

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Biblioteca Digital FCEN-UBA

Modelos cosmológicos, agujeros negros y lentes gravitatorias

Sendra, Carlos Maximiliano

2015 12 17

Tesis Doctoral

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

www.digital.bl.fcen.uba.ar

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Fuente / source:

Biblioteca Digital de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

*Modelos cosmológicos, agujeros negros y
lentes gravitatorias*

Tesis presentada para optar por el título de

Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas

por *Lic. Carlos Maximiliano Sendra*

Director de tesis: Dr. Ernesto Fabián Eiroa

Consejero de estudios: Dr. Rafael Ferraro

Lugar de Trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio (CONICET-UBA)

Buenos Aires, 2015

Resumen

En la presente Tesis, se estudian agujeros negros no rotantes y con simetría esférica como lentes gravitatorias, en el contexto de diferentes modelos cosmológicos. Cuando un agujero negro se encuentra entre una fuente puntual y un observador, además de las imágenes primaria y secundaria, se forman dos conjuntos infinitos de imágenes, denominadas relativistas. Para realizar un estudio analítico se obtiene, en términos de los parámetros característicos de cada geometría, el ángulo de deflexión en los límites de deflexión débil y fuerte. El primero consiste en una aproximación de dicho ángulo a primer orden en la inversa de la coordenada radial con centro en la lente y corresponde al caso en que la luz se defleca lejos de la esfera de fotones del agujero negro, dando lugar a las imágenes primaria y secundaria. El segundo es utilizado para estudiar el caso en que los rayos de luz pasan lo suficientemente cerca de la esfera de fotones, de modo que efectúan una o más vueltas (en cualquier sentido) alrededor del agujero negro antes de emerger y llegar al observador, produciéndose de este modo las imágenes relativistas. El ángulo de deflexión se calcula en este caso mediante una aproximación asintótica de tipo logarítmico que diverge en el radio de la esfera de fotones. A partir del ángulo de deflexión aproximado, se encuentran las posiciones y magnificaciones de las imágenes de manera analítica. En esta Tesis, utilizando los límites mencionados, se estudia en primer lugar un agujero negro sin masa en cosmologías con dimensiones extra en el marco del modelo de Randall-Sundrum tipo II. Luego, se considera una solución de agujeros negros regulares con un campo fantasma. Finalmente, se analiza una clase de agujeros negros cargados en gravedad escalar-tensorial. Los distintos campos que aparecen en estos últimos dos casos fueron propuestos originalmente con el fin de modelar la energía oscura. Se efectúan comparaciones con otras geometrías de interés y se presenta el caso del agujero negro supermasivo del centro galáctico.

Palabras clave: Modelos cosmológicos - Teorías alternativas de gravedad - Agujeros negros - Lentes gravitatorias - Agujero negro supermasivo del centro galáctico.

Cosmological models, black holes and gravitational lenses

Abstract

In the present Thesis, non-rotating and spherically symmetric black holes are studied as gravitational lenses, in the context of different cosmological models. When a black hole is situated between a point source and an observer, besides the usual primary and secondary images, two infinite sets of relativistic images are formed. In order to carry out an analytical study, the deflection angle is obtained in terms of the characteristic parameters of each geometry in the weak and strong deflection limits. The first one corresponds to a first order expansion of the deflection angle in the inverse of the radial coordinate centered on the lens, and it is performed for the case in which the light rays pass far from the photon sphere of the black hole, giving place to the primary and secondary images. The second one is used to study the situation in which the light rays pass close enough to the photon sphere, so that they perform one or more loops (in either way) around the black hole, before they emerge to the observer, producing the relativistic images. In this case, the deflection angle is obtained by an asymptotical logarithmic approximation which diverges at the radius of the photon sphere. The positions and the magnifications of the images are found analytically from the approximated deflection angle. In this Thesis, using the above mentioned limits, massless black holes in the Randall-Sundrum type II braneworld scenario are studied firstly. Then, a regular phantom black hole solution is considered. Finally, a class of static and spherically symmetric charged black holes in scalar-tensor gravity is analyzed. The different fields appearing in the latter two cases were originally proposed in order to model dark energy. The results obtained are compared with other geometries of interest and the case corresponding to the galactic center supermassive black hole is presented.

Keywords: Cosmological models - Alternative theories of gravity - Black holes - Gravitational lensing - Galactic center supermassive black hole.

Agradecimientos

A lo largo de este doctorado, he conocido mucha gente con la que he compartido mi trabajo y me ha acompañado día a día, tanto dentro del IAFE, lugar en el que me desempeñé, como fuera de él.

En primer lugar, quiero agradecer a Ernesto Eiroa, mi director de Tesis, por su paciencia, buen trato, tiempo y dedicación. Por sus consejos, por preocuparse porque todo salga bien y por contribuir fuertemente en mi formación como profesional e investigador. Una gran persona!

A los integrantes del Grupo de Relatividad del instituto, con quienes he compartido numerosas charlas. En especial, a Rafael Ferraro y Alejandro Gangui, por sus consejos y atención.

Quiero agradecer a toda la gente del Instituto de Astronomía y Física del Espacio en general. Sinceramente, me ha resultado muy ameno el ambiente. En él tengo grandes amigos a los que quiero mucho y me han acompañado a lo largo de todos estos años. A mis compañeros de oficina que me aguantan (y cómo!) día a día: Fede, Lau, Mate y Albert. Gracias!

A mis amigos! A Mari, Cele, Ale y María Emilia, con quienes compartí a diario innumerables almuerzos, charlas, y por su puesto, mucha vida. A mis amigos de la facu, muchos de los que conozco hace más de diez años! Y a mis amigos de toda la vida que siempre están.

Por último, quiero agradecer especialmente a mi familia. A mis viejos, mi hermano y mi cuñada, que siempre me apoyaron en todo y que siempre han sido incondicionales. Son muy importantes para mí.

Indice general

1. Introducción	1
1.1. Modelos cosmológicos	1
1.2. Agujeros negros y lentes gravitatorias	2
1.3. Objetivos y organización de la Tesis	5
2. Agujeros negros	9
2.1. Relatividad General	9
2.2. Agujeros negros en relatividad general	14
2.3. Agujero negro de Schwarzschild	15
2.4. Agujero negro de Reissner-Nordström	21
3. Lentes gravitatorias	23
3.1. Introducción	24
3.1.1. Resumen histórico	24
3.1.2. Consideraciones y definiciones básicas	27
3.2. Ángulo de deflexión exacto	28
3.3. Límite de deflexión débil	29
3.4. Límite de deflexión fuerte	32
3.4.1. Ángulo de deflexión	33
3.4.2. Posiciones de las imágenes relativistas	40
3.4.3. Magnificaciones de las imágenes relativistas	43
3.4.4. Observables	44
3.5. Resultados previos	46

3.5.1. Agujero negro de Schwarzschild	46
3.5.2. Agujero negro de Reissner-Nordström	47
4. Agujeros negros sin masa en mundos brana	51
4.1. Mundos brana	51
4.2. Modelo de Randall-Sundrum	52
4.3. Agujero negro sin masa en teoría de mundos branas	56
4.4. Ángulo de deflexión	58
4.5. Límite de deflexión débil	59
4.6. Límite de deflexión fuerte	62
4.7. Discusión	64
5. Agujeros negros regulares con un campo fantasma	67
5.1. Introducción	67
5.2. La geometría	68
5.3. Ángulo de deflexión	71
5.4. Límite de deflexión débil	73
5.5. Límite de deflexión fuerte	75
5.6. Discusión	78
6. Agujeros negros cargados en teorías de gravedad escalar-tensorial	81
6.1. Introducción	81
6.2. La métrica	83
6.3. Ángulo de deflexión	86
6.4. Límite de deflexión fuerte	88
6.5. Discusión	94
7. Conclusiones	97
A. Constantes	105
A.1. Constantes físicas fundamentales	105
A.2. Unidades geométricas	105

A.3. Constantes astrofísicas	106
A.4. Factores de conversión	106
B. Agujero negro de Myers-Perry	107
C. Agujero negro en gravedad de Brans-Dicke	109
Bibliografía	99

Capítulo 1

Introducción

Esta tesis tiene como propósito producir avances en el estudio teórico de los efectos de lente gravitatoria debido a agujeros negros en el contexto de distintos modelos cosmológicos.

1.1. Modelos cosmológicos

El descubrimiento de una disminución inesperada en los flujos de energía provenientes de supernovas de tipo Ia ha abierto uno de los problemas más enigmáticos y profundos en la cosmología actual. Estas observaciones han sido interpretadas como evidencia sólida de que la expansión actual del universo es acelerada por una componente que genéricamente se ha denominado energía oscura [1–5]. En el “modelo de concordancia” (también llamado Λ CDM) el 4% de la densidad del universo lo constituye la materia bariónica conocida, el 23% es materia oscura y el 73% sería energía oscura en forma de una constante cosmológica. A pesar de que la constante cosmológica parece ser la explicación más simple y más favorecida observacionalmente para el fenómeno de la aceleración, otros escenarios se han estado desarrollando desde su hallazgo en 1998 [6]. El modelo de concordancia se sustenta por dos grandes suposiciones: 1) que la evolución dinámica del universo se rige por una solución de las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General, y 2) que el Principio Cosmológico es válido, esto es, que el espacio a muy grandes escalas astrofísicas es isótropo y homogéneo. Recientemente ha ido creciendo el interés por modelos isótropos

pero inhomogéneos del tipo Lemaître-Tolman-Bondi. Algunos trabajos han mostrado que efectos causados por inhomogeneidades en las estructuras a gran escala que rodean al observador podrían dar una explicación a las observaciones de supernovas Ia y a la aceleración del universo sin invocar ningún tipo de energía oscura, componente que ha originado un gran desconcierto en el ámbito de la física teórica [7–17].

Otros modelos que han atraído gran atención en los últimos años son las cosmologías con dimensiones extra (“mundos brana”) [18]. En ellos, la materia ordinaria está confinada en un espacio tridimensional denominado brana, que está inmerso en un espacio de mayor dimensión denominado *bulk*, en el cual sólo la gravedad puede propagarse. Estas cosmologías fueron propuestas con la idea de explicar por qué la escala característica de la gravedad es dieciséis órdenes de magnitud más grande que la escala de la interacción electrodébil. Están además motivadas por desarrollos recientes de las teorías de cuerdas, conocidos como teoría M. Entre los modelos de mundos brana, reviste especial interés el de Randall-Sundrum tipo II [19, 20], que consiste de una *brana* con tensión positiva en un *bulk* con una dimensión extra y constante cosmológica negativa. El estudio de la física de los agujeros negros en estas cosmologías es un tema de gran interés [18, 21, 22]. El análisis de las posibles consecuencias astrofísicas debido a los distintos modelos de agujeros negros propuestos, ha recibido gran interés en los últimos años [23].

Por otro lado, la energía oscura puede modelarse a través de un campo escalar auto-interactuante, con un potencial [24]. En este contexto, soluciones esféricamente simétricas de agujeros negros, agujeros de gusano y universos negros con la presencia de un campo escalar, fueron halladas por varios autores [25–28]. El estudio de las consecuencias astrofísicas de estos objetos resultan de especial interés.

1.2. Agujeros negros y lentes gravitatorias

La luz se desvía de su trayectoria rectilínea cuando pasa por una región cuyo espacio-tiempo no es plano, debido a la presencia de un cuerpo masivo. Este fenómeno hace que el objeto que deforma la estructura espacio-tiempo actúe como una lente, denominada lente gravitatoria. El primero en sugerir la utilización del campo gravitatorio de objetos

astrofísicos como una lente que actúa sobre la luz proveniente de fuentes lejanas fue A. Einstein en 1936 [29]. A partir del mismo, y particularmente gracias a los trabajos realizados por S. Refsdal en la década del '60, los estudios de óptica en espacio-tiempo curvos han llevado a importantes descubrimientos en astronomía. Las lentes gravitatorias son un tema de gran importancia actual, pues se han transformado en herramientas muy útiles de la astrofísica. Han contribuido con nuevos resultados en campos tan diversos como la distribución de materia en el Universo, la distribución de masa en los cúmulos de galaxias, la física de los cuásares, la materia oscura en los halos galácticos y en la estructura galáctica.

Los agujeros negros son objetos denominados relativistas, ya que son descritos por medio de la teoría de la Relatividad General. Éstos se forman cuando una estrella colapsa en un cuerpo con dimensiones tales que su radio es menor que su radio de Schwarzschild, caso en el cual la geometría del espacio-tiempo está tan distorsionada que ni siquiera la luz puede escapar de ellos. Poseen un horizonte de sucesos: las partículas y la luz pueden entrar pero no salir del mismo. Schwarzschild, en 1916 [30], fue el primero en obtener la métrica de objetos esféricos, basado únicamente en aspectos matemáticos de la teoría de la Relatividad General. Luego, trabajos como los de Oppenheimer y Snyder en 1939, sugirieron que estos objetos pueden formarse a partir del colapso gravitatorio de una estrella. En 1963, Kerr encontró una solución matemática más general que la de Schwarzschild, que describe agujeros negros rotantes. Luego, a fines de los años 60. S. Hawking y R. Penrose demostraron que, bajo ciertas condiciones, la teoría de la Relatividad General implica la formación de una singularidad y un horizonte, independientemente de la forma en la que se produzca el colapso.

Los agujeros negros desempeñan un papel muy importante en astrofísica. Hay fuerte evidencia de que las galaxias albergan agujeros negros supermasivos en su centro y que la acreción de materia hacia un agujero negro puede ser la fuente de energía de los núcleos galácticos activos. Además las estrellas muy masivas finalizarán su existencia como tales como agujeros negros debido a su colapso gravitatorio. El estudio de agujeros negros como lentes gravitatorias es una nueva área de investigación que se ha abierto en los últimos años, a partir del trabajo de Virbhadra y Ellis [31], donde se estudió en

forma numérica el agujero negro supermasivo ubicado en el centro de nuestra galaxia [32] usando la métrica de Schwarzschild. Cuando un agujero negro actúa como lente gravitatoria, da lugar a dos imágenes, denominadas primaria y secundaria, que son producidas por rayos de luz que pasan lejos de la esfera de fotones del agujero negro, y que tienen, por lo tanto, ángulos de deflexión pequeños; y a dos conjuntos infinitos de imágenes, llamadas relativistas, que se forman debido a los rayos de luz que pasan muy cerca de la esfera de fotones, es decir, en la región en la que la estructura espacio-tiempo está altamente distorsionada. En la formación de las imágenes relativistas intervienen fotones que dan una o más vueltas en ambos sentidos (lo que explica la existencia de dos conjuntos de imágenes) alrededor del agujero negro antes de emerger y llegar al observador. Estos estudios, no sólo pueden llevarse a cabo de manera numérica, sino que también se pueden obtener resultados analíticos por medio de una aproximación denominada límite de deflexión fuerte [33–37], que es un método basado en una aproximación logarítmica del ángulo de deflexión para fotones que pasan cerca del agujero negro, a partir del cual, se pueden obtener expresiones analíticas para las posiciones angulares y magnificaciones de las imágenes relativistas, así como también los retrasos temporales entre ellas. El primero en introducirlo fue Darwin [33] para un agujero negro de Schwarzschild, redescubierto por varios autores [34, 38–40], extendido a otras geometrías como la de Reissner–Nordström [35], y generalizado para agujeros negros asintóticamente planos y con simetría esférica [36]. Agujeros negros de Kerr también fueron estudiados en este límite en distintos trabajos [41, 42] y este método fue generalizado a segundo orden en el parámetro de rotación [41]. El caso de *retro-lensing*, que corresponde a la situación en la que la fuente se encuentra entre la lente y el observador, también fue estudiado en el límite de deflexión fuerte [43]. Este método fue utilizado en diferentes contextos astrofísicos [44–47]. También fue aplicado a agujeros negros provenientes de teorías alternativas [48–52] y en el contexto de cosmologías con dimensiones extra [53–59]. Asimismo, agujeros negros rotantes correspondientes a distintas teorías han sido estudiados como lentes gravitatorias en los últimos años [41, 42, 60–63]. Los efectos de lente gravitatoria producidos por agujeros negros no son observables por medio de los instrumentos actuales, pero se espera que puedan comenzar a ser observados por una nueva generación de

instrumentos en los próximos años [64].

Las imágenes relativistas son estudiadas en el límite de deflexión fuerte, a partir del cual se obtiene el ángulo de deflexión. Una vez obtenido este ángulo (de manera aproximada), se reemplaza al mismo en la “ecuación de la lente” que corresponda y se obtienen las posiciones de las imágenes y sus magnificaciones en función de la posición angular de la fuente y de las distancias involucradas.

1.3. Objetivos y organización de la Tesis

Uno de los objetivos de esta Tesis consiste el estudio de agujeros negros en cosmologías con dimensiones extra, en particular su análisis como lentes gravitatorias. En este caso, se consideran agujeros negros sin masa introducidos en un artículo de Bronnikov et al. en 2003 [65] en el marco del modelo de Randall-Sundrum tipo II. Otra clase de agujeros negros que tienen relevancia desde el punto de vista cosmológico son aquellos que podrían estar formados por energía oscura en la forma de un campo escalar fantasma. Esto motiva al estudio como lentes gravitatorias de agujeros negros cuya solución fue propuesta en un artículo de Bronnikov y Fabris en 2006 [27]. Finalmente, se analiza una clase de agujeros negros cargados y mínimamente acoplados a un campo escalar en gravedad escalar-tensorial, cuya solución fue presentada por Bronnikov y Chernakova en 2007 [66]. En todos los casos a analizar, el observador y la fuente estarán situados a gran distancia del agujero negro. Se encontrarán, partiendo de la métrica correspondiente, las posiciones de las imágenes primaria y secundaria utilizando el límite de deflexión débil. A partir del límite de deflexión fuerte, se hallarán las posiciones de las imágenes relativistas y los valores de sus magnificaciones. Luego se obtendrán los observables correspondientes, se analizarán situaciones de interés astrofísico, se compararán los resultados con aquellos obtenidos en trabajos anteriores y se discutirán las posibilidades de observación futura de estos efectos. Estos estudios dieron lugar a la publicación de tres artículos en revistas internacionales con referato [67–69].

Los avances en el análisis teórico de los agujeros negros como lentes gravitatorias

como los aquí analizados, pueden servir en los próximos años -cuando las facilidades observacionales lo permitan- para modelar con gran precisión el entorno cercano a estos objetos, así como también constituirse en herramientas útiles para la cosmología.

Esta Tesis de Doctorado consta de siete capítulos y tres apéndices, y está organizada como se detalla a continuación:

- En el Capítulo 2, se hace una revisión breve de la teoría de la relatividad general, que es la base teórica sobre la que se sostiene el desarrollo de objetos masivos como lentes gravitatorias. También se detallan las características generales de los agujeros negros de Schwarzschild y Reissner–Nordström, a los que se hará referencia como objetos de comparación a lo largo de esta Tesis.

- En el Capítulo 3, se hace en primer lugar una descripción introductoria de las lentes gravitatorias y luego, se desarrolla detalladamente el formalismo que lleva al cálculo del ángulo de deflexión en los límites de deflexión débil y fuerte, a partir de los cuales se obtienen las expresiones correspondientes a las posiciones y magnificaciones de manera analítica. Se definen los observables y por último, se presentan los resultados obtenidos en la literatura, para las geometrías de Schwarzschild y Reissner–Nordström.

- En el Capítulo 4, se estudia como lentes gravitatorias agujeros negros sin masa que surgen como solución de la teoría de mundos brana, en el contexto del modelo de Randall-Sundrum Tipo II. Se describen las características principales de la geometría, y se obtienen las posiciones y magnificaciones de las imágenes primaria y secundaria en el límite de deflexión débil, y las correspondientes a las imágenes relativistas, a partir del límite de deflexión fuerte.

- En el Capítulo 5, se analiza una clase de agujeros negros con un campo fantasma (*phantom*) como lentes gravitatorias, tanto en el límite débil como en el fuerte. Los resultados obtenidos son comparados con la solución de vacío de Brans–Dicke, y como ejemplo, se aplican los mismos al caso particular del agujero negro supermasivo del centro galáctico.

- En el Capítulo 6, se considera una clase de agujero negros cuya solución proviene de la teoría escalar–tensorial. Se analizan los límites de deflexión fuerte y débil, y se comparan los resultados con el caso de Reissner–Norström. El agujero negro del centro

galáctico es estudiado a modo de ejemplo.

- En el Capítulo 7, por último, se presentan un sumario de lo estudiado y las conclusiones finales de esta Tesis de Doctorado.

- En el Apéndice A se incluyen las constantes físicas fundamentales, algunas constantes astrofísicas que son utilizadas en este trabajo y se presentan las unidades geométricas y los factores de conversión necesarios para esta Tesis.

- En el Apéndice B se presentan brevemente una descripción de la geometría de Myers-Perry y los resultados obtenidos en el límite de deflexión fuerte.

- En el Apéndice C se introducen las características básicas y el comportamiento como lente gravitatoria, para el agujero negro no rotante y sin carga en la teoría de Brans-Dicke.

Capítulo 2

Agujeros negros

En este capítulo se introducen los aspectos básicos de la teoría de la Relatividad General, necesaria para comprender algunas de sus consecuencias, como ser la desviación de la luz al pasar cerca de un objeto astrofísico, debido a la distorsión del espacio-tiempo en sus alrededores. Luego, se analizan las características principales de las soluciones de agujero negro más sencillos que se obtienen de esta teoría: el agujero negro de Schwarzschild y el agujero negro de Reissner-Nordström, los cuales serán de utilidad para establecer comparaciones con aquellos estudiados en esta Tesis.

2.1. Relatividad General

En esta sección se describen, de manera breve, las características principales y básicas de la teoría de la relatividad general, así como la notación utilizada en adelante. Para tratar el tema con mayor detalle, se sugiere consultar la bibliografía [70–72]. La convención de signos adoptada es la de Misner, Thorne y Wheeler [70].

La teoría de la relatividad es una teoría clásica de campos, descripta matemáticamente mediante elementos de la geometría diferencial [70], en la cual el espacio y el tiempo se hallan combinados en una estructura denominada espacio-tiempo. El espacio-tiempo constituye una variedad diferenciable¹ pseudo-Riemanniana² de cuatro dimensiones. En

¹conjunto localmente como R^n

²con métrica no definida positiva

esta teoría, la presencia de un objeto produce la deformación del espacio-tiempo que lo rodea.

En relatividad general, no existe un sistema de coordenadas preferente y requiere que sus ecuaciones sean invariantes ante un cambio de coordenadas. Muchas de las cantidades usadas en esta teoría son tensores, que constituyen una generalización del concepto de vector, sólo que poseen más índices. En una variedad diferenciable, los vectores y tensores se definen en el espacio vectorial tangente a cada punto de la misma. La variedad posee un tensor métrico $g_{\mu\nu}$ (simétrico), que permite definir el producto interno entre vectores:

$$U \cdot V = g_{\mu\nu}U^\mu V^\nu, \quad (2.1)$$

por lo que la norma de un vector resulta

$$\|V\|^2 = V \cdot V = g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu. \quad (2.2)$$

Los vectores con superíndices (subíndices) se denominan contravariantes (covariantes) y se utilizó la convención de Einstein para la suma: si hay un índice covariante y contravariante iguales, se suma sobre ese índice.

Un tensor puede tener tanto índices covariantes como contravariantes. Supongamos que se tiene un tensor de rango (n, m) , es decir, con n índices contravariantes y m covariantes, se pueden definir operaciones de subida y bajada, para modificar el rango del mismo:

$$V_\mu = g_{\mu\nu}V^\nu, \quad (2.3)$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T^{\alpha\beta}. \quad (2.4)$$

Un elemento de longitud en la variedad se puede escribir a partir del tensor métrico como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (2.5)$$

el cual resulta invariante ante transformaciones de coordenadas $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$.

En relatividad general, la métrica no es definida positiva. Esto implica que los elementos de longitud pueden ser negativos, positivos o nulos. En el caso de tener $ds^2 > 0$,

se dice que es de tipo espacial; si $ds^2 < 0$, se dice de tipo temporal; y cuando $ds^2 = 0$, se dice de tipo nulo.

Haciendo un cambio de coordenadas³, la métrica $g_{\mu\nu}$ adquiere localmente la forma de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Dada la métrica $g_{\alpha\mu}$, se define la conexión métrica (también conocida como símbolos de Christoffel) como:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}), \quad (2.7)$$

donde $g^{\alpha\mu}$ es la matriz inversa de $g_{\alpha\mu}$, es decir,

$$g^{\alpha\mu}g_{\mu\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (2.8)$$

y las comas indican derivadas parciales, por ejemplo $g_{\mu\beta,\gamma} = \partial g_{\mu\beta}/\partial x^{\gamma}$.

La conexión es simétrica en los índices covariantes y no es un tensor, dado que la derivada parcial de un tensor (presente en la conexión), no satisface las propiedades de transformación de tensores. Se introduce, por lo tanto, la derivada covariante, que constituye una extensión a la noción de derivada parcial a un espacio curvo. La misma transforma como tensor, y está definida de la siguiente manera:

$$V^{\mu}_{;\nu} = V^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}V^{\alpha}, \quad (2.9)$$

$$V_{\mu;\nu} = V_{\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}V_{\alpha}, \quad (2.10)$$

$$T^{\mu\nu}_{;\gamma} = T^{\mu\nu}_{,\gamma} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}T^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\gamma}T^{\mu\alpha}, \quad (2.11)$$

$$T_{\mu\nu;\gamma} = T_{\mu\nu,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}T_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}T_{\mu\alpha}. \quad (2.12)$$

³pasando a coordenadas de Lorentz

La derivada covariante de la métrica y su inversa son siempre cero en todo punto de la variedad. A esto se lo conoce como compatibilidad de la conexión con la métrica:

$$g_{\mu\nu;\gamma} = 0, \quad g^{\mu\nu}{}_{;\gamma} = 0. \quad (2.13)$$

A partir de los símbolos de Christoffel, se define el tensor de Riemann, el cual contiene la información sobre la curvatura de la variedad en cada punto. El mismo posee cuatro índices y está dado por:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}. \quad (2.14)$$

Al igual que la derivada covariante, el tensor de Riemann está construido a partir de elementos no tensoriales, pero combinados de modo que se tiene un tensor como resultado final. El mismo verifica las siguientes propiedades:

$$R^\alpha{}_{\beta(\gamma\delta)} \equiv \frac{1}{2!} (R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + R^\alpha{}_{\beta\delta\gamma}) = 0 \quad (2.15)$$

y

$$R^\alpha{}_{[\beta\gamma\delta]} \equiv \frac{1}{3!} (R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} - R^\alpha{}_{\gamma\beta\delta} + R^\alpha{}_{\gamma\delta\beta} - R^\alpha{}_{\delta\gamma\beta} + R^\alpha{}_{\delta\beta\gamma} - R^\alpha{}_{\beta\delta\gamma}) = 0. \quad (2.16)$$

Estas consideraciones de simetría hacen que sólo 20 de las 256 componentes del tensor de Riemann sean independientes. Todas las componentes de $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ son cero sí y sólo sí la variedad es plana.

Además del tensor de Riemann, otro concepto importante que se relaciona con la curvatura de una variedad, es el de geodésica. La misma corresponde a una curva que extrema la cantidad $\int ds$ y describe el camino en el espacio-tiempo que efectúa una partícula libre. Una geodésica $x^\mu(\lambda)$, satisface

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (2.17)$$

donde λ es el parámetro afín. Si la partícula es masiva, la parametrización se hace con el tiempo propio ($\lambda = \tau$).

A partir del tensor de Riemann pueden obtenerse mediante contracciones el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}, \quad (2.18)$$

y el escalar de Ricci

$$R = R^\mu{}_\mu. \quad (2.19)$$

Utilizando estas cantidades, se define el tensor de Einstein como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

Los tensores de Ricci y de Einstein son simétricos. Además satisfacen en todo punto

$$R_{\mu\nu;\alpha} = 0, \quad G_{\mu\nu;\alpha} = 0. \quad (2.21)$$

La manera de relacionar materia y energía con la curvatura del espacio-tiempo es por medio de las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

donde G es la constante universal de gravitación de Newton y $T_{\mu\nu}$ un tensor simétrico, de rango 2, llamado tensor de energía-momento:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & S_j \\ S_i & \tau_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

siendo ρ la densidad de energía, S_j el flujo de energía (generalización del vector de Poynting) y τ_{ij} el *stress* (generalización de la noción de tensión), con $1 \leq i, j \leq 3$.

Reemplazando la ecuación (2.22) en la ecuación (2.20) e introduciendo el término correspondiente a la denominada constante cosmológica Λ , se tiene finalmente

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.24)$$

De este modo, las ecuaciones de Einstein relacionan geometría con materia: el lado izquierdo de la igualdad contiene información sobre la curvatura del espacio-tiempo, y el derecho, es una medida de la cantidad de energía y momento contenidos en él. Las mismas constituyen un sistema de 10 ecuaciones diferenciales no lineales a derivadas parciales de segundo orden para las componentes de la métrica, de las que solamente 6 ecuaciones son independientes, dado que $G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$. Esto indica que de las 10 componentes de la métrica sólo 6 están determinadas por las ecuaciones de Einstein y corresponden a grados de libertad físicos. Las restantes 4 dependen de la elección del sistema de coordenadas.

En el marco de la teoría de la relatividad general, es usual emplear el sistema de unidades geométricas: $c = 1$ y $G = 1$ (ver Apéndice A) el cual se utilizará a lo largo de toda esta Tesis.

2.2. Agujeros negros en relatividad general

En esta sección se presentan las características básicas de los agujeros negros no rotantes. Un agujero negro es una región del espacio cuyo campo gravitatorio es tan intenso que distorsiona la estructura espacio-tiempo de modo tal que ninguna partícula o radiación electromagnética puede escapar de ella. Esta región está delimitada por una superficie que divide el interior del agujero negro del resto del universo, denominada horizonte de eventos. Los agujeros negros pueden formarse como consecuencia del colapso gravitatorio de una estrella a dimensiones por debajo del radio del horizonte de eventos. Cuando una partícula ingresa en su interior (es decir, atraviesa el horizonte), queda confinada en el mismo, y no puede emerger hacia el exterior. Esto sucede tanto con partículas masivas como con la luz. De aquí el nombre de “agujero negro”.

Los agujeros negros aparecen como soluciones de la relatividad general y otras teorías. Estos objetos pueden poseer una singularidad física (no coordenada) en su centro, en el cual las leyes de la física no están bien definidas. La implicancia de una singularidad en agujeros negros descritos por la relatividad general, fue analizada por S. Hawking y R. Penrose a finales de la década de los 60's. Sin embargo, otras teorías alternativas predicen agujeros negros sin singularidades (llamados “regulares”). En general, los agujeros negros pueden ser descritos por tres parámetros: su masa, su carga, y su momento angular. Según esto, se tiene la siguiente clasificación:

- (i) Agujero negro de Schwarzschild: no rotante y posee una singularidad en su centro.
- (ii) Agujero negro de Kerr: es rotante, con singularidad en forma de anillo.
- (iii) Agujero negro de Reissner-Nordström: es cargado, no rota y es singular en su centro.
- (iv) Agujero negro Kerr-Newman: es rotante, posee carga y tiene una singularidad en

forma de anillo.

Donde los últimos dos mencionados (iii y iv), surgen acoplado un campo electromagnético de Maxwell a las ecuaciones de Einstein.

Al momento, existen numerosas soluciones de agujeros negros que provienen de teorías alternativas a la Relatividad General, como ser la teoría de mundos brana y la teoría escalar-tensorial, entre otras. Estos agujeros negros poseen características diferentes a las correspondientes a los agujeros negros arriba mencionados, que pueden hacerse manifiestas en distintos contextos astrofísicos, motivo por el cual es de interés su estudio.

