Università degli Studi di Trieste

Dipartimento di Fisica
Corso di Laurea in Fisica

EFFETTI DI PARTICELLE ULTRA LEGGERE DI SPIN ZERO SULLA PROPAGAZIONE DELLA LUCE IN CAMPI MAGNETICI ED ELETTRICI

Candidato:
Gabriele Rigo

Relatore:
Prof. Emidio Gabrielli

Anno Accademico 2014–2015

Indice

Sommario

L'obiettivo del presente lavoro di tesi è di analizzare la propagazione della luce in presenza di un campo elettromagnetico esterno e ipotizzando l'interazione con un campo scalare o pseudoscalare neutro, a cui è associata una corrispondente particella di spin 0. La forma di tale interazione viene assunta sulla base di considerazioni generali fondate sull'invarianza di gauge e su simmetrie discrete della teoria. Per il caso della particella pseudoscalare, la struttura della relativa interazione trae le sue origini dalla necessità di trovare una naturale soluzione al problema delle violazioni di CP nelle interazioni forti, nell'ambito della cromodinamica quantistica. In particolare, vengono studiate varie situazioni a seconda che la propagazione della luce sia in campi esterni elettrici o magnetici e in presenza di particelle scalari o pseudoscalari ultraleggere.

Successivamente, si descrivono gli effetti ottici che possono essere ricavati dalle equazioni del moto per la particella e per il campo elettromagnetico in un caso specifico. Infine, vengono presentate brevemente le tecniche sperimentali atte a rivelare tali particelle e si discutono i risultati conseguiti e i recenti obiettivi per la ricerca nel settore.

Abstract

The aim of this work is to analyze the propagation of light in the presence of an external electromagnetic field, under the assumption of an effective interaction between the electromagnetic field and a neutral scalar or pseudoscalar field, to which is associated a corresponding spin 0 particle. The shape of this interaction has been assumed from general considerations based on gauge invariance and discrete symmetries of the theory. In the pseudoscalar case, the structure of the corresponding interaction originates from the efforts of finding a natural solution to the problem of CP violations in strong interactions, in the framework of quantum

chromodynamics. In particular, different scenarios are analyzed, which correspond to the cases of light propagation in static external electric or magnetic fields and in the presence of scalar or pseudoscalar ultralight particles.

Thereafter, the focus goes to optical effects that are derived from the equations of motion for the particle and for the electromagnetic field in a specific case. Finally, the various experimental techniques aimed at detecting the effects of such particles are reviewed, including a discussion on the relevant results obtained by these experiments and their implications for the research in this sector.

Capitolo 1

Introduzione

L'obiettivo del presente capitolo è di esporre brevemente i fondamenti teorici che spingono a considerare un'interazione tra una particella ultra leggera di spin 0 e la radiazione elettromagnetica, per poi descrivere le ricerche sperimentali dedicate a testare ed approfondire tali modelli.

Generalmente, parlando di una particella pseudoscalare ultra leggera di spin 0 ci si riferisce all'assione o alle ALPs (Axion-Like Particles). Questo venne teorizzato per la prima volta nel 1977 da Peccei e Quinn [1] in un contesto di cromodinamica quantistica (QCD), la teoria moderna fondamentale delle interazioni forti [2, 3], per garantire in modo naturale la conservazione della simmetria discreta di CP [1] nei fenomeni delle interazioni forti. L'anno successivo arrivò un'altro importante contributo da parte di Wilczek [4], che identificò nell'assione il quanto del campo pseudoscalare responsabile dell'interazione in grado di conservare CP.

Come verrà spiegato in seguito, l'interazione tra il campo elettromagnetico costituisce un'interazione effettiva. Quest'ultima è caratterizzata dal prodotto Lorentz invariante tra il campo pseudoscalare e il tensore elettromagnetico contratto con il suo duale. Per questioni dimensionali, tale interazione fondamentale è divisa per una scala effettiva che ne identifica l'accoppiamento, che in unità relativistiche ha le dimensioni di un'energia. Siccome le predizioni teoriche indicano che la costante di scala deve essere molti ordini di grandezza al di sopra del GeV, l'effetto di interazione con i campi elettromagnetici tipicamente impiegati in laboratorio risulta estremamente soppresso e pertanto difficile da osservare.

Negli anni successivi, furono ideati una serie di modelli per la realizzazione di esperimenti adatti a rivelare la presenza dell'assione in base alla sua interazione con il campo elettromagnetico. Perciò, a causa dell'interazione effettiva, si genera un fenomeno di mixing tra il campo elettromagnetico e quello dell'assione nella loro propagazione libera. In tale contesto, sono particolarmente rilevanti i contributi di

[1] La trasformazioni di CP è il prodotto delle due trasformazioni discrete associate alla coniugazione di carica (scambio particella-antiparticella) e parità.

Maiani, Petronzio e Zavattini [5], su cui è fondato nella maggior parte questo lavoro di tesi, e di Raffelt e Stodolsky [6], che tra le altre cose estende l'analisi di Maiani, Petronzio e Zavattini discutendone i risultati. Da ciò hanno origine una serie di esperimenti, come PVLAS [7–9], che si prefiggono di studiare le proprietà ottiche del vuoto e che permettono di stabilire dei limiti sulla massa e sull'accoppiamento dell'assione.

Tuttavia, il problema di CP forte non è l'unico ambito per il quale l'assione costituisce una possibile soluzione: in astrofisica, esso rappresenta il principale candidato non-WIMP (Weakly Interacting Massive Particle) per la materia oscura [10–12]. Una grande quantità di risorse sono state dunque impiegate per la ricerca degli assioni solari. Ad esempio, sulla base di modelli come quelli di KSVZ [13, 14] e DFSZ [15, 16], è stato progettato l'esperimento CAST (CERN Axion Solar Telescope), che non è stato in grado di rivelare alcun segnale al di sopra del background, ma che ha stabilito come limite superiore per l'inverso della costante di accoppiamento dell'interazione $8{,}8 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{GeV}^{-1}$ per una massa dell'assione $m < 0{,}02\,\mathrm{eV}$ [17, 18]. In breve, i fondamenti del funzionamento di CAST sono i seguenti: il forte campo magnetico del Sole genera un fenomeno di mixing tra i fotoni e gli assioni come conseguenza dell'interazione, descritta in precedenza, in presenza di un campo magnetico esterno, così le particelle pseudoscalari possono arrivare fino alla Terra. Teoricamente, in laboratorio dovrebbe essere possibile sfruttare il processo inverso e convertire gli assioni in fotoni, in modo da vedere comparire una radiazione elettromagnetica essenzialmente dal nulla [19]. Analogamente, una riconversione di questo tipo viene impiegata anche negli esperimenti di light shining through the wall. Oltre a questi, molte altre ricerche puntano alla scoperta di assioni, sia basate su modelli astrofisici che non [20].

In questo contesto, sono state analizzate le soluzioni delle equazioni che regolano la propagazione della luce in presenza di un campo elettromagnetico esterno omogeneo e costante nel tempo. Tali equazioni sono state ricavate tenendo conto dell'interazione effettiva tra il campo elettromagnetico e i campi pseudoscalare (assione) o scalare ultra leggeri, secondo quanto descritto in precedenza. Successivamente, sono state studiate le proprieta ottiche del sistema. In particolare:

Il capitolo 2 permette di ricavare le equazioni del moto per il campo elettromagnetico e per il campo scalare o pseudoscalare in presenza di un campo esterno magnetico o elettrico, utilizzando un formalismo tipico della teoria dei campi classica.

Il capitolo 3 restringe l'analisi al caso di una particella pseudoscalare in un campo magnetico esterno e analizza gli effetti ottici causati dall'interazione effettiva tra tale particella e il fotone, per poi descrivere brevemente le tecniche di ricerca e i risultati dell'esperimento PVLAS.

Il capitolo 4 riassume il procedimento seguito nel presente lavoro di tesi e ne espone le conclusioni.

L'appendice A richiama le convenzioni, le notazioni e i formalismi utilizzati nel corso del lavoro.

