

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

EXPLORANDO AS EQUAÇÕES DE WEYL

Luís Willms de Oliveira

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro

Rio Claro (SP)

2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

Luís Willms de Oliveira

## **Explorando as equações de Weyl**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Rio Claro (SP)

2021

Luís Willms de Oliveira

## EXPLORANDO AS EQUAÇÕES DE WEYL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Comissão Examinadora

\_\_\_\_\_ (orientador)

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Rio Claro, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Assinatura do(a) aluno(a)

assinatura do(a) orientador(a)

*Dedico esta monografia ao meu pai, Claudio de Oliveira, parceiro em curiosidade  
que sempre alimentou meu fascínio pela ciência.*

# Agradecimentos

Tive excelentes professores na graduação, que transpareceram um interesse contagiante pela física e que contribuíram, para além de seus conhecimentos nas disciplinas, com suas visões sobre a física. Tenho certeza de que cada um deixou uma marca na minha formação. Agradeço ao Prof<sup>o</sup> Luiz Antonio Barreiro por me orientar nesse TCC, por me apresentar esse interessante tema e também pelas conversas inspiradoras sobre física.

Os colegas e amigos que fiz durante a graduação me ajudaram imensamente, desde a colaboração com exercícios de física, avisando e lembrando-me de datas e prazos, até mesmo com questões e problemas não acadêmicos. Agradeço-lhes por esses anos juntos. Sem eles, minha graduação teria sido muito mais difícil e incompleta. Também quero e devo agradecer aqui à minha amiga Dulceni Maria Paglione de Oliveira, por corrigir e normatizar com rigor as referências deste trabalho.

Por fim, deixo aqui o meu mais sincero agradecimento aos meus pais, que sempre me apoiaram incondicionalmente. À minha mãe, Eldi Inês Willms, que revisou e corrigiu gramaticalmente esse trabalho, e ao meu pai, Claudio de Oliveira, que ajudou na confecção gráfica de algumas figuras. Sou infinitamente grato por todo esforço e recursos que eles investiram em mim.

*“The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulations of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve.”*

*Eugene F. Wigner*

# Resumo

Inicialmente, neste trabalho, introduz-se a equação de onda relativística para partículas massivas de spin  $1/2$  de Dirac. Em seguida, as equações de Weyl são obtidas a partir da equação de Dirac. Foram discutidos alguns dos principais conceitos básicos e propriedades dos férmions sem massa de duas componentes, conhecidos como férmions de Weyl. Com base nisso, as equações de Weyl e a física que delas emerge foram exploradas em duas áreas distintas: a teoria das interações fracas e a física da matéria condensada. Os férmions de Weyl, nessa última, têm chamado muita atenção recentemente, gerando uma literatura nova, extensa e crescente. No final, os conceitos centrais que levaram à previsão teórica e à recente descoberta experimental de um semimetal de Weyl são brevemente apresentados. Além disso, sempre que possível e conveniente, houve alguma contextualização histórica sobre o que está sendo discutido, pois a equação de Dirac e a busca por férmions de Weyl têm uma longa e interessante história na física.

**Palavras-chave:** Equação de Dirac. Equações de Weyl. Semimetais de Weyl.

# Abstract

Initially, in this work, Dirac's relativistic wave equation for spin  $1/2$  massive particles is introduced. Then, the Weyl equations are obtained from the Dirac equation. Some of the basic main concepts and properties of the two-component massless fermions, known as Weyl fermions, are discussed. Based on that, the Weyl equations and the physics that emerges from it are explored in two different areas: the theory of weak interactions and condensed matter physics. Weyl fermions in the latter have drawn a lot of attention recently, creating new, extensive and an increasing literature. Towards the end, the central concepts that led to the theoretical prediction and recent experimental discovery of a Weyl semimetal are briefly presented. Also, whenever possible and convenient, there is some historical contextualization about what is being discussed, because the Dirac equation and the search for Weyl fermions have a long and interesting history in physics.

**Keywords:** Dirac equation Weyl equations. Weyl Semimetals.

# Lista de ilustrações

- Figura 1.** Ilustração adaptada de [16]. Ilustração que mostra os sentidos do movimento e do spin do neutrino e como se transformam sob  $C$ ,  $P$  e  $CP$ . Na Figura, os casos nos quais os neutrinos não foram observados são chamados de “não físico”, enquanto que nos casos em que foram observados, de “físico”. (página 28)
- Figura 2.** Ilustração retirada de [19]. Espectro de partículas de Dirac à esquerda. No limite em que a massa vai para zero, o *gap* (vão ou buraco) do termo de massa se fecha e o espectro se divide para as partículas canhotas e destros. (página 30)
- Figura 3.** Ilustração retirada de [22]. Estrutura das bandas de valência e condução do grafeno na zona de Brillouin e os pontos em que as bandas se cruzam linearmente. (página 31)
- Figura 4.** Ilustração adaptada de [23]. Seção transversal das bandas no grafeno, em que são indicados os pontos  $K'$  e  $K$  onde as bandas se tocam e o comportamento da relação de dispersão perto desses pontos é linear. (página 32)
- Figura 5.** Ilustração adaptada de [28]. Relação de dispersão de um isolante topológico: na superfície (em azul) e no *bulk* (em vermelho). (página 33)
- Figura 6.** Ilustração retirada de [10]. Monopolos da curvatura de Berry no espaço do momento. As setas indicam o fluxo da curvatura de Berry da fonte para o dreno. (página 35)
- Figura 7.** Ilustração retirada de [35]. Monopolos da curvatura de Berry no *bulk* e o arco de Fermi na superfície, com suas extremidades ligadas à fonte e ao dreno. (página 37)
- Figura 8.** Ilustração retirada de [10]. Isolante comum, topológico e o semimetal de Weyl, intermediário entre os dois, como função de um parâmetro  $m$ . Os pontos em cinza representam pontos de Dirac; os pretos e brancos representam pontos de Weyl de quiralidades opostas; as linhas azuis, arcos de Fermi. (página 37)
- Figura 9.** Ilustração retirada de [35]. Observação experimental via ARPES da equipe de Zahid Hasan *et al* dos férmions de Weyl, como monopolos e antimonopolos no espaço  $\mathbf{k}$ , e os arcos de Fermi em um cristal de TaAs. (página 38)

# SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2.</b>	<b>EQUAÇÕES DE ONDA RELATIVÍSTICAS</b>	<b>3</b>
<b>2.1.</b>	<b>Equação de Dirac</b>	<b>4</b>
<b>2.2.</b>	<b>Equações de Weyl</b>	<b>7</b>
<b>3.</b>	<b>GRUPO DE LORENTZ</b>	<b>9</b>
<b>3.1.</b>	<b>Transformações</b>	<b>9</b>
<b>3.2.</b>	<b>Equação de Dirac na representação de Weyl</b>	<b>12</b>
<b>4.</b>	<b>HELICIDADE E QUIRALIDADE</b>	<b>15</b>
<b>5.</b>	<b>EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE</b>	<b>17</b>
<b>6.</b>	<b>SOLUÇÕES PARA PARTÍCULAS LIVRES</b>	<b>20</b>
<b>7.</b>	<b>FÍSICA DE ALTAS ENERGIAS</b>	<b>24</b>
<b>7.1.</b>	<b>Paridade</b>	<b>24</b>
<b>7.2.</b>	<b>Neutrino</b>	<b>27</b>
<b>8.</b>	<b>FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA</b>	<b>30</b>
<b>8.1.</b>	<b>Cruzamento linear de bandas</b>	<b>30</b>
<b>8.2.</b>	<b>Topologia</b>	<b>34</b>
<b>8.3.</b>	<b>Estados de superfície e arcos de Fermi</b>	<b>36</b>
<b>8.4.</b>	<b>Semimetais de Weyl</b>	<b>37</b>
<b>9.</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>39</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>41</b>

# 1. Introdução

Insatisfeito com os problemas que a equação de Klein-Gordon para partículas sem spin apresentava, principalmente devido às derivadas de segunda ordem, Paul A. M. Dirac publicou, em 1928, uma equação de onda relativística com derivadas de primeira ordem para partículas massivas de spin  $1/2$ . Nela, o spin aparece como consequência da união entre a relatividade e a mecânica quântica, e o  $\psi$  é um biespinor – ou espinor de Dirac – de quatro componentes. Adotando a representação quiral da Álgebra de Dirac e tomando  $m = 0$ , é possível escrever a equação de Dirac como um par de equações para os espinores de Weyl, de duas componentes, como mostrou Hermann Weyl [1]. Esse par de equações, que leva o nome de Weyl em sua homenagem, é o objeto de estudo deste trabalho. Já que elas são um caso particular, convém começar a discussão com o caso geral da equação de Dirac, o que será feito no Capítulo 2. No Capítulo 3 tratou-se sobre como cada  $\psi$  das equações de Weyl pertencem a diferentes representações redutíveis do grupo de Lorentz. Em seguida, no Capítulo 4, são abordadas a helicidade e a quiralidade, propriedades importantes e que se confundem para férmions não massivos. Ao final do Capítulo 5 é mencionado sobre a não conservação da corrente quiral no contexto da teoria quântica de campos, conhecida como anomalia quiral. As soluções das equações de Weyl são obtidas no Capítulo 6.

Desde 1929, quando as equações de Weyl foram propostas, não se encontrou nenhum férmion descrito por elas no contexto da física de altas energias. Entretanto, a violação da paridade, tanto pelas equações de Weyl quanto pela interação fraca, fizeram do neutrino um forte candidato a férmion de Weyl na década de 1950. A posteriori, observou-se experimentalmente que os neutrinos possuem massa. Mas o formalismo dos espinores de Weyl ainda é útil na teoria da interação fraca. Tudo isso será o assunto do Capítulo 7.

No Capítulo 8, explora-se a física básica das equações de Weyl na matéria condensada. Em 2015, os análogos dos férmions de Weyl foram descobertos experimentalmente como quasipartículas, em um material topológico conhecido como semimetal de Weyl, apesar de já terem sido conceitual e extensivamente usados antes na construção de algumas teorias e modelos, como no caso do grafeno. Com exceção da invariância de Lorentz, muito da física dos férmions de Weyl em altas energias pode ser

---

encontrada nesse contexto de baixas energias. Um notável exemplo disso é a anomalia quiral da teoria quântica de campos, que pôde ser observada nos sistemas da matéria condensada em que os férmions de Weyl estão presentes.

Em suma, tendo como bases a relatividade restrita e a mecânica quântica em nível de graduação, o trabalho apresenta e discute de maneira simples a equação de Dirac, com foco no caso particular das equações de Weyl, e um pouco de suas histórias nas mencionadas áreas da física. Por fim, almeja-se que até o Capítulo 8.4 tenham sido apresentados os conceitos e resultados necessários que permitam entender como se chegou à descoberta dos férmions de Weyl em um semimetal de Weyl, mas longe de ser uma revisão extensiva, completa e muito aprofundada sobre o tópico.

## 2. Equações de onda relativísticas

A famosa equação encontrada por Erwin Schrödinger, publicada em 1926, estava de acordo com os dados experimentais da época. Ela forneceu os autovalores corretos para os níveis de energia do elétron em um átomo de hidrogênio. A equação, entretanto, não é relativística e também não leva em conta o spin do elétron, embora a relatividade e as interações de spin possam ser tratadas na equação através das chamadas correções de estrutura fina e hiperfina.

Foi Wolfgang Pauli que, em 1927, incorporou à equação de Schrödinger a interação do spin do elétron com um campo eletromagnético, fazendo o uso das matrizes que levam seu nome. A função de onda então assumia a forma de espinor para descrever o spin do elétron.

Logo após a publicação da equação de Schrödinger, foi publicada a equação de Klein-Gordon, a primeira equação de onda relativística. Ela pode ser encontrada de maneira simples a partir da relação energia-momento

$$E^2 = m^2 c^2 + \mathbf{p}^2 c^4, \quad (2.1)$$

ao se trocar a energia e o momento pelos seus respectivos operadores

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{p} &\rightarrow -i\hbar \nabla, \end{aligned} \quad (2.2)$$

e introduzindo uma função de onda, o que resulta em

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0, \quad (2.3)$$

ou seja, equação de Klein-Gordon, publicada em 1926. Reescrevendo-a em termos do operador d'Alembertiano

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (2.4)$$

a equação fica

$$\left( \square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0. \quad (2.5)$$

Schrödinger, aparentemente, descobriu-a antes de Oscar Klein e Walter Gordon [2], mas ao aplicar a equação generalizada com potenciais eletromagnéticos para o átomo de hidrogênio, os resultados obtidos não estavam de acordo com os dados experimentais, e então

ele resolveu não publicá-la. Além disso, a equação foi muito desfavorecida na época por uma série de motivos [3]: admite soluções de energia negativa; por ser de segunda ordem no tempo, a densidade de probabilidade pode não ser positiva; não obedece à causalidade, novamente por ser de segunda ordem no tempo. Ademais, a equação também descreve partículas de spin zero e, na época, ainda não havia sido descoberta nenhuma partícula sem spin. Hoje em dia, a equação se encontra em uma posição melhor do que quando foi publicada. O problema da causalidade foi resolvido com o desenvolvimento da teoria quântica de campos [4], e os estados de energia negativa, que persistiram na equação de Dirac, foram posteriormente interpretados como antipartículas.

