

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

Investigando Noções de Entropia e sua Produção nas Colisões de Partículas a Altas Energias

Aluno: Gabriel Silveira Ramos

Orientador: Magno V. T. Machado

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para obtenção do título de Doutor em Física pelo Programa de Pós-graduação em Física.

Área de concentração: Física de Partículas de Altas Energias.

Porto Alegre - RS

2024

Em memória de Dorival Machado.

Chaos was the law of nature; Order was the dream of man.

Henry Adams

Agradecimentos

Aos meus pais, por estarem ao meu lado mais uma vez, servindo como um firme apoio.

Ao meu orientador, *Magno V. T. Machado*. Assim como um pai, que tem a paciência de nos ensinar os primeiros passos e se mostra sempre disponível, o professor segue essa mesma linha. A diferença é que, no caso do professor, os primeiros passos envolvem aprender quais ferramentas utilizar, que linha de pesquisa seguir e qual o melhor caminho para explicar um conceito.

Anita Barros Vanzin, que tive a sorte de conhecer durante a realização desses estudos. Sua presença tornou a vida mais leve.

Aos amigos, *Lars Sanhudo de Souza*, *Vinicius Sanhudo de Souza*, *Diego Pierozan*, *Franco Tonietto*, *Felipe Costa*, *João Otávio May Buogo*, *Guilherme Petrini*, *Juliana Harmatiuk*, *Guilherme Ramos Broliato*, *Felipe da Tomazoni* e *Kelvin Sayao*.

Resumo

Este trabalho analisou diferentes noções de entropia e sua produção em colisões ep e de íons pesados, com foco nos estágios iniciais da colisão. Para isso, estudou-se a importância de fenômenos como o emaranhamento quântico e a decoerência na geração de entropia. Utilizando o estado da arte para o cálculo da entropia de emaranhamento no limite de altas energias e sintetizando as diferentes abordagens para sua obtenção, foram obtidos resultados fenomenológicos a partir de expressões analíticas para o número de glúons. Também foram apresentados resultados para a entropia de emaranhamento no espalhamento elástico de dois corpos, considerando a estrutura hadrônica baseada no método independente de modelo de Lévy, em energias típicas do RHIC, Tevatron e LHC. Modelos fenomenológicos das distribuições de glúons não integradas foram empregados para calcular a entropia dinâmica na QCD dos estados gluônicos densos em colisões pp e pA em altas energias, comparando-a com a entropia de decoerência. Os resultados obtidos foram contrastados com outras noções de entropia presentes na literatura, assim como foram discutidas as fontes de incertezas teóricas.

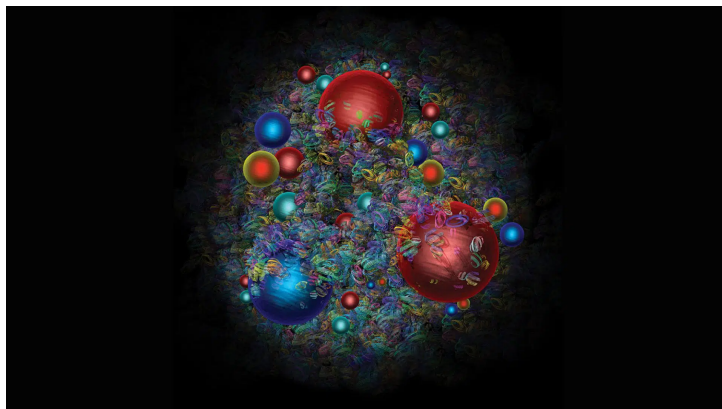
Palavras-chave: Física de altas energias, entropia, emaranhamento.

Abstract

This work analyzes different notions of entropy and its production in ep and heavy-ion collisions, focusing on the early stages of the collision. To this end, the importance of phenomena such as quantum entanglement and decoherence in entropy generation was studied. Using state-of-the-art methods for calculating entanglement entropy in the high-energy limit and synthesizing various approaches for its computation, phenomenological results were obtained from analytical expressions for the number of gluons. Results were also presented for the entanglement entropy in two-body elastic scattering based on the hadronic structure given by the model-independent Lévy method, at energy values typical of the RHIC, Tevatron, and LHC. Phenomenological models of unintegrated gluon distributions were used to calculate dynamic entropy in the QCD of dense gluonic states in pp and pA collisions at high energies, comparing it with decoherence entropy. The obtained results were contrasted with other notions of entropy in the literature, and theoretical uncertainties were discussed.

Keywords: High-energy physics, entropy, entanglement.

Comunicado de Imprensa: Utilizando a entropia para compreender as partículas sub-atômicas



Pode parecer embaraçoso, mas, se voltarmos às nossas aulas do ensino básico, onde perguntas como "o que é um próton?" são frequentes, qual seria a resposta? Acredito que a mais apropriada seria algo como: uma partícula que está no núcleo de todos os átomos, possui carga elétrica positiva e é formada por três partículas ainda menores, os *quarks*. Contudo, isso depende. A possibilidade do processo de medida conhecido como *espalhamento profundo inelástico* revelou para cientistas do mundo inteiro que, quanto maior a energia em que essa medida é realizada ou quanto maior a energia transferida na colisão, mais profundamente conseguimos "enxergar". Em altas energias, o próton é compreendido como uma combinação de distribuições de conjuntos de quarks e glúons, chamados *pártons*.

Esses pártons estão confinados dentro da região do próton e não podem ser detectados "nus"; ou seja, ao final do processo de medida, o que se detecta são outras partículas, chamadas de *hádrons*, que sabemos serem formadas por combinações específicas de quarks. Isso indica que os quarks e glúons estão sempre "aprisionados" dentro dos hádrons, não podendo ser observados diretamente. Dessa forma, são partículas *confinadas*.

A investigação das estruturas internas do próton, ou de qualquer outro hádron, fica ainda mais interessante se considerarmos colisões com núcleos pesados. Sabemos que o próton e o nêutron estão dentro do átomo; portanto, é possível investigar o que ocorre com eles quando, em vez de colidirem diretamente, realizamos

uma medida com os próprios átomos. Os resultados são interessantes, tanto que revelaram um novo estado da matéria, o *plasma de quarks e glúons*. Acredita-se que este plasma tenha sido uma fase inicial do Universo primordial na teoria do *Big Bang* e, atualmente, conseguimos reproduzi-lo em laboratório.

Diversas linhas de pesquisa relacionadas à área têm contribuído para uma melhor compreensão das características desse plasma. Em especial, nele ocorre um fenômeno que intriga pesquisadores do mundo inteiro: ele termaliza muito rapidamente, e o mais intrigante é que as teorias mais apropriadas para descrever a matéria nesse regime ainda não deram uma explicação adequada para os motivos que levam a esse fenômeno.

Termalizar significa que as partículas de um sistema, como o plasma de quarks e glúons, se redistribuem de forma a alcançar um equilíbrio térmico, ou seja, uma temperatura uniforme. Nesse estado, não há mais fluxo de energia entre as partículas, pois elas já compartilham uma quantidade de energia similar. O impressionante no caso desse plasma é o tempo com que ele atinge esse equilíbrio: cerca de 3.3×10^{-24} s. Para se ter uma ideia, isso é um bilionésimo de um bilionésimo de segundo — um tempo absurdamente curto, mais rápido do que a maioria dos processos conhecidos na natureza.

Isso chamou a atenção de pesquisadores brasileiros, que tentam compreender o que faz o plasma atingir o equilíbrio tão rapidamente. Em suas pesquisas, eles tentam explicar o que está acontecendo utilizando três fenômenos distintos: *entropia*, *emaranhamento* e *decoerência*. A entropia é uma medida característica de um gás e é essencial para a compreensão da termodinâmica, ciência na qual físicos do século XIX estudavam gases em sistemas isolados dentro de pistões. Sabe-se que os bártons estão confinados dentro dos hádrons; então, grosso modo, é como se tivéssemos partículas confinadas dentro de um 'pistão' muito pequeno. Se essa hipótese for verdadeira, é possível calcular a entropia.

O emaranhamento e a decoerência são fenômenos estritamente quânticos. No primeiro, existe uma relação entre um conjunto de partículas em que, ao medirmos as propriedades de apenas uma delas, obtemos informações sobre todo ou parte do conjunto, independentemente da distância entre elas, desde que estejam emaranhadas. *Einstein* chamava esse fenômeno de "ação fantasmagórica à distância". Por outro lado, a decoerência é uma teoria que busca explicar o desaparecimento das características quânticas na matéria, grosso modo, no nosso cotidiano. Por exemplo, é comum ouvirmos falar do gato de *Schrödinger*, que pode estar vivo e morto ao mesmo tempo dentro de uma caixa, segundo os princípios da mecânica quântica. O que isso quer dizer? Os físicos, ao utilizarem a mecânica quântica, geralmente consideram que as partículas podem estar em estados excludentes ao mesmo tempo. Contudo, se a mecânica quântica descreve as partículas dessa forma, por que não observamos isso no dia a dia? Esta é justamente a pergunta que a decoerência busca responder, introduzindo outras interações na mecânica quântica, como a medida e o ambiente a que partículas minúsculas estão submetidas.

Os resultados dos pesquisadores, utilizando entropia e os fenômenos quânticos citados, foram obtidos tanto para colisões mais simples, como entre um elétron e um próton, quanto para a colisão de núcleos pesados, prevendo uma alta taxa de criação de entropia nos instantes iniciais do processo, de modo a corroborar com o fato de que o plasma termaliza muito rapidamente. Além disso, é possível comparar a entropia obtida no processo final, após o desaparecimento do plasma, medidas nos aceleradores de partículas mundo afora, como o LHC do CERN, com as entropias calculadas considerando fenômenos como o emaranhamento e a decoerência.

Para o caso da entropia de emaranhamento, propriedades matemáticas específicas de observáveis relacionados à física de altas energias, como o *geometric scaling* da escala de saturação, possibilitaram o cálculo de entropias para colisões nucleares. Foram obtidos resultados para núcleos de chumbo (*Pb*), ouro (*Au*), cálcio

(Ca) e silício (Si). Analisando os dados, espera-se que, quanto maior for a massa do núcleo envolvido na colisão, maior seja a entropia.

Analisando a entropia devida à decoerência, é possível demonstrar que, se esses fenômenos de fato ocorrem nos estágios iniciais da geração do plasma, existem casos em que até metade da entropia medida ao final do processo se deve a esse fenômeno quântico. Esses resultados foram comparados com uma abordagem entrópica baseada na teoria física da mecânica estatística de não equilíbrio, chamada entropia dinâmica. Realizando a fenomenologia adequada para estudar o comportamento dessa entropia no regime físico proposto, percebeu-se que a entropia dinâmica teria uma participação mais modesta em comparação com a entropia final, contribuindo com um pouco menos de um quarto da geração total.

Contatos para entrevistas:

Gabriel Silveira Ramos, aluno de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, silveira.ramos@ufrgs.br ; (51) 98124-9559.

Magno Valério Trindade Machado, Professor Associado, Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, magno.machado@ufrgs.br.

Fonte da Imagem: Conhecimento Científico.

Lista de artigos relacionados

- **G. S. RAMOS**, M. V. T. MACHADO, "*Investigating entanglement entropy at small x in DIS off protons and nuclei*". PHYSICAL REVIEW D, v. 101, n. 7, p. 074040, 2020.
- **G. S. RAMOS**, M. V. T. MACHADO, "*Determination of entanglement entropy in elastic scattering using the model-independent method for hadron femtoscopy*". PHYSICAL REVIEW D, v. 102, n. 3, p. 034019, 2020.
- **G. S. RAMOS**, M. V. T. MACHADO, "*Investigating the QCD dynamical entropy in high-energy hadronic collisions*". PHYSICAL REVIEW D, v. 105, n. 9, p. 094009, 2022.
- **G. S. RAMOS**, M. V. T. MACHADO, "*Investigating the partonic entanglement entropy at low Bjorken- x within Gluon saturation approach*". ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, v. 58, p. 1691-1871, 2024.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 13 |
| 2 | Noções Entrópicas Básicas | 18 |
| 2.1 | Entropia na Mecânica Estatística | 18 |
| 2.2 | Caos e o Princípio de Máxima Entropia | 24 |
| 2.3 | A Entropia de Shannon | 25 |
| 2.4 | A Relação da Entropia de Shannon com a Mecânica Estatística | 29 |
| 2.5 | A Entropia de von Neumann | 30 |
| 2.6 | Informação Mútua | 35 |
| 2.7 | Mecânica Estatística de Não Equilíbrio | 35 |
| 2.7.1 | Identidade de Jarzynski | 36 |
| 2.7.2 | Identidade de Hatano-Sasa | 37 |
| 3 | Entropia dos Estados Densos da QCD | 38 |
| 3.1 | O Modelo de Pártons | 39 |
| 3.1.1 | A Física de Saturação | 44 |
| 3.1.2 | O Colour Glass Condensate | 47 |
| 3.2 | A Geração e as Fases do QGP | 51 |
| 3.3 | As Teorias Efetivas de Cada Fase | 52 |
| 3.3.1 | Hidrodinâmica Relativística | 52 |
| 3.3.2 | Teoria Cinética | 55 |
| 3.3.3 | Alguns Resultados das Teorias Efetivas | 55 |
| 3.4 | A Entropia Dinâmica na QCD | 58 |
| 3.4.1 | Positividade da Entropia Dinâmica da QCD | 60 |
| 3.4.2 | Geometric scaling em Termos da Termodinâmica de Não-Equilíbrio | 60 |
| 3.4.3 | Entropia Dinâmica de um Estado CGC | 61 |
| 4 | Entropia de Emaranhamento | 63 |
| 4.1 | Emaranhamento Quântico | 63 |
| 4.1.1 | A Caracterização do Emaranhamento a Partir da Função de Estado | 64 |
| 4.1.2 | A Matriz Densidade Reduzida | 65 |
| 4.2 | A Entropia de Emaranhamento | 67 |
| 4.3 | Entropia de Emaranhamento no Modelo Kharzeev-Levin | 70 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.3.1 | Entropia de Emaranhamento: Modelo (1 + 1)-dimensional | 71 |
| 4.3.2 | Entropia de Emaranhamento: Modelo (3 + 1)-dimensional | 74 |
| 4.4 | Entropia de Emaranhamento de um Espalhamento Elástico | 78 |
| 4.5 | A Entropia de Emaranhamento no CGC | 82 |
| 5 | Entropia da Decoerência Quântica | 87 |
| 5.1 | Decoerência Quântica | 87 |
| 5.2 | O Formalismo Teórico da Decoerência | 90 |
| 5.2.1 | Localização Espacial | 92 |
| 5.2.2 | Efeito Zeno quântico | 93 |
| 5.3 | A Entropia de Decoerência nas Colisões de Íons Pesados | 95 |
| 6 | Resultados e Conclusão | 98 |
| 6.1 | Entropia de emaranhamento em altas energias no DIS para colisões pp e ep | 98 |
| 6.2 | Entropia de emaranhamento em altas energias no DIS para núcleos | 101 |
| 6.3 | Entropia de emaranhamento em colisões elásticas utilizando femtosopia hadrônica | 103 |
| 6.4 | A entropia dinâmica da QCD | 104 |
| 6.4.1 | As Distribuições de Probabilidades da Entropia Dinâmica da QCD | 105 |
| 6.4.2 | Resultados para Entropia Dinâmica da QCD e a Entropia de Decorência | 108 |
| 6.4.3 | Entropia Dinâmica em Colisões pA | 109 |
| 6.5 | Conclusão | 113 |
| A | Variáveis do Cone de Luz | 114 |
| B | O procedimento de <i>Gram-Schmidt</i> | 116 |
| C | Dipolos de Cor e a Equação Balitsky-Kovchegov | 118 |
| D | Femtosopia Independente de Modelo de Lévy para Espalhamentos Elásticos | 122 |
| E | Entropia de Wehrl | 124 |
| E.1 | A Entropia de <i>Wehrl</i> na QCD | 127 |
| E.2 | A Entropia de <i>Wehrl</i> para os Pártons | 130 |

Capítulo 1

Introdução

A noção de entropia foi proposta com o desenvolvimento da *Teoria Termodinâmica* no contexto das primeiras máquinas térmicas da modernidade. Seu nome foi cunhado por *Rudolf Clausius** [2], após ele ter tido contato com a obra de *Nicolas Sadi Carnot* [3], onde os primeiros desenvolvimentos sobre a impossibilidade da transformação total de energia em trabalho começaram a ficar mais claros. Assim, descobriu-se a saturação natural da energia disponível em um processo de transformação com o fim de se obter trabalho. A importância desse observável pode ser verificada na postulação da *segunda lei da termodinâmica*.

A termodinâmica é uma teoria fenomenológica de grande sucesso, tendo sido capaz de ainda no século XIX dar um conjunto de leis simples que sempre seriam verificadas em todos os processos térmicos compilados no desenvolvimento tecnológico de sua era. Contudo, as questões que rondavam o comportamento da matéria nesta época ainda eram bem nebulosas, nem a teoria atômica era tão bem estabelecida e uma explicação fundamental do comportamento da matéria verificada nas leis da termodinâmica só foi possível com o advento da *Mecânica Estatística*. Esta teoria tem como seus principais fundadores *James Clark Maxwell* e *Ludwig Eduard Boltzmann*, sendo este segundo autor o responsável por um entendimento mais aprofundado da entropia.

O *modus operandi* da Mecânica Estatística consiste em caracterizar um grupo de entidades microscópicas por meio de teorias de probabilidade, com o objetivo de explicar seu comportamento macroscópico. No período de seu desenvolvimento, a comunidade científica ainda não havia descoberto a *Mecânica Quântica* nem a *Teoria da Relatividade* e a teoria predominante para descrever a dinâmica de partículas e corpos era a *Mecânica Clássica*, que inclui as *Leis de Newton* ou, de forma equivalente, as formulações lagrangiana e hamiltoniana.

Considerando apenas partículas, a Mecânica Clássica é capaz de obter resultados consistentes a partir de condições iniciais, como a energia potencial e cinética da partícula, seus vínculos e restrições de movimento, além de sua posição e velocidade. Contudo, ao considerar, por exemplo, a água (H_2O), que em apenas uma grama existem aproximadamente 3.34×10^{22} moléculas, a utilização de ferramentas da Mecânica Clássica para resolver a Segunda Lei de Newton exige a caracterização de seis vezes o número de moléculas para sua resolução, ou seja, $6 \times 3.34 \times 10^{22}$ equações diferenciais. Mesmo que esse cálculo fosse viável, um computador imprimindo uma coordenada por microssegundo levaria cerca de 10 bilhões de anos para concluir o processo — quase a idade do universo [4]. Além disso, mesmo que fosse possível reduzir este tempo em um supercomputador que

**Clausius* queria que o novo conceito soasse como *energia* [1], em que, nas suas próprias palavras e em tradução livre, expôs que: "Mas, como considero melhores termos para magnitudes importantes das línguas antigas que possam ser adotadas inalteradas em todas as línguas modernas, proponho chamar a magnitude S de entropia do corpo, da palavra grega $\epsilon\nu\tau\rho\omicron\pi\alpha$, *transformação*. Formei intencionalmente a palavra entropia para ser o mais semelhante possível à palavra energia; pois as duas magnitudes a serem indicadas por essas palavras são tão quase aliadas a seus significados físicos, que uma certa semelhança na designação parece ser desejável."

encontrasse as soluções em alguns dias, a mente humana não teria capacidade para avaliar o resultado de um número tão grande de variáveis.

A ideia de *Boltzmann* e *Maxwell* era descrever essas informações a partir das teorias de probabilidade e estatística, obtendo, assim, valores médios. Afinal, para seres macroscópicos, como os humanos, o que realmente importa na maioria das vezes é saber se, ao respirar, haverá oxigênio disponível; se a temperatura do ar não está elevada a ponto de queimar os pulmões; e se a pressão do ar não está tão alta que possa estourar os tímpanos [5]. Dessa forma, os observáveis que realmente importam são aqueles que, na linguagem da termodinâmica, são chamados de variáveis intensivas, como pressão, temperatura, ou extensivas, como energia, volume e entropia.

A entropia está também associada à *irreversibilidade dos processos naturais*. Até então, as teorias dinâmicas não parecem distinguir entre passado e futuro. Por exemplo, em uma partida de sinuca, quando alguém dá a tacada inicial, arremessando a bola branca para dispersar as demais que estão organizadas em forma triangular, essas bolas eventualmente se movem até alcançarem o repouso. Utilizando as leis dinâmicas, é possível imaginar a cena invertida: as bolas dispersas voltando a se mover para recompor a formação triangular original e, ao final, a bola branca retornando à sua posição inicial[†]. Contudo, este cenário muda se um observador assiste à cena com óculos de visão noturna, percebendo o calor liberado nas colisões entre as bolas de bilhar. Esse calor não pode retornar e gerar trabalho sobre as bolas, da mesma forma que não se espera que as águas de um lago profundo se agitem para expulsar uma pedra de seu interior ou que os cacos de um copo quebrado no chão se reconstituam espontaneamente. Há uma ordem para o desenvolvimento dos fenômenos naturais, e essa ordem é aquela que aumenta a entropia, na chamada *seta do tempo*.

Desta perspectiva, todo momento do universo até o presente estado é único e exclusivo e caminha em uma direção determinada: a que aumenta a entropia. Disto, existem duas grandes informações que nem *Boltzmann*, *Carnot* ou qualquer outro cientista do século XIX sabiam: o Universo está expandindo aceleradamente e ele teve um início, chamado de *Big Bang*. A descoberta da expansão do universo deve-se à astronomia[‡]; a Mecânica Estatística desvelou a seta do tempo, mas, atualmente, para compreender os primeiros instantes do universo, é necessário o uso da física de partículas, em especial no estudo do *Plasma de Quarks e Glúons* (Quark Gluon Plasma, QGP). Este plasma foi descoberto em 2005 [7] a partir de colisões envolvendo íons pesados de ouro no Colisor Relativístico de Íons Pesados (Relativistic Heavy Ion Collider, RHIC), e desde então novos experimentos têm sido realizados tanto neste acelerador quanto no Grande Colisor de Hádrons (Large Hadron Collider, LHC), Experimento de Colisões de Íons Pesados de Grande Energia (A Large Ion Collider Experiment, ALICE), Espectrômetro Toroidal do LHC (AToroidal LHC ApparatuS, ATLAS) e Solenoide Compacto de Múons (Compact Muon Solenoid, CMS).

Plasma é um estado da matéria que pode ser considerado exótico nas Condições Normais de Temperatura e Pressão (CNTP). Embora ele compartilhe algumas propriedades com os gases, a alta temperatura faz com que a energia cinética dos constituintes seja globalmente maior que a sua energia de ligação, resultando em ionização. No caso de átomos e moléculas, toda a matéria se dissocia em um gás de alta temperatura fortemente ionizado. Nesse regime, a principal teoria em ação é a Teoria Eletromagnética, e a força envolvida é de natureza eletromagnética. Além disso, com o aumento da energia, surgem regimes onde os próprios constituintes do

[†]No entanto, atualmente se sabe que, em sistemas complexos, essa possibilidade é inviabilizada pela teoria do caos clássico, que mostra que pequenas incertezas nas condições iniciais podem crescer exponencialmente, tornando o sistema imprevisível e, em muitos casos, irreversível.

[‡]A descoberta da expansão do universo é atribuída ao astrônomo Edwin Hubble [6], que em 1929 observou que galáxias distantes estão se afastando da Terra e, crucialmente, que a velocidade com que elas se afastam aumenta com a distância — uma relação que ficou conhecida como Lei de Hubble.

núcleo dos átomos (núcleons) e mésons não são mais fundamentais, mas sim formados por quarks. Neste caso, a interação relevante não é mais a força eletromagnética, mas uma força de intensidade ainda maior e de alcance ínfimo: a força forte, mediada por glúons.

Se o plasma "ordinário" é raro nas CNTP, um plasma de quarks e glúons é ainda mais raro: sua temperatura crítica[§] é de aproximadamente[¶] 175 MeV ($2,0 \times 10^{12}$ K) [9, 10]. Esses valores de temperatura estão associados a energias e densidades de matéria extremamente altas. Para comparação, a temperatura da superfície solar é de aproximadamente 6000 K. Essas condições extremas não são a única característica distintiva desse estado: os quarks possuem carga elétrica fracionária (em relação à carga elementar do elétron e) e se movem em altas velocidades dentro do QGP, gerando tanto campos elétricos quanto magnéticos. Cálculos envolvendo a teoria eletrodinâmica resultam em valores de campo magnético da ordem de 10^{18} G [11] para colisões envolvendo íons de ouro, podendo ser até trinta vezes maior para a colisão de íons de chumbo. Para comparação, um *magnetar* (estrela de nêutrons caracterizada por um campo magnético extremamente forte) possui um campo magnético na faixa de 10^{15} G [12].

Desta forma, com temperaturas e campos magnéticos que podem igualar ou até superar fenômenos cosmológicos, o QGP só ocorre em reações que envolvem energias extremamente altas. Além disso, especula-se que esse estado da matéria esteve presente nos estágios iniciais do universo, segundo a teoria do *Big Bang* [13], mais precisamente, nos primeiros 20 a 30 microssegundos.

Assim, as interseções do estudo entre a física de partículas elementares e a entropia ocupam uma posição de destaque: o objeto de estudo são as entidades elementares e suas interações, ou seja, a análise da entropia será feita no regime mais fundamental da matéria, sua forma mais elementar. A partir disso, o estudo da entropia pode ser estendido fundamentalmente à sua *criação*. Portanto, o principal objetivo deste trabalho é estudar a criação de entropia, inicialmente nas colisões *ep*, para então compreender casos mais complexos, como as colisões de íons pesados em regimes ultrarrelativísticos. Essa ampliação se dá como uma continuação direta dos trabalhos realizados em [14], expandindo-os ao regime de núcleons pesados na tentativa de melhor compreender propriedades fundamentais tanto das colisões hadrônicas mais simples, até a investigação dos estágios iniciais do QGP.

Desta forma, como será investigada a entropia em colisões que envolvem a força forte, a Teoria Quântica de Campos adequada é a *Cromodinâmica Quântica* (Quantum Chromodynamics, QCD). Neste programa de pesquisa, muitas das informações sobre o comportamento e as propriedades da matéria são derivadas das medidas das partículas produzidas e de seu espectro nos estados finais das colisões de íons pesados. Essas propriedades podem ser interpretadas em termos de conceitos advindos da termodinâmica e da hidrodinâmica relativística. Nas energias disponíveis nos colisores atuais, uma das quantidades mais relevantes é a anisotropia do quadrupolo azimutal do fluxo coletivo, geralmente denominada fluxo elíptico v_2 . Uma excelente concordância dessa quantidade é obtida por meio de cálculos hidrodinâmicos, quando comparados com a anisotropia medida do fluxo da matéria produzida nas colisões nucleares. Teoricamente, é necessária a hipótese de um rápido equilíbrio térmico da matéria em uma escala temporal da ordem de 1 fm/c para que os resultados experimentais sejam corretamente descritos. Uma escala temporal tão reduzida é interpretada como problemática, já que as teorias de campo não conseguem explicar adequadamente como a matéria termaliza tão rapidamente.

[§]A temperatura crítica, T_C , é o valor de temperatura acima do qual uma substância só pode existir na forma de gás, independentemente da pressão aplicada.

[¶]Recentemente foi descoberto que alguns mésons constituídos de quarks pesados, como o quark top ou o quark charm, não se dissolvem até que a temperatura alcance cerca de 350 MeV ($4,3 \times 10^{12}$ K) [8].

A princípio, é possível distinguir cinco diferentes estágios na produção de entropia, a saber: 1) decoerência das funções de onda nucleares iniciais, 2) termalização do glasma, 3) dissociação devido à viscosidade de cisalhamento durante a expansão hidrodinâmica, 4) hadronização acompanhada por uma alta viscosidade do sistema coletivo gerado (conhecida como viscosidade de volume, ou *bulk*) e 5) congelamento hadrônico viscoso. Esses diferentes estágios levantam o questionamento sobre como a entropia é criada nas reações, pois atualmente existe apenas um entendimento parcial da contribuição de cada estágio para a entropia final [15].

Nesse contexto, uma das quantidades mais bem conhecidas nas colisões de íons pesados é a entropia final por unidade de rapidez, dS/dy [1], que pode ser determinada a partir do espectro de hádrons no estado final combinado com a informação sobre a fonte, extraída das correlações entre partículas idênticas por um método conhecido como interferometria de *Hanbury-Brown-Twiss* (HBT). Por exemplo, no RHIC, em baixas energias ($\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV), para colisões com pequena centralidade, estimou-se que em rapidez central $(dS/dy)_f = 5600 \pm 500$ [16]. Nas energias do LHC, como em $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, $(dS/dy)_f = 11335 \pm 1188$ para a mesma configuração de rapidez e centralidade [17]. Alternativamente, essa grandeza também pode ser obtida a partir da abundância de hádrons produzidos, combinada com a entropia por partícula para um gás de hádrons em equilíbrio químico à temperatura de $T_C \approx 160$ MeV, com $S/N \approx 7.25$. Para o RHIC, esse método resulta em $(dS/dy)_{ch} = 5100 \pm 200$ [16], enquanto para o LHC obtém-se $(dS/dy)_{ch} = 13373 \pm 1587$ [18].

Existem discrepâncias significativas ao se comparar os resultados obtidos pelos diferentes métodos, o que corrobora a tese de uma produção de entropia durante o congelamento hadrônico e reflete a produção de entropia decorrente do decaimento dos estados excitados das ressonâncias hadrônicas, bem como a importante contribuição da viscosidade de cisalhamento de um gás hadrônico térmico [19, 20].

Desta forma, nesta tese será investigada a produção de entropia nos estágios iniciais de colisões ep e de íons pesados. Para isso, serão abordados diferentes modelos com o objetivo de caracterizar a entropia nesses estágios iniciais de colisões na física de altas energias, restringindo-se, em geral, aos casos mais simples, como colisões ep e pp , para posteriormente adaptá-los às colisões pA . Em especial, três modelos foram investigados para caracterizar a entropia nos estágios iniciais das colisões: (I) obtenção da densidade de entropia por unidade de rapidez dS/dy , usando a chamada Entropia Dinâmica da QCD gerada pelos estados densos do meio QCD [21]; (II) caracterização de um emaranhamento quântico entre diferentes observáveis próprios da QCD [22–25] e cálculo de uma entropia de emaranhamento; e (III) produção de entropia devido à decoerência das funções de onda hadrônicas nos estágios iniciais da colisão [15].

Nos estudos sobre a entropia de emaranhamento, alguns autores sustentam que esta contribui significativamente para a geração de entropia no regime de altas energias [22]. Uma forma de avaliar essa afirmação é por meio da análise de modelos alternativos de caracterização entrópica nesse regime. Assim, alguns modelos de entropia desenvolvidos recentemente foram incluídos neste estudo, permitindo a comparação de seus comportamentos. Entre eles está a entropia semi-clássica de *Wehrl* no contexto da QCD [26]. Nesse modelo, utiliza-se quase-distribuições estatísticas para simular um espaço de fase. Outro modelo abordado é a entropia dinâmica [21], que permite a definição de uma entropia calculável a partir de distribuições gluônicas não integradas (unintegrated gluon distributions, UGD), as quais podem ser definidas com base no teorema de fatorização k em altas energias. Essa formulação da entropia em nível microscópico é estabelecida a partir de analogias com a *Mecânica Estatística de não equilíbrio*. Finalmente, a última abordagem considera os efeitos da decoerência quântica em uma noção própria de entropia [27], associando a elevada produção de entropia nos primeiros estágios das colisões à rápida decoerência envolvida no processo.

[1] A rapidez y é uma grandeza física de ordem relativística, também conhecida como *parâmetro hiperbólico*, definida como $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)$.

Desta forma, esta tese é organizada na seguinte estrutura: O Capítulo 2 introduz as noções básicas de entropia, cobrindo conceitos fundamentais da termodinâmica e mecânica estatística, como as entropias de Shannon e de von Neumann bem como as suas relações, que servem de base para o estudo subsequente. Nos Capítulos 3, 4 e 5, cada um dos fenômenos associados a produção entrópica serão estudados, a dizer, os estados densos do meio QCD, o emaranhamento quântico e a decoerência, respectivamente. O Capítulo 6 compila os principais resultados obtidos, incluindo a análise da produção de entropia por unidade de rapidez e a comparação entre os diferentes modelos estudados. Por fim, o Capítulo 7 resume as conclusões do trabalho, destacando as contribuições para o entendimento da produção de entropia em sistemas de QCD na física de altas energias.

Capítulo 2

Noções Entrópicas Básicas

O estudo da geração e caracterização da entropia na física de altas energias confronta-se com diferentes formulações desse observável. Historicamente, como já foi abordado, esse conceito surgiu na Teoria Termodinâmica, incorporando a segunda lei. Mais tarde, com o advento da Mecânica Quântica e a confirmação da hipótese atômica, novas abordagens foram desenvolvidas, como a entropia de von Neumann. Uma perspectiva mais moderna, desenvolvida por *Claude Shannon*, criou uma área de pesquisa completamente nova: a *Teoria da Informação*.

Essas noções de entropia, embora espalhadas por diferentes teorias, possuem íntimas relações, e este capítulo busca apresentar brevemente cada uma delas, demonstrando os casos em que uma noção se confunde com outra. Essa distinção é importante, pois o uso de uma ou outra varia conforme o contexto e pode causar confusão ao cientista que realiza a análise.

2.1 ENTROPIA NA MECÂNICA ESTATÍSTICA

Geralmente, devido à ampla gama de observáveis referidos como "entropia", é comum chamar a entropia calculada na Mecânica Estatística de *Entropia Termodinâmica*. Como já foi elaborado na introdução, na Mecânica Estatística, expõem-se inicialmente as características microscópicas dos elementos que compõem o sistema. Em seguida, utiliza-se ferramentas de probabilidade e estatística para obter os observáveis de interesse, como equações de estado e variáveis intensivas. Um ponto de partida é o postulado fundamental da mecânica estatística:

Em um sistema estatístico fechado, com energia fixa, todos os microestados acessíveis são igualmente prováveis.

Para compreender este postulado, é necessária a definição dos conceitos de microestado, macroestado e multiplicidade, conforme segue:

Microestado: Configuração específica de um sistema em um instante determinado.

Macroestado: Conjunto de microestados que compartilham uma mesma característica global observável.

Multiplicidade: Número de microestados que correspondem a um dado macroestado.

Por exemplo, considere o caso de três moedas de R\$ 1,00, distinguíveis e justas, ou seja, todas com igual probabilidade de, ao serem lançadas, mostrarem a face *cara* (C) ou *coroa* (K). Após lançar as moedas e observar os resultados, é possível obter configurações como KKC, CCK ou CCC. Cada uma dessas configurações individuais é um exemplo de *microestado* do sistema. Na Fig. [2.1] são ilustradas todas as possibilidades de resultados dos lançamentos.

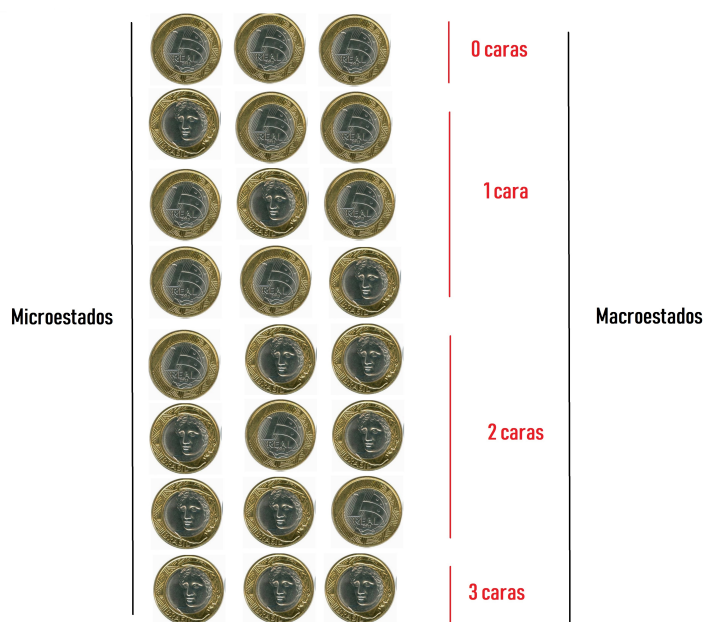


Figura 2.1: Microestados possíveis do lançamento das três moedas, organizados em seus respectivos macroestados.

Ao analisar os microestados resultantes do lançamento, observa-se uma organização em grupos: 0 caras, 1 cara, 2 caras e 3 caras. Esses grupos representam os *macroestados* do sistema, onde a característica global que define cada grupo é o número de caras. Por exemplo, no macroestado com *1 cara*, existem três configurações possíveis: CKK, KCK e KKC. No macroestado com *3 caras*, existe apenas uma configuração, CCC. O número de microestados associados a um macroestado é chamado de *multiplicidade*, denotada aqui por Ω , que depende do número de caras (variando entre 0 e 3). Assim, ao construir uma expressão matemática para a multiplicidade em função do número de caras, tem-se, por exemplo, para o macroestado com *2 caras*, $\Omega_2 = 3$.

Encerrando esta análise, percebe-se a dificuldade em obter uma expressão para a multiplicidade ao aumentar o número de moedas. Considerando um sistema estatístico composto por 50 moedas, é fácil determinar que o número de microestados para 0 ou 50 caras é apenas 1; no entanto, os demais valores exigem uma análise mais elaborada. Para resolver esse problema matemático, utiliza-se a *análise combinatória*, em que o resultado é dado por uma *combinação simples*, expressa como:

$$\Omega(N, n) = C_n^N = \frac{N!}{(N-n)!n!}. \quad (2.1.1)$$

Nesta expressão, N é o número de moedas e n é o número de caras. Definindo p como o número de resultados coroa, percebe-se que a Eq. [2.1.1] está sujeita à restrição $p + n = N$. A Figura [2.2] revela o gráfico da multiplicidade no lançamento de 50 moedas. É notável que a situação com o mesmo número de caras e coroas, 25 cada, é a que apresenta a maior multiplicidade.

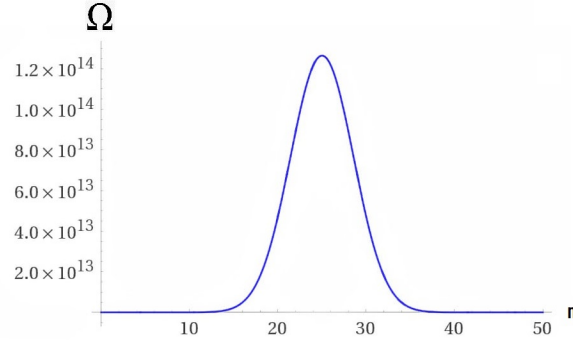


Figura 2.2: Multiplicidade dos microestados no caso do lançamento de 50 moedas. A maior multiplicidade é obtida para um número igual de 25 caras e 25 coroas.

Em um jogo onde os apostadores devem prever o resultado do lançamento das moedas, se eles souberem o postulado fundamental da mecânica estatística de equilíbrio, em que todos os microestados são igualmente prováveis, eles possuem uma certa vantagem. Isto se dá pois a multiplicidade associada a i caras, Ω_i , e o número total de microestados possíveis, Ω_T , é dado pela soma:

$$\Omega_T = \Omega_0 + \Omega_1 + \dots + \Omega_N = \sum_{i=0}^N \Omega_i. \quad (2.1.2)$$

Assim, a probabilidade de se obter i caras em um lançamento é dada por:

$$P(i) = \frac{\Omega_i}{\Omega_T}. \quad (2.1.3)$$

Logo, para maximizar as chances de ganhar no jogo descrito, deve-se apostar no estado com maior probabilidade, que neste caso é o macroestado com um número igual de caras e coroas, como ilustrado na Fig. [2.2].

Outra propriedade importante na análise de probabilidades reside na caracterização da multiplicidade de dois ou mais conjuntos que formam um sistema único. Para compreender isto, considera-se um conjunto de 6 moedas de R\$1,00 separadas em dois grupos, A e B , com três moedas cada. Ao realizar o lançamento das moedas, a multiplicidade do sistema composto, notada por Ω_{AB} , depende dos dois conjuntos A e B . A expressão matemática da multiplicidade composta é dada pelo produto das multiplicidades individuais de A e B :

$$\Omega_{AB} = \Omega_A \Omega_B. \quad (2.1.4)$$

Por exemplo, se ao realizar um lançamento, o primeiro grupo de moedas apresenta o macroestado de uma cara, com multiplicidade $\Omega_1 = 3$, uma vez que esse macroestado compreende os microestados igualmente prováveis CKK, KCK e KKC, o resultado do segundo lançamento é totalmente independente do primeiro. Portanto, ao considerar todos os possíveis resultados do segundo grupo (0 a 3 caras, com multiplicidade total $\Omega_B = 8$), o número de maneiras de obter uma cara no primeiro grupo combinado com qualquer resultado no segundo é $3 \times 8 = 24$. Quando se consideram todos os possíveis resultados para A e B , o número total de combinações possíveis é 64. Embora este exemplo seja simples, a forma de contar a multiplicidade composta é uma propriedade geral para sistemas compostos, sempre descrita pela Eq. [2.1.4].

Agora este formalismo será revestido fisicamente. Em 1907 *A. Einstein* propôs um modelo matemático com

o intuito de caracterizar o comportamento de um sólido. A fim de compreender o funcionamento do modelo proposto por *Einstein*, vale a revisão dos conceitos fundamentais associados a um *oscilador harmônico quântico unidimensional*. Resolvendo a equação de *Schrödinger* independente do tempo, para a energia potencial do oscilador, encontra-se os autovalores de energia quantizados, E_n dados por,

$$E_n = (n + 1/2)hf. \quad (2.1.5)$$

Nesta equação, h é a constante de *Planck*, f é a frequência de oscilação e n é um número inteiro. Para $n = 0$, obtém-se $E_0 = hf$, a energia de ponto zero. A unidade hf é denominada, *quantum de energia*. A figura [2.3] ilustra os valores permitidos de energia no oscilador.

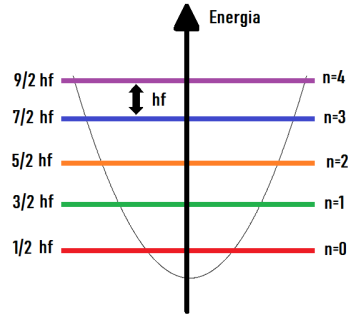


Figura 2.3: Energia em um oscilador harmônico quântico por níveis, $n = 0$ a $n = 4$.

O modelo de sólido proposto por *Einstein* [28] consiste em N osciladores harmônicos independentes, onde N representa o número de átomos presentes no sólido. Denotando a energia total como U , que resulta da soma da energia de todos os osciladores, tem-se,

$$\begin{aligned} U &= E_1 + E_2 + \dots + E_N, \\ &= \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)hf + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)hf + \dots + \left(n_N + \frac{1}{2}\right)hf, \\ &= \frac{Nhf}{2} + (n_1 + n_2 + \dots + n_N)hf. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Como o valor absoluto da energia não possui significado físico, pode-se definir como zero a soma da energia de ponto zero, $Nhf/2$, além disso, definindo o número inteiro r , como a soma dos n'_i s,

$$r = \sum_{i=1}^N n_i. \quad (2.1.7)$$

Portanto, utilizando a Eq. [2.1.6], $U = rhf$.

A fim de elucidar a distribuição energética do sólido de *Einstein*, considere um exemplo que consiste em um sólido composto por apenas três partículas e oito *quantas* de energia. O objetivo é determinar as diferentes formas possíveis de distribuir a energia entre os osciladores. A figura [2.4] mostra algumas distribuições possíveis da energia no sólido. Em II, por exemplo, o primeiro oscilador possui um *quanta*, o segundo possui três, e o terceiro os quatro restantes.

Esse problema físico remete a um clássico problema matemático, em que os *quanta* são substituídos por

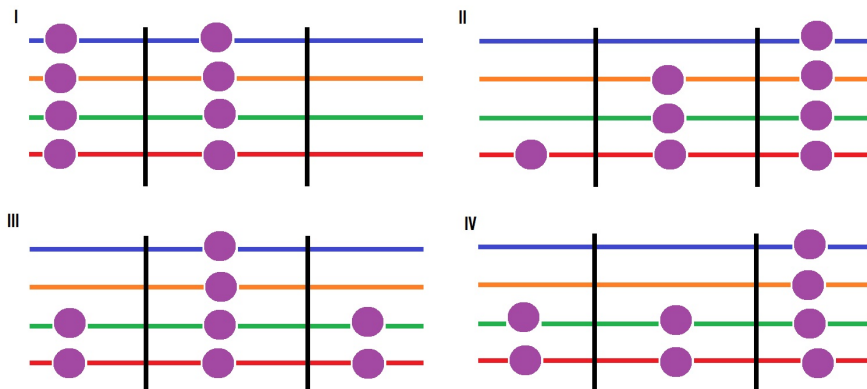


Figura 2.4: Alguns microestados possíveis na distribuição de 8 *quantas* nos 3 osciladores do sólido.

esferas e os osciladores por caixas, conforme mostrado na figura [2.5]. A questão então se transforma em determinar de quantas formas é possível distribuir sete esferas em três caixas.

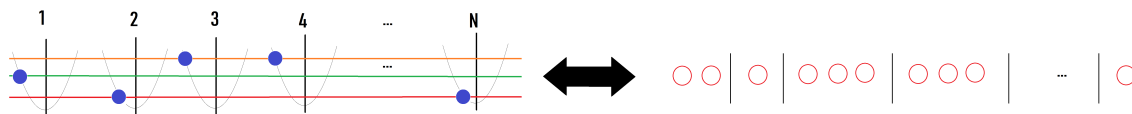


Figura 2.5: O problema da contagem de possíveis distribuições de *quantas* de energia em osciladores no sólido de *Einstein* é análogo a distribuição de esferas em caixas.

Felizmente, o problema fica ainda mais simples, pois ele se reduz a distribuir linhas entre as esferas: Sempre terá $N-1$ linhas para r esferas, ou seja, novamente observando o caso *II* da figura [2.4], é possível conceber a representação: $\cdot | \cdots | \cdots$, em que se tem 10 elementos, os quais são barras ou pontos. A diferença entre os microestados possíveis, está na determinação de quais destes elementos são barras e quais são pontos, assim, remetendo a Eq. [2.1.1], que realizava a contagem de forma semelhante, trocando $N \rightarrow N + r - 1$ e $n \rightarrow r$, obtém-se para a distribuição de r *quantas* de energia no sólido de *Einstein* formado por N osciladores,

$$\Omega(N, r) = \frac{(N + r - 1)!}{(N - 1)!r!} \approx \frac{(N + r)!}{N!r!}. \quad (2.1.8)$$

Agora, serão considerados dois sólidos idênticos, A e B com $N_A = N_B = N$, isolados do universo, que são livres para trocar energia entre si por um longo período de tempo. A energia total do sistema, E_T é a simples soma da energia do sistema A , E_A , com a energia do sistema B , E_B , tal que $E_T = E_A + E_B$. Portanto, a energia total será $E_T = (r_A + r_B)hf$. Além disso, a interação entre os sólidos deve respeitar a conservação da energia, uma vez que não existem fontes externas no sistema isolado do universo. Definindo K como um número constante, a conservação da energia exige a restrição $r_A + r_B = K$. Assim, um sistema com 9 osciladores e 13

quanta de energia estabelece os resultados expostos na tabela [2.1]. Para uma análise mais rigorosa, seria

Tabela 2.1: Multiplicidade associada a um macroestado descrito por r_A , r_B respeitando a conservação da energia.

| r_A | Ω_A | r_B | Ω_B | Ω_{AB} |
|-------|------------|-------|------------|--------------------|
| 0 | 1 | 13 | 203490 | 203490 |
| 1 | 9 | 12 | 125970 | 1133730 |
| 2 | 45 | 11 | 75582 | $3,4 \cdot 10^6$ |
| 3 | 165 | 10 | 43758 | $7,22 \cdot 10^6$ |
| 4 | 495 | 9 | 24310 | $12,03 \cdot 10^6$ |
| 5 | 1287 | 8 | 12870 | $16,56 \cdot 10^6$ |
| 6 | 3003 | 7 | 6435 | $19,32 \cdot 10^6$ |
| 7 | 6435 | 6 | 3003 | $19,32 \cdot 10^6$ |
| 8 | 12870 | 5 | 1287 | $16,56 \cdot 10^6$ |
| 9 | 24310 | 4 | 495 | $12,03 \cdot 10^6$ |
| 10 | 43758 | 3 | 165 | $7,22 \cdot 10^6$ |
| 11 | 75582 | 2 | 45 | $3,4 \cdot 10^6$ |
| 12 | 125970 | 1 | 9 | 1133730 |
| 13 | 203490 | 0 | 1 | 203490 |

necessário realizar cálculos para N na ordem de 10^{23} partículas em um nível mais realista do problema, pois este algarismo é da ordem do número de *Avogadro*, que representa a quantidade de átomos em um mol de solução ou amostra. Contudo, ele é elucidativo para as características da entropia que serão abordadas nesta tese.

Por fim, na lápide do túmulo de Boltzmann, em Viena, está inscrita a equação de sua autoria que estabelece o vínculo entre a entropia e o número de multiplicidade, dada por:

$$S = k_B \ln \Omega. \quad (2.1.9)$$

Sendo k_B a constante de Boltzmann. A fórmula de Stirling facilita o cálculo do logaritmo de fatoriais, sendo ela dada por:

$$\ln n! \approx n \ln n - n. \quad (2.1.10)$$

Aplicando essa aproximação para o caso do sólido de Einstein, substituindo a multiplicidade [2.1.8] na expressão da entropia de Boltzmann e utilizando o fato de que $U = r h f = r \omega \hbar$, sendo ω a frequência angular e \hbar a constante de Planck reduzida, se tem:

$$S(U, N) \approx k_B \left[N \ln \left(1 + \frac{U}{N \hbar \omega} \right) + \frac{U}{\hbar \omega} \ln \left(\frac{N \hbar \omega}{U} + 1 \right) \right]. \quad (2.1.11)$$

A temperatura T do sistema está relacionada à entropia S pela expressão

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right). \quad (2.1.12)$$

Portanto:

$$\frac{1}{T} \approx \frac{k_B}{\hbar \omega} \ln \left(\frac{N \hbar \omega}{U} + 1 \right), \quad \therefore \quad U = \frac{N \omega \hbar}{e^{\omega \hbar / k_B T} - 1} \quad (2.1.13)$$

Assim, a entropia no sólido de Einstein unidimensional, como função da temperatura e do número de partículas

(osciladores), N , é*:

$$S(N, T) = Nk_B \left[\frac{\omega \hbar}{k_B T} \frac{e^{-\frac{\omega \hbar}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\omega \hbar}{k_B T}}} - \ln \left(1 - e^{-\frac{\omega \hbar}{k_B T}} \right) \right]. \quad (2.1.14)$$

Este exemplo tradicional é suficiente para estabelecer as características gerais da entropia com as demais noções que serão elaboradas neste trabalho.

2.2 CAOS E O PRINCÍPIO DE MÁXIMA ENTROPIA

Agora serão abordadas diferentes características da entropia relacionadas ao desenvolvimento realizado na seção anterior. Primeiramente, destaca-se o conceito de caos. No caso do lançamento de 50 moedas, percebe-se que configurações com todas as moedas mostrando cara ou todas mostrando coroa, constituem casos particulares. Estes estados são muito específicos, bem como aquele em que todos os 13 *quanta* de energia se concentrem em um único oscilador no sólido de Einstein. Embora essas configurações sejam possíveis, elas são extremamente improváveis e em um conjunto de partículas ou moedas na ordem de um mol, elas se tornam virtualmente impossíveis. Assim, configurações que se afastam do equilíbrio tendem a ser menos prováveis.

Brian Greene, em sua obra de divulgação científica *Até o fim do tempo* [5], apresenta um excelente exemplo para ilustrar essa tendência ao aumento do caos: é possível imaginar um quarto organizado, com objetos posicionados de forma mais ou menos ordenada, sem poeira no chão e com a cama arrumada. Esse é um estado específico e particular, assim como o lançamento de 50 moedas que resulta em 49 caras. Heuristicamente, esses estados podem ser comparados aos estados de baixa entropia. Com o passar do tempo e devido a diversas interações, esse estado tende a se transformar em um de maior entropia: a poeira se acumula, roupas se espalham pelo chão, e a cama requer a troca dos lençóis. Esse estado inicial de baixa entropia é difícil de manter, razão pela qual é necessário limpar e organizar o quarto regularmente. Existe, portanto, uma tendência para a ‘desordem’, pois os sistemas evoluem naturalmente para estados de maior entropia ou caos (Fig. [2.6]).

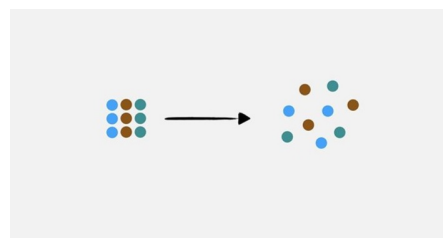


Figura 2.6: Representação pictórica do aumento do caos, em que um sistema inicialmente organizado evolui para um desorganizado. Reproduzido de [29].