2.3. Agujero negro de Schwarzschild

Cuando Einstein obtuvo la ecuación (2.22), a fines de 1915, rápidamente halló soluciones aproximadas, con el objetivo de estudiar sus consecuencias observacionales, como ser la deflexión de la luz de una estrella debido al campo gravitatorio del sol. De todos modos, Einstein mismo creyó que, dada la complejidad de sus ecuaciones (que son de carácter no lineal), nunca se encontraría una solución exacta. Poco después, en 1916, fue Karl Schwarzschild [30], quien halló por primera vez una solución no trivial de las mismas, y desde entonces, cientos de otras soluciones fueron encontradas.

Para resolver las ecuaciones de Einstein, usualmente se necesitan hacer algunas consideraciones que simplifican el problema, como por ejemplo, de simetría. La solución más simple, de hecho, fue la hallada por Schwarzschild y corresponde a la única solución con simetría esférica de las ecuaciones de vacío. La misma describe la geometría del espacio-tiempo vacío alrededor de objetos esféricos, como estrellas y planetas, así como los agujeros negros no rotantes y sin carga.

Por “simetría esférica”, debe entenderse “mismas simetrías que una esfera”, y por “esfera”, debe entenderse S^2 . De este modo, el espacio-tiempo posee superficies bidimensionales cerradas sobre las cuales no es posible distinguir un punto de otro. Las coordenadas que describen un punto sobre cada superficie son los ángulos θ y ϕ . Las coordenadas que distinguen una superficie de otra, se denominan t y r , donde t denota la coordenada

temporal, y r es tal que la superficie de cada esfera sea la usual $4\pi r^2$. Éstas, son las coordenadas de Schwarzschild.

Siendo que se trata de una solución de vacío, el tensor de energía y momento $T_{\mu\nu}$ es cero y las ecuaciones de Einstein en ausencia de constante cosmológica se reducen a

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.25)$$

La existencia de una solución no trivial en vacío, se debe a la no linealidad de las ecuaciones de Einstein. Esto hace que como solución, no se obtenga únicamente el espacio-tiempo de Minkowski. La métrica de Schwarzschild resulta ser

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.26)$$

donde el parámetro M es la masa dentro del radio r . El hecho de que la métrica de Schwarzschild sea la única solución esféricamente simétrica de vacío y asintóticamente plana, es establecido por el teorema de Birkhoff. Como consecuencia, se tiene que la geometría exterior al objeto permanece inalterable y es estática, más allá de lo que suceda con el cuerpo siempre y cuando esto no implique una ruptura de la simetría esférica.

Si se observan los coeficientes de la métrica, se ve que los valores $r = 0$ y $r_h = 2M$ (r_h es el denominado radio de Schwarzschild) presentan divergencias. En $r = 0$, se tiene que g_{tt} diverge, y en r_h , el coeficiente g_{rr} diverge, mientras $g_{tt} = 0$. En general, los objetos astrofísicos usuales poseen tamaños mayores al radio de Schwarzschild, por lo que no se tiene divergencia en r_h , pero debe ser considerada en el caso de objetos compactos.

¿Cómo serán las trayectorias de una partícula en la geometría de Schwarzschild? Para ello, se tiene en consideración las simetrías de la misma, a fin de obtener y utilizar las cantidades conservadas. En primer lugar, como la métrica es independiente de ϕ , el impulso angular por unidad de masa $l = L/M$ se conserva. Como el impulso angular se conserva, el movimiento queda confinado a un plano que se puede elegir (debido a la simetría esférica) en $\theta = \pi/2$. La métrica no depende de la coordenada temporal, por lo tanto, la energía por unidad de masa $e = E/M$ se conserva. De este modo, el problema resulta unidimensional. Las ecuaciones que gobiernan las órbitas son [70]:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\epsilon + \frac{l^2}{r^2}\right), \quad (2.27)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{l}{r^2}, \quad (2.28)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{e}{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (2.29)$$

Se puede definir

$$V_{eff} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\epsilon + \frac{l^2}{r^2}\right), \quad (2.30)$$

que corresponde a un potencial efectivo. Para partículas masivas se tiene $\epsilon = 1$ y para no masivas, $\epsilon = 0$; la cantidad λ es el parámetro afín, que en el caso de partículas masivas, corresponde al tiempo propio τ . Es importante rescatar que las geodésicas de ambos tipos de partículas son diferentes.

Dependiendo de los valores de e y l y, observando el gráfico [70] de V_{eff} , se pueden dar tres tipos de situaciones para partículas masivas:

(a) Órbitas cerradas, con $r_{min} < r < r_{max}$, siendo los extremos del potencial efectivo:

$$r = \frac{l^2}{2M} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{l^2}}\right); \quad (2.31)$$

donde el signo (+) corresponde a una órbita circular estable (mínimo de V_{eff}) y el (-) a una órbita circular inestable (máximo de V_{eff}).

(b) Órbitas abiertas (o no ligadas): la partícula se aproxima al cuerpo de masa M y luego se aleja indefinidamente.

(c) Órbitas en espiral: la partícula es capturada por el objeto de masa M , describiendo una trayectoria en espiral hacia el centro del mismo.

Para el caso de partículas no masivas, las ecuaciones anteriores se pueden escribir más convenientemente en términos del parámetro de impacto $b = l/e$. De este modo, se tiene

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = b^{-2} - U(r)^{-2}, \quad (2.32)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{1}{r^2}, \quad (2.33)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{b \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (2.34)$$

siendo

$$U(r)^{-2} = r^{-2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (2.35)$$

Analizando el potencial efectivo, se observa que hay una única órbita circular inestable en $r = 3M$, y que corresponde al “radio de la esfera de fotones”. Esta órbita es de especial interés en esta Tesis y será tratada con mayor detalle en el capítulo siguiente. Para que un fotón quede confinado en la esfera de fotones, el parámetro de impacto debe ser $b = 3\sqrt{3}M$. En el caso de un fotón incidiendo con un parámetro de impacto mucho mayor, el mismo se desvía con cierto ángulo $0 < \alpha < 2\pi$ y luego se aleja infinitamente. Cuando $0 < b - 3\sqrt{3}M \ll M$ el fotón da varias vueltas alrededor de la órbita ubicada en $r = 3M$ (sin alcanzarla) antes de volver al infinito. Si $b < 3\sqrt{3}M$, el fotón es atrapado por el objeto masivo describiendo una trayectoria en espiral.

Las divergencias en $r = 0$ y $r = 2M$ en la métrica (2.26) resultan de interés para objetos muy compactos, como es el caso de los agujeros negros. Asimismo, es importante estudiar si estas divergencias son de carácter físico o simplemente matemático, es decir, si surgen de la elección de las coordenadas utilizadas para describir la geometría. Siendo que los coeficientes de la métrica son dependientes de las coordenadas, un análisis de éstos, no resulta de mucha utilidad.

La naturaleza de la divergencia en $r = 0$, puede obtenerse a partir de los invariantes de curvatura, ya que no dependen de la elección de coordenadas. En este caso, se tiene el invariante de Kretschmann [70]

$$R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}R^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (2.36)$$

donde se ve que en $r = 0$ esta cantidad diverge, lo que es suficiente para decir que representa una singularidad física, mientras que no presenta problemas en $r = 2M$. Por otro lado, las componentes del tensor de Riemann para una partícula masiva que se mueve a través de una geodésica radial, en un sistema de coordenadas ortonormal que acompaña a la partícula, resultan

$$\begin{aligned} R_{\hat{\tau}\hat{\rho}\hat{\tau}\hat{\rho}} &= \frac{-2M}{r^3}, & R_{\hat{\tau}\hat{\theta}\hat{\tau}\hat{\theta}} &= R_{\hat{\tau}\hat{\phi}\hat{\tau}\hat{\phi}} = \frac{M}{r^3}, \\ R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} &= \frac{2M}{r^3}, & R_{\hat{\rho}\hat{\theta}\hat{\rho}\hat{\theta}} &= R_{\hat{\rho}\hat{\phi}\hat{\rho}\hat{\phi}} = \frac{-M}{r^3}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Es sencillo ver que $r = 2M$ no corresponde a una singularidad física. Las fuerzas tidades que siente la partícula a medida que se acerca al radio de Schwarzschild son finitas, y

ninguna de las componentes del tensor de Riemann diverge en el radio del horizonte, por lo que nada impide que la partícula atraviese el mismo. Es decir, $r = 2M$ está bien definida y la singularidad que aparece en la métrica simplemente proviene de una inapropiada elección de las coordenadas utilizadas para describirla. En el caso de $r = 0$, las componentes del tensor divergen y por lo tanto, las fuerzas tidales tienden a infinito. La pregunta, por lo tanto, a responder ahora es ¿qué sucede en $r = 2M$? A simple vista, de la ecuación (2.26), se tiene que cuando $r < 2M$, tanto g_{tt} como g_{rr} cambian de signo (respecto al que tenían en $r > 2M$), y r se convierte en la coordenada temporal y t en la coordenada espacial.

En 1960, M. D. Kruskal [73] y G. Szekeres [74] propusieron en forma independiente un cambio de coordenadas para t y r , que remueve la divergencia de la métrica en $r = 2M$. A éstas, se las denominan coordenadas de Kruskal-Szekeres y son de la forma:

$$\begin{cases} u = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4M} \cosh \frac{t}{4M} & \text{si } r > 2M \\ u = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4M} \sinh \frac{t}{4M} & \text{si } r < 2M \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\begin{cases} v = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4M} \sinh \frac{t}{4M} & \text{si } r > 2M \\ v = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4M} \cosh \frac{t}{4M} & \text{si } r < 2M \end{cases} \quad (2.39)$$

De esta manera, la métrica de Schwarzschild, queda

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (du^2 - dv^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.40)$$

donde r no es una coordenada, sino una función de u y v cuya forma implícita está dada por

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} = u^2 - v^2. \quad (2.41)$$

De modo que la expresión (2.40) es regular en $r = 2M$, la singularidad en $r = 0$ no fue removida (pues es una singularidad física), y el cambio de variables no introduce en la métrica nuevas singularidades coordenadas.

En la Figura (2.1) se presenta el diagrama espacio-tiempo para el agujero negro de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal-Szekeres, para $\theta = \pi/2$ y $\phi = 0$. Las curvas de $r = cte$ corresponden a hipérbolas en el plano $u - v$, con asíntotas en $v = \pm u$. Las curvas de $t = cte$, satisfacen $u/v = \tanh(t/4M)$, y son rectas que pasan por el origen.

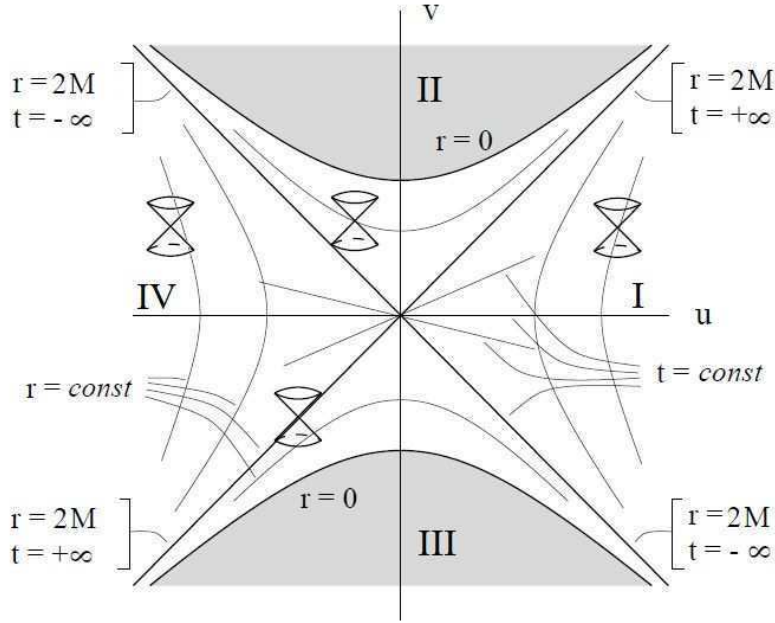


Figura 2.1: Diagrama de Kruskal para el agujero negro de Schwarzschild.

Se distinguen dos regiones asintóticas: una en $u \rightarrow +\infty$ y otra en $u \rightarrow -\infty$, en las cuales la métrica es plana. El horizonte de eventos está dado por la superficie $r = 2M$, o lo que es lo mismo, en $u = \pm v$. La singularidad $r = 0$ se encuentra en $v^2 - u^2 = 0$. En estas coordenadas, todos los conos de luz están a $\pm 45^\circ$. De esta manera, se pueden definir cuatro regiones, que abarcan la geometría de Schwarzschild en su totalidad. De las ecuaciones (2.38) y (2.39), se tiene que $u + v > 0$, que satisfacen las regiones I y II. La región I, denominada exterior, corresponde a $r > 2M$, y el agujero negro en sí, representado por la región II (interior), a $0 < r < 2M$. Una vez que una partícula pasa de la región I a la II, no puede retornar (a la región I) y termina inevitablemente en la singularidad ($r = 0$). De la ecuación (2.40), se ve que una geodésica radial nula debe cumplir $ds = 0$ y por lo tanto, $du = \pm dv$, la cual gráficamente corresponde a líneas a 45° . Las geodésicas temporales cumplen $|dv/du| > 1$, o sea con un ángulo menor a 45° respecto del eje v ; las de tipo espacial satisfacen $|dv/du| < 1$, es decir, poseen un ángulo mayor a 45° con la vertical. Dentro de la región I, una partícula masiva podrá sólo moverse en curvas cuyas rectas tangentes tengan siempre un ángulo menor a

45° con el eje vertical y hacia mayores valores de v (dirección en la que crece el tiempo). Si $dv/du < 0$ se moverá en el sentido de r decreciente, y si $dv/du > 0$, en el sentido de r creciente. La región III es análoga a II pero con la dirección de tiempo invertida. A ésta, se la suele denominar “agujero blanco”. La región IV y la región I son similares, pero están desconectadas. Ninguna partícula puede pasar de I a IV y viceversa. Tanto la región III como la IV, pueden ignorarse en el caso de agujeros negros, aunque son importantes para el estudio de agujeros de gusano.

2.4. Agujero negro de Reissner-Nordström

La solución esféricamente simétrica y asintóticamente plana de las ecuaciones de Einstein sin constante cosmológica acopladas al electromagnetismo de Maxwell es la de Reissner-Nordström. Esta geometría fue hallada independientemente por Reissner en 1916 [75] y por Nordström en 1918 [76], y representa un agujero negro eléctricamente cargado, con masa M y carga eléctrica Q . En una situación astrofísica, se esperaría que la carga total neta sea muy pequeña, especialmente en comparación con la masa. No obstante, la presencia de carga en la solución, modifica la estructura espacio-tiempo respecto de la solución no cargada, lo cual hace que su estudio sea de interés.

A diferencia de Schwarzschild, la solución de Reissner-Nordström no es de vacío, dado que el agujero negro tiene un campo electromagnético no nulo, el cual actúa como fuente en el tensor de energía-momento, que está dado por [72]

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}, \quad (2.42)$$

donde $F_{\mu\nu}$ corresponde a las componentes del tensor de Maxwell para el campo electromagnético.

La solución al agujero negro cargado, se halla resolviendo las ecuaciones de Einstein-Maxwell:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.43)$$

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}F_{\nu\sigma} = 0, \quad (2.44)$$

$$\nabla_{[\mu}F_{\nu\rho]} = 0, \quad (2.45)$$

donde ∇ es el operador derivada covariante. Las mismas constituyen un conjunto de ecuaciones acopladas, dado que el campo electromagnético está presente en las ecuaciones de Einstein a través del tensor de energía-momento, y la métrica $g_{\mu\nu}$ está incluida en las ecuaciones de Maxwell. La solución que se obtiene es asintóticamente plana, y se la conoce como la métrica de Reissner-Nordström:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.46)$$

donde Q representa la carga eléctrica total.

Se sigue teniendo una singularidad física en $r = 0$, pero la estructura de horizontes es más compleja que en el caso de la geometría de Schwarzschild, debido al término extra de carga. Los horizontes surgen de pedir $g_{tt} = 0$, resultando

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}; \quad (2.47)$$

dependiendo de los valores de los parámetros, se pueden tener dos horizontes, uno, o ninguno. Las situaciones posibles son las siguientes:

i) $M^2 > Q^2$: Corresponde al caso que se esperarí en un colapso gravitatorio real. El coeficiente g_{tt} es positivo para $r > r_+$, y también para $r < r_-$, mientras que es negativo en la región comprendida entre ambos horizontes. Las superficies singulares definidas por r_- y r_+ no son físicas y dependen de la elección de las coordenadas, como sucede en el caso de Schwarzschild. El valor $r_h = r_+$ corresponde al horizonte de eventos, mientras que r_- corresponde al horizonte interior.

ii) $M^2 = Q^2$: Este caso corresponde al agujero negro de Reissner-Nordström extremal. Aquel en el que la masa y la carga están exactamente balanceadas. Los dos horizontes hallados en la ecuación (2.47) se fusionan en uno solo, siendo éste de radio $r = M$.

iii) $M^2 < Q^2$: En este caso, g_{tt} es siempre positivo, y la métrica es completamente regular en las coordenadas (t, r, θ, ϕ) . Es decir, la coordenada t es siempre temporal y r siempre es espacial. Dado que no hay horizonte de eventos, se tiene una singularidad desnuda.

Capítulo 3

Lentes gravitatorias

La distorsión de la estructura del espacio-tiempo debido a la presencia de materia afecta las trayectorias de los fotones. Es por ello que los diferentes objetos astrofísicos pueden actuar como lentes gravitatorias. Al pasar la luz cerca de ellos, la misma se deflece y da origen a imágenes, cuyas posiciones dependen de la métrica correspondiente a dichos objetos. El análisis de este fenómeno se ha convertido en un tema de gran interés en los últimos 50 años. El descubrimiento de agujeros negros supermasivos en el centro de galaxias, incluida la nuestra, ha motivado fuertemente el estudio de agujeros negros como lentes gravitatorias en los últimos 15 años. En particular, en las cercanías de un agujero negro, los fotones provenientes de una fuente pueden efectuar numerosas vueltas alrededor del mismo antes de emerger y llegar al observador, dando origen a dos conjuntos infinitos de imágenes, denominadas relativistas. El estudio de este fenómeno no sólo resulta de gran importancia por el aspecto astrofísico en sí, sino que permitiría determinar en un futuro, de un modo indirecto, la naturaleza del agujero negro relacionando observaciones con el modelo teórico que lo describe.

Este capítulo tiene como propósito estudiar el tema de lentes gravitatorias en detalle. En la sección 3.1, se hace una introducción general a las lentes gravitatorias, comenzando por una breve reseña histórica. En la sección 3.2 se describen las características principales del ángulo de deflexión. El límite de deflexión débil es analizado en la sección 3.3, en la que se deducen las posiciones y magnificaciones de las imágenes primaria y secundaria.

Luego, en la sección 3.4, se desarrolla el límite de deflexión fuerte, a partir del cual se obtienen las expresiones analíticas correspondientes a las posiciones y magnificaciones de las imágenes relativistas, y se definen los observables. Por último, en la sección 3.5 se presentan los resultados obtenidos para los casos de la geometría de Schwarzschild y Reissner-Nordström, los cuales serán útiles como elementos de comparación a lo largo de esta tesis.

3.1. Introducción

Los aspectos básicos de las lentes gravitatorias son introducidos en esta sección, junto con una breve reseña histórica. Se recomienda consultar el libro de P. Schneider, J. Ehlers y E. E. Falco [77] o las monografías de J. Wambsganns [78], R. Narayan y M. Bartelmann [79], y E. Eiroa [80], para más información.

3.1.1. Resumen histórico

Anteriormente a la publicación de la Teoría de la Relatividad General de Einstein, la idea de que la luz podía deflectarse al pasar por las cercanías de un objeto masivo debido a su campo gravitatorio había sido ya considerada. El primer trabajo en el que se menciona la deflexión debida a la gravedad, fue escrito por J. Soldner en 1804, bajo el título: “On The Deflection Of Light Ray From Its Straight Motion Due To The Attraction Of A World Body Which It Passes Closely”. En él, a partir de cálculos newtonianos, se predice que los rayos que pasan muy cerca del limbo solar, debían sufrir una deflexión de $\alpha = 0.84$ arcsec.

Más de un siglo después, en 1911, Albert Einstein [81] desarrolló una versión relativista del ángulo de deflexión de la luz que pasa cerca del sol, obteniendo los mismos resultados hallados anteriormente por Soldner. Sin embargo, los principios físicos considerados detrás de estos cálculos eran diferentes. En el trabajo de Soldner, se asumía que la luz podía acelerarse o desacelerarse tal como lo hace una partícula masiva normal; en cambio, los cálculos efectuados por Einstein se basan en la dilatación temporal en un campo gravitatorio. Luego de completada la teoría de la Relatividad General, en 1915

Einstein consideró la curvatura del espacio alrededor del sol [82], lo cual modificaba los resultados obtenidos en 1911, y obtuvo en forma correcta el ángulo de deflexión: un rayo de luz que pasa a una distancia r de un objeto de masa M , posee un ángulo de deflexión dado por $\alpha = 2\alpha_{Newt} = 4M/r$. En el caso del sol, se obtiene 1.75 arcsec (es decir, el doble del hallado anteriormente). Pocos años después, en 1919, A. Eddington [83] confirmó este valor durante un eclipse solar, con un error del 30 por ciento.

En 1920, A. Eddington [84] señaló que dos estrellas lo suficientemente alineadas podrían dar origen a imágenes múltiples. En 1936, A. Einstein [29] calculó la deflexión de la luz de una estrella debida al campo gravitatorio de otra estrella, y encontró que las luminosidades aparentes cambian por la deflexión. Por otro lado, observó que a mayor alineación entre el objeto deflector y la fuente, mayor es la amplificación de la imagen. De todos modos, la separación angular resultaba muy pequeña como para pensar en posibles observaciones futuras. Sin embargo, F. Zwicky [85, 86], en 1937, argumentó que las galaxias y *clusters* de galaxias podían servir como lentes más útiles que las estrellas, debido a su gran masa y sección eficaz, dando lugar a imágenes de fuentes de fondo, con separaciones angulares lo suficientemente grandes como para ser observadas. De esta manera, señaló que la deflexión de la luz podía amplificar galaxias distantes que de otro modo no podrían ser detectadas y que esto permitiría la estimación de sus masas.

No fue hasta el descubrimiento de los cuásares en 1963, que se empezó a considerar el efecto de *lensing* gravitatorio como un fenómeno observable. Los cuásares constituyen una clase de fuentes que, dado que se encuentran a grandes distancias, la probabilidad de que la luz emitida por ellos sufra la deflexión debido a alguna galaxia interpuesta, es elevada. Otra característica que favorece la observación de este fenómeno, es que son lo suficientemente brillantes como para ser detectados (incluso a distancias cosmológicas), y además, su región de emisión óptica es muy compacta, lo que implica magnificaciones muy grandes e imágenes separadas lo suficiente como para ser resueltas.

En 1963, Yu. G. Klimov [87] estudió el fenómeno de *lensing* de galaxias por galaxias y afirmó la formación de una imagen en forma de anillo fácilmente distinguible, cuando las mismas se encuentran altamente alineadas. En el caso en que la alineación no es perfecta, en cambio, se producen imágenes múltiples que son difíciles de separar. S. Liebes [88]

consideró en 1964 el *lensing* de estrellas por estrellas.

Otro aspecto importante a destacar, es que las distintas imágenes (producidas por una misma lente y fuente) sufren un retraso temporal debido a que el camino que realizan los rayos de luz que las forman es distinto. Este aspecto fue estudiado por primera vez por S. Refsdal [89]. En 1964, Refsdal [90] publicó un artículo que muestra la posibilidad de medir la constante de Hubble H_0 a partir del *lensing* gravitatorio de una fuente variable. Como los tiempos de viaje para las diferentes imágenes son distintos, las variaciones intrínsecas de la fuente se observarían a tiempos diferentes en las imágenes. El retraso temporal es proporcional a la diferencia entre las longitudes absolutas de los caminos ópticos, que a su vez, es proporcional a H_0^{-1} .

N. Sanitt, en 1971, fue el primero en estudiar lentes no puntuales (distribuciones de masa extensa), trabajando con galaxias como lentes y cuásares como fuentes [91]. En 1973, aparece la primera discusión sobre cáusticas en *lensing* gravitatorio al considerar lentes extendidas sin simetría esférica, en un trabajo realizado por R. R. Bourassa y sus colaboradores [92].

El primer ejemplo de *lensing* gravitatorio, el cuásar QSO 0957+561A,B, fue verificado espectroscópicamente por D. Walsh, R. F. Carswell y R. J. Weymann [93], en 1979, al observar dos imágenes que se encontraban a la misma distancia y separadas por 6 segundos de arco ($z = 1,413$). Este estudio determinó que esas dos imágenes correspondían al mismo cuásar, dadas las similitudes de sus espectros en óptico y radio, y además, se detectó la galaxia que actúa como lente ($z = 0,355$). Como consecuencia de este descubrimiento, surgieron una enorme cantidad de trabajos sobre imágenes múltiples de cuásares.

B. Paczynski, en 1986 mostró que una en un millón de estrellas en la nube de Magallanes podría encontrarse magnificada por el efecto de lente gravitatoria de una estrella interpuesta en el halo de nuestra galaxia. Estos eventos de magnificación, que se denominan eventos de *microlensing*, tienen escalas temporales comprendidas entre las dos horas y los dos años para masas de la lente entre $10^{-6} M_\odot$ y $10^2 M_\odot$.

En 1987, J. N. Hewitt et al. [94] observó en frecuencia de radio los primeros anillos de Einstein. Hoy en día se conocen varios de ellos y resultan un fenómeno importante de estudiar, dado que permite obtener modelos más detallados sobre las distribuciones de

masa de las galaxias que actúan como lentes. Asimismo, a mediados de la década del '80 fueron descubiertos arcos luminosos gigantes de color azul [95], que Paczynski [96] explicó como imágenes de galaxias de fondo muy distorsionadas y elongadas debido al efecto de *lensing* gravitatorio producido por un cúmulo de galaxias interpuesto que actuaba como lente. Estos arcos luminosos gigantes requieren un alineamiento muy especial entre el cúmulo y la galaxia de fondo.

Como puede apreciarse, el estudio del fenómeno de *lensing* gravitatorio puede resultar una herramienta de gran importancia que permite obtener información útil para resolver muchos interrogantes en el campo de la astrofísica actual. Esto hizo que en los últimos 50 años [78], se haya convertido en un tema de mucho interés.

3.1.2. Consideraciones y definiciones básicas

La trayectoria de la luz emitida por una fuente es afectada por la totalidad de materia que se encuentra entre la misma y el observador, debido a que esta materia distorsiona la estructura del espacio-tiempo que la rodea. No sólo la trayectoria es modificada, sino también el tamaño de su sección eficaz. Este fenómeno, en general, bastante complicado de estudiar a nivel teórico, da origen a imágenes virtuales de la fuente, que pueden estar magnificadas o demagnificadas. Una situación sencilla de analizar, es considerar que el efecto de *lensing* gravitatorio está dominado por una única lente (un único objeto deflector que curva el espacio-tiempo) situada entre la fuente y el observador los cuales se encuentran lo suficientemente alejados de la misma, de modo de hallarse en una región asintóticamente plana (métrica de Minkowski). Esta configuración es usualmente conocida como la “aproximación de lente delgada”, en el sentido en el que la lente es muy pequeña en relación con su distancia al observador y a la fuente. Por último, se asume que la geometría del universo es la de Robertson-Walker y que las inhomogeneidades que causan la deflexión de la luz son perturbaciones locales.

Uno de los objetivos principales que tiene el estudio de *lensing* es el de hallar las posiciones aparentes de la fuente que ve un observador, al recibir los rayos de luz de la fuente desviados debido a la presencia de un objeto deflector. La manera de abordar este problema, es a partir de una descripción similar a la que se hace en óptica geométrica.

La ecuación que conecta las posiciones de las imágenes con las posiciones de la lente, la fuente y el observador, es la denominada “ecuación de la lente”. La ecuación de la lente relaciona el ángulo de deflexión $\vec{\alpha}$ con las posiciones angulares de la imagen $\vec{\theta}$ y de la fuente $\vec{\beta}$, y las distancias involucradas. El modo general de proceder ante un problema de *lensing* es, en primer lugar, hallar el ángulo de deflexión $\vec{\alpha}$, luego, reemplazarlo en la ecuación de la lente, y finalmente, invertirla para obtener las posiciones angulares de las imágenes $\vec{\theta}$ en función de la posición angular de la fuente $\vec{\beta}$.

No sólo la posición de la imagen es de relevancia, sino también su magnificación. Las imágenes conservan el brillo superficial (a causa del teorema de Liouville) [77], pero el ángulo sólido aparente de la fuente se ve modificado. De este modo, resulta importante definir la magnificación como el cociente entre las áreas de la imagen y la fuente:

$$\mu = \frac{I_{obs}}{I_0} = \frac{A_i}{A_f}, \quad (3.1)$$

donde I_0 es el flujo total emitido por la fuente, I_{obs} es el flujo observado correspondiente a la imagen, A_i es el área de la imagen y A_f corresponde al área de la fuente. En el caso en el que se tienen varias imágenes, la amplificación total corresponde a la suma de las amplificaciones de cada una de las mismas. Matemáticamente, la magnificación corresponde al determinante de la matriz Jacobiana de la transformación $\vec{\theta} \rightarrow \vec{\beta}$. Es decir,

$$\mu = \left| \det \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}} \right|^{-1}. \quad (3.2)$$

En el caso particular en que se tiene una lente con simetría circular, el problema se hace unidimensional y la amplificación se simplifica a

$$\mu = \left| \frac{\sin \beta \, d\beta}{\sin \theta \, d\theta} \right|^{-1}. \quad (3.3)$$

3.2. Ángulo de deflexión exacto

El ángulo de deflexión $\vec{\alpha}$ es, por lo general, un vector de dos componentes. En el caso particular de una lente con simetría circular, se puede ubicar el origen de coordenadas en el centro de la misma para reducir el problema a una dimensión. La fuente, la lente

y el observador, determinan un plano donde se formarán las imágenes. Partiendo de un espacio-tiempo esféricamente simétrico y asintóticamente plano, cuyo elemento de línea está dado por

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.4)$$

se demuestra que [71] el ángulo de deflexión para un fotón que se aproxima desde el infinito, puede escribirse en función de la distancia de máximo acercamiento r_0 al centro del objeto astrofísico que actúa como lente, como

$$\alpha(r_0) = I(r_0) - \pi, \quad (3.5)$$

donde

$$I(r_0) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{2\sqrt{B(r)}dr}{\sqrt{C(r)}\sqrt{\frac{C(r)}{C(r_0)}\frac{A(r_0)}{A(r)} - 1}}. \quad (3.6)$$

Esta expresión es general y exacta, válida para cualquier valor de r_0 , y constituye una función decreciente de la distancia de máximo acercamiento. Una vez que el fotón alcanza la mínima distancia al objeto deflector, el mismo emerge de manera simétrica. La integral (3.6) raramente puede ser resuelta de manera analítica, y se hace necesario recurrir, por lo tanto, a métodos numéricos. Sin embargo, existen dos casos límites de interés que pueden ser estudiados de forma analítica utilizando aproximaciones, y que serán descriptos en detalle en las siguientes secciones: fotones que inciden con un parámetro de impacto tal que el ángulo de deflexión es pequeño y se utiliza el límite de deflexión débil, dando lugar a las denominadas imágenes primaria y secundaria; y por otro lado, fotones que sufren una gran deflexión pudiendo incluso experimentar una o más vueltas alrededor de la lente, caso que se describe a través del límite de deflexión fuerte. Este último fenómeno es propio de los objetos que poseen esfera de fotones, dando lugar a dos conjuntos infinitos de imágenes, denominadas relativistas.

