

Tesis de Grado

Wilson loops holográficos en representaciones grandes del grupo de gauge

Ríos Fukelman, Alan

2017

Este documento forma parte de las colecciones digitales de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en bibliotecadigital.exactas.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the digital collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in bibliotecadigital.exactas.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Ríos Fukelman, Alan. (2017). Wilson loops holográficos en representaciones grandes del grupo de gauge. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
https://hdl.handle.net/20.500.12110/seminario_nFIS000031_RiosFukelman

Cita tipo Chicago:

Ríos Fukelman, Alan. "Wilson loops holográficos en representaciones grandes del grupo de gauge". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2017.
https://hdl.handle.net/20.500.12110/seminario_nFIS000031_RiosFukelman

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Wilson loops Holográficos en representaciones grandes del grupo de gauge

Alan Rios Fukelman

Director: Diego H. Correa



universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

TEMA: Wilson loops Holográficos en representaciones grandes del grupo de gauge

ALUMNO: Alan Rios Fukelman

L.U. N°: 023/10

LUGAR DE TRABAJO: Instituto de Física de La Plata y Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata.

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Diego H. Correa

FECHA DE INICIACIÓN: Abril 2016

FECHA DE FINALIZACIÓN: Marzo 2017

FECHA DEL EXAMEN:

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Jurado

Director

Jurado

Profesor de Tesis de Licenciatura

Jurado

Índice general

1. Wilson Loops	6
1.1. Teoría tipo Yang-Mills y Wilson Loops	7
1.2. Lazos de Wilson	9
1.2.1. Valores de Expectación de Vacío para lazos de Wilson	10
1.3. $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills	14
1.3.1. Lazos de Wilson en $\mathcal{N} = 4$ SYM	16
1.3.2. Análisis perturbativo	17
1.3.3. Supersimetría del Wilson Loop	18
2. Dualidad AdS/CFT y Wilson Loops Holográficos	20
2.1. AdS/CFT	20
2.2. Wilson Loops Holográficos	24
2.2.1. Regularización y condiciones de contorno	25
2.2.2. Condiciones de contorno	25
2.2.3. Regularización del área mínima	29
2.2.4. La construcción de Mikhailov	30
3. Wilson Loop rectangular y soluciones supersimétricas	33
3.1. El Wilson Loop Circular	35
3.1.1. El Wilson Loop Circular en $\mathcal{N} = 4$ Super-Yang-Mills	37
3.1.2. Cancelación de las divergencias a orden $g^4 N^2$	42
3.2. Modelo de Matrices	47
4. Wilson Loops para representaciones de rango mayor	50
4.1. Dp -branas	51
4.2. Dos ejemplos para representaciones simétricas	52
4.2.1. Línea recta	52
4.2.2. Wilson Loop Circular	56
4.3. Embedding para trayectorias arbitrarias tipo tiempo	63

5. Wilson Loops Hiperbólico	67
5.1. Análisis perturbativo	67
5.2. Cálculo a 1-loop y cancelación de diagramas de interacción	68
5.3. Wilson Loops hiperbólicos en la representación fundamental	74
5.4. Representaciones anti-simétricas	76
5.5. Hipérbola tipo tiempo en representaciones simétricas	78
5.5.1. Cálculo a partir del círculo	78
5.5.2. A la Mikhailov	81
6. Conclusiones y trabajo a futuro	84
A. Wilson Loops en $\mathcal{N} = 4$ SYM	88
B. Embedding de $D3$-branas para trayectorias arbitrarias	92
C. Términos de borde para la hipérbola tipo tiempo	94

Introducción

El Modelo Estándar de Partículas (SM) es, hoy en día, la mejor descripción microscópica de la naturaleza que tenemos disponible. A lo largo de su desarrollo se han hecho grandes avances en la física de altas energías y teórica permitiendo la unificación del electromagnetismo con la interacción débil, el descubrimiento de los quarks, el descubrimiento del mecanismo de Higgs y su posterior confirmación en el LHC y la oscilación de neutrinos por poner algunos ejemplos. De igual manera mediante la construcción del SM quedó clara la importancia de las simetrías de gauge a la hora de estudiar la naturaleza y de proponer nuevas teorías.

Por otro lado la teoría de la Relatividad General de Einstein se sigue mostrando exitosa, desde los casi 100 años desde la primer confirmación experimental de Eddington hasta la reciente detección de ondas gravitacionales, describiendo la física macroscópica que describe el universo a grandes escalas. Sin embargo una descripción cuántica de la gravedad sigue faltando, problemas como la descripción del espacio tiempo en la escala de Planck, materia oscura, la estructura microscópica de los agujeros negros y el problema de la pérdida de información en los mismos son solamente algunos de las preguntas que una eventual teoría de gravedad cuántica debería responder.

La teoría de cuerdas, inicialmente concebida para describir el comportamiento de la interacción fuerte, resulta ser la mejor candidata que tenemos al día de hoy para una teoría de la gravedad cuántica que incorpora automáticamente, toda la física que abarca el Modelo Estándar junto con la teoría de la Relatividad General de Einstein. Si bien esta teoría es ciertamente prometedora ciertos aspectos como la compactificación de las dimensiones extras, el régimen no perturbativo, el estudio del límite cuántico de la teoría en una geometría arbitraria, la red de dualidades, la formulación de una eventual teoría M y el comportamiento tan distinto al que estamos habituados del espacio tiempo, hacen que el estudio de la teoría sea difícil de atacar. La dualidad holográfica de Maldacena [18] presenta la posibilidad de estudiar la teoría de cuerdas en una geometría $AdS_5 \times S^5$ mediante su descripción en términos de la teoría de campos $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills (SYM) dual, esta dualidad relaciona la teoría de campos en su límite de acoplamiento fuertes con el límite de super gravedad de la teoría de cuerdas haciéndola más manejable. Si

bien estudiar una teoría de campos en el límite de acoplamiento fuerte está lejos de ser un problema trivial es posible, mediante argumentos de simetría, encontrar resultados exactos en la constante de acoplamiento.

El lazo de Wilson (Wilson Loop) es un operador que se puede definir en cualquier teoría de campos y en el caso de $\mathcal{N} = 4$ SYM arroja en ciertos casos un resultado exacto, esto permite estudiar la descripción holográfica de dicho operador. Esta descripción, originalmente propuesta por Maldacena [17] y Rey-Ye [ye], es en términos de cuerdas abiertas cuyos extremos describen dicho lazo barriendo una superficie en el espacio tiempo. Sin embargo esta descripción holográfica no es la única posible, si se considera el grupo de gauge asociado al operador en una representación arbitraria \mathcal{R} la descripción holográfica en algunos casos viene dada en términos de objetos extensos en la teoría de cuerdas llamados Dp -branas¹. Estudiando esta descripción fue posible encontrar un conjunto de correcciones al valor de expectación del operador para la trayectoria circular que concuerda exactamente con lo predicho por la teoría de campos, extender y encontrar soluciones análogas a esta es un problema interesante en si mismo.

En el capítulo 1 introduciremos el lazo de Wilson para teorías de campo, mencionaremos algunos de los resultados más interesantes como la ley del área y presentaremos la extensión supersimétrica de dicho operador que permitirá introducir la descripción holográfica del lazo en el capítulo 2 junto con la formulación de la conjetura de Maldacena. En el capítulo 3 se discutirán los ejemplos típicos para el Wilson Loop holográfico poniendo especial énfasis en el tratamiento hecho por Drukker, Gross [**drukker·gross**] para la trayectoria circular lo que permitirá en el capítulo 4 introducir la descripción dual en términos de Dp -branas. Finalmente en el capítulo 6 estudiaremos la trayectoria hiperbólica en la teoría de campos y en su descripción dual en términos de la cuerda y de las Dp -branas extendiendo la propuesta hecha originalmente por Hubeny, Semenoff [14] para estudiar el operador en los casos en que hay un horizonte de eventos presente en la superficie/volumen dual al operador. Estos lazos de Wilson hiperbólicos son supersimétricos, lo que podría permitir obtener resultados exactos que, como en el caso de trayectorias circulares, pueden compararse con cálculos de cuerdas y Dp -branas duales.

¹En general la representación del grupo de gauge puede escribirse en términos de los Young Tableaux, en el caso en que el número de boxes es de orden N^2 hay *backreaction* por lo que hay que considerar otras soluciones duales como *bubbling geometries*

Capítulo 1

Wilson Loops

Actualmente conocemos cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza, aparte de la gravedad y el electromagnetismo tenemos también la interacción débil y la interacción fuerte. Estas últimas tres se entienden actualmente en lo que se conoce como el Modelo Estandar, la construcción del mismo data de la última mitad del siglo XX hasta la actualidad.

El Modelo Estandar de Física de Partículas reúne todas las evidencias experimentales obtenidas en los aceleradores de partículas (Fermilab, Slac, LHC, etc) encontradas hasta la fecha en una sola teoría de campos cuánticos (Quantum Field Theory). Las teorías de QFT pueden entenderse en terminos de tres temas importantes de la física moderna: mecánica cuántica, el concepto de campo y el principio de relatividad especial [22].

Las teorías cuánticas de campos conforman, a lo largo del tiempo, una de las áreas más exitosas de la física de partículas, principalmente desde el desarrollo de la electrodinámica cuántica (QED) y la teoría de Yukawa. Dichas teorías permiten entender el electromagnetismo en términos de fotones, fermiones y sus interacciones mediante la utilización de los métodos perturbativos descritos en los diagramas de Feynmann. A su vez, la aparición de los métodos de re-normalización permitió tratar las divergencias que aparecen en el cálculo de ciertas amplitudes de probabilidad asociadas a distintos diagramas y contrastar los resultados con lo obtenido experimentalmente.

Sin embargo no es sorpresa que al restringirnos al estudio de teorías tipo $U(1)$ no podamos describir todas las interacciones que se encuentran en la naturaleza, ¿de qué manera entonces es posible construir Lagrangianos renormalizables que nos permitan describir las interacciones presentes en la naturaleza como la fuerza fuerte y débil?. Una forma posible es construir Lagrangianos con términos de interacción del tipo $A^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu$ o mediante términos proporcionales a A^4 pero construir teorías sensibles mediante estas interacciones no es trivial debido a la presencia de estados con norma negativa [22], en el caso de QED estos estados desaparecen debido a

los estados con polarización longitudinal que son consecuencia de la invariancia del Lagrangiano frente a transformaciones de gauge locales, de manera que otra forma posible de construir teorías es extender esta simetría de gauge a otros grupos de Lie no abelianos. Esta extensión de la simetría de gauge a grupos de Lie no Abelianos llevo al descubrimiento de teorías del tipo Yang-Mills entre las cuales se encuentra la cromodinámica cuántica o QCD.

1.1. Teoría tipo Yang-Mills y Wilson Loops

El grupo de simetría asociado a QED es $U(1)$ y demandando que la teoría sea invariante local frente al grupo de simetrías uno obtiene la teoría del electromagnetismo con interacciones. Yang y Mills propusieron que este argumento de invariancia local frente a rotaciones de fase $U(1)$ se podía generalizar a invariancia local frente a cualquier grupo de Lie continuo. El caso más simple para analizar es tomar el grupo de rotaciones en tres dimensiones $O(3) \simeq SU(2)$, dado un doblete de campos de Dirac una transformación del grupo actuá según:

$$\psi \mapsto \exp\left(i\alpha_i \frac{\sigma^i}{2}\right)\psi, \quad (1.1)$$

en donde σ^i son las matrices sigma de Pauli. No es difícil escribir, como en el caso de una rotación de fase $U(1)$, Lagrangianos que sean invariantes frente a (1.1) como una simetría global, pero tomando como referencia el caso de QED nos interesa promover la simetría a una simetría local, para eso es necesario pedir que el Lagrangiano que construyamos sea invariante frente a (1.1) con $\alpha^i(x)$ una función arbitraria de x , es decir:

$$\psi(x) \mapsto V(x)\psi(x), \quad V(x) = \exp\left(i\alpha^i(x) \frac{\sigma^i}{2}\right) \quad (1.2)$$

Para construir un lagrangiano que sea invariante frente a este grupo de transformaciones es necesario definir una derivada covariante que transforme de manera tal de asegurar la invariancia de la teoría, para eso introducimos el comparador $U(y, x)$ que transforma según:

$$U(y, x) \mapsto V(y)U(y, x)V^\dagger(x) \quad (1.3)$$

En donde fijamos que $U(y, y) = 1$. En los puntos $x \neq y$ podemos restringir consistentemente que $U(y, x)$ sea una matriz unitaria y para los puntos cercanos a la identidad cualquier matriz unitaria puede ser expandida en terminos de los generadores hermíticos de $SU(2)$, luego para cualquier transformación infinitesimal

podemos escribir:

$$U(x + \epsilon n, x) = 1 + ig\epsilon n^\mu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.4)$$

En donde g es una constante. Utilizando esta expansión para el comparador y la definición de la derivada covariante [22]:

$$n^\mu D_\mu \Psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\Psi(x + \epsilon n) - U(x + \epsilon n, x) \Psi(x)] \quad (1.5)$$

Encontramos la derivada covariante asociada con la simetría $SU(2)$ local:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \quad (1.6)$$

A diferencia de QED el campo de gauge A_μ^i es vectorial debido al índice de color i . Para encontrar la ley de transformación para los campos vectoriales A_μ^i introducimos la expansión (1.4) en la ley de transformación (1.3) obteniendo para transformaciones infinitesimales:

$$A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \mapsto A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} + \frac{1}{g} (\partial_\mu \alpha^i) \frac{\sigma^i}{2} + i[\alpha^i \frac{\sigma^i}{2}, A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2}] + \dots \mathcal{O}(\alpha'^2) \quad (1.7)$$

El último término de esta expresión es nuevo en relación a las teorías Abelianas tipo $U(1)$ y se debe a que los generadores del grupo σ^i no conmutan.

Con esta derivada covariante se puede construir el Lagrangiano invariante de gauge más general para ψ pero es necesario incluir los términos invariantes de gauge que dependen solamente del campo A_μ^i , es decir el análogo al tensor de esfuerzo electromagnético $F^{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i \frac{\sigma^i}{2} - \partial_\nu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - ig[A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}, A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2}] \quad (1.8)$$

El tensor $F_{\mu\nu}^i$ no es una cantidad invariante de gauge debido al índice de color i , cada uno asociado con la dirección de rotación del grupo de gauge, sin embargo es fácil construir combinaciones que sí sean invariante de gauge, como por ejemplo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Tr[(F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2})^2] \quad (1.9)$$

Qué es un término cinético invariante de gauge para A_μ^i . Observando este término se puede ver que el Lagrangiano contiene términos cúbicos y cuárticos en A_μ^i entonces este Lagrangiano describe una teoría no trivial, interactuante llamada Teoría

de Yang-Mills, para construir una teoría de Yang-Mills interactuante con fermiones simplemente hay que considerar el Lagrangiano de Dirac junto al Lagrangiano para el campo de gauge (1.9) de donde obtenemos:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D})\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^i)^2 - m\bar{\psi}\psi \quad (1.10)$$

Que es el lagrangiano de Yang-Mills. Toda la discusión realizada para las simetrías $SU(2)$ se puede generalizar para cualquier otro grupo de simetría continuo, para esto es necesario realizar el cambio:

$$\frac{\sigma^i}{2} \mapsto t^a \quad (1.11)$$

En todos los pasos de la construcción. Los elementos t^a son los generadores del grupo de simetría que pueden ser representados como matrices hermíticas, en general las relaciones de conmutación para el grupo de simetría se escriben de la forma:

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \quad (1.12)$$

En donde f^{abc} son las constantes de estructura del grupo.

1.2. Lazos de Wilson

Para la construcción de teorías cuánticas de campos tipo $U(1)$ o $SU(2)$ fue necesario introducir el comparador $U(y, x)$ (1.3) que convierte la transformación de gauge en un punto x al punto y . Hasta ahora fue suficiente considerar expresiones infinitesimales (1.4) para este objeto, sin embargo al considerarlo para puntos x , y separados en el espacio obtendremos información relacionada a la geometría de la invariancia de gauge.

Consideremos para el caso Abeliano el campo A_μ que transforma según:

$$A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (1.13)$$

Y el comparador $U(y, x)$ que transforma según:

$$U(y, x) \mapsto e^{i\alpha(y)}U(y, x)e^{-i\alpha(x)} \quad (1.14)$$

El operador $U_P(z, y)$ definido como:

$$U_P(z, y) = e^{-ie \int_P dx^\mu A_\mu(x)} \quad (1.15)$$

Verifica la condición (1.14) si se toma la integral en cualquier camino P que vaya desde y hasta z , en efecto usando (1.13):

$$\begin{aligned} U_P(y, x)' &= e^{-ie \int_P dx^\mu A'_\mu(x)} = e^{-ie \int_P dx^\mu (A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x))} \\ &= e^{i\alpha(y)} e^{-ie \int_P dx^\mu A_\mu(x)} e^{-i\alpha(z)} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Este objeto así definido se llama *Línea de Wilson* y da una realización explícita del comparador $U(y, z)$ para puntos separados una distancia finita.

Si el camino P es un camino cerrado que vuelve al punto y tenemos un *Wilson Loop*:

$$U_P(y, y) = e^{-ie \oint_P dx^\mu A_\mu(x)} \quad (1.17)$$

El operador de Wilson es una funcional no-trivial del campo A_μ que es por construcción localmente invariante de gauge.

Tanto la línea de Wilson con el loop que fueron construídos para el caso Abeliano pueden generalizarse para el caso No-Abeliano. Sin embargo en este caso aparecen sutilezas cuando consideramos campos $A_\mu^i(x)$ asociados a matrices que no conmutan ya que las mismas no necesariamente conmutan para puntos distintos, por esto es necesario ordenar las matrices de una manera particular.

Sea s el parámetro de la curva \mathcal{C} que corre desde 0 en $x = y$ hasta 1 en $x = z$, definimos la Línea de Wilson como la expansión en serie de la exponencial con las matrices t^a ordenadas en cada término de manera tal que para valores más grandes de s las mismas están a la izquierda. Esta prescripción se llama *path-ordering* y se denota con el símbolo \mathcal{P} , entonces el lazo de Wilson se escribe:

$$W_{\mathcal{R}}(z, y) = \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}\{e^{[ig \int_0^1 ds \frac{dx^\mu}{ds} A_\mu^\alpha(x(s))t^\alpha]}\}) \quad (1.18)$$

En donde $\text{Tr}_{\mathcal{R}}$ es la traza tomada sobre una representación particular \mathcal{R} del grupo de Gauge.

1.2.1. Valores de Expectación de Vacío para lazos de Wilson

Una de las propiedades de QCD es el confinamiento de los quarks, esto quiere decir que no es posible encontrar quarks libres en la naturaleza por lo que se dice que QCD es una teoría *confinante*. Esto puede verse considerando el caso de un par quark-antiquark que intentamos separar: al aumentar la distancia entre ambos resulta favorable a nivel energético la creación de un nuevo par, de modo que no se observan quarks libres en la naturaleza.

Una teoría de campos es confinante si todos los estados de energía finita son invariantes frente a una transformación global de gauge [27], por ejemplo en el

caso de QED hay estados de energía finita (como el estado de un solo electrón) que tienen carga eléctrica no-nula y por lo tanto frente a una transformación de fase global cambian, es decir que QED es una teoría no confinante. El valor de expectación de vacío (VEV) del lazo de Wilson definido para la teoría (No)-Abeliana en (1.17) ((1.18)) puede diagnosticar si una teoría exhibe o no confinamiento.

Para el caso de QED el VEV del lazo de Wilson viene dado por:

$$\langle 0 | W_C | 0 \rangle = \int \mathcal{D}A e^{ie \int ds \frac{dx^\mu}{ds} A_\mu(x)} e^{-S} \quad (1.19)$$

En donde la acción euclídea S viene dada por:

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.20)$$

Con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Si interpretamos $e \frac{dx(s)^\mu}{ds} = ex^\mu(s) = J^\mu(x)$ como una corriente el VEV (1.19) toma la forma:

$$\langle W_C \rangle = \int \mathcal{D}A e^{i \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu(x) A_\mu(x)} \quad (1.21)$$

Que no es más que la integral funcional para la teoría de QED, pasando al espacio de momentos mediante la transformada de Fourier obtenemos:

$$\langle W_C \rangle = e^{-\frac{1}{2} e^2 \oint_C dx_\mu \oint_C dy_\nu \Delta_{\mu\nu}(x-y)} \quad (1.22)$$

En donde $\Delta_{\mu\nu}(x-y)$ es el propagador de Feynmann en espacio-tiempo euclideo. Tomando el gauge de Feynmann:

$$\Delta_{\mu\nu}(x-y) = \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{4\pi^2(x-y)^2} \quad (1.23)$$

Utilizando el propagador (1.23) en el VEV (1.22) y resolviendo la doble integral obtenemos:

$$\langle 0 | W_C | 0 \rangle = e^{-(\frac{\tilde{c}e^2}{a})P} \quad (1.24)$$

En donde P es el perímetro de la curva \mathcal{C} , a es un cut-off para controlar la divergencia ultravioleta que aparece al acercarse x con y y \tilde{c} es una constante numérica que depende del método de regularización y de la forma de la curva. Esta solución es conocida como la *Ley del perímetro* y es característica de una teoría no-confinante. Para verlo explícitamente tomemos \mathcal{C} un rectángulo de largo T en la dirección temporal y R en la dirección espacial en donde tomamos $a \ll R \ll T$, eligiendo esta curva el termino asociado a la corriente $ex^\mu(s)$ se puede interpretar como una

partícula cargada recorriendo la curva \mathcal{C} . Cuando la partícula se está moviendo para atrás en la dirección temporal es equivalente a tener una anti-partícula, entonces al calcular $\langle W_{\mathcal{C}} \rangle$ estamos calculando la integral funcional en presencia de un par partícula-anti-partícula separados una distancia R y que interactúan por un tiempo T .

Si tanto x como y están del mismo lado del rectángulo obtenemos:

$$\int_0^L \int_0^L \frac{dx dy}{(x-y)^2} = \frac{2L}{a} - 2 \log\left(\frac{L}{a}\right) + \mathcal{O}(1) \quad (1.25)$$

Donde L es el largo del lado (ya sea R o T). Si x, y están en lados perpendiculares la integral se anula debido a $dx \cdot dy = 0$. Para el caso en el que x está en un lado largo T e y está en el otro la integral da:

$$\int_0^T \int_0^T \frac{dx dy}{(x-y)^2} = \frac{\pi T}{R} - 2 \log\left(\frac{T}{R} - 2 + \mathcal{O}\left(\frac{R^2}{T^2}\right)\right) \quad (1.26)$$

Sumando todas las contribuciones y tomando el límite para T grande obtenemos:

$$\oint \oint \frac{dx dy}{(x-y)^2} = \left(\frac{4}{a} - \frac{2\pi}{R}\right)T + \mathcal{O}(\log T) \quad (1.27)$$

Juntando (1.27) con (1.24) obtenemos el VEV:

$$\langle W_{\mathcal{C}} \rangle = e^{-\left(\frac{4}{a} - \frac{2\pi}{R}\right)T} \quad (1.28)$$

En general se tiene [27] que $\langle W_{\mathcal{C}} \rangle \propto e^{-E_{par}T}$ entonces para el caso de QED vemos que hay un término de auto-interacción que diverge logarítmicamente con el cut-off y un término de Coulomb: $V(R) \sim \frac{1}{R}$, de donde vemos que al aumentar la distancia R entre el par de partículas el potencial decae por lo que es una teoría no confinante. Para el caso de teorías no-abelianas tipo Yang-Mills en donde hay términos de auto-interacción entre los gluones $A_{\mu}^i(x)$ (ver (1.9)) es necesario expandir el operador de Wilson en términos de la constante de acoplamiento g , desarrollando (1.18) junto con (1.11) obtenemos a primer orden:

$$\langle W_{\mathcal{C}} \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{R}} \left[1 - \frac{1}{2} g^2 t^a t^a \oint_{\mathcal{C}} \oint_{\mathcal{C}} dx^{\mu} dy^{\mu} \Delta_{\mu\nu}(x-y) + \mathcal{O}(g^4) \right] \quad (1.29)$$

El término asociado con $\text{Tr}_{\mathcal{R}}(t^a t^a)$ es simplemente el casimir cuadrático de la representación $C(\mathcal{R})$ del grupo de gauge, por lo que el resultado a primer orden del VEV es idéntico al caso abeliano (1.22) con la identificación $g^2 \mapsto g^2 C(\mathcal{R})$. Queremos estudiar el comportamiento de la teoría para acoplamiento fuerte, para eso es necesario discretizar el espacio en una red de separación a entre puntos

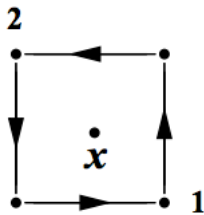


Figura 1.1: Discretización del espacio-tiempo en una red periódica de separación a ubicada en el plano 1 – 2

adyacentes. El lazo de Wilson más elemental que podemos construir en este caso es el que recorre un cuadrado o *plaquette* en la red como se puede ver en la fig. (1.1). Tomando ϵ_1 y ϵ_2 vectores de largo a en la dirección 1 y 2 respectivamente, y ubicando la línea de Wilson en la mitad del segmento obtenemos el lazo de Wilson:

$$W_{plaq} = \text{Tr}_{\mathcal{R}} e^{-igaA_2(x-\epsilon_1/2)} e^{-igaA_1(x+\epsilon_2/2)} e^{+igaA_2(x+\epsilon_1/2)} e^{+igaA_1(x-\epsilon_2/2)} \quad (1.30)$$

Si tomamos los campos de gauge $A_\mu^i(x)$ como funciones continuas podemos expandir las expresiones que se encuentran en (1.30) en el parámetro de la red a , y en conjunto con el lema de Baker-Campbell-Hausdorff $e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2+\dots}$ obtenemos:

$$W_{plaq} = \text{Tr}_{\mathcal{R}} e^{+iga^2(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 - ig[A_1, A_2] + \dots)} \quad (1.31)$$

En donde ahora todos los campos de gauge están evaluados en x . Considerando ambas orientaciones de la *plaquette* (i.e $W_{plaq} + W_{-plaq}$) y expandiendo las exponenciales obtenemos:

$$W_{plaq} + W_{-plaq} = 2C(\mathcal{R}) - g^2 a^2 \text{Tr}_{\mathcal{R}} F_{12}^2 \quad (1.32)$$

En donde $F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 - ig[A_1, A_2]$ es el análogo a (1.8) para grupos de gauge no abelianos. De (1.32) podemos leer la acción para la teoría en una red y la integral funcional de la misma:

$$S = \frac{-1}{2g^2} \sum_{plaq} W_{plaq} \quad (1.33)$$

$$Z = \int \mathcal{D}U e^{-S}$$

Con U la matriz que determina la orientación de la plaqueta y U^\dagger con la orientación opuesta. Ahora podemos considerar un lazo de Wilson expresado como la traza del producto de las U asociadas a las líneas orientadas que forman la curva cerrada \mathcal{C} , es decir:

$$\langle W_{\mathcal{C}} \rangle = Z^{-1} \int \mathcal{D}U W_{\mathcal{C}} e^{-S} \quad (1.34)$$

En el límite de acoplamiento fuerte y para la representación fundamental del grupo de gauge, obtenemos:

$$\langle 0 | W_{\mathcal{C}} | 0 \rangle \simeq e^{-(\log(g^2) \frac{A}{a^2})} \quad (1.35)$$

En donde A es el área encerrada por la curva \mathcal{C} y $\frac{A}{a^2}$ la cantidad de plaquetas en la superficie, este resultado es la ley de área equivalente a la ley del perímetro (1.24) para el caso abeliano. Tomando de manera análoga \mathcal{C} un rectángulo de lados R y T junto con $\langle 0 | W_{\mathcal{C}} | 0 \rangle \simeq e^{(-E_{par}T)}$ vemos que obtenemos un potencial $V(R) = \log(g^2)R/a^2$ que es lineal con la separación del par quark-anti-quark por lo que aumenta a medida que la separación es mayor. Es decir que es necesaria una cantidad de energía infinita para separar las partículas una distancia infinita, es decir que la teoría es una teoría confinante.