O engenheiro dedicado busca desenvolver um motor que consiga render o máximo de trabalho possível com a menor quantidade de energia. Contudo, uma forma de enunciar a segunda lei da termodinâmica é afirmar que não existem máquinas térmicas perfeitas; isto é, em um processo natural — como a energia liberada na queima da gasolina de um automóvel — além do trabalho que faz as rodas girarem, também será liberado calor, inútil para a realização de trabalho. Na teoria termodinâmica, existem objetos matemáticos, chamados potenciais, que descrevem a energia disponível para realizar trabalho em diferentes condições. Nesta discussão, nos processos isotérmicos, destaca-se o potencial de *Helmholtz*, F :

$$F = U - TS, \quad (2.2.1)$$

onde U é a energia interna (no caso do automóvel, a energia liberada com a queima de gasolina), T é a

*Para mais detalhes, verificar a referência [4].

temperatura e S é a entropia. O termo TS , subtraído da energia interna, indica quanto da energia pode ser aproveitada para trabalho, sendo este um dos motivos pelos quais o potencial de Helmholtz também é chamado de energia livre. Assim, o potencial de Helmholtz descreve como, mesmo em processos que buscam organização local, como no exemplo do quarto organizado, a energia disponível para realizar trabalho tende a diminuir com o tempo devido à dissipação. Em termos práticos, isso significa que manter um estado de baixa entropia requer uma constante entrada de trabalho externo para compensar as inevitáveis perdas, reforçando a tendência natural para estados de maior entropia e maior desordem.

Por fim, a análise da Fig. [2.2], que mostra que a multiplicidade máxima para o lançamento de 50 moedas ocorre com 25 caras e 25 coroas, e da Tabela [2.1], que indica que uma divisão equilibrada dos *quanta de energia* também apresenta a maior multiplicidade, revela que o estado de equilíbrio é um estado de *entropia máxima*. Analisando a expressão da entropia proposta por Boltzmann na Eq. [2.1.9] e os exemplos até aqui abordados, nota-se que o estado mais provável é justamente aquele que faz o sistema equilibrar e aumentar a entropia, alcançando a maior multiplicidade possível Ω , pois, neste caso, $S \propto \ln \Omega$. Essa propriedade é chamada de *Princípio da Máxima Entropia* e, em seguida, serão apresentadas as entropias de Shannon e de von Neumann, que, assim como a entropia termodinâmica, também são compatíveis com este princípio.

2.3 A ENTROPIA DE SHANNON

Para compreender a entropia de Shannon, é necessária uma breve introdução aos conceitos básicos da teoria da informação. Inicialmente, são considerados dois eventos A , com uma probabilidade p de ocorrer, e B , com uma probabilidade q . Na teoria da informação, associa-se uma quantidade de informação a cada evento, a partir de uma função matemática chamada de função informação $I(x)$, que mede a quantidade de informação relacionada a um evento X com probabilidade x .

Se a probabilidade de ocorrência do evento A for menor do que a do evento B , então a informação associada ao evento A , $I(p)$, deve ser maior que a do evento B , $I(q)$ [30]. Assim:

$$\text{Se } p < q, \text{ então } I(p) > I(q). \quad (2.3.1)$$

A teoria da informação parte da interpretação de que eventos menos prováveis carregam mais informação. Por exemplo, um boletim meteorológico que informa “amanhã fará sol em pleno verão no Rio de Janeiro” contém uma previsão que representa um evento muito provável, já que dias ensolarados são comuns durante o verão na cidade. Essa informação não causa surpresa e não traz muita “novidade” — ou seja, carrega pouca informação, pois o evento era esperado. Agora, se o boletim prever “neve no Rio de Janeiro amanhã”, isso representaria um evento extremamente improvável, considerando o clima tropical da cidade. Caso essa previsão fosse verdadeira, causaria enorme surpresa. Esse tipo de informação seria muito mais “densa”, pois a ocorrência de um evento tão inesperado desafia as expectativas comuns.

Agora, postula-se que a ocorrência conjunta dos dois eventos independentes A e B deve resultar em uma informação aditiva. Portanto:

$$I(pq) = I(p) + I(q). \quad (2.3.2)$$

Essa é a exigência da aditividade informativa. Se as Eqs. [2.3.1] e [2.3.2] forem satisfeitas, e se a informação for

definida como uma função com o domínio $(0, 1]$, a única solução possível é:

$$I(x) = -\log_b(x), \quad (2.3.3)$$

com $b > 1$. Geralmente, na física, utiliza-se $b = e$, chamada de base natural da teoria da informação, ou $b = 2$, chamada de base dos *bits*.

Por exemplo, o lançamento de três moedas justas que resulte em CKC é um evento com probabilidade $1/2^3$, já que cada moeda tem probabilidade $1/2$ de cair em qualquer dos lados. A quantidade de informação deste resultado é:

$$I(2^{-3}) = -\log\left(\frac{1}{2^3}\right) = 3 \log 2. \quad (2.3.4)$$

Isso equivale a 3 unidades chamadas *bits* (abreviação de “binary digits”), pois a informação de cada moeda traz $\log 2$ de informação. Em outras palavras, ao receber a informação de um evento que ocorre com probabilidade $1/8$, o observador verifica “3 bits” de informação.

Cada unidade de informação mede a quantidade de “surpresa” ou “novidade” associada a um evento, com base na fórmula geral: $I(p) = -\log p$. Embora a unidade mais comum seja o bit, que representa a informação associada a um evento com probabilidade $1/2$, existem várias outras unidades de informação, dependendo da base do logaritmo e da probabilidade do evento.

| Probabilidade do Evento | Unidade de Informação | Equivalente em Bits |
|-------------------------|-----------------------|---------------------------|
| $1/2$ | 1 bit | 1 bit |
| $1/e$ | 1 nat | ≈ 1.44 bits |
| $1/3$ | 1 trit | ≈ 1.58 bits |
| $1/4$ | 1 crumb | 2 bits |
| $1/10$ | 1 hartley | ≈ 3.32 bits |
| $1/16$ | 1 nibble | 4 bits |
| $1/256$ | 1 byte | 8 bits |
| $1/8192$ | 1 kilobyte | 8192 bits (ou 1024 bytes) |

Tabela 2.2: Unidades de informação e suas equivalências em bits. Adaptada de [30].

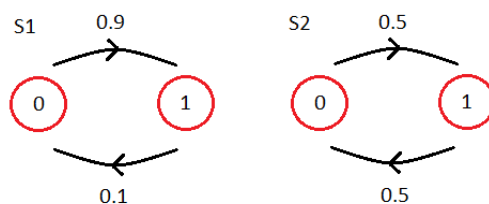


Figura 2.7: Sistemas S1 (esquerda) e S2 (direita)

Nascida na termodinâmica e verificada como um conceito emergente ao relacionar o tratamento microscópico ao macroscópico na mecânica estatística, a entropia aparece novamente como um conceito fundamental com os trabalhos de *Claude Shannon* [31]. Esta formulação associa a entropia como uma característica intrínseca da informação, a partir da entropia de Shannon:

$$H = -\sum_{i=1}^n p_i \log_b p_i = \langle -\log_b p_i \rangle, \quad (2.3.5)$$

Na teoria da informação, a entropia é uma medida de incerteza. Por exemplo, considerando dois sistemas binários S1 e S2 (Fig. [2.7]), com os estados 0 e 1. Em S1, o sistema tem probabilidade $p_1 = 0.9$ de 0 se tornar 1, e $p_2 = 0.1$ de 1 se tornar 0. Desta forma,

$$H_{S1} = - \left(\frac{9}{10} \log_2 \frac{9}{10} + \frac{1}{10} \log_2 \frac{1}{10} \right) \approx 0.47. \quad (2.3.6)$$

Por outro lado, em S2 há apenas uma possibilidade com probabilidade $p_1 = 0.5$ de 0 se tornar 1, de forma que $p_2 = 0.5$, assim,

$$H_{S2} = - \left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} \right) = 1. \quad (2.3.7)$$

Este exemplo revela que S1 é menos *incerto* que S2, havendo uma tendência em sua construção.

Com a atual revolução digital, a teoria da informação e seu conceito central, a entropia de *Shannon*, vive seu apogeu, mesmo tendo sido publicada em 1948. Naquela época, o matemático americano não sabia muito bem como chamar sua recente descoberta e, em uma conversa com *von Neumann*, recebeu argumentos convincentes [32].

“My greatest concern was what to call it. I thought of calling it ‘information,’ but the word was overly used, so I decided to call it ‘uncertainty’. When I discussed it with John von Neumann, he had a better idea. Von Neumann told me, ‘You should call it entropy, for two reasons. In the first place your uncertainty function has been used in statistical mechanics under that name, so it already has a name. In the second place, and more important, no one really knows what entropy really is, so in a debate you will always have the advantage. [Minha maior preocupação era como chamá-la. Pensei em chamar de ‘informação’, mas a palavra era muito usada, então decidi chamá-la de ‘incerteza’. Quando discuti isso com John von Neumann, ele teve uma ideia melhor. Von Neumann me disse: ‘Você deveria chamar de entropia, por duas razões. Em primeiro lugar, sua função de incerteza foi usada em mecânica estatística com esse nome, então ela já tem um nome. Em segundo lugar, e mais importante, ninguém sabe realmente o que é entropia, então em um debate você sempre terá a vantagem.]”

No contexto da teoria da informação, a noção de aditividade assume um papel central. Entretanto, outros tipos de entropias foram propostos para capturar comportamentos, por exemplo, não aditivos, relevantes em sistemas complexos e interdependentes, como aqueles observados em contextos de Mecânica Estatística Não-Extensiva. Nesse sentido, as entropias de Tsallis e Rényi são exemplos de noções entrópicas que surgem como generalizações da entropia de Shannon.

Inicialmente, a entropia de Tsallis é definida por [33]:

$$S_q = k_B \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_i p_i^q \right), \quad (2.3.8)$$

onde p_i são as probabilidades dos eventos e q é um parâmetro real que controla o grau de não aditividade.

Essa noção entrópica está relacionada com a Mecânica Estatística Não-Extensiva. Em um sistema extensivo, as propriedades macroscópicas, como a entropia, são proporcionais ao tamanho do sistema. Em outras palavras, quando dois sistemas independentes são combinados, a entropia total é simplesmente a soma das entropias individuais. No entanto, para sistemas não-extensivos (como aqueles encontrados em redes complexas,

sistemas biológicos e sistemas astrofísicos), essa aditividade não se aplica. Esses sistemas frequentemente exibem correlações de longo alcance, flutuações de larga escala, e uma dinâmica muito mais complexa do que a descrita pela mecânica estatística tradicional. Matematicamente, extensividade pode ser definida como [34]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|S(N)|}{N} < \infty. \quad (2.3.9)$$

Assim, um sistema chamado de extensivo apresenta um comportamento assintótico com o número de subsistemas N , de forma que exista um fator de proporcionalidade finito entre $|S(N)|$ e N . Portanto, a aditividade em relação a uma dada lei de composição implica extensividade.

A partir da regra de L'Hôpital, quando $q = 1$, a entropia de Tsallis recupera a entropia de Shannon:

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = k_B \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dq} (1 - \sum_i p_i^q)}{\frac{d}{dq} (q - 1)} = -k_B \sum_i p_i^q \ln p_i \Big|_{q=1} = -k_B \sum_i p_i \ln p_i = k_B H. \quad (2.3.10)$$

Porém, para $q \neq 1$, a entropia de Tsallis obedece a uma propriedade chamada de *pseudo-aditividade*:

$$\frac{S_q(A+B)}{k_B} = \frac{S_q(A)}{k_B} + \frac{S_q(B)}{k_B} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k_B} \frac{S_q(B)}{k_B}, \quad (2.3.11)$$

onde A e B representam dois sistemas independentes. O termo adicional depende do parâmetro q e reflete a correlação entre eventos, característica importante em sistemas complexos e interdependentes.

A entropia de Rényi [35] é uma generalização da entropia de Shannon, desenvolvida para medir a diversidade, a incerteza, e a dispersão de sistemas probabilísticos em que é necessário dar um peso maior ou menor a eventos com probabilidades muito baixas ou muito altas. Ela geralmente é utilizada em contextos como o dos eventos raros ou altamente prováveis. Na prática, a entropia de Rényi permite ajustar a sensibilidade da medida de incerteza ao variar o parâmetro α , controlando o peso das diferentes probabilidades.

Matematicamente, a entropia de Rényi é dada por:

$$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\sum_i p_i^\alpha \right), \quad (2.3.12)$$

onde α é um parâmetro real e controla a "focalização" da entropia em eventos de alta ou baixa probabilidade. Quando $\alpha > 1$, a entropia de Rényi é mais sensível a eventos com maiores probabilidades, enquanto valores de $\alpha < 1$ dão mais peso a eventos com menores probabilidades. No limite $\alpha \rightarrow 1$, a entropia de Rényi recupera a entropia de Shannon, ou seja, assume a forma de uma medida de incerteza clássica média sobre o sistema:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} S_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{d\alpha} [\log(\sum_i p_i^\alpha)]}{\frac{d}{d\alpha} (1-\alpha)} = -\sum_i p_i \ln p_i = H. \quad (2.3.13)$$

As entropias de Tsallis e Rényi introduzem uma flexibilidade útil ao conceito de entropia, permitindo que sistemas complexos com interdependência entre eventos sejam descritos por uma medida de informação alternativa a proposta por Shannon.

2.4 A RELAÇÃO DA ENTROPIA DE SHANNON COM A MECÂNICA ESTATÍSTICA

Nesta seção, a entropia de Shannon é avaliada utilizando o princípio de máxima entropia. Para isso, a maximização segue o procedimento dos multiplicadores de Lagrange. Inicialmente, considera-se o caso em que a distribuição de probabilidades deve estar normalizada:

$$\sum_{n=1}^N p_n = 1. \quad (2.4.1)$$

Dessa forma, o funcional a ser maximizado é dado por:

$$\mathcal{L} = - \sum_{n=1}^N p_n \ln p_n - \lambda \left(\sum_{n=1}^N p_n - 1 \right). \quad (2.4.2)$$

Maximizando \mathcal{L} em relação a p_n :

$$-\ln p_n - 1 - \lambda = 0, \quad \therefore \quad p_n = e^{-\lambda-1}. \quad (2.4.3)$$

Usando a condição de normalização, encontra-se que $p_n = 1/N$. Este é o *ensemble* microcanônico, no qual, para um sistema estatístico fechado com energia fixa, todos os microestados acessíveis são igualmente prováveis.

Para o ensemble canônico, o sistema é considerado em contato térmico com um reservatório, de forma que sua energia total não é fixa, mas a energia média $\langle E \rangle$ deve permanecer constante. Assim, além da normalização da distribuição de probabilidades, também se tem a seguinte restrição:

$$\sum_{n=1}^N p_n E_n = \langle E \rangle, \quad (2.4.4)$$

onde E_n representa a energia do estado n do sistema.

O funcional a ser maximizado, com as duas restrições, é dado por:

$$\mathcal{L} = - \sum_{n=1}^N p_n \ln p_n - \lambda \left(\sum_{n=1}^N p_n - 1 \right) - \beta \left(\sum_{n=1}^N p_n E_n - \langle E \rangle \right), \quad (2.4.5)$$

de forma que agora λ e β são multiplicadores de Lagrange associados às restrições de normalização e de energia média, respectivamente.

Para maximizar \mathcal{L} em relação a p_n , se toma a derivada parcial de \mathcal{L} com respeito a p_n , de forma que:

$$\ln p_n = \lambda - 1 - \beta E_n, \quad \therefore \quad p_n = e^{-\lambda-1} e^{-\beta E_n}. \quad (2.4.6)$$

Utilizando a condição de normalização, determina-se a constante $Z = e^{-\lambda-1}$, conhecida como função de partição canônica:

$$Z = \sum_{n=1}^N e^{-\beta E_n}, \quad (2.4.7)$$

sendo, nesta equação $\beta = 1/k_B T$, de modo que a distribuição de probabilidade pode ser expressa como:

$$p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}. \quad (2.4.8)$$

Esta é a conhecida *distribuição de Boltzmann*, que descreve o ensemble canônico, onde a energia média do sistema é mantida constante em contato com um reservatório térmico.

Esse procedimento de maximização da entropia para determinar as distribuições de probabilidade dos ensembles estatísticos foi introduzido por Edwin T. Jaynes [36] e, seguindo esta metodologia, também é possível mostrar a relação da entropia de Shannon com *ensemble Gram-canônico*. Além disso, a fórmula de Shannon no limite contínuo se torna a expressão da entropia de Gibbs [37]. No limite contínuo, onde as variáveis do sistema formam um espaço contínuo de estados, substituindo a soma por uma integral e a probabilidade p_i pela densidade de probabilidade $\rho(x)$, onde x representa as variáveis de estado contínuas do sistema, a entropia se torna:

$$S = - \int \rho(x) \ln \rho(x) dx. \quad (2.4.9)$$

Esta expressão é conhecida na Mecânica Estatística como *entropia de Boltzmann-Gibbs*. Ela mede a incerteza ou dispersão da distribuição de densidade de probabilidade $\rho(x)$ em um espaço de estados contínuos. Portanto, a partir da aplicação do princípio da máxima entropia na expressão de Shannon é possível demonstrar um vínculo entre a Teoria de Informação e a Mecânica Estatística.

2.5 A ENTROPIA DE VON NEUMANN

No âmbito da Mecânica Quântica a noção de entropia adequada é devida a John von Neumann. Aqui, os valores médios referem-se ao conceito de média de *ensemble*, ou seja, sistemas *a priori* identicamente preparados. Após a realização da medida, obtém-se uma caracterização estatística dos constituintes do estado final total, composto por todos os subsistemas onde a medição foi realizada. Por exemplo, após a realização de um experimento *Stern-Gerlach* [38], sabe-se que o estado físico do feixe de átomos de prata após a interação com o campo magnético externo possui uma população de 50% dos seus átomos colapsados em um estado de spin para cima e a parcela restante, também composta por 50%, possui spin para baixo. Entretanto, ao sair do forno, ou, em outras palavras, antes da medição, não se pode caracterizar os estados físicos dos átomos que constituem o feixe: o spin individual de cada átomo pode estar apontando para qualquer direção; em termos gerais, o estado físico é *randômico*.

Para o caso dos sistemas físicos onde não ocorreu uma medição, sabe-se que eles são compostos por um número finito de constituintes, de forma que é possível atribuir um peso à sua população relativa de um dado estado particular, p_m , com $1 \leq m \leq N$ associado ao m -ésimo estado $|m\rangle$ e N é o número de indivíduos no *ensemble*, ou o número de sistemas identicamente preparados. Nesse caso, deve-se tomar cuidado para não confundir o número de indivíduos que compõem o sistema com a dimensão do espaço gerado pelos autovetores de um dado observável: o parâmetro N geralmente supera a dimensão do autoespaço de um dado operador. Tratando-se de uma população fracionária, a soma dos pesos deve ser a unidade, semelhante à eq. [2.4.1].

Além disso, não se tem nenhuma informação geométrica dos kets antes da medida: eles podem muito bem ser ortogonais entre si ou não; podem ser autovetores de um operador em comum, ou podem não ser, e nem é determinado se os operadores que os representam são compatíveis ou não. Sendo assim, é possível inferir a natureza estatística deste conjunto: antes de realizada a medida em um sistema composto pela população de estados físicos e considerando que exista mais de um p_m diferente de zero, diz-se que o sistema configura um *ensemble misto*. Agora, após a realização de uma medida, é possível analisar em sua totalidade a parte da população fracionária caracterizada por um certo estado físico em comum, ou seja, a coletânea de sistemas

físicos tais quais são representadas por um único ket. Para este último caso, dá-se o nome de *ensemble puro*. Ou seja, um *ensemble* misto é composto por uma coleção de *ensembles* puros.

Objetivado o interesse na obtenção da medida de algum observável, este só será possibilitado a partir de uma média sobre *ensembles*. Considerando, por exemplo, o observável \hat{G} , que na construção formal da mecânica quântica é um operador, obtém-se para sua média $\langle G \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle G \rangle &= \sum_{m=1}^N p_m \langle m | \hat{G} | m \rangle = \sum_{m=1}^N p_m \langle m | \hat{G} \mathbb{1} | m \rangle \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_g p_m \langle m | \hat{G} | g \rangle \langle g | m \rangle.\end{aligned}\tag{2.5.1}$$

Valendo a equação de autovalores $\hat{G} | g \rangle = g | g \rangle$, obtém-se para $\langle G \rangle$,

$$\langle G \rangle = \sum_{m=1}^N \sum_g p_m |\langle g | m \rangle|^2 g.\tag{2.5.2}$$

A partir deste resultado, deve-se observar a construção de duas estatísticas independentes na obtenção de uma única medida: os pesos populacionais de cada estado físico compõem uma abordagem estatística que acaba mediando a média de *ensemble* das previsões quânticas, que também constituem um escopo estatístico em si.

O formalismo quântico permite quantas mudanças de base forem necessárias, utilizando para isso a relação de completude dada por:

$$\sum_i |i\rangle \langle i| = \mathbb{1},\tag{2.5.3}$$

sendo $\mathbb{1}$ o operador identidade, possibilitando escrever trocas de base de uma forma bem compacta. Dessa forma, é possível avaliar o valor esperado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\langle G \rangle &= \sum_{m=1}^N p_m \langle m | \mathbb{1} \hat{G} \mathbb{1} | m \rangle = \sum_{m=1}^N p_m \sum_i \sum_j \langle m | i \rangle \langle i | \hat{G} | j \rangle \langle j | m \rangle \\ &= \sum_i \sum_j \left(\sum_{m=1}^N p_m \langle j | m \rangle \langle m | i \rangle \right) \langle i | \hat{G} | j \rangle.\end{aligned}\tag{2.5.4}$$

O termo destacado entre parênteses é definido como o elemento de matriz de um operador hermitiano, denominado *operador densidade* $\hat{\rho}$,

$$\rho_{ij} \equiv \langle i | \hat{\rho} | j \rangle = \sum_{m=0}^N p_m \langle i | m \rangle \langle m | j \rangle.\tag{2.5.5}$$

Conciliando a representação matricial da mecânica quântica com este operador, define-se a expressão geral do operador densidade:

$$\hat{\rho} \equiv \sum_{m=0}^N p_m |m\rangle \langle m|.\tag{2.5.6}$$

Considerando esta construção, a expressão para $\langle G \rangle$ toma uma forma mais compacta,

$$\begin{aligned}\langle G \rangle &= \sum_i \sum_j \langle j | \hat{\rho} | i \rangle \langle i | \hat{G} | j \rangle = \sum_j \langle j | \hat{\rho} \underbrace{\sum_i | i \rangle \langle i |}_{\mathbb{I}} | j \rangle \\ &= \sum_j \langle j | \hat{\rho} \hat{G} | j \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{G}].\end{aligned}\tag{2.5.7}$$

onde a operação $\text{Tr}[\hat{\rho} \hat{G}]$ corresponde ao traço do operador resultante do cálculo de $\hat{\rho} \hat{G}$, ficando assim explícito o poder generalizado desta construção: *o traço é independente da representação.*

Resumidamente, encontra-se que a média sobre *ensemble* de um observável \hat{G} é dada por,

$$\langle G \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{G}].\tag{2.5.8}$$

Agora, analisando o traço do operador identidade separadamente,

$$\begin{aligned}\text{Tr}[\hat{\rho}] &= \sum_j \sum_{m=0}^N p_m \langle j | m \rangle \langle m | j \rangle = \sum_{m=0}^N p_m \langle m | \underbrace{\left(\sum_j | j \rangle \langle j | \right)}_{\mathbb{I}} | m \rangle \\ &= \sum_{m=0}^N p_m \underbrace{\langle m | m \rangle}_1 = 1,\end{aligned}\tag{2.5.9}$$

para um *ensemble* puro, onde a população relativa torna-se total, com $p_1 = 1$, tem-se a matriz densidade $\hat{\rho}_P$,

$$\hat{\rho}_P = \sum_{m=1}^N p_m | m \rangle \langle m | = | m \rangle \langle m |.\tag{2.5.10}$$

Daí,

$$\hat{\rho}_P \hat{\rho}_P = \hat{\rho}_P^2 = | m \rangle \underbrace{\langle m | m \rangle}_1 \langle m | = | m \rangle \langle m | = \hat{\rho}_P,\tag{2.5.11}$$

ou seja, $\hat{\rho}_P$ é um projetor,

$$\hat{\rho}_P^2 = \hat{\rho}_P.\tag{2.5.12}$$

Somente para um estado puro então,

$$\text{Tr}[\hat{\rho}_P^2] = 1.\tag{2.5.13}$$

Logo, os autovalores associados ao operador densidade de *ensembles* puros devem ser sempre zero ou um, de forma que, quando se diagonaliza a matriz densidade $\hat{\rho}_P$, espera-se encontrar um objeto matemático na forma de

$$\hat{\rho}_P \doteq \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Em contrapartida, um *ensemble* totalmente misto possui a matriz densidade $\hat{\rho}_M$ com estrutura

$$\hat{\rho}_M \doteq \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \mathbb{I}_N,$$

sendo \mathbb{I}_N a matriz identidade N -dimensional. Impõem-se então duas matrizes diagonais, sujeitas à mesma condição de normalização, que representam objetos físicos diametralmente opostos. É conveniente, então, a definição de uma grandeza que distinga as qualidades físicas intrínsecas a cada objeto. Neste espírito, define-se a *entropia de von Neumann* [39],

$$S_{vN} \equiv -k_B \text{Tr}[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}]. \quad (2.5.14)$$

Esta entropia mede o desvio do sistema em relação ao estado puro, a quantidade de informação degradada, mais uma vez, o caos. Para aprofundar a análise sobre a entropia de von Neumann, existem duas características fundamentais: (1) que a entropia de von Neumann de um estado quântico puro é zero e (2) que, para estados mistos descritos por probabilidades clássicas, a entropia de von Neumann recupera a forma da entropia de Shannon.

Para um estado puro, ao diagonalizar $\hat{\rho}_P$, os autovalores associados serão 1 para o estado ocupado $|\psi\rangle$ e 0 para todos os outros estados. Assim:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_P \ln \hat{\rho}_P) = 1 \cdot \ln(1) + 0 \cdot \ln(0) = 0. \quad (2.5.15)$$

Portanto, a entropia de von Neumann de um estado quântico puro é zero. Essa característica reflete o fato de que um estado puro possui máxima informação sobre o sistema, sem incerteza associada. Para um estado misto, o operador densidade é dado por uma combinação de estados puros com probabilidades associadas, p_i , que são as probabilidades de encontrar o sistema no estado $|\psi_i\rangle$, com $\sum_i p_i = 1$. Diagonalizando $\hat{\rho}$, se obtém uma matriz diagonal com os autovalores p_i . Assim, a expressão para S_{vN} se torna:

$$S_{vN} = -k_B \sum_i p_i \ln p_i = k_B H. \quad (2.5.16)$$

Ou seja, é exatamente a forma da entropia de Shannon na base natural multiplicada por k_B . Essa equivalência mostra que a entropia de von Neumann generaliza a entropia de Shannon para o contexto quântico, recuperando-a em situações em que o sistema está descrito por probabilidades clássicas.

Além disso, na Mecânica Quântica, a entropia de Rényi é dada por [40]:

$$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \ln \text{Tr}[\hat{\rho}^\alpha]. \quad (2.5.17)$$

Neste caso, para $\alpha \rightarrow 1$, recupera-se a entropia de von Neumann:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{1-\alpha} \ln \text{Tr}[\hat{\rho}^\alpha] = -\text{Tr}[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}] = \frac{1}{k_B} S_{vN}. \quad (2.5.18)$$

Agora, de forma ilustrativa, considera-se o caso do oscilador harmônico unidimensional. Nele, a distribuição

de Boltzmann é dada por:

$$p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}} = \frac{e^{-n\beta\omega\hbar}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\omega\hbar}} = (1 - e^{-\beta\omega\hbar})e^{-n\beta\omega\hbar}, \quad (2.5.19)$$

onde foi utilizada a expressão dos autovalores do oscilador harmônico unidimensional (Eq. [2.1.5]) e propriedades da série hipergeométrica. Substituindo este resultado na entropia de von Neumann:

$$S = -k_B(1 - e^{\beta\omega\hbar}) \left[\ln(1 - e^{-\beta\omega\hbar}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega\hbar} - \beta\omega\hbar \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\beta\omega\hbar} \right]. \quad (2.5.20)$$

Utilizando algumas manipulações, substituindo $\beta = 1/k_B T$ e multiplicando por N osciladores, recupera-se a expressão para a entropia do sólido de Einstein desenvolvida na primeira seção:

$$S(N, T) = Nk_B \left[\frac{\omega\hbar}{k_B T} \frac{e^{-\frac{\omega\hbar}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\omega\hbar}{k_B T}}} - \ln \left(1 - e^{-\frac{\omega\hbar}{k_B T}} \right) \right]. \quad (2.5.21)$$

É interessante notar que, no primeiro caso, que utilizou métodos de contagem mais rudimentares, o princípio fundamental da mecânica estatística e a expressão de Boltzmann, obteve-se exatamente o mesmo resultado para a entropia de von Neumann, típica da Teoria Quântica. Este exemplo foi incluído para mostrar a maneira como as diferentes noções de entropia se relacionam. Ao longo deste trabalho, nos modelos avaliados, é comum a obtenção de uma forma de entropia a partir de manipulações de outra.

Por exemplo, no cálculo da entropia de emaranhamento em colisões elásticas [23, 24], é preciso primeiro obter a entropia de Rényi, calcular o limite em que $\alpha \rightarrow 1$, para então encontrar uma entropia de emaranhamento escrita na expressão de Shannon, de modo que se faz necessário compreender a relação entre as diferentes noções entrópicas. De qualquer forma, a Fig. [2.8] ilustra a relação das noções entrópicas avaliadas neste trabalho.

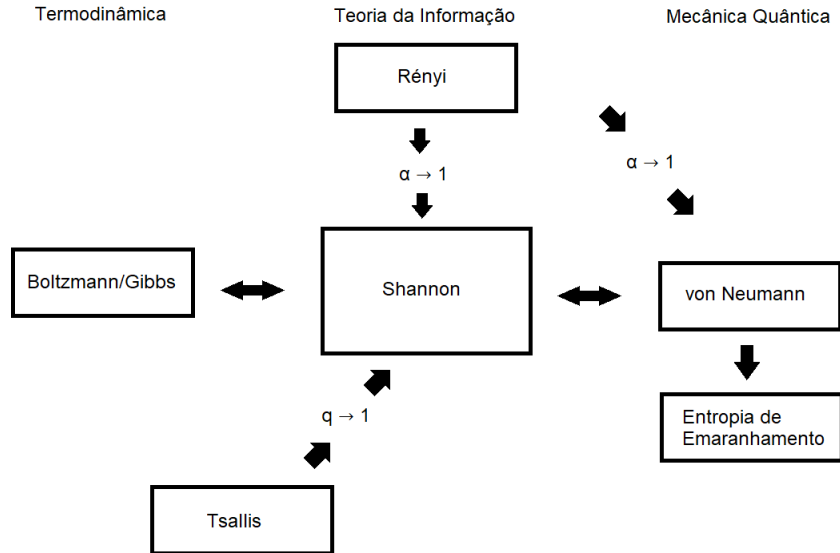


Figura 2.8: Relação entre as noções entrópicas estudadas neste capítulo. A entropia de emaranhamento será estudada no capítulo [4].

2.6 INFORMAÇÃO MÚTUA

A informação mútua, também chamada de Entropia Relativa de Kullback–Leibler, é uma medida fundamental para avaliar a divergência entre duas distribuições de probabilidade, p e $p^{(0)}$, onde $p^{(0)}$ representa uma distribuição chamada de referência [33]. Para quantificar essa discrepância, diversas métricas podem ser adotadas, sendo a divergência de Kullback–Leibler uma das mais relevantes. Formalmente, a informação mútua entre p e $p^{(0)}$ é definida como:

$$I(p, p^{(0)}) = \int dx p(x) \ln \left[\frac{p(x)}{p^{(0)}(x)} \right]. \quad (2.6.1)$$

A informação mútua é não negativa e igual a zero se, e somente se, $p(x) = p^{(0)}(x)$. A propriedade de não negatividade torna a divergência de Kullback–Leibler útil para comparar distribuições ao indicar a proximidade de p em relação à referência $p^{(0)}$.

Agora, será considerada uma mudança de variáveis em uma distribuição contínua de probabilidades $p(x)$, de forma que $y = f(x)$. Neste caso, $dx = |f'(x)|dy$. Aplicando esta transformação na distribuição de probabilidades na entropia de Boltzmann-Gibbs (Eq. [2.4.9]):

$$S = - \int dy p(y) \ln p(y) = - \int dx p(x) (\ln p(x) + \ln |f'(x)|). \quad (2.6.2)$$

Por outro lado, após a mesma transformação de variável na informação mútua, obtém-se:

$$\begin{aligned} I(p, p^{(0)}) &= \int dy p(y) \ln \left[\frac{p(y)}{p^{(0)}(y)} \right] \\ &= \int dy \frac{dx}{|f'(x)|} p(x) \ln \left[\frac{p(x)|f'(x)|}{p^{(0)}(x)|f'(x)|} \right] \\ &= \int dx p(x) \ln \left[\frac{p(x)}{p^{(0)}(x)} \right]. \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Esta é uma característica importante de $I(p, p^{(0)})$, a invariância sob transformações de variáveis que preservem a medida. Isso significa que, mesmo ao realizar uma mudança de variáveis, a divergência entre p e $p^{(0)}$ se mantém constante. Em muitos cálculos, essa propriedade torna a informação mútua preferível de manipulação se comparada a entropia de Boltzmann-Gibbs (Eq. [2.4.9]), pois, neste segundo caso, perde-se a invariância sob certas transformações, conforme à Eq. [2.6.2].

2.7 MECÂNICA ESTATÍSTICA DE NÃO EQUILÍBRIO

Em geral, o estudo da Termodinâmica e da Mecânica Estatística considera processos e transformações entre estados de equilíbrio, descritos por variáveis de estado, como a entropia S , a energia interna U , o número de partículas N , ou qualquer outra variável extensiva. Este equilíbrio é necessário para a medição de variáveis intensivas, como a pressão P e a temperatura T . Grosso modo, a temperatura pode ser interpretada como a velocidade cinética média das partículas que compõem o gás, enquanto a pressão é dada pela soma das forças aplicadas sobre a área de um certo êmbolo. Sem equilíbrio, não há uma média satisfatória das forças ou velocidades para que as variáveis intensivas sejam devidamente definidas.

Assim, a segunda lei da termodinâmica descreve a limitação fundamental das transições possíveis entre os estados de equilíbrio; a compreensão dos sistemas de não equilíbrio ainda é primitiva. É precisamente neste

contexto que se aplica a chamada *Mecânica Estatística de Não Equilíbrio*. Trata-se de um assunto amplo e em desenvolvimento, mas neste trabalho serão abordados brevemente apenas dois tópicos: a Identidade de Jarzynski e a relação de Hatano-Sasa, que serão discutidas a seguir.

2.7.1 Identidade de Jarzynski

A identidade de Jarzynski [41] é uma relação de flutuação que permite conectar o trabalho realizado durante um processo termodinâmico entre estados de equilíbrio com a respectiva variação de energia livre. Esta identidade estabelece uma expressão que envolve a distribuição estocástica do trabalho termodinâmico, $\rho(W)$, permitindo estudar processos longe do equilíbrio.

Em sistemas isolados, é bem conhecido da física estatística que o trabalho médio $\langle W \rangle$ realizado em um sistema termodinâmico verifica desigualdades relacionadas à segunda lei da termodinâmica. Assim, para uma transição entre dois estados de equilíbrio, tem-se a relação:

$$\Delta S = \frac{\langle W \rangle - \Delta F}{k_B T} \geq 0 \equiv \frac{\langle W_{\text{Diss}} \rangle}{k_B T} \geq 0. \quad (2.7.1)$$

Aqui, $\Delta E \equiv \langle W \rangle$ representa a variação total de energia e ΔF é a variação de energia livre do sistema. O termo $W - \Delta F = W_{\text{Diss}}$ corresponde ao trabalho dissipado, o qual só é nulo em processos reversíveis.

A identidade de Jarzynski generaliza esse princípio ao conectar diretamente o trabalho médio às flutuações fora do equilíbrio, especialmente no caso de flutuações onde $W_{\text{Diss}} < 0$. Ela é dada pela expressão:

$$\left\langle e^{-W/k_B T} \right\rangle = e^{-\Delta F/k_B T}. \quad (2.7.2)$$

Como foi demonstrado nas primeiras seções deste capítulo, a segunda lei da termodinâmica tem uma natureza estatística e, portanto, muito raramente, ocorrem flutuações nas quais $-W < \Delta F^\dagger$. Essas flutuações podem ser muito raras, mas com um grande W (ou seja, $-W$ fortemente negativo), sua contribuição para a média de $e^{-W/k_B T}$ pode ser significativa. Desta forma, a fórmula de Jarzynski inclui todas as flutuações, inclusive aquelas que violam $-W \geq \Delta F$.

Esta identidade pode ser escrita na forma:

$$\Delta F = -k_B T \ln \left\langle e^{-W/k_B T} \right\rangle = -k_B T \ln \int dW \rho(W) e^{-W/k_B T}. \quad (2.7.3)$$

Em que, $\rho(W)$ é chamada de distribuição estocástica do trabalho termodinâmico, que descreve a probabilidade de que o trabalho realizado em um sistema, durante um processo termodinâmico, tome um valor específico. Em um processo termodinâmico fora do equilíbrio, o sistema é impulsionado de um estado de equilíbrio inicial para um estado final por uma perturbação, como a aplicação de uma força mecânica que modifica o volume, ou de um campo elétrico que altera a energia interna. O trabalho realizado, nesse caso, depende das trajetórias microscópicas do sistema, ou seja, dos caminhos específicos que as partículas seguem devido às flutuações térmicas durante o processo. Deste modo, os problemas envolvendo esta identidade buscam encontrar esta distribuição, em que são exemplos o pistão unidimensional [42] e a compressão adiabática de um gás diluto [43].

[†]Utilizando a convenção de sinal em que $-W$ representa o trabalho realizado por uma força externa sobre o sistema e W é o trabalho realizado pelo sistema sobre o ambiente.

2.7.2 Identidade de Hatano-Sasa

Se comparada com a expressão de Jarzinsky, a identidade de Hatano-Sasa [44] não possui uma variável equivalente a temperatura. Esta identidade é aplicável à sistemas estacionários de não-equilíbrio e é definida a partir de um parâmetro dinâmico λ . Neste caso, para cada valor de λ , existe um espectro estacionário no espaço de fase com uma distribuição de probabilidade $P_{\text{Stat}}(z; \lambda)dz$, em que a variável z descreve o espaço de fase do sistema. Nesta configuração, verifica-se a seguinte igualdade:

$$\left\langle \exp \left[- \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{d\lambda}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln P(z; \lambda, \tau) \right] \right\rangle_{\tau_2} = \int dz \exp \left[- \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{d\lambda}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln P(z; \lambda, \tau) \right] P(z; \lambda_2, \tau_2) = 1. \quad (2.7.4)$$

Nesta equação, a transição entre um estado estacionário de não equilíbrio, ocorre com a alteração da variável dinâmica $\lambda(\tau)$, de forma que $\lambda(\tau_1) = \lambda_1$ evolui para λ_2 e τ é o tempo de transição entre dois estados estacionários não equilíbrio distintos. Assim, $P(z; \lambda, \tau) \equiv P_{\text{Stat}}(z(\tau); \lambda(\tau))$ representa a solução estacionária para o valor $\lambda(\tau)$ em variáveis de espaço de fase “congeladas” no tempo τ . Note-se que essa identidade resulta independentemente da “história” arbitrária de $d\lambda/d\tau$ no mecanismo de não-equilíbrio.

Capítulo 3

Entropia dos Estados Densos da QCD

O principal objetivo deste capítulo é investigar a produção de entropia na física de altas energias relacionada aos chamados estados densos da QCD. Como já foi exposto, também será abordada a criação de entropia devida ao emaranhamento quântico e a decoerência. Entretanto, como a aplicação destes fenômenos quânticos estará relacionada com características básicas da física de altas energias, este também é um capítulo introdutório ao que será desenvolvido nos respectivos capítulos de cada um dos fenômenos supracitados.

Além disso, a rápida termalização do QGP alude a uma grande criação de entropia nos estágios iniciais da sua formação, portanto, também serão apresentadas algumas características básicas deste plasma. Ao final, o objetivo central do capítulo será estabelecido com a apresentação da chamada entropia dinâmica da QCD, que é uma proposta para avaliar a densidade de entropia por unidade de rapidez definida a partir de observáveis da física de saturação.

Tendo em vista a complexidade matemática adjacente às teorias quânticas de campos, é essencial apresentar uma convenção da notação que será utilizada neste trabalho: os vetores bi e tridimensionais serão indicados por uma seta superior: para o vetor A , por exemplo, será utilizado \vec{A} ; os 4-vetores terão um índice ou sub-índice com um caractere grego, na forma A^μ , podendo também ser representados simplesmente por A , sendo que a desambiguação se revelará frente à operação em que o objeto atua. A partir de agora, utiliza-se a notação de *unidades naturais*, na qual

$$\hbar = c = k_B = 1. \quad (3.0.1)$$

Dessa forma, recorre-se à relação entre as unidades de medida,

$$[\text{massa}] = [\text{energia}] = [\text{tempo}]^{-1} = [\text{comprimento}]^{-1} = \text{GeV}, \quad (3.0.2)$$

sendo essas grandezas sujeitas à relação de conversão,

$$1 \text{ GeV} = 5,0677 \text{ fm}^{-1}. \quad (3.0.3)$$

Como a partir de agora se lidará com teorias quânticas de campos, tendo a relatividade restrita como um pré-requisito das manipulações matemáticas aqui estabelecidas, o ideal é tratar grandezas que sejam invariantes de *Lorentz*. O referencial onde o regime de altas energias faz sentido é chamado de *Breit frame* e será melhor abordado na próxima seção, que tratara justamente de algumas características fundamentais da

física de altas energias.

3.1 O MODELO DE PÁRTONS

Em 1911, *Ernest Rutherford* realizou uma revolução científica com a descoberta do núcleo atômico [45]. Esse feito foi crucial para o aprimoramento do modelo e teoria atômica, tornando as concepções de *Thomson* e *Dalton* obsoletas e fornecendo uma nova explicação para a estrutura da matéria. Em 1913, *Bohr* refinou a teoria com a introdução das órbitas quantizadas, contornando o problema do colapso da matéria previsto pelas equações de *Maxwell* no modelo de *Rutherford*. Pouco depois, a existência de uma solução analítica exata da equação de *Schrödinger* para o átomo de hidrogênio pavimentou o caminho para a gênese da mecânica quântica. Ao final dos anos 1950, o terreno tornou-se fértil para a formulação da *Teoria Quântica de Campos*, permitindo derivar resultados satisfatórios para três das forças fundamentais: eletromagnética, fraca e forte; enquanto a força gravitacional ainda carece de uma teoria quântica.

Utilizando adequadamente as teorias quânticas de campos, é possível obter expressões para as seções de choque com bons resultados. Além do desenvolvimento dessas teorias, as montagens experimentais também evoluíram drasticamente: aceleradores maiores foram projetados e posteriormente construídos. Exemplos atuais incluem o LHC e o RHIC, entre outros, que contam com a colaboração de pesquisadores e engenheiros de diversas partes do mundo, com o objetivo de dar sequência à exploração não só do mundo nuclear, mas também do comportamento da matéria em níveis ainda mais fundamentais — especificamente, a estrutura dos núcleons (hádrons que constituem os núcleos atômicos, *prótons* e *nêutrons*), incluindo quarks e glúons.

Um formalismo de suma importância nessa pesquisa é o modelo dos *Pártons* [47]. Em 1968, uma série de experimentos foi conduzida no *Stanford Linear Accelerator Center* (SLAC), envolvendo espalhamentos inelásticos profundos lépton-núcleon (DIS, *Deep Inelastic Scattering*) [48]. Esses experimentos consistem no espalhamento de um lépton, com a medida do ângulo de deflexão, que revela aspectos da natureza do processo. Mais especificamente, em processos *inelásticos*, o alvo absorve parte da energia cinética da colisão com um projétil de alta energia, o qual pode ser associado a um pequeno comprimento de onda, permitindo sondar regiões ditas *profundas* (Fig. [3.1]). Durante a realização destes experimentos, o físico teórico *Richard Feynman* se encontrou com membros do grupo experimental responsável e teve acesso aos primeiros resultados obtidos, onde a seção de choque foi parametrizada segundo sugestões de *James D. Bjorken* [49]. Para compreender a contribuição de *Bjorken*, primeiro é necessário estabelecer o seguinte conjunto de definições:

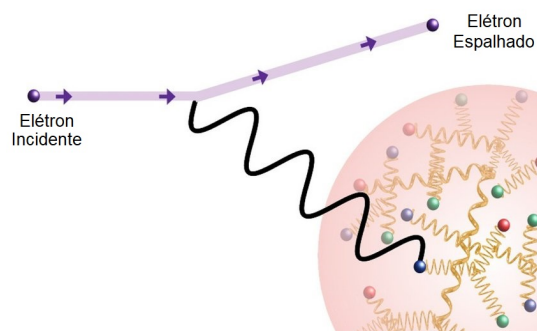


Figura 3.1: Representação do DIS. Adaptado de [46].

■ Utiliza-se q , tanto para etiquetar os quarks quanto para a transferência de 4-momenta, $q^\mu = k^\mu - k'^\mu$, tendo sua desambiguação aplicada no contexto de utilização.

■ Utiliza-se k^μ para o 4-momentum do elétron incidente;

■ Utiliza-se k'^μ para o 4-momentum do elétron espalhado;

- P^μ para o 4-*momentum* do próton;
- p^μ para o 4-*momentum* do párton;
- Q^2 é a quantidade que mede o quanto o fóton virtual se desvia da camada de massa, chamada *virtualidade do fóton*.
- x para a variável cinemática de *Bjorken*, definida como,

$$x \equiv \frac{Q^2}{2P \cdot q}; \quad (3.1.1)$$

- ξ para a fração de *momentum* do i -ésimo párton em relação ao *momentum* do próton,

$$p_i^\mu = \xi P^\mu; \quad (3.1.2)$$

- ν é uma variável cinemática dada por,

$$\nu = \frac{P \cdot q}{M}, \quad (3.1.3)$$

sendo M a massa do núcleon, embora neste capítulo seja recorrente o uso do próton de massa m_p .

Utilizando a álgebra de correntes, *Bjorken* notou que no limite em que o *momentum* e a energia transferidos no impacto tendem ao infinito, $q^2 \rightarrow \infty$ e $\nu = (E - E')_{lab} \rightarrow \infty$, no referencial de coordenadas chamado *Breit Frame*, uma razão fixa é estabelecida, denominada de x de *Bjorken*:

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = -\frac{q^2}{2M\nu}. \quad (3.1.4)$$

Além disso, *Bjorken* observou que neste limite, as funções de estrutura, análogas aos fatores de forma presentes nas colisões elásticas, são apenas funções de x , exibindo um comportamento de escala. *Feynman* interpretou o comportamento de escala nas colisões como uma indicação de que o núcleon teria constituintes dotados de carga elétrica, de modo que o pequeno comprimento de onda do lépton projétil fosse capaz de sondar esses constituintes (Fig. [3.2]), os chamados *Pártons* (do inglês, *part of hadrons*). Ao publicar suas investigações sobre o DIS, *Feynman* introduziu pela primeira vez a distinção entre espalhamentos *exclusivos* e *inclusivos*. No caso exclusivo, trata-se dos processos nos quais se sabe quais partículas serão produzidas, enquanto o caso inclusivo estuda o comportamento de uma determinada partícula no estado final em diversos intervalos cinemáticos de momento longitudinal e transversal, sem especificar outras partículas envolvidas.

De forma prática, um exemplo de processo exclusivo é dado por:

$$p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + n^0 + \pi^+.$$

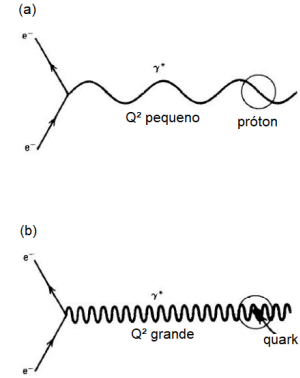


Figura 3.2: Dois experimentos em que um elétron colide com um próton. Em (a) pouca energia foi transferida na colisão, de forma que o fóton virtual γ^* possui um comprimento de onda da ordem do tamanho do próton. Em (b), energia suficiente foi transferida na colisão, de forma que o comprimento de onda do fóton virtual é capaz de sondar a estrutura interna do próton.

As partículas envolvidas neste exemplo são o próton p^+ , o nêutron n^0 e o pión carregado positivamente π^+ . Um processo inclusivo pode ser descrito por:

$$p^+ + p^+ \rightarrow \pi^+ + X,$$

onde X representa um estado final não explicitado, sendo que, neste exemplo, a partícula analisada seria o pión. *Feynman* argumentou que, em um regime de altas energias, as seções de choque inclusivas devem apresentar comportamento de escala quando a energia total é muito grande e o momento transversal da partícula no estado final permanece limitado.

Seguindo a metodologia proposta por Feynman e Bjorken, a seção de choque em um DIS será parametrizada em termos de q^μ e P^μ ,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} \right) = \frac{\alpha^2}{4\pi m_p q^4} \frac{E'}{E} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}. \quad (3.1.5)$$

Nesta equação, $\alpha \approx 1/137$ é o acoplamento da força eletromagnética, $L_{\mu\nu}$ é o *tensor leptônico* e $W_{\mu\nu}$ é o tensor hadrônico. Para um espalhamento não polarizado, $L_{\mu\nu}$ é dado por,

$$L_{\mu\nu} = 2(k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu - k \cdot k' g_{\mu\nu}), \quad (3.1.6)$$

e a forma mais geral do tensor hadrônico é dada por,

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + W_2 \left(P^\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(P^\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\nu \right). \quad (3.1.7)$$

As quantidades escalares as quais W_1 e W_2 podem depender devem ser invariantes de *Lorentz*, sendo elas, $P^2 = P \cdot P = M^2$, q^2 e $P \cdot q$. Usa-se $Q \equiv \sqrt{-q^2} > 0$, que é a escala de energia na colisão e, no referencial LAB, $P \cdot q / M = (E - E')$. Dessa forma, contraindo o tensor leptônico com o tensor hadrônico,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} \right) = \frac{\alpha^2}{8\pi E^2 \sin^4 \theta / 2} \left[\frac{M}{2} W_2(x, Q) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{M} W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (3.1.8)$$

No caso inelástico, esta seção de choque revela todas as características necessárias.

Para testar o Modelo a Pártons, é necessário verificar os fatores de forma considerando que o elétron espalha elasticamente os constituintes protônicos de massa m_q . Para realizar esta avaliação, considera-se o 4-*momentum* inicial e final do pártion, p_i^μ e p_f^μ , respectivamente, então, via conservação de *momentum*, $p_i^\mu + q^\mu = p_f^\mu$, daí,

$$\frac{Q^2}{2p_i \cdot q} = 1. \quad (3.1.9)$$

Mas o 4-*momentum* do pártion não é diretamente mensurável. Assim, assume-se que ele possui uma parcela ξ do *momentum* do próton,

$$p_i^\mu = \xi P^\mu, \quad (3.1.10)$$

ou seja,

$$x = \frac{\xi Q^2}{2p_i \cdot q} = \xi. \quad (3.1.11)$$

Dessa forma, a medida de x revela a parcela de *momentum* que o pártion carrega do próton pai.

Para que seja possível calcular o espalhamento elástico $e^- q$, considera-se que os partões não interagem muito entre si. Assim, os fatores de forma possuem apenas uma fraca dependência logarítmica com Q^{2*} , tendo o *momentum* partônico inicial fixo, ou seja, com x constante. A seção de choque aproximadamente independente de Q^2 com x fixo é conhecida como *escalonamento de Bjorken*.

O modelos de partões também utiliza as probabilidades $f_i(\xi)d\xi$ do fóton interagir com o i -ésimo parton com uma parcela ξ do *momentum* do próton. Estas $f_i(\xi)$'s são conhecidas como *Funções de Distribuição Partônicas* (*parton function distributions*, PDF's). O modelo prevê que a seção de choque para o espalhamento $e^- P^+ \rightarrow e^- X$, σ_T , é dado por $e^- p_i \rightarrow e^- X$, σ_n , onde p_i é o parton com *momentum* $p_i^\mu = \xi P^\mu$, integrado sobre todo ξ ,

$$\sigma_T = \sum_i \int_0^1 d\xi f_i(\xi) \sigma_n. \quad (3.1.12)$$

Assumindo que os partões são livres, exceto pelas interações eletromagnéticas, o elétron espalha apenas as partículas carregadas, que no próton, são os quarks. Para um dado quark de *momentum* p_i , a seção de choque partônica $e^- q \rightarrow e^- q$, σ_p , é aproximada por um espalhamento puntual na Eletrodinâmica Quântica, dada pela fórmula de *Rosenbluth*, com $F_1 = 1$ e $F_2 = 0$, então,

$$\left(\frac{d\sigma_p}{d\Omega} \right)_{LAB} = \frac{\alpha_e^2 Q_i^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m_q^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta \left(E - E' - \frac{Q^2}{2m_q} \right), \quad (3.1.13)$$

sendo Q_i a carga do quark.