L'appendice B descrive alcuni risultati dell'elettrodinamica classica, soprattutto in relazione al formalismo relativistico.

L'appendice C riporta la lagrangiana di Euler–Heisenberg nella forma esatta e in una possibile espansione perturbativa.

Capitolo 2

Modello teorico

Lo scopo del capitolo corrente è quello di analizzare le equazioni di campo classiche nell'ambito del modello accennato in precedenza, in cui il campo elettromagnetico ha un'interazione effettiva con un campo pseudoscalare classico φ. In questo caso, la lagrangiana classica libera è data dalla somma della lagrangiana di Maxwell e di quella di Klein–Gordon, da cui derivano le omonime equazioni. In particolare, per le corrispondenti densità di lagrangiane libere, utilizzando come spiegato in appendice A la convenzione $\hbar = c = 1$, si ha

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{KG}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \tag{2.2}$$

In tale notazione, j^μ rappresenta il quadrivettore densità di corrente, A^μ è il quadripotenziale elettromagnetico e φ è il campo associato alla particella di massa m. Infine, $F^{\mu\nu}$ è il tensore elettromagnetico, che si può esprimere a seconda delle occasioni sia in funzione del quadripotenziale vettore che dei campi magnetico ed elettrico. Insieme, queste lagrangiane costituiscono la parte cinetica libera del sistema in questione.

A questo punto, si tratta di completare la lagrangiana con la parte di interazione tra il campo elettromagnetico e quello della particella in analisi, che verrà discussa in seguito.

2.1 Particella pseudoscalare

Nel caso di una particella pseudoscalare, l'interazione effettiva tra il campo elettromagnetico e un campo pseudoscalare neutro è la seguente:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{P}} = \frac{1}{4M_{\mathrm{P}}}\varphi F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

dove $\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}$ indica il tensore elettromagnetico duale. Nella sua espressione compare $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$, il simbolo di Levi-Civita: si tratta del tensore totalmente antisimmetrico in 4 dimensioni. Esso è completamente determinato, ad esempio, fornendo la condizione $\varepsilon^{0123} = 1$. Il parametro M_{P}, invece, caratterizza l'intensità dell'interazione ed ha, in unità relativistiche, le dimensioni di un'energia. La lagrangiana totale è allora data da $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{M}} + \mathcal{L}_{\mathrm{KG}} + \mathcal{L}_{\mathrm{P}}$.

Bisogna ora identificare i campi dinamici rilevanti per il problema in esame. Prendendo in considerazione questi, poi, verranno applicate le equazioni di Eulero–Lagrange. Poiché si è interessati allo studio della propagazione della luce in presenza di un campo elettromagnetico esterno statico ed omogeneo, è conveniente decomporre il campo elettromagnetico come segue:

$$F^{\mu\nu} = \widehat{F}^{\mu\nu} + \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{2.4}$$

Il tensore $\widehat{F}^{\mu\nu}$ rappresenta il campo esterno (elettrico o magnetico), mentre A^μ è il campo di radiazione associato all'onda luminosa. Questa separazione è giustificata dalla validità del principio di sovrapposizione e della linearità della teoria proposta. In assenza di tali ipotesi, non sarebbe possibile trattare separatamente i contributi del sistema e del campo esterno.

In generale, in coordiante cartesiane in base agli assi definiti da $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, è possibile esprimere il tensore relativo al campo esterno sulla base delle componenti di campo elettrico $\boldsymbol{E}$ e campo magnetico $\boldsymbol{B}$ come

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Siccome poi, nelle condizioni trattate, si è in assenza sia di cariche che di correnti, si ha $j^\mu = 0$, per cui la lagrangiana in questione è della forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi\, \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{4M_{\mathrm{P}}} \varphi F_{\mu\nu} \widetilde{F}^{\mu\nu}. \tag{2.6}$$

Si ricordi ora che una trasformazione di gauge è definita come

$$A_\mu^{'} = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \tag{2.7}$$

dove Λ rappresenta una qualsiasi funzione scalare differenziabile nelle variabili x^μ. Siccome sia $F^{\mu\nu}$ che $\widetilde{F}^{\mu\nu}$ sono invarianti per trasformazioni di gauge, lo sono anche la lagrangiana di Maxwell e la lagrangiana di interazione.

A questo punto, è necessario introdurre ulteriori ipotesi per concentrarsi su un'analisi specifica delle varie situazioni.

2.1.1 Campo magnetico esterno

Se il campo esterno è un campo magnetico omogeneo e costante nel tempo $\widehat{\boldsymbol{B}}$ con direzione perpendicolare a quella di propagazione del fascio laser, si ha $\widehat{\boldsymbol{E}} = \mathbf{0}$

e il tensore si riduce a

$$\widehat{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\widehat{B}_3 & \widehat{B}_2 \\ 0 & \widehat{B}_3 & 0 & -\widehat{B}_1 \\ 0 & -\widehat{B}_2 & \widehat{B}_1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.8}$$

Bisogna ora riscrivere la lagrangiana $\mathcal{L}$ in modo che sia possibile applicare le equazioni di Eulero–Lagrange. È necessario dunque esplicitare le dipendenze dai campi che vengono presi in considerazione, cioè A^μ e φ. Si deve anche tenere in conto, dato che ci si aspetta di trovare delle correzioni piccole alle equazioni classiche, che, dopo aver applicato le equazioni di Eulero–Lagrange, si intendono tenere solo i termini lineari in $\boldsymbol{A}$ e φ, trascurando tutti quelli di ordine superiore, che caratterizzano l'interazione tra il campo dinamico φ e $\boldsymbol{A}$. Tale approssimazione è giustificata dalla scala dell'interazione M_{P}, nel caso dell'assione vari ordini di grandezza al di sopra del GeV. Essa è molto più grande delle frequenze caratteristiche ω relative al problema in questione, tipicamente nel range della luce laser visibile. Questa assunzione permette, in un contesto di teoria delle perturbazioni, di trovare una soluzione esatta alle equazioni di Eulero–Lagrange approssimate al primo ordine perturbativo nelle espansioni in ω/M_{P}.

È conveniente ora procedere analizzando un pezzo alla volta. Si cominci con la descrizione della lagrangiana di Maxwell libera, avendo separato il campo di radiazione dal campo magnetico esterno omogeneo e costante nel tempo:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M}} = -\frac{1}{4}\left(\widehat{F}_{\mu\nu}\widehat{F}^{\mu\nu} + 2\widehat{F}_{\mu\nu}\partial^\mu A^\nu - 2\widehat{F}_{\mu\nu}\partial^\nu A^\mu + 2\partial_\mu A_\nu\,\partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu A_\nu\,\partial^\nu A^\mu\right). \tag{2.9}$$

Svolgendo allora esplicitamente alcune delle somme sugli indici μ e ν e tenendo conto delle condizioni dettate in precedenza, la lagrangiana può essere riscritta come

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M}} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu\,\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu\,\partial^\nu A^\mu + \widehat{B}_i\widehat{B}^i + \varepsilon_{ijk}\widehat{B}^i\partial^j A^k\right). \tag{2.10}$$

Nella precedente espressione compaiono degli indici rappresentati da lettere dell'alfabeto latino. Come spiegato nell'appendice A, essi si riferiscono solamente alle componenti spaziali. È stato introdotto anche il simbolo di Levi-Civita in 3 dimensioni, ε^{ijk}. Esso è determinato fornendo la condizione $\varepsilon^{123} = 1$. Si noti come il contributo quadratico nel campo magnetico derivi dal fattore quadratico nel tensore del campo esterno, come era prevedibile dalla struttura dell'invariante relativistico $\widehat{F}_{\mu\nu}\widehat{F}^{\mu\nu}$. Inoltre, per lo stesso motivo, il termine che contiene il simbolo di Levi-Civita non è altro che un prodotto scalare tra campo magnetico esterno e campo magnetico di radiazione. Scritta in tale forma, la lagrangiana di Maxwell dipende solamente dal quadripotenziale vettore e dalle sue derivate.

