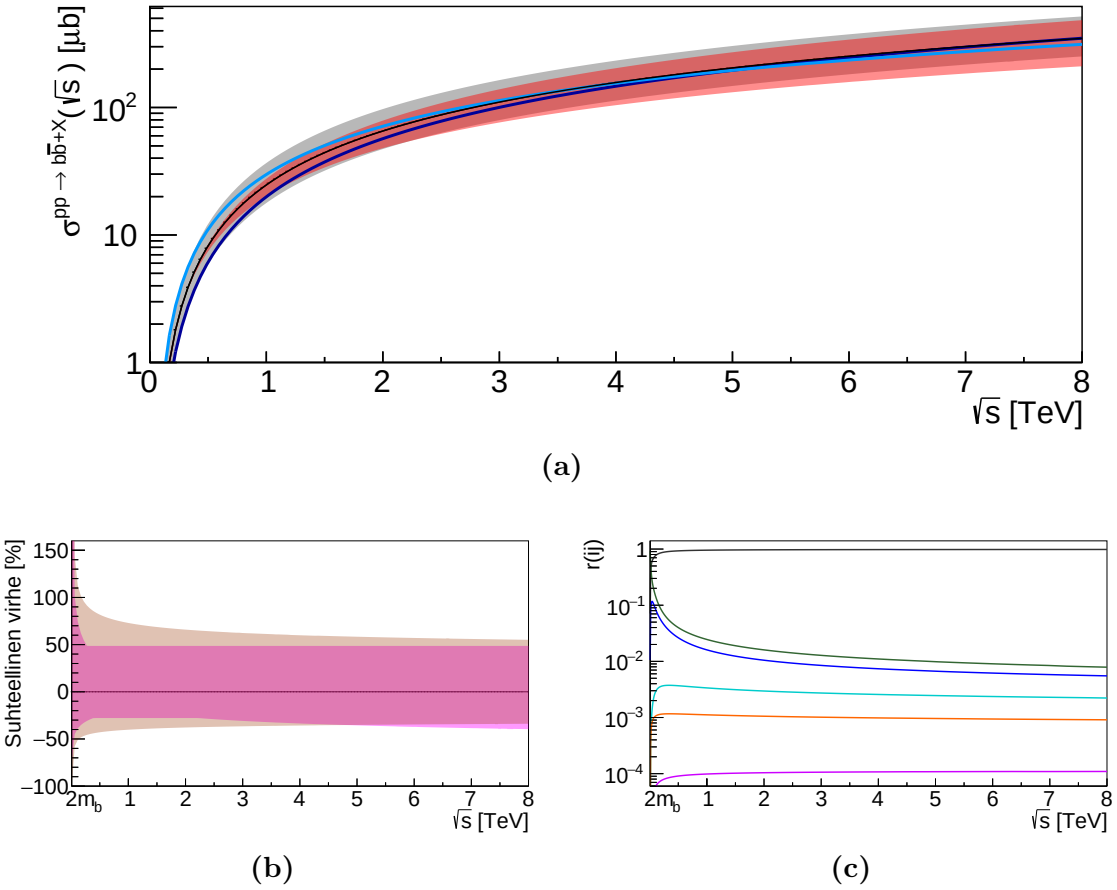


(a)

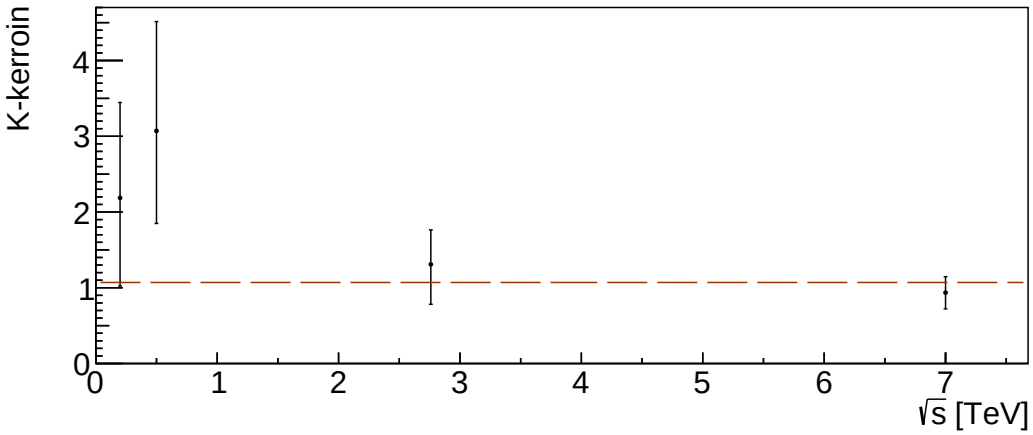


(b)

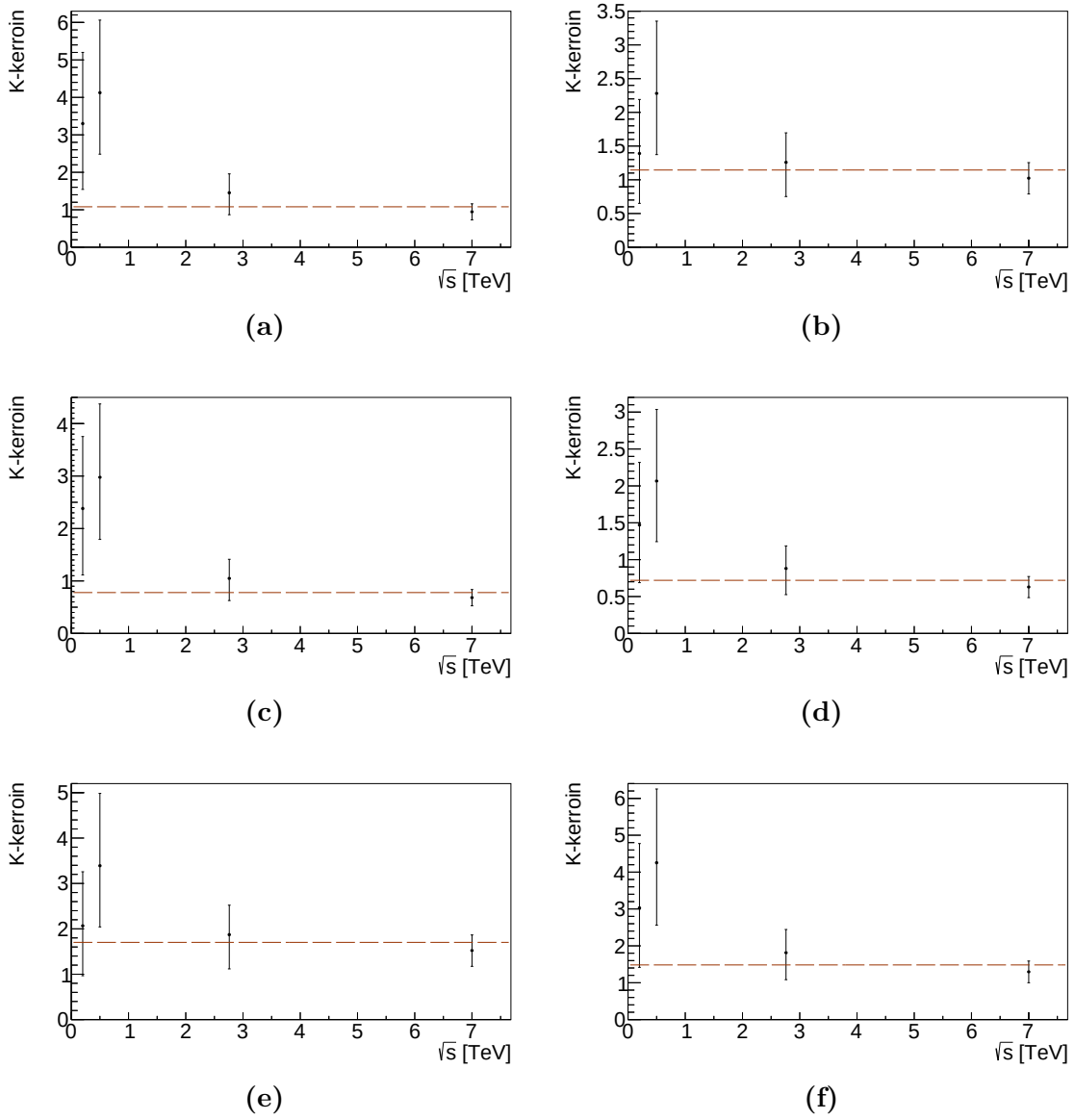
Kuva 48. Kokonaisvaikutusala $\sigma^{pp \to b\bar{b}+X}$. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 16. Kokeelliset vertailutulokset ovat lähteistä [5, 42–44, 97, 98]. K-kertoimella skaalattua vaikutusalaa ei ole esitetty kuvassa (b), koska oletusskaalavalintaa vastaava kokonais-K-kerroin on tässä tapauksessa noin yksi.



Kuva 49. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot kokonaisvaikutusalalle $\sigma^{pp\to b\bar{b}+X}$. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 17.



Kuva 50. Kokonaisvaikutusalan $\sigma^{pp\to b\bar{b}+X}$ K-kertoimet oletusskaalavalinnalla (Q_r^{def},Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 18.



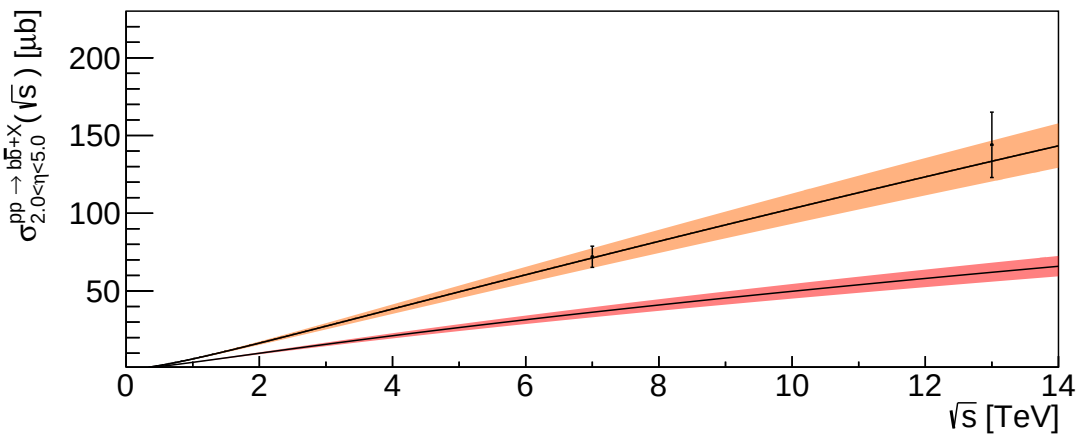
Kuva 51. Kokonaisvaikutusalan $\sigma^{pp\to b\bar{b}+X}$ K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 18.

teetti kasvaa. Tämäkin efekti seuraa partonijakaumafunktioiden käyttäytymisestä: Aikaisemmin näytettiin, että $x_1 = \frac{m_T}{\sqrt{s}}(e^{y_3} + e^{y_4})$ (ja $x_2 = \frac{m_T}{\sqrt{s}}(e^{-y_3} + e^{-y_4})$, yhtälö (81)). Raskaan kvarkin rapiditeetti kasvaa pseudorapiditeetin kasvaessa (yhtälöistä (21) ja (22) saadaan $y_3 = \text{arsinh}(\frac{p_T}{m_T}\sinh(\eta)))$. Täten (keskimääräinen) x_1 kasvaa samalla (ja x_2 vaihtelee muuttujien p_T ja y_4 vaihdellessa integroitaessa), ja gluonin ja valenssikvarkkien partonijakaumafunktioiden väliset erot kaventuvat (kuvat 14 ja 15).

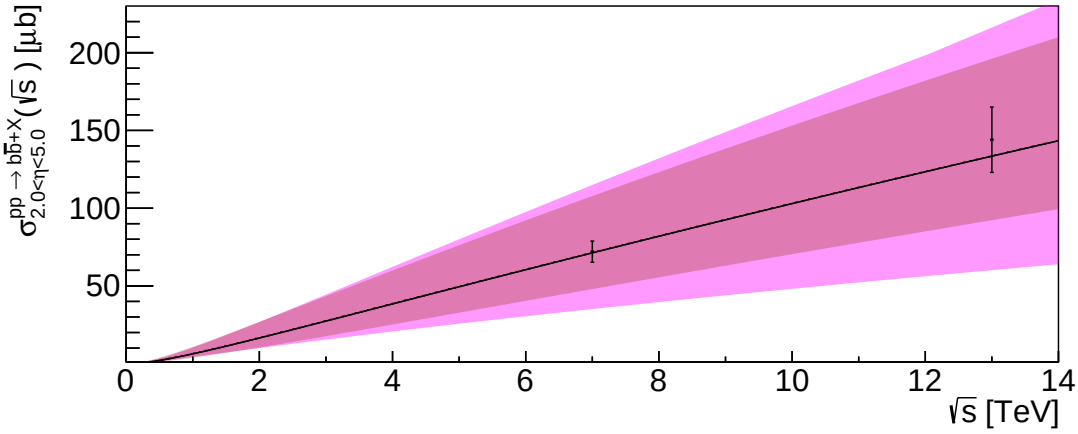
Vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to H_b+X}}{d\eta}$ K-kertoimet toistavat saman muodon kaikilla seitsemällä skaalavalinnalla CMS-energialla $\sqrt{s} = 7$ TeV (kuvat 58 ja 59). Myös kolmeatoista teraelektronivolttia vastaavan vaikutusalan K-kertoimien kuvaajat toistavat samaa muotoa, joka on hieman erilainen kuin seitsemällä teraelektronivoltilla (kuvat 62 ja 63). Tämä K-kertoimien käyttäytyminen ei johdu LO-vaikutusalan ominaisuuksista itsessään: sama tapahtuu myös teoreettisen FONLL-tuloksen (*fixed order + next-to-leading log*) kanssa, johon kokeellisia tuloksia on alun perin verrattu [7, 99, 100].

Leikatun ja differentioitujen vaikutusalojen kokonais-K-kertoimet ovat esitettynä taulukoissa 9 ja 10. Taulukoista nähdään, että näiden kolmen tapauksen K-kertoimet vastaavat erittäin hyvin toisiaan. Kuten kokonaisvaikutusalan $\sigma^{pp\to b\bar{b}+X}$ tapauksessa, leikatun ja differentioitujen vaikutusalojen K-kertoimet ovat hyvin pienet ja oletusskaalavalinnalla $K \approx 1$. Itse asiassa laskemani η-differentioidut LO-vaikutusalat ovat arvoiltaan jopa suurempia kuin vastaavat FONLL-vaikutusalat [7, 99].

Miksi b-kvarkkiparien vaikutusalojen K-kertoimet ovat näin pienet? Molempia c- ja t-kvarkkeja vastaavat kokonais-K-kertoimet ovat selvästi (keskimäärin) suurempia. Lopulta ainoa parametri, joka toistuu jokaisessa vaikutusalalausekkeessa ja joka on eri c-, b- ja t-tapauksille, on raskaan kvarkin massa. Koska $m_c < m_b < m_t$, niin olisin olettanut, että b-kvarkkiparien vaikutusalojen K-kertoimet ovat c- ja t-kvarkkiparien K-kertoimien välissä, jos näiden arvoissa olisi havaittu eroja. Toisaalta, b-kvarkkiparien (oletusskaalavalintoja vastaavat) vaikutusalat ovat reilu 30 prosenttia pienemmät, kun käytetään napamassaa 4,78 GeV (kuvat 49b, 53b, 57b ja 61b). Tällöin vastaavat K-kertoimet kasvavat arviolta noin 43 prosenttia. Kuitenkin, b-kvarkkiparien vaikutusalojen oletusskaalavalintoja vastaavat K-kertoimet olisivat silti pienemmät kuin suurimmalla osalla muista vaikutusaloista (poikkeuksina $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}$, $\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV, ja $\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{d|y|}$, $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV). On myös mahdollista, että korkeamman kertaluvun korjaukset ovat hyvin pieniä, elleivät jopa negatiivisia. Tämä



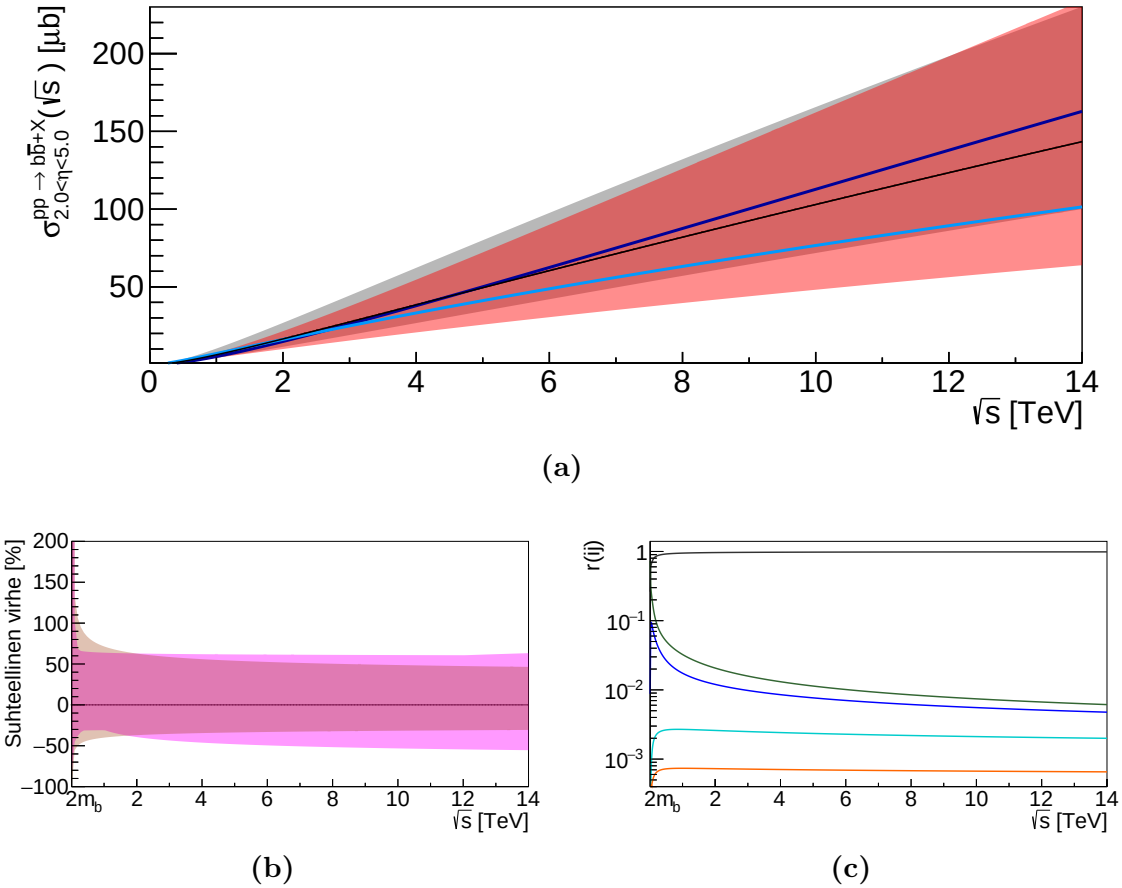
(a)



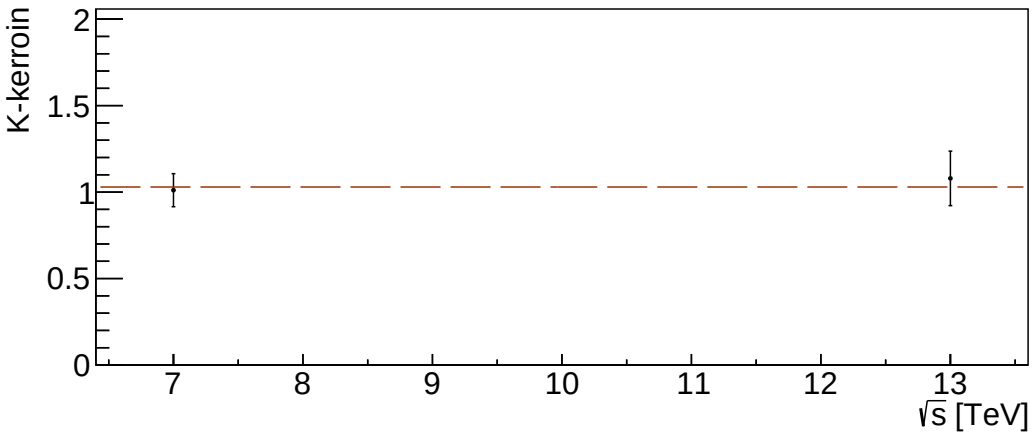
(b)

Kuva 52. Leikattu vaikutusala $\sigma^{pp\to H_b+X}_{2.0<\eta<5.0}$. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 16. Kokeelliset vertailutulokset ovat lähteistä [7, 99, 100]. K-kertoimella skaalattua vaikutusalaa ei ole esitetty kuvassa (b), koska oletusskaalavalintaa vastaava kokonais-K-kerroin on tässä tapauksessa noin yksi.

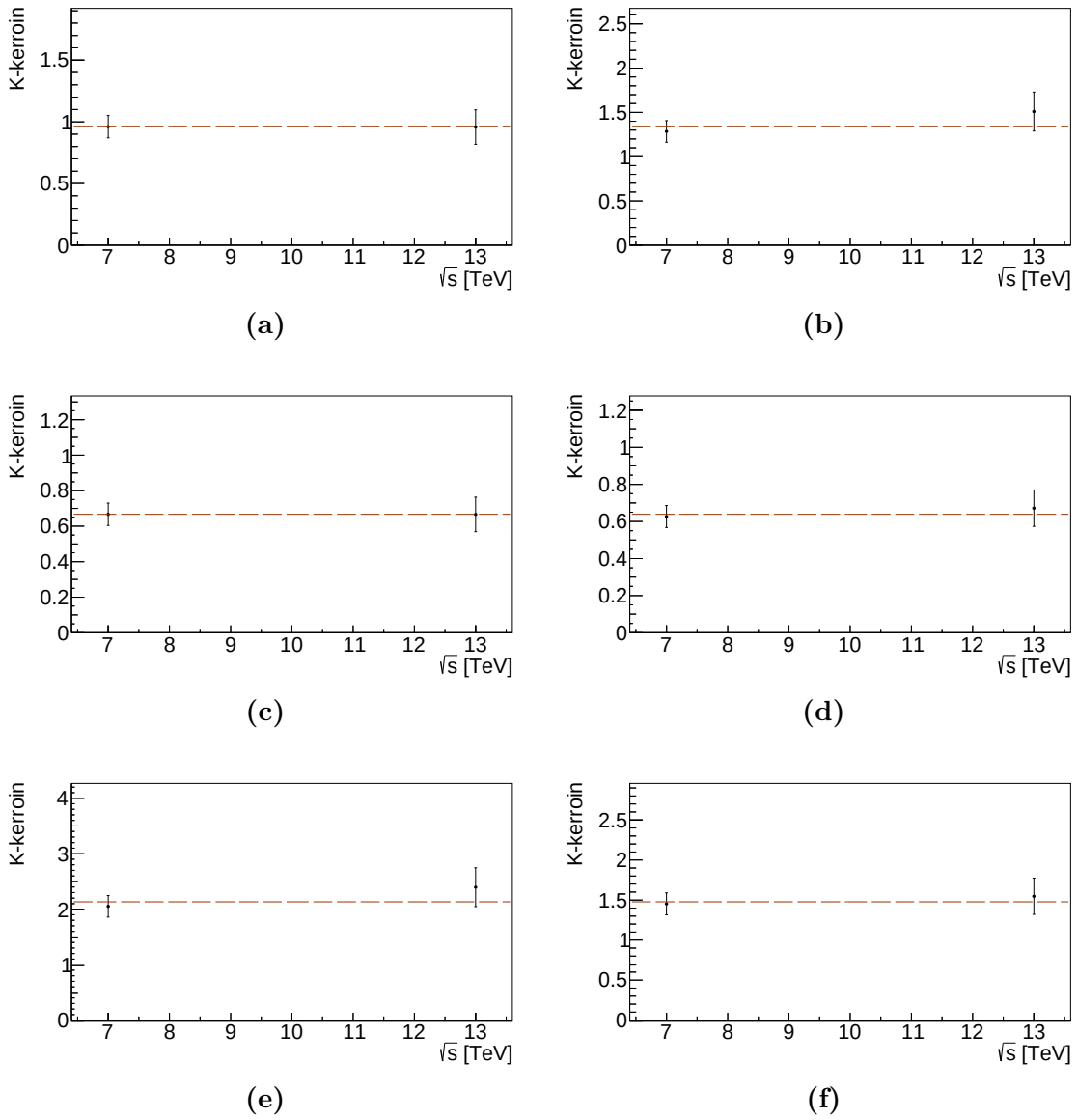
selittäisi, miksi vaikutusalojen $\frac{d\sigma^{pp\to H_b+X}}{d\eta}$ FONLL-tuloksien arvot ovat pienempiä kuin LO-tuloksien.



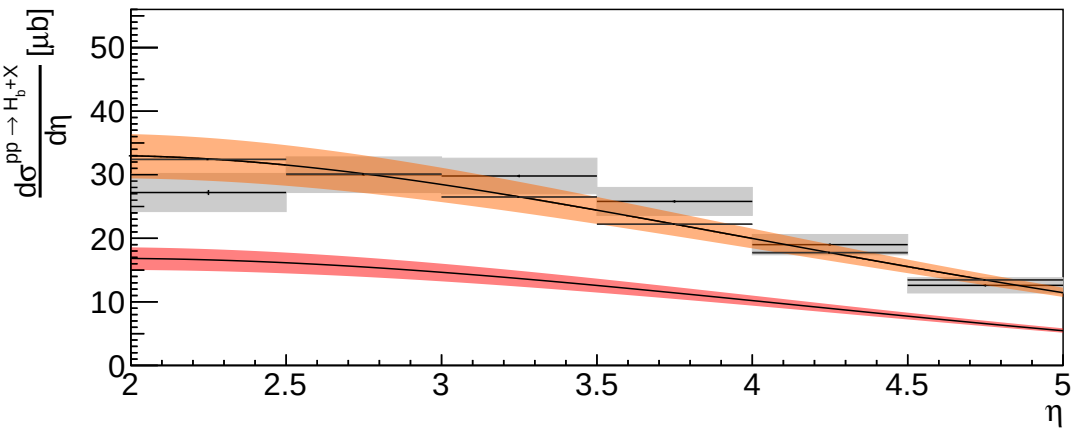
Kuva 53. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot leikatulle vaikutusalalle $\sigma^{pp\to H_b+X}_{2.0<\eta<5.0}$. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 17.



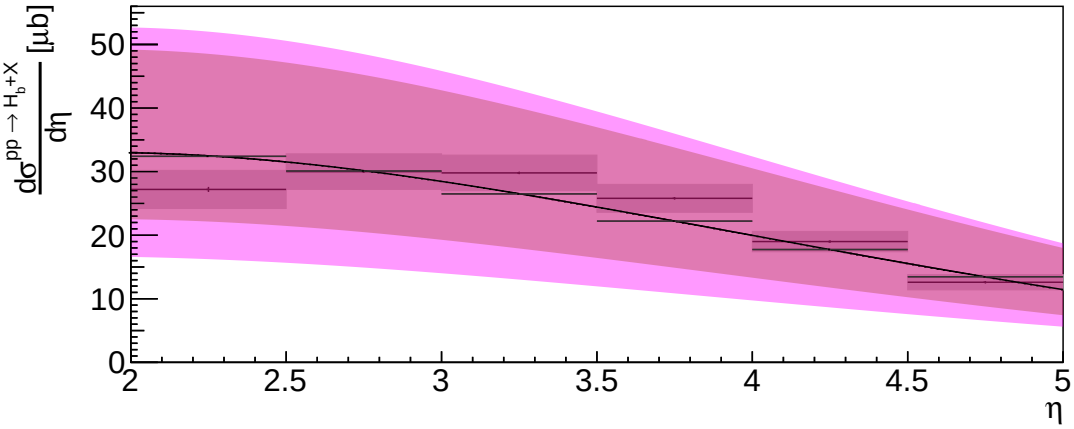
Kuva 54. Leikatun vaikutusalan $\sigma^{pp\to H_b+X}_{2.0<\eta<5.0}$ K-kertoimet oletusskaalavalinnalla ($Q_r^{\rm def}$,$Q_f^{\rm def}$). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 18.



Kuva 55. Leikatun vaikutusalan $\sigma^{pp\to H_b+X}_{2.0<\eta<5.0}$ K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 18.



(a)

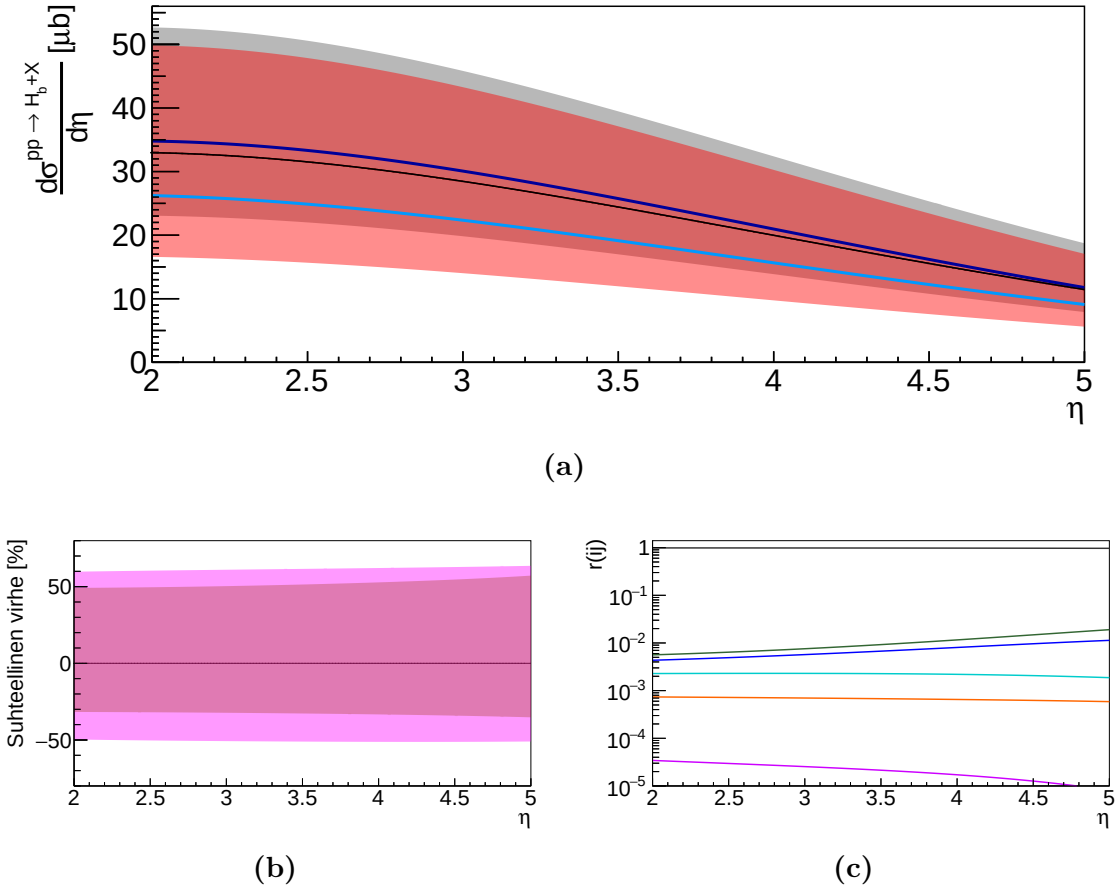


(b)

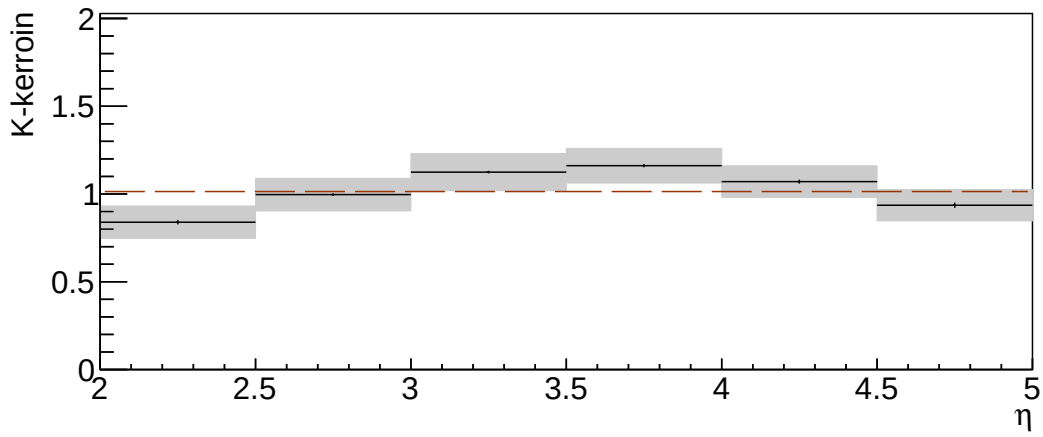
Kuva 56. η-differentioitu vaikutusala $\frac{d\sigma^{pp\to H_b+X}}{d\eta}$, CMS-energialla $\sqrt{s} = 7$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 24. Kokeelliset vertailutulokset ovat lähteistä [7, 100]. K-kertoimella skaalattua vaikutusalaa ei ole esitetty kuvassa (b), koska oletusskaalavalintaa vastaava kokonais-K-kerroin on tässä tapauksessa noin yksi.

Taulukko 9. Vaikutusalojen $\sigma^{pp\to b\bar{b}+X}$ ja $\sigma^{pp\to H_b+X}_{2.0<\eta<5.0}$ kokonais-K-kertoimet eri skaalavalinnoilla (kuvat 50, 51, 54 ja 55).

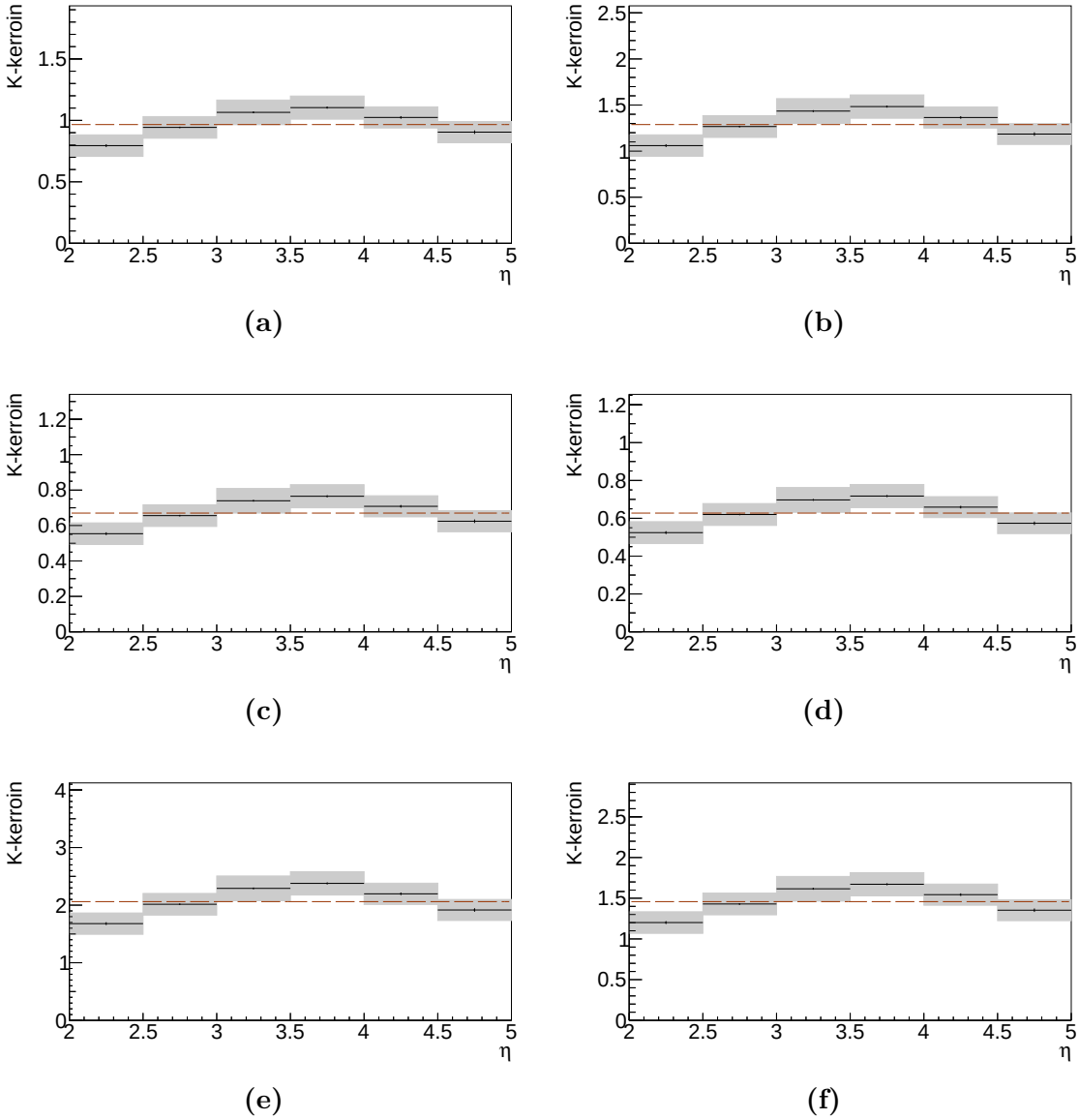
(Q_r,Q_f)	$K(\sigma^{pp\to b\bar{b}+X})$	$K(\sigma^{pp\to H_b+X}_{2.0<\eta<5.0})$
$(Q_r^{\text{def}},Q_f^{\text{def}})$	$1{,}1 \pm 0{,}2$	$1{,}03 \pm 0{,}09$
$(Q_r^{\text{max}},Q_f^{\text{max}})$	$1{,}1 \pm 0{,}2$	$0{,}96 \pm 0{,}08$
$(Q_r^{\text{min}},Q_f^{\text{min}})$	$1{,}1 \pm 0{,}2$	$1{,}34 \pm 0{,}11$
$(Q_r^{\text{def}},Q_f^{\text{max}})$	$0{,}78 \pm 0{,}15$	$0{,}67 \pm 0{,}06$
$(Q_r^{\text{min}},Q_f^{\text{def}})$	$0{,}72 \pm 0{,}13$	$0{,}64 \pm 0{,}06$
$(Q_r^{\text{def}},Q_f^{\text{min}})$	$1{,}7 \pm 0{,}3$	$2{,}1 \pm 0{,}2$
$(Q_r^{\text{max}},Q_f^{\text{def}})$	$1{,}5 \pm 0{,}3$	$1{,}48 \pm 0{,}12$



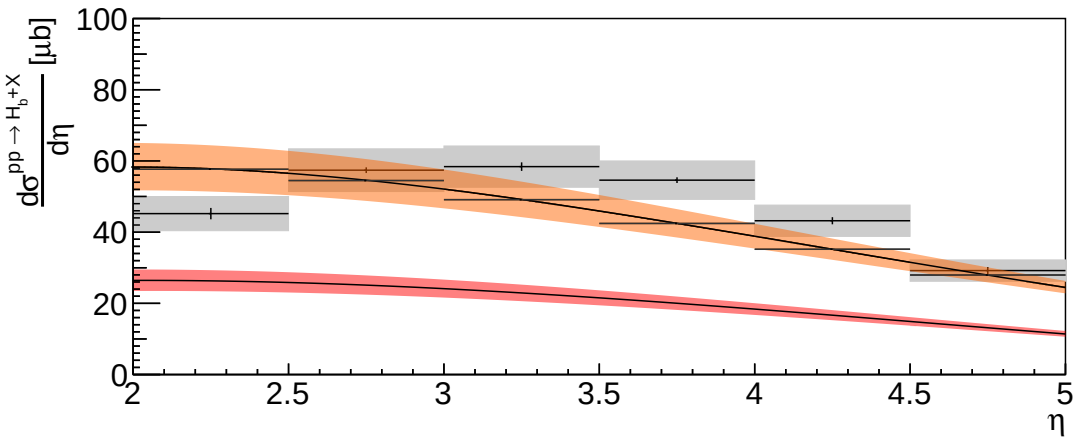
Kuva 57. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot η-differentioidulle vaikutusalalle $\frac{d\sigma^{pp\to H_b+X}}{d\eta}$, $\sqrt{s} = 7$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 25.



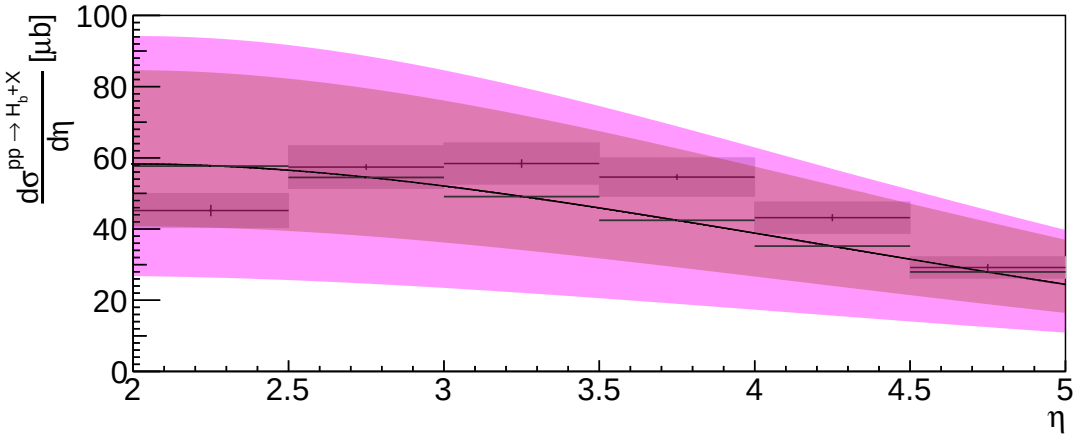
Kuva 58. η-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to H_b+X}}{d\eta}$, $\sqrt{s} = 7$ TeV, K-kertoimet oletusskaalavalinnalla (Q_r^{def},Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26.



Kuva 59. η-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to H_b+X}}{d\eta}$, $\sqrt{s} = 7$ TeV, K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26.



(a)

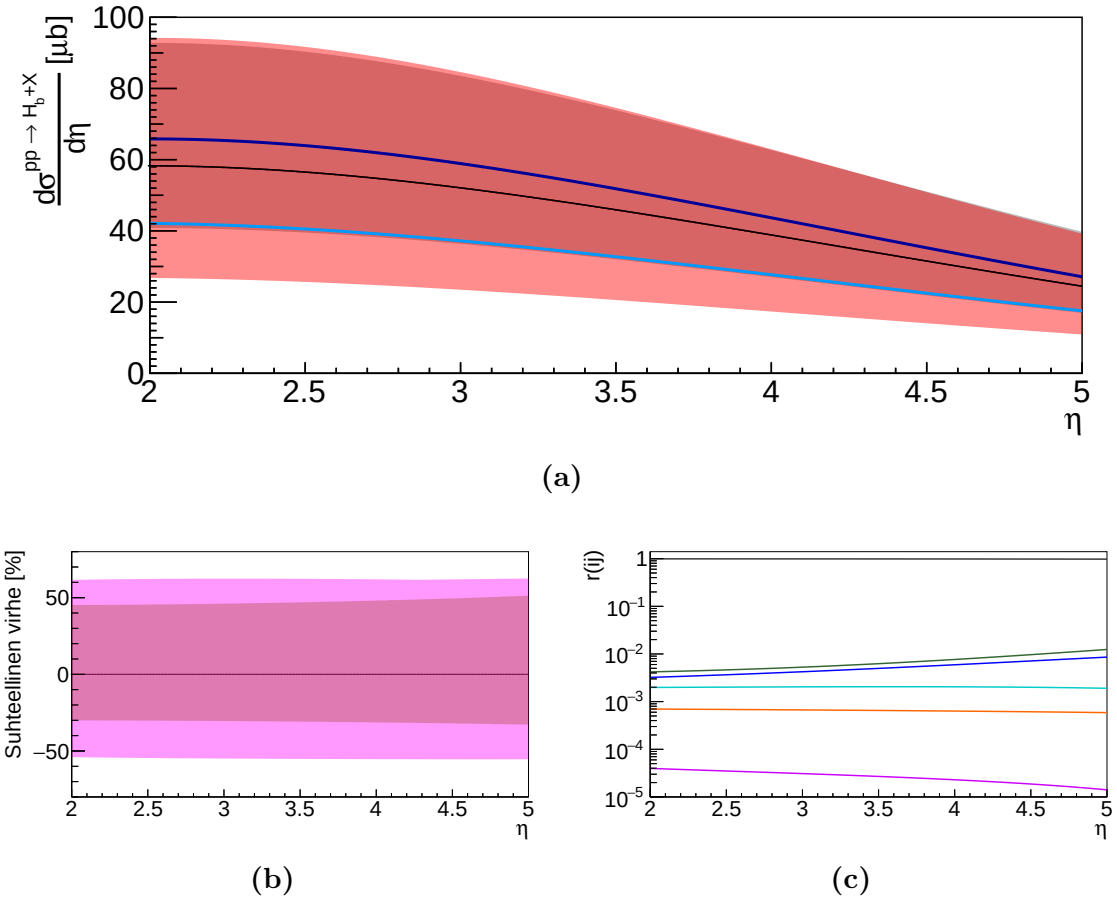


(b)

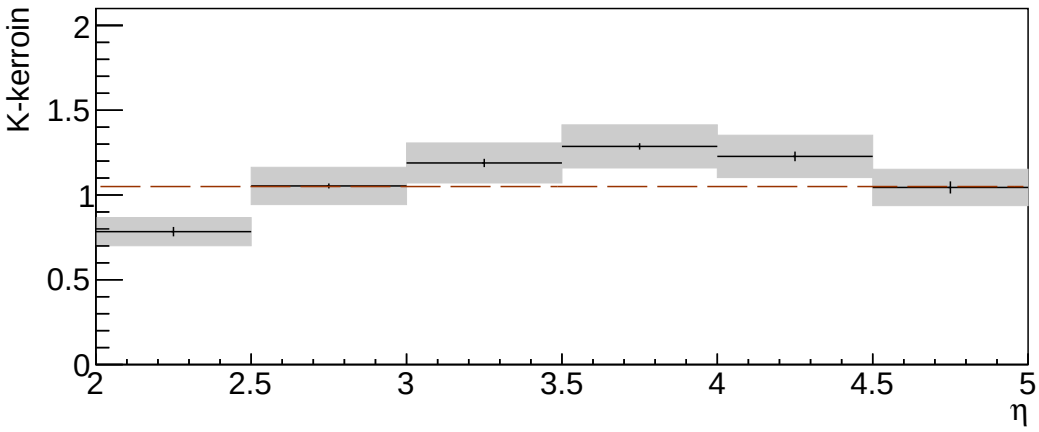
Kuva 60. η-differentioitu vaikutusala $\frac{d\sigma^{pp\to H_b+X}}{d\eta}$, CMS-energialla $\sqrt{s} = 13$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 24. Kokeelliset vertailutulokset ovat lähteistä [7, 99, 100]. K-kertoimella skaalattua vaikutusalaa ei ole esitetty kuvassa (b), koska oletusskaalavalintaa vastaava kokonais-K-kerroin on tässä tapauksessa noin yksi.

Taulukko 10. Vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to H_b+X}}{d\eta}$ kokonais-K-kertoimet eri skaalavalinnoilla CMS-energioilla $\sqrt{s} = 7$ TeV ja 13 TeV (kuvat 58, 59, 62 ja 63).

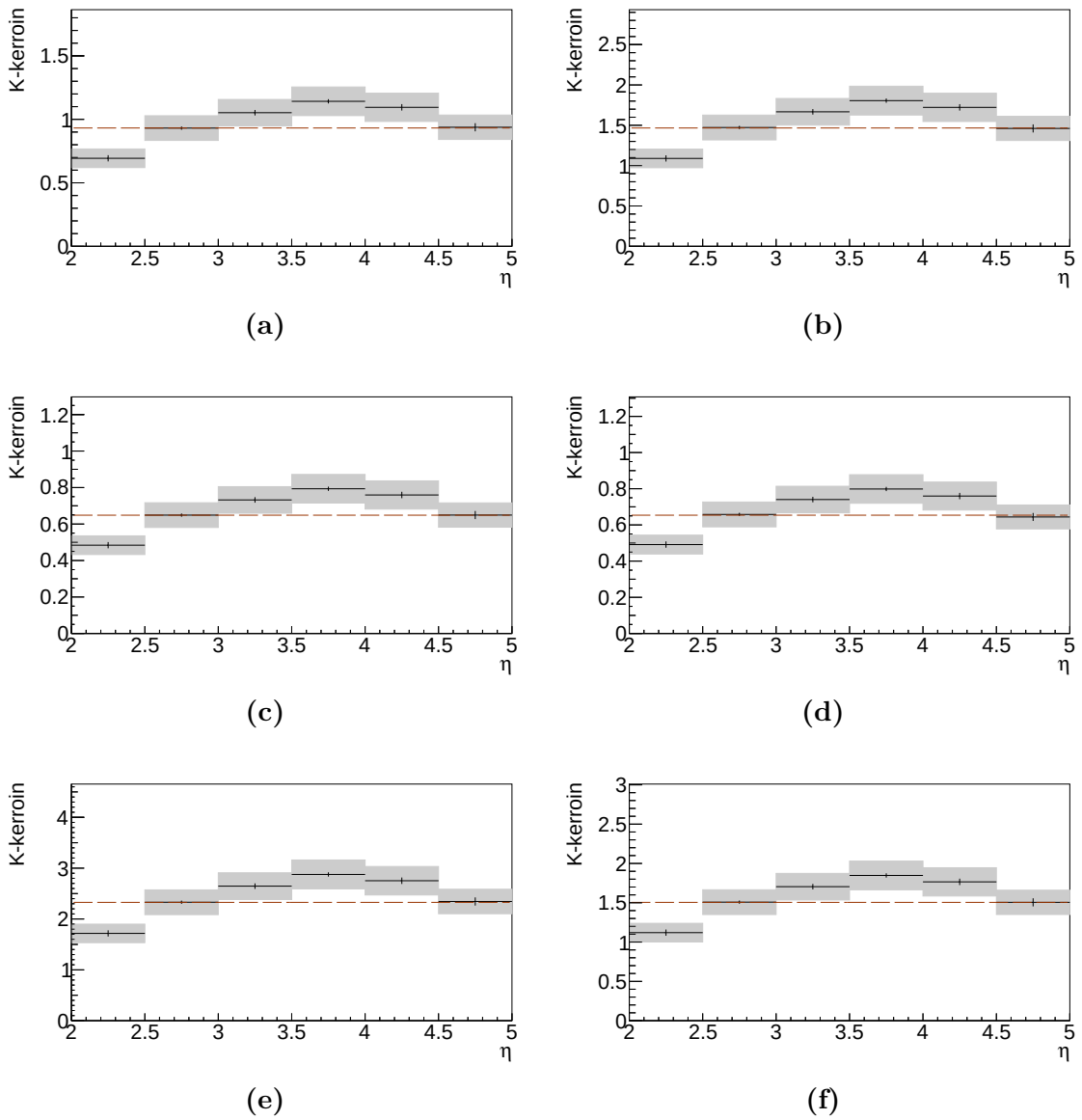
(Q_r,Q_f)	$\sqrt{s} = 7$ TeV	$\sqrt{s} = 13$ TeV
$(Q_r^{\text{def}},Q_f^{\text{def}})$	$1{,}01 \pm 0{,}04$	$1{,}05 \pm 0{,}05$
$(Q_r^{\text{max}},Q_f^{\text{max}})$	$0{,}97 \pm 0{,}04$	$0{,}93 \pm 0{,}05$
$(Q_r^{\text{min}},Q_f^{\text{min}})$	$1{,}29 \pm 0{,}05$	$1{,}47 \pm 0{,}07$
$(Q_r^{\text{def}},Q_f^{\text{max}})$	$0{,}67 \pm 0{,}03$	$0{,}65 \pm 0{,}03$
$(Q_r^{\text{min}},Q_f^{\text{def}})$	$0{,}63 \pm 0{,}03$	$0{,}65 \pm 0{,}03$
$(Q_r^{\text{def}},Q_f^{\text{min}})$	$2{,}06 \pm 0{,}08$	$2{,}33 \pm 0{,}11$
$(Q_r^{\text{max}},Q_f^{\text{def}})$	$1{,}46 \pm 0{,}06$	$1{,}50 \pm 0{,}07$



Kuva 61. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot η-differentioidulle vaikutusalalle $\frac{d\sigma^{pp\to H_b+X}}{d\eta}$, $\sqrt{s} = 13$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 25.



Kuva 62. η-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to H_b+X}}{d\eta}$, $\sqrt{s} = 13$ TeV, K-kertoimet oletusskaalavalinnalla (Q_r^{def},Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26.



Kuva 63. η-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to H_b+X}}{d\eta}$, $\sqrt{s} = 13$ TeV, K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26.

5.4 t-kvarkkiparien tuotto

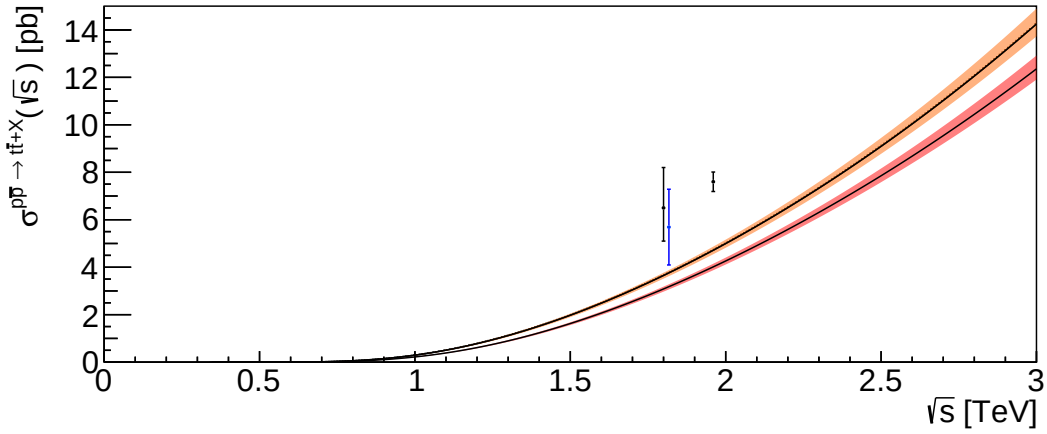
Tutkin alimman kertaluvun $t\bar{t}$-tuottoa protoni–protoni-törmäysten lisäksi protoni–antiprotoni-törmäyksissä. Käsittelemäni vaikutusalat olivat kokonaisvaikutusalat $\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}(\sqrt{s})$ ja $\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}(\sqrt{s})$, differentioidut vaikutusalat $\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{dp_T}(p_T)$ ja $\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{d|y|}(|y|)$, CMS-energialla $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV, sekä $\frac{d\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}}{dp_T^t}(p_T^t)$ ja $\frac{d\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}}{dy_t}(y_t)$, CMS-energialla $\sqrt{s} = 13$ TeV.

Protoni–antiprotoni-törmäysten t-kvarkkiparien tuoton kokonaisvaikutusala ja sen analyysikuvat ovat esitettynä kuvissa 64 ja 65. Seitsemää eri skaalavalintaa vastaavat K-kertoimet ovat kuvissa 66 ja 67.

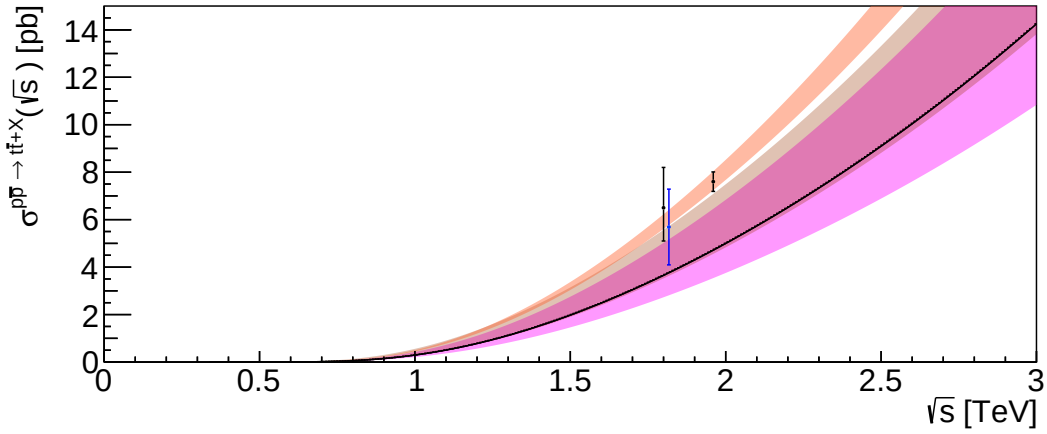
Kokeelliset vertailutulokset on mitattu CMS-energioilla $\sqrt{s} = 1{,}8$ TeV (CDF-kollaboraatio) [101–103] ja 1,96 TeV (CDF ja DØ) [104]. Molemmissa tapauksissa hyödynnettiin täysin hadronisia, dileptonisia ja leptoni + jetit-kanavia (luku 2.1). Olen lisäksi esittänyt vaihtoehtoisen kokeellisen vertailutuloksen energialla $\sqrt{s} = 1{,}8$ TeV (DØ, kuva 64) [105], koska se täyttää myös hyvin luvussa 5.2 luettelemani kriteerit kokeellisten vertailutulosten valitsemiselle ja koska se poikkeaa ensisijaisesta vertailutuloksesta. Tulos määritettiin hyödyntämällä hajoamisia $t \to W^+b$, missä $W^+ \to e^+\nu_e$, $\mu^+\nu_\mu$, $\tau^+\nu_\tau$, $u\bar{d}$, $u\bar{s}$, $u\bar{b}$, $c\bar{d}$, $c\bar{s}$ tai $c\bar{b}$, sekä vastaavia antihiukkasten hajoamisprosesseja. Vaihtoehtoista vertailutulosta ei ole otettu huomioon K-kertoimien määrityksessä.

Arvioitu partonijakaumafunktioiden epävarmuuden aiheuttama virhe on jälleen mitätön. Massa ja skaalavalinta vaikuttavat vaikutusalan arvoon selvästi eniten, mutta kuitenkin vähemmän kuin c- ja b-kvarkkien tapauksissa (kuva 65b). Massaa vastaavan alavirheen pienuus johtuu siitä, että oletus- ja maksimimassan välinen ero on nyt hyvin pieni ($m_t^{\text{def}} = 172{,}9$ GeV, $m_t^{\text{min}} = 160$ GeV ja $m_t^{\text{max}} = 174{,}0$ GeV).