A fim de obter a seção de choque de DIS, é necessário integrar esta expressão sobre o momento do parton incidente. Sendo assim, obtém-se o resultado,

$$\left(\frac{d\sigma_p}{d\Omega} \right)_{LAB} = \sum_i f_i(x) \frac{\alpha_e^2 Q_i^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \left(\frac{2m_p}{Q^2} x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{m_p} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (3.1.14)$$

Comparando [3.1.8] com [3.1.14] obtém-se as relações,

$$\begin{cases} W_1(x, Q) = 2\pi \sum_i Q_i^2 f_i(x); \\ W_2(x, Q) = 8\pi \frac{x^2}{Q^2} \sum_i Q_i^2 f_i(x). \end{cases} \quad (3.1.15)$$

E estas relações configuram uma base concreta para a predição experimental do escalonamento de *Bjorken*, pois são as quantidades $W_1(x, Q^2)$ e $Q^2 W_2(x, Q)$ fracamente dependentes de Q com x fixo, confirmadas experimentalmente.

Sob essa perspectiva, os partões são interpretados como partículas nuas (*bare particles*) de uma nova interação fundamental — a força forte — sendo investigados através do DIS no *Breit Frame*. Neste referencial, o hádron sofre uma contração espacial longitudinal, tornando a interação com o lépton (seja eletromagnética ou fraca, dependendo do lépton envolvido) praticamente instantânea. Assim, o estado interno dos hádrons é "congelado" e a interação entre os partões pode ser desconsiderada, permitindo tratá-los como partículas *quase-livres*. Mais tarde, os partões foram identificados com os *quarks* de *Gell-Mann* [50], estabelecendo o *Modelo Padrão*, e a metodologia de *Bjorken* e *Feynman* tornou-se fundamental para a análise da *Cromodinâmica Quântica Perturbativa*.

Para compreender melhor o uso do Modelo dos Partões na investigação das estruturas hadrônicas, é útil

*Similarmente ao espalhamento $e^- \mu^-$, bem estabelecido na Eletrodinâmica Quântica

revisar brevemente a teoria que descreve a física de partículas elementares: o *Modelo Padrão*. Esse modelo organiza as partículas fundamentais em 12 férmions de spin 1/2, divididos em dois grupos principais. O primeiro grupo inclui os quarks, que constituem a matéria hadrônica: *up*, *down*, *charm*, *strange*, *top* e *bottom*. O segundo grupo consiste nos léptons: *elétron*, *múon*, *tau* e seus respectivos neutrinos. Juntos, esses férmions compõem toda a matéria ordinária[†].

As interações entre essas partículas são mediadas pelos *bósons de calibre*, partículas de spin 1 associadas às forças fundamentais: o fóton (força eletromagnética), o glúon (força nuclear forte) e os bósons W^\pm e Z^0 (força fraca). Além disso, o Modelo Padrão inclui um bóson escalar, o *Higgs*, cuja existência foi confirmada experimentalmente e que é fundamental para o mecanismo que confere massa a outras partículas. A Fig. [3.3] ilustra alguns detalhes dos constituintes do Modelo Padrão.

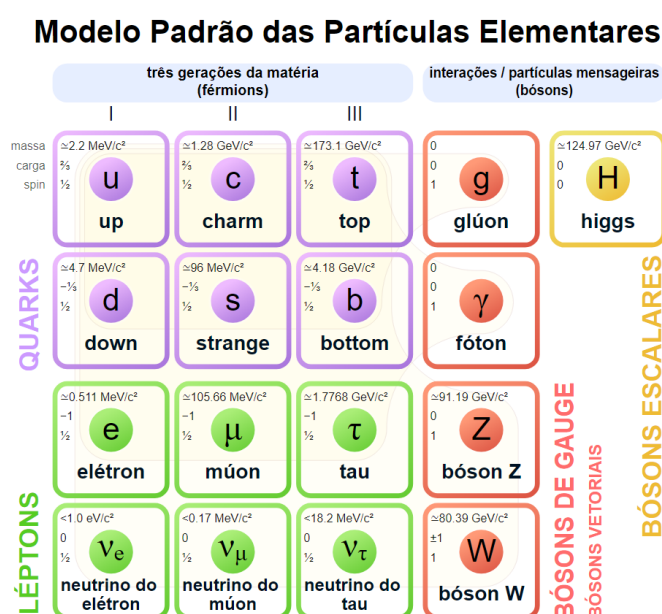


Figura 3.3: Organização das partículas do modelo padrão confirmadas experimentalmente. Para cada partícula é também dado o valor de sua massa, carga elétrica e spin. Reproduzido de [51].

As partículas interagem com diferentes forças dependendo das cargas que possuem. Por exemplo, os quarks possuem uma carga de cor, que pode ser vermelha, azul ou verde. Essa carga permite que eles formem hádrons "sem cor" (*colorless*), como os *mésons* e *bárions*. Os mésons são estados ligados quark-antiquark, enquanto os bárions consistem em três quarks. Além da carga de cor, os quarks possuem carga elétrica fracionária, o que lhes permite interagir eletromagneticamente e serem detectados em processos como o DIS.

Assim, o Modelo dos Pártons fornece uma compreensão mais clara dos quarks e glúons ao descrever a composição dos núcleons, que em um DIS possuem uma fração ξ do *momentum* do hádron pai, mantendo colinearidade com ele. Para energias baixas, os chamados *quarks de valência* constituem os núcleos em tríades. No entanto, com o aumento da energia no DIS, surge a necessidade de considerar as PDF's. Estas distribuições obedecem certas relações, conhecidas como *regras de soma* [52]. Por exemplo, para garantir a conservação dos números quânticos do próton, suas PDFs devem satisfazer as seguintes relações:

[†]Ainda há muito a ser descoberto sobre outras formas de matéria, como a *matéria escura* e a *energia escura*, que hoje são foco de vários programas de pesquisa. As informações sobre essas formas de matéria vêm de teorias gravitacionais, e estima-se que compõem cerca de 95% de toda a matéria do universo.

$$\int_0^1 d\xi [f_d(\xi) - f_{\bar{d}}(\xi)] = 1, \quad \int_0^1 d\xi [f_u(\xi) - f_{\bar{u}}(\xi)] = 2, \quad \int_0^1 d\xi [f_s(\xi) - f_{\bar{s}}(\xi)] = 0, \quad (3.1.16)$$

sendo esta última relação aplicável também aos quarks bottom e charm. Embora não exista uma regra de conservação específica para o número de glúons, deve-se considerar a soma das suas PDFs com as dos demais quarks, resultando na condição:

$$\sum_j \int \xi f_j(\xi) d\xi = 1. \quad (3.1.17)$$

No caso do próton, as regras de soma apresentadas indicam que apenas 38% do *momentum* do próton está contido nos quarks de valência (up e down). Por outro lado, os glúons transportam uma fração que varia de 35% a 50%, dependendo da escala. Os quarks que não são contabilizados nessas distribuições são denominados *quarks de mar*. A Fig. [3.4] ilustra o comportamento dessas funções de distribuição em um DIS envolvendo um elétron e um próton para dois valores de virtualidade ($Q^2 = -q^2$): para altos valores de x , que correspondem a processos de baixa energia, as distribuições caracterizam os quarks de valência; enquanto que em regime de pequeno- x , em processos de alta energia, a composição do próton é dominada por glúons, uma região conhecida como *física de saturação*, a qual será abordada mais detalhadamente na sequência.

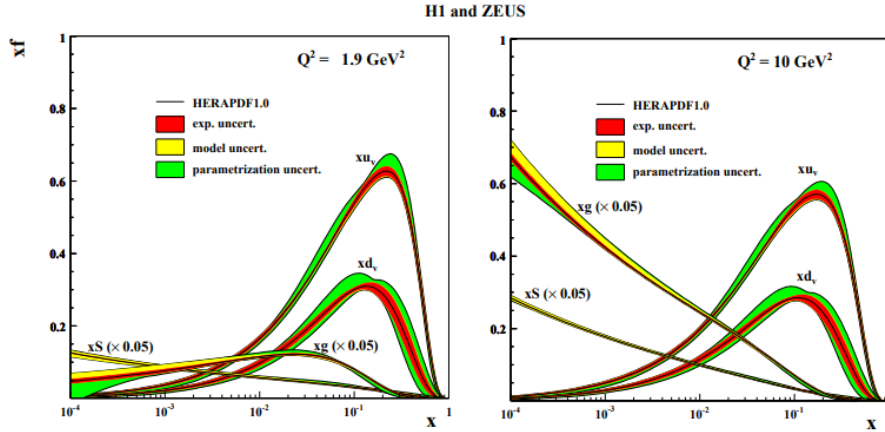


Figura 3.4: Comportamento das PDF's em relação a variável de Bjorken para as virtualidades $Q^2 = 1.9 \text{ GeV}^2$ (esquerda) e $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ (direita). As funções que aparecem neste caso são de quarks up, xu_v , quarks down, xd_v , glúons, xg e de mar, $xS = 2x(\bar{U} + \bar{D})$. As distribuições gluônicas e de mar foram reduzidas por um fator de 20 para que possam ser avaliadas no mesmo plano. Reproduzido de [53].

3.1.1 A Física de Saturação

Os núcleos dos átomos são compostos por dois tipos de partículas denominadas núcleons: prótons e nêutrons. Para baixas energias, estas partículas são basicamente a combinação de três quarks com cores distintas que se arranjam de forma que os números quânticos do núcleon sejam recobertos. Por exemplo: o próton (Fig. [3.5]) é composto por dois quarks up com uma carga elétrica positiva de $2/3$ de e e um quark down com carga elétrica $-1/3$ de e onde a sobreposição da carga líquida resulta em um valor de $+e$. Quarks são partículas de spin $1/2$, fazendo com que a função de onda de spin do próton seja uma superposição das diferentes configurações de spin dos seus constituintes na forma que a configuração total seja de spin $1/2$. Esta combinação não viola o

princípio de exclusão de *Pauli* devido a presença de outro número quântico que é a carga de cor da interação forte, podendo ser vermelha (*red*), azul (*blue*) ou verde (*green*) e as respectivas cargas de anti-cor.

Esse tipo de descrição funciona bem para entender a composição física dos núcleons, contudo, não é possível realizar previsões teóricas robustas ou prever comportamentos em colisões com resultados satisfatórios pois no uso da teoria da perturbação a constante de acoplamento forte α_s é da ordem da unidade impossibilitando o cálculo. Felizmente, com o aumento da energia a constante de acoplamento diminui e os cálculos perturbativos começam a se tornar efetivos. Fisicamente, é possível sondar regiões menores para se obter a seção de choque e fenômenos novos começam ocorrer.

Antes de dar mais detalhes vale a elucidação de algumas diferenças entre eletrodinâmica e a cromodinâmica quântica: embora ambas sejam teorias de campos quânticos e possam ter suas propriedades derivadas a partir de grupos abstratos, sendo eles os grupos U(1) para eletrodinâmica e SU(3) para cromodinâmica, uma diferença reside no fato que os geradores[‡] deste segundo grupo não comutam como os do primeiro. Por isso, diz-se que a cromodinâmica é uma teoria *não-abeliana*[§]. Esta característica do grupo de simetria tem como consequência o fato de que os mediadores da força forte, os glúons, carreguem carga de cor e, por isso, interajam entre si, sendo um grave contraste se comparado com os fótons da Eletrodinâmica Quântica.

Geralmente, a descrição da resolução em que se avalia a estrutura hadrônica é feita em relação a duas variáveis, a *virtualidade* Q^2 , que representa o *momentum* transferido na interação, e o x de *Bjorken*, que no regime de altas energias pode ser escrito como $x \approx Q^2/s$, sendo s o quadrado da energia do sistema no referencial do centro de massa. Antes da colisão, considera-se que o núcleon porte um certo 4-*momentum* P^μ , logo, por conservação, os 4-*momenta* dos quarks devem ser frações do total $p_i^\mu = xP^\mu$. A variável de *Bjorken* é a fração de *momentum* do núcleon pai. A virtualidade do fóton Q^2 relaciona-se com o quadrado do 4-*momenta* transferido propriamente na colisão $Q \equiv \sqrt{-q^2}$.

Considerando estas colocações, a análise da estrutura partônica pode ser elaborada considerando o fenômeno do *bremmsstrahlung*, no qual os pártons podem emitir glúons e, estes, flutuar em pares quark-antiquark ou emitir novos glúons. No regime de altas energias, $x \ll 1$ (e na aproximação de primeira ordem em α_s) a probabilidade diferencial P_g de ocorrer a emissão do glúon segue [55],

$$P_{bremm} \propto \alpha_s(p^2) \frac{d^2 p}{k^2} \frac{dx}{x}, \quad (3.1.18)$$

sendo p o 4-*momentum* do pártion emitido com $p = (\sqrt{k^2 + k_z^2}, \vec{k}, k_z = xP_z)$. Desta forma, no limite em que o *momentum* transversal tende a um pequeno valor, aumenta-se a chance de ser gerado um glúon colinear com

[‡]Na álgebra abstrata, um conjunto gerador de um grupo é um subconjunto que não está contido em nenhum subgrupo próprio do grupo. Equivalentemente, um conjunto gerador de um grupo é um subconjunto, tal que todo elemento do grupo pode ser expresso como a combinação (sob a operação do grupo) de elementos finitos do subconjunto e seus inversos.

[§]Em álgebra abstrata, um grupo abeliano, chamado também de grupo comutativo, é um grupo $(G, *)$ em que $a * b = b * a$ para quaisquer a e $b \in G$.

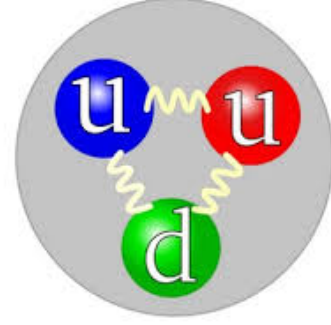


Figura 3.5: Representação esquemática do próton em baixas energias com os seus três quarks de valência. Imagem da referência [54].

uma fração de *momentum* x . Fisicamente, o tamanho do hádron é praticamente constante com o aumento da energia e as populações de glúons que o compõem neste estado da matéria têm um *momentum* transversal que pode ser associada a uma área (utilizando-se o princípio da incerteza), também transversa, que é ocupada por eles na ordem de $\sim 1/Q^2$.

Uma vez no regime de altas energias, torna-se possível obter uma caracterização dos constituintes do núcleon a partir da análise de sua dependência com a variável x de *Bjorken* (ou equivalentemente a rapidez Y , pois $Y = \ln 1/x$) e a virtualidade Q^2 . Na Fig. [3.6] é possível perceber como a distribuição dos pártons no núcleon se altera visto a variação com x e Q . Conforme se aumenta a virtualidade o sistema começa a se diluir e esta descrição é dada pelo conjunto de equações DGLAP (em homenagem aos trabalhos de *Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli e Parisi*) [56–58],

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \begin{pmatrix} f_q(x, Q^2) \\ f_g(x, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \begin{pmatrix} P_{qq} & P_{qg} \\ P_{gq} & P_{gg} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} f_q(Q^2, x) \\ f_g(Q^2, x) \end{pmatrix}. \quad (3.1.19)$$

Nessa equação, P_{qq} , P_{qg} , P_{gq} e P_{gg} são as *funções de desdobramento* e as $f_i(x)$'s são as PDF's. Na ordem principal, as funções de desdobramento que podem ser obtidas são listadas abaixo:

$$P_{qq}(z) = C_F \left[(1+z^2) \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right], \quad (3.1.20)$$

$$P_{qg}(z) = N_c [z^2 + (1-z)^2], \quad (3.1.21)$$

$$P_{gq}(z) = C_F \frac{1 + (1-z)^2}{z}, \quad (3.1.22)$$

e

$$P_{gg}(z) = 2N_c \left[\frac{z}{[1-z]_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right] + \frac{11N_c - 2N_f}{6} \delta(1-z), \quad (3.1.23)$$

sendo nestas expressões N_c o número de sabores de quarks e $z = Q^2/(2p_i \cdot q)$. Qualitativamente, ao aumentar a virtualidade, os pártons ocupam uma área transversal menor devido à relação de proporcionalidade dada por $1/Q^2$ (Fig. [3.6]), de forma que o sistema se dilui.

Agora, a evolução em relação à variável x remonta a outro cenário. A emissão de glúons com pequeno *momentum* torna-se cada vez mais favorecida conforme x diminui, ocupando essencialmente a mesma área transversal. Neste caso, a equação de evolução em ordem dominante é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial(\ln 1/x)} f_g(x, k^2) = \frac{N_c \alpha_s}{\pi} k^2 \int_0^\infty \frac{dk'^2}{k'^2} \left[\frac{f_g(x, k'^2) - f_g(x, k^2)}{|k'^2 - k^2|} + \frac{f_g(x, k^2)}{\sqrt{4k'^2 + k^2}} \right], \quad (3.1.24)$$

e é chamada de equação BFKL, devido aos trabalhos de *Balitsky, Fadin, Kuraev e Lipatov* [59, 60]. Neste regime,

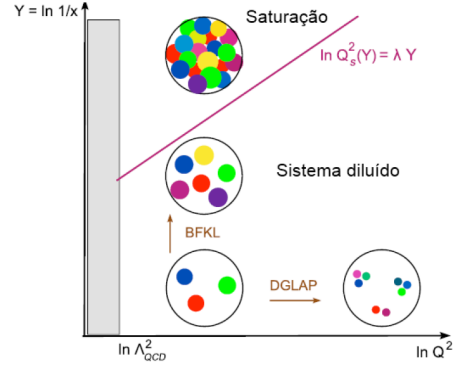


Figura 3.6: A caracterização do estado do núcleon muda dependendo da variável que se analisa. Se for levado em conta a evolução em relação à x teremos um sistema saturado com a sua evolução descrita pela equação BFKL. Por outro lado, analisando apenas o aumento da virtualidade Q^2 tem-se um sistema mais diluído descrito pelas equações DGLAP. Figura adaptada de [55].

a partir de um certo valor de x , o crescimento da população gluônica aumenta a chance de que os glúons interajam entre si, recombinao-se, e iniciam-se processos em que $gg \rightarrow g$, compensando as emissões do *bremstrahlung* e saturando a densidade de glúons no sistema hadrônico, i.e., o *regime de saturação*.

Uma forma de determinar se o sistema físico está em um estado denso ou diluído é dada pelo modelo físico fenomenológico de *Golec-Biernat-Wüsthoff* (GBW) [61], que consegue delimitar bem o regime de saturação a partir da *escala de saturação* Q_s^2 ,

$$Q_s^2(x) = (x_0/x)^\lambda, \quad (3.1.25)$$

sendo que, neste trabalho, em geral, foram utilizados $x_0 = 4.2 \times 10^{-5}$ e $\lambda = 0.248$, obtidos a partir dos dados experimentais de DIS em colisões ep [62]. Algumas propriedades importantes a citar sobre o modelo GBW incluem o *geometric scaling* (gs), no qual as seções de choque do DIS podem ser expressas em função de uma única variável, $\tau = k^2/Q_s^2$.

O *geometric scaling* permite estender a aplicação do modelo GBW para as colisões próton-núcleo. Especificamente, a relação entre a seção de choque da interação de um fóton virtual com um núcleo e a área transversal do alvo pode ser reescrita como uma função dependente da saturação nuclear:

$$\frac{\sigma^{\gamma^* A}(\tau_A)}{\pi R_A^2} = \frac{\sigma^{\gamma^* p}(\tau)}{\pi R_p^2}, \quad (3.1.26)$$

onde $R_A = (1.12A^{1/3} - 0.86A^{-1/3})$ fm representa o raio nuclear e A é o número de massa do núcleo. Para realizar essa equivalência, adapta-se a seção de choque transversal $\sigma_0 \rightarrow \sigma_A$ e a escala de saturação $Q_s^2(Y) \rightarrow Q_{s,A}^2(Y)$. Assim, a escala de saturação nuclear $Q_{s,A}(Y)$ pode então ser expressa por:

$$Q_{s,A}^2(Y) = \left(\frac{R_p^2 A}{R_A^2} \right)^\Delta Q_s^2(Y), \quad (3.1.27)$$

onde $\Delta \approx 1.27$ e $R_p \approx 3.56$ GeV [63]. Essa formulação permite ajustar o modelo para levar em conta o efeito do aumento de densidade de partículas na interação com núcleos, resultando em uma escala de saturação adaptada ao contexto nuclear. Assim, a propriedade de *geometric scaling* oferece um meio de extrapolar previsões feitas para prótons isolados para interações envolvendo núcleos, com a escala de saturação nuclear $Q_{s,A}^2$ refletindo o aumento da densidade de glúons em sistemas nucleares.

3.1.2 O Colour Glass Condensate

O modelo que descreve satisfatoriamente o comportamento do QGP nos instantes iniciais da sua geração é o *Colour Glass Condensate* (CGC) [64], que, em tradução livre, é o modelo do *condensado do vidro de cor*. Ele descreve a matéria associada com uma alta densidade de glúons a partir da descrição da função de onda de um hádron em altas energias.

A Fig. [3.4] ilustra como no regime da física de altas energias ou, equivalentemente, de pequeno- x , a população de glúons cresce indeterminadamente. Contudo, com o aumento da energia, o tamanho do próton é praticamente constante. Desta forma, se forem adicionados cada vez mais glúons, estas partículas irão

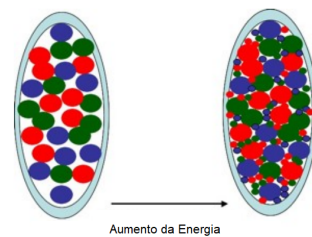


Figura 3.7: Para um determinado valor de energia E_1 , os glúons preenchem o próton. Para $E_2 > E_1$ glúons ainda menores são gerados se organizando nos espaços não preenchidos anteriormes. Adap-

preencher todas as regiões ‘vazias’ do próton. Se os glúons tivessem um tamanho fixo, existiria um valor determinado para preencher todo o próton; isto não se verifica. Por outro lado, se os novos glúons gerados possuírem um tamanho menor, eles podem ser organizados em regiões não ocupadas, que também são cada vez menores em um processo que pode prosseguir indeterminadamente (Fig. [3.7]), semelhantemente ao que ocorre com Aquiles que nunca alcança a tartaruga em um mundo em que não existem séries convergentes.

A escala de saturação Q_s é inversamente proporcional ao espaço ocupado por um glúon, $R_s = 1/Q_s$. Desta forma, se a escala Q_s for fixada, só poderão ser organizados um número fixo de glúons, pois toda a região do próton esta ocupada em um sistema *condensado*. Ao serem gerados, cada glúon é incorporado na função de onda que descreve o hádron, de forma que:

$$|h\rangle = |qqq\rangle + |qqqg\rangle + \dots + |qqqg\dots q\bar{q}ggg\rangle, \quad (3.1.28)$$

A terminologia *vidro* esta relacionada com o tempo e à ordem dos campos associados a este estado da matéria: evoluem muito lentamente se comparadas as escalas de tempo natural. Neste modelo, os glúons relacionados às altas energias são descritas por campos clássicos produzidas por glúons de menor energia ou, inicialmente, pelos quarks de valência, entendidos aqui como o conjunto de quarks que compunham o hádron em baixas energias.

Este mecanismo faz com que os glúons ‘filhos’, também chamados de *wee partons*, tenham sua escala de evolução temporal dilatada em relação ao glúon ‘pai’, de forma que, quanto mais ‘antigo’ for um glúon nesta hierarquia, ele sera percebido pelos demais como um campo clássico estático e assim, as diferentes configurações de glúons que contribuem para a função de onda hadrônica podem ser então tratadas como um *ensemble* de campos não interagentes. Por fim, a *cor* diz respeito às partículas que formam o CGC, praticamente glúons, que possuem cor na QCD.

Existe um sistema de coordenadas mais adequado para tratar dos objetos matemáticos no CGC, chamado de *Sistema de Coordenadas do Cone de Luz* (Apêndice A). Para isso, é necessária a realização da quantização da teoria neste sistema de variáveis, onde o valor inicial é considerado igual na superfície temporal do cone de luz $x^+ = (t + z)/\sqrt{2} = 0$, tendo como grande vantagem a simplificação do estado de vácuo, que coincidirá tanto para teoria interagente, como para teoria livre[¶] além de fazer com que as funções de onda hadrônicas possam ser calculadas como uma expansão dos estados de *Fock*. Desta forma, o hamiltoniano do cone de luz na QCD, P_{QCD}^- , pode ser escrito na forma,

$$P_{QCD}^- = P_{QCD}^{-0} + V_{QCD}. \quad (3.1.29)$$

de forma que cada *wee parton* numa configuração populosa carregue uma fração pequena $x = k^+/P^+$ do *momentum* total P^+ do hádron pai. A partir disso é possível verificar a característica temporal exótica deste modelo, pois o tempo típico das reações que os envolve os quarks de valência, t_q , é muito superior aos tempos das reações dos *wee pártons*:

$$t_{wee} = \frac{1}{k^-} = \frac{2xP^+}{k^2} \quad (3.1.30)$$

[¶]A operação de *boosts* no cone de luz quantizado comuta com o hamiltoniano do cone de luz na QCD. Esta propriedade não é satisfeita na operação usual de *boosts*, que leva a criação de partículas frente a ela.

$$t_q \approx \frac{2P^+}{k^2}, \quad (3.1.31)$$

e como, $x \ll 1$, tem-se que $t_{wee} \ll t_q$.

Desta forma, o CGC é uma teoria de campo efetiva baseada na separação dos graus de liberdade em duas categorias: *fontes de cor "congeladas"* e *campos de cor dinâmicos*. Esses dois tipos de graus de liberdade são separados por uma equação de grupo de renormalização, conhecida como a Equação de JIMWLK, que assegura a independência das quantidades físicas em relação ao corte (*cutoff*), a partir de uma escala Λ^+ que define a divisão entre as duas categorias.

Os glúons rápidos, que atuam como fontes de cor, possuem um momento longitudinal $k^+ > \Lambda^+$, permanecendo "congelados" devido à dilatação temporal de Lorentz, formando uma corrente de cor descrita pela densidade de carga de cor $\rho_a(x^-, x_\perp)$; os *wee partons* com $k^+ < \Lambda^+$ são descritos pelos campos de calibre usuais da QCD, A^μ . A interação entre esses dois tipos de glúons é acoplada de maneira eikonálica^{||}, ou seja, os glúons rápidos atuam como fontes para os glúons lentos. Embora a densidade de cor ρ_a permaneça constante durante uma colisão, ela varia de evento para evento, gerando uma distribuição probabilística $W_{\Lambda^+}[\rho]$, denominada de *função peso do CGC* que codifica todas as correlações da densidade de carga de cor no nível de corte Λ^+ .

A rede de cargas que os *wee parton* se acopla é representada por uma densidade de cor clássica por unidade de área transversa ρ , em uma distribuição randômica, de forma que:

$$\langle \rho^a(x_T) \rangle = 0; \quad \langle \rho^a(x_T) \rho^b(y_T) \rangle = \mu_A^2 \delta^{ab} \delta^{(2)}(x_T - y_T), \quad (3.1.32)$$

na qual,

$$\mu_A^2 = \frac{g_s^2 A}{2\pi R_A^2}, \quad (3.1.33)$$

é o quadrado da carga de cor por unidade de área transversa.

A função peso do CGC descreve a distribuição estatística de ρ e caracteriza as correlações da densidade de carga de cor no sistema. Os observáveis de interesse para um *wee* párton são construídos a partir de um campo clássico A_a^μ de forma que podem ser denotados por $O[A]$. Sendo assim, o valor esperado de um destes observáveis é obtido a partir do cálculo da média sobre as configurações possíveis de ρ ,

$$\langle O[A] \rangle_Y = \int W_Y[\rho] O[A[\rho]] d\rho. \quad (3.1.34)$$

A evolução de $W_{\Lambda^+}[\rho]$ com Λ^+ é governada pela equação funcional de JIMWLK:

$$\frac{\partial W_{\Lambda^+}[\rho]}{\partial \ln(\Lambda^+)} = -H_{JIMWLK} \left[\rho, \frac{\delta}{\delta \rho} \right] W_{\Lambda^+}[\rho], \quad (3.1.35)$$

onde H é o Hamiltoniano de JIMWLK, devido os trabalhos de *Jalilian-Marian, Iancu, McLerran, Weigert, Leonidov e Kovner*. A solução dessa equação é numérica e pode ser expressa por uma integral de caminho ou pela hierarquia de Balitsky, onde a equação de Balitsky Kovchegov [66, 67] (BK, melhor descrita no Apêndice C) é uma aproximação de campo médio dessa evolução, aplicável no limite de um número grande de cores,

^{||}O termo "eikonál" origina-se da teoria de ondas e da óptica, especificamente do conceito de aproximação eikonál, que se refere ao comportamento de ondas em meios onde a variação de fase é rápida em comparação com a amplitude. A palavra "eikonál" vem do grego eikōn, que significa "imagem" ou "aparência". Na física de altas energias e no CGC, essa ideia foi adaptada para descrever interações de partículas em cenários onde uma das componentes se move a uma velocidade extremamente alta. Neste contexto, o termo "eikonál" refere-se a uma situação onde as partículas "rápidas" atuam como uma fonte de campo fixo, criando uma espécie de "imagem congelada" para as partículas "lentas".

$N_c \rightarrow \infty$.

O modelo de *McLerran-Venugopalan* [68] (MV) oferece uma condição inicial física para a evolução de JIMWLK, especialmente útil para estudar distribuições de glúons em núcleos. Nesse modelo, a distribuição de carga de cor $W_{\Lambda_0^+}[\rho]$ é uma distribuição Gaussiana em ρ :

$$W_{MV}[\rho] = \mathcal{N} e^{-\int_k \frac{1}{2\mu^2(k)} \rho_a(k) \rho_a(-k)}, \quad (3.1.36)$$

sendo \mathcal{N} um fator de normalização. Contudo, esta hipótese é inadequada para descrever a evolução dos observáveis para pequeno- x pois ela não depende da rapidez, mas, de qualquer forma, essa abordagem permite tanto a motivação teórica da teoria efetiva quanto estudos fenomenológicos diretos em colisões e, no que tange a aplicação do CGC, será utilizada nesta tese.

3.2 A GERAÇÃO E AS FASES DO QGP

Esta seção foca na descrição dos processos que geram o QGP a partir da colisão de dois íons pesados e resume suas diferentes fases até o estágio final, chamado de congelamento, em que o plasma esfria e são detectados os hádrons resultantes do processo. Cada uma dessas fases é descrita por um número diferente de graus de liberdade, e uma ilustração das etapas desses estágios pode ser vista na Fig. [3.8]:

I. Considera-se, aqui, o referencial do centro de massa. Os íons são acelerados até atingir uma velocidade ultra-relativística (com um fator de *Lorentz* da ordem de 100), e é razoável aproximar que os íons se distribuem de forma esférica. O efeito da contração espacial, que se manifesta na direção de propagação, faz com que a matéria se distribua quase inteiramente em um disco longitudinal em relação à direção de movimento. A física de saturação é evidente, e os íons são compostos principalmente de glúons, com uma fração pequena de *momenta* ($x \ll 1$). Este sistema é bem descrito pelo modelo do *Colour Glass Condensate*.

II. A colisão ocorre, marcando o tempo inicial $\tau_0 = 0$ fm/c. Os núcleos se atravessam quase instantaneamente, mas deixam resíduos cujo tamanho varia dependendo da centralidade da colisão. Os primeiros processos que ocorrem são os chamados *duros*, que envolvem uma grande transferência de *momenta*. Esses processos são responsáveis por criar as condições necessárias para a geração posterior de quarks pesados, mésons vetoriais, jatos hadrônicos e fótons diretos, partículas que desempenham um papel importante no estado final do sistema.

III. A terceira etapa ocorre em aproximadamente $\tau = 0.2$ fm/c. A maior parte dos pártons é liberada pela colisão, criando um meio extremamente denso e fora do equilíbrio, cerca de dez vezes mais denso que o núcleo atômico. Nesta fase, os campos de glúons dominam o sistema, e as interações entre os pártons são altamente não-lineares. Este estado é denominado *glasma*, uma fase intermediária entre o estado inicial dos íons colididos e a formação do QGP propriamente dito.

IV. Esta fase é marcada por efeitos coletivos que indicam que os pártons interagem fortemente, como no *fluxo elíptico* [70]. Nesta fase, atinge-se a termalização do sistema em um tempo impressionantemente curto: $\tau = 1$ fm/c. Teorias quânticas de campos não são capazes de explicar um tempo tão curto, que é obtido a partir da teoria dos fenômenos de transporte, mais precisamente, da hidrodinâmica relativística.

V. A matéria do plasma continua a se expandir e esfriar, hadronizando ao atingir temperaturas abaixo do valor crítico, em aproximadamente $\tau = 10$ fm/c. O meio hadrônico resultante ainda é relativamente denso, e a troca de energia entre os constituintes mantém um equilíbrio térmico. Nesta etapa, em cerca de $\tau = 20$ fm/c, o sistema consiste em um gás de hádrons quente e denso. Quando os processos inelásticos, que convertem hádrons de uma espécie em outras, cessam, as abundâncias hadrônicas se estabilizam, e o sistema passa pelo *congelamento químico* (*chemical freeze-out*). Em seguida, ocorre o *congelamento térmico* (*thermal freeze-out*),

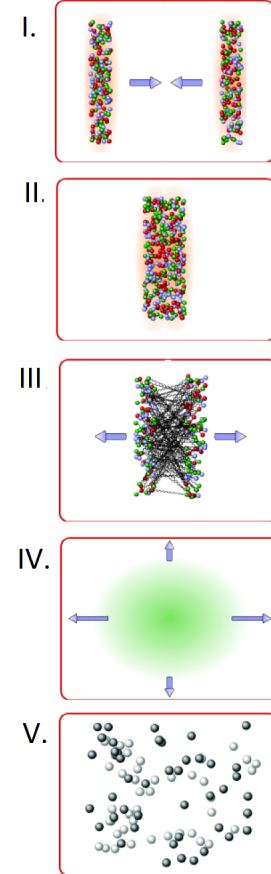


Figura 3.8: Representação das fases do QGP. Imagem adaptada de [69].

estágio em que o momento das partículas do meio não sofre mais alterações, ou seja, quando todas as colisões elásticas e inelásticas cessam. A partir desses pontos, as partículas do meio se tornam livres e se movem suavemente até os detectores finais.

3.3 AS TEORIAS EFETIVAS DE CADA FASE

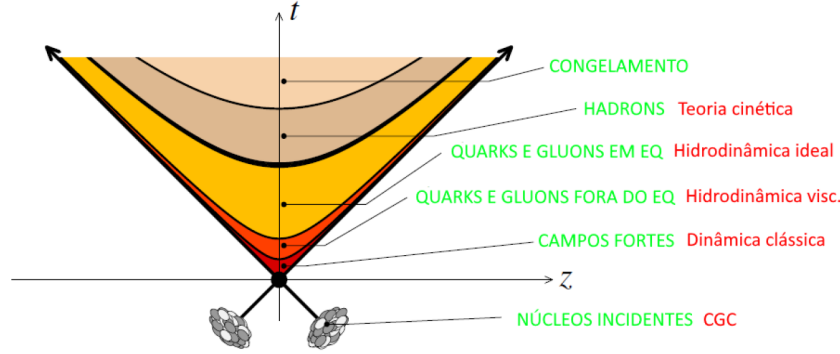


Figura 3.9: Representação das fases do QGP. Conforme o tempo evolui os graus de liberdade do sistema mudam de forma que diferentes teorias físicas se tornam convenientes para tratar cada uma delas. Imagem adaptada de [55].

Como fora discutido anteriormente, o QGP possui diferentes fases durante a sua evolução. Algumas das propriedades que aparecem nas diferentes etapas são situações de não equilíbrio, efeitos de curto alcance, não-homogeneidade, espaço de fase de N corpos, produção de ressonância ou de partículas, dinâmica coletiva e congelamento. Esta gama de características pode muito bem ser estudada utilizando fenômenos de transporte. Dessa forma é possível utilizar teorias de transporte microscópicas, macroscópicas (hidrodinâmica) ou híbridas a fim de uma descrição temporal completa do QGP. Sendo assim, as próximas sub-seções dedicam-se num breve resumo das duas principais teorias utilizadas a fim de construir e caracterizar cada etapa do sistema: a *Hidrodinâmica Relativística* e a *Teoria Cinética*, em detrimento do CGC que já foi exposto anteriormente e é responsável pelos estágios iniciais do QGP.

3.3.1 Hidrodinâmica Relativística

A concepção moderna descreve a hidrodinâmica como uma teoria efetiva para baixas energias da teoria quântica de campos. Esta teoria descreve bem as fases intermediárias do QGP. Suas equações básicas descrevem a conservação de corrente, energia e *momentum*,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu j_i^\mu = 0, \quad (3.3.1)$$

sendo j_i^μ com $i = B, S, Q$ a corrente conservada e $T^{\mu\nu}$ é o tensor de energia-*momentum*. A velocidade de fluxo local u^μ e o tensor de rank 2 perpendicular ao fluxo $\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu$ podem ser utilizados a fim de separar o tensor $T^{\mu\nu}$ e as correntes conservadas em componentes *tipo-espaço* e *tipo-tempo*, fazendo com que:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \epsilon u^\mu u^\nu - p \Delta^{\mu\nu} + W^\mu u^\nu + W^\nu u^\mu + \pi^{\mu\nu}, \\ j_i^\mu &= n_i u^\mu + V_i^\mu. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Nestas equações $\epsilon = u_\mu T^{\mu\nu} u_\nu$ é a densidade energética, $p = p_s + \Pi = -\frac{1}{3} \Delta_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ é soma das pressões hidrostáticas e volumétrica, $W^\mu = \Delta_\alpha^\mu T^{\alpha\beta} u_\beta$ é a corrente de energia, $n_i = u_\mu j_i^\mu$ é a densidade de cargas, $V_i^\mu = \Delta_\nu^\mu j_i^\nu$ é a corrente de cargas e $\pi^{\mu\nu} \equiv \langle T^{\mu\nu} \rangle$ é o tensor de stress de cisalhamento. Os *brackets* na definição do tensor de stress de cisalhamento indicam a seguinte operação matemática,

$$\langle A^{\mu\nu} \rangle = \left[\frac{1}{2} (\Delta_\alpha^\mu \Delta_\beta^\nu + \Delta_\beta^\mu \Delta_\alpha^\nu) - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta} \right] A^{\alpha\beta}. \quad (3.3.3)$$

Para simplificar a discussão de interesse, considera-se agora o caso de uma carga conservada e denota-se a corrente bariônica por $j_\mu = j_B^\mu$, então, cada termo da corrente e do tensor de energia-*momentum* pode ser explicitamente separado entre *ideal* e *dissipativa*:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= T_{id}^{\mu\nu} + T_{dis}^{\mu\nu} = [\epsilon u^\mu u^\nu - p_s \Delta^{\mu\nu}]_{id} + [-\Pi \Delta^{\mu\nu} + W^\mu u^\nu + W^\nu u^\mu + \pi^{\mu\nu}]_{dis}, \\ j_\mu &= j_{id}^\mu + N_{dis}^\mu = [n u^\mu]_{id} + [V^\mu]_{dis}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

A negligenciação dos termos dissipativos configuram a *hidrodinâmica ideal*. Neste caso, as soluções para a equação hidrodinâmica [3.3.1] com um dado conjunto de condições iniciais descreve a evolução espaço-temporal de seis variáveis, sendo três delas de estado, $\epsilon(x)$, $p(x)$ e $n(x)$. As três restantes são as componentes espaciais da velocidade de fluxo u^μ . Contudo, as equações de conservação [3.3.1] compõem apenas 5 equações independentes. A sexta equação relacionando p e ϵ terá de ser adicionada para que o problema seja resolvido. Uma boa descrição é a equação de estado que provém do cálculo termodinâmico da QCD em altas temperaturas com potenciais químicos baixos [71],

$$\epsilon - 3p = -\frac{T}{V} \frac{d \ln \Xi}{d \ln a}, \quad (3.3.5)$$

sendo T a temperatura, V a pressão, Ξ a grande função de partição canônica e a é o espaçamento na rede^{**}. A partir desta função de estado ainda é possível realizar a descrição da matéria fortemente interagente abaixo da temperatura de desconfinamento T_c , onde todas as quantidades termodinâmicas são bem descritas por um gás de ressonância hadrônica primeiramente proposto por Hagedorn [72],

$$\epsilon - 3p = \sum_{m_i \leq m_{\max}} T^4 \frac{d_i}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\eta_i)^{k+1}}{k} \left(\frac{m_i}{T} \right)^3 K_1 \left(\frac{km_i}{T} \right), \quad (3.3.6)$$

sendo $K_1(km_i/T)$ é a função modificada de Bessel, tendo espécies de diferentes partículas com massa m_i , fator de degenerescência d_i , $\eta_i = \pm 1$ com +1 para férmions e -1 para bósons. A soma é realizada para todas as partículas até a massa de ressonância $m_{\max} = 2,5 \text{ GeV}$.

Na literatura é possível encontrar duas definições de fluxo; uma relacionada ao fluxo de energia devida a Landau [73] e outra proposta por Eckart [74] que refere-se ao fluxo de carga conservada. Respectivamente,

^{**}Utilizando cálculos no modelo da *lattice*-QCD, uma abordagem não-perturbativa à cromodinâmica. Consiste numa teoria de calibre na forma discretizada, onde os pontos do espaço-tempo correspondem aos pontos de uma rede 4-dimensional finita.

$$u_L^\mu = \frac{T_v^\mu u_L^\nu}{\sqrt{u_L^\alpha T_\alpha^\beta T_{\beta\gamma} u_L^\gamma}} = \frac{1}{e} T_v^\mu u_L^\nu, \quad (3.3.7)$$

$$u_E^\nu = \frac{j^\nu}{\sqrt{j_\nu j^\nu}}.$$

Na definição *Landau* tem-se $W^\nu = 0$, enquanto na *Eckart*: $V^\nu = 0$. Se for tratada a hidrodinâmica ideal as duas definições se tornam equivalentes. Particularmente, na colisão de íons pesados descreve-se a evolução da matéria em uma região com número de decomposição bariônica nula, $j = 0$, como nas regiões de rapidez média no LHC e no topo energético do RHIC, fazendo com que a definição de *Landau* seja mais apropriada no caso de interesse.

Agora, para resolver as equações hidrodinâmicas sem descontar os termos dissipativos é usual a introdução de duas definições fenomenológicas, também chamadas de *equações constitutivas*, para o tensor de stress e a pressão volumétrica [75],

$$\pi^{\mu\nu} = 2\eta \langle \nabla^\mu u^\nu \rangle, \quad (3.3.8)$$

$$\Pi = -\zeta \partial_\mu u^\mu = -\zeta \nabla_\mu u^\mu.$$

Os novos coeficientes η e ζ são chamados de viscosidade de arrasto e de volume, respectivamente.

Para o fluxo de *Bjorken* invariante sobre *boosts* [76], com uma velocidade na direção z , v_z , tem-se,

$$u_{BJ}^\mu = \frac{x^\mu}{\tau} = \frac{t}{\tau} \left(1, 0, 0, \frac{z}{t} \right), \quad (3.3.9)$$

sendo τ o tempo próprio. Com esta definição é possível encontrar a equação de movimento [77],

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = -\frac{\epsilon + p_s}{\tau} \left(1 - \frac{4}{3\tau T} \frac{\eta}{s} - \frac{1}{\tau T} \frac{\zeta}{s} \right), \quad (3.3.10)$$

s é a densidade de entropia. Se forem desconsiderados os dois termos à esquerda, obtém-se a solução de *Bjorken* para a hidrodinâmica ideal [76]. Estes dois últimos termos descrevem a compressão da densidade de energia devido as correções viscosas. A primeira esta relacionada com a viscosidade de arrasto, η/s . Agora, ζ/s reflete uma propriedade intrínseca aos fluidos.

A hidrodinâmica garante uma descrição efetiva de um sistema que está em equilíbrio térmico local e pode ser derivada da descrição cinética feita a partir de expansões em séries da 4-corrente entrópica $S^\mu = s u^\mu$ em gradientes das variáveis termodinâmicas locais. Os gradientes de ordem zero refletem a hidrodinâmica ideal, fazendo com que os termos de maior ordem correspondam às grandezas dissipativas que aparecem por causa dos processos termodinâmicos irreversíveis no fluido, como por exemplo, a energia de fricção dissipada entre dois elementos do fluido em movimento relativo. Desta forma, a equação de *Navier-Stokes* [3.3.8], que conta apenas com dependências lineares do gradiente de velocidade, resulta em alguns problemas: O fluxo termodinâmico em $\pi^{\mu\nu}$ ou Π que é uma função puramente local do gradiente de velocidade desaparece ou se manifesta instantaneamente acarretando influências não causais, ocasionando instabilidades numéricas.

Para resolver este problema, deve-se levar em consideração a inclusão de termos de segunda ordem nos gradientes na implementação de um fluido relativístico dissipativo, obtendo-se equações do tipo de relaxação para $\pi^{\mu\nu}$ e Π com tempos de relaxação macroscópicos $\tau_\pi \equiv 2\eta\alpha$ e $\tau_\Pi = \zeta\beta$. Qualitativamente estes tempos

refletem a diferença de duração entre a manifestação de gradientes termodinâmicos que conduzem o sistema para fora do equilíbrio local e a consolidação de fluxos dissipativos em resposta a estes gradientes, restaurando a causalidade.

3.3.2 Teoria Cinética

A teoria cinética se encaixa bem nos estágios finais do plasma, quando o sistema está mais diluído e começa a hadronização rumo ao congelamento e por fim a detecção da multiplicidade de partículas finais. Este modelo leva em conta uma ampla gama de possibilidades de interação entre as partículas, podendo ser tanto elásticas como inelásticas.

As quantidades relevantes para a teoria cinética é a descrição a partir de densidades de partículas no espaço de fase, que deve ser calculado para cada espécie de partícula embebida no QGP. Essa quantidade é adimensional e mede o número de partículas de um dado tipo por unidade de espaço de fase dividida pelo número de escolhas para cada grau de liberdade discreto possível. Tomando o caso dos glúons, que dominam os estágios iniciais do QGP, tem-se a densidade f ,

$$f \equiv \frac{1}{2(N_c^2 - 1)} \frac{dN_g}{d^3x d^3p}. \quad (3.3.11)$$

Neste caso, $2(N_c^2 - 1)$ é o fator de degenerescência para os glúons, de modo que $f(\vec{p}, \vec{x}, t) d^3x d^3p$ representa o número médio de glúons dentro do volume d^3x em torno do ponto \vec{x} com um momento entre \vec{p} e $\vec{p} + d^3p$ no tempo t . A evolução no tempo da distribuição de um dado conjunto de partículas acontece através da equação de Boltzmann [78],

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_c \cdot \nabla + \vec{F}_{ext} \cdot \nabla_p \right) f(\vec{x}, \vec{p}, t) = C[f]. \quad (3.3.12)$$

Nesta equação, f é a densidade no espaço de fase de um dado tipo de partícula no QGP, $\vec{v}_p = \vec{p}/E_p$ é a velocidade dos glúons e \vec{F}_{ext} é uma força externa genérica.

3.3.3 Alguns Resultados das Teorias Efetivas

A multiplicidade de partículas no estado final da colisão é um ponto chave nas fases em que os processos se deram, gerando uma miríade de complexidades que variam de jatos hadrônicos aos quarks pesados. Nesta breve sub-seção, foca-se principalmente nos sucessos obtidos das fases intermediárias descritas pela hidrodinâmica que inspiram mais confiabilidade por ter o poder de prever resultados desde os primeiros experimentos no RHIC ao LHC.

Na descrição inicial do estado de interação hadrônica ou nuclear do tipo $(A + B)$ o comprimento de onda de *de Broglie* do núcleo incidente é muito menor que as distâncias intra-nucleares do núcleo alvo. Para cada núcleo incidente, as posições dos núcleons do alvo parecem congeladas no tempo. Após cada colisão núcleon-núcleon (NN), seja inelástica ou elástica, ambos os núcleons participantes adquirem um *momentum* transversal na direção da incidência, que na maioria dos casos é muito pequeno se comparado com a componente longitudinal da mesma grandeza, fazendo com que os *momenta* antes e depois da colisão seja aproximadamente o mesmo $p_z \approx p'_z$. Agora, altas energias de incidência junto de pequenos ângulos de espalhamento indicam uma interação dominada por um grande *momentum* orbital ℓ . Neste caso, é conveniente realizar modificações na expansão de ondas parciais da amplitude de espalhamento introduzindo um parâmetro de impacto

$b = (1 + \ell)/p$. Nestas circunstâncias entra em cena o modelo que utiliza de aproximações semi-clássicas proposto por *Glauber* [79], que trata a colisão nuclear como múltipla das NN-interações [80]. Os núcleons que sofreram pelo menos uma das NN colisões é chamado de *participante*, e os que não sentiram nenhuma são os *espectadores*. O número total de espectadores e participantes segue a regra $N_{es} + N_p = A + B$. Além disso, é válida a restrição sob o número de colisões N_{col} , que deve condizer com a desigualdade, $N_{col} \leq N_p/2$.

Experimentalmente é medido o número de partículas carregadas N_{ch} e, grosso modo, os ingredientes do modelo podem ser arranjados na forma,

$$\frac{dN_{ch}}{d\delta} \propto (N_p \leftrightarrow N_{col}) \propto b \rightarrow \delta. \quad (3.3.13)$$

Neste diagrama a derivada na esquerda é o observável experimental, chamada de *multiplicidade*^{††}, que acaba sendo proporcional ao número de participantes ou de colisões segundo o modelo de *Glauber*. O parâmetro de impacto b é estabelecido a partir de simulações onde a finalidade é a determinação da centralidade δ da colisão (Fig. [3.10]).

Agora, uma das previsões mais bem estabelecidas do comportamento coletivo da matéria criada na colisão de íons ultra relativísticos ocorre nas colisões *não-centrais*, devido a evoluções transversais que ocorrem devido os gradientes de pressão da anisotropia espacial da densidade inicial (Fig. [3.11]) [82]. Esta anisotropia é quantificada pelos coeficientes de *Fourier* [83],

$$v_n = \langle \cos[n(\phi - \Psi_n)] \rangle, \quad (3.3.14)$$

com ϕ representando o ângulo azimutal da partícula, Ψ_n o ângulo simétrico do plano do estado inicial e n é a ordem do harmônico. No caso de interesse, uma colisão *não-central* de íons pesados, o eixo do feixe e o parâmetro de impacto definem o plano de reação azimutal Ψ_{RP} . Para um núcleo com uma distribuição suave de matéria, o plano simétrico é o plano de reação, $\Psi_n = \Psi_{RP}$, fazendo com que os coeficientes de *Fourier* ímpares sejam nulos por simetria.

Contudo, as flutuações na distribuição de matéria faz com que o plano de simetria varie evento por evento em torno do plano de reação. Este plano é determinado pelos núcleons participantes e é justamente chamado de plano participante Ψ_{PP} [85]. Como os planos de simetria Ψ_n não são medidos experimentalmente, os coeficientes do fluxo anisotrópico são estimados a partir de correlações medidas entre as partículas observadas [86] como na Fig. [3.12], em que o termo dominante v_2 é expresso em função de várias energias do centro de massa do colisor em questão (esquerda) e a para diferentes valores dos *momenta* transversos para partículas carregadas.

A partir deste panorama os resultados envolvendo os cálculos da hidrodinâmica tomam espaço pela capacidade em prever uma viscosidade não nula por unidade de entropia η/s (Fig. [3.13]) relativamente baixa.

^{††}Não se confunde com o conceito de multiplicidade Ω desenvolvido no estudo da entropia, embora este observável também seja utilizado para estimar a entropia nas colisões.

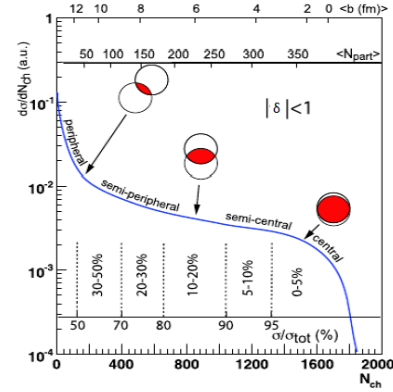


Figura 3.10: A definição da centralidade da multiplicidade de partículas carregadas no estado final N_{ch} e a sua correlação com o parâmetro de impacto médio $\langle b \rangle$ e o número médio de núcleos participantes $\langle N_p \rangle$. Imagem adaptada da referência [81].

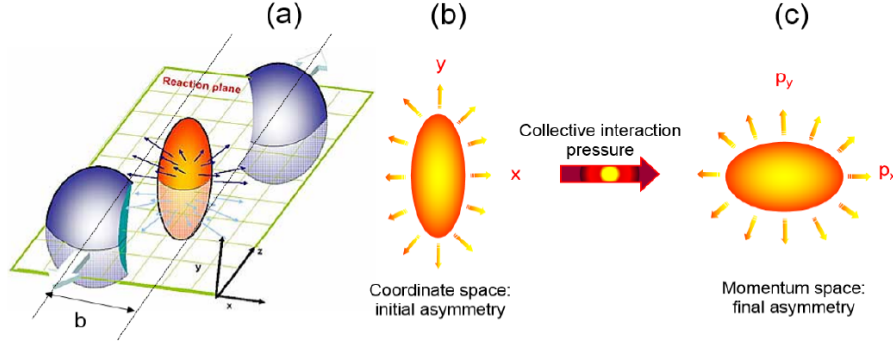


Figura 3.11: Um colisão *não-central* de dois núcleons geram uma região de interação (a) onde a anisotropia espacial da região gerada ocasiona gradientes de pressão no plano transversal (b). Este processo gera no final uma anisotropia de *momentum* nas partículas geradas. Figura reproduzida da referência [84].