La lagrangiana di Klein–Gordon è già scritta nella forma richiesta poiché le uniche variabili che compaiono sono il campo φ e le sue derivate.

A questo punto, è possibile svolgere un lavoro analogo sulla lagrangiana di interazione. In funzione del quadripotenziale A^μ relativo al campo di radiazione e del tensore elettromagnetico associato al campo esterno, essa assume la forma:

$$\mathcal{L}_\mathrm{P} = \frac{1}{8M_\mathrm{P}}\varphi\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\left(\widehat{F}^{\mu\nu}\widehat{F}^{\lambda\sigma} + 4\widehat{F}^{\mu\nu}\partial^\lambda A^\sigma + 4\partial^\mu A^\nu\,\partial^\lambda A^\sigma\right). \tag{2.11}$$

Bisogna ora specificare quali sono le ipotesi sul quadripotenziale. Innanzitutto, in virtù della libertà legata all'invarianza di gauge, si sceglie di porsi nel gauge di Coulomb, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0$. È necessario poi considerare un termine che emerge nell'interazione come prodotto tra campo esterno e campo di radiazione: $\varphi\widehat{B}_i\partial^i A^0$. Nello spazio di Fourier, le derivate spaziali vengono sostituite dalle rispettive componenti del vettore d'onda che definisce la direzione di propagazione. Ma questo è ortogonale a $\widehat{\boldsymbol{B}}$, per cui il contributo si annulla e, di conseguenza, A_0 si disaccoppia dall'interazione e non partecipa alla dinamica. Per questo motivo, è lecito imporre la condizione aggiuntiva $A_0 = 0$. Ciò corrisponde alla scelta di gauge di un potenziale scalare nullo, come nel caso della pura radiazione in assenza di cariche.

Ancora una volta, svolgendo le somme sui vari indici si ottiene l'espressione finale per la lagrangiana di interazione:

$$\mathcal{L}_\mathrm{P} = \frac{1}{M_\mathrm{P}}\varphi\left(\widehat{B}_i\partial^0 A^i + \varepsilon_{ijk}\partial^0 A^i\,\partial^j A^k\right). \tag{2.12}$$

Tale lagrangiana contiene sia il campo di radiazione che quello associato alla particella preudoscalare, come deve essere. In analogia con quanto evidenziato prima, poi, si noti che il contributo di puro campo esterno si annulla come conseguenza del fatto che $\widehat{\boldsymbol{E}} = \mathbf{0}$. In più, i termini rimanenti sono dati da una combinazione di campo elettrico esterno e campo elettrico e magnetico di radiazione. Per rendere più evidenti tali considerazioni, è utile riscrivere le lagrangiane in funzione delle quantità vettoriali in gioco:

$$\mathcal{L}_\mathrm{M} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu\,\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu\,\partial^\nu A^\mu + \widehat{B}^2 + \widehat{\boldsymbol{B}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\right), \tag{2.13}$$

$$\mathcal{L}_\mathrm{P} = \frac{1}{M_\mathrm{P}}\varphi\left(\widehat{\boldsymbol{B}}\cdot\partial^0\boldsymbol{A} + \partial^0\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\right). \tag{2.14}$$

Ricapitolando, la lagrangiana totale, scritta in termini del campo magnetico esterno e delle variabili dinamiche rilevanti associate al campo di radiazione, risulta

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu\,\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu\,\partial^\nu A^\mu + \widehat{B}_i\widehat{B}^i + \varepsilon_{ijk}\widehat{B}^i\partial^j A^k\right)\\ &+\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2\\ &+\frac{1}{M_\mathrm{P}}\varphi\left(\widehat{B}_i\partial^0 A^i + \varepsilon_{ijk}\partial^0 A^i\,\partial^j A^k\right).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Le equazioni di Eulero–Lagrange in forma Lorentz covariante si possono scrivere come

$$\partial_\alpha \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\alpha\varphi)} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi}, \qquad\qquad \partial_\alpha \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\alpha A_\beta)} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\beta}. \tag{2.16}$$

Affinché sia possibile svolgere correttamente i calcoli, è necessario tenere conto delle seguenti regole sulle derivate nel formalismo di Eulero–Lagrange, che provengono dall'indipendenza delle variabili dinamiche $\partial_\mu\varphi$ e $\partial_\alpha A_\beta$ per ogni valore di μ, α e β:

$$\frac{\delta(\partial_\mu\varphi)}{\delta(\partial_\alpha\varphi)} = \delta^\alpha_\mu, \qquad\qquad \frac{\delta(\partial_\mu A_\nu)}{\delta(\partial_\alpha A_\beta)} = \delta^\alpha_\mu\,\delta^\beta_\nu, \tag{2.17}$$

in cui l'espressione δ^α_μ costituisce una delta di Kronecker in 4 dimensioni.

A questo punto, sostituendo la lagrangiana ricavata nella prima delle equazioni (2.16) e riordinando i vari termini, si ottiene

$$-\frac{1}{M_{\mathrm{P}}}\widehat{\boldsymbol{B}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + \left(\Box + m^2\right)\varphi = 0, \tag{2.18}$$

dove compare l'operatore di d'Alembert $\Box = \partial_\mu\partial^\mu = \partial^2/\partial t^2 - \nabla^2$. Si tratta di una correzione all'equazione di Klein–Gordon grazie all'aggiunta di un termine che dipende dal campo esterno e dal campo di radiazione. Si noti come a contribuire all'equazione (2.18) siano la lagrangiana di Klein–Gordon e quella di interazione, ma non quella di Maxwell. Inoltre, nell'arrivare all'espressione finale si è trascurato il contributo derivante dall'ultimo termine di $\mathcal{L}_{\mathrm{P}}$ per le ragioni esposte in precedenza: esso è cubico rispetto ai campi nella lagrangiana e, di conseguenza, quadratico rispetto ai campi nelle equazioni di Eulero–Langrange.

Ripetendo lo stesso procedimento per la seconda delle equazioni (2.16) ricordandosi della condizione $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0$, si ricava

$$\Box\,\boldsymbol{A} + \frac{1}{M_{\mathrm{P}}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\widehat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{0}. \tag{2.19}$$

Analogamente a quanto evidenziato in precedenza, l'equazione d'onda libera per $\boldsymbol{A}$ è una conseguenza delle equazioni di Maxwell, mentre il secondo termine costituisce una correzione dovuta all'interazione del campo elettromagnetico con quello pseudoscalare. In più, la lagrangiana di Klein–Gordon non modifica in alcun modo l'equazione. Infine, per la stessa motivazione portata prima, il contributo dovuto all'ultimo termine della lagrangiana di interazione viene trascurato. Si noti che, nei limiti di validità delle approssimazioni considerate, se non ci fosse interazione tra il campo pseudoscalare e il campo di radiazione, le equazioni del moto per il campo $\boldsymbol{A}$ di pura radiazione rimarrebbero quelle classiche relative al campo libero anche in presenza di un campo elettromagnetico esterno, come deve essere.

Insieme, le equazioni (2.18) e (2.19) rappresentano il punto di partenza della presente discussione, poiché costituiscono il sistema di equazioni lineari che bisogna risolvere per prevedere quali effetti ottici misurabili sperimentalmente possono essere indotti dalla presenza della particella pseudoscalare.