1.3. $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills

El estudio de grupos de Lie más generales que $U(1)$ (QED) y $SU(2)$ en conjunto con el descubrimiento de una gran variedad de hadrones y mesones llevó a la construcción del modelo estandar de física de partículas que se basa en el grupo de simetrías $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ y posteriormente analizando estas simetrías se propuso el Bosón de Higgs que fue encontrado en el LHC en el 2013, a pesar de los incontables logros del modelo estandar se entiende qué es una teoría efectiva y que lejos está de ser una teoría fundamental de la naturaleza. Problemas como la unificación de las fuerzas a altas energías, la falta de descripción de materia oscura/energía oscura, gravedad cuántica y la gran cantidad de parámetros libres de la teoría son algunos de los problemas que presenta. Es conocido también el teorema no-go de Coleman-Mandula que bajo hipótesis muy generales determina que la única manera de combinar simetrías de espacio tiempo y simetrías internas es solo posible de manera trivial. Esto implica que las únicas simetrías posibles para una teoría cuántica de campos aparte del grupo de Poincaré son escalares de Lorentz.

Una manera elegante de evitar este teorema y a su vez encontrar teorías que incorporan candidatos a materia oscura, una descripción cuántica de la gravedad y permiten unificar las interacciones de la naturaleza es considerar teorías supersimétricas, es decir extender las simetrías de Poincaré y los escalares de Lorentz considerando ahora simetrías fermiónicas con generadores spinoriales Q_{α}^i , si tomamos 4 generadores spinoriales decimos que tenemos una teoría con $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías.

Para el caso de $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills (SYM) el álgebra de Poincaré se

extiende incluyendo *supercargas* spinoriales [4]:

$$a = 1, \dots, 4 \quad \begin{cases} Q_\alpha^a & \alpha = 1, 2 & \text{Spinor de Weyl Izquierdo} \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}a} = (Q_\alpha^a)^\dagger & & \text{Spinor de Weyl derecho} \end{cases} \quad (1.36)$$

En donde α es el índice spinorial del generador. Las supercargas transforman como spinores de Weyl en $SO(1, 3)$ y conmutan con las traslaciones, el resto de la estructura de susy viene dada por:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^a, Q_\beta^b\} &= \{S_{\alpha a}, S_{\beta b}\} = \{Q_\alpha^a, \bar{S}_\beta^b\} = 0 \\ \{Q_\alpha^a, \bar{Q}_{\dot{\beta}b}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \delta_b^a \\ \{S_{\alpha a}, \bar{S}_\beta^b\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu K_\mu \delta_a^b \\ \{Q_\alpha^a, S_{\beta b}\} &= \epsilon_{\alpha\beta} (\delta_b^a D + T_b^a) + \frac{1}{2} \delta_b^a L_{\mu\nu} \sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.37)$$

en donde los generadores $S_{\alpha a}, \bar{S}_\beta^b$ son los generadores asociados a las transformaciones super conformes presentes en $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills.

Dado un grupo de Lie compacto G tendremos un multiplete que transformará en la representación adjunta del algebra g , entonces para $\mathcal{N} = 4$ el espectro de partículas viene dado por [4]:

- $\Phi^i \quad i = 1, \dots, 6$ escalares reales.
- $\lambda_\alpha^a, a = 1, \dots, 4$ spinores izquierdos de Weyl
- $A_\mu(x) = A_\mu^a t^a$ bosones de gauge

El conjunto $(A_\mu, \lambda_\alpha^a, X^i)$ es el Supermultiplete de Gauge. El lagrangiano de la teoría viene dado por **[lagsym]**:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = Tr \{ & -\frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta_I}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \sum_a i \bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda_a - \sum_i D_\mu X^i D^\mu X^i \\ & + \sum_{a,b,i} g C_i^{ab} \lambda_a [X^i, \lambda_b] + \sum_{a,b,i} g \bar{C}_{iab} \bar{\lambda}^a [X^i, \bar{\lambda}^b] + \frac{g^2}{2} \sum_{i,j} [X^i, X^j]^2 \} \end{aligned} \quad (1.38)$$

En donde la derivada covariante D^μ y el tensor de esfuerzo $F^{\mu\nu}$ se definen de la manera usual a partir del campo de gauge:

$$\begin{aligned} D^\mu &= \partial^\mu + [A^\mu, \cdot] \\ F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + [A^\mu, A^\nu] = [D^\mu, D^\nu] \end{aligned} \quad (1.39)$$

Las constantes C_i^{ab} y C_{iab} están relacionadas a las matrices de Clifford Dirac para la simetría interna $SO(6)_R \sim SU(4)_R$. Por construcción el Lagrangiano es invariante frente a $\mathcal{N} = 4$ Poincaré supersimétrico, cuyas leyes de transformación vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
\delta X_\alpha^{ia} &= [Q_\alpha^a, X^i] = C^{iab} \lambda_{ab} \\
\delta \lambda_b &= \{Q_\alpha^a, \lambda_{\beta b}\} = F_{\mu\nu} (\sigma^{\mu\nu})_\beta^\alpha \delta_b^a + [X^i, X^j] \epsilon_{\alpha\beta} (C_{ij})_b^a \\
\delta \bar{\lambda}_\beta^b &= \{Q_\alpha^a, \bar{\lambda}_\beta^b\} = C_i^{ab} \bar{\sigma}_{\alpha\dot{\beta}}^\mu D_\mu X^i \\
\delta A_\mu &= [Q_\alpha^a, A_\mu] = (\sigma_\mu)_\alpha^{\dot{\beta}} \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}^a
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Clasicamente el Lagrangiano de la teoría (1.38) es invariante de escala, esto puede verse asignándole a los campos y constantes de acoplamiento las escalas típicas [4]:

$$[A_\mu] = [X^i] = 1 \quad [\lambda_a] = \frac{3}{2} \quad [g] = [\theta_I] = 0 \tag{1.41}$$

Todos los términos del Lagrangiano son de orden 4 de donde se sigue la *invariancia de escala*. En particular, al considerar una teoría cuántica de campos que es invariante de escala e invariante frente a Poincaré estas simetrías se combinan para formar un grupo de simetrías más grande que es el *grupo conforme* $SO(2,4) \sim SU(2,2)$ que al combinarlo con las supersimetrías (1.37) obtenemos el grupo super-conforme que viene dado por el supergrupo $SU(2,2|4)$. De igual manera si se cuantiza la teoría de manera perturbativa no se encuentran divergencias ultravioletas por lo que la teoría es invariante frente al supergrupo de transformaciones conformes $SU(2,2|4)$ también a nivel cuántico.

1.3.1. Lazos de Wilson en $\mathcal{N} = 4$ SYM

El operador de Wilson introducido en (1.18) mide la holonomía del grupo de gauge al rededor de una curva y puede verse también como la respuesta del campo frente a una partícula cargada que se mueve en el mismo. La extensión supersimétrica de este operador puede obtenerse considerando una partícula que se propaga en $\mathcal{N} = 4$ SYM. En la fase superconforme de la teoría, el espectro de la misma (1.3) consta de partículas no masivas por lo que para obtener la partícula de prueba necesitamos romper la simetría del grupo $SU(N+1) \mapsto SU(N) \times U(1)$ mediante un mecanismo tipo Higgs [8] (ver Apéndice A). También es posible determinar la extensión supersimétrica siguiendo los métodos presentados en [19, 3] o inclusive en la propuesta de Maldacena [17]. Siguiendo [7] la extensión supersimétrica del operador viene dada por:

$$W(\mathcal{C}) = \frac{1}{N} \text{Tr} \mathcal{P} \exp \left[\oint_{\mathcal{C}} d\tau (i A_\mu \dot{x}^\mu(\tau) + \Phi^i(x) y_i) \right] \tag{1.42}$$

para el caso euclideo y por:

$$W_{\mathcal{R}}(\mathcal{C}) = \frac{1}{N} \text{Tr}_{\mathcal{R}} \mathcal{P} \exp \left[i \oint_{\mathcal{C}} d\tau (A_{\mu} \dot{x}^{\mu}(\tau) + \Phi^i(x) y_i) \right] \quad (1.43)$$

para el caso en que estamos trabajando en Minkowski. En ambos casos (1.42), (1.43) $x^{\mu}(\tau)$ es la parametrización de la curva \mathcal{C} , $y_i = |\dot{x}| \Theta_i$ con Θ_i un punto en la 5-esfera asociado con el grupo de simetría interno $SO(6)$ de la teoría. Es importante destacar que también podríamos obtener el operador a partir de la reducción dimensional de la teoría supersimétrica en 10 dimensiones, en tal caso el operador viene dado por:

$$W = \frac{1}{N} \text{Tr} \mathcal{P} \exp \left(\oint (i A_{\mu} \dot{x}^{\mu} + \Phi_i \dot{y}^i) \right) \quad (1.44)$$

En donde en este caso $y^i(s)$ es una función arbitraria y Φ_i las seis componentes extra del campo de gauge. Para determinar el VEV del operador es conveniente introducir los generadores del grupo de gauge t^a mediante $[A_{\mu}]^{ij} = A_{\mu}^a [t^a]^{ij}$, con ij los índices de color.

1.3.2. Análisis perturbativo

Al estar trabajando en la rama de Coulomb donde $\langle A \rangle = \langle \Phi \rangle = 0$ será necesario realizar contracciones de Wick para estudiar el comportamiento perturbativo. Sin embargo es fácil ver que el primer orden de la expansión en g_{YM} (o equivalentemente en λ) se anula, por lo que los primeros diagramas no triviales son los que dan cuenta de la propagación de un bosón de gauge o de una partícula escalar entre dos puntos del loop $x(s)$ y $x(s')$. Expandiendo (1.44) e introduciendo los generadores del grupo la amplitud que buscamos viene dada por:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \langle (i A_{\mu}^a(x(s)) T^a \dot{x}^{\mu}(s) + \dot{y}^i(s) \phi_i^a(s) T^a) (i A_{\nu}^b(x(s')) T^b \dot{x}^{\nu}(s') + \dot{y}^j(s') \phi_j^b(s') T^b) \rangle \\ &= \text{Tr} (T^a T^b) [-\dot{x}^{\mu}(s) \dot{x}^{\nu}(s') \langle A_{\mu}^a(x(s)) A_{\nu}^b(x(s')) \rangle + \dot{y}^i(s) \dot{y}^j(s') \langle \phi_i^a(x(s)) \phi_j^b(x(s')) \rangle] \\ &= \text{Tr} (T^a T^b) [-\dot{x}^{\mu}(s) \dot{x}^{\nu}(s') \Delta_{\mu\nu}^{ab}(x - x') + \dot{y}^i(s) \dot{y}^j(s') D_{ij}^{ab}(x - x')] \end{aligned} \quad (1.45)$$

En donde se usaron los propagadores de la teoría:

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}^{ab} &= g_{YM}^2 \frac{\delta^{ab} \delta_{\mu\nu}}{4\pi^2 |x - x'|^2} \\ D_{ij}^{ab} &= g_{YM}^2 \frac{\delta^{ab} \delta_{ij}}{4\pi^2 |x - x'|^2} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Entonces a primer orden en la expansión, el valor de expectación del Wilson Loop supersimétrico viene dado por:

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle = 1 - \text{Tr}(T^a T^b) \oint ds \oint ds' [-\dot{x}^\mu(s) \dot{x}^\nu(s') \Delta_{\mu\nu}^{ab}(x-x') + \dot{y}^i(s) \dot{y}^j(s') D_{ij}^{ab}(x-x')] \quad (1.47)$$

A partir de la expresión de los propagadores (1.46) se puede ver que la expresión (1.47) es linealmente divergente cuando $x(s) \rightarrow x(s')$ por lo que es necesario analizar las divergencias de la misma. Introduciendo la notación $x = |x(s) - x(s')|$ e introduciendo un cutoff ϵ para el propagador (i.e $\frac{1}{x^2} \mapsto \frac{1}{x^2 + \epsilon^2}$):

$$- \frac{\lambda}{8\pi^2} \oint ds \oint ds' \dot{x}^\mu(s) \dot{x}^\nu(s') \frac{\delta_{\mu\nu}}{x^2 + \epsilon^2} \quad (1.48)$$

Si la parametrización de la curva \mathcal{C} es tal que $x(s=0) = 0$, $s \ll 1$ y $x(s) \ll 1$ podemos aproximar $\frac{x(s')}{|\dot{x}(s')|} \approx s'$, podemos restringir los límites de integración para la variable s' al intervalo $-\frac{\epsilon}{|\dot{x}|} < s' < \frac{\epsilon}{|\dot{x}|}$ y, despreciando el término de x^2 en la integral obtenemos:

$$- \frac{\lambda}{8\pi^2} \oint_{-\frac{\epsilon}{|\dot{x}|}}^{\frac{\epsilon}{|\dot{x}|}} ds' \dot{x}^\mu(s) \dot{x}^\nu(s') \frac{\delta_{\mu\nu}}{\epsilon^2} = - \frac{\lambda}{4\pi^2 \epsilon} \oint ds |\dot{x}| = - \frac{\lambda L}{4\pi^2 \epsilon} \quad (1.49)$$

En donde L es la longitud de la curva \mathcal{C} y usamos que $s \approx s'$. De manera análoga para el propagador escalar obtenemos:

$$- \frac{\lambda}{8\pi^2} \oint_{-\frac{\epsilon}{|\dot{x}|}}^{\frac{\epsilon}{|\dot{x}|}} ds' \dot{y}^i(s) \dot{y}^j(s') \frac{\delta_{ij}}{\epsilon^2} = - \frac{\lambda}{4\pi^2 \epsilon} \oint ds |\dot{x}| \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2} \quad (1.50)$$

De donde observamos que la divergencia se anula en el caso en que la trayectoria verifique la condición;

$$\dot{x} = \dot{y} \quad (1.51)$$

1.3.3. Supersimetría del Wilson Loop

El cálculo del Wilson Loop (1.44) en $\mathcal{N} = 4$ SYM puede resolverse perturbativamente en el límite de acoplamiento débil pero para resolverlo en acoplamiento fuerte es necesario tener en cuenta todos los diagramas. Resumar todos los diagramas de la teoría es equivalente a resolver el límite $N \rightarrow \infty$ que en general es muy difícil, si no imposible, para una teoría interactuante como $\mathcal{N} = 4$. Sin embargo hay ciertos casos en los que la solución se simplifica debido a que la supersimetría lleva a la cancelación de ciertos términos. De hecho en algunos casos las restricciones impuestas por supersimetría son tales que todas las correcciones

cuánticas se cancelan. La pregunta entonces es cómo transformar este operador (1.42) en un operador supersimétrico, la construcción que presentaremos se debe a Zarembo [28] y permite construir Wilson Loops que preservan 1/4, 1/6 y 1/8 de las supersimetrías (1.37).

La variación de supersimetría del operador (1.44) viene dada por:

$$\delta_\epsilon W(\mathcal{C}) = \frac{1}{N} \text{Tr} \mathcal{P} \int ds \bar{\Psi} (i\Gamma^\mu \dot{x}^\mu + \Gamma^i \theta^i |\dot{x}|) \epsilon \exp \left(\int ds' (iA_\mu \dot{x}^\mu + \Phi_i \theta^i |\dot{x}|) \right) \quad (1.52)$$

de manera que se preservará alguna supersimetría si:

$$\bar{\Psi} (i\Gamma^\mu \dot{x}^\mu + \Gamma^i \theta^i |\dot{x}|) \epsilon = 0 \quad (1.53)$$

donde tomamos que $\Gamma^M = (\Gamma^\mu, \Gamma^i)$ son las matrices de Dirac en 10 dimensiones. Se puede ver que $(i\Gamma^\mu \dot{x}^\mu + \Gamma^i \theta^i |\dot{x}|)^2 = 0$ por lo que para cualquier curva la ecuación 1.52 tiene 8 soluciones independientes, generalmente estas soluciones dependerán de la curva por lo que solamente serán localmente supersimétricas. Si queremos en cambio obtener soluciones globalmente supersimétricas podemos pedir que el parámetro ϵ sea independiente de la curva de manera tal que esto impondrá restricciones sobre $\theta^i(s)$ y $x^\mu(s)$ por lo que el número de ϵ linealmente independientes que verifiquen (1.53) determinará la cantidad de supersimetría preservada. Para reducir el número de restricciones para ϵ a un número finito proponemos el siguiente ansatz:

$$\theta^i = M_\mu^i \frac{\dot{x}^\mu}{|\dot{x}|} \quad (1.54)$$

esta propuesta puede entenderse como pedir que la posición de la curva \mathcal{C} en S^5 siga al vector tangente a \dot{x}^μ , entonces M_μ^i es una matriz de 4×6 de la cuál no es importante dar una forma explícita ya que $\mathcal{N} = 4$ SYM tiene cómo simetría global al grupo $SO(4) \times SO(6)$. Usando esta propuesta la variación de supersimetría (1.52) vendrá dada por:

$$i\dot{x}^\mu (\Gamma^\mu - iM_\mu^i \Gamma^i) \epsilon(x) = 0 \quad (1.55)$$

en donde toda la dependencia con la curva se factoriza y la supersimetría se preservará en caso de obtener:

$$(\Gamma^\mu - iM_\mu^i \Gamma^i) \epsilon(x) = 0 \quad (1.56)$$

expandiendo los términos de la variación de supersimetría encontramos que en general para una curva en \mathbb{R}^4 se preservara una supersimetría. Esta construcción garantiza que una curva dentro de \mathbb{R}^1 es 1/2 BPS, dentro de \mathbb{R}^2 1/4 BPS, en \mathbb{R}^3 1/8 BPS y una curva en \mathbb{R}^4 será 1/16 BPS. En todos estos casos el valor de expectación del Wilson Loop es trivial, sin embargo en el caso de la trayectoria circular esto no es cierto debido a que el mismo puede verse como una transformación conforme de la línea recta (trayectoria 1/2 BPS), y dicha transformación resulta ser singular [6].

Capítulo 2

Dualidad AdS/CFT y Wilson Loops Holográficos

A lo largo de la física teórica se han encontrado importantes resultados nuevos al descubrir que dos conceptos distintos se encuentran relacionados en un nivel más fundamental. Estas relaciones toman en muchos casos la forma de dualidades, en la cual dos teorías cuánticas aparentemente distintas resultan ser idénticas frente a dicha dualidad.

Desde un punto de vista matemático esto significa que las teorías son iguales, es decir que el espacio de Hilbert y la dinámica de ambas concuerdan, sin embargo desde un punto de vista físico la descripción de las mismas puede ser distinta. La dualidad Anti-de Sitter/Conformal Field Theory (*AdS/CFT*) es una dualidad que relaciona una teoría cuántica de campos en un espacio-tiempo plano con una teoría de cuerdas. Es decir que frente a esta dualidad puede verse que una teoría de campos, que a priori no parece ser una teoría de gravedad cuántica, es equivalente a una teoría que es candidata a explicar la gravedad cuántica. Esta dualidad es también una realización del *principio holográfico*, el cual dice que en una teoría gravitatoria, el número de grados de libertad en un volumen dado V escala como la superficie ∂V de dicho volumen. Originalmente propuesta por Maldacena [18] la dualidad *AdS/CFT* tiene muchas realizaciones distintas pero a lo largo de este trabajo usaremos siempre el ejemplo usual de la misma que relaciona $\mathcal{N} = 4$ Super-Yang-Mills en $(3 + 1)$ dimensiones con la teoría de cuerdas tipo *IIB* en $AdS_5 \times S^5$.

2.1. AdS/CFT

La teoría de cuerdas definida en $AdS_5 \times S^5$ tiene dos parámetros adimensionales libres que son el acoplamiento de la cuerda g_s y la relación L^2/α' donde L es el

radio de Anti-de Sitter y $\alpha' = l_s^2$ con l_s la longitud de la cuerda, por otro lado $\mathcal{N} = 4$ SYM tiene como parámetros adimensionales el rango del grupo de gauge N y la constante de acoplamiento de la teoría g_{YM}^2 , en la dualidad los parámetros de ambos lados son identificados entre si según:

$$g_{YM}^2 = g_s, \quad g_{YM}^2 N = \lambda = \frac{L^4}{\alpha'^2} \quad (2.1)$$

En donde $\lambda = g_{YM}^2 N$ es la constante de 't Hooft. La dualidad *AdS/CFT* establece que ambas teorías son dinámicamente equivalentes. Es decir que toda la física de la teoría de cuerdas tiene su contra parte en la teoría de campos. Sin embargo en el caso general en que los parámetros (2,1) toman valores arbitrarios estaríamos trabajando con la teoría de cuerdas completa, es decir en el régimen cuántico, pero en ese caso la teoría es poco manejable por lo que es necesario tomar ciertos límites en (2.1) de manera tal de estar en el régimen perturbativo ($g_s \ll 1$) de la teoría de cuerdas que es en el cuál mejor se entiende la misma.

En primer lugar se puede considerar el límite de 't Hooft en el cuál la constante $\lambda \equiv g_{YM}^2 N$ se deja fija mientras se toma el límite $N \rightarrow \infty$, en este límite la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM está bien definida perturbativamente y se corresponde con la expansión topológica de los diagramas de Feynmann de la teoría [13]. En la teoría de cuerdas este límite puede interpretarse re-expresando el acoplamiento de la cuerda en términos de la constante de 't Hooft $g_s = \lambda/N$, como λ se mantiene fijo este límite se corresponde con acoplamiento débil en la teoría de cuerdas perturbativa.

Una vez que se tomo este límite el único parámetro libre es λ , en la teoría de campos el límite perturbativo de la misma se corresponde con $\lambda \ll 1$ sin embargo en *AdS* es natural tomar $\lambda \gg 1$ en el cual el largo de la cuerda l_s es muy chico en relación al radio L de *AdS*, es decir que en dicho límite obtenemos el límite de partícula puntual en la teoría de cuerdas tipo *IIB* que es simplemente supergravedad tipo *IIB* compactificada en $AdS_5 \times S^5$.

<ul style="list-style-type: none"> • $\mathcal{N} = 4$ SYM, para todo N, g_{YM} • $g_s = g_{YM}^2$ 	\leftrightarrow	<ul style="list-style-type: none"> • Teoría de cuerdas tipo <i>IIB</i> cuántica en $AdS_5 \times S^5$ • $L^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2$
<ul style="list-style-type: none"> • Límite de 't Hooft $\lambda = g_{YM}^2 N$ fijo, $N \rightarrow \infty$ expansión $1/N$ 	\leftrightarrow	<ul style="list-style-type: none"> • Teoría de cuerdas clásica tipo <i>IIB</i> en $AdS_5 \times S^5$ • expansión en loops
<ul style="list-style-type: none"> • Límite de $\lambda \rightarrow \infty$ con $N \rightarrow \infty$ • Expansión en $\lambda^{1/2}$ 	\leftrightarrow	<ul style="list-style-type: none"> • Supergravedad tipo <i>IIB</i> en $AdS_5 \times S^5$ • Expansión en α'

Para entender dinámicamente la asignación realizada en (2.1) consideremos la teoría de cuerdas tipo *IIB* en un espacio tiempo $(9 + 1)$ -dimensional tipo Min-

kowski en el cual introducimos una $D3$ -brana ¹ En este caso la teoría perturbativa consiste de dos tipos de cuerdas distintas, cuerdas abiertas que terminan en la $D3$ -branas y cuerdas cerradas. Las cuerdas abiertas pueden verse como excitaciones de la teoría en el hiperplano $(3 + 1)$ -dimensional generado por la brana mientras que las cuerdas cerradas son excitaciones del espacio tiempo plano en $(9 + 1)$ -dimensiones. Si tomamos el límite de baja energía $E \ll \alpha'^{-1/2}$ de la teoría solo tendremos en cuenta excitaciones no masivas de las cuerdas, en este caso la acción de la teoría vendrá dada por:

$$S = S_{cerrada} + S_{abierta} + S_{int} \quad (2.2)$$

donde $S_{cerrada}$ es la acción de los modos asociados a las cuerdas cerradas, $S_{abierta}$ los de las cuerdas abiertas y S_{int} la interacción entre ambas. En el caso de las cuerdas cerradas la acción se corresponde con supergravedad en 10 dimensiones más términos de orden mayor [21], que expandiendo la métrica según $g = \eta + \kappa h$ obtenemos:

$$S_{cerrada} \sim -\frac{1}{2} \int d^{10}x \partial_M h \partial^M + \dots \quad (2.3)$$

Mientras que las acciones $S_{abierta}$ y S_{int} puede obtenerse a partir de la acción de Dirac-Born-Infeld junto con el término de Wess-Zumino para la brana [16] y expandiendo de igual manera que en el caso anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} S_{abierta} &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^4x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^i + \dots \right) \\ S_{int} &= -\frac{1}{8\pi\alpha'} \int d^4x \phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

En donde ϕ^i son las excitaciones transversales a la $D3$ -brana y $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético que se genera a partir del campo de gauge A_μ que está en la brana [25]. En el caso en que consideremos N branas en vez de una los campos escalares ϕ^i y los campos de gauge A_μ están ahora en $U(N)$, es decir $\phi^i = \phi^{ia} T_a$, $A_\mu = A_\mu^a T_a$ donde T_a son los generadores del grupo. En este caso es necesario también tomar la traza sobre el grupo de gauge para asegurar la invariancia de gauge, cambiar las derivadas parciales por derivadas covariantes y considerar un potencial escalar $V \sim \frac{1}{\alpha'} \sum \text{Tr}[\phi^i, \phi^j]^2$. Si ahora tomamos el límite de $\alpha' \rightarrow 0$ de la acción e identificamos:

$$g_s = g_{YM}^2 \quad (2.5)$$

vemos que la acción $S_{abierta}$ es simplemente la parte bosónica de la acción de $\mathcal{N} = 4$ SYM (1.38), $S_{cerrada}$ es la acción de supergravedad en $(9 + 1)$ -dimensiones y

¹La teoría de cuerdas cuenta con objetos no perturbativos denominados Dp -branas que son hiperplanos $(p + 1)$ -dimensionales donde las cuerdas abiertas terminan/empiezan.