Alimman kertaluvun t-kvarkkiparien tuotto protoni–antiprotoni-törmäyksissä, sekä protoni–protoni-törmäyksissä, painottuu alueeseen $x \gtrapprox 10^{-1}$. Kuvasta 65a (69a, 74a, 78a, 82a, 86a) huomataan, että nyt vaikutusala laskee faktorisaatioskaalan noustessa. Vastaava hallitsevien partonijakaumafunktioiden (g, u ja d, pp-törmäyksissä myös $\overline{u}$ ja $\overline{d}$) käytös on nähtävissä kuvasta 15e (15f), joka vastaa pitkittäisliikemääräosuuden arvoa $x = 10^{-1}$. Kuvista 12c, 12e ja 13 nähdään myös, että t-kvarkkiparituoton vaikutusaloja vastaavilla skaaloilla (taulukko 2) u-kvarkin partonijakaumafunktio saa selvästi suurempia arvoja kuin gluonin partonijakaumafunktio, kun $x \gtrapprox 10^{-1}$. Tämä selittää, miksi $u + \overline{u}$-reaktiot hallitsevat protoni–antiprotoni-



(a)



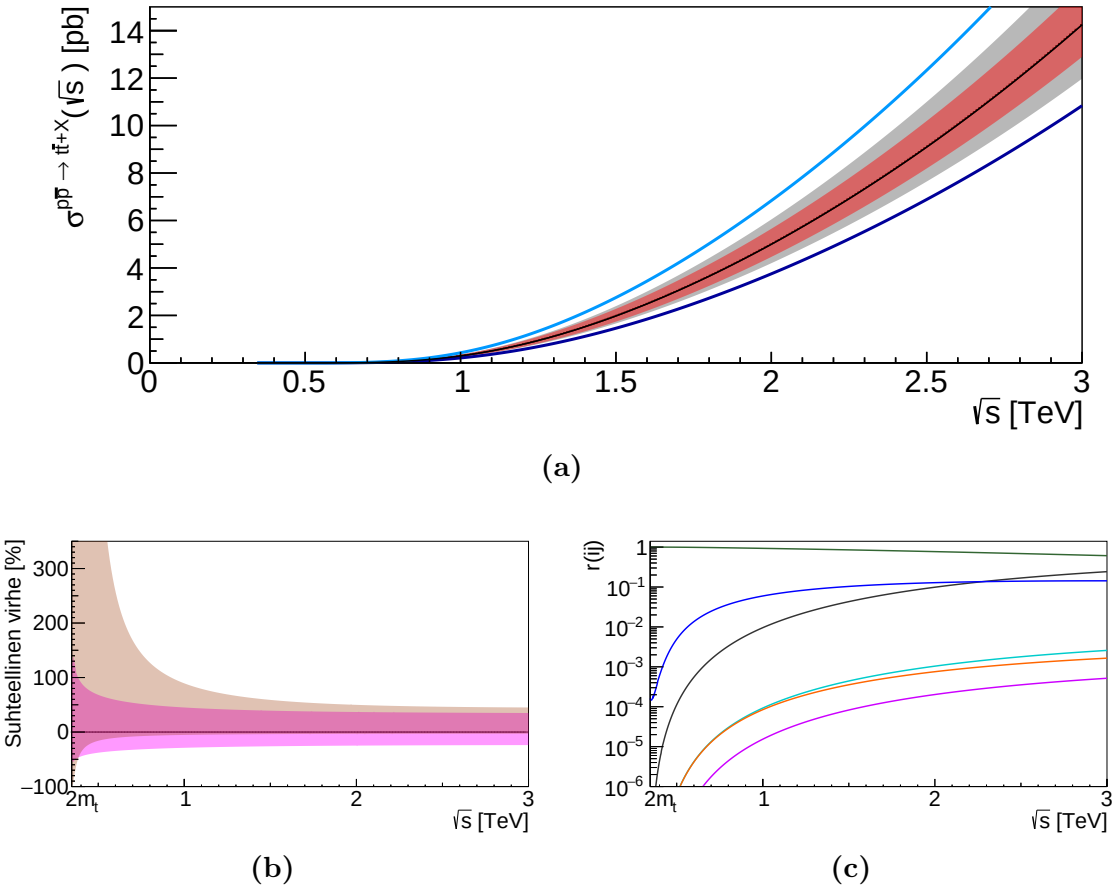
(b)

Kuva 64. Kokonaisvaikutusala $\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}$. Kokeellisten tulosten [101–104] oikeanpuoleiset siniset pisteet ovat vaihtoehtoiset vertailutulokset [105]. Kuvaajien merkitykset ovat muuten samat kuin kuvassa 16.

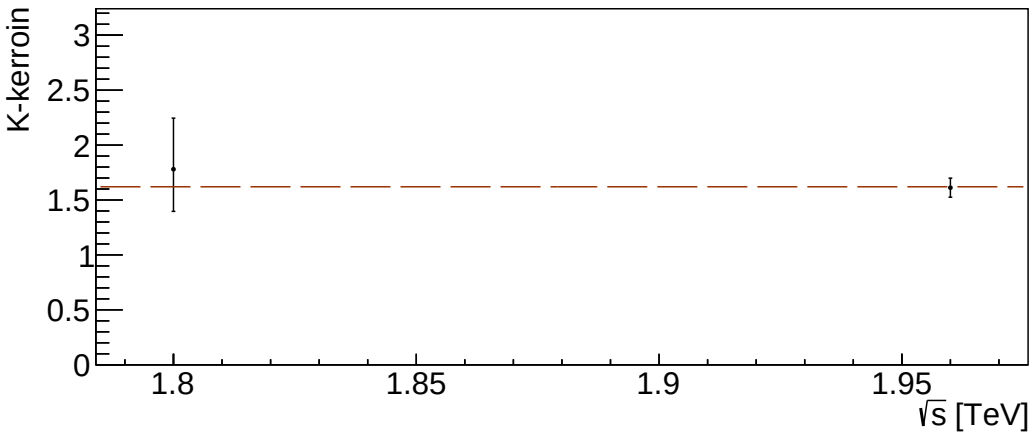
törmäyksissä (kuva 65c).

Vaikutusalan $\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}$ K-kertoimet ovat hyvin stabiilit. Sama muoto toistuu skaalavalinnasta riippumatta.

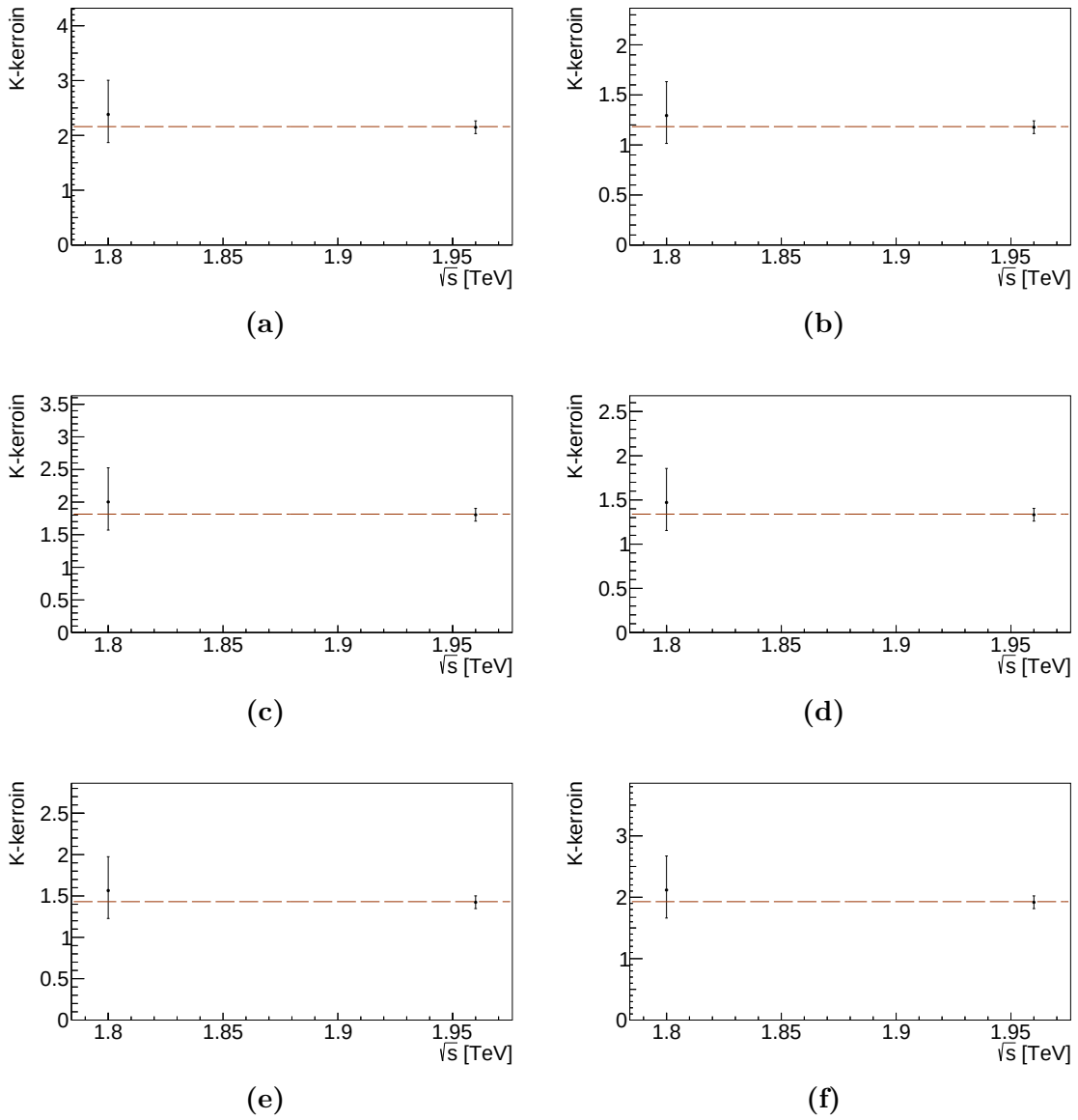
Prosessin $p+p \to t+\bar{t}+X$ kokonaisvaikutusala ja vastaavat analyysikuvat ovat esitettynä kuvissa 68 ja 69. K-kertoimet ovat kuvissa 70 ja 71. Olen lisäksi esittänyt vaikutusalat $\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}$ ja $\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}$ samassa kuvassa 72 protonin ja antiprotonin erilaisen valenssikvarkkirakenteen vaikutuksen havainnollistamiseksi. Mainittakoon myös, että vaikutusaloilla $\sigma^{p\bar{p}\to c\bar{c}+X}$ ja $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}$, ja vaikutusaloilla $\sigma^{p\bar{p}\to b\bar{b}+X}$ ja $\sigma^{pp\to b\bar{b}+X}$, ei ollut kuvaajista havaittavia eroavaisuuksia.



Kuva 65. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot kokonaisvaikutusalalle $\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}$. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 17.



Kuva 66. Kokonaisvaikutusalan $\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}$ K-kertoimet oletusskaalavalinnalla (Q_r^{def},Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 18.



Kuva 67. Kokonaisvaikutusalan $\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}$ K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 18.

Taulukko 11. Vaikutusalojen $\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}$ ja $\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}$ kokonais-K-kertoimet eri skaalavalinnoilla (kuvat 66, 67, 70 ja 71).

(Q_r,Q_f)	$K(\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X})$	$K(\sigma^{pp\to t\bar{t}+X})$
$(Q_r^{\rm def},Q_f^{\rm def})$	$1{,}62 \pm 0{,}09$	$1{,}91 \pm 0{,}05$
$(Q_r^{\rm max},Q_f^{\rm max})$	$2{,}16 \pm 0{,}12$	$2{,}46 \pm 0{,}06$
$(Q_r^{\rm min},Q_f^{\rm min})$	$1{,}18 \pm 0{,}07$	$1{,}46 \pm 0{,}04$
$(Q_r^{\rm def},Q_f^{\rm max})$	$1{,}82 \pm 0{,}10$	$2{,}06 \pm 0{,}05$
$(Q_r^{\rm min},Q_f^{\rm def})$	$1{,}34 \pm 0{,}08$	$1{,}58 \pm 0{,}04$
$(Q_r^{\rm def},Q_f^{\rm min})$	$1{,}43 \pm 0{,}08$	$1{,}76 \pm 0{,}05$
$(Q_r^{\rm max},Q_f^{\rm def})$	$1{,}93 \pm 0{,}11$	$2{,}27 \pm 0{,}06$

Käyttämäni kokeelliset tulokset on määritetty törmäysenergioilla $\sqrt{s} = 5{,}02$ TeV (CMS, $e^{\pm}/\mu^{\pm}$ + jetit- ja dileptoniset $\mu^+\mu^-$- ja $e^{\pm}\mu^{\mp}$-kanavat) [4], 7 TeV (ATLAS ja CMS, kaikki kolme hajoamiskanavatyyppiä) [49], 8 TeV (ATLAS ja CMS, dileptoniset lopputilat $e^{\pm}\mu^{\mp}$) [8] ja 13 TeV (CMS, dileptoniset lopputilat e^+e^-, $\mu^+\mu^-$ ja $e^{\pm}\mu^{\mp}$) [106]. Olen lisäksi esittänyt vaihtoehtoiset kokeelliset tulokset energioilla $\sqrt{s} = 7$ TeV (CMS, dileptoniset lopputilat e^+e^-, $\mu^+\mu^-$ ja $e^{\pm}\mu^{\mp}$) [107] ja 13 TeV (CMS, $e^{\pm}/\mu^{\pm}$ + jetit-lopputilat) [108].

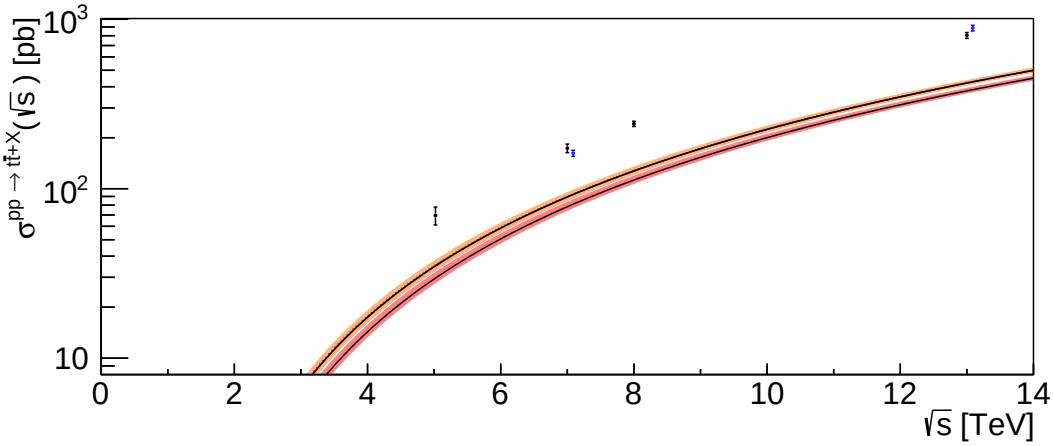
Kokonaisvaikutusalan $\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}$ kuvaajista ja analyysikuvista nähdään, että se käyttäytyy hyvin samankaltaisesti kuin kokonaisvaikutusala $\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}$. Kuitenkin nyt vaikutusala saa pienempiä arvoja ja gluoni-gluoni-reaktiot alkavat hallitsemaan alhaisemmalla törmäysenergialla (kuva 69c). Nämä eroavaisuudet tulevat siitä, että protonin partonijakaumafunktioille $f_{u/p}(x,Q_f) > f_{\bar{u}/p}(x,Q_f)$ ja $f_{d/p}(x,Q_f) > f_{\bar{d}/p}(x,Q_f)$ (kuvat 10, 11, 12 ja 13).

K-kertoimet vastaavat sovitusarvoja erittäin hyvin. Tämä on nähtävissä myös K-kerroinskaalatusta vaikutusalasta kuvassa 68b.

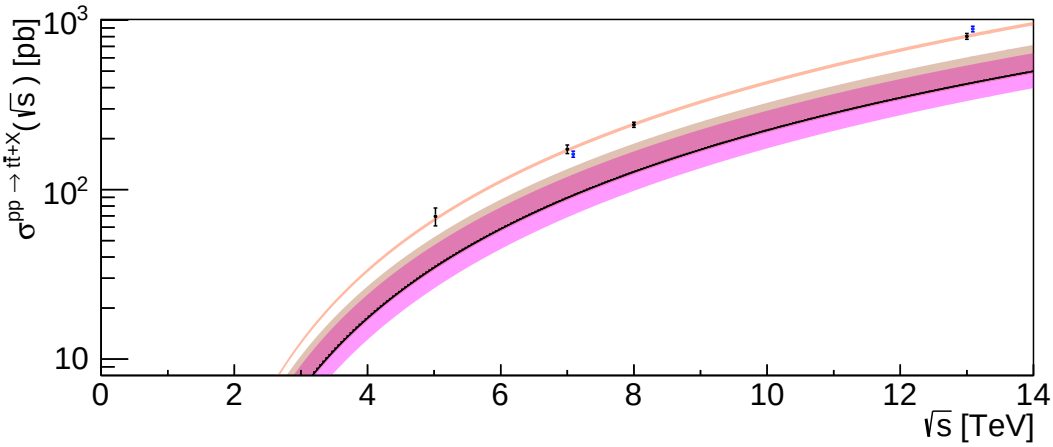
DØ-kollaboraatio on määrittänyt prosessin $p + \bar{p} \to t + \bar{t} + X$ t-(anti)kvarkin poikittaisliikemäärän ja rapiditeetin itseisarvon suhteen differentioidut vaikutusalat CMS-energialla $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV. Mittaus käsitteli $e^{\pm}/\mu^{\pm}$ + jetit-hajoamiskanavia. [109]

Vastaavat alimman kertaluvun vaikutusalat ovat esitettynä kuvissa 73, 74, 77 ja 78. (LO-vaikutusalalle $\frac{d\sigma}{d|y|}(|y|) = \frac{d\sigma}{dy}(y) + \frac{d\sigma}{dy}(-y) = 2\frac{d\sigma}{dy}(y)$.) K-kerroinkuvaajat ovat kuvissa 75, 76, 79 ja 80.

Skaalavalinnan aiheuttama epävarmuus on suunnilleen sama kuin kokonaisvaikutusaloilla törmäysenergialla $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV (kuvat 65b, 69b, 74b ja 82b). Massan

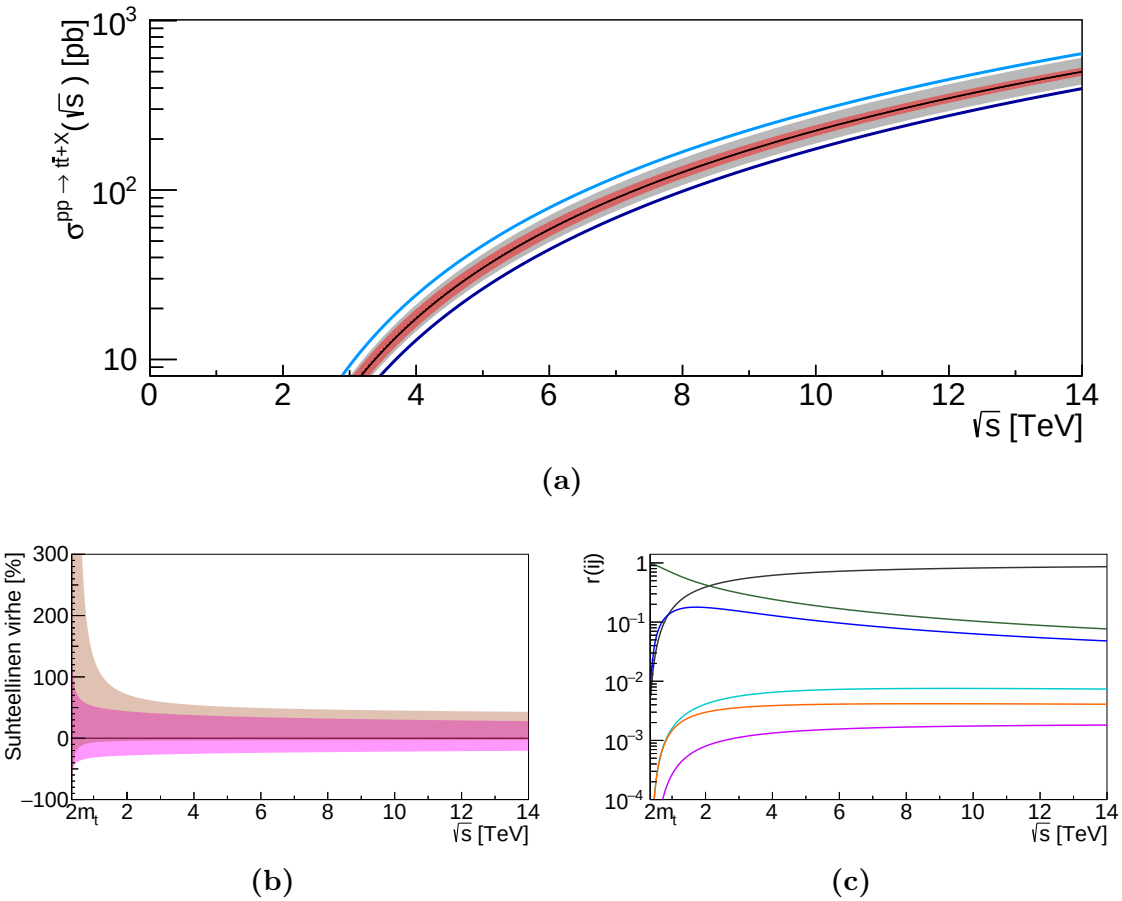


(a)

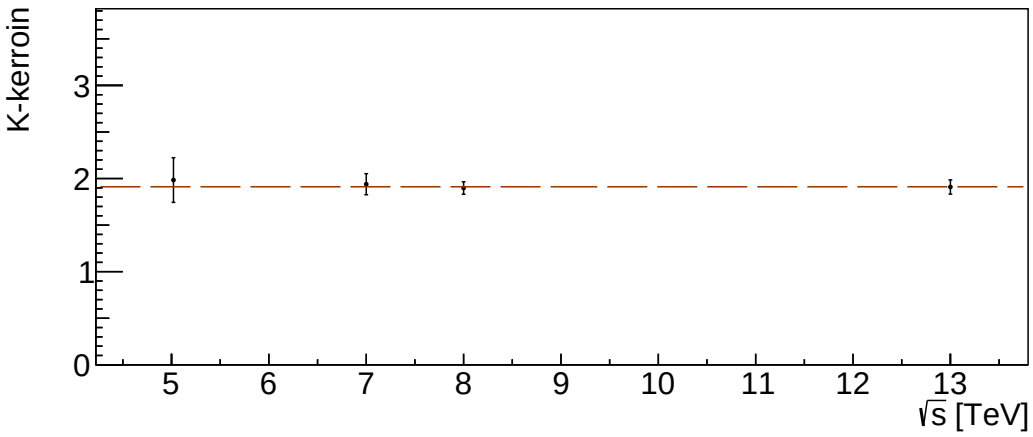


(b)

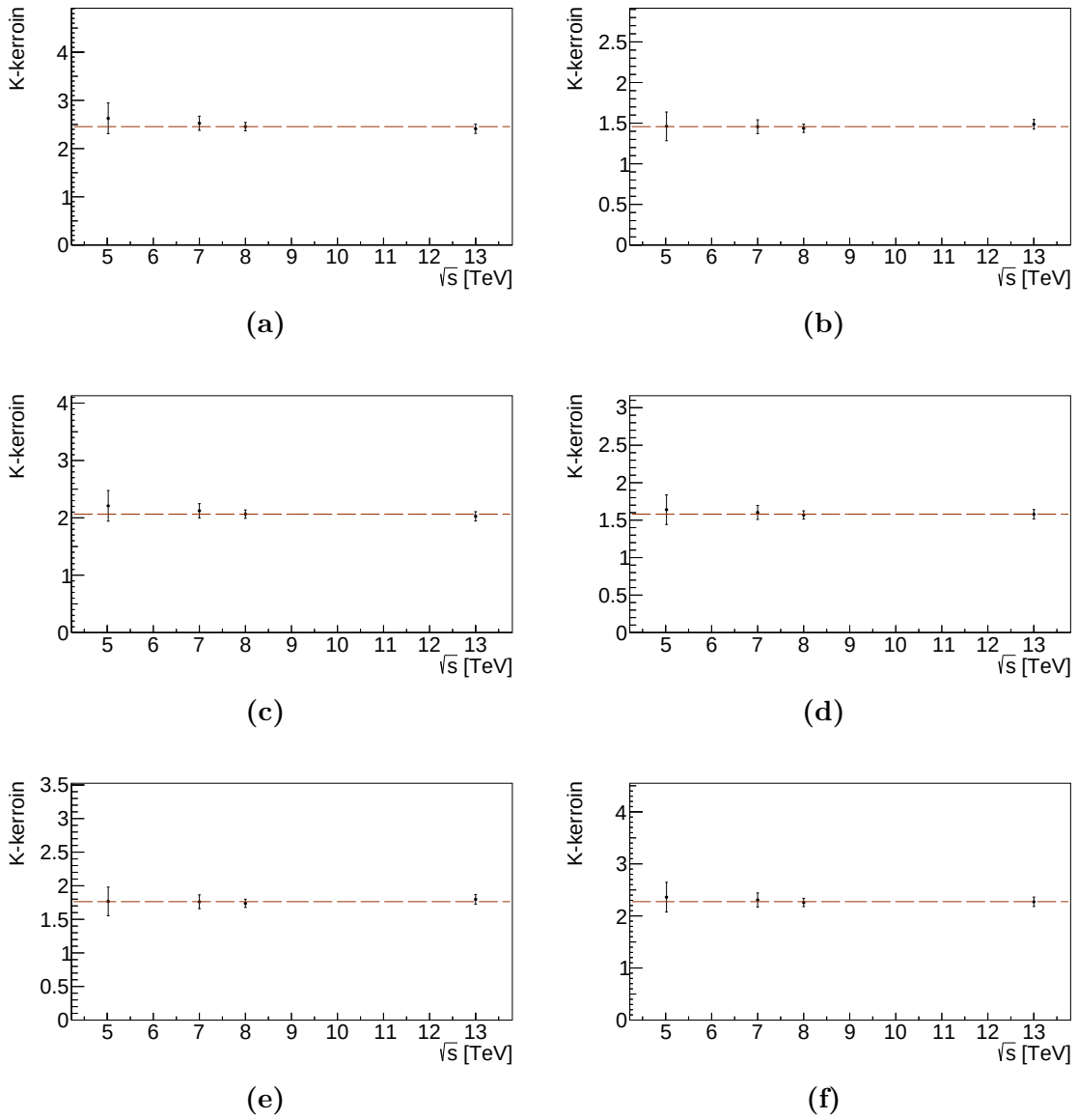
Kuva 68. Kokonaisvaikutusala $\sigma^{pp \to t\bar{t}+X}$. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 64. Kokeelliset vertailutulokset ovat lähteistä [4, 8, 49, 106–108].



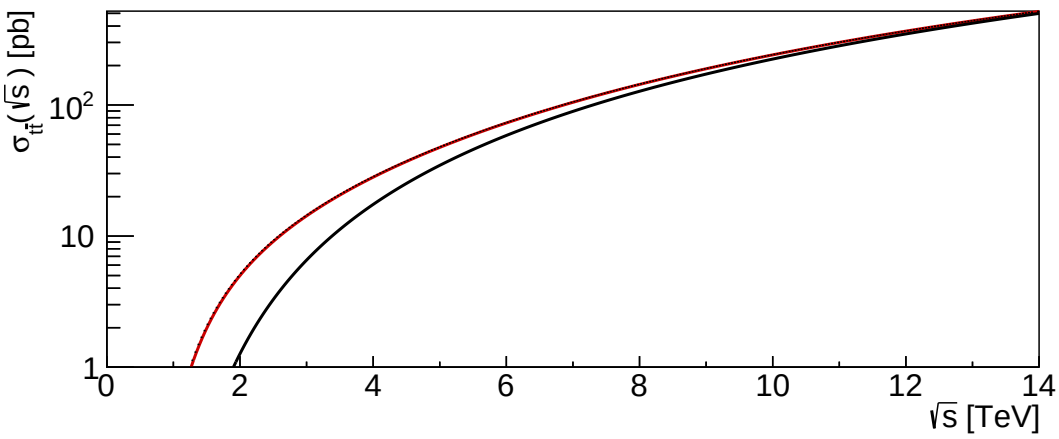
Kuva 69. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot kokonaisvaikutusalalle $\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}$. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 17.



Kuva 70. Kokonaisvaikutusalan $\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}$ K-kertoimet oletusskaalavalinnalla (Q_r^{def},Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 18.



Kuva 71. Kokonaisvaikutusalan $\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}$ K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 18.



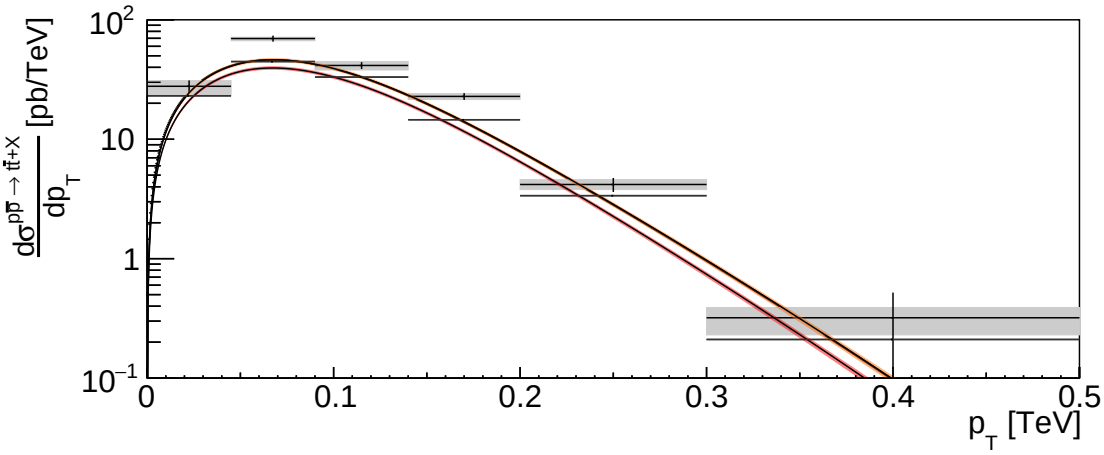
Kuva 72. Alimman kertaluvun t-kvarkkiparituoton kokonaisvaikutusalat protoni–antiprotoni- (tummanpunainen) ja protoni–protoni-törmäyksissä (musta).

vaihtelu vaikuttaa paljon p_T-differentioidun vaikutusalan arvoon pienillä poikittaisliikemäärän arvoilla ja korkeilla vähäisesti. Tämä käytös selittyy samoin kuin D-mesonien tuoton tapauksessa (luku 5.2). Kuitenkin nyt raskaan kvarkin massa on huomattavasti suurempi suhteessa tarkasteltuihin poikittaisliikemäärän arvoihin ja siten se vaikuttaa enemmän p_T-differentioituun vaikutusalaan. $|y|$-differentioidulla vaikutusalalla taas massan vaikutus kasvaa rapiditeetin itseisarvon kasvaessa. Tämä käytös johtuu luultavasti aliprosessien vaikutusalojen ominaisuuksista (yhtälöt (70) ja (78)).

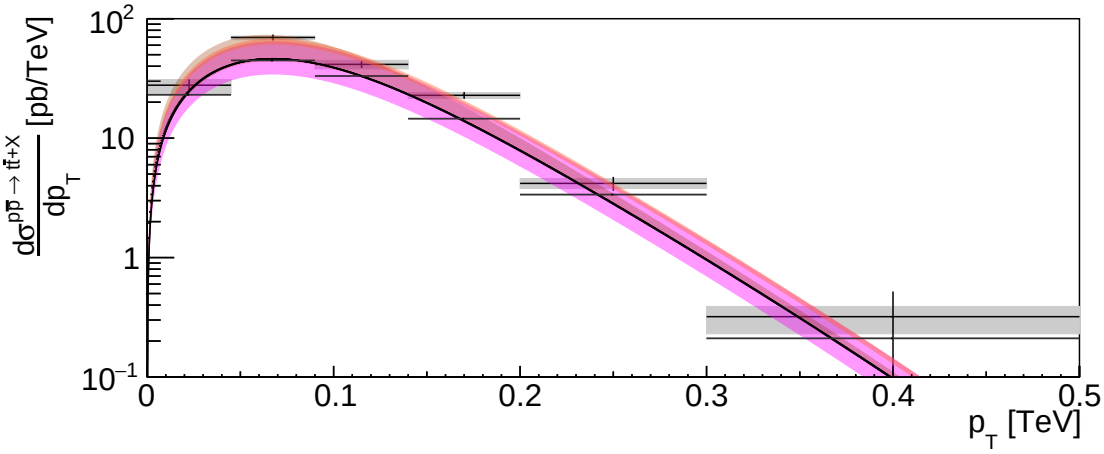
Differentioitujen vaikutusalojen $r(u\overline{u})$ kasvaa ja $r(gg)$ pienenee, kun poikittaisliikemäärä/rapiditeetin itseisarvo nousee. Tämä partonivuorovaikutusten suhteellisten kontribuutioiden käytös selittyy samoin kuin D-mesonien p_T- ja b-hadronien η-differentioitujen vaikutusalojen tapauksissa (luvut 5.2 ja 5.3).

Törmäysprosessin $p + \overline{p} \to t + \overline{t} + X$ differentioitujen vaikutusalojen kokonais-K-kertoimet vastaavat toisiaan käytettäessä samaa skaalavalintaa (taulukko 12). K-kerroinkuvaajien muodot ovat samat renormalisaatio- ja faktorisaatioskaalojen varioinnista huolimatta, kuten kokonaisvaikutusalojenkin tapauksessa.

CMS-kollaboraatio on mitannut protoni–protoni-törmäyksessä tuotettujen t-kvarkkiparien p_T^t- ja y_t-differentioidut vaikutusalat, missä indeksi t viittaa t-kvarkkiin, CMS-energialla 13 TeV. (Vaikutusalat ovat käytännössä samat kuin vastaavat $\overline{t}$-antikvarkkien vaikutusalat.) Vaikutusalojen määritys perustui dileptonisten lopputilo-



(a)

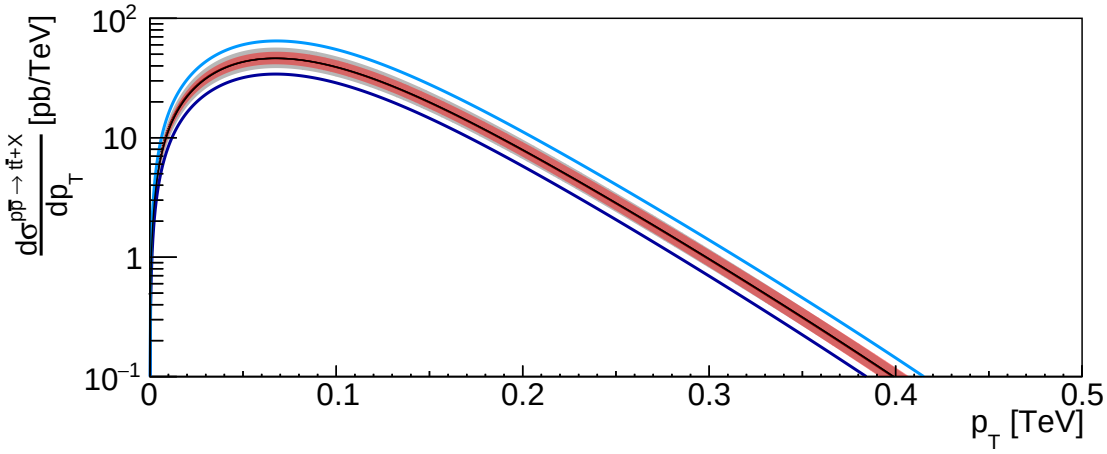


(b)

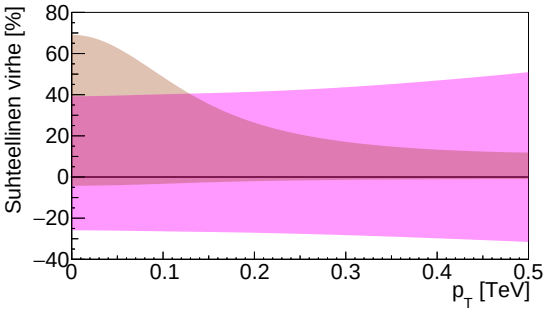
Kuva 73. p_T-differentioitu vaikutusala $\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{dp_T}$, CMS-energialla $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 24. Kuviin ei ole merkittynä integroidusta luminositeetista tulevaa kokeellisten tulosten systemaattista virhettä (1,6 %, on otettu huomioon K-kerroinsovituksissa) [109].

Taulukko 12. Vaikutusalojen $\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{dp_T}$ ja $\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{d|y|}$ kokonais-K-kertoimet eri skaalavalinnoilla CMS-energialla $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV (kuvat 75, 76, 79 ja 80).

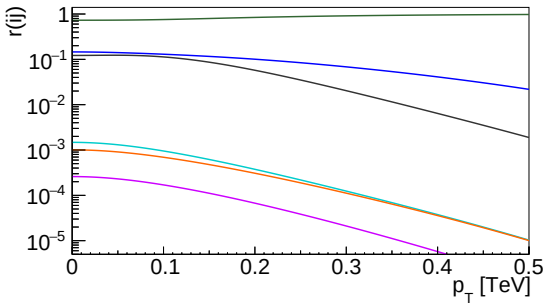
(Q_r,Q_f)	$K(\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{dp_T})$	$K(\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{d\lvert y\rvert})$
$(Q_r^{\text{def}},Q_f^{\text{def}})$	$1{,}40 \pm 0{,}08$	$1{,}34 \pm 0{,}09$
$(Q_r^{\text{max}},Q_f^{\text{max}})$	$1{,}90 \pm 0{,}11$	$1{,}82 \pm 0{,}12$
$(Q_r^{\text{min}},Q_f^{\text{min}})$	$0{,}99 \pm 0{,}06$	$0{,}96 \pm 0{,}07$
$(Q_r^{\text{def}},Q_f^{\text{max}})$	$1{,}58 \pm 0{,}09$	$1{,}51 \pm 0{,}10$
$(Q_r^{\text{min}},Q_f^{\text{def}})$	$1{,}14 \pm 0{,}07$	$1{,}09 \pm 0{,}08$
$(Q_r^{\text{def}},Q_f^{\text{min}})$	$1{,}22 \pm 0{,}07$	$1{,}17 \pm 0{,}08$
$(Q_r^{\text{max}},Q_f^{\text{def}})$	$1{,}68 \pm 0{,}10$	$1{,}61 \pm 0{,}11$



(a)

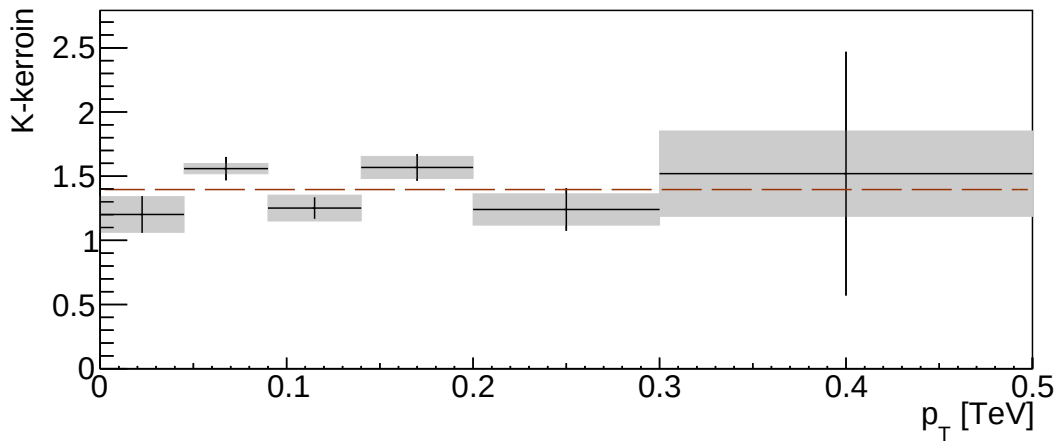


(b)



(c)

Kuva 74. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot p_T-differentioidulle vaikutusalalle $\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 17.

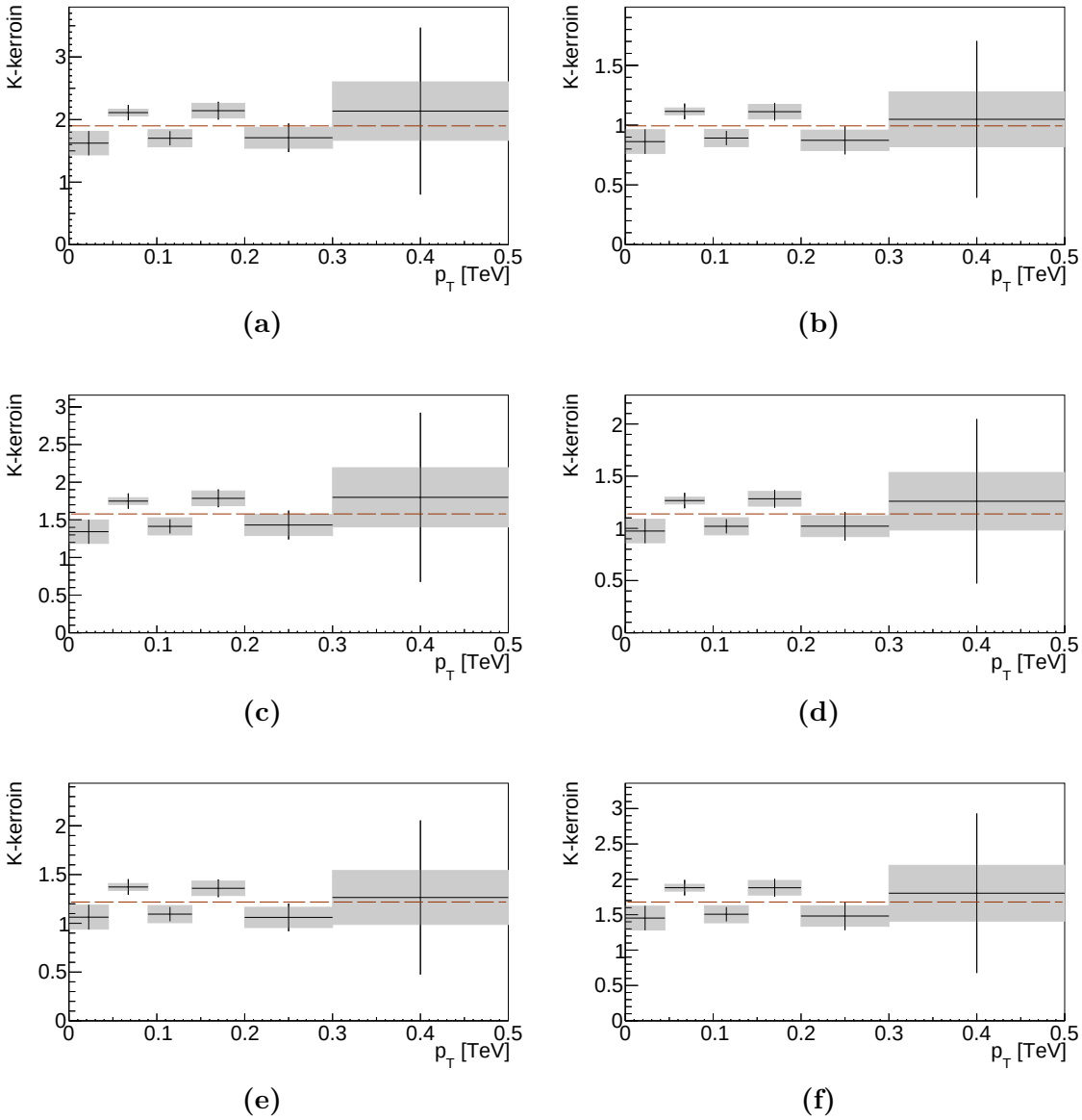


Kuva 75. p_T-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV, K-kertoimet oletusskaalavalinnalla (Q_r^{def},Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26. K-kerroinsovituksessa on otettu huomioon statistisen ja systemaattisen virheen lisäksi integroidusta luminositeetista tuleva virhe 1,6 %.

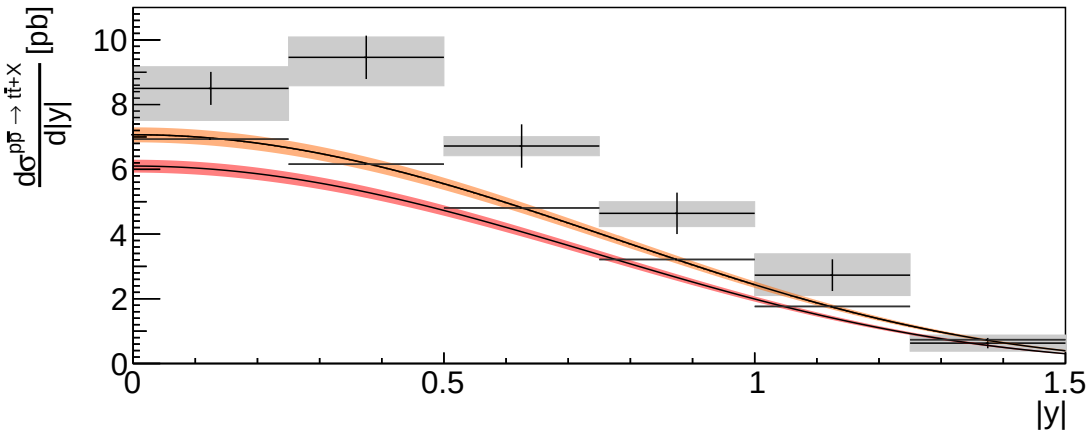
jen e^+e^-, $\mu^+\mu^-$ ja $e^\pm\mu^\mp$ tarkastelemiseen. (Kvarkkiparituottoreaktioita käsiteltiin joko ns. partoni- tai hiukkastasolla ja vaikutusalat määritettiin molemmille tapauksille erikseen. Käytin kokeellisina vertailutuloksina partonitason tuloksia.) [2, 110]

Alimman kertaluvun differentioidut vaikutusalat analyysikuvineen ovat esitettynä kuvissa 81, 82, 85 ja 86. Vastaavat K-kertoimet ovat kuvissa 83, 84, 87 ja 88.

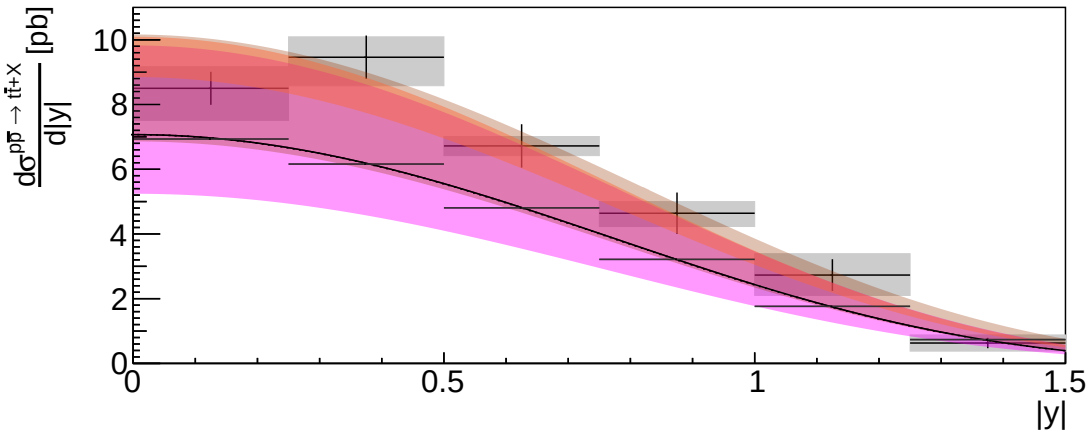
Skaalavalinnan ja massan epävarmuudet (kuvat 82b ja 86b) ovat pienemmät kuin protoni–antiprotonitörmäysten differentioiduilla vaikutusaloilla (kuvat 74b ja 78b). Skaalavalinnan vaikutuksen laskeminen johtuu tasaisemmista partonijakaumafunktioista: Kuvista 15c ja 15e nähdään, että protoni–protoni-törmäyksissä hallitseva gluonin partonijakaumafunktio on nouseva skaalan funktiona pitkittäisliikemääräosuudella $x = 10^{-2}$ ja laskeva liikemääräosuudella $x = 10^{-1}$ (sama koskee myös u-, $\overline{u}$-, d- ja $\overline{d}$-partonijakaumafunktioita). Siten gluonin partonijakaumafunktio muuttuu nousevasta laskevaksi välillä $10^{-2} < x < 10^{-1}$. Kuvista 82a ja 86a nähdään, että faktorisaatioskaalan nostaminen laskee vaikutusalaa/partonijakaumafunktioiden arvoja (skaalavalinnat ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$) ja ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$)), kuten protoni–antiprotoni-törmäysten tapauksessa. Pitkittäisliikemääräosuuksien x_1 ja x_2 painoarvot ovat nyt alempana kuin aiemmin suuremman törmäysenergian seurauksena ($\frac{4m_T^2}{s} \leq x_{1,2}$, yhtälö (89)), mutta kuitenkin siten, että painoarvoalue on arvon $x = 10^{-2}$ yläpuolella. Tällöin siis (ainakin) gluonin partonijakaumafunktion suhteellinen vaihtelu on pienempää kuin tapauksissa $\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{dp_T}$ ja $\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{d|y|}$ CMS-energialla $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV. Renormalisaatio-



Kuva 76. p_T-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV, K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26. Integroidusta luminositeetista tuleva systemaattinen virhe on otettu huomioon K-kerroinsovituksissa.

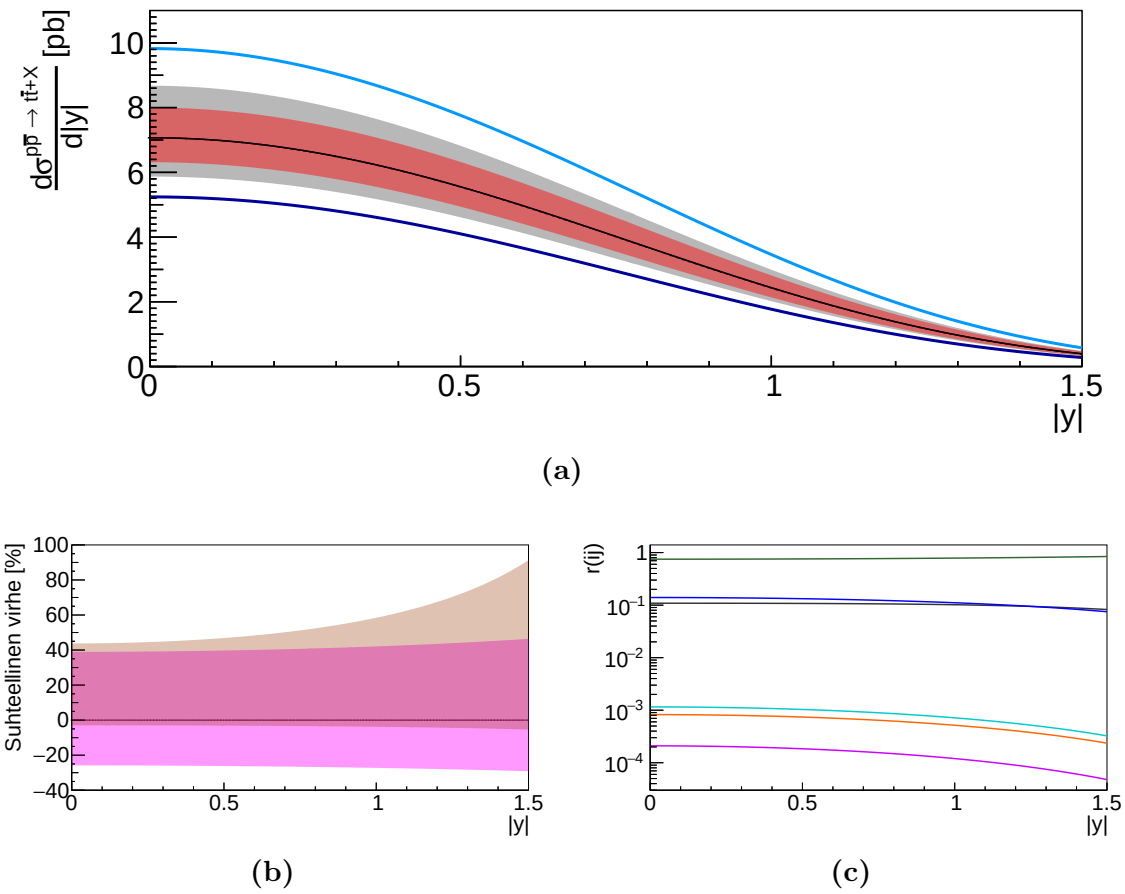


(a)

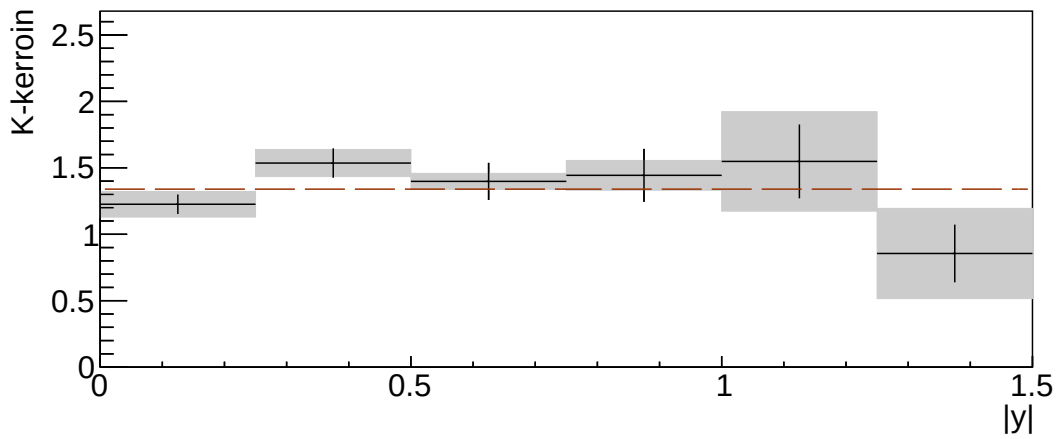


(b)

Kuva 77. $|y|$-differentioitu vaikutusala $\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{d|y|}$, CMS-energialla $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 24. Kuviin ei ole merkittynä integroidusta luminositeetista tulevaa kokeellisten tulosten systemaattista virhettä (1,6 %, on otettu huomioon K-kerroinsovituksissa) [109].



Kuva 78. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot $|y|$-differentioidulle vaikutusalalle $\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{d|y|}$, $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 17.

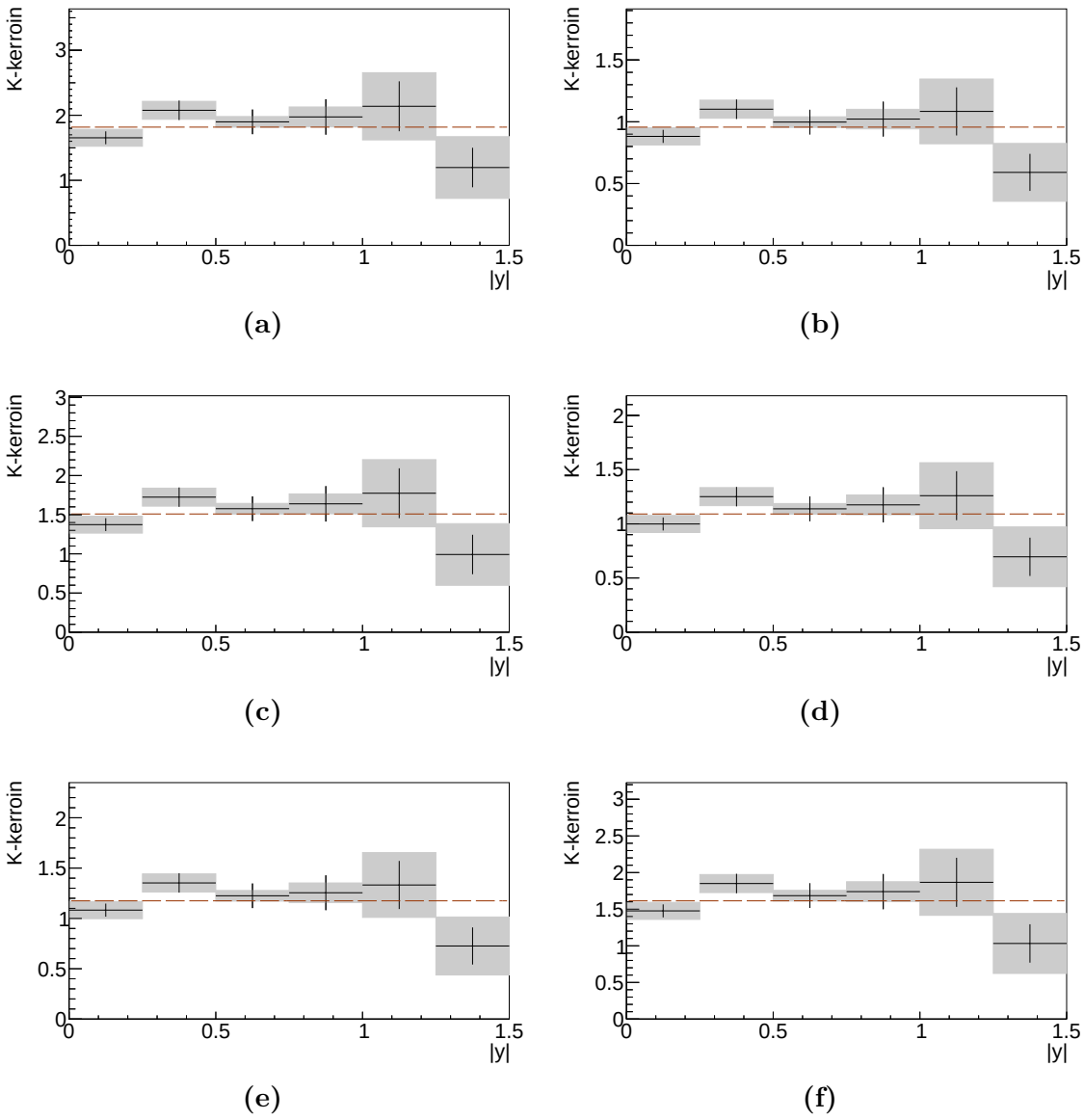


Kuva 79. $|y|$-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{p\overline{p}\to t\overline{t}+X}}{d|y|}$, $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV, K-kertoimet oletusskaalavalinnalla (Q_r^{def},Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26. K-kerroinsovituksessa on otettu huomioon statistisen ja systemaattisen virheen lisäksi integroidusta luminositeetista tuleva virhe 1,6 %.

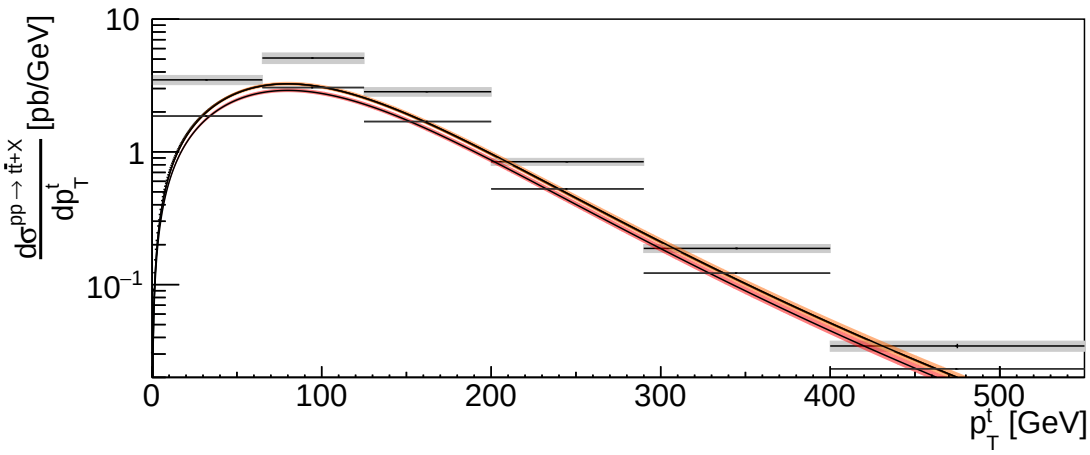
skaala ei vaikuta tähän skaalavalinnan epävarmuuden pienentymiseen, koska Q_r^{def}, Q_r^{min} ja Q_r^{max} ovat samat kuin aiemmin. Differentioitujen vaikutusalojen massan epävarmuuden pienentyminen johtuu ainakin osittain partonijakaumafunktioiden stabiloitumisesta ($Q_f = Q_f(m_t,p_T)$).

Vaikutusalojen $\frac{d\sigma^{pp\to t\overline{t}+X}}{dp_T^t}$ ja $\frac{d\sigma^{pp\to t\overline{t}+X}}{dy_t}$ sovitetut kokonais-K-kertoimet ovat esitettyinä taulukossa 13. Ne vastaavat toisiaan lähes yhtä hyvin kuin protoni–antiprotoni-törmäysten differentioitujen vaikutusalojen tapauksessa.