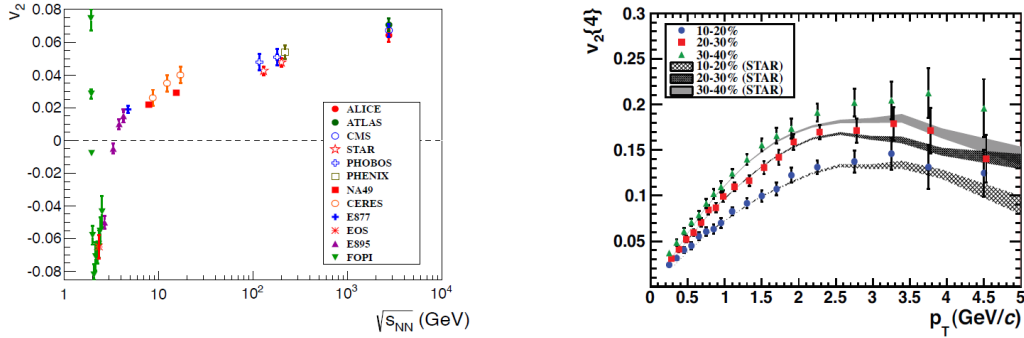


Figura 3.12: (Esquerda) Resultados dos dados do coeficiente v_2 em respeito a energia do feixe (esquerda), reproduzido da referência [87]. (Direita) Fluxo elíptico em função dos *momenta* transversal para partículas carregadas. Reproduzido da referência [86]

Estes resultados podem ainda ser comparados com os que dizem respeito a trabalhos envolvendo teorias de campos conformais^{††} (que não é o caso da QCD). Nestas teorias a variação da ação do sistema em respeito a métrica adjacente é proporcional ao tensor de *stress* e uma variação na métrica será proporcional ao traço do tensor. Como consequência o traço do tensor de *stress* deve ser nulo e isto nem sempre ocorre, por isso o fenômeno é chamado de anomalia conformal ou de anomalia de traço. Dessa forma, nesta teoria, η/s deveria ser a priori 0, mas a anomalia de traço considerando matéria gluônica para termos de ordem $\eta/s = \mathcal{O}(0, 1 - 1)$ para cálculos numa teoria de calibre com o grupo $SU(3)$ na rede obtém um valor de $\eta/s = 1/4\pi$ [88] concordando com os resultados das simulações da Fig. [3.13].

Ao examinar a expressão [3.3.10], observa-se que a teoria também é capaz de prever o tempo próprio, que, nas fases de geração do fluxo, corresponde ao tempo de termalização do sistema, τ_T . O valor obtido é $\tau_T = 1\text{fm}/c$ [7], isto é, na geração do plasma e do fluxo, o sistema é capaz de se organizar e termalizar em um curto período. Contudo, se for utilizada alguma teoria que leve em conta os efeitos microscópicos do sistema, como a QCD, não é possível prever um tempo tão curto, sendo ainda um escopo de estudo em aberto a respeito do QGP. Fisicamente, este curto tempo de termalização está relacionado com uma criação de entropia

^{††}Teoria quântica de campos que é invariante a uma transformação conformal, que pode ser clássica ou quântica. Esta transformação é realizada numa métrica arbitrária que é covariante com uma transformação de Weyl ($g_{ab} \rightarrow e^{-2\omega(x_{\mu})} g_{ab}$). No caso quântico esta invariância inaltera a função de partição Ξ do sistema.

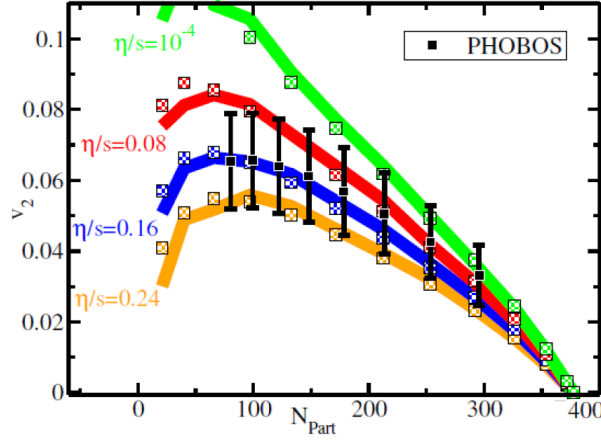


Figura 3.13: Dados modelados por simulações hidrodinâmicas com valores de η/s numa faixa de $[0,08-0,2]$. Os dados representados por pontos pretos são resultados experimentais. Resultados de [89].

abrupta nos estágios iniciais das colisões, sendo o principal objetivo deste trabalho determinar como essa entropia é gerada. A partir de agora, serão apresentados modelos que buscam cumprir este objetivo, sendo o primeiro deles a ser abordado a entropia dinâmica dos estados densos da QCD.

3.4 A ENTROPIA DINÂMICA NA QCD

Agora será apresentada a primeira noção de entropia estudada neste trabalho, relacionada aos estados densos da QCD. Esses estados podem ocorrer em diferentes contextos físicos, mas, em geral, implicam em uma concentração elevada de glúons e outros pártons nos estágios iniciais de uma colisão. Para uma descrição adequada, o meio hadrônico é bem explicado pelo CGC, caracterizado pela física de saturação em uma configuração densa. Esta descrição também pode ser utilizada para colisões pA no regime de altas energias. Desta forma, estes estados podem ser descritos teoricamente na QCD em um regime de fraco acoplamento por meio de uma evolução não linear da energia onde as condições iniciais são descritas por um estado denso.

A evolução da QCD ocorre em relação à rapidez, Y , que, com o seu crescimento, aumenta a densidade de pártons até que o regime de saturação, delimitado por Q_s , seja atingido, resultando em um CGC. Sendo $Y = -\ln x$, a escala de saturação, descrita na Eq. [3.1.25], pode ser escrita como:

$$Q_s^2(Y) = (x_0/x)^\lambda = x_0^\lambda e^{\lambda Y}, \quad (3.4.1)$$

Assim, o estado CGC é caracterizado, entre outras propriedades, por um tamanho transversal limite $R_s \sim 1/Q_s$. Portanto, o tamanho R_s do párton diminui conforme a rapidez aumenta. Assim, com o aumento da energia, a densidade partônica se torna alta o suficiente para que ocorram reações de recombinação envolvendo os glúons e instaurando o regime de saturação.

Nesta situação, propriedades como o geometric scaling são determinantes, fazendo com que as Distribuições de Glúons não Integradas (Unintegrated Gluon Distributions, UGD's), $\phi(k, Y)$, se tornem funções de uma única variável $\tau = k^2/Q_s^2 = k^2 R_s^2$, sendo k^2 o módulo quadrado do *momentum* transversal portado pelos glúons, assim:

$$\phi(k, Y) d^2 k \sim \phi(\tau) R_s^2 d^2 k. \quad (3.4.2)$$

Inicialmente, um estado pode ser associado a um valor de rapidez Y_1 , que, devido à evolução na rapidez no regime denso, acarretará em um novo valor Y_2 . Essa evolução descreve como o sistema aumenta sua densidade de pártons, formando um meio denso de glúons no CGC. Desta forma, o valor inicial, Y_1 , deve corresponder a um estado que já possa ser descrito pela física de saturação e, para isso, neste trabalho foi utilizado $Y \approx 4.6$ ($x = 10^{-2}$). Essa transição para um regime de maior densidade implica um comportamento em que os glúons se ramificam e se recombinaem a taxas que se equilibram, caracterizando o estado de saturação. A variação de rapidez representa um parâmetro dinâmico que altera a energia do sistema. Embora seja um processo fora do equilíbrio, ele gera um estado de saturação estável, permitindo que o sistema evolua para um meio CGC mais denso à medida que a energia aumenta com a rapidez.

Na Mecânica Estatística de não Equilíbrio, utilizando a identidade de Hatano-Sasa (Sub-seção [2.7.2]), uma distribuição de estados estacionários, $P(z; \lambda)$, pode ser utilizada para descrever a probabilidade de encontrar o sistema em uma configuração específica no espaço de fase z para um dado valor do parâmetro dinâmico λ . A transição de λ_1 para λ_2 representa uma mudança no parâmetro dinâmico ao longo do tempo, resultando em uma nova configuração de equilíbrio, $P_2(z; \lambda_2)$. Na física de altas energias, considerando as seguintes comparações:

- A variável do espaço de fase z corresponde ao momento transversal dos pártons k ;
- A variável dinâmica λ corresponde à rapidez Y ;
- A distribuição dos estados estacionários $P(z; \lambda)$ corresponde a $P(k, Y)$.

Desta forma, é possível definir uma distribuição de probabilidades para o *momentum* transversal dos glúons $P(k, Y)$ entre k^2 e $k^2 + d^2 k$ escrita em termos das UGD's e dada por,

$$P(k, Y) d^2 k = \frac{\phi(k, Y)}{\int \phi(k, Y) d^2 k} d^2 k. \quad (3.4.3)$$

Esta definição está sujeita a condição de normalização,

$$\int P(k, Y) d^2 k = \int P(\tau) d\tau = 1. \quad (3.4.4)$$

Utilizando a identidade de Hatano-Sasa (Eq. [2.7.4]), se tem:

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left[- \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{d}{dY} \ln P(k, Y) dY \right] \right\rangle_{Y_2} &= \left\langle \exp \left[- \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{dP}{P(k, Y)} \right] \right\rangle_{Y_2} = \int P(k, Y_2) e^{-\ln \frac{P(k, Y_2)}{P(k, Y_1)}} d^2 k \\ &\equiv \int P(k, Y_1) d^2 k \equiv 1. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Nesta equação, $\langle \dots \rangle_{Y_2}$ representa uma média calculada sobre a distribuição de probabilidades no estado Y_2 e o termo $\int_{Y_1}^{Y_2} \frac{d}{dY} \ln P(k, Y) dY$ refere-se à variação no logaritmo da distribuição de probabilidades ao longo do intervalo de rapidez de Y_1 a Y_2 . Agora, utilizando argumentos da mecânica estatística, o aumento da rapidez Y que faz com que o tamanho $R_s(Y)$ diminua, i.e., $R_s(Y_1) > R_s(Y_2)$, para $Y_2 > Y_1$, pode ser interpretado como uma compressão. Esta compressão altera a distribuição de probabilidade dos pártons, $P(k, Y)$, de maneira a compatibilizar esta distribuição com a identidade de Hatano-Sasa.

Utilizando estes conceitos, é possível a definição da *entropia dinâmica* da QCD [21], $\Sigma^{Y_1 \rightarrow Y_2}$, num meio descrito pelo CGC com uma rapidez Y_2 , provinda da evolução QCD de $Y_1 \rightarrow Y_2$. A entropia dinâmica é definida

como,

$$\Sigma^{Y_1 \rightarrow Y_2} = \left\langle \ln \frac{P(k, Y_2)}{P(k, Y_1)} \right\rangle_{Y_2} \equiv \int d^2 k P(k, Y_2) \ln \left[\frac{P(k, Y_2)}{P(k, Y_1)} \right]. \quad (3.4.6)$$

Esta grandeza mede a quantidade de desordem criada no meio CGC devido a evolução de rapidez. Percebe-se que ela é matematicamente equivalente à informação mútua (Eq. [2.6.1]), de forma que transformações de variáveis envolvendo o *geometric scaling* $\tau = k^2/Q_s^2$ não irão alterar o valor da entropia dinâmica. Desta forma, agora serão dispostas algumas das características da entropia dinâmica da QCD, em especial, sua positividade, relação do *geometric scaling* em termos da Mecânica Estatística de não Equilíbrio e a entropia dinâmica de um estado CGC.

3.4.1 Positividade da Entropia Dinâmica da QCD

Inicialmente, considera-se a *Desigualdade de Jensen*, que é um resultado fundamental que se aplica a funções convexas. Em termos simples, ela afirma que para uma função convexa e uma variável aleatória X , a média da função é sempre maior ou igual a função da média, isto é:

$$e^{\langle X \rangle} \leq \langle e^X \rangle. \quad (3.4.7)$$

Desta desigualdade, se tem:

$$\ln e^{\langle X \rangle} \leq \ln \langle e^X \rangle, \quad \therefore \quad \langle X \rangle \leq \ln \langle e^X \rangle. \quad (3.4.8)$$

Utilizando $X = -\ln P(k, Y_2)/P(k, Y_1)$, é possível relacionar este resultado com a entropia dinâmica, pois:

$$\begin{aligned} \Sigma^{Y_1 \rightarrow Y_2} &= \left\langle \ln \frac{P(k, Y_2)}{P(k, Y_1)} \right\rangle_{Y_2} \geq -\ln \left\langle e^{-\ln \left[\frac{P(k, Y_2)}{P(k, Y_1)} \right]} \right\rangle_{Y_2}, \\ &= -\ln \int d^2 k P(k, Y_2) \frac{P(k, Y_1)}{P(k, Y_2)} = -\ln \underbrace{\int d^2 k P(k, Y_1)}_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Isto, para todo $Y_2 \leq Y_1$, de forma que a condição de positividade é obtida para qualquer aumento de rapidez.

3.4.2 Geometric scaling em Termos da Termodinâmica de Não-Equilíbrio

Considerando, $\tau_n = k^2/Q_s^2(Y_n)$ e $R_n = R_s^2(Y_n)$, a Eq. [3.4.5] vai ser escrita em termos da variável de escala τ . Para isso, utilizando a condição de normalização da Eq. [3.4.3]:

$$P(k, Y) = \frac{\phi(k, Y)}{\int \phi(k, Y) d^2 k} = \frac{\phi(\tau) R_s^2}{\int \phi(\tau) R_s^2 d^2 k} = \frac{R_s^2}{\pi} P(\tau). \quad (3.4.10)$$

Nesta equação foi utilizada a substituição de variáveis $d\tau = dk^2 R_s^2$. Agora, avaliando a identidade de Hatano-Sasa na QCD (Eq. [3.4.5]) em termos da variável de escala τ :

$$\left\langle \exp \left[-\ln \frac{P(k, Y_2)}{P(k, Y_1)} \right] \right\rangle_{Y_2} = \left\langle \exp \left[-\ln \frac{P(\tau_2) R_2^2}{P(\tau_1) R_1^2} \right] \right\rangle_{Y_2} = \underbrace{\int d^2 k P(k, Y_2)}_1 e^{-\ln \frac{R_2^2}{R_1^2}} = e^{-\ln \frac{R_2^2}{R_1^2}}. \quad (3.4.11)$$

Ou seja:

$$\left\langle \exp \left[-\ln \frac{P(\tau_2)R_2^2}{P(\tau_1)R_1^2} \right] \right\rangle_{Y_2} = e^{-\ln \frac{R_2^2}{R_1^2}}. \quad (3.4.12)$$

Esta equação pode ser relacionada com a identidade de Jarzinsky (Eq. [2.7.2]). Esta identidade conecta a distribuição estocástica dos trabalhos termodinâmicos no processo $A \rightarrow B$ ao balanço de energia livre ΔF entre dois estados de equilíbrio $A \rightarrow C$. Uma característica interessante é que a quantidade de trabalho dissipativo $W_{\text{Dif}} \equiv W - \Delta F$, realizada durante o processo $A \rightarrow B$, é então relacionada à produção de entropia $\Delta S = \frac{\langle W \rangle - \Delta F}{T} \geq 0$, caso o estado B consiga relaxar para a temperatura T , mantendo o parâmetro de condução constante.

Ao comparar a identidade de Jarzinsky com a Eq. [3.4.12], percebe-se que a expressão $\ln \frac{R_2^2}{R_1^2}$ corresponde ao logaritmo da razão do espaço de fase disponível para as dimensões R_2^2 em relação a R_1^2 . Esse termo representa a mudança na energia livre de uma partícula de um gás ideal contido em uma "caixa" bidimensional quando seu tamanho é reduzido de R_1 para $R_2 < R_1$. Assim, uma interpretação termodinâmica da relação da QCD obtida na Eq. [3.4.12] é que a modificação da rapidez total $Y_1 \rightarrow Y_2$ induz uma modificação no conjunto de estados do CGC com um tamanho de saturação reduzido R_2 , resultando em uma entropia eventualmente gerada pela posterior relaxação.

Esta análise leva às seguintes comparações heurísticas entre as variáveis da entropia dinâmica e as variáveis termodinâmicas:

$$\begin{aligned} \ln \frac{P(\tau_2)R_2^2}{P(\tau_1)R_1^2} &\rightarrow \frac{W}{T}, \\ \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} &\rightarrow \frac{\Delta F}{T}, \\ \ln \frac{P(k, Y_2)}{P(k, Y_1)} &\rightarrow \frac{W - \Delta F}{T} \equiv \frac{W_{\text{Dif}}}{T}, \\ \Sigma_{Y_1 \rightarrow Y_2} = \left\langle \ln \frac{P(k, Y_1)}{P(k, Y_2)} \right\rangle_{Y_2} &\rightarrow \Delta S. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

onde ΔS , no contexto termodinâmico, é a produção de entropia (pelos graus de liberdade dos glúons) devida à compressão $R_1 \rightarrow R_2$ quando o sistema relaxa para um estado à mesma temperatura T inicial, mas dentro do domínio restrito de tamanho R_2 .

3.4.3 Entropia Dinâmica de um Estado CGC

Considerando a evolução $Y_1 \rightarrow Y_2$ e $R_1 \rightarrow R_2$, a adição das contribuições individuais no cálculo da densidade de entropia dinâmica dS/dy para um estado final CGC será a soma sobre todos os graus de liberdade, chamado de multiplicidade de cor $N_c^2 - 1$ e o número de ocupação dos glúons no espaço de coordenadas longitudinal $\sim 1/4\pi N_c \alpha_s$. Para os graus de liberdade transversais, é preciso tomar conta do número médio de "células transversais" R_T^2/R_2^2 com uma rapidez inicial Y_1 , sendo R_T o tamanho do alvo hadrônico e o número médio de graus de liberdade dos glúons dentro de uma célula μ . Desta forma, obtém-se a expressão,

$$\frac{dS}{dy} = \frac{C_F}{2\pi\alpha_s} \frac{R_T^2}{R_1^2} \mu^{\Sigma_{Y_1 \rightarrow Y_2}}. \quad (3.4.14)$$

Neste estudo, desconsideram-se os fatores de correção devido aos efeitos das correlações gluônicas, considerando a aproximação com o gás ideal.

Quanto ao número médio de graus de liberdade dos glúons, μ , é possível utilizar modelos gaussianos para a UGD no CGC, como o da referência [61], para obter a dS/dy e comparar o resultado com a expressão (25) obtida no trabalho [90], em que a saturação relacionada a esta UGD permite a introdução da entropia termodinâmica com $Q_s^2(Y) = 2\pi T$. A partir dessa relação, o número médio de graus de liberdade gluônicos é identificado como $\mu = \frac{3\pi}{2}$, sendo este o valor a ser utilizado nesta tese.

Capítulo 4

Entropia de Emaranhamento

Neste capítulo, será abordada a produção de entropia devido ao fenômeno do emaranhamento quântico. Para compreender como esse fenômeno está relacionado à criação de entropia na física de altas energias, ele será brevemente introduzido, com ênfase em suas principais características.

Na sequência, a entropia de emaranhamento será definida, assim como um conjunto de estratégias que podem ser utilizadas para sua obtenção. Por fim, serão apresentados os cálculos de entropia de emaranhamento em três situações envolvendo a física de altas energias: (1) emaranhamento entre as regiões espaciais medidas e não medidas em um DIS; (2) emaranhamento entre partículas incidentes e espalhadas em colisões elásticas; e (3) emaranhamento entre quarks de valência e *wee* pártons no CGC.

4.1 EMARANHAMENTO QUÂNTICO

Em 1935, A. Einstein, B. Podolski e N. Rosen publicaram um artigo contestando a completude da Mecânica Quântica [91]. Nesta publicação, os físicos propuseram um experimento mental chamado *paradoxo EPR*, que tinha como principal objetivo provar que a única interpretação sustentável no universo quântico é a *realista** em contraste total com a escola de *Copenhague*†.

David Bohm propôs uma simplificação do paradoxo EPR, que se foca no processo de medição do spin de uma partícula. Nesta formulação, é considerado o decaimento do méson pi em um elétron e em um pósitron,

$$\pi^0 \rightarrow e^- + e^+$$

Se o pión está em repouso, o elétron e o pósitron se movem em direções opostas, devido à conservação do *momentum* linear. Além disso, o pión tem spin 0, de forma que a conservação do *momentum* angular exige que o pósitron e o elétron estejam na configuração singleto.

Sendo assim, se o elétron possuir spin para cima, o pósitron possui spin para baixo, e vice-versa. O corpo teórico da mecânica quântica é incapaz de prever qual combinação é obtida em uma medição; ele apenas

*Nesta interpretação, a medida em um sistema quântico reflete o estado físico do sistema exatamente antes de sua realização. Se esta interpretação for correta, então a mecânica quântica é uma teoria incompleta, pois ‘falha’ na determinação da medida, uma vez que a teoria prevê apenas probabilidades.

†Também chamada de interpretação ortodoxa. Nela, afirma-se que, antes da medida, o sistema físico não estava em nenhum estado definido, mas sim em uma *superposição* de estados. O ato de medir faz o sistema ‘optar’ entre este ou aquele estado superposto, isto é, ‘força’ a natureza a decidir o estado.

prevê que, na média, se tem metade de cada caso. Nesse experimento, a distância que as partículas percorrem é arbitrária, ou seja, ao medir o spin do elétron, para cima, por exemplo, determina-se o spin do pósitron, para baixo, via conservação do *momentum* angular, sem inferir a esta segunda partícula nenhum processo de medição, esteja ela a metros ou a anos-luz de distância.

Agora, o argumento da escola realista com esse experimento é de que o elétron realmente possuía spin para cima (e para baixo no caso do pósitron), no momento em que foram criados, e a interpretação ortodoxa desse problema teria um custo: para que a conservação do *momentum* angular fosse respeitada, o colapso da função de onda, pelo experimentador que realizou a medição do spin do elétron, deveria se mover com uma velocidade maior do que a da luz, o que *Bohm* chamou mais tarde de *não localidade*. Uma vez que a teoria quântica não prevê o resultado de uma medição com precisão e a localidade não era verificada, os autores do experimento EPR afirmavam que a mecânica quântica, na sua forma atual, era incompleta.

A mecânica clássica também assume alguns aspectos estatísticos bem comportados. Por exemplo, ao lançar ao ar uma moeda não viciada, tem-se igual probabilidade de obter cara ou coroa; entretanto, sabendo a força aplicada na moeda, a aceleração da gravidade no local, a viscosidade do ar, a altura em que se encontra a moeda e a temperatura do ar, entre outras variáveis, é possível determinar com precisão a face revelada pela moeda ao tocar o chão. O análogo dessas variáveis extras, no regime quântico, é chamado de *variáveis ocultas*.

O decaimento analisado neste experimento é o mais tradicional exemplo de um fenômeno puramente quântico, o *emaranhamento* [92], que ocorre entre o elétron e o pósitron. Ele consiste na descrição de um sistema quântico composto por duas ou mais partículas, em que a caracterização definida de um de seus entes revela a dos demais de forma inseparável e independentemente da distância que os separa, justamente como ocorre no paradoxo EPR. Atualmente, o fenômeno é a chave por trás de pesquisas relacionadas à criptografia baseada nas desigualdades de *Bell* [92–94], teletransporte [95], entre outras aplicações.

4.1.1 A Caracterização do Emaranhamento a Partir da Função de Estado

O emaranhamento quântico é uma característica própria de sistemas compostos. Desta forma, para que exista emaranhamento, deve existir uma divisão do sistema total em, no mínimo, dois subsistemas. Ou seja, o espaço de Hilbert total \mathcal{H} também poderá ser subdividido. No caso mais simples, em que a subdivisão se dá em dois subespaços, o estado composto total $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ poderá ser representado em relação ao conjunto dos autovetores dos subespaços A e B , com $|a_i\rangle \in \mathcal{H}_A$ e $|b_j\rangle \in \mathcal{H}_B$, de forma que o espaço total é $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Assim, o estado físico $|\psi\rangle$ de um sistema composto pode ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,k} c_{ik} |a_i\rangle \otimes |b_k\rangle, \quad (4.1.1)$$

Um estado físico $|\psi\rangle$ em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é chamado de *separável* quando pode ser escrito como o produto direto dos estados dos subsistemas A e B . Em outras palavras, $|\psi\rangle$ é separável se existem estados $|\phi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$ e $|\phi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$ tais que:

$$|\psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle \otimes \sum_k \beta_k |b_k\rangle. \quad (4.1.2)$$

Aqui, os coeficientes c_{ik} podem ser fatorados como $c_{ik} = \alpha_i \beta_k$, onde α_i e β_k são as amplitudes associadas aos estados $|a_i\rangle$ e $|b_k\rangle$, respectivamente. Por exemplo, considerando o seguinte estado físico:

$$|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |a_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |a_2\rangle \right) \otimes |b_1\rangle. \quad (4.1.3)$$

Neste caso, o estado de A está em uma superposição de $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$, enquanto o estado de B é fixo em $|b_1\rangle$. Os coeficientes c_{ik} são:

$$c_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{se } i = 1 \text{ ou } i = 2 \text{ e } k = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Embora o estado de A seja uma superposição, o estado total ainda é separável, pois não há dependência entre os subsistemas A e B . Desta forma, a composição é uma condição necessária para o emaranhamento, mas ela não é suficiente.

Para que exista emaranhamento, uma condição suficiente e necessária é que o estado seja *não separável*, também chamado de *emaranhado*. Neste caso, será qualquer estado em que a representação da Eq. [4.1.2] não se verifique, i.e.:

$$|\psi\rangle \neq \sum_i \alpha_i |a_i\rangle \otimes \sum_k \beta_k |b_k\rangle. \quad (4.1.5)$$

Considerando o caso do decaimento do pión discutido no começo desta seção, a única configuração possível do estado físico do sistema, $|\psi\rangle$, antes de uma medição é o singleto. Etiketando com o subscrito A as quantidades inerentes ao elétron e B para o pósitron, então, a Eq. [4.1.1] toma a forma:

$$|\psi\rangle = c_{12} |a_1\rangle \otimes |b_2\rangle + c_{21} |a_2\rangle \otimes |b_1\rangle. \quad (4.1.6)$$

A função de onda tem que estar normalizada, $|c_{12}|^2 + |c_{21}|^2 = 1$. Além disso, realizando a imposição de que $|c_{12}|^2 = |c_{21}|^2$, tem-se $c_{12} = c_{21} = \pm 1/\sqrt{2}$, ou seja:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a_1\rangle \otimes |b_2\rangle - |a_2\rangle \otimes |b_1\rangle). \quad (4.1.7)$$

Esta equação diz que, após o decaimento do pión, ao ser realizada a medida da direção do spin do elétron, a do pósitron é definida instantaneamente, i.e., a medição do estado $|a_1\rangle \in \mathcal{H}_A$ revela a configuração do estado $|b_2\rangle \in \mathcal{H}_B$, sem que este tenha sido submetido ao processo de medida.

4.1.2 A Matriz Densidade Reduzida

A matriz densidade de um estado emaranhado $\hat{\rho}$ é dada por:

$$\hat{\rho} = \sum_{i,j,k,l} c_{ik} c_{jl}^* |a_i\rangle \langle a_j| \otimes |b_k\rangle \langle b_l|, \quad (4.1.8)$$

O método utilizado para extrair a informação do sistema contida no subespaço \mathcal{H}_A , a partir da matriz densidade $\hat{\rho}$, é o *traço parcial*, realizado em relação à base de \mathcal{H}_B e que resultará na *matriz densidade reduzida* $\hat{\rho}_A$:

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B[\hat{\rho}] = \sum_r \langle b_r | \hat{\rho} | b_r \rangle. \quad (4.1.9)$$

Grosso modo, esta operação é o análogo à integração em uma variável específica, por exemplo, x , de uma função de duas variáveis $\rho = \rho(x, y)$:

$$\rho'(y) = \int dx \rho(x, y). \quad (4.1.10)$$

Assim, é possível determinar a matriz densidade reduzida, $\hat{\rho}_A$ ou $\hat{\rho}_B$, a partir de $\hat{\rho}_{A,B} = \text{Tr}_{B,A}[\hat{\rho}]$.

De forma geral, a matriz densidade de um estado emaranhado será dada pela expressão:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_A = \text{tr}_B \hat{\rho} &= \sum_m \langle b_m | \sum_{i,j,k,l} c_{ij} c_{kl}^* |a_i\rangle \langle a_k| \otimes |b_j\rangle \underbrace{\langle b_l| b_m\rangle}_{\delta_{lm}} \\ &= \sum_{i,j,k,l} c_{ij} c_{kl}^* |a_i\rangle \langle a_k| \otimes \sum_m \langle b_m | b_j\rangle \delta_{lm} \\ &= \sum_{i,j,k,l} c_{ij} c_{kl}^* |a_i\rangle \langle a_k| \delta_{lj}.\end{aligned}\quad (4.1.11)$$

Sendo assim:

$$\hat{\rho}_A = \sum_{i,j,k} c_{ij} c_{kj}^* |a_i\rangle \langle a_k|. \quad (4.1.12)$$

Desta expressão, sabe-se que $|a_i\rangle \langle a_k| \in \mathcal{H}_A$; contudo, se o estado está emaranhado, as constantes $c_{ij} c_{kj}^*$ carregam informação do estado \mathcal{H}_B contida no subespaço A .

Por exemplo, a matriz densidade do estado singleto é dada por:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \frac{1}{2} \left(|a_1\rangle \otimes |b_2\rangle \langle a_1| \otimes \langle b_2| - |a_1\rangle \otimes |b_2\rangle \langle a_2| \otimes \langle b_1| \right. \\ &\quad \left. - |a_2\rangle \otimes |b_1\rangle \langle a_1| \otimes \langle b_2| + |a_2\rangle \otimes |b_1\rangle \langle a_2| \otimes \langle b_1| \right).\end{aligned}\quad (4.1.13)$$

Considerando a seguinte representação:

$$|a_1\rangle \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |a_2\rangle \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |b_1\rangle \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |b_2\rangle \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.1.14)$$

A matriz densidade do estado singleto é dada por,

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1.15)$$

Assim, a matriz densidade reduzida do sub-espaço A é:

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B[\hat{\rho}] = \frac{1}{2} \mathbb{1}_2. \quad (4.1.16)$$

Sendo $\mathbb{1}_2$ a matriz identidade bidimensional.

Por fim, é possível utilizar o procedimento de *Gram-Schmidt* (apêndice B) no estado emaranhado dado pela Eq. [4.1.1]. A aplicação desta técnica permite uma forma matemática mais simples ao custo da realização de uma troca de bases. Isto posto, o estado emaranhado é dado por:

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\phi_i^A\rangle \otimes |\phi_i^B\rangle, \quad (4.1.17)$$

com $|\phi_i^A\rangle \in \mathcal{H}_A$ e $|\phi_i^B\rangle \in \mathcal{H}_B$. Assim, é possível reescrever a matriz densidade total como:

$$\hat{\rho} = \sum_{n,m} \alpha_n \alpha_m^* |\phi_n^A\rangle \langle \phi_m^A| \otimes |\phi_n^B\rangle \langle \phi_m^B|. \quad (4.1.18)$$

A matriz densidade reduzida $\hat{\rho}_A$ será dada por:

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B \hat{\rho} = \sum_s \langle \phi_s^B | \sum_{n,m} \alpha_n \alpha_m^* | \phi_n^A \rangle \langle \phi_m^A | \otimes | \phi_n^B \rangle \underbrace{\langle \phi_m^B | \phi_s^B \rangle}_{\delta_{ms}}. \quad (4.1.19)$$

Similarmente às operações realizadas na Eq. [4.1.11], a matriz densidade reduzida pode ser expressa como:

$$\hat{\rho}_A = \sum_n \alpha_n^2 | \phi_n^A \rangle \langle \phi_n^A |. \quad (4.1.20)$$

Além disso, a partir da Eq. [4.1.17], se tem para $\hat{\rho}_B$:

$$\hat{\rho}_B = \sum_n \alpha_n^2 | \phi_n^B \rangle \langle \phi_n^B |. \quad (4.1.21)$$

4.2 A ENTROPIA DE EMARANHAMENTO

A Entropia de Emaranhamento é dada por:

$$S(\hat{\rho}_A) = -\text{Tr} [\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A]. \quad (4.2.1)$$

Ou seja, é a expressão matemática da entropia de von Neumann (Eq. [2.5.14]) em que é utilizada a matriz densidade reduzida $\hat{\rho}_A$ em detrimento da matriz densidade total $\hat{\rho}$. Desta forma, a entropia de emaranhamento também pode ser calculada a partir da entropia de Shannon:

$$S(p_n) = -\sum_n p_n \ln p_n. \quad (4.2.2)$$

Nesta equação, $p_n = \alpha_n^2$, obtido da Eq. [4.1.20].

A entropia de emaranhamento é uma medida dos graus de emaranhamento do sistema. Portanto, quanto maior for a entropia, mais emaranhado está o sistema. Desta forma, a entropia de emaranhamento em relação ao subestado A , $S(\hat{\rho}_A)$, é idêntica à entropia de emaranhamento em relação ao subestado B , $S(\hat{\rho}_B)$:

$$S(\hat{\rho}_A) = -\text{Tr} [\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A] = -\sum_n |\alpha_n|^2 \ln |\alpha_n|^2 = -\text{Tr} [\hat{\rho}_B \ln \hat{\rho}_B] = S(\hat{\rho}_B). \quad (4.2.3)$$

Isto se dá, pois, como esta entropia mede o grau de emaranhamento entre os dois subsistemas, se for avaliada em A , ela deve ter o mesmo resultado que em B , uma vez que ela não mede características internas aos subconjuntos, mas sim o quanto eles estão relacionados.

Por exemplo, o estado singleto, com uma matriz densidade reduzida descrita na expressão [4.1.16], tem uma entropia de emaranhamento tal que:

$$S(\mathbb{1}_2/2) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\mathbb{1}_2 \ln \frac{\mathbb{1}_2}{2} \right]. \quad (4.2.4)$$

Para calcular a entropia de emaranhamento, geralmente os problemas se resumem em calcular o logaritmo do

operador. Neste caso, ele tem uma resolução simples:

$$\ln \hat{\rho}_A = -\mathbb{1}_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = -\mathbb{1}_2 \ln 2. \quad (4.2.5)$$

Ou seja, a entropia de emaranhamento do estado singleto é dada por:

$$S(\mathbb{1}_2/2) = \frac{\ln 2}{2} \text{Tr}[\mathbb{1}_2] = 1 \text{ bit}. \quad (4.2.6)$$

Neste caso, a entropia é máxima, e se diz que o sistema está maximamente emaranhado. Isto ocorre, pois, ao se determinar em qual estado o sistema está em A , automaticamente toda a informação de B será obtida (Fig. [4.1]).

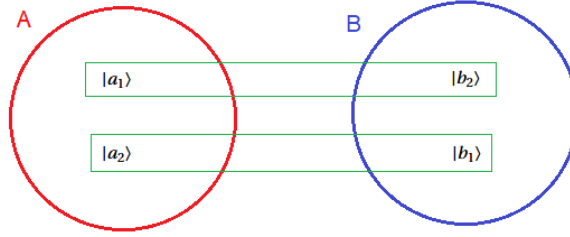


Figura 4.1: Emaranhamento máximo no estado singleto. Ao realizar uma medida em A , o observador sabe toda a informação de B .

Nem sempre esta relação é máxima. Para verificar isso, será considerado agora o estado emaranhado $|W\rangle$:

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_C + |0\rangle_A |1\rangle_B |0\rangle_C + |0\rangle_A |0\rangle_B |1\rangle_C). \quad (4.2.7)$$

Este estado está dividido em três subconjuntos, de forma que $|0\rangle_A, |1\rangle_A \in \mathcal{H}_A$, $|0\rangle_B, |1\rangle_B \in \mathcal{H}_B$ e $|0\rangle_C, |1\rangle_C \in \mathcal{H}_C$. Fisicamente, ele pode representar o caso em que um *quanta* é distribuído em um conjunto de três partículas idênticas e emaranhadas, onde $|1\rangle$ representa a partícula no primeiro nível excitado e $|0\rangle$ representa a partícula no nível fundamental.

A matriz densidade reduzida é dada por:

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_{BC} \hat{\rho} = \frac{1}{3} |1\rangle_A \langle 1|_A + \frac{2}{3} |0\rangle_A \langle 0|_A. \quad (4.2.8)$$

Calculando a entropia de emaranhamento, percebe-se que ela não é máxima:

$$S(\rho_A) = -\left(\frac{1}{3} \ln \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \ln \frac{2}{3}\right) \approx 0.92 \text{ bits}. \quad (4.2.9)$$

A Fig. [4.2] auxilia na interpretação deste resultado. Para isso, considera-se duas hipóteses: (I.) O observador, tendo acesso apenas ao subespaço A , mede a energia e encontra o autovalor que corresponde ao estado $|1\rangle$. Neste caso, ao realizar a medição em A , ele sabe que os subespaços B e C devem estar no estado $|0\rangle$; na hipótese (II.), o observador mede o estado $|0\rangle$ para a partícula A . Neste caso, ele não sabe dizer em quais estados estão as partículas dos subespaços B e C , de forma que elas continuam em um estado de superposição. Perceba que no caso do singleto esta ambiguidade não é verificada.

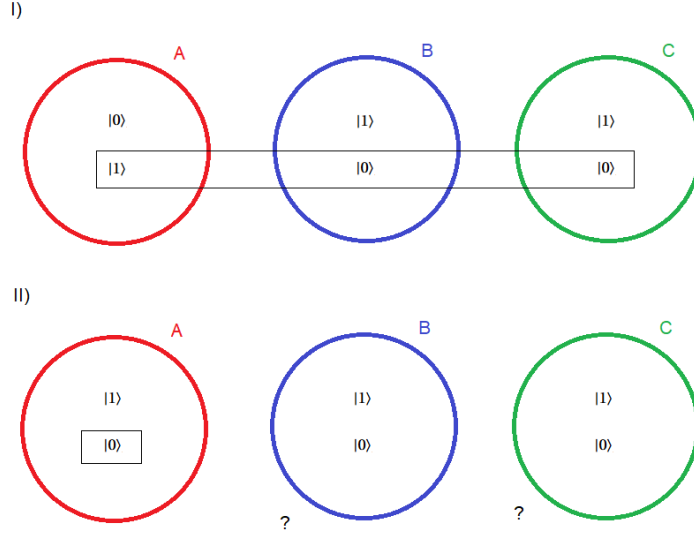


Figura 4.2: Emaranhamento entre os estados dos subconjuntos A , B e C : **(I.)** Se em A o estado é $|1\rangle$, automaticamente sabe-se que em B e C o estado é $|0\rangle$. **(II.)** Ao medir $|0\rangle$ em A , não é possível saber a configuração de B e C .

Existem algumas estratégias úteis para calcular a entropia de emaranhamento. A primeira delas é obter a distribuição de probabilidades p_n do conjunto emaranhado e então utilizar a entropia de Shannon, dada pela expressão [4.2.2] e vinculada ao emaranhamento a partir de $p_n = |\alpha_n|^2$. A segunda estratégia é avaliar a definição da função logarítmica, de forma que se tem:

$$\ln \hat{\rho}_A = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\hat{\rho}_A^\epsilon - \mathbb{1}_d). \quad (4.2.10)$$

Na equação acima, $\mathbb{1}_d$ é o operador identidade em um espaço de dimensão d , equivalente à dimensão do subespaço A . Substituindo esta expressão na definição da entropia de emaranhamento:

$$S(\hat{\rho}_A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (1 - \text{Tr}[\hat{\rho}_A^{1+\epsilon}]). \quad (4.2.11)$$

A entropia de emaranhamento de Rényi é dada pela expressão:

$$S(\hat{\rho}_A) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \text{Tr}[\hat{\rho}_A^\alpha]. \quad (4.2.12)$$

Em alguns casos, é mais fácil obter uma expressão para a entropia de Rényi. Desta forma, é possível utilizar o fato de que esta entropia recai na expressão de von Neumann quando $\alpha \rightarrow 1$. Portanto:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{1-\alpha} \ln \text{Tr}[\hat{\rho}_A^\alpha] = -\text{Tr}[\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A] = S(\hat{\rho}_A). \quad (4.2.13)$$

Sumariamente, nesta tese serão apresentadas três estratégias para o cálculo da entropia de emaranhamento:

- **Estratégia I:** Obter uma expressão para p_n e então calcular a entropia de emaranhamento de Shannon dada pela Eq. [4.2.2], sujeita ao vínculo $p_n = |\alpha_n|^2$, obtido na Eq. [4.1.20];
- **Estratégia II:** Obter uma expressão para $\text{Tr}[\hat{\rho}_A^{1+\epsilon}]$, substituir na Eq. [4.2.11] e então calcular o limite em

que $\epsilon \rightarrow 0$;

- **Estratégia III:** Encontrar a entropia de emaranhamento de Rényi dada pela expressão [4.2.12] e então calcular o limite em que $\alpha \rightarrow 1$ para encontrar a entropia de emaranhamento.

Na sequência, estas estratégias serão utilizadas em três modelos distintos de entropia de emaranhamento na física de altas energias. A Estratégia I será utilizada para calcular a entropia de emaranhamento em um DIS utilizando o *Modelo de Kharzeev-Levin* (KL) [22]. Na sequência, a partir de uma expressão para a entropia de Rényi, será obtida a entropia de emaranhamento em colisões elásticas, confirmando o programa da Estratégia II. Por fim, será utilizada a Estratégia III para calcular a entropia de emaranhamento no CGC.

4.3 ENTROPIA DE EMARANHAMENTO NO MODELO KHARZEEV-LEVIN

O Modelo KL [22] considera o emaranhamento quântico em um DIS. Para isso, considera-se duas regiões espaciais: A , sendo a região sondada pelo DIS com um espaço de Hilbert \mathcal{H}_A , e B , a região não sondada. Neste modelo, os estados físicos em A estão emaranhados com os de B . A partir disso, é possível caracterizar a função de onda emaranhada a partir da Eq. [4.1.17].

No modelo de dipolos, a equação de evolução do sistema adequada é a BK (Apêndice C), de forma que, aplicando o programa da Estratégia I, é possível compatibilizar uma expressão de p_n com a Eq. BK. Além disso, em um DIS, a região sondada A tem o seu tamanho determinado por uma área transversa da ordem de $\sim 1/Q^2$. Segundo a referência [96], o emaranhamento entre as regiões A e B será estabelecido pela presença de dipolos de cor na fronteira entre as duas regiões (Fig. [4.3]).

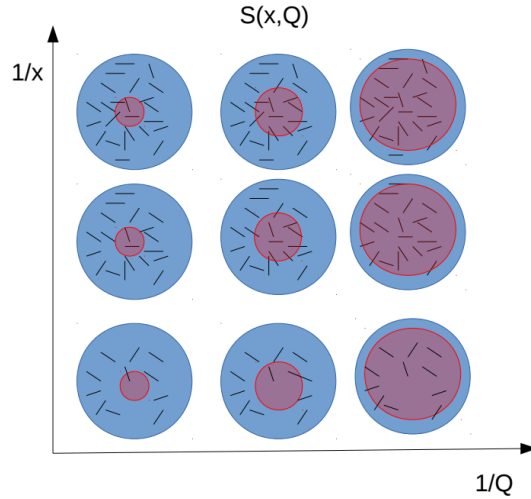


Figura 4.3: Regiões sondadas em um DIS e sua dependência com as escalas $1/x$ e $1/Q$. Adaptado de [96].

Desta forma, nas próximas subseções, serão apresentadas as formas de se obter p_n para calcular a entropia de emaranhamento no Modelo KL em dois casos, (1+1)-dimensional e (3+1)-dimensional, que descrevem o problema dos dipolos inicialmente com apenas uma dimensão espacial e com três dimensões, respectivamente.

4.3.1 Entropia de Emaranhamento: Modelo (1 + 1)-dimensional

A evolução das distribuições partônicas pode ser modelada na representação de dipolo [22], onde os pártos são representados por um conjunto de dipolos de cor. No modelo (1 + 1)-dimensional, depende-se apenas de uma direção espacial e da rapidez Y . Sendo assim, é negligenciada a informação de que dipolos diferentes possuem tamanhos distintos.

A partir disso, são consideradas as seguintes definições:

- $p_n(Y)$: Probabilidade de encontrar n dipolos com rapidez Y ;
- ω_0 : Probabilidade constante de um dipolo decair em dois.

A equação que relaciona a variação da probabilidade com a rapidez[‡] é dada por:

$$\frac{dp_n}{dY} = -\omega_0 n p_n + (n-1)\omega_0 p_{n-1}. \quad (4.3.1)$$

O primeiro termo no lado direito da Eq. [4.3.1] refere-se à diminuição da probabilidade de encontrar n dipolos frente à divisão dos mesmos em $n + 1$ dipolos, enquanto o segundo trata do crescimento devido à divisão de $n - 1$ dipolos em n .

Além do modelo de dipolos de cor, é introduzida a função *geratriz* (ou geradora) $G(Y, u)$ com a finalidade de resolver o problema. Esta técnica de resolução foi primeiramente utilizada por A. Mueller em [97]. Desta forma, tem-se:

$$G(Y, u) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n u^n. \quad (4.3.2)$$

Diferentemente das séries infinitas utilizadas recorrentemente, as funções geratrizes podem divergir, significando que $G(Y, u)$ nem sempre é a função verdadeira, e a variável que se quer encontrar na realidade pode ser indeterminada.

Uma das condições de contorno para o problema é o caso em que $u = 1$:

$$G(Y, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1. \quad (4.3.3)$$

Além disso, para $Y = 0$, tem-se $P_1(0) = 1$ (um único dipolo) e $P_{n>1} = 0$, indicando um estado puro. Disto, obtêm-se completamente as condições de contorno:

$$\begin{cases} G(0, u) = u; \\ G(Y, 1) = 1. \end{cases} \quad (4.3.4)$$

É necessário conectar o formalismo da função geratriz com a evolução de $p_n(Y)$ [4.3.1]. Para isso, são consideradas as derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial Y} G(Y, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{dp_n}{dY} \right) u^n \right], \quad (4.3.5)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u} G(Y, u) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n n u^{n-1}. \quad (4.3.6)$$

[‡]Também se relaciona com a energia, pois tem-se a expressão $e^{\omega_0 Y} = x^{-\omega_0}$.

Substituindo [4.3.1] em [4.3.5]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial Y} G(Y, u) &= \omega_0 \sum_{n=1}^{\infty} [-np_n(Y) + (n-1)p_{n-1}] u^n, \\ &= -\omega_0 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} np_n u^n}_{u \frac{\partial}{\partial u} G(Y, u)} + \omega_0 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)p_{n-1} u^n,\end{aligned}\quad (4.3.7)$$

Para o segundo termo da Eq. [4.3.7]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)p_{n-1} u^n \underbrace{=}_{n-1=m} \sum_{m=0}^{\infty} mp_m u^{m+1} = 0 + \sum_{m=1}^{\infty} mp_m u^{m+1} = u^2 \frac{\partial}{\partial u} G(Y, u). \quad (4.3.8)$$

Observando [4.3.7] e [4.3.8], percebe-se que a evolução partônica no modelo de dipolos de cor com a função geratriz é modelada pela equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial}{\partial Y} G(Y, u) = \omega_0 u(u-1) \frac{\partial}{\partial u} G(Y, u). \quad (4.3.9)$$

A solução geral desta equação, para as condições [4.3.4], é dada por:

$$G(Y, u) = \frac{ue^{-\omega_0 Y}}{1 + u(e^{-\omega_0 Y} - 1)} = ue^{-\omega_0 Y} \underbrace{\frac{1}{1 + u(e^{-\omega_0 Y} - 1)}}. \quad (4.3.10)$$

Agora, o termo destacado em [4.3.10], considerando $|u(1 - e^{-\omega_0 Y})| < 1$, se tem:

$$\frac{1}{1 + u(e^{-\omega_0 Y} - 1)} = \sum_{j=0}^{\infty} u^j [1 - e^{-\omega_0 Y}]^j \underbrace{=}_{j+1=n} \sum_{n=1}^{\infty} u^{n-1} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1}. \quad (4.3.11)$$

Ou seja, é possível escrever a solução geral na forma:

$$G(Y, u) = e^{-\omega_0 Y} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1} u^n. \quad (4.3.12)$$

Comparando a equação [4.3.12] com a definição da função geratriz em [4.3.2], é determinada a probabilidade $p_n(Y)$:

$$p_n(Y) = e^{-\omega_0 Y} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1}. \quad (4.3.13)$$

Substituindo $p_n(Y)$ obtido em [4.3.13] na expressão da entropia de emaranhamento [4.2.1]:

$$\begin{aligned}S(Y) &= - \sum_n \{e^{-\omega_0 Y} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1} \ln [e^{-\omega_0 Y} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1}]\} \\ &= -e^{-\omega_0 Y} \sum_n \{(1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1} \ln [-\omega_0 Y + (n-1) \ln(1 - e^{-\omega_0 Y})]\} \\ &= \omega_0 Y \sum_n \underbrace{e^{-\omega_0 Y} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1}}_{p_n} - \sum_n e^{-\omega_0 Y} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1} (n-1) \ln(1 - e^{-\omega_0 Y}) \\ &= \omega_0 Y \underbrace{\sum_n p_n}_1 + \ln(1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1} \left[\sum_n \underbrace{e^{-\omega_0 Y} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1}}_{p_n} - \sum_n \underbrace{n e^{-\omega_0 Y} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1}}_{p_n} \right].\end{aligned}\quad (4.3.14)$$

Ou seja:

$$S(Y) = \omega_0 Y + \ln(1 - e^{-\omega_0 Y}) \left(1 - \sum_n n p_n\right). \quad (4.3.15)$$

No limite de interesse, que é o das altas energias, $Y \rightarrow \infty$. Logo:

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \ln(1 - e^{-\omega_0 Y}) = 0. \quad (4.3.16)$$

Então, a entropia toma a forma simples:

$$S(Y) \approx \omega_0 Y. \quad (4.3.17)$$

É possível relacionar a entropia obtida com a densidade de glúons. Para isso, se define o número médio de pártos como [§]:

$$\langle n \rangle \equiv x f_g(x), \quad (4.3.18)$$

Nessa expressão $x f_g(x)$ é a distribuição dos glúons para um dado valor de x possibilitando à avaliação da entropia por unidade de rapidez. Assim,

$$x f_g(x) = \langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n. \quad (4.3.19)$$

A distribuição aparece no termo na extrema direita de [4.3.15], para ele,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n p_n &= e^{-\omega_0 Y} \sum_{n=1}^{\infty} n (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1}, \\ &= \frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dY} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\omega_0 Y})^n. \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

Então, para $|1 - e^{-\omega_0 Y}| < 1$, tem-se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dY} \frac{1}{1 - (1 - e^{-\omega_0 Y})} = e^{\omega_0 Y}. \quad (4.3.21)$$

Agora, para grandes valores de x , mais precisamente, no regime em que $x \gg 1$, a rapidez Y relaciona-se com a escala de *Bjorken* na forma de $Y = -\ln x$. Somando esta informação aos resultados das Equações [4.3.21] e [4.3.19], obtém-se:

$$x f_g(x) = e^{\omega_0 Y}. \quad (4.3.22)$$

Assim, a entropia de *von Neumann* no limite assintótico é dada por:

$$S(x) = \ln[x f_g(x)]. \quad (4.3.23)$$

Nota-se que, para o regime de *pequeno* x , a entropia [4.3.23] emerge para o limite onde todas as probabilidades p_n tornam-se equiprováveis. Observando a Eq. [4.3.13] nestas circunstâncias, tem-se a equipartição probabilística:

$$p_n = e^{-\omega_0 Y} = \frac{1}{\langle n \rangle}. \quad (4.3.24)$$

[§]Atualmente, o estado da arte propõem que o número de partículas $\langle x \rangle = x f_g(x) + x f_{\text{sea}}(x)$, em que $x f_{\text{sea}}(x)$ é a PDF dos quarks de mar. Contudo, esta contribuição não será considerada neste trabalho. Para uma discussão, considerar as referências [96] e [98].

Os postulados da mecânica estatística de equilíbrio acarretam na maximização da entropia, logo, a equação [4.3.24] descreve um estado físico maximamente emaranhado, ou seja, em um estado hadrônico desta natureza, é impossível prever quantos pártons serão detectados, uma vez que todos os microestados são igualmente prováveis.