$S_{int} \sim 0$. Es decir que en el límite en que $\alpha' \rightarrow 0$ las cuerdas abiertas y cerradas se desacoplan. La dinámica de las cuerdas abiertas da lugar a $\mathcal{N} = 4$ SYM mientras que la dinámica de las cuerdas cerradas es descrita por supergravedad en $(9 + 1)$ -dimensiones.

Desde el punto de vista de la supergravedad, la situación es similar: obtenemos dos teorías efectivas de bajas energías que se desacoplan entre sí. La solución asociada a una configuración de N $D3$ -branas en la teoría tipo IIB viene dada por:

$$\begin{aligned} ds^2 &= H(r)^{-1/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H(r)^{1/2} \delta_{ij} dx^i dx^j, \\ e^{2\phi(r)} &= g_s^2, \\ C_{(4)} &= (1 - H(r)^{-1}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \dots, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde $\mu, \nu = 0, \dots, 3$ y $i, j = 4, \dots, 9$. La coordenada radial r está definida según $r^2 = \sum_{i=4}^9 x_i^2$ y los \dots en la expresión para la $C_{(4)}$ forma corresponden a los términos que aseguran la auto-dualidad del tensor $F_{(5)} = dC_{(4)}$, y la función radial $H(r)$ viene dada por:

$$H(r) = 1 + \left(\frac{L}{r}\right)^4 \quad (2.7)$$

En donde L es una constante que no podemos determinar en el marco de supergravedad, sin embargo a partir de teoría de cuerdas sabemos que el flujo de $F_{(5)}$ a través de la esfera S^5 debe estar cuantizado ya que el mismo cuenta la cantidad de $D3$ -branas coincidentes, por lo que:

$$L^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2 \quad (2.8)$$

La solución (2.6) consiste de dos regiones distintas, r chico y grande respectivamente. Si $r \gg L$ entonces podemos aproximar $H(r) \sim 1$ y la métrica (2.6) se reduce al espacio plano 10-dimensional. Por otro lado en el caso en que $r \ll L$ estamos cerca del horizonte, en este caso tenemos que $H(r) \sim L^4/r^4$ y (2.6) se reduce a:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{r^2}{L^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{L^2}{r^2} \delta_{ij} dx^i dx^j \\ &= \frac{L^2}{y^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2) + L^2 ds_{S^5}^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

En donde en la segunda línea introdujimos la coordenada $y = L^2/r$ junto con coordenadas esféricas (r, Ω_5) :

$$\delta_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + r^2 ds_{S^5}^2 \quad (2.10)$$

A partir de esto podemos ver que tenemos cuerdas propagándose en el espacio plano 10-dimensional y cuerdas en la región cerca del horizonte, en el límite de bajas energías ambas cuerdas se desacoplan y la geometría cerca del horizonte es $AdS_5 \times S^5$. Es decir que en el límite de bajas energías encontramos dos teorías efectivas distintas, una de ellas es supergravedad tipo *IIB* en $AdS_5 \times S^5$ mientras que la otra es $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills en un espacio tiempo plano de $(3 + 1)$ dimensiones.

2.2. Wilson Loops Holográficos

La dualidad AdS/CFT relaciona la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM con la teoría de cuerdas tipo IIB compactificada en un espacio $AdS_5 \times S^5$. Al relacionar la teoría de campos en acoplamiento fuerte con la teoría de cuerdas en el límite de supergravedad es posible obtener valores de expectación para el Wilson Loop en el caso de acoplamiento fuerte analizando el comportamiento del mismo en la teoría dual. En esta teoría las cuerdas se propagan en $AdS_5 \times S^5$ en donde el borde de AdS realiza la configuración para $\mathcal{N} = 4$ SYM. Esto llevó a Rey-Ye [rey] y Maldacena [17] a proponer que la descripción dual al Wilson Loop es la generada por la hoja de mundo de una cuerda que se extiende en AdS cuyos extremos terminan en el borde de AdS en el loop que recorre la trayectoria asociada al operador. Es decir que la prescripción holográfica viene dada por [17]:

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle = e^{-S(\mathcal{C})} \quad (2.11)$$

En donde el valor de expectación del Wilson Loop se calculará en el límite de supergravedad de la teoría de cuerdas, en este límite la cuerda que se propaga en el bulk describe una hoja de mundo que viene dada por la acción de Nambu-Goto. Si G_{MN} ($M, N = 0 \dots 9$) es la métrica de $AdS_5 \times S^5$ para un conjunto de coordenadas X^M , y tomamos σ, τ como los parámetros que parametrizan la hoja de mundo de la cuerda la acción viene dada por:

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{\det(G_{MN} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N)} \quad (2.12)$$

Esta acción no es otra cosa mas que el área descrita por la hoja de mundo, es decir que el problema de evaluar el valor de expectación del Wilson Loop se reduce a calcular un área mínima en $AdS_5 \times S^5$. El cálculo de dicha área se reduciría a un problema trivial si el espacio fuese plano pero como la cuerda se extiende en el bulk cuya geometría es hiperbólica encontrar dicha superficie es un problema no trivial. Sin embargo la distancia al horizonte (y por ende a la teoría de campos) es infinita por lo que el área calculada mediante (2.12) también lo será y es necesario encontrar un método para regularizarla pudiendo así comparar el resultado con lo obtenido en la teoría de campos.

2.2.1. Regularización y condiciones de contorno

Una manera de regularizar el área de la hoja de mundo es notar que en el cálculo de supergravedad la divergencia está relacionada con la masa infinita del boson W en el que terminan las cuerdas abiertas, es por eso que es posible regularizar el área extrayendo dicha masa del resultado final [17]:

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle \propto \lim_{\Phi \rightarrow \infty} e^{-(S(\Phi) - l\Phi)} \quad (2.13)$$

En donde S es el área de la hoja de mundo, l es la longitud de la curva \mathcal{C} medida con la métrica plana y Φ es la masa del bosón W. Esto puede verse también considerando una métrica general para el espacio:

$$\frac{ds^2}{\alpha'} = \sqrt{\lambda} Y^{-2} \left(\sum_{\mu=0}^3 dX^\mu dX^\mu + \sum_{i=0}^6 dY^i dY^i \right) \quad (2.14)$$

Vemos que cómo el área termina en el borde de AdS tenemos una divergencia infrarroja debido al término Y^{-2} en la métrica (2.14). Una manera natural de regularizar esta acción es imponer un cutoff en $Y = \epsilon$ y en vez de calcular el área hasta el borde $Y = 0$ calcularla hasta dicho cutoff. Por otro lado el Wilson Loop en el lado de la teoría de campos necesita ser regularizado en el ultravioleta, de acuerdo a la relación UV/IR en AdS/CFT [4] el cutoff ϵ del IR en AdS debe ser identificado con el cutoff ultravioleta de SYM. Otra manera posible de regularizar el área es imponiendo las condiciones de contorno directamente en $Y = \epsilon$, ambos resultados dan lo mismo a menos de términos finitos que desaparecen junto con $\epsilon \mapsto 0$. Estos esquemas de regularización pueden verse en la figura (2.1).

2.2.2. Condiciones de contorno

Para encontrar efectivamente la hoja de mundo descrita por el Wilson Loop que termina en la curva \mathcal{C} es necesario, aparte de elegir un buen sistema de coordenadas, determinar las condiciones de contorno que deben cumplir los extremos de la cuerda en el borde de $AdS_5 \times S^5$, analizando esto obtendremos otra interpretación del resultado (1.51) así como también una manera sistemática de regularizar el área. Es importante notar que estas condiciones de contorno serán igualmente relevantes en el caso en que consideremos la descripción dual en términos de Dp -branas aún en el caso en que la acción correspondiente no sea divergente.

La teoría Super Yang-Mills en 10 dimensiones se realiza en términos de $D - 9$ -branas que llenan el espacio². En este espacio de 10 dimensiones el Wilson Loop se

²Esta teoría es anómala pero al reducirla a $D = 4$ las anomalías desaparecen por lo que las ignoraremos [7]

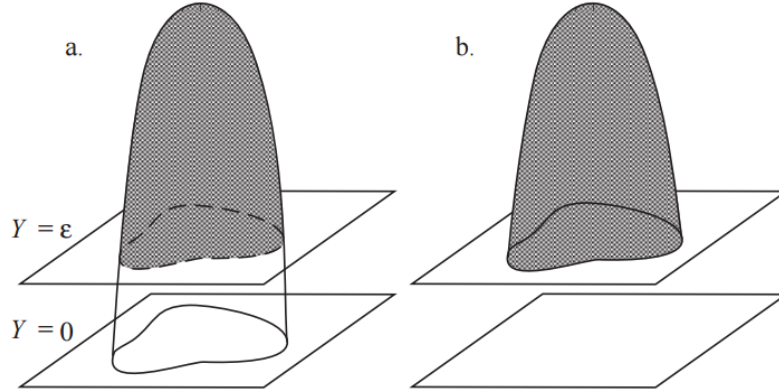


Figura 2.1: Dos esquemas distintos para la regularización del área. En (a) se introducen las condiciones de contorno en $Y = 0$, mientras que en (b) se introducen en $Y = \epsilon$.

corresponde con la hoja de mundo que termina en el loop, es decir que deberíamos imponer 10 condiciones de tipo Dirichlet. Esto puede entenderse considerando una cuerda abierta propagándose en un espacio 10 dimensional, en este caso la cuerda y sus extremos son libres de moverse en todas las direcciones mientras que estos últimos se encuentran sobre una $D9$ -brana que llena el espacio por lo que en este caso las condiciones de contorno son tipo Neumann, al introducir la curva asociada al Wilson Loop es necesario que los extremos estén fijos a ella por lo que las condiciones deben ser tipo Dirichlet.

Para reducir la teoría a 4 dimensiones es necesario realizar 6 T-dualidades de manera que las $D9$ -Branas luego de la dualidad son $D3$ -Branas y las 10 condiciones de contorno tipo Dirichlet pasan a ser 4 tipo Dirichlet y 6 tipo Neumann [7] de acuerdo con el funcionamiento de la T-dualidad [16]. Si consideramos al Wilson Loop parametrizado por las variables $(x^\mu(s), y^i(s))$ donde $\dot{y}^i(s)$ se acopla con los 6 escalares de la teoría entonces estas coordenadas $\dot{y}^i(s)$ deben considerarse como las asociadas a las condiciones tipo Neumann.

Para considerar las condiciones de contorno tomemos la métrica de $AdS_5 \times S^5$ que viene dada por (2.14), y tomemos coordenadas (σ^1, σ^2) para la hoja de mundo de la cuerda de manera tal que la curva se encuentra en $\sigma^2 = 0$. Como estamos identificando las coordenadas X^μ en el borde con el espacio tiempo de cuatro dimensiones donde está definida la teoría de Yang-Mills, imponer las cuatro condiciones de Dirichlet implica:

$$X^\mu(\sigma^1, 0) = x^\mu(\sigma^1) \quad (2.15)$$

Para imponer las condiciones tipo Neumann en las coordenadas $Y^i(\sigma^1, \sigma^2)$ restantes es necesario cumplir con [7]:

$$J_1^\alpha \partial_\alpha Y^i(\sigma^1, 0) = \dot{y}^i(\sigma^1) \quad (2.16)$$

donde $\alpha = 1, 2$ y J_α^β es una estructura compleja definida sobre la hoja de mundo de la cuerda. Si llamamos $g_{\alpha\beta}$ a la métrica inducida sobre la hoja de mundo J puede definirse en términos del tensor antisimétrico ϵ como:

$$J_\alpha^\beta = \frac{1}{\sqrt{g}} g_{\alpha\gamma} \epsilon^{\gamma\beta} \quad (2.17)$$

Si bien la condición (2.16) no tiene una derivación a partir de primeros principios, la misma puede motivarse considerando el grupo de las rotaciones en la 5-esfera qué es $SO(6)$ e identificarlo con la simetría R asociada a las rotaciones en el espacio de supercargas de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM a través de dualidad AdS/CFT, y el uso de la estructura compleja J proviene de la invariancia ante reparametrizaciones de la hoja de mundo.

Dada una elección arbitraria de la curva $(x^\mu(s), y^i(s))$ existe una única superficie mínima que cumple estas 10 condiciones de contorno, sin embargo, a priori esta superficie no tiene por qué terminar en $Y^i = 0$. Esta condición se satisface por el área mínima si y solo si la curva verifica la restricción (1.51). Para ver esto recordemos que la teoría en la hoja de mundo es invariante frente a reparametrizaciones [26], en particular debe ser invariante frente a reparametrizaciones temporales, es decir que el hamiltoniano de la teoría debe anularse. Entonces, la ecuación de Hamilton-Jacobi implica que el hamiltoniano \mathcal{H} escrito en términos de los momentos canónicamente conjugados y las coordenadas debe ser idénticamente nulo. Para una variedad de Riemann genérica descrita por coordenadas X^M dotada con una métrica G_{MN} , el lagrangiano viene dado por (2.12), \sqrt{g} con $g_{\alpha\beta} = G_{MN} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N$ la métrica inducida, de donde podemos obtener los momentos cómo:

$$P_M \equiv \frac{\delta A}{\delta X^M} = \frac{\partial A}{\partial(\partial_\sigma^2 X^M)} = G_{MN} (g_{\sigma^1 \sigma^1} \partial_\sigma^2 X^N - g_{\sigma^1 \sigma^2} \partial_\sigma^1 \partial_\sigma^1 X^N) = G_{MN} J_{\sigma^1}^\alpha \partial_\alpha X^N \quad (2.18)$$

El hamiltoniano es entonces $\mathcal{H} = P_M \partial_\sigma^1 X^M - \mathcal{L}$, y al tener que $P_M \partial_\sigma^1 X^M = 0$ podemos obtener la siguiente expresión:

$$\mathcal{H} = \frac{\sqrt{g}}{g_{\sigma^1 \sigma^1}} (G_{MN} P^M P^N - g_{\sigma^1 \sigma^1}) \quad (2.19)$$

Es decir que la condición $\mathcal{H} = 0$ puede escribirse cómo [7]:

$$G^{MN} \frac{\delta A(\sigma^1, \sigma^2)}{\delta X^M} \frac{\delta A(\sigma^1, \sigma^2)}{\delta X^N} = G_{MN} \partial_\sigma^1 X^M \partial_\sigma^1 X^N \quad (2.20)$$

Utilizando la expresión (2.14) para la métrica de $AdS_5 \times S^5$ obtenemos:

$$\left(\frac{\delta A}{\delta X^\mu}\right)^2 + \left(\frac{\delta A}{\delta Y^i}\right)^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 Y^4} ((\partial_1 X^\mu)^2 + (\partial_1 Y^i)^2) \quad (2.21)$$

A partir de la acción de Nambu-Goto (2.12) es posible obtener los momentos:

$$\frac{\delta A}{\delta X^\mu} = \frac{1}{2\pi Y^2} J_1^\alpha \partial_\alpha X^\mu, \quad \frac{\delta A}{\delta Y^i} = \frac{1}{2\pi Y^2} J_1^\alpha \partial_\alpha Y^i \quad (2.22)$$

y reemplazando esto en la condición (2.21) obtenemos:

$$\left(J_1^\alpha \partial_\alpha X^\mu\right)^2 + \left(J_1^\alpha \partial_\alpha Y^i\right)^2 = ((\partial_1 X^\mu)^2 + (\partial_1 Y^i)^2) \quad (2.23)$$

Si la superficie mínima en cuestión cumple las condiciones de contorno (2.15) y (2.16) obtenemos:

$$\dot{x}^2 - \dot{y}^2 = (J_1^\alpha \partial_\alpha X^\mu)^2 - (\partial_1 Y^i)^2 \quad (2.24)$$

Si ahora imponemos la condición adicional que la cuerda termine en el borde de AdS_5 , es decir $Y^i(\sigma^1, \sigma^2 = 0) = 0$ tendremos que $\partial_1 Y^i = 0 \forall i$, es decir que obtenemos automáticamente la condición $\dot{x}^2 - \dot{y}^2 \geq 0$. De igual manera si consideramos que cerca del borde de AdS_5 el tenemos un valor no nulo de $J_1^\alpha \partial_\alpha X^\mu$ se puede ver que esto implica una variación muy grande del área por lo que es razonable pedir que dicho termino se anule. Es por esto que a la hora de calcular valores de expectación de Wilson loops en el régimen de acoplamiento fuerte a partir de superficies mínimas en la teoría de cuerdas dual (y a bajas energías) nos centraremos en loops que cumplan la restricción (2.24): $\dot{x}^2 = \dot{y}^2$. En el caso en que esta condición se cumple se pueden re-interpretar las 6 condiciones tipo Neumann (2.16) como condición Dirichlet en la esfera S^5 , para ver esto se pueden descomponer las coordenadas Y^i como:

$$Y^i = Y \theta^i \quad (2.25)$$

En donde las coordenadas θ^i se mueven sobre la esfera S^5 de manera tal que $\theta^i \theta^i = 1$ e Y es una coordenada en AdS_5 tal que $Y = 0$ define el borde. Si el loop es suave y restringiendonos al borde:

$$\partial_\alpha Y^i = (\partial_\alpha Y) \theta^i \quad (2.26)$$

Usando la condición $\theta^i \theta^i = 1$ la condición (2.15) obtenemos:

$$\theta^i(\sigma^1, \sigma^2 = 0) = \frac{\dot{y}}{|\dot{y}|} \quad (2.27)$$

2.2.3. Regularización del área mínima

En la prescripción original para el Wilson Loop holográfico [rey, 17] el operador en la teoría de campos se relaciona con la hoja de mundo descrita por una cuerda que termina en la curva \mathcal{C} , sin embargo dicha prescripción no determina completamente el valor de $\langle W \rangle$ en el límite de λ grande ya que hay muchas acciones cuyas ecuaciones de movimiento son resueltas por superficies mínimas, en general dichas acciones difieren en términos de derivadas totales o términos de borde pero, dado que la superficie tiene un borde estos términos en la acción pueden ser relevantes.

Hasta ahora consideramos que la acción correspondiente es la de Nambu-Goto (2.12) y el valor de $\langle W \rangle$ es el correspondiente a la solución de las ecuaciones de movimiento de dicha acción. Sin embargo se puede ver [7] que para obtener el valor correcto de $\langle W \rangle$ es necesario realizar una transformación de Legendre sobre la acción, obteniendo así el valor deseado y regularizado.

Por lo visto en la sección anterior las variables \dot{y}^i imponen condiciones tipo Neumann (2.16) para el extremo de la cuerda Y^i esto implica que en el borde esencialmente estamos imponiendo condiciones sobre las velocidades, por lo que resulta natural pensar que el valor $\langle W \rangle$ debe ser una funcional de las variables X^μ y los momentos canónicamente conjugados a Y^i definidos según:

$$P_i = \frac{\delta A}{\delta \partial_2 Y^i} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda\alpha'}} \sqrt{g} g^{2\alpha} \partial_\alpha Y^j G_{ij} \quad (2.28)$$

La acción (2.12) es naturalmente una funcional de las coordenadas X^μ y Y^i por lo que es necesario realizar una transformada de Legendre para cambiar la dependencia de Y^i a P_i es decir $\mathcal{L} \mapsto \tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - (\partial_2 P_i Y^i)$, o lo que es igual:

$$\tilde{A} = A - \oint d\sigma_1 P_i Y^i \quad (2.29)$$

Para verificar que efectivamente este cambio realiza la modificación deseada podemos analizar la variación de A con respecto a Y^i :

$$\begin{aligned} \delta \tilde{A} &= \delta A - \delta \left(\oint d\sigma_1 P_i Y^i \right) \\ &= \int d\sigma_1 d\sigma_2 \left(\frac{\delta A}{\delta Y^i} - \partial_\alpha \frac{\delta A}{\delta \partial_\alpha Y^i} \right) \delta Y^i(\sigma_1, \sigma_2) + \oint d\sigma_1 \frac{\delta A}{\delta \partial_2 Y^i} \delta \partial_2 Y^i(\sigma_1, 0) - \oint d\sigma_1 \delta(P_i Y^i) \end{aligned} \quad (2.30)$$

El primer término se anula debido a las ecuaciones de movimiento, mientras que en el segundo término vemos la definición de P_i (2.28) que se anula con el término de la transformada de Legendre, es decir que juntando todo esto obtenemos:

$$\delta \tilde{A} = - \oint d\sigma_1 Y^i(\sigma_1, 0) \delta P_i(\sigma_1, 0) \quad (2.31)$$

Es decir que efectivamente la funcional \tilde{A} depende de X^μ y P_i como queríamos. Para determinar la diferencia entre ambas funcionales A , \tilde{A} necesitamos las condiciones de contorno tipo Neumann (2.16) escritas en términos del momento P_i :

$$\frac{\dot{y}^i}{2\pi} = P^i = Y^2 P^i \quad (2.32)$$

Donde utilizamos la métrica del espacio (2.14) y en conjunto con (2.29) obtenemos:

$$\tilde{A} = A - \frac{1}{2\pi} \oint d\sigma_1 \frac{\dot{y}}{Y^2} Y^i = A - \frac{1}{2\pi} \oint d\sigma_1 \frac{|\dot{y}|}{Y} \quad (2.33)$$

En donde en el último paso utilizamos la condición $\theta^i \theta^i = 1$ en conjunto con (2.27). Como queremos ver qué sucede con la divergencia introducimos un cutoff en $Y = \epsilon$ sobre el que luego tomaremos el límite $\epsilon \rightarrow 0$, por lo visto en (1.49) la divergencia está relacionada con la longitud l de la curva \mathcal{C} de manera que juntando dicho término con (2.33):

$$\tilde{A} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \oint d\sigma_1 (|\dot{x}| - |\dot{y}|) + a \quad (2.34)$$

Donde a es el término finito asociado al área y el término potencialmente divergente se anula cuando se cumple la restricción (2.18).

2.2.4. La construcción de Mikhailov

Dada una curva \mathcal{C} caracterizada por $(x^\mu(s), y^i(s))$ calcular el valor de expectación del Wilson Loop $\langle W \rangle$ en la teoría de cuerdas se reduce a encontrar el embedding X^M correspondiente al área mínima que termina en dicha curva. Dicho problema puede ser altamente no trivial dependiendo del carácter de la curva elegida, sin embargo Mikhailov [20] encontró dicha solución para una trayectoria arbitraria tipo tiempo $x^\mu(\tau_r)$ parametrizada por el tiempo propio τ_r . Para analizar dicha solución consideremos nuevamente la acción de Nambu-Goto (2.12) introduciendo la notación usual: $\cdot \equiv \partial_{\sigma^1} \equiv \partial_\tau$, $' \equiv \partial_\sigma^2 \equiv \partial_\sigma$

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma^2 \sqrt{-\det(G_{MN} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N)} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\dot{X} \cdot X'\right)^2 - \dot{X}^2 X'^2} \quad (2.35)$$

Generalmente trabajaremos en el gauge estático, es decir $\tau = t$, $\sigma = z$ por lo que el embedding de la cuerda vendrá dado por $\vec{X}(t, \vec{x})$. A partir de (2.35) se pueden obtener las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{X}}{z^2 \sqrt{1 + X'^2 + \dot{X}^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{X'}{z^2 \sqrt{1 + X'^2 + \dot{X}^2}} \right) = 0 \quad (2.36)$$

Que puede re-escribirse como:

$$\ddot{X} - X'' + \ddot{X}X'^2 + X''\dot{X}^2 - 2\dot{X}X'\dot{X}' + \frac{2X'}{z} + \frac{2X'^3}{z} - \frac{2X'\dot{X}^2}{z} = 0 \quad (2.37)$$

La solución propuesta por Mikhailov [20] viene dada por:

$$X^\mu(\tau_r, z) = x^\mu(\tau_r) + zv^\mu(\tau_r) \quad (2.38)$$

donde $v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau_r}$ es la 4-velocidad asociada a la partícula que recorre la trayectoria en la teoría de gauge de manera tal que $\eta_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = -1$, para interpretar dicha solución es conveniente escribirla de manera no covariante:

$$\begin{aligned} t(t_r, z) &= t_r + \frac{z}{\sqrt{1 - \vec{v}(t_r)^2}}, \\ \vec{X}(t_r, z) &= \vec{x}(t_r) + \frac{\vec{v}(t_r)z}{\sqrt{1 - \vec{v}(t_r)^2}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde usamos que $d\tau_r = \frac{dt_r}{\gamma}$, $v^\mu = \gamma(1, \vec{v})$. A partir de (2.39) podemos ver que el comportamiento de la cuerda para un dado tiempo $t = X^0$ y penetración en el bulk z está parametrizado en términos del comportamiento del quark/extremo de la cuerda en un tiempo previo, tiempo retardado t_r de manera análoga al comportamiento de Lienard-Wiechert en electrodinámica clásica. Es decir que el embedding (2.38) propuesto por Mikhailov describe una onda que codifica el campo gluónico del quark y que se propaga a lo largo de la cuerda de manera puramente saliente. Para verificar que efectivamente (2.38,2.39) es solución de las ecuaciones de movimiento (2.37) notamos que:

$$\begin{aligned} dt &= dt_r \left[\frac{vaz}{(1 - v^2)^{3/2}} + 1 \right] + \frac{dz}{\sqrt{1 - v^2}} \\ dX &= dt_r \left[\frac{az}{\sqrt{1 - v^2}} + \frac{v^2az}{(1 - v^2)^{3/2}} + v \right] + \frac{vdz}{\sqrt{1 - v^2}} \end{aligned} \quad (2.40)$$

En donde se entiende que tanto la velocidad, la aceleración, etc del quark se encontrarán evaluadas en el tiempo t_r . A partir de esto podemos encontrar expresiones para \dot{X} y X' :

$$\begin{aligned} \dot{X} &\equiv \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)_z = \left(\frac{\partial t_r}{\partial t} \right)_z \left(\frac{\partial X}{\partial t_r} \right)_z = \frac{az + v(1 - v^2)^{3/2}}{vaz + (1 - v^2)^{3/2}} \\ X' &\equiv \left(\frac{\partial X}{\partial z} \right)_t = \left(\frac{\partial X}{\partial z} \right)_{t_r} - \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)_{t_r} \dot{X} = -\frac{az(1 - v^2)^{1/2}}{vaz + (1 - v^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Y de manera análoga:

$$\begin{aligned}
\ddot{X} &\equiv \left(\frac{\partial \dot{X}}{\partial t} \right)_z = \frac{-a^3 z^2 (1-v^2)^{3/2} + 3va^2 z (1-v^2)^3 + jz(1-v^2)^4 + a(1-v^2)^{9/2}}{[vaz + (1-v^2)^{3/2}]^3} \\
X'' &\equiv \left(\frac{\partial \dot{X}}{\partial z} \right)_t = \frac{-a^3 z^2 (1-v^2)^{1/2} + va^2 z (1-v^2)^2 + jz(1-v^2)^3 - a(1-v^2)^7}{[vaz + (1-v^2)^{3/2}]^3} \\
\dot{X}' &\equiv \left(\frac{\partial X'}{\partial t} \right)_z = \frac{-a^3 z^2 (1-v^2) - 2va^2 z (1-v^2)^{5/2} - jz(1-v^2)^{7/2}}{[vaz + (1-v^2)^{3/2}]^3}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

De manera tal que sustituyendo (2.41) y (2.42) en las ecuaciones de movimiento (2.37) se verifica que efectivamente el embedding (2.38) propuesto por Mikhailov es solución, es decir que para una trayectoria arbitraria tipo tiempo ya conocemos el embedding de la cuerda.