3.3. Límite de deflexión débil

Una geometría básica de una lente gravitatoria es esquematizada en la Figura 3.1, en la que un rayo de luz es emitido por una fuente (S), es deflectado un ángulo $\vec{\alpha}$ por la

lente (L) y llega al observador (O). De esta manera, el observador ve una imagen virtual (I) de la fuente, en la dirección tangente a la trayectoria de la luz en el punto O. Cuando la fuente es puntual hay dos imágenes, una a cada lado de la fuente. La ecuación de la lente para ángulos pequeños se obtiene a partir de consideraciones geométricas sobre la Figura 3.1:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{D_{ls}}{D_{os}} \vec{\alpha}(\vec{\theta}). \quad (3.7)$$

El límite de deflexión débil corresponde a una aproximación válida para el caso en que se tienen fotones que inciden con un parámetro de impacto tal que la distancia de máximo acercamiento r_0 a la lente sea lo suficientemente grande como para que el ángulo de deflexión sea pequeño (esquematisado en la Figura 3.1). Matemáticamente consiste en expandir la expresión (3.5) en potencias de $1/r_0$ a través de un cambio de variables $h = 1/r_0$ y desarrollando en Taylor alrededor de $h = 0$. Esto permite hallar expresiones analíticas para las posiciones y magnificaciones de las imágenes en este régimen.

A modo de ejemplo, se presenta la situación más sencilla que corresponde a una fuente puntual de masa M , cuya geometría de espacio-tiempo está dada por la métrica de Schwarzschild (2.26). En este caso, el ángulo de deflexión se reduce a

$$\alpha = \frac{4M}{r_0}. \quad (3.8)$$

En este límite, en el que la deflexión de los fotones es pequeña ($|\alpha| \ll 1$), la distancia de máximo acercamiento r_0 coincide aproximadamente con el parámetro de impacto u , es decir, $r_0 \approx u$. Para que esto suceda, $u \gg R_S$, donde $R_S = 2M$ es el radio de Schwarzschild de la lente.

De este modo, reemplazando la ecuación (3.8) en (3.7), la ecuación de la lente en el límite de deflexión débil queda dada por

$$\beta = \theta - \frac{D_{ls}}{D_{os}} \frac{4M}{u}. \quad (3.9)$$

A partir de la Figura 3.1, se puede ver claramente que $u = D_{ol} \sin \theta \approx D_{ol} \theta$, por lo que

$$\beta = \theta - \frac{D_{ls}}{D_{os} D_{ol}} \frac{4M}{\theta}. \quad (3.10)$$

Despejando la variable θ de la ecuación (3.10), se obtienen dos imágenes cuando la fuente es puntual y $\beta \neq 0$, denominadas “primaria” y “secundaria”, que provienen de la deflexión

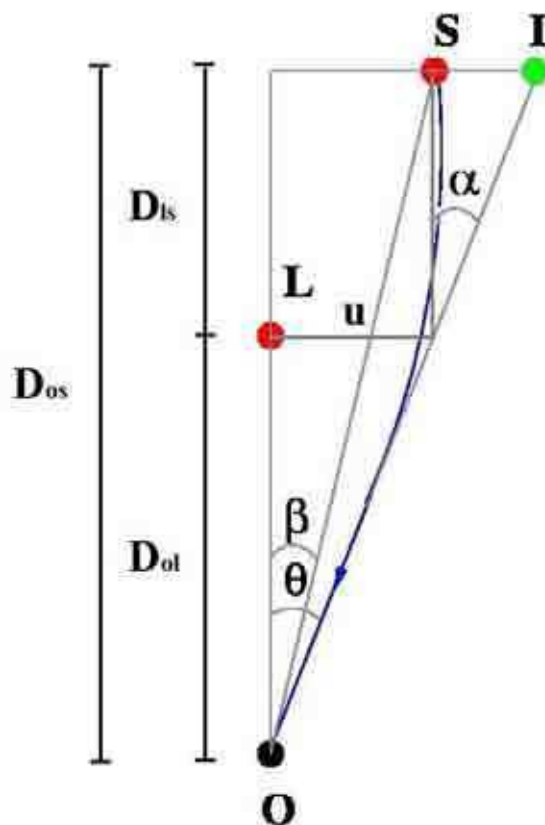


Figura 3.1: Diagrama de la lente gravitatoria. Se muestran las posiciones del observador (O), la lente (L), la fuente (S) y la imagen (I). D_{ol} , D_{os} y D_{ls} son, respectivamente, las distancias observador-lente, observador-fuente y lente-fuente. α es al ángulo de deflexión y u es el parámetro de impacto.

de los fotones a ambos lados de la lente:

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 16M \frac{D_{ls}}{D_{os}D_{ol}}} \right). \quad (3.11)$$

Cuando la fuente, la lente y el observador están perfectamente alineados, es decir $\beta = 0$, se tiene simetría de rotación alrededor del eje óptico. En este caso, en lugar de las dos

imágenes se obtiene un anillo con radio angular $\theta = \theta_E$, llamado anillo de Einstein, cuyo radio define la escala angular de la lente y está dado por

$$\theta_E = \sqrt{4M \frac{D_{ls}}{D_{os}D_{ol}}}. \quad (3.12)$$

De esta manera, en términos del radio del anillo de Einstein, la ecuación (3.7) para una lente puntual finalmente es

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}, \quad (3.13)$$

y las posiciones de las imágenes primaria y secundaria resultan,

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right). \quad (3.14)$$

Asimismo, en el caso de alta alineación, la expresión (3.3) para la magnificación se reduce a

$$\mu = \left| \frac{\beta}{\theta} \frac{d\beta}{d\theta} \right|^{-1}. \quad (3.15)$$

Mediante la ecuación (3.15) se pueden hallar las magnificaciones de las imágenes, obteniendo

$$\mu_{1,2} = \frac{\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)^2}{4\beta\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}, \quad (3.16)$$

y como el parámetro de impacto es $u = \beta/\theta_E$, las mismas se pueden escribir como

$$\mu_{1,2} = \frac{u^2 + 2}{2u\sqrt{u^2 + 4}} \pm \frac{1}{2}. \quad (3.17)$$

La suma de todas las amplificaciones dan como resultado la magnificación total μ :

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}}, \quad (3.18)$$

de la cual, puede verse sencillamente que este valor es siempre mayor que la unidad.

3.4. Límite de deflexión fuerte

En los últimos años, el estudio de *lensing* se ha extendido a investigar a los agujeros negros como lentes gravitatorias debido a que poseen una fenomenología particular, que

los diferencia de otros objetos astrofísicos, como se detallará a lo largo de esta sección. Por otro lado, el descubrimiento de agujeros negros supermasivos en el centro de las galaxias, incluyendo la nuestra, ha incrementado este interés. En esta sección se obtiene el ángulo de deflexión en el denominado límite de deflexión fuerte, se hallan las posiciones y magnificaciones de las imágenes relativistas, y se definen los observables, que permiten conectar resultados teóricos con observaciones.

3.4.1. Ángulo de deflexión

Se parte de la métrica general con simetría esférica, independiente del tiempo y asintóticamente plana [71],

$$ds^2 = -A(x)dt^2 + B(x)dx^2 + C(x)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.19)$$

que satisface

$$\begin{aligned} A(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{x}, \\ B(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x}, \\ C(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} x^2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde x es una coordenada radial (usualmente adimensionalizada con alguna cantidad característica de la geometría).

El radio de la esfera de fotones x_{ps} se obtiene [71] como la mayor solución positiva de la ecuación

$$\frac{C'(x)}{C(x)} = \frac{A'(x)}{A(x)}, \quad (3.21)$$

donde la prima indica derivada respecto de x . La esfera de fotones es una superficie por fuera del horizonte de sucesos, en la que si un fotón incide tangencialmente sobre ella, el mismo quedará confinado en una órbita circular inestable. Esto implica que cualquier perturbación sobre el mismo, dada la inestabilidad de la órbita, hará que sea absorbido por el agujero negro o expulsado fuera de la esfera de fotones. Por lo tanto, todo fotón que incide de manera tal que la distancia de máximo acercamiento es menor al radio de la esfera de fotones ($x_0 < x_{ps}$), será atrapado por el agujero negro describiendo una

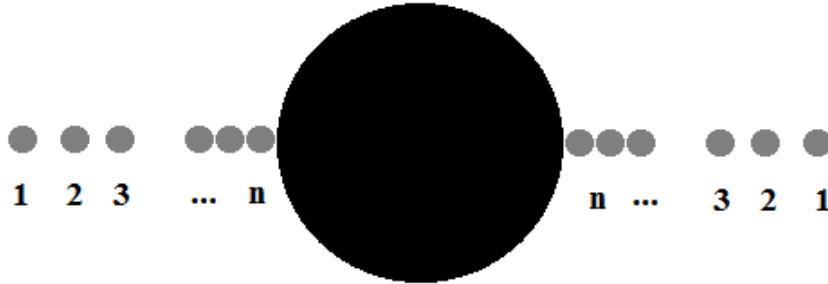


Figura 3.2: Conjunto de imágenes relativistas a ambos lados del agujero negro. El círculo grande del centro de la figura corresponde a la “sombra” del agujero negro, región completamente oscura de la cual no llega luz al observador.

trayectoria en espiral. Por el contrario, si $x_0 > x_{ps}$ los fotones se deflectarán y emergerán de manera simétrica. En el caso en que esta distancia sea levemente mayor a x_{ps} , el fotón describirá una o más vueltas alrededor del agujero negro antes de emerger. El número de vueltas alrededor del mismo aumenta cuanto más cerca pasa el fotón de la esfera de fotones, es decir, cuando $0 < x_0 - x_{ps}$ es cada vez menor, y el ángulo de deflexión diverge cuando x_0 tiende a x_{ps} . Las imágenes que se producen debido a fotones que dan una o más vueltas alrededor del agujero negro se denominan “relativistas”. Estas imágenes se forman tanto de un lado como del otro del agujero negro, dependiendo del sentido de giro de los fotones alrededor del mismo antes de emerger. Es por ello, que ante la presencia de un agujero negro actuando como lente gravitatoria, se tienen dos conjuntos infinitos de imágenes relativistas, uno a cada lado del mismo, como se muestra a modo de ejemplo en la Figura 3.2. Un diagrama esquemático se presenta en la Figura 3.3, en el que un rayo de luz proveniente de una fuente S , efectúa una vuelta completa alrededor de la lente y llega al observador O , produciéndose la primer imagen relativista I .

Se demostrará que la divergencia de $\alpha(x_0)$ en las cercanías de la esfera de fotones, es de tipo logarítmica, haciendo un desarrollo en serie de (3.5) alrededor de x_{ps} , de la forma

$$\alpha(x_0) = -a_1 \log \left(\frac{x_0}{x_{ps}} - 1 \right) + a_2 + O(x_0 - x_{ps}), \quad (3.22)$$

donde a_1 y a_2 son los coeficientes del límite de deflexión fuerte y dependen sólo de la

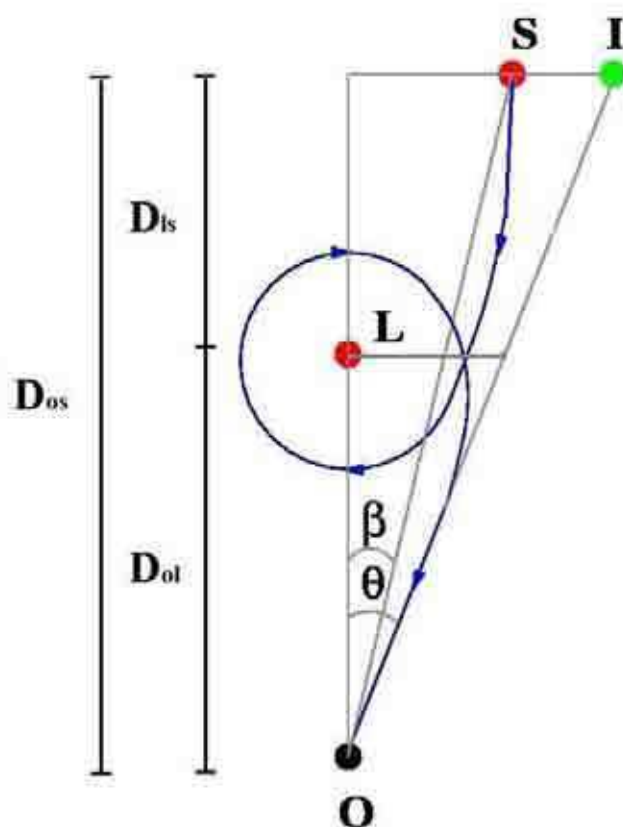


Figura 3.3: Fotones que pasan lo suficientemente cerca de la esfera de fotones, efectúan una o más vueltas alrededor del agujero negro antes de emerger y alcanzar al observador, dando lugar a las imágenes relativistas.

métrica evaluada en x_{ps} . Dado que no es posible medir directamente x_0 y x_{ps} , resulta conveniente escribir el ángulo de deflexión en términos del parámetro de impacto u con el que proviene el fotón desde el infinito. Se puede demostrar a partir de la conservación del momento angular [36], que la distancia de máximo acercamiento x_0 , se relaciona con

el parámetro de impacto, mediante

$$u = \sqrt{\frac{C(x_0)}{A(x_0)}}. \quad (3.23)$$

Existe un parámetro de impacto crítico u_{ps} , en el cual la distancia de máximo acercamiento corresponde al radio de la esfera de fotones (esto es $u = u(x_{ps})$). Todo fotón con parámetro de impacto $u < u_{ps}$, es absorbido por el agujero negro. De este modo, se puede reescribir (3.22) en función del parámetro de impacto

$$\alpha(u) = -c_1 \log\left(\frac{u}{u_{ps}} - 1\right) + c_2 + O(u - u_{ps}). \quad (3.24)$$

Para demostrar el comportamiento logarítmico del ángulo de deflexión (en el límite fuerte), es conveniente definir [36] la variable z como

$$z = \frac{A(x) - A(x_0)}{1 - A(x_0)}, \quad (3.25)$$

y las funciones

$$R(z, x_0) = \frac{2\sqrt{A(x)B(x)}}{A'(x)C(x)} [1 - A(x_0)] \sqrt{C(x_0)}, \quad (3.26)$$

$$f(z, x_0) = \frac{1}{\sqrt{A(x_0) - [(1 - A(x_0))z + A(x_0)] C(x_0)[C(x)]^{-1}}}, \quad (3.27)$$

siendo $x = A^{-1}[(1 - A(x_0))z + A(x_0)]$. De este modo, la integral (3.6) queda

$$I(x_0) = \int_0^1 R(z, x_0) f(z, x_0) dz. \quad (3.28)$$

La expresión $R(z, x_0)$ es regular para todo valor de z y x_0 , en cambio, $f(z, x_0)$ diverge para $z \rightarrow 0$. Resulta conveniente hacer un desarrollo en serie del argumento de la raíz cuadrada en $f(z, x_0)$ a segundo orden en z . De esta manera, se obtiene

$$f(z, x_0) \approx f_0(z, x_0) = \frac{1}{\sqrt{\varphi(x_0)z + \gamma(x_0)z^2}}, \quad (3.29)$$

con

$$\varphi(x_0) = \frac{1 - A(x_0)}{A'(x_0)C(x_0)} [A(x_0)C'(x_0) - A'(x_0)C(x_0)], \quad (3.30)$$

y

$$\begin{aligned} \gamma(x_0) = & \frac{[1 - A(x_0)]^2}{2[A'(x_0)]^3[C(x_0)]^2} \{A(x_0)A'(x_0) [C(x_0)C''(x_0) - 2[C'(x_0)]^2] \\ & + 2[A'(x_0)]^2 C(x_0)C'(x_0) - A(x_0)A''(x_0)C(x_0)C'(x_0)\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

De este modo, la integral (3.6) se puede separar la suma de dos partes: una divergente $I_D(x_0)$ y otra regular $I_R(x_0)$,

$$I(x_0) = I_D(x_0) + I_R(x_0), \quad (3.32)$$

donde

$$I_D(x_0) = \int_0^1 R(0, x_{ps}) f_0(z, x_0) dz, \quad (3.33)$$

y

$$I_R(x_0) = \int_0^1 g(z, x_0) dz, \quad (3.34)$$

siendo

$$g(z, x_0) = R(z, x_0) f(z, x_0) - R(0, x_{ps}) f_0(z, x_0). \quad (3.35)$$

De la ecuación (3.30), es inmediato que $\varphi(x_0) = 0$ cuando $x_0 = x_{ps}$, con lo cual $f_0 \approx 1/z$, lo que implica que el término $I_D(x_0)$ diverge logarítmicamente. Para todo valor de $x_0 \neq x_{ps}$, $\varphi(x_0) \neq 0$, y se tiene que $f_0 \approx 1/\sqrt{z}$, de lo que se ve que $I_D(x_0)$ converge. Por lo tanto, con estas definiciones, $I_D(x_0)$ corresponde al término que posee la divergencia (en $x_0 = x_{ps}$) e $I_R(x_0)$ es regular para todo valor de x_0 , pues la divergencia en $x_0 = x_{ps}$ fue sustraída.

El ángulo de deflexión en el límite de deflexión fuerte, se puede construir tratando estas dos integrales I_D e I_R por separado. Comenzando por la integral $I_D(x_0)$, la misma puede resolverse en forma exacta:

$$I_D(x_0) = R(0, x_{ps}) \int_0^1 f_0(z, x_0) dz, \quad (3.36)$$

la cual resulta

$$R(0, x_{ps}) \frac{1}{\sqrt{\gamma(x_0)}} \log \Delta \Big|_0^1, \quad (3.37)$$

siendo el argumento del logaritmo de la forma

$$\Delta = 2\gamma(x_0)z + \varphi(x_0) + 2\sqrt{\gamma(x_0)(\gamma(x_0)z^2 + \varphi(x_0)z)}. \quad (3.38)$$

Al elevar al cuadrado y aplicar raíz cuadrada al argumento del logaritmo, se tiene,

$$I_D(x_0) = R(0, x_{ps}) \frac{2}{\sqrt{\gamma(x_0)}} \log \sqrt{\frac{2\gamma(x_0) + \varphi(x_0) + 2\sqrt{\gamma(x_0)(\gamma(x_0) + \varphi(x_0))}}{\varphi(x_0)}},$$

de donde se deduce de manera sencilla

$$I_D(x_0) = R(0, x_{ps}) \frac{2}{\sqrt{\gamma(x_0)}} \log \frac{\sqrt{(\sqrt{\varphi(x_0)} + \gamma(x_0)) + \sqrt{\gamma(x_0)}}^2}{\sqrt{\varphi(x_0)}},$$

quedando finalmente,

$$I_D(x_0) = R(0, x_{ps}) \frac{2}{\sqrt{\gamma(x_0)}} \log \frac{\sqrt{\gamma(x_0)} + \sqrt{\varphi(x_0) + \gamma(x_0)}}{\sqrt{\varphi(x_0)}}. \quad (3.39)$$

La expresión (3.39) es general y es válida para todo valor de x_0 . En el límite de deflexión fuerte, sólomente se busca obtener una expresión para el ángulo de deflexión a orden cero en x_{ps} . Para ello, se expande $\varphi(x_0)$ y $\gamma(x_0)$ a primer orden no nulo, obteniendo

$$\varphi(x_0) = \frac{2\gamma(x_{ps})A'(x_{ps})}{1 - A(x_{ps})}(x_0 - x_{ps}) + O(x_0 - x_{ps})^2, \quad (3.40)$$

$$\gamma(x_{ps}) = \frac{C(x_{ps})(1 - A(x_{ps}))^2[C'''(x_{ps})A(x_{ps}) - C(x_{ps})A''(x_{ps})]}{2A(x_{ps})^2C'(x_{ps})^2} + O(x_0 - x_{ps}). \quad (3.41)$$

Reemplazando estas expresiones en (3.39) se obtiene

$$I_D(x_0) = R(0, x_{ps}) \frac{2}{\sqrt{\gamma(x_{ps})}} \log \sqrt{\frac{2(1 - A(x_{ps}))}{A'(x_{ps})(x_0 - x_{ps})}} + O(x_0 - x_{ps}). \quad (3.42)$$

Aplicando las propiedades del logaritmo, se llega fácilmente a

$$I_D(x_0) = \frac{R(0, x_{ps})}{\sqrt{\gamma(x_{ps})}} \left[\log \frac{2(1 - A(x_{ps}))}{A'(x_{ps})x_{ps}} - \log \left(\frac{x_0}{x_{ps}} - 1 \right) \right] + O(x_0 - x_{ps}), \quad (3.43)$$

por lo que $I_D(x_0)$ resulta de la forma

$$I_D(x_0) = -a_1 \log \left(\frac{x_0}{x_{ps}} - 1 \right) + a_D + O(x_0 - x_{ps}), \quad (3.44)$$

donde

$$a_1 = \frac{R(0, x_{ps})}{\sqrt{\gamma(x_{ps})}}, \quad (3.45)$$

y

$$a_D = a_1 \log \frac{2(1 - A(x_{ps}))}{A'(x_{ps})x_{ps}}. \quad (3.46)$$

La ecuación (3.44) muestra el orden de divergencia del ángulo de deflexión, el cual es logarítmico. Dado que I_R es regular para todo x_0 , el coeficiente que acompaña al término logarítmico en I_D , dado por la ecuación (3.45), corresponde al factor a_1 de la expresión

(3.22). El término regular del ángulo de deflexión, I_R , definido en la expresión (3.34), se halla haciendo una expansión de Taylor en potencias de $(x_0 - x_{ps})$. Es decir,

$$I_R(x_0) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n g(z, x_0)}{\partial x_0^n} \right|_{x_0=x_{ps}} (x_0 - x_{ps})^n dz. \quad (3.47)$$

Siendo que la ecuación (3.47) es regular en $x_0 = x_{ps}$ (y por ende, en $z = 0$), I_R sólo aporta una contribución al coeficiente a_2 definido en la expresión (3.22).

Dado que el objetivo es encontrar una expresión a orden cero en el ángulo de deflexión, sólo se guarda $n = 0$ en la expansión (3.47). De este modo,

$$I_R(x_0) = \int_0^1 g(z, x_{ps}) dz + O(x_0 - x_{ps}), \quad (3.48)$$

por lo que se puede definir la cantidad

$$a_R = I_R(x_{ps}). \quad (3.49)$$

De esta forma, el coeficiente a_2 tiene dos contribuciones: una proveniente de la integral $I_D(x_0)$, dada por la expresión (3.46), y otra proveniente de la integral regular $I_R(x_0)$, dada por (3.49). Recordando también que se debe restar π en el ángulo de deflexión, como indica la expresión (3.5), se tiene finalmente que

$$a_2 = -\pi + a_D + a_R. \quad (3.50)$$

Como se mostró anteriormente, a_D puede ser hallado analíticamente. En cambio, obtener una expresión exacta para a_R de manera analítica, raramente es posible, por lo que en muchos casos, suele recurrirse a una expansión de Taylor. Por otro lado, siendo que el integrando en (3.48) es regular, a_R puede ser calculado numéricamente para cualquier métrica.

Por último, dado que es más útil tener una expresión para el ángulo de deflexión en términos del parámetro de impacto u , es necesario hallar los coeficientes c_1 y c_2 de la ecuación (3.24). Para ello, se expande a segundo orden la expresión (3.23), quedando

$$u - u_{ps} = D(x_0 - x_{ps})^2, \quad (3.51)$$

donde

$$u_{ps} = \sqrt{\frac{C(x_{ps})}{A(x_{ps})}}, \quad (3.52)$$

y

$$D = \frac{1}{2} \frac{du}{dx_0} \Big|_{x_{ps}} = \frac{C''(x_{ps})A(x_{ps}) - C(x_{ps})A''(x_{ps})}{4\sqrt{A(x_{ps})^3 C(x_{ps})}}. \quad (3.53)$$

Relacionando esta última expresión con la ecuación (3.31), se puede escribir

$$D = \gamma(x_{ps}) \sqrt{\frac{A(x_{ps})}{C(x_{ps})^3}} \frac{C'(x_{ps})^2}{2(1 - A(x_{ps}))^2}. \quad (3.54)$$

Despejando $(x_0 - x_{ps})$ de la ecuación (3.51) y reemplazándolo en (3.22), los coeficientes son

$$c_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{R(0, x_{ps})}{2\sqrt{\gamma(x_{ps})}}, \quad (3.55)$$

y

$$c_2 = a_2 + \frac{a_1}{2} \ln \left(\frac{Dx_{ps}^2}{u_{ps}} \right) = -\pi + c_R + c_1 \ln \left(\frac{2\gamma(x_{ps})}{A(x_{ps})} \right). \quad (3.56)$$

donde $c_R = a_R$. De este modo, se da por demostrada la expresión general para el ángulo de deflexión en el límite de deflexión fuerte. El procedimiento para hallar el mismo es, por lo tanto: obtener x_{ps} de la ecuación (3.21), $\gamma(x_{ps})$ de la ecuación (3.41) y $R(0, x_{ps})$ de la expresión (3.26), calcular c_R en forma exacta cuando sea posible, por medio de una expansión de Taylor para valores pequeños de algún parámetro relevante, o numéricamente en otro caso, y por último, hallar la cantidad u_{ps} y los coeficientes c_1 y c_2 a partir de las ecuaciones (3.52), (3.55) y (3.56) respectivamente. Los coeficientes c_1 y c_2 dependen exclusivamente de las funciones de la métrica; esto es, dependen de la naturaleza del agujero negro que se esté estudiando como lente gravitatoria, lo que a partir de ellos, es posible diferenciar distintas geometrías. La obtención de c_1 y c_2 , y por lo tanto, del ángulo de deflexión, permite hallar expresiones analíticas para las posiciones y magnificaciones de las imágenes relativistas, como se detallará en la siguiente subsección.

3.4.2. Posiciones de las imágenes relativistas

Para estudiar los efectos de *lensing*, se adopta la configuración donde el agujero negro (L) se encuentra entre una fuente luminosa puntual (S) y un observador (O) (ver Figura 3.1), ambos ubicados a distancias mucho mayores al radio del horizonte de eventos x_h , de modo de hallarse en una región plana del espacio-tiempo. La ecuación de la lente relaciona

el ángulo de deflexión α con las posiciones angulares -vistas desde el observador, con el eje óptico definido como la línea que une al observador con la lente- de la fuente β y las imágenes θ . Se considera $\beta > 0$ sin pérdida de generalidad. En esta aproximación, la ecuación de la lente puede ser escrita como [97]

$$\tan \beta = \frac{d_{ol} \sin \theta - d_{ls} \sin(\alpha - \theta)}{d_{os} \cos(\alpha - \theta)}, \quad (3.57)$$

donde d_{os} , d_{ol} y d_{ls} son las distancias observador-fuente, observador-lente, y lente-fuente respectivamente, todas convenientemente adimensionalizadas con alguna cantidad característica del agujero negro.

Los efectos de *lensing* son más notorios cuando los objetos están altamente alineados, por lo que resulta útil estudiar el fenómeno en este caso. En esta situación, los ángulos β y θ son pequeños y el ángulo de deflexión α adquiere valores cercanos a un múltiplo par de veces π . Cuando $\beta \neq 0$, se obtienen dos conjuntos infinitos de imágenes relativistas puntuales. Las imágenes correspondientes al primer conjunto, poseen un ángulo de deflexión que puede ser escrito como $\alpha_n = 2n\pi + \Delta\alpha_n$, siendo $n \in N$ y $0 < \Delta\alpha_n \ll 1$. De este modo, en la expresión (3.57) se pueden aproximar las tangentes y los senos por su argumento, y el coseno por 1, por lo que la ecuación de la lente resulta [36, 97]

$$\beta = \theta - \frac{d_{ls}}{d_{os}} \Delta\alpha_n. \quad (3.58)$$

Para el otro conjunto de imágenes relativistas, se tiene que $\alpha_n = -2n\pi - \Delta\alpha_n$ y por lo tanto, en la ecuación (3.58), el segundo término aparece sumando.

El ángulo de deflexión dado por la expresión (3.24) puede ser escrito en términos del ángulo θ , relacionando esta cantidad con el parámetro de impacto u . Observando la geometría de la lente de acuerdo a la Figura 3.1 y para alta alineación, se ve que $u = d_{ol} \sin \theta \approx d_{ol} \theta$. De esta manera, el ángulo de deflexión queda

$$\alpha(\theta) = -c_1 \ln \left(\frac{d_{ol} \theta}{u_{ps}} - 1 \right) + c_2, \quad (3.59)$$

y por lo tanto

$$2n\pi + \Delta\alpha_n = -c_1 \ln \left(\frac{d_{ol} \theta_n}{u_{ps}} - 1 \right) + c_2. \quad (3.60)$$

Despejando θ de la expresión (3.60), se obtiene una primera relación entre la posición angular de la imagen relativista n -ésima y los coeficientes c_1 y c_2 del límite de deflexión fuerte

$$\theta_n = \theta_{ps} \left(1 + e^{(c_2 - 2\pi n - \Delta\alpha_n)/c_1} \right), \quad (3.61)$$

donde $\theta_{ps} = u_{ps}/d_{ol}$. Haciendo una expansión de Taylor a primer orden alrededor de $\Delta\alpha_n = 0$, la posición angular de la n -ésima imagen relativista tiene la forma

$$\theta_n = \theta_n^0 - \zeta_n \Delta\alpha_n, \quad (3.62)$$

donde

$$\theta_n^0 = \frac{u_{ps}}{d_{ol}} \left[1 + e^{(c_2 - 2n\pi)/c_1} \right], \quad (3.63)$$

y

$$\zeta_n = \frac{u_{ps}}{c_1 d_{ol}} e^{(c_2 - 2n\pi)/c_1}. \quad (3.64)$$

De la ecuación (3.58), se tiene que $\Delta\alpha_n = (\theta_n - \beta)d_{ol}/d_{ls}$. Reemplazando en la ecuación (3.62),

$$\theta_n = \theta_n^0 - \frac{\zeta_n d_{os}}{d_{ls}} (\theta_n - \beta); \quad (3.65)$$

y despejando θ_n , se obtiene

$$\theta_n = \left(1 + \frac{\zeta_n d_{os}}{d_{ls}} \right)^{-1} \left(\theta_n^0 + \frac{\zeta_n d_{os}}{d_{ls}} \beta \right). \quad (3.66)$$

Como $0 < \zeta_n d_{os}/d_{ls} \ll 1$, entonces $(1 + \zeta_n d_{os}/d_{ls})^{-1} \approx (1 - \zeta_n d_{os}/d_{ls})$, y aproximando la expresión (3.66) a primer orden, finalmente, las posiciones angulares de las imágenes son

$$\theta_n = \theta_n^0 + \frac{\zeta_n d_{os}}{d_{ls}} (\beta - \theta_n^0). \quad (3.67)$$

El segundo término de la ecuación (3.67) es una pequeña corrección a θ_n^0 , lo que indica que todas las imágenes caen muy cerca de θ_n^0 .