## 2.1. Equação de Dirac

O passo crucial na direção de uma equação de onda relativística para partículas de spin 1/2 foi dado por Paul A. M. Dirac, em 1928. Para contornar os problemas da equação de Klein-Gordon, Dirac procurou por uma equação diferencial que fosse de primeira ordem no tempo e no espaço. Uma maneira de se obter tal equação é “tomando a raiz quadrada” do operador d’Alembertiano. Para fazer isso devem ser empregadas as Álgebras de Clifford.

Por volta de 1840, William Rowan Hamilton, enquanto caminhava com sua esposa, pensava em uma maneira de estender o plano complexo para mais dimensões. Quando o casal chegou à ponte de Brougham, em Dublin, Irlanda, Hamilton de repente se deu conta da resposta. Então ele rapidamente pegou o canivete em seu bolso e entalhou na ponte a expressão  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$  [5]. Essas quantidades não comutativas passaram a se chamar quatérnios e, mais adiante, Hamilton percebeu também que esses quatérnios poderiam ser usados para tirar a raiz quadrada do laplaciano tridimensional, pois

$$\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 - \left(\frac{d}{dy}\right)^2 - \left(\frac{d}{dz}\right)^2 = -\nabla^2. \quad (2.6)$$

Em seu trabalho de 1877, William Kingdon Clifford generalizou o resultado para mais dimensões [6]. Como o operador d’Alembertiano tem a forma de um Laplaciano, podemos escrevê-lo como um quadrado de um operador de primeira ordem usando uma álgebra de Clifford ‘Lorentziana’, também chamada de álgebra de Dirac:

$$\square = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \left(\gamma^0\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1\frac{\partial}{\partial x} + \gamma^2\frac{\partial}{\partial y} + \gamma^3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2, \quad (2.7)$$

no qual  $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2$  e  $\gamma^3$  são os elementos da Álgebra de Dirac. Nota-se, de imediato, que é

impossível que os elementos sejam números reais. Expandindo o quadrado, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \square = & \gamma^0 \gamma^0 \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma^0 \gamma^1 \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + \gamma^0 \gamma^2 \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} + \gamma^0 \gamma^3 \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \\
 & + \gamma^1 \gamma^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma^1 \gamma^0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \gamma^1 \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \gamma^1 \gamma^3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\
 & + \gamma^2 \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2 \gamma^0 \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} + \gamma^2 \gamma^1 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + \gamma^2 \gamma^3 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\
 & + \gamma^3 \gamma^3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma^3 \gamma^0 \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} + \gamma^3 \gamma^1 \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} + \gamma^3 \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial y},
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

que deve ser igual a

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2.9}$$

como em (2.6). Portanto, a partir desta condição de igualdade, encontram-se as seguintes relações:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0, \tag{2.10}$$

para  $\mu \neq \nu$ , e

$$\gamma^0 \gamma^0 = \mathbf{1}, \quad \gamma^1 \gamma^1 = \gamma^2 \gamma^2 = \gamma^3 \gamma^3 = -\mathbf{1}, \tag{2.11}$$

em que  $\mathbf{1}$  é uma unidade do tipo apropriado. Por conveniência, agrupam-se os elementos que acompanham as coordenadas espaciais em (2.7) em uma notação vetorial  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ :

$$\square = \left( \gamma^0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right)^2. \tag{2.12}$$

Agora é possível fatorar o termo entre parênteses na equação de Klein-Gordon em um operador de primeira ordem no espaço e no tempo

$$\left( \square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) = \left( \gamma^0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + i \frac{mc}{\hbar} \right) \left( \gamma^0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} - i \frac{mc}{\hbar} \right). \tag{2.13}$$

E então a equação de Dirac para uma partícula de massa de repouso  $m$  positiva é:

$$\left( \gamma^0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + i \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0. \tag{2.14}$$

Dirac, em seu trabalho *The quantum theory of the electron* [7], redescobriu as álgebras de Clifford, sem qualquer conhecimento prévio do trabalho de Clifford.

Definindo

$$\gamma^\mu \partial_\mu \equiv (\gamma^0 \partial_0, \gamma^1 \partial_1, \gamma^2 \partial_2, \gamma^3 \partial_3) = \left( \gamma^0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \tag{2.15}$$

e multiplicando (2.14) por  $i\hbar$ , a equação de Dirac assume uma forma mais simpática:

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi = 0. \tag{2.16}$$

Para potenciais eletromagnéticos, a equação de Dirac é

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\left(\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) - mc\right)\psi = 0, \quad (2.17)$$

com  $A_\mu = (\varphi/c, \mathbf{A})$ . Ou também, (2.17) costuma ser escrita com  $D_\mu = \partial_\mu - (e/c)A_\mu$ .

O procedimento originalmente adotado no trabalho de Dirac foi um pouco diferente. Ele assumiu que a equação possuía a forma familiar da equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi, \quad (2.18)$$

mas com um hamiltoniano linear em seus termos, isto é

$$H_D = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2, \quad (2.19)$$

em que  $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$ , de modo que seu quadrado recupere a relação energia-momento:

$$(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2)^2 = (c\mathbf{p})^2 + (mc^2)^2. \quad (2.20)$$

Tendo essa condição em vista, abrindo o quadrado de (2.20) e fazendo as contas, assim como em (1.8), verifica-se que as quantidades  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\beta$  devem obedecer às Álgebras de Clifford.

Em termos dos gamas, reorganizando os elementos da equação (2.14), o hamiltoniano de Dirac pode ser escrito como

$$H_D = c\gamma^0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma^0 mc^2. \quad (2.21)$$

Entretanto, ainda resta saber sobre a natureza dos gamas, pois é deles que emerge o spin do elétron. De fato, o spin é apenas uma consequência do procedimento adotado por Dirac em seu trabalho. As quatro matrizes  $2 \times 2$  da teoria de Pauli,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  e  $\mathbf{1}_{2 \times 2}$ , embora obedeam a relações semelhantes, não são suficientes em número para satisfazer as relações (2.10) e (2.11) que os cinco elementos  $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$  e  $\mathbf{1}$  obedecem. Se esses gamas forem matrizes, devem ser hermitianos para que o hamiltoniano de Dirac também seja. Logo, devem ser matrizes quadradas  $n \times n$  com  $n > 2$ . As matrizes também devem ser de dimensão par. Isso pode ser observado das relações (2.10) de anticomutação, reescrevendo-as como

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu, \quad (2.22)$$

ou também

$$\mathbf{1}\gamma^\mu\gamma^\nu = -\mathbf{1}\gamma^\nu\gamma^\mu, \quad (2.23)$$

e tomando o determinante de ambos os lados,

$$|\mathbf{1}| |\gamma^\mu| |\gamma^\nu| = |-\mathbf{1}| |\gamma^\nu| |\gamma^\mu|, \quad (2.24)$$

obtém-se

$$|\gamma^\mu| |\gamma^\nu| = (-1)^n |\gamma^\mu| |\gamma^\nu|, \quad (2.25)$$

que só é possível para  $n$  par, já que determinantes resultam em números reais. Portanto, as matrizes gama, conhecidas também como matrizes de Dirac, devem ser pelo menos  $4 \times 4$ . Logo, as relações (2.10) e (2.11) podem ser escritas concisamente no anticomutador

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}_{4 \times 4}, \quad (2.26)$$

em que  $g^{\mu\nu}$  é o respectivo elemento do tensor métrico.

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Assim, a função de onda que satisfaz a equação de Dirac tem a forma de biespinor, ou espinor de Dirac, com quatro componentes. Daqui em diante, as matrizes identidade, como  $\mathbf{1}_{2 \times 2}$  e  $\mathbf{1}_{4 \times 4}$ , por exemplo, passam a ser escritas sem os índices de sua dimensão, mas sempre será possível distingui-las pelo contexto em que aparecem.

## 2.2. Equação de Weyl

Todas as representações  $4 \times 4$  que satisfazem a equação (2.26) são unitariamente equivalentes. Então é feita a seguinte escolha para as matrizes gama, na forma de matrizes em blocos  $2 \times 2$ :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

em que  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  são as matrizes de Pauli. Essa representação é conhecida como representação quirial ou de Weyl. Em seu trabalho, Dirac introduziu uma representação diferente, a representação de Dirac, a qual difere da quirial apenas por  $\gamma^0 = \text{diag}(\mathbf{1}, -\mathbf{1})$ .

Graças à forma de bloco da representação quirial, é possível escrever

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

em que  $\psi_L$  e  $\psi_R$  são chamados de “espinores canhoto” (*left-handed*) e “destro” (*right-handed*) de Weyl, respectivamente, e possuem duas componentes. Abrindo a equação de Dirac em termos desses espinores,

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi = \begin{pmatrix} -mc & i\hbar(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \\ i\hbar(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) & -mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0, \quad (2.30)$$

resulta em duas equações para  $\psi_L$  e  $\psi_R$ , acopladas pelo termo de massa:

$$\begin{aligned} i\hbar(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\psi_R &= mc \psi_L; \\ i\hbar(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\psi_L &= mc \psi_R. \end{aligned} \quad (2.31)$$

No limite em que a massa  $m = 0$ , as duas equações se desacoplam:

$$\begin{aligned} i\hbar(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\psi_R &= 0 ; \\ i\hbar(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\psi_L &= 0 . \end{aligned} \quad (2.32)$$

As equações (2.32) acima são as equações de Weyl, em homenagem a Hermann Weyl que, em 1929, investigou as consequências de massa zero na equação de Dirac. Definindo

$$\sigma^\mu \equiv (\mathbf{1}, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbf{1}, -\boldsymbol{\sigma}), \quad (2.33)$$

as equações de Weyl podem ser abreviadas como

$$\begin{aligned} i\hbar\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R &= 0 ; \\ i\hbar\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L &= 0 . \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ou também podem ser escritas na forma de (2.18) com os hamiltonianos

$$H_{L,R} = \pm c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} . \quad (2.35)$$

### 3. Grupo de Lorentz

O procedimento adotado no Capítulo 2 para se obter as Equações de Dirac e Weyl, a partir da equação de Klein-Gordon, não evidencia muito sobre a natureza dos espinores de Weyl e como eles estão intimamente relacionados com o grupo de Lorentz [5][8].

#### 3.1. Transformações

Para começar, convém analisar o grupo de rotações em três dimensões. Uma rotação de um ângulo  $\theta$  em torno de um eixo  $n$  transforma as coordenadas  $X$  em  $X'$  de acordo com  $X' = R_n(\theta)X$ , em que

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

e  $n = x, y, z$ . As matrizes de rotação são:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}; \quad (3.2)$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Expandindo as matrizes para uma rotação infinitesimal até a primeira ordem em torno de  $\theta = 0$ ,

$$R_n(d\theta) = R_n(0) + \frac{\partial}{\partial \theta} R_n \Big|_{\theta=0} d\theta + \dots, \quad (3.3)$$

em que  $R_n(0) = \mathbf{1}$ , e definindo os geradores

$$J_n = -i \frac{\partial}{\partial \theta} R_n \Big|_{\theta=0}, \quad (3.4)$$

são obtidas as matrizes

$$J_x(\theta) = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_y(\theta) = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.5)$$

$$J_z(\theta) = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De (3.5) verificam-se as seguintes relações de comutação:

$$[J_i, J_j] \equiv J_i J_j - J_j J_i = i \varepsilon_{ijk} J_k, \quad (3.6)$$

onde  $\varepsilon_{ijk}$  é o tensor de Levi-Civita. Para  $N$  sucessivas rotações infinitesimais  $\theta = Nd\theta$ , a partir de (3.3), pode-se escrever

$$R_n(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \mathbf{1} + i J_n \frac{\theta}{N} \right)^N = \exp(i J_n \theta). \quad (3.7)$$

De modo geral, para um eixo combinado qualquer, a expressão acima é reescrita como:

$$R(\theta) = \exp(i \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \theta) = \exp(i \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta}). \quad (3.8)$$