A partir de la expresión (2.38) es posible obtener la métrica inducida en la hoja de mundo $g_{\alpha\beta} = G_{MN} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N$:

$$g_{\tau_r \tau_r} = \frac{R^2}{z^2} (z^2 a^2 - 1), \quad g_{zz} = 0, \quad g_{\tau_r z} = -\frac{R^2}{z^2} \tag{2.43}$$

A partir de esta expresión podemos notar varias cosas que serán de utilidad en los capítulos posteriores, en primer lugar vemos que las curvas con $\tau_r = cte$ son geodésicas nulas en la hoja de mundo, pero también son geodésicas nulas en el espacio-tiempo [9], esto puede verse tomando coordenadas de Poincaré para AdS_5 :

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (-dt^2 + dx_1^2 dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2) \tag{2.44}$$

Es decir que podemos interpretar la solución de Mikhailov (2.38) como la solución obtenida al tirar rayos de luz desde el borde de AdS hacia dentro del bulk en donde el punto de inicio y la pendiente de cada rayo viene determinada por la posición y la velocidad del quark respectivamente, esta observación es la que posteriormente nos permitirá obtener una solución análoga a la de Mikhailov pero para representaciones más grandes del grupo de gauge.

Por otro lado observando (2.43) vemos que la componente temporal de la misma se anulará para valores radiales dados por $z = \frac{1}{a}$ es decir que en los casos en los que tenemos un movimiento acelerado encontraremos un horizonte de eventos en la hoja de mundo lo que hará no-trivial la evaluación on-shell de la solución (2.38).

Capítulo 3

Wilson Loop rectangular y soluciones supersimétricas

A partir de la prescripción holográfica descrita en el capítulo anterior es posible determinar el valor de expectación del Wilson Loop. En primer lugar consideraremos un rectángulo de lados L y T respectivamente, tomando $\theta^i(s) = \theta_0^i$ constante en la esfera, de manera análoga a lo visto en la sección (1.2.1) este caso corresponde con la energía potencial entre un par partícula anti-partícula. El punto de partida será la acción de Nambu-Goto:

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{\det(G_{MN} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N)} \quad (3.1)$$

y una métrica para el espacio $AdS_5 \times S^5$:

$$ds^2 = G_{MN} dx^M dx^N = \alpha' \left[\frac{U^2}{R^2} (dt^2 + dx_i dx_i) + \frac{R^2}{U^2} dU^2 + R^2 d\Omega_5^2 \right] \quad (3.2)$$

donde $R = (4\pi gN)^{1/4}$ es el radio de AdS en unidades de la tensión de la cuerda y $U = \frac{r}{\alpha'}$ tiene unidades de energía, es decir que las N $D3$ -branas se encuentran ubicadas en $U = 0$, puede observarse también que el factor α' se cancelará en la acción de Nambu-Goto. Para determinar la solución supongamos que el rectángulo se encuentra ubicado en $x^2 = x^3 = 0$, es decir el plano (t, x^1) , recordando que estamos tomando las coordenadas en la 5-esfera constantes la métrica (3.2) se reducirá a: $G_{tt} dt^2 + G_{xx} dx^2 + G_{UU} dU^2$. Para facilitar la búsqueda de la solución elegimos un gauge estático $\sigma^1 = t$, $\sigma^2 = x$ y si estamos interesados en una solución estática al problema podemos proponer que $U(t, x) = U(x)$. Con todo esto podemos calcular

la métrica inducida en la hoja de mundo:

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= \alpha' \frac{U^2}{R^2} (\partial_t t)^2 = \alpha' \frac{U^2}{R^2} \\
g_{xx} &= \alpha' \frac{U^2}{R^2} (\partial_x x)^2 + \alpha' \frac{R^2}{U^2} (\partial_x U)^2 = \alpha' \left(\frac{U^2}{R^2} + \frac{R^2}{U^2} \dot{U}^2 \right) \\
g_{tx} &= g_{xt} = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

en donde introducimos la notación $\dot{U} = \partial_x U$ y para el último término utilizamos que la métrica (3.2) es diagonal. Como (3.3) no depende explícitamente del tiempo la integral en $d\sigma^1 = dt$ será trivial, y recordando que el largo del rectángulo es T reemplazando en (3.1) obtenemos:

$$S = \frac{T}{2\pi} \int dx \sqrt{\dot{U}^2 + \frac{U^4}{R^4}} \tag{3.4}$$

La acción de Nambu-Goto se redujo a un problema de un lagrangiano $\mathcal{L} = \mathcal{L}(U, \dot{U}, x)$ por lo que para encontrar la superficie mínima es necesario resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange. Como en (3.4) no aparece explícitamente x , que para nuestro lagrangiano cumple el rol del tiempo, tenemos una cantidad conservada que es el hamiltoniano asociado a (3.4), es decir:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{U}} \dot{U} - \mathcal{L} \tag{3.5}$$

por lo que obtenemos:

$$\frac{U^4}{\sqrt{\dot{U}^2 + \frac{U^4}{R^4}}} = k^2 \tag{3.6}$$

Para determinar la constante consideremos que la coordenada $x \in (-L/2, +L/2)$ que se corresponde con imponer la condición $U(\pm \frac{L}{2}) \rightarrow \infty$. Además el problema así planteado tiene simetría de reflexión $x = -x$ por lo que el valor mínimo de $U(x)$ se realizará en $x = 0$ es decir que $\partial_x U \Big|_{x=0} = 0$. Si definimos U_0 como dicho mínimo, a partir de (3.6) obtenemos $U_0^2 = k^2 R^2$ por lo que podemos obtener despejando en (3.6) e introduciendo una nueva variable $y = \frac{U}{U_0}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= \sqrt{\left(\frac{U^4}{R^2 U_0^2} \right)^2 - \frac{U^4}{R^4}} \\
x &= \frac{R^2}{U_0} \int_1^{U/U_0} \frac{dy}{y^2 \sqrt{y^4 - 1}}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde podemos determinar U_0 a partir de la condición:

$$\frac{L}{2} = \frac{R^2}{U_0} \int_1^\infty \frac{dy}{y^2 \sqrt{y^4 - 1}} = \frac{R^2 \sqrt{2\pi}^{3/2}}{U_0^2 \Gamma(1/4)^2} \quad (3.8)$$

Esta última ecuación puede obtenerse realizando el cambio de variables $t = y^{-4}$ en conjunto con las definiciones de las funciones beta y gamma:

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx \\ B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para obtener el valor de expectación $\langle W(\mathcal{C}) \rangle$ es necesario calcular el área total de esta superficie insertando la solución (3.7) en la acción (3.4) y luego regularizarla mediante los términos de borde correspondientes o extrayendo la masa asociada al bosón W , esta masa está asociada a la longitud de la cuerda que se extiende entre el horizonte en $U = 0$ y la brana ubicada en $U \rightarrow \infty$. Si en cambio la brana estuviese ubicada en algún valor arbitrario U_{max} la masa sería exactamente $U_{max}/(2\pi)$ [17] de manera tal que el resultado será:

$$E(L) = \frac{2U_0(L)}{2\pi} \left[\int_1^\infty \left(\frac{y^2 dy}{\sqrt{y^4 - 1}} - 1 \right) - 1 \right] \quad (3.10)$$

En este caso ahora la integral resulta finita y puede realizarse de acuerdo a lo propuesto en [17] obteniendo:

$$E(L) = -\frac{4\pi^2 \sqrt{2g_{YM}^2 N}}{L[\Gamma(1/4)]^4} = -\frac{4\pi^2 \sqrt{2}}{L[\Gamma(1/4)]^4} \sqrt{\lambda} \quad (3.11)$$

donde $E(L)$ es la energía potencial de un par partícula anti-partícula. La dependencia $\frac{a(\lambda)}{L}$ de esta expresión con la separación L está fijada por la invariancia conforme de la teoría. El cálculo de cuerdas es en definitiva una predicción para el valor del coeficiente $a(\lambda)$ en el límite de acoplamiento fuerte.

3.1. El Wilson Loop Circular

En general el cálculo de Wilson Loops en términos de áreas mínimas es un problema no trivial en el cual no siempre es posible obtener una solución analítica como en (3.7), sin embargo en ciertos casos en los que el operador es 1/2 BPS es posible obtener dicho resultado, un ejemplo de esto es la trayectoria circular para

la cual también es posible encontrar un resultado exacto en la teoría de gauge. Este resultado, conjeturado inicialmente en [8, 6] y posteriormente probado mediante localización en [23], al ser válido para todo valor de la constante de acoplamiento nos permite compararlo con el resultado en la teoría de cuerdas. Dada la relación existente entre lazos circulares y hiperbólicos lo usaremos como guía para estudiar a estos últimos.

Por lo visto en el ejemplo anterior, para facilitar el cálculo del Wilson Loop es necesario elegir un conjunto de coordenadas acorde a las simetrías del problema para la métrica de $AdS_5 \times S^5$ de manera tal de simplificar el cálculo de la minimización de la acción de NG (3.1). Si consideramos la trayectoria circular de radio a ubicada en el plano x^1, x^2 , es decir $a^2 = x_1^2 + x_2^2$, y fija en un punto de la 5-esfera, lo más natural es considerar coordenadas polares de manera tal de obtener:

$$ds^2 = G_{MN} dx^M dx^N = \frac{\alpha' \sqrt{\lambda}}{z^2} \left[dx_0^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dx_3^2 + dz^2 \right] \quad (3.12)$$

Para describir la hoja de mundo de la cuerda tomaremos como coordenadas $\sigma^1 = r$, $\sigma^2 = \phi$, y a partir de la simetría del problema propondremos el siguiente ansatz para el perfil $Z(r, \phi) = Z(r)$, con todo esto podemos calcular la métrica inducida:

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \alpha \sqrt{\lambda} \frac{(z'(r)^2 + 1)}{z(r)^2}, & g_{\phi\phi} &= \alpha \sqrt{\lambda} \frac{r^2}{z(r)^2} \\ g_{r\phi} &= 0, & g_{\phi r} &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Es decir que la acción (3.1) toma la forma:

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dr d\phi \frac{r}{z^2} \sqrt{1 + (\partial_r z)^2} = \sqrt{\lambda} \int_0^a dr \frac{r}{z^2} \sqrt{z'^2 + 1} \quad (3.14)$$

en donde en el último paso se realizó la integral en ϕ . A partir de la acción (3.14) podemos calcular la ecuación de movimiento:

$$-rzz'' - (2r + zz')(z'^2 + 1) = 0 \quad (3.15)$$

puede verse que la solución a la ecuación viene dada por:

$$z(r) = \sqrt{a^2 - r^2} \quad (3.16)$$

y la acción (3.14) evaluada *on-shell* viene dada por:

$$S = r a \sqrt{\lambda} \int_0^a \frac{dr}{(a^2 - r^2)^{3/2}} \quad (3.17)$$

como mencionamos en el capítulo anterior esta integral es divergente ya que no estamos considerando los términos de borde correspondientes y la respectiva transformación de Legendre (2.29). Si bien esperamos que dicha transformación cancele

la divergencia presente en (3.17) es necesario introducir un cut-off ϵ en la integral para poder obtener un resultado analítico, posteriormente considerando la acción y los términos de borde el resultado debe ser finito en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. En este caso el término de borde vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \delta A &= z \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial r} \Big|_0^{R-\epsilon} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{a} \frac{(a-\epsilon)^2}{\sqrt{(2a-\epsilon)\epsilon}} \\ &= -\sqrt{\lambda} \left(\frac{a}{\sqrt{(2a-\epsilon)\epsilon}} + \frac{\epsilon^{3/2}}{\sqrt{(2a-\epsilon)}} - \frac{2\epsilon^{1/2}}{\sqrt{2a-\epsilon}} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

los últimos dos términos en (3.18) son finitos al tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$ por lo que los despreciaremos, el valor del área mínima entonces viene dado por (3.17) integrado ahora hasta $a - \epsilon$ y (3.18) de acuerdo con (3.17):

$$S = \sqrt{\lambda} \left(\frac{a}{\sqrt{(2a-\epsilon)\epsilon}} - 1 \right) - \sqrt{\lambda} \left(\frac{a}{\sqrt{(2a-\epsilon)\epsilon}} \right) = \sqrt{\lambda} \quad (3.19)$$

Y de acuerdo a la prescripción de Maldacena (2.11) el valor de expectación para el Wilson Loop circular es:

$$\langle W \rangle = e^{-\sqrt{\lambda}} \quad (3.20)$$

3.1.1. El Wilson Loop Circular en $\mathcal{N} = 4$ Super-Yang-Mills

Para poder estudiar la validez de la dualidad *AdS/CFT* y de la solución hallada en (3.20) es necesario encontrar una manera de calcular el operador en la teoría de gauge más allá de la teoría de perturbaciones. Formalmente esto es posible utilizando argumentos de localización supersimétrica [23, 24] que en este trabajo no abordaremos, sin embargo la localización pudo obtenerse originalmente considerando los trabajos [8, 6] en los que al analizar el comportamiento perturbativo del Wilson Loop circular se observó que la contribución a 2-loops de los diagramas de interacción se anulaban de manera que los únicos diagramas que contribuían al valor de expectación eran los diagramas tipo escalera. Considerando que la cancelación de dichos diagramas de interacción sucede a todo orden en la expansión perturbativa, es posible resumarlos y obtener una conjetura para el resultado, el cual fue finalmente probado.

Para considerar todos los diagramas de Feynmann a orden $\lambda^2 = g_{YM}^4 N^2$ es necesario incluir en el análisis los fantasmas introducidos al cuantizar la teoría mediante el método de Faddeev-Popov, que notaremos por $c = c^a T^a$. Entonces el

lagrangiano a considerar viene dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2g^2} \left[\frac{1}{2} (F_{\mu\nu}^a)^2 + (\partial_\mu \phi_I^a + f^{abc} A_\mu^b \phi_I^c)^2 + \Psi^a i \Gamma^\mu (\partial_\mu \Psi^a + f^{abc} A_\mu^b \Psi^c) \right. \\ & \left. + i f^{abc} \Psi^a \Gamma^A \phi_A^b \Psi^c - \sum_{I < J} f^{abc} f^{ade} \phi_I^b \phi_J^c \phi^{Id} \phi^{Je} + \partial_\mu \bar{c}^a (\partial_\mu c^a + f^{abc} A_\mu^b c^c) + \zeta (\partial_\mu A_\mu^a)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

en donde el término asociado con ζ se utiliza para fijar el gauge, $I, J = 1, \dots, 6$ son los índices asociados a $SO(6)$ y estamos obviando los índices spinoriales. Cabe notar que el supermultiplete (A_μ, Ψ, ϕ_I) está en la representación adjunta del grupo de gauge $U(N)$, en general las convenciones que utilizaremos vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} T^a \cdot T^a &= C_2(\mathcal{R}) \mathcal{I}_{d\mathcal{R}} \\ [T^a, T^b] &= f^{abc} T^c \end{aligned} \quad (3.22)$$

En donde estas convenciones valen para una representación arbitraria \mathcal{R} del grupo de gauge y $C_2(\mathcal{R})$ es el Casimir cuadrático. En el caso en el que estemos trabajando en la representación fundamental las convenciones (3.22) se reducen a:

$$Tr(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (3.23)$$

generalmente trabajaremos en el gauge de Feynmann que se obtiene fijando $\zeta = 1$, o lo que es lo mismo $\partial_\mu A_\mu^a = 0$. Para calcular los diagramas tipo escalera a orden λ^2 será necesario introducir reglas de Feynmann que presentaremos a medida que sea necesario. Por otro lado es posible deducir qué términos aportarán al cálculo analizando la dependencia en g^2 , en primer lugar los propagadores de la teoría aportan un g^2 mientras que los vértices vendrán con un término g^{-2} . Por lo discutido en la sección (1.3) el operador Wilson Loop en $\mathcal{N} = 4$ SYM viene dado por:

$$W(\mathcal{C}) = \frac{1}{N} Tr \mathcal{P} \exp \left[\oint_{\mathcal{C}} d\tau (i A_\mu \dot{x}^\mu(\tau) + \Phi^I(x) y_I) \right], \quad (3.24)$$

donde los campos están en la representación adjunta, es decir: $A_\mu = T^a A_\mu^a$, $\phi_I = \phi_I^a T^a$, $y_I = \sqrt{\dot{x}^2} \theta_I$ y θ_I es un punto en la 5-esfera normalizado según $\theta^2 = 1$ que generalmente tomaremos constante. El valor de expectación del operador (3.24) vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \langle W(\mathcal{C}) \rangle &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} W(\mathcal{C}) \exp(-S[A, \phi, \Psi, c]) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{N} Tr \langle \mathcal{P} \left\{ \exp \oint_{\mathcal{C}} d\tau (i A_\mu \dot{x}^\mu(\tau) + \Phi^I(x) y_I) \right\} e^{-S} \rangle \end{aligned} \quad (3.25)$$

la manera de atacar este problema será entonces expandir ambas exponenciales de manera análoga a lo hecho en el análisis perturbativo de la divergencia en el Wilson Loop (1.3.2) solo que ahora incluiremos los términos provenientes de la segunda exponencial.

A modo de precalentamiento podemos calcular el primer diagrama no trivial que consiste en considerar un propagador gluónico o escalar entre dos puntos de la curva \mathcal{C} y proviene de expandir (3.24) a primer orden. Al hacer esto el operador al que le tenemos que calcular el valor de expectación viene dado por $(iA_\mu^a T^a \dot{x}^\mu + \Phi_I^a T^a y^I)^2$, los términos cruzados se anularán debido al teorema de Wick y utilizando las convenciones (3.23) junto con la expresión de los propagadores (1.46) obtenemos:

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle = 1 + \frac{g^2 N}{4\pi^2} \oint_{\mathcal{C}} d\tau_1 d\tau_2 \frac{|\dot{x}(\tau_1)| |\dot{x}(\tau_2)| - \dot{x}(\tau_1) \cdot \dot{x}(\tau_2)}{|x(\tau_1) - x(\tau_2)|^2} + \dots \quad (3.26)$$

Esta integral tiene un resultado finito para cualquier curva \mathcal{C} que sea suave debido al análisis de las divergencias presentado en (1.51).

Las correcciones a orden $\lambda^2 = g^4 N^2$ se deben a la consideración de las autoenergías para los gluones y los campos escalares, los diagramas de Feynman planares con dos propagadores internos pero sin interacciones entre ellos y los diagramas con un vértice interno. A lo largo de todo este análisis usaremos regularización por reducción dimensional, que consiste considerar a la teoría Super-Yang-Mills en $2w$ dimensiones como la reducción dimensional de $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills en 10 imensiones, es decir que en este caso el campo de gauge $A_\mu^a(x)$ es un campo vectorial con $2w$ componentes. Los índices del campo escalar toman $10 - 2w$ valores, es decir, $i = 1, \dots, 10 - 2w$. En cada dimensión, el campo fermiónico tiene 16 componentes reales. La regularización por reducción dimensional preserva las 16 supersimetrías de la teoría 10 dimensional por lo que esto lleva a que haya 4 supercargas asociadas a las 4 componentes del spinor de Majorana en 4 dimensiones conservadas.

Podemos primero considerar las correcciones al propagador gluónico de orden $g^4 N^2$. Las interacciones presentes en el Lagrangiano de la teoría (3.21) indican que es necesario tener en cuenta la aparición de loops de campos vectoriales y ghosts, campos esalares y fermiónicos. Los diagramas que vamos a estudiar pueden esquematizarse en la figura (5.2).

Las integrales a resolver para calcular dichas auto energías son canónicas y pueden encontrarse en los textos clásicos de teorías de campos [**ramond**] por lo que solamente mencionaremos de manera esquemática como realizarlas en el caso más simple que es el de los ghosts. El propagador gluónico y escalar en el espacio

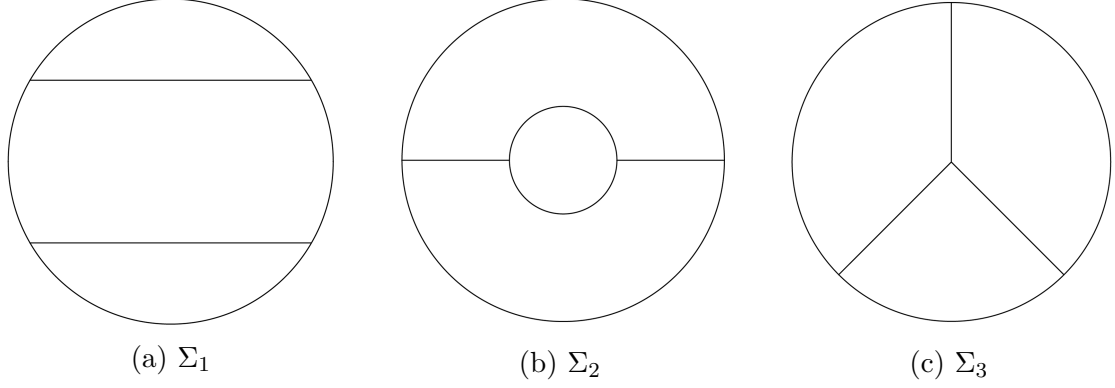


Figura 3.1: Diagramas asociados con la expansión del operador a orden $N^2 g^4$ para el caso de la trayectoria circular.

de momentos puede leerse a partir de (1.46) y transformando Fourier:

$$\begin{aligned}\Delta_{\mu\nu}^{ab}(p) &= g^2 \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} p^{-2} \\ D_{IJ}^{ab}(p) &= g^2 \delta^{ab} \delta_{IJ} p^{-2}\end{aligned}\quad (3.27)$$

y el término correspondiente a la interacción $A\phi^2$, es decir, $g^{-2} f^{abc} \partial_\mu (\Phi_I^a) A_\mu^b \Phi^{cI}$, de donde podemos deducir el factor asociado al vertice:

$$\frac{i}{g^2} f^{abc} (k_\mu - p_\mu) \quad (3.28)$$

la amplitud del diagrama buscado es entonces (luego de un poco de álgebra)

$$\frac{g^4 N \delta^{ab}}{2(p^2)^2} \int \frac{d^{2w} k}{(2\pi)^{2w}} \frac{[p_\mu p_\nu + 4k_\mu k_\nu + 2k_\mu p_\nu + 2p_\mu k_\nu]}{(p+k)^2 k^2} \quad (3.29)$$

introduciendo un parámetro de Feynmann [22] y resolviendo la integral la corrección a los propagadores escalares viene dada por:

$$\text{escalares} = -\delta^{ab} g^4 N \frac{\Gamma(2-w)\Gamma(w)\Gamma(w-1)}{(4\pi)^w \Gamma(2w)} (10-2w) \frac{\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2}{p^{6-2w}} \quad (3.30)$$

De igual manera pueden obtenerse los términos correspondientes a los campos vectoriales y los ghosts:

$$= \delta^{ab} g^4 N \frac{\Gamma(2-w)\Gamma(w)\Gamma(w-1)}{(4\pi)^w \Gamma(2w)} 2(3w-1) \frac{\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2}{p^{2-2w}} \quad (3.31)$$

y para los fermiones de Majorana en la representación adjunta:

$$= -\delta^{ab} g^4 N \frac{\Gamma(2-w)\Gamma(w)\Gamma(w-1)}{(4\pi)^w \Gamma(2w)} 16(w-1) \frac{\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2}{p^{2-2w}} \quad (3.32)$$

debido a que todos tienen la misma dependencia funcional podemos encontrar la expresión para el propagador gluónico en el gauge de Feynmann:

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab} = g^2 \delta^{ab} \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2} - g^4 N \frac{\Gamma(2-w)\Gamma(w)\Gamma(w-1)}{(4\pi)^w \Gamma(2w)} 4(2w-1) \delta^{ab} \frac{\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2}{p^{6-2w}} \quad (3.33)$$

De igual manera se pueden calcular las correcciones a 1-loop de los propagadores escalares obteniendo mediante un cálculo análogo:

$$= \delta^{ab} g^4 N \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2} - g^4 N \frac{\Gamma(2-w)\Gamma(w)\Gamma(w-1)}{(4\pi)^w \Gamma(2w)} 4(2w-1) \frac{\delta_{ij}}{p^{6-2w}} \quad (3.34)$$

y:

$$= -\delta^{ab} g^4 N \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2} - g^4 N \frac{\Gamma(2-w)\Gamma(w)\Gamma(w-1)}{(4\pi)^w \Gamma(2w)} 8(2w-1) \frac{\delta_{ij}}{p^{6-2w}} \quad (3.35)$$

de manera que el propagador queda entonces:

$$D_{ij}^{ab} = g^2 \delta^{ab} \frac{\delta_{ij}}{p^2} - \delta^{ab} g^4 N \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2} - g^4 N \frac{\Gamma(2-w)\Gamma(w)\Gamma(w-1)}{(4\pi)^w \Gamma(2w)} 4(2w-1) \frac{\delta_{ij} \delta^{ab}}{p^{6-2w}} \quad (3.36)$$

Utilizando estos propagadores podemos ahora calcular los términos de orden $g^4 N$ que aparecen en el valor de expectación del Wilson Loop al corregir los diagramas asociados al intercambio de un único gluon o campo escalar entre dos puntos de la curva \mathcal{C} . Transformando Fourier las expresiones (3.33), (3.36) y repitiendo el cálculo perturbativo pero ahora con estos propagadores obtenemos:

$$\Sigma_2 = -g^4 N^2 \frac{\Gamma^2(w-1)}{2^7 \pi^{2w} (2-w)(2w-3)} \oint d\tau_1 d\tau_2 \frac{|\dot{x}^{(1)}| |\dot{x}^{(2)} - \dot{x}^{(1)} \cdot \dot{x}^{(2)}}{[(x^{(1)} - x^{(2)})^2]^{2w-3}} \quad (3.37)$$

En el caso de interés ($w = 2$) puede verse que el integrando de esta expresión es idéntico a (5.8) de manera que para tener en cuenta esta corrección basta con hacer el cambio:

$$\frac{g^2 N}{4\pi} \mapsto \frac{g^2 N}{4\pi^2} - \frac{g^4 N^2 \Gamma^2(w-1)}{128 \pi^{2w} (2-w)(2w-3)} \quad (3.38)$$

Otra contribución posible a orden $g^4 N^2$ corresponde con expandir el operador $W(\mathcal{C})$ hasta orden cuatro. Este término se corresponde con tener dos propagadores, ya sean gluónicos o escalares que van desde un punto en la curva \mathcal{C} hasta otro sin interactuar entre si. Quedandonos solomanete con los diagramas planares estos diagramas son conocidos como diagramas escalera, la contribución generada por estos diagramas viene dada por:

$$\Sigma_1 = \frac{g^4 N^2}{6} \oint_{\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \tau_4} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \frac{(|\dot{x}^{(1)}| |\dot{x}^{(2)}| - \dot{x}^{(1)} \cdot \dot{x}^{(2)}) (|\dot{x}^{(3)}| |\dot{x}^{(4)}| - \dot{x}^{(3)} \cdot \dot{x}^{(4)})}{[|x^{(1)} - x^{(2)}|^2]^{w-1} [|x^{(3)} - x^{(4)}|^2]^{w-1}} \quad (3.39)$$