Análogamente, se demuestra que para el otro conjunto infinito de imágenes relativistas, la expresión (3.67) se convierte en

$$\theta_n = -\theta_n^0 + \frac{\zeta_n d_{os}}{d_{ls}} (\beta + \theta_n^0). \quad (3.68)$$

Finalmente, es importante mencionar que para el caso $\beta = 0$ (alineación perfecta), en lugar de formarse imágenes puntuales (como se ha explicado anteriormente), se obtiene una secuencia infinita de anillos de Einstein, cuyo radio angular está dado por

$$\theta_n^E = \left(1 - \frac{\zeta_n d_{os}}{d_{ls}}\right) \theta_n^0. \quad (3.69)$$

3.4.3. Magnificaciones de las imágenes relativistas

Otra fuente importante de información es la magnificación de las imágenes relativistas. Como se mencionó anteriormente, el efecto de *lensing* conserva el brillo superficial [77], de modo que el cociente entre los ángulos sólidos subtendidos por las imágenes y las fuentes, da la magnificación de la n -ésima imagen:

$$\mu_n = \left| \frac{\sin \beta}{\sin \theta_n} \frac{d\beta}{d\theta_n} \right|^{-1}. \quad (3.70)$$

Bajo la aproximación β y θ_n chicos (fuente, lente y observador altamente alineados), se tiene que $\sin \beta \approx \beta$ y $\sin \theta_n \approx \theta_n$, la ecuación (3.70) se reduce a

$$\mu_n = \left| \frac{\beta}{\theta_n} \frac{d\beta}{d\theta_n} \right|^{-1}. \quad (3.71)$$

Reemplazando θ_n mediante lo obtenido en la expresión (3.67), entonces,

$$\mu_n = \frac{1}{\beta} \left[\theta_n^0 + \frac{\zeta_n d_{os}}{d_{ls}} (\beta - \theta_n^0) \right] \frac{\zeta_n d_{os}}{d_{ls}}, \quad (3.72)$$

la cual puede ser aproximada a primer orden en $\zeta_n d_{os}/d_{ls}$, obteniendo finalmente para ambos conjuntos de imágenes relativistas

$$\mu_n = \frac{1}{\beta} \frac{\theta_n^0 \zeta_n d_{os}}{d_{ls}}. \quad (3.73)$$

Observando esta última expresión y la ecuación (3.64), se ve que las magnificaciones decrecen exponencialmente con n , por lo que la primera imagen (relativista) es la más brillante. A menos que la lente y la fuente estén altamente alineadas ($\beta \approx 0$), las magnificaciones resultan muy débiles, debido a que son proporcionales al factor $(u_{ps}/d_{ol})^2$, el cual es muy pequeño. Por otro lado, la magnificación se hace infinita si $\beta = 0$; en este caso, la aproximación de fuente puntual deja de ser válida. Resulta importante destacar,

que la expresión (3.73) depende explícitamente de los coeficientes c_1 y c_2 del límite de deflexión fuerte. Es decir, conociendo estos coeficientes para una dada geometría que posea una esfera de fotones, es posible hallar la correspondiente expresión de la magnificación de cada una de las imágenes relativistas. Por último, sumando las magnificaciones de todas las imágenes, se puede hallar la magnificación total, la cual resulta ser de la forma,

$$\mu = \frac{8 e^{c_2/c_1} (1 + e^{c_2/c_1} + e^{2\pi/c_1}) d_{os}}{\beta d_{ol}^2 d_{ls} c_1 (e^{4\pi/c_1} - 1)}. \quad (3.74)$$

3.4.4. Observables

Hasta este punto, se ha detallado un procedimiento analítico que permite estudiar el efecto de *lensing* a partir del cálculo de los coeficientes c_1 y c_2 , para el caso en que los fotones pasan cerca de la esfera de fotones y dan una o más vueltas alrededor de un agujero negro antes de emerger y llegar al observador (situación en la que ocurren las imágenes relativistas). Como ya se ha mostrado, estos coeficientes dependen exclusivamente de la métrica que describe al agujero negro en cuestión. La motivación de este formalismo se debe a que en la práctica, los coeficientes del límite de deflexión fuerte podrían ser obtenidos a partir de observaciones, y por lo tanto, contrastarse con los cálculos efectuados en forma teórica. La observación directa del agujero negro supermasivo en el centro de nuestra galaxia, así como también aquellos presentes en las galaxias cercanas, se estima que será factible en los próximos años.

Se espera que en un futuro, las observaciones puedan resolver al menos la imagen más alejada del centro del agujero negro de las demás, en cuyo caso se podrá estudiar el fenómeno de *lensing* en el límite de deflexión fuerte. Se considera, por lo tanto, la situación más simple, en la que sólo la primera imagen relativista θ_1 (ver expresión (3.67)), que corresponde a la más exterior al centro del mismo, puede ser resuelta como una única imagen, mientras que las demás restantes se agrupan todas juntas en θ_∞ (es decir, la posición angular a la que tienden a ubicarse las imágenes, que se obtiene al tomar el límite $n \rightarrow \infty$ en la ecuación (3.67)). A partir de estas consideraciones, se definen las siguientes cantidades [36], que permiten relacionar los resultados obtenidos

analíticamente, con las observaciones:

$$s = \theta_1 - \theta_\infty, \quad (3.75)$$

y

$$r = \frac{\mu_1}{\sum_{n=2}^{\infty} \mu_n}, \quad (3.76)$$

con

$$\theta_\infty = \frac{u_{ps}}{d_{ol}}, \quad (3.77)$$

donde s corresponde a la separación angular entre la primera imagen relativista y las otras, y r representa la razón entre la magnificación de la primera imagen y la suma de las magnificaciones de todas las restantes.

Dado que los coeficientes c_1 y c_2 son del orden de 1, e^{c_2/c_1} también es de orden 1 y $e^{2\pi/c_1} \gg 1$. De esta manera las ecuaciones (3.75) y (3.76) pueden ser simplificadas, obteniéndose

$$s = \theta_\infty e^{(c_2 - 2\pi)/c_1}, \quad (3.78)$$

$$r = e^{2\pi/c_1}. \quad (3.79)$$

Finalmente, invirtiendo las ecuaciones (3.78) y (3.79), se encuentra

$$c_1 = \frac{2\pi}{\log r}, \quad (3.80)$$

y

$$c_2 = c_1 \log \left(\frac{rs}{\theta_\infty} \right), \quad (3.81)$$

que muestran que los coeficientes de c_1 y c_2 pueden ser medidos indirectamente, con sólo medir la posición angular asintótica θ_∞ , la separación angular s y el cociente entre las magnificaciones r . De este modo, es posible reconstruir la expansión del ángulo de deflexión en el límite de deflexión fuerte (3.24) para la lente gravitatoria observada. Finalmente, estos valores pueden ser comparados con aquellos predichos por los distintos modelos teóricos, con el objeto de identificar la naturaleza del agujero negro actuando como lente.

3.5. Resultados previos

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en el límite de deflexión fuerte [35,36], para las geometrías más sencillas: agujero negro de Schwarzschild y el de Reissner-Nordström. Los mismos serán utilizados para establecer comparaciones con los obtenidos para los agujeros negros estudiados a lo largo de esta Tesis.

3.5.1. Agujero negro de Schwarzschild

Como ya se ha explicado en el capítulo anterior, el agujero negro de Schwarzschild corresponde a la solución de vacío con simetría esférica. A fines prácticos y para poder establecer comparaciones futuras con otros resultados, conviene adimensionalizar la coordenada radial r de la métrica (2.26) en términos de la masa M . De este modo, se tiene:

$$A(x) = B(x)^{-1} = 1 - \frac{2}{x}, \quad C(x) = x^2. \quad (3.82)$$

El radio adimensionalizado de la esfera de fotones x_{ps} , se obtiene resolviendo la ecuación (3.21), el cual resulta ser el valor constante $x_{ps} = 3$. Las funciones $R(z, x_0)$ y $\gamma(x_0)$ dadas por las expresiones (3.26) y (3.31), respectivamente, tienen la forma:

$$R(z, x_0) = R(0, x_{ps}) = 2, \quad (3.83)$$

y

$$\gamma(x_0) = \frac{6}{x_0} - 1, \quad (3.84)$$

la cual, evaluada en el radio x_{ps} , resulta en el valor constante $\gamma(x_{ps}) = 1$. De este modo, reemplazando estos valores en las ecuaciones (3.55) y (3.56), se obtienen los coeficientes del límite de deflexión fuerte para el agujero negro de Schwarzschild [36]:

$$c_1 = 1 \quad (3.85)$$

y

$$c_2 = -\pi + c_R + \ln 6 \approx -0,4002, \quad (3.86)$$

donde el término regular c_R dado por la integral (3.49), es posible calcularlo de manera exacta, siendo

$$c_R = 2 \ln \left[6 \left(2 - \sqrt{3} \right) \right] \approx 0,9496. \quad (3.87)$$

Por último, el parámetro de impacto evaluado en el radio de la esfera de fotones u_{ps} dado por (3.52) es

$$u_{ps} = 3\sqrt{3}. \quad (3.88)$$

De esta manera, es posible construir el ángulo de deflexión fuerte (3.24) para la geometría de Schwarzschild, obteniéndose finalmente,

$$\alpha(u) = -\ln \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}u - 1 \right) + \ln \left[216 \left(7 - 4\sqrt{3} \right) \right] - \pi. \quad (3.89)$$

3.5.2. Agujero negro de Reissner-Nordström

La solución de Reissner-Nordström, que tiene simetría esférica y carga eléctrica Q , fue estudiada como lente gravitatoria en el límite de deflexión fuerte [35, 36]. En este caso, también es conveniente adimensionalizar todas las cantidades de la métrica (2.46) en términos de la masa M , dado que estos resultados serán comparados con los presentados en posteriores capítulos. Se definen, por lo tanto, las variables $x = r/M$ y la carga adimensionalizada $q = Q/M$. De este modo, los coeficientes de la métrica (2.46) resultan:

$$A(x) = B(x)^{-1} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{q^2}{x^2}, \quad C(x) = x^2, \quad (3.90)$$

de modo que el radio del horizonte es $x_h = 1 + \sqrt{1 - q^2}$, si la carga satisface $q \leq 1$. En esta geometría, el radio adimensionalizado de la esfera de fotones x_{ps} tiene la forma

$$x_{ps} = \frac{3 + \sqrt{9 - 8q^2}}{2}, \quad (3.91)$$

la cual es una función decreciente en la carga, como puede verse en la Figura 3.4. Las funciones $R(z, x_0)$ y $\gamma(x_0)$ quedan

$$R(z, x_0) = \frac{(2x_0 - q^2)x}{(x - q^2)x_0} \quad (3.92)$$

y

$$\gamma(x_0) = \frac{(2x_0 - q^2)^2 [4q^4 - 9q^2x_0 - (x_0 - 6)x_0^2]}{4x_0^2(x_0 - q^2)^3} \quad (3.93)$$

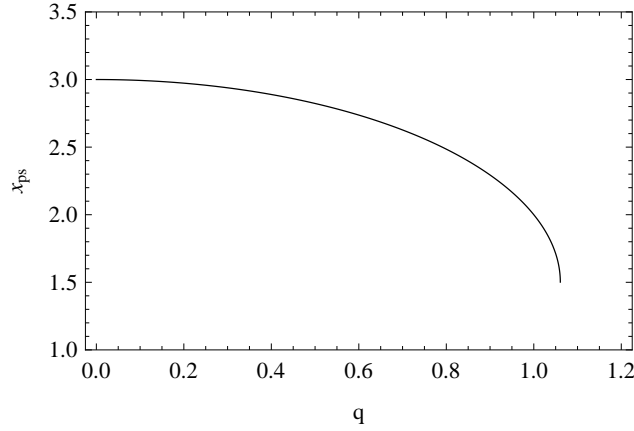


Figura 3.4: Radio de la esfera de fotones, para el agujero negro de Reissner-Nordstrom, en función de la carga adimensionalizada q .

que, evaluadas en x_{ps} toman la forma

$$R(0, x_{ps}) = \frac{2x_{ps} - q^2}{x_{ps} - q^2}, \quad (3.94)$$

y

$$\gamma(x_{ps}) = \frac{(2x_{ps} - q^2)^2 [4q^4 - 9q^2x_{ps} - (x_{ps} - 6)x_{ps}^2]}{4x_{ps}^2 (x_{ps} - q^2)^3}. \quad (3.95)$$

El parámetro de impacto evaluado en el radio de la esfera de fotones u_{ps} y los coeficientes c_1 y c_2 del límite de deflexión fuerte para el agujero negro de Reissner-Nordström respectivamente resultan

$$u_{ps} = \frac{x_{ps}^2}{\sqrt{x_{ps} - q^2}}, \quad (3.96)$$

$$c_1 = \frac{x_{ps}\sqrt{x_{ps} - q^2}}{\sqrt{4q^4 - 9q^2x_{ps} - (x_{ps} - 6)x_{ps}^2}} \quad (3.97)$$

y

$$c_2 = -\pi + c_R + c_1 \ln \left\{ \frac{(2x_{ps} - q^2)^2 [4q^4 - 9q^2x_{ps} - (x_{ps} - 6)x_{ps}^2]}{2(x_{ps} - q^2)^3 [(x_{ps} - 2)x_{ps} + q^2]} \right\}, \quad (3.98)$$

donde c_R puede ser hallado numéricamente para cada valor de carga q . Asimismo, se puede obtener una expresión analítica aproximada de la integral (3.49) mediante una expansión de Taylor [36] a primer orden no nulo en la carga q :

$$c_R = 2 \ln [6(2 - \sqrt{3})] + \frac{2}{9} \left\{ -4 + \sqrt{3} + \ln[6(2 - \sqrt{3})] \right\} q^2. \quad (3.99)$$

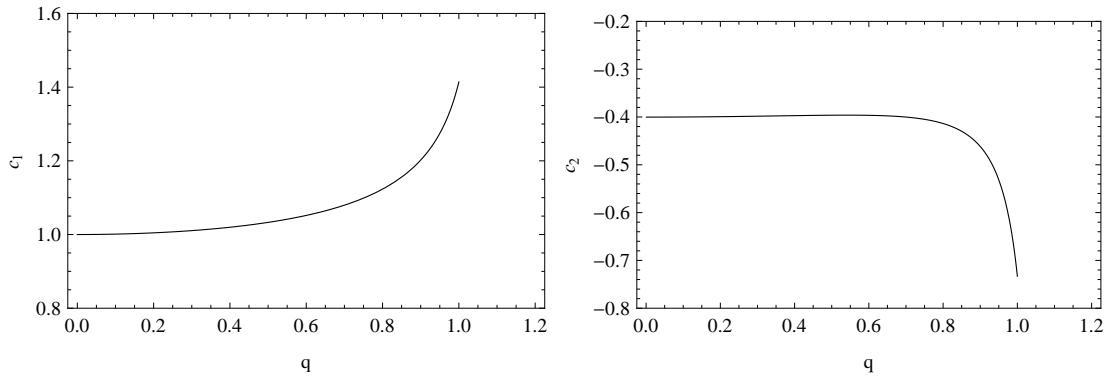


Figura 3.5: Coeficientes del límite de deflexión fuerte en función de la carga adimensionalizada q .

El término a orden cero corresponde al caso de un agujero negro sin carga, y como era de esperarse, el mismo coincide para el la geometría de Schwarzschild (3.87); la corrección es cuadrática en la carga q del agujero negro.

Los coeficientes c_1 y c_2 se muestran en la Figura 3.5 como funciones de q , donde c_2 contiene el término c_R calculado numéricamente para todo valor de carga. Se observa que c_1 es una función creciente en q , mientras que c_2 decrece conforme la carga del agujero negro es mayor. Esto hace posible distinguir un agujero negro de Reissner-Nordström del de uno de Schwarzschild, mediante el estudio del fenómeno de *lensing* en el límite de deflexión fuerte [35].

Capítulo 4

Agujeros negros sin masa en mundos brana

En este capítulo se estudia el efecto de *lensing* gravitatorio para el caso de agujeros negros sin masa en teorías de mundos brana. Se obtiene el ángulo de deflexión en los límites de deflexión débil y fuerte, a partir de los cuales se calculan de manera analítica las posiciones y magnificaciones de las imágenes. Para el caso del límite fuerte, se presentan los observables r y s definidos en el Capítulo 3. Finalmente, se comparan los resultados obtenidos con aquellos correspondientes a las métricas de Schwarzschild, Reissner-Nordström y de otros agujeros negros en el contexto de mundos brana.

4.1. Mundos brana

A muy altas energías, se presume que la teoría de la Relatividad General deja de ser válida, y se hace necesaria una teoría cuántica de la gravedad. Entre las posibles alternativas, se encuentra la teoría de cuerdas, que incorpora dimensiones espaciales extra. Proveniente de desarrollos en la teoría de cuerdas (teoría M), se encuentra el escenario de mundos brana, el cual durante los últimos años ha atraído mucho la atención en campos como la física de partículas, cosmología y astrofísica. En un contexto cosmológico de mundos brana, la materia ordinaria se encuentra confinada en un espacio de

tres dimensiones denominado “brana”, que está embebido en un espacio de dimensión mayor, llamado *bulk*, en el que sólo la gravedad se puede propagar. Estos modelos fueron propuestos para explicar por qué la escala que describe la gravedad es dieciseis órdenes de magnitud más grande que la escala asociada a la fuerza electrodébil, algo conocido como el “problema de jerarquía”. Los modelos más sencillos que actualmente describen este escenario, son los de Randall-Sundrüm tipo I y II, en los que la brana posee tensión y se encuentra en un *bulk* con una dimensión extra y constante cosmológica negativa.

La presencia de dimensiones extra no sólo produce modificaciones a pequeñas escalas, sino que también lo hace a escalas astrofísicas. Tal es el caso de los agujeros negros que son soluciones de estas teorías, cuyas propiedades difieren respecto de aquellos obtenidos en 4 dimensiones. Clancy et al. [98–100], demostraron que en el escenario de Randall-Sundrüm, la vida media de los agujeros negros primordiales formados durante el régimen de altas energías es mayor a la esperada, debido a que poseen una tasa de evaporación diferente. Estos agujeros negros primordiales podrían haber crecido a partir de la acreción de la radiación a sus alrededores durante la fase de altas energías, y haber sobrevivido hasta el presente. Estos modelos cosmológicos, asimismo, predicen la formación de agujeros negros a partir de colisiones de altas energías en aceleradores de partículas o de rayos cósmicos [21].

En el escenario de Randall-Sundrüm, se encontró una solución esféricamente simétrica de agujero negro en una brana de tres dimensiones espaciales, caracterizada por una carga tidal asociada a efectos gravitacionales provenientes de la dimensión extra del *bulk* [101]. Por otro lado, una clase general de soluciones de agujeros negros con simetría esférica fueron presentados en [65], entre las que se incluyen soluciones sin masa, en las que la curvatura es producida únicamente por un efecto tidal del *bulk* sobre la brana [65].

4.2. Modelo de Randall-Sundrüm

El modelo de Randall-Sundrüm asume la existencia de una sola dimensión extra compactificada en un círculo, cuyas mitades están bien identificadas. Esta construcción involucra dos puntos fijos, uno en el origen $y = 0$ y otro en el extremo del círculo

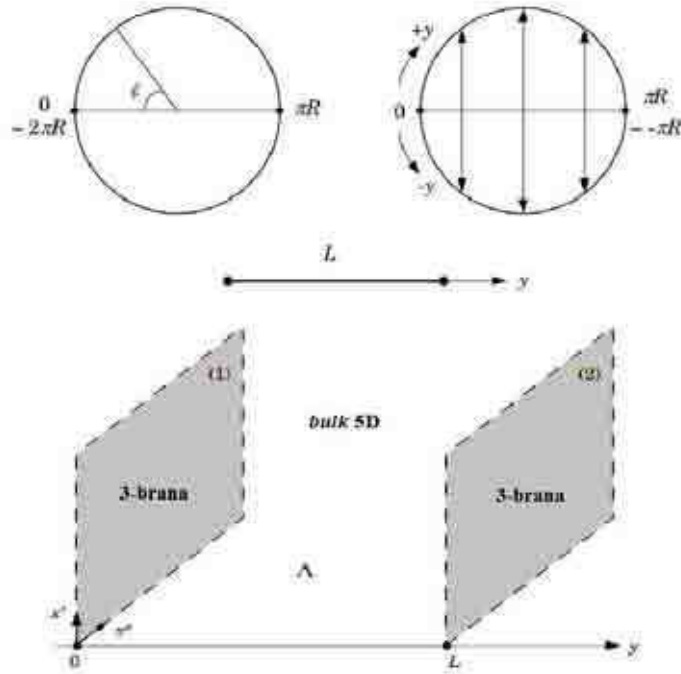


Figura 4.1: Orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 .

$y = \pi R \equiv L$. Formalmente, esto se traduce en un orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 , donde \mathbb{Z}_2 corresponde al grupo multiplicativo $\{-1, 1\}$. Constituye un modelo de 3-branas (más la dimensión temporal) inmerso en un *bulk* anti de Sitter de cinco dimensiones (AdS_5), en el que cada brana se encuentra en dichos puntos de la orbifold ($y = 0$ e $y = L$), como se esquematiza en la Figura 4.1. Existen dos versiones (o alternativas) de este modelo: Randall-Sundrüm tipo I (RS-1) y tipo II (RS-2). En el caso de RS-1, se tienen dos branas en un *bulk* de gran curvatura [19], proporcionando un nuevo enfoque al problema de jerarquía. Estas branas poseen tensiones iguales en módulo y opuestas $\pm\lambda$, relacionadas con la escala de Planck M_P y el radio de curvatura l del espacio AdS_5 :

$$\lambda = \frac{3M_P^2}{4\pi l^2}. \quad (4.1)$$

En el modelo RS-2, se toma el límite $L \rightarrow \infty$, de modo que la brana de tensión negativa quede en el infinito, y se tenga una sola brana [20]. En ambos casos, la única interacción posible entre el *bulk* y la brana es por medio de la gravedad. Lo que hace que esta

interacción sea despreciable a bajas energías es la constante cosmológica negativa del bulk, dada por

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{l^2}. \quad (4.2)$$

Estos modelos fueron obtenidos como soluciones de las ecuaciones de Einstein en 5 dimensiones, a partir de un sistema de coordenadas particular, junto con las condiciones de juntura sobre la brana. No obstante, otro enfoque posible consiste en tratar la métrica de la brana y la del *bulk* de manera general. El mismo se basa en el uso de las ecuaciones de Gauss-Codazzi para proyectar la curvatura del *bulk* de 5 dimensiones sobre la brana [102].

Las ecuaciones de campo 5-dimensionales resultan

$${}^{(5)}G_{AB} = -\Lambda_5 {}^{(5)}g_{AB} + \kappa_5^2 \left[{}^{(5)}T_{AB} + T_{AB}^{brana} \delta(y) \right], \quad (4.3)$$

donde ${}^{(5)}T_{AB}$ corresponde al tensor de energía momento en 5 dimensiones ($A=0,1,\dots,4$), la coordenada ortogonal a la brana está dada por y (ubicada ésta en $y = 0$, sin pérdida de generalidad), y la presencia de $\delta(y)$, restringe los campos sobre la brana. La métrica en 5 dimensiones, en términos de la métrica inducida sobre una superficie $y = cte$, se escribe como

$${}^{(5)}ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha, y) dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (4.4)$$

Integrando la ecuación (4.3) a lo largo de la dimensión extra entre $y = -\varepsilon$ e $y = +\varepsilon$, y tomando el límite $\varepsilon \rightarrow 0$, se llega a las condiciones de juntura de Israel-Darmois sobre la brana, las que determinan la curvatura extrínseca sobre la misma. Mediante éstas y las ecuaciones de Gauss-Codazzi, se obtienen a partir de la ecuación (4.3), las ecuaciones de campo inducidas sobre la brana, adquiriendo la forma de ecuaciones de Einstein modificadas:

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + \kappa^2 T_{\mu\nu} + 6 \frac{\kappa^2}{\lambda} S_{\mu\nu} - \epsilon_{\mu\nu} + 4 \frac{\kappa^2}{\lambda} \mathcal{F}_{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

donde

$$\Lambda = \frac{1}{2} [\Lambda_5 + \kappa^2 \lambda], \quad \kappa^2 = \frac{1}{6} \lambda \kappa_5^4, \quad (4.6)$$

corresponden a la constante cosmológica efectiva sobre la brana y el acoplamiento gravitatorio en 4 dimensiones, respectivamente. El tensor de energía-momento está dado

por $T_{\mu\nu}^{brana} = T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = T_{AB}^{brana} g_{\mu}^A g_{\nu}^B$. El tensor $S_{\mu\nu}$ es cuadrático en el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, mientras que el término con $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ es lineal en el mismo:

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{12} T T_{\mu\nu} - \frac{1}{4} T_{\mu\alpha} T^{\alpha}_{\nu} + \frac{1}{24} g_{\mu\nu} \left(3 T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} - T^2 \right), \quad (4.7)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = {}^{(5)}T_{AB} g_{\mu}^A g_{\nu}^B + \left({}^{(5)}T_{AB} n^A n^B - \frac{1}{4} {}^{(5)}T \right) g_{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

donde ${}^{(5)}T_{AB}$ representa todas las tensiones en el *bulk* además de la constante cosmológica. La proyección del tensor de Weyl del *bulk* sobre la brana ortogonal a n^A está dada por $\epsilon_{\mu\nu}$, siendo

$$\epsilon_{\mu\nu} = {}^{(5)}C_{ABCD} n^C n^D g_{\mu}^A g_{\nu}^B, \quad (4.9)$$

el cual está relacionado con la influencia de los grados de libertad gravitacionales no locales sobre la brana.

Para hallar una solución de vacío sobre la brana, en las inmediaciones de una fuente se puede despreciar el efecto de la constante cosmológica, por lo que $\Lambda = 0$. Por otro lado, una solución de vacío implica que $T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu} = 0$ fuera de la fuente. De este modo, las ecuaciones de Einstein (4.5) se reducen a

$$R_{\mu\nu} = -\epsilon_{\mu\nu} \quad (4.10)$$

y

$$R_{\mu}{}^{\mu} = 0 = \epsilon_{\mu}{}^{\mu}. \quad (4.11)$$

Las simetrías de Weyl aseguran que la ecuación (4.9) sea simétrica, de traza nula, y no posea componentes ortogonales. Tratándose de soluciones de vacío, sobre la brana este tensor satisface:

$$\Delta^{\mu} \epsilon_{\mu\nu} = 0. \quad (4.12)$$

De acuerdo a las identidades de Bianchi sobre la brana, la ecuación (4.12) es una condición de integrabilidad para la ecuación de campo (4.10). Para soluciones estáticas, las expresiones (4.10), (4.11) y (4.12), forman un sistema cerrado de ecuaciones sobre la brana. Esto permite mapear soluciones de relatividad general en 4 dimensiones, en soluciones de mundos brana 5-dimensionales: una solución estática con tensor de energía-momento

de traza nula en relatividad general da lugar a una solución de vacío en gravedad 5-dimensional en mundos brana. Para mayor detalle, se pueden consultar la monografía de Maartens y Koyama [18] y el trabajo de Dadhich *et al.* [101].

4.3. Agujero negro sin masa en teoría de mundos branas

Una posible solución estática y esféricamente simétrica, puede obtenerse a partir de la ecuación (4.5), sin especificar $\epsilon_{\mu\nu}$ y asumiendo $\mathcal{F}_{\mu\nu} = 0$. La única combinación de las ecuaciones de Einstein (4.5) en la brana, escrita sin ambigüedades y sin especificar $\epsilon_{\mu\nu}$, es su traza:

$$R = -4\Lambda + \kappa^2 T^\alpha_\alpha + \kappa_5^4 S^\alpha_\alpha. \quad (4.13)$$

Asumiendo que el término de la derecha es una función conocida dependiente de la coordenada radial, la ecuación (4.13) puede ser escrita como una ecuación de primer orden en $f(r) = rB^{-1}(r)$ [65]:

$$A(rA_r + 4A)f_r + [r(2AA_{rr} - A_r^2) + 3AA_r] f = 2A^2 [2 - r^2 R(r)]. \quad (4.14)$$

La ecuación (4.14) tiene como solución general:

$$f(r) \equiv rB(r)^{-1} = \frac{2Ae^{3\Gamma}}{(4A + rA_r)^2} \left\{ \int_{r_h}^r (4A + rA_r) [2 - r^2 R(r)] e^{-3\Gamma} dr + C \right\}, \quad (4.15)$$

siendo

$$\Gamma(r) = \int \frac{A_r dr}{4A + rA_r}, \quad (4.16)$$

donde C es una constante de integración. A partir de la expresión (4.15), se obtiene una de las soluciones posibles con simetría esférica (para una descripción más detallada, consultar [65]), con métrica 4-dimensional de la forma:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.17)$$

donde

$$A(x) = 1 - \frac{h^2}{r^2}, \quad B(x)^{-1} = \left(1 - \frac{h^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{\kappa - h}{\sqrt{2r^2 - h^2}}\right), \quad C(x) = r^2, \quad (4.18)$$

siendo κ y $h > 0$ constantes. Si $\kappa > 0$, se tiene la geometría de un agujero negro [65] con un horizonte simple sobre la superficie $r_h = h$, mientras que si $\kappa = 0$ este horizonte es doble. En el caso $\kappa < 0$, se tiene una garganta por fuera del horizonte [65], que corresponde a un agujero de gusano. Dicha garganta tiene un radio $r_{th} = \sqrt{h^2 + (h - \kappa)^2}/\sqrt{2} > h$, en el cual $B(r)^{-1}$ presenta una raíz simple. Los agujeros negros descritos por la métrica (4.17), carecen de masa y materia, y sólo existen como un efecto tidal de la gravedad del *bulk*, es decir, una consecuencia de la interacción entre la dimensión extra y las cuatro dimensiones de la brana. El caso más sencillo corresponde a $\kappa = h$, en el que los coeficientes de la métrica resultan $A(r) = B(r)^{-1} = 1 - h^2/r^2$, que corresponde a un agujero negro de Reissner-Nordström de masa nula y carga puramente imaginaria, con horizonte en $r_h = h$ y singularidad en $r = 0$. Cuando $0 < \kappa < h$, el horizonte se encuentra en $r_h = h$ y la geometría tiene una singularidad puntual en $r = 0$ y una superficie singular en $r = h/\sqrt{2}$. Entre esta superficie y el horizonte, hay una garganta de radio $h/\sqrt{2} < r_{th} = \sqrt{h^2 + (h - \kappa)^2}/\sqrt{2} \leq h$, lo que implica que dicha garganta se encuentra rodeada por el horizonte. Este caso, también corresponde a un agujero negro. Si $\kappa > h$, se tiene nuevamente el horizonte en $r_h = h$, una singularidad puntual en $r = 0$, y una superficie singular en $x = h/\sqrt{2}$, pero no hay garganta presente porque el segundo factor en la función $B(r)^{-1}$ no tiene raíces.

Otra característica importante de estos agujeros negros, es que el tensor efectivo de energía-momento en la brana,

$$8\pi G_N \rho^{\text{eff}} = -\frac{h^2}{r^4} - \frac{h^2(\kappa - h)(3r^2 - h^2)}{r^4(2r^2 - h^2)^{3/2}}, \quad (4.19)$$

$$8\pi G_N p_{\text{rad}}^{\text{eff}} = \frac{h^2}{r^4} + \frac{(\kappa - h)(r^2 + h^2)}{r^4(2r^2 - h^2)^{1/2}}, \quad (4.20)$$

$$8\pi G_N p_{\perp}^{\text{eff}} = -\frac{h^2}{r^4} - \frac{(\kappa - h)(r^4 + 2h^2r^2 - h^4)}{r^4(2r^2 - h^2)^{3/2}}, \quad (4.21)$$

no satisface la condición de energía nula (y por lo tanto, las condiciones de energía débil y fuerte, son asimismo violadas) en la región exterior al horizonte ($r_h > h$), por lo que estos agujeros negros constituyen objetos denominados exóticos. Este aspecto tiene consecuencias particulares en el fenómeno de *lensing*, que serán estudiadas en la siguiente sección.

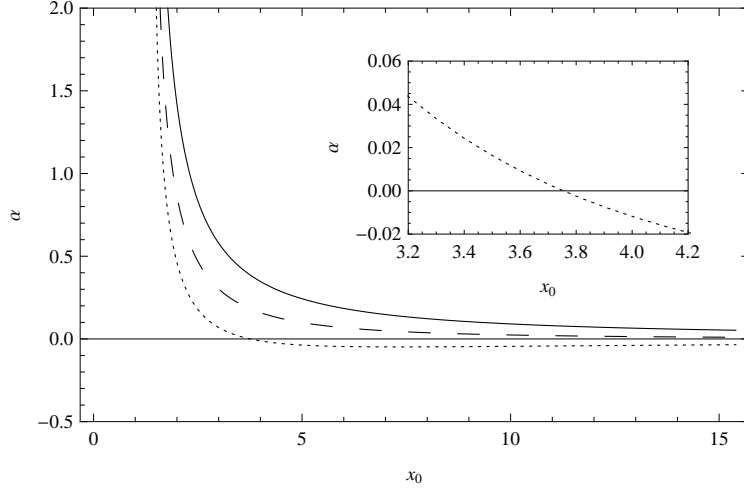


Figura 4.2: Ángulo de deflexión α en función de la distancia (adimensionalizada) de máximo acercamiento $x_0 = r_0/h$, para los casos: $0 < \eta < 1$ (se muestra $\eta = 0,1$, línea continua), $\eta = 1$ (línea de rayas) y $\eta > 1$ (se muestra $\eta = 2$, línea punteada). Se puede ver que para $\eta > 1$, el ángulo de deflexión se hace negativo a medida que x_0 crece.