2.1.2 Campo elettrico esterno

Si consideri ora una situazione in cui il campo esterno è un campo elettrico omogeneo e costante nel tempo $\widehat{\boldsymbol{E}}$ con direzione perpendicolare a quella di propagazione del fascio laser. Partendo dall'equazione (2.5), con $\widehat{\boldsymbol{B}} = 0$, si ottiene

$$\widehat{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\widehat{E}_1 & -\widehat{E}_2 & -\widehat{E}_3 \\ \widehat{E}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{E}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{E}_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.20}$$

Per quanto riguarda la lagrangiana di Maxwell $\mathcal{L}_\mathrm{M}$, bisogna proseguire dall'equazione (2.9) tenendo conto della presenza del campo elettrico esterno $\widehat{\boldsymbol{E}}$. Dunque si ottiene l'espressione

$$\mathcal{L}_\mathrm{M} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu\, \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu\, \partial^\nu A^\mu - \widehat{E}_i \widehat{E}^i + \widehat{E}_i \partial^0 A^i\right) . \tag{2.21}$$

Si noti la presenza, nell'ultimo termine, del prodotto tra campo elettrico esterno e campo elettrico di radiazione. Per renderlo più evidente, si può anche scrivere

$$\mathcal{L}_\mathrm{M} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu\, \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu\, \partial^\nu A^\mu - \widehat{E}^2 + \widehat{\boldsymbol{E}} \cdot \partial^0 \boldsymbol{A}\right) . \tag{2.22}$$

A proposito invece della lagrangiana di interazione $\mathcal{L}_\mathrm{P}$, è possibile proseguire dall'equazione (2.11) poiché ciò che viene modificato è solamente l'espressione del tensore di campo esterno. Rimangono valide le considerazioni della sottosezione precedente, in particolare quelle riguardanti il gauge di Coulomb $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ e le soppressioni dei termini causate dalla scala dell'interazione. Ancora, il potenziale scalare non compare nell'interazione associato al campo elettrico esterno e risulta disaccoppiato, dunque è possibile specificare di nuovo la condizione $A_0 = 0$. Effettuando la sostituzione per il tensore del campo esterno e svolgendo alcune delle somme sui vari indici, si ricava allora

$$\mathcal{L}_\mathrm{P} = \frac{1}{M_\mathrm{P}} \varphi \left(-\varepsilon_{ijk} \widehat{E}^i \partial^j A^k + \varepsilon_{ijk} \partial^0 A^i\, \partial^j A^k\right) . \tag{2.23}$$

Ancora una volta, il contributo di puro campo esterno si annulla perché, in questa occasione, $\widehat{\boldsymbol{B}} = 0$. Rimangono dunque un termine di puro campo di radiazione ed uno misto di campo esterno e campo di radiazione. Infatti, riscrivendo l'equazione in funzione di quantità vettoriali,

$$\mathcal{L}_\mathrm{P} = \frac{1}{M_\mathrm{P}} \varphi \left(-\widehat{\boldsymbol{E}} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) + \partial^0 \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})\right) . \tag{2.24}$$

Entrambi i contributi, perciò, sono dati dal prodotto scalare tra un campo elettrico ed un campo magnetico (che siano di radiazione o esterni). Dunque, la lagrangiana totale $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{M}} + \mathcal{L}_{\mathrm{KG}} + \mathcal{L}_{\mathrm{P}}$ risulta infine

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{M}} = &-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu\,\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu\,\partial^\nu A^\mu - \widehat{E}_i\widehat{E}^i + \widehat{E}_i\partial^0 A^i\right)\\ &+\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2\\ &+\frac{1}{M_{\mathrm{P}}}\varphi\left(-\varepsilon_{ijk}\widehat{E}^i\partial^j A^k + \varepsilon_{ijk}\partial^0 A^i\,\partial^j A^k\right).\end{aligned} \tag{2.25}$$

A questo punto, si possono applicare le equazioni di Eulero–Lagrange in forma Lorentz covariante (2.16) rispetto ai campi dinamici A^μ e φ per ricavare le equazioni del moto:

$$\frac{1}{M_{\mathrm{P}}}\widehat{\boldsymbol{E}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) + \left(\Box + m^2\right)\varphi = 0, \tag{2.26}$$

$$\Box\,\boldsymbol{A} - \frac{1}{M_{\mathrm{P}}}\left(\widehat{\boldsymbol{E}}\times\boldsymbol{\nabla}\right)\varphi = \mathbf{0}. \tag{2.27}$$

Il termine $\widehat{\boldsymbol{E}}\times\boldsymbol{\nabla}$ rappresenta un operatore vettoriale, le cui componenti si ottengono trattando l'operatore $\boldsymbol{\nabla}$ come un comune vettore. Si può notare che, in questo caso, sono le componenti di $\boldsymbol{A}$ ortogonali al campo esterno a interagire con il campo pseudoscalare. Anticipando ciò che verrà detto più avanti, l'interazione di una particella pseudoscalare in un campo elettrico presenta una chiara analogia con quella di una particella scalare in un campo magnetico.

2.2 Particella scalare

Nel caso di una particella scalare di massa m, l'interazione effettiva tra il campo elettromagnetico e un campo scalare neutro χ è

$$\mathcal{L}_{\mathrm{S}} = \frac{1}{4M_{\mathrm{S}}}\chi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{2.28}$$

Anche questa volta, il parametro M_{S} caratterizza l'interazione ed ha le dimensioni di un'energia.

Per un campo esterno omogeneo e costante nel tempo $\widehat{\boldsymbol{B}}$, la cui direzione di propagazione è ortogonale a quella del fascio laser, il tensore relativo al campo esterno è quello dato dall'equazione (2.8). Rimane anche valida la separazione del tensore elettromagnetico in base al contributo di radiazione e a quello di campo esterno, espressa dall'equazione (2.4). La lagrangiana totale $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{M}} + \mathcal{L}_{\mathrm{KG}} + \mathcal{L}_{\mathrm{S}}$ risulta perciò

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\,\partial^\mu\chi - \frac{1}{2}m^2\chi^2 + \frac{1}{4M_{\mathrm{S}}}\chi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{2.29}$$

A questo punto, si vuole riscrivere la lagrangiana in funzione dei campi dinamici A^μ e χ e delle loro derivate. Valgono ancora le considerazioni fatte per la particella pseudoscalare in campo magnetico. In particolare, si sceglie di porsi nel gauge di Coulomb, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$. In più, si può imporre di nuovo la condizione $A_0 = 0$ perché il potenziale scalare è disaccoppiato dall'interazione. Inoltre, si suppone che, come nel caso dell'assione, la scala dell'interazione sia tale da permettere di limitarsi ai contributi lineari in A^μ e χ. Per quanto riguarda la lagrangiana di Maxwell e quella di Klein–Gordon, esse sono fornite rispettivamente dall'equazione (2.10) e dall'analogo dell'equazione (2.2). Per la lagrangiana di interazione, invece, si ricava un'espressione simile a quella di Maxwell:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{S}} = \frac{1}{2M_{\mathrm{S}}}\chi \left(\partial_\mu A_\nu \, \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \, \partial^\nu A^\mu + \widehat{B}_i \widehat{B}^i + \varepsilon_{ijk} \widehat{B}^i \partial^j A^k\right). \tag{2.30}$$

Rispetto al caso pseudoscalare, questa volta l'ultimo termine della lagrangiana di interazione rappresenta un prodotto scalare tra campo magnetico esterno e campo magnetico di radiazione, come conseguenza del fatto che non è coinvolto il tensore elettromagnetico duale. Infatti, seguendo una notazione vettoriale, si ottiene

$$\mathcal{L}_{\mathrm{S}} = \frac{1}{2M_{\mathrm{S}}}\chi \left(\partial_\mu A_\nu \, \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \, \partial^\nu A^\mu + \widehat{B}^2 + \widehat{\boldsymbol{B}} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})\right). \tag{2.31}$$

In definitiva, la lagrangiana totale può essere espressa in funzione dei campi dinamici e delle loro derivate come

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu \, \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \, \partial^\nu A^\mu + \widehat{B}_i \widehat{B}^i + \varepsilon_{ijk} \widehat{B}^i \partial^j A^k\right) \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\mu \chi \, \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} m^2 \chi^2 \\ &+ \frac{1}{2M_{\mathrm{S}}}\chi \left(\partial_\mu A_\nu \, \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \, \partial^\nu A^\mu + \widehat{B}_i \widehat{B}^i + \varepsilon_{ijk} \widehat{B}^i \partial^j A^k\right). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Applicando le equazioni di Eulero–Lagrange in forma Lorentz covariante (2.16) rispetto ai campi A^μ e χ sulla lagrangiana totale $\mathcal{L}$ si ottengono le equazioni del moto per il campo elettromagnetico e per il campo scalare:

$$-\frac{1}{2M_{\mathrm{S}}}\left(\widehat{\boldsymbol{B}} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) + \widehat{B}^2\right) + \left(\Box + m^2\right)\chi = 0, \tag{2.33}$$

$$\Box \, \boldsymbol{A} + \frac{1}{2M_{\mathrm{S}}}\left(\widehat{\boldsymbol{B}} \times \boldsymbol{\nabla}\right)\chi = \boldsymbol{0}. \tag{2.34}$$