Da relação de comutação (3.6), nota-se que  $J_x, J_y, J_z$  formam um grupo de simetria completo e fechado, conhecido como grupo de rotação especial ortogonal tridimensional, ou  $SO(3)$ . Ele é isomorfo ao grupo das matrizes de Pauli, o grupo especial unitário bidimensional, ou  $SU(2)$ , em que um espinor arbitrário  $\chi$  de duas componentes se transforma da seguinte maneira:

$$\chi' = U \chi, \quad (3.9)$$

com o operador unitário

$$U = \exp\left(\frac{1}{2} i \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta}\right), \quad (3.10)$$

e as conhecidas relações de comutação das matrizes de Pauli:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k. \quad (3.11)$$

O isomorfismo é evidenciado pela semelhança entre (3.8) e (3.10), com a correspondência

$$\mathbf{J} \leftrightarrow \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.12)$$

O grupo de rotações pode incluir as transformações de Lorentz, no grupo denominado  $SO(3;1)$ , ou grupo de Lorentz. Na relatividade especial, uma mudança de um referencial para outro, ou um “*boost*” na direção positiva da coordenada  $x$ , é dado por

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x), \\ x' &= \gamma(x - \beta ct), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que  $\beta = v/c$  e  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  é o fator de Lorentz. Esse *boost* pode ser escrito na forma matricial como

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Da identidade  $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$ , podem ser realizadas as substituições  $\cosh \phi = \gamma$  e  $\sinh \phi = \beta\gamma$  em termos da rapidez  $\phi$ . Na notação de Einstein, a transformação (3.13) passa a ser escrita assim:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(\phi_x)x^{\nu} \quad (3.15)$$

e na forma infinitesimal como

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu}_{\nu}(\Delta\phi_x) &= \mathbf{1} + \Delta\lambda^{\mu}_{\nu} \\ &= \mathbf{1} + \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\phi_x & 0 & 0 \\ -\Delta\phi_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

que pode ser generalizado para um *boost* em qualquer direção da seguinte maneira:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}(\Delta\phi) = \mathbf{1} + \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\phi_x & -\Delta\phi_y & -\Delta\phi_z \\ -\Delta\phi_x & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta\phi_y & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta\phi_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

Analogamente ao procedimento realizado para as matrizes de rotação tridimensionais, definem-se os geradores

$$\begin{aligned} K_x(\phi) &= -\left. \frac{\partial}{\partial\phi} \Lambda_x \right|_{\phi=0} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ K_y(\phi) &= -\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & K_z(\phi) &= -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Então para  $\phi$  finito, um quadrivetor sob um *boost* transforma-se de acordo com

$$x' = \exp(\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\phi})x \quad (3.19)$$

Entretanto, se as matrizes dos geradores  $J$  em (3.5) forem convertidas em matrizes  $4 \times 4$ , isto é

$$\begin{aligned} J_x(\theta) &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; & J_y(\theta) &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ J_z(\theta) &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

observa-se que elas aparecem como resultado dos comutadores de  $K$ , que satisfazem

$$[K_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k. \quad (3.21)$$

De (3.21) conclui-se que  $K_x, K_y, K_z$  não formam um grupo fechado. E os comutadores entre  $J$  e  $K$  fornecem

$$[J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k. \quad (3.22)$$

Mas definindo

$$J_{n+} = \frac{1}{2}(J_n + K_n), \quad J_{n-} = \frac{1}{2}(J_n - K_n), \quad (3.23)$$

então as seguintes relações de comutação são satisfeitas:

$$\begin{aligned} [J_{i+}, J_{j+}] &= i\varepsilon_{ijk}J_{k+}, \\ [J_{i-}, J_{j-}] &= i\varepsilon_{ijk}J_{k-}, \\ [J_{i+}, J_{j-}] &= 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Portanto,  $J_{n+}$  e  $J_{n-}$  constituem grupos diferentes e distintos entre si, conseqüentemente resultando em dois tipos de espinores nos espaços  $SU(2)$  associados. A correspondência com rotações ( $\theta$ ) continua sendo aquela em (3.12), enquanto que para os *boosts* ( $\phi$ ) as correspondências são

$$\mathbf{K} \leftrightarrow \pm \frac{1}{2} i\boldsymbol{\sigma}. \quad (3.25)$$

Não coincidentemente, serão chamados  $\psi_L$  e  $\psi_R$  os espinores das diferentes representações do grupo de Lorentz, e se transformam de acordo com

$$\begin{aligned} \psi'_L &= \exp\left(\frac{1}{2}i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi}\right)\psi_L; \\ \psi'_R &= \exp\left(\frac{1}{2}i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi}\right)\psi_R. \end{aligned} \quad (3.26)$$

E para os espinores de Dirac, que podem ser escritos como dois espinores de Weyl, a transformação se torna

$$\begin{pmatrix} \psi'_L \\ \psi'_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{1}{2}i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{1}{2}i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

com as componentes canhota e destra não se misturando.

### 3.2. Equação de Dirac na representação de Weyl

A partir de (3.27), se apenas um *boost*, sem rotações, for realizado nos espinores de Weyl, é possível se chegar à equação de Dirac na representação quiral [5]. Um *boost* nos

estados com momento zero para um estado com momento  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$  fornece

$$\begin{aligned}\psi_R(\mathbf{p}) &= \exp\left(+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi}\right)\psi_R(0) = \left(\cosh\frac{1}{2}\phi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \sinh\frac{1}{2}\phi\right)\psi_R(0), \\ \psi_L(\mathbf{p}) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi}\right)\psi_L(0) = \left(\cosh\frac{1}{2}\phi - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \sinh\frac{1}{2}\phi\right)\psi_L(0),\end{aligned}\quad (3.28)$$

ou, lembrando que

$$\begin{aligned}\cosh\frac{1}{2}\phi &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}, \\ \sinh\frac{1}{2}\phi &= \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}},\end{aligned}\quad (3.29)$$

esse *boost* então fica escrito como

$$\begin{aligned}\psi_R(\mathbf{p}) &= \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\right)\psi_R(0), \\ \psi_L(\mathbf{p}) &= \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\right)\psi_L(0).\end{aligned}\quad (3.30)$$

Usando as relações  $E = \gamma mc^2$  e  $E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$  e arrumando os termos das expressões (3.30), dá para se chegar em

$$\begin{aligned}\psi_R(\mathbf{p}) &= \frac{1}{c\sqrt{2m(E+mc^2)}}(E+mc^2+c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi_R(0), \\ \psi_L(\mathbf{p}) &= \frac{1}{c\sqrt{2m(E+mc^2)}}(E+mc^2-c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi_L(0).\end{aligned}\quad (3.31)$$

Como  $\psi_R(0) = \psi_L(0)$ , ao se dividir as equações acima uma pela outra, esses estados de momento zero desaparecem e são obtidas

$$\begin{aligned}\psi_R(\mathbf{p}) &= \frac{E+mc^2+c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+mc^2-c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}\psi_L(\mathbf{p}), \\ \psi_L(\mathbf{p}) &= \frac{E+mc^2-c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+mc^2+c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}\psi_R(\mathbf{p}),\end{aligned}\quad (3.32)$$

que, após uma certa álgebra, podem ser simplificadas para

$$\begin{aligned}\psi_R(\mathbf{p}) &= \frac{E+c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{mc^2}\psi_L(\mathbf{p}), \\ \psi_L(\mathbf{p}) &= \frac{E-c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{mc^2}\psi_R(\mathbf{p}),\end{aligned}\quad (3.33)$$

ou, também, na forma de matriz em bloco  $2 \times 2$  as equações (3.33) se tornam

$$\begin{pmatrix} -mc^2 & E+c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ E-c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0, \quad (3.34)$$

Trocando a energia e o momento por seus respectivos operadores diferenciais, finalmente

chega-se a

$$\begin{pmatrix} -mc & i\hbar(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \\ i\hbar(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) & -mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0, \quad (3.35)$$

que é a mesma equação que (2.30), isto é, a equação de Dirac já na representação quirial.

## 4. Helicidade e quiralidade

A esta altura, convém discutir os motivos por trás dos índices dos espinores  $\psi_L$  e  $\psi_R$ . Há ambiguidade quando se diz que um férmion massivo é destro ou canhoto, pois tanto pode estar se referindo à sua helicidade quanto à sua quiralidade. Quando a massa é zero, essa ambiguidade convenientemente desaparece [9].

O operador helicidade é definido da seguinte forma para um férmion que obedece a equação de Dirac:

$$\hbar \equiv \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{p}|}, \quad (4.1)$$

em que  $\mathbf{S}$  são as matrizes de spin

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

De (4.1) fica claro que helicidade é a projeção do spin na direção do momento. Esse operador comuta com o hamiltoniano de Dirac e seus autovalores são conservados no tempo. Para um férmion de Weyl, a helicidade passa a ser

$$\hbar = \frac{\hbar}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}. \quad (4.3)$$

Uma partícula com  $\hbar = +\hbar/2$  é de helicidade destra, enquanto que uma com  $\hbar = -\hbar/2$  é de helicidade canhota.

Sob rotações, a helicidade de uma partícula livre em movimento é invariante, pois permanece a mesma em qualquer referencial. Para *boosts*, no entanto, ela não é invariante, já que um férmion massivo em um referencial pode ter seu momento invertido em outro referencial, ou seja, a helicidade depende do observador. Mas quando a massa é zero, não é possível ir de um referencial a outro em que sua helicidade se inverta, já que essa partícula sempre estará viajando na velocidade da luz. Então, para uma partícula sem massa, sua helicidade é um invariante de Lorentz, ao contrário do caso massivo. Portanto, as soluções  $\psi_L$  e  $\psi_R$  para a equação de Weyl, obtidas no Capítulo 6, são autoestados do operador helicidade.

Quanto à quiralidade, é preciso definir uma matriz gama adicional como

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (4.4)$$

que obedece às relações

$$\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5, \quad \gamma^5 \gamma^5 = \mathbf{1}, \quad (4.5)$$

independentemente da representação em que as matrizes gama se encontram. Na representação quiral

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Um espinor de Dirac que possui somente a componente canhota (destra), com as outras componentes iguais a zero, é um autoestado de  $\gamma^5$  com autovalor  $-1$  ( $+1$ ), que lhe diz respeito quanto à sua quiralidade. Para obter um espinor de Dirac que só possui a componente canhota, ou a destra, são utilizadas as matrizes

$$L \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma^5), \quad R \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma^5), \quad (4.7)$$

que atuam como operadores de projeção nos espinores de Dirac da seguinte maneira

$$L\psi = L \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R\psi = R \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

E também

$$L \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0, \quad (4.9)$$

e equações similares às equações (4.9) para  $R$ . Qualquer  $\psi$  que satisfaz a equação de Dirac pode ser separado em sua parte de quiralidade destra ou canhota via (4.8). Inclusive, qualquer  $\psi'$  transformado de acordo com (3.27) e operado com as projeções em (4.8) resulta em espinores com apenas as componentes  $\psi'_R$  ou  $\psi'_L$  que por sua vez continuarão sendo autoestados de  $\gamma^5$  com os respectivos autovalores de  $+1$  e  $-1$ . Isso significa que a quiralidade é um invariante de Lorentz. Mas ela não se conserva, pois o comutador entre  $\gamma^5$  e o hamiltoniano de Dirac (2.19) resulta em

$$[\gamma^5, H_D] = 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Mas quando a massa é zero, a quiralidade é conservada, como se observa em (4.10) acima.

De certa forma, tratando-se de férmions massivos, helicidade e quiralidade são opostas, no sentido que enquanto a helicidade não é um invariante de Lorentz, ela se conserva para uma partícula livre, e no caso da quiralidade o contrário é verdadeiro: é um invariante de Lorentz, mas não se conserva. Porém, na ausência de massa, pode se falar de férmions destros ou canhotos sem a preocupação em se referir à quiralidade ou à helicidade, uma vez que nesse caso elas praticamente coincidem.

## 5. Equação da continuidade

A partir da equação da continuidade serão identificadas a densidade de probabilidade e a corrente de probabilidade. Além delas, adiante também será determinada a corrente quiral, que teve repercussões importantes nas teorias quânticas de campo, assim como no desenvolvimento das teorias que culminaram nas atuais descrições dos materiais de Weyl.