4.4. Ángulo de deflexión

A los efectos prácticos, es conveniente adimensionalizar todas las cantidades de la métrica (4.17), en términos del parámetro h . Para ello, se definen las siguientes variables:

$$x = \frac{r}{h}, \quad T = \frac{t}{h}, \quad \eta = \frac{\kappa}{h}. \quad (4.22)$$

Por lo tanto, la expresión (4.17) depende de un solo parámetro (η) y toma la forma

$$ds^2 = -A(x)dT^2 + B(x)dx^2 + C(x)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.23)$$

donde

$$A(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad B(x)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \frac{\eta - 1}{\sqrt{2x^2 - 1}}\right), \quad C(x) = x^2. \quad (4.24)$$

De esta manera, se tienen soluciones que corresponden a agujeros negros si $\eta > 0$, con horizonte en $x_h = 1$, y se puede separar en dos casos: $0 < \eta < 1$ (agujero negro con garganta en su interior) y $\eta > 1$ (agujero negro sin garganta). Se obtienen agujeros de gusano si $\eta < 0$. La métrica de Reissner-Nordström sin masa y carga imaginaria pura,

$A(x) = B(x)^{-1} = 1 - 1/x^2$, se recupera con $\eta = 1$. Dado que estamos interesados en estudiar el efecto de *lensing* en agujeros negros, se considera únicamente el caso $\eta > 0$. El radio adimensionalizado de la esfera de fotones, para esta familia de agujeros negros sin masa, se calcula a partir de la ecuación (3.21), el que resulta ser $x_{ps} = \sqrt{2}$, para todo valor del parámetro $\eta > 0$.

El ángulo de deflexión α para un fotón proveniente del infinito se obtiene de manera exacta reemplazando los coeficientes de la métrica (4.24) en la ecuación (3.5). La Figura 4.2, muestra el ángulo de deflexión (calculando en forma numérica la integral) para diferentes valores del parámetro η representativos: $\eta = 0,1$ (para abarcar el rango $0 < \eta < 1$), $\eta = 1$ y $\eta = 2$. Como puede verse, el mismo crece a medida que la distancia de máximo acercamiento x_0 alcanza el radio de la esfera de fotones x_{ps} , donde diverge. En el caso particular $\eta > 1$, el ángulo α se hace negativo a partir de un cierto valor de x_0 (siempre mayor a x_{ps}), lo que indica que para grandes valores de x_0 , el agujero negro se comporta como una lente divergente, no sucediendo lo mismo para el caso en que los fotones pasan cerca de la esfera de fotones x_{ps} .

4.5. Límite de deflexión débil

Cuando $x_0 \gg x_{ps}$, el ángulo de deflexión es pequeño y se puede obtener una expresión aproximada del mismo para el caso en que la luz pasa lejos de la esfera de fotones (es decir, para valores grandes de x_0). Definiendo las variables $k = x_0/x$ y $z = 1/x_0$, la integral (3.6) se puede escribir como

$$I(x_0) = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} h(k) dk, \quad (4.25)$$

donde

$$h(k) = \frac{1}{\sqrt{(-z^2 - k^2 z^2 + 1) \left[1 + (-1 + \eta)z \left(\sqrt{-z^2 + 2k^{-2}} \right)^{-1} \right]}}, \quad (4.26)$$

de modo que los límites de integración no dependen de x_0 . Expandiendo $h(k)$ a primer orden en $z = 0$ (es decir, $x_0 \rightarrow \infty$) y reemplazándolo en la ecuación (4.25), se tiene

$$I(x_0) \approx 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \left\{ 2 + \frac{k(1-\eta)}{\sqrt{2}} z \right\} dk. \quad (4.27)$$

Integrando (4.27) término a término, reemplazando el resultado en la expresión (3.5), y volviendo a la variable x_0 , el ángulo de deflexión en el límite débil finalmente adopta la forma

$$\alpha(x_0) \approx \frac{(1-\eta)}{\sqrt{2}} \frac{1}{x_0}. \quad (4.28)$$

Resulta conveniente expresar este ángulo en términos del parámetro de impacto adimensionalizado u , de acuerdo a la ecuación (3.23), obteniéndose

$$u = \frac{x_0^2}{\sqrt{x_0^2 - 1}}. \quad (4.29)$$

Despejando x_0 , se obtiene una expresión que relaciona la distancia de máximo acercamiento como función de u :

$$x_0 = \sqrt{\frac{u^2 + \sqrt{u^2(u^2 - 4)}}{2}}. \quad (4.30)$$

Reemplazando la ecuación (4.30) en (4.28) y expandiendo a primer orden en $1/u$, el ángulo de deflexión para valores grandes del parámetro de impacto es

$$\alpha(u) \approx \frac{(1-\eta)}{\sqrt{2}} \frac{1}{u}. \quad (4.31)$$

Siendo que $u = d_{ol} \sin \theta \approx d_{ol} \theta$, como se deduce de la Figura 3.1, el ángulo de deflexión en el límite de deflexión débil, en términos de la posición angular de la imagen, finalmente resulta:

$$\alpha \approx \frac{(1-\eta)}{\sqrt{2}d_{ol}} \frac{1}{\theta}. \quad (4.32)$$

Para ángulos de deflexión pequeños y alineación perfecta entre la fuente, la lente y el observador ($\beta = 0$), se forma un anillo de Einstein si $0 < \eta < 1$. El radio del mismo se obtiene tomando $\beta = 0$ en la ecuación de la lente (3.7) y reemplazando en ella el ángulo hallado en (4.32). De esta manera, se tiene

$$\theta_E = \sqrt{\frac{(1-\eta)d_{ls}}{\sqrt{2}d_{ol}d_{os}}}. \quad (4.33)$$

Por lo tanto, en términos de esta cantidad, y quedándonos sólo a primer orden en $1/\theta$ en la ecuación (4.32), para $0 < \eta < 1$, el ángulo de deflexión tiene la forma

$$\alpha \approx \frac{\theta_E^2 d_{os}}{d_{ls}} \frac{1}{\theta}. \quad (4.34)$$

Reemplazando (4.34) en la ecuación de la lente (3.7), las posiciones angulares de las imágenes primaria y secundaria son las presentadas en la expresión (3.14).

Si $\eta = 1$, de la ecuación (4.32) se puede ver que el primer orden se anula en la expansión del ángulo de deflexión, por lo que la aproximación adoptada aquí (primer orden en $1/u$) deja de ser válida. Por lo tanto, para $\eta = 1$, términos de orden superior o métodos numéricos son necesarios para obtener las posiciones de las dos imágenes correspondientes al límite de deflexión débil. Cuando $\eta > 1$, el ángulo de deflexión es pequeño y negativo para valores grandes de x_0 , como puede observarse en la Figura 4.2. En este caso, el agujero negro sin masa actúa como una lente divergente. Para valores pequeños de β , la ecuación de la lente (3.7) no tiene soluciones reales, lo que significa que los fotones deflectados nunca llegan al observador y por lo tanto, no se forman imágenes primaria y secundaria. Asimismo, para $\beta = 0$, el anillo de Einstein no está presente para valores grandes de x_0 . Como se muestra en la Figura 4.2, existe un valor de x_0 cercano a la esfera de fotones (pero no tan cercano), definámoslo x_z , en el que el ángulo de deflexión es cero. Para todo $x_0 > x_z$, se tiene que $\alpha(x_0) < 0$ y mediante un razonamiento similar se deduce la no formación de imágenes para alto alineamiento, así como la no formación del anillo de Einstein si $\beta = 0$. El caso contrario se presenta si $x_0 < x_z$: el ángulo de deflexión es positivo y el agujero negro se comporta como una lente convergente. Para valores de x_0 levemente inferiores a x_z , el pequeño y positivo ángulo de deflexión da lugar a dos imágenes (para alta alineación) y un anillo de Einstein si $\beta = 0$. En este caso, la aproximación presentada en la ecuación (4.28) deja de ser válida, y es necesario acudir a métodos numéricos para obtener las posiciones de las mismas.

Las magnificaciones de las imágenes primaria y secundaria se obtienen a partir de la ecuación (3.15), lo que lleva, para $0 < \eta < 1$ a la expresión (3.16) con θ_E dado por la ecuación (4.33). Las mismas se muestran la Figura 4.3 como funciones de la posición de la fuente dividida por el correspondiente anillo de Einstein, para el caso $0 < \eta < 1$. Notar que las magnificaciones crecen a medida que β decrece, es decir, cuando la alineación es mayor.

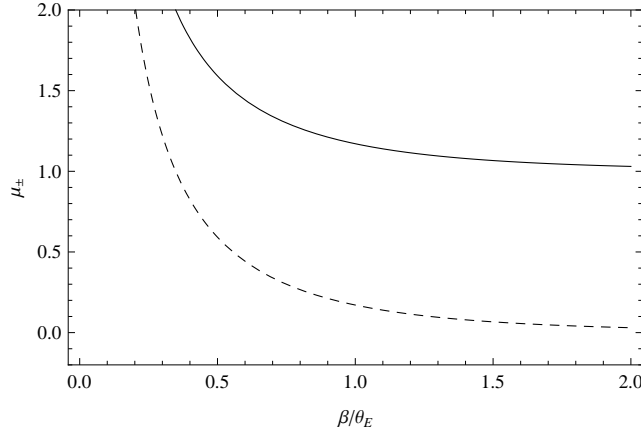


Figura 4.3: Magnificaciones de las imágenes primaria (línea continua) y secundaria (línea punteada), para $0 < \eta < 1$, en función del cociente entre la posición angular de la fuente β y el radio angular del anillo de Einstein θ_E , el cual es función de η .

4.6. Límite de deflexión fuerte

En primer lugar se calcula c_1 de la ecuación (3.24) a partir de la expresión (3.55). Para ello, se hallan las funciones $R(z, x_0)$ y $\gamma(x_0)$ reemplazando en ellas los coeficientes de la métrica adimensionalizada (4.24) y sus correspondientes derivadas, en las ecuaciones (3.26) y (3.31). La expresión $R(z, x_0)$ resulta

$$R(z, x_0) = \frac{x}{x_0} \sqrt{\frac{\sqrt{-1 + 2x^2}}{\sqrt{-1 + 2x^2} + \eta - 1}}, \quad (4.35)$$

donde z es función de x y x_0 , según la ecuación (3.25); por otro lado, $\gamma(x_0)$ queda

$$\gamma(x_0) = \frac{1}{x_0}. \quad (4.36)$$

Cuando $z = 0$, de la ecuación (3.25) se deduce que $A(x) = A(x_0)$, por lo que $x = x_0$, y como $x_0 = x_{ps}$, entonces $x = x_{ps}$. De este modo, se obtiene finalmente:

$$R(0, x_{ps}) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1 + \eta}}, \quad (4.37)$$

y

$$\gamma(x_{ps}) = \frac{1}{2}. \quad (4.38)$$

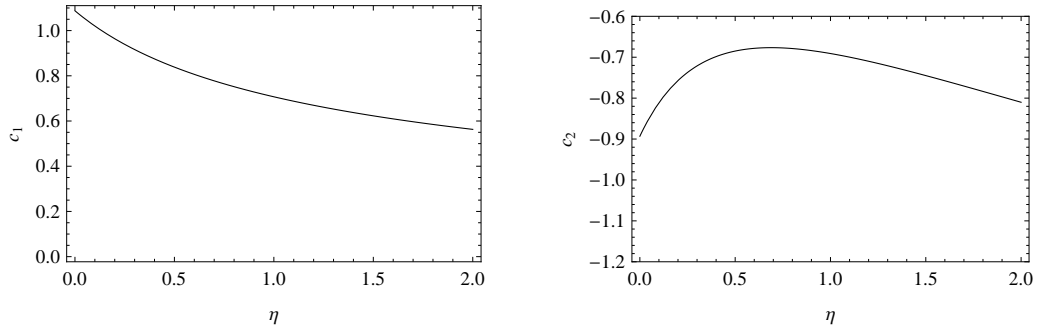


Figura 4.4: Coeficientes c_1 (izquierda) y c_2 (derecha) en función del parámetro η .

Reemplazando (4.37) y (4.38) en la ecuación (3.55), el coeficiente c_1 para el agujero negro sin masa es

$$c_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3} - 1 + \eta)}}. \quad (4.39)$$

El coeficiente c_2 , que viene dado por la expresión (3.56), resulta

$$c_2 = -\pi + c_R + c_1 \ln 2, \quad (4.40)$$

dato que $A(x_{ps}) = 1/2$. Por otro lado, el parámetro de impacto evaluado en $x_0 = x_{ps}$ es $u_{ps} = 2$. En el caso de esta familia de agujeros negros sin masa en el contexto de teorías de mundos brana, c_R fue obtenido de manera numérica para cada valor del parámetro η , ya que la integral (3.49) no puede en este caso ser calculada analíticamente. En la Figura 4.4 se muestran los coeficientes c_1 y c_2 en función de η . Se observa que c_1 decrece a medida que aumenta el parámetro η , mientras que c_2 adquiere un máximo para un cierto valor de η , a partir del cual el mismo decrece.

De este modo, se tiene el ángulo en el límite de deflexión fuerte, simplemente reemplazando estos coeficientes y el parámetro de impacto u_{ps} en la expresión (3.24), siendo el mismo, únicamente función de la métrica y sus parámetros.

Para hallar las posiciones y magnificaciones de las imágenes relativistas, se deben reemplazar los coeficientes c_1 y c_2 dados por (4.39) y (4.40), en las expresiones (3.67) y (3.73), respectivamente. Estas cantidades resultan importantes para obtener los observables r y s , que como se ha explicado anteriormente, permiten relacionar los resultados

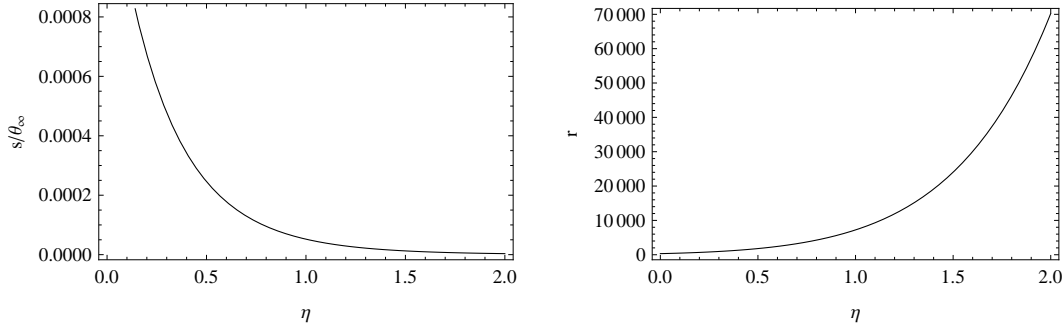


Figura 4.5: Observables s/θ_∞ (izquierda) y r (derecha), en el límite de deflexión fuerte, en función del parámetro η .

analíticos con las observaciones. Estos observables son obtenidos reemplazando los valores de c_1 y c_2 hallados para este agujero negro, en las expresiones (3.78) y (3.79), y se presentan en la Figura 4.5 como funciones de η . De los gráficos, se puede ver que la separación angular relativa de las imágenes decrece con η , lo que indica que la primera imagen relativista se encuentra más cerca de las demás cuanto más grande es el parámetro η . Por otro lado, la primera imagen crece en intensidad con respecto a las otras a medida que η aumenta.

4.7. Discusión

El objetivo de este capítulo fue estudiar como lentes gravitatorias una clase de agujeros negros sin materia ni masa, que se obtienen como solución en el contexto de la teoría de mundos brana. Estos agujeros negros están caracterizados por dos parámetros: h y η (o κ), que provienen de los efectos tidales del *bulk* sobre la brana. El tensor de energía-momento es bastante peculiar, dado que no satisface las condiciones de energía usuales en la región fuera del horizonte. Para esta clase de agujeros negros, se han analizado en detalle la formación de imágenes en el límite de deflexión débil y fuerte, para el caso en que la fuente, el agujero negro y el observador se hallan altamente alineados.

El valor del parámetro h que aparece en la métrica representa el tamaño del agujero negro (pues $r_h = h$, como se ha descrito anteriormente), por lo que midiendo θ_∞ y

la distancia observador-lente, se puede obtener h . Como θ_∞ debe ser lo suficientemente grande como para ser resuelto por los actuales o futuros instrumentos, el valor de h debe ser grande para agujeros negros lejanos y puede ser chico si estos objetos existen a distancias cercanas al observador. Los efectos de *lensing* en objetos con estas características, de existir, podrían ser medidos en un futuro cercano. El parámetro η es obtenido de los coeficientes c_1 y c_2 , aunque grandes valores de η serán difíciles de encontrar, ya que, como se ve en la Figura 4.5, en este caso la primera imagen relativista está muy cerca a las demás como para ser resuelta y además es muy brillante respecto de las otras.

Resulta interesante comparar los resultados obtenidos para esta clase de agujeros negros sin masa, con aquellas soluciones esféricamente simétricas en el marco de la Relatividad General [35, 36], es decir, las geometrías de Schwarzschild y Reissner-Nordström. Para agujeros negros de Schwarzschild (Sección 3.5.1) se recuerda que $c_1^{Sch} = 1$ y $c_2^{Sch} = \ln[216(7 - 4\sqrt{3})] - \pi \approx -0,4002$. En nuestro caso, existe un pequeño valor de η para el cual $c_1 = 1$, pero $c_2 < -0,6$ para todo valor de η . De la geometría de Reissner-Nordström se obtiene que (como se ha presentado en la Sección 3.5.2) $c_1^{RN} \geq 1$ crece con el valor absoluto de carga electromagnética Q . Esto significa que para pequeños valores de η y Q , los coeficientes c_1 y c_1^{RN} pueden tomar el mismo valor; pero en ese caso, c_2 es menor que c_2^{RN} . Por lo tanto, comparando estos resultados, se puede ver que si los coeficientes en el límite de deflexión fuerte pueden obtenerse a partir de datos observacionales (ver expresiones (3.80) y (3.81)), el agujero negro sin masa estudiado en este capítulo puede ser distinguido claramente de las soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström.

Asimismo, se pueden comparar estos resultados con aquellos previamente obtenidos en la literatura, para otras soluciones de agujeros negros en el contexto de teorías de mundos brana. En el caso de la geometría de Myers-Perry (ver Apéndice B), los coeficientes del ángulo de deflexión en el límite de fuerte [53] son: $c_1^{MP} = \sqrt{2}/2 \approx 0,707$ y $c_2^{MP} = \sqrt{2} \ln(4\sqrt{2}) - \pi \approx -0,691$. De la Figura 4.4, se puede ver que los pares de valores $\{c_1, c_2\}$ nunca coinciden con $\{c_1^{MP}, c_2^{MP}\}$, cualquiera sea el valor del parámetro η . Para el caso de agujeros negros con carga tidal, de la Figura 4 de la Ref. [54], se puede ver que el coeficiente c_1^{TC} crece con la carga tidal, mientras que el coeficiente c_2^{TC} decrece con la misma; comparando esto con la Figura 4.4 de esta Tesis, resulta claro que estos agujeros

negros pueden ser fácilmente distinguidos a partir de los coeficientes en el límite de deflexión fuerte.

Capítulo 5

Agujeros negros regulares con un campo fantasma

En el presente capítulo se analiza el efecto de lente gravitatoria producido por una clase de agujeros negros regulares, con simetría esférica y asintóticamente planos, en el marco de una teoría con un campo fantasma (*phantom*). Se obtiene el ángulo de deflexión tanto en el límite débil como fuerte, a partir del cual se calculan las posiciones y magnificaciones de las imágenes. Estos resultados son comparados con los obtenidos en la literatura para las soluciones de Schwarzschild y Brans-Dicke, utilizando como ejemplo el agujero negro supermasivo del centro galáctico.

5.1. Introducción

Las observaciones de las ya bien conocidas supernovas tipo Ia [2, 3] conducen a un escenario cosmológico en el que nuestro Universo se expande aceleradamente. Un modo de explicar este hecho, es que el Universo está gobernado por un fluido de presión negativa llamado energía oscura [24], la cual constituye el 70 % de la densidad total, siendo el 30 % restante materia bariónica y materia oscura. La ecuación de estado más simple para la componente prevaleciente, que relaciona la presión p con la densidad de energía ρ , tiene la forma lineal $p = \omega\rho$. Cuando $\omega > -1$, esta energía oscura se denomina “quintaesencia”;

el caso $\omega = -1$ corresponde a la constante cosmológica Λ ; y si $\omega < -1$, se tiene energía tipo “fantasma” (en inglés, *phantom*). Si bien las estimaciones de este parámetro ω son modelo dependientes, valores inferiores a -1 son admitidos en las recientes observaciones del telescopio Planck [103]. Una manera de modelar la energía oscura, es mediante un campo escalar auto-interactuante, con un potencial [24]. En el caso particular en que $\omega < -1$, este campo se denomina escalar fantasma y se caracteriza por poseer un término cinético negativo. El origen de los campos fantasma está bajo discusión, pero aparecen naturalmente en algunos modelos de la teoría de cuerdas [104, 105], supergravedad [106] y en teorías en más de 11 dimensiones como la teoría F [107].

Si el escalar fantasma se halla presente en nuestro Universo, resulta interesante buscar sus manifestaciones no sólo a escalas cosmológicas, sino también como perturbaciones locales, como ser agujeros negros y agujeros de gusano. En este contexto, soluciones de agujeros negros regulares y agujeros de gusano *phantom* con simetría esférica fueron halladas [27], así como también el análisis de estabilidad de las mismas [108]. Resulta, por lo tanto, de interés, estudiar los fenómenos astrofísicos asociados a estos objetos a fin de poder relacionar posibles observaciones futuras con modelos teóricos.

En el presente Capítulo, se estudia como lente gravitatoria una solución a una clase de agujeros negros con simetría esférica y regulares hallada por Bronnikov y Fabris en el año 2006 [27], cuyas características principales son detalladas en la siguiente Sección.

5.2. La geometría

Como punto de partida, se adopta el siguiente Lagrangiano [27], que consiste en la gravedad de Einstein acoplada a un campo escalar ϕ y con un potencial arbitrario $V(\phi)$:

$$L = \sqrt{-g}[R + \epsilon g^{\alpha\beta} \phi_{;\alpha} \phi_{;\beta} - 2V(\phi)], \quad (5.1)$$

donde $g = |\det(g_{\mu\nu})|$ y R es el escalar de curvatura (escalar de Ricci). Si $\epsilon = +1$, el campo escalar es el usual, pues el término cinético es positivo. En cambio, si $\epsilon = -1$, este término es negativo y el campo se denomina fantasma. Dado que en este trabajo se tiene interés en este último tipo de soluciones, en adelante, se adopta y estudia sólo el caso $\epsilon = -1$.

Partiendo de una métrica general estática con simetría esférica

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.2)$$

donde $B(r) = A^{-1}(r)$, y de $\phi = \phi(r)$, la ecuación para el campo escalar y las tres combinaciones independientes de la ecuaciones de Einstein resultan

$$(AC\phi')' = \epsilon C dV/d\phi, \quad (5.3)$$

$$(A'C)' = -2CV; \quad (5.4)$$

$$2(\sqrt{C})''/\sqrt{C} = -\epsilon\phi'^2; \quad (5.5)$$

$$AC'' - A''C = 2, \quad (5.6)$$

donde la prima denota la derivada d/dr . La ecuación (5.3) se deduce de las expresiones (5.4) - (5.6), las cuales, dado un potencial $V(\phi)$ forman un conjunto determinado de ecuaciones de las que se obtiene $r(\rho)$, $A(\rho)$ y $\phi(\rho)$. Integrando la expresión (5.6) se tiene,

$$D' \equiv \left(\frac{A}{C}\right)' = \frac{2(r_0 - r)}{C^2}, \quad (5.7)$$

siendo r_0 una constante de integración. Estas ecuaciones dan una familia de soluciones entre las cuales se encuentran las de agujeros de gusano (para campos escalares sin masa). Asimismo, para $m = 0$, se admiten soluciones asintóticamente planas con centros regulares bajo la restricción $V(\phi) \leq 0$; para $m > 0$ son posibles requiriendo que $V(\phi)$ posea un término con signo alternante.

En este Capítulo, la solución estática y simétricamente esférica admitida por las ecuaciones (5.3) - (5.6) que se estudia, está dada por la métrica cuyos coeficientes son [27]

$$A(r) = B(r)^{-1} = 1 + \frac{r_0 r}{b^2} + (r^2 + b^2) \left[\frac{c}{b^2} + \frac{r_0}{b^3} \tan^{-1} \left(\frac{r}{b} \right) \right],$$

$$C(r) = r^2 + b^2, \quad (5.8)$$

donde c y $b > 0$ son constantes. De las ecuaciones (5.4) y (5.5), se llega a expresiones para $\phi(r)$ y $V(r)$ [27]:

$$\phi(r) = \pm \sqrt{2} \tan^{-1} \left(\frac{r}{b} \right) + \phi_0, \quad (5.9)$$

$$V(r) = -\frac{c}{b^2} \left(1 + \frac{2r^2}{r^2 + b^2} \right) - \frac{r_0}{b^3} \left[\frac{3br}{r^2 + b^2} + \left(1 + \frac{2r^2}{r^2 + b^2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{r}{b} \right) \right]. \quad (5.10)$$

Se puede elegir la constante $\phi_0 = 0$ y conservar sólo el signo positivo en la ecuación (5.9) sin pérdida de generalidad. De este modo, el campo escalar ϕ y el potencial V respectivamente, quedan finalmente dados por las siguientes expresiones [27]:

$$\phi = \sqrt{2} \tan^{-1} \left(\frac{r}{b} \right), \quad (5.11)$$

y

$$V(\phi) = -\frac{c}{b^2} \left[3 - 2 \cos^2 \left(\frac{\phi}{\sqrt{2}} \right) \right] - \frac{r_0}{b^3} \left\{ 3 \sin \left(\frac{\phi}{\sqrt{2}} \right) \cos \left(\frac{\phi}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\phi}{\sqrt{2}} \left[3 - 2 \cos^2 \left(\frac{\phi}{\sqrt{2}} \right) \right] \right\}. \quad (5.12)$$

El parámetro b puede ser interpretado como una escala del campo escalar. La coordenada radial r es un número real y la función $\mathcal{S}(r) = 4\pi R^2(r)$, con $R(r) = \sqrt{C(r)}$, da el área de la superficie esférica correspondiente a cada valor de r . Esta función $\mathcal{S}(r)$ posee un mínimo en $r = 0$, siendo $\mathcal{S}(0) = 4\pi b^2$, lo que significa que la geometría presenta una garganta en $r_{th} = 0$. La solución es regular para todo r y la posición del horizonte r_h se obtiene de la condición $A(r_h) = 0$. La métrica es asintóticamente plana [27] en $r \rightarrow +\infty$ cuando

$$c = -\frac{\pi r_0}{2b}. \quad (5.13)$$

La constante $m = r_0/3$ puede ser interpretada como la masa. Se pueden tener tres casos:

(i) $m = 0$: la función $A(r) = 1$ (pues $c = 0$) y la geometría resultante es la del agujero de gusano de Ellis [109], que conecta dos regiones asintóticamente planas por medio de una garganta ubicada en $r_{th} = 0$.

(ii) $m < 0$: no se presentan horizontes y el espacio-tiempo correspondiente es un agujero de gusano con garganta en $r_{th} = 0$ que conecta una región asintóticamente plana ($r > 0$) con una región asintóticamente anti-de Sitter ($r < 0$).

(iii) $m > 0$: existe un sólo horizonte de Killing, correspondiente a la única raíz r_h de $A(r)$. En este caso, la región $r > r_h$ es asintóticamente plana y la correspondiente a $r < r_h$ es asintóticamente de Sitter. Estos agujeros negros regulares, también reciben el nombre de universos negros. De aquí, se desprenden tres casos posibles:

- (a) $0 < b < 3\pi m/2$: en esta situación, se tiene que $0 = r_{th} < r_h < 2m$, por lo que la garganta no es verdadera, pues r corresponde a la coordenada temporal en la región $r < r_{th}$.
- (b) $b = 3\pi m/2$: el horizonte y la garganta coinciden ($r_{th} = r_h = 0$).
- (c) $b > 3\pi m/2$: se obtiene $r_h < 0$, lo que corresponde a un agujero de gusano con horizonte en su interior ($r_h < r_{th} = 0$).

En el caso $b = 3\pi m/2$ se demuestra que la solución es estable [108]. Por último, en el límite $b \rightarrow 0$, se pierde la garganta, y si se tiene además $m > 0$, se obtiene la solución de Schwarzschild, con una singularidad en $r = 0$ y horizonte en $r = 2m$.

5.3. Ángulo de deflexión

En adelante, se adopta el valor de c dado por la condición (5.13), de modo que la geometría resulte asintóticamente plana. Por otro lado, se toma $m > 0$, lo que corresponde a un agujero negro (o un universo negro). Al igual que en la sección anterior, resulta conveniente adimensionalizar las cantidades presentes en la métrica, en términos de alguno de sus parámetros. Esto permite luego, hacer comparaciones con otras geometrías. Se definen, por lo tanto, las siguientes variables adimensionalizadas con la masa m :

$$x = \frac{r}{m}, \quad T = \frac{t}{m}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{m}. \quad (5.14)$$

De este modo, la solución (5.2) resulta

$$ds^2 = -A(x)dT^2 + B(x)dx^2 + C(x)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.15)$$

donde

$$A(x) = B(x)^{-1} = 1 + \frac{3x}{\tilde{b}^2} + \frac{3}{\tilde{b}} \left(1 + \frac{x^2}{\tilde{b}^2} \right) \left(-\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{x}{\tilde{b}} \right),$$

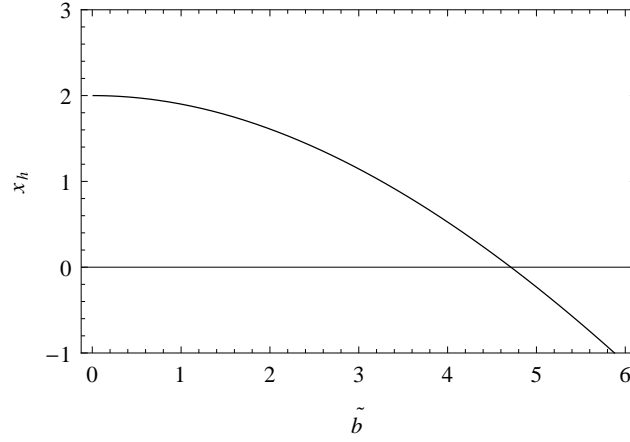


Figura 5.1: Coordenada radial adimensionalizada $x_h = r_h/m$ del horizonte de sucesos, como función del parámetro $\tilde{b} = b/m$. Para $\tilde{b} > 3\pi/2$, el radio adimensionalizado es negativo y hay una garganta fuera del horizonte, ubicada en $x_{th} = r_{th}/m = 0$.

$$C(x) = x^2 + \tilde{b}^2, \quad (5.16)$$

y

$$\phi = \sqrt{2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{\tilde{b}} \right), \quad (5.17)$$

para el campo escalar ϕ . El valor de la coordenada radial del horizonte x_h , es obtenido numéricamente de la condición $A(x_h) = 0$ y es una función decreciente de \tilde{b} , como se muestra en la Figura 5.1. El mismo se anula en el caso particular en el que $\tilde{b} = 3\pi/2$ (es decir, $x_h = 0$) y se hace negativo para valores $\tilde{b} > 3\pi/2$.