Come conseguenza di queste equazioni, solo la componente di $\boldsymbol{A}$ perpendicolare al campo magnetico esterno $\widehat{\boldsymbol{B}}$ risente dell'interazione con la particella scalare, diversamente da quanto accade con la particella pseudoscalare in presenza di un campo magnetico. Infatti, a meno di fattori costanti, le equazioni del moto sono analoghe a quelle ottenute per una particella pseudoscalare in un campo elettrico. Ciò è dovuto alla struttura degli invarianti relativistici $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}$. In altre parole, i tensori $F^{\mu\nu}$ e $\widetilde{F}^{\mu\nu}$ si ottengono l'uno dall'altro mandando un campo magnetico in un campo elettrico e viceversa, eventualmente a meno di un segno.

Per lo stesso motivo, se si volesse estendere la presente analisi al caso di una particella scalare in un campo elettrico, verrebbero sicuramente evidenziate delle analogie con la situazione in cui un campo pseudoscalare interagisce con un campo elettromagnetico di radiazione in presenza di un campo magnetico esterno.

Capitolo 3

Propagazione in campo magnetico

3.1 Effetti ottici da campo pseudoscalare

Ci si restringa ora al caso di una particella pseudoscalare in presenza di un campo magnetico esterno omogeneo e costante nel tempo, trattato nella sottosezione 2.1.1. Come anticipato, per trovare le correzioni alla propagazione della luce causate dalla particella in questione bisogna analizzare le equazioni (2.18) e (2.19):

$$-\frac{1}{M_{\mathrm{P}}}\widehat{\boldsymbol{B}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\left(\Box+m^2\right)\varphi=0,$$
$$\Box\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{M_{\mathrm{P}}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\widehat{\boldsymbol{B}}=0.$$

Si noti che l'unica componente di $\boldsymbol{A}$ che risente della presenza del campo magnetico è proprio quella parallela a $\widehat{\boldsymbol{B}}$. Dunque, per un'onda polarizzata linearmente nella direzione perpendicolare a $\widehat{\boldsymbol{B}}$, è possibile porre

$$A_{\perp}(\boldsymbol{r},t)=e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_0 t)}, \tag{3.1}$$

dove ω_0 e $\boldsymbol{k}$ rappresentano rispettivamente la frequenza e il numero d'onda del fascio iniziale. Per le caratteristiche del sistema, valgono poi le relazioni $k=\omega_0$ e $\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{B}}=0$. In pratica, le equazioni precedenti esprimono un effetto di mixing tra i fotoni polarizzati nella direzione parallela a $\widehat{\boldsymbol{B}}$ e il campo φ. Di conseguenza, la frequenza con cui avviene la propagazione risulta modificata. Si cercano allora delle soluzioni della forma:

$$A_{\parallel}(\boldsymbol{r},t)\sim A\,e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{3.2}$$
$$\varphi(\boldsymbol{r},t)\sim \Phi\,e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}. \tag{3.3}$$

Sostituendo allora le funzioni di prova nelle equazioni lineari, i fattori di fase si semplificano e ci si riduce a trattare un'equazione algebrica che esprime ω come radice dell'equazione secolare:

$$\left(k^2-\omega^2\right)\left(k^2+m^2-\omega^2\right)-\frac{\widehat{B}^2}{M_{\mathrm{P}}^2}\,\omega^2=0. \tag{3.4}$$

Si tratta di un'equazione di secondo grado in ω^2. Le soluzioni sono dunque

$$\omega_\pm^2 = k^2 + \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{\widehat{B}^2}{M_\mathrm{P}^2}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(m^2 + \frac{\widehat{B}^2}{M_\mathrm{P}^2}\right)^2 + \frac{4k^2\widehat{B}^2}{M_\mathrm{P}^2}}. \tag{3.5}$$

Poi, è anche utile utilizzare una notazione più comoda per distinguere le radici dell'equazione secolare:

$$\omega_\pm^2 \equiv k^2 + \delta_\pm, \tag{3.6}$$

con $\omega_- \leq \omega \leq \omega_+$ perché $\delta_- \leq 0 \leq \delta_+$. Si noti che $\omega_\pm^2 \geq 0$ per ogni possibile scelta dei parametri, e inoltre $\omega_- = 0$ per $k = 0$. Questo perché, in assenza di campo esterno, gli $\omega_\pm$ si riconducono alle leggi di dispersione della componente di $\boldsymbol{A}$ parallela al campo magnetico (per ω_-) e al campo pseudoscalare (per ω_+). L'interazione con il campo esterno mischia i due stati in un fenomeno simile all'oscillazione, che a questo punto non sono più autostati dell'hamiltoniana. L'invarianza di gauge, però, impedisce nella lagrangiana la presenza di un termine di massa esplicito per il fotone, del tipo $m_\mathrm{A} A_\mu A^\mu/2$, in quanto questo non sarebbe gauge invariante. Ciò vale anche in presenza di un campo esterno. Pertanto, nel limite in cui $k \longrightarrow 0$, deve risultare necessariamente che $\omega_- \longrightarrow 0$, poiché nel caso contrario verrebbe generato un termine di massa per il fotone. Viceversa, il campo pseudoscalare non è protetto dall'invarianza di gauge ed è lecito che esso acquisti un contributo finito alla sua massa, per cui per $k \longrightarrow 0$ si ha che $\omega_+^2 \longrightarrow m^2 + \widehat{B}^2/M_\mathrm{P}^2$.

A questo punto, per determinare unicamente la soluzione del problema è necessario imporre delle condizioni iniziali. Queste sono

$$A_\parallel(\mathbf{0}, 0) = 1, \qquad \varphi(\mathbf{0}, 0) = 0. \tag{3.7}$$

Per soddisfare tali condizioni, è necessario scrivere le soluzioni come combinazioni lineari di contributi a frequenza ω_+ e ω_-, rispettivamente. Ciò è possibile in virtù della linearità delle equazioni (2.18) e (2.19). Allora, sotto tali ipotesi e tenendo già conto delle condizioni iniziali nell'espressione delle ampiezze, si può scrivere

$$A_\parallel(\boldsymbol{r}, t) = A\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_+ t)} + (1 - A)\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_- t)}, \tag{3.8}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \Phi \left(e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_+ t)} - e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_- t)}\right). \tag{3.9}$$

In particolare, è stato scelto di prendere per entrambe le frequenze $\omega_\pm^2$ la radice positiva.

Sostituendo ancora una volta nell'equazione (2.19) le espressioni per $A_\parallel$ e φ, è possibile semplificare la dipendenza spaziale e raggruppare i termini a frequenza diversa. Siccome allora l'uguaglianza vale per ogni valore di t, entrambi i coefficienti si devono annullare identicamente. Ciò permette, in definitiva, di ricavare l'ampiezza del campo $A_\parallel$:

$$\begin{aligned} A_\parallel(\boldsymbol{r},t) = & \frac{\omega_+\left(k^2-\omega_-^2\right)}{\omega_+\left(k^2-\omega_-^2\right)-\omega_-\left(k^2-\omega_+^2\right)}\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_+ t)} \\ & - \frac{\omega_-\left(k^2-\omega_+^2\right)}{\omega_+\left(k^2-\omega_-^2\right)-\omega_-\left(k^2-\omega_+^2\right)}\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_- t)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Si può verificare facilmente che tale espressione rispetta le condizioni al contorno richieste.