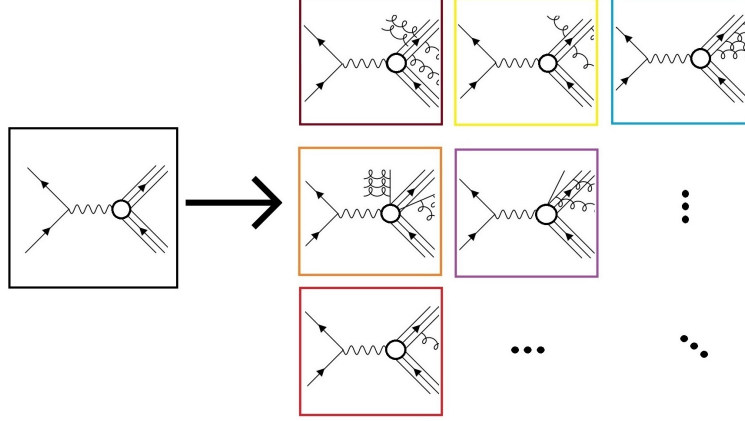


Figura 4.4: Representação dos estados quânticos equiprováveis na entropia de emaranhamento de *von Neumann* para os pártons no modelo (1+1). Inicialmente, em baixas energias, o hádron pai não apresenta estrutura interna, e o espalhamento pode ser analisado a partir da QED. Conforme aumenta-se a energia, diminuindo o comprimento de onda do fóton virtual, a estrutura interna se revela. O caso se torna maximamente entrópico no limite das altas energias, onde não mais é possível estabelecer qual será o estado final do sistema, maximizando o caos.

4.3.2 Entropia de Emaranhamento: Modelo (3 + 1)-dimensional

O caso (3 + 1)-dimensional traz consigo severas complicações: agora se consideram os graus de liberdade transversais, o tamanho dos dipolos e o vetor parâmetro de impacto \vec{b} . Inicialmente, são definidas as variáveis:

$$\begin{aligned} \{\vec{a}_i\} &= \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_i; \\ \vec{b}_{in} &= \vec{b}_i + \frac{1}{2} \vec{r}_i = \vec{b}_n - \frac{1}{2} \vec{r}_i. \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

A equação da cascata partônica para o caso (3 + 1) é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y} P_n(Y, \{\vec{b}_n, \vec{r}_n\}) &= - \sum_{i=1}^n \omega_G(r_i) P_n(Y, \{\vec{b}_n, \vec{r}_n\}) \\ &+ \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\vec{r}_i + \vec{r}_n)^2}{r_i^2 r_n^2} P_{n-1}(Y, \vec{r}, \vec{b}; \vec{r}_1, \vec{b}_1, \dots, (\vec{r}_i + \vec{r}_n), \vec{b}_{in}, \dots, \vec{r}_{n-1}, \vec{b}_n). \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

Nesta equação, $\bar{\alpha}_s = N_c \alpha_s / \pi$. No caso (3 + 1), $P_n(Y, \{\vec{b}_n, \vec{r}_n\})$ é a probabilidade de se ter n dipolos de tamanho r_i , com parâmetro de impacto b_i , em uma rapidez Y . As condições iniciais para este problema em um espalhamento DIS são dadas por:

$$\begin{cases} P_1(Y = 0, \vec{r}, \vec{b}; \vec{r}_1, \vec{b}_1) = \delta^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}_1) \delta^{(2)}(\vec{b} - \vec{b}_1); \\ P_{n>1}(Y = 0; \{r_i\}) = 0, \end{cases} \quad (4.3.27)$$

ou seja, nos instantes iniciais em que $Y = 0$, só existe um dipolo. As probabilidades seguem a regra de normalização usual:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int \prod_{i=1}^n d^2 r_i d^2 b_i P_n(Y; \{\vec{r}_i, \vec{b}_i\}) = 1. \quad (4.3.28)$$

A função geratriz de dipolo no modelo $(3+1)$ -dimensional é dada por

$$G(Y, \vec{r}, \vec{b}; [u_i]) = \sum_{n=1}^{\infty} \int P_n(Y, \{\vec{b}_n, \vec{r}_n\}) \prod_{i=1}^n u(\vec{r}_i, \vec{b}_i) d^2 r_i d^2 b_i, \quad (4.3.29)$$

sendo $u(\vec{r}_i, \vec{b}_i) \equiv u_i$ uma função arbitrária. As condições de contorno [4.3.27] e a normalização [4.3.28] restringem a função geratriz na seguinte forma:

$$\begin{cases} G(Y=0, \vec{r}, \vec{b}; [u_i]) = u(\vec{r}, \vec{b}); \\ G(Y, r, [u_i=1]) = 1. \end{cases} \quad (4.3.30)$$

Multiplicando ambos os lados da Eq. [4.3.26] por $\prod_{i=1}^n u_i$ e integrando em relação às variáveis r_i e b_i , obtém-se a expressão:

$$\frac{\partial}{\partial Y} G(Y, \vec{r}, \vec{b}; [u_i]) = \int d^2 r' K(\vec{r}', \vec{r} - \vec{r}' | \vec{r}) \left[-u(r, b) + u\left(\vec{r}', \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{r} - \vec{r}')\right) \right] u\left(\vec{r} - \vec{r}', \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{r}'\right) \frac{\delta G}{\delta u(r, b)}. \quad (4.3.31)$$

Sendo, nesta equação:

$$\begin{cases} K(\vec{r}', \vec{r} - \vec{r}' | \vec{r}) = \frac{\tilde{\alpha}_s}{2\pi} \frac{r^2}{r'^2(\vec{r} - \vec{r}')^2} \equiv K, \\ \omega_G(\vec{r}) = \int d^2 r' K. \end{cases} \quad (4.3.32)$$

A fim de encontrar soluções na forma $G([u(r_i, b_i, Y)])$ com as condições [4.3.30], é possível reescrever [4.3.31] na forma:

$$\frac{\partial}{\partial Y} G(Y, \vec{r}, \vec{b}; [u_i]) = \int d^2 r' K \left[G(r', \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{r} - \vec{r}'); [u_i]) G(\vec{r} - \vec{r}', \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{r}'; [u_i]) - G(Y, \vec{r}, \vec{b}; [u_i]) \right]. \quad (4.3.33)$$

Agora, definindo a amplitude de espalhamento:

$$N(Y, r, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int \prod_{i=1}^n \left[d^2 r_i \gamma(r_i, b) \frac{\delta}{\delta u_i} \right] G(Y, r, b, [u_i])|_{u_i=1}. \quad (4.3.34)$$

Aqui, $\gamma(r_i, b)$ é a amplitude de espalhamento para as interações do dipolo para baixas energias. A partir destas definições, recupera-se a equação de *Balitsky-Kovchegov* (Apêndice C). O objetivo central deste desenvolvimento é encontrar a solução de [4.3.26]. Para isso, define-se:

$$\tilde{P}_n(Y, r) \equiv \int P_n(Y, \{\vec{b}_n, \vec{r}_n\}) \prod_{i=1}^n d^2 r_i d^2 b_i. \quad (4.3.35)$$

Nesta definição, \tilde{P}_n é a probabilidade de encontrar n dipolos com todos os tamanhos possíveis para os mesmos valores do parâmetro de impacto. As condições [4.3.27] e [4.3.28] restringem \tilde{P}_n na forma das seguintes

expressões:

$$\begin{cases} \tilde{P}_1(Y=0, r, b) = 1; \\ \tilde{P}_{n>1}(Y=0, r, b) = 0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_n(Y, r, b) = 1. \end{cases} \quad (4.3.36)$$

Com estas condições, é possível resolver a Eq. [4.3.26] de maneira recorrencial: para $n = 1$, se tem:

$$\frac{\partial}{\partial Y} P_1(Y, r, b, r_1, b_1) = -\omega_G(r_1) P_1(Y, r, b, r_1, b_1). \quad (4.3.37)$$

Para \tilde{P}_1 , a equação toma a forma:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \tilde{P}_1(Y, r, b) = -\omega_G(r) \tilde{P}_1(Y, r, b), \quad (4.3.38)$$

com a solução:

$$\tilde{P}_1(Y, r, b) = e^{-\omega_G(r)Y}. \quad (4.3.39)$$

Para P_2 , a Eq. [4.3.26] é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial Y} P_2(Y, r, b; \{r_2, b_2\}) = -[\omega_G(r_1) + \omega_G(r_2)] P_2(Y, r, b; \{r_2, b_2\}) + \frac{\tilde{\alpha}_s}{2\pi} \frac{(\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2)^2}{r_1^2 r_2^2} P_1(Y, r, b; \tilde{r}_1 + \tilde{r}_2, b'). \quad (4.3.40)$$

Inicialmente, estima-se o valor de $\omega_G(r)$ dado pela Eq. [4.3.32]:

$$\begin{aligned} \omega_G(r) &= \frac{\tilde{\alpha}_s}{2\pi} \int d^2 r' \frac{r^2}{r'^2 (\tilde{r} - \tilde{r}')^2} = \frac{\tilde{\alpha}_s}{\pi} \int d^2 r' \frac{r^2}{r'^2 [r'^2 + (\tilde{r} - \tilde{r}')^2]} \\ &= \frac{\tilde{\alpha}_s}{\pi} \int_{r_0}^r d^2 r' \frac{r^2}{r'^2 [r'^2 + (\tilde{r} - \tilde{r}')^2]} + \frac{\tilde{\alpha}_s}{\pi} \int_r^\infty d^2 r' \frac{r^2}{r'^2 [r'^2 + (\tilde{r} - \tilde{r}')^2]} \\ &= \underbrace{\tilde{\alpha}_s \ln(r^2/r_0^2)}_{r' \leq r} + \underbrace{0}_{r' \geq r} = \int_{r_0}^r \frac{dr'^2}{r'^2}, \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

por isso, apenas dipolos menores que r contribuem para o valor de $\omega_G(r)$.

Os autores da referência [99] sugerem que a Eq. [4.3.40] tem uma solução na forma de:

$$\int d^2 b P_2(Y, r, b; r_1, b', r_2, b') = \frac{1}{r_1^2 r_2^2} \Theta(r - r_1) \Theta(r - r_2) p_2(r, b), \quad (4.3.42)$$

sendo $\Theta(z)$ a função de *Heaviside*:

$$\begin{cases} \Theta(z) = 1, & \text{para } z > 0, \\ \Theta(z) = 0, & \text{para } z < 0. \end{cases} \quad (4.3.43)$$

Para obter a solução da Eq. [4.3.42], é possível obter a equação para \tilde{P}_2 integrando ambas as partes de [4.3.40] sobre b' , r_1 e r_2 :

$$\frac{\partial}{\partial Y} \tilde{P}_2(Y, r) = 2\omega_G(r) \tilde{P}_2(Y, r) + \omega_G(r) \tilde{P}_1(Y, r). \quad (4.3.44)$$

Utilizando a solução [4.3.39]:

$$\tilde{P}_2(Y, r) = e^{-\omega_G(r)Y} (1 - e^{-\omega_G(r)Y}). \quad (4.3.45)$$

A condição $\tilde{P}_2(Y=0, r) = 0$ é satisfeita, correspondendo à Eq. [4.3.36]. Para $\omega_G(r)Y \ll 1$, deve existir apenas dois termos na cascata partônica: \tilde{P}_1 e \tilde{P}_2 , de forma que a Eq. [4.3.28] é reduzida a:

$$\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 \rightarrow 1 - \omega_G(r)Y + \omega_G(r)Y = 1. \quad (4.3.46)$$

Esta equação sugere que os P_n são negligenciáveis para grandes tamanhos, i.e., $r_i > r$, por terem uma probabilidade de baixa relevância.

Desta forma, a solução geral da Eq. [4.3.26] tem a forma:

$$P_n(Y, \{\vec{b}_n, \vec{r}_n\}) = \prod_{i=1}^n \Theta(r - r_i) \frac{1}{r_i^2} p_n(Y, r). \quad (4.3.47)$$

Para esta solução, utilizando a Eq. [4.3.26], \tilde{P}_n é dada pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \tilde{P}_n(Y, r) = -n\omega_G(r)\tilde{P}_n(Y, r) + (n-1)\omega_G(r)\tilde{P}_{n-1}(Y, r), \quad (4.3.48)$$

com a solução:

$$\tilde{P}_n(Y, r) = e^{-\omega_G(r)Y} (1 - e^{-\omega_G(r)Y})^{n-1}. \quad (4.3.49)$$

Analogamente à Eq. [4.3.21]:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n \tilde{P}_n(Y, r) = e^{\omega_G(r)Y}. \quad (4.3.50)$$

Sendo assim, a entropia de emaranhamento para altas energias neste caso reproduzirá os resultados obtidos na Eq. [4.3.14], com a mudança de que a probabilidade de um dipolo decair em dois não é mais constante, mas depende do seu tamanho r :

$$S \approx \omega_G(r)Y = \ln \langle n \rangle. \quad (4.3.51)$$

Este resultado é semelhante ao obtido pelos autores no trabalho anterior para o caso (3+1)-dimensional em [22], tendo como resultado a expressão:

$$S \approx \tilde{\alpha}_s \ln(r^2 Q_s^2) Y. \quad (4.3.52)$$

De forma alternativa, é possível estender os estudos do caso (3+1)-dimensional com outras equações compatíveis com a evolução BK e o formalismo da função geratriz. Na referência [100], por exemplo, os autores investigam o comportamento da entropia de emaranhamento para a formulação 4-dimensional da QCD com o objetivo de estudar suas divergências. Desta forma, afirma-se que a evolução da função geratriz, $Z(Y, u, b)$, é definida a partir da Eq. [4.3.2], é dada por:

$$Z(Y, u, b) = e^{-mbY} + um \int_0^Y dY_1 e^{-mb(Y-Y_1)} \int_0^b db' Z(b-b', Y_1, u) Z(b', Y_1, u), \quad (4.3.53)$$

sendo m e b parâmetros da equação integral. A solução desta equação, considerando a conservação de probabilidade $Z(b, Y, 1) = 1$, tem a forma da distribuição de *Poisson*:

$$Z(Y, u, b) = e^{-mbY} \sum_{n=0}^{\infty} u^n \frac{(mbY)^n}{n!}, \quad (4.3.54)$$

ou seja:

$$p_n = e^{-mbY} \frac{(mbY)^n}{n!}. \quad (4.3.55)$$

Desta forma:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = e^{-mbY} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(mbY)^n}{n!}, \\ &= mbY e^{-mbY} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(mbY)^{n-1}}{(n-1)!} \underbrace{=}_{i=n+1} e^{-mbY} mbY \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(mbY)^i}{i!} \underbrace{=}_{e^{mbY}} mbY \equiv N. \end{aligned} \quad (4.3.56)$$

Inserindo [4.3.55] na entropia de emaranhamento (Eq. [4.2.1]),

$$S(Y) = - \sum_{n=1}^{\infty} p_n \ln \left[e^{-mbY} \frac{(mbY)^n}{n!} \right] = - \sum_n \frac{N^n}{n!} e^{-N} \ln \left(\frac{N^n}{n!} e^{-N} \right). \quad (4.3.57)$$

Com a ajuda da aproximação de *Stirling* e da representação integral da função logarítmica,

$$\ln n = \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} (e^{-s} - e^{-ns}), \quad (4.3.58)$$

o somatório na Eq. [4.3.57] pode ser feito de forma analítica, com validade assintótica para $N \gg 1$:

$$S = \frac{1}{2} \left[\ln(2\pi e N) - \frac{1}{6N} + \mathcal{O}(1/N^2) \right]. \quad (4.3.59)$$

4.4 ENTROPIA DE EMARANHAMENTO DE UM ESPALHAMENTO ELÁSTICO

Nesta subseção, foca-se na entropia de emaranhamento gerada pela interação de partículas em uma colisão. Seguindo esta linha de investigação, a dinâmica subentendida é dada pela QCD não perturbativa ou, na fenomenologia de *Regge*, pela física do Pomeron não perturbativo (soft Pomeron).

Em particular, é descrita a interação hádron-hádron em espalhamentos com interação forte tanto para o canal elástico ($A+B \rightarrow A+B$) quanto inelástico ($A+B \rightarrow X$), utilizando o formalismo da matriz de espalhamento S . Para isso, segue-se estritamente os passos desenvolvidos nas referências [23, 24], em que a matriz densidade reduzida, $\hat{\rho}_A$, do estado final de duas partículas que realizaram um espalhamento elástico é escrita em termos da expansão de ondas parciais dos estados de dois corpos.

É utilizada a expansão de ondas parciais dos observáveis físicos, como a seção de choque total, elástica e inelástica da colisão (σ_T , σ_{el} e σ_{inel}), bem como a seção de choque elástica diferencial, $d\sigma_{\text{el}}/dt$, sendo t a variável de *Mandelstam* associada ao momento transferido. Utilizando a Estratégia 2, proposta anteriormente, a entropia de emaranhamento será obtida a partir da entropia de Rényi:

$$S_E = - \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \text{Tr}[\hat{\rho}_A^\alpha] = - \ln \Omega, \quad (4.4.1)$$

$$\Omega = 1 - \left(\frac{\sigma_{\text{el}} - \frac{4}{f_V} \frac{d\sigma_{\text{el}}}{dt} \Big|_{t=0}}{\pi f_V - \sigma_{\text{inel}}} \right). \quad (4.4.2)$$

Nas equações acima, $f_V = V/k^2$ com $V = \sum_{\ell} (\ell + 1)$ sendo o volume total do espaço de fase. Um volume

como este é formalmente divergente, pois o espaço de *Hilbert* completo abrange todas as ondas parciais até $\ell \rightarrow \infty$. Na referência [24], a origem física desta divergência é identificada e a sua regularização é tratada corretamente.

Inicialmente, será considerado o espalhamento elástico de duas partículas que não interagem, A e B . Antes do espalhamento, a partícula A tem um 3-*momentum* \vec{k} enquanto a partícula B tem \vec{l} . Após a interação, A e B tem um 3-*momentum* \vec{p} e \vec{q} , respectivamente.

Nas colisões elásticas, a matriz densidade do sistema será dada por:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{N} \int \frac{d^3 p}{2E_A(\vec{p})} \frac{d^3 q}{2E_B(\vec{q})} \frac{d^3 p'}{2E_A(\vec{p}')} \frac{d^3 q'}{2E_B(\vec{q}')} |\vec{p}, \vec{q}\rangle \langle \vec{p}, \vec{q}| S |\vec{k}, \vec{l}\rangle \langle \vec{k}, \vec{l}| S^\dagger |\vec{p}', \vec{q}'\rangle \langle \vec{p}', \vec{q}'|. \quad (4.4.3)$$

A matriz densidade reduzida é construída em termos da matriz S projetando o estado inicial dos dois corpos no estado final: sendo \hat{Q} o operador de projeção,

$$|\psi_f\rangle = \hat{Q} \hat{S} |\psi_i\rangle, \quad (4.4.4)$$

de forma que $|\psi_{f,i}\rangle$ são os estados finais e iniciais respectivamente. Calculando o traço parcial da matriz densidade total $\hat{\rho}$ em relação aos vetores do espaço de *Hilbert* B , \mathcal{H}_B [¶],

$$\hat{\rho}_A = \rho_0 \int \frac{d^3 p}{2E_{A,p}} \delta(p - k) \frac{|\langle \vec{p}, -\vec{p} | \hat{S} | \vec{k}, -\vec{k} \rangle|^2}{4k(E_{A,k} + E_{B,k})} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|, \quad (4.4.5)$$

sendo,

$$\rho_0^{-1} = \delta^3(0) \int d^3 p \delta(p - k) \frac{|\langle \vec{p}, -\vec{p} | \hat{S} | \vec{k}, -\vec{k} \rangle|^2}{4k(E_{A,k} + E_{B,k})}, \quad (4.4.6)$$

para qual a condição de normalização é obedecida,

$$\text{Tr}_A[\hat{\rho}_A] = \text{Tr}_B[\hat{\rho}_B] = 1. \quad (4.4.7)$$

Esta condição é responsável pela função delta na Eq. [4.4.6] e é uma possível origem da divergência na entropia. Nas equações acima, $p = |\vec{p}|$ e $k = |\vec{k}|$ com, $\cos\theta = \vec{p} \cdot \vec{k} / (pk)$.

Para calcular o traço, nos moldes da Eq. [4.4.1],

$$\text{Tr}_A[\hat{\rho}_A]^n = \int d^3 p \delta^{(3)}(0) \left(\rho_0 \delta(p - k) \frac{|\langle \vec{p}, -\vec{p} | \hat{S} | \vec{k}, -\vec{k} \rangle|^2}{4k(E_{A,k} + E_{B,k})} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| \right)^n, \quad (4.4.8)$$

de forma que a função delta extra aparece devido o cálculo do traço sobre o 3-*momentum* da partícula A . Considera-se a definição,

$$\langle \vec{p}, \vec{q} | \hat{S} | \vec{k}, \vec{l} \rangle \equiv \delta^{(4)}(P_{p+q} - P_{k+l}) \langle \vec{p}, \vec{q} | s | \vec{k}, \vec{l} \rangle, \quad (4.4.9)$$

com a notação P para o 4-vetor do centro de massa e $s = 1 + 2i$ a matriz \hat{S} reduzida e t a matriz de transferência reduzida.

[¶]Com $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_B = \mathcal{H}$, sendo \mathcal{H} o espaço de *Hilbert* que contém todo o sistema.

Realizando a expansão em ondas parciais dos elementos da matriz s e da amplitude de espalhamento,

$$\langle \vec{p}, -\vec{p} | s | \vec{k}, -\vec{k} \rangle = \frac{E_{A,k} + E_{B,k}}{(\pi k/2)} \left[\delta(1 - \cos\theta) + \frac{i\mathcal{A}}{16\pi} \right], \quad (4.4.10)$$

sendo a amplitude de espalhamento dada por,

$$\mathcal{A}(s, t) = 16\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \tau_{\ell} P_{\ell}(\cos\theta), \quad (4.4.11)$$

o traço da Eq. [4.4.8] pode ser calculado. Na Eq. [4.4.11], a variável $s_{\ell} = 1 + 2i\tau_{\ell}$ refere-se a ℓ -éssima onda parcial da matriz \hat{S} de dois corpos. É possível definir um volume total do espaço de fase,

$$V \equiv 2\delta(0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1), \quad (4.4.12)$$

que esta relacionado com as funções delta tridimensionais na forma de $V = 4\pi k^2 \sigma^{(3)}(0)/\sigma(0)$.

Após a integração sobre o 3-*momentum*, escrevendo a Eq. [4.4.10] em termos do ângulo de espalhamento θ e fatorizando os fatores constantes, é possível escrever,

$$\text{Tr}_A[\hat{\rho}_A]^n = \left(\frac{V}{2} \right)^{1-n} \int_{-1}^1 d\cos\theta [\mathcal{P}(\theta)]^n, \quad (4.4.13)$$

com,

$$\mathcal{P}(\theta) = \delta(1 - \cos\theta) \left(1 - \frac{2\sum_{\ell}(2\ell + 1)|\tau_{\ell}|^2}{V/2 - \sum_{\ell}(2\ell + 1)f_{\ell}} \right) + \frac{|\sum_{\ell}(2\ell + 1)\tau_{\ell}P_{\ell}(\cos\theta)|^2}{V/2 - \sum_{\ell}(2\ell + 1)f_{\ell}}, \quad (4.4.14)$$

sendo, nesta equação, f_{ℓ} os componentes de onda parcial da seção de choque inelástica relacionados aos componentes elásticos τ_{ℓ} através da relação de unitariedade,

$$f_{\ell} = 2(\text{Im } \tau_{\ell} - |\tau_{\ell}|^2). \quad (4.4.15)$$

O próximo passo é escrever a expressão $\mathcal{P}(\theta)$ em função de observáveis físicos, σ_{el} , σ_{inel} , σ_T e $d\sigma_{\text{el}}/dt = |\mathcal{A}|^2/(256\pi k^4)$, que são usualmente descritas em termo dos componentes de ondas parciais τ_{ℓ} e f_{ℓ} . Obtém-se,

$$\mathcal{P}(\theta) = \delta(1 - \cos\theta) \left(1 - \frac{\sigma_{\text{el}}}{\pi V/k^2 - \sigma_{\text{inel}}} \right) + \frac{2k^2}{\sigma_{\text{el}} \frac{d\sigma_{\text{el}}}{dt}} \frac{\sigma_{\text{el}}}{\pi V/k^2 - \sigma_{\text{inel}}}, \quad (4.4.16)$$

com a variável de *Mandelstam* $t = 2k^2(\cos\theta - 1)$ sendo o quadrado do *momentum* transferido.

Finalmente, a entropia de emaranhamento S [4.4.1] é,

$$S = \ln \frac{V}{2} - \int_{-1}^1 d\cos\theta \mathcal{P}(\theta) \ln \mathcal{P}(\theta). \quad (4.4.17)$$

Como discutido anteriormente, são identificadas divergências na expressão para a entropia de emaranhamento devido a presença do volume total no espaço de fase V . Os autores da referência [24] apontam três opções de regularização: (i) regularização de volume, (ii) regularização por cutoff com uma função de *Heaviside* [4.3.43] e (iii) regularização por cutoff com uma função gaussiana. Isto é possível pois para uma dada energia, o primeiro termo da Eq. [4.4.16] sobrevém da parte de um dos dois corpos no espaço de *Hilbert* dos estados finais

que não correspondem aos estados interagentes. A forma natural de remover estes estados não interagentes é regularizando o volume do espaço de fase de forma que o primeiro termo da Eq. [4.4.16] desapareça.

Para realizar estes procedimentos, as operações são definidas de forma que $\sigma_{\text{el}}/[(\pi\tilde{V}/k^2) - \sigma_{\text{inel}}] = 1$. Utilizando o fato de que $\sigma_T = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}}$, obtém-se $\tilde{V} = k^2\sigma_T/\pi$, e,

$$\tilde{\mathcal{P}}(\theta) = \frac{2k^2}{\sigma_{\text{el}}} \frac{d\sigma_{\text{el}}}{dt}. \quad (4.4.18)$$

Este é considerada a hipótese de regularização de volume. Com este procedimento a entropia de emaranhamento será,

$$S = - \int_0^\infty d|t| \frac{1}{\sigma_{\text{el}}} \frac{d\sigma_{\text{el}}}{dt} \ln \left(\frac{4\pi}{\sigma_T \sigma_{\text{el}}} \frac{d\sigma_{\text{el}}}{dt} \right), \quad (4.4.19)$$

que depende apenas de observáveis mensuráveis.

Os autores de [24] realizaram estimativas para a Eq. [4.4.19] de forma que na sua obtenção assumiram a aproximação de pico difrativo no espalhamento hádron-hádron em altas energias. Neste caso, a seção de choque elástica diferencial é dada por,

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{dt} = \frac{\sigma_T^2}{16\pi} e^{-B_{\text{el}}|t|}, \quad (4.4.20)$$

com,

$$\sigma_{\text{el}} = \int_0^\infty d|t| \frac{d\sigma_{\text{el}}}{dt} = \frac{\sigma_T^2}{16\pi B_{\text{el}}}, \quad (4.4.21)$$

sendo $B_{\text{el}}(\sqrt{s})$ o parâmetro de inclinação elástica.

Agora, seguem os procedimentos dos cutoff com as funções passo e gaussiana. Com estes regularizadores, os autores de [23] reescreveram a amplitude de espalhamento \mathcal{A} na representação do parâmetro de impacto como,

$$a(s, b) = \frac{1}{2\pi} \int d^2 q e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} f(s, t), \quad (4.4.22)$$

$$f(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int d^2 b e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} a(s, b), \quad (4.4.23)$$

de forma que $f(s, t) = \mathcal{A}/(16\pi k^2)$ e então, $\sigma_T = 2 \int d^2 b \text{Im } a(s, b)$ e $\sigma_{\text{el}} = \int d^2 b |a(s, b)|^2$, com $t = -\vec{q}^2$.

A seguinte prescrição é utilizada para obter aproximadamente o espaço de *Hilbert*. Identificando que $bk \sim \ell$, a região para um grande parâmetro de impacto não contribui para a amplitude de espalhamento $a(s, b)$. O procedimento de regularização é realizado a partir do truncamento dos modos de grande parâmetro de impacto introduzindo uma função de cutoff $C(b)$ que desaparece para $b \rightarrow \infty$. Desta forma, as quantidades reguladas são dadas por,

$$\hat{\sigma}_T = 2 \int_0^\infty d^2 b C^2(b) \text{Im } a(s, b), \quad (4.4.24)$$

$$\hat{\sigma}_{\text{el}} = \int_0^\infty d^2 b C^2(b) |a(s, b)|^2, \quad (4.4.25)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}_{\text{el}}}{dt} = \frac{1}{4\pi} \left| \int_0^\infty d^2 b e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} C(b) a(s, b) \right|^2. \quad (4.4.26)$$

Desta forma, o volume do espaço de fase de *Hilbert* regularizado é dado por $\tilde{V} \approx \hat{V} = k^2 \hat{\sigma}_T / \pi$ e como consequência,

$$\hat{\mathcal{P}}(\theta) = \frac{2k^2}{\hat{\sigma}_{el}} \frac{d\hat{\sigma}_{el}}{dt}. \quad (4.4.27)$$

As funções mais simples para aplicação deste método são justamente a função degrau e a gaussiana,

$$C(b) = \begin{cases} 1, & \text{para } b \leq 2\Lambda; \\ 0, & \text{para } b > 2\Lambda, \end{cases} \quad (4.4.28)$$

$$C(b) = e^{-\frac{1}{2} \frac{b^2}{4\Lambda^2}}. \quad (4.4.29)$$

Com a realização do cutoff a entropia de emaranhamento é dada por,

$$\hat{S} = - \int_0^\infty d|t| \frac{1}{\hat{\sigma}_{el}} \frac{d\hat{\sigma}_{el}}{dt} \ln \left(\frac{4\pi}{\hat{\sigma}_T \hat{\sigma}_{el}} \frac{d\hat{\sigma}_{el}}{dt} \right). \quad (4.4.30)$$

Ambos os *cutoffs* realizam a regularização acima no volume infinito do espaço de fase de *Hilbert* pois agora ℓ tem um limite superior definido por $\ell_{max} \equiv 2\Lambda k$ e agora $\hat{V} = 2k^2 \int_0^\infty C^2(b) = 4k^2 \Lambda$. De qualquer forma, a condição que determina o cutoff é $\Lambda^2 = \hat{\sigma}_T / 4\pi$.

4.5 A ENTROPIA DE EMARANHAMENTO NO CGC

Neste modelo, utiliza-se a caracterização das funções de onda no formalismo CGC a fim de investigar a entropia de emaranhamento. Para isso, inicialmente, aborda-se a estrutura da função de onda hadrônica num DIS em altas energias a fim de se obter a matriz densidade reduzida do sistema, para então calcular a entropia de emaranhamento.

Em altas energias a função de onda hadrônica tem grande contribuição dos *glúons soft* (que portam um pequeno *momentum*), os quais tem energia suficiente para espalhar um alvo hadrônico, num intervalo de rapidez,

$$0 < T < \Delta Y, \quad (4.5.1)$$

com $Y \sim 1/\alpha_s$.

No modelo CGC a função de onda hadrônica tem a forma,

$$\Psi[a, A] = \psi[A] \chi[a, \rho], \quad (4.5.2)$$

sendo a os modos dos glúons soft, A os modos dos quarks de valência (com rapidez $Y > \Delta Y$) e $\rho^a(x)$ a densidade de carga de cor, como função da coordenada x . Para $\rho \ll 1/\alpha_s$ a função de onda dos glúons é dada por um estado coerente,

$$\chi[a, \rho] = e^{i \int_k b_a^i(k) [a_a^{\dagger i}(k) + a_a^i(-k)]} |0\rangle, \quad (4.5.3)$$

com o campo de *Weizsacker-Williams*,

$$b_a^i(k) = g \rho_a(k) \frac{i k^i}{k^2}, \quad (4.5.4)$$

sendo g o acoplamento da interação forte.

Os operadores criação e aniquilação na Eq. [4.5.3] são integrados sobre a rapidez,

$$a_i^a(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta Y}} \int_{Y < \Delta Y} \frac{dY}{2\pi} a_i^a(Y, k). \quad (4.5.5)$$

Para uma energia fixa, os observáveis que dependem apenas da densidade de carga de cor $O[A]$ são calculados a partir da Eq. [3.1.34]. Neste modelo será utilizado o modelo de *McLerran-Venugopalan* [68], com o funcional peso dado pela Eq. [3.1.36].

A matriz densidade reduzida $\hat{\rho}_r$ para os glúons soft no modelo MV é,

$$\hat{\rho}_r = \mathcal{N} \int D[\rho] e^{-\int_k \frac{1}{2\mu^2(k)\rho_a(k)\rho_a(-k)}} e^{i \int_q b_b^i(q) \phi_b^i(-q)} |0\rangle \langle 0| e^{-i \int_p b_c^j(p) \phi_c^j(-p)}, \quad (4.5.6)$$

sendo,

$$\phi_a^i(k) = a_a^i(k) + a_a^{\dagger i}(-k). \quad (4.5.7)$$

A integral sobre a densidade de carga [4.5.6] resulta em,

$$\hat{\rho}_r = \sum_n \frac{1}{n!} e^{-\frac{1}{2} \phi_i M_{ij} \phi_j} \left[\prod_{m=1}^n M_{imjm} \phi_{im} |0\rangle \langle 0| \phi_{jm} \right] e^{-\frac{1}{2} \phi_i M_{ij} \phi_j}, \quad (4.5.8)$$

consideradas as notações compactas,

$$\begin{cases} \phi_i \equiv [a_i^{\dagger a}(x) + a_i^a(x)]; \\ M_{ij} \equiv \frac{g^2}{4\pi^2} \int_{u,v} \mu^2(u, v) \frac{(x-u)_i (y-v)_j}{(x-u)^2 (y-v)^2} \delta^{ab}, \end{cases} \quad (4.5.9)$$

tendo a matriz \hat{M} duas polarizações, duas cores e dois índices de coordenadas, denotados coletivamente pelo par $\{i, j\}$.

Desta forma, nesta seção, o objetivo é encontrar uma expressão para $\text{Tr}[\hat{\rho}^{1+\epsilon}]$ a fim de estabelecer o programa proposto na Estratégia III. Para isso, inicialmente, é calculado $\text{Tr}[\hat{\rho}_r^N]$ para um N arbitrário, e depois toma-se o limite $N \rightarrow 1 + \epsilon$. Para $\text{Tr}[\hat{\rho}_r^2]$,

$$\text{Tr}[\hat{\rho}_r^2] = \sum_{n,n'} \frac{1}{n!n'!} \langle 0| e^{-\phi_i M_{ij} \phi_j} \left(\prod_{m=1}^n \prod_{m'=1}^{n'} M_{imjm} M_{i'm'j'm'} \phi_{j'm'} \phi_{im} |0\rangle \langle 0| \phi_{jm} \phi_{i'm'} \right) e^{-\phi_i M_{ij} \phi_j} |0\rangle. \quad (4.5.10)$$

Esta expressão é utilizada para o cômputo da entropia de *Rényi* na referência [25]. A generalização da Eq. [4.5.10] para $\hat{\rho}_r^N$ contempla o produto de N elementos dos operadores da matriz de vácuo que dependem do campo ϕ . Cada um dos elementos de matriz são calculadas separadamente, de forma que os campos que entram na expressão podem ser considerados independentes. Desta forma, define-se o multipletto de campos replicados ϕ_i^α , com $\alpha = 1, 2, \dots, N$.

$$\text{Tr}[\hat{\rho}_r^N] = \langle 0| e^{-\sum_{\alpha=1}^N \phi_i^\alpha M_{ij} \phi_j^\alpha + \sum_{\alpha=1}^N \phi_i^\alpha M_{ij} \phi_j^{\alpha+1}} |0\rangle, \quad (4.5.11)$$

sendo agora $|0\rangle$ o vácuo no cone de luz de todos os campos replicados ϕ^α . Nota-se que o próximo vizinho da ‘interação’ nos campos replicados seguem a condição de contorno periódica,

$$\phi^{N+1} = \phi^1. \quad (4.5.12)$$

Desta forma, é possível reescrever a Eq. [4.5.11] como,

$$\text{Tr}[\hat{\rho}_r^N] = \left(\frac{\det[\hat{\pi}]}{2\pi} \right)^{N/2} \int \prod_{\alpha=1}^N [D\phi^\alpha] e^{-\frac{\pi}{2} \sum_{\alpha=1}^N \phi_i^\alpha \phi_i^\alpha - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (\phi_i^\alpha - \phi_i^{\alpha+1}) M_{ij} (\phi_j^\alpha - \phi_j^{\alpha+1})}, \quad (4.5.13)$$

sendo, nesta equação,

$$\hat{\pi} = \pi \delta_{ij} \delta^{ab} \delta^2(x - y), \quad (4.5.14)$$

A ‘ação’ é diagonalizada por uma transformada de *Fourier* em α :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}^n = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N e^{i \frac{2\pi}{N} \alpha n} \phi^\alpha; \\ \phi^\alpha = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i \frac{2\pi}{N} \alpha n} \tilde{\phi}^n, \end{cases} \quad (4.5.15)$$

com a relação de periodicidade,

$$\tilde{\phi}^{N-n} = \tilde{\phi}^{*n}. \quad (4.5.16)$$

A relação entre vizinhos no espaço de *Fourier* resulta em,

$$(\phi_i^\alpha - \phi_i^{\alpha+1})(\phi_j^\alpha - \phi_j^{\alpha+1}) = \sum_{n,m} (e^{-i \frac{2\pi}{N} n} - 1)(e^{-i \frac{2\pi}{N} m} - 1) e^{-i \frac{2\pi}{N} \alpha(n+m)} \tilde{\phi}_i^n \tilde{\phi}_j^m. \quad (4.5.17)$$

Utilizando,

$$\sum_{\alpha} e^{-i \frac{2\pi}{N} \alpha(n+m)} = N \delta_{(n+m), N}, \quad (4.5.18)$$

obtém-se,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} (\phi_i^\alpha - \phi_i^{\alpha+1})(\phi_j^\alpha - \phi_j^{\alpha+1}) &= N \sum_n (e^{-i \frac{2\pi}{N} n} - 1)(e^{-i \frac{2\pi}{N} n} - 1) \tilde{\phi}_i^n \tilde{\phi}_j^{*n} \\ &= 4N \sum_n \sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) \tilde{\phi}_i^n \tilde{\phi}_j^{*n}. \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

Então,

$$\text{Tr}[\hat{\rho}_r^N] = N^{N/2} \left(\frac{\det[\hat{\pi}]}{2\pi} \right)^{N/2} \int \prod_n [D\tilde{\phi}^n] e^{-\frac{N}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\phi}_i^n [\hat{\pi} + 4\hat{M} \sin^2(\pi n/N)]_{ij} \tilde{\phi}_j^{*n}}, \quad (4.5.20)$$

sendo $N^{N/2}$ o jacobiano da transformação [4.5.15].

Sendo,

$$\hat{\pi} + 4\hat{M} \sin^2 \frac{\pi n}{N} = \hat{\pi} + 2\hat{M} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N} \right), \quad (4.5.21)$$

a integral gaussiana na Eq. [4.5.20] é,

$$\text{Tr}[\hat{\rho}_r^N] = \det[\hat{\pi}]^{N/2} \det \left\{ \prod_{n=0}^{N-1} \left[\hat{\pi} + 2\hat{M} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N} \right) \right] \right\}^{-1/2}. \quad (4.5.22)$$

Utilizando a o resultado tabelado (1.396) da referência [101],

$$\begin{aligned} \prod_{n=0}^{N-1} \left[\hat{\pi} + 2\hat{M} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N} \right) \right] &= (2\hat{M})^N \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N} + \frac{\hat{M}^{-1} \hat{\pi}}{2} \right) \\ &= 2\hat{M}^N \left\{ \cosh \left[N \cosh^{-1} \left(1 + \frac{\hat{M}^{-1} \hat{\pi}}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.23)$$

Desta forma,

$$\text{Tr}[\hat{\rho}_r^N] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{N}{2} \text{Tr}[\ln \hat{\pi}^{-1} \hat{M}] - \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\ln \left(\cosh \left(N \cosh^{-1} \left(1 + \frac{\hat{M}^{-1} \hat{\pi}}{2} \right) \right) - 1 \right) \right] \right\}. \quad (4.5.24)$$

A entropia é obtida tomando $N = 1 + \epsilon$ e mantendo os termos lineares em ϵ , de forma que,

$$\text{Tr}[\hat{\rho}_r^{1+\epsilon}] \approx 1 + \frac{\epsilon}{2} \text{Tr} \left[\ln(\hat{\pi}^{-1} \hat{M}) - \sqrt{1 + 4\hat{\pi}^{-1} \hat{M}} \ln \left[1 + \frac{\hat{M}^{-1} \hat{\pi}}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\hat{\pi}^{-1} \hat{M}} \right) \right] \right]. \quad (4.5.25)$$

Assim, a entropia de emaranhamento é,

$$S = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \ln(\hat{\pi}^{-1} \hat{M}) + \sqrt{1 + 4\hat{\pi}^{-1} \hat{M}} \ln \left[1 + \frac{\hat{M}^{-1} \hat{\pi}}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\hat{\pi}^{-1} \hat{M}} \right) \right] \right\}. \quad (4.5.26)$$

Para compreender esta equação, considera-se o caso invariante frente à translação, onde a matriz \hat{M} é diagonal no espaço de *momentum*,

$$M_{ij}^{ab}(p) = g^2 \mu^2(p^2) \frac{p_i p_j}{p^4} \delta^{ab}. \quad (4.5.27)$$

No modelo original MV, μ^2 é uma constante e não depende do *momentum*. A contribuição para a entropia com modos de grande *momentum* transverso pode ser obtido expandindo a Eq. [4.5.26] na ordem principal em \hat{M} , desde que para grandes *momenta* ($g^2 \mu^2 < p^2$) os autovalores de \hat{M} sejam pequenos. A expressão para entropia no limite do campos fraco é,

$$S_E^{M \ll 1} = \text{Tr} [\hat{\pi}^{-1} \hat{M} \ln \hat{M}^{-1} \hat{\pi} e]. \quad (4.5.28)$$

Assim, a contribuição ultravioleta dominante é,

$$S_E^{UV} \approx -\frac{g^2}{\pi} (N_c^2 - 1) S \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{\mu^2(p^2)}{p^2} \ln \left[\frac{g^2 \mu^2(p^2)}{e\pi p^2} \theta \left(p^2 - \frac{g^2}{\pi} \mu^2(p^2) \right) \right], \quad (4.5.29)$$

sendo, nesta equação, S a área total do projétil. No modelo MV original com μ independente do *momentum*, a expressão [4.5.29] é logaritmicamente divergente. Introduzindo o cutoff Λ no ultravioleta,

$$S_E^{UV} \approx \frac{Q_s^2}{4\pi g} (N_c^2 - 1) S \left[\ln^2 \frac{g^2 \Lambda^2}{Q_s^2} + \ln \frac{g^2 \Lambda}{Q_s^2} \right], \quad (4.5.30)$$

de forma que a escala de saturação foi identificada de forma usual no modelo,

$$Q_s^2 = \frac{g^4 \mu^2}{\pi}. \quad (4.5.31)$$

A contribuição dos modos do infravermelho também podem ser calculados. Para faixas de *momentum* $p^2 < Q_s^2/g^2$ é possível expandir \hat{M}^{-1} , de forma que,

$$S_E^{M \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{2} \text{Tr} [\ln e^2 \hat{\pi}^{-1} \hat{M}]. \quad (4.5.32)$$

Assim,

$$S_E^{IR} \approx \frac{1}{2} (N_c^2 - 1) S \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln \frac{e^2 g^2 \mu^2(p^2)}{\pi p^2} \theta(Q_s^2 - g^2 p^2) = \frac{3}{8\pi g^2} (N_c^2 - 1) S Q_s^2. \quad (4.5.33)$$

Combinando as duas expressões a entropia de emaranhamento CGC no modelo MV é dada por,

$$S_E \approx S_E^{IR} + S_E^{UV} = \frac{SQ_s^2}{4\pi g^2} (N_c^2 - 1) \left(\ln^2 \frac{g^2 \Lambda^2}{Q_s^2} + \ln \frac{g^2 \Lambda^2}{Q_s^2} + \frac{3}{2} \right). \quad (4.5.34)$$

Em detrimento da representação de campo, na referência [102] é feita a mesma computação da entropia na representação do operador número,

$$\langle N \rangle = \text{Tr} \left[\int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 a_k^\dagger a_k \hat{\rho}_r} \right] \quad (4.5.35)$$

obtendo uma expressão coincidente,

$$S_E^{CGC} \approx \frac{1}{2} S_{CF} \int_0^\infty \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[\ln \left(\frac{g^2 \mu^2}{k^2} \right) + \sqrt{1 + 4 \frac{g^2 \mu^2}{k^2}} \ln \left(1 + \frac{k^2}{2g^2 \mu^2} + \frac{k^2}{2g^2 \mu^2} \sqrt{1 + 4 \frac{g^2 \mu^2}{k^2}} \right) \right]. \quad (4.5.36)$$

Para fins fenomenológicos, a saturação pode evoluir com a rapidez seguindo o modelo GBW. Além disso, o regulador ultravioleta pode ser identificada como a virtualidade do fóton no DIS Q^2 , com a escolha arbitrária $Q^2 = g^2 \Lambda^2$. Desta forma, analiticamente,

$$S_E^{CGC} = \frac{1}{2} S \frac{C_F}{4\pi} \tilde{Q}_s^2 \left[\tau \ln(\tau^{-1}) + \tau \sqrt{1 + 4\tau^{-1}} \ln \left(\frac{\sqrt{1 + 4\tau^{-1}} + 1}{\sqrt{1 + 4\tau^{-1}} - 1} \right) + \ln^2 \left(\frac{\sqrt{1 + 4\tau^{-1}} + 1}{\sqrt{1 + 4\tau^{-1}} - 1} \right) \right], \quad (4.5.37)$$

sendo $\tau = Q^2 / \tilde{Q}_s^2$ e $\tilde{Q}_s^2 = (9/4) Q_s^2$.

Os comportamentos paramétricos das equações [4.5.30] e [4.5.33] são obtidos para $\tau = 1$ ($Q^2 = \tilde{Q}_s^2$), então,

$$S_E^{CGC} \sim S \tilde{Q}_s^2, \quad (4.5.38)$$

Por outro lado, para grandes valores de τ , $\sqrt{1 + 4\tau^{-1}} \approx 1 + 2\tau^{-1}$, de forma que,

$$S_E^{CGC} \sim S \tilde{Q}_s^2 (2 \ln \tau + \ln^2 \tau). \quad (4.5.39)$$

Para cálculos numéricos, é possível utilizar,

$$S = \pi R_p^2 = \sigma_0 / 2, \quad (4.5.40)$$

com R_p sendo o raio do próton.

Capítulo 5

Entropia da Decoerência Quântica

A última forma de geração de entropia estudada nesta tese será devida à decoerência quântica. Desta forma, este breve capítulo irá abordar a caracterização do fenômeno, seguida pelo cálculo da entropia de decoerência nos estados CGC.

5.1 DECOERÊNCIA QUÂNTICA

O começo do século XX trouxe consigo teorias físicas que se impunham sobre a concepção clássica até então bem estabelecida, em especial, as Teorias da Relatividade e a Mecânica Quântica, que não só explicam resultados onde as antigas concepções falham, como preveem novos fenômenos. Contudo, seria ingênuo abandonar todas as previsões e resultados obtidos pelas teorias clássicas, de forma que hoje, sabe-se que cada uma destas teorias tem o seu regime de dominância. Por exemplo, a transformação de *Lorentz* da Relatividade Restrita para baixas velocidades recai na transformação clássica de *Galileu*, de forma que é seguro afirmar que a relatividade é uma teoria que trata de objetos em altas velocidades.

Por outro lado, as fronteiras entre o regime Clássico e Quântico da dinâmica não possuem uma correspondência tão simples. Algumas equações até podem retomar, ao seu modo, às estabelecidas pela Mecânica Clássica nos valores médios de observáveis a partir do teorema de *Ehrenfest*. Entretanto, isto não explica o desaparecimento da álgebra de comutação entre observáveis e, em alguns casos, possui diversas restrições. Na busca entre a delimitação das teorias, *Bohr* introduziu o *princípio da correspondência*, onde a ideia seria estudar o limite em que a constante de *Planck* tendesse a zero ($\hbar \rightarrow 0$). Dessa forma, a energia teria um espectro contínuo, equivalendo ao caso clássico. Contudo, ainda faltariam explicações para o supracitado problema das discrepâncias entre álgebras propostas pela mecânica quântica e clássica.

Outro fenômeno quântico sem precedentes clássicos é o *Colapso da Função de Onda*, onde, para compreendê-lo, é necessária a elucidação do *modos operandi* básico da dinâmica quântica: dado um sistema composto por uma partícula de massa m (pode-se ser um conjunto de partículas, mas isto traria algumas dificuldades que não são do interesse da discussão) embebida na influência de um campo potencial $V(\vec{r}, t)$, a evolução do sistema é dada pela *equação de Schrödinger*,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right] |\psi\rangle, \quad (5.1.1)$$

$|\psi(\vec{r}, t)\rangle$ é a solução desta equação: o *estado quântico*. Mas ela não carrega consigo um sentido físico próprio, como por exemplo a equação de uma onda de uma corda esticada que revela o seu deslocamento vertical ou como a diferença de pressão nas moléculas do ar na propagação de uma onda sonora ou ainda os campos nas ondas eletromagnéticas. O real significado físico da função de onda deve-se ao físico alemão *Max Born*: o *módulo quadrado da projeção do estado quântico na representação da posição, i.e., da função de onda* $\psi(\vec{r}, t) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$, *é a densidade de probabilidade de encontrar a partícula na posição \vec{r} e $\vec{r} + d\vec{r}$ no instante t , ou seja,*

$$P(\vec{r}, t) d^3 r = |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3 r. \quad (5.1.2)$$

Portanto, se é de interesse analisar a probabilidade de encontrar a partícula entre os pontos a e b , denotada por P_{ab} , a probabilidade, no caso unidimensional, é expressa por

$$P_{ab} = \int_a^b |\psi(x, t)|^2 dx. \quad (5.1.3)$$

Uma vez resolvida a equação de *Schrödinger*, i. e., obtida a função de onda, é possível expressá-la como uma combinação linear dos autoestados que compunham a base do sistema em questão,

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |i\rangle, \quad (5.1.4)$$

com o conjunto $\{|i\rangle\}$ configurando um espaço vetorial N -dimensional denominado *espaço de Hilbert* \mathcal{H} , espaço vetorial das funções quadrado-integráveis finitas. Aqui, o conjunto de escalares $\{c_i\}$ é composto por números complexos. Desta forma, diz-se que o estado físico (função de onda) é uma combinação linear de estados independentes, ou seja, é um sistema em *sobreposição*. Desta forma, se for realizada uma medida sobre o sistema, ele instantaneamente colapsará para o estado medido e todos os demais estados que compunham a sobreposição desaparecerão, de forma que a sobreposição *nunca* é medida. Este fenômeno é conhecido como o colapso da função de onda.

É possível tratar um espaço vetorial N -dimensional. Contudo, por fins de simplicidade, considera-se aqui o caso mais simples, em que $N = 2$, de forma que a Eq. [5.1.4] toma a forma,

$$|\psi\rangle = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle. \quad (5.1.5)$$

A interpretação de *Born* revela que a probabilidade de se medir o estado $|1\rangle$ ou $|2\rangle$ segue a regra,

$$\begin{cases} \text{Probabilidade de medir } |1\rangle: & c_1 c_1^*; \\ \text{Probabilidade de medir } |2\rangle: & c_2 c_2^*. \end{cases} \quad (5.1.6)$$

Desta forma, para um sistema de dois estados (sendo este um resultado geral que pode ser adaptado para N estados), tem-se,

$$\sum_{i=1}^N c_i c_i^* = 1 \quad \therefore \quad c_1 c_1^* + c_2 c_2^* = 1, \quad (5.1.7)$$

ou seja, para uma probabilidade de 50% de se medir o estado $|1\rangle$, é possível ter o coeficiente $c_1 = 1/\sqrt{2}$ e, segundo as imposições [5.1.7], $c_2 = 1/\sqrt{2}$. Contudo, fora dito que os coeficientes da combinação linear [5.1.5] podem ser números complexos, e, de fato, é possível atribuir uma fase θ aos coeficientes sem perda do resultado físico como por exemplo, $c_2 = e^{i\theta}/\sqrt{2}$. Pois,

$$c_2 c_2^* = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta} \right] = \underbrace{e^{i\theta} e^{-i\theta}}_1 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad (5.1.8)$$

ou seja, a adição de uma fase real θ não alterou a física do problema. Dito isto, considera-se agora um objeto material, que pode ter tanto dimensões microscópicas (um elétron, por exemplo) ou macroscópicas (um grão de areia), podendo estar em dois estados, $|1\rangle$ e $|2\rangle$, com energias E_1 e E_2 . A evolução temporal de cada um dos estados é,

$$|n(t)\rangle \rightarrow e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle, \quad (5.1.9)$$

portanto, a evolução temporal da representação [5.1.5] é tal que,

$$|\psi(t)\rangle \rightarrow e^{-iE_1 t/\hbar} c_1 |1\rangle + e^{-iE_2 t/\hbar} c_2 |2\rangle. \quad (5.1.10)$$

Definindo $\omega \equiv (E_2 - E_1)/\hbar$, é possível representar a evolução temporal do sistema (que pode ser também realizada em relação à E_2 caso seja preferível) na forma,

$$|\psi(t)\rangle \rightarrow e^{-iE_1 t/\hbar} \left[c_1 |1\rangle + e^{-i\omega t} c_2 |2\rangle \right]. \quad (5.1.11)$$

Agora, considerando que o objeto em questão esteja submetido ao campo gravitacional terrestre, com $\omega = mg\Delta z/\hbar$, tem-se, para um elétron com valores de separação nos pacotes de onda de $\Delta z = 1$ nm ou $\Delta z = 1$ m, $\omega = 10^{-4}$ Hz ou $\omega = 10^5$ Hz; para uma massa de 1g, $\omega = 10^{23}$ Hz ou $\omega = 10^{32}$ Hz. Para fins de comparação, 10^{-22} s é o tempo que a luz precisa para atravessar um núcleo atômico. Desta forma, quando as fases estão mudando de forma tão rápida, apenas um dos estados pode ser medido.