El último término que nos falta analizar para contar con la expansión en $g^4 N^2$ provienen de los diagramas con un vértice interno y tres inserciones a lo largo de la curva \mathcal{C} , es decir que es necesario expandir el operador (3.24) a orden tres mientras que la acción correspondiente a (3.21) es necesario expandirla a primer orden, de esta manera los términos relevantes son:

$$\begin{aligned} & \frac{i^3}{3!} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle Tr \mathcal{P}[A(\tau_1)A(\tau_2)A(\tau_3)] \left(- \int d^4 y f^{abc} \partial_\mu A_\nu^a(y) A_\mu^b(y) A_\nu^c(y) \right) \rangle \\ & \frac{i}{2!} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle Tr \mathcal{P}[\Phi(\tau_1)A(\tau_2)\Phi(\tau_3)] \left(- \int d^4 y f^{abc} \partial_\mu \Phi_i^a(y) A_\mu^b(y) \Phi_i^c(y) \right) \rangle \end{aligned} \quad (3.40)$$

En donde por simplicidad estamos usando la notación abreviada $A(\tau) = A_\mu^a(\tau) \dot{x}^\mu(\tau) T^a$ y $\Phi(\tau) = \Phi_i^a(\tau) \dot{x}^i T^a$, es decir que será necesario para cada uno de los términos realizar las contracciones necesarias y utilizar los propagadores (1.46) para obtener sumando ambos diagramas:

$$\begin{aligned} \Sigma_3 = & -\frac{g^4 N^2}{4} \oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \epsilon(\tau_1 \tau_2 \tau_3) (|\dot{x}^{(1)}| |\dot{x}^{(3)}| - \dot{x}^{(1)} \cdot \dot{x}^{(3)}) \\ & \times \dot{x}^{(2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} \int d^{2w} w \Delta(x^{(1)} - w) \Delta(x^{(2)} - w) \Delta(x^{(3)} - w). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Donde el propagador $\Delta(x) = \frac{\Gamma(w-1)}{4\pi^w |x|^{2w-1}}$ y se introdujo $\epsilon(\tau_1 \tau_2 \tau_3)$ el parámetro antisimétrico que ordena las inserciones en la curva, definimos $\epsilon(\tau_1 \tau_2 \tau_3) = 1$ si $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$ y ϵ es antisimétrico frente a cualquier transposición de τ_i . Para resolver esta integral podemos introducir parámetros de Feynmann α, β, γ mediante la propiedad [22]:

$$\frac{1}{A^n B^m C^l} = \int_0^1 d\alpha d\beta d\gamma \delta(1 - \alpha - \beta - \gamma) \frac{nml \alpha^{n-1} \beta^{m-1} \gamma^{l-1}}{[\alpha A + \beta B + \gamma C]^{n+l+m}} \quad (3.42)$$

en donde para nuestro caso tomamos $A = |x^{(1)} - w|^2$, $B = |x^{(2)} - w|^2$, $C = |x^{(3)} - w|^2$, aplicando la derivada correspondiente a la expresión llegamos a:

$$\begin{aligned} \Sigma_3 = & g^4 N^2 \frac{\Gamma(2w-2)}{2^7 \pi^{2w}} \int_0^1 d\alpha d\beta d\gamma (\alpha \beta \gamma)^{w-2} \delta(1 - \alpha - \beta - \gamma) \oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \epsilon(\tau_1 \tau_2 \tau_3) \\ & \times \frac{(|\dot{x}^{(1)}| |\dot{x}^{(3)}| - \dot{x}^{(1)} \cdot \dot{x}^{(3)}) (\alpha(1-\alpha) \dot{x}^{(2)} \cdot x^{(1)} - \alpha \gamma \dot{x}^{(2)} \cdot x^{(3)} - \alpha \beta \dot{x}^{(2)} \cdot x^{(2)})}{[\alpha \beta |x^{(1)} - x^{(2)}|^2 + \alpha \gamma |x^{(1)} - x^{(3)}|^2 + \beta \gamma |x^{(3)} - x^{(2)}|^2]^{2w-2}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.1.2. Cancelación de las divergencias a orden $g^4 N^2$

Con todo lo visto hasta acá tenemos tres términos $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ que son las contribuciones al valor de expectación de $\langle W(\mathcal{C}) \rangle$ a orden $g^4 N^2$ para una curva suave

arbitraria \mathcal{C} , queremos ver ahora que efectivamente $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$ nos da un resultado finito. El término asociado a Σ_1 (3.39) es finito por si solo mientras que Σ_3 resulta divergente en el caso en que τ_1 sea coincidente con τ_2 , sin embargo esta divergencia debería cancelarse con el coeficiente de Σ_2 (3.37), para ver esto es necesario extraer los términos divergentes de la expresión (3.37). Para eso consideremos:

$$G(\tau_i) = \int d^4w \Delta(w - x^{(1)}) \Delta(w - x^{(2)}) \Delta(w - x^{(3)}), \quad (3.44)$$

esta integral es simétrica por lo que basta considerar un sólo límite, como por ejemplo $x^{(1)} \sim x^{(2)}$. En este caso podemos aproximar el factor $|w - x^{(3)}|$ por $|x^{(1)} - x^{(3)}|$ de manera tal de sacarlo fuera de la integral y podemos introducir un cutoff infrarojo δ . En este caso el resultado de la integral solamente puede depender de la relación entre $|x^{(1)} - x^{(2)}|/\delta$ es decir que el límite que nos interesa estudiar $x^{(1)} \sim x^{(2)}$ es equivalente a tomar $\delta \rightarrow \infty$, entonces cambiando $|w - x^{(2)}| \approx |w - x^{(1)}|$ e introduciendo una nueva variable $w' = w - x^{(1)}$ obtenemos:

$$G(\tau_i) \sim \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{|x^{(1)} - x^{(3)}|^2} \int \frac{d^4w'}{w'^4} = -\frac{1}{64\pi^4} \frac{\log|x^{(1)} - x^{(2)}|^2/\delta^2}{|x^{(1)} - x^{(3)}|^2}. \quad (3.45)$$

Por lo que vemos que la divergencia de G es logarítmica cuando $x^{(1)} \sim x^{(2)}$ mientras que en los casos en que $x^{(1)}$ o $x^{(2)}$ se acercan a $x^{(3)}$ el resultado de (3.43) puede verse que es finito siendo la única divergencia la (3.45). Al ser una divergencia logarítmica el resultado será independiente del método de regularización, podemos escribir $\tau = \tau^{(1)} - \tau^{(2)}$ y hacer el desarrollo de Taylor $x^{(1)} = x^{(2)} + \dot{x}^{(2)}\tau + \dots$, obteniendo:

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &\sim -\frac{g^4 N^2}{128\pi^4} \oint d\tau_2 \oint d\tau_3 \frac{|\dot{x}^{(2)}||\dot{x}^{(3)}| - \dot{x}^{(2)} \cdot \dot{x}^{(3)}}{|x^{(2)} - x^{(3)}|^2} \int d\tau \text{sign}(\tau) \frac{\dot{x}^{(2)} \cdot (x^{(1)} - x^{(2)})}{|x^{(1)} - x^{(2)}|^2} \\ &= -\frac{g^4 N^2}{64\pi^2} \oint d\tau_2 \oint d\tau_3 \frac{|\dot{x}^{(2)}||\dot{x}^{(3)}| - \dot{x}^{(2)} \cdot \dot{x}^{(3)}}{|x^{(2)} - x^{(3)}|^2} \log \epsilon \end{aligned} \quad (3.46)$$

esta expresión cancela exactamente la divergencia proveniente de (3.37) ya que en $w = 2$ uno puede reemplazar el polo $1/(2 - w)$ por $-2 \log \epsilon$. Con todo lo analizado hasta acá vimos que efectivamente para una curva \mathcal{C} suave y arbitraria, las divergencias a orden $g^4 N^2$ se anulan.

Wilson Loop Circular

Para ver como utilizamos estos resultados podemos parametrizar el círculo de radio unitario como:

$$x^\mu = (\cos \tau, \sin \tau, 0, 0) \quad (3.47)$$

En el límite de N grande y $g^2 N$ fijo es sabido que la teoría de campos viene dada por los diagramas planares, por lo que primero veremos que estos diagramas sin vertices contribuyen todos de igual manera al valor de expectación del Wilson Loop con un factor que depende únicamente de la cantidad de propagadores, posteriormente veremos que los diagramas correspondientes a correcciones de autoenergía (3.37) y a diagramas con vertices internos (3.43) se cancelan exactamente lo que llevó a conjeturar en ([8]) que el resultado correspondiente a los diagramas planares sin vertices internos es válido a todo orden.

Consideremos la expansión del operador a orden $2n$:

$$\frac{1}{N} \int_0^{2\pi} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_0^{\tau_{2n-1}} d\tau_{2n} \text{Tr} \langle (iA(\tau_1) + \Phi(\tau_1)) \cdots (iA(\tau_{2n}) + \Phi(\tau_{2n})) \rangle \quad (3.48)$$

en donde se tomó el orden de las integrales de manera tal de eliminar el factor $(1/2!)$ coorespondiente a la expansión de Taylor. A partir de la parametrización elegida y de la expresión (5.8) tenemos:

$$\langle (iA(\tau_1) + \Phi(\tau_1)) (iA(\tau_2) + \Phi(\tau_2)) \rangle_0 = \frac{g^2 \delta^{ab} |\dot{x}^{(1)}| |\dot{x}^{(2)}| - \dot{x}^{(1)} \cdot \dot{x}^{(2)}}{4\pi^2 |x^{(1)} - x^{(2)}|^2} = \frac{g^2 \delta^{ab}}{8\pi^2} \quad (3.49)$$

El factor de color puede calcularse utilizando (3.23), es decir: $\text{Tr}(T^a T^b) \delta^{ab} = \frac{N}{2} \mathbf{I}_N$. A partir de (3.49) vemos que en este caso el resultado final de los diagramas planares no depende del parametro de la curva τ por lo que todas las contracciones de Wick son idénticas de manera que para obtener la contribución final necesitamos calcular la cantidad de diagramas de este tipo que existen en la teoría. Entonces la suma de los diagramas *ladder* con n propagadores contribuye con:

$$\frac{(g^2 N/4)^n}{(2n!)} \times (\# \text{de diagramas planares con } n \text{ líneas internas}) \quad (3.50)$$

Para poder contar los diagramas de tipo escalera podemos utilizar una propiedad particular de la teoría, dado un diagrama con $n + 1$ propagadores internos, para cada $0 \leq k \leq n$ puede descomponérselo de manera única cómo: Es decir que si notamos A_{n+1} , la cantidad de diagramas distintos con $n + 1$ propagadores, tiene que satisfacerse la relación de recursión:

$$A_{n+1} = \sum_{k=0}^n A_{n-k} A_k, \quad (3.51)$$

con $A_0 = 1$. Podemos definir una función generatriz $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ que debido a (3.51) debe satisfacer:

$$z f^2(z) = f(z) - 1 \quad (3.52)$$

De donde podemos obtener la solución:

$$f(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} z^n \quad (3.53)$$

En donde elegimos el signo de la raíz cuadrada de manera tal que $f(z)$ sea finita en $z = 0$ y en el último paso expandimos f en su desarrollo de Taylor. Obtuvimos entonces una expresión para los coeficientes $A_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ que podemos reemplazar ahora en (3.49) de manera tal de obtener la suma de todos los diagramas planares:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g^2 N/4)^n}{(n+1)!n!} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda}) \quad (3.54)$$

donde $\lambda = g^2 N$ y $I_1(x)$ es la función de Bessel modificada de primera especie.¹ A partir de este resultado podemos estudiar el límite de λ grande:

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle_{ladders} \sim \frac{e^{\sqrt{\lambda}}}{(\pi/2)^{1/2} (\lambda)^{3/4}} \quad (3.56)$$

y comparándolo con (3.20):

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle_{AdS/CFT} \sim e^{\sqrt{\lambda}} \quad (3.57)$$

podemos observar que los diagramas tipo escalera tienen el mismo comportamiento que la predicción de *AdS/CFT*.

Resta ver simplemente que los términos asociados a los diagramas con un vértice interno Σ_3 (3.43) y los correspondientes a las correcciones de un loop a los propagadores gluónicos Σ_2 (3.37) se cancelan exactamente. A partir de la parametrización (3.47) e introduciendo la notación $\cos(\tau_i - \tau_j) = \cos \tau_{ij}$ tenemos para (3.43):

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= g^4 N^2 \frac{\Gamma(2w-2)}{2^{2w+5} \pi^{2w}} \int_0^1 d\alpha d\beta d\gamma (\alpha\beta\gamma)^{w-2} \delta(1-\alpha-\beta-\gamma) \\ &\times \oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \frac{\epsilon(\tau_1 \tau_2 \tau_3) (1 - \cos \tau_{13}) (\alpha(1-\alpha) \sin \tau_{12} + \alpha\gamma \sin \tau_{23})}{[\alpha\beta(1 - \cos \tau_{12}) + \beta\gamma(1 - \cos \tau_{23}) + \gamma\alpha(1 - \cos \tau_{13})]^{2w-2}}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

¹Podemos definir las funciones de Bessel de primera especie como

$$I_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha} \quad (3.55)$$

donde de la manera usual, $2w$ es la dimensión arbitraria utilizada para la regularización dimensional. Para ver que en el caso de interés, $w = 2$ las divergencias se cancelan consideremos la siguiente identidad:

$$\oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \frac{\partial}{\partial \tau_1} \frac{\epsilon(\tau_1 \tau_2 \tau_3)(1 - \cos \tau_{13})}{\Delta^{2w-3}} = 0 \quad (3.59)$$

donde $\Delta = \alpha\beta(1 - \cos \tau_{12}) + \beta\gamma(1 - \cos \tau_{23}) + \gamma\alpha(1 - \cos \tau_{13})$ y:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} \epsilon(\tau_1 \tau_2 \tau_3) = 2\delta(\tau_{12}) - 2\delta(\tau_{13}) \quad (3.60)$$

derivando la expresión (3.59) y utilizando (3.60) vemos que el término asociado a la segunda delta se anula en el caso $\tau_1 = \tau_2$ de manera que obtenemos:

$$\begin{aligned} & \oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \left\{ - \frac{\sin \tau_{13}(\alpha\beta(1 - \cos \tau_{12}) + \beta\gamma(1 - \cos \tau_{23}) + \gamma\alpha(1 - \cos \tau_{13}))}{\Delta^{2w-2}} \right. \\ & \quad \left. + (2w - 3) \frac{(1 - \cos \tau_{13})(\alpha\beta \sin \tau_{12} + \alpha\gamma \sin \tau_{13})}{\Delta^{2w-2}} \right\} \epsilon(\tau_1 \tau_2 \tau_3) \\ & = 2 \oint d\tau_1 d\tau_2 \frac{1}{[\gamma(1 - \gamma)]^{2w-3}} \frac{1}{[1 - \cos \tau_{12}]^{2w-3}} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Para poder llevar esta expresión a una similar a (3.58) es necesario cambiar de variables en los primeros términos de (3.61) de manera de conseguir en todos los términos $\cos \tau_{13}$, para lograr esto es necesario también realizar las permutaciones $\beta \leftrightarrow \gamma$ en un caso y $\alpha \leftrightarrow \beta$ en otro, por lo que para que esto pueda llevarse a cabo es necesario agregar un factor $\delta(1 - \alpha - \beta - \gamma)$:

$$\begin{aligned} & \oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \epsilon(\tau_1 \tau_2 \tau_3) \left\{ \frac{(1 - \cos \tau_{13})(\alpha(1 - \alpha) \sin \tau_{12} + \alpha\gamma \sin \tau_{23})}{\Delta^{2w-2}} + \right. \\ & \quad \left. + (2w - 4) \frac{(1 - \cos \tau_{13})(\alpha\beta \sin \tau_{13})}{\Delta^{2w-2}} \right\} \\ & = 2 \oint d\tau_1 d\tau_2 \frac{1}{[\gamma(1 - \gamma)]^{2w-3}} \frac{1}{[1 - \cos \tau_{12}]^{2w-4}} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Integrando por partes el último término de esta expresión tenemos:

$$\begin{aligned} & \oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \epsilon(\tau_1 \tau_2 \tau_3) \frac{(1 - \cos \tau_{13})(\alpha(1 - \alpha) \sin \tau_{12} + \alpha\gamma \sin \tau_{23})}{\Delta^{2w-2}} \\ & = - \frac{2w - 4}{2w - 3} \oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \epsilon(\tau_1 \tau_2 \tau_3) \frac{\sin \tau_{13}}{\Delta^{2w-3}} \\ & \quad + \frac{2}{2w - 3} \oint d\tau_1 d\tau_2 \frac{1}{[\gamma(1 - \gamma)]^{2w-3}} \frac{1}{[1 - \cos \tau_{12}]^{2w-4}} \end{aligned} \quad (3.63)$$

puede verse fácilmente que el primer término es finito en el caso $w \mapsto 2$ por lo que el término $2w - 4$ anulará la contribución en el límite de interés. Es decir que el resultado final será:

$$\Sigma_3 = g^4 N^2 \frac{\Gamma^2(w-1)}{2^{2w+4} \pi^{2w} (2-w)(2w-3)} \oint d\tau_1 d\tau_2 \frac{1}{[1 - \cos \tau_{12}]^{2w-4}} + \mathcal{O}(2w-4) \quad (3.64)$$

por otro lado el término (3.37) asociado a Σ_2 en el caso de la trayectoria circular (3.47) viene dado por:

$$\Sigma_2 = -g^4 N^2 \frac{\Gamma^2(w-1)}{2^{2w+4} \pi^{2w} (2-w)(2w-3)} \oint d\tau_1 d\tau_2 \frac{1}{[1 - \cos \tau_{12}]^{2w-4}} \quad (3.65)$$

por lo que ambas contribuciones (3.64) y (3.65) se cancelan exactamente cuando $w = 2$:

$$\Sigma_2 + \Sigma_3 = 0 \quad (3.66)$$

De manera que para el Wilson Loop circular encontramos que a orden $g^4 N^2$ las divergencias se cancelan exactamente y el resultado del valor de expectación viene dado por la suma de los diagramas tipo escalera y el resultado del mismo para acoplamiento fuerte se corresponde con el resultado predicho en el cálculo realizado en *AdS*, originalmente los autores de [6] conjeturaron que este resultado es un resultado exacto de la teoría en el cuál entraba en juego la simetría conforme. Posteriormente los autores de [6] mostraron que efectivamente la transformación conforme que lleva la línea recta al círculo es anómala, de manera que dicha anomalía es la responsable de cancelar las divergencias a todo orden. Finalmente este resultado fue probado rigurosamente en [pestun] mediante argumentos de localización, a lo largo de este trabajo consideraremos ciertas trayectorias hiperbólicas que también resultan ser 1/2 BPS y estudiaremos la posibilidad que los diagramas de interacción también se cancelen y los valores de expectación asociados a dichas trayectorias sean dados por la suma de los diagramas tipo escalera únicamente.

3.2. Modelo de Matrices

Debido a que la suma de los propagadores gluónicos y escalares es constante (3.49) la suma de los diagramas tipo escalera se *mapea* a una teoría 0-dimensional. En particular el número de gráficos planares sin vértices y n propagadores puede ser calculado mediante un modelo de matrices Gaussianas y Hermíticas [6, 8, 12]:

$$\left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \exp M \right\rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}M \frac{1}{N} \text{Tr} \exp M \exp \left(-\frac{2N}{\lambda} \text{Tr} M^2 \right) \quad (3.67)$$

En donde M es una matriz hermítica de $N \times N$. Esta matriz puede ser expresada en su base de autovalores, es decir $M = \text{diag}\{m_1, m_2, m_3, \dots, m_N\}$ para lo

cual es necesario introducir el Jacobiano de la transformación en (3.67) que es el determinante de Vandermonde [12]:

$$\Delta^2 = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (m_i - m_j)^2 \quad (3.68)$$

De manera que el valor de expectación (3.67) toma la forma:

$$\begin{aligned} \langle \frac{1}{N} \text{Tr exp } M \rangle &= \frac{1}{N} \int \prod dm_i \Delta^2(m_i) \frac{1}{N} \sum e^{m_i} \exp \left[-\frac{2N}{\lambda} \sum m_i^2 \right] \\ &= \frac{1}{Z} \int \prod dm_i \Delta^2(m_i) \exp \left[\sqrt{\frac{\lambda}{2N}} m_1 \right] \exp \left[-\sum m_i^2 \right] \end{aligned} \quad (3.69)$$

En donde en el último paso se re-escalaron los autovalores m_i y se absorbió la normalización en Z . Para calcular esta integral podemos re escribirla en términos de polinomios ortogonales, en particular podemos buscar polinomios que sean ortogonales con respecto a la medida de integración $\int dm \exp[-m^2]$, estos polinomios son proporcionales a los polinomios de Hermite:

$$H_n(x) = e^{x^2} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = \delta_{nm} 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (3.70)$$

Entonces los polinomios que tomamos para resolver la integral (3.69) serán polinomios de Hermite ortogonales con respecto a dicha medida:

$$P_n(x) \equiv \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \quad (3.71)$$

Y podemos transformar el determinante de Vandermonde según $\Delta(m_i) \sim \det\{P_{j-1}(m_i)\}$ donde nuevamente absorbemos la normalización en Z , integrando en $m_i, i = 2 \cdots N$:

$$\langle \frac{1}{N} \text{Tr exp } M \rangle = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} dm \sum_{j=0}^{N-1} P_j(m)^2 \exp \left[-m^2 + \sqrt{\frac{\lambda}{2N}} m \right] \quad (3.72)$$

E introduciendo los polinomios de Laguerre $L_n^{m^2}$ obtenemos:

$$\langle \frac{1}{N} \text{Tr exp } M \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} L_j(-\lambda/4N) \exp\{[\lambda/8N]\} = \frac{1}{N} L_{N-1}^1(-\lambda/4N) \exp[\lambda/8N] \quad (3.74)$$

²Los polinomios de Laguerre $L_n^m(x)$ vienen definidos según:

$$L_n^m(x) = \frac{1}{n!} \exp[x] x^{-m} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (\exp[-x] x^{n+m}) \quad (3.73)$$

que en el límite planar se reduce a:

$$\langle \frac{1}{N} \text{Tr exp } M \rangle \simeq \frac{2}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda}) \quad (3.75)$$

Capítulo 4

Wilson Loops para representaciones de rango mayor

Por lo visto anteriormente, matemáticamente el Wilson Loop es la traza en una representación arbitraria \mathcal{R} del grupo de gauge G de la matriz de holonomía asociada con el transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada \mathcal{C} en el espacio tiempo. Físicamente, el valor de expectación del Wilson loop, en una representación particular del grupo de gauge, mide la fase asociada a una partícula externa en una dada representación que se mueve al rededor de una curva \mathcal{C} .

En la descripción holográfica vimos que la forma natural de introducir el operador en la representación fundamental del grupo de gauge es considerando una cuerda abierta cuyos extremos están fijos a la curva \mathcal{C} . Sin embargo uno puede preguntarse cuál es la descripción del Wilson loop en la teoría de cuerdas dual asociado a una representación arbitraria \mathcal{R} del grupo de gauge. A lo largo de esta sección estudiaremos el operador para representaciones (anti)-simétricas y mostraremos que la misma viene dada en términos de una $(D5)D3$ -brana cuyo volumen de mundo se extiende en $AdS_5 \times S^5$ y pincha el borde de AdS_5 en la trayectoria \mathcal{C} , a diferencia de la cuerda fundamental las branas son objetos cargados con un campo $U(1)$ por lo que tendrán un flujo electromagnético, en particular estudiaremos el caso en el cual el Wilson loop puede ser descrito por un número grande de cuerdas fundamentales, esto sucede cuando el operador involucra muchos lazos coincidentes, un Wilson loop que está múltiplemente enrollado o en una representación mayor del grupo de gauge. En estos tres casos el comportamiento a *leading order* deberá ser el mismo que en la representación fundamental pero con un factor que de cuenta de la multiplicidad k del loop. Por otro lado el comportamiento *subleading* deberá ser el asociado a la interacción entre las hojas de mundo asociadas a las k cuerdas, esta pregunta lejos de ser trivial de plantear en el caso de las cuerdas es respondida de manera mucho más simple considerando $D3$ -branas.

A lo largo de este capítulo estudiaremos primero el caso más simple que es el

de una recta infinita, luego el caso de un círculo y posteriormente presentaremos un método que permite encontrar el embedding correspondiente a una $D3$ -brana para una trayectoria cualquiera tipo tiempo.

4.1. Dp -branas

La descripción holográfica del Wilson Loop en la representación fundamental del grupo de gauge requirió el estudio de la hoja de mundo descrita por la cuerda dual cuyos extremos finalizan en la curva \mathcal{C} . Dicha hoja de mundo es la solución que minimiza la acción correspondiente a la cuerda fundamental, de igual manera, en el caso en que estudiemos una representación arbitraria (simétrica o anti-simétrica) del grupo de gauge, la solución será aquella que minimice la acción asociada a la $(D5)D3$ -brana.

Las Dp -branas son objetos de la teoría de cuerdas que se extienden en $(p + 1)$ dimensiones, es decir que en este caso la solución no describirá una hoja de mundo, sino que será el volumen asociado a las p coordenadas correspondientes a las fluctuaciones de la brana. Si bien estos objetos son fundamentales en la teoría de cuerdas, en este trabajo solamente presentaremos la acción de los mismos dejando los detalles de sus propiedades para la referencia [16].

Las branas son objetos dinámicos de la teoría en las cuales las cuerdas abiertas pueden empezar/terminar [29], es decir que estos objetos deben sentir tanto el efecto de la gravedad como también los distintos *backgrounds* presentes en la teoría, estos objetos cuentan también con un campo de gauge $U(1)$ por lo que si introducimos coordenadas ζ^a , $a = 0, \dots, p$ en la brana los campos presentes en la misma serán el embedding $X^\mu(\zeta)$ y el campo de gauge $A_\mu(\zeta)$ y su acción vendrá dada por:

$$S_{DBI} = -T_p \int d^{p+1}\zeta e^{-\Phi} \sqrt{\det(G_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})} \quad (4.1)$$

Esta acción es la acción de Dirac-Born-Infeld (DBI) para el caso de campos de fondo arbitrarios. De manera análoga a la acción de Nambu-Goto, G_{ab} es el pullback de la métrica en el volumen de mundo de la brana, F_{ab} es el tensor electromagnético asociado al campo $U(1)$ que vive en la misma, T_p es la tensión de la brana y B_{ab} es el campo antisimétrico de la teoría de cuerdas. El factor asociado al dilaton aparece debido a que esta acción es a orden árbol en la teoría.