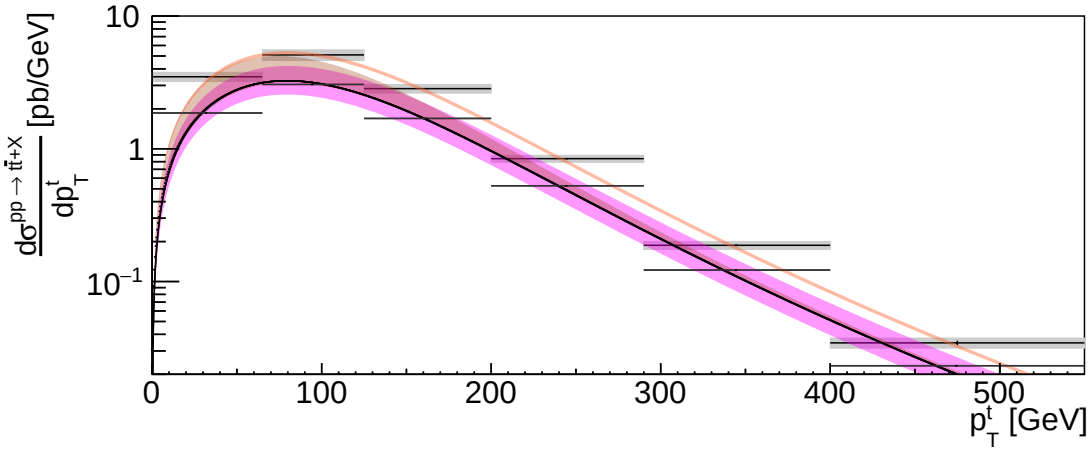
Vertaamalla prosessien $p + p \to t + \overline{t} + X$ ja $p + \overline{p} \to t + \overline{t} + X$ K-kertoimia (taulukot 11, 12 ja 13) nähdään, että ne eroavat toisistaan, vaikka skaalavalinta olisi valittu samaksi. Itse asiassa, ne eroavat melko konsistentilla tavalla: pp-tapausten kokonais-K-kertoimet ovat keskimäärin suunnilleen 20 prosenttia suuremmat. t-kvarkkipareja synnyttävillä gluonireaktioilla on enemmän merkitystä protoni–protoni-törmäyksissä kuin protoni–antiprotoni-törmäyksissä. Siten korkeamman kertaluvun vaikutusaloihin siirryttäessä gluonin partonijakaumafunktion $f_{g/p}$ ja aliprosessin $g + g \to t + \overline{t}$ Feynmanin diagrammien yhteiskontribuutio nousee enemmän kuin vastaava kvarkkien $\overline{q}$ partonijakaumafunktioiden $f_{\overline{q}/p}$ ja aliprosessien $q + \overline{q} \to t + \overline{t}$ diagrammien yhteiskontribuutio.



Kuva 80. $|y|$-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{p\bar{p}\to t\bar{t}+X}}{d|y|}$, $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV, K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26. Integroidusta luminositeetista tuleva systemaattinen virhe on otettu huomioon K-kerroinsovituksissa.



(a)

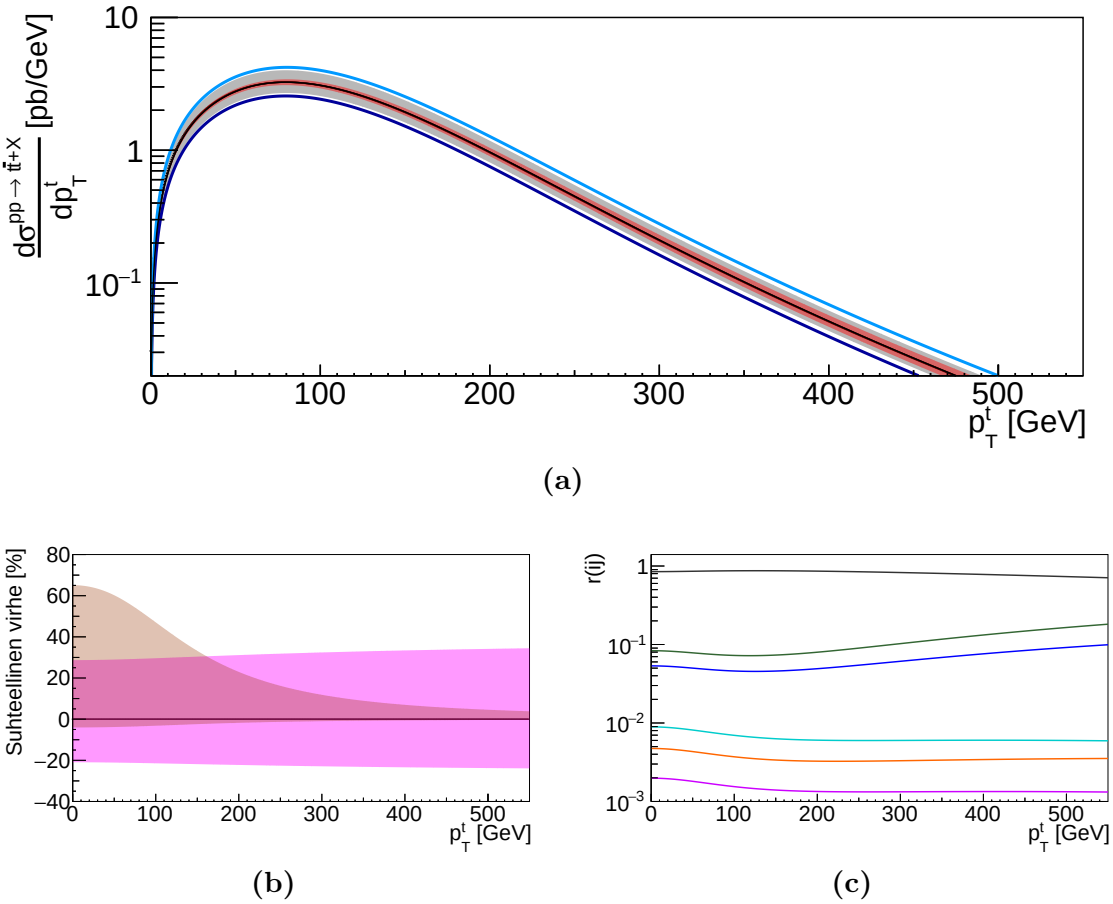


(b)

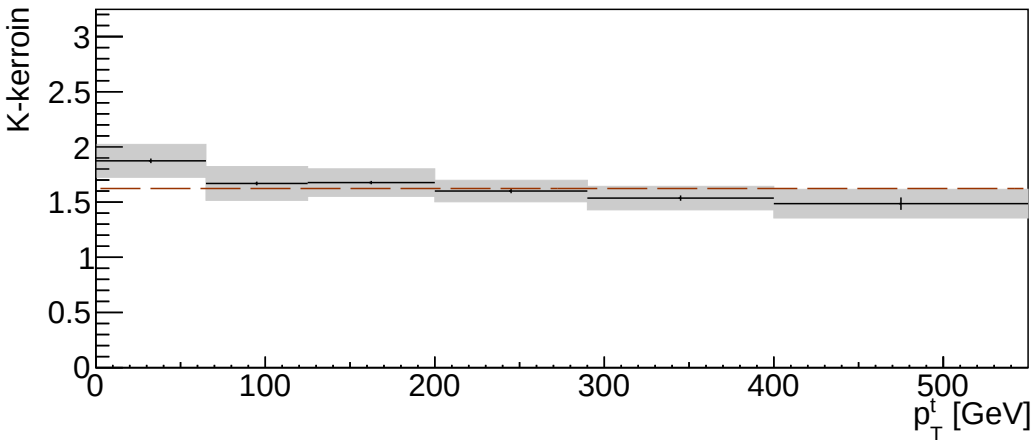
Kuva 81. p_T^t-differentioitu vaikutusala $\frac{d\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}}{dp_T^t}$, CMS-energialla $\sqrt{s} = 13$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 24. Kokeelliset vertailutulokset ovat lähteistä [2, 110].

Taulukko 13. Vaikutusalojen $\frac{d\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}}{dp_T^t}$ ja $\frac{d\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}}{dy_t}$ kokonais-K-kertoimet eri skaalavalinnoilla CMS-energialla $\sqrt{s} = 13$ TeV (kuvat 83, 84, 87 ja 88).

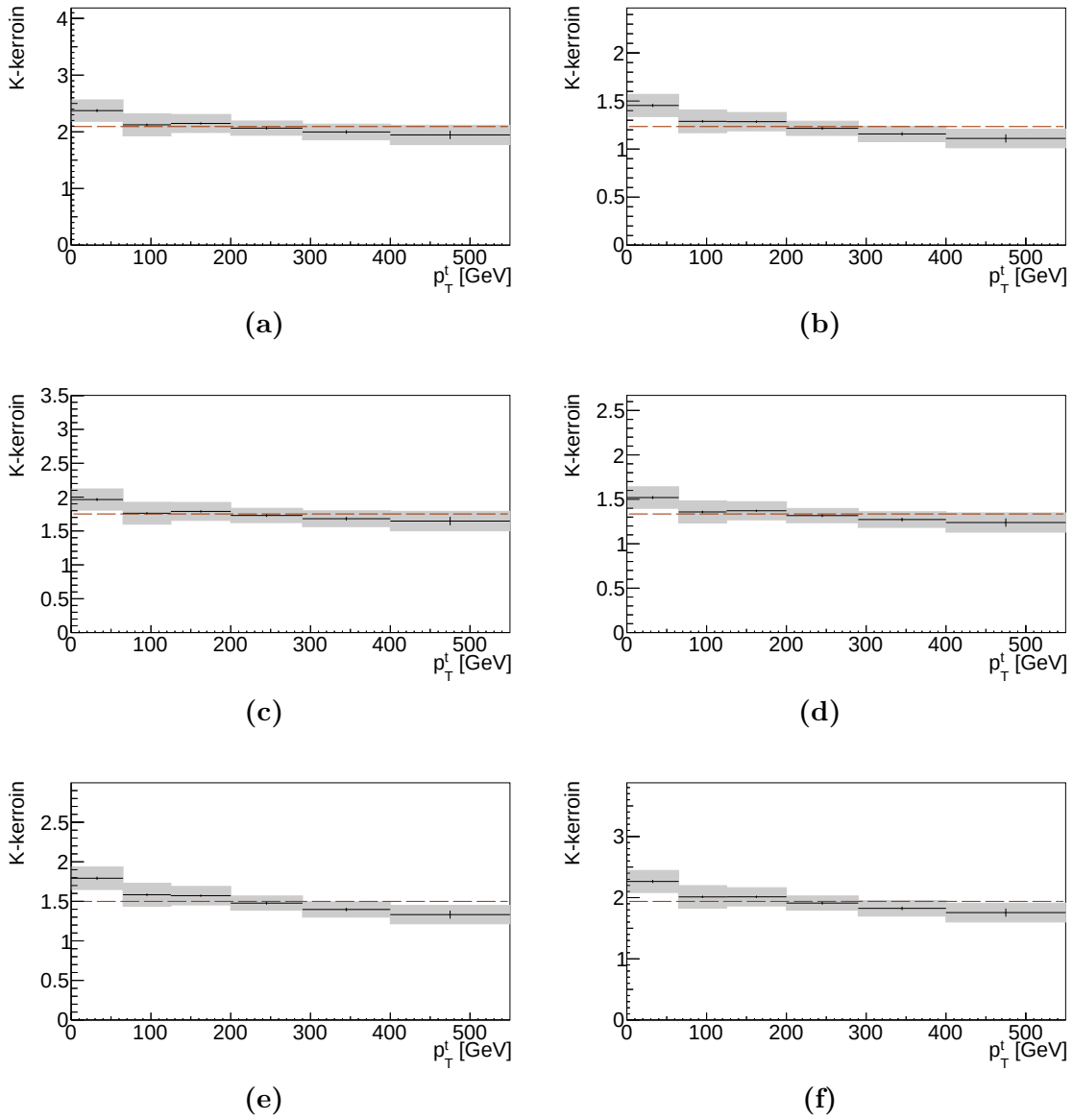
(Q_r,Q_f)	$K(\frac{d\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}}{dp_T^t})$	$K(\frac{d\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}}{dy_t})$
$(Q_r^{\text{def}},Q_f^{\text{def}})$	$1{,}62 \pm 0{,}06$	$1{,}67 \pm 0{,}05$
$(Q_r^{\text{max}},Q_f^{\text{max}})$	$2{,}09 \pm 0{,}07$	$2{,}13 \pm 0{,}06$
$(Q_r^{\text{min}},Q_f^{\text{min}})$	$1{,}23 \pm 0{,}04$	$1{,}28 \pm 0{,}04$
$(Q_r^{\text{def}},Q_f^{\text{max}})$	$1{,}75 \pm 0{,}06$	$1{,}77 \pm 0{,}05$
$(Q_r^{\text{min}},Q_f^{\text{def}})$	$1{,}34 \pm 0{,}05$	$1{,}36 \pm 0{,}04$
$(Q_r^{\text{def}},Q_f^{\text{min}})$	$1{,}50 \pm 0{,}05$	$1{,}57 \pm 0{,}04$
$(Q_r^{\text{max}},Q_f^{\text{def}})$	$1{,}94 \pm 0{,}07$	$2{,}01 \pm 0{,}05$



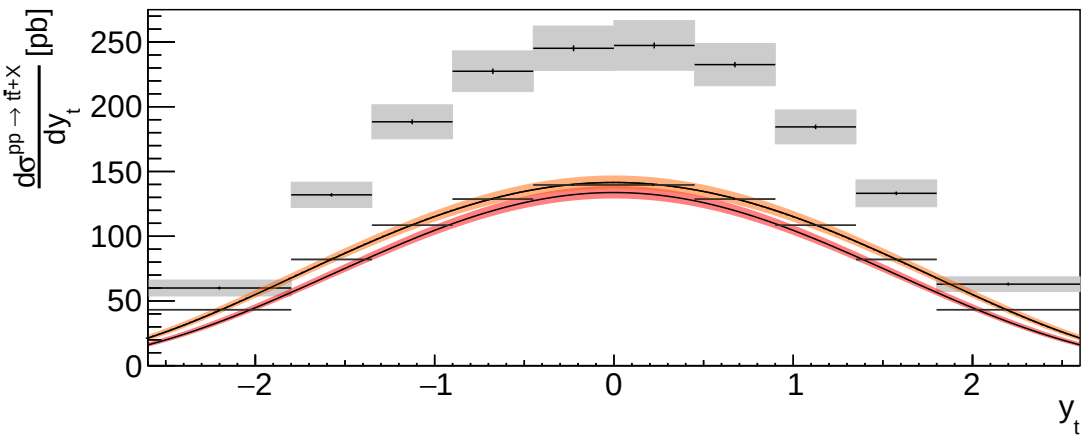
Kuva 82. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot p_T^t-differentioidulle vaikutusalalle $\frac{d\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}}{dp_T^t}$, $\sqrt{s} = 13$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 17.



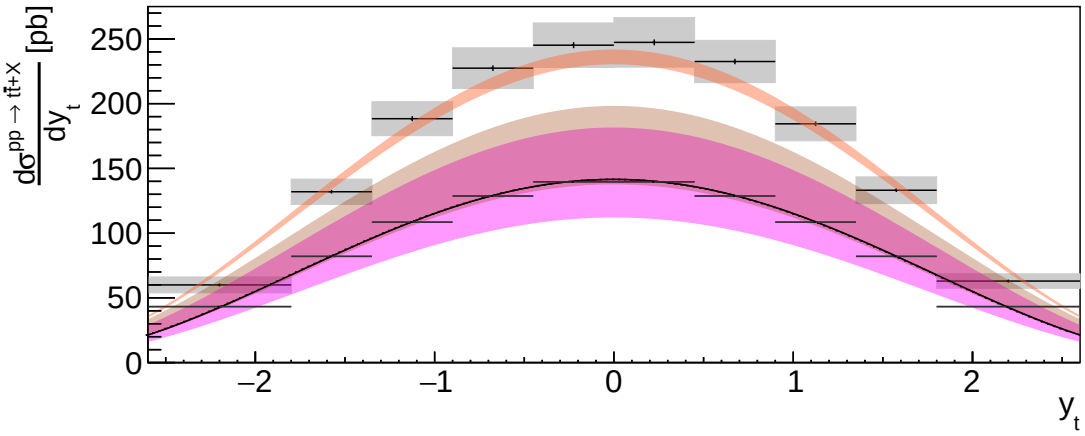
Kuva 83. p_T^t-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}}{dp_T^t}$, $\sqrt{s} = 13$ TeV, K-kertoimet oletusskaalavalinnalla (Q_r^{def},Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26.



Kuva 84. p_T^t-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}}{dp_T^t}$, $\sqrt{s} = 13$ TeV, K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26.

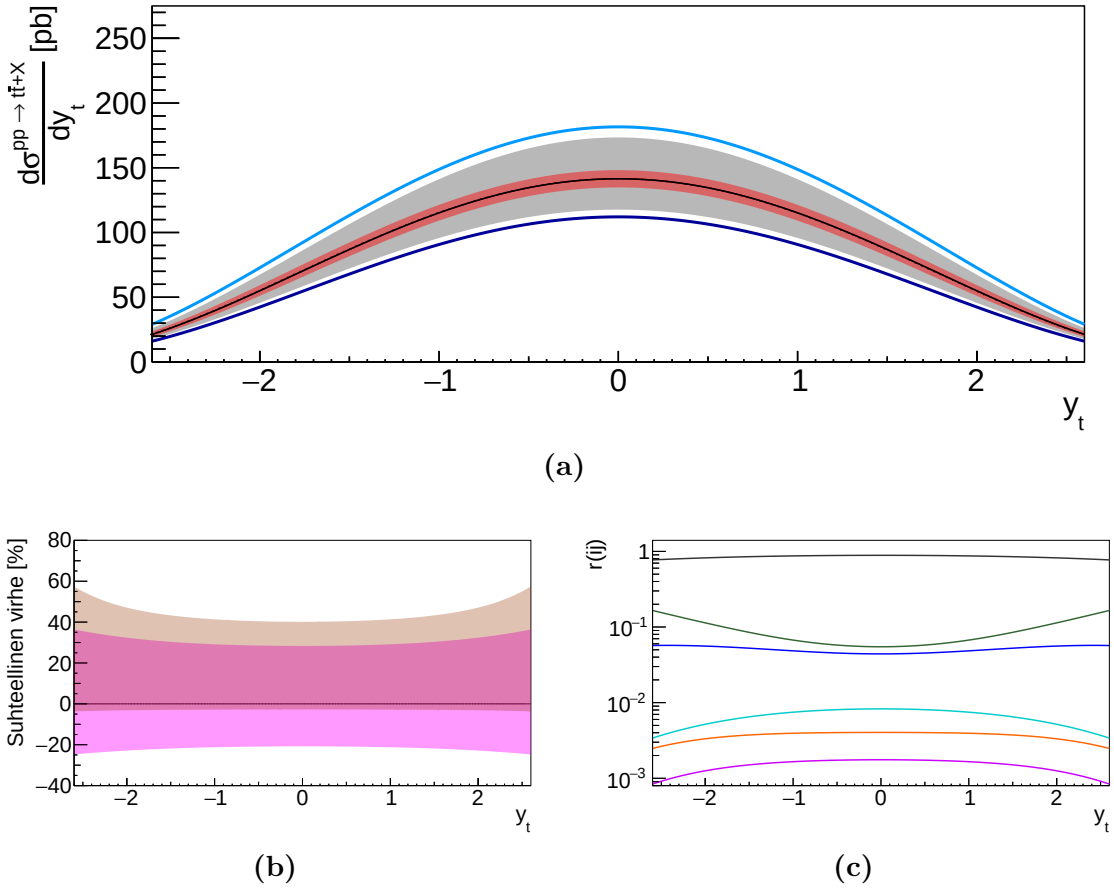


(a)

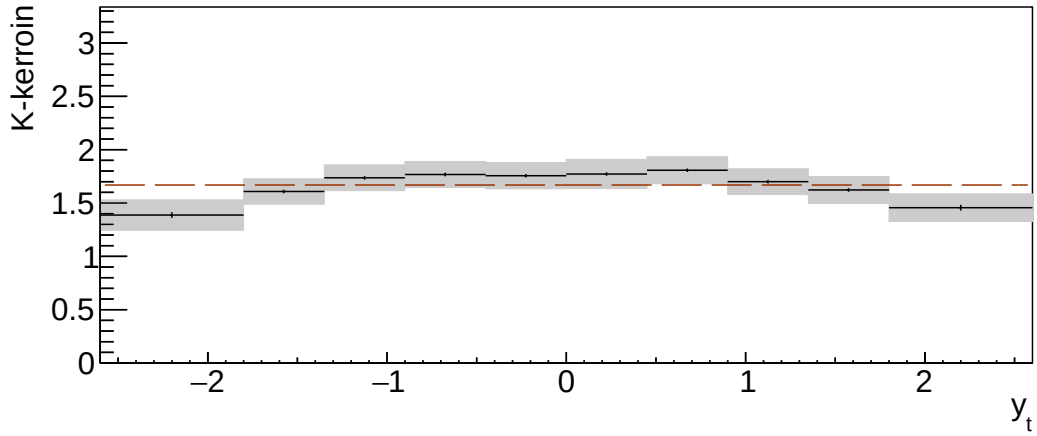


(b)

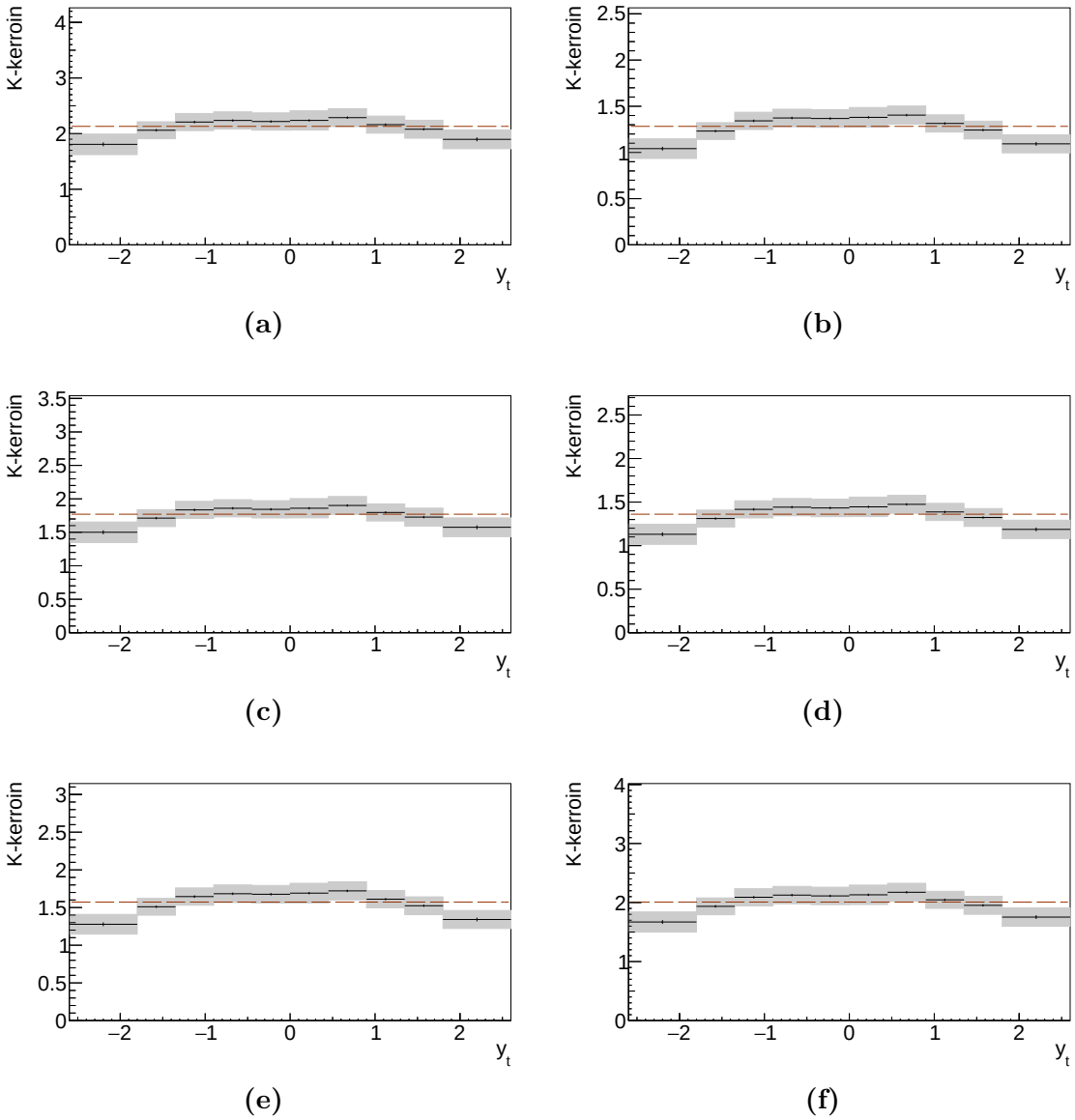
Kuva 85. y_t-differentioitu vaikutusala $\frac{d\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}}{dy_t}$, CMS-energialla $\sqrt{s} = 13$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 24. Kokeelliset vertailutulokset ovat lähteistä [2, 110].



Kuva 86. Skaalavalintojen vaikutukset, suhteelliset epävarmuudet ja eri partonivuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot y_t-differentioidulle vaikutusalalle $\frac{d\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}}{dy_t}$, $\sqrt{s} = 13$ TeV. Kuvaajien merkitykset ovat samat kuin kuvassa 17.



Kuva 87. y_t-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}}{dy_t}$, $\sqrt{s} = 13$ TeV, K-kertoimet oletusskaalavalinnalla (Q_r^{def},Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26.



Kuva 88. y_t-differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma^{pp\to t\bar{t}+X}}{dy_t}$, $\sqrt{s} = 13$ TeV, K-kertoimet vaihtoehtoisilla skaalavalinnoilla ($Q_r^{\max}$,$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,$Q_f^{\min}$), (Q_r^{def},$Q_f^{\max}$), ($Q_r^{\min}$,Q_f^{def}), (Q_r^{def},$Q_f^{\min}$) ja ($Q_r^{\max}$,Q_f^{def}). Merkinnät ovat samat kuin kuvassa 26.

6 Yhteenveto ja johtopäätökset

Olen laskenut kvanttiväridynamiikan häiriöteorian alimman kertaluvun vaikutusaloja c-, b- ja t-kvarkkiparien tuotoille protoni–protoni- sekä protoni–antiprotonitörmäyksissä. Kokonaisvaikutusalojen lisäksi tarkastelin useiden eri muuttujien suhteen leikattuja ja differentioituja vaikutusaloja. Olen tutkinut laskemieni vaikutusalojen eri epävarmuus- ja virhetekijöitä. Erityisesti keskityin raskaiden kvarkkien massojen, renormalisaatio- ja faktorisaatioskaalavalintojen vaikutuksiin, sillä nämä kolme tekijää olivat selvästi kaikista merkityksellisimmät. Etsin kokeelliset vertailutulokset tiettyjä kriteerejä käyttäen ja kvantifioin niiden ja teoreettisten tulosten väliset eroavaisuudet K-kertoimilla. K-kertoimet on laskettu usealla eri skaalavalinnalla.

Laskemillani alimman kertaluvun vaikutusaloilla on yhteneviä ominaisuuksia. Tulokset osoittavat, että kun vaikutusalojen tarkasteltu törmäysprosessi (mahdollinen hadronisaatio huomioon otettuna) ja skaalavalinta ovat samat, niin niiden K-kertoimet ovat myös samat. Tämä on nähtävissä taulukoista 9, 10, 12 ja 13. Lisäksi D-mesonien p_T-differentioitujen vaikutusalojen K-kertoimet vastaavat toisiaan hyvin alueessa, jossa hadronisaatioapproksimaation (fragmentaatiofunktiot korvattu fragmentaatio-osuuksilla) vaikutukset ovat arvioitavissa ($p_T \gtrapprox 4$ GeV, taulukot 7 ja 8). Se, että onko vaikutusala tyypiltään kokonais-, differentioitu tai leikattu vaikutusala, ei näytä vaikuttavan K-kertoimiin. Prosessin törmäysenergian $\sqrt{s}$ arvo ei myöskään tunnu vaikuttavan, lukuun ottamatta mahdollisesti tapauksia, joissa $\sqrt{s} \lesssim 500$ GeV (kokonaisvaikutusalat $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}$ ja $\sigma^{pp\to b\bar{b}+X}$, kuvat 18, 19, 50 ja 51). Törmäysprosessin alkutilahadroneilla on merkitystä, sillä protoni–protoni- ja protoni–antiprotoni-törmäysten t-kvarkkiparien tuottojen K-kertoimet eroavat toisistaan.

c-, b- ja t-kvarkkiparien alimman kertaluvun vaikutusalat vastaavat eri tavoin keskeisten parametrien vaihteluihin. Skaalavalinta vaikuttaa vaikutusalaan sitä vähemmän mitä raskaampaa kvarkkia tarkastellaan. Tämä johtuu siitä, että vahva kytkentävakio $\alpha_s(Q_r)$ ja partonijakaumafunktiot $f_i(x,Q_f)$ ovat stabiilimpia korkeammilla renormalisaatio- ja faktorisaatioskaalojen arvoilla. Massan vaihtelun aiheuttama epävarmuus on sen sijaan suunnillen sama kaikissa tapauksissa pois lukien p_T-differentioidut ja pienten törmäysenergioiden vaikutusalat, joiden käytös massan suhteen johtuu vastaavien vaikutusalalausekkeiden muodoista, sekä t-kvarkkien

vaikutusalojen massaepävarmuuden alaraja ja y-differentioidut vaikutusalat korkeilla rapiditeetin itseisarvoilla. Tämä oli minulle hieman yllättävää, koska raskaan kvarkin massan suhteellinen vaihtelu on sitä pienempää mitä raskaampi kvarkki on (taulukko 1). Tämä massaepävarmuuksien käytös selittyi kuitenkin ainakin osittain faktorisaatioskaalan massariippuvuudella: Kokonaisvaikutusaloille Q_f on massan monikerta ja muille vaikutusalatyypeille poikittaismassan monikerta (taulukko 2). Partonijakaumafunktiot $f_i(x,Q_f)$ voivat olla sekä nousevia että laskevia faktorisaatioskaalan funktiona, riippuen tarkasteluvälistä ja pitkittäisliikemääräosuuden x arvosta (kuvat 14 ja 15). Siten vaikutusalat voivat olla laskevia tai nousevia faktorisaatioskaalan funktiona, riippuen siitä, millä pitkittäisliikemääräosuuden x arvoilla on suurin painoarvo tarkastellulla vaikutusalalla ja mitkä partonijakaumafunktiot/aliprosessit hallitsevat. c-kvarkkiparien vaikutusalat ovat nousevia faktorisaatioskaalan funktiona, b-kvarkkiparien vähemmän nousevia ja t-kvarkkiparien laskevia. Siten b-kvarkkiparien vaikutusaloissa partonijakaumafunktioiden käytös redusoi vähemmän massan vaikutusta kuin c-kvarkkiparien vaikutusaloissa, ja t-kvarkkiparien tapauksessa partonijakaumafunktiot vahvistavat massan vaihtelun vaikutusta. Arvioitu CT14-partonijakaumafunktioista tuleva vaikutusalan virhe on mitätön suhteessa skaalavalinnan aiheuttamaan epävarmuuteen kaikissa tapauksissa.

c-kvarkkiparien vaikutusalat ovat kaikista epävarmimpia. Suuren skaalavalinnan aiheuttaman epävarmuuden lisäksi vaikutusaloihin liittyy tekijöitä, jotka alentavat niiden luotettavuutta. Selvästi merkittävin näistä on käyttämäni hadronisaatioapproksimaatio. Luvussa 5.2 tekemäni arvion perusteella fragmentaatiofunktioiden korvaaminen vastaavilla fragmentaatio-osuuksilla muuttaa D-mesonien p_T-differentioitujen vaikutusalojen arvoja huomattavasti. Tämä approksimaatio vaikuttaa myös vaikutusalaan $\sigma^{pp\to c\bar{c}+X}_{0<p_T<8\ \mathrm{GeV},\ 2.0<y<4.5}$, jonka leikkaukset koskevat lopputilahadroneja D^0, D^+, D^{*+}, D_s^+ ja Λ_c^+. Kvanttiväridynamiikan häiriöteorian soveltamisen ehto $Q_r \gtrsim 1$ GeV (tai $\alpha_s(Q_r) \ll 1$) toteutuu c-kvarkeilla heikommin kuin b- ja t-kvarkeilla, ja erityisesti leikatun ja differentioitujen vaikutusalojen minimirenormalisaatioskaalalle pätee $Q_r^{\min} = \frac{1}{2}m_T < 1$ GeV, kun $p_T < 1{,}55$ GeV. Harkitsin näistä syistä c-kvarkkiparituoton käsittelyn kokonaan pois jättämistä. Kuitenkin, D-mesonien p_T-differentioitujen vaikutusalojen K-kertoimien käyttäytyminen p_T-alueessa, jossa hadronisaatioapproksimaation vaikutukset ovat arvioitavissa, vahvistaa havaintoani, jonka mukaan prosessien $p + \overline{p} \to Q + \overline{Q} + X(\to H_Q + H_{\overline{Q}} + X)$ alimman kertaluvun vaikutusalojen K-kertoimet ovat samat, kun skaalavalinta ja tarkasteltu

törmäysprosessi ovat samat.

Alimman kertaluvun b-kvarkkiparituoton vaikutusalat ovat vähemmän herkkiä eri tekijöille kuin c-kvarkkiparien vaikutusalat. Skaalavalinnan vaikutus on pienempi ja hadronisaatioapproksimaatio muuttaa arviolta vain vähäisesti b-hadroneja käsitteleviä vaikutusaloja. Vaikutusalan K-kerroinkuvaajien muodot toistuvat lähes samoina kaikilla skaalavalinnoilla, toisin kuin c-kvarkkiparitapauksissa. Erikoisin havaitsemani b-kvarkkiparituoton ominaisuus on se, että alimman kertaluvun vaikutusalojen arvot ovat erittäin lähellä vastaavia kokeellisia tuloksia (oletusskaalavalinnoilla $K \approx 1$). Tämän opinnäytetyön puitteissa, laskematta NLO-vaikutusaloja, en pystyne päättelemään, miksi raskaiden kvarkkiparien tuotoista korkeamman kertaluvun korjaukset vaikuttavat vähiten juuri b-kvarkkiparien tuottoon.

Prosessien $p + \overline{p} \to t + \bar{t} + X$ ja $p + p \to t + \bar{t} + X$ alimman kertaluvun vaikutusalat omaavat pienemmät skaalaepävarmuudet kuin prosessien $p + p \to c + \bar{c} + X$ ja $p + p \to b + \bar{b} + X$. t-kvarkkiparien vaikutusaloja voidaan pitää kaikista tarkimpina myös siinä mielessä, että hadronisaatioapproksimaatio ei vaikuta niihin ja häiriöteorian soveltamisen kriteeri $Q_r \gtrsim 1$ GeV toteutuu selvästi. Edellä mainitut tekijät selittävät vaikutusaloja vastaavien K-kertoimien stabiiliutta: Yksittäisen vaikutusalan K-kertoimet vastaavat hyvin sovitettua kokonais-K-kerrointa kaikilla skaalavalinnoilla. Erityisesti kokonaisvaikutusalan $\sigma^{pp \to t\bar{t}+X}$ K-kertoimien välinen vastaavuus on huomattavaa.

Gluoni-gluoni-reaktiot hallitsevat selvästi c- ja b-kvarkkiparien tuottoa protoni–protoni-törmäyksissä. $u + \overline{u}$- ja $d + \overline{d}$-reaktioiden merkitys on huomattavasti suurempi t-kvarkkiparien tuotossa, mikä johtuu protonin ja antiprotonin valenssikvarkkirakenteesta. Protoni–antiprotoni-törmäyksissä $u + \overline{u}$-reaktiot ovat jopa $g + g$-reaktioita merkityksellisempiä. s-, c- ja b-merikvarkkien kontribuutiot vaikutusaloihin ovat jokaisessa tapauksessa vähäiset. $s + \overline{s}$-reaktioiden osuus on suurimmillaan noin yhden sadasosan ($\frac{d\sigma^{pp \to D^0 + X}_{|y|<0.5}}{dp_T}$, $\sqrt{s} = 5{,}02$ TeV) ja $c + \overline{c}$-reaktioiden puoli sadasosaa ($\frac{d\sigma^{pp \to t\bar{t}+X}}{dp_T^t}$, $\sqrt{s} = 13$ TeV) (ja luonnollisesti $r(b\bar{b}) < r(c\bar{c})$). Siten (anti)protonin c- ja b-merikvarkit voidaan jättää huomiotta alimman kertaluvun raskaiden kvarkkiparien tuottojen vaikutusaloja laskiessa. $c + \overline{c}$- ja $b + \overline{b}$-reaktioiden (arvioidut) osuudet näyttävät myös sen, että t-merikvarkkien kontribuutio on täysin mitätön (koska $m_c < m_b < m_t$).

Havaintoni, jonka mukaan prosessien $p + \overline{p} \to Q + \overline{Q} + X (\to H_Q + H_{\overline{Q}} + X)$

alimman kertaluvun vaikutusalat omaavat samat K-kertoimet, mikäli törmäysprosessi ja skaalavalinta ovat samat, vaatii huomattavasti lisätarkastelua sen yleisen paikkansapitävyyden todentamiseksi (mikäli se ei ole kumottavissa). Tarkastelin vain kahdeksaatoista eri vaikutusalaa, joista kolmessatoista on edellä kuvattuja K-kertoimien yhteneväisyyksiä ja joista viisi vaikutusalaa edustavat poikkevaa skaalavalintaa tai törmäysprosessia. Erityisesti hadronisaation vaikutuksesta on nyt vain vähän informaatiota: fragmentaatiofunktioiden puute muokkaa c-hadronien tuottoa käsittelevien vaikutusalojen arvoja huomattavasti ja b-hadronien vaikutusaloille $f(b \to H_b) \approx 1$. Koska hadronisaatio on häiriöteorian ulkopuolinen prosessi, niin voi olla, että fragmentaatiofunktioiden tarkka huomioiminen vaikuttaa vaikutusaloihin siten, että edellä kuvattu K-kertoimien yhtenevyys ei toteudu yleisesti törmäysprosesseille, jotka sisältävät raskaiden kvarkkien hadronisaatioita.

Alimman kertaluvun vaikutusaloja ja niiden K-kertoimien yhtenevyyksiä voidaan lisätarkastella myös muilla tavoilla kuin lisäämällä vaikutusalatapausten määrää. Olisi mielenkiintoista nähdä kuinka kokonais-, differentioidut ja leikatut vaikutusalat vertautuvat keskenään, kun niiden skaalavalinta on asetettu samaksi. Kun kokonaisvaikutusala lasketaan differentioidun vaikutusalan $\frac{d\sigma(p\overset{(-)}{p}\to H_Q H_{\overline{Q}}+X)}{dp_T dy_3 dy_4}$ lausekkeesta (82) kolmiulotteisella integroinnilla, niin vastaavat renormalisaatio- ja faktorisaatioskaalat voidaan asettaa poikittaismassan m_T monikerroiksi. (Differentioitujen ja leikattujen vaikutusalojen skaalat voidaan myös valita raskaan kvarkin massan monikerroiksi.) c- ja b-kvarkkiparien tuotto protoni–antiprotoni-törmäyksissä voisi olla myöskin hyvä lisätutkimisen ja vertaamisen kohde, samoin kuin ydintörmäysten raskaiden kvarkkiparien tuotto.

Alimman kertaluvun vaikutusaloja voidaan laskea tarkemmin vähentämällä approksimaatioiden määrää. Kuten olen korostanut, hadronisaatioapproksimaatio vääristi huomattavasti osaa vaikutusaloista. Fragmentaatiofunktiot tulee ottaa ehdottomasti huomioon tarkasteltaessa prosesseja, jotka sisältävät c-kvarkkien (tai b-kvarkkien) hadronisaatioita. Lisäksi jouduin asettamaan faktorisaatioskaalalle minimin 1,3 GeV, koska tätä pienemmillä skaaloilla CT14-partonijakaumafunktioiden arvot ovat epäluotettavia ekstrapoloinnin vuoksi. Tämä keinotekoinen faktorisaatioskaalan muokkaaminen, joka vaikuttaa vaikutusaloihin, on paremmin vältettävissä, mikäli käytetään partonijakaumafunktioita, joiden laskemisessa on käytetty pienempää alkuskaalaa, $Q_0 < 1{,}3$ GeV (luku 2.3). Jätin myös alkutilakvarkkien massat ja prosessin $Q + \overline{Q} \to Q + \overline{Q}$ t-kanavan Feynmanin diagrammin huomiotta. Nämä

kuitenkin vaikuttavat käytännössä ainoastaan aliprosesseihin $c + \overline{c} \to c + \overline{c}$ ja $b + \overline{b} \to b + \overline{b}$, ja siten erittäin vähän kokonaisprosessien vaikutusaloihin.

Lähteet

[1] K. J. Eskola. *Lecture notes for course FYSS4300 Particle Physics (University of Jyväskylä, Department of Physics), section 13*. Sept. 2019. URL: http://users.jyu.fi/~kaeskola/HITU2011/FYSH300_Sec13_p310-349.pdf.

[2] A. M. Sirunyan et al. "Measurements of $t\overline{t}$ differential cross sections in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV using events containing two leptons". In: *JHEP* 02 (2019), 149. DOI: 10.1007/JHEP02(2019)149. arXiv: 1811.06625 [hep-ex].

[3] R. Aaij et al. "Measurements of prompt charm production cross-sections in *pp* collisions at $\sqrt{s} = 5\,\text{TeV}$". In: *JHEP* 06 (2017), 147. DOI: 10.1007/JHEP06(2017)147. arXiv: 1610.02230 [hep-ph].

[4] A. M. Sirunyan et al. "Measurement of the inclusive $t\overline{t}$ cross section in pp collisions at $\sqrt{s} = 5.02$ TeV using final states with at least one charged lepton". In: *JHEP* 03 (2018), 115. DOI: 10.1007/jhep03(2018)115. arXiv: 1711.03143 [hep-ex].

[5] L. B. Patel. "Cross Section of Bottom Quark Production in p+p Collisions at $\sqrt{s} = 500$ GeV Using Like-Sign Dimuons at PHENIX". PhD thesis. Georgia State University, 2013. URL: https://scholarworks.gsu.edu/phy_astr_diss/61/.

[6] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). *Top Quark*. 2019. URL: http://pdg.lbl.gov/2019/reviews/rpp2019-rev-top-quark.pdf (visited on 06/07/2020).

[7] R. Aaij et al. "Measurement of the *b*-quark production cross-section in 7 and 13 TeV *pp* collisions". In: *Phys. Rev. Lett.* 118 (2017), 052002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.052002. arXiv: 1612.05140 [hep-ex].

[8] *Combination of ATLAS and CMS top quark pair cross section measurements in the emu final state using proton-proton collisions at 8 TeV*. Tech. rep. CMS-PAS-TOP-14-016. CERN, 2014. URL: https://cds.cern.ch/record/1950834.

[9] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). *Physical Constants*. 2018. URL: http://pdg.lbl.gov/2019/mobile/reviews/pdf/rpp2018-rev-phys-constants-m.pdf (visited on 05/30/2020).

[10] K. J. Eskola. *Lecture notes for course FYSS4300 Particle Physics (University of Jyväskylä, Department of Physics), section 2*. Sept. 2019. URL: http://users.jyu.fi/~kaeskola/HITU2011/FYSH300_Sec2_p19-49.pdf.

[11] T. W. B. Kibble. "The Standard Model of Particle Physics". In: 2014. arXiv: 1412.4094 [physics.hist-ph].

[12] CERN. *The Standard Model*. 2020. URL: https://home.cern/science/physics/standard-model (visited on 06/03/2020).

[13] K. J. Eskola. *Lecture notes for course FYSS4300 Particle Physics (University of Jyväskylä, Department of Physics), section 8*. Sept. 2019. URL: http://users.jyu.fi/~kaeskola/HITU2011/FYSH300_Sec8_p221-239.pdf.

[14] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). *Quarks*. 2019. URL: http://pdg.ge.infn.it/2019/tables/rpp2019-sum-quarks.pdf (visited on 05/30/2020).

[15] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). *Leptons*. 2019. URL: http://pdg.lbl.gov/2019/tables/rpp2019-sum-leptons.pdf (visited on 05/30/2020).

[16] C. Patrignani et al. (Particle Data Group). *Neutrino Properties*. 2017. URL: http://pdg.lbl.gov/2017/listings/rpp2017-list-neutrino-prop.pdf (visited on 05/30/2020).

[17] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). *W Boson*. 2019. URL: http://pdg.lbl.gov/2019/listings/rpp2019-list-w-boson.pdf (visited on 05/30/2020).

[18] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). *Z Boson*. 2018. URL: http://pdg.lbl.gov/2018/listings/rpp2018-list-z-boson.pdf (visited on 05/30/2020).

[19] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). *Gauge and Higgs Bosons*. 2019. URL: http://pdg.lbl.gov/2019/tables/rpp2019-sum-gauge-higgs-bosons.pdf (visited on 05/30/2020).

[20] K. J. Eskola. *Lecture notes for course FYSS4300 Particle Physics (University of Jyväskylä, Department of Physics), section 4*. Sept. 2019. URL: http://users.jyu.fi/~kaeskola/HITU2011/FYSH300_Sec4_p91-123.pdf.

[21] P. A. Zyla et al. (Particle Data Group). *Status of Higgs Boson Physics*. 2020. URL: http://pdg.lbl.gov/2020/reviews/rpp2020-rev-higgs-boson.pdf (visited on 06/05/2020).

[22] D. J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics, 2nd Edition*. Pearson Prentice Hall, 2004. ISBN: 978-0131118928.

[23] K. J. Eskola. *Lecture notes for course FYSS4300 Particle Physics (University of Jyväskylä, Department of Physics), section 10*. Sept. 2019. URL: http://users.jyu.fi/~kaeskola/HITU2011/FYSH300_Sec10_p250-266.pdf.

[24] B. R. Martin and G. Shaw. *Particle Physics, 3rd Edition*. John Wiley & Sons, 2008. ISBN: 978-0470032947.

[25] K. J. Eskola. *Lecture notes for course FYSS4300 Particle Physics (University of Jyväskylä, Department of Physics), section 12*. Sept. 2019. URL: http://users.jyu.fi/~kaeskola/HITU2011/FYSH300_Sec12_p275-309.pdf.

[26] K. J. Eskola. *Lecture notes for course FYSS4556 Perturbative QCD (University of Jyväskylä, Department of Physics), sections 4.1 and 4.2*. Jan. 2020. URL: http://users.jyu.fi/~kaeskola/QCD2016/FYSH556_SECII_4_p44-78-Redacted.pdf.

[27] K. J. Eskola. *Lecture notes for course FYSS4300 Particle Physics (University of Jyväskylä, Department of Physics), section 7*. Sept. 2019. URL: http://users.jyu.fi/~kaeskola/HITU2011/FYSH300_Sec7_p200-220.pdf.

[28] P. A. Zyla et al. (Particle Data Group). *Quantum Chromodynamics*. 2020. URL: http://pdg.lbl.gov/2020/reviews/rpp2020-rev-higgs-boson.pdf (visited on 06/05/2020).

[29] S. Nejad. "The effect of meson wave function on heavy-quark fragmentation function". In: *Eur. Phys. J. A* 52 (2016), 127. DOI: 10.1140/epja/i2016-16127-9.

[30] B. R. Webber. "Fragmentation and hadronization". In: *Int. J. Mod. Phys. A* 15S1 (2000), 577. DOI: 10.1142/S0217751X00005334. arXiv: hep-ph/9912292 [hep-ph].

[31] S. Ferreres-Solé and T. Sjöstrand. "The space–time structure of hadronization in the Lund model". In: *Eur. Phys. J. C* 78 (2018), 983. DOI: 10.1140/epjc/s10052-018-6459-8. arXiv: 1808.04619 [hep-ph].

[32] A. Metz and A. Vossen. "Parton fragmentation functions". In: *Prog. Part. Nucl. Phys.* 91 (2016), 136. DOI: 10.1016/j.ppnp.2016.08.003. arXiv: 1607.02521 [hep-ex].

[33] I. Helenius and H. Paukkunen. "Revisiting the D-meson hadroproduction in general-mass variable flavour number scheme". In: *JHEP* 05 (2018), 196. DOI: 10.1007/jhep05(2018)196. arXiv: 804.03557 [hep-ph].

[34] K. J. Eskola. *Lecture notes for course FYSS4300 Particle Physics (University of Jyväskylä, Department of Physics), section 3*. Sept. 2019. URL: http://users.jyu.fi/~kaeskola/HITU2011/FYSH300_Sec3_p50-90.pdf.

[35] P. A. Zyla et al. (Particle Data Group). *Meson Summary Tables*. 2020. URL: http://pdg.lbl.gov/2020/tables/rpp2020-sum-mesons.pdf (visited on 06/06/2020).

[36] P. A. Zyla et al. (Particle Data Group). *Baryon Summary Tables*. 2020. URL: http://pdg.lbl.gov/2020/tables/rpp2020-sum-baryons.pdf (visited on 06/06/2020).

[37] J. Yoh. "The Discovery of the B quark at Fermilab in 1977: The Experiment coordinator's story". In: *AIP Conf. Proc.* 424 (1998), 29. DOI: 10.1063/1.55114.

[38] A. Khare. "The November J/ψ Revolution: Twenty-Five Years Later". In: *Curr. Sci.* 77 (1999), 1210. arXiv: hep-ph/9910468 [hep-ph]. URL: https://inspirehep.net/literature/509053.

[39] L. Adamczyk et al. "Measurements of D^0 and D^* production in p+p collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV". In: *Phys. Rev. D* 86 (2012), 072013. DOI: 10.1103/physrevd.86.072013. arXiv: 1204.4244 [nucl-ex].

[40] J. D. Richman and P. R. Burchat. "Leptonic and semileptonic decays of charm and bottom hadrons". In: *Rev. Mod. Phys.* 67 (1995), 893. DOI: 10.1103/revmodphys.67.893. arXiv: hep-ph/9508250 [hep-ph].

[41] P. A. Zyla et al. (Particle Data Group). *Charmed Mesons*. 2020. URL: http://pdg.ge.infn.it/2020/tables/rpp2020-tab-mesons-charm.pdf (visited on 11/12/2020).

[42] A. Adare et al. "Measurement of Bottom Versus Charm as a Function of Transverse Momentum with Electron-Hadron Correlations in p+p Collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV". In: *Phys. Rev. Lett.* 103 (2009), 082002. DOI: 10.1103/physrevlett.103.082002. arXiv: 0903.4851 [hep-ex].

[43] B. Abelev et al. "Beauty production in pp collisions at $\sqrt{s} = 2.76$ TeV measured via semi-electronic decays". In: *Phys. Lett. B* 738 (2014), 97. DOI: 10.1016/j.physletb.2014.09.026. arXiv: 1405.4144 [nucl-ex].

[44] B. Abelev et al. "Measurement of electrons from beauty hadron decays in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV". In: *Phys. Lett. B* 721 (2013), 13. DOI: 10.1016/j.physletb.2013.01.069. arXiv: 1208.1902 [hep-ex].

[45] B. Abelev et al. "Measurement of charm production at central rapidity in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 2.76$ TeV". In: *JHEP* 07 (2012), 191. DOI: 10.1007/jhep07(2012)191. arXiv: 1205.4007 [hep-ex].

[46] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). *Bottom Mesons*. 2018. URL: http://pdg.lbl.gov/2018/tables/rpp2018-tab-mesons-bottom.pdf (visited on 06/07/2020).

[47] S. Acharya et al. "Measurement of D-meson production at mid-rapidity in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV". In: *Eur. Phys. J. C* 77 (2017), 550. DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-5090-4. arXiv: 1702.00766 [hep-ex].

[48] CERN. *The Standard Model*. 2020. URL: https://home.cern/science/physics/heavy-ions-and-quark-gluon-plasma (visited on 06/09/2020).

[49] *Combination of ATLAS and CMS top-quark pair cross section measurements using proton-proton collisions at sqrt(s) = 7 TeV*. Tech. rep. CMS-PAS-TOP-12-003. CERN, 2013. URL: http://cds.cern.ch/record/1541952.

[50] T. Aaltonen et al. "Measurement of the top quark mass and $p\bar{p} \to t\bar{t}$ cross section in the all-hadronic mode with the CDF II detector". In: *Phys. Rev. D* 81 (2010), 052011. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.052011. arXiv: 1409.4906 [hep-ex].

[51] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). *Quark Masses*. 2019. URL: http://pdg.ge.infn.it/2019/reviews/rpp2018-rev-quark-masses.pdf (visited on 06/09/2020).

[52] G. Corcella. "The top-quark mass: challenges in definition and determination". In: *Front. Phys.* 7 (2019), 54. DOI: 10.3389/fphy.2019.00054. arXiv: 1903.06574 [hep-ph].

[53] R. D. Knight. *Physics for Scientists and Engineers: Pearson New International Edition (3rd Edition)*. Pearson, 2014. ISBN: 978-1-292-02078-5.

[54] CERN (CMS Collaboration). *What do we mean by "cross section" in particle physics?* 2018. URL: http://cms.web.cern.ch/news/what-do-we-mean-cross-section-particle-physics (visited on 07/04/2020).

[55] W. Herr and B Muratori. "Concept of luminosity". In: *CERN Accelerator School and DESY Zeuthen: Accelerator Physics*. 2006. DOI: 10.5170/CERN-2006-002.361.

[56] MathWorld–A Wolfram Web Resource (Weisstein, Eric W.). *Delta Function*. 2020. URL: https://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html (visited on 07/07/2020).

[57] R. Vogt. "What is the Real K Factor?" In: *Heavy Ion Physics* 17 (2003), 75. DOI: 10.1556/aph.17.2003.1.9. arXiv: hep-ph/0207359 [hep-ph].

[58] H. Fritzsch. "History of QCD". In: *Subnucl. Ser.* 50 (2014), 23. DOI: 10.1142/9789814603904_0004.

[59] HEPForge. *CT18 parton distribution functions*. 2019. URL: https://ct.hepforge.org/ (visited on 07/10/2020).

[60] P. Paakkinen. "Nuclear parton distribution functions". In: *Frascati Phys. Ser.* (2017), 33. arXiv: 1802.05927 [hep-ph]. URL: https://arxiv.org/abs/1802.05927.

[61] ERC project. *ERC Consolidator project CGCglasmaQGP*. 2020. URL: http://users.jyu.fi/~tulappi/erc/ (visited on 07/10/2020).

[62] S. Dulat et al. "New parton distribution functions from a global analysis of quantum chromodynamics". In: *Phys. Rev. D* 93 (2016), 033006. DOI: 10.1103/physrevd.93.033006. arXiv: 1506.07443 [hep-ph].

[63] G. Sterman et al. "Handbook of perturbative QCD". In: *Rev. Mod. Phys.* 67 (1995), 157. DOI: 10.1103/RevModPhys.67.157.

[64] K. J. Eskola. *Lecture notes for course FYSS4300 Particle Physics (University of Jyväskylä, Department of Physics), section 11.* Sept. 2019. URL: http://users.jyu.fi/~kaeskola/HITU2011/FYSH300_Sec11_p267-274.pdf.

[65] S. Höche. "Introduction to parton-shower event generators". In: *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: Journeys Through the Precision Frontier: Amplitudes for Colliders.* 2014. DOI: 10.1142/9789814678766_0005. arXiv: 1411.4085 [hep-ph].

[66] G. Ridolfi and S. Forte. "Renormalization and factorization scale dependence of observables in QCD". In: *J. Phys. G* 25 (1999), 1555. DOI: 10.1088/0954-3899/25/7/351.

[67] D. d'Enterria et al. "Confronting current NLO parton fragmentation functions with inclusive charged-particle spectra at hadron colliders". In: *Nucl. Phys. B* 883 (2014), 615. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2014.04.006. arXiv: 1311.1415 [hep-ph].

[68] K. J. Eskola. *Lecture notes for course FYSS4556 Perturbative QCD (University of Jyväskylä, Department of Physics), sections 1 and 2.* Jan. 2020. URL: http://users.jyu.fi/~kaeskola/QCD2016/FYSH556_I_and_II_Sec1_2_p1-34.pdf.

[69] R. P. Feynman. "The behavior of hadron collisions at extreme energies". In: *Conf. Proc. C* 690905 (1969), 237. URL: https://inspirehep.net/literature/57407.

[70] R. Placakyte. "Parton Distribution Functions". In: *31st International Symposium on Physics In Collision.* 2011. arXiv: 1111.5452 [hep-ph]. URL: https://inspirehep.net/literature/954990.

[71] K. J. Eskola. *Lecture notes for course FYSS4556 Perturbative QCD (University of Jyväskylä, Department of Physics), section 8.* Jan. 2020. URL: http://users.jyu.fi/~kaeskola/QCD2016/FYSH556_SecII_8_p50_16p-18.pdf.

[72] G. Altarelli and G. Parisi. "Asymptotic Freedom in Parton Language". In: *Nucl. Phys. B* 126 (1977), 298. DOI: 10.1016/0550-3213(77)90384-4.

[73] S. I. Alekhin et al. "DGLAP evolution and parton fits". In: *HERA and the LHC: A Workshop on the Implications of HERA for LHC Physics: Proceedings Part A*. 2005, 119. URL: https://inspirehep.net/literature/1497051.

[74] C. Peterson et al. "Scaling violations in inclusive e^+e^- annihilation spectra". In: *Phys. Rev. D* 27 (1983), 105. DOI: 10.1103/PhysRevD.27.105.

[75] O. Biebel et al. "Fragmentation Functions in e^+e^- Annihilation and Lepton-Nucleon DIS". In: *J. Phys. G* 33 (2006), 195. URL: https://pdg.lbl.gov/reviews/rppref/sports/2007/frag-web.pdf.

[76] B. L. Combridge. "Associated Production of Heavy Flavor States in p p and anti-p p Interactions: Some QCD Estimates". In: *Nucl. Phys. B* 151 (1979), 429. DOI: 10.1016/0550-3213(79)90449-8.

[77] MathWorld–A Wolfram Web Resource (Weisstein, E. W.). *Jacobian*. 2020. URL: https://mathworld.wolfram.com/Jacobian.html (visited on 08/22/2020).

[78] CERN. *ROOT: Data Analysis Framework*. 2020. URL: https://root.cern/ (visited on 06/19/2021).

[79] HEPForge. *CT14 parton distribution functions*. 2014. URL: https://ct.hepforge.org/PDFs/ct14.html (visited on 05/30/2020).

[80] K. J. Eskola, H. Paukkunen, and C. A. Salgado. "EPS09 — A new generation of NLO and LO nuclear parton distribution functions". In: *JHEP* 04 (2009), 065. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/04/065. arXiv: 0902.4154 [hep-ph].

[81] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). *c-Quark Mass*. 2020. URL: https://pdglive.lbl.gov/DataBlock.action?node=Q004M (visited on 10/12/2020).

[82] J. H. Kühn, M. Steinhauser, and C. Sturm. "Heavy quark masses from sum rules in four-loop approximation". In: *Nucl. Phys. B* 778 (2007), 192. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2007.04.036. arXiv: hep-ph/0702103 [hep-ex].

[83] K. G. Chetyrkin et al. "Charm and bottom quark masses: An update". In: *Phys. Rev. D* 80 (2009), 074010. DOI: 10.1103/physrevd.80.074010. arXiv: 0907.2110 [hep-ph].

[84] K. G. Chetyrkin et al. "Addendum to "Charm and bottom quark masses: An update"". In: *Phys. Rev. D* 96 (2017), 116007. DOI: 10.1103/physrevd.96.116007. arXiv: 1710.04249 [hep-ph].

[85] P. A. Zyla et al. (Particle Data Group). *b-Quark Mass*. 2020. URL: https://pdglive.lbl.gov/DataBlock.action?node=Q005M (visited on 10/12/2020).

[86] A. Banfi, G. P. Salam, and G. Zanderighi. "Phenomenology of event shapes at hadron colliders". In: *JHEP* 06 (2010), 038. DOI: 10.1007/jhep06(2010)038. arXiv: 1001.4082 [hep-ph].

[87] B. Abelev et al. *Measurement of charm production at central rapidity in proton-proton collisions at* $\sqrt{s} = 2.76$ *TeV*. Data Collection. 2012. DOI: 10.17182/hepdata.62077.

[88] D. Müller. "Charm production in pp collisions at 5 and 13 TeV at LHCb". In: *PoS* CHARM2016 (2016), 061. DOI: 10.22323/1.289.0061.

[89] R. Aaij et al. "Prompt charm production in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV". In: *Nucl. Phys. B* 871 (2013), 1. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2013.02.010. arXiv: 1302.2864 [hep-ex].

[90] P. A. Zyla et al. (Particle Data Group). *Charmed, Strange Mesons*. 2020. URL: http://pdg.ge.infn.it/2020/tables/rpp2020-tab-mesons-charm.pdf (visited on 11/12/2020).

[91] M. He and R. Rapp. "Charm-baryon production in proton-proton collisions". In: *Phys. Lett. B* 795 (2019), 117. DOI: 10.1016/j.physletb.2019.06.004. arXiv: 1902.08889 [nucl-th].

[92] R. Maciula and A. Szczurek. "Single and double charmed meson production at the LHC". In: *EPJ Web Conf.* 81 (2014), 01007. DOI: 10.1051/epjconf/20148101007.

[93] S. Acharya et al. "Measurement of D^0, D^+, D^{*+} and D_s^+ production in pp collisions at $\sqrt{s} = 5.02$ TeV with ALICE". In: *Eur. Phys. J. C* 79 (2019), 388. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6873-6. arXiv: 1901.07979 [nucl-ex].

[94] S. Acharya et al. *Measurement of* D^0, D^+, D^{*+} *and* D_s^+ *production in pp collisions at* $\sqrt{s} = 5.02$ *TeV with ALICE*. Data Collection. 2019. DOI: 10.17182/hepdata.89326.