É possível calcular a matriz densidade do estado que esta sendo analisado, sendo $\rho_{mn} = c_m c_n^*$, tem-se,

$$\begin{cases} \rho_{11} = c_1 e^{-iE_1 t/\hbar} c_1^* e^{iE_1 t/\hbar} = c_1 c_1^* = |c_1|^2, \\ \rho_{12} = c_1 e^{-iE_1 t/\hbar} c_2^* e^{iE_1 t/\hbar} e^{i\omega t} = c_1 c_2^* e^{i\omega t}, \\ \rho_{21} = c_2 e^{-iE_1 t/\hbar} c_1^* e^{iE_1 t/\hbar} e^{-i\omega t} = c_2 c_1^* e^{-i\omega t}, \\ \rho_{22} = c_2 e^{-iE_1 t/\hbar} c_2^* e^{iE_1 t/\hbar} = |c_2|^2, \end{cases} \quad (5.1.12)$$

de forma que,

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1 c_2^* e^{i\omega t} \\ c_2 c_1^* e^{-i\omega t} & |c_2|^2 \end{pmatrix}. \quad (5.1.13)$$

Toda medida exige um tempo finito T , embora nos valores cotidianos ela possa ser considerada instantânea (10^{-12} s). Desta forma, é possível analisar o que ocorre com a matriz densidade de um sistema submetido a uma medida mediando-se a mesma em relação à T ,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \hat{\rho} dt = \begin{pmatrix} c_1 c_1^* & c_1 c_2^* s(T) \\ c_2 c_1^* s(T) & c_2 c_2^* \end{pmatrix}. \quad (5.1.14)$$

com,

$$\lim_{\omega T \rightarrow \infty} s(T) = \lim_{\omega T \rightarrow \infty} e^{i\omega T/2} \frac{\text{sen}(\omega T/2)}{\omega T/2} = 0, \quad (5.1.15)$$

Portanto,

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & 0 \\ 0 & |c_2|^2 \end{pmatrix}. \quad (5.1.16)$$

Por exemplo, para $\omega = 10^{32}\text{Hz}$ e $T = 10^{-16}\text{s}$, $|s(T)| \sim 10^{-16}$. Estes casos exigiriam uma grande precisão experimental para que a superposição pudesse ser detectada. Realizando a medida, vale a elucidação de que o sistema terá de interagir com o ambiente e com o detector que ampliará o sinal, ou seja, a partícula que compunha o sistema interagirá várias vezes com outras partículas antes de que seja detectada. Esta é a descrição da *decoerência quântica*, as interações constantes que o sistema em superposição tem de suportar se dará com uma mudança de fase dos elementos fora da diagonal principal. Cada vez que o sistema interage com qualquer objeto, seja ele do ambiente ou do detector, irreversivelmente as alterações se darão por uma mudança aleatória na fase θ , então a chave para a compreensão da decoerência se dá no cálculo da média do número complexo que acompanha a fase (Fig. [5.1]), ou seja, *zero*: É possível representar o número complexo $e^{\pm i\theta}$ na chamada *forma polar* onde os eixos de coordenadas são compostos pelo conjunto de números reais e imaginários. Uma alteração na fase θ da exponencial, dependendo o sentido, fará com que a inclinação da reta que une a origem e o ponto no círculo unitário mude e para um grande número de perturbações o valor médio é zero.

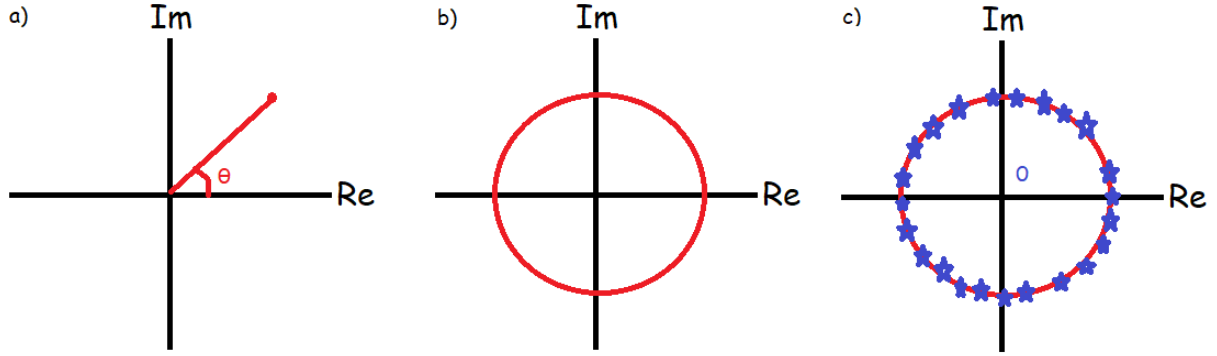


Figura 5.1: (a) representação polar de um número complexo no plano real-imaginário; (b) para os valores de θ entre 0 e 2π forma-se um círculo unitário centrado na origem; (c) se for considerada um grande número de interações do sistema com sua vizinhança ou com o detector, onde sua manifestação se dá por uma mudança aleatória na fase, o valor médio do número complexo é zero.

A matriz [5.1.16] não corresponde mais a nenhum sistema físico, isto é, não é possível encontrar a função de onda $|\psi\rangle$ que a gerou, pois, analisando a forma [5.1.13], se os elementos fora da diagonal forem nulos, os elementos na diagonal também o serão. Contudo, o desaparecimento dos termos não diagonais na matriz densidade do sistema é o efeito da decoerência quântica e, sem esses termos, o sistema perde sua capacidade de interferir. Por fim, também vale destacar que a decoerência mantém a unitariedade da teoria quântica, ao contrário do colapso da função de onda, que não preserva essa propriedade. Enquanto a decoerência descreve a perda de coerência devido à interação com o ambiente, o colapso implica em uma mudança não unitária e irreversível do estado quântico.

5.2 O FORMALISMO TEÓRICO DA DECOERÊNCIA

Fisicamente, a ideia básica na computação dos efeitos de decoerência é considerar o efeito do ambiente e da medida no sistema quântico, fazendo com que, neste processo, realize a separação entre o sistema de análise S ,

o aparato de medida M e uma relação aberta para interações com o ambiente U (Fig. 5.2). Alguns dos efeitos da medida foram discutidos previamente e, nesta seção, considera-se apenas os efeitos do ambiente no sistema em que se tem interesse. Sendo assim, o sistema S tem sua base de auto vetores $|i\rangle$ que geram o espaço de Hilbert \mathcal{H}_S . Por sua vez o ambiente é descrito pela base $|n\rangle$ do espaço \mathcal{H}_U . Na interação destes dois sistemas o estado geral será escrito numa base $|i\rangle \otimes |n\rangle \doteq |i, n\rangle$ que gera o espaço composto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_U$. Supõem-se agora que as matrizes densidade do espaço composto não são independentes, ou seja, as matrizes no espaço $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_U$ são mais gerais que $\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_U$.

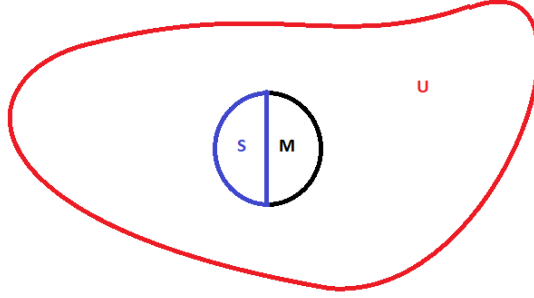


Figura 5.2: Divisões das regiões analisadas no estudo da decoerência: S é o sistema estudado, pode ser um átomo de hidrogênio, um oscilador harmônico, etc; um sistema físico de interesse; M é o aparato de medida que colapsará a função de onda do sistema. Para realizar uma medida, este deve interagir obrigatoriamente com S ; U é o ambiente que nunca poderá se isolar do sistema, podem ser fótons que iluminam a amostra, outros átomos que a cercam-na ou a radiação cósmica de fundo.

No picture de *Schrödinger* ($H = H_U + H_S$), sabe-se que a evolução temporal da matriz densidade do sistema se dá pela equação de *von Neumann* [103]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_s = [H_S, \hat{\rho}_s]. \quad (5.2.1)$$

Considerando que é possível separar a dinâmica interna do sistema da interação com o ambiente, onde a duração de um processo de espalhamento com o meio tem uma duração pequena se comparada com a escala temporal interna, a equação de *von Neumann* terá uma pequena modificação introduzida pela interação de espalhamento com o meio [104], considerando uma matriz espalhamento \hat{S} apropriada,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_s = [H, \hat{\rho}_s] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_s \Big|_{\text{espalhamento}}. \quad (5.2.2)$$

Na maioria dos casos, uma ampla sequência de espalhamentos pode ser tratada como um amortecimento dos elementos fora da diagonal principal, de forma que,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{nm}^s \Big|_{\text{espalhamento}} = -\lambda \rho_{nm}^s(t), \quad (5.2.3)$$

sendo a constante λ dada por,

$$\lambda = \Gamma(1 - \langle n_0 | \hat{S}_m^\dagger \hat{S}_n | n_0 \rangle), \quad (5.2.4)$$

sendo Γ é a taxa de colisão e $|n_0\rangle$ o estado do ambiente em uma dada condição inicial.

Na sequência serão abordados dois exemplos relacionados ao fenômeno da decoerência quântica, a localização espacial dos objetos materiais e o efeito Zeno Quântico.

5.2.1 Localização Espacial

O primeiro exemplo a ser explorado é a localização de objetos macroscópicos. Pode não parecer em primeira análise, mas a percepção clássica que temos da localização de objetos macroscópicos, formados por entes microscópicos, regidos pela mecânica quântica, onde o estado físico não tem posição e *momentum* bem definido não é um problema trivial. E não somente a percepção, mas também a utilização de teorias clássicas que assertivamente descrevem, em certos limites, a localização física destes objetos. Considera-se a hipótese de que diferentes configurações espaciais de um sistema devem sofrer um processo de decoerência muito rapidamente a partir de uma forte influência por processos de espalhamento.

É possível dar um tratamento formal para o efeito. Para isso, $|x\rangle$ é o auto estado posição de um objeto macroscópico e $|a\rangle$ é o estado da partícula incidente. Desta forma, o efeito das interações com o sistema na evolução temporal pode ser expresso por,

$$|x\rangle |a\rangle \xrightarrow{t} |x\rangle |a_x\rangle = |x\rangle \hat{S}_x |a\rangle, \quad (5.2.5)$$

de forma que o espalhamento é calculado a partir da matriz espalhamento \hat{S}_x conveniente. A mesma representação para um estado inicial de um pacote de onda se dá por:

$$\int d^3x \phi(x) |x\rangle |a\rangle \xrightarrow{t} \int d^3x \phi(x) |x\rangle \hat{S}_x |a\rangle. \quad (5.2.6)$$

A matriz densidade reduzida que descreve as mudanças no objeto é dada por,

$$\hat{\rho}(x, x') = \phi(x) \phi^*(x') \langle a | \hat{S}_x^\dagger \hat{S}_x | a \rangle. \quad (5.2.7)$$

Obviamente, um único processo de espalhamento não irá localizar o objeto, de forma que os elementos da matriz acima são próximos à unidade. Contudo, a ampla ocorrência de espalhamentos causa um amortecimento exponencial da coerência espacial,

$$\hat{\rho}(x, x', t) = \hat{\rho}(x, x', 0) e^{-\Lambda(x-x')^2}. \quad (5.2.8)$$

Desta forma, a contribuição deste efeito é descrita a partir de um único parâmetro Λ , denominado *taxa de localização*, dado por,

$$\Lambda = \frac{k^2 N \nu \sigma_{\text{ef}}}{V}, \quad (5.2.9)$$

com k sendo o número de onda das partículas incidentes, $N\nu/V$ o fluxo e σ_{ef} é da ordem da seção de choque total. Alguns valores de Λ são dados pela Tab. [5.1]. A maioria dos números na tabela são bem grandes, revelando o quão forte é o vínculo dos objetos macroscópicos, da ordem de tamanho de partículas de poeira com o ambiente e, até mesmo para o espaço intergalático não estaria de fora do efeito devida à radiação cósmica de fundo.

No caso da decoerência na superposição de dois pacotes de onda, analisa-se a distância entre os pacotes e a Fig. [5.3] a) representa bem a matriz densidade, ilustrando quatro picos, dois em torno da diagonal principal e dois fora dela, sendo estas últimas, contribuições que representam a coerência entre as duas partes. Contudo, se forem amortecidos os termos fora da diagonal, tem-se a decoerência e os picos desaparecem, como na Fig. [5.3] b).

Tabela 5.1: Taxa de localização Λ em $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ para três tamanhos de partículas em vários tipos de espalhamentos. Esta quantidade mede o quão rápido a interferência entre as diferentes posições desaparece como uma função da distância no passar do tempo. Dados fornecidos por [104].

| Tamanho | 10^{-3}cm | 10^{-5}cm | 10^{-6}cm |
|---|--------------------|--------------------|--------------------|
| Radiação cósmica de fundo | 10^6 | 10^{-6} | 10^{-12} |
| Fótons à 300K | 10^{19} | 10^{12} | 10^6 |
| Luz solar (na Terra) | 10^{21} | 10^{17} | 10^{13} |
| Moléculas do ar | 10^{36} | 10^{32} | 10^{30} |
| Vácuo de laboratório (10^3 partículas/ cm^3) | 10^{23} | 10^{19} | 10^{17} |

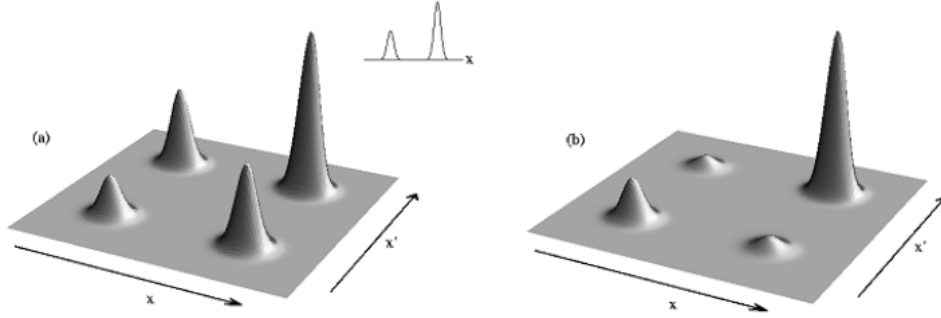


Figura 5.3: (a) Matriz densidade de dois pacotes de onda gaussianos. A coerência entre os dois pacotes é representada pelos elementos fora da diagonal. (b) A matriz densidade após perder sua coerência. Figura adaptada de [104]

5.2.2 Efeito Zeno quântico

Macroscopicamente, não é adequado que a realização de uma medida interfira no objeto de interesse, ou melhor, na maioria dos casos, é possível realizar uma medida sem perturbar o sistema em que ela esta sendo aplicada, obtendo informações a seu respeito. Contudo, sabe-se que esta verificação não é análoga ao caso quântico, onde ocorre o colapso da função de onda. Além disso, não é possível obter de imediato todos os valores de medição dos observáveis de um sistema, de forma que trabalha-se sempre com a ideia de médias de *ensembles*.

Um fenômeno que trata bem a peculiaridade da medida no casos dos sistemas quânticos é o efeito *Zeno* [105], e segue-se agora sua derivação matemática: seja \hat{H} o hamiltoniano de um sistema quântico onde $|\Psi_0\rangle$ é o seu estado no instante inicial, sendo sua evolução temporal dada por,

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\Psi_0\rangle. \quad (5.2.10)$$

Desta forma, é possível calcular a taxa de transição $P(t)$, de um estado físico que evolui num curto espaço de tempo δt para o estado inicial,

$$P(t) = |\langle \Psi_0 | e^{-i\hat{H}t} | \Psi_0 \rangle|^2, \quad (5.2.11)$$

Agora, realizando a expansão em séries de *Taylor* desta probabilidade:

$$P(t) = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\delta t)^n}{n!} \langle \hat{H}^n \rangle \right|^2 = 1 - \delta t^2 (\langle \hat{H} \rangle^2 - \langle \hat{H}^2 \rangle) + \mathcal{O}(\delta t^3) \approx 1 - \delta t^2 \sigma_H^2, \quad (5.2.12)$$

aqui, $\sigma_H = \sqrt{\langle \hat{H} \rangle^2 - \langle \hat{H}^2 \rangle}$ é o desvio padrão do valor esperado associado ao hamiltoniano. Desta forma, a probabilidade da transição depende de t^2 e se forem realizadas medidas em intervalos regulares de tempo, diga-se $\tau = t/N$, sendo N o número de medidas realizadas,

$$P(t) = (1 - \tau^2 \sigma_H^2)^N = \left(1 - \frac{t^2 \sigma_H^2}{N}\right)^N \approx e^{-\frac{t^2}{N} \sigma_H^2}, \quad (5.2.13)$$

ficando óbvio que para um amplo número de medições,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(t) = 1, \quad (5.2.14)$$

um resultado dramático, onde se realizadas um grande número de medidas e intervalos de tempos curtos a probabilidade do sistema permanecer no estado inicial é de 100%, ou seja, a realização contínua de medidas faz com que o sistema permaneça no estado inicial.

Aristóteles escreveu na *Física* [105] uma série de argumentos paradoxais, que seria de autoria do filósofo pré-socrático *Zeno de Eleia*, onde a proposta era provar dialeticamente inconsistências nos conceitos filosóficos da época de *multiplicidade, divisibilidade e movimento*. Dentre estes argumentos, vem a famosa história da corrida entre *Aquiles* e a tartaruga: uma vez que o animal teria total desvantagem devido a diferença de velocidades, ela ganha a possibilidade de partir de uma distância mais avançada na frente do herói de *Ilíada*. O paradoxo proposto por *Zeno* é a demonstração de que *Aquiles* nunca ultrapassará a tartaruga, pois quando ele chegar na posição onde ela partiu, diga-se A, a tartaruga estará em B, quando ele chegar em B, o animal avançará para C e assim se dará o processo indefinidamente, contudo, o homérico nunca venceria.

Nesta época, nada se sabia de cálculo infinitesimal ou dos referenciais newtonianos; mas a inserção dos dois competidores intui o uso de referencial, podendo ser da velocidade de *Aquiles* em relação a tartaruga e vice-versa, onde os dois objetos tem velocidades independentes. Agora, se existe uma relação entre os corredores, diga-se, *Aquiles* restringe seu movimento a uma observação constante ao ponto onde a tartaruga está, de forma que sempre que ele atinge o ponto C ele verifica a tartaruga em D, seguindo este processo indefinidamente, como um padrão para determinar o seu movimento, cria-se uma situação artificial em que *Aquiles* é regido pelo espaço da tartaruga, sendo exatamente o que fora proposto no cálculo da probabilidade da taxa de transição e por isso o nome do fenômeno é efeito *Zeno* quântico. Uma forma de explicar a solução clássica do paradoxo de *Zeno* envolve a introdução de conceitos como *limite, convergência e infinitesimal*, sendo que a proposta do filósofo falha na dinâmica clássica por assumir que a soma de infinitos intervalos de tempo é sempre infinita, contudo, sabe-se que existe a possibilidade de uma soma infinita de termos resultar em valores finitos. Mas e no caso quântico? Em 1900, *Itano, Bollinger e Wineland* [106] verificaram experimentalmente o efeito em um sistema quântico de três níveis (Fig. [5.4]).

A decoerência entra no efeito justamente para elucidar a diferença entre o caso quântico e clássico, sendo

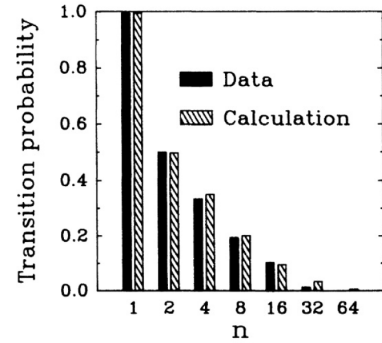


Figura 5.4: Cálculos e dados experimentais da taxa de transição de um sistema quântico de três níveis em função do número de medidas n realizados durante processos de transições. Para um amplo valor de n a taxa de transição cai para 0. Reproduzido de [106].

aqui utilizado um modelo simples, apenas para justificação dos seus meios no problema. Para isso considera-se um modelo simplificado da *teoria da medida* de *von Neumann*, onde um *pointer* (aparelho de medida) é acoplado a um sistema de dois níveis, $|1\rangle$ e $|2\rangle$, sendo descrito pelo hamiltoniano,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} = V(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) + E|2\rangle\langle 2| + \gamma\hat{p}(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|), \quad (5.2.15)$$

sendo que as transições entre os dois níveis é induzida pelo potencial V e monitorada pelo *pointer*, este, tendo sua intensidade mediada pela constante γ . Desta forma, é possível calcular a taxa de transição em função do tempo (Fig. [5.5(a)]) e da constante de acoplamento (Fig. [5.5(b)]). Assim como previsto anteriormente, para um pequeno intervalo de tempo, diga-se, a medida é realizada em um tempo muito curto, obtém-se uma dependência quadrática com o tempo, como previsto anteriormente. Contudo, esta evolução para tempos maiores se torna linear. Além disso, se o sistema e o aparato de medição estão fortemente acoplados, a taxa de transição começa a suavizar.

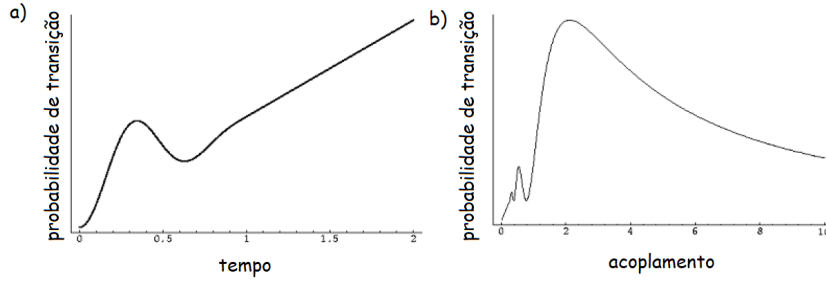


Figura 5.5: (a) Dependência temporal da probabilidade de encontrar o sistema no estado $|2\rangle$, sendo que em $t = 0$ o mesmo se encontrava no estado $|1\rangle$ para uma constante de acoplamento fixa. (b) Dependência com a constante de acoplamento da probabilidade de encontrar o sistema no estado $|2\rangle$, sendo que em $t = 0$ o mesmo se encontrava no estado $|1\rangle$, calculada em tempo fixo. Imagem adaptada de [106].

Neste capítulo, discutiu-se, dando exemplos, conceitos básicos sobre a decoerência e o emaranhamento quântico, sem exaurir o assunto, apenas elucidando suas características básicas e elementos fundamentais utilizados na pesquisa em questão. Na próxima seção estes conceitos serão utilizados na formulação de grande parte das noções entrópicas estudadas no desenvolvimento da análise da criação de entropia em colisões de partículas em altas energias.

5.3 A ENTROPIA DE DECOERÊNCIA NAS COLISÕES DE ÍONS PESADOS

Nos estágios iniciais da colisão ultrarrelativística de íons pesados os estados disponíveis são caracterizados por uma configuração coerente de campos de glúons. Estes campos são gerados por cargas de cor quasidestáticas dos quarks de valência dos núcleos e podem ser aproximados com campos de cor semi-clássicos randomicamente orientados em um meio CGC.

O fenômeno da decoerência pode protagonizar uma boa parte da produção entrópica nestas reações. Inicialmente, os campos de cor nas reações das colisões ultrarrelativísticas de íons pesados pode ser descrita por campos coerentes clássicos,

$$|\Psi[J]\rangle = \prod_{\vec{k}} \exp\left(i\alpha_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}^\dagger - i\alpha_{\vec{k},\lambda}^* a_{\vec{k},\lambda}\right) |0\rangle, \quad (5.3.1)$$

sendo \vec{k} o *momentum*, λ a polarização e a amplitude $\alpha_{\vec{k},\lambda}$ determinada pelo campo de criação de corrente clássica \vec{J} ,

$$\alpha_{\vec{k},\lambda} = \frac{\vec{\epsilon}_{\vec{k},\lambda} \cdot \vec{J}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}})}{\sqrt{\hbar \omega_{\vec{k}} V}}. \quad (5.3.2)$$

Por fins de simplificação, considera-se aqui apenas um modo com \vec{k} e λ . O estado coerente pode ser escrito como uma superposição do número de partículas $|n\rangle$ dos auto-estados com auto-valor α ,

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (5.3.3)$$

Sendo este um estado puro, está associado a matriz densidade cujo os elementos são dados por,

$$\rho_{mn} = \langle m|\alpha\rangle \langle \alpha|n\rangle, \quad (5.3.4)$$

que satisfaz as relação de projeção $\rho^2 = \rho$ e tem uma entropia de *von Neumann* nula, $S = -\text{Tr}\{\hat{\rho} \ln \hat{\rho}\} = 0$.

A completa decoerência deste estado corresponde a uma amortização dos termos fora da diagonal principal da matriz densidade associada, de forma que,

$$\rho_{mn}^{dec} = |\langle n|\alpha\rangle|^2 \delta_{mn} = e^{|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^2}{(n-1)!} \delta_{mn}. \quad (5.3.5)$$

O número de partículas no estado misto pode ser caracterizado por uma distribuição de *Poisson* com um número médio de partículas $\bar{n} = |\alpha|^2$. A entropia que contém os estados mistos é dada por,

$$S_{dec}^{(cs)} = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} (n \ln \bar{n} - \bar{n} - \ln n!), \quad (5.3.6)$$

equação em que o subscrito (*cs*) indica que o resultado é o mesmo para um estado coerente. Esta equação é idêntica à [4.3.59], ou seja, a entropia será dada pela mesma expressão que a Eq. [4.3.59], sendo que para $\bar{n} \gg 1$,

$$S_{dec}^{(cs)} = \left[\ln(2\pi e \bar{n}) - \frac{1}{6\bar{n}} + \mathcal{O}(1/\bar{n}^2) \right]. \quad (5.3.7)$$

Desta forma, o número dos elementos da matriz densidade que contribuem para o cálculo da entropia é dado por $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$ devida à distribuição de *Poisson*.

A entropia de um único oscilador harmônico quântico em uma temperatura de equilíbrio T é dada por,

$$S_{eq} = \ln(\bar{n} + 1) + \bar{n} \ln \left(1 + \frac{1}{\bar{n}} \right), \quad (5.3.8)$$

de forma que o número de ocupação média de partículas é expresso por $\bar{n} = (e^{\omega/T} - 1)^{-1}$. Considerando um valor de grande ocupação média \bar{n} , assintoticamente, obtém-se $S_{eq} \approx 2S_{dec}^{(cs)}$ (Fig. [5.6]). Assim, entropia térmica se torna duas vezes maior que a de decoerência; entretanto, para valores médios ou intermediários da ocupação, $S_{dec}^{(cs)}/S_{eq}$, é próxima da unidade (~ 0.75 para $\bar{n} = 10$). Neste modelo teórico, afirma-se que para valores não tão grandes da ocupação média, o processo de decoerência é consideravelmente responsável por uma grande fração da entropia criada. Desta forma, a diferença de entropia criada na reação se deve a processos que ocorrem em sequência de evolução temporal do sistema gerado no espalhamento de íons pesados inicial. Evidentemente, a

decoerência é um fenômeno que ocorre rapidamente se comparado aos processos de equilíbrio térmico; sendo assim, estes resultados implicam que a alta taxa de geração de entropia observada nas colisões de íons pesados se dá primariamente devido os efeitos da decoerência dos campos de cor iniciais.

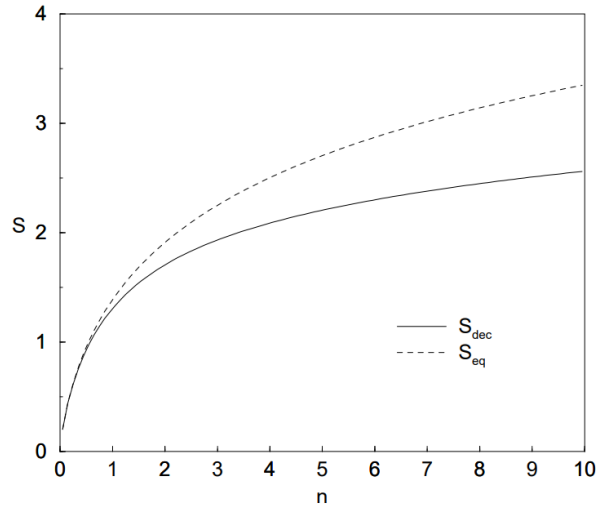


Figura 5.6: Entropia de decoerência S_{dec} para um único modo \vec{k}, λ e a entropia de equilíbrio S_{eq} para os mesmos valores de energia média e número de ocupação \bar{n} . Reproduzido de [27].

Capítulo 6

Resultados e Conclusão

Neste capítulo são expostos os resultados desenvolvidos na pesquisa em questão, envolvendo investigações fenomenológicas nas propriedades da entropia de emaranhamento, sua versão no modelo CGC, entropia dinâmica da QCD e a entropia de decoerência.

Os primeiros resultados dizem respeito à comparação entre os modelos da entropia de emaranhamento no Modelo KL e CGC na investigação de colisões onde os núcleons são os alvos [107]. A entropia de emaranhamento no modelo KL é comparada com dados da entropia hadrônica* em colisões pp no LHC e ep da Colaboração H1 [108]. Este trabalho é estendido para alvos nucleares. Continuando as pesquisas com a entropia de emaranhamento, investiga-se o caso das colisões elásticas utilizando o método da femtosopia independente de modelo de Lévy, obtendo resultados para energias típicas do RHIC, Tevatron e LHC [109]. Por fim, utilizando diferentes modelos de UGD's, é possível computar a entropia dinâmica da QCD para núcleons [110] e para colisões eA . Estes resultados são comparados com a entropia de decoerência. Ao final do capítulo, serão apresentadas as conclusões deste trabalho de doutorado.

6.1 ENTROPIA DE EMARANHAMENTO EM ALTAS ENERGIAS NO DIS PARA COLISÕES PP E EP

As expressões para a entropia de emaranhamento dadas por [4.3.23] e [4.3.51] dependem da PDF dos glúons. O modelo de PDF da referência [111] contém uma expressão fenomenológica analítica para esta distribuição, válida tanto para grandes valores da virtualidade do fóton ($Q^2 \leq 50 \text{ GeV}^2$) quanto para pequenos ($Q^2 \ll 1 \text{ GeV}^2$). Este modelo é vantajoso se comparado com as PDFs usuais extraídas a partir do *fitting* com condições iniciais em aproximadamente $Q^2 = Q_0^2 \approx 2 \text{ GeV}^2$. Outra conveniência desta expressão é que ela é uma função explícita da escala de saturação Q_s . Partindo do modelo de saturação GBW, é possível obter uma distribuição de glúons

*A entropia hadrônica é uma das principais medidas experimentais de entropia na física de partículas. Ela é obtida a partir da multiplicidade de partículas detectada após as colisões. Em colisões de alta energia, a distribuição da multiplicidade de partículas é frequentemente descrita pela Distribuição Binomial Negativa (Negative Binomial Distribution, NBD), que é definida por dois parâmetros: $\langle n \rangle$ e k . A NBD é dada por:

$$P_{\text{NB}}(n) = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n+1)\Gamma(k)} \left(\frac{\langle n \rangle}{k + \langle n \rangle} \right)^n \left(\frac{k}{k + \langle n \rangle} \right)^k,$$

onde Γ é a função gama. A NBD é amplamente utilizada na fenomenologia de colisões de alta energia, pois descreve bem as flutuações observadas na multiplicidade de partículas.

não integrada:

$$\alpha_s \mathcal{F}(x, k) = \frac{N_0 k^2}{Q_s^2} e^{-k^2/Q_s^2}, \quad (6.1.1)$$

com $N_0 = 3\sigma_0/4\pi^2$. A PDF pode ser obtida a partir da integral:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &\equiv x f_g(x, Q^2) = \int_0^{Q^2} dk^2 \mathcal{F}(x, k) \\ &= \frac{3\sigma_0}{4\pi^2 \alpha_s} Q_s^2 \left[1 - \left(1 + \frac{Q^2}{Q_s^2} \right) e^{-\frac{Q^2}{Q_s^2}} \right]. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Nesta expressão, a escala de saturação Q_s é dada pela Eq. [3.1.25], e os valores utilizados para os parâmetros são $\sigma_0 = 27.32$ mb, $\lambda = 0.248$ e $x_0 = 4.2 \times 10^{-5}$ ajustados na referência [62].

Inicialmente, analisando a dependência das noções entrópicas estudadas com a rapidez Y , avalia-se a entropia no modelo de KL, especificadamente a Eq. [4.3.52], comparando-a com as expressões para a entropia de Wehrl [E.2.13] (estudada na dissertação [14] e com uma breve exposição no Apêndice E.1) e o modelo CGC [4.5.37]. Os resultados são mostrados na Fig. [6.1]. O valor para a constante de acoplamento da força forte é $\alpha_s = 0.25$. Analisando os diferentes modelos de entropia, percebe-se que tanto para o modelo de emaranhamento CGC quanto para a versão partônica da entropia de Wehrl, estas são proporcionais à área transversa do alvo. Esta é uma propriedade intrínseca de um observável extensivo como a entropia. Esta propriedade não é contemplada na equação da entropia de emaranhamento no modelo KL

[4.3.23]. Esta expressão se comporta como $S \sim Y^2$ com uma supressão logarítmica em $1/Q^2$. A escolha $r^2 = 4/Q^2$ para o tamanho médio do dipolo é utilizada para o produto dentro do logaritmo, de forma que $Q_s^2 r = 4Q_s^2/Q^2 + e$ (o segundo termo é utilizado para evitar os valores negativos quando $Q_s^2 \ll Q^2$). Por outro lado, a entropia de Wehrl se comporta como $S_W \sim e^{\lambda Y}$ e cresce com Q^2 com a simplificação realizada na integração em k , o que é suficiente nesta análise fenomenológica. Por fim, a entropia de emaranhamento no modelo CGC se comporta como $S_{CGC} \sim e^Y (\ln^2 Q^2 - 2\lambda Y)$.

Na Fig. [6.2], são apresentados os resultados para entropia de emaranhamento utilizando a PDF analítica para glúons em altas energias [6.1.1] em função de x ($10^{-5} \leq x \leq 10^{-2}$) para alguns valores específicos da virtualidade do fóton. O modelo analítico possibilita uma análise na escala leve, $Q^2 = 0.65$ GeV⁻², um regime que não pode ser avaliado pela evolução DGLAP [3.1.19], pois em geral esta equação começa a ser avaliada em $Q_0^2 \sim 2$ GeV². Os resultados para as virtualidades $Q^2 = 2$ GeV² e $Q^2 = 10$ GeV² também são apresentados. É bem clara a transição entre as escalas leves para as mais duras. A vantagem de utilizar o modelo analítico

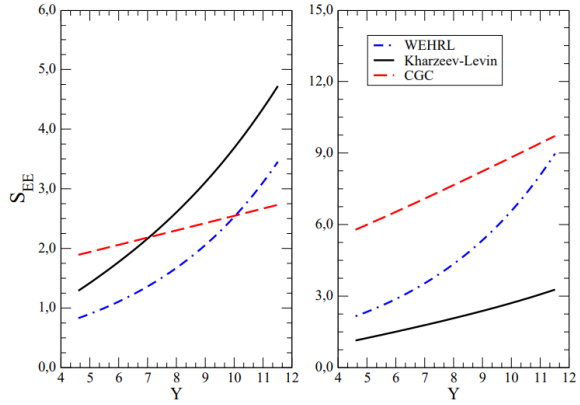


Figura 6.1: A comparação de diferentes modelos para entropia partônica em altas energias. A entropia é expressa como função do x de Bjorken para virtualidades de $Q^2 = 2$ GeV² (esquerda) e $Q^2 = 10$ GeV² (direita) em um DIS de prótons. Os resultados são obtidos para a entropia de emaranhamento no Modelo de KL, modelo CGC e Wehrl. Reproduzido de [107].

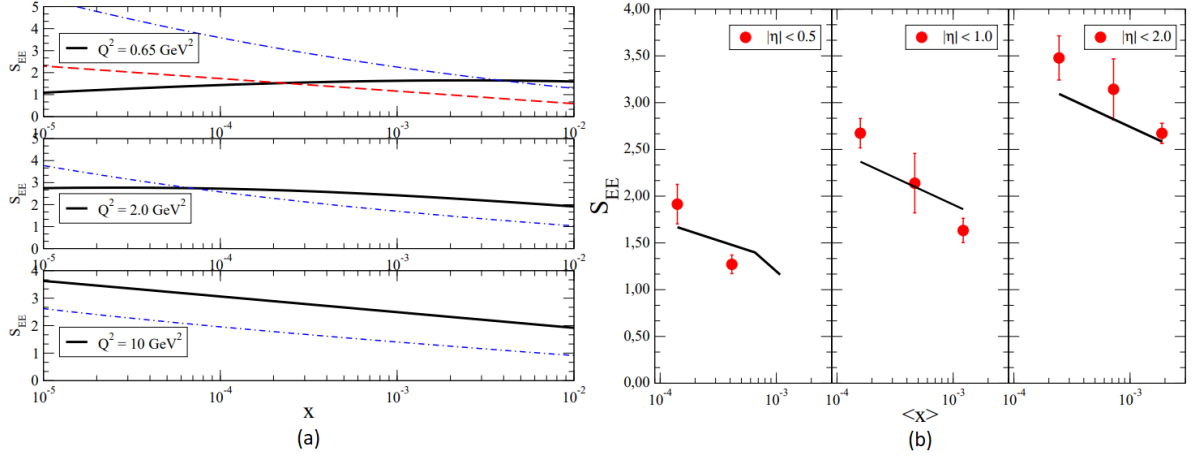


Figura 6.2: (a): Entropia de emaranhamento como função do x de Bjorken para as virtualidades $Q^2 = 0.63, 2, 10 \text{ GeV}^2$ em um DIS de prótons. A entropia máxima para a escala $Q^2 = 0.63$ é representada pela linha vermelha (linha tracejada). A expressão paramétrica [4.3.52] também é apresentada (linhas de ponto traço). (b): Entropia de emaranhamento em colisões pp comparada com a entropia hadrônica final determinada para diferentes domínios de pseudo-rapidezes no LHC (os pontos com $|\eta| < 0.5, 1.0, 2.0$) obtidos a partir de [112]. O resultado numérico é representado pelas linhas sólidas. Adaptado de [107].

para xf_g é a possibilidade de verificar comportamentos anteriores em termos da variável de escala $\tau = Q^2/Q_s^2$. Para $\tau \ll 1$, uma expansão em séries resulta em $xf_g \propto Q^4/Q_s^2$, de forma que $S \propto -\ln Q_s^2$. Para pequenos valores de x , obtêm-se $S \sim \lambda \ln x$. Quando $\tau = 1$, $xf_g \propto [1 - 2/e]Q_s^2$, com a entropia $S \sim -\ln(x) - 1$ fazendo com que a curva mude de inflexão na região de transição $Q^2 \approx Q_s^2$. No regime duro, quando $Q^2 \ll Q_s^2$, o comportamento assintótico é dado por $xf_g \propto Q_s^2$ e $S \sim -\lambda \ln(x)$. Isto é visto para grandes valores de x no gráfico de $Q^2 = 2 \text{ GeV}^2$ e para todo x no caso $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$.

A determinação da entropia de emaranhamento a partir de dados experimentais é realizada em [112]. Para um DIS de prótons com pequeno- x no intervalo de energia $\sqrt{s_{ep}} \approx 225 \text{ GeV}$ para o DESY-HERA. Os autores utilizaram o método de Monte Carlo para a distribuição de multiplicidades a fim de obter a entropia dos hádrons nos estágios finais com a entropia hadrônica S_h comparando-a com a entropia de emaranhamento, demonstrando que ambas não são correlacionadas em $Q^2 = 2$ e $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$. Em ambas as virtualidades, obtêm-se um resultado independente de $\langle x \rangle$ com $S_h \approx 1.5$, em contradição com o comportamento de potências da entropia de emaranhamento. O resultado do modelo proposto nesta tese, observado em (b) da Fig. [6.2] para $Q^2 = 2 \text{ GeV}^2$ é similar ao obtido pelos autores de [112]. Na Tabela [6.1] é apresentada a entropia de emaranhamento dada pela Eq. [4.3.23] utilizando a escala $Q^2 = Q_s^2(x)$ e utilizando os mesmos procedimentos da referência [112] para comparar com a entropia S_h . A escolha para a rapidez do hádron y é tomada baseada nos diferentes cortes experimentais da distribuição de multiplicidade de um hádron com pseudo-rapidez η . Então, S_h é obtido dos dados experimentais da colaboração CMS [113], que é consistente com ATLAS e ALICE.

Desta forma, a expressão analítica para entropia de emaranhamento é,

$$S(Q^2 = Q_s^2) = \ln[Q_s^2(x)] + S_0, \quad (6.1.3)$$

com $S_0 = \ln[3(e-2)R_p^2/4e\pi\alpha_s] \approx 2$ para $\alpha_s = 0.2$ e $S = S_0$ quando $Q_s^2 = 1 \text{ GeV}^2$. Na Fig. [6.2] (b) os resultados mostram uma boa concordância com a entropia de emaranhamento obtida e a entropia reconstruída a partir

Tabela 6.1: Entropia de emaranhamento em colisões pp no LHC previstas pela PDF de saturação de glúons utilizando os procedimentos da referência [112]. Alguns valores extraídos dos dados do CMS são também apresentados (em parênteses) [114]. Adaptado de [107].

| $\sqrt{s_{pp}}$ (TeV) | $ y < 0.5$ | $ y < 1.0$ | $ y < 1.5$ | $ y < 2$ | $ y < 2.4$ |
|-----------------------|--------------------------|--------------------------|-------------|--------------------------|-------------|
| 7.00 | 1.668(1.914 \pm 0.212) | 2.368(2.673 \pm 0.157) | 2.787 | 3.093(3.478 \pm 0.236) | 3.291 |
| 2.36 | 1.398(1.271 \pm 0.099) | 2.100(2.139 \pm 0.318) | 2.517 | 2.823(3.142 \pm 0.326) | 3.022 |
| 0.90 | 1.160 | 1.860(1.633 \pm 0.130) | 2.277 | 2.584(2.671 \pm 0.108) | 2.784 |

da multiplicidade hadrônica para valores de pequeno- x .

Por fim, foi calculada a entropia de emaranhamento KL utilizando a PDF de glúons GBW [6.1.2] comparando-a com os dados da colaboração H1 [115] para colisões ep . Os dados fornecem a entropia do hádron no estado final, derivada das distribuições de multiplicidade carregada para pseudo-rapidez de traços η no referencial do centro de massa hadrônico, restritas ao intervalo $0 < \eta < 4$. Além disso, a colaboração H1 mediu a entropia hadrônica em quatro faixas de virtualidade do fóton: $5 < Q^2 < 10$, $10 < Q^2 < 20$, $20 < Q^2 < 40$ e $40 < Q^2 < 100 \text{ GeV}^2$.

Para comparar a expressão KL com os dados, é necessário adaptar a fórmula da entropia de emaranhamento para incluir a contribuição de Q^2 . Uma maneira de realizar este procedimento é fornecida em [96], onde os autores relacionam a entropia de emaranhamento KL com a entropia dos estados finais, apontando diversas incertezas na comparação atual com os dados. Em particular, eles destacam a normalização global, a relação entre multiplicidade de hádrons carregados versus total na comparação com os resultados experimentais, bem como diferentes métodos para determinar o número de pártons em um DIS. Eles também incluíram o PDF de quarks do mar, $x f_{sea}(x, Q^2)$, modificando a Eq. (4.3.18) para $\langle n \rangle = x f_g(x, Q^2) + x f_{sea}(x, Q^2)$. Aqui, manteremos apenas a contribuição dos glúons para aproveitar a expressão analítica GBW para o PDF de glúons. Seguindo [96], o tratamento para as medidas em faixas de Q^2 será dado por:

$$\langle n(x, Q^2) \rangle_{Q^2} = \frac{1}{Q_{\max}^2 - Q_{\min}^2} \int_{Q_{\min}^2}^{Q_{\max}^2} dQ^2 x f_g(x, Q^2). \quad (6.1.4)$$

Após as alterações na Eq. (4.3.23), a expressão final para avaliar a entropia de emaranhamento KL, a ser comparada com a análise dos dados H1, é:

$$\langle S(x, Q^2) \rangle_{Q^2} = \ln \langle n(x, Q^2) \rangle_{Q^2}. \quad (6.1.5)$$

Os resultados são apresentados na Fig. [6.3]. Em geral, os resultados ajustam-se bem, exceto para os dados de $40 < Q^2 < 100 \text{ GeV}^2$. A razão para isso é que a fórmula analítica GBW é válida até 50 GeV^2 . Uma evolução DGLAP é necessária nesta região cinemática.

6.2 ENTROPIA DE EMARANHAMENTO EM ALTAS ENERGIAS NO DIS PARA NÚCLEOS

Nesta seção discute-se a entropia de emaranhamento partônica no caso de alvos nucleares. Para simplificar a análise do DIS nuclear, considera-se a propriedade do geometric scaling na aproximação da saturação partônica. Desta forma, a seção de choque de um DIS eA para pequeno- x é diretamente relacionada com a seção de

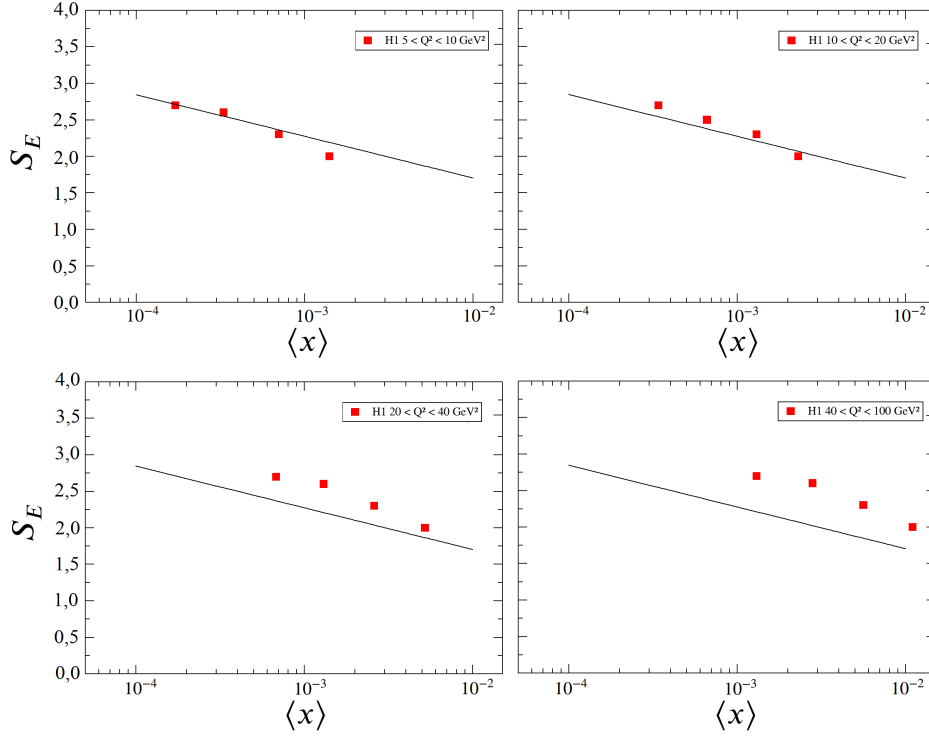


Figura 6.3: Entropia de emaranhamento partônica versus Bjorken- x . Os resultados são contrastados com a entropia hadrônica derivada das distribuições de multiplicidade carregada medidas pela colaboração H1 [115]. Os resultados numéricos deste trabalho são representados pelas linhas sólidas. Reproduzido de [108].

choque para o próton como alvo. Os efeitos nucleares são absorvidos pela escala de saturação nuclear $Q_{s,A}^2$,

$$Q_{s,A}^2(x, A) = \left(\frac{A\pi R_p^2}{\pi R_A^2} \right)^\Delta Q_s^2(x) \sim A^{4/9} Q_s^2(x), \quad (6.2.1)$$

com $\Delta \approx 1.27$ [116] e a normalização da seção de choque reescalada em relação ao caso ep com a troca,

$$\sigma_A \rightarrow \frac{\pi R_A^2}{\pi R_p^2} \sigma_0 \sim A^{2/3} \sigma_0, \quad (6.2.2)$$

de forma que o raio nuclear seja dado por $R_A \approx 1.12 A^{1/3}$ fm. Assim, a extensão mais simples da distribuição de glúons nuclear é,

$$x f_{g,A}(x, Q^2) = \frac{3R_A^2}{4\pi\alpha_s} Q_{s,A}^2 \left[1 - \left(1 + \frac{Q^2}{Q_{s,A}^2} \right) e^{-\frac{Q^2}{Q_{s,A}^2}} \right]. \quad (6.2.3)$$

Na Fig. [6.4] estão expostos os resultados para a entropia de emaranhamento nuclear a partir da parametrização para a PDF nuclear [6.2.3]. Foram consideradas as virtualidades $Q^2 = 5, 10, 50 \text{ GeV}^2$ e os seguintes núcleos: chumbo (Pb), ouro (Au), cálcio (Ca) e silício (Si). Os núcleos de Pb e Au serão investigados em futuros colisores elétron-íon como o LHeC e o eRHIC. O caso $Q^2 = 2$ é interessante pelo fato de a escala de saturação ser aprimorada por um fator de $A^{4/9}$ se comparada com o caso do próton. Este fator é de 10 para o chumbo ($A = 208$) e 5 para o cálcio ($A = 40$). Portanto, no modelo utilizado, a escala $Q_{s,A}^2$ é na ordem de 2 GeV^2

para $x \approx 10^{-2}$ para o *Pb* e $x \approx 10^{-3}$ para o *Ca*, enquanto no caso do próton isto ocorre para $x \sim 10^{-5}$ (Fig. [6.2] (a)). Isto significa que a entropia de emaranhamento alcança o seu valor máximo para um valor maior de x se comparada com o DIS nuclear devido à rápida saturação no caso nuclear.

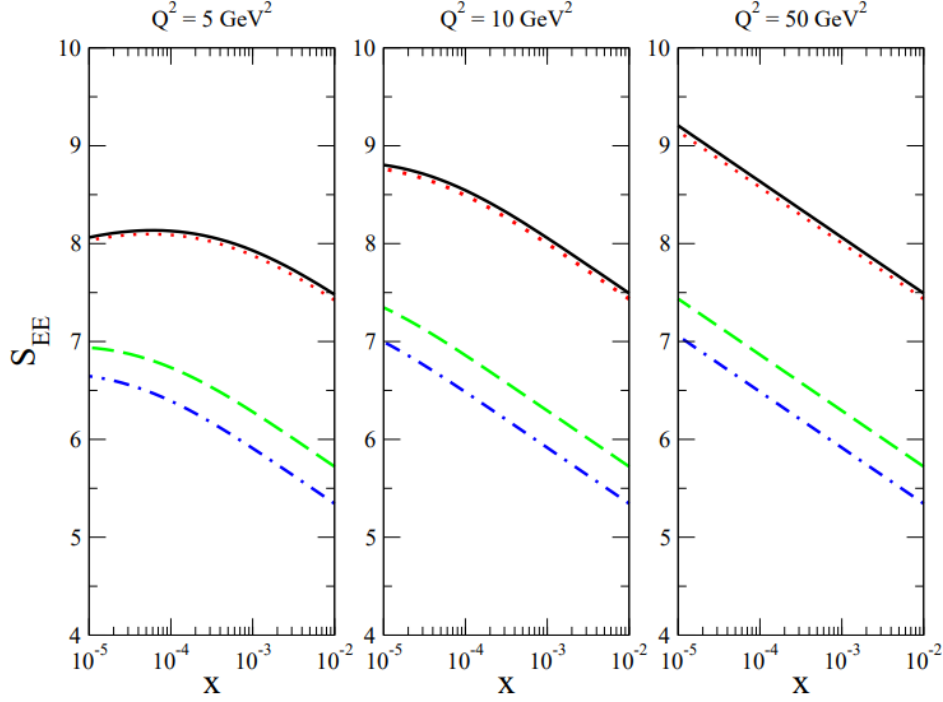


Figura 6.4: Entropia de emaranhamento nuclear como função de x para as virtualidades $Q^2 = 5, 10, 50 \text{ GeV}^2$ em um DIS nuclear. Para cada virtualidade, os seguintes núclídeos foram examinados: *Pb* (linhas sólidas), *Au* (linhas pontilhadas), *Ca* (linhas pontilhadas longas) e *Si* (linhas tracejadas). Reproduzido de [107].

6.3 ENTROPIA DE EMARANHAMENTO EM COLISÕES ELÁSTICAS UTILIZANDO FEMTOSCOPIA HADRÔNICA

Nas referências [23, 24] foi realizado o cálculo da entropia de emaranhamento em colisões elásticas, na forma como foi desenvolvido na Seção [4.4]. Contudo, para que fosse possível obter a expressão da entropia de emaranhamento [4.4.19], os autores, além de realizarem uma regularização de volume, tiveram que tomar algumas suposições quanto à dependência dos observáveis físicos em relação à variável de Mandelstam t , neste caso, a aproximação de pico de difração no espalhamento hádron-hádron [4.4.20].