Da questo punto in poi, si ometta la dipendenza da $\boldsymbol{r}$, che è banale, e si introducano i versori $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$, che rappresentano rispettivamente la direzione parallela a $\widehat{\boldsymbol{B}}$ e ortogonale sia a $\widehat{\boldsymbol{B}}$ che a $\boldsymbol{k}$. Allora, imponendo che inizialmente il campo $A_\parallel$ sia polarizzato linearmente ad un angolo θ rispetto alla direzione di $\widehat{\boldsymbol{B}}$, si può scrivere

$$A(0) = \cos\theta\, \boldsymbol{i} + \sin\theta\, \boldsymbol{j}. \tag{3.11}$$

Ad un tempo successivo, le componenti perpendicolare e parallela evolvono separatamente e in maniera diversa, dunque si ha

$$A(t) = A_\parallel(t)\cos\theta\, \boldsymbol{i} + e^{-i\omega_0 t}\sin\theta\, \boldsymbol{j}. \tag{3.12}$$

Ciò indica che, a causa del mixing con il campo φ, che introduce frequenze diverse da quella iniziale, l'onda non è più polarizzata linearmente. Infatti, sotto certe condizioni, dopo un tempo $t = L$ è possibile approssimare $A_\parallel$ con l'espressione

$$A_\parallel(L) = \big(1+\varepsilon(L)+i\gamma(L)\big)\, e^{-i\omega_0 t}, \tag{3.13}$$

dove ε e γ sono quantità molto piccole. Le equazioni (3.12) e (3.13) rappresentano, all'ordine più basso in ε e γ, un'onda polarizzata ellitticamente. In particolare, il potenziale vettore descrive un'ellisse con l'asse maggiore ad un angolo rispetto a $\widehat{\boldsymbol{B}}$ pari a

$$\theta(L) = \theta - \frac{1}{2}\varepsilon(L)\sin(2\theta)\,. \tag{3.14}$$

In più, l'ellitticità e, definita come rapporto tra asse minore e asse maggiore, risulta

$$e = \frac{1}{2}|\gamma(L)|. \tag{3.15}$$

Tali effetti sono misurabili e permettono, in linea di principio, di stimare la massa m e la costante di accoppiamento dell'interazione M_{P} relative alla presenza della particella pseudoscalare.

È importante notare che la rotazione netta, $\theta(L) - \theta$, dipende dal segno di θ, che cambia se, per un $\widehat{\boldsymbol{B}}$ fissato, si modifica il verso di $\boldsymbol{k}$. Di conseguenza, non è possibile accumulare l'effetto di rotazione facendo passare ripetutamente il fascio avanti e indietro nel magnete. Viceversa, l'ellitticità costituisce un effetto cumulativo.

A questo punto, è necessario fare delle considerazioni per trovare i valori di ε e γ. In particolare, si possono distinguere tre differenti regimi a seconda della velocità della variazione dei fattori di fase a frequenza $\omega_\pm$ della componente parallela rispetto a quello a frequenza ω_0 della componente perpendicolare.

Primo caso $|\omega_\pm - \omega_0| \, L \ll 2\pi$. In tale situazione, entrambi i fattori a frequenza $\omega_\pm$ variano lentamente rispetto al contributo a frequenza ω_0 poiché, appunto, gli $\omega_\pm$ sono molto vicini ad ω_0. Dunque sia $A_\parallel$ che φ si propagano in maniera coerente con $A_\perp$ lungo tutta la distanza L. Partendo allora dall'equazione (3.10) e sfruttando l'equazione (3.5), si possono espandere gli $\omega_\pm$ intorno a ω_0 ricordandosi della condizione $\omega_0 = k$. In particolare, i primi termini non nulli si ottengono sviluppando i fattori di fase in serie di potenze fino al terzo ordine. Alla fine si giunge all'espressione

$$A_\parallel(L) = \left(1 - \frac{\widehat{B}^2 L^2}{8M_\mathrm{P}^2} + i\,\frac{\widehat{B}^2\, m^2 L^3}{48\,\omega_0 M_\mathrm{P}^2}\right) e^{-i\omega_0 t}. \tag{3.16}$$

Come anticipato, i termini residui sono proporzionali a L^2 e L^3. Dalla precedente formula è possibile perciò dedurre che

$$\varepsilon(L) = -\frac{\widehat{B}^2 L^2}{8M_\mathrm{P}^2}, \qquad \gamma(L) = \frac{\widehat{B}^2\, m^2 L^3}{48\,\omega_0 M_\mathrm{P}^2}. \tag{3.17}$$

Le condizioni di validità di tale approssimazione possono essere imposte con un certo grado di arbitrarietà. Si sceglie dunque come limite l'uguaglianza $(\omega_+ - \omega_0)\, L = 2\pi$, per cui l'onda a frequenza ω_+ cessa di propagarsi in maniera coerente. Riscrivendo tale condizione in funzione dei parametri m ed M_P, si ha

$$m^2 = m_0^2 \left(1 - \frac{M_0^2}{M_\mathrm{P}^2}\right), \tag{3.18}$$

dove sono state introdotte per comodità le quantità $m_0^2 = 4\pi\omega_0/L$ e $M_0 = \widehat{B}L/4\pi$. Perciò questo indica quali valori della massa della particella pseudoscalare e del parametro caratteristico dell'interazione danno origine a una propagazione coerente di entrambe le onde a frequenza $\omega_\pm$.

Secondo caso $(\omega_+ - \omega_0)\, L \gg 2\pi \gg (\omega_0 - \omega_-)\, L$. Nella regione in questione, solo l'onda a frequenza ω_- rimane coerente. Viceversa, il fattore di fase a frequenza ω_+ varia rapidamente rispetto a quello a frequenza ω_0. Di conseguenza, la sua media sui tempi considerati si annulla e il termine corrispondente può essere trascurato. È sufficiente allora sviluppare il fattore di fase in ω_- fino al primo ordine per trovare l'espressione:

$$A_\parallel(L) = \left(1 + \frac{\omega_+ \delta_-}{\omega_0\, \delta_+} - i\,\frac{L\,\delta_-}{2\omega_0}\right) e^{-i\omega_0 t}. \tag{3.19}$$

Questa volta, i termini dell'espansione sono costanti o lineari in L. I parametri dello sviluppo sono

$$\varepsilon(L) = \frac{\omega_+ \delta_-}{\omega_0\, \delta_+}, \qquad \gamma(L) = \frac{L\, \delta_-}{2\omega_0}, \tag{3.20}$$

dove i valori dei $\delta_\pm$ coincidono con quelli introdotti in precedenza. In definitiva, la regione in questione rispecchia una situazione intermedia se confrontata con le altre due.

Terzo caso $|\omega_\pm - \omega_0|\, L \gg 2\pi$. In queste condizioni, $A_\parallel$ risulta totalmente incoerente. Il limite di validità per tale situazione si può imporre a $(\omega_0 - \omega_-)\, L = 2\pi$. Convertendo l'espressione sulla base dei parametri m ed M_P, si ottiene

$$m^2 = m_0^2 \left(\frac{M_0^2}{M_\mathrm{P}^2} - 1 \right). \tag{3.21}$$

Questa regione corrisponde a valori decisamente non realistici del parametro M_P, in particolare perché implicherebbe $M_\mathrm{P} < M_0$. Ad esempio, per valori caratteristici degli esperimenti in laboratorio, cioè $\widehat{B} \sim 1\,\mathrm{T}$ e $L \sim 1\,\mathrm{m}$, la scala di M_0 è dell'ordine di qualche decina di MeV, ben al di sotto della scala prevista per M_P dai modelli teorici dell'assione, che è dell'ordine di $10^{10}\,\mathrm{GeV}$.