A forma canônica da equação da continuidade é

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (5.1)$$

A fim de se encontrar a equação da continuidade para a probabilidade, primeiramente será feita a transposta conjugada da equação de Dirac. Lembrando que  $\psi$  tem quatro componentes em coluna, então seu transposto conjugado  $\psi^\dagger$  terá suas componentes dispostas em linha e será preciso passá-la à esquerda das matrizes gama, que por sua vez tornar-se-ão

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{1\dagger} = -\gamma^1, \quad \gamma^{2\dagger} = -\gamma^2, \quad \gamma^{3\dagger} = -\gamma^3. \quad (5.2)$$

Portanto

$$\left[ \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]^\dagger = \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0, \quad \left[ \gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right]^\dagger = -\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} \gamma^k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.3)$$

Então, a transposta conjugada da equação de Dirac fica

$$-i\hbar \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 - \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x} \gamma^k - \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial y} \gamma^k - \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial z} \gamma^k \right) - mc\psi^\dagger = 0. \quad (5.4)$$

Mas agora surge um problema. Não dá para juntar as derivadas em  $\partial_\mu$  como na equação de Dirac por causa do sinal de menos nas derivadas espaciais. Para se recuperar o sinal de mais, multiplica-se (5.4) por  $\gamma^0$  pela direita utilizando depois as relações de anticomutação (2.26), como segue:

$$\begin{aligned} -i\hbar \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 \gamma^0 - \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x} \gamma^k \gamma^0 - \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial y} \gamma^k \gamma^0 - \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial z} \gamma^k \gamma^0 \right) - mc\psi^\dagger \gamma^0 &= 0 \\ -i\hbar \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 \gamma^0 + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x} \gamma^0 \gamma^k + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial y} \gamma^0 \gamma^k + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial z} \gamma^0 \gamma^k \right) - mc\psi^\dagger \gamma^0 &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Definindo o espinor adjunto  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ , a partir de (5.5) obtém-se a equação adjunta de Dirac

$$\bar{\psi} (i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu + mc) = 0. \quad (5.6)$$

Multiplicando a equação (5.6) por  $\psi$  pela direita e multiplicando a equação de Dirac por  $\bar{\psi}$  pela esquerda, isto é

$$\bar{\psi}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc)\psi = 0, \quad \bar{\psi}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0, \quad (5.7)$$

respectivamente, depois somando-se as duas, obtém-se

$$\begin{aligned} (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi &= 0 \\ \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) &= 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

que é a equação da continuidade. Reescrevendo-a na forma de (5.1)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\psi}\gamma^0\psi) + \nabla \cdot (c\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi) = 0, \quad (5.9)$$

a partir da qual são identificadas a densidade de probabilidade

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\psi}\gamma^0\psi \\ &= \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi \\ &= \psi^\dagger\psi \end{aligned} \quad (5.10)$$

e a corrente de probabilidade

$$\mathbf{j} = c\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi = c\psi^\dagger\boldsymbol{\gamma}^0\boldsymbol{\gamma}\psi. \quad (5.11)$$

Ao integrar (5.10) no espaço, a quantidade

$$Q = \int \psi^\dagger\psi d^3\mathbf{r} \quad (5.12)$$

é interpretada como carga elétrica ou número de partículas.

Alternativamente, (5.10) e (5.11) podem ser incorporadas em um quadrivetor

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}) = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (5.13)$$

chamado de quadricorrente, com a qual a equação (5.8) fica ainda mais simples:

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (5.14)$$

Na presença de um campo eletromagnético,  $j^\mu$  é a densidade de corrente elétrica, e é possível separá-lo em

$$j_L^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi, \quad j_R^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\psi, \quad (5.15)$$

que são quadricorrentes de partículas canhotas e destros, respectivamente, e se conservam separadamente quando a massa das partículas é zero.

A corrente quiral pode ser encontrada de maneira semelhante à  $j^\mu$ . Multiplicando as equações adjunta de Dirac e de Dirac, do mesmo modo que foram multiplicadas em (5.7), só que desta vez por  $\gamma^5\psi$  e  $\bar{\psi}\gamma^5$ , respectivamente, e fazendo a diferença entre elas, chega-se a

$$(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\gamma^5\psi - \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 2i\frac{mc}{\hbar}\bar{\psi}\gamma^5\psi. \quad (5.16)$$

Comutando  $\gamma^5$  e  $\gamma^\mu$ , de acordo com (4.5) é possível escrever

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi) = 2i\frac{mc}{\hbar}\bar{\psi}\gamma^5\psi \quad (5.17)$$

e definir o termo entre parênteses como a corrente quirial (também chamada de corrente vetorial axial):

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2i\frac{mc}{\hbar}\bar{\psi}\gamma^5\psi. \quad (5.18)$$

Quando  $m = 0$ , essa corrente é conservada não somente para férmions livres, mas também para férmions em um campo clássico. Para campos quantizados, no entanto, esse não é mais o caso. Essa não conservação é conhecida como anomalia quirial ou de Adler-Bell-Jackiw, em homenagem àqueles que a descobriram ao tentarem explicar o decaimento do pión em dois fótons [10]. Esse é um ilustre exemplo de uma simetria na teoria clássica que não é preservada na teoria quântica, ou seja, uma anomalia. Uma consequência dessa anomalia é que para número igual de férmions de Weyl canhotos e destros livres, quando acoplados a um campo eletromagnético, não haveria conservação da quiralidade total.

## 6. Soluções para partículas livres

Para partículas livres, assumir-se-á que as soluções para a equação de Dirac possam ser escritas como ondas planas da forma

$$\psi(t, \mathbf{r}) = u(E/c, \mathbf{p})e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/\hbar}, \quad (6.1)$$

ou mais compactamente, com os quadrivetores  $x$  e  $p$ ,

$$\psi(x) = u(p)e^{-ip \cdot x/\hbar} \quad (6.2)$$

para as soluções de frequência positiva, e

$$\psi(x) = v(p)e^{+ip \cdot x/\hbar} \quad (6.3)$$

para as soluções de frequência negativa. Levando (6.2) e (6.3) na equação de Dirac, observa-se que os espinores  $u(p)$  e  $v(p)$  devem obedecer

$$(\gamma^\mu \partial_\mu - mc)u(p) = (\gamma^\mu \partial_\mu + mc)v(p) = 0. \quad (6.4)$$

Vale notar que se  $\psi(x)$  satisfaz a equação de Dirac, suas componentes devem satisfazer a equação de Klein-Gordon também.

Para simplificar, o problema será analisado em um referencial no qual  $p = p_0 = (mc, 0, 0, 0)$ . Nesse referencial e na representação quirial, (6.4) se torna

$$\begin{aligned} (mc\gamma^0 - mc)u(p_0) &= (mc\gamma^0 + mc)v(p_0) = 0 \\ \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} u(p_0) &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} v(p_0) = 0, \end{aligned} \quad (6.5)$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} u(p_0) &= \sqrt{mc^2} \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta \end{pmatrix}, \\ v(p_0) &= \sqrt{mc^2} \begin{pmatrix} \eta \\ -\eta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

O termo  $\sqrt{mc^2}$  inserido em (6.6) se mostrará conveniente mais adiante. Os espinores  $\zeta$  e  $\eta$  transformam-se sob rotações de acordo com (3.10), como espinores ordinários, e determinam a orientação do spin.

A solução para um  $p$  arbitrário pode ser encontrada através de um *boost* em  $u(p_0)$  e  $v(p_0)$ . Mas para simplificar os cálculos, o *boost* será feito somente ao longo da direção  $z$  (direção 3). Feito isso, depois será fácil de enxergar uma solução para um  $p$  qualquer.

Aplicando um *boost* em  $p_0 = (mc, 0, 0, 0)$  para  $p = (E/c, 0, 0, p_3)$ , encontra-se

$$\begin{aligned}
 p &= \exp[\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\Phi}] p_0 \\
 &= [\mathbf{1} \cosh \phi_z + K_z \sinh \phi_z] p_0 \\
 &= \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cosh \phi_z + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sinh \phi_z \right] \begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} E/c \\ 0 \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix} &= mc \begin{pmatrix} \cosh \phi_z \\ 0 \\ 0 \\ \sinh \phi_z \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

e aplicando o mesmo *boost* em  $u(p_0)$  de acordo com (3.27),

$$\begin{aligned}
 u(p) &= \exp \begin{pmatrix} +i \left(\frac{1}{2} i \boldsymbol{\sigma}\right) \cdot \boldsymbol{\Phi} & 0 \\ 0 & -i \left(\frac{1}{2} i \boldsymbol{\sigma}\right) \cdot \boldsymbol{\Phi} \end{pmatrix} u(p_0) \\
 &= \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cosh \frac{1}{2} \phi_z - \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix} \sinh \phi_z \right] \sqrt{mc^2} \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right) e^{\phi_z/2} + \left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right) e^{-\phi_z/2} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right) e^{\phi_z/2} + \left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right) e^{-\phi_z/2} \end{pmatrix} \sqrt{mc^2} \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Reescrevendo  $e^{\phi_z/2}$  como  $\sqrt{e^{\phi_z}}$ , de acordo com o *boost* realizado em (6.7) fica fácil de visualizar que

$$\sqrt{e^{\pm \phi_z}} = \sqrt{\cosh \phi_z \pm \sinh \phi_z} = \left(\sqrt{mc^2}\right)^{-1} \sqrt{E \pm cp_3}. \tag{6.9}$$

Retornando esse resultado em (6.8), se obtém

$$u(p) = \begin{pmatrix} \left[ \left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right) \sqrt{E + cp_3} + \left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right) \sqrt{E - cp_3} \right] \zeta \\ \left[ \left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right) \sqrt{E + cp_3} + \left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right) \sqrt{E - cp_3} \right] \zeta \end{pmatrix}, \tag{6.10}$$

e abrindo as matrizes, chega-se à

$$u(p) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E + cp_3} & 0 \\ 0 & \sqrt{E - cp_3} \end{pmatrix} \zeta \\ \begin{pmatrix} \sqrt{E - cp_3} & 0 \\ 0 & \sqrt{E + cp_3} \end{pmatrix} \zeta \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

que se não fosse pela raiz, poderia ter os termos dentro das matrizes escritos como

$$\mathbf{1}E \pm c\sigma^3 p_3, \tag{6.12}$$

ou, usando a notação definida em (2.33) para as matrizes de Pauli, de modo geral:

$$c(\sigma^0 p_0 \pm \sigma^1 p_1 \pm \sigma^2 p_2 \pm \sigma^3 p_3). \tag{6.13}$$

Então, as soluções para  $u(p)$  e  $v(p)$  com momento e spin arbitrários são

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{c\sigma \cdot p} \zeta \\ \sqrt{c\bar{\sigma} \cdot p} \zeta \end{pmatrix}, \quad v(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{c\sigma \cdot p} \eta \\ -\sqrt{c\bar{\sigma} \cdot p} \eta \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

que podem parecer estranhas devido às matrizes na raiz, mas por essa notação deve-se entender que

$$\sqrt{c\sigma \cdot p} = \begin{pmatrix} \sqrt{cp_0 + cp_3} & \sqrt{cp_1 - icp_2} \\ \sqrt{cp_1 + icp_2} & \sqrt{cp_0 - cp_3} \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

e analogamente para  $\sqrt{c\bar{\sigma} \cdot p}$ .

Com os espinores normalizados como  $\zeta^\dagger \zeta = \eta^\dagger \eta = 1$ , é feita a seguinte escolha de base ortogonal:

$$\eta_1 = \zeta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \zeta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

com o índice  $s = 1, 2$  indicando spin *up* e *down* ao longo do eixo  $z$ , respectivamente. Quando  $m = 0$ , a orientação do spin é sempre paralela ou antiparalela à direção do movimento. Então, escolhendo o momento ao longo do sentido positivo de  $z$ , as soluções para  $s = 1$  são,

$$u_1(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E - cp_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E + cp_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad v_1(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E - cp_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\sqrt{E + cp_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

Em seguida, para o caso não massivo das soluções, realiza-se um *boost* nas equações (6.17) no limite em que  $\phi_z \rightarrow \infty$ , e conseqüentemente  $E = cp_3$ , que resultam em

$$u_1(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1(p) = -\sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Do mesmo modo, para  $s = 2$ , obtêm-se

$$u_2(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

As equações (6.18) e (6.19) são, portanto, estados com espinores de apenas duas componentes que descrevem partículas sem massa. Graças ao termo  $\sqrt{mc^2}$  inserido em (6.6), as expressões (6.18) e (6.19) foram mantidas finitas no caso não massivo.

Suprimindo as duas componentes iguais a zero e trocando também os índices  $s = 1, 2$  por  $R$  e  $L$ , respectivamente, as soluções podem ser escritas para  $\psi_L$  e  $\psi_R$ . Então, usando (6.2), (6.3), (6.18) e (6.19), as soluções são

$$\begin{aligned} \psi_L^+(x) &= u_L(p) e^{-ip \cdot x / \hbar}, & \psi_R^+(x) &= u_R(p) e^{-ip \cdot x / \hbar}, \\ \psi_L^-(x) &= v_L(p) e^{+ip \cdot x / \hbar}, & \psi_R^-(x) &= v_R(p) e^{+ip \cdot x / \hbar}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

---

Como foi abordado no Capítulo 3, não é difícil de computar que as soluções (6.20) são autoestados do operador helicidade. Também é interessante verificar que no contexto da teoria quântica de campos, em que é mais adequado se falar de partículas e campos,  $\psi_L$  e  $\psi_R$  possuem, cada um, tanto frequências positivas como negativas, interpretadas como partículas e antipartículas, respectivamente. Portanto, na ausência de massa,  $\psi_L$  e  $\psi_R$  são campos distintos entre si, o que é corroborado por (3.26) e pela operação de conjugação de carga [11], que será discutida, apenas de passagem, no Capítulo 7 a seguir.