É possível obter uma expressão para a entropia de emaranhamento [23, 24] sem considerar qualquer hipótese para a dependência em t , como o pico de difração. Contudo, para isso, utiliza-se modelos de *femtoscopia*, mais especificamente, o método de femtoscopia independente de modelo de Lévy para colisões elásticas (Apêndice D).

O objetivo desta seção é apresentar os resultados obtidos para a entropia de emaranhamento utilizando o modelo de femtoscopia de Lévy [109]. Não apenas os dados para altas energias foram considerados, mas também os regimes menos energéticos. Foram utilizadas expansões de Lévy até a quarta ordem para os dados

do espalhamento pp medidos no domínio energético do ISR ($\sqrt{s} = 23.5, 30.7, 44.7, 52.8$ e 62.5 GeV). Além disso, para as colisões $p\bar{p}$ as expansões de Lévy utilizadas foram até o segundo grau para as energias $\sqrt{s} = 53$ GeV (ISR) e $\sqrt{s} = 1960$ GeV (D0, Tevatron) e expansões até a terceira ordem para $\sqrt{s} = 546$ GeV e $\sqrt{s} = 630$ GeV (UA4). Para as energias do LHC, as expansões de Lévy foram realizadas até a quarta ordem para todas as medidas da seção de choque diferencial em colisões elásticas pp para 7 e 13 TeV. Os parâmetros para a expansão, R , α e os coeficientes complexos c_i estão disponíveis nos Apêndices A e B da referência [117]. De qualquer forma, usualmente utiliza-se $\alpha \approx 0.9$ e $R \approx 0.6-0.7$ fm.

Uma parte dos resultados é exposta na Tab. [6.2], utilizando os três métodos de regularização propostos pela referência [23], originalmente com $\sqrt{s} = 1.8, 7, 8$ e 13 TeV. Os valores medidos para as seções de choque totais e elásticas também são apresentados. Foram adicionadas previsões para as energias do RHIC, 0.2 TeV, e LHC com 2.76 TeV e também resultados recentes para σ_T e σ_{el} nas colisões pp do RHIC com $\sqrt{s} = 200$ GeV.

Na Fig. [6.5] são apresentados os resultados da entropia de emaranhamento extraída como função da energia do centro de massa da colisão utilizando a regularização de volume [4.4.19], com a metodologia de femtosopia de Lévy. Os dados das colisões pp para baixas energias no ISR são etiquetados por triângulos levantados, enquanto os dados de colisões $p\bar{p}$ do ISR, UA4 e D0 são representados por triângulos invertidos. Os dados do TOTEM-LHC com energias de 7 e 13 TeV, representados por quadrados, são expostos junto com a entropia de emaranhamento da referência [24], sendo estes estrelas no gráfico.

O cálculo da entropia de emaranhamento utilizando a metodologia de Lévy resultou em altos valores utilizando a regularização por volume devido à contribuição adicional para grande t que é suprimida na aproximação de pico de difração. Contudo, o desvio não é tão grande para aproximação de pequeno t , podendo ser considerada uma extração compatível com a entropia de emaranhamento. Reitera-se que a regularização utilizando a função degrau consumiu mais tempo de máquina devido ao integrando oscilante na Eq. [4.4.26].

Tabela 6.2: A entropia de emaranhamento determinada com o método independente de modelo de Lévy comparada com a aproximação de pico de difração apresentada em [24]. Também são apresentados resultados para três tipos de regularização (regularização de volume, e *cutoffs* de função degrau/gaussiana). As previsões para 0.2 TeV (RHIC) e 2.76 TeV (LHC), que não aparecem originalmente em [24], são calculadas. Adaptado de [109].

| $\sqrt{s_{pp}}$ (TeV) | Lévy | Reg. de Volume | Dados Experimentais [σ_T, σ_{el}] (mb) | F. Heaviside | F. Gaussiana |
|-----------------------|-------|----------------|--|--------------|--------------|
| 13.00 | 1.126 | 1.114 | [110.6 3.4, 31.0 1.7] | 1.212 | 0.8621 |
| 8.00 | - | 1.063 | [101.7 2.9, 27.1 1.4] | 1.197 | 0.7965 |
| 7.00 | 1.020 | 1.031 | [98.0 2.5, 25.1 1.1] | 1.192 | 0.7539 |
| 2.76 | - | 1.029 | [84.7 3.3, 21.8 1.4] | 1.144 | 0.7509 |
| 1.80 | 0.953 | 0.918 | [72.10 3.3, 16.6 1.6] | 1.193 | 0.6009 |
| 0.20 | - | 0.769 | [54.67 1.89, 10.85 1.103] | 1.103 | 0.3909 |

6.4 A ENTROPIA DINÂMICA DA QCD

A entropia dinâmica dos estados densos nas colisões pp em altas energias pode ser estudada utilizando modelos fenomenológicos para as UGD's. Desta forma, é possível obter as distribuições de probabilidades de *momentum* transversa avaliadas em termos da rapidez. A entropia dinâmica é avaliada em função de $\Delta Y = Y_0 - Y$, sendo Y_0 a rapidez inicial.

Foram analisados quatro UGD's na investigação da entropia dinâmica: a distribuição CGC gaussiana [118] $\phi_{\text{Gaus}}(Y, k)$, a proposta fenomenológica que considera a produção de hádrons carregados em colisões pp

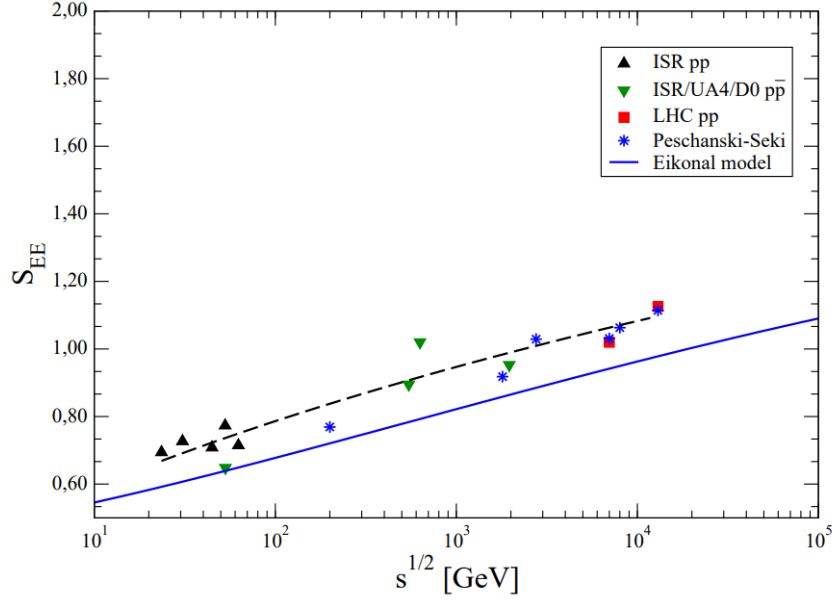


Figura 6.5: A entropia de emaranhamento para colisões elásticas como função da energia do centro de massa da colisão \sqrt{s} . A extração obtida utilizando o método de Lévy é apresentada em baixas e altas energias e comparada com os resultados de [24]. Os valores para LHC, Tevatron e RHIC são dados na Tabela [6.2]. A predição para a aproximação de pico difrativo utilizando um canal no modelo eikonal é apresentada (linha sólida). Um ajuste baseado na contribuição de polo único de Regge para o Pomeron leve também é apresentada (linha tracejada). Reproduzido de [109].

combinada com distribuições do tipo *Tsallis* [119] $\phi_{\text{MPM}}(Y, k)$, o modelo que considera tanto as condições iniciais do CGC por *McLerran-Venugopalan* quanto as soluções de *Levin-Tuchin* em um amplo domínio da distribuição de *momentum* transversa [120] $\phi_{\text{LT}}(T, k)$ e a proposta numérica da referência [121] $\phi_{\text{KS}}(Y, k)$. Contudo, inicialmente é necessária a obtenção das distribuições de probabilidades para cada uma das UGD's citadas.

6.4.1 As Distribuições de Probabilidades da Entropia Dinâmica da QCD

Agora, demonstra-se, em detalhes, os procedimentos realizados para o cálculo da entropia dinâmica no caso da UGD gaussiana, que pode ser resolvido analiticamente. Com exceção da proposta de $\phi_{\text{KS}}(Y, k)$, as demais distribuições foram obtidas a partir de uma metodologia análoga, de forma que esta demonstração segue uma linha mais pedagógica.

Inicialmente, para obter as distribuições de probabilidades do *momentum*, é necessária a realização da normalização da UGD, pois, da Eq. [3.4.3],

$$P(\tau) = \frac{\phi(\tau)}{\int d\tau \phi(\tau)} = \frac{\phi(\tau)}{N}, \quad \therefore \quad N = \int d^2 k \phi(\tau). \quad (6.4.1)$$

Lembrando que $\tau = k^2/Q_s^2(x)$.

A UGD gaussiana QCD da referência [61] é dada por,

$$\phi(\tau) = \frac{C_F A_T}{4\pi^2 \alpha_s} \tau e^{-\tau/2} \equiv C \tau e^{-\tau/2} \quad \therefore \quad C \equiv \frac{C_F A_T}{4\pi^2 \alpha_s}. \quad (6.4.2)$$

Nesta equação, A_T é a área transversa do próton. Sendo assim, o fator de normalização pode ser obtido a partir de uma substituição de variáveis trivial,

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \phi(k^2, x) = 2\pi \int_0^{\infty} dk k \phi(\tau) \\ &= \pi Q_s^2(x) \int_0^{\infty} \phi(\tau) d\tau = \pi Q_s^2(x) C \underbrace{\int_0^{\infty} \tau e^{-\tau/2} d\tau}_4. \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Desta forma, $N = 4\pi C Q_s^2(x)$. Sendo assim, a distribuição para o caso gaussiano $P_{\text{gaus}}(\tau)$ é dada por,

$$P_{\text{gaus}}(\tau) = \frac{\tau e^{-\tau/2}}{4\pi Q_s^2}. \quad (6.4.4)$$

Para o caso da UGD ϕ_{MPM} , dada por,

$$\phi_{\text{MPM}} = \frac{3\sigma_0}{4\pi^2 \alpha_s} \frac{\tau \beta(\tau)}{(1+\tau)^{1+\beta(\tau)}}, \quad (6.4.5)$$

sendo, nesta equação, $\alpha_s = 0.2$, com $Q_s^2(Y) = k_0^2 e^{0.33Y}$ e $k_0^2 = \bar{x}_0^{0.33} \text{ GeV}^2$. O comportamento de potências dos glúons produzidos no *spectrum* de grande *momenta* é determinado pela função $\beta(\tau) = a\tau^b$. O conjunto de parâmetros σ_0 , \bar{x}_0 , a e b é ajustado a partir de dados provenientes de um DIS para pequeno- x [119],

$$\begin{cases} \sigma_0 = 20.47 \text{ mb}; \\ \bar{x}_0 = 3.52 \times 10^{-5}; \\ a = 0.055; \\ b = 0.204. \end{cases} \quad (6.4.6)$$

De forma análoga ao procedimento seguido para obter a distribuição gaussiana, para o caso de ϕ_{MPM} obtém-se a distribuição,

$$P_{\text{MPM}}(\tau) = \frac{1}{\pi Q_s^2 \xi} \frac{\tau \beta(\tau)}{(1+\tau)^{1+\beta(\tau)}}, \quad (6.4.7)$$

sendo $\xi = 4.34618$ uma constante proveniente da integração numérica [6.4.1].

A fim de analisar informações provenientes das distribuições de *momentum* transverso (TMD, *transverse momentum distribution*) do glúon, que carregam consigo mais informações do comportamento teórico correto tanto para grandes quanto pequenos *momenta*, considera-se a distribuição ϕ_{LT} . Ela é derivada a partir de uma forma de solução geral $\phi(Y, k)$ que reproduz tanto as condições iniciais do Modelo MV quanto as soluções de Levin-Tuchin (LT) em seus limites apropriados. Esta distribuição conecta ambos os limites suavemente e melhor se aproxima da solução numérica em primeira ordem da equação BK, especialmente na região de saturação. Neste limite, a TMD para o glúon vai a 0. Inicialmente, com a TMD de glúons para um pequeno *momentum* transverso a partir da solução da matriz S de LT, a UGD toma a seguinte forma na região $Q_s > k > \Lambda_{QCD}$,

$$\phi_{\text{LT}}^{\text{sat}}(Y, k) = -\frac{N_c A_T \epsilon}{\pi^3 \alpha_s} \ln\left(\frac{\tau}{4}\right) e^{-\epsilon \ln^2(\frac{\tau}{4})}, \quad (6.4.8)$$

de forma que $\phi_{\text{LT}}^{\text{sat}}(Y, k)$ foi obtida para um pequeno *momentum* transverso em termos de uma série de polinô-

mios de *Bell*. Esta expressão corresponde à aproximação de logaritmo dominante para as séries resumidas com uma constante $\epsilon \approx 0.2$, que aparece devido à condição do ponto de sela em torno da borda de saturação. Fora dos contornos da saturação ($k > Q_s$), mas próximo à linha de saturação, a amplitude de dipolo QCD no espaço transversal tem a forma $N(r, Y) \approx (r^2 Q_s^2)^{\gamma_s}$. Neste limite, a TMD pode ser escrita como,

$$\phi_{\text{LT}}^{\text{dil}}(Y, k) \propto \frac{N_c A_T \epsilon}{\pi^3 \alpha_s} \tau^{-\gamma_s}. \quad (6.4.9)$$

Utilizando os procedimentos de normalização [6.4.1] e considerando os detalhes da região física de interesse, é proposta a seguinte distribuição,

$$P_{\text{LT}}(Y, k) = \begin{cases} -B \ln\left(\frac{\tau}{4}\right) e^{-\epsilon \ln^2(\tau/4)}, & \text{para } \tau < 1, \\ B(d\tau)^{-\gamma_s} e^{-\epsilon^2(\tau/4)}, & \text{para } \tau \leq 1, \end{cases} \quad (6.4.10)$$

sendo $d = (\ln 4)^{-1/\gamma_s}$ e $B \approx 0.1/\pi Q_s^2$, parâmetros da normalização.

Por fim, utilizou-se o modelo de UGD não linear proveniente do algoritmo providenciado pelo autor da referência [121], utilizado neste trabalho com o intuito de verificar as incertezas teóricas adjacentes aos demais modelos utilizados. Esta UGD é tratada numericamente com o formalismo matemático da entropia dinâmica a partir de algoritmos disponibilizados por um dos autores.

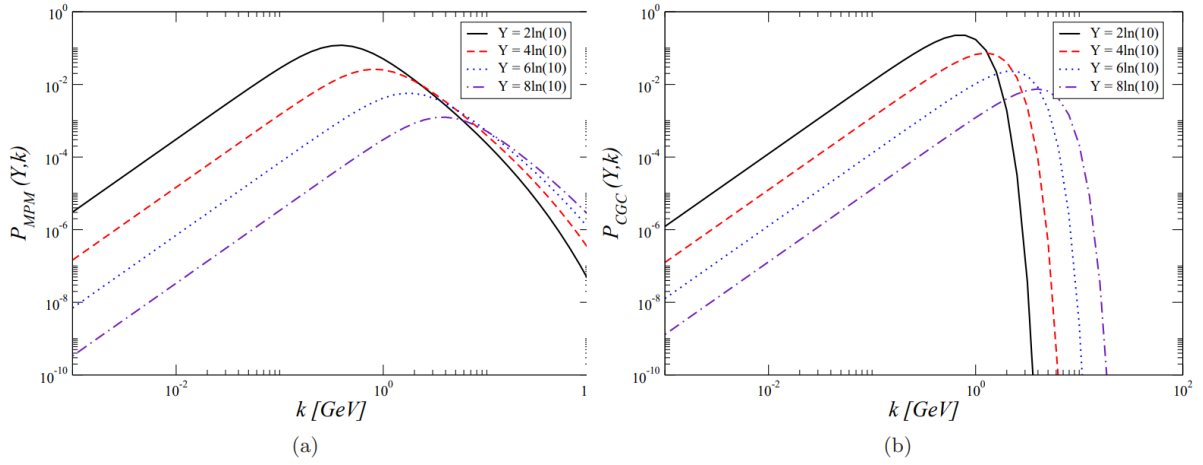


Figura 6.6: A distribuição de probabilidade, $P(Y, k)$, como função de k para valores fixos de $Y = -\ln x$ ($x = 10^{-8}$ - 10^{-2}). Resultados para o modelo MPM (esquerda) e modelo gaussiano (direita). Reproduzido de [110].

Na Fig. [6.6] são apresentadas as distribuições de probabilidade de *momentum* transversal dos glúons para os modelos MPM (a) e gaussiano CGC (b). É apresentada a dependência com k para vários valores de Y (2, 4, 6, 8, $\ln 10$), que correspondem às frações de *momentum* longitudinal dos glúons, $x = 10^{-8}$ - 10^{-2} . Ambos os modelos apresentam a propriedade de geometric scaling, $\phi(Y, k) \sim \phi(\tau = k^2/Q_s^2)R_s$, e o seu pico ocorre com um *momentum* transversal proporcional à escala de saturação. De qualquer forma, em cada um dos modelos, esse pico é alcançado para valores diferentes: para a gaussiana CGC, tem-se $k^{\text{max}} = \sqrt{2}Q_s(Y)$, enquanto, no caso do modelo MPM, $k^{\text{max}} \approx \sqrt{0.954}Q_s(Y)$.

6.4.2 Resultados para Entropia Dinâmica da QCD e a Entropia de Decorência

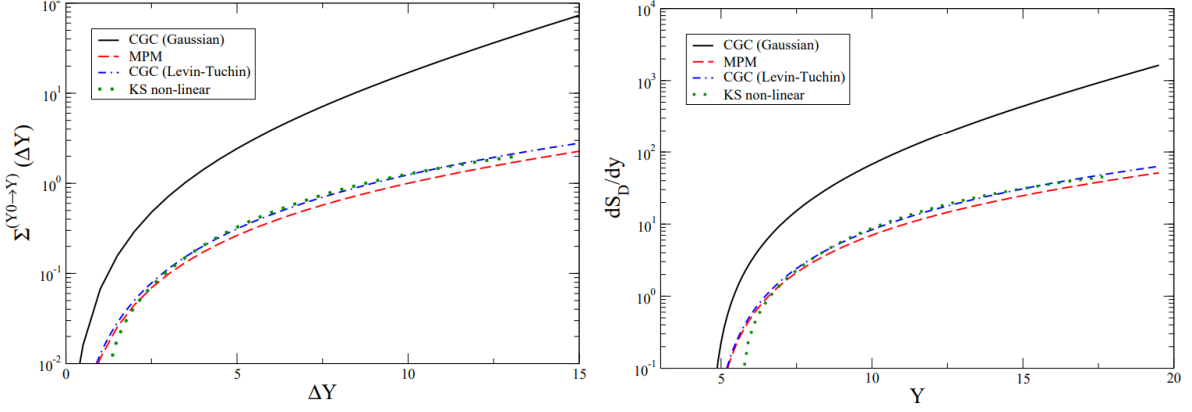


Figura 6.7: (esquerda): Entropia dinâmica correspondente a uma evolução QCD de rapidez $Y_0 \rightarrow Y$, com $\Delta Y = Y - Y_0$. A rapidez inicial é $Y_0 = -\ln x_0$, sendo $x_0 = 10^{-2}$. Resultados numéricos para o modelo MPM (linha pontilhada), modelo CGC gaussiana (linha sólida), CGC LV (linha pontilhada) e modelo KS (pontos). **(direita):** Entropia dinâmica total em uma colisão pp para uma evolução QCD de rapidez, $Y_0 \rightarrow Y$, no domínio $\Delta Y = [0, 15]$. Reproduzido de [110].

Nesta seção, apresentam-se os resultados obtidos para a entropia dinâmica da QCD com uma rapidez Y sujeita à evolução $Y_0 \rightarrow Y$. Foi considerada uma rapidez inicial $Y_0 \approx 4.6$. Os valores de $x \leq x_0$ correspondem ao limite de validade para a aplicação fenomenológica das UGD's consideradas neste trabalho. Para essa rapidez inicial, os párons populam uma área transversal proporcional ao tamanho $R_0(Y_0) = 1/Q_s(Y_0)$.

O caso do modelo da UGD gaussiana do CGC pode ser tratado analiticamente. Utilizando a expressão [3.4.6] com a UGD gaussiana dada por [6.4.4],

$$\Sigma_{gaus}^{Y_0 \rightarrow Y} = \int 2 \left[\left(\frac{Q_s^2(Y)}{Q_s^2(Y_0)} - 1 \right) - \ln \left[\frac{Q_s^2(Y)}{Q_s^2(Y_0)} \right] \right]. \quad (6.4.11)$$

Utilizando a expressão para a escala de saturação em função da rapidez, $Q_s^2(Y) = Q_s^2(Y_0)e^{\lambda \Delta Y}$, obtém-se:

$$\Sigma_{Gauss}^{Y_0 \rightarrow Y} = 2(e^{\lambda \Delta Y} - 1 - \lambda \Delta Y), \quad (6.4.12)$$

Para o caso do modelo MPM, a entropia é parametrizada na forma:

$$\Sigma_{MPM}^{Y_0 \rightarrow Y} = (1 + \gamma_s)(e^{\sigma \Delta Y} - g - \sigma \Delta Y), \quad (6.4.13)$$

de forma que $\sigma \approx 0.088$ e $g \approx 0.95$ na região $\Delta Y \ll 5$.

Na Fig. [6.7], a entropia dinâmica é apresentada para todos os modelos de UGD's estudados: modelos MPM (linha tracejada), CGC gaussiano (linha sólida), LT (linha pontilhada) e KS não linear (pontos). Os modelos MPM e LV são praticamente coincidentes, significando que a fenomenologia realizada no modelo MPM mimetiza corretamente o comportamento teórico da UGD LT na região de saturação. O modelo gaussiano apresenta uma entropia de maior magnitude se comparado com os demais.

A densidade de entropia dinâmica [3.4.14] também é calculada e apresentada na Fig. [6.7], com a mesma notação das linhas do lado esquerdo da mesma figura. Na Eq. [3.4.14], não estão incluídas as correlações partônicas [21]. Os resultados foram obtidos no domínio de $\Delta Y = [0, 15]$, que corresponde a uma evolução

QCD de $x = 10^{-2}$ até $x = 10^{-8}$. Foram utilizados $\alpha_s = 0.2$ e $R_p = 0.8414$ fm no cômputo numérico. Para os modelos MPM e LT, a magnitude é bem aproximada. O modelo de UGD de KS não apresenta geometric scaling, especialmente para grande k . Este modelo mimetizou muito bem as UGD's LV e MPM, especialmente para grande ΔY .

Por fim, na Fig. [6.8], a entropia dinâmica por número médio de ocupação de glúons $\langle n \rangle$ é apresentada em comparação com a entropia de decoerência de um único modo [5.3.7] e a entropia de equilíbrio [5.3.8]. Para obter os resultados da entropia dinâmica em função da ocupação média, foram utilizadas as instruções da referência [22], em que $\langle n \rangle = x f_g(x)$. A escala de resolução é $Q^2 = Q_s^2(Y)$, de forma que a densidade de ocupação de glúons é dada nesta escala por:

$$x f_g(x = e^Y, Q_s^2) = C Q_s^2(Y), \quad (6.4.14)$$

com $C = 3\pi R_p^2(1 - 2/e)/4\pi^2\alpha_s$. O resultado é uma expressão para o modelo MPM. Comparando os resultados da Fig. [6.8], percebe-se que, para um grande número de ocupações, o comportamento da entropia de equilíbrio é bem similar ao da entropia dinâmica. De qualquer forma, observa-se que diferentes definições para $\langle n \rangle$ foram utilizadas em cada caso.

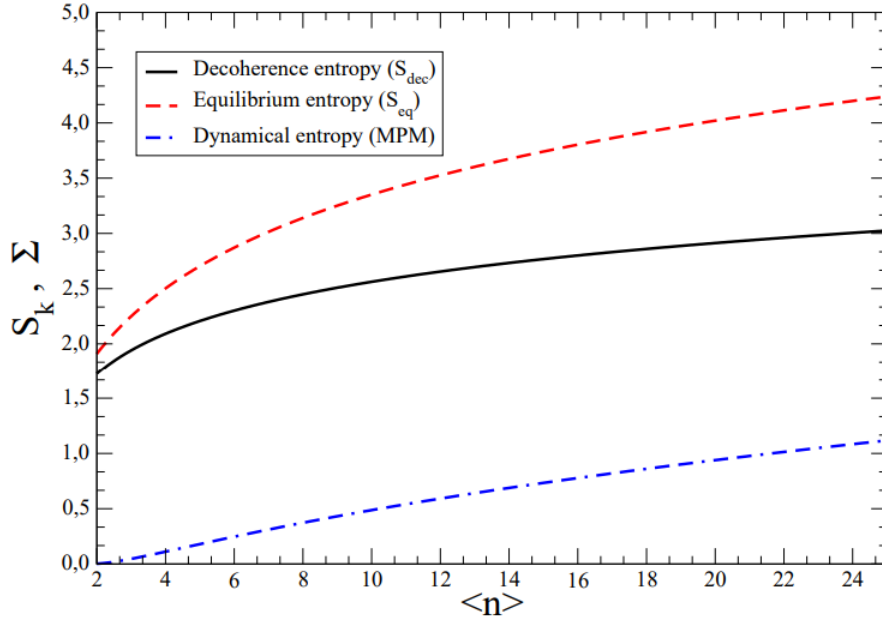


Figura 6.8: A entropia dinâmica Σ como função do número médio de ocupação (linha pontilhada). Comparação com a entropia de decoerência (linha sólida) e entropia de equilíbrio (linha tracejada) para os estados coerentes de um único modo. Reproduzido de [110].

6.4.3 Entropia Dinâmica em Colisões pA

Para adaptar o cálculo da Entropia Dinâmica é necessário encontrar UGD's nucleares. Este tipo de objeto matemático é escasso na literatura, de forma que foram estabelecidas duas estratégias para adaptar as UGD's já estudadas no caso dos prótons para o caso dos *nuclei*. A primeira delas faz uso da propriedade do geometric scaling proposta na referência [63], proposto na Eq. [3.1.27], em que a área transversa do alvo pode ser absorvida

pela escala de saturação dependente da massa atômica A , ou seja, $\sigma^{\gamma^*A}(\tau_A)/\pi R_A^2 = \sigma^{\gamma^*p}(\tau)/\pi R_p^2$, com $R_A = (1.12A^{1/3} - 0.86A^{-1/3})$ fm sendo o raio nuclear. Assim, é necessário adaptar a seção de choque transversa $\sigma_0 \rightarrow \sigma_A$ e a escala de saturação $Q_s^2(Y) \rightarrow Q_{s,A}^2(Y)$. Especificamente, para a escala de saturação nuclear $Q_{s,A}(Y)$:

$$Q_{s,A}^2(Y) = \left(\frac{R_p^2 A}{R_A^2} \right)^\Delta Q_s^2(Y), \quad (6.4.15)$$

onde $\Delta \approx 1.27$ e $R_p \approx 3.56$ GeV.

Agora, no cálculo da entropia dinâmica, o procedimento de normalização é idêntico ao caso do próton, conforme mostrado em resultados anteriores, onde todas as dependências da seção de choque σ_0 são desprezíveis devido ao processo de normalização. Portanto, realizando a operação $Q_s^2(Y) \rightarrow Q_{s,A}^2(Y)$, as distribuições de probabilidade de momento transverso para os modelos GBW, MPM e LV no caso próton-núcleo são:

$$P_{\text{GBW}}^A(\tau_A) = \frac{\tau_A e^{-\tau_A/2}}{4\pi Q_{s,A}^2}, \quad (6.4.16)$$

$$P_{\text{MPM}}^A(\tau_A) = \frac{1}{\pi \xi Q_{s,A}^2} \frac{\tau_A (1 + a\tau_A^b)}{(1 + \tau_A)^{2+a\tau_A^b}}, \quad (6.4.17)$$

$$P_{\text{LV}}^A(\tau_A) = \begin{cases} -\frac{\ln\left(\frac{\tau_A}{4}\right)}{8\pi Q_{s,A}^2} e^{-\epsilon \ln^2\left(\frac{\tau_A}{4}\right)}, & \text{para } \tau_A < 1; \\ \frac{(d\tau_A)^{-\gamma_s}}{8\pi Q_{s,A}^2} e^{-\epsilon \ln^2\left(\frac{\tau_A}{4}\right)}, & \text{para } \tau_A \geq 1. \end{cases} \quad (6.4.18)$$

Nestas equações, a variável de scaling é agora $\tau_A = k^2/Q_{s,A}^2$, e $\xi = 4.346$ é o fator de normalização para o modelo MPM.

A segunda forma de se obter uma UGD nuclear utiliza o formalismo de Glauber-Gribov, em que a seção de choque total do dipolo do próton, $\sigma_{\text{dip}}(r, Y)$, é substituída pela seção de choque nuclear $\sigma_{dA}(x, r) = \int d^2b \sigma_{dA}(x, r, b)$, com:

$$\sigma_{dA}(Y, r, b) = 2 \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2} T_A \sigma_{\text{dip}}(Y, r)\right) \right]. \quad (6.4.19)$$

Nesta equação, $T_A(b)$ é a função de espessura nuclear, definida como a função de perfil nuclear $T_A = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_A(z, \vec{b})$, normalizada à massa atômica, $\int d^2b T_A(b) = A$. Neste trabalho, utilizou-se a parametrização de Woods-Saxon para a densidade nuclear ρ_A .

A UGD nuclear é dada pela expressão:

$$\varphi_A(Y, k) = -\frac{N_c k^2}{4\pi^2 \alpha_s} \int \frac{d^2b d^2r}{2\pi} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \sigma_{dA}(Y, r, b). \quad (6.4.20)$$

Em particular, para o modelo GBW no regime de pequeno- x , pode-se utilizar a seção de choque do dipolo do próton, e a UGD nuclear é [122]:

$$\varphi_A^{\text{GBW}}(x, k) = \frac{N_c}{\pi^2 \alpha_s} \frac{k^2}{Q_s^2} \int d^2b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-B)^n}{n!} \sum_{\ell=1}^n C_\ell^n \frac{(-1)^\ell}{\ell} e^{-k^2/\ell Q_s^2}, \quad (6.4.21)$$

onde, nesta equação, C_ℓ^n é a fórmula de combinação e $B = \frac{1}{2} T_A(b) \sigma_0$.

Calculando a entropia dinâmica nuclear utilizando a estratégia do geometric scaling, utilizando as distri-

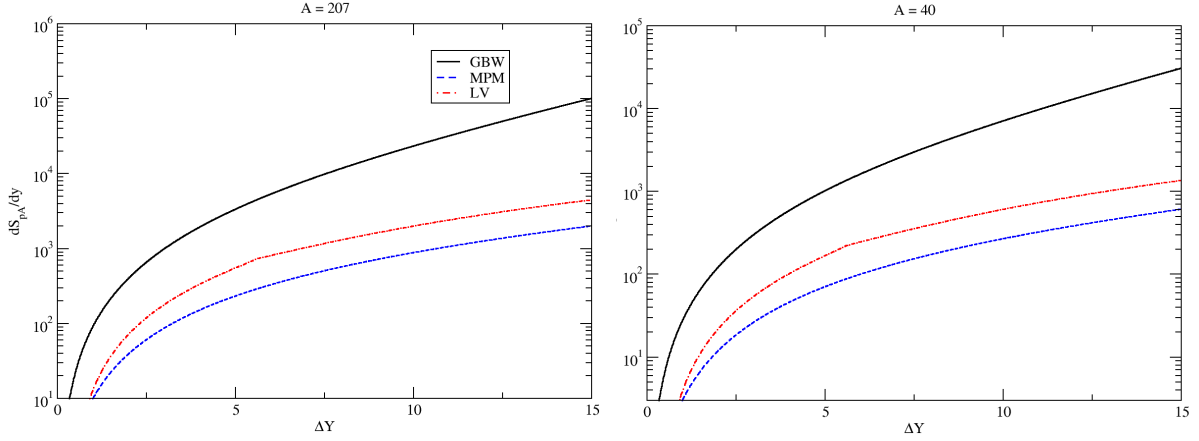


Figura 6.9: Entropia dinâmica total da QCD, $d\Sigma_d/dy$, produzida em uma colisão pA como função de $\Delta Y = Y - Y_0$, com $Y_0 \approx 4.6$, para os modelos de UGD GBW (linhas sólidas), MPM (linhas tracejadas) e LV (linhas tracejadas-pontilhadas), para chumbo (esquerda) e cálcio (direita).

buições de probabilidade de momento transversal nuclear [6.4.16]-[6.4.18], obteve-se o mesmo resultado do próton mostrado na Fig. [6.7]. Para compreender isso, a entropia dinâmica pode ser avaliada na seguinte forma:

$$\Sigma^{Y_0 \rightarrow Y} = \pi Q_{s,A}^2(Y) \int_0^\infty d\tau_A P(\tau_A) \ln \left[\frac{P(\tau_A)}{P(\tau_A^0)} \right], \quad (6.4.22)$$

com $\tau_A^0 = k^2 / Q_{s,A}^2(Y_0)$. A partir disso, $k^2 = \tau_A Q_{s,A}^2(Y) = \tau_A^0 Q_{s,A}^2(Y_0)$, e é útil definir a razão,

$$\frac{Q_{s,A}^2(Y)}{Q_{s,A}^2(Y_0)} = \frac{\left(\frac{R_p^2 A}{R_A^2} \right)^\Delta Q_s^2(Y)}{\left(\frac{R_p^2 A}{R_A^2} \right)^\Delta Q_s^2(Y_0)} = e^{\lambda \Delta Y} \equiv s, \quad (6.4.23)$$

onde $\Delta Y = Y - Y_0$ com $Y_0 \approx 4.6$ ($x_0 = 0.01$). Considera-se essa rapidez inicial porque os valores de $x \leq x_0$ correspondem ao limite de validade para a aplicação dos modelos fenomenológicos de UGD considerados aqui. Assim, inicialmente, os pártons ocupam uma área transversal proporcional ao tamanho inicial de correlação de cor $R_0(Y_0) = 1/Q_s(Y_0)$.

A partir da expressão [6.4.22], a razão entre $P(\tau_A)$ e $P(s\tau_A)$ pode ser analisada para as diferentes expressões das distribuições de probabilidade de momento transversal nuclear na estratégia de adaptação de geometric scaling [6.4.16]-[6.4.18]. Para o modelo GBW, pode-se observar:

$$\ln \left[\frac{P_{\text{GBW}}(\tau_A)}{P_{\text{GBW}}(s\tau_A)} \right] = 2\lambda \Delta Y + k^2 [R_s^2(Y_0) - R_s^2(Y)]. \quad (6.4.24)$$

Substituindo este resultado na expressão [3.4.6], obtém-se uma expressão equivalente à obtida na Eq. [14] da Ref. [21], recuperando a entropia dinâmica do próton:

$$\Sigma_{\text{GBW}}^{Y_0 \rightarrow Y}(\Delta Y) = 2 \left(e^{\lambda \Delta Y} - 1 - \lambda \Delta Y \right), \quad (6.4.25)$$

Um procedimento similar pode ser realizado para a entropia dinâmica do modelo MPM, $\Sigma_{\text{MPM}}^{Y_0 \rightarrow Y}$, uma vez

que apresenta propriedade de geometric scaling:

$$\Sigma_{\text{MPM}}^{Y_0 \rightarrow Y} = \frac{1}{\xi} \int_0^\infty d\tau_A \frac{\tau_A (1 + a\tau_A^b)}{(1 + \tau_A)^{2+a\tau_A^b}} \ln \left[\frac{(1 + a\tau_A^b)(1 + s\tau_A)^{2+as^b\tau_A^b}}{s^2(1 + as^b\tau_A^b)(1 + \tau_A)^{2+a\tau_A^b}} \right]. \quad (6.4.26)$$

Esta expressão também retorna a entropia dinâmica do próton mostrada na Fig. [6.7]. O procedimento de normalização [6.4.1] elimina toda a dependência nuclear no tamanho transverso do alvo, $S_\perp^A = \pi R_A^2$. O mesmo efeito pode ser demonstrado para o caso da UGD LV, tanto para as contribuições diluídas quanto saturadas.

Na Fig. [6.9], a densidade de entropia [3.4.14] é calculada para chumbo (painel esquerdo) e para cálcio (painel direito) para todos os modelos baseados no fenômeno de geometric scaling: GBW (linha sólida), MPM (linha tracejada) e LV (linha tracejada e pontilhada) no intervalo $\Delta Y = [0, 15]$. Embora a entropia dinâmica nuclear seja independente de A , sua densidade está relacionada ao tamanho do raio nuclear como $\frac{dS_D}{dy} \sim R_A^2$. Na definição proposta na referência [21], deve-se levar em consideração a razão entre todas as células unitárias disponíveis no meio CGC, $\sim \frac{\pi R_A^2}{\pi R_0^2}$.

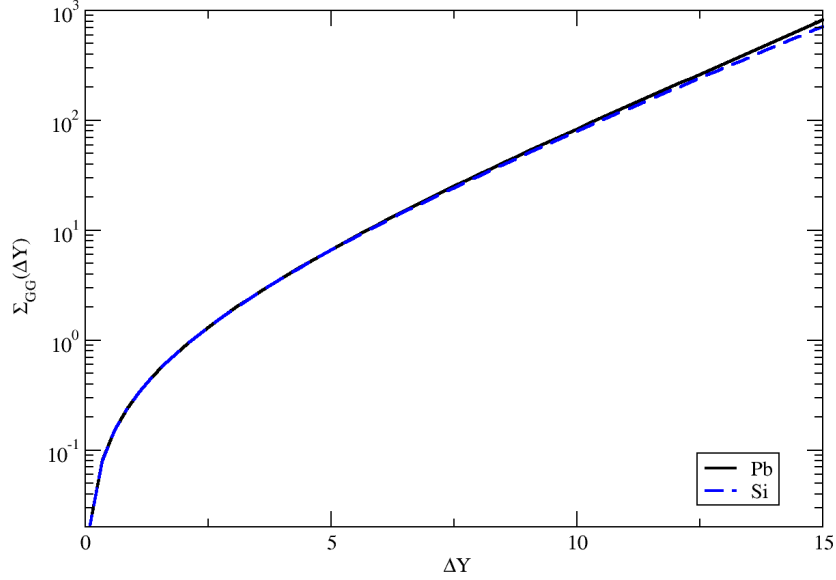


Figura 6.10: Entropia dinâmica QCD nuclear em colisões próton-núcleo correspondente à evolução QCD em rapidez, $Y_0 \rightarrow Y$, no intervalo $\Delta Y = [0, 15]$ na abordagem de Glauber-Gribov. A entropia é calculada para chumbo (linha sólida) e silício (linhas tracejadas).

Por fim, os resultados obtidos para a entropia dinâmica nuclear via o formalismo de Glauber-Gribov são dados na Fig. [6.92], a entropia dinâmica novamente mostrou independência em relação a A , também plotada como uma função de ΔY no intervalo $[0, 15]$. Embora a obtenção da UGD envolva um processo mais complexo via a Eq. [6.4.21], parece que o geometric scaling e o procedimento de normalização também eliminam a dependência de A na entropia dinâmica. Uma diferença notável em relação à estratégia do geometric scaling é que este resultado não se reduz ao caso do próton e é aproximadamente dez vezes maior.

6.5 CONCLUSÃO

Nesta tese, foi investigada a entropia de emaranhamento em processos DIS, para pp , ep e pA e também em espalhamentos elásticos. O formalismo teórico baseou-se na entropia de emaranhamento utilizando a expressão de von Neumann, escrita em termos do número de glúons como função de x de Bjorken e das virtualidades do fóton, Q^2 . Utilizou-se expressões analíticas para a densidade de glúons relacionadas à física de saturação de pártons, com modelos baseados na representação de dipolos de cor. A análise incluiu tanto densidades integradas quanto não integradas, permitindo a descrição de observáveis fundamentais em DIS para x pequeno e valores intermediários de $Q^2 \sim 50 \text{ GeV}^2$. Além disso, foi realizada uma extrapolação utilizando propriedades de geometric scaling para obter a densidade de glúons nucleares, sendo os resultados consistentes com os dados experimentais.

A investigação da entropia de emaranhamento em processos de espalhamento elástico em colisões pp e $\bar{p}p$ foi conduzida utilizando o formalismo da matriz S e a expansão em ondas parciais. A extração model-independent, baseada no método de imagem de Lévy, permitiu a análise sistemática do emaranhamento nos estados finais hadrônicos. Verificou-se que, em altas energias, a entropia para espalhamento elástico apresenta saturação em energias assintóticas, com comportamento parametrizado como $S \sim 1 + \ln(2) - \ln(\ln(s))$.

A entropia dinâmica da QCD foi estudada em colisões pp e pA , com base em diversos modelos de UGD's. Para colisões pp , foram utilizados modelos analíticos como o MPM, que descreve de forma precisa os espectros de partículas carregadas no LHC, além de modelos CGC baseados em distribuições gaussianas e na lei de Levin-Tuchin. Os resultados mostraram que, em todos os casos, o máximo da distribuição ocorre em torno de $k \sim Q_s$, destacando a propriedade de geometric scaling. Foi calculada a entropia dinâmica total e sua densidade, apresentando forte dependência de ΔY , especialmente no caso do modelo gaussiano do CGC. Para colisões pA , estratégias baseadas no geometric scaling e no formalismo de Glauber-Gribov foram empregadas, confirmando que a entropia dinâmica independe do número atômico A , devido ao procedimento de normalização.

Os resultados compararam a entropia dinâmica com a entropia de decoerência e a entropia de equilíbrio de um único modo, destacando semelhanças para grandes números médios de ocupação de glúons. A análise detalhada destas entropias, utilizando ferramentas analíticas e fenomenológicas, oferece uma nova perspectiva para compreender a dinâmica dos estados iniciais em colisões de íons pesados e a produção de múltiplas partículas em altas energias.

Por fim, a análise robusta de diversas noções de entropia confronta os bons resultados obtidos pela entropia de emaranhamento no Modelo LV. Neste caso, como a matriz densidade reduzida pode ser escrita em função da virtualidade, que, por sua vez, está relacionada com a porção espacial do hádron investigado em um DIS, sendo esta na sua totalidade A_h , é proposta a ideia de que, para baixos valores da virtualidade, na ordem em que $A_h \sim 1/Q^2$, ter-se-á $\hat{\rho}_A \sim \hat{\rho}$, ou seja, a matriz densidade é similar à matriz densidade total do sistema, de forma que a entropia de emaranhamento se confunde com a entropia hadrônica.

Apêndice A

Variáveis do Cone de Luz

As coordenadas do cone de luz são o sistema usual na física de partículas em altas energias. Tradicionalmente, existem duas formas de tratar esse sistema, que podem mudar conforme a referência estudada. A primeira forma é chamada de convenção de Lepage-Brodsky (LB), e a segunda, convenção de Kogut-Soper (KS). Por exemplo, ao tratar desse sistema de variáveis, na seção em que o formalismo CGC é apresentado [3.1.1], os resultados reproduzidos utilizaram a convenção KS; em contrapartida, ao realizar manipulações para obtenção da entropia de *Wehrl* neste apêndice [E.1], foi utilizada a convenção LB.

Dessa forma, neste apêndice são brevemente apresentados os fundamentos das duas convenções, uma vez que, para cada tratamento das teorias e formalismos abordados neste trabalho, foram mantidas as escolhas e convenções de cada autor. Para uma discussão completa das variáveis do cone de luz, indica-se a referência [123].

Convenção de Lepage-Brodsky

Os 4-vetores contravariantes da posição x^μ são escritos como:

$$x^\mu = (x^+, x^-, x^1, x^2) = (x^+, x^-, \vec{x}_T). \quad (\text{A.0.1})$$

As componentes do tipo tempo e do tipo espaço são dadas por:

$$x^+ = (x^0 + x^3) \quad \text{e} \quad x^- = (x^0 - x^3), \quad (\text{A.0.2})$$

respectivamente, e são chamadas de *tempo no cone de luz* e *posição no cone de luz*. Os vetores covariantes são obtidos utilizando $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$, com os tensores de métrica:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.3})$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.0.4})$$

O produto escalar é dado por:

$$x \cdot p = x^\mu p_\mu = x^+ p_+ + x^- p_- + x^1 p_1 + x^2 p_2 = \frac{1}{2}(x^+ p^- + x^- p^+) - \vec{x}_T \cdot \vec{p}_T. \quad (\text{A.0.5})$$

Convenção de Kogut-Soper

Kogut e *Soper* utilizaram para as componentes do tipo tempo e do tipo espaço:

$$x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3) \quad \text{e} \quad x^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3), \quad (\text{A.0.6})$$

Os tensores de métrica são:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.0.7})$$

O produto escalar é dado por:

$$x \cdot p = x^\mu p_\mu = x^+ p_+ + x^- p_- + x^1 p_1 + x^2 p_2 = x^+ p^- + x^- p^+ - \vec{x}_T \cdot \vec{p}_T. \quad (\text{A.0.8})$$

Por fim, demonstra-se que a razão p^+ / p^- fornece uma medida do *boost* de *Lorentz* que uma partícula sofre em relação ao seu referencial de repouso. A *rapidez* Y é uma grandeza definida em relação a essa razão, sendo dada, tanto em KS como em LB, por:

$$Y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p^+}{p^-} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x_0 + x_3}{x_0 - x_3} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right). \quad (\text{A.0.9})$$

Apêndice B

O procedimento de *Gram-Schmidt*

O processo de *Gram-Schmidt* é um algoritmo simples para produzir uma base ortogonal ou ortonormal para qualquer subespaço não nulo. Sendo $\langle \phi_i^A | \otimes \langle \phi_j^B | = \langle \phi_i^A \phi_j^B |$, considere o produto interno:

$$\langle \phi_i^A \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle = \alpha_n, \quad (\text{B.0.1})$$

com $|\alpha_n|^2 \neq 0$.

Agora, sendo $|\phi_l^A\rangle \in \mathcal{H}_A$, $\exists |\phi_l^A\rangle \perp \langle \phi_i^A |$, e ϵ um número complexo arbitrário, tem-se:

$$\| |\phi_i^A\rangle + \epsilon |\phi_l^A\rangle \|^2 = \| |\phi_i^A\rangle \|^2 + |\epsilon|^2 \| |\phi_l^A\rangle \|^2 = 1 + \Theta(\epsilon^2). \quad (\text{B.0.2})$$

Desconsiderando termos de segunda ordem em ϵ , a combinação linear $|\phi_i^A\rangle + \epsilon |\phi_l^A\rangle$ se torna um vetor unitário. Agora:

$$[\langle \phi_i^A | + \epsilon \langle \phi_l^A |] \otimes \langle \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle = \langle \phi_i^A \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle + \epsilon \langle \phi_l^A | \otimes \langle \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle = \alpha_n + \epsilon \langle \phi_l^A | \otimes \langle \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle. \quad (\text{B.0.3})$$

E:

$$\begin{aligned} \| [\langle \phi_i^A | + \epsilon \langle \phi_l^A |] \otimes \langle \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle \|^2 &= \| \alpha_n + \epsilon \langle \phi_l^A | \otimes \langle \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle \|^2 \\ &= \| \alpha_n \|^2 + 2 \operatorname{Re}(\epsilon \alpha_n \langle \phi_l^A | \otimes \langle \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle) + \Theta(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (\text{B.0.4})$$

O lado esquerdo da Eq. [B.0.4] é estacionário em relação a qualquer variação de $|\phi_i^A\rangle$, de forma que:

$$\langle \phi_l^A | \otimes \langle \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle = 0, \quad i \neq l \quad \forall |\phi_l^A\rangle \in \mathcal{H}_{A'}, \quad (\text{B.0.5})$$

sendo $\mathcal{H}_{A'}$ o conjunto de todos os estados pertencentes a \mathcal{H}_A ortogonais a $|\phi_i^A\rangle$. Realizando procedimento similar no espaço vetorial \mathcal{H}_B , é possível obter:

$$\langle \phi_i^A | \otimes \langle \phi_k^B | \psi_{AB} \rangle = 0, \quad k \neq j \quad \forall |\phi_k^B\rangle \in \mathcal{H}_{B'}. \quad (\text{B.0.6})$$

Tendo o vetor $|\psi'_{AB}\rangle$ dado por:

$$|\psi'_{AB}\rangle = |\psi_{AB}\rangle - \alpha_n |\phi_j^A\rangle \otimes |\phi_j^B\rangle \quad \therefore \quad |\psi_{AB}\rangle = |\psi'_{AB}\rangle + \alpha_n |\phi_j^A\rangle \otimes |\phi_j^B\rangle, \quad (\text{B.0.7})$$

a definição de α_n resulta em:

$$\langle \phi_i^A | \otimes \langle \phi_j^B | \psi'_{AB} \rangle = 0. \quad (\text{B.0.8})$$

Logo, $|\psi'_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_{A'} \otimes \mathcal{H}_{B'}$. O procedimento explicitado pelas equações [B.0.1]-[B.0.8] pode ser repetido a fim de eliminar os k -ésimos e l -ésimos estados e, depois, os seguintes, até se obter a forma:

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle. \quad (\text{B.0.9})$$

Apêndice C

Dipolos de Cor e a Equação Balitsky-Kovchegov

Esta seção tem como intuito apresentar brevemente a derivação e as propriedades da equação BK no formalismo dos dipolos de cor. Inicialmente, considera-se um par quark-antiquark (Fig. [C.1]), um dipolo de cor, com uma função de onda na representação de *momentum* denotada por $\psi_{\alpha\beta}^{(0)}(k_1, z_1)$, sendo \vec{k}_1 o *momentum* transverso do quark, $z_1 = k_1^+ / p^+$ a fração de *momentum* longitudinal do fóton portada pelo quark nas variáveis do cone de luz e α e β os índices de cor. Esta função de onda é obtida a partir da expansão em estados de *Fock* do estado do fóton virtual que gerou dipolo.

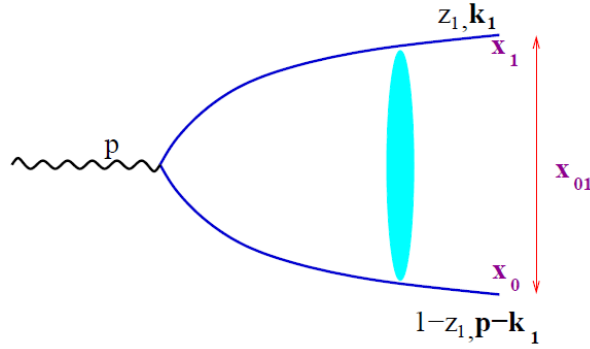


Figura C.1: Dipolo de cor, em azul, gerado a partir de um fóton virtual com 4-*momentum* p . O quark possui uma fração de *momentum* longitudinal z_1 e *momentum* transverso \vec{k}_1 , enquanto para o anti-quark tem-se $1 - z_1$ e $\vec{p}_t - \vec{k}_1$, respectivamente. A linha vermelha é o módulo do vetor \vec{x}_{01} . Reproduzido de [124].

A obtenção da função de onda no espaço de coordenadas transversas $\psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{x}_0, \vec{x}_1, z_1)$ é realizada a partir de uma transformada de *Fourier* bi-dimensional,

$$\psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{x}_0, \vec{x}_1, z_1) = \int \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} e^{i\vec{x}_{01} \cdot \vec{k}_1} \psi_{\alpha\beta}^{(0)}(k_1, z_1), \quad (\text{C.0.1})$$

sendo, nesta equação, \vec{x}_{01} provém da definição,

$$\vec{x}_{nm} = \vec{x}_n - \vec{x}_m, \quad (\text{C.0.2})$$

sendo, \vec{x}_0 e \vec{x}_1 as posições, no referencial de repouso do núcleon, do quark e do antiquark, respectivamente, configurando os pontos finais do dipolo. Sendo assim, a obtenção do módulo quadrado da função de onda $\phi^{(0)}(\vec{x}_0, \vec{x}_1, z_1)$, *probabilidade de medida de um único dipolo*, é dada por,

$$\phi^{(0)}(\vec{x}_0, \vec{x}_1, z_1) = \sum_{\alpha, \beta} |\psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{x}_0, \vec{x}_1, z_1)|^2. \quad (\text{C.0.3})$$

Agora, considera-se a emissão de um glúon soft ($z_2/z_1 \ll 1$) a partir do quark ou anti-quark original (Fig. C.2), com fração de *momentum* longitudinal z_2 e *momentum* transverso \vec{k}_2 . A probabilidade desta emissão $\phi^{(1)}(\vec{x}_0, \vec{x}_1, z_1)$, pode ser obtida a partir de $\phi^{(0)}$, com a relação,

$$\phi^{(1)}(\vec{x}_0, \vec{x}_1, z_1) = \frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz_2}{z_2} \int d^2 x_2 \frac{x_{01}^2}{x_{20}^2 x_{12}^2} \phi^{(0)}(\vec{x}_0, \vec{x}_1, z_1), \quad (\text{C.0.4})$$

sendo C_F a constante de *Casimir*, dada por,

$$C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}, \quad (\text{C.0.5})$$

e α_s a constante de acoplamento forte. Desta forma, a emissão de um glúon adicional é equivalente a ruptura do dipolo original (0, 1) em dois dipolos (0, 2) e (2, 1) com uma probabilidade de medida dada por,

$$d^2 x_2 \frac{x_{01}^2}{x_{20}^2 x_{12}^2}. \quad (\text{C.0.6})$$

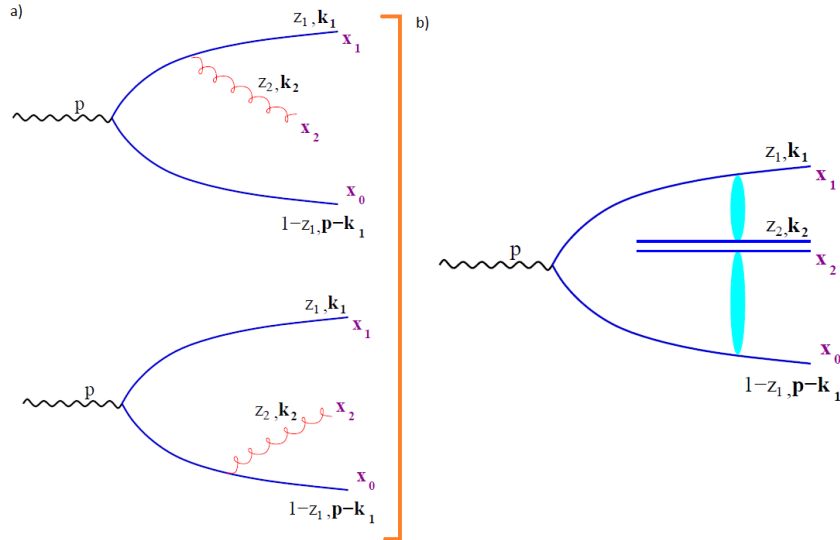


Figura C.2: Emissão de um glúon a partir do quark ou anti-quark (a), que de forma equivalente, representa um estado com dois dipolos no limite de altos valores para o número de cor (b). Reproduzido de [124].