3.2 Implicazioni dell'esperimento PVLAS

PVLAS (Polarizzazione del Vuoto con LASer) è un esperimento finanziato dall'INFN e attivo dal 2002, prima nella sede dei Laboratori Nazionali di Legnaro, vicino a Padova, e poi presso il Dipartimento di Fisica dell'Università di Ferrara [7–9]. Esso si propone di misurare le proprietà ottiche del vuoto, cioè le deviazioni della propagazione della luce nel vuoto, nello specifico in presenza di forti campi magnetici, rispetto alle previsioni dell'elettrodinamica di Maxwell. Principalmente, questi effetti di interazioni non lineari del campo elettromagnetico sono descritti, nell'ambito dell'elettrodinamica quantistica [21, 22], o QED, dalla lagrangiana effettiva di Euler–Heisenberg [23–25], riportata in appendice C. Tale lagrangiana si ottiene considerando l'interazione del campo elettromagnetico con il campo di Dirac dell'elettrone e il principio di indeterminazione di Heisenberg. In particolare, l'emissione e l'assorbimento di coppie elettrone-positrone nel vuoto, permessi dal principio di indeterminazione, contribuiscono alla generazione di termini non lineari. Al primo ordine nello sviluppo in $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, la lagrangiana di Maxwell acquista dei contributi non lineari di ordine $\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)^2$ e $\left(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}\right)^2$. L'espansione diventa ragionevole quando l'intensità del campo elettromagnetico esterno è piccola rispetto al campo critico, che risulta dell'ordine di $E_\mathrm{c} \sim 10^{17}\,\mathrm{V\,m^{-1}}$. Tali termini provocano pertanto una prima modifica alle leggi di dispersione di un'onda elettromagnetica che si propaga in un campo magnetico esterno, a seconda anche del suo stato di polarizzazione. Ciò spiega le proprietà di birifrangenza del vuoto predette dalla QED. Tuttavia, questi effetti risultano molto piccoli per campi magnetici di laboratorio, per cui la sensibilità degli esperimenti attuali non è sufficiente per osservarli. Di conseguenza, ogni potenziale rivelazione di simili effetti costituisce un'osservazione indiretta della presenza di nuova fisica.

Nella versione attuale, l'apparato sperimentale si basa su una cavità di Fabry–Perot immersa in un forte campo magnetico, attraverso la quale viene fatto passare più volte un fascio laser, inizialmente polarizzato linearmente, per aumentare il cammino ottico ed accumulare gli effetti che si vogliono misurare. Il campo magnetico, ortogonale alla direzione di propagazione del fascio, è generato da due dipoli magnetici permanenti, ognuno da 2,5 T, che sono in grado di ruotare. Il tutto è montato su un supporto in granito, che isola sismicamente l'apparato sperimentale. Rispetto alla versione precedente, i magneti permanenti sostituiscono un magnete superconduttore allo scopo di migliorare le condizioni sperimentali e limitare i costi.

Nello specifico, l'esperimento è concepito per misurare, grazie ad un ellissometro, possibili effetti di birifrangenza e dicroismo tra le componenti in polarizzazione del fascio laser. Introducendo infatti l'indice di rifrazione complesso come $N = n + i\kappa$, la birifrangenza $\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp}$ è proporzionale all'ellitticità, mentre il dicroismo $\Delta\kappa = \kappa_{\parallel} - \kappa_{\perp}$ è proporzionale alla differenza di fase tra le due polarizzazioni. Questo significa che, in presenza di ellitticità, le due componenti viaggiano a velocità diverse; in presenza di dicroismo, esse vengono assorbite in maniera diversa.

In realtà, l'elettrodinamica quantistica non è l'unica teoria che prevede simili proprietà ottiche del vuoto. Si possono considerare altri modelli come quello delle particelle millicharged o, appunto, quello dell'assione. A livello sperimentale, la sostanziale differenza tra l'elettrodinamica quantistica e il modello assionico sta nell'ordine di grandezza degli effetti misurabili, molto superiore nel caso dell'assione. Inoltre, la birifrangenza ha segni opposti a seconda della natura della particella che l'ha indotta (scalare o pseudoscalare), e ciò permette di distinguere tra i due casi. Nel 2006, in seguito alla misura di un dicroismo che si discostava dalle predizioni dell'elettrodinamica quantistica, fu pubblicato un articolo riguardante proprio la possibile rivelazione indiretta di un assione, dove venivano calcolati dei valori di $m \approx 1\,\mathrm{meV}$ e $M_{\mathrm{P}} \approx 4 \cdot 10^5\,\mathrm{GeV}$. In seguito, tuttavia, tale risultato venne escluso sia dallo stesso PVLAS che da altri gruppi di ricerca ed attribuito a problemi sperimentali legati ad errori sistematici sul campo magnetico, non considerati nella prima fase dell'esperimento. Ad ogni modo, le nuove misure di PVLAS sono state in grado di stabilire alcune condizioni sia sulla massa m che sulla costante di accoppiamento M_{P} di un eventuale assione. Tali limiti si aggiungono ad altri che provengono da considerazioni di tipo astrofisico [20].

Oltre a PVLAS, altri progetti di ricerca che mirano allo studio delle proprietà ottiche del vuoto sono, ad esempio, gli esperimenti Q & A, BMV e OSQUAR [7].

Capitolo 4

Conclusioni

Con il presente lavoro di tesi, si è voluta studiare tramite un approccio di teoria dei campi classica l'interazione tra un campo elettromagnetico di radiazione e un ipotetico campo, scalare o pseudoscalare, in presenza di un campo esterno omogeneo e costante nel tempo. Questo porta alla modifica delle equazioni del moto di Maxwell e di Klein–Gordon grazie, appunto, a termini che derivano da un'interazione effettiva. Sono stati discussi, dunque, i casi di una particella pseudoscalare in un campo magnetico, di una particella pseudoscalare in un campo elettrico e di una particella scalare in un campo magnetico, riproducendo nella prima situazione ed estendendo nelle altre l'analisi di Maiani, Petronzio e Zavattini [5]. In particolare, nel caso del campo pseudoscalare, questo è associato all'assione, uno dei candidati a spiegare alcuni fenomeni legati alla materia oscura. Tale particella trova le sue giustificazioni teoriche nella necessità di salvaguardare la conservazione di CP nel caso dell'interazione forte.

Successivamente, si è passati allo studio degli effetti ottici che l'interazione può generare nel caso della particella pseudoscalare in campo magnetico. In particolare, si è mostrato come, su un fascio laser inizialmente polarizzato linearmente, la presenza della particella pseudoscalare generi effetti di birifrangenza e dicroismo che possono essere misurati sperimentalmente. In più, tali fenomeni sono ben più evidenti per l'interazione analizzata che per le correzioni derivanti dall'elettrodinamica quantistica. Ciò significa che sarebbe possibile attribuire alla presenza dell'assione eventuali deviazioni consistenti dalle predizioni della QED.

Infine, sono stati descritti brevemente i metodi e gli obiettivi dell'esperimento PVLAS, che si prefigge di misurare le proprietà ottiche del vuoto e che potrebbe trovare delle conferme al modello dell'assione o a teorie relative a eventuali accoppiamenti del campo elettromagnetico con particelle scalari neutre.

Appendice A

Formalismo e convenzioni

Lo scopo di questa appendice è di specificare le convenzioni e le notazioni utilizzate nell'intero lavoro di tesi.

Prima di tutto, per praticità sono state impiegate le unità relativistiche $\hbar = c = 1$ per la costante di Planck ridotta e per la velocità della luce e $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ per la costante dielettrica del vuoto e per la permeabilità magnetica del vuoto. In questo modo, alcune unità di misura vengono modificate. Ad esempio, energia, massa, momento, frequenza, l'inverso di un tempo e l'inverso di una posizione possono essere espressi con la stessa unità di misura.

Per indicare un quadrivettore, vengono impiegate come indici le lettere dell'alfabeto greco, mentre quelle dell'alfabeto latino sono riservate per indicare i vettori tridimensionali. Dunque, $a^\mu = (a^0, a^i) = (a^0, \boldsymbol{a})$ rappresenta un generico quadrivettore controvariante, mentre $b_\mu = (b_0, b_i) = (b_0, \boldsymbol{b})$ rappresenta un generico quadrivettore covariante.