[95] B. Abelev et al. "Measurement of charm production at central rapidity in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV". In: *JHEP* 01 (2012), 128. DOI: 10.1007/jhep01(2012)128. arXiv: 1111.1553 [hep-ex].

[96] B. Abelev et al. *Measurement of charm production at central rapidity in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV*. Data Collection. 2012. DOI: 10.17182/hepdata.58524.v2.

[97] A. Adare et al. *Measurement of Bottom versus Charm as a Function of Transverse Momentum with Electron-Hadron Correlations in $p + p$ Collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV*. Data Collection. 2009. DOI: 10.17182/hepdata.57326.

[98] B. B. Abelev et al. *Beauty production in pp collisions at $\sqrt{s} = 2.76$ TeV measured via semi-electronic decays*. Data Collection. 2014. DOI: 10.17182/hepdata.858.

[99] R. Aaij et al. "Erratum: Measurement of the b-Quark Production Cross Section in 7 and 13 TeV pp Collisions [Phys. Rev. Lett. 118, 052002 (2017)]". In: *Phys. Rev. Lett.* 119 (2017), 169901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.169901.

[100] R. Aaij et al. *Measurement of the b-quark production cross-section in 7 and 13 TeV pp collisions*. Data Collection. 2017. DOI: 10.17182/hepdata.79130.

[101] T. Affolder et al. "Measurement of the $t\bar{t}$ production cross section in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV". In: *Phys. Rev. D* 64 (2001), 032002. DOI: 10.1103/PhysRevD.64.032002. arXiv: hep-ex/0101036 [hep-ex].

[102] T. Affolder et al. "Erratum: Measurement of the $t\bar{t}$ production cross section in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.8$TeV [Phys. Rev. D 64, 032002 (2001)]". In: *Phys. Rev. D* 67 (2003), 119901. DOI: 10.1103/PhysRevD.67.119901.

[103] T. Affolder et al. *Measurement of the $t\bar{t}$ production cross section in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV*. Data Collection. 2001. DOI: 10.17182/hepdata.42935.

[104] T. Aaltonen et al. "Combination of measurements of the top-quark pair production cross section from the Tevatron Collider". In: *Phys. Rev. D* 89 (2014), 072001. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.072001. arXiv: 1309.7570 [hep-ex].

[105] V. M. Abazov et al. "$t\bar{t}$ production cross section in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV". In: *Phys. Rev. D* 67 (2003), 012004. DOI: 10.1103/physrevd.67.012004. arXiv: hep-ex/0205019 [hep-ex].

[106] A. M. Sirunyan et al. "Measurement of the $t\bar{t}$ production cross section, the top quark mass, and the strong coupling constant using dilepton events in pp collisions at $\sqrt{s} = 13\,\text{TeV}$". In: *Eur. Phys. J. C* 79 (2019), 368. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6863-8. arXiv: 1812.10505 [hep-ex].

[107] S. Chatrchyan et al. "Measurement of the $t\bar{t}$production cross section in the dilepton channel in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV". In: *JHEP* 11 (2012), 067. DOI: 10.1007/jhep11(2012)067. arXiv: 1208.2671 [hep-ex].

[108] A. M. Sirunyan et al. "Measurement of the $t\bar{t}$ production cross section using events with one lepton and at least one jet in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV". In: *JHEP* 09 (2017), 051. DOI: 10.1007/jhep09(2017)051. arXiv: 1701.06228 [hep-ex].

[109] V. M. Abazov et al. "Measurement of differential $t\bar{t}$ production cross sections in $p\bar{p}$ collisions". In: *Phys. Rev. D* 90 (2014), 092006. DOI: 10.1103/physrevd.90.092006. arXiv: 1401.5785 [hep-ex].

[110] A. M. Sirunyan et al. *Measurements of* $t\bar{t}$ *differential cross sections in proton-proton collisions at* $\sqrt{s} = 13$ *TeV using events containing two leptons.* Data Collection. 2019. DOI: 10.17182/hepdata.89307.

A Invarianttien amplitudien neliöiden yhtäpitävyys

B makefile

C Int.cc

D Plot.C

E Muuttujanvaihdot

F NLO-partonijakaumafunktiot

Liite A: Invarianttien amplitudien neliöiden yhtäpitävyys

Tutkielmassa on laskettu aliprosessien polarisoitumattomien invarianttien amplitudien neliöt käyttäen aaveita apuna. Tässä liitteessä näytetään, että nämä invarianttien amplitudien neliöt (yhtälöt (66) ja (76)) ovat yhtäpitävät lähteessä [76] esitettyjen tulosten kanssa, jotka on laskettu ilman aaveita.

Prosessi $q + \overline{q} \to Q + \overline{Q}$ (aloitan lähteen [76] esittämästä muodosta):

$$\begin{aligned}
\overline{\left|\mathcal{M}(q\overline{q} \to Q\overline{Q})\right|^2} &= \frac{64}{9}\pi^2\alpha^2 \frac{(m_Q^2 - \hat{t})^2 + (m_Q^2 - \hat{u})^2 + 2m_Q^2\hat{s}}{\hat{s}^2} \\
&= \frac{64\pi^2\alpha^2}{9\hat{s}^2}(m_Q^4 - 2m_Q^2\hat{t} + \hat{t}^2 + m_Q^4 - 2m_Q^2\hat{u} + \hat{u}^2 + 2m_Q^2\hat{s}) \\
&= \frac{64\pi^2\alpha^2}{9\hat{s}^2}(\hat{t}^2 + \hat{u}^2 + 2m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2(\hat{t} + \hat{u}) + 2m_Q^4) \\
&= \frac{64\pi^2\alpha^2}{9\hat{s}^2}(\hat{t}^2 + \hat{u}^2 + 2m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2(2m_Q^2 - \hat{s}) + 2m_Q^4) \\
&= \frac{64\pi^2\alpha^2}{9\hat{s}^2}(\hat{t}^2 + \hat{u}^2 + 4m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^4).
\end{aligned}$$

Prosessi $g + g \to Q + \overline{Q}$:

$$\begin{aligned}
&\overline{\left|\mathcal{M}(gg \to Q\overline{Q})\right|^2} \\
&= \pi^2\alpha_s^2\Big[\frac{12}{\hat{s}^2}(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u}) + \frac{8}{3}\frac{(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u}) - 2m_Q^2(m_Q^2 + \hat{t})}{(m_Q^2 - \hat{t})^2} \\
&+ \frac{8}{3}\frac{(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u}) - 2m_Q^2(m_Q^2 + \hat{u})}{(m_Q^2 - \hat{u})^2} - \frac{2m_Q^2(\hat{s} - 4m_Q^2)}{3(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u})} \\
&- 6\frac{(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u}) + m_Q^2(\hat{u} - \hat{t})}{\hat{s}(m_Q^2 - \hat{t})} - 6\frac{(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u}) + m_Q^2(\hat{t} - \hat{u})}{\hat{s}(m_Q^2 - \hat{u})}\Big] \\
&= \pi^2(\frac{g_s^2}{4\pi})^2\Big[\frac{12}{\hat{s}^2}(m_Q^4 - m_Q^2\hat{t} - m_Q^2\hat{u} + \hat{t}\hat{u}) + \frac{8}{3}\frac{m_Q^4 - m_Q^2\hat{t} - m_Q^2\hat{u} + \hat{t}\hat{u} - 2m_Q^4 - 2m_Q^2\hat{t}}{(m_Q^2 - \hat{t})^2} \\
&+ \frac{8}{3}\frac{m_Q^4 - m_Q^2\hat{t} - m_Q^2\hat{u} + \hat{t}\hat{u} - 2m_Q^4 - 2m_Q^2\hat{u}}{(m_Q^2 - \hat{u})^2} - \frac{2}{3(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u})}(m_Q^2\hat{s} - 4m_Q^4) \\
&- 6\frac{m_Q^4 - m_Q^2\hat{t} - m_Q^2\hat{u} + \hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{u} - m_Q^2\hat{t}}{\hat{s}(m_Q^2 - \hat{t})} - 6\frac{m_Q^4 - m_Q^2\hat{t} - m_Q^2\hat{u} + \hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{t} - m_Q^2\hat{u}}{\hat{s}(m_Q^2 - \hat{u})}\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{g_s^4}{16}\Big[\frac{12}{\hat{s}^2}(m_Q^4 - m_Q^2(\hat{t}+\hat{u}) + \hat{t}\hat{u}) + \frac{8}{3}\frac{-2m_Q^2\hat{t} - m_Q^2(\hat{t}+\hat{u}) + \hat{t}\hat{u} - m_Q^4}{(m_Q^2-\hat{t})^2} \\
&+ \frac{8}{3}\frac{-2m_Q^2\hat{u} - m_Q^2(\hat{t}+\hat{u}) + \hat{t}\hat{u} - m_Q^4}{(m_Q^2-\hat{u})^2} - \frac{2}{3(m_Q^2-\hat{t})(m_Q^2-\hat{u})}(m_Q^2\hat{s} - 4m_Q^4) \\
&- 6\frac{\hat{t}\hat{u} - 2m_Q^2\hat{t} + m_Q^4}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{t})} - 6\frac{\hat{t}\hat{u} - 2m_Q^2\hat{u} + m_Q^4}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{u})}\Big] \\
&= \frac{g_s^4}{24}\Big[\frac{18}{\hat{s}^2}(m_Q^4 - m_Q^2(2m_Q^2-\hat{s}) + \hat{t}\hat{u}) + \frac{4}{(m_Q^2-\hat{t})^2}(-2m_Q^2\hat{t} - m_Q^2(2m_Q^2-\hat{s}) + \hat{t}\hat{u} - m_Q^4) \\
&+ \frac{4}{(m_Q^2-\hat{u})^2}(-2m_Q^2\hat{u} - m_Q^2(2m_Q^2-\hat{s}) + \hat{t}\hat{u} - m_Q^4) + \frac{1}{(m_Q^2-\hat{t})(m_Q^2-\hat{u})}(-m_Q^2\hat{s} + 4m_Q^4) \\
&+ \frac{9}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{t})}(-\hat{t}\hat{u} + 2m_Q^2\hat{t} - m_Q^4) + \frac{9}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{u})}(-\hat{t}\hat{u} + 2m_Q^2\hat{u} - m_Q^4)\Big] \\
&= \frac{g_s^4}{24}\Big[\frac{18}{\hat{s}^2}(\hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} - m_Q^4) + \frac{4}{(m_Q^2-\hat{t})^2}(\hat{t}\hat{u} + m_Q\hat{s} - 2m_Q^2\hat{t} - 3m_Q^4) \\
&+ \frac{4}{(m_Q^2-\hat{u})^2}(\hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2\hat{u} - 3m_Q^4) + \frac{1}{(m_Q^2-\hat{t})(m_Q^2-\hat{u})}(-m_Q^2\hat{s} + 4m_Q^4) \\
&+ \frac{9}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{t})}(-\hat{t}\hat{u} + 2m_Q^2\hat{t} - m_Q^4) + \frac{9}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{u})}(-\hat{t}\hat{u} + 2m_Q^2\hat{u} - m_Q^4)\Big] \\
&= \frac{g_s^4}{24}\Big[\frac{4}{(m_Q^2-\hat{t})^2}(\hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2\hat{t} - 3m_Q^4) + \frac{4}{(m_Q^2-\hat{u})^2}(\hat{t}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} - 2m_Q^2\hat{u} - 3m_Q^4) \\
&+ \frac{18}{\hat{s}^2}(-\hat{s}^2 + \hat{t}\hat{u} - m_Q^2\hat{s} - m_Q^4) + \frac{18}{\hat{s}^2}(\hat{s}^2 + 2m_Q^2\hat{s}) + \frac{1}{(m_Q^2-\hat{t})(m_Q^2-\hat{u})}(-m_Q^2\hat{s} + 4m_Q^4) \\
&+ \frac{9}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{u})}(\hat{s}^2 + \hat{s}\hat{t} - \hat{t}\hat{u} - m_Q^2\hat{s} + m_Q^4) + \frac{9}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{u})}(-\hat{s}^2 - \hat{s}\hat{t} + m_Q^2\hat{s} + 2m_Q^2\hat{u} - 2m_Q^4) \\
&+ \frac{9}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{t})}(\hat{s}^2 + \hat{s}\hat{u} - \hat{t}\hat{u} - m_Q^2\hat{s} + m_Q^4) + \frac{9}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{t})}(-\hat{s}^2 - \hat{s}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} + 2m_Q^2\hat{t} - 2m_Q^4)\Big] \\
&= \overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_1^{\mu\nu *}} + \overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}} + \overline{\mathcal{M}_{3\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}} + 2\mathrm{Re}(\overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}} + \overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}} + \overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}}) \\
&- \overline{|\mathcal{M}_{G1}|^2} - \overline{|\mathcal{M}_{G2}|^2} + \frac{g_s^4}{24}\Big[\frac{18}{\hat{s}^2}(\hat{s}^2 + 2m_Q^2\hat{s}) + \frac{9}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{u})}(-\hat{s}^2 - \hat{s}\hat{t} + m_Q^2\hat{s} + 2m_Q^2\hat{u} - 2m_Q^4) \\
&+ \frac{9}{\hat{s}(m_Q^2-\hat{t})}(-\hat{s}^2 - \hat{s}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} + 2m_Q^2\hat{t} - 2m_Q^4)\Big] \\
&= \overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_1^{\mu\nu *}} + \overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}} + \overline{\mathcal{M}_{3\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}} + 2\mathrm{Re}(\overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_2^{\mu\nu *}} + \overline{\mathcal{M}_{2\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}} + \overline{\mathcal{M}_{1\mu\nu}\mathcal{M}_3^{\mu\nu *}}) \\
&- \overline{|\mathcal{M}_{G1}|^2} - \overline{|\mathcal{M}_{G2}|^2} + \frac{3g_s^4}{8\hat{s}}\Big[2\hat{s} + 4m_Q^2 + \frac{1}{m_Q^2-\hat{u}}(-\hat{s}^2 - \hat{s}\hat{t} + m_Q^2\hat{s} + 2m_Q^2\hat{u} - 2m_Q^4) \\
&+ \frac{1}{m_Q^2-\hat{t}}(-\hat{s}^2 - \hat{s}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} + 2m_Q^2\hat{t} - 2m_Q^4)\Big],
\end{aligned}
$$

missä

$$
\begin{aligned}
&2\hat{s} + 4m_Q^2 + \frac{1}{m_Q^2 - \hat{u}}(-\hat{s}^2 - \hat{s}\hat{t} + m_Q^2\hat{s} + 2m_Q^2\hat{u} - 2m_Q^4) \\
&+ \frac{1}{m_Q^2 - \hat{t}}(-\hat{s}^2 - \hat{s}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} + 2m_Q^2\hat{t} - 2m_Q^4) \\
&= \frac{1}{(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u})}(2\hat{s} + 4m_Q^2)(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u}) \\
&+ \frac{1}{(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u})}(-\hat{s}^2 - \hat{s}\hat{t} + m_Q^2\hat{s} + 2m_Q^2\hat{u} - 2m_Q^4)(m_Q^2 - \hat{t}) \\
&+ \frac{1}{(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u})}(-\hat{s}^2 - \hat{s}\hat{u} + m_Q^2\hat{s} + 2m_Q^2\hat{t} - 2m_Q^4)(m_Q^2 - \hat{u}) \\
&= \frac{1}{(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u})}(2m_Q^4\hat{s} - 2m_Q^2\hat{s}\hat{u} - 2m_Q^2\hat{s}\hat{t} + 2\hat{s}\hat{t}\hat{u} + 4m_Q^6 - 4m_Q^4\hat{u} - 4m_Q^4\hat{t} \\
&+ 4m_Q^2\hat{t}\hat{u} - m_Q^2\hat{s}^2 - m_Q^2\hat{s}\hat{t} + m_Q^4\hat{s} + 2m_Q^4\hat{u} - 2m_Q^6 + \hat{s}^2\hat{t} + \hat{s}\hat{t}^2 - m_Q^2\hat{s}\hat{t} - 2m_Q^2\hat{t}\hat{u} \\
&+ 2m_Q^4\hat{t} - m_Q^2\hat{s}^2 - m_Q^2\hat{s}\hat{u} + m_Q^4\hat{s} + 2m_Q^4\hat{t} - 2m_Q^6 + \hat{s}^2\hat{u} + \hat{s}\hat{u}^2 - m_Q^2\hat{s}\hat{u} - 2m_Q^2\hat{t}\hat{u} \\
&+ 2m_Q^4\hat{u}) \\
&= \frac{1}{(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u})}(\hat{s}^2\hat{t} + \hat{s}^2\hat{u} + \hat{s}\hat{t}^2 + \hat{s}\hat{u}^2 + 2\hat{s}\hat{t}\hat{u} \\
&- 2m_Q^2\hat{s}^2 - 4m_Q^2\hat{s}\hat{t} - 4m_Q^2\hat{s}\hat{u} + 4m_Q^4\hat{s}) \\
&= \frac{1}{(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u})}(\hat{s}^2(\hat{t} + \hat{u}) + \hat{s}(\hat{t}^2 + \hat{u})^2 - 2m_Q^2\hat{s}^2 - 4m_Q^2\hat{s}(\hat{t} + \hat{u}) + 4m_Q^4\hat{s}) \\
&= \frac{1}{(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u})}(\hat{s}^2(2m_Q^2 - \hat{s}) + \hat{s}(2m_Q^2 - \hat{s})^2 - 2m_Q^2\hat{s}^2 \\
&- 4m_Q^2\hat{s}(2m_Q^2 - \hat{s}) + 4m_Q^4\hat{s}) \\
&= \frac{1}{(m_Q^2 - \hat{t})(m_Q^2 - \hat{u})}(2m_Q^2\hat{s}^2 - \hat{s}^3 + 4m_Q^4\hat{s} - 4m_Q^2\hat{s}^2 + \hat{s}^3 - 2m_Q^2\hat{s}^2 \\
&- 8m_Q^4\hat{s} + 4m_Q^2\hat{s}^2 + 4m_Q^4\hat{s}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

```
not_test: Int.cc
/usr/bin/g++ -Wall -fPIC -g -pthread -m64 -I/usr/include/root Int.cc
ct11pdf.cc -L/usr/lib64/root -lCore -lRIO -lNet -lHist -lGraf -lGraf3d -
lGpad -lTree -lRint -lPostscript -lMatrix -lPhysics -lMathCore -lThread -
pthread -lm -ldl -rdynamic ct11pdf.h -o int
```

```
// TÃ¤mÃ¤ pro gradu-tutkielmaa varten tehty ohjelma laskee ja analysoi
kvanttivÃ¤ridynamiikan hÃ¤iriÃ¶teorian alimman kertaluvun (raskaiden)
kvarkkiparien tuottoa protoni-protoni- sekÃ¤ protoni-antiprotoni-tÃ¶rmÃ
¤yksissÃ¤. Skaala- ja massavalinnan sekÃ¤ fragmentaatiofraktioiden ja PDF-
settien virheiden aiheuttamat epÃ¤varmuudet lasketaan ja esitetÃ¤Ã¤n
automaattisesti lasketuille eri vaikutusaloille (syÃ¶tettyjen asetusten/
parametrien pohjalta). K-tekijÃ¤t (kok.tulos/LO-tulos) lasketaan eri
skaalavalinnoille. LisÃ¤ksi kvarkkiparien tuottoon kontribuoivien eri
aliprosessien suhteelliset vaikutukset lasketaan. NÃ¤iden tulosten
graafinen esitys (ja K-kerroinsovitukset) on tehty piirto-ohjelmassa
Plot.C. // Teemu Kovanen
// JyvÃ¤skylÃ¤n yliopisto
// Fysiikan laitos
// 25.10.2019


#include <iostream>
#include "TMath.h"
#include "TF1.h"
#include "TF2.h"
#include "TF3.h"
#include "TH1D.h"
#include "TCanvas.h"
#include "ct11pdf.h"
#include "TFile.h"
#include "TGraph.h"
#include "TGraphErrors.h" #include "TGraphAsymmErrors.h"
#include "TFitResultPtr.h"

// KÃ¤ytetyt partonijakaumafunktiot ja vastaavat tiedostot: https://
hep.pa.msu.edu/cteq/public/index.html
int pdfs = 59; // LO- ja NLO-PDF-settien yhteislukumÃ¤Ã¤rÃ¤
int types = 6; //Aliprosesseissa vuorovaikuttavien hiukkasparien lukumÃ¤Ã
¤rÃ¤, sisÃ¤ltÃ¤Ã¤ tapaukset g, u, d, s, c, b (hiukkanen + antihiukkanen).
PDF:Ã¤Ã¤ hiukkaselle t ei ole kÃ¤ytetyissÃ¤ PDF-seteissÃ¤. int points =
150; string it[59] =
{"CT14n.00.pds","CT14n.01.pds","CT14n.02.pds","CT14n.03.pds","CT14n.04.pds
","CT14n.05.pds","CT14n.06.pds","CT14n.07.pds","CT14n.08.pds","CT14n.09.pd
s","CT14n.10.pds","CT14n.11.pds","CT14n.12.pds","CT14n.13.pds","CT14n.14.p
ds","CT14n.15.pds","CT14n.16.pds","CT14n.17.pds","CT14n.18.pds","CT14n.19.
pds","CT14n.20.pds","CT14n.21.pds","CT14n.22.pds","CT14n.23.pds","CT14n.24
.pds","CT14n.25.pds","CT14n.26.pds","CT14n.27.pds","CT14n.28.pds","CT14n.2
9.pds","CT14n.30.pds","CT14n.31.pds","CT14n.32.pds","CT14n.33.pds","CT14n.
34.pds","CT14n.35.pds","CT14n.36.pds","CT14n.37.pds","CT14n.38.pds","CT14n
.39.pds","CT14n.40.pds","CT14n.41.pds","CT14n.42.pds","CT14n.43.pds","CT14
n.44.pds","CT14n.45.pds","CT14n.46.pds","CT14n.47.pds","CT14n.48.pds","CT1
4n.49.pds","CT14n.50.pds","CT14n.51.pds","CT14n.52.pds","CT14n.53.pds","CT
14n.54.pds","CT14n.55.pds","CT14n.56.pds","CT14LN.pds","CT14LL.pds"};

cteqpdf ct14n;

//CT14-LO- ja CT14-NLO-settien ilmoittamat massojen arvot (GeV)
double mg = 0;
double mu = 0.001; double md = 0.001;
double ms = 0.2;
double mc = 1.3;
double mb = 4.75; //HUOM: poikkeaa huomattavasti Particle Data Groupin
```

```
ilmoittamasta arvosta (4.18 GeV)
double mt = 172;

// Funktiot ja integrandit
double YksTesti(double *x, double *p);
double TotCSpp(double *x, double *p);
double Intgpp(double *x, double *p);
double PetFF(double *x, double *p);
double PetFFeff(double *x, double *p);
double DifCS1(double *x, double *p);
double DifCS2(double *x, double *p);
double DifIntg1(double *x, double *p);
double DifCS3(double *x, double *p);
double DifIntg2(double *x, double *p);
double CutCS1(double *x, double *p);
double CutIntg1(double *x, double *p);
double DifCS4(double *x, double *p);
double DifIntg3(double *x, double *p);
double CutCS2(double *x, double *p);
double CutIntg2(double *x, double *p);

using namespace std;



int main() {

/*
// Tarkistetaan silmukkakehittelyjen lukumÃ¤Ã¤rÃ¤. NLO:lle 1, LN:le 2 ja
LL:lle 1.
ct14n.setct11(it[0]);
 cout << "Order of PDFs for CT14NLO: " << ct14n.Iorder << endl;
ct14n.pdfexit();

ct14n.setct11(it[57]);
cout << "Order of PDFs for CT14LO (LN): " << ct14n.Iorder << endl;
ct14n.pdfexit();

ct14n.setct11(it[58]);
cout << "Order of PDFs for CT14LO (LL): " << ct14n.Iorder << endl;
ct14n.pdfexit();
*/

ct14n.setct11(it[58]);

/*
// Tarkistetaan halutessa, ettÃ¤ protonin sisÃ¤ltÃ¤mien eri partonien
liikemÃ¤Ã¤rÃ¤osuuksien summa on yksi.
double Qyt = 1.3;
TF1 *fYksTesti = new TF1("fYksTesti", YksTesti, 0, 1, 3);
fYksTesti->SetParameter(0, Qyt); // PDF:ien skaalavalinta
fYksTesti->SetParameter(1, 1); // Gluonien osuuden kerroin
fYksTesti->SetParameter(2, 1); // Kvarkkien ja antikvarkkien osuuden
kerroin
double yt = fYksTesti->Integral(0.0,1.0);
cout<< "Integrointitesti antaa arvon " << yt << endl;
```

```
fYksTesti->SetParameter(1, 0);
double pp1 = fYksTesti->Integral(0.0,1.0);

fYksTesti->SetParameter(1, 1);
fYksTesti->SetParameter(2, 0); double pp2 = fYksTesti->Integral(0.0,1.0);
fYksTesti->SetParameter(2, 1); //Palautus oikeaksi

cout<< "Kvarkkien ja antikvarkkien osuus protonin liikemÃ¤Ã¤rÃ¤stÃ¤ on "
<< pp1 << " ja gluonien " << pp2 << ", skaalavalinnalla Q = " << Qyt <<
"." <<endl; */


// Petersonin fragmentaatiofunktio c-kvarkille (hadronille luovutetun
liikemÃ¤Ã¤rÃ¤osuuden z funktio) (Peterson, C. et al. Phys.Rev. D27 (1983)
105 SLAC-PUB-2912) TF1 *fPetFFc = new TF1("fPetFFc", PetFF, 0.0, 1.0, 2);
fPetFFc->SetParameter(0, 0.15); // Kvarkkia vastaava Petersonin
fragmentaatiofunktion parametri (katso paperi) fPetFFc->SetParameter(1,
1.28267); // Normalisaatio siten, ettÃ¤ integraali mÃ¤Ã¤rittelyalueen yli
antaa arvon yksi.

// Petersonin fragmentaatiofunktio b-kvarkille
TF1 *fPetFFb = new TF1("fPetFFb", PetFF, 0.0, 1.0, 2);
fPetFFb->SetParameter(0, 0.016);
fPetFFb->SetParameter(1, 0.247843);
 // Petersonin fragmentaatiofunktion karkeasti approksimoitu efekti c-
hadronien p_T-jakauman arvoihin, integrandi (katso graduteksti) TF1
*fPetFFcEff = new TF1("fPetFFcEff", PetFFeff, 0.0, 1.0, 3);
fPetFFcEff->SetParameter(0, 0.15); // Kvarkkia vastaava parametri
fPetFFcEff->SetParameter(1, 1.28267); // AlkuperÃ¤inen normalisaatio
(katso fPetFFc-funktio)
fPetFFcEff->SetParameter(2, 3.71); // Kuvasta mÃ¤Ã¤ritetty jakauman kÃ
¤yttÃ¤ytymistÃ¤ kuvaavan potenssin itseisarvo

double ddeceff1 = fPetFFcEff->Integral(0.0,1.0);
fPetFFcEff->SetParameter(2, 4.55);
double ddeceff2 = fPetFFcEff->Integral(0.0,1.0);

//cout << "Approksimoitu keskimÃ¤Ã¤rÃ¤inen c-hadronien tuoton p_T-
differentioidun vaikutusalan lasku, kun fragmentaatiofunktio otetaan
huomioon, on pienimmillÃ¤Ã¤n " << 100*(1.0-ddeceff1) << " % ja
suurimmillaan " << 100*(1.0-ddeceff2) << " %." << endl;

// Vastaava efektin suuruutta kuvaava integrandi b-hadroneille
TF1 *fPetFFbEff = new TF1("fPetFFbEff", PetFFeff, 0.0, 1.0, 3);
fPetFFbEff->SetParameter(0, 0.016);
fPetFFbEff->SetParameter(1, 0.247843);
fPetFFbEff->SetParameter(2, 4.0);

//cout << "Approksimoitu keskimÃ¤Ã¤rÃ¤inen b-hadronien tuoton p_T-
differentioidun vaikutusalan lasku, kun fragmentaatiofunktio otetaan
huomioon, on " << 100*(1.0-(fPetFFbEff->Integral(0.0,1.0))) << " %." <<
endl;



/// VAIKUTUSALOJEN FUNKTIOT ///
// YleistÃ¤ funktioista:
```

// 1. Funktiot laskevat alimman kertaluvun vaikutusaloja, jotka ovat yhden muuttujan funktiota.
// 2. Funktioiden lausekkeiden ja vastaavien parametrien yksityiskohtaisimmat kuvaukset lÃ¶ytyvÃ¤t riveiltÃ¤, joissa kyseistÃ¤ lauseketta kÃ¤ytetÃ¤Ã¤n ensimmÃ¤isen kerran ohjelmassa. // 3. Vain kvarkkiparien tuottoa on kÃ¤sitelty (katso graduteksti). LÃ¤htÃ¶tilan partonit on oletettu massattomiksi. // 4. Hadronien tuottojen vaikutusalojen laskemisessa on oletettu, ettÃ¤ liikemÃ¤Ã¤rÃ¤n suunta ja suuruus sÃ¤ilyvÃ¤t hadronisaatiossa. Hadronien fragmentaatiofunktioita ei ole siten kÃ¤ytetty, vaan niiden sijasta hadronisaatiota on kÃ¤sitelty vastaavien fragmentaatiofraktioiden avulla. TÃ¤mÃ¤n approksimaation vaikutusta on arvioitu karkeasti Petersonin fragmentaatiofunktion avulla (katso graduteksti ja funktiot). // 5. Jokaisella funktiolla on mahdollisuus valita pp- taikka pp_bar-tÃ¶rmÃ¤ys.
// 6. Funktioissa (ja kaikkialla muuallakin ohjelmassa) skaalalla tarkoitetaan arvoa Q, ei arvoa QÂ².
// 7. Funktioiden parametrit "g ... b ja b_bar" vastaavat eri partonien vÃ¤listen reaktioiden osuuksia lasketusta vaikutusalasta. CT14-partonijakaumafunktiot eivÃ¤t sisÃ¤ltÃ¤neet t-kvarkin jakaumaa. Siksi sitÃ¤ ei ole otettu huomioon eri partonien suhteellisia osuuksia vaikutusalasta laskettaessa. // 8. Tarkastellun lopputilahiukkasen (hadronin) massa tulee ilmoittaa joissain tapauksissa parametreissa, sillÃ¤ sen arvo vaikuttaa mm. rapiditeetin integroimisvÃ¤liin. // 9. Aliprosessin kokonaisvaikutusalan lauseketta kÃ¤ytetÃ¤Ã¤n yhdessÃ¤ tapauksessa (TotCSpp), kaikissa muissa se on kolmesti differentioitu lauseke. // 10. Kaikki vaikutusalat on laskettu yksikÃ¶issÃ¤ (GeV)â»Â² tai (GeV)â»Â³. Tapauskohtaiset yksikÃ¶nmuunnosparametrit (sekÃ¤ fragmentaatiofraktiot) on viety tarkoituksella integrandiin laskentatarkkuuden takaamiseksi (arvoiltaan liian pienet integrandit lasketaan epÃ¤tarkasti). // 11. Lausekkeiden 2D- ja 3D-integraalien laskentatarkkuudet on asetettu suuriksi, jotta eri partonien reaktioiden suhteellisten osuuksien arvot saadaan tarkasti laskettua. // 12. ROOTissa ajettaessa saatetaan saada varoituksia liittyen integraalien laskentatarkkuuksiin, joita ei ole kyetty saavuttamaan. Optimointi mahdollista nÃ¤iden ilmoitusten avulla.

```
 //TotCSpp: Lasketaan tarkasteltujen kvarkkien (tai hadronien) tuoton kokonaisvaikutusala CMS-energian funktiona.

double cEmin1 = 2*0.00127; // TeV
double cEmax1 = 8.0;
double cEvali1 = cEmax1 - cEmin1;

TF1 *fTotCScc1 = new TF1("fTotCScc1", TotCSpp, 0, cEmax1, 17); // MÃ¤Ã¤rittelyvÃ¤li alkaa kokonaisvaikutusaloilla nollasta, sillÃ¤ massaparametria tulee pystyÃ¤ muokkaamaan, katso grcmmax- ja grcmmin-graafit

fTotCScc1->SetParameter(0, 1.27); // Kvarkin massa
fTotCScc1->SetParameter(1, 1); // 1 = protoni-protoni-tÃ¶rmÃ¤ys, -1 = protoni-antiprotoni tÃ¶rmÃ¤ys
fTotCScc1->SetParameter(2, 2.0); // Skaalakerroin alfalle, skaala on massa kertaa tÃ¤mÃ¤ luku
fTotCScc1->SetParameter(3, 2.0); // Vastaava skaalakerroin PDF:ille
fTotCScc1->SetParameter(4, 0); // Kun = 1, niin Q alfalle on aliprosessin kokonaisenergian (sqrt(s^)) kertaluku fTotCScc1->SetParameter(5, 0); //
```

Vastaava skaalatyypin valintaparametri partonijakaumafunktioille
fTotCScc1->SetParameter(6, 2.0); // Q on sqrt(s^) kertaa tÃ¤mÃ¤ luku, kun alfan skaalavalintaparametri on yhtÃ¤ kuin 1 fTotCScc1->SetParameter(7, 2.0); // Vastaava skaalavalintaparametri PDF:ille
fTotCScc1->SetParameter(8, 1.000); // Fragmentaatiofraktion arvo
fTotCScc1->SetParameter(9, 1000); // YksikÃ¶nmuunnosparametri CMS-energialle // TeV --> GeV
fTotCScc1->SetParameter(10, 0.389379337919); // YksikÃ¶nmuunnosparametri vaikutusalalle. 0.3893793656, kun (GeV)â»Â² --> mb fTotCScc1->SetParameter(11, 1); // g
fTotCScc1->SetParameter(12, 1); // u ja u_bar
fTotCScc1->SetParameter(13, 1); // d ja d_bar
fTotCScc1->SetParameter(14, 1); // s ja s_bar
fTotCScc1->SetParameter(15, 1); // c ja c_bar
fTotCScc1->SetParameter(16, 1); // b ja b_bar

// CutCS2: Lasketaan integroitu vaikutusala tarkasteltujen kvarkkien tai hadronien tuotolle, valituilla rapiditeetti- ja p_T-leikkauksilla, CMS-energian funktiona. Leikkausrajoitukset koskevat ainoastaan toista tuotetuista kvarkeista/hadroneista.
 double cEmin2 = 0.016; // TeV //HUOM: Rapiditeetti (siis c-kvarkin rapiditetti) vaikuttaa energian minimiin!
double cEmax2 = 14.0;
double cEvali2 = cEmax2 - cEmin2;

TF1 *fCutCScc1 = new TF1("fCutCScc1", CutCS2, 0, cEmax2, 22);

fCutCScc1->SetParameter(0, 1.27); // Tuotetun kvarkin massa
fCutCScc1->SetParameter(1, 1.9); // Tuotetun kvarkin/hadronin massa // Nyt approksimoitu c-hadronin keskimÃ¤Ã¤rÃ¤inen massa (katso vastaavat kokeelliset tulokset ja graduteksti) fCutCScc1->SetParameter(2, 1); // TÃ¶rmÃ¤yksen tyyppi: 1 = pp, -1 = pp_bar
fCutCScc1->SetParameter(3, 0.0); // p_T-leikkauksen alaraja
fCutCScc1->SetParameter(4, 8.0); // p_T-leikkauksen ylÃ¤raja
fCutCScc1->SetParameter(5, 2.0); // Rapiditeettileikkauksen alaraja
fCutCScc1->SetParameter(6, 4.5); // Rapiditeettileikkauksen ylÃ¤raja
fCutCScc1->SetParameter(7, 2.0); // Alfan skaala on massa kertaa tÃ¤mÃ¤ luku
fCutCScc1->SetParameter(8, 2.0); // PDF:ien skaala on massa kertaa tÃ¤mÃ¤ luku fCutCScc1->SetParameter(9, 1); // Kun = 1, niin alfan skaala on m_T:n kertaluku
fCutCScc1->SetParameter(10, 1); // Vastaava skaalavalintaparametri PDF:ille
fCutCScc1->SetParameter(11, 1.0); // Alfan skaala on m_T kertaa tÃ¤mÃ¤ luku, kun alfan skaalavalinta parametri on yhtÃ¤ kuin 1 fCutCScc1->SetParameter(12, 1.0); // Vastaava vaihtoehtoinen skaala PDF:ille
fCutCScc1->SetParameter(13, 1.000); //Fragmentaatiofraktio
fCutCScc1->SetParameter(14, 1000); // YksikÃ¶nmuunnosparametri CMS-energialle // TeV --> GeV
fCutCScc1->SetParameter(15, 389.379337919); // YksikÃ¶nmuunnosparametri vaikutusalalle. 389,379337919, kun (GeV)â»Â² --> Âµb fCutCScc1->SetParameter(16, 1); // g
fCutCScc1->SetParameter(17, 1); // u ja u_bar
fCutCScc1->SetParameter(18, 1); // d ja d_bar
fCutCScc1->SetParameter(19, 1); // s ja s_bar

```
fCutCScc1->SetParameter(20, 1); // c ja c_bar
fCutCScc1->SetParameter(21, 1); // b ja b_bar


 // DifCS1: Lasketaan kvarkin taikka hadronin p_T-differentioitu
vaikutusala halutulla energialla ja rapiditeettileikkauksella. Leikkaus
koskee vain toista kahdesta tuotetusta kvarkista/hadronista.

double chymin1 = -0.5;
double chymax1 = 0.5;
double cE1 = 2.76*1000;
double cptmin1 = 1.0; // GeV
double cptmax1 = 12.0;
double cptvali1 = cptmax1 - cptmin1;
TF1 *fDifCScc1 = new TF1("fDifCScc1", DifCS1, cptmin1, cptmax1, 21);

fDifCScc1->SetParameter(0, 1.27); // Tuotetun kvarkin massa
fDifCScc1->SetParameter(1, 1.86483); // +- 0,00005 GeV // Tarkastellun
hadronin (tai kvarkin) massa
fDifCScc1->SetParameter(2, cE1); // CMS-tÃ¶rmÃ¤ysenergia (GeV)
fDifCScc1->SetParameter(3, 1); // 1 = pp-tÃ¶rmÃ¤ys, -1 = pp_bar-tÃ¶rmÃ¤ys
fDifCScc1->SetParameter(4, chymin1); // Rapiditeettileikkauksen alaraja
fDifCScc1->SetParameter(5, chymax1); // Rapiditeettileikkauksen ylÃ¤raja
fDifCScc1->SetParameter(6, 2.0); // Skaalakerroin alfalle, skaala on massa
kertaa tÃ¤mÃ¤ luku fDifCScc1->SetParameter(7, 2.0); // Vastaava
skaalakerroin PDF:ille
fDifCScc1->SetParameter(8, 1); // Kun = 1, niin alfan skaala on m_T:n
kertaluku
fDifCScc1->SetParameter(9, 1); // Vastaava skaalavalintaparametri PDF:ille
fDifCScc1->SetParameter(10, 1.0); // Vaihtoehtoinen skaalakerroin alfalle,
skaala on m_T kertaa tÃ¤mÃ¤ luku fDifCScc1->SetParameter(11, 1.0); //
Vastaava skaalakerroin PDF:ille
fDifCScc1->SetParameter(12, 0.557); // Fragmentaatiofraktion arvo
fDifCScc1->SetParameter(13, 1.0); // YksikÃ¶nmuunnosparametri
poikittaisliikemÃ¤Ã¤rÃ¤lle, GeV
fDifCScc1->SetParameter(14, 389.379337919); // YksikÃ¶nmuunnosparametri.
389,3793379, kun (GeV)â»Â³ ---> Âµb/GeV  fDifCScc1->SetParameter(15, 1); /
/ g
fDifCScc1->SetParameter(16, 1); // u ja u_bar
fDifCScc1->SetParameter(17, 1); // d ja d_bar
fDifCScc1->SetParameter(18, 1); // s ja s_bar
fDifCScc1->SetParameter(19, 1); // c ja c_bar
fDifCScc1->SetParameter(20, 1); // b ja b_bar



double cptmin2 = 2.0; // GeV double cptmax2 = 12.0;
double cptvali2 = cptmax2 - cptmin2;
TF1 *fDifCScc2 = new TF1("fDifCScc2", DifCS1, cptmin2, cptmax2, 21);

fDifCScc2->SetParameter(0, 1.27); // Kvarkin massa
fDifCScc2->SetParameter(1, 1.86965); // +- 0,00005 GeV // Hadronin massa
fDifCScc2->SetParameter(2, cE1); // CMS-energia
fDifCScc2->SetParameter(3, 1); // TÃ¶rmÃ¤ystyyppi
fDifCScc2->SetParameter(4, chymin1); // Rapiditeettileikkauksen alaraja
fDifCScc2->SetParameter(5, chymax1); // Rapiditeettileikkauksen ylÃ¤raja
fDifCScc2->SetParameter(6, 2.0); // Skaalavalinnat
```

```
fDifCScc2->SetParameter(7, 2.0);
fDifCScc2->SetParameter(8, 1);
fDifCScc2->SetParameter(9, 1);
fDifCScc2->SetParameter(10, 1.0);
fDifCScc2->SetParameter(11, 1.0);
fDifCScc2->SetParameter(12, 0.226); // Fragmentaatiofraktio
fDifCScc2->SetParameter(13, 1.0); // GeV
fDifCScc2->SetParameter(14, 389.379337919); // YksikÃ¶nmuunnosparametri.
389,3793379, kun (GeV)â»Â³ ---> Âµb/GeV  fDifCScc2->SetParameter(15, 1); /
/ g fDifCScc2->SetParameter(16, 1); // u ja u_bar
fDifCScc2->SetParameter(17, 1); // d ja d_bar
fDifCScc2->SetParameter(18, 1); // s ja s_bar
fDifCScc2->SetParameter(19, 1); // c ja c_bar
fDifCScc2->SetParameter(20, 1); // b ja b_bar



TF1 *fDifCScc3 = new TF1("fDifCScc3", DifCS1, cptmin2, cptmax2, 21);

fDifCScc3->SetParameter(0, 1.27); // Kvarkin massa
fDifCScc3->SetParameter(1, 2.01026); // +- 0,00005 GeV // Hadronin massa
fDifCScc3->SetParameter(2, cE1); // CMS-energia
fDifCScc3->SetParameter(3, 1); // TÃ¶rmÃ¤ystyyppi
fDifCScc3->SetParameter(4, chymin1); // Rapiditeettileikkauksen alaraja
fDifCScc3->SetParameter(5, chymax1); // Rapiditeettileikkauksen ylÃ¤raja
fDifCScc3->SetParameter(6, 2.0); // Skaalavalinnat
fDifCScc3->SetParameter(7, 2.0);
fDifCScc3->SetParameter(8, 1);
fDifCScc3->SetParameter(9, 1);
fDifCScc3->SetParameter(10, 1.0);
fDifCScc3->SetParameter(11, 1.0);
fDifCScc3->SetParameter(12, 0.238); // Fragmentaatiofraktio fDifCScc3-
>SetParameter(13, 1.0); // GeV
fDifCScc3->SetParameter(14, 389.379337919); // YksikÃ¶nmuunnosparametri.
389,3793379, kun (GeV)â»Â³ ---> Âµb/GeV  fDifCScc3->SetParameter(15, 1); /
/ g
fDifCScc3->SetParameter(16, 1); // u ja u_bar
fDifCScc3->SetParameter(17, 1); // d ja d_bar
fDifCScc3->SetParameter(18, 1); // s ja s_bar
fDifCScc3->SetParameter(19, 1); // c ja c_bar
fDifCScc3->SetParameter(20, 1); // b ja b_bar



double cE2 = 5.02*1000;
double cptmin3 = 0.0; // GeV
double cptmax3 = 36.0;
double cptvali3 = cptmax3 - cptmin3;
TF1 *fDifCScc4 = new TF1("fDifCScc4", DifCS1, cptmin3, cptmax3, 21);

fDifCScc4->SetParameter(0, 1.27); // Kvarkin massa
fDifCScc4->SetParameter(1, 1.86483); // +- 0,00005 GeV // Hadronin massa
fDifCScc4->SetParameter(2, cE2); // CMS-energia
fDifCScc4->SetParameter(3, 1); // TÃ¶rmÃ¤ystyyppi
fDifCScc4->SetParameter(4, chymin1); // Rapiditeettileikkauksen alaraja
fDifCScc4->SetParameter(5, chymax1); // Rapiditeettileikkauksen ylÃ¤raja
fDifCScc4->SetParameter(6, 2.0); // Skaalavalinnat
```

```
fDifCScc4->SetParameter(7, 2.0);
fDifCScc4->SetParameter(8, 1);
fDifCScc4->SetParameter(9, 1);
fDifCScc4->SetParameter(10, 1.0);
fDifCScc4->SetParameter(11, 1.0);
fDifCScc4->SetParameter(12, 0.557); // Fragmentaatiofraktio
fDifCScc4->SetParameter(13, 1.0); // GeV
fDifCScc4->SetParameter(14, 389.379337919); // YksikÃ¶nmuunnosparametri.
389,3793379, kun (GeV)â»Â³ ---> Âµb/GeV  fDifCScc4->SetParameter(15, 1); /
/ g
fDifCScc4->SetParameter(16, 1); // u ja u_bar
fDifCScc4->SetParameter(17, 1); // d ja d_bar
fDifCScc4->SetParameter(18, 1); // s ja s_bar
fDifCScc4->SetParameter(19, 1); // c ja c_bar
fDifCScc4->SetParameter(20, 1); // b ja b_bar



double cptmin4 = 1.0; // GeV
double cptmax4 = 36.0;
double cptvali4 = cptmax4 - cptmin4;
TF1 *fDifCScc5 = new TF1("fDifCScc5", DifCS1, cptmin4, cptmax4, 21);

fDifCScc5->SetParameter(0, 1.27); // Kvarkin massa fDifCScc5-
>SetParameter(1, 2.01026); // +- 0,00005 GeV // Hadronin massa
fDifCScc5->SetParameter(2, cE2); // CMS-energia
fDifCScc5->SetParameter(3, 1); // TÃ¶rmÃ¤ystyyppi
fDifCScc5->SetParameter(4, chymin1); // Rapiditeettileikkauksen alaraja
fDifCScc5->SetParameter(5, chymax1); // Rapiditeettileikkauksen ylÃ¤raja
fDifCScc5->SetParameter(6, 2.0); // Skaalavalinnat
fDifCScc5->SetParameter(7, 2.0);
fDifCScc5->SetParameter(8, 1);
fDifCScc5->SetParameter(9, 1);
fDifCScc5->SetParameter(10, 1.0);
fDifCScc5->SetParameter(11, 1.0);
fDifCScc5->SetParameter(12, 0.238); // Fragmentaatiofraktio
fDifCScc5->SetParameter(13, 1.0); // GeV
fDifCScc5->SetParameter(14, 389.379337919); // YksikÃ¶nmuunnosparametri.
389,379337919, kun (GeV)â»Â³ ---> Âµb/GeV  fDifCScc5->SetParameter(15, 1);
// g
fDifCScc5->SetParameter(16, 1); // u ja u_bar
fDifCScc5->SetParameter(17, 1); // d ja d_bar
fDifCScc5->SetParameter(18, 1); // s ja s_bar
fDifCScc5->SetParameter(19, 1); // c ja c_bar fDifCScc5->SetParameter(20,
1); // b ja b_bar



double cE3 = 7*1000;
double cptmin5 = 1.0; // GeV
double cptmax5 = 16.0;
double cptvali5 = cptmax5 - cptmin5;
TF1 *fDifCScc6 = new TF1("fDifCScc6", DifCS1, cptmin5, cptmax5, 21);

fDifCScc6->SetParameter(0, 1.27); // Kvarkin massa
fDifCScc6->SetParameter(1, 1.86483); // +- 0,00005 GeV // Hadronin massa
fDifCScc6->SetParameter(2, cE3); // CMS-energia
```

```
fDifCScc6->SetParameter(3, 1); // TÃ¶rmÃ¤ystyyppi
fDifCScc6->SetParameter(4, chymin1); // Rapiditeettileikkauksen alaraja
fDifCScc6->SetParameter(5, chymax1); // Rapiditeettileikkauksen ylÃ¤raja
fDifCScc6->SetParameter(6, 2.0); // Skaalavalinnat
fDifCScc6->SetParameter(7, 2.0);
fDifCScc6->SetParameter(8, 1);
fDifCScc6->SetParameter(9, 1);
fDifCScc6->SetParameter(10, 1.0);
fDifCScc6->SetParameter(11, 1.0);
fDifCScc6->SetParameter(12, 0.557); // Fragmentaatiofraktio
fDifCScc6->SetParameter(13, 1.0); // GeV fDifCScc6->SetParameter(14,
389.379337919); // YksikÃ¶nmuunnosparametri. 389,3793379, kun (GeV)â»Â³ --
-> Âµb/GeV  fDifCScc6->SetParameter(15, 1); // g
fDifCScc6->SetParameter(16, 1); // u ja u_bar
fDifCScc6->SetParameter(17, 1); // d ja d_bar
fDifCScc6->SetParameter(18, 1); // s ja s_bar
fDifCScc6->SetParameter(19, 1); // c ja c_bar
fDifCScc6->SetParameter(20, 1); // b ja b_bar



double cptmin6 = 1.0; // GeV
double cptmax6 = 24.0;
double cptvali6 = cptmax6 - cptmin6;
TF1 *fDifCScc7 = new TF1("fDifCScc7", DifCS1, cptmin6, cptmax6, 21);

fDifCScc7->SetParameter(0, 1.27); // Kvarkin massa
fDifCScc7->SetParameter(1, 2.01026); // +- 0,00005 GeV // Hadronin massa
fDifCScc7->SetParameter(2, cE3); // CMS-energia
fDifCScc7->SetParameter(3, 1); // TÃ¶rmÃ¤ystyyppi
fDifCScc7->SetParameter(4, chymin1); // Rapiditeettileikkauksen alaraja
fDifCScc7->SetParameter(5, chymax1); // Rapiditeettileikkauksen ylÃ¤raja
fDifCScc7->SetParameter(6, 2.0); // Skaalavalinnat fDifCScc7-
>SetParameter(7, 2.0);
fDifCScc7->SetParameter(8, 1);
fDifCScc7->SetParameter(9, 1);
fDifCScc7->SetParameter(10, 1.0);
fDifCScc7->SetParameter(11, 1.0);
fDifCScc7->SetParameter(12, 0.238); // Fragmentaatiofraktio
fDifCScc7->SetParameter(13, 1.0); // GeV
fDifCScc7->SetParameter(14, 389.379337919); // YksikÃ¶nmuunnosparametri.
389,3793379, kun (GeV)â»Â³ ---> Âµb/GeV  fDifCScc7->SetParameter(15, 1); /
/ g
fDifCScc7->SetParameter(16, 1); // u ja u_bar
fDifCScc7->SetParameter(17, 1); // d ja d_bar
fDifCScc7->SetParameter(18, 1); // s ja s_bar
fDifCScc7->SetParameter(19, 1); // c ja c_bar
fDifCScc7->SetParameter(20, 1); // b ja b_bar



double bEmin1 = 2*0.00418; // TeV
double bEmax1 = 8.0;
double bEvali1 = bEmax1 - bEmin1;

TF1 *fTotCSbb1 = new TF1("fTotCSbb1", TotCSpp, 0, bEmax1, 17);
```

```
fTotCSbb1->SetParameter(0, 4.18); // Massa
fTotCSbb1->SetParameter(1, 1); // TÃ¶rmÃ¤ystyyppi
fTotCSbb1->SetParameter(2, 2.0); // Skaalavalinnat fTotCSbb1-
>SetParameter(3, 2.0);
fTotCSbb1->SetParameter(4, 0);
fTotCSbb1->SetParameter(5, 0);
fTotCSbb1->SetParameter(6, 2.0);
fTotCSbb1->SetParameter(7, 2.0);
fTotCSbb1->SetParameter(8, 1.000); //Fragmentaatiofraktio
fTotCSbb1->SetParameter(9, 1000); // CMS-energian yksikÃ¶nmuunnos, TeV -->
GeV
fTotCSbb1->SetParameter(10, 389.379337919); // YksikÃ¶nmuunnosparametri.
389,379337919, kun (GeV)â»Â² --> Âµb fTotCSbb1->SetParameter(11, 1); // g
fTotCSbb1->SetParameter(12, 1); // u ja u_bar
fTotCSbb1->SetParameter(13, 1); // d ja d_bar
fTotCSbb1->SetParameter(14, 1); // s ja s_bar
fTotCSbb1->SetParameter(15, 1); // c ja c_bar
fTotCSbb1->SetParameter(16, 1); // b ja b_bar



// CutCS1: Lasketaan integroitu vaikutusala halutulla
pseudorapiditettileikkauksella CMS-energian funktiona.
Pseudorapiditeettileikkaus koskee vain toista tuotetuista kvarkeista/
hadroneista.
 double bEmin2 = 2*0.00418; // TeV // Pseudorapiditeetti ei vaikuta
energien alarajaan (mutta rapiditeettileikkaus vaikuttaisi). double bEmax2
= 14.0;
double bEvali2 = bEmax2 - bEmin2;

TF1 *fCutCSbb1 = new TF1("fCutCSbb1", CutCS1, 0, bEmax2, 19);

fCutCSbb1->SetParameter(0, 4.18); // Tuotetun kvarkin massa
fCutCSbb1->SetParameter(1, 1); // TÃ¶rmÃ¤yksen tyyppi: 1 = pp, -1 = pp_bar
fCutCSbb1->SetParameter(2, 2.0); // PseudorapiditeettivÃ¤lin alaraja
fCutCSbb1->SetParameter(3, 5.0); // PseudorapiditeettivÃ¤lin ylÃ¤raja
fCutCSbb1->SetParameter(4, 2.0); // Alfan skaala on massa kertaa tÃ¤mÃ¤
luku
fCutCSbb1->SetParameter(5, 2.0); // Partonijakaumafunktioiden skaala on
massa kertaa tÃ¤mÃ¤ luku
fCutCSbb1->SetParameter(6, 1); // Kun tÃ¤mÃ¤ parametri on 1, niin alfan
skaala on m_T:n kertaluku
fCutCSbb1->SetParameter(7, 1); // Vastaava skaalatyypin valinta PDF:ille
fCutCSbb1->SetParameter(8, 1.0); // Alfan skaala on m_T kertaa tÃ¤mÃ¤
luku, kun yllÃ¤ mainittu skaalavalintaparametri on 1 fCutCSbb1-
>SetParameter(9, 1.0); // Vastaava vaihtoehtoinen skaala PDF:ille
fCutCSbb1->SetParameter(10, 1.000); //Fragmentaatiofraktio // b-
hadroneille noin yksi, sillÃ¤ b hadronisoituu lÃ¤hes aina ennen
hajoamistaan fCutCSbb1->SetParameter(11, 1000); // TeV --> GeV
fCutCSbb1->SetParameter(12, 389.379337919); // YksikÃ¶nmuunnosparametri
vaikutusalalle. 389,379337919, kun (GeV)â»Â² --> Âµb fCutCSbb1-
>SetParameter(13, 1); // g
fCutCSbb1->SetParameter(14, 1); // u ja u_bar
fCutCSbb1->SetParameter(15, 1); // d ja d_bar
fCutCSbb1->SetParameter(16, 1); // s ja s_bar
fCutCSbb1->SetParameter(17, 1); // c ja c_bar
fCutCSbb1->SetParameter(18, 1); // b ja b_bar
```

// DifCS4: Lasketaan toisen tuotetun kvarkin/hadronin pseudorapiditeetin suhteen differentioitu vaikutusala halutulla CMS-energialla.

```
double betamin1 = 2.0;
double betamax1 = 5.0;
double betavali1 = betamax1 - betamin1;
double bE1 = 7.0*1000;

TF1 *fDifCSbb1 = new TF1("fDifCSbb1", DifCS4, betamin1, betamax1, 17);
 fDifCSbb1->SetParameter(0, 4.18); // Tuotetun kvarkin massa
fDifCSbb1->SetParameter(1, bE1); // CMS-energia (GeV)
fDifCSbb1->SetParameter(2, 1); // 1 = pp-tÃ¶rmÃ¤ys, pp_bar-tÃ¶rmÃ¤ys
fDifCSbb1->SetParameter(3, 2.0); // Skaalakerroin alfalle, skaala on massa
kertaa tÃ¤mÃ¤ luku
fDifCSbb1->SetParameter(4, 2.0); // Vastaava skaalakerroin PDF:ille
fDifCSbb1->SetParameter(5, 1); // Kun = 1, niin alfan skaala on m_T:n
kertaluku
fDifCSbb1->SetParameter(6, 1); // Vastaava skaalavalintaparametri PDF:ille
fDifCSbb1->SetParameter(7, 1.0); // Vaihtoehtoinen skaalakerroin alfalle,
skaala on m_T kertaa tÃ¤mÃ¤ luku fDifCSbb1->SetParameter(8, 1.0); //
Vastaava skaalakerroin PDF:ille
fDifCSbb1->SetParameter(9, 1.000); // Fragmentaatiofraktion arvo
fDifCSbb1->SetParameter(10, 389.379337919); // YksikÃ¶nmuunnosparametri.
389,379337919, kun (GeV)â»Â² ---> Âµb  fDifCSbb1->SetParameter(11, 1); //
g
fDifCSbb1->SetParameter(12, 1); // u ja u_bar
fDifCSbb1->SetParameter(13, 1); // d ja d_bar fDifCSbb1->SetParameter(14,
1); // s ja s_bar
fDifCSbb1->SetParameter(15, 1); // c ja c_bar
fDifCSbb1->SetParameter(16, 1); // b ja b_bar



double bE2 = 13.0*1000;

TF1 *fDifCSbb2 = new TF1("fDifCSbb2", DifCS4, betamin1, betamax1, 17);

fDifCSbb2->SetParameter(0, 4.18); // Kvarkin massa
fDifCSbb2->SetParameter(1, bE2); // CMS-energia
fDifCSbb2->SetParameter(2, 1); // TÃ¶rmÃ¤ystyyppi
fDifCSbb2->SetParameter(3, 2.0); // Skaalavalinnat
fDifCSbb2->SetParameter(4, 2.0);
fDifCSbb2->SetParameter(5, 1);
fDifCSbb2->SetParameter(6, 1);
fDifCSbb2->SetParameter(7, 1.0);
fDifCSbb2->SetParameter(8, 1.0);
fDifCSbb2->SetParameter(9, 1.000); // Fragmentaatiofraktio
fDifCSbb2->SetParameter(10, 389.379337919); // YksikÃ¶nmuunnosparametri.
389,379337919, kun (GeV)â»Â² ---> Âµb  fDifCSbb2->SetParameter(11, 1); //
g
fDifCSbb2->SetParameter(12, 1); // u ja u_bar
fDifCSbb2->SetParameter(13, 1); // d ja d_bar
fDifCSbb2->SetParameter(14, 1); // s ja s_bar  fDifCSbb2->SetParameter(15,
1); // c ja c_bar
fDifCSbb2->SetParameter(16, 1); // b ja b_bar
```

```
double tEmin1 = 2*0.1729; // TeV
double tEmax1 = 3.0;
double tEvali1 = tEmax1 - tEmin1;

TF1 *fTotCStt1 = new TF1("fTotCStt1", TotCSpp, 0, tEmax1, 17);

fTotCStt1->SetParameter(0, 172.9); // Massa
fTotCStt1->SetParameter(1, -1); // TÃ¶rmÃ¤ystyyppi
fTotCStt1->SetParameter(2, 2.0); // Skaalavalinnat
fTotCStt1->SetParameter(3, 2.0);
fTotCStt1->SetParameter(4, 0);
fTotCStt1->SetParameter(5, 0);
fTotCStt1->SetParameter(6, 2.0);
fTotCStt1->SetParameter(7, 2.0);
fTotCStt1->SetParameter(8, 1.000); //Fragmentaatiofraktio
fTotCStt1->SetParameter(9, 1000); // YksikÃ¶nmuunnosparametri CMS-
energialle, Tev --> GeV
fTotCStt1->SetParameter(10, 389379337.919); // YksikÃ¶nmuunnos.
389379337,919 kun (GeV)â»Â² --> pb
fTotCStt1->SetParameter(11, 1); // g
fTotCStt1->SetParameter(12, 1); // u ja u_bar
fTotCStt1->SetParameter(13, 1); // d ja d_bar
fTotCStt1->SetParameter(14, 1); // s ja s_bar  fTotCStt1->SetParameter(15,
1); // c ja c_bar
fTotCStt1->SetParameter(16, 1); // b ja b_bar



double tEmin2 = 2*0.1729; // TeV
double tEmax2 = 14.0;
double tEvali2 = tEmax2 - tEmin2;

TF1 *fTotCStt2 = new TF1("fTotCStt2", TotCSpp, 0, tEmax2, 17);

fTotCStt2->SetParameter(0, 172.9); // Massa
fTotCStt2->SetParameter(1, 1); // TÃ¶rmÃ¤ystyyppi
fTotCStt2->SetParameter(2, 2.0); // Skaalavalinnat
fTotCStt2->SetParameter(3, 2.0);
fTotCStt2->SetParameter(4, 0);
fTotCStt2->SetParameter(5, 0);
fTotCStt2->SetParameter(6, 2.0);
fTotCStt2->SetParameter(7, 2.0);
fTotCStt2->SetParameter(8, 1.000); //Fragmentaatiofraktio
fTotCStt2->SetParameter(9, 1000); // YksikÃ¶nmuunnosparametri CMS-
energialle, Tev --> GeV
fTotCStt2->SetParameter(10, 389379337.919); // YksikÃ¶nmuunnos.
389379337,919 kun (GeV)â»Â² --> pb
fTotCStt2->SetParameter(11, 1); // g
fTotCStt2->SetParameter(12, 1); // u ja u_bar
fTotCStt2->SetParameter(13, 1); // d ja d_bar
fTotCStt2->SetParameter(14, 1); // s ja s_bar
fTotCStt2->SetParameter(15, 1); // c ja c_bar
fTotCStt2->SetParameter(16, 1); // b ja b_bar



// DifCS2: Lasketaan p_t-differentioitu vaikutusala kvarkkien/hadronien
```

tuotolle (ilman rapiditeettileikkauksia).

```
double tE1 = 1.96*1000;
double tptmin1 = 0.0; // TeV
double tptmax1 = 0.500;
double tptvali1 = tptmax1 - tptmin1;
TF1 *fDifCStt1 = new TF1("fDifCStt1", DifCS2, tptmin1, tptmax1, 18);

fDifCStt1->SetParameter(0, 172.9); // Tuotetun kvarkin massa
fDifCStt1->SetParameter(1, tE1); // CMS-energia (GeV)
fDifCStt1->SetParameter(2, -1); // 1 = pp-tÃ¶rmÃ¤ys, -1 = pp_bar-tÃ¶rmÃ¤ys
fDifCStt1->SetParameter(3, 2.0); // Skaalakerroin alfalle, skaala on massa
kertaa tÃ¤mÃ¤ luku
fDifCStt1->SetParameter(4, 2.0); // Vastaava skaalakerroin PDF:ille
fDifCStt1->SetParameter(5, 1); // Kun = 1, niin alfan skaala on m_T:n
kertaluku
fDifCStt1->SetParameter(6, 1); // Vastaava valintaparametri PDF:ille
fDifCStt1->SetParameter(7, 1.0); // Vaihtoehtoinen skaalakerroin alfalle,
skaala on m_T kertaa tÃ¤mÃ¤ luku fDifCStt1->SetParameter(8, 1.0); //
Vastaava skaalakerroin PDF:ille
fDifCStt1->SetParameter(9, 1.000); // Fragmentaatiofraktion arvo
fDifCStt1->SetParameter(10, 1000.0); // YksikÃ¶nmuunnosparametri
poikittaisliikemÃ¤Ã¤rÃ¤lle // TeV --> GeV fDifCStt1->SetParameter(11,
389379337919); // YksikÃ¶nmuunnosparametri. 389379337919, kun (GeV)â»3 ---
> pb/TeV  fDifCStt1->SetParameter(12, 1); // g
fDifCStt1->SetParameter(13, 1); // u ja u_bar
fDifCStt1->SetParameter(14, 1); // d ja d_bar
fDifCStt1->SetParameter(15, 1); // s ja s_bar
fDifCStt1->SetParameter(16, 1); // c ja c_bar
fDifCStt1->SetParameter(17, 1); // b ja b_bar
```