El radio de la esfera de fotones, se obtiene como la mayor raíz positiva de la expresión (3.21). Reemplazando las funciones de la métrica (5.16) en dicha ecuación, se tiene:

$$\frac{3 \left\{ 2\tilde{b} + 2x \left[\frac{-\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{x}{\tilde{b}} \right) \right] \right\}}{\tilde{b}^3 + 3\tilde{b}^2 \left\{ \frac{x}{\tilde{b}} + \left(1 + \frac{x^2}{\tilde{b}^2} \right) \left[-\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{x}{\tilde{b}} \right) \right] \right\}} = \frac{2x}{x^2 + \tilde{b}^2}, \quad (5.18)$$

Siendo que $\tilde{b} > 0$, la expresión (5.18) se reduce a una única solución. El radio (adimensionalizado) de la esfera de fotones es constante y corresponde a $x_{ps} = 3$ para todo valor del parámetro \tilde{b} .

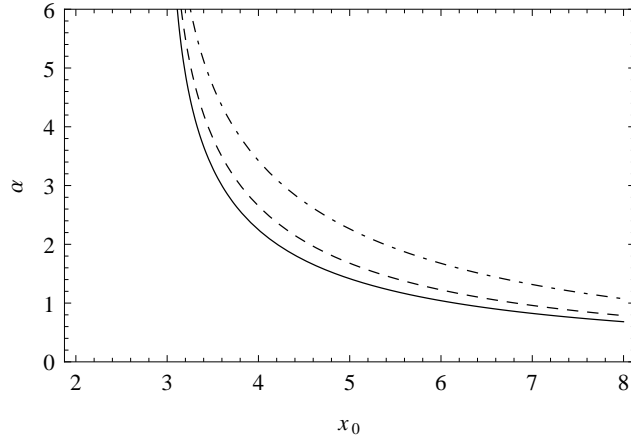


Figura 5.2: Ángulo de deflexión en función de la distancia máxima de acercamiento adimensionalizada $x_0 = r_0/m$, para tres valores representativos del parámetro \tilde{b} : 1 (línea continua), 3 (línea de rayas), y 6 (línea de puntos y rayas). El ángulo de deflexión diverge en $x_0 = x_{ps} = 3$ (radio de la esfera de fotones).

El ángulo de deflexión se obtiene de manera exacta reemplazando las componentes de la métrica (5.16) en la integral (3.5). En la Figura 5.2, se presenta el ángulo de deflexión exacto (obtenido numéricamente) en función de la distancia adimensionalizada de máximo acercamiento x_0 , para tres valores representativos de \tilde{b} . Se observa que el mismo es una función positiva y decreciente de x_0 , y que el ángulo es mayor para x_0 fijos a medida que \tilde{b} crece. Para valores grandes de x_0 , el ángulo de deflexión tiende a cero (límite de deflexión débil). Por otro lado, para valores de x_0 suficientemente cercanos a x_{ps} , α es mayor que 2π y los fotones recorren una o más vueltas alrededor del agujero negro antes de llegar al observador, dando lugar a las imágenes relativistas (límite de deflexión fuerte). Un estudio en detalle de estos dos casos límites, son presentados en las siguientes secciones.

5.4. Límite de deflexión débil

El caso más sencillo corresponde a aquel en el que los fotones inciden con un parámetro de impacto grande, de modo que la distancia de máximo acercamiento x_0 es grande.

Definiendo $y = x_0/x$, los límites de la integral (3.6) ya no dependen de x_0 :

$$I(x_0) = \int_0^1 f(y) dy. \quad (5.19)$$

De este modo, se puede hacer una expansión de Taylor del argumento de dicha integral, alrededor de $1/x_0 = 0$ (ie. $x_0 \rightarrow \infty$), quedando:

$$f(y) \approx \frac{2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{2(1+y+y^2)}{(1+y)\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{x_0} + \frac{(-b^2(-1+y)(1+y)^3 + 3(1+y+y^2)^2)}{y(1+y)^2\sqrt{-1+y^{-2}}} \frac{1}{x_0^2}; \quad (5.20)$$

reemplazando (5.20) en (5.19) e integrando término a término, el ángulo de deflexión, en el límite débil, tiene la forma [68]

$$\alpha(x_0) \approx \frac{4}{x_0} + \frac{-16 + (15 + \tilde{b}^2)\pi}{4x_0^2}. \quad (5.21)$$

Guardando sólo el primer orden de la ecuación (5.21) y sabiendo que $x_0 = d_{ol} \sin \theta \approx d_{ol} \theta$, el ángulo de deflexión finalmente resulta

$$\alpha(\theta) \approx \frac{4}{d_{ol}} \frac{1}{\theta}, \quad (5.22)$$

el cual, en términos del radio angular del anillo de Einstein

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4d_{ls}}{d_{ol}d_{os}}}, \quad (5.23)$$

se escribe como:

$$\alpha(\theta) \approx \frac{\theta_E^2 d_{os}}{d_{ls}} \frac{1}{\theta}. \quad (5.24)$$

Tanto las posiciones de las imágenes primaria y secundaria, como las magnificaciones de las mismas, se obtienen reemplazando la ecuación (5.24) en las expresiones (3.14) y (3.16) respectivamente. Es importante notar que, para esta clase de agujeros negros, los resultados obtenidos a primer orden en $1/x_0$, no dependen del factor de escala adimensionalizado del campo escalar \tilde{b} . A órdenes superiores, esta dependencia en las posiciones y magnificaciones de las imágenes primarias y secundarias se hace presente y puede obtenerse siguiendo el procedimiento detallado en [110], caso que no es analizado en esta Tesis.

5.5. Límite de deflexión fuerte

Para hallar las posiciones y las magnificaciones de las imágenes relativistas, se sigue el procedimiento detallado en el Capítulo 3. Para ello, se obtienen los coeficientes del límite de deflexión fuerte c_1 y c_2 . Para la clase de agujeros negros regulares estudiada en este capítulo, las expresiones (3.26) y (3.31) correspondientes a $R(z, x_0)$ y $\gamma(x_0)$ son respectivamente:

$$R(z, x_0) = \frac{\sqrt{\tilde{b}^2 + x_0^2} \left[\tilde{b}^2 \pi - 2\tilde{b}x_0 + x_0^2 \pi - 2 \left(\tilde{b}^2 + x_0^2 \right) \tan^{-1} \left(\frac{x_0}{\tilde{b}} \right) \right]}{\left(\tilde{b}^2 + x^2 \right) \left[2b - x\pi + 2x \tan^{-1} \left(\frac{x}{\tilde{b}} \right) \right]} \quad (5.25)$$

y

$$\gamma(x_0) = \frac{\Gamma(x_0)^2 \Upsilon(x_0)}{\Sigma(x_0)}, \quad (5.26)$$

donde

$$\Gamma(x_0) = \left[\tilde{b}^2 \pi - 2\tilde{b}x_0 + \pi x_0^2 - 2 \left(\tilde{b}^2 + x_0^2 \right) \tan^{-1} \left(\frac{x_0}{\tilde{b}} \right) \right]^2, \quad (5.27)$$

$$\Upsilon(x_0) = 2\tilde{b}^3 - 3\tilde{b}^2 \pi + \left(2\tilde{b}x_0 - \pi x_0^2 \right) (15 - 4x_0) + \left[6\tilde{b}^2 + 2x_0^2 (15 - 4x_0) \right] \tan^{-1} \left(\frac{x_0}{\tilde{b}} \right), \quad (5.28)$$

y

$$\Sigma(x_0) = 4 \left(\tilde{b}^2 + x_0^2 \right)^2 \left[2\tilde{b} - \pi x_0 + 2x_0 \tan^{-1} \left(\frac{x_0}{\tilde{b}} \right) \right]^3. \quad (5.29)$$

Evaluando estas cantidades en $z = 0$ (es decir, en $x = x_0$) y $x_0 = x_{ps}$, como se explica en el Capítulo 3, se tiene finalmente

$$R(0, x_{ps}) = \frac{\left[-6\tilde{b} + 9\pi + \tilde{b}^2 \pi - 2 \left(9 + \tilde{b}^2 \right) \tan^{-1} \left(\frac{3}{\tilde{b}} \right) \right]}{\sqrt{9 + \tilde{b}^2} \left[2\tilde{b} - 3\pi + 6 \tan^{-1} \left(\frac{3}{\tilde{b}} \right) \right]} \quad (5.30)$$

y

$$\gamma(x_{ps}) = \frac{1}{4} R(0, x_{ps})^2. \quad (5.31)$$

De esta manera, reemplazando (5.30) y (5.31) en la ecuación (3.55), se puede ver fácilmente que

$$c_1 = 1, \quad (5.32)$$

en tanto el coeficiente c_2 , dado por (3.56), resulta

$$c_2 = -\pi + c_R + c_1 \ln \frac{\tilde{b}^3 \left[-6\tilde{b} + 9\pi + \tilde{b}^2\pi - 2(9 + \tilde{b}^2) \tan^{-1} \left(\frac{3}{\tilde{b}} \right) \right]^2}{(9 + \tilde{b}^2)^2 \left[2\tilde{b} - 3\pi + 6 \tan^{-1} \left(\frac{3}{\tilde{b}} \right) \right]^3}, \quad (5.33)$$

donde c_R , proveniente de la ecuación (3.56), no puede ser calculado analíticamente, por lo que fue obtenido numéricamente para cada valor del parámetro \tilde{b} . El coeficiente c_1 es una constante y c_2 es mostrado en la Figura 5.3 como una función decreciente de \tilde{b} .

Por último, para escribir el ángulo de deflexión en el límite fuerte (3.24), resta calcular el parámetro de impacto dado por la expresión (3.23) reemplazando los coeficientes de la métrica (5.16) y evaluando la coordenada radial en el radio de la esfera de fotones ($x = x_{ps}$). Para el caso de los agujeros regulares con un campo fantasma estudiados en este capítulo, el mismo tiene la forma:

$$u_{ps} = \sqrt{\frac{2\tilde{b}^3}{2\tilde{b} - 3\pi + 6 \tan^{-1} \left(\frac{3}{\tilde{b}} \right)}}. \quad (5.34)$$

Teniendo estos resultados, es posible encontrar las expresiones analíticas para las posiciones y magnificaciones de las imágenes relativistas, simplemente reemplazando los coeficientes c_1 , c_2 y u_{ps} en las ecuaciones (3.67) y (3.73).

Los observables dados por las expresiones (3.77), (3.78), y (3.79) se obtienen sustituyendo los coeficientes c_1 y c_2 , y el parámetro de impacto u_{ps} , en las mismas. En el caso del agujero negro estudiado en este capítulo, $r = e^{2\pi}$ resulta ser una constante, dado que $c_1 = 1$, y el cociente s/θ_∞ se muestra en la Figura 5.4 como función del parámetro \tilde{b} , la cual es monótonamente decreciente.

Para proveer un ejemplo numérico y establecer una comparación con otras geometrías de la literatura, se considera el agujero negro supermasivo del centro galáctico [32], el cual posee una masa de $M = 4,31 \times 10^6 M_\odot$ y una distancia a la Tierra de $D_{ol} = 8,33$ kpc. Por otro lado, se adopta $D_{os} = 2D_{ol}$ como el valor de la distancia entre el observador y la fuente, una posición angular para la fuente de $\beta = 0,5 \theta_\infty$ y $b/m = 3\pi/2$ (caso estable). En la Tabla 5.1 se presentan los valores de los observables obtenidos para el agujero negro estudiado y los correspondientes a los espacio-tiempo de Schwarzschild. También

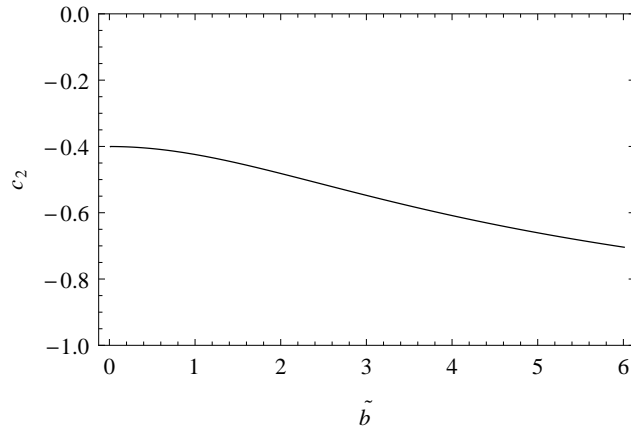


Figura 5.3: Coeficientes del límite de deflexión fuerte c_1 y c_2 , en función del parámetro \tilde{b} : el coeficiente $c_1 = 1$ es constante para todo \tilde{b} y c_2 es la función decreciente que se muestra en la figura.

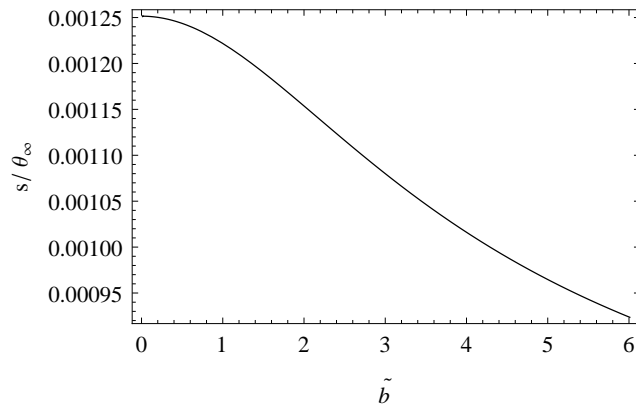


Figura 5.4: Observables s/θ_∞ y r : el cociente s/θ_∞ es la función decreciente presentada en la figura en función de \tilde{b} y $r = e^{2\pi}$ es constante.

se incluyen aquellos hallados para la solución de vacío esféricamente simétrica de Brans-Dicke (ver Apéndice C), cuyos efectos de *lensing* gravitatorios en el límite de deflexión fuerte fueron estudiados en la Ref. [111]. Siguiendo los resultados obtenidos en [111], se adoptaron para los cálculos los valores $\omega = 500$ y $\omega = 50000$. De la tabla, se observa que para el caso de Schwarzschild y Brans-Dicke, todas las cantidades son similares entre sí. En cambio, esto no sucede en el caso de los agujeros negros regulares estables (es decir,

con parámetro $\tilde{b} = 3\pi/2$), en los que los efectos de *lensing* poseen sustanciales diferencias con los casos Schwarzschild y Brans-Dicke. El valor límite de la posición angular θ_∞ al que convergen las imágenes relativistas es mayor (es decir, se encuentra más alejado del origen), y por otro lado, la primera imagen relativista está más separada de las demás y es más intensa que en el caso de los agujeros negros con los que se está comparando. En contraste, el cociente r entre el flujo de la primera imagen y el flujo proveniente de todas las demás resultó ser el mismo. Estos resultados, indican que el agujero negro estudiado se podría diferenciar del de Schwarzschild y el de Brans-Dicke a partir de observaciones del fenómeno de *lensing*.

	Phantom BH	Schwarzschild	Brans-Dicke $\omega = 500$	Brans-Dicke $\omega = 50000$
$\theta_\infty(\mu\text{as})$	40,0183	26,5093	26,4947	26,5091
$s(\mu\text{as})$	0,03915	0,03318	0,03316	0,03318
μ_1	$7,6 \times 10^{-13}$	$6,4 \times 10^{-13}$	$6,4 \times 10^{-13}$	$6,4 \times 10^{-13}$
r	535	535	535	535

Tabla 5.1: Observables - ejemplo numérico comparativo con las geometrías de Schwarzschild y Brans-Dicke aplicado al agujero negro supermasivo del centro galáctico: $\beta = 0,5\theta_\infty$, $D_{os} = 2D_{ol}$ y $\tilde{b} = 3\pi/2$.

5.6. Discusión

En este capítulo se estudiaron los efectos de lentes gravitatorias producidos por agujeros negros regulares, que son soluciones de las ecuaciones de Einstein con un campo escalar que posee un término cinético negativo y un potencial, en ausencia del campo electromagnético. Estos agujeros negros (o universos negros) tienen una región asintóticamente plana que continúa con una región asintóticamente de Sitter luego de cruzar el horizonte de eventos y pueden tener una garganta fuera del mismo. Se obtuvieron los ángulos de deflexión en los límites de deflexión débil y fuerte, con el propósito de calcular

las posiciones y magnificaciones de las imágenes para el caso de alta alineación entre la fuente, la lente y el observador. Todos los resultados fueron obtenidos en términos del cociente entre el parámetro b asociado al campo fantasma y la masa (positiva) del agujero negro.

Resulta de interés hacer una comparación general entre los resultados obtenidos y los correspondientes a la solución más sencilla: el agujero negro de Schwarzschild. En el caso del límite de deflexión débil, a primer orden en el cociente m/r_0 entre la masa y la distancia de máximo acercamiento r_0 , se encontró que el ángulo de deflexión no depende de b/m y por lo tanto, las posiciones y magnificaciones de las imágenes son las mismas que para el espacio-tiempo de Schwarzschild. Recordando que los coeficientes en el límite de deflexión fuerte, para la geometría de Schwarzschild [36] son: $c_1^{Sch} = 1$ y $c_2^{Sch} = \ln[216(7 - 4\sqrt{3})] - \pi \approx -0,400230$. Para los agujeros negros regulares con un campo fantasma estudiados aquí, se obtuvo que $c_1 = c_1^{Sch}$ es constante, y por otro lado, que c_2 es una función decreciente de b/m , que resulta ser igual a c_2^{Sch} en el límite $b \rightarrow 0$. Para una dada distancia D_{ol} entre el observador y el agujero negro, se encontró que el valor límite de la posición angular de las imágenes θ_∞ es mayor que $\theta_\infty^{Sch} = 3\sqrt{3}m/D_{ol} \approx 5,19615m/D_{ol}$ y que la separación relativa entre las imágenes s/θ_∞ es menor que $(s/\theta_\infty)^{Sch} = 0,00125$, por lo que las imágenes se hallan más alejadas del origen y más juntas entre sí que en caso de Schwarzschild. Con respecto a las magnificaciones, el comportamiento es similar al de la geometría de Schwarzschild, en el sentido en que el cociente entre el flujo de la primer imagen y el flujo proveniente de todas las demás, satisface $r = r^{Sch} = e^{2\pi}$. Como se ha explicado anteriormente, un caso particularmente interesante ocurre si $b/m = 3\pi/2$, es decir, cuando el horizonte coincide con la garganta, ya que, como fue demostrado en [108], la solución es estable; en ese caso, se tiene que $c_2 = -0,646528$, $\theta_\infty = 7,84411m/D_{ol}$ y $s/\theta_\infty = 0,000978$, con amplias diferencias con los valores correspondientes a Schwarzschild.

Con respecto a la solución de vacío esféricamente simétrica de la teoría de Brans-Dicke (ver Apéndice C), los coeficientes en el límite de deflexión fuerte [111] son $c_1^{BD} = 1$ (independiente de ω), $c_2^{BD} = -0,400155$ para $\omega = 500$ y $c_2^{BD} = -0,400232$ en el caso de $\omega = 50000$ (c_2^{BD} decrece con ω). Estos valores resultan muy cercanos a los correspondien-

tes a la geometría de Schwarzschild y bastante diferentes de aquellos obtenidos para los agujeros negros regulares con parámetro $b/m = 3\pi/2$ (caso estable). Como consecuencia, en el caso del agujero negro supermasivo del centro galáctico, presentado en la Tabla 5.1, se observan similitudes en los valores de los observables con respecto a la geometría de Schwarzschild, pero marcadas diferencias con aquellos obtenidos para el agujero negro regular estable.

Capítulo 6

Agujeros negros cargados en teorías de gravedad escalar-tensorial

El presente capítulo, tiene como objeto estudiar los efectos de *lensing* gravitatorio para una solución de agujero negro en el marco de la teoría escalar-tensorial, que consiste en acoplar débilmente un campo escalar ϕ y un campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ a la Relatividad General. Se hace una descripción detallada de la geometría, se obtiene el ángulo de deflexión exacto y se analiza brevemente el límite de deflexión débil. Luego, se hallan las posiciones y magnificaciones de las imágenes relativistas y los observables en el límite de deflexión fuerte. Finalmente, se aplica el formalismo al caso del agujero negro supermasivo del centro galáctico y se compara los resultados obtenidos con los correspondientes al agujero negro de Reissner-Nordström.

6.1. Introducción

Las teorías escalar-tensoriales fueron desarrolladas originalmente por P. Jordan [112] en la década de 1950. En ellas, la interacción gravitatoria está mediada por un campo escalar, junto con el tensor métrico, y resultan de interés en distintos contextos de la física teórica: gravedad de Kaluza-Klein, teorías de cuerdas y supergravedad, entre otras. También son utilizadas en la descripción de diferentes modelos de mundos brana,

como versiones equivalentes a la teoría de gravedad modificada $f(R)$ y para explicar el fenómeno de inflación y energía oscura. La existencia de este tipo de campos en los diferentes contextos astrofísicos, conducen a distintas geometrías de agujeros negros, cuyas propiedades y fenomenología varían respecto de aquellos obtenidos por la Relatividad General.

Las teorías de gravedad escalar-tensorial puede ser formulada en dos marcos (o *frames*): el de Jordan y el de Einstein. Estas teorías son generalizaciones de la teoría de Brans-Dicke. En el marco de Jordan, el campo escalar φ está acoplado no mínimamente al escalar de Ricci R , pero no directamente a la materia, y el término cinético del campo escalar, involucra una función $\omega(\varphi)$ arbitraria. La acción en su forma más general, se escribe como [113]

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left(\varphi \hat{R} - \frac{\omega(\varphi)}{\varphi} \hat{\nabla}^\mu \varphi \hat{\nabla}_\mu \varphi - U(\varphi) \right) + S_m(\hat{g}_{\mu\nu}, \psi), \quad (6.1)$$

donde $\hat{g}_{\mu\nu}$ corresponde a la métrica en el *frame* de Jordan, \hat{R} es el escalar de Ricci, $\hat{\nabla}_\mu$ es la derivada covariante y $U(\varphi)$ es un potencial que depende del campo escalar. El término S_m corresponde a la acción asociada a la materia, siendo ψ los campos de materia. La métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ acopla mínimamente a los campos ψ y φ no está presente en la acción S_m . Estos últimos dos requisitos definen el marco de Jordan. Las ecuaciones de campo correspondientes resultan:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \hat{R} \hat{g}_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{\varphi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega(\varphi)}{\varphi^2} \left(\hat{\nabla}_\mu \varphi \hat{\nabla}_\nu \varphi - \frac{1}{2} \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}^\lambda \varphi \hat{\nabla}_\lambda \varphi \right) \\ &+ \frac{1}{\varphi} \left(\hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu \varphi - \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}^\lambda \hat{\nabla}_\lambda \varphi \right) - \frac{U(\varphi)}{2\varphi} g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$[2\omega(\varphi) + 3] \hat{\nabla}^\lambda \hat{\nabla}_\lambda \varphi = -\omega'(\varphi) \hat{\nabla}^\lambda \varphi \hat{\nabla}_\lambda \varphi + \phi U' - 2U + 8\pi G T. \quad (6.3)$$

En el marco de Einstein, se requiere una redefinición del campo escalar, de modo que acople mínimamente a la gravedad y a la materia. La transformación conforme que esto implica está dada por $g_{\mu\nu} = \varphi \hat{g}_{\mu\nu}$, y el campo escalar se redefine como:

$$d\phi = \sqrt{\frac{2\omega(\varphi) + 3}{16\pi}} \frac{d\varphi}{\varphi}. \quad (6.4)$$

De este modo, la acción (6.1) en el *frame* de Einstein tiene la forma general:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - V(\phi) \right) + S_m(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (6.5)$$

donde $V(\phi) = U(\phi)/\varphi^2$ y $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico en el marco de Einstein. Las ecuaciones de campo, en este caso, resultan:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}^{\phi} + \frac{8\pi G}{\varphi(\phi)}T_{\mu\nu}, \quad (6.6)$$

$$\nabla^{\lambda}\nabla_{\lambda} - V'(\phi) = \sqrt{\frac{4\pi G}{2\omega + 3}}T, \quad (6.7)$$

donde

$$T_{\mu\nu}^{\phi} = \nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_{\lambda}\phi\nabla^{\lambda}\phi - V(\phi)g_{\mu\nu}, \quad (6.8)$$

siendo $T_{\mu\nu}$ y T el tensor de energía-momento y su traza, en el *frame* de Jordan, respectivamente. El hecho de que el campo ϕ acople mínimamente a $g_{\mu\nu}$ en el marco de Einstein, hace que los cálculos resulten más sencillos en gran cantidad de casos, especialmente en vacío, en el que se tiene relatividad general acoplada mínimamente a un campo escalar. El tensor métrico $\hat{g}_{\mu\nu}$ es tal que las geodésicas coinciden con las trayectorias de las partículas de prueba. En cambio, $g_{\mu\nu}$ es simplemente una elección que permite reescribir a la acción en una forma conveniente. Para más información, se pueden consultar las referencias [113–115].

6.2. La métrica

Se parte del siguiente lagrangiano en el contexto de la Relatividad General acoplada mínimamente a un campo escalar ϕ y a un campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ como fuentes (en unidades tales que $8\pi G = c = 1$) [66]:

$$L = \frac{1}{2}[R + g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - 2V(\phi) - F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}]. \quad (6.9)$$

donde R es el escalar de Ricci, y $V(\phi)$ el potencial del campo escalar. Asumamos una simetría estática y esférica de la forma

$$ds^2 = A(\rho)dt^2 - B(\rho)d\rho^2 - C(\rho)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (6.10)$$

siendo $B(\rho) = A(\rho)^{-1}$ y $C(\rho) = r^2(\rho)$. Los campos de Maxwell compatibles con simetría esférica son eléctrico en la dirección radial ($F_{01}F^{10} = Q_e^2/r^4$) y magnético ($F_{23}F^{23} =$

Q_m^2/r^4), donde las constantes Q_e y Q_m corresponden a las cargas eléctrica y magnética respectivamente. Las ecuaciones de Einstein y del campo escalar resultantes son

$$(Ar^2\phi')' = r^2 dV/d\phi, \quad (6.11)$$

$$(A'r^2)' = -2r^2V + 2Q^2/r^2; \quad (6.12)$$

$$2r''/r = -\phi'^2; \quad (6.13)$$

$$A(r^2)'' - r^2A'' = 2 - 4Q^2/r^2, \quad (6.14)$$

donde la prima ($'$), denota la derivada total respecto de la variable ρ ($d/d\rho$) y $Q^2 = Q_e^2 + Q_m^2$ el cuadrado de la carga electromagnética. A partir del método del problema inverso, se elige $r(\rho)$, y de ahí, consecuentemente, se hallan $A(\rho)$ de la ecuación (6.14), $\phi(\rho)$ de la ecuación (6.13) y $V(\phi)$ de la ecuación (6.12). Si $r'' < 0$ para todo ρ , la función $\phi(\rho)$ es monótona y el potencial $V(\phi)$ está bien definido. La solución estática y esféricamente simétrica de las ecuaciones (6.11)-(6.14) que es objeto de estudio como lente gravitatoria en este capítulo, está dada por las funciones de la métrica [66]

$$A(\rho) = A_0r^2 + 1 + 3M \left[-\frac{\rho}{b^2} + \frac{r^2}{2b^3} \ln \frac{\rho+b}{\rho-b} \right] - \frac{Q^2}{b^4} \left[b^2 - b\rho \ln \frac{\rho+b}{\rho-b} + \frac{r^2}{4} \ln^2 \frac{\rho+b}{\rho-b} \right],$$

$$r^2(\rho) = \rho^2 - b^2,$$

y el campo escalar

$$\phi(\rho) = \phi_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\rho+b}{\rho-b}, \quad (6.15)$$

con potencial

$$V(\rho) = -\frac{A_0(3\rho^2 - b^2)}{r^2} + \frac{9M\rho r^2 + Q^2(3\rho^2 - 2b^2)}{b^2r^4} - \frac{3M(3\rho^2 - b^2) + 6Q^2\rho}{2b^3r^2} \ln \frac{\rho+b}{\rho-b} + \frac{Q^2(3\rho^2 - b^2)}{4b^4r^2} \ln^2 \frac{\rho+b}{\rho-b}, \quad (6.16)$$

donde b es una constante arbitraria y M es la masa; A_0 y ϕ_0 son constantes de integración. El parámetro b representa una longitud característica asociada al campo escalar. La coordenada radial satisface la desigualdad $\rho \geq |b|$ y el valor $\rho = |b|$ corresponde a la singularidad. Bajo la condición de que la solución sea asintóticamente plana para $\rho \rightarrow \infty$, se adopta $A_0 = 0$ en la expresión de $A(\rho)$; en este caso, la métrica se aproxima a la de Reissner-Nordström para valores grandes de ρ .

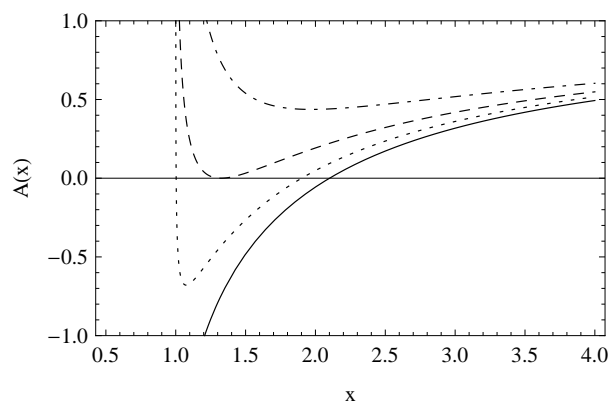


Figura 6.1: Gráfico de $A(x)$ en función de la coordenada radial adimensionalizada x , con $\tilde{b} = 1$ fijo, para distintos valores de carga q : 0 (línea continua), 0.6 (línea punteada), 0.9222 (línea de rayas) y 1.3 (línea de puntos y rayas). Los horizontes corresponden a las raíces de $A(x)$. Se observa que existe un valor de carga máximo, a partir del cual se tiene una singularidad desnuda.

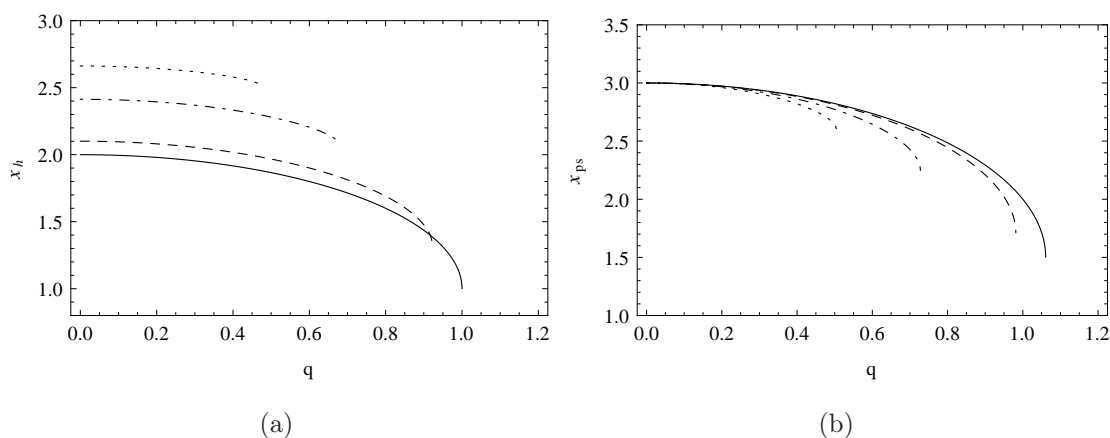


Figura 6.2: Radio adimensionalizado del horizonte de eventos x_h (a) y radio adimensionalizado de la esfera de fotones x_{ps} (b), como funciones de la carga (adimensionalizada) q para algunos valores representativos del parámetro \tilde{b} : 1 (línea de rayas), 2 (línea de puntos y rayas) y 2.5 (línea punteada); la curva en línea continua, corresponde al caso de Reissner-Nordström.