Per quanto riguarda la metrica relativistica, si è scelto di utilizzare la convenzione dei segni $(+, -, -, -)$, per cui il tensore metrico risulta

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.1}$$

Di conseguenza, per passare da un quadrivettore controvariante ad uno controvariante, cioè per abbassare gli indici, è necessario cambiare il segno della componente spaziale, mentre quella temporale resta inalterata. Dunque $a_\mu = (a_0, -a_i) = (a_0, -\boldsymbol{a})$. La metrica dello spazio tridimensionale è invece essenzialmente euclidea e piatta, per cui è indifferente per un vettore tridimensionale porre gli indici in alto o in basso.

Allo scopo di semplificare le equazioni e di evitare di scrivere i simboli che rappresentano le sommatorie, si sceglie di impiegare la notazione di Einstein per le sommatorie: ogni qual volta un indice (greco o latino) è ripetuto in basso ed in alto in un prodotto, si assume implicitamente che l'espressione venga sommata rispetto a quell'indice.

Per le derivate, invece, si utilizza la scrittura

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla} \right). \tag{A.2}$$

È da notare il segno positivo per la parte spaziale del quadrivettore covariante. Inoltre, per convenzione, quando compare un simbolo di derivata, questo agisce solo sull'elemento che sta immediatamente più a destra. Ciò permette di non appesantire la notazione con troppe parentesi.

Ancora, il tensore totalmente antisimmetrico è rappresentato dal simbolo di Levi-Civita. Esso è completamente determinato specificando una qualsiasi delle sue componenti, poiché tutte le altre possono essere ricavate da questa in base alle sue proprietà. Si scelgono allora, rispettivamente in 3 e 4 dimensioni, le condizioni $\varepsilon^{123} = 1$ e $\varepsilon^{0123} = 1$.

Appendice B

Potenziali e campi elettromagnetici

In questa appendice, si vogliono richiamare e chiarire alcuni concetti relativi all'elettrodinamica in notazione relativistica, utili a comprendere e controllare i calcoli dei capitoli precedenti in maniera più semplice.

Si ricordi innanzitutto il tensore elettromagnetico in coordinate cartesiane:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{B.1}$$

Esso è legato al tensore elettromagnetico duale dalla relazione $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}$. Perciò, svolgendo le somme sugli indici λ e σ, si ottiene

$$\widetilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{B.2}$$

Entrambi i tensori sono antisimmetrici. In più, il tensore duale si ottiene dal tensore elettromagnetico effettuando una sostituzione del tipo $\boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \longrightarrow -\boldsymbol{E}$. Questa è l'origine dell'analogia che intercorre tra il caso della particella pseudoscalare in campo elettrico e quello della particella scalare in campo magnetico.

Sono di fondamentale importanza gli invarianti relativistici che comprendono prodotti tra il tensore elettromagnetico e il suo duale:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\left(B^2 - E^2\right), \tag{B.3}$$

$$F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} = -4\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}. \tag{B.4}$$

In funzione del quadripotenziale elettromagnetico $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$, il tensore elettromagnetico si può esprimere come

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{B.5}$$

Ciò permette di riscrivere le formule precedenti sostituendo ai campi elettromagnetici le corrispondenti espressioni in funzione dei potenziali:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \tag{B.6}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}. \tag{B.7}$$

Praticamente tutte le lagrangiane del capitolo 2 si possono ricavare utilizzando una logica di questo tipo.

Appendice C

Lagrangiana di Euler–Heisenberg

La lagrangiana effettiva di Euler–Heisenberg [23–25] è la seguente:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{EH}} = {} & \frac{1}{2}\left(E^2 - B^2\right) \\ & + e^2 \int_0^{+\infty} \left(i x^2 \left(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\right) \frac{\cos\left(\frac{x}{E_{\mathrm{c}}}\sqrt{E^2 - B^2 + 2i\left(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\right)}\right) + \mathrm{cc}}{\cos\left(\frac{x}{E_{\mathrm{c}}}\sqrt{E^2 - B^2 + 2i\left(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\right)}\right) - \mathrm{cc}} \right. \\ & \left. + E_{\mathrm{c}}^2 + \frac{1}{3}x^2\left(B^2 - E^2\right)\right) \frac{e^{-x}}{x^3}\, dx, \qquad \text{(C.1)}\end{aligned}$$

dove $E_{\mathrm{c}} = m_{\mathrm{e}}^2/e$ costituisce il valore critico del campo, e è la carica dell'elettrone, m_{e} la sua massa, x la variabile di integrazione e l'espressione cc rappresenta il complesso coniugato di ciò che la precede.

Per energie del campo di radiazione ben al di sotto della massa dell'elettrone e campi esterni di intensità piccole rispetto ai valori critici, la lagrangiana si può espandere come [7]

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{2}\left(E^2 - B^2\right) + \frac{e^4}{360\pi^2 m_{\mathrm{e}}^4}\left(\left(B^2 - E^2\right)^2 + 7\left(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\right)^2\right). \qquad \text{(C.2)}$$

Si noti che, come anticipato, i termini di correzione alla lagrangiana di Maxwell sono di ordine $\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)^2$ e $\left(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}\right)^2$.

Bibliografia

[1] R. Peccei, H. R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1440 (1977).

[2] I. J. Aitchison, A. J. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics*, **2**, CRC Press, 2012.

[3] T.-P. Cheng, L.-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, 1984.

[4] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 279 (1978).

[5] L. Maiani, R. Petronzio, E. Zavattini, *Phys. Lett.* **B175**, 359 (1986).

[6] G. Raffelt, L. Stodolsky, *Phys. Rev.* **D37**, 1237 (1988).

[7] E. Zavattini et al., *New J. Phys.* **15**, 053026 (2013), arXiv: 1301.4918 [quant-ph].

[8] E. Zavattini et al., *Phys. Rev.* **D77**, 032006 (2008), arXiv: 0706.3419 [hep-ex].

[9] G. Zavattini et al., *J. Phys. Conf. Ser.* **442**, 012057 (2013).

[10] L. Abbott, P. Sikivie, *Phys. Lett.* **B120**, 133 (1983).

[11] M. Dine, W. Fischler, *Phys. Lett.* **B120**, 137 (1983).

[12] J. Preskill, M. B. Wise, F. Wilczek, *Phys. Lett.* **B120**, 127 (1983).

[13] J. E. Kim, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 103 (1979).

[14] M. A. Shifman, A. Vainshtein, V. I. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B166**, 493 (1980).

[15] M. Dine, W. Fischler, M. Srednicki, *Phys. Lett.* **B104**, 199 (1981).

[16] A. Zhitnitsky, *Sov. J. Nucl. Phys.* **31**, 260 (1980).

[17] K. Zioutas et al., *Phys. Rev. Lett.* **94**, 121301 (2005), arXiv: hep-ex/0411033 [hep-ex].

[18] S. Andriamonje et al., *JCAP* **0704**, 010 (2007), arXiv: hep-ex/0702006 [hep-ex].

[19] J. Jaeckel, A. Ringwald, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **60**, 405 (2010), arXiv: 1002.0329 [hep-ph].

[20] G. Carosi et al. (2013), arXiv: 1309.7035 [hep-ph].

[21] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

[22] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fisica Teorica, Vol. 4: Teoria Quantistica Relativistica*, Editori Riuniti, 1978.

[23] H. Euler, B. Kockel, *Naturwiss.* **23**, 246 (1935).

[24] W. Heisenberg, H. Euler, *Z. Phys.* **98**, 714 (1936), arXiv: physics/0605038 [physics].

[25] V. Weisskopf, *Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med.* **14N6**, 1 (1936).

[26] R. Battesti, C. Rizzo, *Rept. Prog. Phys.* **76**, 016401 (2013), arXiv: 1211.1933 [physics.optics].

[27] E. Masso, R. Toldra, *Phys. Rev.* **D52**, 1755 (1995), arXiv: hep-ph/9503293 [hep-ph].

[28] D. Espriu, A. Renau, *Int. J. Mod. Phys.* **A30**, 1550099 (2015), arXiv: 1401.0663 [hep-ph].