// DifCS3: Lasketaan rapiditeetin suhteen differentioitu vaikutusala kvarkin tuotolle.

```
double tavymin1 = 0.0;
double tavymax1 = 1.50;
double tavyvali1 = tavymax1 - tavymin1;
TF1 *fDifCStt2 = new TF1("fDifCStt1", DifCS3, tavymin1, tavymax1, 16);
 fDifCStt2->SetParameter(0, 172.9); // Tuotetun kvarkin massa
fDifCStt2->SetParameter(1, tE1); // CMS-energia (GeV)
fDifCStt2->SetParameter(2, -1); // 1 = pp-tÃ¶rmÃ¤ys, -1 = pp_bar-tÃ¶rmÃ¤ys
fDifCStt2->SetParameter(3, 2.0); // Skaalakerroin alfalle, skaala on massa
kertaa tÃ¤mÃ¤ luku
fDifCStt2->SetParameter(4, 2.0); // Vastaava skaalakerroin PDF:ille
fDifCStt2->SetParameter(5, 1); // Kun = 1, niin skaala on m_T:n kertaluku
fDifCStt2->SetParameter(6, 1); // Vastaava skaalavalintaparametri PDF:ille
fDifCStt2->SetParameter(7, 1.0); // Vaihtoehtoinen skaalakerroin alfalle,
skaala on m_T kertaa tÃ¤mÃ¤ luku fDifCStt2->SetParameter(8, 1.0); //
Vastaava skaalakerroin PDF:ille
fDifCStt2->SetParameter(9, 2*389379337.919); // YksikÃ¶nmuunnos-/
skaalausparametri. 389379337,919, kun (GeV)â»2 ---> pb, kerroin 2 tulee
rapiditeetin itseisarvosta  fDifCStt2->SetParameter(10, 1); // g
fDifCStt2->SetParameter(11, 1); // u ja u_bar
fDifCStt2->SetParameter(12, 1); // d ja d_bar fDifCStt2->SetParameter(13,
1); // s ja s_bar
```

```
fDifCStt2->SetParameter(14, 1); // c ja c_bar
fDifCStt2->SetParameter(15, 1); // b ja b_bar



double tE2 = 13.0*1000;
double tptmin2 = 0.0; // GeV
double tptmax2 = 550.0;
double tptvali2 = tptmax2 - tptmin2;
TF1 *fDifCStt3 = new TF1("fDifCStt3", DifCS2, tptmin2, tptmax2, 18);

fDifCStt3->SetParameter(0, 172.9); // Kvarkin massa
fDifCStt3->SetParameter(1, tE2); // CMS-energia
fDifCStt3->SetParameter(2, 1); // TÃ¶rmÃ¤ystyyppi
fDifCStt3->SetParameter(3, 2.0); // Skaalavalinnat
fDifCStt3->SetParameter(4, 2.0);
fDifCStt3->SetParameter(5, 1);
fDifCStt3->SetParameter(6, 1);
fDifCStt3->SetParameter(7, 1.0);
fDifCStt3->SetParameter(8, 1.0);
fDifCStt3->SetParameter(9, 1.000); // Fragmentaatiofraktion arvo
fDifCStt3->SetParameter(10, 1.0); // GeV
fDifCStt3->SetParameter(11, 389379337.919); // YksikÃ¶nmuunnosparametri.
389379337,919, kun (GeV)â»3 ---> pb/GeV  fDifCStt3->SetParameter(12, 1); /
/ g fDifCStt3->SetParameter(13, 1); // u ja u_bar
fDifCStt3->SetParameter(14, 1); // d ja d_bar
fDifCStt3->SetParameter(15, 1); // s ja s_bar
fDifCStt3->SetParameter(16, 1); // c ja c_bar
fDifCStt3->SetParameter(17, 1); // b ja b_bar



double tymin1 = -2.6;
double tymax1 = 2.6;
double tyvali1 = tymax1 - tymin1;
TF1 *fDifCStt4 = new TF1("fDifCStt4", DifCS3, tymin1, tymax1, 16);

fDifCStt4->SetParameter(0, 172.9); // Kvarkin massa
fDifCStt4->SetParameter(1, tE2); // CMS-energia
fDifCStt4->SetParameter(2, 1); // TÃ¶rmÃ¤ystyyppi
fDifCStt4->SetParameter(3, 2.0); // Skaalavalinnat
fDifCStt4->SetParameter(4, 2.0);
fDifCStt4->SetParameter(5, 1);
fDifCStt4->SetParameter(6, 1);
fDifCStt4->SetParameter(7, 1.0);
fDifCStt4->SetParameter(8, 1.0);
fDifCStt4->SetParameter(9, 389379337.919); // YksikÃ¶nmuunnos-/
skaalausparametri. 389379337,919, kun (GeV)â»2 ---> pb  fDifCStt4-
>SetParameter(10, 1); // g
fDifCStt4->SetParameter(11, 1); // u ja u_bar fDifCStt4->SetParameter(12,
1); // d ja d_bar
fDifCStt4->SetParameter(13, 1); // s ja s_bar
fDifCStt4->SetParameter(14, 1); // c ja c_bar
fDifCStt4->SetParameter(15, 1); // b ja b_bar
```

```
/// TEHDÃ„Ã„N JA TALLENNETAAN GRAAFIT/HISTOGRAMMIT ///

TFile *file = new TFile("file.root","RECREATE");
file->cd();



// Petersonin fragmentaatiofunktiot c- ja b-tapauksille

TGraph *grPetFFc;
TGraph *grPetFFb;
double z[points], valFFc[points], valFFb[points];

for(int i = 0; i < points; i++){

 z[i] = (i+1.0)/points;
 if(i==0){
 z[i] = 0.0;
 }

 valFFc[i] = fPetFFc->Eval(z[i]);
 valFFb[i] = fPetFFb->Eval(z[i]);

}

grPetFFc = new TGraph(points, z, valFFc);
grPetFFc->Write("grPetFFc");

grPetFFb = new TGraph(points, z, valFFb);
grPetFFb->Write("grPetFFb");



// Vahvan vuorovaikutuksen kytkinvakio (LO, LL)

TGraph *gralpha;
double xA[points], yA[points];

for(int i = 0; i < points; i++){
   xA[i] = 0.635 + 1199.365*pow(10000, (i+1.0)/points-1.0);
 if(i==0){
 xA[i] = 0.635;
 }

 yA[i] = ct14n.alphas(xA[i]);

}

gralpha = new TGraph(points, xA, yA);
gralpha->Write("gralpha");

cout << "Vahvan vuorovaikutuksen kytkinvakio skaalan funktiona laskettu"
<< endl;

ct14n.pdfexit();
```

```
// Partonijakaumafunktiot (x*f_j(x,Q)) x:n funktiona, eri skaalan Q
arvoilla (LO(LL) ja NLO(0/56))

const int scales = 13;
double scale[scales] = {0.635, 1.3, 2.09, 2.54, 4.18, 5.08, 8.36, 16.72,
86.45, 172.9, 345.8, 691.6, 1000.0};

TGraph *grnlopdf[scales][types];
TGraph *grlopdf[scales][types];
TGraph *grnlopdfah[scales][types];
TGraph *grlopdfah[scales][types];
double xpdf[points];
double ynlo[points],ylo[points],ynloah[points],yloah[points];

for(int i = 0; i < points; i++){
   xpdf[i] = pow(100000000,(i*1.0)/points-1.0); // Alkupiste nyt 10â»â¸ <
4*mcÂ²/sÂ², s = 13 TeV // 150:llÃ¤ pisteellÃ¤ toisiksi viimeinen piste on
x = 0.782, ihan hyvÃ¤ logaritmisella asteikolla esitettynÃ¤

 if(i == points-1){
 xpdf[i] = 0.999999; // Tasan yksi menee jostain syystÃ¤ PDF:ien mÃ¤Ã
¤rittelyalueen ulkopuolelle
 }

}

for (int i = 0; i < scales; i++){

 for (int j = 0; j < types; j++){

 for (int k = 0; k < points; k++){

 ct14n.setct11(it[0]);

 ynlo[k] = (xpdf[k])*ct14n.parton(j, xpdf[k], scale[i]);

 if(0 < j){
 ynloah[k] = (xpdf[k])*ct14n.parton(-j, xpdf[k], scale[i]);
 }

 ct14n.pdfexit();

 ct14n.setct11(it[58]);

 ylo[k] = (xpdf[k])*ct14n.parton(j, xpdf[k], scale[i]);

 if (0 < j){
 yloah[k] = (xpdf[k])*ct14n.parton(-j, xpdf[k], scale[i]);
 }

 ct14n.pdfexit();
 }

 grnlopdf[i][j] = new TGraph(points,xpdf,ynlo);  grnlopdf[i][j]->Write(
Form("grnlopdfQ%01ip%01i", i, j) );

 grlopdf[i][j] = new TGraph(points,xpdf,ylo);
```

```
 grlopdf[i][j]->Write( Form("grlopdfQ%01ip%01i", i, j) );

 if(j != 0){

 grnlopdfah[i][j] = new TGraph(points,xpdf,ynloah);
 grnlopdfah[i][j]->Write( Form("grnlopdfQ%01ip%01iah", i, j) );

 grlopdfah[i][j] = new TGraph(points,xpdf,yloah);
 grlopdfah[i][j]->Write( Form("grlopdfQ%01ip%01iah", i, j) );

 }

 }

}

cout << "Partonijakaumafunktiot muuttujan x funktiona laskettu." << endl;

ct14n.setct11(it[58]);



// CT14-LO-partonijakaumafunktiot Q:n funktiona, eri x:n arvoilla

const int xs = 8;
double xvals[xs] = {0.00000001, 0.0000001, 0.000001, 0.00001, 0.0001,
0.001, 0.01, 0.1};

TGraph *grlopdfQ[xs][types];
TGraph *grlopdfahQ[xs][types];
double valsQ[points];
double yloQ[points],yloahQ[points];

for(int i = 0; i < points; i++){

 valsQ[i] = 0.635 + 1199.365*i*1.0/points;

 if(i == points-1){  valsQ[i] = 1200.0;
 }

}

for (int i = 0; i < xs; i++){

 for (int j = 0; j < types; j++){

 for (int k = 0; k < points; k++){

 yloQ[k] = ct14n.parton(j, xvals[i], valsQ[k]);

 if (0 < j){
 yloahQ[k] = ct14n.parton(-j, xvals[i], valsQ[k]);
 }

 }

 grlopdfQ[i][j] = new TGraph(points,valsQ,yloQ);
```

```
 grlopdfQ[i][j]->Write( Form("grlopdfQx%01ip%01i", i, j) );

 if(j != 0){

 grlopdfahQ[i][j] = new TGraph(points,valsQ,yloahQ);
 grlopdfahQ[i][j]->Write( Form("grlopdfQx%01ip%01iah", i, j) );

 }

 }

}

cout << "Partonijakaumafunktiot skaalan Q funktiona laskettu." << endl;


/*
// TÃ¤llÃ¤ vanhalla osiolla tutkailtiin LO- ja NLO-PDF:ien arvojen
eroavaisuuksia

ct14n.pdfexit();

TGraph *grdif[scales][types];
TGraph *gradif[scales][types];
TGraph *grnlo[scales][types];
TGraph *grlo[scales][types];
double xpdf[points];
double ynlo[points],ylo[points],yd[points], yda[points];
 for (int j = 0; j < scales; j++){

 for (int k = 0; k < types; k++){

 for (int l = 0; l < points; l++){

 double aa, ba;

 xpdf[l] = 0.01*pow(10000000,l*1.0/points-1);

 ct14n.setct11(it[0]);
 double a = ct14n.parton(k, xpdf[l], scale[j]);
 ynlo[l] = a;

 if (0 < l){
 aa = ct14n.parton(-k, xpdf[l], scale[j]);
 }

 ct14n.pdfexit();


 ct14n.setct11(it[58]);
 double b = ct14n.parton(k, xpdf[l], scale[j]);
 ylo[l] = b;

 if (0 < l){
 ba = ct14n.parton(-k, xpdf[l], scale[j]);
 }
```

```
 ct14n.pdfexit();


 yd[l] = a - b;

 if (0 < l){
 yda[l] = aa - ba;
 }
 }

 grdif[j][k] = new TGraph(points,xpdf,yd);
 grdif[j][k]->Write( Form("grdifQ%02ip%02i", j, k) );

 gradif[j][k] = new TGraph(points,xpdf,yda);
 gradif[j][k]->Write( Form("gradifQ%02ip-%02i", j, k) );

 grnlo[j][k] = new TGraph(points,xpdf,ynlo);  grnlo[j][k]->Write(
Form("grnloQ%02ip%02i", j, k) );

 grlo[j][k] = new TGraph(points,xpdf,ylo);
 grlo[j][k]->Write( Form("grloQ%02ip%02i", j, k) );
 }

 }
*/
ct14n.setct11(it[58]);
```

/// KOKEELLISIA TULOKSIA JA TEOREETTISTEN ARVOJEN LASKEMISTA KOSKEVAT ASETUKSET ///
// Alla oleviin taulukoihin tulee ilmoittaa teoreettisia arvoja laskevien funktioiden ja vastaavien kokeellisten tulosten tiedot.
// HUOM: Teoreettisia tuloksia ei lasketa, jos yhtÃ¤kÃ¤Ã¤n vastaavaa kokeellista vertailutulosta ei ole (datapisteet tai histogrammijakauma).
// MikÃ¤li datapisteille (ei histogrammi) on vaihtoehtoisia esitettÃ¤viÃ¤ arvoja (esim. samalla energialla), niin nÃ¤mÃ¤ pisteet kirjataan datapistetaulukoihin ja ne otetaan huomioon ilmoitetussa pisteiden lukumÃ¤Ã¤rÃ¤ssÃ¤.

/// LASKETTAVAT ASIAT ///
// Ohjelma laskee ja tekee graafit/histogrammit seuraaville asioille:
// 1. Kokeelliset tulokset (ja vaihtoehtoiset datapisteet). Eri virhelÃ¤hteet esitetÃ¤Ã¤n eri graafien avulla. // 2. K-kertoimet seitsemÃ¤lle eri skaalavalintaparille (Qa, Qp) (kok.tulos/LO-tulos, LO-tulos ajatellaan tÃ¤llÃ¶in virheettÃ¶mÃ¤nÃ¤) (histogrammeilla teor. vertailutulos on keskiarvo binin yli, tÃ¤mÃ¤ keskiarvojen histogrammi muodostetaan myÃ¶s). Histogrammien K-kertoimissa statistinen ja systemaattinen virhe esitetÃ¤Ã¤n erikseen. Muut virheiden lÃ¤hteet otetaan huomioon tuloksen K-kertoimen mÃ¤Ã¤rityksessÃ¤ (sovitus tehdÃ¤Ã¤n Plot.C:ssÃ¤). // 3. NLO-PDF:ien avulla approksimoidut LO-virherajat teor. tuloksille (virhesettejÃ¤ ei ollut CT14-LO-PDF:ille).
// 4. Teoreettiset tulokset. SisÃ¤ltÃ¤Ã¤ skaalan, massan ja fragmentaatiofraktion epÃ¤varmuudesta/epÃ¤yksikÃ¤sitteisyydestÃ¤ johtuvat virherajat. // 5. Qa:n (renormalisaatio) ja Qp:n (faktorisaatio) vaihtelusta syntyvÃ¤t virhe-bandit ja kÃ¤yrÃ¤t (katso yksityiskohdat

alta).
// 6. Eri partonityyppien vÃ¤listen vuorovaikutusten suhteelliset kontribuutiot vaikutusalaan. // 7. Raskaiden kvarkkiparien tuottojen kokonaisvaikutusalat pp_bar-tÃ¶rmÃ¤yksissÃ¤ (vertailua varten).

// Huomioita laskusta/silmukasta:
// 1. YhtÃ¤ tulosta kohti kÃ¤sitellÃ¤Ã¤n seitsemÃ¤Ã¤ eri skaalavalintaparia, joita kÃ¤ytetÃ¤Ã¤n Q-virhebandejÃ¤ sekÃ¤ K-kertoimia laskettaessa. TÃ¤ssÃ¤ on haluttu pitÃ¤Ã¤ Qa:n ja Qp:n vÃ¤linen suhteelinen ero alle 4:n (yli 1/4:n). Ohjelman tekemÃ¤ skaalavalintojen tarkastelu on kohtalaisen helposti muokattavissa. // 2. LO(LL)-PDF-setti on asetettu oletukseksi, mikÃ¤ ei vÃ¤lttÃ¤mÃ¤ttÃ¤ ole ohjelman kÃ¤yttÃ¤jÃ¤n mieleen.

const int cases = 19;
const int Qver = 7; // Eri skaalaparivalintojen lukumÃ¤Ã¤rÃ¤ // (Qa, Qp) = (Qadef,Qpdef), (Qamax, Qpmax), (Qamin,Qpmin), (Qadef,Qpmax), (Qamin,Qpdef), (Qadef,Qpmin) ja (Qamax,Qpdef) tÃ¤ssÃ¤ jÃ¤rjestyksessÃ¤

// Funktiot TF1 *f[cases] = {fTotCScc1, fCutCScc1, fDifCScc1, fDifCScc2, fDifCScc3, fDifCScc4, fDifCScc5, fDifCScc6, fDifCScc7, fTotCSbb1, fCutCSbb1, fDifCSbb1, fDifCSbb2, fTotCStt1, fTotCStt2, fDifCStt1, fDifCStt2, fDifCStt3, fDifCStt4}; string tcase[cases] = {"c1", "ccut1", "cdif1", "cdif2", "cdif3", "cdif4", "cdif5", "cdif6", "cdif7", "b1", "bcut1", "bdif1", "bdif2", "t1", "t2", "tdif1", "tdif2", "tdif3", "tdif4"}; // Funktioiden parametrien lukumÃ¤Ã¤rÃ¤t
int npar[cases] = {17, 22, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 17, 19, 17, 17, 17, 17, 18, 16, 18, 16};

const int np = 25; // Integrointipisteiden lukumÃ¤Ã¤rÃ¤ IntegralFast-laskuissa
double x[np]; // x ja w eivÃ¤t tee pÃ¤ivitetyllÃ¤ integroimismetodilla mitÃ¤Ã¤n (mutta ovat silti mukana) (CalcGaussLegendreSamplingPoints turha)
double w[np];

/* // TÃ¤tÃ¤ osuutta kÃ¤ytetÃ¤Ã¤n sopivan integrointipisteiden mÃ¤Ã¤rÃ¤n np mÃ¤Ã¤rittÃ¤miseen. KÃ¤ytin tarkastelussa kÃ¤siteltyjen funktioiden vastaavien kokeellisten binien vÃ¤lejÃ¤, joissa funktiot ovat jyrkimmillÃ¤Ã¤n/kaarevimmillaan taikka joissa binien leveydet ovat suurimmillaan. // NeljÃ¤n merkitsevÃ¤n luvun tarkkuudella ilmoitetut integraalien arvot olivat samat (nÃ¤issÃ¤ kahdessatoista tapauksessa), kun np:n arvoa vaihdeltiin vÃ¤lillÃ¤ 10:stÃ¤ 150:een. Siten np = 25 tulisi olla ainakin riittÃ¤vÃ¤n tarkka (ainakin viiden merkitsevÃ¤n numeron tarkkuudella sama kuin 150:n pisteen tapaus, jokaisessa kahdessatoista tapauksessa).