## 7. Física de altas energias

A equação de Dirac se mostrou a equação correta para o elétron e férmions massivos, de modo geral. Com ela, Dirac ainda previu a existência de antimatéria, como o pósitron, descoberto em 1932, por Carl Anderson. E quanto à equação de Weyl, existem partículas que a obedecem? Durante o século XX, a física de partículas fervilhou com previsões e descobertas de partículas. Entre elas, estava o neutrino, postulado em 1930, por Pauli, em uma tentativa de explicar o espectro de energia contínuo observado no decaimento beta, e a aparente não conservação de energia e momento [12]. A partir dos experimentos se constatou que se o neutrino possuísse massa, ela deveria ser extremamente pequena.

As equações de Weyl eram as candidatas óbvias para o neutrino, caso ele não fosse massivo. Em 1933, no entanto, Pauli as rejeitou quanto à sua validade física, argumentando que “essas equações de onda, como pode ser visto a partir de suas derivações, não são invariantes para reflexões (troca de esquerda e direita) e como resultado elas não são aplicáveis à realidade física” [11][13]. As equações de Weyl receberam atenção novamente na década de 1950, quando a preservação da paridade, a simetria por reflexões à qual Pauli se referia, foi colocada em dúvida.

### 7.1. Paridade

A operação que faz com que um sistema de coordenadas espaciais  $(x, y, z)$  se torne  $(-x, -y, -z)$  é chamada de paridade, e geralmente é denotada por  $P$ . Então aplicando a paridade ao vetor posição  $\mathbf{r}$ , inverte-se seu sinal preservando-se sua magnitude. Duas inversões sucessivas fazem com que as coordenadas originais sejam recuperadas. O vetor velocidade  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  de uma partícula, por exemplo, sob paridade será

$$P: \quad \mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v} . \quad (7.1)$$

Como é de se esperar, uma quantidade escalar  $\alpha$  permanece inalterada sob a paridade:

$$P: \quad \alpha \rightarrow +\alpha . \quad (7.2)$$

No entanto, deve se considerar como as quantidades em questão são derivadas. Considere o momento angular  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Sob paridade,  $\mathbf{L}$  se transforma como

$$P: \quad \mathbf{r} \times \mathbf{p} \rightarrow (-\mathbf{r}) \times (-\mathbf{p}) = +\mathbf{L} , \quad (7.3)$$

preservando o sinal no novo sistema de coordenadas. Quantidades como  $\mathbf{L}$  são chamadas de pseudovetores ou vetores axiais. Outro exemplo que ilustra bem os pseudovetores é o campo magnético  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , pois  $\mathbf{A}$  e o operador diferencial  $\nabla \times$  são ambos vetores. Então, olhando para a força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.4)$$

sob a paridade,

$$P: \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rightarrow q[(-\mathbf{E}) + (-\mathbf{v}) \times (+\mathbf{B})] = -\mathbf{F}, \quad (7.5)$$

resulta na soma de dois vetores, que por sua vez dá um vetor, como era de se esperar se comparado com a força escrita como  $m(d\mathbf{p}/dt)$ .

Aplicando a paridade em um produto escalar entre dois vetores, verifica-se que a troca de seus sinais é compensada, portanto resulta em uma quantidade escalar assim como em (7.2). Mas considerando o produto misto entre os vetores  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}$ , aparece um produto escalar entre o vetor  $\mathbf{u}$  e o vetor axial  $\mathbf{a}$ . Sob paridade,

$$P: \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \rightarrow -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}), \quad (7.6)$$

esse produto é um pseudoescalar. Um exemplo seria o da helicidade em (4.1), que sob paridade inverte o sinal do momento, mas não o do spin. Outro exemplo de pseudoescalar é o fluxo magnético.

Investigando agora a paridade na soma  $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{v}$ , entre um vetor  $\mathbf{v}$  e um vetor axial  $\mathbf{a}$ ,

$$P: \quad \mathbf{a} + \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{a} - \mathbf{v} = \mathbf{b}_p, \quad (7.7)$$

nota-se que  $\mathbf{b} \neq \pm \mathbf{b}_p$ . Então  $\mathbf{b}$  quebra a simetria por reflexões e se  $|\mathbf{b}|$  fosse uma quantidade mensurável, a física não seria a mesma para um universo “invertido”. Da mesma forma, poderia haver violação de paridade através de escalares e pseudoescalares.

A paridade constitui uma parte de uma simetria mais abrangente chamada de *CPT*. As outras duas operações são a conjugação de carga, denotada por *C*, e a reversão temporal, denotada por *T*. A operação *C* inverte os sinais dos números quânticos aditivos, como carga, número bariônico, número leptônico etc., convertendo uma partícula em sua respectiva antipartícula e vice versa. A reversão temporal, como o nome sugere, faz com que  $t \rightarrow -t$ , e como consequência invertem-se os sinais de grandezas que contêm o tempo em sua derivação, como por exemplo, o momento e a corrente elétrica. Uma análise mais aprofundada de *T* mostra que ela também deve conter uma conjugação complexa. As três, *C*, *P* e *T*, são conhecidas como simetrias discretas. Entretanto, *C* e *T* serão deixadas de lado e apenas *P* será

tratada com mais detalhes, retomando assim a questão levantada por Pauli quanto a essa simetria, ou assimetria no caso, nas equações de Weyl.

As rotações permanecem inalteradas sob a paridade,

$$P: \quad \exp\left(\frac{1}{2}i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta}\right) \rightarrow \exp\left(\frac{1}{2}i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta}\right), \quad (7.8)$$

mas inverte o sentido do *boost*:

$$P: \quad \exp\left(\pm\frac{1}{2}\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\phi}\right) \rightarrow \exp\left(\mp\frac{1}{2}\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\phi}\right). \quad (7.9)$$

Isso significa que  $P$  troca as sub-representações de (3.27) uma pela outra. Como consequência, um espinor canhoto se transforma em um destro e vice-versa. Isso pode ser visto também pelas equações (3.26). Então

$$P: \quad \psi_{L,R}(t, \mathbf{r}) \rightarrow \psi_{R,L}(t, -\mathbf{r}). \quad (7.10)$$

Era sobre isso que Pauli se referia quando disse que as equações de Weyl não são invariantes por reflexões, pois  $\psi_L$  e  $\psi_R$  são transformados um no outro sob  $P$ .

Olhando agora para (3.27) como um todo, um espinor de Dirac  $\psi$ , em que as componentes  $\psi_L$  e  $\psi_R$  aparecem juntas, é invariante sob  $P$ , apenas trocam-se as componentes  $\psi_L$  e  $\psi_R$  de lugar, isto é:

$$P: \quad \begin{pmatrix} \psi_L(t, \mathbf{r}) \\ \psi_R(t, \mathbf{r}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi_R(t, -\mathbf{r}) \\ \psi_L(t, -\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

Essa troca pode ser escrita em termos de uma matriz antidiagonal

$$P: \quad \begin{pmatrix} \psi_L(t, \mathbf{r}) \\ \psi_R(t, \mathbf{r}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L(t, -\mathbf{r}) \\ \psi_R(t, -\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

que convenientemente é apenas o  $\gamma^0$  na representação quirial. Então, de maneira mais sucinta,

$$P: \quad \psi(t, \mathbf{r}) \rightarrow \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{r}). \quad (7.13)$$

O espinor transformado  $\gamma^0 \psi(t, -\mathbf{r})$  tem que obedecer à equação de Dirac se esta realmente for invariante por reflexões. Isso pode ser verificado fazendo

$$\begin{aligned} P: \quad & (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi(t, \mathbf{r}) \\ & \rightarrow \left(\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\boldsymbol{\gamma} \cdot (-\nabla) - mc\right)\gamma^0\psi(t, -\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (7.14)$$

depois corrige-se o sinal de menos nas derivadas espaciais passando  $\gamma^0$  à direita e usando as relações de anticomutação das matrizes gama. Assim sendo, recupera-se  $\partial_\mu$  e retorna-se à equação na forma

$$\gamma^0(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi(t, -\mathbf{r}) = 0. \quad (7.15)$$

O  $\gamma^0$  à esquerda pode ser eliminado multiplicando a equação por outro  $\gamma^0$  pela direita e o resultado é a equação de Dirac novamente, a qual evidentemente  $\psi(t, -\mathbf{r})$  obedece [14].

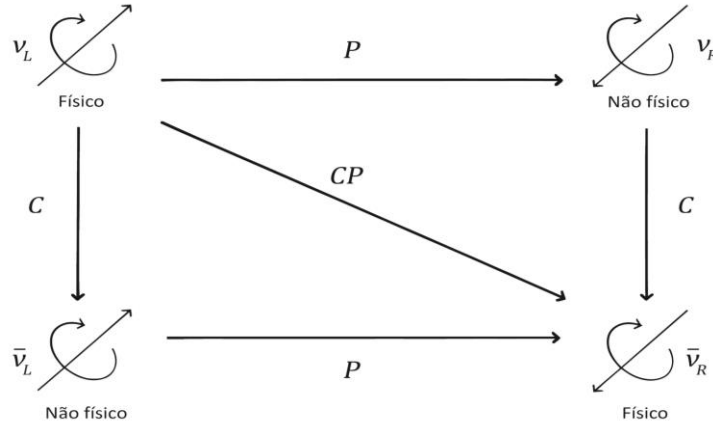
## 7.2. Neutrino

Na época os físicos consideravam a paridade como uma simetria da natureza sem tê-la explorado experimentalmente. Por isso a maioria dos físicos desconsiderava a equação de Weyl. Só depois de se depararem com um problema conhecido como “ $\theta$ - $\tau$  puzzle”, relacionado com o decaimento de mésons  $K^0$ , é que começaram uma busca para verificação experimental da paridade. Em 1956, Tsung Dao Lee e Cheng Ning Yang propuseram que a paridade não era uma simetria das interações fracas [15][16].

Em um experimento realizado no ano de 1957, pela física Chieng-Shiung Wu em colaboração com E. Ambler *et. al.*, no qual foi estudado o decaimento beta de núcleo de  $Co^{60}$ , procurou-se por um termo pseudoescalar, com o spin nuclear e o momento do elétron da forma  $\mathbf{J}_{núcleo} \cdot \mathbf{p}_{elétron}$  na interação efetiva, que quebraria a paridade. No experimento verificou-se a não conservação da paridade, comprovada pelo fato de que os elétrons eram emitidos preferencialmente na direção oposta ao spin nuclear [16].

Ao saberem da notícia, alguns físicos, como Abdus Salam e Lev D. Landau, ressuscitaram a teoria de Weyl [11][13] de uma partícula sem massa de duas componentes para o neutrino, que em 1956 finalmente havia sido descoberto (neutrino do elétron). Inicialmente conjecturou-se que o motivo da quebra de paridade na natureza era devido ao fato de os neutrinos serem férmions de Weyl. Mas o motivo reside na interação fraca que contém um termo de acoplamento  $V-A$ , envolvendo um vetor e um vetor axial [11][16], assim como em (7.6). O termo de interação também inclui  $\gamma^5$ , que garante o caráter quiral da interação: apenas a componente canhota (destra) dos férmions (antiférmions) participa da interação. Isso explica por que não foram observados neutrinos (antineutrinos) destros (canhotos), o que viola completamente a paridade. Pauli afirma ter ficado abalado ao saber que “Deus é canhoto” [13]. Hermann Weyl (1885-1955) faleceu pouco antes de a paridade cair por terra.

Apesar da interação fraca não ser invariante sob  $P$  ( $C$  e  $T$ , inclusive), ela é quase invariante sob  $CP$ , isto é, a operação combinada de conjugação de carga e paridade. E “quase” porque apenas 0.3% das interações fracas violam  $CP$  [17], como, por exemplo, os decaimentos de mésons  $K^0$  e de mésons  $B$ . A Figura 1 mostra como  $CP$  recuperam os neutrinos observados na natureza. Se a reversão temporal for incluída, o teorema  $CPT$  afirma que toda interação física é invariante sob  $C$ ,  $P$  e  $T$  tomados conjuntamente, e uma violação de  $CP$  deve ser acompanhada de uma violação de  $T$ . Até o momento, todas as interações, inclusive a fraca, aparentam ser invariantes sob  $CPT$ , em concordância com o teorema.