6.3. Ángulo de deflexión

Partiendo de la condición $A_0 = 0$ (solución asintóticamente plana), se adimensionaliza la métrica (6.10) en términos de la masa, introduciendo las nuevas coordenadas radial y temporal respectivamente

$$x = \frac{\rho}{M}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{M}, \quad (6.17)$$

y los parámetros

$$q = \frac{Q}{M}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{M}; \quad (6.18)$$

de modo que el elemento de línea tenga la forma

$$ds^2 = A(x)d\tilde{t}^2 - B(x)dx^2 - C(x)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (6.19)$$

donde

$$A(x) = 1 + 3 \left[-\frac{x}{\tilde{b}^2} + \frac{(x^2 - \tilde{b}^2)}{2\tilde{b}^3} \ln \frac{x + \tilde{b}}{x - \tilde{b}} \right] - \frac{q^2}{\tilde{b}^4} \left[\tilde{b}^2 - \tilde{b}x \ln \frac{x + \tilde{b}}{x - \tilde{b}} + \frac{x^2 - \tilde{b}^2}{4} \ln^2 \frac{x + \tilde{b}}{x - \tilde{b}} \right],$$

$$B(x) = \frac{1}{A(x)}, \quad C(x) = x^2 - \tilde{b}^2.$$

Sin pérdida de generalidad, se puede tomar $\tilde{b} \geq 0$ y $q \geq 0$, dado que la métrica es invariante frente a las transformaciones $\tilde{b} \leftrightarrow -\tilde{b}$ y $q \leftrightarrow -q$. A modo de ejemplo, se presenta en la Figura 6.1 el gráfico de $A(x)$ en función de la distancia radial adimensionalizada x , para un valor fijo $\tilde{b} = 1$. En la misma, se observa que a mayor valor de carga, el radio del horizonte de eventos disminuye y existe un valor de carga para el que el horizonte es doble y a partir del cual deja de existir, teniéndose una singularidad desnuda.

El radio adimensionalizado del horizonte de eventos x_h , que se obtiene numéricamente para cada valor del parámetro $\tilde{b} \neq 0$, resulta ser una función decreciente de la carga q . Para cada valor de \tilde{b} , existe un valor de carga que corresponde al agujero negro extremal y para valores superiores de q hay una singularidad desnuda. En el límite $\tilde{b} \rightarrow 0$, la geometría (6.19) se reduce al espacio-tiempo de Reissner-Nordström, siendo $A(x) = B(x)^{-1} = 1 - 2x^{-1} + q^2x^{-2}$ y $C(x) = x^2$, caso en el que el radio del horizonte de eventos (adimensionalizado) está dado por $x_h = 1 + \sqrt{1 - q^2}$. A medida que \tilde{b} crece, el rango de valores de q para el cual existe un horizonte, se hace cada vez más pequeño,

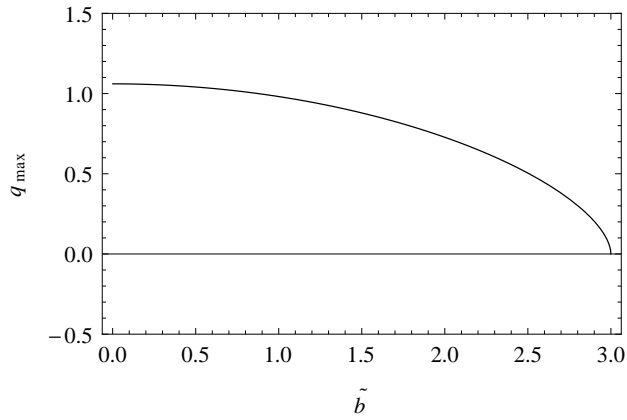


Figura 6.3: Valores máximos de carga q en función del parámetro \tilde{b} para los que existe esfera de fotones.

como se muestra en la Figura 6.2a. Reemplazando los correspondientes coeficientes de la métrica (6.20) en la expresión (3.21), se halla el radio (adimensionalizado) x_{ps} de la esfera de fotones. En este caso, corresponde a la mayor de las soluciones reales de la ecuación

$$3 - x - \frac{q^2}{\tilde{b}} \ln \frac{x + \tilde{b}}{x - \tilde{b}} = 0, \quad (6.20)$$

la cual puede ser obtenida de manera numérica para los diferentes valores del parámetro $\tilde{b} \neq 0$ y la carga q (excepto en el caso trivial $q = 0$, en el que obtiene $x_{ps} = 3$ para todo \tilde{b}). A partir de la Figura 6.2b se puede observar que para un dado valor de \tilde{b} , el radio x_{ps} decrece conforme la carga crece. Por otro lado, existe un pequeño rango de q para el cual la esfera de fotones rodea una singularidad desnuda. En la Figura 6.3, se presentan los valores máximos de carga para los cuales existe la esfera de fotones, en función del parámetro \tilde{b} . En la misma, se observa que dicha carga q_{\max} es menor para agujeros negros cuyo parámetro \tilde{b} es mayor. En el límite $\tilde{b} \rightarrow 0$, este valor de carga máxima coincide con el caso de Reissner-Nordström ($q_{\max} = \sqrt{9/8}$).

El ángulo de deflexión exacto se puede obtener reemplazando las funciones de la métrica (6.19) en la integral (3.5) y resolviéndola numéricamente en función de la distancia adimensionalizada de máximo acercamiento x_0 . En la Figura 6.4 se presenta a modo ejemplificativo el ángulo de deflexión, por un lado, a $\tilde{b} = 1$ fijo (para tres valores de carga), y por otro, a $q = 0,4$ fijo (para tres valores del parámetro \tilde{b}), respectivamente. Se

observa que es una función monótona decreciente en x_0 . Para valores de x_0 grandes, el mismo tiende a cero y se forman las imágenes primaria y secundaria; para valores de x_0 cercanos a x_{ps} , es decir, en el caso en que los fotones pasen cerca del radio de la esfera de fotones, el ángulo de deflexión es mayor o igual a 2π , lo que indica que los mismos efectúan una o más vueltas antes de emerger del agujero negro y llegar al observador, produciéndose las imágenes relativistas. En el caso en que se mantiene fijo el parámetro \tilde{b} y se varía la carga q (Figura 6.4a), se observa que el ángulo de deflexión disminuye a mayor valor de carga, mientras que a q fijo (Figura 6.4b) el ángulo de deflexión disminuye al aumentar \tilde{b} .

El límite de deflexión débil corresponde al caso en que se tienen valores grandes de x_0 . Se encuentra que a primer orden no nulo, el ángulo de deflexión no presenta diferencias con el obtenido para la geometría de Schwarzschild, por lo que las posiciones y magnificaciones de las imágenes primaria y secundaria resultan ser las mismas que las presentadas en la Subsección 3.3.3 de esta Tesis. El límite de deflexión fuerte es estudiado en detalle en la siguiente sección.

6.4. Límite de deflexión fuerte

Al igual que en los capítulos anteriores, mediante el procedimiento detallado en el Capítulo 3, se calculan los coeficientes c_1 y c_2 correspondientes al límite de deflexión fuerte para poder hallar las posiciones y magnificaciones de las imágenes relativistas.

Para el agujero negro en la teoría escalar-tensor estudiado en este capítulo, con métrica dada por la ecuación (6.19) y $\tilde{b} \neq 0$, las expresiones de $R(z, x_0)$ y $\gamma(x_0)$ determinadas por las ecuaciones (3.26) y (3.31), posteriormente evaluadas en $z = 0$ y $x_0 = x_{ps}$, resultan

$$R(0, x_{ps}) = \frac{\sqrt{x_{ps}^2 - \tilde{b}^2} \left\{ 4\tilde{b}^2 (3x_{ps} + q^2) + \xi_{ps} \left[6\tilde{b}^3 - 2\tilde{b}x_{ps} (3x_{ps} + 2q^2) + q^2 \xi_{ps} (x_{ps}^2 - \tilde{b}^2) \right] \right\}}{4\tilde{b}^2 \left[3\tilde{b}^2 - x_{ps} (3x_{ps} + q^2) \right] + (x_{ps}^2 - \tilde{b}^2) \xi_{ps} \left[4\tilde{b}q^2 + 6\tilde{b}x_{ps} - q^2 x_{ps} \xi_{ps} \right]} \quad (6.21)$$

y

$$\gamma(x_{ps}) = -\frac{\Xi\Psi^2}{4\tilde{b}\Omega^3}, \quad (6.22)$$

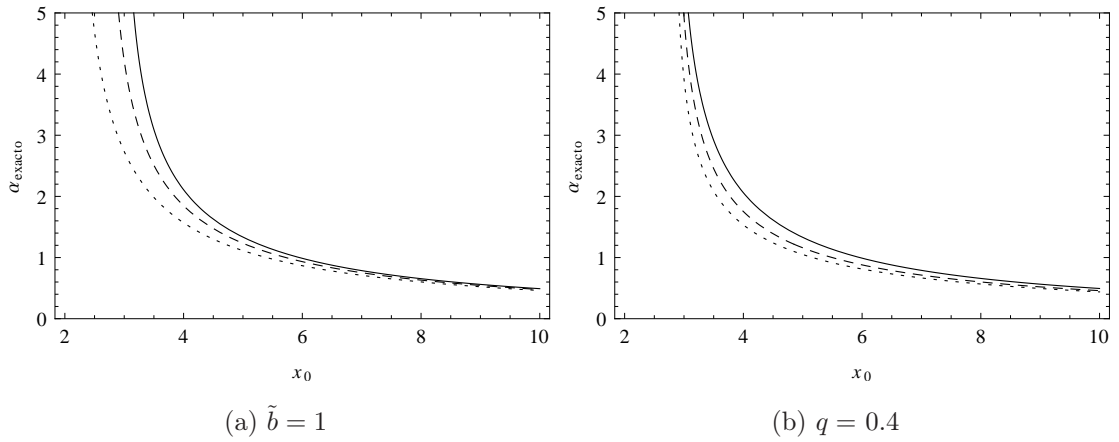


Figura 6.4: Ángulo de deflexión exacto en función de la distancia de máximo acercamiento (adimensionalizada) x_0 : (a) $\tilde{b} = 1$ fijo, para tres valores representativos de carga q : 0.1 (línea continua), 0.6 (línea de rayas) y 0.9 (línea punteada); (b) $q = 0.4$ fijo, para el caso de la geometría de Reissner-Nordström (línea continua), y para dos valores distintos de \tilde{b} : 2 (línea de rayas) y 2.5 (línea punteada).

donde

$$\xi_{ps} = \ln \left(\frac{x_{ps} + \tilde{b}}{x_{ps} - \tilde{b}} \right), \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \Xi = & -\tilde{b}q^2\xi_{ps}^2(x_{ps}^2 - \tilde{b}^2) \left\{ 9\tilde{b}^2 + x_{ps} [x_{ps}(4x_{ps} - 45) - 18q^2] \right\} \\ & -q^4\xi_{ps}^3 \left(\tilde{b}^4 - 6\tilde{b}^2x_{ps}^2 + 5x_{ps}^4 \right) + 4\tilde{b}^3 \left\{ 3\tilde{b}^4 + \tilde{b}^2 [q^2(2x_{ps} - 3) + 9x_{ps}(x_{ps} - 5)] \right. \\ & \left. - x_{ps} (3x_{ps} + q^2) [2q^2 + x_{ps}(4x_{ps} - 15)] \right\} \\ & -2\tilde{b}^2\xi_{ps} \left\{ \tilde{b}^4 (2q^2 + 9) - 2\tilde{b}^2 [q^4 - 3q^2x_{ps}(x_{ps} - 9) - 3x_{ps}^2(2x_{ps} - 9)] \right. \\ & \left. + x_{ps}^2 [6q^4 - 2q^2x_{ps}(4x_{ps} - 27) - 3x_{ps}^2(4x_{ps} - 15)] \right\}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\Psi = 4\tilde{b}^2 (3x_{ps} + q^2) + \xi_{ps} \left[6\tilde{b}^3 - 2\tilde{b}x_{ps} (3x_{ps} + 2q^2) + q^2\xi_{ps} (x_{ps}^2 - \tilde{b}^2) \right], \quad (6.25)$$

y

$$\Omega = 4\tilde{b}^2 \left[3\tilde{b}^2 - x_{ps} (3x_{ps} + q^2) \right] + \xi_{ps} \left(x_{ps}^2 - \tilde{b}^2 \right) \left[4\tilde{b}q^2 + 6\tilde{b}x_{ps} - q^2\xi_{ps}x_{ps} \right]. \quad (6.26)$$

Por otro lado, el parámetro de impacto dado por la expresión (3.23), evaluado en x_{ps} es

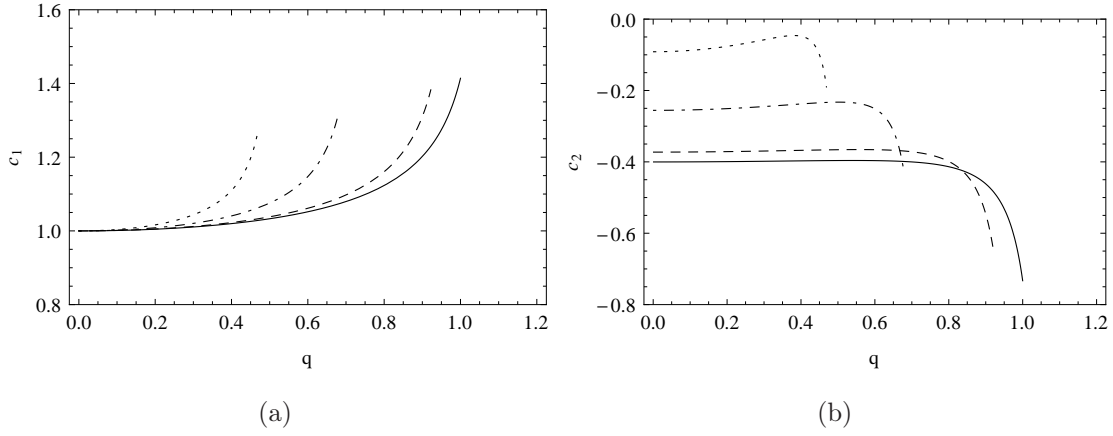


Figura 6.5: Coeficientes del límite de deflexión fuerte c_1 (a) y c_2 (b) en función de la carga adimensionalizada q para diferentes valores de \tilde{b} : 1 (línea de rayas), 2 (línea de puntos y rayas), y 3 (línea punteada); la línea continua corresponde al caso de Reissner-Nordström.

en este caso,

$$u_{ps} = \frac{2\tilde{b}^2 \sqrt{x_{ps}^2 - \tilde{b}^2}}{\sqrt{4\tilde{b}^2 (\tilde{b}^2 - q^2 - 3x_{ps}) + \xi_{ps} [-6\tilde{b}^3 + 2\tilde{b}x_{ps}(3x_{ps} + 2q^2) - q^2\xi_{ps}(x_{ps}^2 - \tilde{b}^2)]}}. \quad (6.27)$$

La integral c_R de la ecuación (3.49) no es posible calcularla analíticamente. De todos modos, puede ser aproximada para pequeños valores de \tilde{b} y q mediante un desarrollo de Taylor al primer orden no nulo. Los coeficientes de la métrica son funciones pares en \tilde{b} y q , por lo que el desarrollo en serie de potencias, no presenta términos de orden impar. Se tiene, por lo tanto,

$$c_R \approx c_R|_{(0,0)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_R}{\partial q^2} \Big|_{(0,0)} q^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_R}{\partial \tilde{b}^2} \Big|_{(0,0)} \tilde{b}^2. \quad (6.28)$$

El coeficiente $c_{R,0}$ corresponde a c_R , evaluado en $q = 0$ y $\tilde{b} \rightarrow 0$, por lo que el orden 0, resulta ser el mismo que el obtenido para la métrica de Schwarzschild:

$$c_R|_{(0,0)} = \lim_{\tilde{b} \rightarrow 0} \int_0^1 g(z, x_{ps}) dz \Big|_{q=0} \quad (6.29)$$

donde $g(z, x_{ps})$ se obtiene a partir de la ecuación (3.35). La integral resulta

$$c_R|_{(0,0)} = \ln \left[36 \left(7 - 4\sqrt{3} \right) \right] \approx 0,949603. \quad (6.30)$$

El coeficiente del término cuadrático en q es un poco más complejo de hallar:

$$\left. \frac{\partial^2 c_R}{\partial q^2} \right|_{(0,0)} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left[\lim_{\tilde{b} \rightarrow 0} \int_0^1 g(z, x_{ps}) dz \right] \right\}_{q=0}, \quad (6.31)$$

donde $g(z, x_{ps})$ está dado por la expresión (3.35). Dado que $z = z(x, q, b)$, no se puede introducir la derivada dentro de la integral, ya que la variable de integración depende de q . Un modo de solucionar esto, es escribir z explícitamente en términos de las variables de las que depende, como indica la ecuación (3.25). El diferencial dz , por ende, toma la forma:

$$dz = u(x)dx, \quad (6.32)$$

donde

$$u(x) = \frac{8\tilde{b}^2 \left[3\tilde{b}^2 - x(q^2 + 3x) \right] + 2 \left(x^2 - \tilde{b}^2 \right) \ln \left(\frac{x+\tilde{b}}{x-\tilde{b}} \right) \left[4\tilde{b}q^2 + 6\tilde{b}x - q^2x \ln \left(\frac{x+\tilde{b}}{x-\tilde{b}} \right) \right]}{\left(x^2 - \tilde{b}^2 \right) \left\{ 4\tilde{b}^2 (q^2 + 3x_{ps}) + \xi_{ps} \left[6\tilde{b}^3 - 2\tilde{b}x_{ps} (2q^2 + 3x_{ps}) - q^2 (x_{ps}^2 - \tilde{b}^2) \xi_{ps} \right] \right\}}. \quad (6.33)$$

De este modo, la expresión (6.31) resulta

$$\left. \frac{\partial^2 c_R}{\partial q^2} \right|_{(0,0)} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left[\lim_{\tilde{b} \rightarrow 0} \int_{x_{ps}}^{\infty} \tilde{g}(x, x_{ps}) dx \right] \right\}_{q=0}, \quad (6.34)$$

siendo

$$\tilde{g}(x, x_{ps}) = g(x, x_{ps})u(x). \quad (6.35)$$

El radio de la esfera de fotones x_{ps} es función de q y \tilde{b} , con lo cual, para incluir la derivada y el límite dentro de la integral (6.34), basta con hacer el cambio de variables $x = x_{ps}/y$, quedando,

$$\left. \frac{\partial^2 c_R}{\partial q^2} \right|_{(0,0)} = \int_0^1 \lim_{\tilde{b} \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left[\tilde{g} \left(\frac{x_{ps}}{y}, x_{ps} \right) \frac{x_{ps}}{y^2} \right] \right\}_{q=0} dy. \quad (6.36)$$

De este modo, se tiene finalmente

$$\left. \frac{\partial^2 c_R}{\partial q^2} \right|_{(0,0)} = \frac{4}{9} \left\{ -4 + \sqrt{3} + \ln[6(2 - \sqrt{3})] \right\}. \quad (6.37)$$

Con un razonamiento análogo, se obtiene el coeficiente del término cuadrático en \tilde{b} . Se puede ver que

$$\left. \frac{\partial^2 c_R}{\partial \tilde{b}^2} \right|_{(0,0)} = \int_0^1 \lim_{\tilde{b} \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tilde{b}^2} \left[\tilde{g} \left(\frac{x_{ps}}{y}, x_{ps} \right) \frac{x_{ps}}{y^2} \right] \right\}_{q=0} dy, \quad (6.38)$$

con lo cual,

$$\left. \frac{\partial^2 c_R}{\partial \tilde{b}^2} \right|_{(0,0)} = \frac{2}{135} (-9 + 2\sqrt{3}). \quad (6.39)$$

La integral c_R dada por la expresión (6.28). A orden más bajo en el desarrollo de Taylor para valores de \tilde{b} y q pequeños, finalmente resulta

$$c_R = \ln[36(7 - 4\sqrt{3})] + \frac{1}{135}(-9 + 2\sqrt{3})\tilde{b}^2 + \frac{2}{9} \left\{ -4 + \sqrt{3} + \ln[6(2 - \sqrt{3})] \right\} q^2, \quad (6.40)$$

de lo cual, se observa, como era de esperarse, que en el caso $\tilde{b} \rightarrow 0$, se recupera el resultado dado por la ecuación (??) obtenido para Reissner-Nordström [36].

En la Figura 6.5 se presentan respectivamente los coeficientes c_1 y c_2 como funciones de la carga q , para diferentes valores del parámetro \tilde{b} en el caso general, es decir sin la restricción de q y \tilde{b} pequeños. Se muestran también los valores correspondientes a Reissner-Nordström ($\tilde{b} \rightarrow 0$). Para un \tilde{b} fijo, el coeficiente c_1 es positivo y crece con la carga, cuando $q = 0$, el resultado obtenido para Schwarzschild es recuperado ($c_1 = 1$) para todo valor de \tilde{b} ; el coeficiente c_2 es negativo y crece suavemente (es decir, se vuelve menos negativo) con q , hasta un cierto valor a partir del cual decrece abruptamente. Para un dado q fijo, se observa que c_1 es una función creciente en \tilde{b} , al igual que sucede con c_2 , que se vuelve menos negativo al incrementar \tilde{b} para un valor constante (y no muy grande) de la carga.

De esta forma, sustituyendo las cantidades c_1 , c_2 y u_{ps} calculadas, en las expresiones (3.67) y (3.73), se obtienen las posiciones y magnificaciones de las imágenes relativistas de manera analítica. Sustituyendo los coeficientes c_1 y c_2 y el parámetro de impacto u_{ps} en las expresiones (3.77), (3.78) y (3.79), se obtienen los observables, que permiten contrastar de manera indirecta, la teoría que describe al agujero negro estudiado con las observaciones. Para esta clase de agujeros negros en gravedad escalar-tensorial, estos observables están definidos por los parámetros \tilde{b} y la carga q , en el rango en el que las imágenes relativistas existen (es decir, aquel en el que hay esfera de fotones). El gráfico del cociente r entre el flujo de la primera imagen relativista y el flujo proveniente de todas las demás, y el cociente s/θ_∞ , se muestran en la Figura 6.6 como funciones de q para distintos valores de \tilde{b} . También, a modo de comparación, en las mismas se presenta el caso correspondiente a la geometría de Reissner-Nordström. Se observa que r decrece

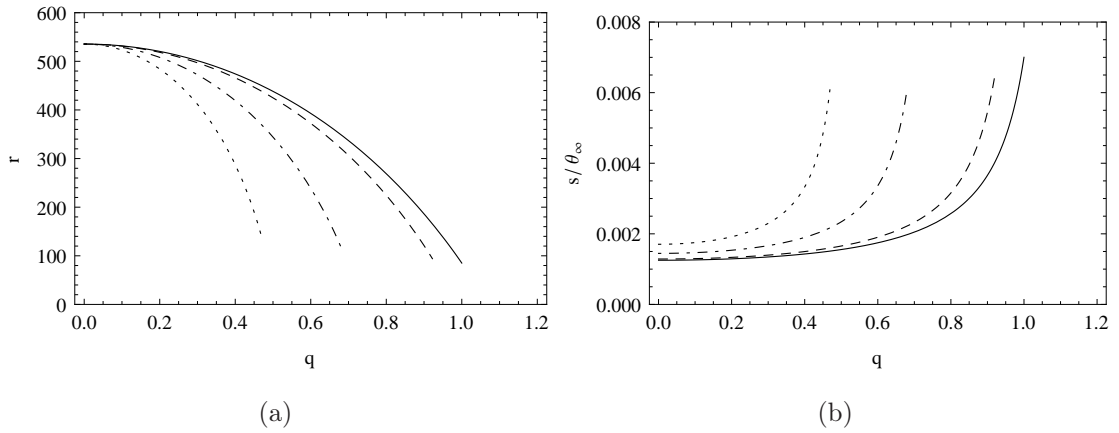


Figura 6.6: Observables r y s/θ_∞ como funciones de la carga adimensional q , para diferentes valores del parámetro \tilde{b} : 1 (línea de rayas), 2 (línea de puntos y rayas) y 2.5 (línea punteada). Los gráficos de los observables correspondientes al caso de Reissner-Nordström se presentan en línea continua.

con la carga q desde el valor $e^{2\pi}$ para $q = 0$, hasta un valor mínimo correspondiente al caso extremal. Por otro lado, el cociente s/θ_∞ es una función creciente en q , alcanzando un máximo cuando el valor de la carga corresponde al caso extremal. Para un dado q fijo, se tiene que r decrece con \tilde{b} , mientras que s/θ_∞ aumenta a mayores valores de \tilde{b} . En todos los casos, los observables son graficados hasta el valor de carga máximo posible compatible con la presencia de horizonte.

	$q = 0,1$		$q = 0,5$	
	Escalar-tensorial	RN	Escalar-tensorial	RN
$\theta_\infty(\mu\text{as})$	25,58	26,49	24,35	25,37
$s(\mu\text{as})$	0,0332	0,0334	0,0403	0,0394
μ_1	$6,44 \times 10^{-13}$	$6,48 \times 10^{-13}$	$7,54 \times 10^{-13}$	$7,42 \times 10^{-13}$
r	531,3	531,7	424,9	438,3

Tabla 6.1: Observables: agujero negro supermasivo del centro galáctico, ejemplo numérico en el cual $\beta = 0,5\theta_\infty$, $D_{os} = 2D_{ol}$ y $\tilde{b} = 1$.

Como se mencionó en capítulos anteriores, el agujero supermasivo del centro galáctico [32] posee una masa $M = 4,31 \times 10^6 M_\odot$ y está situado de la Tierra a una distancia $D_{ol} = 8,33$ kpc. Para proporcionar un ejemplo numérico, se puede adoptar $D_{os} = 2D_{ol}$ como la distancia observador-fuente, una posición angular para la fuente de $\beta = 0,5\theta_\infty$ y $\tilde{b} = 1$. De las expresiones de los observables y estos datos, se obtienen los resultados que se presentan en la Tabla 6.1. De la misma se observa que las imágenes están altamente demagnificadas, dado que el valor de β utilizado en estos cálculos no es muy pequeño comparado con θ_∞ . Por otro lado, se encuentran sutiles diferencias al comparar este modelo con el de Reissner-Nordström, lo que hace muy difícil su diferenciación mediante observaciones.

6.5. Discusión

En este capítulo se estudiaron los efectos de *lensing* gravitatorio en el límite de deflexión fuerte, producidos por agujeros negros que pertenecen a una clase de soluciones cargadas en la teoría escalar-tensorial. Estas geometrías, caracterizadas por la masa M , la carga Q y el parámetro b , asociado al campo escalar, poseen un horizonte rodeado por una esfera de fotones, para valores de carga inferiores al caso extremo. Se obtuvo el ángulo de deflexión en términos de las cantidades b/M y Q/M en dicho límite, a partir del cual se calcularon las posiciones y magnificaciones de las imágenes relativistas, y los correspondientes observables. Se encontró que fijado un valor de b/M , la posición límite de la imagen θ_∞ decrece a medida que Q/M crece. Por otro lado, la separación relativa s/θ_∞ entre la primera imagen relativista y dicho valor límite crece con Q/M , y la intensidad relativa r de la primera imagen respecto a las demás, decrece con Q/M . Fijado un valor para Q/M , se tiene que θ_∞ disminuye cuando b/M crece. Lo mismo sucede con el observable r , cuya intensidad relativa es menor a medida que b/M es mayor. La cantidad s/θ_∞ crece con b/M , lo que indica que la primera imagen está más separada del resto cuanto más grande es b/M . En particular, al comparar esta familia de agujeros negros en la teoría escalar-tensorial, con el caso de la geometría de Reissner-Nordström, se encontró que para estos agujeros negros (con $b/M \neq 0$), el valor límite de la posición

angular al que convergen las imágenes relativistas θ_∞ es menor, s/θ_∞ es mayor (imágenes más separadas) y r es menor (primer imagen menos intensa respecto de las demás) que para el caso de Reissner-Nordström con el mismo valor de Q/M . Estas diferencias, como puede apreciarse en la Tabla 6.1 para el caso del agujero negro supermasivo del centro galáctico, son muy pequeñas y no pueden ser detectadas con los instrumentos de medición actuales, ni tampoco lo serán con aquellos a desarrollarse en un futuro cercano.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta Tesis se realizó un análisis teórico de los efectos de *lensing* gravitatorio para tres tipos de agujeros negros con simetría esférica y asintóticamente planos, en distintos contextos de interés cosmológico. En primer lugar, se estudió una solución de agujero negro sin masa en mundos brana en el contexto del modelo de Randall-Sundrum Tipo II. Luego se analizó una clase de agujeros negros con un campo escalar fantasma, y finalmente, se consideró una clase de agujeros negros cuya solución proviene de la teoría escalar-tensorial. En todos los casos, la lente se encuentra entre la fuente y el observador, y se tiene alta alineación entre ellos. Además, la fuente y el observador se ubican muy lejos de la lente, de modo que se encuentren en una región del espacio-tiempo plano. Las posiciones y las magnificaciones de las imágenes relativistas se hallaron analíticamente por medio del límite de deflexión fuerte. Las mismas dependen de los coeficientes c_1 y c_2 , los cuales son funciones de la métrica que describe cada agujero negro, y también de las distancias astrofísicas involucradas entre la fuente, la lente y el observador. Es decir, dependen, por lo tanto, de los parámetros que los caracterizan y que surgen de la teoría subyacente. Estos coeficientes, asimismo, pueden obtenerse indirectamente a partir de observaciones, definiendo observables, que permiten efectuar comparaciones entre observaciones y los resultados analíticos previamente hallados. La importancia del estudio del fenómeno de *lensing* con agujeros negros como lentes, radica en la posibilidad de observar estos efectos en un futuro y comparar las observaciones con los resultados

obtenidos analíticamente a fin de identificar la naturaleza del agujero negro en cuestión. Este estudio, por lo tanto, permite no sólo corroborar la existencia de estos objetos (de ser así) sino de validar, en este caso, los modelos teóricos que los predicen.

Los efectos de *lensing* gravitatorio correspondientes a la solución de agujeros negros carentes de masa y materia, en el contexto del modelo de Randall-Sundrum Tipo II, se presentaron en el Capítulo 4. Estos agujeros negros están caracterizados por dos parámetros: h y κ (o $\eta = \kappa/h$), que son una consecuencia de los efectos tidales del *bulk* sobre la brana. El parámetro h representa el radio del horizonte de eventos del agujero negro, y en el caso particular $\kappa = h$ resulta un agujero negro de Reissner-Nordström con carga puramente imaginaria. El radio del horizonte del agujero negro (y por lo tanto, el valor de h) puede obtenerse a partir de observaciones del fenómeno de *lensing* midiendo el valor límite θ_∞ y la distancia observador-fuente. Los coeficientes c_1 y c_2 dependen únicamente del parámetro η . A partir de los observables, se concluye que agujeros negros con grandes valores de η serían difíciles de observar, dado que en ese caso, la primera imagen relativista está muy cerca de las demás como para ser resuelta, y por otro lado, resulta muy brillante en comparación con las otras. De todos modos, los efectos producidos por agujeros negros lejanos con valores de h grandes o agujeros negros cercanos con valores de h chicos, de existir, podrían ser medidos en un futuro. Los resultados obtenidos en el límite de deflexión fuerte fueron comparados con aquellos obtenidos para las geometrías de Schwarzschild y Reissner-Nordström. Los valores de los coeficientes c_1 y c_2 para cada caso, resultan ser distintos a los obtenidos para el agujero negro sin masa, y por lo tanto, el mismo puede ser distinguido claramente de un agujero de Schwarzschild y Reissner-Nordström para todo el rango de valores del parámetro η . Por otro lado, se compararon los mismos con los obtenidos para la geometría de Myers-Perry y para agujeros negros con carga tidal, observándose que no hay coincidencia entre los pares $\{c_1, c_2\}$ del agujero negro sin masa, con los hallados para estas geometrías, lo que implica que pueden ser distinguidos. Al estudiar el límite de deflexión débil, se observó que para $\eta > 1$ el ángulo de deflexión es pequeño y negativo para valores grandes de x_0 , caso en el que estos agujeros negros se comportan como una lente divergente, siendo que la ecuación de la lente, no presenta soluciones reales, y por lo tanto, no se forman imágenes. En cambio, para

valores comprendidos en el rango $0 < \eta < 1$ la ecuación de la lente sí tiene solución, y las posiciones de las imágenes primarias y secundarias son una función decreciente del parámetro η .