Por otro lado las Dp -branas, para el sector Ramond-Ramond de la teoría, son fuentes para las formas $C_{(p+1)}$ por lo que junto con la acción DBI tenemos también un término de Wess-Zumino (WZ) de la forma:

$$S_{WZ} = \mu_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} C_{(p+1)} \quad (4.2)$$

En donde μ_p es la carga de la Dp -brana frente a la $(p+1)$ -forma $C_{(p+1)}$ y \mathcal{M}_{p+1} es el volumen de mundo asociado a la brana. Dependiendo de la dimensionalidad p de la brana tendremos distintos valores para la carga y la tensión de la misma, la forma explícita de estas constantes viene dada por [16]:

$$\mu_p = (2\pi)^{-p} \alpha'^{-\frac{(p+1)}{2}}, \quad \tau_p = g_s^{-1} \mu_p, \quad T_p = \tau_p g_s \quad (4.3)$$

A partir de la acción total $S = S_{DBI} + S_{WZ}$ para la Dp -brana junto con los términos de borde correspondientes podemos estudiar la descripción holográfica del operador Wilson Loop para representaciones mayores del grupo de gauge.

4.2. Dos ejemplos para representaciones simétricas

4.2.1. Línea recta

El caso más simple de analizar es una línea recta infinita. Para la representación fundamental podemos considerar que el Wilson loop se extiende en la dirección x^1 y está localizado en $x^2 = x^3 = x^4 = 0$ y utilizamos la métrica de AdS :

$$ds^2 = \frac{L^2}{y^2} (dy^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2) \quad (4.4)$$

Donde L es el radio de curvatura de AdS , el área de la superficie descrita puede ser calculada análogamente a los casos anteriores, tendrá una divergencia asociada a los valores de y que se encuentran cerca del borde y será proporcional al largo en la dirección x^1 que llamaremos X^1 , introduciendo un cutoff y_0 el área será:

$$A = \sqrt{\lambda} \frac{X^1}{2\pi y_0} \quad (4.5)$$

Al incluir los términos de borde correspondientes para eliminar esta divergencia vemos que el resultado total de la acción será simplemente $S_{cuerda} = 0$ y el valor de expectación será $\langle W \rangle = 1$.

Para estudiar la descripción de la $D3$ -brana es conveniente introducir coordenadas esféricas en la dirección transversal a la línea, de manera que la métrica de AdS_5 (4.4) tomará la forma:

$$ds^2 = \frac{L^2}{y^2} (dy^2 + (dx^1)^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_2^2) \quad (4.6)$$

Buscamos entonces la descripción de la $D3$ -brana holográfica con flujo eléctrico que describe a este Wilson loop. Esta brana será una hipersuperficie en AdS_5 que

vendrá dada por una sola ecuación. Dado que las ecuaciones a resolver son más complicadas que en el caso de la representación fundamental es necesario plantear un *ansatz* que nos facilite encontrar dicha solución. Consideraremos entonces que la hipersuperficie descrita por la brana está dada por una función $y = y(r)$, por lo que utilizaremos x^1, r, θ, ϕ como coordenadas para el *world-volume* e incluiremos también un tensor electromagnético $F_{1r}(r)$.

La acción asociada a la Dp -brana (4.1), (4.2) para el caso particular en que $p = 3$ toma la forma:

$$\begin{aligned} S_{DBI} &= T_{D3} \int e^{-\Phi} \sqrt{\det(g + 2\pi\alpha' F)} \\ S_{WZ} &= -T_{D3} \int P[C_4] = -T_{D3} \int d^4x \epsilon^{abcd} (C_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \partial_a X^{\mu_1} \partial_b X^{\mu_2} \partial_c X^{\mu_3} \partial_d X^{\mu_4}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

La tensión T_{D3} puede obtenerse a partir de (4.3) y re expresarla en términos de las constantes holográficas según:

$$T_{D3} = \frac{1}{(2\pi)^3 l_s^4 g_s} = \frac{N}{2\pi^2 L^4} \quad (4.8)$$

En $AdS_5 \times S^5$ hay N unidades de flujo de la 5-forma de Ramond-Ramond cuyo potencial puede tomarse como:

$$C_4 = \frac{L^4}{y^4} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 = \frac{L^4 r^2 \sin \theta}{y^4} dx^1 \wedge dr \wedge d\theta \wedge d\phi \quad (4.9)$$

En donde la última expresión corresponde simplemente a considerar el cambio de coordenadas a esféricas introducido en (4.6). Con todo esto podemos calcular la acción:

$$S = \frac{2N}{\pi} \int dx^1 dr \frac{r^2}{y^4} \left(\sqrt{1 + y'^2 + (2\pi\alpha' F_{1r})^2 \frac{y^4}{L^4}} - 1 \right) \quad (4.10)$$

En donde introducimos la notación usual $y' = \frac{\partial y}{\partial r}$. A partir de (4.10) podemos ver que el campo de gauge $A_1(r)$ no aparece explícita mente por lo que el momento asociado Π se conservará¹, es decir que:

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_r A_1(r))} = -i \frac{4N}{\lambda} \frac{2\pi F_{1r} r^2}{\sqrt{1 + y'^2 + 4\pi^2 F_{1r}^2 y^4 / r}} \quad (4.11)$$

¹En la teoría Euclidea el campo eléctrico es imaginario, por lo que para obtener un momento conjugado real es necesario multiplicar al momento por i .

Las ecuaciones de movimiento vendrán dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondiente a la acción (4.10):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathcal{L}_{D3}}{\partial y} - \frac{d}{d_3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{D3}}{\partial y'} \right) = \\
& = - \frac{4r^2 (2\pi^2 F_{1r}^2 y^4 / \lambda + 1 + y'^2)}{y^5 \sqrt{\frac{4\pi^2 F_{1r}^2 y^4}{\lambda} + y'^2 + 1}} - \\
& - \frac{[r (4\pi^2 F_{1r} y^5 ((2F_{1r} - rF') y' + rF_{1r} y'') - 24\pi^2 r F_{1r}^2 y^4 y'^2)]}{y^5 \sqrt{\frac{4\pi^2 F_{1r}^2 y^4}{\lambda} + y'^2 + 1} (4\pi^2 F_{1r}^2 y^4 + \lambda + \lambda y'^2)} \\
& - \frac{4\lambda r y'^2 (y'^2 + 1) + \lambda y (r y'' + 2 (y'^3 + y'))}{y^5 \sqrt{\frac{4\pi^2 F_{1r}^2 y^4}{\lambda} + y'^2 + 1} (4\pi^2 F_{1r}^2 y^4 + \lambda + \lambda y'^2)}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Podemos ver que a diferencia del caso para la representación fundamental las ecuaciones de movimiento quedan de forma mucho más complicada debido a la forma funcional de la acción (4.1) y (4.2) por lo que para resolverlo es necesario plantear un *ansatz* conveniente. En este caso vendrá dado por:

$$y(r) = \frac{r}{\kappa} \tag{4.13}$$

Introduciendo esto en las ecuaciones puede verse que es solución en el caso en que la constante κ venga dada por:

$$\kappa = \frac{k\sqrt{\lambda}}{4N} \tag{4.14}$$

A partir de la solución (4.13) podemos obtener el campo eléctrico:

$$F_{1r} = i \frac{k\lambda}{8\pi N r^2} \tag{4.15}$$

Para determinar el valor de expectación del operador falta evaluar *on-shell* la acción (4.10) en la solución (4.13) y (4.15), al hacerlo vemos que efectivamente el resultado es 0, por lo que parecería que tenemos el resultado que buscábamos, pero hasta ahora simplemente consideramos la acción en el *bulk* por lo que todavía faltan los términos de borde de manera análoga a lo realizado para la representación fundamental. Por lo visto anteriormente sabemos que el término de borde corresponde con la transformada de Legendre de la acción, por lo que necesitamos el momento conjugado a la variable $y(r)$:

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \frac{2N}{\pi} \frac{r^2 y'}{y^4 \sqrt{1 + y'^2 + (2\pi\alpha' F_{1r})^2 \frac{y^4}{L^4}}} \tag{4.16}$$

ahora introduciendo un cut-off en y_0 y evaluándolo en la solución, el término de borde será:

$$- \int dx^1 y_0 p_y = - \frac{2N}{\pi} \frac{X^1 k}{y_0} \quad (4.17)$$

Pero todavía esperamos que el resultado del valor de expectación sea nulo, ya que este Wilson Loop es 1/2 BPS y de acuerdo a lo mencionado en 1.3.3 el valor de expectación es trivial. Es decir que debe estar faltando algún término de borde nuevo que no tiene análogo en la representación fundamental, este término tiene que ser la transformada de Legendre de la otra variable, es decir el campo de gauge. La acción (4.10) es una funcional del campo de gauge, pero el observable asociado al Wilson loop define el número k que es el rango de la representación. El momento conjugado al campo de gauge vimos que es Π (4.11), que es exactamente igual a k por lo que es la variable correcta a usar para la transformada de Legendre, es decir que obtenemos otro término de borde:

$$- \int dx^1 i \Pi A_1 = - \int dx^1 dr i \Pi F_{1r} = \frac{2N}{\pi} \frac{X^1 \kappa}{y_0} \quad (4.18)$$

Vemos ahora que efectivamente considerando ambos términos de borde (4.17) y (4.18) se cancelan exactamente por lo que obtenemos el resultado final:

$$S = 0, \quad \langle W \rangle = 1 \quad (4.19)$$

Para completar el análisis de la solución podemos estudiar la geometría que describe el embedding de la brana (4.13) dentro de AdS_5 . A partir de la métrica inducida g podemos evaluarla en dicha solución para obtener la geometría de la hipersuperficie:

$$ds^2 = \frac{L^2 \kappa^2}{r^2} ((1 + \kappa^{-2}) dr^2 + (dx^1)^2) + L^2 \kappa^2 (d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\phi^2) \quad (4.20)$$

Podemos ver que la métrica de la hipersuperficie es una métrica producto de la forma $AdS_2 \times S^2$ en donde el radio de AdS_2 puede obtenerse calculando la curvatura del espacio y viene dado por $L\sqrt{1 + \kappa^2}$ mientras que el radio de la esfera S^2 es $L\kappa$. Que la métrica pueda escribirse como producto significa que la esfera S^2 nunca se achica, inclusive al acercarnos al radio de AdS^5 , también puede verse que esta hipersuperficie esta completamente embebida en AdS_5 a diferencia de la descripción holográfica para una representación antisimétrica en la cuál la hipersuperficie es una subvariedad del espacio $AdS_5 \times S^5$ entero [11]. El perfil de la solución puede verse en la figura (4.1)

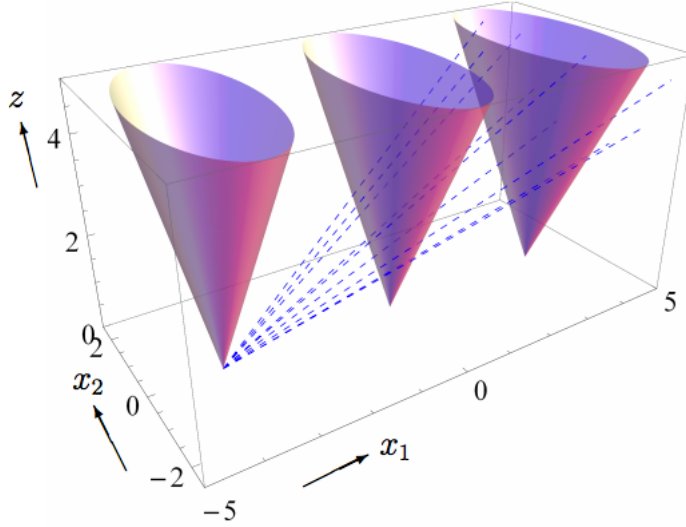


Figura 4.1: Perfil de la D3-brana asociada a la línea recta

4.2.2. Wilson Loop Circular

Por lo visto en la sección anterior el cálculo del Wilson loop en términos de $D3$ -branas es computacionalmente más complicado de resolver que en el caso de la representación fundamental, es por eso que para resolver la trayectoria circular será necesario elegir un conjunto de coordenadas tal que la mayor cantidad de simetrías del problema se haga manifiesta. Para eso, si consideremos que la trayectoria circular se encuentra en el plano (x^1, x^2) , lo más natural es entonces elegir un conjunto de coordenadas polares (r_1, ψ) en dicho plano y para el plano x^3, x^4 otro conjunto distinto de coordenadas polares (r_2, ϕ) es decir que la métrica de AdS_5 (4.4) en estas nuevas coordenadas tomará la forma:

$$ds^2 = \frac{L^2}{y^2} (dy^2 + dr_1^2 + r_1^2 d\psi^2 + dr_2^2 + r_2^2 d\phi^2) \quad (4.21)$$

En donde ahora la curva estará en $r_1 = R$ y $r_2 = 0$, por lo que estamos buscando una solución de $D3$ -brana que termine en el círculo al tomar el límite $y \rightarrow 0$. Una manera de atacar este problema es considerar la solución encontrada para la línea recta (4.13) y transformarla mediante una transformación conforme que mapee la línea al círculo. A partir de las transformaciones conformes en la teoría de campos,

generadas por un vector c^α , se pueden extender a isometrías en AdS según [1]:

$$\begin{aligned} x^\alpha &= \frac{\tilde{x}^\alpha + c^\alpha ((\tilde{x})^2 + \tilde{y}^2)}{1 + 2c \cdot \tilde{x} + (c)^2 ((\tilde{x})^2 + \tilde{y}^2)} \\ y &= \frac{\tilde{y}}{1 + 2c \cdot \tilde{x} + (c)^2 ((\tilde{x})^2 + \tilde{y}^2)} \end{aligned} \quad (4.22)$$

En donde la inversa de dicha transformación se obtiene mediante $c^\alpha \rightarrow -c^\alpha$. Para obtener el círculo centrado en el $(0, 0)$ del plano (x^1, x^2) es necesario trasladar primero en la dirección x^2 a la línea recta obteniendo $(x^1, 1/2, 0, 0)$ y después utilizar la transformación (4.22) con la elección $c = (0, -1, 0, 0)$. Una vez encontrada la transformación recordamos que la solución para la línea (4.13) depende del radio r que se forma en las direcciones transversales a la ubicación de la línea, es decir $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ de manera que la solución transformada toma la forma:

$$\begin{aligned} \kappa^2 y^2 &= \left(-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - y^2 + \frac{1}{2} \right)^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ 4\kappa^2 R^2 y^2 &= (r_1^2 + r_2^2 + y^2 - R^2)^2 + 4R^2 r_2^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

En donde en el último paso introdujimos las coordenadas polares correspondientes. A partir de esta ecuación podríamos encontrar una relación funcional para la coordenada $y = y(r_1, r_2)$ que sería a priori una solución del problema pero que lejos está de facilitar los cálculos a realizar con la acción (4.7). Otra manera es plantear un cambio de coordenadas que simplifique de alguna manera la expresión (4.23) explicitando las simetrías del problema, este cambio de coordenadas viene dado por:

$$r_1 = \frac{R \cos \eta}{\cosh \rho - \sinh \rho \cos \theta}, \quad r_2 = \frac{R \sinh \rho \sin \theta}{\cosh \rho - \sinh \rho \cos \theta}, \quad y = \frac{R \sin \eta}{\cosh \rho - \sinh \rho \cos \theta} \quad (4.24)$$

Aplicando este cambio de coordenadas a la ecuación (4.23) obtenemos:

$$\frac{4R^2 (\sin(\eta)^2 \kappa^2 - \sinh \rho)}{(\cosh(\rho) - \cos(\theta) \sinh(\rho))^2} = 0 \quad (4.25)$$

Donde ahora la ecuación (4.23) se simplificó y podemos obtener la solución para el embedding:

$$\sin \eta = \frac{1}{\kappa} \sinh \rho \quad (4.26)$$

Con este *ansatz* podemos ahora plantear el problema, la métrica (4.21) transforma según el cambio (4.24) a:

$$ds^2 = \frac{L^2}{\sin^2 \eta} (d\eta^2 + \cos^2 \eta d\psi^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi)). \quad (4.27)$$

Para poder encontrar el resultado necesitamos poder determinar las condiciones de contorno por lo que tenemos que saber el rango que toman nuestras variables, podemos cubrir el espacio una vez si las mismas toman los valores:

$$\rho \in [0, \infty), \quad \theta \in [0, \pi], \eta \in [0, \pi/2], \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad \psi \in [0, 2\pi] \quad (4.28)$$

Es fácil ver que el borde del espacio $y = 0$ se mapea a $\eta = 0$ y a $\rho \rightarrow \infty$, y el círculo estará ubicado en $\eta = \rho = 0$. A partir del *ansatz* (4.26) vemos que tendremos el conjunto de coordenadas:

$$X^\mu = (\eta(\rho), \psi, \rho, \theta, \phi) \quad (4.29)$$

y tendremos una sola componente del campo electromagnético $F_{\psi\rho}(\rho)$, con esto ya podemos calcular la métrica inducida y la acción DBI, pero para el término de Wess-Zumino necesitamos el pullback de la 4-forma. A partir de la expresión para la 4-forma (4.9) en coordenadas cartesianas podemos hacer el cambio de coordenadas al nuevo conjunto de variables (4.24) obteniendo la forma en términos de las coordenadas adecuadas para nuestro problema:

$$\begin{aligned} C_4 = & L^4 \frac{\cos^2 \eta \sin \theta \sinh^2 \rho}{\sin^4 \eta} d\rho \wedge d\psi \wedge d\theta \wedge d\phi \\ & + L^4 \frac{\cos \eta \sin \theta \sinh^2 \rho (\sinh \rho - \cosh \rho \cos \theta)}{\sin^3 \eta (\cosh \rho - \sinh \rho \cos \theta)} d\eta \wedge d\psi \wedge d\theta \wedge d\phi \\ & - L^4 \frac{\cos \eta \sin^2 \theta \sinh \rho}{\sin^3 \eta (\cosh \rho - \sinh \rho \cos \theta)} d\eta \wedge d\psi \wedge d\rho \wedge d\phi \end{aligned} \quad (4.30)$$

Con la 4-forma expresada en términos de las variables adecuadas, la elección de las coordenadas del embedding (4.29) y el campo $F_{\psi\rho}(\rho)$ podemos obtener la acción:

$$\begin{aligned} S_{DBI} = & T_{D3} \int e^{-\Phi} \sqrt{\det(g + 2\pi\alpha' F)} \\ = & 2N \int d\rho d\theta \frac{\sin \theta \sinh^2 \rho}{\sin^4 \eta} \sqrt{\cos^2 \eta (1 + \eta'^2) + (2\pi\alpha')^2 \frac{\sin^4 \eta}{L^4} F_{\psi\rho}^2} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Y el término de WZ:

$$\begin{aligned} S_{WZ} = & -T_{D3} \int P[C_4] \\ = & -2N \int d\rho d\theta \frac{\cos \eta \sin \theta \sinh^2 \rho}{\sin^4 \eta} \left(\cos \eta + \eta' \sin \eta \frac{\sinh \rho - \cosh \rho \cos \theta}{\cosh \rho - \sinh \rho \cos \theta} \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Donde en ambos términos se realizaron las integrales en las variables angulares (ψ, ϕ) , ya que no aparecen explícitamente en la acción. De igual manera que en

el caso de la línea recta, el campo de gauge A_ρ no aparece explícita mente en la acción por lo que el momento conjugado Π se conservará y será igual a la carga de la cuerda fundamental o el número de Wilson loops coincidentes, es decir que:

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\psi\rho}} = \frac{8\pi^2 N F_{\psi\rho} \sin \theta \sinh^2 \rho}{\lambda \sqrt{\frac{4\pi^2 F_{\psi\rho}^2 \sin^4 \eta}{\lambda} + (\eta' + 1) \cos^2 \eta}} \quad (4.33)$$

En este caso por conveniencia definiremos a $\Pi = k \sin \theta$ es decir que para obtener la carga de la cuerda tendremos que realizar una integral angular. A partir de el ansatz (4.26) que obtuvimos a partir de la transformación conforme (4.23) y el momento Π (4.33) tenemos dos constantes en el problema que debemos relacionar para efectivamente tener la solución. A partir de las ecuaciones de movimiento para la acción (4.31) y (4.32)², junto con el ansatz y el valor del momento vemos que esto es solución en el caso en que:

$$k = \Pi = \frac{4N\kappa}{\sqrt{\lambda}} \quad (4.34)$$

A partir de estas soluciones podemos evaluar *on-shell* la acción del sistema de donde obtenemos:

$$\begin{aligned} S_{DBI+WZ} &= 2N\kappa^2 \int d\rho d\theta \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sinh \rho (\cosh \rho - \sinh \rho \cos \theta)} \\ &= 2N\kappa^2 \left[\coth \rho - \frac{\rho}{\sinh^2 \rho} \right]_{\rho=0}^{\sinh \rho = \kappa} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Podemos ver que a diferencia de los casos previamente analizados para la representación fundamental (3.7), (3.17), para representaciones simétricas los resultados (4.13), en (4.35) no son divergentes por lo que uno podría considerar que cómo los términos de borde cancelan las divergencias no es necesario tenerlos en cuenta. Sin embargo si efectivamente hiciéramos esto no obtendríamos el resultado deseado (3.20), por lo que los términos de borde pueden aportar también a la parte finita de la acción *on-shell* cómo veremos ahora.

Para considerar los términos de borde necesitamos calcular los momentos conjugados asociados a la coordenadas $\eta(\rho)$ y al momento A_ρ , estos vendrán dados:

$$p_\eta = - \frac{2\kappa^2 n \sin \theta \operatorname{csch}^3 \rho \sqrt{\kappa^2 - \sinh^2 \rho}}{\cos \theta - \coth \rho} \quad (4.36)$$

²Obviamos la presentación explícita de las ecuaciones de movimiento para este caso. A diferencia de las ecuaciones (4.12) asociadas a la línea, las del círculo son aún más complicadas y no presentan ningún tipo de información relevante. Las mismas se pueden obtener fácilmente mediante un proceso tedioso y algebraico a partir de las ecuaciones (4.31) y (4.32).

Ahora la transformada de Legendre asociada y el correspondiente término de borde será:

$$\int d\psi d\phi d\theta \eta p_\eta = 8\pi^2 \kappa^2 n \rho \operatorname{csch}^3 \rho \sqrt{\kappa^2 - \sinh^2 \rho} \operatorname{csc}^{-1}(\kappa \operatorname{csch} \rho) \Big|_{\rho=0}^{\sinh \rho = \kappa} \quad (4.37)$$

Esta última expresión tiene una divergencia en $\rho \rightarrow 0$ por lo que es necesario introducir un cut-off. Podemos también calcular el término de borde asociado al campo:

$$- \int d\rho d\psi i \Pi F_{\psi\rho} = -4N\kappa^2 \coth \rho \Big|_{\sinh \rho = \kappa \sin \eta_0}^{\sinh \rho = \kappa} \quad (4.38)$$

Juntando la expresión para la acción on-shell (4.35) en conjunto con los términos de borde (4.37) y (4.38) vemos que las divergencias de estos se cancelan y el resultado viene dado por:

$$S_{\text{circulo}} = -2N[\kappa\sqrt{1+\kappa^2} + \sinh^{-1} \kappa] \quad (4.39)$$

El perfil de la solución puede verse en la imagen (4.2) En este caso a partir de la

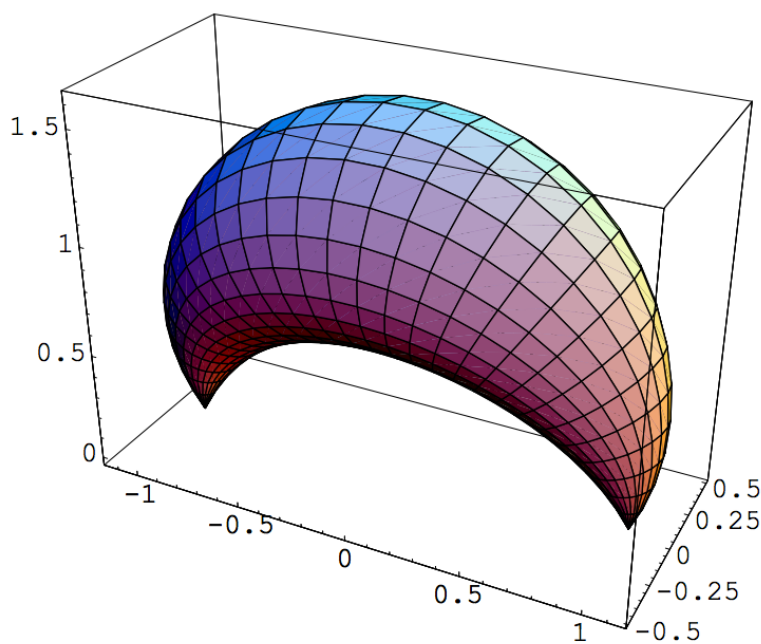


Figura 4.2: Perfil de la D3-brana asociada a la trayectoria circular.

solución (4.26) podemos obtener la métrica inducida por la brana:

$$ds^2 = \frac{L^2}{\sin^2 \eta} \left(\frac{1 + \kappa^2}{1 + \kappa^2 \sin^2 \eta} d\eta^2 + \cos^2 \eta d\psi^2 \right) + L^2 \kappa^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.40)$$

En donde podemos ver que nuevamente la métrica se factoriza obteniendo un término asociado con una esfera S^2 y para ver la estructura del otro término es conveniente realizar el cambio:

$$\cot^2 \eta = (1 + \kappa^2) \sinh \zeta \quad (4.41)$$

En donde obtenemos en estas coordenadas:

$$ds^2 = L^2(1 + \kappa^2) (d\zeta^2 + \sinh^2 \zeta d\psi^2) + L^2 \kappa^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.42)$$

En donde ahora vemos que la estructura es nuevamente $AdS_2 \times S^2$. A diferencia de la solución para la línea recta vemos que (4.39) es una función no trivial del flujo κ o análogamente del rango de la representación k , para analizar el resultado es conveniente estudiar el límite en el que $\kappa \rightarrow 0$ de (4.39):

$$S_{\text{circulo}} = -4N\kappa - \frac{2N\kappa^3}{3} + \frac{N\kappa^5}{10} + \mathcal{O}(\kappa^7) = -k\sqrt{\lambda} - \frac{k^3 \lambda^{3/2}}{96N^2} + \frac{k^5 \lambda^{5/2}}{10240N^4} + \mathcal{O}\left(\frac{k^{7/2}}{N^6}\right) \quad (4.43)$$

En primer lugar vemos que el término dominante es k veces el resultado para la representación fundamental (3.20), es decir que a primer orden vemos la contribución de k cuerdas coincidentes en la curva \mathcal{C} como esperábamos. Sin embargo, los ordenes siguientes son correcciones en $1/N^2$ al valor de expectación, los cuales podemos entender en términos de las cuerdas que componen la brana.

En el límite de λ grande tendríamos que calcular la superficie mínima de *genus* mayor que terminen en la curva \mathcal{C} . Sin embargo estas soluciones no existen [5] por lo que debemos analizar de que manera podemos, a partir de la solución original para la cuerda, deformarla agregándole manijas.