double parcc1[21] = {1.28, 1.86483, cE1, 1, -0.5, 0.5, 2.0, 2.0, 1, 1, 1.0, 1.0, 0.557, 1.0, 389.379337919, 1, 1, 1, 1, 1, 1}; double parcc3[21] = {1.28, 1.86965, cE1, 1, -0.5, 0.5, 2.0, 2.0, 1, 1, 1.0, 1.0, 0.238, 1.0, 389.379337919, 1, 1, 1, 1, 1, 1}; double parcc4[21] = {1.28, 1.86483, cE2, 1, -0.5, 0.5, 2.0, 2.0, 1, 1, 1.0, 1.0, 0.557, 1.0, 389.379337919, 1, 1, 1, 1, 1, 1}; double parcc5[21] = {1.28, 1.86965, cE2, 1, -0.5, 0.5, 2.0, 2.0, 1, 1, 1.0, 1.0, 0.238, 1.0, 389.379337919, 1, 1, 1, 1, 1, 1}; double parcc6[21] = {1.28, 1.86483, cE3, 1, -0.5, 0.5, 2.0, 2.0, 1, 1, 1.0, 1.0, 0.557, 1.0, 389.379337919, 1, 1, 1, 1, 1, 1}; double parbb1[17] = {4.18, bE1, 1, 2.0, 2.0, 1, 1, 1.0, 1.0, 1.000, 389.379337919, 1, 1, 1, 1, 1, 1}; double partt1[18] = {173.1, tE1, -1, 2.0, 2.0, 1, 1, 1.0, 1.0, 1.000, 1000.0, 389379337919, 1, 1, 1, 1, 1, 1};

```
double partt3[18] = {173.1, tE2, 1, 2.0, 2.0, 1, 1, 1.0, 1.0, 1.000, 1.0,
389379337.919, 1, 1, 1, 1, 1, 1};
double partt4[16] = {173.1, tE2, 1, 2.0, 2.0, 1, 1, 1.0, 1.0,
389379337.919, 1, 1, 1, 1, 1, 1};

cout << fDifCScc1->IntegralFast(np, x, w, 1.0, 2.0, parcc1, 1.e-9) <<
endl;
cout << fDifCScc1->IntegralFast(np, x, w, 8.0, 12.0, parcc1, 1.e-9) <<
endl; cout << fDifCScc3->IntegralFast(np, x, w, 8.0, 12.0, parcc3, 1.e-9)
<< endl;
cout << fDifCScc4->IntegralFast(np, x, w, 0.0, 0.5, parcc4, 1.e-9) <<
endl;
cout << fDifCScc5->IntegralFast(np, x, w, 24.0, 36.0, parcc5, 1.e-9) <<
endl;
cout << fDifCScc6->IntegralFast(np, x, w, 3.0, 4.0, parcc6, 1.e-9) <<
endl;
cout << fDifCSbb1->IntegralFast(np, x, w, 2.5, 3.0, parbb1, 1.e-9) <<
endl;
cout << fDifCStt1->IntegralFast(np, x, w, 0.000, 0.045, partt1, 1.e-9) <<
endl;
cout << fDifCStt1->IntegralFast(np, x, w, 0.300, 0.500, partt1, 1.e-9) <<
endl;
cout << fDifCStt3->IntegralFast(np, x, w, 0.0, 65.0, partt3, 1.e-9) <<
endl;
cout << fDifCStt3->IntegralFast(np, x, w, 400.0, 500.0, partt3, 1.e-9) <<
endl;
cout << fDifCStt4->IntegralFast(np, x, w, 1.8, 2.6, partt4, 1.e-9) <<
endl;
*/


TH1D *erstaerr[cases];
TGraphAsymmErrors *ersyserr[cases];
TGraphAsymmErrors *erp[cases];
TGraphAsymmErrors *erpalt[cases];

TH1D *teorka[cases];
TH1D *kfstaerr[cases][Qver]; TGraphAsymmErrors *kfsyserr[cases][Qver];
TGraphAsymmErrors *kftoterr[cases][Qver];
TGraphAsymmErrors *kfp[cases][Qver];

// Asetetaan, onko funktiota vastaavat kokeelliset tulokset esitetty
histogrammeina vai yksittÃ¤isinÃ¤ pisteinÃ¤
bool ishist[cases] = {false, false, true, true, true, true, true, true,
true, false, false, true, true, false, false, true, true, true, true};

// Kokeellisten tulosten datapisteiden (mukaan lukien vaihtoehtoiset
arvot) tai histogrammibinien lukumÃ¤Ã¤rÃ¤.
const int bp[cases] = {3, 3, 5, 4, 4, 22, 19, 9, 10, 4, 2, 6, 6, 3, 6, 6,
6, 6, 10};
const int bpmax = 22;

// Alla olevissa taulukoissa tyhjÃ¤t arrayt edustavat eri tyyppiÃ¤ olevia
kokeellisia tuloksia (ishist) (muista tyhjÃ¤t kohdat muokatessa
kokeellisten tulosten mÃ¤Ã¤rÃ¤Ã¤!)

// x:n arvot (energia) datapisteillÃ¤
```

```
double erxp0[cases][bpmax] = { {0.200, 2.76, 7.0},
 {5.0, 7.0, 13.0},
 {},
           {},
 {},             {},
 {},
           {},
 {},
 {0.200, 0.500, 2.76, 7.0},
 {7.0, 13.0},
 {},
 {},
 {1.8, 1.8, 1.96},
 {5.02, 7.0, 7.0, 8.0, 13.0, 13.0},
 {},
 {},
 {},
 {} };

// x:n virhe datapisteille
double erxperr0[cases][bpmax] = { {0, 0, 0},
 {0, 0, 0},
           {},
 {},
 {},
           {},
 {},
           {},
 {},
 {0, 0, 0, 0},
 {0, 0},
 {},  {},
 {0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {},
 {},
 {},
 {} };

// Histogrammibinien rajat
double binbo0[cases][bpmax+1] = { {},
 {},
 {1.0, 2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 12.0},
           {2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 12.0},
 {2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 12.0},
           {0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 5.5,
6.0, 6.5, 7.0, 7.5, 8.0, 9.0, 10.0, 12.0, 16.0, 24.0, 36.0},  {1.0, 2.0,
2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 5.5, 6.0, 6.5, 7.0, 7.5, 8.0, 9.0, 10.0,
12.0, 16.0, 24.0, 36.0},            {1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0,
8.0, 12.0, 16.0},
 {1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 12.0, 16.0, 24.0},  {},
 {},
 {2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0},
 {2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0},
 {},
 {},
 {0, 0.045, 0.090, 0.140, 0.200, 0.300, 0.500},
```

```
 {0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.25, 1.50},
 {0, 65, 125, 200, 290, 400, 550},
 {-2.6, -1.8, -1.35, -0.9, -0.45, 0.00, 0.45, 0.9, 1.35, 1.8, 2.6} };

// Vaikutusalojen arvot datapisteille ja histogrammeille (muista tarkistaa
yksikÃ¶t)
double val0[cases][bpmax] = { {0.797, 4.8, 7.44},
 {1395, 1419, 2840},
          {207.0, 44.1, 8.4, 1.75, 0.44},
          {18.0, 3.82, 0.93, 0.27},
 {23.2, 4.90, 1.00, 0.22},  {79.2, 149, 186, 144, 103, 69.5, 52.3, 33.1,
21.9, 14.8, 10.8, 8.23, 5.15, 4.01, 2.84, 2.18, 1.36, 0.924, 0.495, 0.153,
0.0357, 0.00452},  {61.5, 47.1, 35.3, 23.2, 17.1, 12.1, 7.76, 5.03, 4.07,
2.94, 1.99, 1.39, 1.26, 0.801, 0.520, 0.235, 0.0937, 0.0167, 0.00366},
{180.0, 115.0, 59.7, 29.1, 12.5, 6.37, 3.07, 1.23, 0.215},
 {100.0, 51.8, 28.0, 11.01, 5.7, 3.26, 1.74, 0.677, 0.16, 0.027},
 {3.2, 25.2, 130, 281},
 {72.0, 144},
 {27.2, 30.0, 29.8, 25.8, 19.0, 12.6},
 {45.2, 57.4, 58.4, 54.6, 43.2, 29.2},
          {6.5, 5.69, 7.60},
 {69.5, 173.3, 161.9, 241.5, 803.0, 888.0},
 {27.76, 69.70, 41.47, 22.84, 4.18, 0.32},
 {8.50, 9.46, 6.72, 4.64, 2.73, 0.63},  {3.48728, 5.09407, 2.83826,
0.842426, 0.187431, 0.0345005},
 {60.0026, 131.967, 188.386, 227.428, 245.169, 247.354, 232.557, 184.441,
133.14, 62.9843} };

// Statistisen virheen arvot histogrammeille
double staerr[cases][bpmax] = { {},
 {},
          {84.0, 7.7, 1.5, 0.50, 0.15},
 {4.6, 0.77, 0.26, 0.09},
 {6.9, 0.95, 0.26, 0.07},
 {19.8, 19.5, 24.5, 10.7, 5.78, 3.16, 2.09, 1.34, 0.946, 0.673, 0.521,
0.406, 0.312, 0.268, 0.213, 0.179, 0.0935, 0.0714, 0.0366, 0.0144,
0.00430, 0.00106},  {11.7, 5.23, 3.02, 1.65, 1.10, 0.626, 0.434, 0.275,
0.218, 0.167, 0.123, 0.0979, 0.0857, 0.0498, 0.0383, 0.0181, 0.00732,
0.00230, 0.000715},  {30.0, 11.0, 4.3, 2.1, 1.1, 0.7, 0.47, 0.13, 0.05},
{22.0, 5.9, 2.3, 0.87, 0.45, 0.27, 0.21, 0.05, 0.016, 0.004},
 {},
 {},
 {0.4, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2},
 {1.6, 0.8, 1.2, 0.8, 1.0, 1.0},
 {},
 {},
 {3.31, 4.07, 2.78, 1.51, 0.56, 0.20},
 {0.51, 0.67, 0.67, 0.64, 0.49, 0.16},
 {0.0389853, 0.0504538, 0.0257184, 0.0105405, 0.00293571, 0.00130963},
 {1.17175, 1.37921, 1.9326, 2.15482, 2.30488, 2.26936, 2.09552, 1.78576,
1.35818, 1.15752} };

// Systemaattisten virheiden ylÃ¤rajojen arvot histogrammeille
double syserrup[cases][bpmax] = { {},
 {},
 {64, 11, 2.2, 0.42, 0.11},
          {4.6, 0.92, 0.25, 0.06},  {6.0, 1.22, 0.20, 0.04},
```

```
 {7.58, 10.3, 19.1, 11.7, 8.53, 5.96, 3.73, 2.48, 1.67, 1.17, 0.857,
0.643, 0.450, 0.343, 0.251, 0.189, 0.120, 0.0759, 0.0401, 0.0139, 0.00309,
0.000375},  {7.11, 3.75, 2.43, 1.56, 1.06, 0.689, 0.452, 0.281, 0.225,
0.162, 0.111, 0.0783, 0.0695, 0.0452, 0.0292, 0.0135, 0.00530, 0.00100,
0.000205},  {48.0, 20.0, 8.5, 4.2, 1.8, 0.94, 0.50, 0.19, 0.037},
 {28.0, 8.7, 4.6, 1.82, 0.97, 0.55, 0.30, 0.113, 0.030, 0.007},
 {},
 {},
 {3.0, 2.8, 2.8, 2.2, 1.6, 1.2},
 {4.8, 6.0, 5.8, 5.4, 4.4, 3.0},
 {},
 {},
 {3.21, 1.79, 3.34, 1.25, 0.41, 0.07},  {0.67, 0.63, 0.29, 0.36, 0.66,
0.25},
 {0.277739, 0.467258, 0.21118, 0.0514395, 0.0130281, 0.00302404},
 {6.14237, 9.75978, 13.1304, 15.7261, 17.1774, 19.1451, 16.331, 13.1025,
10.3442, 5.61076} };

// Systemaattisten virheiden alarajojen arvot histogrammeille
double syserrdo[cases][bpmax] = { {},
 {},
 {103, 14, 2.3, 0.43, 0.11},
           {5.1, 0.97, 0.26, 0.07},
 {6.5, 1.26, 0.20, 0.04},
 {7.57, 10.2, 18.7, 11.3, 8.19, 5.63, 3.47, 2.25, 1.49, 1.01, 0.741,
0.558, 0.385, 0.296, 0.214, 0.163, 0.103, 0.0671, 0.0358, 0.0130, 0.00297,
0.000368},  {6.99, 3.65, 2.32, 1.49, 0.982, 0.662, 0.428, 0.271, 0.218,
0.158, 0.107, 0.0753, 0.0674, 0.0435, 0.0282, 0.0129, 0.00513, 0.000975,
0.000204},  {98.0, 33.0, 12.6, 5.8, 2.3, 1.08, 0.53, 0.21, 0.038},
 {55.0, 13.2, 5.2, 1.88, 1.0, 0.57, 0.30, 0.116, 0.031, 0.007},
 {},
 {},
 {3.0, 2.8, 2.8, 2.2, 1.6, 1.2},
 {4.8, 6.0, 5.8, 5.4, 4.4, 3.0},
 {},
 {},
 {4.29, 2.88, 3.45, 1.34, 0.39, 0.09},
 {0.99, 0.88, 0.30, 0.41, 0.63, 0.25},
 {0.277739, 0.467258, 0.21118, 0.0514395, 0.0130281, 0.00302404},
 {6.14237, 9.75978, 13.1304, 15.7261, 17.1774, 19.1451, 16.331, 13.1025,
10.3442, 5.61076} };
 // Mahdollinen statistisiin ja systemaattisiin virheisiin sisÃ¤ltymÃ¤tÃ¶n
lisÃ¤virhe (ylÃ¤raja) (neliÃ¶llisesti yhdistetty, mikÃ¤li useita tÃ
¤llaisia virheen aiheuttajia) (esim. luminositeetti, normalisointi,
branching ratio). Otetaan huomioon K-tekijÃ¤-sovituksissa. double
adderrup[cases][bpmax] = { {},
 {},
 {TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.019,2))*207,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.019,2))*44.1,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.019,2))*8.4,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.019,2))*1.75,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.019,2))*0.44},
{TMath::Sqrt(pow(0.021,2)+pow(0.019,2))*18.0,
TMath::Sqrt(pow(0.021,2)+pow(0.019,2))*3.82,
TMath::Sqrt(pow(0.021,2)+pow(0.019,2))*0.93,
TMath::Sqrt(pow(0.021,2)+pow(0.019,2))*0.27},
{TMath::Sqrt(pow(0.015,2)+pow(0.019,2))*23.2,
```

```
TMath::Sqrt(pow(0.015,2)+pow(0.019,2))*4.90,
TMath::Sqrt(pow(0.015,2)+pow(0.019,2))*1.00,
TMath::Sqrt(pow(0.015,2)+pow(0.019,2))*0.22},
{TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*79.2,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*149,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*186,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*144,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*103,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*69.5,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*52.3,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*33.1,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*21.9,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*14.8,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*10.8,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*8.23,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*5.15,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*4.01,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*2.84,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*2.18,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*1.36,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*0.924,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*0.495,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*0.153,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*0.0357,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*0.00452},
 {TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*61.5,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*47.1,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*35.3,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*23.2,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*17.1,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*12.1,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*7.76,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*5.03,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*4.07,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*2.94,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*1.99,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*1.39,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*1.26,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*0.801,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*0.520,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*0.235,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*0.0937,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*0.0167,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*0.00366},  {0.037*180.0,
0.037*115.0, 0.037*59.7, 0.037*29.1, 0.037*12.5, 0.037*6.37, 0.037*3.07,
0.037*1.23, 0.037*0.215},  {0.038*100.0, 0.038*51.8, 0.038*28.0,
0.038*11.01, 0.038*5.7, 0.038*3.26, 0.038*1.74, 0.038*0.677, 0.038*0.16,
0.038*0.027},  {},
 {},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {},
 {},
 {1.69336, 4.2517, 2.52967, 1.39324, 0.25498, 0.01952},
           {0.5185, 0.57706, 0.40992, 0.28304, 1.6653, 0.03843},
           {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0} };
```

```
// Mahdollinen statistisiin ja systemaattisiin virheisiin sisÃ¤ltymÃ¤tÃ¶n
lisÃ¤virhe (alaraja) (neliÃ¶llisesti yhdistetty, mikÃ¤li useita tÃ¤llaisia
virheen aiheuttajia) double adderrdo[cases][bpmax] = { {},
 {},
 {TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.019,2))*207,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.019,2))*44.1,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.019,2))*8.4,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.019,2))*1.75,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.019,2))*0.44},
{TMath::Sqrt(pow(0.021,2)+pow(0.019,2))*18.0,
TMath::Sqrt(pow(0.021,2)+pow(0.019,2))*3.82,
TMath::Sqrt(pow(0.021,2)+pow(0.019,2))*0.93,
TMath::Sqrt(pow(0.021,2)+pow(0.019,2))*0.27},
{TMath::Sqrt(pow(0.015,2)+pow(0.019,2))*23.2,
TMath::Sqrt(pow(0.015,2)+pow(0.019,2))*4.90,
TMath::Sqrt(pow(0.015,2)+pow(0.019,2))*1.00,
TMath::Sqrt(pow(0.015,2)+pow(0.019,2))*0.22},
{TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*79.2,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*149,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*186,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*144,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*103,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*69.5,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*52.3,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*33.1,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*21.9,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*14.8,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*10.8,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*8.23,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*5.15,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*4.01,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*2.84,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*2.18,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*1.36,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*0.924,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*0.495,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*0.153,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*0.0357,
TMath::Sqrt(pow(0.010,2)+pow(0.021,2))*0.00452},
 {TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*61.5,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*47.1,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*35.3,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*23.2,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*17.1,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*12.1,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*7.76,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*5.03,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*4.07,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*2.94,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*1.99,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*1.39,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*1.26,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*0.801,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*0.520,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*0.235,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*0.0937,
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*0.0167,
```

```
TMath::Sqrt(pow(0.013,2)+pow(0.021,2))*0.00366},  {0.037*180.0,
0.037*115.0, 0.037*59.7, 0.037*29.1, 0.037*12.5, 0.037*6.37, 0.037*3.07,
0.037*1.23, 0.037*0.215},  {0.038*100.0, 0.038*51.8, 0.038*28.0,
0.038*11.01, 0.038*5.7, 0.038*3.26, 0.038*1.74, 0.038*0.677, 0.038*0.16,
0.038*0.027},  {},
 {},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {},
 {},
 {1.69336, 4.2517, 2.52967, 1.39324, 0.25498, 0.01952},
 {0.5185, 0.57706, 0.40992, 0.28304, 1.6653, 0.03843},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0} };

// Vaikutusalan ylÃ¤virhe datapisteille
double ptoterrup[cases][bpmax] = { {0.295574017803, 2.90234388038,
0.596657355607},   {104.470091414, 133.510299228, 226.735528755},
           {},
           {},
           {},
           {},
           {},
           {},
           {},
 {1.84390889146, 11.840608092, 45.13967213, 63.356136258},
 {6.8066144301, 21.0237960416},
 {},
 {},
 {1.7, 1.59552499, 0.41},
 {8.4, 10.1, 6.72458177, 8.5, 32.0780297, 32.8633535},
 {},
 {},
 {},
 {} };

// Vaikutusalan alavirhe datapisteille
double ptoterrdo[cases][bpmax] = { {0.36211186117, 1.58543369461,
0.596657355607},
 {104.470091414, 133.510299228, 226.735528755},
           {},
           {},
           {},
           {},
           {},            {},
           {},
 {1.70293863659, 10.0244700608, 52.376235069, 64.3117407633},
 {6.8066144301, 21.0237960416},
 {},
           {},
 {1.4, 1.59552499, 0.41},
 {8.4, 10.1, 6.64906008, 8.5, 32.0780297, 34.4673759},
 {},
 {},
 {},
           {} };
```

```
// Funktion indeksit, jotka vastaavat alfan ja PDF:ien skaalakertoimia //
HUOM: Ota huomioon skaalan tyyppi (n*m, n*s^, n*m_T, n kerroin) int
Qaind[cases] = {2, 11, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 2, 8, 7, 7, 2, 2, 7, 7,
7, 7};
int Qpind[cases] = {3, 12, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 3, 9, 8, 8, 3, 3,
8, 8, 8, 8};

// KÃ¤ytettÃ¤vien skaalakertoimien oletus-, maksimi- ja minimiarvot double
Qdef[cases] = {2.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 2.0, 1.0, 1.0,
1.0, 2.0, 2.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0};
double Qmax[cases] = {4.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 4.0,
2.0, 2.0, 2.0, 4.0, 4.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0};
double Qmin[cases] = {1.0, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 1.0,
0.5, 0.5, 0.5, 1.0, 1.0, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5};

// Alkupisteet (vaikutusala on erisuuri kuin yksi oikeanpuoleisissa
pisteissÃ¤) ja vastaavat vÃ¤lien pituudet
double alkup[cases] = {cEmin1, cEmin2, cptmin1, cptmin2, cptmin2, cptmin3,
cptmin4, cptmin5, cptmin6, bEmin1, bEmin2, betamin1, betamin1, tEmin1,
tEmin2, tptmin1, tavymin1, tptmin2, tymin1}; double vali[cases] =
{cEvali1, cEvali2, cptvali1, cptvali2, cptvali2, cptvali3, cptvali4,
cptvali5, cptvali6, bEvali1, bEvali2, betavali1, betavali1, tEvali1,
tEvali2, tptvali1, tavyvali1, tptvali2, tyvali1};

/* // Tarkistetaan varuilta, ettÃ¤ vaikutusala ei saa arvoa nolla ensimmÃ
¤isessÃ¤ evaluointipisteessÃ¤. Muuten tulee ongelmia ratio-graafien kanssa
(nollalla jakaminen).

for(int i = 0; i < cases; i++){
 cout << f[i]->Eval(alkup[i]+0.00001) << endl;
}
*/

double xplin[points],xplog[points];

TGraph *grnlo[cases];
TGraph *grLN[cases];
TGraph *grLL[cases];
TGraphAsymmErrors *grLO[cases];
TGraphAsymmErrors *grNLO[cases];
TGraph *grcom[3];

TGraph *grr[cases][types];

TGraph *grmmax[cases];
TGraph *grmmin[cases];

TGraphAsymmErrors *grQa[cases];
TGraphAsymmErrors *grQp[cases];
TGraphAsymmErrors *grQ[cases];
TGraph *grQQmax[cases];
TGraph *grQQmin[cases];
TGraphAsymmErrors *grQrel[cases];

TGraphAsymmErrors *grFF[cases];
TGraphAsymmErrors *grFFrel[cases];
```

```
// Gluoneja vastaava indeksi
int gind[cases] = {11, 16, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 11, 13, 11, 11, 11,
11, 12, 10, 12, 10};
 // Kvarkin massaa vastaavat funktioiden indeksit sekÃ¤ oletus-, maksimi-
ja minimiarvot
int mind[cases] = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0};
double m[cases] = {1.27, 1.27, 1.27, 1.27, 1.27, 1.27, 1.27, 1.27, 1.27,
4.18, 4.18, 4.18, 4.18, 172.9, 172.9, 172.9, 172.9, 172.9, 172.9}; // m_c
= 1.27+-0.02 GeV, m_b = 4.18+0.03-0.02 GeV, m_t = 172.9+-0.4 GeV double
mmax[cases] = {1.67, 1.67, 1.67, 1.67, 1.67, 1.67, 1.67, 1.67, 1.67, 4.78,
4.78, 4.78, 4.78, 174.0, 174.0, 174.0, 174.0, 174.0, 174.0}; // m_c =
1.67+-0.07 GeV, m_b = 4.78+-0.06 GeV, m_t = 174.0 GeV (173.1+0.9) double
mmin[cases] = {0.993, 0.993, 0.993, 0.993, 0.993, 0.993, 0.993, 0.993,
0.993, 3.610, 3.610, 3.610, 3.610, 160, 160, 160, 160, 160, 160}; // m_c =
0.993+-0.008 GeV, m_b = 3.610+-0.016 GeV, m_t = 160+5-4 GeV

// Indeksit, arvot ja vastaavat virheet fragmentaatiofraktioille (-1 = ei
FF:Ã¤Ã¤/FF = 1.000)
int FFind[cases] = {-1, -1, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, -1, -1, -1, -1, -
1, -1, -1, -1, -1, -1}; double FF[cases] = {1.0, 1.0, 0.557, 0.226, 0.238,
0.557, 0.238, 0.557, 0.238, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0,
1.0};  double FFuperr[cases] = {0.0, 0.0, 0.023, 0.010, 0.007, 0.023,
0.007, 0.023, 0.007, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0};
double FFlowerr[cases] = {0.0, 0.0, 0.023, 0.010, 0.007, 0.023, 0.007,
0.023, 0.007, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0};

int totCScoltypeind = 1;

// Valitaan, onko ratio-graafien x-akselin pisteet lineaarisesti vai
logaritmisesti valittuja
bool rlogp[cases] = {true, true, false, false, false, true, true, true,
true, true, true, false, false, true, true, false, false, true, false};


// Laskentasilmukka
for(int i = 0; i < cases; i++){

 if(tcase[i].compare("cdif2") == 0){ // En tule kÃ¤sittelemÃ¤Ã¤n tapausta
"cdif2" (pp --> Dâº) tulosten analyysissÃ¤
 continue;
 }

 if(bp[i] == 0){
 cout << "Kokeelliset tulokset puutuvat tapauksessa " << i+1 << "/" <<
cases << endl;
 continue;
 }

  /// KOKEELLISET TULOKSET JA VASTAAVAT K-TEKIJÃ–IDEN ARVOT ///

 if(ishist[i] == true){ // Histogrammitapaukset

 double binbo[bp[i]+1];
 double bkk[bp[i]];
 double bvp[bp[i]];
 double val[bp[i]];
```

```
 double upsyserr[bp[i]];
 double lowsyserr[bp[i]];
 double binkaQ[Qver][bp[i]];
 double kfval[bp[i]];
 double kfupsyserr[bp[i]];
 double kflowsyserr[bp[i]];
 double kfuptoterr[bp[i]];
 double kflowtoterr[bp[i]];

 for(int j = 0; j < bp[i]+1; j++){

 binbo[j] = binbo0[i][j];

 }

 double params[npar[i]];

 for(int j = 0; j < npar[i]; j++){

 params[j] = f[i]->GetParameter(j);;

 }

 for(int j = 0; j < bp[i]; j++){

 bkk[j] = (binbo[j+1] + binbo[j])/2;
 bvp[j] = (binbo[j+1] - binbo[j])/2;
 val[j] = val0[i][j];
 upsyserr[j] = syserrup[i][j];
 lowsyserr[j] = syserrdo[i][j];

 /*
  // Nopeampi (mutta epÃ¤tarkempi) tapa laskea binejÃ¤ vastaavat
teoreettiset vertailuarvot/K-kertoimet: Ei keskiarvoa, arvo vain laskettu
binin keskipisteessÃ¤.

 binkaQ[0][j] = f[i]->Eval(bkk[j]);

 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qmax[i]);
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qmax[i]);
 binkaQ[1][j] = f[i]->Eval(bkk[j]);

 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qmin[i]);
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qmin[i]);
 binkaQ[2][j] = f[i]->Eval(bkk[j]);

 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qdef[i]);
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qmax[i]);
 binkaQ[3][j] = f[i]->Eval(bkk[j]);

 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qmin[i]);
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qdef[i]);
 binkaQ[4][j] = f[i]->Eval(bkk[j]);

 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qdef[i]);
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qmin[i]);
 binkaQ[5][j] = f[i]->Eval(bkk[j]);
```

```
 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qmax[i]);
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qdef[i]);  binkaQ[6][j] = f[i]-
>Eval(bkk[j]);

 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qdef[i]);
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qdef[i]);

 cout << "Ns. vÃ¤Ã¤rÃ¤t keskiarvot (teor.) binille (kok.) " << j + 1 << "/
" << bp[i] << " laskettu tapauksessa " << i + 1 << "/" << cases << "." <<
endl;  */

 binkaQ[0][j] = (f[i]->IntegralFast(np, x, w, binbo[j], binbo[j+1],
params, 1.e-9))/(binbo[j+1] - binbo[j]);

 params[Qaind[i]] = Qmax[i];
 params[Qpind[i]] = Qmax[i];
 binkaQ[1][j] = (f[i]->IntegralFast(np, x, w, binbo[j], binbo[j+1],
params, 1.e-9))/(binbo[j+1] - binbo[j]);

 params[Qaind[i]] = Qmin[i];
 params[Qpind[i]] = Qmin[i];
 binkaQ[2][j] = (f[i]->IntegralFast(np, x, w, binbo[j], binbo[j+1],
params, 1.e-9))/(binbo[j+1] - binbo[j]);

 params[Qaind[i]] = Qdef[i];
 params[Qpind[i]] = Qmax[i];
 binkaQ[3][j] = (f[i]->IntegralFast(np, x, w, binbo[j], binbo[j+1],
params, 1.e-9))/(binbo[j+1] - binbo[j]);
  params[Qaind[i]] = Qmin[i];
 params[Qpind[i]] = Qdef[i];
 binkaQ[4][j] = (f[i]->IntegralFast(np, x, w, binbo[j], binbo[j+1],
params, 1.e-9))/(binbo[j+1] - binbo[j]);

 params[Qaind[i]] = Qdef[i];
 params[Qpind[i]] = Qmin[i];
 binkaQ[5][j] = (f[i]->IntegralFast(np, x, w, binbo[j], binbo[j+1],
params, 1.e-9))/(binbo[j+1] - binbo[j]);

 params[Qaind[i]] = Qmax[i];
 params[Qpind[i]] = Qdef[i];
 binkaQ[6][j] = (f[i]->IntegralFast(np, x, w, binbo[j], binbo[j+1],
params, 1.e-9))/(binbo[j+1] - binbo[j]);

 params[Qaind[i]] = Qdef[i];
 params[Qpind[i]] = Qdef[i];

 cout << "Keskiarvot (teor.) binille (kok.) " << j + 1 << "/" << bp[i] <<
" laskettu tapauksessa " << i + 1 << "/" << cases << "." << endl;

 }

 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qdef[i]); // ROOT 6?
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qdef[i]);

 teorka[i] = new TH1D(Form("%steorka",tcase[i].c_str()),
Form("%steorka",tcase[i].c_str()), bp[i], binbo);
   for(int j = 0; j < bp[i]; j++){
```

```
 teorka[i]->SetBinContent(j+1, binkaQ[0][j]);
 teorka[i]->SetBinError(j+1, 0.00000000000000001); // Pieni katsojalle nÃ
¤kymÃ¤tÃ¶n virhe lisÃ¤tty, jotta histogrammi piirretÃ¤Ã¤n oikein kuvaan  }

 teorka[i]->Write( Form("%steorka",tcase[i].c_str()) );

 erstaerr[i] = new TH1D(Form("%serstaerr",tcase[i].c_str()),
Form("%serstaerr",tcase[i].c_str()), bp[i], binbo);

 for(int j = 0; j < bp[i]; j++){
 erstaerr[i]->SetBinContent(j+1, val[j]);
 erstaerr[i]->SetBinError(j+1, staerr[i][j]);
 }

 erstaerr[i]->Write( Form("%serstaerr",tcase[i].c_str()) );

 ersyserr[i] = new TGraphAsymmErrors(bp[i], bkk, val, bvp, bvp, lowsyserr,
upsyserr);
 ersyserr[i]->Write( Form("%sersyserr",tcase[i].c_str()) );


 for(int k = 0; k < Qver; k++){

 kfstaerr[i][k] = new TH1D(Form("%skfstaerrQ%01i", tcase[i].c_str(), k),
Form("%skfstaerr%01i",tcase[i].c_str(), k), bp[i], binbo);
  for(int j = 0; j < bp[i]; j++){

 kfval[j] = (val0[i][j])/(binkaQ[k][j]);

 kfstaerr[i][k]->SetBinContent(j+1, val0[i][j]/(binkaQ[k][j]));
 kfstaerr[i][k]->SetBinError(j+1, staerr[i][j]/(binkaQ[k][j]));

 kfupsyserr[j] = (syserrup[i][j])/(binkaQ[k][j]);
 kflowsyserr[j] = (syserrup[i][j])/(binkaQ[k][j]);

 kfuptoterr[j] = TMath::Sqrt(pow(staerr[i][j], 2) + pow(syserrup[i][j], 2)
+ pow(adderrup[i][j], 2))/(binkaQ[k][j]);  kflowtoterr[j] =
TMath::Sqrt(pow(staerr[i][j], 2) + pow(syserrdo[i][j], 2) +
pow(adderrdo[i][j], 2))/(binkaQ[k][j]);

 }

 kfstaerr[i][k]->Write( Form("%skfstaerrQ%01i", tcase[i].c_str(), k) );

 kfsyserr[i][k] = new TGraphAsymmErrors(bp[i], bkk, kfval, bvp, bvp,
kflowsyserr, kfupsyserr);
 kfsyserr[i][k]->Write( Form("%skfsyserrQ%01i", tcase[i].c_str(), k) );
  kftoterr[i][k] = new TGraphAsymmErrors(bp[i], bkk, kfval, bvp, bvp,
kflowtoterr, kfuptoterr);
 kftoterr[i][k]->Write( Form("%skftoterrQ%01i", tcase[i].c_str(), k) );

 }

 }else{ // Datapistetapaukset

 int ndefp;
 int naltp = 0;
```

```
for(int j = 1; j < bp[i]; j++){

if(erxp0[i][j-1] == erxp0[i][j]){

naltp++;

}

}

ndefp = bp[i] - naltp;

double erxp[ndefp];
double erxperr[ndefp];
double val[ndefp];
double erpuptoterr[ndefp];
double erplowtoterr[ndefp];

double erxpalt[naltp];
double erxperralt[naltp];
double valalt[naltp];
double erpuptoterralt[naltp];
double erplowtoterralt[naltp];

double teorvalQ[Qver][ndefp];
double kfval[ndefp];
double kfuptoterr[ndefp];
double kflowtoterr[ndefp];

int defptag = 0;

for(int j = 0; j < bp[i]; j++){

if((j == 0) || (erxp0[i][j-1] != erxp0[i][j])){
 erxp[defptag] = erxp0[i][j];
erxperr[defptag] = erxperr0[i][j];
val[defptag] = val0[i][j];
erpuptoterr[defptag] = ptoterrup[i][j];
erplowtoterr[defptag] = ptoterrdo[i][j];

teorvalQ[0][defptag] = f[i]->Eval(erxp[defptag]);

f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qmax[i]);
f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qmax[i]);
teorvalQ[1][defptag] = f[i]->Eval(erxp[defptag]);

f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qmin[i]);
f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qmin[i]);
teorvalQ[2][defptag] = f[i]->Eval(erxp[defptag]);

f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qdef[i]);
f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qmax[i]);
teorvalQ[3][defptag] = f[i]->Eval(erxp[defptag]);

f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qmin[i]);
f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qdef[i]);
teorvalQ[4][defptag] = f[i]->Eval(erxp[defptag]);
```

```
 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qdef[i]);  f[i]->SetParameter(Qpind[i],
Qmin[i]);
 teorvalQ[5][defptag] = f[i]->Eval(erxp[defptag]);

 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qmax[i]);
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qdef[i]);
 teorvalQ[6][defptag] = f[i]->Eval(erxp[defptag]);

 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qdef[i]);
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qdef[i]);

 defptag++;
 }

 }

 erp[i] = new TGraphAsymmErrors(ndefp, erxp, val, erxperr, erxperr,
erplowtoterr, erpuptoterr);
 erp[i]->Write( Form("erp%s", tcase[i].c_str()) );

 if(0 < naltp){

 int altptag = 0;

 for(int j = 1; j < bp[i]; j++){

 if(erxp0[i][j-1] == erxp0[i][j]){

 erxpalt[altptag] = erxp0[i][j] + 0.0065*vali[i];
 erxperralt[altptag] = erxperr0[i][j];
 valalt[altptag] = val0[i][j];
 erpuptoterralt[altptag] = ptoterrup[i][j];
 erplowtoterralt[altptag] = ptoterrdo[i][j];
   altptag++;
 }

 }

 erpalt[i] = new TGraphAsymmErrors(naltp, erxpalt, valalt, erxperralt,
erxperralt, erplowtoterralt, erpuptoterralt);  erpalt[i]->Write(
Form("erp%salt", tcase[i].c_str()) );

 }


 for(int k = 0; k < Qver; k++){

 for(int j = 0; j < ndefp; j++){

 kfval[j] = (val[j])/(teorvalQ[k][j]);

 kfuptoterr[j] = (erpuptoterr[j])/(teorvalQ[k][j]);
 kflowtoterr[j] = (erplowtoterr[j])/(teorvalQ[k][j]);

 }

 kfp[i][k] = new TGraphAsymmErrors(ndefp, erxp, kfval, erxperr, erxperr,
```

```
kflowtoterr, kfuptoterr);
 kfp[i][k]->Write( Form("%skfpQ%01i", tcase[i].c_str(), k) );

}
 }

 cout << "Kokeelliset tulosten ja vastaavien k-tekijÃ¶iden kuvaajat
hoidettu tapauksessa " << i + 1 << "/" << cases << "." << endl;



 /// TEOREETTTISET TULOKSET ///

 for(int j = 0; j < points; j++){
  xplin[j] = alkup[i]+0.00001+j*(vali[i])/points;//Ei voi aloittaa suoraan
pisteestÃ¤ 2*m kokonaisvaikutusaloilla, tÃ¤llÃ¶in PDF:ien kanssa tulee
ongelmia. Toisekseen eri partonien vaikutusalaosuuksia tutkittaessa ei
voida jakaa nollalla. TÃ¤mÃ¤ arvon lisÃ¤ys voidaan toki sisÃ¤llyttÃ¤Ã¤
itse funktioiden mÃ¤Ã¤rittelyvÃ¤leihin, mikÃ¤li se tuntuu kÃ¤tevÃ¤mmÃ¤ltÃ
¤. // 10â»âµ < 0,5/1200, 0,5 on pienin kÃ¤ytetty numeerinen arvo vÃ¤lin
pituudelle.  if(j==(points-1)){
 xplin[j] = alkup[i] + vali[i];
 }

 xplog[j] = alkup[i] + (vali[i])*pow(1000,(j+1.0)/points-1); //
Logaritminen pisteitten valinta // 10â»âµ < 0,5*1000^(1/150-1)  if(j==0){
 xplog[j] = alkup[i]+0.00001;
 }

 }

 ct14n.pdfexit();

 ////////////////////////////////////

 double ypall[pdfs][points];
 double ypLN[points];
 double ypLL[points];
 double ypNLO[points];
 double xpPDFerr[points];
 double ypNLOlowererr[points];
 double ypNLOuppererr[points];  double ypLOlowererr[points];
 double ypLOuppererr[points];


 for (int k = 0; k < pdfs; k++){

 ct14n.setct11(it[k]);

 for (int j = 0; j < points; j++){

 ypall[k][j] = f[i]->Eval(xplin[j]);

 }

 if(k != 58){
 ct14n.pdfexit();
```

```
}
}


for (int j = 0; j < points; j++){

ypLN[j] = ypall[57][j];
ypLL[j] = ypall[58][j];

double b1 = 0;
double b2 = 0;

double y0 = ypall[0][j];
ypNLO[j] = y0;

for(int k = 1; k < 24; k++){

double y1 = ypall[2*k-1][j];
double y2 = ypall[2*k][j];

double a1 = y1-y0;

if(a1 < (y2-y0)){

a1 = y2-y0;

}

if(a1 < 0){

a1 = 0;

}

b1 += pow(a1,2);


double a2 = y0-y1;

if(a2 < (y0-y2)){

a2 = y0-y2;

}

if(0 > a2){

a2 = 0;

}

b2 += pow(a2,2);

}

double c1 = TMath::Sqrt(b1);
double c2 = TMath::Sqrt(b2);
```

```
 ypNLOuppererr[j] = c1;
 ypNLOlowererr[j] = c2;

 ypLOuppererr[j] = (c1/y0)*ypLL[j];
 ypLOlowererr[j] = (c2/y0)*ypLL[j];

 }

 grnlo[i] = new TGraph(points,xplin,ypNLO);
 grnlo[i]->Write( Form("gr%snlo", tcase[i].c_str()) );

 grLN[i] = new TGraph(points,xplin,ypLN);
 grLN[i]->Write( Form("gr%sLN", tcase[i].c_str()) );

 grLL[i] = new TGraph(points,xplin,ypLL);
 grLL[i]->Write( Form("gr%sLL", tcase[i].c_str()) );

 grNLO[i] = new
TGraphAsymmErrors(points,xplin,ypNLO,xpPDFerr,xpPDFerr,ypNLOlowererr,ypNLO
uppererr);
 grNLO[i]->Write( Form("gr%sNLO", tcase[i].c_str()) );

 grLO[i] = new
TGraphAsymmErrors(points,xplin,ypLL,xpPDFerr,xpPDFerr,ypLOlowererr,ypLOupp
ererr);
 grLO[i]->Write( Form("gr%sLO", tcase[i].c_str()) );

 cout << "PDF-virhegraafit hoidettu (" << i+1 << "/" << cases << ")." <<
endl;

 ////////////////////////////////////

 if((tcase[i].compare("c1") == 0)||(tcase[i].compare("b1") ==
0)||(tcase[i].compare("t2") == 0)){
  double ypcom[points];

 f[i]->SetParameter(totCScoltypeind, -1);

 for (int j = 0; j < points; j++){

 ypcom[j] = f[i]->Eval(xplin[j]);

 }

 f[i]->SetParameter(totCScoltypeind, 1);

 int b;

 if(tcase[i].compare("c1") == 0){
 b = 0;
 }

 if(tcase[i].compare("b1") == 0){
 b = 1;
 }

 if(tcase[i].compare("t2") == 0){
```

```
 b = 2;
 }

 grcom[b] = new TGraph(points,xplin,ypcom);
 grcom[b]->Write( Form("grcom%s", tcase[i].c_str()) );

 cout << "pp vs. pp_bar-vertailukÃ¤yrÃ¤ muodostettu" << endl;
 }

 ////////////////////////////////////

 double xpr[points];

 if(rlogp[i] == true){

 for(int j = 0; j < points; j++){
xpr[j] = xplog[j];
 }

 }else{

 for(int j = 0; j < points; j++){
 xpr[j] = xplin[j];
 }

 }

 double ypr[points];

 for (int k = 0; k < types; k++){

 for (int j = 0; j < points; j++){

 double kok;
  if(rlogp[i] == true){ // SÃ¤Ã¤stetÃ¤Ã¤n hieman laskenta-aikaa

 f[i]->SetParameter(gind[i], 1);
 f[i]->SetParameter(gind[i] + 1, 1);
 f[i]->SetParameter(gind[i] + 2, 1);
 f[i]->SetParameter(gind[i] + 3, 1);
 f[i]->SetParameter(gind[i] + 4, 1);
 f[i]->SetParameter(gind[i] + 5, 1);

 kok = f[i]->Eval(xpr[j]);

}else{

 kok = ypLL[j];

 }

 f[i]->SetParameter(gind[i], 0);
 f[i]->SetParameter(gind[i] + 1, 0);
 f[i]->SetParameter(gind[i] + 2, 0);
 f[i]->SetParameter(gind[i] + 3, 0);
 f[i]->SetParameter(gind[i] + 4, 0);
 f[i]->SetParameter(gind[i] + 5, 0);
```

```
 f[i]->SetParameter(gind[i] + k, 1); // Asetetaan tarkasteltavien
hiukkasten tyyppi

 double osa = f[i]->Eval(xpr[j]);

 ypr[j] = osa/kok;
 }

 grr[i][k] = new TGraph(points,xpr,ypr);
 grr[i][k]->Write( Form("gr%sr%01i", tcase[i].c_str(), k) );
  }

 f[i]->SetParameter(gind[i], 1);
 f[i]->SetParameter(gind[i] + 1, 1);
 f[i]->SetParameter(gind[i] + 2, 1);
 f[i]->SetParameter(gind[i] + 3, 1);
 f[i]->SetParameter(gind[i] + 4, 1);
 //f[i]->SetParameter(gind[i] + 5, 1);

 cout << "Eri vuorovaikutustyyppien (g+g/q+q^bar) suhteelliset osuudet
vaikutusalasta laskettu." << endl;

 ////////////////////////////////////

 double ypmmax[points], ypmmin[points];

 for (int j = 0; j < points; j++){

 f[i]->SetParameter(mind[i], mmax[i]);

 ypmmax[j] = f[i]->Eval(xplin[j]);

 f[i]->SetParameter(mind[i], mmin[i]);

 ypmmin[j] = f[i]->Eval(xplin[j]);

 }

 f[i]->SetParameter(mind[i], m[i]);

 grmmax[i] = new TGraph(points,xplin,ypmmax);
 grmmax[i]->Write( Form("gr%smmax", tcase[i].c_str()) );

 grmmin[i] = new TGraph(points,xplin,ypmmin);
 grmmin[i]->Write( Form("gr%smmin", tcase[i].c_str()) );
  cout << "Massan epÃ¤varmuuden aiheuttamat virhekÃ¤yrÃ¤t laskettu." <<
endl;

 ////////////////////////////////////

 double xpQerr[points];
 double
ypQauperr[points],ypQalowerr[points],ypQpuperr[points],ypQplowerr[points];
 double ypQuppererr[points],ypQlowererr[points];
 double ypQruperr[points],ypQrlowerr[points];
 double ypQQmax[points],ypQQmin[points];
```

```
 double ypQr[points];

 for (int j = 0; j < points; j++){

 xpQerr[j] = 0;

 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qmax[i]);
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qmax[i]);
 ypQQmax[j] = f[i]->Eval(xplin[j]);

 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qmin[i]);
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qmin[i]);
 ypQQmin[j] = f[i]->Eval(xplin[j]);

 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qdef[i]);
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qmax[i]);
 double yp3 = f[i]->Eval(xplin[j]);

 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qmin[i]);
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qdef[i]);
 double yp4 = f[i]->Eval(xplin[j]);
  f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qdef[i]);
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qmin[i]);
 double yp5 = f[i]->Eval(xplin[j]);

 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qmax[i]);
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qdef[i]);
 double yp6 = f[i]->Eval(xplin[j]);

 ypQauperr[j] = yp4 - ypLL[j];
 ypQalowerr[j] = ypLL[j] - yp6;
 if(ypQauperr[j] < 0 || ypQalowerr[j] < 0){
 cout << "Jokin on erittÃ¤in pielessÃ¤ Qa:n vaihtelun aiheuttaman virhe-
bandin kanssa: ylÃ¤virhe on " << ypQauperr[j] << " ja alavirhe " <<
ypQalowerr[j] << " pisteessÃ¤ (indeksi) " << j << "/" << points-1 << "
tapauksessa " << i+1 << "/" << cases << "." << endl;  }

 ypQpuperr[j] = yp3 - ypLL[j];
 ypQplowerr[j] = ypLL[j] - yp5;

 if(ypQpuperr[j] < 0 && ypQplowerr[j] < 0){  cout << "Tapauksessa " << i+1
<< "/" << cases << " (" << tcase[i].c_str() << ") pisteessÃ¤ (indeksi)" <<
j << "/" << points-1 << " Qp:n arvon nostaminen pienentÃ¤Ã¤ vaikutusalan
arvoa ja vÃ¤hentÃ¤minen suurentaa." << endl;  } // Negatiiviset virheet
eivÃ¤t haittaa, sillÃ¤ TGraphAsymmErrors-luokka tulkitsee ne tÃ¤llÃ¶in
oikeaoppisesti: negatiiviset virheet (lowerr, uperr) ovat graafille sama
asia kuin (-uperr,-lowerr).

 if((ypQpuperr[j] < 0 && ypQplowerr[j] > 0) || (ypQpuperr[j] > 0 &&
ypQplowerr[j] < 0)){
 cout << "Qp:n vaihtelu vaikuttaa samaan suuntaan (tapaus " <<
tcase[i].c_str() << ", piste " << j << "/" << points-1 << "): ylÃ¤raja = "
<< ypQpuperr[j] << " ja alaraja = " << ypQplowerr[j] << "." << endl;  }

 double ypQmaxval = yp3; // Kolme eri vaihtoehtoa maksimille ja minimille

 if(ypQmaxval < yp4){
```

```
 ypQmaxval = yp4;
 }

 if(ypQmaxval < ypQQmin[j]){
 ypQmaxval = ypQQmin[j];
 }

 ypQuppererr[j] = ypQmaxval - ypLL[j];
  double ypQminval = yp5;

 if(ypQminval > yp6){
 ypQminval = yp6;
 }

 if(ypQminval > ypQQmax[j]){
 ypQminval = ypQQmax[j];
 }

 ypQlowererr[j] = ypLL[j] - ypQminval;

 ypQr[j] = 0;

 if(ypLL[j] != 0){
 ypQruperr[j] = 100*ypQuppererr[j]/ypLL[j];
ypQrlowerr[j] = 100*ypQlowererr[j]/ypLL[j];
 }else{
 ypQruperr[j] = 0;
ypQrlowerr[j] = 0;
 }

 }

 f[i]->SetParameter(Qaind[i], Qdef[i]); // Muokkaukset alkuperÃ¤isiksi
 f[i]->SetParameter(Qpind[i], Qdef[i]);

 grQa[i] = new
TGraphAsymmErrors(points,xplin,ypLL,xpQerr,xpQerr,ypQalowerr,ypQauperr);
 grQa[i]->Write( Form("gr%sQa", tcase[i].c_str()) );

 grQp[i] = new
TGraphAsymmErrors(points,xplin,ypLL,xpQerr,xpQerr,ypQplowerr,ypQpuperr); /
/ Negatiiviset virheet tulkitaan oikein, katso kommentti ylempÃ¤nÃ¤
grQp[i]->Write( Form("gr%sQp", tcase[i].c_str()) );

 grQ[i] = new
TGraphAsymmErrors(points,xplin,ypLL,xpQerr,xpQerr,ypQlowererr,ypQuppererr)
;  grQ[i]->Write( Form("grQ%s", tcase[i].c_str()) );

 grQQmax[i] = new TGraph(points,xplin,ypQQmax);
 grQQmax[i]->Write( Form("gr%sQQmax", tcase[i].c_str()) );

 grQQmin[i] = new TGraph(points,xplin,ypQQmin);
 grQQmin[i]->Write( Form("gr%sQQmin", tcase[i].c_str()) );

 grQrel[i] = new
TGraphAsymmErrors(points,xplin,ypQr,xpQerr,xpQerr,ypQrlowerr,ypQruperr);
 grQrel[i]->Write( Form("gr%sQrel", tcase[i].c_str()) );
```

```
 cout << "Q-graafit laskettu." << endl;

 ////////////////////////////////////

 if(0 <= FFind[i]){

 double xpFFerr[points],ypFFlowerr[points],ypFFuperr[points];
 double ypFFr[points],ypFFrlowerr[points],ypFFruperr[points];

 for(int j = 0; j < points; j++){

 xpFFerr[j] = 0;

 ypFFlowerr[j] = FFlowerr[i]*ypLL[j];

 ypFFuperr[j] = FFuperr[i]*ypLL[j];

 ypFFr[j] = 0;

 ypFFrlowerr[j] = 100.0*FFlowerr[i]/FF[i];

 ypFFruperr[j] = 100.0*FFuperr[i]/FF[i];

 }
  f[i]->SetParameter(FFind[i], FF[i]);

 grFF[i] = new
TGraphAsymmErrors(points,xplin,ypLL,xpFFerr,xpFFerr,ypFFlowerr,ypFFuperr);
 grFF[i]->Write( Form("gr%sFF", tcase[i].c_str()) );

 grFFrel[i] = new
TGraphAsymmErrors(points,xplin,ypFFr,xpFFerr,xpFFerr,ypFFrlowerr,ypFFruper
r);
 grFFrel[i]->Write( Form("gr%sFFrel", tcase[i].c_str()) );

 }

 ////////////////////////////////////

 cout << "Tapaus " << i + 1 << "/" << cases << " (" << tcase[i].c_str() <<
") evaluoitu." << endl;
}

file->Close();

cout << "Laskenta suoritettu." << endl;

return 0;

}


double YksTesti(double *x, double *p){
double v = x[0];
double Q = p[0];
double k0 = p[1];
double kq = p[2];
```

```
return v*(k0*ct14n.parton(0, v, Q)+kq*(ct14n.parton(1, v,
Q)+ct14n.parton(-1, v, Q)+ct14n.parton(2, v, Q)+ct14n.parton(-2, v,
Q)+ct14n.parton(3, v, Q)+ct14n.parton(-3, v, Q)+ct14n.parton(4, v,
Q)+ct14n.parton(-4, v, Q)+ct14n.parton(5, v, Q)+ct14n.parton(-5, v, Q)));
}

 double PetFF(double *x, double *p){
double z = x[0];
double eQ = p[0];
double N = p[1];

if(z <= 0){
 return 0;
}

return N/(z*pow((1-1/z-eQ/(1-z)),2));
}


double PetFFeff(double *x, double *p){
double z = x[0];
double eQ = p[0];
double N = p[1];
double n = p[2];

if(z <= 0){
 return 0;
}

return (N*pow(z,(n-2.0)))/pow((1-1/z-eQ/(1-z)),2);
}


double TotCSpp(double *x, double *p){
double yme = p[9];
double s = pow(x[0]*yme,2);
double m = p[0];
int coltype = p[1];
double Qka = p[2];
double Qkp = p[3];
int Qva = p[4];
int Qvp = p[5];
double Qvka = p[6];
double Qvkp = p[7];
double FF = p[8];
double ym = p[10];
double k0 = p[11];
double k1 = p[12];
double k2 = p[13];
double k3 = p[14];
double k4 = p[15];
double k5 = p[16];

if(s <= 4*pow(m,2)){
 return 0;
}
```

```
TF2 *fInt = new TF2("fInt", Intgpp, 0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 17);
fInt->SetParameter(0, s);
fInt->SetParameter(1, m);
fInt->SetParameter(2, coltype); fInt->SetParameter(3, Qka);
fInt->SetParameter(4, Qkp);
fInt->SetParameter(5, Qva);
fInt->SetParameter(6, Qvp);
fInt->SetParameter(7, Qvka);
fInt->SetParameter(8, Qvkp);
fInt->SetParameter(9, FF);
fInt->SetParameter(10, ym);
fInt->SetParameter(11, k0);
fInt->SetParameter(12, k1);
fInt->SetParameter(13, k2);
fInt->SetParameter(14, k3);
fInt->SetParameter(15, k4);
fInt->SetParameter(16, k5);

return fInt->Integral(0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 5.e-5);
}


double Intgpp(double *x, double *p){

double r1 = x[0];
double r2 = x[1];
double s = p[0];
double m = p[1];
int coltype = p[2];
double Qka = p[3];
double Qkp = p[4];
int Qva = p[5];
int Qvp = p[6];
double Qvka = p[7];
double Qvkp = p[8];
double FF = p[9];
double ym = p[10];
double k0 = p[11];
double k1 = p[12];
double k2 = p[13];
double k3 = p[14];
double k4 = p[15];
double k5 = p[16];

double x1min = 4*pow(m,2)/s;
double x1max = 1;
double dx1 = x1max - x1min; double x1 = x1min + r1*dx1;

double x2min = 4*pow(m,2)/(s*x1);
double x2max = 1;
double dx2 = x2max - x2min;
double x2 = x2min + r2*dx2;

double jacob = dx1*dx2;

double Qa, Qp;
```

```
if (Qva==1){
 Qa = Qvka*TMath::Sqrt(x1*x2*s);
} else {
 Qa = Qka*m;
}

if (Qvp==1){
 Qp = Qvkp*TMath::Sqrt(x1*x2*s);
} else {
 Qp = Qkp*m;
}

if(Qp < 1.3){ // 1,3 GeV on pienin skaalavalinta ilman extrapolointia
 Qp = 1.3;
}

double h = 1-4*pow(m,2)/(s*x1*x2);
  return ym*FF*pow(ct14n.alphas(Qa),2)*TMath::Pi()*(k0*ct14n.parton(0, x1,
Qp)*ct14n.parton(0, x2, Qp)*(1./(12*s*x1*x2))*(-(7+31*pow(m,2)/
(x1*x2*s))*TMath::Sqrt(h)+4*(1+4*pow(m,2)/(s*x1*x2)+pow(m,4)/
pow(s*x1*x2,2))*TMath::Log((1+TMath::Sqrt(h))/(1-TMath::Sqrt(h)))) + (k1*
(ct14n.parton(1, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*(-1), x2, Qp)+ct14n.parton(-
1, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*1, x2, Qp)) + k2*(ct14n.parton(2, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-2), x2, Qp)+ct14n.parton(-2, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*2, x2, Qp)) + k3*(ct14n.parton(3, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-3), x2, Qp)+ct14n.parton(-3, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*3, x2, Qp)) + k4*(ct14n.parton(4, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-4), x2, Qp)+ct14n.parton(-4, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*4, x2, Qp)) + k5*(ct14n.parton(5, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-5), x2, Qp)+ct14n.parton(-5, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*5, x2, Qp)))*(8./(27*pow(s*x1*x2,2)))*
(s*x1*x2+2*pow(m,2))*TMath::Sqrt(h))*jacob;

}


double DifCS1(double *x, double *p){

double ympt = p[13]; double pt = x[0]*ympt;
double mq = p[0];
double mh = p[1];
double e = p[2];
int coltype = p[3];
double yhmin = p[4];
double yhmax = p[5];
double Qka = p[6];
double Qkp = p[7];
int Qva = p[8];
int Qvp = p[9];
double Qvka = p[10];
double Qvkp = p[11];
double FF = p[12];
double ym = p[14];
double k0 = p[15];
double k1 = p[16];
double k2 = p[17];
double k3 = p[18];
```

```
double k4 = p[19];
double k5 = p[20];

double yqmin, yqmax;

yqmin = TMath::ASinH(TMath::Sqrt((pow(mh,2)+pow(pt,2))/
(pow(mc,2)+pow(pt,2)))*TMath::SinH(yhmin));

yqmax = TMath::ASinH(TMath::Sqrt((pow(mh,2)+pow(pt,2))/
(pow(mc,2)+pow(pt,2)))*TMath::SinH(yhmax));


if(yqmin <= -TMath::ACosH(e/(2*TMath::Sqrt(pow(mq,2)+pow(pt,2))))){ //
Tarkistetaan, ettÃ¤ ymin ja ymax ovat teoreettisten rajojen sisÃ¤llÃ¤:
|y1| <= arcosh(e/(2*m_T))  yqmin = -TMath::ACosH(e/
(2*TMath::Sqrt(pow(mq,2)+pow(pt,2))));
}

if(TMath::ACosH(e/(2*TMath::Sqrt(pow(mq,2)+pow(pt,2)))) <= yqmax){  yqmax
= TMath::ACosH(e/(2*TMath::Sqrt(pow(mq,2)+pow(pt,2))));
}

TF2 *fDifInt1 = new TF2("fDifInt1", DifIntg1, yqmin, yqmax, 0.0, 1.0, 18);
fDifInt1->SetParameter(0, pt);
fDifInt1->SetParameter(1, mq);
fDifInt1->SetParameter(2, e);
fDifInt1->SetParameter(3, coltype);
fDifInt1->SetParameter(4, Qka);
fDifInt1->SetParameter(5, Qkp);
fDifInt1->SetParameter(6, Qva);
fDifInt1->SetParameter(7, Qvp);
fDifInt1->SetParameter(8, Qvka);
fDifInt1->SetParameter(9, Qvkp);
fDifInt1->SetParameter(10, FF);
fDifInt1->SetParameter(11, ym);
fDifInt1->SetParameter(12, k0);
fDifInt1->SetParameter(13, k1);
fDifInt1->SetParameter(14, k2);
fDifInt1->SetParameter(15, k3);
fDifInt1->SetParameter(16, k4);
fDifInt1->SetParameter(17, k5);

return fDifInt1->Integral(yqmin, yqmax, 0.0, 1.0, 2.e-6);
}


double DifCS2(double *x, double *p){

double ympt = p[10];
double pt = x[0]*ympt;
double m = p[0];
double e = p[1];
int coltype = p[2];
double Qka = p[3];
double Qkp = p[4]; int Qva = p[5];
int Qvp = p[6];
double Qvka = p[7];
```

```
double Qvkp = p[8];
double FF = p[9];
double ym = p[11];
double k0 = p[12];
double k1 = p[13];
double k2 = p[14];
double k3 = p[15];
double k4 = p[16];
double k5 = p[17];

double ymin = -TMath::ACosH(e/(2*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2))));
double ymax = TMath::ACosH(e/(2*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2))));

TF2 *fDifInt2 = new TF2("fDifInt2", DifIntg1, ymin, ymax, 0.0, 1.0, 18);
fDifInt2->SetParameter(0, pt);
fDifInt2->SetParameter(1, m);
fDifInt2->SetParameter(2, e);
fDifInt2->SetParameter(3, coltype);
fDifInt2->SetParameter(4, Qka);
fDifInt2->SetParameter(5, Qkp);
fDifInt2->SetParameter(6, Qva);
fDifInt2->SetParameter(7, Qvp);
fDifInt2->SetParameter(8, Qvka);
fDifInt2->SetParameter(9, Qvkp);
fDifInt2->SetParameter(10, FF);
fDifInt2->SetParameter(11, ym);
fDifInt2->SetParameter(12, k0);
fDifInt2->SetParameter(13, k1);
fDifInt2->SetParameter(14, k2);
fDifInt2->SetParameter(15, k3); fDifInt2->SetParameter(16, k4);
fDifInt2->SetParameter(17, k5);

return fDifInt2->Integral(ymin, ymax, 0.0, 1.0, 2.e-6);
}


double DifIntg1(double *x, double *p){

double y1 = x[0];
double z = x[1];
double pt = p[0];
double m = p[1];
double e = p[2];
double s = pow(e,2);
int coltype = p[3];
double Qka = p[4];
double Qkp = p[5];
int Qva = p[6];
int Qvp = p[7];
double Qvka = p[8];
double Qvkp = p[9];
double FF = p[10];
double ym = p[11];
double k0 = p[12];
double k1 = p[13];
double k2 = p[14];
double k3 = p[15];
```

```
double k4 = p[16];
double k5 = p[17];

double Qa, Qp;

if (Qva==1){
 Qa = Qvka*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2));
} else {
 Qa = Qka*m;
}

if (Qvp==1){
 Qp = Qvkp*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2));
} else {
 Qp = Qkp*m;
}

if(Qp < 1.3){ // 1,3 GeV pienin pienin skaalavalinta ilman extrapolointia
 Qp = 1.3;
}
 double y2 = (1-z)*(-1)*TMath::Log(e/(TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))-
TMath::Exp(-y1))+z*TMath::Log(e/(TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))-
TMath::Exp(y1)); double jacob = TMath::Log(s/(pow(m,2)+pow(pt,2))+1-2*e/
(TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))*TMath::CosH(y1));

double x1 = TMath::Sqrt((pow(m,2)+pow(pt,2))/s)*
(TMath::Exp(y1)+TMath::Exp(y2));
double x2 = TMath::Sqrt((pow(m,2)+pow(pt,2))/s)*(TMath::Exp(-
y1)+TMath::Exp(-y2));
double ss = 2*(pow(m,2)+pow(pt,2))*(1+TMath::CosH(y1-y2));
double tt = pow(m,2)-(pow(m,2)+pow(pt,2))*(1+TMath::Exp(-y1+y2));
double uu = pow(m,2)-(pow(m,2)+pow(pt,2))*(1+TMath::Exp(y1-y2));
 return ym*FF*2*pt*x1*x2*pow(ct14n.alphas(Qa),2)*TMath::Pi()/pow(ss,2)*
((k1*(ct14n.parton(1, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*(-1), x2,
Qp)+ct14n.parton(-1, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*1, x2, Qp)) + k2*
(ct14n.parton(2, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*(-2), x2, Qp)+ct14n.parton(-
2, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*2, x2, Qp)) + k3*(ct14n.parton(3, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-3), x2, Qp)+ct14n.parton(-3, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*3, x2, Qp)) + k4*(ct14n.parton(4, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-4), x2, Qp)+ct14n.parton(-4, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*4, x2, Qp)) + k5*(ct14n.parton(5, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-5), x2, Qp)+ct14n.parton(-5, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*5, x2, Qp)))*(4/(9*pow(ss,2))*(pow((pow(m,2)-
tt),2)+pow((pow(m,2)-uu),2)+2*pow(m,2)*ss))+k0*ct14n.parton(0, x1,
Qp)*ct14n.parton(0, x2, Qp)*(1./24)*(-17-(9.0/pow(ss,2))*
(pow(tt,2)+pow(uu,2)-pow(ss,2)+6*pow(m,2)*ss-2*pow(m,4))+4*
(ss+4*pow(m,2)+pow(m,4)/ss)*(1/(pow(m,2)-tt)+1/(pow(m,2)-uu))-16*pow(m,4)*
(1/pow((pow(m,2)-tt),2)+1/pow((pow(m,2)-uu),2))))*jacob;

}


double DifCS3(double *x, double *p){

double y1 = x[0];
double m = p[0];
double e = p[1];
```

```
int coltype = p[2];
double Qka = p[3];
double Qkp = p[4];
int Qva = p[5];
int Qvp = p[6];
double Qvka = p[7];
double Qvkp = p[8];
double ym = p[9];
double k0 = p[10];
double k1 = p[11];
double k2 = p[12];
double k3 = p[13];
double k4 = p[14];
double k5 = p[15];

if(e <= 2*m){
 return 0;
}

TF2 *fDifInt3 = new TF2("fDifInt3", DifIntg2, 0, 1.0, 0.0, 1.0, 17);
fDifInt3->SetParameter(0, y1);
fDifInt3->SetParameter(1, m);
fDifInt3->SetParameter(2, e);
fDifInt3->SetParameter(3, coltype);
fDifInt3->SetParameter(4, Qka);
fDifInt3->SetParameter(5, Qkp);
fDifInt3->SetParameter(6, Qva);
fDifInt3->SetParameter(7, Qvp); fDifInt3->SetParameter(8, Qvka);
fDifInt3->SetParameter(9, Qvkp);
fDifInt3->SetParameter(10, ym);
fDifInt3->SetParameter(11, k0);
fDifInt3->SetParameter(12, k1);
fDifInt3->SetParameter(13, k2);
fDifInt3->SetParameter(14, k3);
fDifInt3->SetParameter(15, k4);
fDifInt3->SetParameter(16, k5);

return fDifInt3->Integral(0, 1.0, 0.0, 1.0, 4.e-6);
}


double DifIntg2(double *x, double *p){

double w = x[0];
double z = x[1];
double y1 = p[0];
double m = p[1];
double e = p[2];
double s = pow(e,2);
int coltype = p[3];
double Qka = p[4];
double Qkp = p[5];
int Qva = p[6];
int Qvp = p[7];
double Qvka = p[8];
double Qvkp = p[9];
double ym = p[10];
```

```
double k0 = p[11];
double k1 = p[12];
double k2 = p[13];
double k3 = p[14];
double k4 = p[15];
double k5 = p[16];

double pt = w*TMath::Sqrt(s/(4*pow(TMath::CosH(y1),2)) - pow(m,2));
 // Teoreettisten rajojen ylittÃ¤minen on mahdollista: esim. vastaavan
kokeellisen tuloksen rapiditeetti-bin voi ulottua rajan yli. Tarkistetaan
siksi, ettÃ¤ ymin ja ymax ovat teoreettisten rajojen sisÃ¤llÃ¤. if(y1 <= -
TMath::ACosH(e/(2*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2))))){
 return 0;
}

if(TMath::ACosH(e/(2*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))) <= y1){
 return 0;
}

double Qa, Qp;

if (Qva==1){
 Qa = Qvka*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2));
} else {
 Qa = Qka*m;
}

if (Qvp==1){
 Qp = Qvkp*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2));
} else {
 Qp = Qkp*m;
}

if(Qp < 1.3){ // 1,3 GeV pienin pienin skaalavalinta ilman extrapolointia
 Qp = 1.3;
}

double y2 = (1-z)*(-1)*TMath::Log(e/(TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))-
TMath::Exp(-y1))+z*TMath::Log(e/(TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))-
TMath::Exp(y1)); double jacob = (TMath::Sqrt(s/(4*pow(TMath::CosH(y1),2))
- pow(m,2)))*TMath::Log(s/(pow(m,2)+pow(pt,2))+1-2*e/
(TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))*TMath::CosH(y1));
 double x1 = TMath::Sqrt((pow(m,2)+pow(pt,2))/s)*
(TMath::Exp(y1)+TMath::Exp(y2));
double x2 = TMath::Sqrt((pow(m,2)+pow(pt,2))/s)*(TMath::Exp(-
y1)+TMath::Exp(-y2));
double ss = 2*(pow(m,2)+pow(pt,2))*(1+TMath::CosH(y1-y2));
double tt = pow(m,2)-(pow(m,2)+pow(pt,2))*(1+TMath::Exp(-y1+y2));
double uu = pow(m,2)-(pow(m,2)+pow(pt,2))*(1+TMath::Exp(y1-y2));
 return ym*2*pt*x1*x2*pow(ct14n.alphas(Qa),2)*TMath::Pi()/pow(ss,2)*((k1*
(ct14n.parton(1, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*(-1), x2, Qp)+ct14n.parton(-
1, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*1, x2, Qp)) + k2*(ct14n.parton(2, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-2), x2, Qp)+ct14n.parton(-2, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*2, x2, Qp)) + k3*(ct14n.parton(3, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-3), x2, Qp)+ct14n.parton(-3, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*3, x2, Qp)) + k4*(ct14n.parton(4, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-4), x2, Qp)+ct14n.parton(-4, x1,
```

```
Qp)*ct14n.parton(coltype*4, x2, Qp)) + k5*(ct14n.parton(5, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-5), x2, Qp)+ct14n.parton(-5, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*5, x2, Qp)))*(4/(9*pow(ss,2))*(pow((pow(m,2)-
tt),2)+pow((pow(m,2)-uu),2)+2*pow(m,2)*ss))+k0*ct14n.parton(0, x1,
Qp)*ct14n.parton(0, x2, Qp)*(1./24)*(-17-(9.0/pow(ss,2))*
(pow(tt,2)+pow(uu,2)-pow(ss,2)+6*pow(m,2)*ss-2*pow(m,4))+4*
(ss+4*pow(m,2)+pow(m,4)/ss)*(1/(pow(m,2)-tt)+1/(pow(m,2)-uu))-16*pow(m,4)*
(1/pow((pow(m,2)-tt),2)+1/pow((pow(m,2)-uu),2))))*jacob;

}


double CutCS1(double *x,double *p){

double yme = p[11];
double e = x[0]*yme;
double m = p[0];
int coltype = p[1];
double etamin = p[2];
double etamax = p[3];
double Qka = p[4];
double Qkp = p[5];
int Qva = p[6];
int Qvp = p[7];
double Qvka = p[8];
double Qvkp = p[9];
double FF = p[10];
double ym = p[12];
double k0 = p[13];
double k1 = p[14];
double k2 = p[15];
double k3 = p[16];
double k4 = p[17];
double k5 = p[18];

if(e <= 2*m){
 return 0;
}

TF3 *fCutInt1 = new TF3("fCutInt1", CutIntg1, 0, 1.0, etamin, etamax, 0.0,
1.0, 17);
fCutInt1->SetParameter(0, e);
fCutInt1->SetParameter(1, m);
fCutInt1->SetParameter(2, coltype);
fCutInt1->SetParameter(3, Qka);
fCutInt1->SetParameter(4, Qkp);
fCutInt1->SetParameter(5, Qva); fCutInt1->SetParameter(6, Qvp);
fCutInt1->SetParameter(7, Qvka);
fCutInt1->SetParameter(8, Qvkp);
fCutInt1->SetParameter(9, FF);
fCutInt1->SetParameter(10, ym);
fCutInt1->SetParameter(11, k0);
fCutInt1->SetParameter(12, k1);
fCutInt1->SetParameter(13, k2);
fCutInt1->SetParameter(14, k3);
fCutInt1->SetParameter(15, k4);
fCutInt1->SetParameter(16, k5);
```

```
return fCutInt1->Integral(0, 1.0, etamin, etamax, 0.0, 1.0, 3.e-4);
}


double CutIntg1(double *x,double *p){

double w = x[0];
double eta = x[1];
double z = x[2];

double e = p[0];
double s = pow(e,2);
double m = p[1];
int coltype = p[2];
double Qka = p[3];
double Qkp = p[4];
int Qva = p[5];
int Qvp = p[6];
double Qvka = p[7];
double Qvkp = p[8];
double FF = p[9];
double ym = p[10];
double k0 = p[11];
double k1 = p[12];
double k2 = p[13];
double k3 = p[14];
double k4 = p[15];
double k5 = p[16];

double pt = w*TMath::Sqrt(s/4 - pow(m,2))/(TMath::CosH(eta));

if(pt <= 0){
 return 0; }

double y1 = TMath::ASinH((pt/
TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))*TMath::SinH(eta));

if(y1 <= -TMath::ACosH(e/(2*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2))))){ //
Tarkistetaan, ettÃ¤ ymin ja ymax ovat teoreettisten rajojen sisÃ¤llÃ¤:
|y1| <= arcosh(e/(2*m_T))  return 0;
}

if(TMath::ACosH(e/(2*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))) <= y1){
 return 0;
}

double Qa, Qp;

if (Qva==1){
 Qa = Qvka*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2));
} else {
 Qa = Qka*m;
}

if (Qvp==1){
 Qp = Qvkp*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2));
} else {
```

```
 Qp = Qkp*m;
}

if(Qp < 1.3){ // 1,3 GeV pienin pienin skaalavalinta ilman extrapolointia
 Qp = 1.3;
}

double y2 = (1-z)*(-1)*TMath::Log(e/(TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))-
TMath::Exp(-y1))+z*TMath::Log(e/(TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))-
TMath::Exp(y1)); double jacob = pt*TMath::Sqrt((s/4 - pow(m,2))/
(pow(m,2)+pow(pt*TMath::CosH(eta),2)))*TMath::Log(s/
(pow(m,2)+pow(pt,2))+1-2*e/
(TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))*TMath::CosH(y1));
 double x1 = TMath::Sqrt((pow(m,2)+pow(pt,2))/s)*
(TMath::Exp(y1)+TMath::Exp(y2));
double x2 = TMath::Sqrt((pow(m,2)+pow(pt,2))/s)*(TMath::Exp(-
y1)+TMath::Exp(-y2));
double ss = 2*(pow(m,2)+pow(pt,2))*(1+TMath::CosH(y1-y2));
double tt = pow(m,2)-(pow(m,2)+pow(pt,2))*(1+TMath::Exp(-y1+y2));
double uu = pow(m,2)-(pow(m,2)+pow(pt,2))*(1+TMath::Exp(y1-y2));
 return ym*FF*2*pt*x1*x2*pow(ct14n.alphas(Qa),2)*TMath::Pi()/pow(ss,2)*
((k1*(ct14n.parton(1, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*(-1), x2,
Qp)+ct14n.parton(-1, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*1, x2, Qp)) + k2*
(ct14n.parton(2, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*(-2), x2, Qp)+ct14n.parton(-
2, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*2, x2, Qp)) + k3*(ct14n.parton(3, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-3), x2, Qp)+ct14n.parton(-3, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*3, x2, Qp)) + k4*(ct14n.parton(4, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-4), x2, Qp)+ct14n.parton(-4, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*4, x2, Qp)) + k5*(ct14n.parton(5, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-5), x2, Qp)+ct14n.parton(-5, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*5, x2, Qp)))*(4/(9*pow(ss,2))*(pow((pow(m,2)-
tt),2)+pow((pow(m,2)-uu),2)+2*pow(m,2)*ss))+k0*ct14n.parton(0, x1,
Qp)*ct14n.parton(0, x2, Qp)*(1./24)*(-17-(9.0/pow(ss,2))*
(pow(tt,2)+pow(uu,2)-pow(ss,2)+6*pow(m,2)*ss-2*pow(m,4))+4*
(ss+4*pow(m,2)+pow(m,4)/ss)*(1/(pow(m,2)-tt)+1/(pow(m,2)-uu))-16*pow(m,4)*
(1/pow((pow(m,2)-tt),2)+1/pow((pow(m,2)-uu),2))))*jacob;

}


double DifCS4(double *x,double *p){

double eta = x[0];
double m = p[0];
double e = p[1];
int coltype = p[2];
double Qka = p[3];
double Qkp = p[4];
int Qva = p[5];
int Qvp = p[6];
double Qvka = p[7];
double Qvkp = p[8];
double FF = p[9];
double ym = p[10];
double k0 = p[11];
double k1 = p[12];
double k2 = p[13];
```

```
double k3 = p[14];
double k4 = p[15];
double k5 = p[16];

if(e <= 2*m){
 return 0;
}

TF2 *fDifInt4 = new TF2("fDifInt4", DifIntg3, 0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 18);
fDifInt4->SetParameter(0, eta);
fDifInt4->SetParameter(1, m);
fDifInt4->SetParameter(2, e);
fDifInt4->SetParameter(3, coltype);
fDifInt4->SetParameter(4, Qka);
fDifInt4->SetParameter(5, Qkp);
fDifInt4->SetParameter(6, Qva);
fDifInt4->SetParameter(7, Qvp); fDifInt4->SetParameter(8, Qvka);
fDifInt4->SetParameter(9, Qvkp);
fDifInt4->SetParameter(10, FF);
fDifInt4->SetParameter(11, ym);
fDifInt4->SetParameter(12, k0);
fDifInt4->SetParameter(13, k1);
fDifInt4->SetParameter(14, k2);
fDifInt4->SetParameter(15, k3);
fDifInt4->SetParameter(16, k4);
fDifInt4->SetParameter(17, k5);

return fDifInt4->Integral(0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 2.e-5);
}


double DifIntg3(double *x,double *p){

double w = x[0];
double z = x[1];

double eta = p[0];
double m = p[1];
double e = p[2];
double s = pow(e,2);
int coltype = p[3];
double Qka = p[4];
double Qkp = p[5];
int Qva = p[6];
int Qvp = p[7];
double Qvka = p[8];
double Qvkp = p[9];
double FF = p[10];
double ym = p[11];
double k0 = p[12];
double k1 = p[13];
double k2 = p[14];
double k3 = p[15];
double k4 = p[16];
double k5 = p[17];

double pt = w*TMath::Sqrt(s/4 - pow(m,2))/TMath::CosH(eta);
```

```
if(pt <= 0){
 return 0;
}
 double y1 = TMath::ASinH((pt/
TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))*TMath::SinH(eta));

double Qa, Qp;

if (Qva==1){
 Qa = Qvka*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2));
} else {
 Qa = Qka*m;
}

if (Qvp==1){
 Qp = Qvkp*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2));
} else {
 Qp = Qkp*m;
}

if(Qp < 1.3){ // 1,3 GeV pienin pienin skaalavalinta ilman extrapolointia
 Qp = 1.3;
}

double y2 = (1-z)*(-1)*TMath::Log(e/(TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))-
TMath::Exp(-y1))+z*TMath::Log(e/(TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))-
TMath::Exp(y1)); double jacob = pt*TMath::Sqrt((s/4 - pow(m,2))/
(pow(m,2)+pow(pt*TMath::CosH(eta),2)))*TMath::Log(s/
(pow(m,2)+pow(pt,2))+1-2*e/
(TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))*TMath::CosH(y1));

double x1 = TMath::Sqrt((pow(m,2)+pow(pt,2))/s)*
(TMath::Exp(y1)+TMath::Exp(y2));
double x2 = TMath::Sqrt((pow(m,2)+pow(pt,2))/s)*(TMath::Exp(-
y1)+TMath::Exp(-y2));
double ss = 2*(pow(m,2)+pow(pt,2))*(1+TMath::CosH(y1-y2));
double tt = pow(m,2)-(pow(m,2)+pow(pt,2))*(1+TMath::Exp(-y1+y2)); double
uu = pow(m,2)-(pow(m,2)+pow(pt,2))*(1+TMath::Exp(y1-y2));
  return ym*FF*2*pt*x1*x2*pow(ct14n.alphas(Qa),2)*TMath::Pi()/pow(ss,2)*
((k1*(ct14n.parton(1, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*(-1), x2,
Qp)+ct14n.parton(-1, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*1, x2, Qp)) + k2*
(ct14n.parton(2, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*(-2), x2, Qp)+ct14n.parton(-
2, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*2, x2, Qp)) + k3*(ct14n.parton(3, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-3), x2, Qp)+ct14n.parton(-3, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*3, x2, Qp)) + k4*(ct14n.parton(4, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-4), x2, Qp)+ct14n.parton(-4, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*4, x2, Qp)) + k5*(ct14n.parton(5, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-5), x2, Qp)+ct14n.parton(-5, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*5, x2, Qp)))*(4./(9*pow(ss,2))*(pow((pow(m,2)-
tt),2)+pow((pow(m,2)-uu),2)+2*pow(m,2)*ss))+k0*ct14n.parton(0, x1,
Qp)*ct14n.parton(0, x2, Qp)*(1./24)*(-17-(9./pow(ss,2))*
(pow(tt,2)+pow(uu,2)-pow(ss,2)+6*pow(m,2)*ss-2*pow(m,4))+4*
(ss+4*pow(m,2)+pow(m,4)/ss)*(1./(pow(m,2)-tt)+1./(pow(m,2)-uu))-
16*pow(m,4)*(1./pow((pow(m,2)-tt),2)+1./pow((pow(m,2)-uu),2))))*jacob;

}
```

```
double CutCS2(double *x,double *p){

double yme = p[14];
double e = x[0]*yme;
double mq = p[0];
double mh = p[1];
int coltype = p[2];
double ptmin = p[3];
double ptmax = p[4];
double yhmin = p[5];
double yhmax = p[6];
double Qka = p[7];
double Qkp = p[8];
int Qva = p[9];
int Qvp = p[10];
double Qvka = p[11];
double Qvkp = p[12];
double FF = p[13];
double ym = p[15];
double k0 = p[16];
double k1 = p[17];
double k2 = p[18];
double k3 = p[19];
double k4 = p[20];
double k5 = p[21];

TF3 *fCutInt2 = new TF3("fCutInt2", CutIntg2, ptmin, ptmax, yhmin, yhmax,
0, 1.0, 18);
fCutInt2->SetParameter(0, e);
fCutInt2->SetParameter(1, mq);
fCutInt2->SetParameter(2, mh);
fCutInt2->SetParameter(3, coltype);
fCutInt2->SetParameter(4, Qka); fCutInt2->SetParameter(5, Qkp);
fCutInt2->SetParameter(6, Qva);
fCutInt2->SetParameter(7, Qvp);
fCutInt2->SetParameter(8, Qvka);
fCutInt2->SetParameter(9, Qvkp);
fCutInt2->SetParameter(10, FF);
fCutInt2->SetParameter(11, ym);
fCutInt2->SetParameter(12, k0);
fCutInt2->SetParameter(13, k1);
fCutInt2->SetParameter(14, k2);
fCutInt2->SetParameter(15, k3);
fCutInt2->SetParameter(16, k4);
fCutInt2->SetParameter(17, k5);

return fCutInt2->Integral(ptmin, ptmax, yhmin, yhmax, 0, 1.0, 2.e-4);
}


double CutIntg2(double *x,double *p){

double pt = x[0];
double y = x[1];
double z = x[2];

double e = p[0];
```

```
double s = pow(e,2);
double m = p[1];
double mh = p[2];
int coltype = p[3];
double Qka = p[4];
double Qkp = p[5];
int Qva = p[6];
int Qvp = p[7];
double Qvka = p[8];
double Qvkp = p[9];
double FF = p[10];
double ym = p[11];
double k0 = p[12];
double k1 = p[13];
double k2 = p[14];
double k3 = p[15];
double k4 = p[16];
double k5 = p[17];
 if(pt <= 0){
 return 0;
}

double y1 = TMath::ASinH(TMath::Sqrt((pow(mh,2)+pow(pt,2))/
(pow(m,2)+pow(pt,2)))*TMath::SinH(y));

if(e <= 2*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2))*TMath::CosH(y1)){
 return 0;
}

double Qa, Qp;

if (Qva==1){
 Qa = Qvka*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2));
} else {
 Qa = Qka*m;
}

if (Qvp==1){
 Qp = Qvkp*TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2));
} else {
 Qp = Qkp*m;
}

if(Qp < 1.3){ // 1,3 GeV pienin pienin skaalavalinta ilman extrapolointia
 Qp = 1.3;
}

double y2 = (1-z)*(-1)*TMath::Log(e/(TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))-
TMath::Exp(-y1))+z*TMath::Log(e/(TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))-
TMath::Exp(y1)); double jacob = ((TMath::CosH(y))/
TMath::Sqrt((pow(m,2)+pow(pt,2))/
(pow(mh,2)+pow(pt,2))+pow(TMath::SinH(y),2)))*TMath::Log(s/
(pow(m,2)+pow(pt,2))+1-2*e/
(TMath::Sqrt(pow(m,2)+pow(pt,2)))*TMath::CosH(y1));

double x1 = TMath::Sqrt((pow(m,2)+pow(pt,2))/s)*
(TMath::Exp(y1)+TMath::Exp(y2)); double x2 =
```

```
TMath::Sqrt((pow(m,2)+pow(pt,2))/s)*(TMath::Exp(-y1)+TMath::Exp(-y2));
double ss = 2*(pow(m,2)+pow(pt,2))*(1+TMath::CosH(y1-y2));
double tt = pow(m,2)-(pow(m,2)+pow(pt,2))*(1+TMath::Exp(-y1+y2));
double uu = pow(m,2)-(pow(m,2)+pow(pt,2))*(1+TMath::Exp(y1-y2));
 return ym*FF*2*pt*x1*x2*pow(ct14n.alphas(Qa),2)*TMath::Pi()/pow(ss,2)*
((k1*(ct14n.parton(1, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*(-1), x2,
Qp)+ct14n.parton(-1, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*1, x2, Qp)) + k2*
(ct14n.parton(2, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*(-2), x2, Qp)+ct14n.parton(-
2, x1, Qp)*ct14n.parton(coltype*2, x2, Qp)) + k3*(ct14n.parton(3, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-3), x2, Qp)+ct14n.parton(-3, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*3, x2, Qp)) + k4*(ct14n.parton(4, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-4), x2, Qp)+ct14n.parton(-4, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*4, x2, Qp)) + k5*(ct14n.parton(5, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*(-5), x2, Qp)+ct14n.parton(-5, x1,
Qp)*ct14n.parton(coltype*5, x2, Qp)))*(4./(9*pow(ss,2))*(pow((pow(m,2)-
tt),2)+pow((pow(m,2)-uu),2)+2*pow(m,2)*ss))+k0*ct14n.parton(0, x1,
Qp)*ct14n.parton(0, x2, Qp)*(1./24)*(-17-(9./pow(ss,2))*
(pow(tt,2)+pow(uu,2)-pow(ss,2)+6*pow(m,2)*ss-2*pow(m,4))+4*
(ss+4*pow(m,2)+pow(m,4)/ss)*(1./(pow(m,2)-tt)+1./(pow(m,2)-uu))-
16*pow(m,4)*(1./pow((pow(m,2)-tt),2)+1./pow((pow(m,2)-uu),2))))*jacob;

}
```

```
// TÃ¤mÃ¤ piirto-ohjelma tuottaa kuvat ohjelmassa Int.cc lasketuille
tuloksille. LisÃ¤ksi tÃ¤mÃ¤ ohjelma tekee K-kerroinsovitukset (jokaisella
skaalavalinnnalla (Qa,Qp), 7 kpl per tapaus) ja laskee tÃ¤stÃ¤ K-
kertoimella skaalatun LO-tuloksen (oletusskaalavalinta). // Teemu Kovanen
// JyvÃ¤skylÃ¤n yliopisto
// Fysiikan laitos
// 6.9.2020


double Kfit(double *x, double *p);

void Plot(){

gStyle->SetLegendTextSize(0.075);
gStyle->SetLegendBorderSize(0);

gStyle->SetPadLeftMargin(0.135);
gStyle->SetPadRightMargin(0.043);
gStyle->SetPadBottomMargin(0.16);
gStyle->SetPadTopMargin(0.045);


TFile *file = TFile::Open("file.root","read");

const int types = 6;
int color[types] = {kGray+3,kGreen-1,kBlue,kCyan+1,kOrange+7,kViolet};



bool savesecpics = true;

// Petersonin fragmentaatiofunktiot

TGraph *grPetFFc;
TGraph *grPetFFb;
TCanvas *cPetFF;

grPetFFc = (TGraph*)file->Get("grPetFFc");
grPetFFc->SetMarkerSize(0);
grPetFFc->SetMarkerColor(color[4]); grPetFFc->SetLineColor(color[4]);
grPetFFc->SetLineWidth(2);

grPetFFb = (TGraph*)file->Get("grPetFFb");
grPetFFb->SetMarkerSize(0);
grPetFFb->SetMarkerColor(color[5]);
grPetFFb->SetLineColor(color[5]);
grPetFFb->SetLineWidth(2);

cPetFF = new TCanvas ("cPetFF", "cPetFF", 1200.0, 500.0);
cPetFF->cd();
grPetFFc->SetMaximum(4.0);
grPetFFc->SetMinimum(0.0);
grPetFFc->GetXaxis()->SetLimits(0.0, 1.0);
grPetFFc->SetTitle(" ");
//grPetFFc->SetTitle("Petersonin fragmentaatiofunktiot c- ja b-
kvarkeille");
grPetFFc->GetXaxis()->SetTitle("z");
```

```
grPetFFc->GetYaxis()->SetTitle("D^{H_{Q}}_{Q}(z)");
grPetFFc->GetXaxis()->SetLabelSize(0.075);
grPetFFc->GetYaxis()->SetLabelSize(0.075);
grPetFFc->GetXaxis()->SetTitleSize(0.075);
grPetFFc->GetYaxis()->SetTitleSize(0.070);
grPetFFc->GetXaxis()->SetTitleOffset(0.95);
grPetFFc->GetYaxis()->SetTitleOffset(0.55);
grPetFFc->GetXaxis()->SetNdivisions(50206, true);
grPetFFc->GetYaxis()->SetNdivisions(50205, true); grPetFFc->Draw("alp");
grPetFFb->Draw("SAME");
cPetFF->RedrawAxis();

if(savesecpics == true){
cPetFF->SaveAs("Pictures/cPetFF.pdf");
}



// Vahva kytkentÃ¤vakio muuttujan Q_r funktiona

TGraph *gralpha;
TCanvas *calpha;
TLegend *addQrbeg;

gralpha = (TGraph*)file->Get("gralpha");
gralpha->SetMarkerColor(1);
gralpha->SetMarkerSize(0);
gralpha->SetLineWidth(2);
gralpha->SetLineColor(1);

calpha = new TCanvas ("calpha", "calpha", 1200.0, 500.0);
calpha->cd();
calpha->SetLogx();
gralpha->SetMaximum(1.4);
gralpha->SetMinimum(0.0);
gralpha->GetXaxis()->SetLimits(0.635, 1200.0);
gralpha->GetXaxis()->SetLabelSize(0.075);
gralpha->GetYaxis()->SetLabelSize(0.075);
gralpha->GetXaxis()->SetTitleSize(0.075);
gralpha->GetYaxis()->SetTitleSize(0.070);
gralpha->GetXaxis()->SetTitleOffset(1.02);
gralpha->GetYaxis()->SetTitleOffset(0.65);
//gralpha->GetXaxis()->SetNdivisions(50206, true);
gralpha->GetYaxis()->SetNdivisions(20206, true); gralpha->Draw("alp");
gralpha->SetTitle(" ");
//gralpha->SetTitle("Vahvan vuorovaikutuksen kytkent#ddot{a}vakion arvo
renormalisaatioskaalan funktiona");
gralpha->GetXaxis()->SetTitle("Q_{r} [GeV]");
gralpha->GetYaxis()->SetTitle("#alpha_{s}(Q_{r})");

addQrbeg = new TLegend(0.121, 0.10, 0.171, 0.05);
addQrbeg->SetHeader("#frac{m_{c}}{2}","C");
addQrbeg->SetFillStyle(0);
addQrbeg->Draw();

calpha->RedrawAxis();
```

```
if(savesecpics == true){
calpha->SaveAs("Pictures/calpha.pdf");
}



// LO- ja NLO-partonijakaumafunktiot (x*f_j, j = g, u, u_bar, d, d_bar, s,
s_bar, c, c_bar, b, b_bar, t, t_bar) muuttujan x funktiona, eri
skaalavalinnoilla Q_f

const int scales = 13;
string tscale[scales] = {"635 MeV", "1.3 GeV", "2.09 GeV", "2.54 GeV",
"4.18 GeV", "5.08 GeV", "8.36 GeV", "16.72 GeV", "86.45 GeV", "172.9 GeV",
"345.8 GeV", "691.6 GeV", "1 TeV"};

TGraph *grnlopdf[scales][types];
TGraph *grlopdf[scales][types];
TGraph *grnlopdfah[scales][types]; TGraph *grlopdfah[scales][types];
TCanvas *cnlopdf[scales];
TCanvas *clopdf[scales];
TCanvas *cnlopdfah[scales];
TCanvas *clopdfah[scales];

double nloxmin[scales] = {0.00000001, 0.00000001, 0.0000001, 0.00000001,
0.0000001, 0.00000001, 0.0000001, 0.0000001, 0.0001, 0.0001, 0.0001,
0.0001, 0.0001}; double loxmin[scales] = {0.00000001, 0.00000001,
0.0000001, 0.00000001, 0.0000001, 0.00000001, 0.0000001, 0.0000001,
0.0001, 0.0001, 0.0001, 0.0001, 0.0001};

//double nlopdfmax[scales] = {25, 3.2, 4.2, 4.6, 7, 9, 13, 22, 55, 100,
100, 100, 100};
//double nlopdfmin[scales] = {-80, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
//double lopdfmax[scales] = {6, 4.0, 4.0, 4.6, 7, 10, 15, 30, 75, 150,
150, 150, 150};
//double lopdfmin[scales] = {-31, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};

double nlopdfmax[scales] = {25, 3.2, 4.2, 4.6, 7, 9, 8, 14, 4, 4.2, 5, 6,
6};
double nlopdfmin[scales] = {-80, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
double lopdfmax[scales] = {6, 4.0, 4.0, 4.6, 7, 10, 10, 15, 4, 5, 6, 6,
6};
double lopdfmin[scales] = {-31, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};

int ydivnlopdf[scales] = {50207, 50204, 50205, 50205, 50204, 50205, 50204,
503, 50204, 50205, 50205, 50206, 50206};
int ydivlopdf[scales] = {50206, 50204, 50204, 50205, 50204, 50205, 50205,
503, 50204, 50205, 50206, 50206, 50206};

for(int i = 0; i < scales; i++){

for(int j = 0; j < types; j++){

 grnlopdf[i][j] = (TGraph*)file->Get( Form("grnlopdfQ%01ip%01i", i, j) );
 grnlopdf[i][j]->SetMarkerStyle(20);
 grnlopdf[i][j]->SetMarkerColor(color[j]);
 grnlopdf[i][j]->SetMarkerSize(0);
 grnlopdf[i][j]->SetLineWidth(2);
```

```
 grnlopdf[i][j]->SetLineColor(color[j]);

 if(0 < j){

 grnlopdfah[i][j] = (TGraph*)file->Get( Form("grnlopdfQ%01ip%01iah", i, j)
);
 grnlopdfah[i][j]->SetMarkerStyle(20);
 grnlopdfah[i][j]->SetMarkerColor(color[j]);
 grnlopdfah[i][j]->SetMarkerSize(0);  grnlopdfah[i][j]->SetLineWidth(2);
 grnlopdfah[i][j]->SetLineColor(color[j]);

 }
}


grnlopdf[i][0]->GetXaxis()->SetLimits(nloxmin[i], 1.0);
grnlopdf[i][0]->SetMaximum(nlopdfmax[i]);
grnlopdf[i][0]->SetMinimum(nlopdfmin[i]);

cnlopdf[i] = new TCanvas (Form("cnlopdfQ%01i", i),Form("cnlopdfQ%01i", i),
800.0, 470.0);
cnlopdf[i]->cd();
cnlopdf[i]->SetLogx();
grnlopdf[i][0]->Draw("alp");
grnlopdf[i][0]->SetTitle(" ");
//grnlopdf[i][0]->SetTitle(Form("Perushiukkasten NLO-PDF:ien arvot
kerrottuna muuttujalla x, x:n funktiona, skaalalla Q_{f} = %s",
tscale[i].c_str())); grnlopdf[i][0]->GetXaxis()->SetTitle("x");
//grnlopdf[i][0]->GetYaxis()->SetTitle( Form("xf_{i}(x,Q_{f} = %s), i = g,
q", tscale[i].c_str()) );
grnlopdf[i][0]->GetYaxis()->SetTitle( Form("xf_{i}(x,Q_{f} = %s)",
tscale[i].c_str()) );
grnlopdf[i][0]->GetXaxis()->SetLabelSize(0.075);
grnlopdf[i][0]->GetYaxis()->SetLabelSize(0.075); grnlopdf[i][0]-
>GetXaxis()->SetTitleSize(0.075);
grnlopdf[i][0]->GetYaxis()->SetTitleSize(0.075);
grnlopdf[i][0]->GetXaxis()->SetTitleOffset(1.05);
grnlopdf[i][0]->GetYaxis()->SetTitleOffset(0.85);
grnlopdf[i][0]->GetYaxis()->SetNdivisions(ydivnlopdf[i], true);

for (int j = 1; j < types; j++){

 grnlopdf[i][j]->Draw("same,pl");

}

cnlopdf[i]->RedrawAxis();

if(savesecpics == true){
 cnlopdf[i]->SaveAs( Form("Pictures/cnlopdf%01i.pdf", i) );
}

grnlopdfah[i][1]->GetXaxis()->SetLimits(nloxmin[i], 1.0);
grnlopdfah[i][1]->SetMaximum(nlopdfmax[i]);
grnlopdfah[i][1]->SetMinimum(nlopdfmin[i]);

cnlopdfah[i] = new TCanvas (Form("cnlopdfahQ%01i",
```

```
i),Form("cnlopdfahQ%01i", i), 800.0, 470.0);
cnlopdfah[i]->cd();
cnlopdfah[i]->SetLogx();
grnlopdfah[i][1]->Draw("alp");
grnlopdfah[i][1]->SetTitle(" "); //grnlopdfah[i][1]->SetTitle(
Form("Antihiukkasten NLO-PDF:ien arvot kerrottuna muuttujalla x, x:n
funktiona, skaalalla Q_{f} = %s", tscale[i].c_str()) ); grnlopdfah[i][1]-
>GetXaxis()->SetTitle("x");
//grnlopdfah[i][1]->GetYaxis()->SetTitle( Form("xf_{i}(x,Q_{f} = %s), i =
g, #bar{q}", tscale[i].c_str()) );
grnlopdfah[i][1]->GetYaxis()->SetTitle( Form("xf_{i}(x,Q_{f} = %s)",
tscale[i].c_str()) );
grnlopdfah[i][1]->GetXaxis()->SetLabelSize(0.075);
grnlopdfah[i][1]->GetYaxis()->SetLabelSize(0.075);
grnlopdfah[i][1]->GetXaxis()->SetTitleSize(0.075);
grnlopdfah[i][1]->GetYaxis()->SetTitleSize(0.075);
grnlopdfah[i][1]->GetXaxis()->SetTitleOffset(1.05);
grnlopdfah[i][1]->GetYaxis()->SetTitleOffset(0.85);
grnlopdfah[i][1]->GetYaxis()->SetNdivisions(ydivnlopdf[i], true);

for (int j = 2; j < types; j++){

 grnlopdfah[i][j]->Draw("same,pl");

}

grnlopdf[i][0]->Draw("same,pl");
cnlopdfah[i]->RedrawAxis();

if(savesecpics == true){  cnlopdfah[i]->SaveAs( Form("Pictures/
cnlopdfah%01i.pdf", i) );
}

for(int j = 0; j < types; j++){

 grlopdf[i][j] = (TGraph*)file->Get( Form("grlopdfQ%01ip%01i", i, j) );
 grlopdf[i][j]->SetMarkerStyle(20);
 grlopdf[i][j]->SetMarkerColor(color[j]);
 grlopdf[i][j]->SetMarkerSize(0);
 grlopdf[i][j]->SetLineWidth(2);
 grlopdf[i][j]->SetLineColor(color[j]);

 if(0 < j){

 grlopdfah[i][j] = (TGraph*)file->Get( Form("grlopdfQ%01ip%01iah", i, j)
);
 grlopdfah[i][j]->SetMarkerStyle(20);
 grlopdfah[i][j]->SetMarkerColor(color[j]);
 grlopdfah[i][j]->SetMarkerSize(0);
 grlopdfah[i][j]->SetLineWidth(2);
 grlopdfah[i][j]->SetLineColor(color[j]);

 }
}


grlopdf[i][0]->GetXaxis()->SetLimits(loxmin[i], 1.0);
```

```
grlopdf[i][0]->SetMaximum(lopdfmax[i]);
grlopdf[i][0]->SetMinimum(lopdfmin[i]);

clopdf[i] = new TCanvas (Form("clopdfQ%01i", i),Form("clopdfQ%01i", i),
800.0, 470.0); clopdf[i]->cd();
clopdf[i]->SetLogx();
grlopdf[i][0]->Draw("alp");
grlopdf[i][0]->SetTitle(" ");
//grlopdf[i][0]->SetTitle(Form("Perushiukkasten LO-PDF:ien arvot
kerrottuna muuttujalla x, x:n funktiona, skaalalla Q_{f} = %s",
tscale[i].c_str())); grlopdf[i][0]->GetXaxis()->SetTitle("x");
//grlopdf[i][0]->GetYaxis()->SetTitle( Form("xf_{i}(x,Q_{f} = %s), i = g,
q", tscale[i].c_str()) );
grlopdf[i][0]->GetYaxis()->SetTitle( Form("xf_{i}(x,Q_{f} = %s)",
tscale[i].c_str()) );
grlopdf[i][0]->GetXaxis()->SetLabelSize(0.075);
grlopdf[i][0]->GetYaxis()->SetLabelSize(0.075);
grlopdf[i][0]->GetXaxis()->SetTitleSize(0.075);
grlopdf[i][0]->GetYaxis()->SetTitleSize(0.075);
grlopdf[i][0]->GetXaxis()->SetTitleOffset(1.05);
grlopdf[i][0]->GetYaxis()->SetTitleOffset(0.85);
grlopdf[i][0]->GetYaxis()->SetNdivisions(ydivlopdf[i], true);

for (int j = 1; j < types; j++){

 grlopdf[i][j]->Draw("same,pl");

}

clopdf[i]->RedrawAxis();
 if(savesecpics == true){
 clopdf[i]->SaveAs( Form("Pictures/clopdf%01i.pdf", i) );
}

grlopdfah[i][1]->GetXaxis()->SetLimits(loxmin[i], 1.0);
grlopdfah[i][1]->SetMaximum(lopdfmax[i]);
grlopdfah[i][1]->SetMinimum(lopdfmin[i]);

clopdfah[i] = new TCanvas (Form("clopdfahQ%01i", i),Form("clopdfahQ%01i",
i), 800.0, 470.0);
clopdfah[i]->cd();
clopdfah[i]->SetLogx();
grlopdfah[i][1]->Draw("alp");
grlopdfah[i][1]->SetTitle(" ");
//grlopdfah[i][1]->SetTitle( Form("Antihiukkasten LO-PDF:ien arvot
kerrottuna muuttujalla x, x:n funktiona, skaalalla Q_{f} = %s",
tscale[i].c_str()) ); grlopdfah[i][1]->GetXaxis()->SetTitle("x");
//grlopdfah[i][1]->GetYaxis()->SetTitle( Form("xf_{i}(x,Q_{f} = %s), i =
g, #bar{q}", tscale[i].c_str()) );
grlopdfah[i][1]->GetYaxis()->SetTitle( Form("xf_{i}(x,Q_{f} = %s)",
tscale[i].c_str()) );
grlopdfah[i][1]->GetXaxis()->SetLabelSize(0.075);
grlopdfah[i][1]->GetYaxis()->SetLabelSize(0.075); grlopdfah[i][1]-
>GetXaxis()->SetTitleSize(0.075);
grlopdfah[i][1]->GetYaxis()->SetTitleSize(0.075);
grlopdfah[i][1]->GetXaxis()->SetTitleOffset(1.05);
grlopdfah[i][1]->GetYaxis()->SetTitleOffset(0.85);
```

```
grlopdfah[i][1]->GetYaxis()->SetNdivisions(ydivlopdf[i], true);

for (int j = 2; j < types; j++){

 grlopdfah[i][j]->Draw("same,pl");

}

grlopdf[i][0]->Draw("same,pl");
clopdfah[i]->RedrawAxis();

if(savesecpics == true){
 clopdfah[i]->SaveAs( Form("Pictures/clopdfah%01i.pdf", i) );
}

}



// LO-partonijakaumafunktiot (f_j, j = g, u, u_bar, d, d_bar, s, s_bar, c,
c_bar, b, b_bar, t, t_bar) muuttujan Q_f funktiona, eri x:n arvoilla

const int xs = 8;
const string tx[xs] = {"10^{-8}", "10^{-7}", "10^{-6}", "10^{-5}", "10^{-
4}", "10^{-3}", "10^{-2}", "10^{-1}"};

double pdfQmax[xs] = {22.e11, 6.e10, 22.e8, 7.e7, 22.e5, 6.e4, 1.e3,
22.0};
double pdfQmin[xs] = {11.e7, 11.e6, 11.e5, 2.e5, 9.e3, 4.e2, 9, 0.095};
 TGraph *grlopdfQ[xs][types];
TGraph *grlopdfahQ[xs][types];

TCanvas *clopdfQ[xs];
TCanvas *clopdfahQ[xs];
TLegend *addQfbeg;

for(int i = 0; i < xs; i++){

for(int j = 0; j < types; j++){

 grlopdfQ[i][j] = (TGraph*)file->Get( Form("grlopdfQx%01ip%01i", i, j) );
 grlopdfQ[i][j]->SetMarkerColor(color[j]);
 grlopdfQ[i][j]->SetMarkerSize(0);
 grlopdfQ[i][j]->SetLineWidth(2);
 grlopdfQ[i][j]->SetLineColor(color[j]);

 if(0 < j){

 grlopdfahQ[i][j] = (TGraph*)file->Get( Form("grlopdfQx%01ip%01iah", i, j)
);
 grlopdfahQ[i][j]->SetMarkerColor(color[j]);
 grlopdfahQ[i][j]->SetMarkerSize(0);
 grlopdfahQ[i][j]->SetLineWidth(2);
 grlopdfahQ[i][j]->SetLineColor(color[j]);

 }
```

```
}

grlopdfahQ[i][0] = (TGraph*)file->Get( Form("grlopdfQx%01ip0", i) );
grlopdfahQ[i][0]->SetMarkerColor(kBlack);
grlopdfahQ[i][0]->SetMarkerSize(0);
grlopdfahQ[i][0]->SetLineWidth(2); grlopdfahQ[i][0]->SetLineColor(kBlack);


grlopdfQ[i][0]->GetXaxis()->SetLimits(0.635, 1200.0);
grlopdfQ[i][0]->SetMaximum(pdfQmax[i]);
grlopdfQ[i][0]->SetMinimum(pdfQmin[i]);

clopdfQ[i] = new TCanvas (Form("cnlopdfQx%01i", i),Form("cnlopdfQx%01i",
i), 800.0, 470.0);
clopdfQ[i]->cd();
clopdfQ[i]->SetLogy();
grlopdfQ[i][0]->Draw("alp");
grlopdfQ[i][0]->SetTitle(" ");
//grlopdfQ[i][0]->SetTitle( Form("Perushiukkasten LO-PDF:ien arvot skaalan
Q funktiona, suhteellisella liikem#ddot{a}#ddot{a}r#ddot{a}osuudella x =
%s", tx[i].c_str()) ); grlopdfQ[i][0]->GetXaxis()->SetTitle("Q_{f}
[GeV]");
//grlopdfQ[i][0]->GetYaxis()->SetTitle( Form("f_{j}(x = %s,Q_{f}), j = g,
q", tx[i].c_str()) );
grlopdfQ[i][0]->GetYaxis()->SetTitle( Form("f_{i}(x = %s,Q_{f})",
tx[i].c_str()) );
grlopdfQ[i][0]->GetXaxis()->SetLabelSize(0.075);
grlopdfQ[i][0]->GetYaxis()->SetLabelSize(0.075);
grlopdfQ[i][0]->GetXaxis()->SetTitleSize(0.075); grlopdfQ[i][0]-
>GetYaxis()->SetTitleSize(0.075);
grlopdfQ[i][0]->GetXaxis()->SetTitleOffset(0.95);
grlopdfQ[i][0]->GetYaxis()->SetTitleOffset(0.85);
grlopdfQ[i][0]->GetXaxis()->SetNdivisions(50207, true);

for(int j = 1; j < types; j++){

 grlopdfQ[i][j]->Draw("same,pl");

}

addQfbeg = new TLegend(0.12,0.098,0.17,0.048);
addQfbeg->SetHeader("#frac{m_{c}}{2}","C");
addQfbeg->SetFillStyle(0);
addQfbeg->Draw();

clopdfQ[i]->RedrawAxis();

if(savesecpics == true){
 clopdfQ[i]->SaveAs( Form("Pictures/clopdfQ%01i.pdf", i) );
}


grlopdfahQ[i][0]->GetXaxis()->SetLimits(0.635, 1200.0);
grlopdfahQ[i][0]->SetMaximum(pdfQmax[i]);
grlopdfahQ[i][0]->SetMinimum(pdfQmin[i]);

clopdfahQ[i] = new TCanvas (Form("cnlopdfahQx%01i",
```

```
i),Form("cnlopdfahQx%01i", i), 800.0, 470.0);
clopdfahQ[i]->cd();
clopdfahQ[i]->SetLogy();
grlopdfahQ[i][0]->Draw("alp");
grlopdfahQ[i][0]->SetTitle(" "); //grlopdfahQ[i][0]->SetTitle(
Form("Antihiukkasten LO-PDF:ien arvot skaalan Q funktiona, suhteellisella
liikem#ddot{a}#ddot{a}r#ddot{a}osuudella x = %s", tx[i].c_str()) );
grlopdfahQ[i][0]->GetXaxis()->SetTitle("Q_{f} [GeV]");
//grlopdfahQ[i][0]->GetYaxis()->SetTitle( Form("f_{j}(x = %s,Q_{f}), j =
g, #bar{q}", tx[i].c_str()) );
grlopdfahQ[i][0]->GetYaxis()->SetTitle( Form("f_{i}(x = %s,Q_{f})",
tx[i].c_str()) );
grlopdfahQ[i][0]->GetXaxis()->SetLabelSize(0.075);
grlopdfahQ[i][0]->GetYaxis()->SetLabelSize(0.075);
grlopdfahQ[i][0]->GetXaxis()->SetTitleSize(0.075);
grlopdfahQ[i][0]->GetYaxis()->SetTitleSize(0.075);
grlopdfahQ[i][0]->GetXaxis()->SetTitleOffset(0.95);
grlopdfahQ[i][0]->GetYaxis()->SetTitleOffset(0.85);
grlopdfahQ[i][0]->GetXaxis()->SetNdivisions(50207, true);

for(int j = 1; j < types; j++){
 grlopdfahQ[i][j]->Draw("same,pl");
}

addQfbeg->Draw();

clopdfahQ[i]->RedrawAxis();

if(savesecpics == true){  clopdfahQ[i]->SaveAs( Form("Pictures/
clopdfahQ%01i.pdf", i) );
}

}



// Tarvittavia asetuksia ja tietoja
const int cases = 19;
string tcase[cases] = {"c1", "ccut1", "cdif1", "cdif2", "cdif3", "cdif4",
"cdif5", "cdif6", "cdif7", "b1", "bcut1", "bdif1", "bdif2", "t1", "t2",
"tdif1", "tdif2", "tdif3", "tdif4"}; const bool ishist[cases] = {false,
false, true, true, true, true, true, true, true, false, false, true, true,
false, false, true, true, true, true};
const int points = 1200;
const int Qver = 7;

// Kokeelliset tulokset ja vastaavat K-kertoimella skaalatut teoreettiset
tulokset (ensimmÃ¤inen ja toinen kuva).
TGraphAsymmErrors *erp[cases];
bool isaltp[cases] = {false, false, false, false, false, false, false,
false, false, false, false, false, false, true, true, false, false, false,
false}; TGraphAsymmErrors *erpalt[cases];
TH1D *erstaerr[cases];
TGraphAsymmErrors *ersyserr[cases];
TH1D *teorka[cases];
TGraphAsymmErrors *kscfit[cases];
TF1 *fkscfit[cases]; TGraphErrors *ksc[cases];
```

```
const int nnoksc = 4;
string noksc[nnoksc] = {"b1", "bcut1", "bdif1", "bdif2"}; // Ei K-
kertoimella skaalatun teoreettisen tuloksen piirtÃ¤mistÃ¤ nÃ¤issÃ¤
tapauksissa

// EnsimmÃ¤inen kuva: NLO-setin avulla saadut tulokset PDF-virheineen ja
LO-tulos, jonka PDF:ien aiheuttamaa virhettÃ¤ on approksimoitu NLO-settien
antaman tuloksen avulla. LisÃ¤ksi kokeelliset tulokset esitetÃ¤Ã¤n. TGraph
*grnlo[cases];
TGraph *grLN[cases];
TGraph *grLL[cases];
TGraphAsymmErrors *grNLO[cases];
TGraphAsymmErrors *grLO[cases];
TCanvas *caper[cases];

// Verrataan c-, b- ja t-kvarkkiparien tuottojen kokonaisvaikutusaloja pp-
ja pp_bar-tÃ¶rmÃ¤yksissÃ¤. Nyt kolme kuvaa.
const int ncom = 3;
TGraph *grcom[ncom];
TGraph *grLLcom[cases];
string tcom[ncom] = {"c1", "b1", "t2"};
string tqp[ncom] = {"c#bar{c}", "b#bar{b}", "t#bar{t}"};
string comun[ncom] = {"mb", "#mub", "pb"};
double ycommax[ncom] = {6.6, 400, 520};
double ycommin[ncom] = {0.0, 0.0, 1}; bool comislog[ncom] = {false, false,
true};
TCanvas *ccom[ncom];

// Toinen kuva: PÃ¤Ã¤tulokset, Q-, m- ja FF-virhekÃ¤yrÃ¤t (envelope). LisÃ
¤ksi kokeelliset tulokset ja vastaava K-kerroin-skaalattu kÃ¤yrÃ¤ esitetÃ
¤Ã¤n. TGraph *grLLmr[cases];
TGraph *grmmax[cases];
TGraph *grmmin[cases];
TGraphAsymmErrors *grm[cases];
TGraphAsymmErrors *grQ[cases];
TGraphAsymmErrors *grFF[cases];
const bool isFF[cases] = {false, false, true, true, true, true, true,
true, true, false, false, false, false, false, false, false, false, false,
false}; TCanvas *cmr[cases];

// Akselien asetukset ensimmÃ¤isessÃ¤, toisessa, kolmannessa ja
viidennessÃ¤ kuvassa.
double xmax[cases] = {8, 14.0, 12.0, 12.0, 12.0, 36.0, 36.0, 16.0, 24.0,
8.0, 14.0, 5.0, 5.0, 3.0, 14.0, 0.500, 1.50, 550, 2.6};
double xmin[cases] = {0.0, 0.0, 1.0, 2.0, 2.0, 0.0, 1.0, 1.0, 1.0, 0.0,
0.0, 2.0, 2.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, -2.6}; double ymax[cases] = {12.0,
3200, 550, 51.0, 51.0, 750, 210, 800, 320, 620.0, 230.0, 56.0, 100.0,
15.0, 1010.0, 100, 11.0, 10.0, 275};
double ymin[cases] = {0.0, 0.0, 0.05, 0.020, 0.020, 0.0005, 0.0002, 0.03,
0.002, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 8.0, 0.1, 0, 0.02, 0};
const bool mrlog[cases] = {false, false, true, true, true, true, true,
true, true, true, false, false, false, false, true, true, false, true,
false};

string mrx[cases] = {"#sqrt{s} [TeV]",
 "#sqrt{s} [TeV]",
 "p_{T} [GeV]",
```

```
 "p_{T} [GeV]",
 "p_{T} [GeV]",
 "p_{T} [GeV]",
 "p_{T} [GeV]",
 "p_{T} [GeV]",
 "p_{T} [GeV]",
 "#sqrt{s} [TeV]",
 "#sqrt{s} [TeV]",
 "#eta",
 "#eta",
 "#sqrt{s} [TeV]",
 "#sqrt{s} [TeV]",   "p_{T} [TeV]",
 "|y|",
 "p^{t}_{T} [GeV]",
 "y_{t}"};

string mry[cases] = {"#sigma^{pp #rightarrow c#bar{c}+X}(#sqrt{s} ) [mb]",
 "#sigma^{pp #rightarrow c#bar{c}+X}_{0< p_{T}< 8 GeV, 2.0<y<4.5}(#sqrt{s}
) [#mub]",
 "#frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{0}+X}_{|y|<0.5}}{dp_{T}} [#mub/GeV]",
 "#frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_{T}} [#mub/GeV]",
 "#frac{d#sigma^{pp #rightarrow D*^{+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_{T}} [#mub/GeV]",
 "#frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{0}+X}_{|y|<0.5}}{dp_{T}} [#mub/GeV]",
 "#frac{d#sigma^{pp #rightarrow D*^{+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_{T}} [#mub/GeV]",
 "#frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{0}+X}_{|y|<0.5}}{dp_{T}} [#mub/GeV]",
 "#frac{d#sigma^{pp #rightarrow D*^{+}+X}_{|y|<0.5}}{dp_{T}} [#mub/GeV]",
"#sigma^{pp #rightarrow b#bar{b}+X}(#sqrt{s} ) [#mub]",
 "#sigma^{pp #rightarrow b#bar{b}+X}_{2.0<#eta<5.0}(#sqrt{s} ) [#mub]",
 "#frac{d#sigma^{pp #rightarrow H_{b}+X}}{d#eta} [#mub]",
 "#frac{d#sigma^{pp #rightarrow H_{b}+X}}{d#eta} [#mub]",
 "#sigma^{p#bar{p} #rightarrow t#bar{t}+X}(#sqrt{s} ) [pb]",
 "#sigma^{pp #rightarrow t#bar{t}+X}(#sqrt{s} ) [pb]",
 "#frac{d#sigma^{p#bar{p} #rightarrow t#bar{t}+X}}{dp_{T}} [pb/TeV]",
 "#frac{d#sigma^{p#bar{p} #rightarrow t#bar{t}+X}}{d|y|} [pb]",
 "#frac{d#sigma^{pp #rightarrow t#bar{t}+X}}{dp^{t}_{T}} [pb/GeV]",
 "#frac{d#sigma^{pp #rightarrow t#bar{t}+X}}{dy_{t}} [pb]"};


double mrtsizeprim = 0.070; double mrtosprim[cases] = {0.51, 0.86, 0.83,
0.83, 0.83, 0.83, 0.83, 0.83, 0.83, 0.65, 0.80, 0.70, 0.70, 0.62, 0.62,
0.83, 0.75, 0.83, 0.83};
//double mrtossec[cases] = {0.8, 1.08, 0.80, 1.00, 0.75, 0.80, 0.77, 0.80,
0.77, 0.8, 1.00, 0.81, 0.81, 0.8, 0.89, 0.85, 0.85, 0.85, 0.87};

double labsize1 = 0.075;
double labsize2 = 0.075;

double xtsize1 = 0.075;
double xtos1 = 0.95;

double xtsize2 = 0.075;
double xtos2 = 0.95;

double ytsize2 = 0.075;
double ytos2 = 0.85;

double ktsize1 = 0.075;
```

```
double ktos1 = 0.57;


string mrtitle[cases] = {"c#bar{c}-kvarkkiparien tuoton
kokonaisvaikutusala muuttujan #sqrt{s} funktiona pp-
t#ddot{o}rm#ddot{a}yksiss#ddot{a}",  "c#bar{c}-kvarkkiparien tuoton
kokonaisvaikutusala, leikkauksilla 0 < p_{T} < 8 GeV, 2.0 < y < 4.5,
muuttujan #sqrt{s} funktiona pp-t#ddot{o}rm#ddot{a}yksiss#ddot{a}",   "D^
{0}-mesonien tuoton p_{T}-differentioitu vaikutusala
rapiditeettileikkauksella |y| < 0,5 ja t#ddot{o}rm#ddot{a}ysenergialla
#sqrt{s} = 2,76 TeV",   "D^{+}-mesonien tuoton p_{T}-differentioitu
vaikutusala rapiditeettileikkauksella |y| < 0,5 ja
t#ddot{o}rm#ddot{a}ysenergialla #sqrt{s} = 2,76 TeV",   "D^{*+}-mesonien
tuoton p_{T}-differentioitu vaikutusala rapiditeettileikkauksella |y| <
0,5 ja t#ddot{o}rm#ddot{a}ysenergialla #sqrt{s} = 2,76 TeV",   "D^{0}-
mesonien tuoton p_{T}-differentioitu vaikutusala rapiditeettileikkauksella
|y| < 0,5 ja t#ddot{o}rm#ddot{a}ysenergialla #sqrt{s} = 5,02 TeV",   "D^{*
+}-mesonien tuoton p_{T}-differentioitu vaikutusala
rapiditeettileikkauksella |y| < 0,5 ja t#ddot{o}rm#ddot{a}ysenergialla
#sqrt{s} = 5,02 TeV",   "D^{0}-mesonien tuoton p_{T}-differentioitu
vaikutusala rapiditeettileikkauksella |y| < 0,5 ja
t#ddot{o}rm#ddot{a}ysenergialla #sqrt{s} = 7 TeV",   "D^{*+}-mesonien
tuoton p_{T}-differentioitu vaikutusala rapiditeettileikkauksella |y| <
0,5 ja t#ddot{o}rm#ddot{a}ysenergialla #sqrt{s} = 7 TeV",   "Prosessin pp
#rightarrow b#bar{b}+X kokonaisvaikutusala muuttujan #sqrt{s} funktiona",
 "Prosessin pp #rightarrow b#bar{b}+X kokonaisvaikutusala, leikkauksella
2.0 < #eta < 5.0, muuttujan #sqrt{s} funktiona",
 "Prosessin pp #rightarrow b#bar{b}+X #eta-differentioitu vaikutusala b-
hadronin (taikka #bar{b}-hadronin) pseudorapiditeetin funktiona,
energialla #sqrt{s} = 7 TeV",  "Prosessin pp #rightarrow b#bar{b}+X #eta-
differentioitu vaikutusala b-hadronin (taikka #bar{b}-hadronin)
pseudorapiditeetin funktiona, energialla #sqrt{s} = 13 TeV",   "Prosessin
p#bar{p} #rightarrow t#bar{t}+X kokonaisvaikutusala muuttujan #sqrt{s}
funktiona",
 "Prosessin pp #rightarrow t#bar{t}+X kokonaisvaikutusala muuttujan
#sqrt{s} funktiona",
 "Prosessin p#bar{p} #rightarrow t#bar{t}+X p_{T}-differentioitu
vaikutusala poikittaisliikem#ddot{a}#ddot{a}r#ddot{a}n funktiona,
energialla #sqrt{s} = 1.96 TeV",   "Prosessin p#bar{p} #rightarrow
t#bar{t}+X |y|-differentioitu vaikutusala muuttujan rapiditeetin
itseisarvon funktiona, energialla #sqrt{s} = 1.96 TeV",   "Prosessin pp
#rightarrow t#bar{t}+X p_{T}-differentioitu vaikutusala t-kvarkin
poikittaisliikem#ddot{a}#ddot{a}r#ddot{a}n funktiona, energialla #sqrt{s}
= 13 TeV",   "Prosessin pp #rightarrow t#bar{t}+X y-differentioitu
vaikutusala t-kvarkin rapiditeetin funktiona, energialla #sqrt{s} = 13
TeV"};
 // Kolmas kuva: Eri skaalavalintojen aiheuttamat epÃ¤varmuudet. Q_r:n ja
Q_f:n vaihtelujen "envelopet" sekÃ¤ (Q_{max},Q_{max})- ja (Q_{min},Q_
{min})-kÃ¤yrÃ¤t. TGraph *grQdef[cases];
TGraph *grQQmax[cases];
TGraph *grQQmin[cases];
TGraphAsymmErrors *grQa[cases];
TGraphAsymmErrors *grQp[cases];
TCanvas *cQaQp[cases];

string Qtitle[cases] = {"Skaalavalintojen vaikutukset vaikutusalaan
#sigma^{pp #rightarrow c#bar{c}+X}",
```

```
 "Skaalavalintojen vaikutukset vaikutusalaan #sigma^{pp #rightarrow
c#bar{c}+X}_{0<p_{T}<8 GeV, 2.0<y<4.5}",
 "Skaalavalintojen vaikutukset vaikutusalaan #frac{d#sigma^{pp #rightarrow
D^{0}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 2,76 TeV",   "Skaalavalintojen
vaikutukset vaikutusalaan #frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{+}+X}_{|y|
<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 2,76 TeV",   "Skaalavalintojen vaikutukset
vaikutusalaan #frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{*+}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}},
#sqrt{s} = 2,76 TeV",   "Skaalavalintojen vaikutukset vaikutusalaan
#frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{0}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 5,02
TeV",   "Skaalavalintojen vaikutukset vaikutusalaan #frac{d#sigma^{pp
#rightarrow D^{*+}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 5,02 TeV",
"Skaalavalintojen vaikutukset vaikutusalaan #frac{d#sigma^{pp #rightarrow
D^{0}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 7 TeV",   "Skaalavalintojen
vaikutukset vaikutusalaan #frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{*+}+X}_{|y|
<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 7 TeV",   "Skaalavalintojen vaikutukset
vaikutusalaan #sigma^{pp #rightarrow b#bar{b}+X}",
 "Skaalavalintojen vaikutukset vaikutusalaan #sigma^{pp #rightarrow
b#bar{b}+X}_{2.0<#eta<5.0}(#sqrt{s} )",   "Skaalavalintojen vaikutukset
vaikutusalaan #frac{d#sigma^{pp #rightarrow H_{b}+X}}{d#eta}, #sqrt{s} = 7
TeV",
 "Skaalavalintojen vaikutukset vaikutusalaan #frac{d#sigma^{pp #rightarrow
H_{b}+X}}{d#eta}, #sqrt{s} = 13 TeV",
 "Skaalavalintojen vaikutukset vaikutusalaan #sigma^{p#bar{p} #rightarrow
t#bar{t}+X}",
 "Skaalavalintojen vaikutukset vaikutusalaan #sigma^{pp #rightarrow
t#bar{t}+X}",
 "Skaalavalintojen vaikutukset vaikutusalaan #frac{d#sigma^{p#bar{p}
#rightarrow t#bar{t}+X}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 1.96 TeV",
"Skaalavalintojen vaikutukset vaikutusalaan #frac{d#sigma^{p#bar{p}
#rightarrow t#bar{t}+X}}{d|y|}, #sqrt{s} = 1.96 TeV",   "Skaalavalintojen
vaikutukset vaikutusalaan #frac{d#sigma^{pp #rightarrow t#bar{t}+X}}{dp_
{T}}, #sqrt{s} = 13 TeV",   "Skaalavalintojen vaikutukset vaikutusalaan
#frac{d#sigma^{pp #rightarrow t#bar{t}+X}}{dy_{t}}, #sqrt{s} = 13 TeV"};

// NeljÃ¤s kuva: Skaalan, massan ja fragmentaatiofraktion epÃ¤varmuuksien
suhteelliset virheet.
TGraphAsymmErrors *grQrel[cases];
TGraphAsymmErrors *grmrel[cases];
TGraphAsymmErrors *grFFrel[cases];
double relerrmax[cases] = {220, 460, 300, 500, 150, 340, 380, 420, 420,
160, 200, 80, 80, 350, 300, 80, 100, 80, 80};
double relerrmin[cases] = {-100, -100, -100, -100, -100, -100, -100, -100,
-100, -100, -100, -80, -80, -100, -100, -40, -40, -40, -40};
TCanvas *crelerr[cases];

string relerrtitle[cases] = {"Skaalan ja massan ep#ddot{a}varmuuden
aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalalle #sigma^{pp #rightarrow
c#bar{c}+X}",   "Skaalan ja massan ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat
suhteelliset virheet vaikutusalalle #sigma^{pp #rightarrow c#bar{c}+X}_
{0<p_{T}<8 GeV, 2.0<y<4.5}",  "Skaalan, massan ja fragmentaaatiofraktion
ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalalle
#frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{0}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 2,76
TeV",   "Skaalan, massan ja fragmentaatiofraktion ep#ddot{a}varmuuden
aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp
#rightarrow D^{+}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 2,76 TeV",   "Skaalan,
massan ja fragmentaatiofraktion ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat
suhteelliset virheet vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{*
```