**Figura 1.** Ilustração adaptada de [16]. A figura mostra os sentidos do movimento e do spin do neutrino e como se transformam sob  $C$ ,  $P$  e  $CP$ . Na Figura, os casos nos quais os neutrinos não foram observados são chamados de “não físico”, enquanto que nos casos em que foram observados, de “físico”.

Entretanto, experimentos subsequentes à descoberta dos neutrinos mostraram que eles possuíam massa. Com medidas cada vez mais precisas, estabeleceu-se um limite superior na massa do neutrino do elétron, de  $10 \text{ eV}/c^2$  [4]. Então, retomando a discussão do Capítulo 4, a helicidade dos neutrinos não é um invariante de Lorentz, pois como sua massa é diferente de zero, há um referencial em que a helicidade de um neutrino inverte-se. Quanto à paridade, ela ainda é quebrada, pois, no decaimento beta, por exemplo, os neutrinos (antineutrinos) emitidos sempre serão de helicidade canhota (destra). Isso não depende do fato deles possuírem massa ou não, o motivo é devido à natureza da interação fraca.

O fato de nunca se ter observado neutrinos destros poderia explicar o porquê dos neutrinos possuírem uma massa extremamente pequena. Na densidade de Lagrangeana de Dirac

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^\mu \partial_\mu - mc^2)\psi, \tag{7.16}$$

o termo que contém a massa, chamado de massa de Dirac, é

$$mc^2\bar{\psi}\psi = mc^2(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R), \tag{7.17}$$

com os termos destro e canhoto misturados entre si e uma massa igual para ambos. Se os neutrinos adquirissem massa como os outros férmions, pelo campo de Higgs, o neutrino do elétron, por exemplo, teria uma massa comparável à do elétron [4]. Mas como isso não é o que se observa então a massa de Dirac provavelmente é zero. Um termo de massa de Majorana poderia ser uma alternativa para explicar a pequena massa dos neutrinos, caso eles sejam férmions de Majorana, isto é, se forem suas próprias antipartículas [16]. Entretanto, os mecanismos pelos quais os neutrinos adquirem massa ainda é motivo de pesquisas.

---

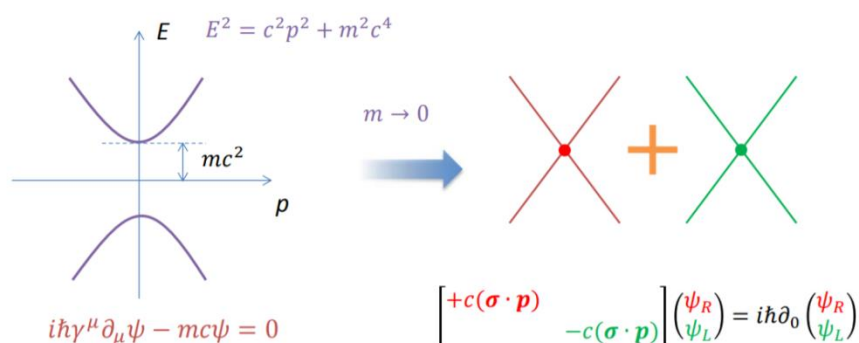
Na física de altas energias, portanto, nenhum férmion sem massa foi observado. Seja como for, as equações de Weyl e a física que vem delas deixaram um legado:  $\psi_L$  e  $\psi_R$  são os blocos de construção de qualquer férmion, descrevem os neutrinos com boa aproximação e seu formalismo é bastante útil na teoria das interações fracas, uma teoria claramente quirial. A física dos férmions de Weyl também aparece na matéria condensada e será explorada no Capítulo 8 a seguir.

## 8. Física da matéria condensada

A seguir, discorre-se de maneira simples sobre como as equações de Weyl aparecem na matéria condensada e as relevantes consequências de sua física neste contexto. Com base no que será abordado ao longo do presente Capítulo, será apresentada, no final, a observação dos férmions de Weyl em um cristal de arseneto de tântalo, o primeiro semimetal de Weyl descoberto experimentalmente.

### 8.1. Cruzamento linear de bandas

Em 1937, Conyers Herring investigou degenerescências em bandas eletrônicas de sólidos, notando que as bandas podiam se cruzar em pontos de mesma energia e momento [18]. Assim como no espectro de energia da Figura 2, em sólidos, notou-se que cruzamento linear de bandas relação, isto é, uma relação de dispersão linear pode imitar a física dos férmions de Weyl.



**Figura 2.** Ilustração retirada de [19]. Espectro de partículas de Dirac à esquerda. No limite em que a massa vai para zero, o *gap* (vão ou buraco) do termo de massa se fecha e o espectro se divide para as partículas canhotas e destros.

Apesar de essas partículas serem descritas por equações relativísticas, elas foram observadas pela primeira vez como quasipartículas emergentes em sistemas de baixas energias na matéria condensada.

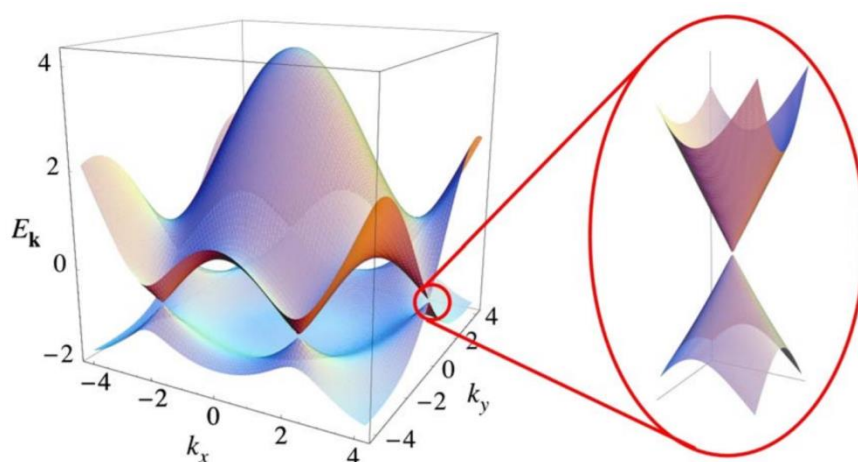
Cruzamento de bandas não é algo incomum. Entretanto, a física acessível experimentalmente reside em uma região de energia próxima ao nível de Fermi [19][20]. Isso

restringe o interesse apenas para materiais que possuem cruzamentos nessa região, ou, idealmente, exatamente no nível de Fermi. Os cruzamentos são chamados de acidentais ou desprotegidos quando pequenas perturbações abrem as bandas e eliminam os pontos, e de protegidos quando são protegidos por simetrias e/ou topologia, e perturbações não os elimina. Os pontos em que as bandas se cruzam são chamados de pontos ou nodos de Weyl, e são duplamente degenerados. Por analogia com a equação de Dirac, dois pontos de Weyl de quiralidades opostas constitui um ponto de Dirac quando sobrepostos, portanto, é quadruplicamente degenerado. Como será visto no Capítulo 8.2, será associada uma invariante topológica aos pontos de Weyl, que apenas correspondem a sua quiralidade.

A anomalia quiral, mencionada no final do Capítulo 6, persiste mesmo no contexto da física da matéria condensada. Em decorrência disso, o número de cruzamentos de bandas na rede deve ser par e a soma de suas respectivas quiralidades igual a zero, como de acordo com o teorema provado em 1983 por Nilsen e Ninomyia, que consolidou a descrição dos férmions de Weyl em redes [18][20][21].

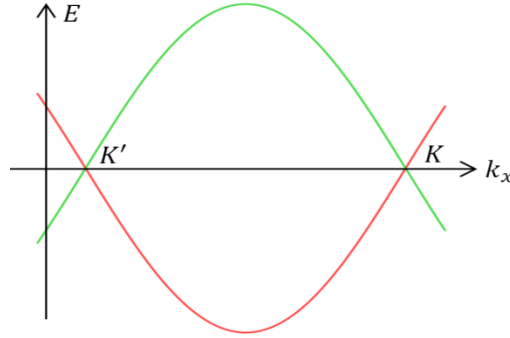
O grafeno é o mais notável exemplo bidimensional que exhibe cruzamento de bandas e férmions quirais em sua estrutura. Embora seu modelo conceitual já existisse, o grafeno foi isolado do grafite pela primeira vez por Novoselov *et al* em 2004 [22]. Composto de uma folha de átomos de carbono de apenas um átomo de espessura, e ganhou atenção desde então por suas propriedades eletrônicas, além de ser extremamente resistente e flexível.

O arranjo da rede do grafeno é o de colmeia, e muitas de suas propriedades vêm da estrutura das bandas de valência e de condução, apresentada na Figura 3.



**Figura 3.** Ilustração retirada de [22]. Estrutura das bandas de valência e condução do grafeno na zona de Brillouin e os pontos em que as bandas se cruzam linearmente.

Na zona de Brillouin, as bandas de valência e de condução se tocam em dois pontos diferentes, denominados por  $K$  e  $K'$ , que pertencem a duas sub-redes do grafeno. A Figura 4 abaixo mostra uma seção transversal por  $k_x$  das bandas.



**Figura 4.** Ilustração adaptada de [23]. Seção transversal das bandas no grafeno, em que são indicados os pontos  $K$  e  $K'$  onde as bandas se tocam e o comportamento da relação de dispersão perto desses pontos é linear.

Idealmente, no grafeno, as bandas se cruzam exatamente no nível de Fermi. Perto dos pontos, onde a relação de dispersão é linear, a modelagem dos hamiltonianos, escritos em termos do vetor de onda  $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ , é [19][24][25][26]

$$H = \begin{pmatrix} H_K & 0 \\ 0 & H_{K'} \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

com

$$H_{K,K'} = \pm v_F \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}. \quad (8.2)$$

Se não fosse por  $v_F$ , a velocidade de Fermi, no lugar da velocidade da luz, seriam idênticos aos hamiltonianos (2.35) para férmions sem massa. Para o grafeno,  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, 0)$ , o sinal + (−) corresponde ao ponto  $K$  ( $K'$ ) e  $v_F \cong c/300$  [22], uma velocidade bem abaixo do limite relativístico, pois  $\beta^2 = v_F^2/c^2 \sim 10^{-5}$ , de forma que o fator de Lorentz  $\gamma \cong 1$ .

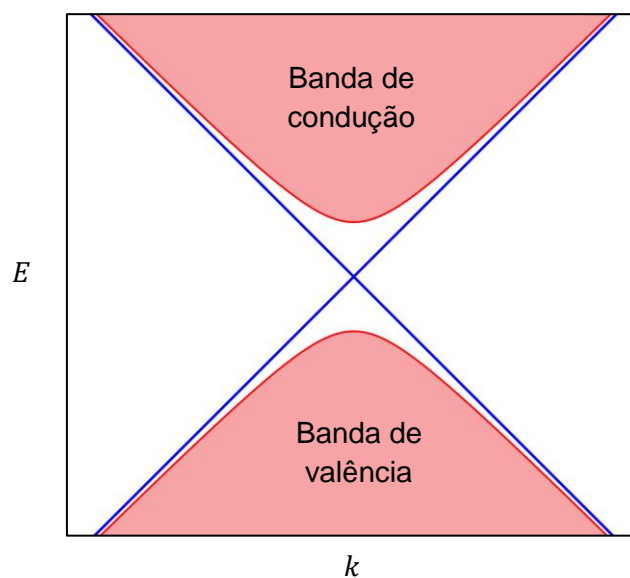
Para quasipartículas na matéria condensada, no entanto, o spin pode ou não corresponder ao spin real do elétron. No caso do grafeno, as matrizes de Pauli que aparecem em (8.1) continuam sendo os geradores do grupo de rotação para spin 1/2, mas descrevem um pseudospin [18][19][22][27], ou seja, um grau de liberdade que corresponde às sub-redes do grafeno, com os pontos em que as bandas se cruzam. Portanto, é importante ressaltar que as equações de Weyl, como as que resultam de (8.2), na matéria condensada são fundamentalmente diferentes das equações relativísticas de Weyl da física de altas energias, apesar de serem matematicamente semelhantes.

No caso tridimensional, uma perturbação expandida perto de um ponto de Weyl tem a forma geral  $\delta_0 \mathbf{1} + \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ , com o primeiro termo responsável por deslocar o ponto em energia, e o segundo termo por deslocar o ponto no espaço do momento, porém preservando o ponto. Os pontos tridimensionais, portanto, são topologicamente estáveis, e requerem apenas a simetria translacional da rede [19]. Já nos materiais bidimensionais, a ausência de  $\sigma_3 k_3$  torna os pontos suscetíveis a se abrirem, gerando termos de massa no hamiltoniano, como

$$H = \pm v_F \hbar (\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2) + \tilde{m} \sigma_3, \quad (8.3)$$

se não houver simetrias que os protejam. No grafeno, se  $P$  e  $T$  são preservadas nos hamiltonianos, os termos de massa que acompanham  $\sigma_3$  devem ser zero. Quebrando uma ou outra, dá-se origem a diferentes termos de massa [25]. Por exemplo, trocando os átomos das sub-redes do grafeno por átomos diferentes entre si, como nos dicalcogenetos de metais de transição [19],  $P$  quebra-se e abre um *gap* (vão ou buraco) de massa na banda.