Si miramos a orden g_s^{2p} deberíamos considerar p manijas indistinguibles que terminen en nuestra superficie. Estas contribuciones tendrán la misma acción que el resultado a *leading order* pero con un prefactor distinto que da cuenta de la degeneración de las manijas. El acoplamiento de la cuerda arroja un factor $g_s^{2p} \sim (\lambda/N)^{2p}$, pero también hay que tener en cuenta la medida de integración correspondiente. Una cuerda abierta con un límite y p manijas tendrá $6p - 3$ módulos reales [5] pero en el límite de λ grande solamente tenemos que considerar manijas degeneradas que imponen 2 restricciones por cada una, cada una de estas restricciones introduce una delta en la medida de integración que dará un factor similar a la inversa de la escala efectiva del problema, es decir que en nuestro caso $\lambda^{1/4}$, teniendo en cuenta también el factor asociado a la manera de contar la cantidad de manijas, esperamos a orden $2p$ un resultado que sea proporcional a:

$$\frac{1}{p!} \frac{g_s^2}{\lambda^{(2p+3)/4}} \sim \frac{1}{p!} \frac{\lambda^{(6p-3)/4}}{N^{2p}} \quad (4.44)$$

Estas correcciones aportarán al valor de expectación un término proporcional a $\lambda^{3/2}/N^2$ que se corresponde con la primera corrección en (4.43). De igual manera podemos considerar el caso en el que las manijas que estamos agregando a la solución de la cuerda no son todas independientes, en este caso tendremos contribuciones cuando dos o más manijas se junten, lo que generará una mayor cantidad de superficies degeneradas. Estas superficies tendrán un orden mayor y puede verse que aportarán términos similares a $\lambda^{5/2}/N^4$.

De acuerdo al cálculo realizado para el Wilson Loop circular (3.74) es equivalente a un modelo de matrices:

$$\left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \exp M \right\rangle = \frac{1}{N} L_{N-1}^1(-\lambda/4N) \exp[\lambda/8N] = \frac{1}{N} L_{N-1}^1(-4N\kappa^2) \exp[2N\kappa^2] \quad (4.45)$$

El polinomio de Laguerre verifica la ecuación diferencial:

$$xL_n^k(x)'' + (k+1-x)L_n^k(x)' + nL_n^k(x) = 0 \quad (4.46)$$

Que para el caso del valor de expectación del Wilson Loop toma la forma:

$$[\kappa \partial_\kappa^2 + 3\partial_\kappa - 16N^2\kappa(1+\kappa^2)] \langle W_{ladders} \rangle = 0 \quad (4.47)$$

Para resolver esta ecuación proponemos que nuestro observable puede escribirse como la exponencial de una acción efectiva $\mathcal{F}(\kappa)$, $\langle W_{ladders} \rangle = \exp[-N\mathcal{F}]$, lo que nos da una ecuación para dicha acción:

$$(\mathcal{F}')^2 - \frac{1}{N\kappa}(\kappa\mathcal{F}'' + 3\mathcal{F}') - 16(1+\kappa^2) = 0 \quad (4.48)$$

A partir de (4.33) se puede ver que $N\kappa \sim k\sqrt{\lambda}$ y como estamos en el límite en que $\lambda \gg 1$ podemos despreciar el término $\frac{1}{N\kappa}$ ya que será subdominante en relación a los otros términos, de manera que la ecuación para la acción efectiva \mathcal{F} toma la forma:

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\kappa} = \pm 4\sqrt{1+\kappa^2} \quad (4.49)$$

Que al integrarla obtenemos el resultado:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \pm 2[\kappa\sqrt{1+\kappa^2} + \sinh^{-1} \kappa] \quad (4.50)$$

Donde \mathcal{F}_0 es una condición de borde que podemos fijar igual a 0, de manera que el resultado obtenido es exactamente igual al cálculo realizado con la $D3$ -brana (4.39).

De esta manera vemos que al calcular el valor de expectación del Wilson Loop en términos de $D3$ -branas obtenemos el resultado esperado de la cuerda junto con una serie infinita de correcciones que están asociadas a las correcciones que uno esperaría obtener si considera loops de cuerdas abiertas en la solución de la cuerda fundamental, es decir que la solución completa de la $D3$ -brana incluye correcciones a todo orden en $1/N$ que son dominantes para λ grande.

4.3. Embedding para trayectorias arbitrarias tipo tiempo

El cálculo del embedding de la D3-brana (4.26) lejos está de ser una ecuación manejable como en el caso de la representación fundamental (3.15). Sin embargo mediante el uso de la transformación conforme (4.22) y una elección inteligente de coordenadas (4.24) fue posible encontrar dicho embedding sin la necesidad de resolver explícitamente las ecuaciones de movimiento. De igual manera a partir de la solución para la línea recta (4.13) uno podría encontrar el embedding asociado a una curva \mathcal{C} que sea alguna transformación conforme (4.22) de la misma, pero para una curva arbitraria que no sea una transformación de la línea recta uno debería resolver el problema completo llegando probablemente a ecuaciones de movimiento de muy difícil resolución por los métodos usuales.

En el caso de la representación fundamental vimos en la sección (2.2.4) que Mikhailov encontró la solución del embedding para una trayectoria arbitraria. En esta sección presentaremos la extensión del trabajo de Mikhailov para la solución de $D3$ -branas presentada originalmente en [9]. Dicha solución vimos que se puede pensar como que se están tirando rayos de luz desde el borde de AdS hacia dentro del bulk, es por eso que para construir la solución de $D3$ -Branas consideraremos la situación análoga en la que un quark en la representación k -simétrica del grupo de gauge emite rayos de luz desde el borde de AdS [9].

Consideremos un k -quark estático, $x(t) = \text{constante}$. En las coordenadas de Poincaré cada rayo de luz es una línea recta que se corresponderá con un tiempo retardado fijo t_r . Dada la simetría del problema es fácil ver que rayos de luz iguales deben ser disparados en todas las direcciones (θ, ϕ) de una esfera S^2 ubicada en los alrededores del k -quark. Esto determina un primer ansatz:

$$\begin{aligned}\vec{X}(t_r, z, \theta, \phi) &= \vec{x}(t_r) + \kappa z \vec{n}, \\ t(t_r, z, \theta, \phi) &= t_r + \sqrt{1 + \kappa^2} z,\end{aligned}\tag{4.51}$$

En donde κ por ahora es un número que expresa el hecho de que todos los rayos de luz deben tener la misma pendiente y la dependencia se fija de manera tal de asegurar que efectivamente sean nulas. El vector $\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi)$ es el vector unitario asociado a la S^2 que rodea al k -quark. El ansatz (4.51) es muy similar a la solución original de Mikhailov (2.38), sin embargo sabemos por las soluciones (4.13) y (4.26) que la $D3$ -brana tiene que tener k unidades de la carga fundamental de la cuerda en la dirección radial de AdS es decir que el embedding debe contar también con un campo $F_{t_r z}$ que tenga dicho flujo. Puede verse que el

embedding (4.51) propuesto coincide con la solución (4.13) en el caso en que:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{k\sqrt{\lambda}}{4N}, \\ F_{t_r z} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{1}{z^2}\end{aligned}\tag{4.52}$$

Para poder extender este ansatz a casos más generales es conveniente re-escribir (4.51) cómo:

$$X^\mu(\tau, z, \theta, \phi) = x^\mu(\tau) + \left[\sqrt{1 + \kappa^2 v^\mu} + \kappa n^\mu(\theta, \phi) \right] z \tag{4.53}$$

Donde $v^\mu = (1, 0, 0, 0)$ es la 4-*velocidad* del k -quark y $n^\mu \equiv (0, \vec{n})$. Cómo el ansatz está ahora escrito de manera invariante de Lorentz sabemos que esta solución será el embedding correcto para la $D3$ -brana dual al k -quark que se traslada uniformemente siempre y cuando tomemos v^μ y n^μ los vectores apropiadamente boosteados. En la solución original de Mikhailov (2.38) el embedding de la cuerda solamente dependía de la posición y de la velocidad del quark por lo que es natural proponer que lo mismo pasará con el embedding de la brana, lo que lleva a conjeturar que para una trayectoria arbitraria cuya velocidad dependa del tiempo el mismo será:

$$X^\mu(\tau, z, \theta, \phi) = x^\mu(\tau) + \left[\sqrt{1 + \kappa^2 v^\mu(\tau)} + \kappa n^\mu(\tau, \theta, \phi) \right] z \tag{4.54}$$

En donde ahora n^μ depende del tiempo τ ya que el mismo debe ser transportado de manera adecuada a lo largo de la hoja de mundo. A los fines prácticos es más útil para trabajar la forma no-covariante de (4.54) qué en el caso de un movimiento solamente en la dirección $x \equiv x^1$ viene dado por:

$$\begin{aligned}t &= t_r + \gamma z (\sqrt{1 + \kappa^2} + \kappa v \cos \theta), \\ X^1 &= x + \gamma z (\sqrt{1 + \kappa^2 v} + \kappa \cos \theta), \\ X^2 &= \kappa z \sin \theta \cos \phi, \\ X^3 &= \kappa z \sin \theta \sin \phi,\end{aligned}\tag{4.55}$$

Todavía falta determinar la forma que tendrá $F_{\mu\nu}$ de la cuál la solución de Mikhailov no aporta ninguna guía sobre como construir. Para determinar la forma de los mismos consideremos la acción para la $D3$ -brana :

$$S_{D3} = T_{D3} \int d^4 \chi \left(-\sqrt{-\det(g_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta})} + c_{0123} \right) \tag{4.56}$$

En donde de manera análoga a (4.7) $c_{\alpha\beta\gamma\delta} = \partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n \partial_\gamma X^p \partial_\delta X^q C_{mnpq}$ es el pullback de la C_4 forma de Ramond-Ramond, a partir de (4.51) las coordenadas

del volumen de mundo χ^α serán t_r, z, θ, ϕ . A partir de la acción podemos obtener los momentos conjugados a cada una de las coordenadas del embedding:

$$P_m^\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{D3}}{\partial (\partial_\alpha X^m)} \quad (4.57)$$

Y el conjugado a cada componente del campo:

$$\Pi^{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{D3}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{D3}}{\partial F_{\alpha\beta}} \quad (4.58)$$

A partir de la acción es posible encontrar las expresiones exactas de estos objetos pero la expresión final no aporta al análisis que nos interesa. Es fácil ver a partir de la acción (4.56) y el embedding (4.54) que los campos X^μ y A_α no aparecen sin derivar por lo que sus ecuaciones de movimiento nos dicen simplemente que los momentos se conservan:

$$\partial_\alpha P_\mu^\alpha = 0, \quad \partial_\alpha \Pi^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.59)$$

Si consideramos el caso en el que el movimiento es solamente en una dirección (4.55) y suponemos que la única componente del campo es (4.52) obtenemos:

$$\Pi^{t_r z} = \frac{k \sin \theta}{4\pi} \quad (4.60)$$

Que mediante la integración angular nos da la carga fundamental que tiene la $D3$ -brana. Usando el embedding (4.55) puede verse que es necesario que todas las componentes magnéticas del campo sean nulas:

$$F_{z\theta} = F_{z\phi} = F_{\theta\phi} = 0 \quad (4.61)$$

Mientras que las componentes eléctricas $F_{t_r\theta}$ y $F_{t_r\phi}$ pueden ser arbitrarias, y también puede verse que $\Pi^{t_r\theta} = \Pi^{t_r\phi} = 0$ como esperamos a partir de la simetría de (4.54). Si permitimos que estas componentes sean arbitrarias obtenemos:

$$\begin{aligned} \Pi^{z\theta} &= \frac{4N\sqrt{1+\kappa^2}\gamma^2 \sin \theta}{4\pi\lambda\kappa} \left[\frac{2\pi}{\gamma^2} - \sqrt{\lambda\kappa} a \sin \theta \right], \\ \Pi^{z\phi} &= \frac{2N\sqrt{1+\kappa^2} \csc \theta}{\lambda\kappa} F_{t_r\phi} \end{aligned} \quad (4.62)$$

en donde a es la aceleración del k -quark. En el caso en que estos momentos no sean nulos estaríamos introduciendo una densidad de carga asociadas a una $D1$ -brana en la $D3$ y más aún, en caso de no anularse las ecuaciones de movimiento (4.59) no se cumplen. Por lo que esto fuerza a que $F_{t_r\theta}$ sea proporcional a la aceleración. Con

todo esto en el caso de un movimiento unidimensional arbitrario las componentes del tensor toman la forma:

$$\begin{aligned}
F_{t,r,z} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{1}{\gamma z^2} \\
F_{t,r,\theta} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \kappa \gamma^2 a \sin \theta \\
F_{t,r,\phi} &= 0 \\
F_{z\theta} &= F_{z\phi} = F_{\theta\phi} = 0
\end{aligned} \tag{4.63}$$

El embedding (4.54) junto con el tensor (4.63) verifican las ecuaciones de movimiento (4.59) por lo que es la solución que estábamos buscando. En el caso de un movimiento más general esta construcción puede extenderse obteniendo también el embedding asociado a la $D3$ -brana, los detalles de la construcción pueden verse en el apéndice (B). A partir de esta solución podemos estudiar la forma de la métrica inducida por la $D3$ -brana para una trayectoria arbitraria:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{L^2 dt_r^2}{z^2 (x' - 1)^2} \left((1 + \kappa^2 \sin^2 \theta) z^2 x''^2 + 2\kappa \cos \theta z \sqrt{1 - x'^2 x''} (x'^2 - 1) + (x'^2 - 1)^3 \right) \\
&\quad - \frac{2L^2 dt_r d\zeta}{z^2} \sqrt{(1 + \kappa^2)(1 + x'^2)} \dot{z} + \frac{2L^2 dt_r d\theta}{x'^2 - 1} \kappa \sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2 \theta} x'' + \\
&\quad + L^2 \kappa^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)
\end{aligned} \tag{4.64}$$

En donde introducimos la notación $' \equiv \partial_{t_r}$, $\dot{\ } \equiv \partial_{\zeta}$. De manera análoga al caso de la cuerda (2.43) la métrica inducida para la brana (4.64) tiene un comportamiento singular en:

$$z_h = \frac{\kappa \cos \theta (1 - x'^2)^{3/2} x'' + \sqrt{(1 + \kappa^2)(x'^2 - 1)x''^2}}{(1 + \kappa^2 \sin^2 \theta)x''^2} \tag{4.65}$$

en el cual la componente temporal de la misma se anula (i.e $g_{\tau\tau} = 0$). En el caso en que la métrica sea estática este valor define un horizonte de eventos, por el contrario, en el caso más general de una trayectoria arbitraria y en consecuencia, una métrica que no sea estática el horizonte de eventos debe ser determinado mediante argumentos más globales como por ejemplo el estudio de las geodésicas nulas en dicha geometría [15]. En ambos casos la existencia del horizonte en el volumen de mundo de la brana traerá complicaciones técnicas a la hora de la evaluación *on-shell* de la acción (4.56) para poder obtener el valor de expectación del Wilson loop. En el capítulo siguiente analizaremos trayectorias hiperbólicas en donde utilizaremos todas las herramientas desarrolladas hasta acá, en particular será importante tener en cuenta la existencia de este horizonte de eventos tanto en el caso de la $D3$ -brana (4.65) cómo en el caso de la cuerda (2.43).

Capítulo 5

Wilson Loops Hiperbólico

5.1. Análisis perturbativo

Vimos en la sección anterior que las hojas/volumenes de mundo duales a Wilson loops con trayectorias tipo tiempo arbitrarias tendrán un horizonte de eventos. Dado que este es en general difícil de especificar para una trayectoria completamente arbitraria, no queda claro como obtener el valor de expectación a través de la evaluación de la acción on-shell. Por otro lado, para casos de trayectorias tipo tiempo arbitrarias no se conocen resultados exactos y por lo tanto no se tendría como contrastar el eventual calculo realizado en la teoría de cuerdas.

En vista de lo anterior, el caso de trayectorias tipo tiempo hiperbólicas se vuelve interesante. Por un lado, dado que la métrica de las hojas/volumenes de mundo son estáticas, es fácil hallar la posición del horizonte de eventos el cual demarcaría los límites de integración en la evaluación on-shell de las acciones [14]. Por otro lado, estos Wilson loops hiperbólicos son supersimétricos [2] y cabe esperar que pueda encontrarse un resultado analítico y exacto para sus valores de expectación análogo al encontrado para el caso del Wilson loop circular (4.43). Las configuraciones de cuerdas o D-branas duales a estos Wilson loops se pueden obtener especificando una trayectoria hiperbolica en (2.39) o en (4.55), (4.63) o bien mediante una continuación analítica de (3.16) o de (4.55).

Para analizar esta posibilidad comencemos por considerar la siguiente trayectoria hiperbólica tipo tiempo:

$$\begin{aligned}x^\mu &= a^{-1} (\sinh a\tau, \pm \cosh a\tau, 0, 0) \\ \dot{x}^\mu &= (\cosh a\tau, \sinh a\tau, 0, 0)\end{aligned}\tag{5.1}$$

En donde a es la aceleración con la que se mueve la partícula y el signo \pm corresponde a una u otra rama de la hipérbola, fig. (5.1). Esta trayectoria puede interpretarse como una partícula que se propaga por una rama y la correspondiente anti-partícula en la otra, entre las que podrían propagarse glouones virtuales.

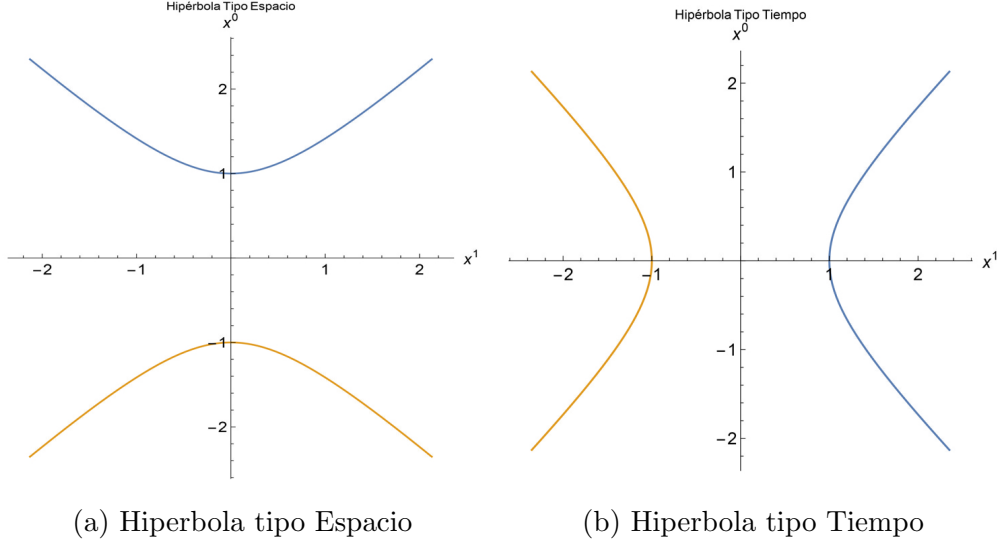


Figura 5.1: Gráfico de ambas hipérbolas para el caso en que $a = 1$.

Por lo visto para el caso del Wilson Loop circular, lo que permitió conjeturar que el valor de expectacion es dado por la suma de los diagramas *ladder* unicamente, fue el hecho de la cancelación de las diagramas con interacciones [8]. Esto fue posteriormente probado mediante localización supersimétrica por Pestun [23]. En el caso de las trayectorias hiperbólicas usaremos esto como guía, es decir que en la próxima sección mostraremos que a partir de (5.1) el resultado a un loop es constante y los diagramas de interacción a orden $g^4 N^2$ se cancelan exactamente. Bajo la hipótesis de que dicha cancelación ocurre a todo orden perturbativo extenderemos los resultados que solo tienen los diagramas tipo *ladder* para tener un resultado exacto para los Wilson loops hiperbólicos.¹ El operador que consideraremos es entonces:

$$W(\mathcal{C}, \mathcal{R}) = \frac{1}{\dim(\mathcal{R})} \text{Tr}_{\mathcal{R}} \left(\mathcal{P} \exp \oint_{\mathcal{C}} ds (iA_{\mu} \dot{x}^{\mu} + i\Phi_1 |\dot{x}|) \right) \quad (5.2)$$

en donde $|\dot{x}| = \sqrt{-\dot{x}^2}$.

5.2. Cálculo a 1-loop y cancelación de diagramas de interacción

Analizaremos primero el caso de la hipérbola tipo tiempo (5.1b), en este caso los diagramas de interacción posibles análogos a los considerados en el caso circular

¹Demostrar lo anterior mediante localización se va del alcance de este trabajo quedando pendiente para el futuro.

vienen dados por:

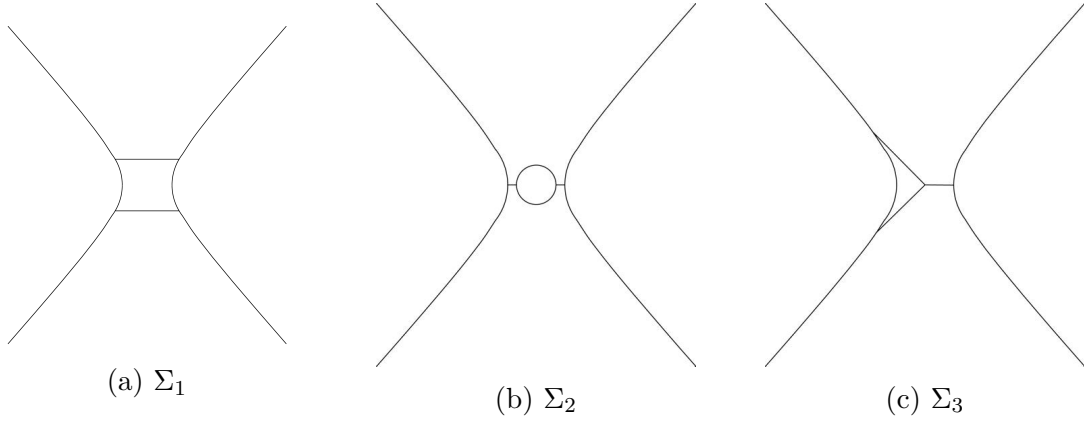


Figura 5.2: Diagramas asociados con la expansión del operador a orden $N^2 g^4$ para el caso de la trayectoria hiperbólica tipo tiempo.

Para facilitar el análisis es conveniente introducir una parametrización distinta a (5.1) de manera tal de poder incluir ambas ramas en la misma. En esta nueva parametrización ya introducimos el cut off T asociado al tiempo propio de cada rama,

$$x^\mu = \left(\frac{1}{a} \sinh[a(T - |\tau|)], -\frac{\text{sgn}(\tau)}{a} \cosh[a(T - |\tau|)], 0, 0 \right) \quad (5.3)$$

En donde:

$$-2T < \tau < 0 \quad \cup \quad 0 < \tau < 2T \quad (5.4)$$

A partir de esta expresión podemos calcular las magnitudes relevantes que aparecerán en el cálculo a 2-loops:

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu &= (\text{sgn}\tau \cosh[a(T - |\tau|)], \sinh[a(T - |\tau|)], 0, 0), \\ |\dot{x}|^2 &= -\cosh^2[a(T - |\tau|)] + \sinh^2[a(T - |\tau|)] = -1 \\ \dot{x}^\mu x_\mu &= \frac{\text{sgn}\tau}{a} \cosh[a(T - |\tau|)] \sinh[a(T - |\tau|)] - \frac{\text{sgn}\tau}{a} \sinh[a(T - |\tau|)] \cosh[a(T - |\tau|)] = 0 \\ \ddot{x}^\mu &= a^2 x^\mu \end{aligned} \quad (5.5)$$

También resultará útil la siguiente identidad:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2 &= -\text{sgn}(\tau_1)\text{sgn}(\tau_2) \left(\cosh[a(T - |\tau_1|)] \cosh[a(T - |\tau_2|)] \right. \\ &\quad \left. + \sinh[a(T - |\tau_1|)] \sinh[a(T - |\tau_2|)] \right) \\ &= -\text{sgn}(\tau_1\tau_2) \cosh[a(T - |\tau_1|) - \text{sgn}(\tau_1\tau_2)a(T - |\tau_2|)] \end{aligned} \quad (5.6)$$

De donde se desprende que:

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{2}{a^2} (1 + \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2) \quad (5.7)$$

Con todas estas propiedades obtenidas a partir de la parametrización elegida podemos proceder a calcular el resultado a 1-loop, si consideramos el desarrollo perturbativo (5.8). Para una representación arbitraria \mathcal{R} del grupo de gauge obtenemos

$$\langle W(\mathcal{C}, \mathcal{R}) \rangle = 1 + \frac{g^2 \mathcal{C}_2(\mathcal{R})}{4\pi^2} \oint_{\mathcal{C}} d\tau_1 d\tau_2 \frac{|\dot{x}(\tau_1)| |\dot{x}(\tau_2)| - \dot{x}(\tau_1) \cdot \dot{x}(\tau_2)}{|x(\tau_1) - x(\tau_2)|^2} + \dots \quad (5.8)$$

y junto con la propiedad (5.7) obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle W(\mathcal{C}, \mathcal{R}) \rangle &= 1 + \frac{g^2 \mathcal{C}_2(\mathcal{R})}{4\pi^2} \oint_{\mathcal{C}} d\tau_1 d\tau_2 \frac{1 + \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2}{\frac{2}{a^2} (1 + \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2)} \\ &= 1 + \frac{g^2 \mathcal{C}_2(\mathcal{R}) a^2}{8\pi^2} \oint_{\mathcal{C}} d\tau_1 d\tau_2 = 1 + \frac{2g^2 \mathcal{C}_2(\mathcal{R}) a^2 T^2}{\pi^2} + \dots \end{aligned} \quad (5.9)$$

En donde en el último paso integramos hasta el cut off T ya introducido en la parametrización. De manera análoga al caso del Wilson Loop circular (3.49) vemos que el resultado final es independiente de los parámetros de la trayectoria elegida, por lo que si podemos ver que los diagramas de interacción a orden $g^4 N^2$ se cancelan de manera análoga a (3.66), tendríamos un modelo de matrices gaussiano que nos daría el resultado exacto. El desarrollo que hicimos en el capítulo 4 para analizar las contribuciones a orden $g^4 N^2$ fue independiente de la curva \mathcal{C} utilizada y se especializó en el caso del círculo al final del cálculo por lo que las expresiones para Σ_1 (3.39), Σ_2 (3.37) y Σ_3 (3.43) siguen siendo válidas, en donde ahora tendremos que tener en cuenta los correspondientes factores de color asociados a una representación genérica. Además debemos analizar la cancelación de términos de borde propios de la trayectoria hiperbólica, ausentes en el caso circular.