+}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 2,76 TeV", "Skaalan, massan ja fragmentaatiofraktion ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{0}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 5,02 TeV", "Skaalan, massan ja fragmentaatiofraktion ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{*+}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 5,02 TeV", "Skaalan, massan ja fragmentaatiofraktion ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalallen #frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{0}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 7 TeV", "Skaalan, massan ja fragmentaatiofraktion ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{*+}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 7 TeV", "Skaalan ja massan ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalalle #sigma^{pp #rightarrow b#bar{b}+X}", "Skaalan ja massan ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalalle #sigma^{pp #rightarrow b#bar{b}+X}_{2.0<#eta<5.0}(#sqrt{s})", "Skaalan ja massan ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp #rightarrow H_{b}+X}}{dp_{#eta}}, #sqrt{s} = 7 TeV", "Skaalan ja massan ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp #rightarrow H_{b}+X}}{dp_{#eta}}, #sqrt{s} = 13 TeV", "Skaalan ja massan ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalalle #sigma^{p#bar{p} #rightarrow t#bar{t}+X}", "Skaalan ja massan ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalalle #sigma^{pp #rightarrow t#bar{t}+X}", "Skaalan ja massan ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalalle #frac{d#sigma^{p#bar{p} #rightarrow t#bar{t}+X}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 1.96 TeV", "Skaalan ja massan ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalalle #frac{d#sigma^{p#bar{p} #rightarrow t#bar{t}+X}}{d|y|}, #sqrt{s} = 1.96 TeV", "Skaalan ja massan ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp #rightarrow t#bar{t}+X}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 13 TeV", "Skaalan ja massan ep#ddot{a}varmuuden aiheuttamat suhteelliset virheet vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp #rightarrow t#bar{t}+X}}{dy_{t}}, #sqrt{s} = 13 TeV"};

// Viides kuva: Eri partonityyppien vuorovaikutusten (g+g. u+u_bar, d+d_bar, s+s_bar, c+c_bar, b+b_bar (PDF:Ã¤Ã¤ t/t_bar-kvarkille ei ole)) suhteelliset osuudet lasketusta vaikutusalasta. TGraph *grr[cases][types]; double rxmin[cases] = {2*0.00127+0.00001, 0.01501, 1.0, 2.0, 2.0, 0.00001, 1.0, 1.0, 1.0, 2*0.00418+0.00001, 2*0.00418+0.00001, 2.0, 2.0, 2*0.1729+0.00001, 2*0.1729+0.00001, 0.0, 0.0, 0.0, -2.6}; double rymin[cases] = {0.0001, 0.00004, 0.000001, 0.000001, 0.000001, 0.0001, 0.0001, 0.00006, 0.0001, 0.00006, 0.0004, 0.00001, 0.00001, 0.000001, 0.0001, 0.000005, 0.00003, 0.001, 0.0008}; const bool rlog[cases] = {true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true, true};
TCanvas *cr[cases];

string rtitle[cases] = {"Eri vuorovaikutustyyppien suhteelliset osuudet kokonaisvaikutusalasta #sigma^{pp #rightarrow c#bar{c}+X} muuttujan #sqrt{s} funktiona", "Eri vuorovaikutustyyppien suhteelliset osuudet kokonaisvaikutusalasta #sigma^{pp #rightarrow c#bar{c}+X}_{0<p_{T}<8 GeV, 2.0<y<4.5} muuttujan #sqrt{s} funktiona", "Eri vuorovaikutustyyppien suhteelliset osuudet p_{T}-differentioidusta D^{0}-mesonien tuoton vuorovaikutusalasta, leikkauksella |y| < 0,5 ja energialla #sqrt{s} = 2,76 TeV, muuttujan p_{T} funktiona", "Eri vuorovaikutustyyppien suhteelliset osuudet p_{T}-differentioidusta D^{+}-mesonien tuoton vuorovaikutusalasta,

```
leikkauksella |y| < 0,5 ja energialla #sqrt{s} = 2,76 TeV, muuttujan p_{T}
funktiona",   "Eri vuorovaikutustyyppien suhteelliset osuudet p_{T}-
differentioidusta D^{*+}-mesonien tuoton vuorovaikutusalasta,
leikkauksella |y| < 0,5 ja energialla #sqrt{s} = 2,76 TeV, muuttujan p_{T}
funktiona",   "Eri vuorovaikutustyyppien suhteelliset osuudet p_{T}-
differentioidusta D^{0}-mesonien tuoton vuorovaikutusalasta, leikkauksella
|y| < 0,5 ja energialla #sqrt{s} = 5,02 TeV, muuttujan p_{T} funktiona",
"Eri vuorovaikutustyyppien suhteelliset osuudet p_{T}-differentioidusta D^
{*+}-mesonien tuoton vuorovaikutusalasta, leikkauksella |y| < 0,5 ja
energialla #sqrt{s} = 5,02 TeV, muuttujan p_{T} funktiona",   "Eri
vuorovaikutustyyppien suhteelliset osuudet p_{T}-differentioidusta D^{0}-
mesonien tuoton vuorovaikutusalasta, leikkauksella |y| < 0,5 ja energialla
#sqrt{s} = 7 TeV, muuttujan p_{T} funktiona",   "Eri vuorovaikutustyyppien
suhteelliset osuudet p_{T}-differentioidusta D^{*+}-mesonien tuoton
vuorovaikutusalasta, leikkauksella |y| < 0,5 ja energialla #sqrt{s} = 7
TeV, muuttujan p_{T} funktiona",   "Eri vuorovaikutustyyppien suhteelliset
osuudet kokonaisvaikutusalasta #sigma^{pp #rightarrow b#bar{b}+X}
muuttujan #sqrt{s} funktiona",   "Eri vuorovaikutustyyppien suhteelliset
osuudet vaikutusalasta #sigma^{pp #rightarrow b#bar{b}+X}_{2.0<#eta<5.0}
muuttujan #sqrt{s} funktiona",   "Eri vuorovaikutustyyppien suhteelliset
osuudet protoni-protoni-t#ddot{o}rm#ddot{a}ysten b#bar{b}-tuoton #eta-
differentioidusta vaikutusalasta, energialla #sqrt{s} = 7 TeV, muuttujan
#eta funktiona",  "Eri vuorovaikutustyyppien suhteelliset osuudet protoni-
protoni-t#ddot{o}rm#ddot{a}ysten b#bar{b}-tuoton #eta-differentioidusta
vaikutusalasta, energialla #sqrt{s} = 13 TeV, muuttujan #eta funktiona",
"Eri vuorovaikutustyyppien suhteelliset osuudet kokonaisvaikutusalasta
#sigma^{p#bar{p} #rightarrow t#bar{t}+X} muuttujan #sqrt{s} funktiona",
"Eri vuorovaikutustyyppien suhteelliset osuudet kokonaisvaikutusalasta
#sigma^{pp #rightarrow t#bar{t}+X} muuttujan #sqrt{s} funktiona",   "Eri
vuorovaikutustyyppien suhteelliset osuudet p_{T}-differentioidusta
protoni-antiprotoni-t#ddot{o}rm#ddot{a}ysten t#bar{t}-parien tuoton
vuorovaikutusalasta, energialla #sqrt{s} = 1.96 TeV, muuttujan p_{T}
funktiona",   "Eri vuorovaikutustyyppien suhteelliset osuudet |y|-
differentioidusta protoni-antiprotoni-t#ddot{o}rm#ddot{a}ysten t#bar{t}-
parien tuoton vuorovaikutusalasta, energialla #sqrt{s} = 1.96 TeV,
muuttujan |y| funktiona",   "Eri vuorovaikutustyyppien suhteelliset
osuudet p_{T}-differentioidusta protoni-protoni-t#ddot{o}rm#ddot{a}ysten
t#bar{t}-parien tuoton vuorovaikutusalasta, energialla #sqrt{s} = 13 TeV,
muuttujan p_{T} funktiona",   "Eri vuorovaikutustyyppien suhteelliset
osuudet y_{t}-differentioidusta protoni-protoni-t#ddot{o}rm#ddot{a}ysten
t#bar{t}-parien tuoton vuorovaikutusalasta, energialla #sqrt{s} = 13 TeV,
muuttujan y_{t} funktiona"};

TLegend *addval[cases];
bool addsv[cases] = {true, true, false, false, false, false, false, false,
false, true, true, false, false, true, true, false, false, false, false};
string sv[cases] = {"2m_{c}","(#sqrt{s})_{min}"," "," "," "," "," "," "," "
","2m_{b}","2m_{b}"," "," ","2m_{t}","2m_{t}"," "," "," "," "};
double lxpos[cases] = {0.1325, 0.149, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.1325, 0.1325,
0, 0, 0.129, 0.129, 0, 0, 0, 0};

// Kuvat 6-12: K-kertoimet bineittÃ¤in/pisteittÃ¤in sekÃ¤ vastaava
sovitus, seitsemÃ¤llÃ¤ eri skaalavalinnalla.
TGraphAsymmErrors *kfp[cases][Qver];
TH1D *kfstaerr[cases][Qver];
TGraphAsymmErrors *kfsyserr[cases][Qver];
TGraphAsymmErrors *kftoterr[cases][Qver];
```

```
TF1 *fK[cases][Qver];
TCanvas *ckf[cases][Qver];
string kfQ[Qver] = {"(Q_{def}, Q_{def})","(Q_{max}, Q_{max})", "(Q_{min},
Q_{min})", "(Q_{def}, Q_{max})", "(Q_{min}, Q_{def})", "(Q_{def}, Q_
{min})","(Q_{max}, Q_{def})"};

// TÃ¤tÃ¤ osiota kÃ¤ytetÃ¤Ã¤n, mikÃ¤li K-kerroin-kuvien y-akselin ylÃ¤raja
joudutaan asettamaan manuaalisesti. Normaalisti akselin ylÃ¤raja on kaksi
kertaa K-kerroin-sovituksen arvo (ja alaraja 0). const int nkfsc = 9;
string kftagsc[nkfsc] = {"c1", "cdif1", "cdif2", "cdif3", "cdif4",
"cdif5", "cdif6", "cdif7", "b1"};
double kfmaxsc[nkfsc][Qver] = { {6.0, 7.0, 10.0, 4.5, 3.2, 18.0, 10.0},
 {5.0, 4.5, 6.0, 3.0, 2.7, 14.0, 8.0},
 {5.6, 6.0, 7.0, 4.3, 3.5, 11.0, 8.4},
 {6.2, 6.2, 8.0, 4.1, 3.7, 14.0, 8.8},
 {4.5, 3.2, 7.0, 2.3, 2.0, 14.0, 6.8},
 {5.6, 5.0, 8.0, 4.0, 3.3, 14.5, 8.2},
 {4.6, 3.3, 9.0, 2.3, 2.4, 16.5, 6.6},
 {5.4, 4.5, 9.0, 3.5, 3.0, 17.0, 8.0},
 {4.7, 6.3, 3.5, 4.5, 3.2, 5.2, 6.4} };

string kftitle[cases] = {"K-tekij#ddot{a}n arvot vaikutusalalle #sigma^{pp
#rightarrow c#bar{c}+X}",
 "K-tekij#ddot{a}n arvot vaikutusalalle #sigma^{pp #rightarrow c#bar{c}+X}
_{0<p_{T}<8 GeV, 2.0<y<4.5}",  "K-tekij#ddot{a}n arvot vaikutusalalle
#frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{0}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 2,76
TeV",   "K-tekij#ddot{a}n arvot vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp
#rightarrow D^{+}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 2,76 TeV",   "K-
tekij#ddot{a}n arvot vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{*
+}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 2,76 TeV",   "K-tekij#ddot{a}n arvot
vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{0}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}},
#sqrt{s} = 5,02 TeV",   "K-tekij#ddot{a}n arvot vaikutusalalle
#frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{*+}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} =
5,02 TeV",   "K-tekij#ddot{a}n arvot vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp
#rightarrow D^{0}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 7 TeV",   "K-
tekij#ddot{a}n arvot vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp #rightarrow D^{*
+}+X}_{|y|<0,5}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 7 TeV",   "K-tekij#ddot{a}n arvot
vaikutusalalle #sigma^{pp #rightarrow b#bar{b}+X}",
 "K-tekij#ddot{a}n arvot vaikutusalalle #sigma^{pp #rightarrow b#bar{b}+X}
_{2.0<#eta<5.0}",
 "K-tekij#ddot{a}n arvot vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp #rightarrow H_
{b}+X}}{d#eta}, #sqrt{s} = 7 TeV",
 "K-tekij#ddot{a}n arvot vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp #rightarrow H_
{b}+X}}{d#eta}, #sqrt{s} = 13 TeV",
 "K-tekij#ddot{a}n arvot vaikutusalalle #sigma^{p#bar{p} #rightarrow
t#bar{t}+X}",
 "K-tekij#ddot{a}n arvot vaikutusalalle #sigma^{pp #rightarrow
t#bar{t}+X}",
 "K-tekij#ddot{a}n arvot vaikutusalalle #frac{d#sigma^{p#bar{p}
#rightarrow t#bar{t}+X}}{dp_{T}}, #sqrt{s} = 1.96 TeV",   "K-
tekij#ddot{a}n arvot vaikutusalalle #frac{d#sigma^{p#bar{p} #rightarrow
t#bar{t}+X}}{d|y|}, #sqrt{s} = 1.96 TeV",   "K-tekij#ddot{a}n arvot
vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp #rightarrow t#bar{t}+X}}{dp_{T}},
#sqrt{s} = 13 TeV",
 "K-tekij#ddot{a}n arvot vaikutusalalle #frac{d#sigma^{pp #rightarrow
t#bar{t}+X}}{dy_{t}}, #sqrt{s} = 13 TeV"};
```

```
bool manxdiv = true;
int xdiv1[cases] = {209, 208, 212, 211, 211, 508, 507, 208, 212, 209, 208,
507, 507, 507, 208, 50206, 504, 50206, 50206};
int xdiv2[cases] = {208, 207, 212, 211, 211, 508, 507, 208, 212, 208, 207,
507, 507, 50204, 207, 50206, 504, 50206, 50206};
int xdiv3[cases] = {208, 211, 212, 211, 211, 508, 507, 208, 212, 209, 214,
507, 507, 507, 215, 50206, 504, 50206, 50206};

bool manydiv = true;
int ydivm[cases] = { 20207, 50204, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 505, 50206,
50206, 20208, 0, 0, 50206, 0, 506}; int ydivrelerr[cases] = { 507, 506,
50205, 0, 506, 50205, 50205, 50206, 50206, 506, 507, 504, 504, 50205,
50205, 20207, 20208, 20207, 20207}; int ydivk[Qver][cases] = { {506, 506,
50206, 0, 507, 50205, 50206, 50205, 50206, 50205, 505, 505, 505, 507,
50204, 506, 506, 507, 507},   {20207, 505, 50205, 0, 507, 507, 50206, 507,
50205, 507, 504, 504, 504, 50205, 50205, 50205, 50204, 50205, 50205},
{50205, 50205, 50207, 0, 50205, 508, 50205, 50205, 50205, 508, 506, 506,
506, 505, 506, 505, 504, 505, 506},   {50206, 20207, 507, 0, 50205, 505,
50205, 505, 508, 50205, 20207, 20207, 20207, 508, 50205, 507, 507, 508,
508},   {508, 504, 506, 0, 508, 504, 507, 505, 507, 507, 20207, 20207,
20207, 506, 507, 505, 505, 506, 506},   {504, 505, 20208, 0, 20208, 20208,
20208, 504, 504, 506, 50205, 50205, 50205, 506, 508, 505, 505, 506, 507},
{50205, 50205, 50205, 0, 50205, 507, 50205, 50207, 50205, 507, 506, 506,
507, 50204, 50205, 507, 507, 50204, 50205} };


TLegend *addextval[cases];
bool addextv[cases] = {false, false, false, false, false, false, true,
true, true, false, false, false, false, false, false, false, false, false,
false}; string extv[cases] = {" "," "," "," "," "," ","1","1","1"," "," 
"," "," "," "," "," "," "," "," "," "};
double extvxpos[cases] = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.108, 0.108, 0.108, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};

bool showtitles = false;

string picformat = "pdf";
bool savepics = true;

// HUOM: Envelopet saatetaan piirtÃ¤Ã¤ joskus vÃ¤Ã¤rin kahden ensimmÃ¤isen
taikka kahden viimeisen pisteen vÃ¤lillÃ¤. TÃ¤mÃ¤ efekti nÃ¤yttÃ¤isi
kuitenkin mitÃ¤tÃ¶ityvÃ¤n, kun pisteillÃ¤ ei ole isoa vÃ¤limatkaa
toisiinsa nÃ¤hden.



for(int i = 0; i < cases; i++){

if(tcase[i].compare("cdif2") == 0){ // En tule tarkastelemaan tapausta
"cdif2" tulosten analyysissÃ¤
 continue;
}


double k;
double kerr;
```

```
fkscfit[i] = new TF1( Form("fkscfit%01i", i), Kfit, -1000000, 1000000, 1);
// HUOM: -1000000 - 1000000

if(ishist[i] == true){

 erstaerr[i] = (TH1D*)file->Get( Form("%serstaerr", tcase[i].c_str()) );
 erstaerr[i]->SetLineColor(kBlack);

 ersyserr[i] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get( Form("%sersyserr",
tcase[i].c_str()) );
 ersyserr[i]->SetFillColor(920);

 teorka[i] = (TH1D*)file->Get( Form("%steorka", tcase[i].c_str()) );
 teorka[i]->SetLineColor(kGray+3);

 kscfit[i] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get( Form("%skftoterrQ0",
tcase[i].c_str()) );

 kscfit[i]->Fit( Form("fkscfit%01i", i),"Q");

 k = fkscfit[i]->GetParameter(0);
 kerr = fkscfit[i]->GetParError(0);

}else{
  erp[i] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get( Form("erp%s", tcase[i].c_str())
);
 erp[i]->SetMarkerStyle(20);
 erp[i]->SetMarkerSize(0.5);
 erp[i]->SetMarkerColor(kBlack);
 erp[i]->SetLineColor(kBlack);

 if(isaltp[i] == true){

 erpalt[i] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get( Form("erp%salt",
tcase[i].c_str()) );
 erpalt[i]->SetMarkerStyle(20);
 erpalt[i]->SetMarkerSize(0.5);
 erpalt[i]->SetMarkerColor(860);
 erpalt[i]->SetLineColor(600);

 }

 kscfit[i] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get( Form("%skfpQ0",
tcase[i].c_str()) );

 kscfit[i]->Fit( Form("fkscfit%01i", i),"Q");

 k = fkscfit[i]->GetParameter(0);
 kerr = fkscfit[i]->GetParError(0);

}

grnlo[i] = (TGraph*)file->Get( Form("gr%snlo",tcase[i].c_str()) );
grnlo[i]->SetMarkerColor(kBlack);
grnlo[i]->SetMarkerSize(0);

/*grLN[i] = (TGraph*)file->Get( Form("gr%sLN",tcase[i].c_str()) );
```

```
grLN[i]->SetMarkerColor(kBlack); grLN[i]->SetMarkerSize(0);*/

grLL[i] = (TGraph*)file->Get( Form("gr%sLL",tcase[i].c_str()) );
grLL[i]->SetMarkerColor(kBlack);
grLL[i]->SetMarkerSize(0);

grLLmr[i] = (TGraph*)file->Get( Form("gr%sLL",tcase[i].c_str()) );
grLLmr[i]->SetMarkerColor(kBlack);
grLLmr[i]->SetMarkerSize(0);

grNLO[i] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get( Form("gr%sNLO",tcase[i].c_str())
);
grNLO[i]->SetMarkerColor(kBlack);
grNLO[i]->SetFillColorAlpha(632, 0.50);

grLO[i] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get( Form("gr%sLO",tcase[i].c_str())
);
grLO[i]->SetMarkerColor(kBlack);
grLO[i]->SetFillColorAlpha(807, 0.50);


double xksc[points],xkscerr[points],yksc[points],ykscerr[points];

for(int j = 0; j < points; j++){

 double xLL, yLL;

 grLL[i]->GetPoint(j, xLL, yLL);

 xksc[j] = xLL;
 xkscerr[j] = 0;
 yksc[j] = k*yLL;
 ykscerr[j] = kerr*yLL;

}

ksc[i] = new TGraphErrors(points,xksc,yksc,xkscerr,ykscerr); ksc[i]-
>SetFillColorAlpha(808, 0.45);

//////////////////////////////////////////

caper[i] = new TCanvas(Form("caper%01i",i+1), Form("caper%01i",i+1),
1200.0, 500.0);
caper[i]->cd();

if(mrlog[i] == true){
 caper[i]->SetLogy();
}

grLL[i]->SetMaximum(ymax[i]); // HUOM: Vain yksi ylÃ¤-/alarajan asetus per
graafi, ei voi muuttaa. Sama koskee otsikon (title) asettamista. grLL[i]-
>SetMinimum(ymin[i]);
grLL[i]->GetXaxis()->SetLimits(xmin[i], xmax[i]);

if(manxdiv == true){
 grLL[i]->GetXaxis()->SetNdivisions(xdiv1[i], true);
}
```

```
if(manydiv == true && mrlog[i] == false){
 grLL[i]->GetYaxis()->SetNdivisions(ydivm[i], true);
}

grLL[i]->GetXaxis()->SetLabelSize(labsize1);
grLL[i]->GetYaxis()->SetLabelSize(labsize1);

grLL[i]->GetXaxis()->SetTitleOffset(xtos1);
grLL[i]->GetYaxis()->SetTitleOffset(mrtosprim[i]);

if(showtitles == true){
 grLL[i]->SetTitle( Form("%s",mrtitle[i].c_str()) );
} else {  grLL[i]->SetTitle(" ");
}

grLL[i]->GetXaxis()->SetTitle( Form("%s",mrx[i].c_str()) );
grLL[i]->GetYaxis()->SetTitle( Form("%s",mry[i].c_str()) );

grLL[i]->GetXaxis()->SetTitleSize(xtsize1);
grLL[i]->GetYaxis()->SetTitleSize(mrtsizeprim);

grLL[i]->Draw("alp");

if(ishist[i] == true){

 ersyserr[i]->Draw("E2 SAME");
 erstaerr[i]->Draw("same");
 teorka[i]->Draw("SAME");

}

grNLO[i]->Draw("E3 SAME");
grLO[i]->Draw("E3 SAME");
grnlo[i]->Draw("same");

if(ishist[i] == false){

 erp[i]->Draw("p same");
 if(isaltp[i] == true){
 erpalt[i]->Draw("p same");
 }

}

grLL[i]->Draw("same");
if(ishist[i] == true){
 teorka[i]->Draw("SAME");
}

caper[i]->RedrawAxis();

if(addextv[i] == true){
 addextval[i] = new TLegend(extvxpos[i],0.1311,extvxpos[i]+0.0500,0.0811);
 addextval[i]->SetHeader(extv[i].c_str(),"C");
 addextval[i]->SetFillStyle(0);
 addextval[i]->Draw();
}
```

```
 if(savepics == true){
 caper[i]->SaveAs( Form("Pictures/caper%s.%s", tcase[i].c_str(),
picformat.c_str()) );
}

//////////////////////////////////////////

grmmax[i] = (TGraph*)file->Get( Form("gr%smmax",tcase[i].c_str()) );
grmmax[i]->SetMarkerColor(803);
grmmax[i]->SetMarkerSize(0);

grmmin[i] = (TGraph*)file->Get( Form("gr%smmin",tcase[i].c_str()) );
grmmin[i]->SetMarkerColor(803);
grmmin[i]->SetMarkerSize(0);

double xm[points],xmer[points],ym[points],upm[points],lowm[points];
double ymr[points],lowmr[points],upmr[points];

for(int j = 0; j < points; j++){

 double xmmid,ymmid,ymup,ymlow;

 xmer[j] = 0;
 ymr[j] = 0;

 grLL[i]->GetPoint(j, xmmid, ymmid);
 grmmax[i]->GetPoint(j, xmmid, ymlow); // Yleisesti ottaen (vaikuttaa
myÃ¶s arvoihin Qa/Qr ja Qp/Qf) massan arvon nostaminen pienentÃ¤Ã¤
vaikutusalaa.  grmmin[i]->GetPoint(j, xmmid, ymup);

 xm[j] = xmmid;
 ym[j] = ymmid;
   if((ymmid < ymup) && (ymlow < ymup)){

 upm[j] = ymup - ymmid;

 } else {

if(ymmid < ymlow){

 cout << "Tapauksessa "<< i << "/" << cases-1 << " pisteessÃ¤ " << j << "/
" << points - 1 << " m_{max}-kÃ¤yrÃ¤ mÃ¤Ã¤rittÃ¤Ã¤ vastaavan envelopen ylÃ
¤rajan" << endl;   upm[j] = ymlow - ymmid;

 } else {

 cout << "Tapauksessa "<< i << "/" << cases-1 << " pisteessÃ¤ " << j << "/
" << points - 1 << " m_{max}- sekÃ¤ m_{min}-kÃ¤yrien arvot alittavat
vastaavan pÃ¤Ã¤tuloksen arvon" << endl;  upm[j] = 0;

 }

 }

 if((ymmid > ymlow) && (ymup > ymlow)){

 lowm[j] = ymmid - ymlow;
```

```
 } else {

if(ymmid > ymup){

 cout << "Tapauksessa "<< i << "/" << cases-1 << " pisteessÃ¤ " << j << "/
" << points - 1 << " m_{min}-kÃ¤yrÃ¤ mÃ¤Ã¤rittÃ¤Ã¤ vastaavan envelopen
alarajan" << endl;   lowm[j] = ymmid - ymup;

 } else {
  cout << "Tapauksessa "<< i << "/" << cases-1 << " pisteessÃ¤ " << j <<
"/" << points - 1 << " m_{max}- sekÃ¤ m_{min}-kÃ¤yrien arvot ylittÃ¤vÃ¤t
vastaavan pÃ¤Ã¤tuloksen arvon" << endl;  lowm[j] = 0;

 }

 }

 if(ymmid != 0){

 lowmr[j] = 100*(lowm[j])/ymmid;
 upmr[j] = 100*(upm[j])/ymmid;

 }else{

 lowmr[j] = 0;
 upmr[j] = 0;

 }

}

grm[i] = new TGraphAsymmErrors(points,xm,ym,xmer,xmer,lowm,upm);
grm[i]->SetFillColorAlpha(804, 0.30);

grmrel[i] = new TGraphAsymmErrors(points,xm,ymr,xmer,xmer,lowmr,upmr);
grmrel[i]->SetFillColorAlpha(804, 0.30);

grQ[i] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get( Form("grQ%s",tcase[i].c_str()) );
grQ[i]->SetFillColorAlpha(616, 0.40);

cmr[i] = new TCanvas(Form("cmr%01i",i+1), Form("cmr%01i",i+1), 1200.0,
500.0);
cmr[i]->cd();

if(mrlog[i] == true){
 cmr[i]->SetLogy();
}

grLLmr[i]->SetMaximum(ymax[i]);
grLLmr[i]->SetMinimum(ymin[i]); grLLmr[i]->GetXaxis()->SetLimits(xmin[i],
xmax[i]);

if(manxdiv == true){
 grLLmr[i]->GetXaxis()->SetNdivisions(xdiv1[i], true);
}
```

```
if(manydiv == true && mrlog[i] == false){
 grLLmr[i]->GetYaxis()->SetNdivisions(ydivm[i], true);
}

grLLmr[i]->GetXaxis()->SetLabelSize(labsize1);
grLLmr[i]->GetYaxis()->SetLabelSize(labsize1);

grLLmr[i]->GetXaxis()->SetTitleOffset(xtos1);
grLLmr[i]->GetYaxis()->SetTitleOffset(mrtosprim[i]);

if(showtitles == true){
 grLLmr[i]->SetTitle( Form("%s",mrtitle[i].c_str()) );
} else {
 grLLmr[i]->SetTitle(" ");
}

grLLmr[i]->GetXaxis()->SetTitle( Form("%s",mrx[i].c_str()) );
grLLmr[i]->GetYaxis()->SetTitle( Form("%s",mry[i].c_str()) );

grLLmr[i]->GetXaxis()->SetTitleSize(xtsize1);
grLLmr[i]->GetYaxis()->SetTitleSize(mrtsizeprim);

grLLmr[i]->Draw("alp");

if(ishist[i] == true){

 ersyserr[i]->Draw("E2 SAME");
 erstaerr[i]->Draw("same");
 teorka[i]->Draw("SAME");

}
 grQ[i]->Draw("E3 SAME");
grm[i]->Draw("E3 SAME");

int isksc = 0;

for(int j = 0; j < nnoksc; j++){

 if(tcase[i].compare(noksc[j]) == 0){
 isksc++;
 }
}

if(isksc == 0){
 ksc[i]->Draw("E3 SAME");
}

if(isFF[i] == true){
 grFF[i] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get( Form("gr%sFF",tcase[i].c_str())
);
 grFF[i]->SetFillColorAlpha(820, 0.55);

 grFF[i]->Draw("E3 SAME");
}

if(ishist[i] == false){
```

```
 erp[i]->Draw("p same");
 if(isaltp[i] == true){
 erpalt[i]->Draw("p same");
 }

}

grLLmr[i]->Draw("same,pl");
if(ishist[i] == true){
 teorka[i]->Draw("SAME");
}

cmr[i]->RedrawAxis();

if(addextv[i] == true){
 addextval[i]->Draw();
}

if(savepics == true){
 cmr[i]->SaveAs( Form("Pictures/cmr%s.%s", tcase[i].c_str(),
picformat.c_str()) );
}

//////////////////////////////////////////////
 grQdef[i] = (TGraph*)file->Get( Form("gr%sLL",tcase[i].c_str()) );
grQdef[i]->SetMarkerColor(kBlack);
grQdef[i]->SetMarkerSize(0);

grQQmax[i] = (TGraph*)file->Get( Form("gr%sQQmax", tcase[i].c_str()) );
grQQmax[i]->SetLineColor(602);
grQQmax[i]->SetLineWidth(2);

grQQmin[i] = (TGraph*)file->Get( Form("gr%sQQmin", tcase[i].c_str()) );
grQQmin[i]->SetLineColor(867);
grQQmin[i]->SetLineWidth(2);

grQa[i] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get( Form("gr%sQa",tcase[i].c_str())
);
grQa[i]->SetFillColorAlpha(1, 0.28);

grQp[i] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get( Form("gr%sQp",tcase[i].c_str())
);
grQp[i]->SetFillColorAlpha(632, 0.45);

cQaQp[i] = new TCanvas(Form("cQaQp%01i",i+1), Form("cQaQp%01i",i+1),
1200.0, 500.0);
cQaQp[i]->cd();

if(mrlog[i] == true){
 cQaQp[i]->SetLogy();
}
grQdef[i]->SetMaximum(ymax[i]);
grQdef[i]->SetMinimum(ymin[i]);
grQdef[i]->GetXaxis()->SetLimits(xmin[i], xmax[i]);

if(manxdiv == true){  grQdef[i]->GetXaxis()->SetNdivisions(xdiv1[i],
true);
```

```
}

if(manydiv == true && mrlog[i] == false){
 grQdef[i]->GetYaxis()->SetNdivisions(ydivm[i], true);
}

if(showtitles == true){
 grQdef[i]->SetTitle( Form("%s",Qtitle[i].c_str()) );
} else {
 grQdef[i]->SetTitle(" ");
}

grQdef[i]->GetXaxis()->SetTitle( Form("%s",mrx[i].c_str()) );
grQdef[i]->GetYaxis()->SetTitle( Form("%s",mry[i].c_str()) );

grQdef[i]->GetXaxis()->SetLabelSize(labsize1);
grQdef[i]->GetYaxis()->SetLabelSize(labsize1);

grQdef[i]->GetXaxis()->SetTitleSize(xtsize1);
grQdef[i]->GetYaxis()->SetTitleSize(mrtsizeprim);

grQdef[i]->GetXaxis()->SetTitleOffset(xtos1);
grQdef[i]->GetYaxis()->SetTitleOffset(mrtosprim[i]);

grQdef[i]->Draw("alp");
grQa[i]->Draw("E3 SAME");
grQp[i]->Draw("E3 SAME");
grQQmax[i]->Draw("SAME");
grQQmin[i]->Draw("SAME");
grLL[i]->Draw("same");

cQaQp[i]->RedrawAxis();

if(addextv[i] == true){  addextval[i]->Draw();
}

if(savepics == true){
 cQaQp[i]->SaveAs( Form("Pictures/cQaQp%s.%s", tcase[i].c_str(),
picformat.c_str()) );
}

//////////////////////////////////////////

grQrel[i] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get(
Form("gr%sQrel",tcase[i].c_str()) );
grQrel[i]->SetFillColorAlpha(616, 0.40);

if(isFF[i] == true){
 grFFrel[i] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get(
Form("gr%sFFrel",tcase[i].c_str()) );
 grFFrel[i]->SetFillColorAlpha(820, 0.55);
}

crelerr[i] = new TCanvas(Form("crel%01i",i+1), Form("crel%01i",i+1),
800.0, 470.0);
crelerr[i]->cd();
```

```
grQrel[i]->SetMaximum(relerrmax[i]);
grQrel[i]->SetMinimum(relerrmin[i]);
grQrel[i]->GetXaxis()->SetLimits(rxmin[i], xmax[i]);

if(manxdiv == true){
 grQrel[i]->GetXaxis()->SetNdivisions(xdiv2[i], true);
}

if(manydiv == true){
 grQrel[i]->GetYaxis()->SetNdivisions(ydivrelerr[i], true);
}

if(showtitles == true){  grQrel[i]->SetTitle(
Form("%s",relerrtitle[i].c_str()) );
} else {
 grQrel[i]->SetTitle(" ");
}

grQrel[i]->GetXaxis()->SetTitle( Form("%s",mrx[i].c_str()) );
grQrel[i]->GetYaxis()->SetTitle("Suhteellinen virhe [%]");

grQrel[i]->GetXaxis()->SetLabelSize(labsize2);
grQrel[i]->GetYaxis()->SetLabelSize(labsize2);

grQrel[i]->GetXaxis()->SetTitleSize(xtsize2);
grQrel[i]->GetYaxis()->SetTitleSize(ytsize2);

grQrel[i]->GetXaxis()->SetTitleOffset(xtos2);
grQrel[i]->GetYaxis()->SetTitleOffset(ytos2);

grQrel[i]->Draw("ALP E3");
grmrel[i]->Draw("E3 SAME");
if(isFF[i] == true){
 grFFrel[i]->Draw("E3 SAME");
}

crelerr[i]->RedrawAxis();

if(addsv[i] == true){
 addval[i] = new TLegend(lxpos[i],0.1311,lxpos[i]+0.0500,0.0811);
 addval[i]->SetHeader(sv[i].c_str(),"C");
 addval[i]->SetFillStyle(0);
 addval[i]->Draw();
}

if(addextv[i] == true){
 addextval[i]->Draw();
}

if(savepics == true){  crelerr[i]->SaveAs( Form("Pictures/crelerr%s.%s",
tcase[i].c_str(), picformat.c_str()) );
}

//////////////////////////////////////////

for(int j = 0; j < types; j++){
 grr[i][j] = (TGraph*)file->Get( Form("gr%sr%01i",tcase[i].c_str(),j) ); /
```

```
/ 0, 1, 2, 3, 4, 5 = g+g, u+u_bar, d+d_bar, s+s_bar, c+c_bar, b+b_bar
grr[i][j]->SetMarkerStyle(20);
 grr[i][j]->SetMarkerColor(color[j]);
 grr[i][j]->SetLineColor(color[j]);
 grr[i][j]->SetMarkerSize(0);
 grr[i][j]->SetLineWidth(2);
}

cr[i] = new TCanvas(Form("cr%01i",i+1), Form("cr%01i",i+1), 800.0, 470.0);
cr[i]->cd();

if(rlog[i] == true){
 cr[i]->SetLogy();
}
grr[i][0]->SetMaximum(1.4);
grr[i][0]->SetMinimum(rymin[i]);
grr[i][0]->GetXaxis()->SetLimits(rxmin[i], xmax[i]);

if(manxdiv == true){
 grr[i][0]->GetXaxis()->SetNdivisions(xdiv2[i], true);
}

/*
double xr0, xr1, xr2, xr3, xr4, xr5, yr0, yr1, yr2, yr3, yr4, yr5;
 grr[i][0]->GetPoint(0, xr0, yr0);
grr[i][1]->GetPoint(0, xr1, yr1);
grr[i][2]->GetPoint(0, xr2, yr2);
grr[i][3]->GetPoint(0, xr3, yr3);
grr[i][4]->GetPoint(0, xr4, yr4);
grr[i][5]->GetPoint(0, xr5, yr5);

cout << "Ratio-graafien aloituspisteet (tapaus "<< i+1 << "/" << cases <<
"):" << endl;
cout <<"("<< xr0 << "," << yr0 <<")" << endl;
cout <<"("<< xr1 << "," << yr1 <<")" << endl;
cout <<"("<< xr2 << "," << yr2 <<")" << endl;
cout <<"("<< xr3 << "," << yr3 <<")" << endl;
cout <<"("<< xr4 << "," << yr4 <<")" << endl;
cout <<"("<< xr5 << "," << yr5 <<")" << endl;
cout << "Suhteellisten osuuksien summa alkupisteessÃ¤: " <<
yr0+yr1+yr2+yr3+yr4+yr5 << endl;

// Ilmeisesti liian pienillÃ¤ x:n (sqrt(s), pt, y) arvoilla suhteellisten
osuuksien laskeminen muuttuu erittÃ¤in epÃ¤tarkaksi (nollautuvat
vaikutusalat?). Tulee ottaa huomioon. */

if(showtitles == true){
 grr[i][0]->SetTitle( Form("%s",rtitle[i].c_str()) );
} else {  grr[i][0]->SetTitle(" ");
}

grr[i][0]->GetXaxis()->SetTitle( Form("%s",mrx[i].c_str()) );
grr[i][0]->GetYaxis()->SetTitle("r(ij)");

grr[i][0]->GetXaxis()->SetLabelSize(labsize2);
grr[i][0]->GetYaxis()->SetLabelSize(labsize2);
```

```
grr[i][0]->GetXaxis()->SetTitleSize(xtsize2);
grr[i][0]->GetXaxis()->SetTitleOffset(xtos2);

grr[i][0]->GetYaxis()->SetTitleSize(ytsize2);
grr[i][0]->GetYaxis()->SetTitleOffset(ytos2);

grr[i][0]->Draw("alp");

for(int j = 1; j < types; j++){

 grr[i][j]->Draw("same,pl");

}

cr[i]->RedrawAxis();

if(addsv[i] == true){
 addval[i]->Draw();
}

if(addextv[i] == true){
 addextval[i]->Draw();
}

if(savepics == true){
 cr[i]->SaveAs( Form("Pictures/cr%s.%s", tcase[i].c_str(),
picformat.c_str()) );
}

//////////////////////////////////////////

if(ishist[i] == true){

 for(int k = 0; k < Qver; k++){
  kfstaerr[i][k] = (TH1D*)file->Get( Form("%skfstaerrQ%01i",
tcase[i].c_str(), k) );
 kfstaerr[i][k]->SetLineColor(kBlack);

 kfsyserr[i][k] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get( Form("%skfsyserrQ%01i",
tcase[i].c_str(), k) );
 kfsyserr[i][k]->SetFillColor(920);

 kftoterr[i][k] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get( Form("%skftoterrQ%01i",
tcase[i].c_str(), k) );

 fK[i][k] = new TF1("fK", Kfit, -1000000, 1000000, 1); // HUOM: -1000000 -
1000000

 if(k == 0){
 ckf[i][k] = new TCanvas(Form("ckf%sQ%01i", tcase[i].c_str(), k),
Form("ckf%sQ%01i", tcase[i].c_str(), k), 1200.0, 500.0);
 } else {
 ckf[i][k] = new TCanvas(Form("ckf%sQ%01i", tcase[i].c_str(), k),
Form("ckf%sQ%01i", tcase[i].c_str(), k), 800.0, 470.0);
 }

 ckf[i][k]->cd();
```

```
 if(showtitles == true){
 kfstaerr[i][k]->SetTitle( Form("%s, %s",kftitle[i].c_str(),
kfQ[k].c_str()) );
 } else {
 kfstaerr[i][k]->SetTitle(" ");
 }
  kfstaerr[i][k]->GetXaxis()->SetTitle( Form("%s",mrx[i].c_str()) );
 kfstaerr[i][k]->GetYaxis()->SetTitle("K-kerroin");
 kfstaerr[i][k]->SetStats(false);

 if(k == 0){

 kfstaerr[i][k]->GetXaxis()->SetLabelSize(labsize1);
 kfstaerr[i][k]->GetYaxis()->SetLabelSize(labsize1);

 kfstaerr[i][k]->GetXaxis()->SetTitleSize(xtsize1);
 kfstaerr[i][k]->GetYaxis()->SetTitleSize(ktsize1);

 kfstaerr[i][k]->GetXaxis()->SetTitleOffset(xtos1);
 kfstaerr[i][k]->GetYaxis()->SetTitleOffset(ktos1);

 } else {

 kfstaerr[i][k]->GetXaxis()->SetLabelSize(labsize2);
 kfstaerr[i][k]->GetYaxis()->SetLabelSize(labsize2);

 kfstaerr[i][k]->GetXaxis()->SetTitleSize(xtsize2);
 kfstaerr[i][k]->GetYaxis()->SetTitleSize(ytsize2);

 kfstaerr[i][k]->GetXaxis()->SetTitleOffset(xtos2);
 kfstaerr[i][k]->GetYaxis()->SetTitleOffset(ytos2);

 }

 kftoterr[i][k]->Fit("fK","QRN");   fK[i][k]->SetLineColor(804);
 fK[i][k]->SetLineStyle(9);
 fK[i][k]->SetLineWidth(1);

 kfstaerr[i][k]->GetXaxis()->SetNdivisions(xdiv3[i], true);

 if(manxdiv == true){
 kfstaerr[i][k]->GetXaxis()->SetNdivisions(xdiv3[i], true);
 }

 if(manydiv == true){
 kfstaerr[i][k]->GetYaxis()->SetNdivisions(ydivk[k][i], true);
 }

 for(int j = 0; j < nkfsc; j++){

 if(tcase[i].compare(kftagsc[j]) == 0){
 kfstaerr[i][k]->SetMaximum(kfmaxsc[j][k]);
 break;
 }else{
 kfstaerr[i][k]->SetMaximum(2*(fK[i][k]->GetParameter(0)));
 }
 }
```

```
 kfstaerr[i][k]->SetMinimum(0);

 kfstaerr[i][k]->Draw();
 kfsyserr[i][k]->Draw("E2 SAME");
 kfstaerr[i][k]->Draw("SAME");
 fK[i][k]->Draw("same");

ckf[i][k]->RedrawAxis();

 if(addextv[i] == true){
 addextval[i]->Draw();
 }

 if(savepics == true){  ckf[i][k]->SaveAs( Form("Pictures/ckf%sQ%01i.%s",
tcase[i].c_str(), k, picformat.c_str()) );
 }

 cout << "Tapauksessa " << i + 1 << "/" << cases << Form(" (%s) ",
tcase[i].c_str()) << "skaalavalinnalla " << Form("%s",kfQ[k].c_str()) << "
sovitettu K-tekijÃ¤ saa arvon " << fK[i][k]->GetParameter(0) << "+-" <<
fK[i][k]->GetParError(0) << "." << endl;

 }

} else {

 for(int k = 0; k < Qver; k++){

 kfp[i][k] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get( Form("%skfpQ%01i",
tcase[i].c_str(), k) );
 kfp[i][k]->SetMarkerStyle(20);
 kfp[i][k]->SetMarkerSize(0.62);
 kfp[i][k]->SetMarkerColor(kBlack);
 kfp[i][k]->SetLineColor(kBlack);

 fK[i][k] = new TF1("fK", Kfit, -1000000, 1000000, 1); // HUOM: -1000000 -
1000000

 if(k == 0){
 ckf[i][k] = new TCanvas(Form("ckf%sQ%01i", tcase[i].c_str(), k),
Form("ckf%sQ%01i", tcase[i].c_str(), k), 1200.0, 500.0);
 } else {  ckf[i][k] = new TCanvas(Form("ckf%sQ%01i", tcase[i].c_str(),
k), Form("ckf%sQ%01i", tcase[i].c_str(), k), 800.0, 470.0);
 }

 ckf[i][k]->cd();

 if(showtitles == true){
 kfp[i][k]->SetTitle( Form("%s, %s",kftitle[i].c_str(), kfQ[k].c_str()) );
 } else {
 kfp[i][k]->SetTitle(" ");
 }

 kfp[i][k]->GetXaxis()->SetTitle( Form("%s",mrx[i].c_str()) );
 kfp[i][k]->GetYaxis()->SetTitle("K-kerroin");

 if(k == 0){
```

```
 kfp[i][k]->GetXaxis()->SetLabelSize(labsize1);
 kfp[i][k]->GetYaxis()->SetLabelSize(labsize1);

 kfp[i][k]->GetXaxis()->SetTitleSize(xtsize1);
 kfp[i][k]->GetYaxis()->SetTitleSize(ktsize1);

 kfp[i][k]->GetXaxis()->SetTitleOffset(xtos1);
 kfp[i][k]->GetYaxis()->SetTitleOffset(ktos1);

 } else {

 kfp[i][k]->GetXaxis()->SetLabelSize(labsize2);
 kfp[i][k]->GetYaxis()->SetLabelSize(labsize2);
  kfp[i][k]->GetXaxis()->SetTitleSize(xtsize2);
 kfp[i][k]->GetYaxis()->SetTitleSize(ytsize2);

 kfp[i][k]->GetXaxis()->SetTitleOffset(xtos2);
 kfp[i][k]->GetYaxis()->SetTitleOffset(ytos2);

 }

 kfp[i][k]->Fit("fK","QN");
 fK[i][k]->SetLineColor(804);
 fK[i][k]->SetLineStyle(9);
 fK[i][k]->SetLineWidth(1);

 for(int j = 0; j < nkfsc; j++){

 if(tcase[i].compare(kftagsc[j]) == 0){
 kfp[i][k]->SetMaximum(kfmaxsc[j][k]);
 break;
 }else{
 kfp[i][k]->SetMaximum(2*(fK[i][k]->GetParameter(0)));
 }
 }

 kfp[i][k]->SetMinimum(0);

 if(manxdiv == true){
 kfp[i][k]->GetXaxis()->SetNdivisions(xdiv3[i], true);
 }

 if(manydiv == true){
 kfp[i][k]->GetYaxis()->SetNdivisions(ydivk[k][i], true);
 }

 kfp[i][k]->Draw("ap");
 fK[i][k]->Draw("same");

ckf[i][k]->RedrawAxis();
  if(addextv[i] == true){
 addextval[i]->Draw();
 }

 if(savepics == true){
 ckf[i][k]->SaveAs( Form("Pictures/ckf%sQ%01i.%s", tcase[i].c_str(), k,
picformat.c_str()) );
```

```
 }

 cout << "Tapauksessa " << i + 1 << "/" << cases << Form(" (%s) ",
tcase[i].c_str()) << "skaalavalinnalla " << Form("%s",kfQ[k].c_str()) << "
sovitettu K-tekijÃ¤ saa arvon " << fK[i][k]->GetParameter(0) << "+-" <<
fK[i][k]->GetParError(0) << "." << endl;  }

}

//////////////////////////////////////////

int iscom = 0;
int b;

for(int j = 0; j < ncom; j++){
 if(tcase[i].compare(tcom[j]) == 0){
 iscom++;
 b = j;
 }
}

if(iscom == 1){

 grLLcom[i] = (TGraph*)file->Get( Form("gr%sLL",tcase[i].c_str()) );
 grLLcom[i]->SetMarkerColor(kBlack);
 grLLcom[i]->SetMarkerSize(0);
 grLLcom[i]->SetLineWidth(2);

 grcom[b] = (TGraphAsymmErrors*)file->Get( Form("grcom%s",
tcase[i].c_str()) );  grcom[b]->SetLineColor(633);
 grcom[b]->SetMarkerSize(0);
 grcom[b]->SetLineWidth(2);

 ccom[b] = new TCanvas( Form("ccom%s", tcase[i].c_str()), Form("ccom%s",
tcase[i].c_str()), 1200.0, 500.0);
 ccom[b]->cd();

 if(comislog[b] == true){
 ccom[b]->SetLogy();
 }

 grcom[b]->SetMaximum(ycommax[b]);
 grcom[b]->SetMinimum(ycommin[b]);
 grcom[b]->GetXaxis()->SetLimits(xmin[i], xmax[i]);

 if(showtitles == true){
 grcom[b]->SetTitle( Form("Prosessien p#bar{p} #rightarrow %s ja pp
#rightarrow %s LO-kokonaisvaikutusalat", tqp[b].c_str(), tqp[b].c_str())
);
 } else {
 grcom[b]->SetTitle(" ");
 }

 grcom[b]->GetXaxis()->SetTitle( Form("%s",mrx[i].c_str()) );
 grcom[b]->GetYaxis()->SetTitle( Form("#sigma_{%s}(#sqrt{s} ) [%s]",
tqp[b].c_str(), comun[b].c_str()) );
```

```
 grcom[b]->GetXaxis()->SetLabelSize(labsize1);
 grcom[b]->GetYaxis()->SetLabelSize(labsize1);
  grcom[b]->GetXaxis()->SetTitleSize(xtsize1);
 grcom[b]->GetYaxis()->SetTitleSize(mrtsizeprim);

 grcom[b]->GetXaxis()->SetTitleOffset(xtos1);
 grcom[b]->GetYaxis()->SetTitleOffset(0.65); // b!

 grcom[b]->GetXaxis()->SetNdivisions(xdiv1[i], true);

 grcom[b]->Draw("alp");
 grLLcom[i]->SetLineWidth(2);
 grLLcom[i]->Draw("same"); // c- ja b-kvarkkiparien tuottojen
kokonaisvaikutusaloissa ei nÃ¤kyviÃ¤ eroja.

 ccom[b]->RedrawAxis();

 if(savepics == true){
ccom[b]->SaveAs( Form("Pictures/ccom%01i.%s", b, picformat.c_str()) );
 }

}

}

}

double Kfit(double *x, double *p){

return p[0];

}
```