El agujero negro regular con un campo fantasma estudiado en el Capítulo 5 surge como solución de las ecuaciones de Einstein con un campo escalar, que posee un término cinético negativo y un potencial. Estos agujeros negros tienen masa m pero no carga, y están caracterizados por un parámetro b asociado al campo fantasma, del cual, junto con la masa, dependen los coeficientes c_1 y c_2 del límite de deflexión fuerte, y por lo tanto, las posiciones y magnificaciones de las imágenes relativistas y los observables. Por otro lado, se observó, a partir del desarrollo de límite de deflexión débil, que las posiciones y magnificaciones de las imágenes primaria y secundaria, no dependen de b/m a primer orden en la inversa de la coordenada radial, de modo que no hay diferencias al comparar con el caso de la geometría de Schwarzschild. Los resultados obtenidos en límite de deflexión fuerte, en primer lugar fueron comparados con los hallados para el agujero negro de Schwarzschild. Se encontró que, si bien $c_1 = c_1^{Sch}$, el coeficiente c_2 es una función decreciente en b/m , coincidiendo con el caso de Schwarzschild únicamente en el límite $b \rightarrow \infty$. Al estudiar como ejemplo numérico el caso del agujero negro supermasivo del centro galáctico, se encontró que $\theta_\infty > \theta_\infty^{Sch}$, mientras que la separación relativa entre las imágenes es menor que en el caso de Schwarzschild: $s/\theta_\infty < (s/\theta_\infty)^{Sch}$, lo que implica que las imágenes se hallan más alejadas del origen y más juntas entre sí. El cociente entre la magnificación de la primera imagen relativista respecto de las demás resultó ser el mismo que para un agujero negro de Schwarzschild. En el caso en que estos agujeros negros son estables (situación en la que $b/m = 3\pi/2$), estas magnitudes presentan marcadas diferencias con las correspondientes a la geometría de Schwarzschild. Por último, estos agujeros negros regulares fueron comparados con la solución de vacío esféricamente simétrica en la teoría de Brans-Dicke. Siendo que los valores hallados para el caso de Brans-Dicke resultan similares a los correspondientes al caso de Schwarzschild, se tiene un análisis similar al expuesto arriba.

Los agujeros negros cargados en la teoría escalar-tensorial estudiados en el Capítulo 6, tienen como parámetros la masa M , la carga Q y el parámetro b (asociado al campo

escalar), y a diferencia del agujero negro con campo escalar fantasma, el término cinético es positivo. En este caso, el límite de deflexión débil no presentó diferencias a primer orden con el caso del agujero negro de Schwarzschild. El ángulo de deflexión en el límite de deflexión fuerte se obtuvo en términos de las cantidades adimensionales b/M y Q/M , en función de las cuales se hallaron los coeficientes c_1 y c_2 , y con ellos, las posiciones y magnificaciones de las imágenes relativistas y las expresiones para los observables. Se encontró que el valor límite θ_∞ decrece con Q/M al fijar b/M . En este caso, la separación angular s/θ_∞ entre la primera imagen relativista y las demás crece con Q/M , mientras que la intensidad relativa r de la primera imagen respecto de las demás es una función decreciente de Q/M . Por otro lado, si se fija Q/M , tanto el valor límite θ_∞ como la intensidad relativa r , decrecen a medida que b/M crece. La primera imagen relativista está más separada del resto cuanto más grande es b/M , es decir, s/θ_∞ es una función creciente de b/M . Los resultados obtenidos para esta geometría fueron aplicados al caso del agujero negro supermasivo del centro galáctico y comparados con los hallados para el agujero negro de Reissner-Nordström. Se observó que para los agujeros negros cargados en gravedad escalar-tensorial, las imágenes se encuentran más separadas, la primera imagen relativista es menos intensa respecto de las demás, y el valor límite θ_∞ es menor, que para el caso de Reissner-Nordström con el mismo valor de Q/M .

En un futuro cercano, se espera que los agujeros negros puedan ser observados directamente, constituyendo uno de los objetivos principales de la astrofísica observacional actual. Dentro de los candidatos, el agujero negro supermasivo del centro galáctico Sgr A*, es el que mayores posibilidades tiene de ser observado, debido a su tamaño y cercanía. Si bien el medio interestelar circundante impide su detección en longitudes de onda dentro del espectro visible y ultravioleta, se han llevado a cabo observaciones de Sgr A* en radio, infrarrojo y en rayos X. En los últimos años, han sido publicados numerosos artículos que proporcionan información sobre las características de Sgr A*. Entre ellos, se encuentra el estudio de la radiación proveniente del centro galáctico en longitudes de onda entre 20 cm y 1 mm, detectándose un exceso en la región submilimétrica, la cual estaría asociada a la presencia de una región compacta emisora de radiación sincrotrón [116]. En 1998 fue reportada la presencia de una región compacta emisora de radio en

el centro galáctico [117]. En 2008 se reportó, en longitudes de onda de aproximadamente 1,3 mm, la observación de una estructura de la escala del horizonte de eventos de Sgr A* [118]. Recientemente, en un trabajo de Brinkerink *et al* [119] se reporta la evidencia de flujo relativista a partir del análisis de mediciones de lapsos de tiempo dependientes de la frecuencia, efectuadas por ALMA (Atacama Large Millimeter/submillimeter Array) [120] y VLA (Very Large Array) [121]. El telescopio ALMA consiste en un arreglo de 66 antenas ubicadas en el norte de Chile, que realizan mediciones en el rango (sub)milimétrico. VLA es un interferómetro compuesto por 27 radio telescopios, con una resolución angular comprendida entre los 0,2 y 0,004 arcsec. Los proyectos que están siendo desarrollados actualmente con el propósito de llevar a cabo observaciones de agujeros negros, en particular el agujero negro supermasivo del centro galáctico, se basan en técnicas de interferometría VLBI (Very Long Baseline Interferometry) en longitudes de onda (sub)milimétricas. Este tipo de mediciones pueden efectuarse desde la superficie terrestre, dado que la atmósfera es transparente hasta longitudes de onda del orden de 0,3 mm. Entre los proyectos más importantes a tal efecto, se hallan el arreglo Event Horizon Telescope [122], Millimetron [123] y Gravity [124]. Otros instrumentos que también pueden llegar a resultar de interés para mediciones futuras son RADIOASTRON [125–128], y MAXIM [129]. El telescopio Event Horizon combinará, mediante un arreglo extenso de interferómetros dispersos sobre la superficie terrestre (entre los que se incorporaría LLAMA [130]), instalaciones de radio existentes y futuras en un telescopio de alta sensibilidad y alta resolución angular, de unos $15 \mu\text{as}$ en frecuencias de 345 GHz. Su objetivo principal es la observación directa de las inmediaciones de los agujeros negros con una resolución angular comparable con la del horizonte de eventos. Este arreglo tiene como propósito, efectuar mediciones en longitudes de onda (sub)milimétricas no sólo del centro galáctico, sino también de galaxias cercanas. Observaciones de Sgr A* mediante el mismo, se estiman serán posibles dentro de la década actual. Otro de sus objetivos es observar el agujero negro supermasivo del centro de la galaxia M87. La misión Millimetron es otro proyecto en el que se está enfocando la atención. Corresponde a un telescopio con base espacial, que tendrá una resolución angular de $0,3 \mu\text{as}$ o menos en longitudes de onda de 0,4 mm. Gravity es un nuevo telescopio basado en VLTI (Very Large Telescope Inter-

ferometer) de segunda generación que opera en infrarrojo ($2,2\mu\text{m}$) con una resolución angular de hasta $0,003$ as, que tiene como uno de sus principales objetivos observar los centros galácticos, y en particular, las vecindades de Sgr A*. También se espera que pueda detectar agujeros negros de masa intermedia. RADIASTRON es un radiotelescopio en órbita con una resolución angular comprendida entre $1 - 10\mu\text{as}$. El proyecto MAXIM consiste en un interferómetro de rayos X, con base espacial, cuya resolución angular, se espera, será de aproximadamente $0,1\mu\text{as}$.

Dentro de los futuros posibles fenómenos observables en el caso de agujeros negros, se encuentra el de *lensing* gravitatorio. El estudio del mismo, en conjunto con otras observaciones, permitirá obtener información sobre la naturaleza y características de los agujeros negros eventualmente observados, al ser comparados con los resultados analíticos. Al identificar la naturaleza de estos objetos, se conocen los parámetros físicos de los mismos (como por ejemplo, la masa, la carga, etc.), y junto con ellos, extraer conclusiones sobre las teorías de las que surgen sus geometrías. La importancia de realizar estudios analíticos del fenómeno de *lensing* gravitatorio debido a agujeros negros correspondientes a distintos modelos, como los que se estudiaron en esta Tesis y varios previos de otros autores, radica en que podrán ser contrastados con observaciones en un futuro. En el caso de los agujeros negros estudiados aquí, si bien se encuentran diferencias con los resultados obtenidos para otras geometrías, los instrumentos de medición deberán tener resoluciones mucho menores al microsegundo de arco para poder distinguirlos. Esto indica que se necesitará el desarrollo de una nueva generación de instrumentos más avanzados que los disponibles actualmente o en el futuro cercano.

La abundancia de soluciones de agujeros negros provenientes de distintos modelos (teorías alternativas de gravitación, modelos cosmológicos, etc.) hace que el estudio de *lensing* no se vea cerrado con las geometrías investigadas en esta Tesis y su análisis quede abierto a trabajos futuros. Se puede continuar este trabajo estudiando métricas diferentes o soluciones de agujeros negros rotantes en distintos contextos cosmológicos. Junto con el fenómeno de *lensing* de fuentes puntuales, podría ser de interés también investigar los contornos (o sombras) de agujeros negros, en especial el caso rotante, donde se presenta una deformación que crece al aumentar el parámetro de rotación. Por otro lado, en esta

Tesis se estudió en caso en que el agujero negro se encuentra en vacío. Recientemente se empezó a considerar el efecto de *lensing* en el caso en que los mismos se hallan rodeados de plasma [131,132], situación que se puede estudiar para los agujeros negros presentados en este trabajo. Si bien existen numerosos trabajos en el área, esta línea de investigación no se encuentra agotada, lo que permite su continuidad.

Apéndice A

Constantes

A.1. Constantes físicas fundamentales

$$c = 2,998 \times 10^{10} \frac{cm}{s} \quad \text{Velocidad de la luz en el vacío}$$

$$G = 6,673 \times 10^{-8} \frac{cm^3}{gs^2} \quad \text{Constante de gravitación universal}$$

$$\hbar = 1,054 \times 10^{-27} \frac{gcm^2}{s} \quad \text{Constante de Plank reducida}$$

A.2. Unidades geométricas

Las unidades geométricas están definidas tomando $c = 1$ y $G = 1$. De este modo,

$$1 \text{ s} = 2,998 \times 10^{10} \text{ cm}$$

$$1 \text{ g} = 7,425 \times 10^{-29} \text{ cm}$$

A.3. Constantes astrofísicas

Se presentan aquellas utilizadas en esta Tesis. Entre paréntesis se muestran los valores en unidades geométricas.

$$M_{\odot} = 1,989 \times 10^{33} \text{ g } (1,477 \times 10^5 \text{ cm}) \quad \text{Masa solar}$$

$$R_{\odot} = 6,960 \times 10^{10} \text{ cm} \quad \text{Radio solar}$$

A.4. Factores de conversión

Algunos factores de conversión usuales en astrofísica son:

$$1 \text{ lt-yr} = 9,461 \times 10^{17} \text{ cm} \quad \text{año luz}$$

$$1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{18} \text{ cm} \quad \text{parsec}$$

$$1 \text{ arcsec} = 4,8481 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

Apéndice B

Agujero negro de Myers-Perry

En el contexto cosmológico de Randall-Sundrum tipo II [19, 20] de mundos brana, es de interés la geometría (estática, esféricamente simétrica y asintóticamente plana) de Myers-Perry, que describe un agujero negro en un espacio-tiempo de cinco dimensiones (5D). La métrica inducida en la brana (4D) tiene la forma [98, 133]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_h^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_h^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (\text{B.1})$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ y r_h corresponde al radio del horizonte de eventos, dado por (adoptando $c = \hbar = 1$) [98]

$$r_h = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \left(\frac{l}{l_4}\right)^{1/2} \left(\frac{M}{M_4}\right)^{1/2} l_4, \quad (\text{B.2})$$

siendo $l < 0,1$ mm el radio de AdS (que provee un tamaño efectivo de la dimensión extra), M la masa del agujero negro, l_4 y M_4 , la longitud y la masa de Plank (4D) respectivamente. El caso $r_h \ll l$ resulta una buena aproximación (cerca del horizonte) para agujeros negros producidos por el colapso de materia en la brana. Por otro lado, los agujeros negros primordiales en este modelo, tienen tasas de evaporación menores por radiación de Hawking que en el caso de agujeros negros en cuatro dimensiones en el contexto de la cosmología estándar [21].

Resulta conveniente adimensionalizar la coordenada radial en términos del radio del

horizonte de eventos, definiendo $x = r/r_h$. De este modo, la métrica se escribe como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-1} dx^2 + x^2 d\Omega^2. \quad (\text{B.3})$$

Estos agujeros negros presentan una esfera de fotones con radio adimensionalizado $x_{ps} = \sqrt{2}$. El ángulo de deflexión en el límite de deflexión fuerte fue hallado por E.F. Eiroa en la Ref. [53]. Por otro lado, el parámetro de impacto, de acuerdo a la ecuación (3.23), en términos de la distancia de máximo acercamiento x_0 es

$$u = \frac{x_0^2}{\sqrt{x_0^2 - 1}}, \quad (\text{B.4})$$

el cual, evaluado en la esfera de fotones, resulta $u_{ps} = 2$. Los coeficientes c_1 y c_2 de la expresión (3.24) y obtenidos a partir de (3.55) y (3.56) en este caso resultan en los valores constantes $c_1 = \sqrt{2}/2 \approx 0,707$ y $c_2 = \sqrt{2} \ln(4\sqrt{2}) - \pi \approx -0,691$. De este modo, el ángulo de deflexión en el límite de deflexión fuerte dado por la ecuación (3.24) queda determinado para esta geometría. A partir del mismo se obtienen las posiciones y magnificaciones de las imágenes relativistas, así como los observables [53].

Apéndice C

Agujero negro en gravedad de Brans-Dicke

La acción correspondiente a la teoría de Brans-Dicke, en el marco de Einstein (adoptando $G = c = 1$), se escribe como

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} d^4x (R - 2\nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi) + S_m[\psi_m, g_{\mu\nu}, \phi]. \quad (\text{C.1})$$

En este marco, la dinámica de la gravedad está gobernada sólo por el escalar de Ricci y los campos de materia se acoplan al tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y al campo escalar ϕ . Las ecuaciones de campo que se obtienen al variar la acción (C.1) con respecto a $g_{\mu\nu}$ y ϕ , resultan

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta} + 2 \left(\phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta} \phi_{,\sigma} \phi^{,\sigma} \right), \quad (\text{C.2})$$

$$\square \phi = 2\pi \frac{d \ln \phi}{d\phi} T. \quad (\text{C.3})$$

La solución de vacío, estática y esféricamente simétrica de estas ecuaciones corresponde a la de Janis-Newman-Winicour [134], que se puede escribir en la forma [111]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{4B}{r}\right)^\gamma dt^2 + \left(1 - \frac{4B}{r}\right)^{-\gamma} dr^2 + \left(1 - \frac{4B}{r}\right)^{1-\gamma} r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{C.4})$$

con el campo escalar dado por

$$\phi(r) = \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{16\pi}} \ln \left(1 - \frac{4B}{r}\right), \quad (\text{C.5})$$

siendo $M = 2\gamma B$ la masa del agujero negro. El parámetro γ se relaciona con el parámetro ω de la teoría en el marco de Jordan por medio de la expresión [111]:

$$\gamma = \sqrt{\frac{2\omega + 4}{2\omega + 3}}, \quad (\text{C.6})$$

de modo que

$$B = \frac{M}{2} \sqrt{\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}}. \quad (\text{C.7})$$

En el límite $\omega \rightarrow \infty$ se recupera la Relatividad General. Para esta geometría, definiendo $x = r/2M$, el radio de la esfera de fotones es [111]

$$x_{ps} = \frac{1}{2} + \frac{2\omega + 3}{2\omega + 4} \quad (\text{C.8})$$

y el parámetro de impacto evaluado en el radio de la esfera de fotones está dado por

$$u_{ps} = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}} \right) \left(\frac{2\sqrt{2\omega + 3} + \sqrt{2\omega + 4}}{2\sqrt{2\omega + 3} - \sqrt{2\omega + 4}} \right)^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}}}. \quad (\text{C.9})$$

Desarrollando el método detallado en la Sección 3.4 de esta Tesis, los coeficientes c_1 y c_2 del ángulo de deflexión (3.24) en límite de deflexión fuerte resultan [111]

$$c_1 = 1 \quad (\text{C.10})$$

y

$$c_2 = -\pi + c_R + \ln \left\{ \frac{3\omega + 4}{2\omega + 3} \left[1 - \left(\frac{2\sqrt{2\omega + 3} + \sqrt{2\omega + 4}}{2\sqrt{2\omega + 3} - \sqrt{2\omega + 4}} \right)^{\sqrt{(2\omega + 3)/(2\omega + 4)}} \right]^2 \right\}, \quad (\text{C.11})$$

donde c_R puede obtenerse de manera aproximada [111] mediante un desarrollo en series de Taylor:

$$c_R \approx 0,9496 + 0,1199 \left(1 - \sqrt{\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}} \right) + O \left(1 - \sqrt{\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}} \right). \quad (\text{C.12})$$

Las posiciones y magnificaciones de las imágenes relativistas, y los observables, se obtienen tal como se indica en la Sección 3.4 de esta Tesis.

Bibliografía

- [1] S. Perlmutter *et al.*, Bull. Am. Astron. Soc. **29**, 1351 (1997).
- [2] S. Perlmutter *et al.* (SNCP Collaboration), Astrophys. J. **517**, 565 (1999).
- [3] A.G. Riess *et al.* (Supernova Search Team Collaboration), Astron. J. **116**, 1009 (1998).
- [4] A. G. Riess *et al.*, Astrophys. J. **607**, 665 (2004).
- [5] A. G. Riess *et al.*, Astrophys. J. **659**, 98 (2007).
- [6] T. Padmanabhan, AIP Conf. Proc. **861**, 179 (2006).
- [7] K. Tomita, Prog. Theor. Phys. **105**, 419 (2001).
- [8] K. Tomita, Prog. Theor. Phys. **106**, 929 (2001).
- [9] K. Tomita, Mon. Not. R. Astron. Soc. **326**, 287 (2001).
- [10] M. N. Celerier, Astron. Astrophys. **353**, 63 (2001).
- [11] H. Alnes, M. Amarzguioui y Ø. Grøn , Phys. Rev. D **73**, 083519 (2006).
- [12] H. Alnes y M. Amarzguioui, Phys. Rev. D **75**, 023506 (2007).
- [13] K. Enqvist y T. Mattsson, JCAP **0702**, 019 (2007).
- [14] S. Alexander, T. Biswas, A. Notari y D. Vaid, JCAP **09**, 025 (2009).
- [15] J. García-Bellido y T. Haugbolle, JCAP **04**, 003 (2008).

- [16] S. Sarkar, *Gen. Rel. Grav.* **40**, 269 (2008).
- [17] G. Ellis, *Nature* **452**, 158 (2008).
- [18] R. Maartens y K. Koyama, *Living Rev. Relativity* **13**, 5 (2010).
- [19] L. Randall y R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999).
- [20] L. Randall y R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999).
- [21] P. Kanti, *Int. J. Mod. Phys. A* **19**, 4899 (2004).
- [22] P. Kanti, *J. Phys.: Conf. Ser.* **189**, 012020 (2009).
- [23] A. S. Majumdar y N. Mukherjee, *Int. J. Mod. Phys. D* **14**, 1095 (2005).
- [24] K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri y S. D. Odintsov, *Astrophys. Space Sci.* **342**, 155 (2012).
- [25] G.W. Gibbons y K. Maeda, *Nucl. Phys.* **B298**, 741 (1988).
- [26] D. Garfinkle, G. T. Horowitz y A. Strominger, *Phys. Rev. D* **43**, 3140 (1991).
- [27] K.A. Bronnikov y J.C. Fabris, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 251101 (2006).
- [28] K.A. Bronnikov, H. Dehnen y V.N. Melnikov, *Gen. Relativ. Gravit.* **39**, 973 (2007).
- [29] A. Einstein, *Science* **84**, 506 (1936).
- [30] K. Schwarzschild, *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin Kl.Math.-Phys* **189** (1916).
- [31] K. S. Virbhadra y G. F. R. Ellis, *Phys. Rev. D* **62**, 084003 (2000).
- [32] S. Guillessen *et al.*, *Astrophys. J.* **692**, 1075 (2009).
- [33] C. Darwin, *Proc. Roy. Soc London A* **249**, 180 (1959).
- [34] V. Bozza, S. Capozziello, G. Iovane y G. Scarpetta, *Gen. Relativ. Gravit.* **33**, 1535 (2001).
- [35] E. F. Eiroa, G. E. Romero y D.F. Torres, *Phys. Rev. D* **66**, 024010 (2002).

- [36] V. Bozza, Phys. Rev. D **66**, 103001 (2002).
- [37] V. Bozza y L. Mancini, Gen. Relativ. Gravit. **36**, 435 (2004).
- [38] J.-P. Luminet, Astron. Astrophys. **75**, 228 (1979).
- [39] H. C. Ohanian, Am. J. Phys. **55**, 428 (1987).
- [40] R. J. Nemiroff, Am. J. Phys. **61**, 619 (1993).
- [41] V. Bozza, F. De Luca y G. Scarpetta, Phys. Rev. D **74**, 063001 (2006).
- [42] V. Bozza y G. Scarpetta, Phys. Rev. D **76**, 083008 (2007).
- [43] E. F. Eiroa y D. F. Torres, Phys. Rev. D **69**, 063004 (2004).
- [44] V. Bozza y L. Mancini, Astrophys. J. **611**, 1045 (2004).
- [45] V. Bozza y L. Mancini, Astrophys. J. **627**, 790 (2005).
- [46] V. Bozza y L. Mancini, Astrophys. J. **696**, 701 (2009).
- [47] E. F. Eiroa y G. E. Romero, Phys. Lett. B **663**, 377 (2008).
- [48] A. Bhadra, Phys. Rev. D **67**, 103009 (2003).
- [49] E. F. Eiroa, Phys. Rev. D **73**, 043002 (2006).
- [50] N. Mukherjee y A.S. Majumdar, Gen. Relativ. Gravit. **39**, 583 (2007).
- [51] S. Chen y J. Jing, Phys. Rev. D **80**, 024036 (2009).
- [52] E. F. Eiroa y C. M. Sendra, Class. Quant. Grav. **28**, 085008 (2011).
- [53] E. F. Eiroa, Phys. Rev. D **71**, 083010 (2005).
- [54] R. Whisker, Phys. Rev. D **71**, 064004 (2005).
- [55] C. R. Keeton y A. O. Petters, Phys. Rev. D **73**, 104032 (2006).
- [56] S. Pal y S. Sayan Kar, Class. Quant. Grav. **25**, 149801 (2008).

- [57] C. G. Boehmer, G. De Risi, T. Harko y F. S. N. Lobo, *Class. Quant. Grav.* **27**, 185013 (2010).
- [58] A. Y. Bin-Nun, *Phys. Rev. D* **81**, 123011 (2010).
- [59] A. Y. Bin-Nun, *Phys. Rev. D* **82**, 064009 (2010).
- [60] K. Hioki y K. I. Maeda, *Phys. Rev. D* **80**, 024042 (2009).
- [61] L. Amarilla, E. F. Eiroa y G. Giribet, *Phys. Rev. D* **81**, 124045 (2010).
- [62] L. Amarilla y E. F. Eiroa, *Phys. Rev. D* **85**, 064019 (2012).
- [63] L. Amarilla y E. F. Eiroa, *Phys. Rev. D* **87**, 044057 (2013).
- [64] V. Bozza, *Gen. Relativ. Gravit.* **42**, 2269 (2010).
- [65] K. A. Bronnikov, V. N. Melnikov y H. Dehnen, *Phys. Rev. D* **68**, 024025 (2003).
- [66] K. A. Bronnikov y M. S. Chernakova, *Grav. Cosmol.* **13**, 51 (2007).
- [67] E. F. Eiroa y C. M. Sendra, *Phys. Rev. D* **86**, 083009 (2012)
- [68] E. F. Eiroa y C. M. Sendra, *Phys. Rev. D* **88**, 103007 (2013).
- [69] E. F. Eiroa y C. M. Sendra, *Eur. Phys. J. C* **74**, 3171 (2014).
- [70] C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, New York, 1973).
- [71] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (Wiley, New York, 1972).
- [72] S. M. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity* (University of California, Santa Barbara, 1997).
- [73] M. D. Kruskal, *Phys. Rev.* **119**, 1743 (1960).
- [74] G. Szekeres, *Pub. Mat. Debrecen* **7**, 285 (1960).

- [75] H. Reissner, *Ann. Phys.*, **50**, 106 (1916).
- [76] G. Nordstrom, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* **20**, 1238 (1918).
- [77] P. Schneider, J. Ehlers y E. E. Falco, *Gravitational Lenses* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [78] J. Wambsganns, *Gravitational Lensing in Astronomy*, *Living Reviews in Relativity*, **1**, 1998-12 (1998).
- [79] R. Narayan y M. Bartelmann, *Lectures on Gravitational Lensing*, 1996 [astro-ph/9606001].
- [80] E. F. Eiroa, *Strong deflection gravitational lensing, Gravitation, Relativistic Astrophysics and Cosmology*, *Proceedings of the First Argentinian-Brazilian Meeting*, Capítulo 2, 33-52 (Livraria da Fisica, Sao Paulo, 2013).
- [81] A. Einstein, *Annalen der Physik* **35**, 898 (1911).
- [82] A. Einstein, *Sitzungber, Preuß. Akad. Wissensch., Erster Halbband*, 831 (1915).
- [83] F. W. Dyson, A. S. Eddington y C. R. Davidson, *Mem. R. Astron. Soc.* **62**, 291 (1920).
- [84] A. S. Eddington, *Space, Time, and Gravitation* (Cambridge University Press, Cambridge, 1920).
- [85] F. Zwicky, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 290 (1937).
- [86] F. Zwicky, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 679 (1937).
- [87] Yu. G. Klimov, *Sov. Phys. Doklady* **8**, 119 (1963).
- [88] S. Liebes Jr., *Phys. Rev.* **133**, B835 (1964).
- [89] S. Refsdal, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **128**, 295 (1964).
- [90] S. Refsdal, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **128**, 307 (1964).

- [91] N. Sanitt, *Nature*, **234**, 199 (1971).
- [92] R. R. Bourassa, R. Kantowski y T. D. Norton, *Ap. J.* **185**, 747 (1973).
- [93] D. Walsh, R. F. Carswell y R. J. Weymann, *Nature* **279**, 381 (1979).
- [94] J. N. Hewitt, E. L. Turner, C. R. Lawrence, D. P. Schneider, E. J. Gunn *et al.*, *Ap. J.* **321**, 706 (1987).
- [95] R. Lynds y V. Petrosian *BAAS* **18**, 1014 (1986).
- [96] B. Paczyński, *Nature* **325**, 572 (1987).
- [97] V. Bozza, *Phys. Rev. D* **78**, 103005 (2008).
- [98] R. Guedens, D. Clancy y A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **66**, 043513 (2002).
- [99] R. Guedens, D. Clancy y A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **66**, 083509 (2002).
- [100] D. Clancy, R. Guedens y A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **68**, 023507 (2003).
- [101] N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos y V. Rezanian, *Phys. Lett. B* **487**, 1 (2000).
- [102] T. Shiromizu, K. Maeda y M. Sasaki, *Phys. Rev. D* **62**, 024012 (2000).
- [103] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], arXiv:1502.01589 [astro-ph.CO].
- [104] A. Sen, *JHEP* **0204**, 048 (2002).
- [105] A. Sen, *JHEP* **0207**, 065 (2002).
- [106] H.P. Nilles, *Phys. Rep.* **110**, 1 (1984).
- [107] N. Khviengia, Z. Khviengia, H. Lü y C.N. Pope, *Class. Quantum Grav.* **15**, 759 (1998).
- [108] K.A. Bronnikov, R.A Konoplya y A. Zhidenko, *Phys. Rev. D* **86**, 024028 (2012).
- [109] H.G. Ellis, *J. Math. Phys.* **14**, 104 (1973).

- [110] C.R. Keeton y A. O. Petters, *Phys. Rev. D* **72**, 104006 (2005).
- [111] K. Sarkar y A. Bhadra, *Class. Quant. Grav.* **23** 6101 (2006).
- [112] P. Jordan, *Schwerkraft und Weltall*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschwig (1955).
- [113] T.P. Sotiriou, *Gravity and Scalar Fields*, en E. Papantonopoulos (ed.), *Modifications of Einstein's Theory of Gravity at Large Distances*, Lecture Notes in Physics 892, Cap. 1, pag. 3 (Springer, Suiza, 2015).
- [114] T.P. Sotiriou, *Class. Quant. Grav.* **32**, 214002 (2015).
- [115] T. Clifton, P. Ferreira, A. Padilla y C. Skordis, *Phys. Rep.* **513**, 1 (2012).
- [116] H. Falcke *et al.*, *Astrophys. J.* **499**, 731 (1998).
- [117] T.P. Krichbaum *et al.*, *Astron. Astrophys.* **335**, L106 (1998).
- [118] Doeleman *et al.*, *Nature* **455**, 78 (2008).
- [119] C.D. Brinkerink *et al.*, *Astron. Astrophys.* **576**, A41 (2015).
- [120] <http://www.almaobservatory.org/en/home>
- [121] <http://www.vla.nrao.edu/>
- [122] <http://eventhorizontelescope.org>.
- [123] T. Johannsen, D. Psaltis, S. Gillessen, D. P. Marrone y F. Özel, *Astrophys. J.* **758**, 30 (2012).
- [124] <https://www.eso.org/sci/facilities/develop/instruments/gravity.html>.
- [125] A.F. Zakharov, A.A. Nucita, F. DePaolis y G. Ingrosso, *New Astron.* **10**, 479 (2005).
- [126] A.F. Zakharov, F. De Paolis, G. Ingrosso y A.A. Nucita, *Astron. Astrophys.* **442**, 795 (2005).

- [127] F. De Paolis, G. Ingrosso, A.A. Nucita, A. Qadir y A.F. Zakharov, *Gen. Relativ. Gravit.* **43**, 977 (2011).
- [128] <http://www.asc.rssi.ru/radioastron>.
- [129] <http://bhi.gsfc.nasa.gov>.
- [130] <http://www.iar.unlp.edu.ar/llama-web/english.html>.
- [131] O.Y. Tsupko y G.S. Bisnovaty-Kogan, *Grav. and Cosmol.* **18**, 117 (2012).
- [132] O.Y. Tsupko y G. S. Bisnovaty-Kogan, *Phys. Rev. D* **87**, 124009 (2013).
- [133] R.C. Myers y M.J. Perry, *Ann. Phys. (N.Y.)* **172**, 304 (1986).
- [134] A.I. Janis, E.T. Newman y J. Winnicour, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 878 (1968).