Ainda sobre o grafeno, com o spin real do elétron levado em conta, tem-se o termo de acoplamento spin-órbita, que é pequeno e pode ser desprezado. Entretanto, se não desprezado, esse termo faz com que as bandas se abram no seu interior, chamado *bulk*, mas mantendo os cruzamentos de banda em sua borda unidimensional, levando o material à fase conhecida como isolante de efeito QSH (*quantum spin-Hall*) ou isolante topológico bidimensional [19][28]. Generalizando para três dimensões, as bandas no *bulk* dos isolantes topológicos têm *gap* em toda a zona de Brillouin, como em um isolante comum, mas na superfície as bandas de valência e de condução se cruzam, como esquematizado na Figura 5.



**Figura 5.** Ilustração adaptada de [28]. Relação de dispersão de um isolante topológico: na superfície (em azul) e no *bulk* (em vermelho).

## 8.2. Topologia

A manifestação da topologia em sistemas quânticos pode ser vista a partir da curvatura de Berry, em homenagem a Michael Berry por seu trabalho de 1984 [29] sobre evoluções adiabáticas cíclicas de sistemas quânticos.

Considerando um sistema descrito por um Hamiltoniano  $H(\mathbf{k})$  evolui adiabaticamente até retornar ao seu estado original, ele adquire uma diferença de fase conhecida como fase de Berry [30]. Se um sistema preparado no estado inicial  $|\psi(t_0)\rangle = |n(\mathbf{k}(t_0))\rangle$  evolui para o estado  $|n(\mathbf{k}(t))\rangle$ , então no tempo  $t$

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\gamma_n(\mathbf{k}(t))} e^{-i/\hbar \int_{t_0}^t E_n(\mathbf{k}(t')) dt'} |n(\mathbf{k}(t))\rangle, \quad (8.4)$$

no qual a segunda exponencial é a evolução temporal de  $|n(\mathbf{k}(t))\rangle$ . Aplicando a equação de Schrödinger no estado  $|\psi(t)\rangle$ , verifica-se que a fase de Berry, que aparece na primeira exponencial em (8.4), será

$$\begin{aligned} \gamma_n(\mathbf{k}(t)) &= i \int_{t_0}^t \langle n(\mathbf{k}(t')) | \frac{d}{dt'} |n(\mathbf{k}(t'))\rangle dt' \\ &= i \int_{\mathbf{k}(t_0)}^{\mathbf{k}(t)} \langle n(\mathbf{k}') | \nabla_{\mathbf{k}'} |n(\mathbf{k}')\rangle d\mathbf{k}', \end{aligned} \quad (8.5)$$

e se o processo é cíclico, então  $\mathbf{k}(t_0) = \mathbf{k}(t)$  e pode-se reescrever (7.5) como

$$\gamma_n = i \oint_C \langle n(\mathbf{k}) | \nabla_{\mathbf{k}} |n(\mathbf{k})\rangle d\mathbf{k}. \quad (8.6)$$

A conexão de Berry é definida como

$$\mathcal{A}_n(\mathbf{k}) = \langle n(\mathbf{k}) | \nabla_{\mathbf{k}} |n(\mathbf{k})\rangle \quad (8.7)$$

e representa uma espécie de potencial vetorial da curvatura de Berry

$$\mathcal{F}_n(\mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathcal{A}_n(\mathbf{k}). \quad (8.8)$$

O fluxo da curvatura de Berry na zona de Brillouin é

$$\int_{ZB} \mathcal{F}_n(\mathbf{k}) d^2k = 2\pi N_n, \quad (8.9)$$

em que as invariantes topológicas  $N_n$  são conhecidas como números de Chern [31].

O fluxo em (8.9) pode ser encarado como uma abstração do elegante teorema de Gauss-Bonnet [28][32][33], do século XIX, que estabeleceu a relação entre topologia e geometria diferencial. Esse teorema diz que se  $S$  é uma superfície orientável compacta, então

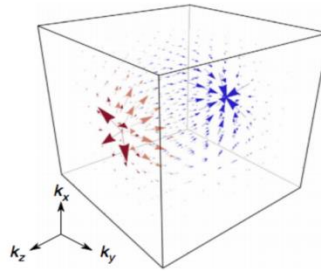
$$\int_S \kappa ds = 2\pi\chi(S), \quad (8.10)$$

em que  $\kappa$  é a curvatura gaussiana de  $S$ . A característica de Euler  $\chi(S) = 2 - 2g$  contém o *genus*  $g$  da superfície, que é o número de buracos que ela possui. Por exemplo, a esfera, que não possui buracos,  $g = 0$ ; para um toróide,  $g = 1$ ; para um duplo toróide, cujo formato lembra um oito,  $g = 2$ , e assim por diante.

Para uma esfera suficientemente pequena centrada em um ponto de Weyl tridimensional, fazendo o fluxo de Berry para a banda de valência, encontra-se

$$\mathcal{F}_n(\mathbf{k}) = N_n \frac{\mathbf{k}}{2k^3}. \quad (8.11)$$

No caso dos pontos de Weyl,  $N_n = \pm 1$  indica apenas sua quiralidade, em que na zona de Brillouin sua soma total deve ser igual a zero [10][18][19][20]. De (8.11) dá pra notar que os pontos de Weyl são como monopolos do fluxo de Berry, agindo como *sources* (fontes) e *sinks* (drenos) no espaço do momento, como mostra a Figura 6.



**Figura 6.** Ilustração retirada de [10]. Monopolos da curvatura de Berry no espaço do momento. As setas indicam o fluxo da curvatura de Berry da fonte para o dreno.

Superfícies de mesmo *genus* são topologicamente equivalentes se puderem ser deformadas continuamente uma na outra. Um exemplo recorrente é o da caneca e o do toróide, ambos com  $g = 1$ , em que a caneca pode ser suavemente deformada em um toróide. De maneira análoga, os isolantes comuns, que possuem um *gap* de energia na banda, são topologicamente equivalentes se puderem ser transformados um nos outros mudando continuamente os parâmetros do hamiltoniano. Um estado quântico é dito topológico se houver uma quantidade discreta, um invariante topológico (como  $N_n$ ), que caracteriza as funções de onda e que é preservado em deformações adiabáticas do sistema [10]. Em contraste com os isolantes comuns, os isolantes topológicos são caracterizados por possuírem estados topologicamente protegidos na superfície, descritos por férmions de Dirac.

O primeiro exemplo de um isolante topológico foi encontrado por Thouless, Kohmoto, Nightingale e den Nijs (TKNN) ainda em 1982, em um trabalho sobre o efeito Hall quântico inteiro [31].

### 8.3. Estados de superfície e arcos de Fermi

Se um férmion de Dirac, confinado a um cristal, por exemplo, for refletido por uma barreira, a condição de contorno pode inverter sua helicidade de modo que o spin é conservado. Mas para um férmion de Weyl, a condição de contorno não deve inverter sua helicidade. Para uma reflexão em  $x_1 = 0$ , tal condição de contorno em que isso é satisfeito é apresentada na Referência [20] como

$$(\sigma_2 \cos \alpha + \sigma_3 \operatorname{sen} \alpha) \psi|_{x_1=0} = \psi|_{x_1=0}, \quad (8.12)$$

para um certo ângulo  $\alpha$ . Considerando o caso em que  $\alpha = 0$ , (8.12) se torna simplesmente

$$\sigma_2 \psi|_{x_1=0} = \psi|_{x_1=0}. \quad (8.13)$$

Dada essa condição, para um hamiltoniano de Weyl na região perto de um ponto, obtém-se

$$H\psi = -i\hbar v(\sigma_1 \partial_1 + \sigma_2 \partial_2 + \sigma_3 \partial_3) \psi = -i\hbar v(\sigma_1(\partial_1 - i\partial_3) + \partial_2) \psi, \quad (8.14)$$

em que foi usada a identidade  $\sigma_3 = -i\sigma_1\sigma_2$  das matrizes de Pauli. O bom dessa condição de contorno é que o hamiltoniano permanece hermitiano, mesmo para  $\alpha \neq 0$ . A equação de Schrödinger independente do tempo,  $H\psi = \varepsilon\psi$ , com a condição (8.13) e com o hamiltoniano (8.14), é satisfeita por

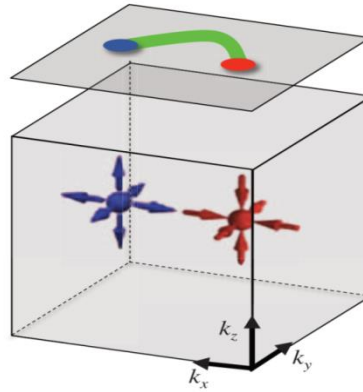
$$\psi = \psi_0 e^{k_1 x_1 + i k_2 x_2 - i k_1 x_3}, \quad (8.15)$$

para  $x_1 \geq 0$ ,  $k_2 = \varepsilon/\hbar v$  e com o espinor  $\psi_0$  obedecendo  $\sigma_2 \psi_0 = \psi_0$ .

Se  $k_1 < 0$ , a solução (8.15) decai exponencialmente em  $x_1$  à medida que se afasta de  $x_1 = 0$ . Desse simples modelo, portanto, emergem estados localizados em uma superfície. Para  $k_1 = 0$ , a solução se torna uma onda plana com momento na direção  $x_2$ , indistinguível de um estado no *bulk*. Outra observação importante é que esses estados estão em uma linha no espaço dos momentos, em  $k_1 < 0$  e  $k_2 = \varepsilon/\hbar v$ , no que é chamado de arco de Fermi. Assim como mostra a Figura 7, os arcos de Fermi começam a partir de um ponto de Weyl devem terminar em outro, ou seja, suas extremidades estão associadas a um par de monopolos da curvatura de Berry. Se os pontos de Weyl estão combinados em um ponto de Dirac, não haverá um arco de Fermi.

No *bulk*, as componentes de  $\mathbf{k}$  são conservadas separadamente. Entretanto, perto das fronteiras, as componentes do momento perpendiculares a ela não são conservadas. No caso da fronteira em  $x_1 = 0$ , por exemplo, a componente perpendicular  $k_\perp = k_1$  não é conservada.

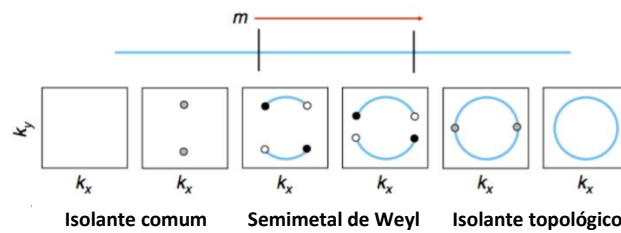
Então se procura especificar os pontos de Weyl apenas pelas suas componentes paralelas, que para  $k_{\perp} = k_1$  seria  $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_2, k_3)$ . Dois pontos de Weyl de quiralidades opostas com o mesmo  $\mathbf{k}_{\parallel}$  compõem um ponto de Dirac.



**Figura 7.** Ilustração retirada de [35]. Monopólos da curvatura de Berry no *bulk* e o arco de Fermi na superfície, com suas extremidades ligadas à fonte e ao dreno.

### 8.4. Semimetais de Weyl

Os semimetais de Weyl são outra classe de materiais tridimensionais que também apresentam pontos de Weyl protegidos topologicamente. Eles podem ser entendidos como uma fase intermediária entre os isolantes comuns e os topológicos, como ilustra a Figura 8.

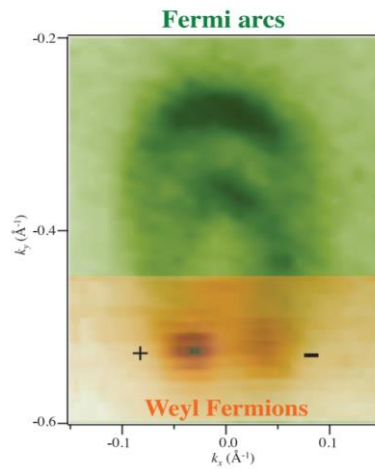


**Figura 8.** Ilustração retirada de [10]. Isolante comum, topológico e o semimetal de Weyl, intermediário entre os dois, como função de um parâmetro  $m$ . Os pontos em cinza representam pontos de Dirac; os pretos e brancos representam pontos de Weyl de quiralidades opostas; as linhas azuis, arcos de Fermi.