Liite E: Muuttujanvaihdot

Tässä liitteessä esitetään ohjelman Int.cc vaikutusalafunktioiden muuttujanvaihdot sekä (integroitavat) lausekkeet. Kokonaisvaikutusalat saadaan lausekkeella

$$\sigma(p\overset{(-)}{p} \to H_Q H_{\overline{Q}} + X) = F \sum_{i,j=g,q,\overline{q}} \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 f_{i/p}(x_1,Q_f) f_{j/\overset{(-)}{p}}(x_2,Q_f) \hat{\sigma}(ij \to Q\overline{Q})$$

ja leikatut sekä differentioidut vaikutusalat integroimalla lauseketta

$$\frac{d\sigma(p\overset{(-)}{p} \to H_Q H_{\overline{Q}} + X)}{dp_T dy_3 dy_4} = 2Fp_T \sum_{i,j=g,q,\overline{q}} x_1 f_{i/p}(x_1,Q_f^2) x_2 f_{j/\overset{(-)}{p}}(x_2,Q_f^2) \frac{d\hat{\sigma}(ij \to Q\overline{Q})}{d\hat{t}}.$$

Numeerinen integrointi on tarkempaa ja tehokkaampaa, kun integrointialue on hyperkuutio, jonka sisällä integrandi on jatkuva ja erisuuri kuin nolla. $\hat{\sigma}(ij \to Q\overline{Q}) = 0$, kun $\hat{s} = x_1 x_2 s \leq 4m_Q^2$. Vastaavasti leikattu/differentioitu vaikutusala on nolla alueissa, joissa aiemmin johdetut kinemaattiset rajat

$$\begin{aligned} p_T &\leq \sqrt{\frac{s}{4} - m_Q^2} \\ |y_3| &\leq \operatorname{arcosh}(\frac{\sqrt{s}}{2m_T}) \\ -\ln(\frac{\sqrt{s}}{m_T} - e^{-y_3}) \leq y_4 &\leq \ln(\frac{\sqrt{s}}{m_T} - e^{y_3}) \end{aligned}$$

eivät toteudu. Näistä rajoituksista johtuen minkään vaikutusalan integrointialue ei ole automaattisesti halutun kaltainen hyperkuutio, vaan ne tulee muuttaa sellaisiksi erikseen.

Tapaus $\sigma(\sqrt{s})$:

$4m_Q^2 \leq \hat{s} = x_1 x_2 s$, joten (esimerkiksi)

$$\begin{aligned} \frac{4m_Q^2}{s} &\leq x_1 \leq 1 \\ \frac{4m_Q^2}{x_1 s} &\leq x_2 \leq 1. \end{aligned}$$

Esitetään x_1 ja x_2 uusien muuttujien $r_1,r_2 \in [0,1]$ avulla:

$$x_1 = \frac{4m_Q^2}{s} + r_1(1 - \frac{4m_Q^2}{s})$$
$$x_2 = \frac{4m_Q^2}{x_1 s} + r_2(1 - \frac{4m_Q^2}{x_1 s}).$$

Tästä saadaan osittaisderivaatat

$$\frac{\partial x_1}{\partial r_1} = (1 - \frac{4m_Q^2}{s})$$

ja

$$\frac{\partial x_2}{\partial r_2} = (1 - \frac{4m_Q^2}{x_1 s}).$$

Muuttujanvaihtoa $(x_1,x_2) \to (r_1,r_2)$ vastaava Jacobin determinantti on

$$\begin{aligned} J(r_1,r_2) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_1}{\partial r_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & 0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial x_1}{\partial r_1}\frac{\partial x_2}{\partial r_2} \\ &= (1 - \frac{4m_Q^2}{s})(1 - \frac{4m_Q^2}{x_1 s}) \geq 0. \end{aligned}$$

Nyt kokonaisvaikutusala voidaan laskea integroimalla numeerisesti hyperkuutiossa (ei aluetta $\hat{s} = x_1 x_2 s \leq 4m_Q^2$):

$$\begin{aligned} \sigma(\sqrt{s}) &= F \sum_{i,j=g,q,\overline{q}} \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 f_{i/p}(x_1,Q_f) f_{j/\overline{p}}(x_2,Q_f) \hat{\sigma}(ij \to Q\overline{Q}) \\ &= F \sum_{i,j=g,q,\overline{q}} \int_0^1 \int_0^1 dr_1 dr_2 f_{i/p}(x_1,Q_f) f_{j/\overline{p}}(x_2,Q_f) \hat{\sigma}(ij \to Q\overline{Q}) J(r_1,r_2). \end{aligned}$$

Tapaus $\sigma_{p_T^{\min}<p_T<p_T^{\max},\ y_{\min}<y<y_{\max}}(\sqrt{s})$:

Tässä tapauksessa tulee ottaa huomioon aikaisemmin sovittu hadronisaation mallinnusapproksimaatio, jossa alkuperäisen kvarkin Q ja sen hadronin H_Q ajatellaan omaavan sama liikemäärä. Merkitään hadronin kinemaattisia suureita ilman indeksiä (p_z, y). Koska liikemäärän z-komponentti säilyy hadronisaatiossa, niin

$$\begin{aligned} p_{3z} &= p_z \\ \Leftrightarrow m_T \sinh(y_3) &= m_{HT} \sinh(y) \\ \Leftrightarrow y_3 &= \operatorname{arsinh}(\frac{m_{HT}}{m_T} \sinh(y)), \end{aligned}$$

missä $m_{HT} = \sqrt{m_{H_Q}^2 + p_T^2}$ ja $m_T = \sqrt{m_Q^2 + p_T^2}$.

Ilmoitetaan antikvarkin rapiditeetti y_4 uuden muuttujan $w \in [0,1]$ avulla:

$$y_4 = (w-1)\ln(\sqrt{\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2}} - e^{-y_3}) + w\ln(\sqrt{\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2}} - e^{y_3})$$

Nyt voimme siirtyä muuttujista (p_T,y_3,y_4) muuttujiin (p_T,y,w):

$$\begin{aligned} p_T &= p_T \\ y_3 &= y_3(p_T,y) \\ y_4 &= y_4(p_T,y,w) \end{aligned}$$

Vanhoille muuttujille saadaan laskettua osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_3}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{m_{HT}}{m_T}\sinh(y))^2}} \cdot \frac{m_{HT}}{m_T}\cosh(y) \\ &= \frac{\cosh(y)}{\sqrt{\frac{m_Q^2+p_T^2}{m_{H_Q}^2+p_T^2} + \sinh^2(y)}} \end{aligned}$$

ja

$$\frac{\partial y_4}{\partial w} = \ln(\sqrt{\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2}} - e^{-y_3}) + \ln(\sqrt{\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2}} - e^{y_3})$$

$$= \ln(\frac{s}{m_Q^2+p_T^2} - \sqrt{\frac{s}{m_Q^2+p_T^2}}(e^{y_3}+e^{-y_3})+1)$$
$$= \ln(\frac{s}{m_Q^2+p_T^2} + 1 - 2\sqrt{\frac{s}{m_Q^2+p_T^2}}\cosh(y_3)).$$

Nyt

$$J(p_T,y,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_T}{\partial p_T} & \frac{\partial p_T}{\partial y} & \frac{\partial p_T}{\partial w} \\ \frac{\partial y_3}{\partial p_T} & \frac{\partial y_3}{\partial y} & \frac{\partial y_3}{\partial w} \\ \frac{\partial y_4}{\partial p_T} & \frac{\partial y_4}{\partial y} & \frac{\partial y_4}{\partial w} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial y_3}{\partial p_T} & \frac{\partial y_3}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial y_4}{\partial p_T} & \frac{\partial y_4}{\partial y} & \frac{\partial y_4}{\partial w} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{\partial y_3}{\partial y}\frac{\partial y_4}{\partial w}$$
$$= \frac{\cosh(y)}{\sqrt{\frac{m_Q^2+p_T^2}{m_{H_Q}^2+p_T^2}+\sinh^2(y)}}\ln(\frac{s}{m_Q^2+p_T^2}+1-2\sqrt{\frac{s}{m_Q^2+p_T^2}}\cosh(y_3)) \geq 0.$$

($\frac{\partial y_4}{\partial w} \geq 0$, sillä $\frac{s}{m_Q^2+p_T^2}+1-2\sqrt{\frac{s}{m_Q^2+p_T^2}}\cosh(y_3) \geq 0$, koska $2E_3 = 2m_T\cosh(y_3) \leq \sqrt{s}$.)
Täten

$$\sigma_{p_T^{\min}<p_T<p_T^{\max},\ y_{\min}<y<y_{\max}}(\sqrt{s}) = \int_{p_T^{\min}}^{p_T^{\max}}\int_{y_3^{\min}}^{y_3^{\max}}\int_{y_4^{\min}(p_T,y_3)}^{y_4^{\max}(p_T,y_3)} dy_4 dy_3 dp_T \frac{d\sigma}{dp_T dy_3 dy_4}$$
$$= \int_{p_T^{\min}}^{p_T^{\max}}\int_{y_{\min}}^{y_{\max}}\int_0^1 dp_T dy dw \frac{d\sigma}{dp_T dy_3 dy_4} J(p_T,y,w).$$

$\frac{d\sigma}{dp_T dy_3 dy_4} = 0$, kun $\frac{\sqrt{s}}{2} \leq m_T\cosh(y_3)$, koska energiaa ei ole tälloin tarpeeksi reaktioon. Siten alhaisilla CMS-energioilla hyperkuution sisään jää alueita, joissa integrandi on nolla. Kuitenkaan epäjatkuvuuskohtia ei synny tällä muuttujanvaihdolla.

Tapaukset $\sigma_{\eta_{\min}<\eta<\eta_{\max}}(\sqrt{s})$ ja $\frac{d\sigma}{d\eta}(\eta)$:

Koska kvarkin ja vastaavan hadronin liikemäärät on approksimoitu samoiksi, niin myös niiden pseudorapiditeetit η_3 ja η ovat samat ($\eta \equiv \frac{1}{2}\ln(\frac{|\overline{p}|+p_z}{|\overline{p}|-p_z})$). Kvarkin liikemäärälle pätee $|\overline{p}_3| = p_T\cosh(\eta)$, joten

$$E_3 = \sqrt{m_Q^2 + |\overline{p}_3|^2} = \sqrt{m_Q^2 + p_T^2 \cosh^2(\eta)}$$

ja täten

$$p_T = \frac{\sqrt{E_3^2 - m_Q^2}}{\cosh(\eta)}.$$

Koska $E_3 \leq \frac{\sqrt{s}}{2}$, niin

$$p_T \leq \frac{\sqrt{\frac{s}{4} - m_Q^2}}{\cosh(\eta)}.$$

Rapiditeetille ja pseudorapiditeetille pätee seuraava riippuvuus:

$$\begin{aligned} p_{3z} &= p_{3z} \\ \Leftrightarrow m_T \sinh(y_3) &= p_T \sinh(\eta) \\ \Leftrightarrow y_3 &= \operatorname{arsinh}(\frac{p_T}{m_T} \sinh(\eta)). \end{aligned}$$

Voimme siirtyä muuttujista (p_T,y_3,y_4) muuttujiin (w_1,η,w_2):

$$\begin{aligned} p_T &= w_1 \frac{\sqrt{\frac{s}{4} - m_Q^2}}{\cosh(\eta)} \\ y_3 &= \operatorname{arsinh}(\frac{p_T}{m_T} \sinh(\eta)) \\ y_4 &= (w_2 - 1)\ln(\sqrt{\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2}} - e^{-y_3}) + w_2 \ln(\sqrt{\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2}} - e^{y_3}). \end{aligned}$$

Vanhoille muuttujille pätevät seuraavat osittaisderivaatat:

$$\frac{\partial p_T}{\partial w_1} = \frac{\sqrt{\frac{s}{4} - m_Q^2}}{\cosh(\eta)}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p_T}{\partial \eta} &= -w_1 \frac{\sqrt{\frac{s}{4} - m_Q^2}}{\cosh^2(\eta)} \sinh(\eta) \\
&= -w_1 \frac{\sqrt{\frac{s}{4} - m_Q^2}}{\cosh(\eta)} \tanh(\eta) \\
&= -p_T \tanh(\eta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y_3}{\partial \eta} &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{p_T}{m_T}\sinh(\eta))^2}} \Big[\frac{1 \cdot m_T - p_T \cdot \frac{1}{2}(m_Q^2 + p_T^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2p_T}{m_T^2} \frac{\partial p_T}{\partial \eta} \sinh(\eta) + \frac{p_T}{m_T}\cosh(\eta) \Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p_T^2}{m_T^2}\sinh^2(\eta)}} \Big[(\frac{1}{m_T} - \frac{p_T^2}{m_T^3})(-p_T \tanh(\eta))\sinh(\eta) + \frac{p_T}{m_T}\cosh(\eta) \Big] \\
&= \frac{p_T \cosh(\eta)}{\sqrt{m_T^2 + p_T^2 \sinh^2(\eta)}} \Big[-(1 - \frac{p_T^2}{m_T^2})\tanh^2(\eta) + 1 \Big] \\
&= \frac{p_T \cosh(\eta)}{\sqrt{m_Q^2 + p_T^2 \cosh^2(\eta)}} \Big[1 - (\frac{m_Q^2 + p_T^2}{m_Q^2 + p_T^2} - \frac{p_T^2}{m_Q^2 + p_T^2})\tanh^2(\eta) \Big] \\
&= \frac{p_T \cosh(\eta)}{\sqrt{m_Q^2 + p_T^2 \cosh^2(\eta)}} (1 - \frac{m_Q^2}{m_Q^2 + p_T^2}\tanh^2(\eta))
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial y_3}{\partial w_1} = \frac{\partial y_3}{\partial p_T} \frac{\partial p_T}{\partial w_1},
$$

missä

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y_3}{\partial p_T} &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{p_T}{m_T}\sinh(\eta))^2}} \cdot \frac{1 \cdot m_T - p_T \cdot \frac{1}{2}(m_Q^2 + p_T^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2p_T}{m_T^2} \sinh(\eta) \\
&= \frac{1}{\sqrt{m_T^2 + p_T^2 \sinh^2(\eta)}} (1 - \frac{p_T^2}{m_Q^2 + p_T^2})\sinh(\eta) \\
&= \frac{\cosh(\eta)}{\sqrt{m_Q^2 + p_T^2 \cosh^2(\eta)}} (\frac{m_Q^2 + p_T^2}{m_Q^2 + p_T^2} - \frac{p_T^2}{m_Q^2 + p_T^2}) \frac{\sinh(\eta)}{\cosh(\eta)} \\
&= \frac{\cosh(\eta)}{\sqrt{m_Q^2 + p_T^2 \cosh^2(\eta)}} \frac{m_Q^2}{m_Q^2 + p_T^2} \tanh(\eta).
\end{aligned}
$$

Osittaisderivaatta $\frac{\partial y_4}{\partial w_2}$ on sama kuin tapauksessa $\sigma_{p_T^{\min} < p_T < p_T^{\max},\ y_{\min} < y < y_{\max}}(\sqrt{s})$:

$$\frac{\partial y_4}{\partial w_2} = \ln(\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2} + 1 - 2\sqrt{\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2}}\cosh(y_3)).$$

Täten Jacobin determinantti on

$$\begin{aligned}
J(w_1, \eta, w_2) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial p_T}{\partial w_1} & \frac{\partial p_T}{\partial \eta} & \frac{\partial p_T}{\partial w_2} \\ \frac{\partial y_3}{\partial w_1} & \frac{\partial y_3}{\partial \eta} & \frac{\partial y_3}{\partial w_2} \\ \frac{\partial y_4}{\partial w_1} & \frac{\partial y_4}{\partial \eta} & \frac{\partial y_4}{\partial w_2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial p_T}{\partial w_1} & \frac{\partial p_T}{\partial \eta} & 0 \\ \frac{\partial y_3}{\partial w_1} & \frac{\partial y_3}{\partial \eta} & 0 \\ \frac{\partial y_4}{\partial w_1} & \frac{\partial y_4}{\partial \eta} & \frac{\partial y_4}{\partial w_2} \end{vmatrix} \\
&= \Big[\frac{\partial p_T}{\partial w_1}\frac{\partial y_3}{\partial \eta} - \frac{\partial y_3}{\partial w_1}\frac{\partial p_T}{\partial \eta}\Big]\frac{\partial y_4}{\partial w_2} \\
&= \Big[\frac{\partial p_T}{\partial w_1}\frac{\partial y_3}{\partial \eta} - \frac{\partial y_3}{\partial p_T}\frac{\partial p_T}{\partial w_1}\frac{\partial p_T}{\partial \eta}\Big]\frac{\partial y_4}{\partial w_2} \\
&= \Big[\frac{\partial y_3}{\partial \eta} - \frac{\partial y_3}{\partial p_T}\frac{\partial p_T}{\partial \eta}\Big]\frac{\partial p_T}{\partial w_1}\frac{\partial y_4}{\partial w_2} \\
&= \Big[\frac{p_T\cosh(\eta)}{\sqrt{m_Q^2 + p_T^2\cosh^2(\eta)}}(1 - \frac{m_Q^2}{m_Q^2 + p_T^2}\tanh^2(\eta)) \\
&- \frac{\cosh(\eta)}{\sqrt{m_Q^2 + p_T^2\cosh^2(\eta)}}\frac{m_Q^2}{m_Q^2 + p_T^2}\tanh(\eta)(-p_T\tanh(\eta))\Big] \\
&\frac{\sqrt{\frac{s}{4} - m_Q^2}}{\cosh(\eta)}\ln(\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2} + 1 - 2\sqrt{\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2}}\cosh(y_3)) \\
&= \Big[\frac{p_T\cosh(\eta)}{\sqrt{m_Q^2 + p_T^2\cosh^2(\eta)}} - \frac{p_T\cosh(\eta)}{\sqrt{m_Q^2 + p_T^2\cosh^2(\eta)}}\frac{m_Q^2}{m_Q^2 + p_T^2}\tanh^2(\eta) \\
&+ \frac{p_T\cosh(\eta)}{\sqrt{m_Q^2 + p_T^2\cosh^2(\eta)}}\frac{m_Q^2}{m_Q^2 + p_T^2}\tanh^2(\eta)\Big] \\
&\frac{\sqrt{\frac{s}{4} - m_Q^2}}{\cosh(\eta)}\ln(\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2} + 1 - 2\sqrt{\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2}}\cosh(y_3)) \\
&= p_T\sqrt{\frac{\frac{s}{4} - m_Q^2}{m_Q^2 + p_T^2\cosh^2(\eta)}}\ln(\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2} + 1 - 2\sqrt{\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2}}\cosh(y_3)) \geq 0.
\end{aligned}$$

Pseudorapiditeetin suhteen leikatun vaikutusalan lausekkeeksi saadaan

$$\sigma_{\eta_{\min}<\eta<\eta_{\max}}(\sqrt{s}) = \int_{y_3^{\min}(\eta_{\min})}^{y_3^{\max}(\eta_{\max})} \int_0^{p_T^{\max}(y_3)} \int_{y_4^{\min}(p_T,y_3)}^{y_4^{\max}(p_T,y_3)} dy_4 dp_T dy_3 \frac{d\sigma}{dp_T dy_3 dy_4}.$$
$$= \int_0^1 \int_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}} \int_0^1 dw_1 d\eta dw_2 \frac{d\sigma}{dp_T dy_3 dy_4} J(w_1, \eta, w_2).$$

Tapauksessa $\frac{d\sigma}{d\eta}(\eta)$ vaikutusalan lauseke on sama kuin leikatulla vaikutusalalla $\sigma_{\eta_{\min}<\eta<\eta_{\max}}$, mutta nyt pseudorapiditeetin yli ei integroida:

$$\frac{d\sigma}{d\eta}(\eta) = \int_0^1 \int_0^1 dw_2 dw_1 \frac{d\sigma}{dp_T dy_3 dy_4} J(w_1, \eta, w_2).$$

Tapaukset $\frac{d\sigma}{dp_T}(p_T)$ ja $\frac{d\sigma_{y_{\min}<y<y_{\max}}}{dp_T}(p_T)$:

Siirrytään integroitavista muuttujista (y_3,y_4) muuttujiin (y_3,w):

$$y_3 = y_3$$
$$y_4 = (w-1)\ln(\sqrt{\frac{s}{m_Q^2+p_T^2}} - e^{-y_3}) + w\ln(\sqrt{\frac{s}{m_Q^2+p_T^2}} - e^{y_3}),$$

missä jälkimmäiselle rapiditeetille pätee jälleen

$$\frac{\partial y_4}{\partial w} = \ln(\frac{s}{m_Q^2+p_T^2} + 1 - 2\sqrt{\frac{s}{m_Q^2+p_T^2}}\cosh(y_3)).$$

Nyt

$$J(y_3, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial y_3} & \frac{\partial y_3}{\partial w} \\ \frac{\partial y_4}{\partial y_3} & \frac{\partial y_4}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial y_4}{\partial y_3} & \frac{\partial y_4}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial y_4}{\partial w} = \ln(\frac{s}{m_Q^2+p_T^2} + 1 - 2\sqrt{\frac{s}{m_Q^2+p_T^2}}\cosh(y_3)) \geq 0.$$

ja

$$\frac{d\sigma}{dp_T}(p_T) = \int_{y_3^{\min}(p_T)}^{y_3^{\max}(p_T)} \int_{y_4^{\min}(p_T,y_3)}^{y_4^{\max}(p_T,y_3)} dy_4 dy_3 dp_T \frac{d\sigma}{dp_T dy_3 dy_4}$$
$$= \int_{y_3^{\min}(p_T)}^{y_3^{\max}(p_T)} \int_0^1 dw dy_3 \frac{d\sigma}{dp_T dy_3 dy_4} J(y_3, w).$$

Tapaukselle $\frac{d\sigma_{y_{\min}<y<y_{\max}}}{dp_T}(p_T)$ vaikutusalan lauseke on sama kuin edellä, mutta nyt

$$y_3^{\max} = \begin{cases} \operatorname{arcosh}(\frac{\sqrt{s}}{2m_T}), \text{ kun } \operatorname{arcosh}(\frac{\sqrt{s}}{2m_T}) \leq \operatorname{arsinh}(\frac{m_{H_Q}^2+p_T^2}{m_Q^2+p_T^2}\sinh(y_{\max})) \\ \operatorname{arsinh}(\frac{m_{H_Q}^2+p_T^2}{m_Q^2+p_T^2}\sinh(y_{\max})), \text{ muutoin} \end{cases}$$

$$y_3^{\min} = \begin{cases} -\operatorname{arcosh}(\frac{\sqrt{s}}{2m_T}), \text{ kun } -\operatorname{arcosh}(\frac{\sqrt{s}}{2m_T}) \geq \operatorname{arsinh}(\frac{m_{H_Q}^2+p_T^2}{m_Q^2+p_T^2}\sinh(y_{\min})) \\ \operatorname{arsinh}(\frac{m_{H_Q}^2+p_T^2}{m_Q^2+p_T^2}\sinh(y_{\min})), \text{ muutoin.} \end{cases}$$

Tapaus $\frac{d\sigma}{dy}(y)$:

Merkitään $y \equiv y_3$ (hadronisaatiota ei käsitellä tässä tapauksessa). Poikittaisliikemäärä voidaan ilmoittaa (anti)kvarkin massan, rapiditeetin ja energian avulla:

$$\begin{aligned} E_3 &= m_T \cosh(y_3) \\ \Leftrightarrow \frac{E_3^2}{\cosh^2(y_3)} &= m_T^2 \\ \Leftrightarrow p_T &= \sqrt{\frac{E_3^2}{\cosh^2(y_3)} - m_Q^2}. \end{aligned}$$

Siispä

$$p_T \leq \sqrt{\frac{(\frac{\sqrt{s}}{2})^2}{\cosh^2(y_3)} - m_Q^2} = \sqrt{\frac{s}{4\cosh^2(y_3)} - m_Q^2}.$$

Siirrytään muuttujiin (w_1,w_2):

$$\begin{aligned} p_T &= w_1\sqrt{\frac{s}{4\cosh^2(y_3)} - m_Q^2} \\ y_4 &= (w_2-1)\ln(\sqrt{\frac{s}{m_Q^2+p_T^2}} - e^{-y_3}) + w_2\ln(\sqrt{\frac{s}{m_Q^2+p_T^2}} - e^{y_3}) \end{aligned}$$

Nyt

$$\frac{\partial p_T}{\partial w_1} = \sqrt{\frac{s}{4\cosh^2(y_3)} - m_Q^2}$$

ja

$$\frac{\partial y_4}{\partial w_2} = \ln(\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2} + 1 - 2\sqrt{\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2}}\cosh(y_3)).$$

Jacobin determinantti on

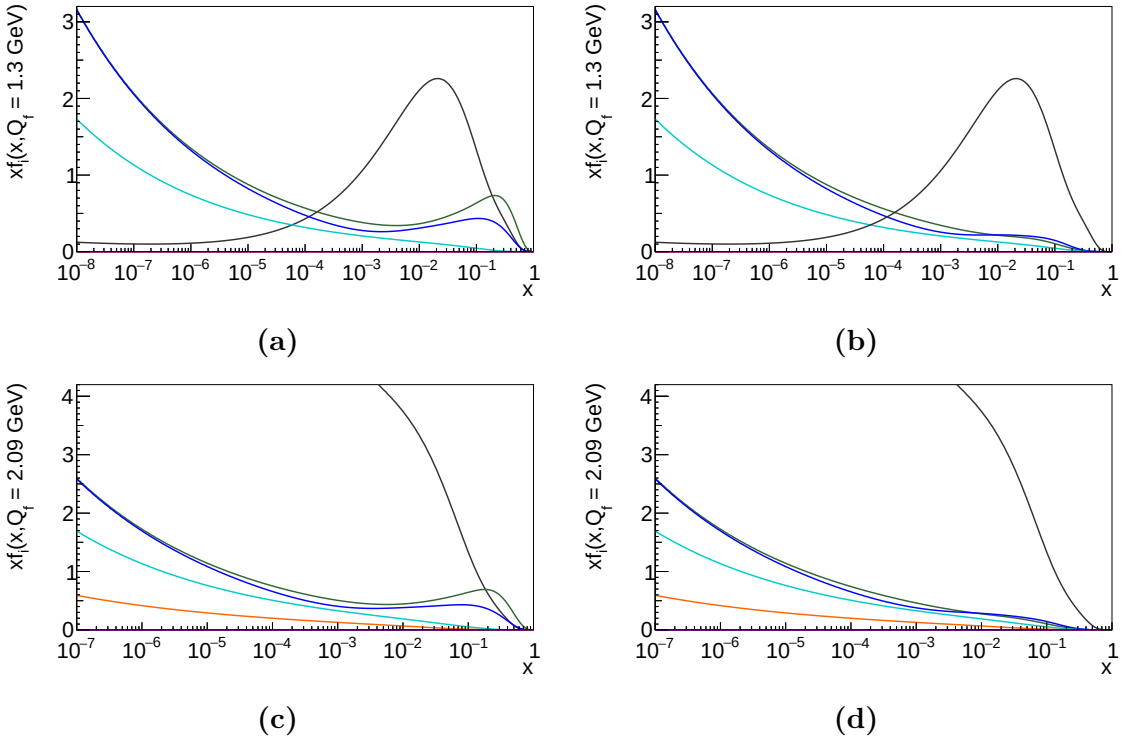
$$\begin{aligned} J(w_1, w_2) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial p_T}{\partial w_1} & \frac{\partial p_T}{\partial w_2} \\ \frac{\partial y_4}{\partial w_1} & \frac{\partial y_4}{\partial w_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_T}{\partial w_1} & 0 \\ \frac{\partial y_4}{\partial w_1} & \frac{\partial y_4}{\partial w_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial p_T}{\partial w_1}\frac{\partial y_4}{\partial w_2} \\ &= \sqrt{\frac{s}{4\cosh^2(y_3)} - m_Q^2}\ \ln(\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2} + 1 - 2\sqrt{\frac{s}{m_Q^2 + p_T^2}}\cosh(y_3)) \geq 0. \end{aligned}$$

Nyt (anti)kvarkin rapiditeetin y suhteen differentioitu vaikutusala on

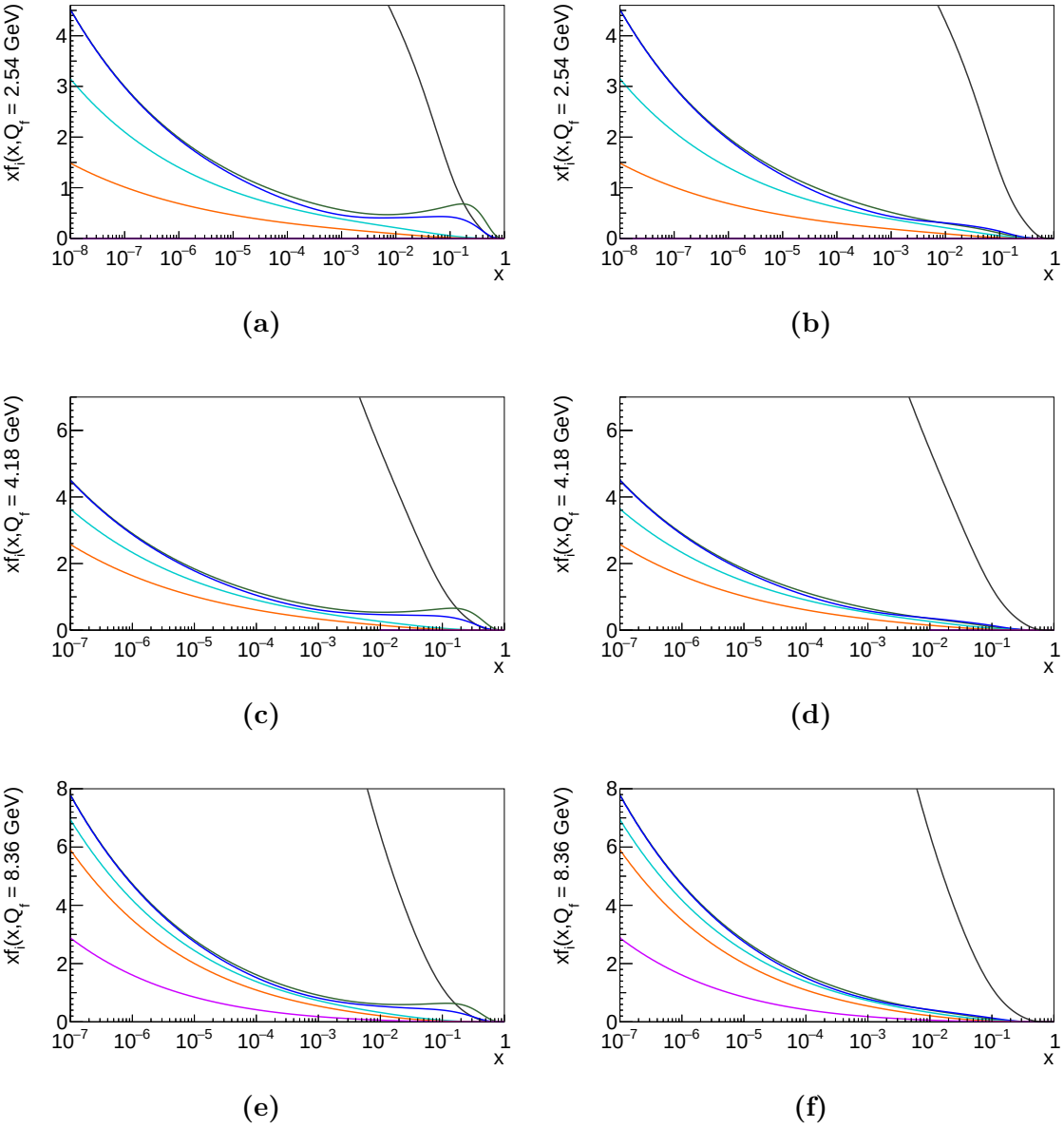
$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dy}(y) &= \int_0^{p_T^{\max}(y)} \int_{y_4^{\min}(p_T,y)}^{y_4^{\max}(p_T,y)} dy_4 dp_T \frac{d\sigma}{dp_T dy_3 dy_4} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 dw_1 dw_2 \frac{d\sigma}{dp_T dy_3 dy_4} J(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Liite F: NLO-partonijakaumafunktiot

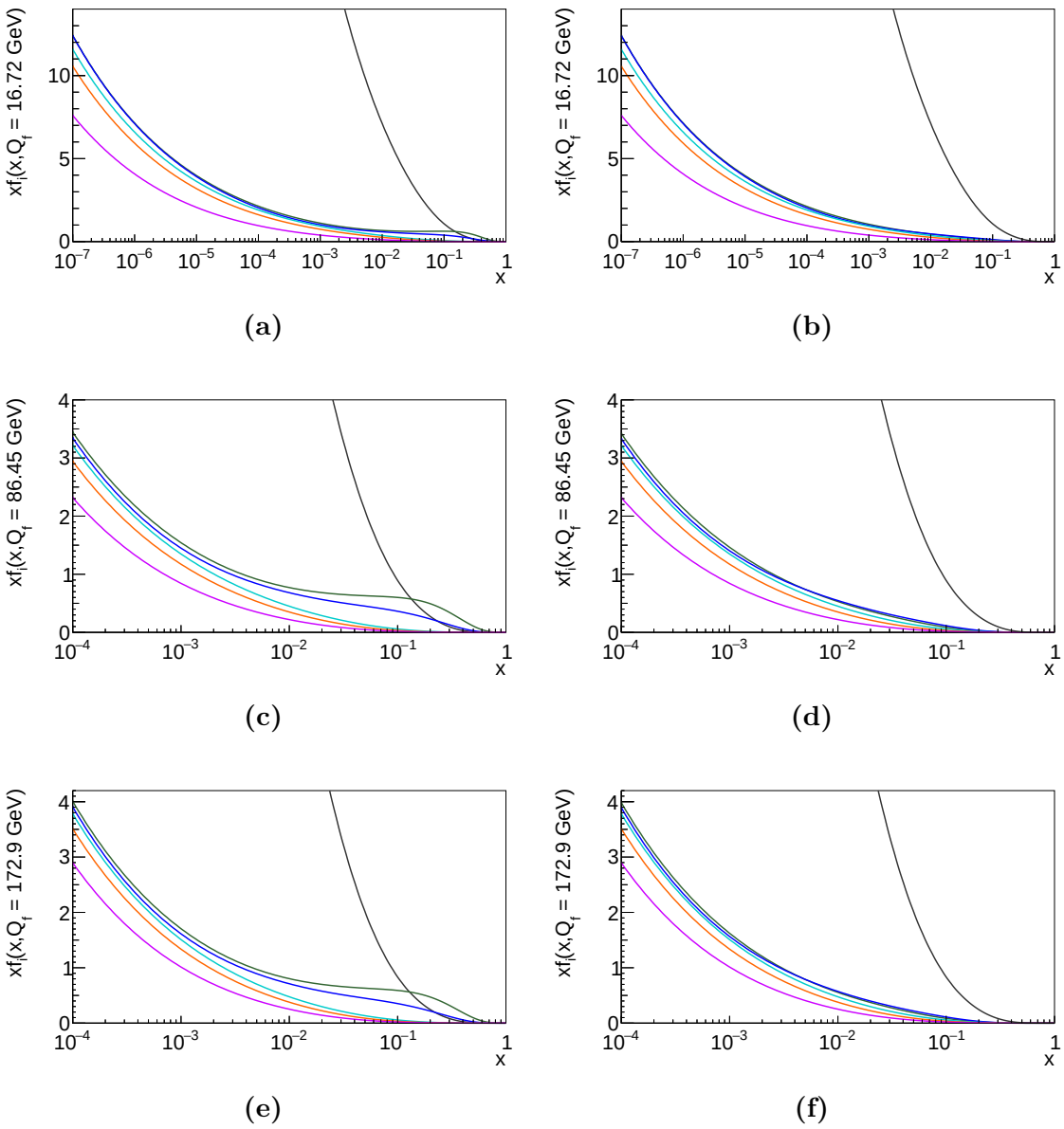
Tässä liitteessä on esitetty CT14-NLO-partonijakaumafunktiot [62], joita on hyödynnetty, kun LO-vaikutusaloille on arvioitu LO-partonijakaumafunktioiden epävarmuudesta tulevat virheet.



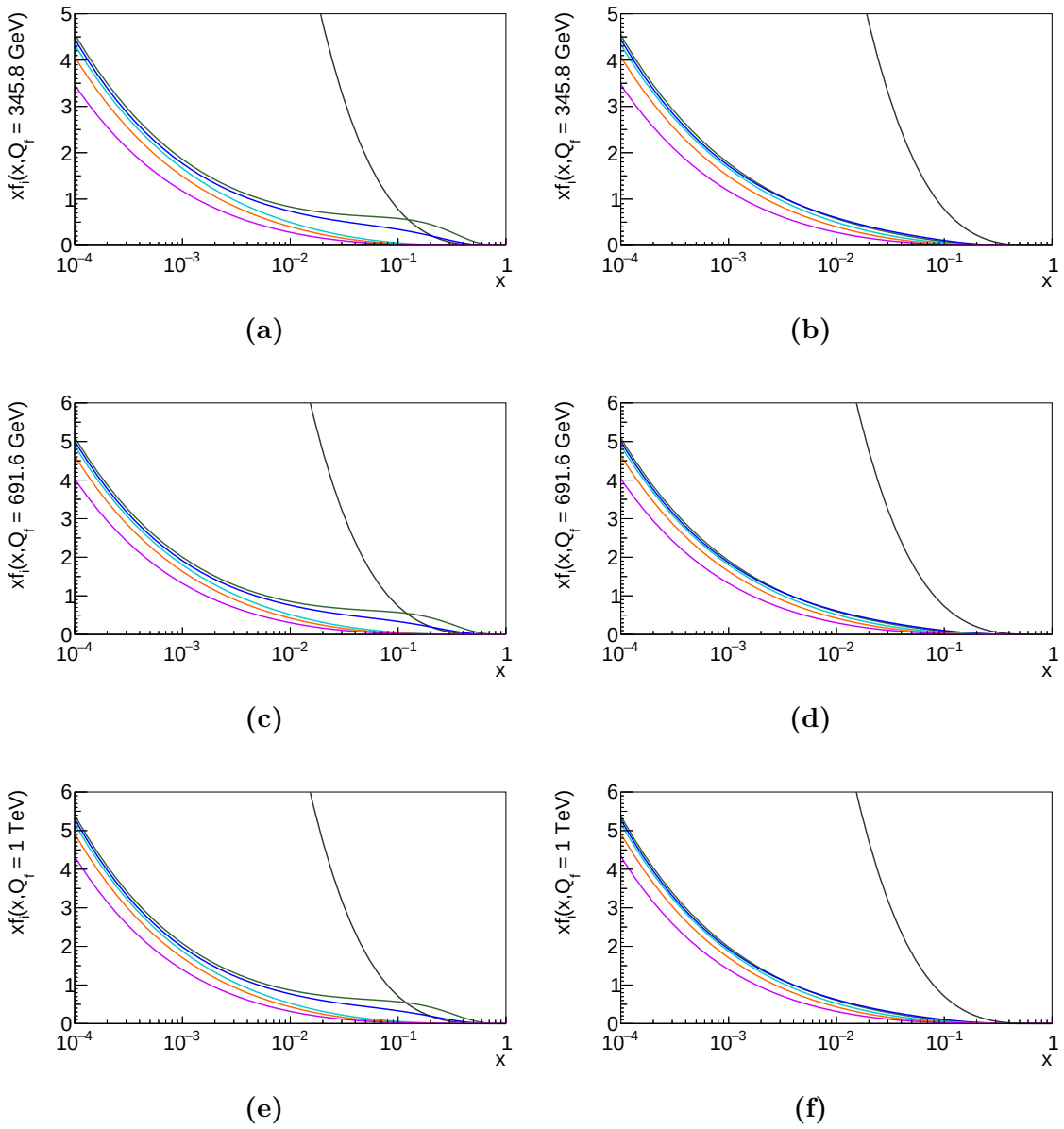
Kuva F1. CT14-NLO-partonijakaumafunktiot $xf_i(x,Q_f)$ pitkittäisliikemääräosuuden x funktiona, faktorisaatioskaaloilla $Q_f = 1{,}3$ ja 2,09 GeV [62]. Vasemmanpuoleiset kuvaajat edustavat ns. tavanomaisten hiukkasten, g (musta), u (vihreä), d (sininen), s (vaaleansininen), c (oranssi) ja b (violetti), partonijakaumafunktioita ja oikeanpuoleiset antihiukkasten g, $\overline{u}$, $\overline{d}$, $\overline{s}$, $\overline{c}$ ja $\overline{b}$ partonijakaumafunktioita (värit vastaavasti kuin tavanomaisilla hiukkasilla).



Kuva F2. CT14-NLO-partonijakaumafunktiot $xf_i(x,Q_f)$ pitkittäisliikemääräosuuden x funktiona, faktorisaatioskaaloilla Q_f = 2,54, 4,18 ja 8,36 GeV [62]. Käyrien värit ja kuvien merkitykset ovat samat kuin kuvassa F1.



Kuva F3. CT14-NLO-partonijakaumafunktiot $xf_i(x,Q_f)$ pitkittäisliikemääräosuuden x funktiona, faktorisaatioskaaloilla Q_f = 16,72, 86,45 ja 172,9 GeV [62]. Käyrien värit ja kuvien merkitykset ovat samat kuin kuvassa F1.



Kuva F4. CT14-NLO-partonijakaumafunktiot $xf_i(x,Q_f)$ pitkittäisliikemääräosuuden x funktiona, faktorisaatioskaaloilla $Q_f = 345{,}8$ GeV, 691,8 GeV ja 1 TeV [62]. Käyrien värit ja kuvien merkitykset ovat samat kuin kuvassa F1.