Desta forma, o processo de emissão de glúons soft subsequentes pode ser realizado de forma análoga, possibilitando a obtenção do módulo quadrado de um estado com um número arbitrário de glúons. Para descrever este processo, Mueller [97] introduziu a *função geratriz de dipolo* $Z(\vec{x}_{01}, z_1, u)$. Ela deve satisfazer as condições de normalização, ou seja, $Z(\vec{x}_{01}, z_1, u = 1) = 1$. A utilização desta ferramenta matemática faz com que o módulo quadrado da função de onda com um número n de glúons, $\phi^{(n)}(\{\vec{x}_{n+1}\}, z_1)$, possa ser obtida com o

uso da expressão,

$$\phi^{(n)}(\{\vec{x}_{n+1}\}, z_1) = \phi^{(0)} \prod_{j=2}^{n+1} \frac{\delta}{\delta u(\vec{x}_j)} Z(\vec{x}_0, \vec{x}_1, z_1, u)|_{u=0}. \quad (\text{C.0.7})$$

Esta equação relaciona a probabilidade de encontrar n dipolos filhos do par quark-anti-quark original $(0, 1)$ que serão produzidos nas posições \vec{x}_n . A relação entre as funções de onda de n e $n + 1$ dipolos é dada pela equação diferencial para a função geratriz,

$$\frac{d}{dY} Z(\vec{b}, \vec{x}_{01}, Y, u) = \int d^2 x_2 \frac{x_{01}^2}{x_{20}^2 x_{12}^2} \left[Z(\vec{b} + \frac{\vec{x}_{12}}{2}, \vec{x}_{20}, Y, u) + Z(\vec{b} - \frac{\vec{x}_{20}}{2}, \vec{x}_{12}, Y, u) - Z(\vec{b}, \vec{x}_{01}, z_1, u) \right]. \quad (\text{C.0.8})$$

Nesta equação introduziu-se uma dependência da função geratriz com a rapidez $Y = \ln 1/z_+$ e o parâmetro de impacto \vec{b} (Fig. [C.3]), dado por,

$$\vec{b} = \frac{\vec{x}_0 + \vec{x}_1}{2}. \quad (\text{C.0.9})$$

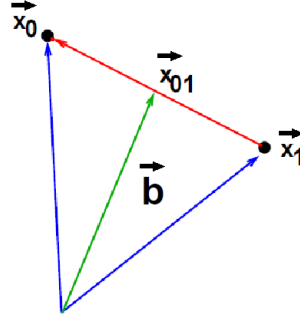


Figura C.3: Representação geométrica do vetor do parâmetro de impacto. Adaptado de [124].

Utilizando a Eq. [C.0.8] é possível obter a equação de evolução para a amplitude de espalhamento do dipolo no alvo. Para isso, inicialmente, define-se a densidade do número de dipolos n_k ,

$$n_k = \prod_{i=1}^k \frac{\delta}{\delta u(\vec{b}, \vec{x}_i)} Z|_{u=1}. \quad (\text{C.0.10})$$

A amplitude de espalhamento de um único dipolo N_1 no alvo é obtida a partir da convolução da densidade do número de dipolos com o propagador desde dipolo com o núcleo,

$$N_1(\vec{x}_{01}, \vec{b}_{01}, Y) = \int d[\mathcal{P}_1] n_1 \vartheta_1, \quad (\text{C.0.11})$$

sendo $d[\mathcal{P}_1] = \frac{d^2 x_1}{2\pi x_i^2} d^2 b$ a medida no espaço de fase e $\vartheta \equiv \vartheta(\vec{x}, \vec{b})$ o propagador de um dipolo simples no núcleo. Diferenciando a equação para a função geratriz e utilizando a relação [C.0.11] é possível obter a equação para a amplitude dipolo-alvo,

$$\frac{d}{dY} N_1(\vec{x}_{01}, \vec{b}, Y) = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int d^2 x_2 \frac{x_{01}^2}{x_{20}^2 x_{12}^2} \left[N_1(\vec{b} + \frac{\vec{x}_{12}}{2}, \vec{x}_{20}, Y) + N_1(\vec{b} - \frac{\vec{x}_{20}}{2}, \vec{x}_{12}, Y) - N_1(\vec{b}, \vec{x}_{01}, Y) \right], \quad (\text{C.0.12})$$

Nesta derivação, fora incluso apenas a contribuição de um único dipolo. Esta equação é a versão no

formalismo de dipolos para a equação BFKL no espaço de coordenadas transversais. É possível generalizar esta equação levando em consideração conta os múltiplos espalhamento dos dipolos com o alvo. Para isso considera-se a densidade de um número k de dipolos e a sua convolução com k propagadores. Neste processo, a amplitude será dada pela expressão,

$$N(\vec{x}_{01}, \vec{b}, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int d[\mathcal{P}_k] n_k \prod_{j=1}^k \vartheta_j, \quad (\text{C.0.13})$$

de forma que a média do espaço de fase é definida agora como,

$$[\mathcal{P}_k] = \prod_{i=1}^k \frac{d^2 x_i}{2\pi x_i^2} d^2 b. \quad (\text{C.0.14})$$

De forma análoga ao desenvolvimento da equação para amplitude de um único dipolo, para vários dipolos obtém-se,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dY} = & \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int \frac{d^2 x_2 x_{01}^2}{x_{20}^2 x_{12}^2} \\ & \times \left[N(\vec{b} + \frac{\vec{x}_{12}}{2}, \vec{x}_{20}, Y) + N(\vec{b} - \frac{\vec{x}_{20}}{2}, \vec{x}_{12}, Y) - N(\vec{b}, \vec{x}_{01}, Y) - N(\vec{b} + \frac{\vec{x}_{12}}{2}, \vec{x}_{20}, Y) N(\vec{b} - \frac{\vec{x}_{20}}{2}, \vec{x}_{12}, Y) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.0.15})$$

Esta é a equação *Balitsky-Kovchegov*. Trata-se de uma expressão não linear, que considera a interação de k dipolos com o núcleo alvo. É uma equação de evolução em relação a rapidez Y , que necessita de condições iniciais $N^{(0)}(\vec{b}, \vec{x}_{01}, Y = 0)$, sendo válida na aproximação do logaritmo dominante. Ela também considera um valor constante para o acoplamento forte. O problema envolve $(4 + 1)$ variáveis, ou seja, quatro graus de liberdade por dipolo e uma variável de evolução, Y .

Apêndice D

Femtoscopia Independente de Modelo de Lévy para Espalhamentos Elásticos

As séries de Lévy são uma generalização dos métodos de expansão de Lévy propostos para analisar distribuições de fontes estáveis de Lévy na femtoscopia de campos de partículas [125–127]. Neste trabalho, os interesses são concentrados na transferência de *momentum* com as distribuições- t em colisões elásticas hádron-hádron. Este modelo fornece um método sistemático e independente de modelo para caracterizar as variações do tamanho aproximado destas distribuições utilizando uma variável adimensional, $z \equiv R^2|t| \geq 0$, e um conjunto completamente ortonormal de polinômios que são ortogonais à função peso $\omega(z) = e^{-z^\alpha}$. A quantidade R denota o parâmetro de escala de Lévy. Neste apêndice segue-se estritamente a análise das seções de choque elásticas de processos pp e $p\bar{p}$ realizada em [125]. Uma vantagem clara do método de Lévy para a imagem do próton é fornecer o perfil de inelasticidade do próton como uma função da energia e do parâmetro de impacto.

Na representação t de *momentum*, a seção de choque diferencial elástica é relacionada com o módulo do valor complexo de uma amplitude elástica T_{el} . A sequência é expressa como a expansão de séries ortonormais em termo dos polinômios de Lévy,

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt} = \frac{1}{4\pi} |T_{el}(s, t)|^2, \quad (D.0.1)$$

com,

$$T_{el}(s, t) = i\sqrt{4\pi A} e^{-\frac{z^\alpha}{2}} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i l_i(z|\alpha) \right), \quad (D.0.2)$$

onde, nesta equação, $c_i = a_i + ib_i$ são os coeficientes da expansão complexa. A variável adimensional z é introduzida como uma medida da magnitude do quadrado de 4-*momentum* transferido $|t|$ multiplicado pelo quadrado do parâmetro de escala de Lévy, R , no sistema de unidades naturais. Os parâmetros para a expansão, A , R , α e os coeficientes complexos c_i estão disponíveis nos Apêndices A e B da referência [117]. As quantidades $l_i(z|\alpha)$ são os polinômios de Lévy normalizados de ordem i e são dados por,

$$l_i(z|\alpha) = \frac{L_i(z|\alpha)}{\sqrt{D_i(\alpha)}\sqrt{D_{i+1}(\alpha)}}, \quad (D.0.3)$$

para $j \geq 0$. Estes polinômios são construídos em termos dos polinômios não normalizados de Lévy, que de forma geral,

$$L_1(z|\alpha) = \det \begin{pmatrix} \mu_0^\alpha & \mu_1^\alpha \\ 1 & z \end{pmatrix}, \quad (\text{D.0.4})$$

$$L_2(z|\alpha) = \det \begin{pmatrix} \mu_0^\alpha & \mu_1^\alpha & \mu_2^\alpha \\ \mu_1^\alpha & \mu_2^\alpha & \mu_3^\alpha \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.0.5})$$

$$L_m(z|\alpha) = \det \begin{pmatrix} \mu_0^\alpha & \dots & \mu_m^\alpha \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & z^m \end{pmatrix}, \quad (\text{D.0.6})$$

sendo $L_0(z|\alpha) = 1$. Na Eq. [D.0.3], $D_j(\alpha)$ são os *Gram*-determinantes, definidos como,

$$D_1(\alpha) = \mu_0^\alpha, \quad (\text{D.0.7})$$

$$D_2(z|\alpha) = \det \begin{pmatrix} \mu_0^\alpha & \mu_1^\alpha \\ \mu_1^\alpha & \mu_2^\alpha \end{pmatrix}, \quad (\text{D.0.8})$$

$$D_m(\alpha) = \det \begin{pmatrix} \mu_0^\alpha & \dots & \mu_{m-1}^\alpha \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \mu_{m-1}^\alpha & \dots & \mu_{2m-2}^\alpha \end{pmatrix}, \quad (\text{D.0.9})$$

com,

$$\mu_n^\alpha = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right), \quad (\text{D.0.10})$$

e $D_0(\alpha) \equiv 1$.

A seção de choque total $\sigma_T \equiv \text{Im } T_{el}(s, 0)$ e a seção de choque elástica é expressa em função das quantidades abaixo,

$$\sigma_T = 2\sqrt{4\pi A} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i l_i(0|\alpha) \right), \quad (\text{D.0.11})$$

$$\sigma_{el} = \frac{A}{R^2} \left[\frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2) \right]. \quad (\text{D.0.12})$$

É demonstrado na referência [125] que a expansão para $T_{el}(s, t)$ converge rapidamente e uma série de *Levy* de terceira ordem já é suficiente para reproduzir os dados medidos com $\sqrt{s} \leq 1$ TeV com níveis de confiança altos para uma descrição estatística apropriada.

Apêndice E

Entropia de Wehrl

A entropia no espaço de fase clássico $f(q, p)$ é dada pela expressão,

$$S = -k_B \int \frac{dp dq}{h'} f(q, p) \ln f(q, p), \quad (\text{E.0.1})$$

sendo h' uma célula elementar neste espaço. No caso quântico não existe a possibilidade da definição de um espaço de fase devido o princípio da incerteza, contudo a entropia será dada pela expressão de *von Neumann* escrita em termos da matriz densidade $\hat{\rho}$, aqui expressa no sistema natural de unidades,

$$S_{vN} = -\text{Tr}[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}]. \quad (\text{E.0.2})$$

As duas entropias não são simplesmente conectadas, *i. e.* S_{vN} não recai na expressão S no limite que $\hbar \rightarrow 0$. Contudo, é possível realizar esta conversão a partir de uma definição intermediária de entropia dada por *Alfred Wehrl* [128]. A expressão clássica da entropia dada pela Eq. [E.0.1] pode assumir valores infinitamente negativos devidamente à arbitrariedade quanto o volume da célula unitária, podendo violar o princípio de incerteza. Para ajustar o modelo é considerada a base dos estados coerentes $|c\rangle$ com pacotes gaussianos de incerteza mínima ($\sigma_p \sigma_q = \hbar/2$). Tomando o traço da Eq. [E.0.2] na base dos estados coerentes, tem-se

$$S_{vN} = - \int \frac{dq dp}{2\pi\hbar} \langle c | \hat{\rho} \ln \hat{\rho} | c \rangle. \quad (\text{E.0.3})$$

A entropia de *Wehrl* S_W é obtida realizando a *substituição clássica* que consiste na troca de $\langle c | \hat{\rho} \ln \hat{\rho} | c \rangle$ por $\langle c | \hat{\rho} | c \rangle \ln \langle c | \hat{\rho} | c \rangle$. Desta forma,

$$S_W = - \int \frac{dq dp}{2\pi\hbar} \langle c | \hat{\rho} | c \rangle \ln \langle c | \hat{\rho} | c \rangle. \quad (\text{E.0.4})$$

Como $-x \ln x$ é uma função côncava (Fig. [E.1]),

$$S_W > S_{vN} \geq 0. \quad (\text{E.0.5})$$

A igualdade $S_W = S_{vN}$ é impossível. Isto significa que S_W é sempre não nula mesmo para um estado puro. Para diversos sistemas físicos sujeitos à substituição clássica, obtém-se um erro negligenciável para funções suaves no espaço de fase com um volume muito maior que \hbar , contudo, se existem flutuações concentradas em regiões

muito pequenas, esta aproximação não é um bom modelo.

Além disso, seria útil a introdução de um espaço de fase a fim de visualizar o que está ocorrendo no sistema quântico de interesse. Contudo, esta idealização contradiz o princípio da incerteza. Agora, por outras vias é possível realizar algumas aproximações: Considerando um sistema quântico unidimensional com um estado puro genérico $|\psi(t)\rangle$, a chamada distribuição de *Wigner* [129] é definida como,

$$\begin{aligned} W(q, p, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \langle \psi(t) | q - x/2 \rangle \langle q + x/2 | \psi(t) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \langle q + x/2 | \hat{\rho}(t) | q - x/2 \rangle, \end{aligned} \quad (\text{E.0.6})$$

com $\hat{\rho}(t)$ sendo a matriz densidade de um estado puro. A distribuição de *Wigner* é uma função tanto da posição q como do *momentum* p , satisfazendo as condições,

$$\begin{cases} \int \frac{dq}{2\pi\hbar} W(q, p, t) = |\langle \psi(t) | p \rangle|^2; \\ \int \frac{dp}{2\pi\hbar} W(q, p, t) = |\langle \psi(t) | q \rangle|^2; \\ \int \frac{dq dp}{2\pi\hbar} W(q, p, t) = 1, \end{cases} \quad (\text{E.0.7})$$

aqui a última propriedade é a normalização. O conjunto de propriedades [E.0.7] torna tentadora a interpretação de W como uma distribuição de probabilidades no espaço de fase (q, p) . No entanto, a distribuição de *Wigner* é fortemente oscilante e não é positiva definida, sendo portanto uma *quasi-distribuição*. Contudo, ainda é possível fazer seu uso na investigação das propriedades do sistema.

Para uma aproximação do espaço de fase no cômputo da entropia de *Wehrl* é possível utilizar a distribuição de *Wigner* [E.0.6] para os casos em que o sistema físico analisado é compatível com uma distribuição positivo-definida. Contudo, o máximo que se pode fazer é descrever o sistema em termos das probabilidades de se encontrar a partícula em uma posição dada pela banda $(q \pm \sigma_q/2, p \pm \sigma_p/2)$ com uma incerteza mínima $\sigma_q \sigma_p = \hbar/2$.

Agora, considera-se a distribuição de *Husimi*, que pode ser obtida a partir da convolução gaussiana da distribuição de *Wigner*

$$H(q, p, t) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dq' dp' e^{-m\omega(q-q')^2/\hbar - (p-p')^2/m\omega\hbar} W(q', p', t). \quad (\text{E.0.8})$$

Esta expressão também é conhecida como *transformação de Weistrass* [130]. Nela, m é a massa da partícula e ω é um parâmetro arbitrário. Os comprimentos dos fatores gaussianos indicam que a distribuição preenche o espaço de configuração com $\sigma_q = \sqrt{\hbar/2m\omega}$ e reciprocamente no espaço de *momentum* com $\sigma_p = \sqrt{\hbar m\omega/2}$. Os diferentes valores assumidos por ω corresponde a escalas de resolução distintas provadas pelo sistema. Para sistemas oscilantes, incluindo campos de radiação, ω é identificado como a frequência.

Agora, uma propriedade importante da distribuição de *Husimi* é a de que ela é positiva-semidefinida,

$$H(q, p, t) \equiv \langle c | \hat{\rho} | c \rangle = |\langle \psi | c \rangle|^2 \geq 0, \quad (\text{E.0.9})$$

Isto é basicamente o traço da matriz densidade na base dos estados coerentes. Ela é construída de tal maneira que observáveis escritos em ordem *anti-normal* seguem o teorema da *equivalência óptica* [131]. Isso significa

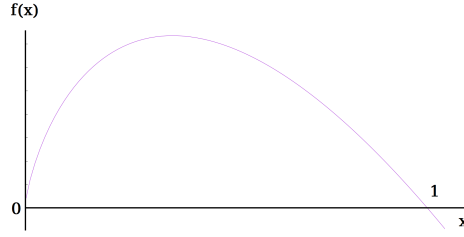


Figura E.1: Gráfico de $f(x) = -x \ln x$.

que é essencialmente a matriz de densidade colocada em *ordem normal*, isto é, põe-se os operadores *criação* a esquerda dos operadores *aniquilação*,

$$: \hat{a} \hat{a}^\dagger := \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (\text{E.0.10})$$

Este procedimento, também é chamado de ordenamento de *Wick* e é essencial na teoria quântica de campos a fim de evitar o aparecimento de infinitos. A ordem anti normal consiste na inversão da lógica construída em [E.0.10]. Considerando a definição [E.0.9], é possível escrever a entropia de *Wehrl* na forma,

$$S_W = - \int \frac{dq dp}{2\pi\hbar} H(q, p) \ln H(q, p). \quad (\text{E.0.11})$$

A partir de [E.0.6], também é possível definir uma definição entrópica alternativa,

$$\bar{S}_W = - \int \frac{dq dp}{2\pi\hbar} W(q, p) \ln W(q, p). \quad (\text{E.0.12})$$

Agora, para fins elucidativos, considera-se um exemplo que é possível ser resolvido analiticamente, o oscilador harmônico unidimensional. Este sistema tem a hamiltoniana clássica,

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \quad (\text{E.0.13})$$

Para o n -ésimo estado excitado, a distribuição de *Husimi* é dada por,

$$H(q, p) = \frac{1}{n!} e^{-\mathcal{H}/\hbar\omega} \left(\frac{\mathcal{H}}{\hbar\omega} \right)^n. \quad (\text{E.0.14})$$

Substituindo esta expressão em [E.0.11] é possível mostrar que,

$$S_W = n + 1 + \ln n! - n\xi(n+1), \quad (\text{E.0.15})$$

onde ξ é a função digamma. Assintoticamente $S_W \approx \ln \sqrt{n}$. Por outro lado, com exceção do estado fundamental, a expressão para entropia conjugada [E.0.12], neste caso, oscila e se torna negativa, não tendo sentido neste problema específico; contudo, é sempre possível analisar as duas noções entrópicas e relacioná-las a partir da convolução gaussiana. A Fig. [E.2] mostra a distribuição de *Husimi* e *Wigner* para o caso do oscilador harmônico no quarto estado excitado explorando bem o uso de cada uma destas distribuições.

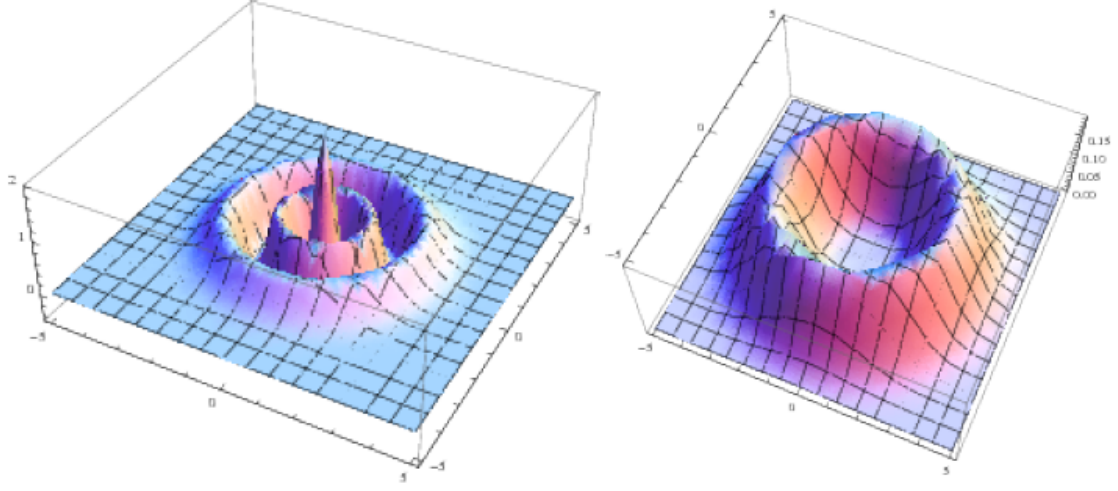


Figura E.2: As distribuições de *Wigner* (à esquerda) e de *Husimi* (à direita) para o caso do quarto estado excitado do oscilador harmônico no plano (q, p) . É possível notar que a distribuição de *Husimi* suavizou as oscilações abruptas que ocorrem na distribuição de *Wigner* além de ser sempre positiva ou nula. Esta figura foi retirada da referência [132].

E.1 A ENTROPIA DE *Wehrl* NA QCD

No regime de altas energias, os pártons são caracterizados pela fração de *momentum* longitudinal x , pelo *momentum* transversa \vec{k}_T e a posição transversa ou parâmetro de impacto \vec{b} . Dessa forma, a caracterização do sistema pode ser obtida a partir da distribuição de *momentum* transversa TMD (do inglês *transverse momentum distribution*), $T(x, \vec{k}_T)$, e da transformada de *Fourier* da distribuição partônica generalizada GPD (do inglês, *generalized parton distribution*), $G(x, \vec{b})$.

Agora, no cálculo da entropia, tanto as informações contidas em \vec{k}_T quanto em \vec{b} é necessária. Outro exemplo seria a decomposição do spin do núcleon obtida a partir do *momentum* angular orbital $\vec{b} \times \vec{k}_T$. Um dos métodos para se obter as informações de ambas as variáveis, sendo estas conjugadas, é a distribuição de *Wigner* já discutida nas seções anteriores; entretanto, agora ela é uma função $W = W(x, \vec{b}, \vec{k}_T)$.

No caso quântico a distribuição de *Wigner* é dada por [E.0.6],

$$W(\vec{q}, \vec{p}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \langle \vec{q} + \vec{x}/2 | \hat{\rho}(t) | \vec{q} - \vec{x}/2 \rangle. \quad (\text{E.1.1})$$

Serão agora discutidas ponto a ponto as modificações que devem ser realizadas em [E.1.1] para uma construção consistente com a QCD.

Em primeiro lugar, a troca de variáveis,

$$t \rightarrow x, \quad (\text{E.1.2})$$

$$\vec{q} \rightarrow \vec{b}, \quad (\text{E.1.3})$$

$$\vec{p} \rightarrow \vec{k}_T. \quad (\text{E.1.4})$$

Sendo então o princípio da incerteza assegurado por,

$$\sigma_b \sigma_k \geq \frac{1}{2}. \quad (\text{E.1.5})$$

A Eq. [E.1.1] é escrita na representação da posição. Nas TQC's é usual a descrição dos operadores na representação de *momentum* para que sejam aplicadas as regras de *Feynman*, para isso, basta uma transformação de *Fourier* bidimensional trivial. Além disso, a flutuação que respeita o princípio da incerteza na distribuição de *Wigner* na teoria quântica, tem seus vetores etiquetados a partir de $\pm \vec{x}/2$, simbolizando vetores de estados com uma incerteza mínima estipulada pelo princípio de *Heisenberg*. No âmbito da QCD se utiliza $\pm \Delta/2$, com $\Delta^\mu = (0, 0, \vec{\Delta}_T)$, assim,

$$\int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \rightarrow \int \frac{d^2\Delta_T}{(2\pi)^2} e^{-i\vec{\Delta}_T\cdot\vec{b}}, \quad (\text{E.1.6})$$

lembrando que \vec{b} é o bi-vetor parâmetro de impacto. Agora o estado puro é representado por um hádron de 4-momentum P^μ respeitado a limitação de incerteza mínima,

$$|\vec{q} - \vec{x}/2\rangle \rightarrow |P - \Delta/2\rangle, \quad (\text{E.1.7})$$

$$\langle \vec{q} + \vec{x}/2 | \rightarrow \langle P + \Delta/2 |. \quad (\text{E.1.8})$$

Por fim, resta a assimilação da matriz densidade. Ela é dada por,

$$\hat{\rho}(t) \rightarrow \int \frac{dz^- d^2z_T}{(2\pi)^3} e^{xP^+ z^- - \vec{k}_T \cdot \vec{z}_T} \text{Tr} [F^{+\alpha}(z/2) U^{[+]} F_\alpha^+(-z/2) U^{[-]}], \quad (\text{E.1.9})$$

A transformação de *Fourier* ocorre pelos mesmos motivos da substituição da integral em \vec{x} , contudo agora ela é realizada nas variáveis do cone de luz. $F^{+\alpha}$ é o tensor do campo de cor e $U^{[\pm]}$ são as linhas de *Wilson* de forma U que mantém os operadores invariantes de calibre (para uma discussão, veja a referência [133]). As linhas de *Wilson* aqui tratadas são representadas na Fig. [E.3].



Figura E.3: Linhas de *Wilson* nas variáveis do cone de luz. Em (a) tem-se $U^{[+]}$ e em (b) $U^{[-]}$.

Assim, a distribuição de *Wigner* na QCD pode ser escrita na forma,

$$W(x, \vec{b}, \vec{k}_T) = \int \frac{dz^- d^2z_T}{(2\pi)^3} \frac{d^2\Delta_T}{(2\pi)^2} e^{-i(xP^+ z^- + \vec{k}_T \cdot \vec{z}_T + \vec{\Delta}_T \cdot \vec{b})} \times \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| \text{Tr} \left[F^{+\alpha} \left(\frac{z}{2} \right) U^{[+]} F_\alpha^+ \left(-\frac{z}{2} \right) U^{[-]} \right] \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle. \quad (\text{E.1.10})$$

Ainda é possível escrever a equação de uma forma que melhor se adéque a entropia por unidade rapidez, sendo

$xW(x, \vec{b}, \vec{k}_T)$ dada por,

$$xW = \int \frac{dz^- d^2 z_T}{P^+ (2\pi)^3} \frac{d^2 \Delta_T}{(2\pi)^2} e^{-i(xP^+ z^- + \vec{k}_T \cdot \vec{z}_T)} \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| \text{Tr} \left[F^{+\alpha} \left(\vec{b} + \frac{z}{2} \right) U^{[+]} F_{\alpha}^+ \left(\vec{b} - \frac{z}{2} \right) U^{[-]} \right] \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle. \quad (\text{E.1.11})$$

A expressão [E.1.10] descreve uma distribuição no espaço de fase transversa caracterizada pelo parâmetro de impacto \vec{b} e *momentum* transversa \vec{k}_T dos glúons que portam uma parcela x do *momentum* longitudinal. Se é realizada a integração em relação a \vec{b} obtém-se a TMD $T(x, \vec{k}_T)$; integrando em relação a \vec{k}_T obtém-se a GPD $G(x, \vec{b})$. Dela também é possível obter a distribuição relacionada ao *momentum* angular orbital canônico do núcleon polarizado longitudinalmente,

$$L_W = \int dx d^2 b d^2 k (\vec{b} \times \vec{k}_T) W(x, \vec{b}, \vec{k}_T). \quad (\text{E.1.12})$$

A distribuição de *Husimi* na QCD é dada por,

$$xH(x, \vec{b}, \vec{k}_T) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 b' d^2 k' e^{-(\vec{b}-\vec{b}')^2 / \ell^2 - \ell^2 (\vec{k}_T - \vec{k}_T')^2} xW(x, \vec{b}', \vec{k}_T'), \quad (\text{E.1.13})$$

sendo ℓ um parâmetro arbitrário com dimensões de comprimento*. A Eq. [E.1.13] aparenta ser uma extensão precisa da distribuição de *Husimi* na linguagem das TQC's, contudo a sua positividade não é garantida *a priori*, devido ao recuo de *momentum* $\Delta_T \neq 0$, fazendo com que sempre exista uma diferença entre os estados iniciais e finais. A referência [132] discute alguns pontos do uso da expressão [E.1.13]. Além disso vale esclarecer a positividade da distribuição de *Husimi* como uma hipótese de trabalho. Então é possível escrever a entropia de *Wehrl* na QCD,

$$S_W(x) \equiv - \int d^2 b d^2 k xH(x, \vec{b}, \vec{k}_T) \ln[xH(x, \vec{b}, \vec{k}_T)], \quad (\text{E.1.14})$$

e também mantém-se a definição de $\bar{S}_W(x)$, utilizando a distribuição de *Wigner*,

$$\bar{S}_W(x) \equiv - \int d^2 b d^2 k xW(x, \vec{b}, \vec{k}_T) \ln[xW(x, \vec{b}, \vec{k}_T)], \quad (\text{E.1.15})$$

Um exemplo trivial é um quark ou um elétron livre que se move na direção positiva de z . A distribuição de *Husimi* e *Wigner* com $x = 1$ é,

$$xH(\vec{b}, \vec{k}_T) = \frac{e^{-b^2 / \ell^2 - \ell^2 k^2}}{\pi^2}, \quad (\text{E.1.16})$$

$$xW(\vec{b}, \vec{k}_T) = \delta^{(2)}(\vec{b}) \delta^{(2)}(\vec{k}_T). \quad (\text{E.1.17})$$

Mesmo que a distribuição de *Wigner* seja positiva definida, o seu logaritmo não faz sentido, então a entropia de *Wehrl* é obtida a partir da Eq. [E.1.14],

$$S_W = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 b d^2 k e^{-b^2 / \ell^2 - \ell^2 k^2} \left(\frac{b^2}{\ell^2} + \ell^2 k^2 \right) = 2. \quad (\text{E.1.18})$$

O fato desta entropia não desaparecer reflete a incapacidade de definir precisamente a posição e o *momentum* simultaneamente devido o princípio da incerteza.

*Em alguns casos utiliza-se ℓ como R_h , sendo este o raio hadrônico. Outra escolha é $\ell^2 = 1 / \langle \vec{k}_T^2 \rangle$. A referência [132] estabelece uma possível conexão com a física de altas energias onde $\ell = 1/Q_s$.

E.2 A ENTROPIA DE *Wehrl* PARA OS PÁRTONS

Existem duas abordagens para o tratamento da entropia de *Wehrl* gerada pelas distribuições de *Wigner* dos glúons na região de pequeno- x , o formalismo de dipolos com a distribuição xW_{dip} [134] e os glúons de *Weiszacker-Williams* (WW) [135] com a distribuição xW_{WW} ,

$$xW_{dip}(x, \vec{b}, \vec{k}_T) = \frac{2N_c}{\alpha_s(2\pi)^2} \int \frac{d^2 r_T}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}_T \cdot \vec{r}_T} \left(\frac{\partial}{\partial b^2} b^2 \frac{\partial}{\partial b^2} + k^2 \right) \hat{S}(x, \vec{b}, \vec{r}_T). \quad (\text{E.2.1})$$

$$xW_{WW}(x, \vec{b}, \vec{k}_T) = \frac{C_F}{2\pi^4 \alpha_s} \int d^2 r \frac{e^{i\vec{r}_T \cdot \vec{k}_T}}{r_T^2} [1 - \tilde{S}(x, r_T, b)] \quad (\text{E.2.2})$$

Nestas equações, \hat{S} e \tilde{S} são as matrizes S para um dipolo de tamanho r_T com um parâmetro de impacto b em um espalhamento com um hádron e a formulação adjunta deste operador respectivamente. Avaliando estes objetos no modelo GBW,

$$\hat{S} = e^{-\frac{1}{4} r_T^2 Q_s^2(x, b)}, \quad \tilde{S} = e^{-\frac{1}{4} r_T^2 \tilde{Q}_s^2(x, b)}, \quad (\text{E.2.3})$$

sendo,

$$\tilde{Q}_s(x, b) = \frac{N_c}{C_F} Q_s^2(x, b) = \frac{N_c}{C_F} \left(\frac{x_0}{x} \right)^\lambda e^{-b^2/2\gamma_s B_{CGC}}. \quad (\text{E.2.4})$$

Nesta expressão, a escala de saturação depende do parâmetro de impacto é a dada pelo modelo b-CGC, sendo γ_s a dimensão anômala e B_{CGC} um parâmetro. As constantes foram fitadas com os dados obtidos via DIS para pequenos valores de x [136]

$$\begin{cases} x_0 = 0.00105; \\ \lambda = 0.2063; \\ \gamma_s = 0.6599; \\ B_{CGC} = 5.5 \text{ GeV}^{-2}. \end{cases} \quad (\text{E.2.5})$$

A avaliação do caso da distribuição de *Wigner* para os dipolos não será positiva definida, necessitando o cálculo da distribuição de *Husimi*, seu desenvolvimento foi realizado no trabalho [14]. Nesta tese, será desenvolvido o caso da entropia de *Wehrl* para os glúons WW. Desta forma, é possível escrever a expressão [E.2.2] na forma,

$$xW = \beta \int d^2 r e^{i\vec{r}_T \cdot \vec{k}_T} f(x, r_T, b) = \beta \mathcal{F}^{-1}\{f(x, r_T, b)\}, \quad (\text{E.2.6})$$

com a definição $\beta \equiv C_F/(2\alpha_s\pi^4)$ e sendo a operação \mathcal{F}^{-1} o computo da transformação de *Fourier* bidimensional inversa para a função $f(x, r_T, b)$ dada por,

$$f(x, r_T, b) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{4} r_T^2 \tilde{Q}_s^2(x, b)}}{r_T^2}, \quad (\text{E.2.7})$$

de forma que,

$$\mathcal{F}^{-1}\{f(x, r_T, b)\} = \pi \Gamma\left(0, \frac{k_T^2}{\tilde{Q}_s^2(x, b)}\right), \quad (\text{E.2.8})$$

sendo $\Gamma(0, x)$ a função gamma incompleta, positiva definida. Então, a distribuição de *Wigner* é dada por,

$$xW_{WW}(x, k, b) = \frac{C_F}{2\pi^3\alpha_s} \Gamma\left(0, \frac{k_T^2}{\tilde{Q}_s^2(x, b)}\right). \quad (\text{E.2.9})$$

Substituindo a Eq. [E.2.9] na definição da entropia de *Wehrl* [E.0.4] e desconsiderando a constante $\pi\beta$ no fator que envolve o logaritmo obtêm-se,

$$S_W = -\frac{C_F}{2\pi\alpha_s} \int_0^\infty db^2 F(\tau) \tilde{Q}_s^2(x, b), \quad (\text{E.2.10})$$

sendo,

$$F(\tau) = \int_0^\tau \Gamma(0, \tilde{\tau}) \ln \Gamma(0, \tilde{\tau}). \quad (\text{E.2.11})$$

O integrando da expressão F foi alterado por uma troca de variável na forma de $\tilde{\tau} = k^2/\tilde{Q}_s^2$ e para introduzir uma dependência com a escala de resolução, fora inserido Q^2 ao invés de ∞ na integração. Na expressão [E.2.11], $\tau = Q^2/\tilde{Q}_s^2(x, b)$. No limite em que Q^2 (e consequentemente τ) tende a infinito, F é apenas um número,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} F(\tau) = -0.248. \quad (\text{E.2.12})$$

Para simplificar os cálculos, não é realizada a integração numérica no parâmetro de impacto, aproveitando o fato de que a escala de saturação possui um máximo em $b = 0$, com $\tilde{Q}_{s,max}^2(x) = \tilde{Q}_s^2(x, b = 0) = (N_c/C_F)Q_s^2(x)$. De qualquer forma, na região de pequeno- x a escala de saturação típica é da ordem de 1 GeV. Desta forma, utilizando $\tau = Q^2/\langle \tilde{Q}_s^2 \rangle$ com $\langle \tilde{Q}_s^2 \rangle = 1 \text{ GeV}^2$, obtêm-se $F \approx -0.095377$ para $Q^2 = 2 \text{ GeV}^2$ e $F \approx -0.247802$ para $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$. Para qualquer Q^2 , após a integração sobre o parâmetro de impacto,

$$S_W(x) \approx -\frac{2F\gamma_s B_{CGC} N_c}{2\pi\alpha_s} Q_s^2(x), \quad (\text{E.2.13})$$

ou seja, $S_W \sim Q_s^2$.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Clausius, Annalen der Physik und Chemie **124**, 353 (1865).
- [2] e. Rocha, José Fernando, *Origens e evolução das idéias da física*, SciELO-EDUFBA, 2002.
- [3] S. Carnot, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure **1** (1872).
- [4] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, John Wiley & Sons, New York, 1960.
- [5] B. Greene, *Até ao Fim dos Tempos*, Leya, 2021.
- [6] E. Hubble, Proceedings of the national academy of sciences **15**, 168 (1929).
- [7] K. Adcox et al., Nuclear Physics A **757**, 184 (2005).
- [8] C. Young and E. Shuryak, Physical Review C **81**, 034905 (2010).
- [9] J. Rafelski, *Melting Hadrons, Boiling Quarks: From Hagedorn Temperature to Ultra-Relativistic Heavy-Ion Collisions at CERN: With a Tribute to Rolf Hagedorn*, Springer Nature, 2016.
- [10] A. Majumder and B. Müller, Physical Review Letters **105**, 252002 (2010).
- [11] K. Tuchin, Advances in High Energy Physics (2013).
- [12] C. Kouveliotou, R. C. Duncan, and C. Thompson, Scientific American **288**, 34 (2003).
- [13] B. Müller, Physica Scripta **2013**, 014004 (2013).
- [14] G. S. Ramos, *Investigando a entropia de emaranhamento das distribuições partônicas*, PhD thesis, UFRGS, 2020.
- [15] R. J. Fries, B. Müller, and A. Schäfer, Physical Review C **79**, 034904 (2009).
- [16] B. Müller and K. Rajagopal, The European Physical Journal C-Particles and Fields **43**, 15 (2005).
- [17] P. Hanus, K. Reygers, and A. Mazeliauskas, Physical Review C **100**, 064903 (2019).
- [18] G. Giacalone, A. Mazeliauskas, and S. Schlichting, Physical review letters **123**, 262301 (2019).
- [19] N. Demir and S. A. Bass, Physical Review Letters **102**, 172302 (2009).
- [20] Y. Sun, S. Plumari, and V. Greco, The European Physical Journal C **80**, 1 (2020).

- [21] R. Peschanski, *Physical Review D* **87**, 034042 (2013).
- [22] D. E. Kharzeev and E. M. Levin, *Physical Review D* **95**, 114008 (2017).
- [23] R. Peschanski and S. Seki, *Physics Letters B* **758**, 89 (2016).
- [24] R. Peschanski and S. Seki, *Physical Review D* **100**, 076012 (2019).
- [25] A. Kovner and M. Lublinsky, *Physical Review D* **92**, 034016 (2015).
- [26] Y. Hagiwara et al., *Physical Review D* **97**, 094029 (2018).
- [27] B. Müller and A. Schäfer, arXiv preprint hep-ph/0306309 (2003).
- [28] A. Einstein, *Annalen der Physik* **327**, 180 (1907).
- [29] F. L. team, Fermat's library, Accessed: 2024-11-09.
- [30] J. C. Baez, arXiv preprint arXiv:2409.09232 (2024).
- [31] C. E. Shannon, *The Bell system technical journal* **27**, 379 (1948).
- [32] M. Tribus and E. C. McIrvine, *Scientific American* **225**, 179 (1971).
- [33] C. Tsallis, *Introduction to nonextensive statistical mechanics: approaching a complex world*, Springer, 2009.
- [34] V. Junior et al., *Entropia da Informação para Sistemas de Dois Corpos*, PhD thesis, Universidade Federal do Amazonas, 2013.
- [35] A. Rényi, On measures of entropy and information, in *Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, volume 1: contributions to the theory of statistics*, volume 4, pages 547–562, University of California Press, 1961.
- [36] E. T. Jaynes, *Physical Review* **106**, 620 (1957).
- [37] J. W. Gibbs, *Elementary principles in statistical mechanics: developed with especial reference to the rational foundations of thermodynamics*, C. Scribner's sons, 1902.
- [38] W. Gerlach and O. Stern, Walther Gerlach (1889–1979) Eine Auswahl aus seinen Schriften und Briefen , 26 (1989).
- [39] J. Von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics: New edition*, volume 53, Princeton university press, 2018.
- [40] P. Calabrese and J. Cardy, *Journal of physics a: mathematical and theoretical* **42**, 504005 (2009).
- [41] C. Jarzynski, *Physical Review Letters* **78**, 2690 (1997).
- [42] R. C. Lua and A. Y. Grosberg, *The Journal of Physical Chemistry B* **109**, 6805 (2005).
- [43] G. E. Crooks and C. Jarzynski, arXiv preprint cond-mat/0603116 (2006).

- [44] T. Hatano and S. Sasa, *Physical Review Letters* **86**, 3463 (2001).
- [45] E. Rutherford, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **21**, 669 (1911).
- [46] I. Abt et al., *Journal of high energy physics* **2021**, 1 (2021).
- [47] R. P. Feynman, *Physical Review Letters* **23**, 1415 (1969).
- [48] C. O. Escobar, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **40** (2018).
- [49] J. D. Bjorken, *Physical Review* **179**, 1547 (1969).
- [50] M. Gell-Mann, *Phys. Letters* **8** (1964).
- [51] Modelo padrão, Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Modelo_Padrão. Acesso em junho de 2022.
- [52] M. D. Schwartz, *Quantum field theory and the standard model*, Cambridge University Press, 2014.
- [53] F. D. Aaron et al., *Journal of High Energy Physics* **2010**, 1 (2010).
- [54] Quarks, Disponível em <https://www.infoescola.com/fisica/quarks/>. Acesso em janeiro de 2021.
- [55] E. Iancu, *Qcd in heavy ion collisions*, 2012, arXiv preprint arXiv:1205.0579.
- [56] G. Altarelli and G. Parisi, *Nuclear Physics B* **126**, 298 (1977).
- [57] Y. L. Dokshitzer, *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **73**, 1216 (1977).
- [58] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, *DEEP INELASTIC ep-SCATTERING IN A PERTURBATION THEORY*, Inst. of Nuclear Physics, Leningrad, 1972.
- [59] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and V. S. Fadin, *Sov. Phys.-JETP (Engl. Transl.);(United States)* **45** (1977).
- [60] D. F. Ashery, *Sov. J. Nucl. Phys.* **28**, 822 (1978).
- [61] K. Golec-Biernat and M. Wüsthoff, *Physical Review D* **59**, 014017 (1998).
- [62] K. Golec-Biernat and S. Sapeta, *Journal of High Energy Physics* **2018**, 1 (2018).
- [63] N. Armesto, C. A. Salgado, and U. A. Wiedemann, *Physical review letters* **94**, 022002 (2005).
- [64] F. Gelis et al., *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **60**, 463 (2010).
- [65] L. McLerran, arXiv preprint arXiv:0812.4989 (2008).
- [66] I. Balitsky, *Nuclear Physics B* **463**, 99 (1996).
- [67] Y. V. Kovchegov, *Physical Review D* **60**, 034008 (1999).
- [68] L. McLerran and R. Venugopalan, *Physical Review D* **49**, 2233 (1994).
- [69] T. Epelbaum, *Approach to equilibrium in high energy heavy ion collisions; Approche de l'équilibre dans les collisions hadroniques a haute energie*, PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2014.

- [70] J. Jia and the ATLAS Collaboration, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **38**, 124012 (2011).
- [71] A. Bazavov et al., *Physical Review D* **90**, 094503 (2014).
- [72] R. Hagedorn, *Nuovo Cimento, Suppl.* 3.CERN-TH-520 , 147 (1965).
- [73] L. D. Landau, *Izv. Akad. Nauk Ser. Fiz* **17**, L021902 (1953).
- [74] C. Eckart, *Physical Review* **58**, 919 (1940).
- [75] T. Hirano, N. van der Kolk, and A. Bilandzic, Hydrodynamics and flow, in *The Physics of the Quark-Gluon Plasma*, pages 139–178, Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [76] J. D. Bjorken, *Physical Review D* **27**, 140 (1983).
- [77] T. Hirano, N. van der Kolk, and A. Bilandzic, Hydrodynamics and flow, in *The Physics of the Quark-Gluon Plasma*, pages 139–178, Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [78] N. D. Mermin and N. W. Ashcroft, *International Journal of Modern Physics B* **20**, 2227 (2006).
- [79] R. J. Glauber, Quantum optics and heavy ion physics, 2006, arXiv preprint nucl-th/0604021.
- [80] C. J. Joachain and C. Quigg, *Reviews of Modern Physics* **46**, 279 (1974).
- [81] S. Sarkar, H. Satz, and B. Sinha, editors, *The physics of the quark-gluon plasma: introductory lectures*, volume 785, Springer, 2009.
- [82] U. Heinz, Early collective expansion: Relativistic hydrodynamics and the transport properties of qcd matter, in *Relativistic Heavy Ion Physics*, pages 240–292, Springer, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [83] A. M. Poskanzer and S. A. Voloshin, *Physical Review C* **58**, 1671 (1998).
- [84] R. Nouicer, *The European Physical Journal Plus* **131**, 1 (2016).
- [85] S. Manly and P. Collaboration, *Nuclear Physics A* **774**, 523 (2006).
- [86] J. Åystö et al., *Physical Review Letters* **105**, 252302 (2010).
- [87] U. Heinz and R. Snellings, *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **63**, 123 (2013).
- [88] P. K. Kovtun, D. T. Son, and A. O. Starinets, *Physical Review Letters* **94**, 111601 (2005).
- [89] M. Luzum and P. Romatschke, *Physical Review C—Nuclear Physics* **78**, 034915 (2008).
- [90] K. Kutak, *Physics Letters B* **705**, 217 (2011).
- [91] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Physical Review* **47**, 777 (1935).
- [92] E. Schrödinger, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **31** (1935).
- [93] J. S. Bell, *Physics Physique Fizika* **1**, 195 (1964).
- [94] A. K. Ekert, Quantum cryptography and bell’s theorem, in *Quantum Measurements in Optics*, pages 413–418, Springer, Boston, MA, 1992.

- [95] C. H. Bennett et al., *Physical Review Letters* **70**, 1895 (1993).
- [96] M. Hentschinski, K. Kutak, and R. Straka, *The European Physical Journal C* **82**, 1 (2022).
- [97] A. H. Mueller, *Nuclear Physics B* **437**, 107 (1995).
- [98] D. E. Kharzeev and E. Levin, *Physical Review D* **104**, L031503 (2021).
- [99] E. Gotsman and E. Levin, *Physical Review D* **102**, 074008 (2020).
- [100] Y. Liu, M. A. Nowak, and I. Zahed, *arXiv preprint* (2022).
- [101] D. Zwillinger and A. Jeffrey, *Table of integrals, series, and products*, Elsevier, 2007.
- [102] H. Duan et al., *Physical Review D* **101**, 036017 (2020).
- [103] H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The theory of open quantum systems*, Oxford University Press on Demand, 2002.
- [104] E. Joos et al., *Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [105] L. Angioni, *Aristóteles, Física I-II*, IFCH/UNICAMP, 2009.
- [106] W. M. Itano et al., *Physical Review A* **41**, 2295 (1990).
- [107] G. S. Ramos and M. V. T. Machado, *Physical Review D* **101**, 074040 (2020).
- [108] G. S. Ramos and M. V. Machado, *Astronomische Nachrichten* **345**, e230173 (2024).
- [109] G. S. Ramos and M. V. T. Machado, *Physical Review D* **102**, 034019 (2020).
- [110] G. S. Ramos and M. V. T. Machado, *Physical Review D* **105**, 094009 (2022).
- [111] K. Golec-Biernat and M. Wüsthoff, *Physical Review D* **60**, 114023 (1999).
- [112] Z. Tu, D. E. Kharzeev, and T. Ullrich, *Physical Review Letters* **124**, 062001 (2020).
- [113] V. Khachatryan et al., *Physical Review Letters* **105**, 022002 (2010).
- [114] Z. Tu, Private communication.
- [115] V. Andreev et al., *Eur. Phys. J.* **81**, 212 (2021).
- [116] N. Armesto, C. A. Salgado, and U. A. Wiedemann, *Physical Review Letters* **94**, 022002 (2005).
- [117] T. Csörgő, R. Pasechnik, and A. Ster, *The European Physical Journal C* **79**, 1 (2019).
- [118] K. Kutak, *Physics Letters B* **705**, 217 (2011).
- [119] L. S. Moriggi, G. M. Peccini, and M. V. T. Machado, *Physical Review D* **102**, 034016 (2020).
- [120] M. Siddiqah and R. Abir, *Physical Review D* **95**, 074035 (2017).
- [121] K. Golec-Biernat and S. Sapeta, *Journal of High Energy Physics* **2018**, 1 (2018).

- [122] N. Armesto, The European Physical Journal C-Particles and Fields **26**, 35 (2002).
- [123] S. J. Brodsky, H.-C. Pauli, and S. S. Pinsky, Physics Reports **301**, 299 (1998).
- [124] A. M. Stasto, arXiv preprint hep-ph/0412084 (2004).
- [125] T. Csörgő, R. Pasechnik, and A. Ster, Convergence properties of lévy expansions: implications for odderon and proton structure, in *EPJ Web of Conferences*, volume 206, EDP Sciences, 2019.
- [126] T. Csörgő, R. Pasechnik, and A. Ster, The European Physical Journal C **80**, 1 (2020).
- [127] T. Csörgő et al., Scaling of high-energy elastic scattering and the observation of odderon, in *GRIBOV-90 MEMORIAL VOLUME: FIELD THEORY, SYMMETRY, AND RELATED TOPICS Proceedings of the Memorial Workshop Devoted to the 90th Birthday of VN Gribov*, 2021.
- [128] A. Wehrl, Reports on Mathematical Physics **16**, 353 (1979).
- [129] E. Wigner, Physical review **40**, 749 (1932).
- [130] A. I. Zayed, *Handbook of function and generalized function transformations*, CRC Press, 2019.
- [131] K. E. Cahill and R. J. Glauber, Physical Review **177**, 1857 (1969).
- [132] Y. Hatta and Y. Hagiwara, Husimi distribution for nucleon tomography, in *EPJ Web of Conferences*, volume 112, EDP Sciences, 2016.
- [133] C. J. Bomhof, P. J. Mulders, and F. Pijlman, The European Physical Journal C-Particles and Fields **47**, 147 (2006).
- [134] Y. Hatta, B.-W. Xiao, and F. Yuan, Physical Review Letters **116**, 202301 (2016).
- [135] Y. V. Kovchegov and A. H. Mueller, Nuclear Physics B **529**, 451 (1998).
- [136] A. H. Rezaeian and I. Schmidt, Physical Review D **88**, 074016 (2013).