Um semimetal de Weyl (SMW) pode ser obtido a partir de um semimetal de Dirac (SMD). Nos SMDs, os pontos de Dirac são protegidos por  $T$  e  $P$ . A quebra de uma ou outra, e até mesmo de ambas, resulta em um SMW. Quebrando  $T$ , um ponto de Dirac se separa em dois pontos de Weyl de quiralidades opostas em momentos opostos  $\pm\mathbf{k}$ . Quebrando  $P$ , um ponto de Dirac se divide em dois pontos de Weyl de mesma quiralidade em momentos

opostos  $\pm\mathbf{k}$ , o que significa que aparece outro par de pontos de quiralidade diferente nos momentos  $\pm\mathbf{k}'$ , de modo que a quiralidade total seja zero. A quebra de ambas cria pontos de Weyl para momentos não específicos e em energias diferentes. A Referência [10] dá alguns exemplos de como isso pode ser feito experimentalmente.

Então, foi previsto que nos SMWs seria possível observar experimentalmente os pontos de Weyl e seus arcos de Fermi. Após previsões teóricas de possíveis cristais candidatos a SMW, três equipes independentes finalmente descobriram, em 2015 [34], os análogos dos férmions de Weyl na matéria condensada, quase 85 anos depois que foram propostos. Duas das equipes, Zahid Hasan *et al* [35] e Hong Ding *et al* [36], usando espectroscopia de fotoemissão resolvida em ângulo, ou ARPES (*Angle Resolved PhotoEmission Spectroscopy*), observaram diretamente os arcos de Fermi, assim como os pontos de Weyl, no *bulk* de um cristal que quebra  $P$ , o TaAs (arseneto de tântalo), o primeiro SMW descoberto experimentalmente. A Figura 9 abaixo mostra a observação experimental dos arcos de Fermi e os pontos de Weyl feita pela equipe de Zahid Hasan.



**Figura 9.** Ilustração retirada de [35]. Observação experimental via ARPES da equipe de Zahid Hasan *et al* dos férmions de Weyl, como monopolos e antimonopolos no espaço  $\mathbf{k}$ , e os arcos de Fermi em um cristal de TaAs.

A anomalia quiral, na presença de um campo eletromagnético e para uma determinada quiralidade  $N_n = \pm 1$ , é [10][27]:

$$\partial_\mu j_5^\mu = N_n \frac{e^3}{4\pi^2 \hbar^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (8.16)$$

e pôde ser medida pelas equipes de Zahid Hasan e Hong Ding na forma de uma magnetorresistência negativa.

## 9. Conclusão

Neste trabalho, tendo como base a relatividade restrita e a mecânica quântica em nível de graduação, exploraram-se, de maneira simples, as equações de Weyl, que resultam do caso não massivo da equação de Dirac, inicialmente voltadas para possíveis aplicações em física de altas energias. De fato, os conceitos alheios a ela realmente são úteis e possuem aplicações nessa área. Os espinores de Weyl desempenham um papel fundamental na estrutura da teoria da interação fraca. Inclusive, os neutrinos – ex-candidatos a férmions de Weyl na década de 1950 –, podem ser descritos com boa aproximação pelas equações de Weyl. Entretanto, como já foi dito no decorrer deste trabalho, férmions não massivos não foram observados na física de altas energias.

As equações de Weyl e sua física tornaram-se, recentemente, objeto de interesse da física de baixas energias. O que torna essa área um terreno fértil para a física, não somente para o caso dos férmions de Weyl, é o fato de que as simetrias obedecidas pelas partículas no espaço não necessariamente se aplicam às quasipartículas na física da matéria condensada. E ainda, os espaços que as quasipartículas habitam podem ser projetados e manipulados. Isso possibilita a existência de muitos tipos de quasipartículas na matéria, inclusive sem equivalentes na física de altas energias. As significativas e profundas conexões entre a matéria condensada e as teorias de campos da física de altas energias começaram a ser exploradas há não muito tempo, desde a década de 1950, quando Landau e Feynman foram talvez os primeiros a perceberem tais conexões, fazendo a intersecção de ideias entre as duas áreas [31].

Então, como era almejado, no Capítulo 8 foram apresentados os principais conceitos e resultados que permitem entender a descoberta das quasipartículas análogas dos férmions de Weyl na matéria condensada, em 2015, mas longe de ser uma revisão muito detalhada e completa sobre esse vasto assunto.

Os semimetais de Weyl e outros materiais topológicos podem, possivelmente, vir a ter aplicações tecnológicas. Na Referência [19] discorre-se sobre possíveis aplicações dos materiais de Dirac e de Weyl em spintrônica, em que o pseudospin seria manipulado para processar e armazenar informação. Outra possível aplicação é mencionada na Referência [31], em computação quântica topológica.

Na física da matéria condensada, a literatura a respeito desses materiais teve um grande crescimento nesta última década, e os materiais topológicos ainda são motivo de pesquisa de fronteira. Eles vêm sendo estudados desde o século passado, especialmente a partir da década de 1980.

## Referências

- [1] BELL, John L.; KORTÉ, Herbert. Hermann Weyl. *In: THE STANFORD Encyclopedia of Philosophy*. 2016. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/entries/weyl/#LifAch>. Acesso em: 9 out. de 2020.
- [2] BROWN, Laurie M.; HODDESON, Lillian. *The birth of particle physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.
- [3] EISELE, John A. *Modern quantum mechanics with applications to elementary particle physics*. New York: John Wiley & Sons, 1969.
- [4] PESKIN, Michael E.; SCHROEDER, Daniel V. *An introduction to quantum field theory*. Boulder, CO: Westview, 1995.
- [5] STRAUB, William O. *Weyl spinors and Dirac's electron equation*. 2005. Disponível em: <http://www.weylmann.com/weylDirac.pdf>. Acesso em: 9 out. 2020.
- [6] PENROSE, Roger. *The road to reality: a complete guide to the laws of the universe*. New York: Alfred A. Knopf, 2004.
- [7] DIRAC, Paul A. M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 117, n. 778, p. 610–624, 1928. Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1928.0023>. Acesso em: 8 out. 2020.
- [8] STEANE, Andrew M. *An introduction to spinors*. 2013. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1312.3824.pdf>. Acesso em: 9 out. 2020.

- 
- [9] PAL, Palash B. Dirac, Majorana and Weyl fermions. *American Journal of Physics*, v. 79, n. 485, p. 485-488, 2011. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1006.1718.pdf>. Acesso em: 9 out. 2020.
- [10] JAÏBI, O. *Topology and geometry in a quantum condensed matter system: Weyl semimetals*. 2016. Thesis (Master of Theoretical Physics). Lorentz Institute, Leiden University, Leiden, 2016. Disponível em: <https://studenttheses.universiteitleiden.nl/handle/1887/38763>. Acesso em: 18 dez. 2020.
- [11] HADJIIVANOV, Ludmil. *Neutrino, parity violation, V-A: a historical survey*. 2018. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1812.11629.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2020.
- [12] *All About Neutrinos: Ice Cube South Pole Neutrino Observatory*. Disponível em: <https://icecube.wisc.edu/info/neutrinos>. Acesso em: 15 nov. 2020.
- [13] STRAUMANN, Norbert. *Early history of gauge theories and weak interactions*. 1996. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/hep-ph/9609230.pdf>. Acesso em: 16 nov. 2020.
- [14] TONG, David. *Lectures on quantum field theory*. 2006. Disponível em: <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>. Acesso em: 8 out. 2020.
- [15] DIAZ-CRUZ, J. Lorenzo; LÁRIOZ LOPEZ, Bryan; MEZA-ALDAMA, O.; REYES PEREZ, Jonathan. *Weyl spinors and the helicity formalism*. 2015. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1511.07477.pdf>. Acesso em: 9 fev. 2021.
- [16] ROLNICK, William B. *The fundamental particles and their interactions*. New York: Addison-Wesley, 1994.
- [17] BOYD, Steve. *The weak interaction*. 2016. Disponível em: [https://warwick.ac.uk/fac/sci/physics/staff/academic/boyd/warwick\\_week/neutrino\\_physics/weak.pdf](https://warwick.ac.uk/fac/sci/physics/staff/academic/boyd/warwick_week/neutrino_physics/weak.pdf). Acesso em: 16 nov. 2020.

- 
- [18] ARMIRTAGÉ, N. Peter; MELE, J. Eugene; VISHWANATH, Ashvin. Weyl and Dirac Semimetals in Three-Dimensional Solids. *Reviews of Modern Physics*, v. 90, n. 15001, 2018. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1705.01111.pdf>. Acesso em: 13 dez. 2020.
- [19] YANG, A. Shengyuan. Dirac and weyl materials: fundamental aspects and some spintronics applications. *Spin*, v. 06, n. 1640003, p. 1–19, 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1609.06482.pdf>. Acesso em: 7 dez. 2020.
- [20] WITTEN, Edward. Three lectures on topological phases of matter. *La Rivista del Nuovo Cimento*, v. 39, p. 313-370, 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1510.07698.pdf>. Acesso em: 7 dez. 2020.
- [21] VAFEK, Oskar; VISHWANATH, Ashvin. Dirac fermions in solids: from high tc cuprates and graphene to topological insulators and weyl semimetals. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, v. 5, p. 83-112, 2014. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1306.2272.pdf>. Acesso em: 13 dez. 2020.
- [22] NETO, A. H. Castro *et al.* The eletronic properties of graphene. *Reviews of Modern Physics*, v. 81, Jan./Mar. 2009. Disponível em: [http://www.condmat.physics.manchester.ac.uk/pdf/mesoscopic/publications/graphene/RMP\\_2009.pdf](http://www.condmat.physics.manchester.ac.uk/pdf/mesoscopic/publications/graphene/RMP_2009.pdf). Acesso em: 11 dez. 2020.
- [23] CAYSSOL, Jérôme. Introduction to Dirac materials and topological insulators. *Comptes Rendus Physique*, v. 14, n. 9, p. 760-778, 2013. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1310.0792.pdf>. Acesso em: 14 dez. 2020.
- [24] WEHLING, T. O.; BLACK-SCHAFFER, A. M.; BALATSKY, A. V. Dirac materials. *Advanced Physics*. v. 76, n. 1, p. 1-77, 2014. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1405.5774.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2020.
- [25] HASAN, M. Z.; KANE, Charles L. Topological insulators. *Reviews of Modern Physics*, v. 82, n. 3045, 2010. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1002.3895.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2020.

- 
- [26] KIM, Philip. *Graphene and relativistic quantum physics*. 2014. Disponível em: <http://www.bourbaphy.fr/kim.pdf>. Acesso em: 11 dez. 2020.
- [27] KAR, Satyaki; JAYANNAVAR, Arun M. A Primer on Weyl Semimetals: Down the Discovery of Topological Phases. 2019. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1902.01620.pdf>. Acesso em: 7 dez. 2020.
- [28] FERREIRA NETO, Osvaldo. *Explorando a equação de Dirac: um passeio por isolantes topológicos e férmions de Majorana*. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Física de Materiais) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/28185/4/ExplorandoEqua%C3%A7%C3%A3oDirac.pdf>. Acesso em: 1 nov. 2020.
- [29] BERRY, M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society A*, v. 392, n. 1802, Mar. 1984. Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1984.0023>. Acesso em: 26 nov. 2020.
- [30] XIAO, Di; CHANG, Ming-Che; NIU, Qian. Berry phase effects on electronics properties. *Reviews of Modern Physics*, v. 82, n. 1959, July 2010. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/0907.2021.pdf>. Acesso em: 26 dez. 2020.
- [31] FRADKIN, Eduardo. *Field theories of condensed matter physics*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- [32] ROTSKOFF, Grant. The Gauss-Bonnet theorem. 2010. Disponível em: <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Rotskoff.pdf>. Acesso em: 18 dez. 2020.
- [33] BATRA, Navketan; SHEET, Goutam. Understanding basic concepts of topological insulators through Su-Schrieffer-Heeger (SSH) model. *Resonance*, v. 25, n. 20, p. 765-786, Jun. 2020. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1906.08435.pdf>. Acesso em: 22 dez. 2020.

- 
- [34] VISHVANATH, Ashvin. *Where the weyl things are*. 2015. Disponível em: <https://physics.aps.org/articles/v8/84>. Acesso em: 8 out. 2020.
- [35] HASAN, M. Zahid *et al.* Discovery of a weyl fermion semimetal and topological fermi arcs. *Science*, v. 349, n. 6248, p. 613-617, Aug. 2015. Disponível em: <https://science.sciencemag.org/content/349/6248/613>. Acesso em: 29 dez. 2020.
- [36] DING, Hong *et al.* Experimental Discovery of Weyl Semimetal TaAs. *Physical Review X*, v. 5, n. 031013, 2015. Disponível em: <https://journals.aps.org/prx/pdf/10.1103/PhysRevX.5.031013>. Acesso em: 29 dez. 2020.