Para analizar Σ_3 definimos de manera análoga al caso anterior:

$$\Delta = \alpha\beta (x_1 - x_2)^2 + \alpha\gamma (x_1 - x_3)^2 + \beta\gamma (x_2 - x_3)^2 \quad (5.10)$$

En lugar de la identidad (3.59), en el presente caso para escribir la derivada total

es necesario incluir también los términos de borde^{2 3}

$$\begin{aligned} \iint \frac{\epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3)(1 + \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2)}{\Delta^{2w-3}} \Big|_{\tau_1=0}^{\tau_1=2T} &= \iiint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau_1} \frac{(1 + \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2)}{\Delta^{2w-3}} \\ &+ \iiint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3) \partial_{\tau_1} \frac{(1 + \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2)}{\Delta^{2w-3}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

para poder ver la cancelación de los diagramas de interacción es necesario, de manera análoga al caso circular, transformar la expresión (5.11) en Σ_2 . Esto es solamente posible en el caso en que el término de borde sea nulo, efectivamente para la trayectoria (5.1) esta cancelación sucede si se tiene en cuenta ambas ramas de la hipérbola (Ver Apéndice C). Si en cambio de dicha trayectoria se considerase una sola rama o la hipérbola tipo espacio, la cancelación de los términos de borde no sucedería lo que significa que los diagramas de interacción aportan al resultado de acoplamiento fuerte.

Considerando que para este caso los términos de borde se cancelan exactamente, para poder expandir el último término de (5.11) es conveniente analizar primero como actúa la derivada sobre Δ (5.10):

$$\begin{aligned} \partial_{\tau_1} \Delta &= \dot{x}_1 \partial_{x_1} \Delta = 2\alpha\beta\dot{x}_1(x_1 - x_2) + 2\alpha\gamma\dot{x}_1(x_1 - x_3) \\ &= -2\alpha\dot{x}_1(x_2 + x_3) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ahora si, expandiendo la derivada del segundo término de (5.11) obtenemos:

$$\begin{aligned} \iiint d\tau_{1-3} \epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3) \partial_{\tau_1} \frac{(1 + \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2)}{\Delta^{2w-3}} &= \iiint d\tau_{1-3} \epsilon \left[(\tau_1\tau_2\tau_3) \frac{(1 + \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2)}{\Delta^{2w-2}} \right. \\ &\left. - \frac{(1 + \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2)(2w-3)}{\Delta^{2w-2}} \dot{x}_1 \partial_{x_1} \Delta \right] \\ &= \iiint d\tau_{1-3} \frac{\epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3)}{\Delta^{2w-2}} \left[2x_1 \cdot \dot{x}_3 (\alpha\beta(1 + \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2) + \alpha\gamma(1 + \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_3)) \right. \\ &\left. + \beta\gamma(1 + \dot{x}_2 \cdot \dot{x}_3) + 2(2w-3)(\alpha\beta\dot{x}_1 \cdot x_2 + \alpha\gamma\dot{x}_1 \cdot x_3)(1 + \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_3) \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

De igual manera que en el caso del Wilson Loop circular es necesario renombrar las variables en el primer término de (5.13) siguiendo:

$$\begin{aligned} \tau_2 &\leftrightarrow t_3 \\ \beta &\leftrightarrow \gamma \end{aligned} \quad (5.14)$$

²En el caso de la trayectoria circular este término resulta nulo debido a que la misma es una curva cerrada. Sin embargo para la trayectoria hiperbólica al introducir el cut-off T no es obvio que dichos términos de borde sean nulos.

³En la siguiente ecuación se muestran solamente dos de los cuatro términos de borde presentes a partir de la parametrización 5.4

En un caso y:

$$\begin{aligned}\tau_1 &\leftrightarrow \tau_2 \\ \alpha &\leftrightarrow \beta\end{aligned}\tag{5.15}$$

En el otro, de manera que el resultado final tomará la forma:

$$\begin{aligned}&\iiint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \frac{\epsilon(\tau_1 \tau_2 \tau_3)}{\Delta^{2w-3}} 2(2w-4)(\alpha\beta\dot{x}_1 \cdot x_2 + \alpha\gamma\dot{x}_1 \cdot x_3)(1 + \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_3) \\ &+ \iiint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \frac{\epsilon(\tau_1 \tau_2 \tau_3)}{\Delta^{2w-3}} \left[2\alpha(1-\alpha)\dot{x}_1 \cdot x_2 + 2\alpha\gamma\dot{x}_2 \cdot x_3 \right] (1 + \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_3)\end{aligned}\tag{5.16}$$

De manera tal que vemos que el primer término se anula en el caso en que $w = 2$ mientras que el segundo es el término que buscábamos, para asegurar que efectivamente se realiza la cancelación (3.66) es necesario analizar la estructura de color presente en cada uno de los términos. Para analizar esta estructura basta analizar las figuras (5.2c,5.2b). Cada vértice presente en los diagramas introduce un término análogo a (3.40), es decir:

$$V(y) \simeq f^{a'b'c'} \phi^{a'}(y) \phi^{b'}(y) \phi^{c'}(y)\tag{5.17}$$

en donde estamos tomando $\phi^{a'}(y)$ como un gluon/escalar insertados en y . Con esta notación el término de color asociado a Σ_3 (5.2c) vendrá dado por:

$$\begin{aligned}\Sigma_3^{color} &\simeq \text{Tr}(T^a T^b T^c) \phi^a(x_1) \phi^b(x_2) \phi^c(x_3) f^{a'b'c'} \phi^{a'}(y) \phi^{b'}(y) \phi^{c'}(y) \frac{1}{g^2} \\ &\simeq \text{Tr}(T^a T^b T^c) g^4 f^{a'b'c'} \delta^{aa'} \delta^{bb'} \delta^{cc'} \simeq g^4 \text{Tr}(T^a T^b T^c) f^{abc}\end{aligned}\tag{5.18}$$

en donde en el primer paso realizamos las contracciones de Wick pertinentes y utilizamos la forma de los propagadores (1.46). Para concluir el análisis de este término basta notar que f^{abc} es anti-simétrico por lo que puede anti-simetrizar el término dentro de la traza agregando un factor 1/2 obteniendo:

$$\Sigma_3^{color} \simeq \frac{g^4}{2} \text{Tr}([T^a, T^b] T^c) f^{abc} = \frac{g^4}{2} \text{Tr}(T^d T^c) f^{abc} f^{abd} = \frac{g^4}{2} N \text{Tr}(T^d T^d)\tag{5.19}$$

En donde usamos la propiedad $f^{abc} f^{abd} = N\delta^{cd}$. Por otro lado los factores de color asociados a Σ_2 vendrán dados por:

$$\begin{aligned}\Sigma_2^{color} &\simeq \text{Tr}(T^a T^b) \phi^a(x_1) \frac{f^{a'b'c'}}{g^2} \phi^{a'}(y_1) \phi^{b'}(y_1) \phi^{c'}(y_1) \times \\ &\times \frac{f^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}}{g^2} \phi^{\bar{a}}(y_2) \phi^{\bar{b}}(y_2) \phi^{\bar{c}}(y_2)\end{aligned}\tag{5.20}$$

Nuevamente es necesario realizar las contracciones de Wick pertinentes y utilizando la misma propiedad para las constantes de estructura que en el caso anterior obtenemos:

$$\Sigma_2^{color} = \frac{g^4}{2} N \text{Tr}(T^a T^a) \quad (5.21)$$

en donde vemos que efectivamente ambos términos son iguales independientemente de la representación en la que estemos por lo que nuevamente obtenemos:

$$\Sigma_2 + \Sigma_3 = 0 \quad (5.22)$$

de igual manera que en el caso de la trayectoria circular para la trayectoria hiperbólica tenemos el resultado a 1-loop constante (5.9) y la cancelación de los diagramas de interacción a orden $g^4 N^2$ (5.16). Estos resultados junto con el hecho de que la hipérbola puede verse como una continuación analítica del círculo por lo que también será una trayectoria 1/2 BPS nos permiten conjeturar que existe un resultado exacto para el valor de expectación del Wilson Loop hiperbólico y que el mismo se puede encontrar de igual manera que en el caso circular.

En el caso del Wilson Loop circular vimos que como los propagadores gluónicos y escalares eran constantes (3.49) el cálculo de los diagramas tipo escalera se podía resolver mediante un modelo de matrices (3.74) gaussiano, para el caso de las hipérbolas vimos que de igual manera los propagadores son constantes y las divergencias a orden $g^4 N^2$ se cancelan exactamente. De manera análoga podemos calcular el resultado proveniente del modelo de matrices a partir del resultado de la cuenta a 1-loop (5.9) que corresponde con el cambio:

$$\lambda \mapsto \frac{\lambda a^2 \tau_p^2}{\pi^2} \quad (5.23)$$

Es decir que el resultado (3.74) vendrá dado ahora por:

$$\langle W \rangle = N L_{N-1}^1 \left[\frac{\lambda a^2 \tau_p^2}{4N\pi^2} \right] \exp \left[- \frac{\lambda a^2 \tau_p^2}{8N\pi^2} \right] \quad (5.24)$$

A partir de (5.24) se puede ver que en el límite de $\tau_p \rightarrow \infty$ el resultado es nulo. Esto puede interpretarse considerando que los quarks que están siendo acelerados están emitiendo *bremsstrahlung* y que la amplitud asociada a encontrar un par quark-anti-quark en el estado final tiende a cero. De igual manera puede verse que la emisión de *bremsstrahlung* requiere la presencia de diagramas de Feynmann que son no-planares pero estos están suprimidos en el límite de $N \rightarrow \infty$ [14] es decir que para recuperar el límite deseado es necesario primero proyectar sobre los diagramas planares ($N \rightarrow \infty$) y luego tomar $\tau_p \rightarrow \infty$, tomando el límite en (5.36) obtenemos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle W \rangle = \frac{2\pi N}{\sqrt{\lambda} a \tau_p} J_1 \left(\frac{\sqrt{\lambda} a \tau_p}{\pi} \right) \quad (5.25)$$

Y luego tomando el límite en el cut-off τ_p

$$\lim_{N, \tau_p \rightarrow \infty} \langle W \rangle = N \frac{-i\pi}{\sqrt{2}(\sqrt{\lambda}a\tau_p)^{3/2}} e^{i\frac{\sqrt{\lambda}a\tau_p}{\pi}} \quad (5.26)$$

Por otro lado el resultado del modelo de matrices fue extendido en [12] para otras representaciones del grupo de gauge, en particular para una representación anti-simétrica de rango k :

$$W_k^{as} = \frac{1}{\dim(\mathcal{R}_{as})} \langle \text{Tr}_{as}[U] \rangle = \exp \left[\frac{2N}{3\pi} \sqrt{\lambda} \sin^3 \theta_k \right] \quad (5.27)$$

donde θ_k es una variable angular asociada a S^5 para la representación de rango k . Y para el caso de una representación simétrica:

$$W_k^s = \frac{1}{\dim(\mathcal{R}_s)} \langle \text{Tr}_s(U) \rangle = \exp \left[2N \left(\kappa \sqrt{1 + \kappa^2} + \sinh^{-1} \kappa \right) \right] \quad (5.28)$$

realizando entonces el cambio (5.23) esperamos obtener para representaciones de rango mayor:

$$\begin{aligned} \langle W_{as} \rangle &= \exp \left[\frac{2N}{3\pi} \sin^3 \theta_0 \frac{a\tau_p \sqrt{\lambda}}{\pi} \right] \\ \langle W_s \rangle &= \exp \left[2N \frac{\kappa a \tau_p}{\pi} \left(\sqrt{1 + \frac{\kappa^2 a^2 \tau_p^2}{\pi^2}} + \sinh^{-1} \frac{\kappa a \tau_p}{\pi} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.29)$$

5.3. Wilson Loops hiperbólicos en la representación fundamental

Para estudiar el Wilson Loop hiperbólico (5.1b) en términos del área mínima descrita por la cuerda consideremos la métrica del espacio:

$$ds^2 = \frac{\sqrt{\lambda} \alpha'}{y^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2) \quad (5.30)$$

Para el caso de la trayectoria hiperbólica el quark y anti-quark son cuerdas abiertas que se extienden desde el horizonte de Poincare ubicado en $y = \infty$ y una $D3$ -brana de prueba alejada del stack que se encuentra ubicada en $y = y_M$, nuevamente la acción viene dada por NG:

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-\det g} \quad (5.31)$$

Recordemos que en este caso la trayectoria hiperbólica tipo tiempo es un caso particular de una trayectoria temporal por lo que podemos utilizar la solución de Mikhailov (2.38):

$$X^\mu(\tau, y) = x^\mu(\tau) + y\dot{x}^\mu(\tau) \quad (5.32)$$

En donde $x^\mu(\tau)$ es la parametrización de la trayectoria \mathcal{C} dada por (5.50), con este embedding podemos calcular la acción (5.3):

$$\begin{aligned} g_{\tau\tau} &= \frac{\sqrt{\lambda}\alpha'}{y^2} \left((X^{1'})^2 - (X^{0'})^2 \right) \\ g_{yy} &= 0 \\ g_{\tau y} &= \frac{\sqrt{\lambda}\alpha'}{y^2} \left(\dot{X}^1 X^{1'} - \dot{X}^0 X^{0'} \right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

De donde obtenemos:

$$S_{NG} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\tau_p/2}^{\tau_p/2} \int_0^{y_M} d\tau dy \frac{1}{y^2} \left(\dot{x}^1 x^{1'} - \dot{x}^0 x^{0'} \right) = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\tau_p/2}^{\tau_p/2} \int_0^{y_M} d\tau dy \frac{1}{y^2} \quad (5.34)$$

En donde en el último paso utilizamos la forma explícita (5.50) de la trayectoria. Cómo es de esperar la integral resulta divergente cuando nos acercamos al horizonte $y \rightarrow 0$ por lo que es necesario introducir un *cut-off* y regularizar la acción con los términos de borde correspondientes de manera que el resultado viene dado por:

$$S_{NG} = 2 \frac{\sqrt{\lambda}\tau_p}{2\pi} \frac{1}{y_M} \quad (5.35)$$

En donde el factor 2 corresponde a la integral de dos regiones idénticas y lo dejamos explícito por conveniencia. Este resultado no se corresponde con el cálculo en la teoría de campos, para entender en que consiste el problema es conveniente analizar la métrica inducida por la hoja de mundo (2.43):

$$ds^2 = \sqrt{\lambda}\alpha' \left[- \left(\frac{1}{y^2} - a^2 \right) d\tau^2 - \frac{2}{y^2} d\tau dy \right] \quad (5.36)$$

Como mencionamos cuando se introdujo la construcción de Mikhailov la métrica inducida (5.36) presenta un horizonte de eventos en $y_h = \frac{1}{a}$ por lo que la correcta evaluación *on-shell* de la acción (5.34) tiene que tener en cuenta esto:

$$\begin{aligned} S_{NG} &= 2 \left[- \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\tau_p/2}^{\tau_p/2} d\tau \int_{y_M}^{y_h} \frac{dy}{y^2} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}\alpha\tau_p}{\pi} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Vemos que ahora el resultado del cálculo de supergravedad coincide con lo calculado en la teoría de campos, lo que llevó a proponer originalmente a Hubeny y Semenoff en [14] que la evaluación on-shell de la acción de supergravedad debe hacerse hasta el horizonte de eventos.

5.4. Representaciones anti-simétricas

En el caso en que la representación del grupo de gauge \mathcal{R} sea anti-simétrica la descripción holográfica del Wilson Loop puede obtenerse en términos de una $D5$ -brana. A diferencia de la representación simétrica, en la cual la descripción holográfica en términos de $D3$ -branas describe un volumen de mundo $AdS_2 \times S^2 \subset AdS_5$ [10], la representación anti-simétrica la $D5$ -brana dual tendrá un volumen de mundo de la forma $\Sigma \times S^4 \subset AdS_5 \times S^5$ donde Σ es la hoja de mundo de la solución en la representación fundamental. Es decir que en este caso dicho volumen es una sub-variedad del espacio completo y no solamente de AdS_5 como en el caso simétrico.

Para estudiar dicha brana consideremos una $D5$ -brana cuyo volumen de mundo es de la forma $\Sigma \times S^4$ de manera que $\Sigma \subset AdS_5$ es una superficie 2-dimensional parametrizada por (σ^0, σ^1) que termina en el borde de AdS en la trayectoria \mathcal{C} que define el lazo de Wilson. Asimismo $S^4 \subset S^5$ cuyo radio es $L \sin \theta$, donde θ es un ángulo azimutal en la esfera S^5 . Es decir que si consideramos la métrica de $AdS_5 \times S^5$:

$$ds^2 = \frac{L^2}{y^2} (dy^2 - (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2) + L^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_4), \quad (5.38)$$

tomamos como ansatz para la solución:

$$y = y(\sigma^0, \sigma^1), \quad x^\mu, \quad \theta = \theta_0, \quad \Omega_4 = (\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5). \quad (5.39)$$

Además, en el volumen de mundo debe encenderse un tensor electromagnético F_{ab} , cuyo flujo se relacionará con el rango de la representación del lazo de Wilson dual. La acción (4.1, 4.2) a partir de la cual se obtienen las ecuaciones de movimiento de la $D5$ -brana tomará la forma:

$$S_{D5} = T_5 \int d^6 \sigma e^{-\phi} \sqrt{-\det(g + 2\pi\alpha' F)} - 2\pi\alpha' T_5 \int F \wedge P[C_4], \quad (5.40)$$

En este caso la forma correspondiente viene dada por:

$$C_4 = \frac{L^4}{g_s} \left[\frac{3(\theta - \pi)}{2} - \sin^3 \theta \cos \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \sin \theta \right] \text{Vol} S^4 \quad (5.41)$$

De manera análoga al caso circular queremos que el tensor F_{ab} lleve $k \in \mathbf{Z}$ unidades de carga de la cuerda fundamental⁴ por lo que fijamos:

$$F_{\sigma^0\sigma^1} \equiv iF \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \quad (5.43)$$

Con este ansatz particular es fácil ver que como el tensor F_{ab} no tiene componentes en las direcciones asociadas a S^5 , el determinante se factoriza introduciendo simplemente un factor asociado a la 5-esfera obteniendo:

$$S_{D5} = \frac{N\sqrt{\lambda}}{3\pi^2} \int d\sigma^0 d\sigma^1 [\sin^4 \theta \sqrt{\det g_\Sigma - F^2} - F(\sin^3 \theta \cos \theta + \frac{3}{2} \cos \theta \sin \theta - \frac{3(\theta - \pi)}{2})] \quad (5.44)$$

A diferencia de la $D3$ -brana para la trayectoria circular en este caso tenemos dos cantidades conservadas, el momento asociado a F y a θ . Calculando ambas ecuaciones de movimiento y fijando $\theta = \theta_0$ obtenemos:

$$\begin{aligned} F &= -\cos \theta_0 \sqrt{-\det g_\Sigma} \\ \pi \left(\frac{k}{N} - 1 \right) &= \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \theta_0 \end{aligned} \quad (5.45)$$

En donde vemos que sorprendentemente el tensor F es proporcional al volumen Σ , este resultado permite que las ecuaciones de movimiento para el embedding en AdS_5 sean exactamente las ecuaciones de movimiento de NG [12], renormalizando la acción con los términos de borde correspondientes el resultado del valor de expectación del Wilson loop viene dado por:

$$S_{D5} = \frac{2N}{3\pi} \sin^3 \theta_0 S_{fundamental} \quad (5.46)$$

En donde $S_{fundamental}$ es la acción *on-shell* asociada a la representación fundamental. Este resultado encontrado por Hartnoll [11] es completamente general y válido para cualquier trayectoria, así como también para temperatura finita. En el caso particular de la trayectoria hiperbólica el valor de expectación del Wilson loop vendrá dado simplemente por (5.46) junto con el resultado de la cuerda (5.37) es decir:

$$S_{D5} = \frac{2N}{3\pi} \sin^3 \theta_0 \left(\frac{\sqrt{\lambda} a \tau_p}{\pi} \right) \quad (5.47)$$

⁴Es decir que queremos:

$$\frac{\delta S}{\delta F_{\sigma^0\sigma^1}} = ik \quad (5.42)$$

5.5. Hipérbola tipo tiempo en representaciones simétricas

5.5.1. Cálculo a partir del círculo

Para estudiar la descripción del Wilson Loop hiperbólico (5.1b) en términos de $D3$ -branas podemos tomar como punto de partida el círculo. En ese caso teníamos un círculo de radio R ubicado en el plano x^0, x^1 es decir que dicha trayectoria viene dada por:

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 = R^2 \quad (5.48)$$

Y la métrica de AdS en ese caso (4.21) tomaba la forma:

$$ds^2 = \frac{L^2}{y^2} (dy^2 + dr_1^2 + r_1^2 d\psi^2 + dr_2^2 + r_2^2 d\phi^2) \quad (5.49)$$

Para describir la hipérbola tipo tiempo podemos notar que haciendo el cambio $x^0 \mapsto ix^0$ en (5.48) obtenemos la hipérbola correspondiente:

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 = R^2 \quad (5.50)$$

En este caso la métrica de AdS toma la forma:

$$ds^2 = \frac{L^2}{y^2} (dy^2 - (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2) \quad (5.51)$$

Y podemos introducir el cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} x^0 &= r_1 \sinh a\tau, & x^3 &= r_2 \sin \phi, \\ x^1 &= r_1 \cosh a\tau, & x^4 &= r_2 \cos \phi. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Ante el cual la métrica (5.51) toma la forma:

$$ds^2 = \frac{L^2}{y^2} (dy^2 + dr_1^2 - a^2 r_1^2 d\tau^2 + dr_2^2 + r_2^2 d\phi^2) \quad (5.53)$$

En el caso del Wilson Loop circular introdujimos el cambio de coordenadas (4.24) que llevaba el problema a sus coordenadas naturales, dada la similitud entre las métricas (5.53) y (5.49) podemos introducir ahora un cambio de coordenadas análogo:

$$r_1 = \frac{a^{-1} \cos \eta}{\cosh \rho - \sinh \rho \cos \theta}, \quad r_2 = \frac{a^{-1} \sinh \rho \sin \theta}{\cosh \rho - \sinh \rho \cos \theta}, \quad y = \frac{a^{-1} \sin \eta}{\cosh \rho - \sinh \rho \cos \theta} \quad (5.54)$$

Con este cambio la métrica toma la forma:

$$ds^2 = \frac{L^2}{\sin^2 \eta} (d\eta^2 - a^2 \cos^2 \eta d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi)). \quad (5.55)$$

Los rangos de estas nuevas coordenadas son

$$\rho \in [0, \infty), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \eta \in [0, \pi/2], \quad \tau \in (-\infty, \infty), \quad \phi \in [0, 2\pi]. \quad (5.56)$$

En estas coordenadas, tomar $\eta \rightarrow 0$ nos lleva al borde de *AdS*. Por otro lado, tomar $\eta \rightarrow 0$ y $\rho \rightarrow 0$ equivale a tomar $y \rightarrow 0$, $r_2 \rightarrow 0$ y $r_1 \rightarrow a^{-1}$. Es decir que $\eta \rightarrow 0$ y $\rho \rightarrow 0$ equivale a pararse en la trayectoria (5.1) en el borde de *AdS*.

Para hallar la D3-brana dual al lazo de Wilson (5.37) en una representación totalmente simétrica tomaremos $(\tau, \rho, \theta, \phi)$ como coordenadas del volumen de mundo y buscaremos una función $\eta(\rho)$ que minimice la acción de la D3-brana con condición de contorno:

$$\eta(0) = 0. \quad (5.57)$$

A partir de la métrica de *AdS* (5.55), el cambio de coordenadas (?? y la elección de coordenadas para el volumen de mundo podemos calcular la acción de Dirac-Born-Infeld y de Wess-Zumino (4.7) obteniendo:

$$\mathcal{L}_{DBI} = \frac{aN}{2\pi^2\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \theta \sinh \rho}{\sin^4 \eta} \times \sqrt{\lambda \cos^2 \eta (\partial_\theta \eta^2 + \sinh^2 \rho (1 + \partial_\rho \eta^2)) - 4\pi^2 F_{\tau\rho}^2 \sin^4 \eta (\sinh^2 \rho + \partial_\theta \eta^2)} \quad (5.58)$$

$$\mathcal{L}_{WZ} = -\frac{aN}{2\pi^2} \frac{\sin \theta \sinh \rho \cos \eta}{\sin^4 \eta} \times \left[\sinh \rho \left(\cos \eta + \sin \eta \partial_\rho \eta \frac{\sinh \rho - \cos \theta \cosh \rho}{\cosh \rho - \cos \theta \sinh \rho} \right) + \frac{\sin \theta}{\sin \eta (\cosh \rho - \cos \theta \sinh \rho)} \partial_\theta \eta \right] \quad (5.59)$$

Nuevamente el campo $A(\rho)$ no aparece en el lagrangiano del sistema por lo que tenemos una cantidad conservada:

$$\tilde{\Pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\psi\rho}} \quad (5.60)$$

En donde estamos definiendo $\tilde{\Pi} = \sin \theta \Pi$, con Π una constante. Por lo que si queremos la carga correspondiente a la cuerda fundamental es necesario realizar la integral en θ primero. De esta manera podemos obtener la componente del tensor:

$$F_{\tau\rho} = \frac{\tilde{\kappa} \sqrt{\lambda} \cot \eta \csc \eta \sqrt{((\partial_\theta \eta)^2 + \sinh^2 \rho (\partial_\rho \eta)^2 + 1)}}{2\pi \sqrt{((\partial_\theta \eta)^2 + \sinh^2 \rho) (\sinh^2 \rho (\partial_\theta \eta)^2 \csc^4 \eta + \sinh^4 \rho \csc^4 \eta + \tilde{\kappa}^2)}} \quad (5.61)$$

Y las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \eta}{\partial \theta}} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \eta}{\partial \rho}} = 0 \quad (5.62)$$

Para resolverlas proponemos de igual manera que en el caso circular un ansatz:

$$\sin \eta = \tilde{\kappa}^{-1} \sinh \rho \quad (5.63)$$

Utilizando la componente del tensor (5.61) y el ansatz (5.63) vemos que es solución a las ecuaciones de movimiento (5.62) si:

$$\Pi = \frac{a\tilde{\kappa}N}{\pi\sqrt{\lambda}} \quad (5.64)$$

Con el resultado podemos calcular el valor de expectación del Wilson Loop evaluando *on-shell* la acción (5.58), (5.59):

$$\begin{aligned} S &= -\frac{a\tilde{\kappa}^2 N}{2\pi^2} \int d\tau d\rho d\theta d\phi \frac{\sin \theta \cos \theta \operatorname{csch}^2 \rho}{\cos \theta - \coth \rho} \\ &= \frac{a\tilde{\kappa}^2 N}{\pi^2} \int_{-\tau_p/2}^{\tau_p/2} d\tau \int_{\rho_0}^{\sinh \rho = \sin \eta \tilde{\kappa}} d\rho (\rho \coth \rho - 1) \operatorname{csch}^2 \rho \end{aligned} \quad (5.65)$$

En donde realizamos la integral en ϕ, θ e introducimos un cut-off ρ_0 ya que sino la integral no converge. Realizando esta integral y posteriormente tomando el límite en el cuál $\rho_0 \rightarrow 0$ vemos que el resultado no tiene divergencias y viene dado por:

$$S_{hip} = \frac{aN\tau_p}{\pi^2} \left(\tilde{\kappa} \sqrt{\tilde{\kappa}^2 + 1} - \sinh^{-1} \tilde{\kappa} \right) \quad (5.66)$$

Para calcular los términos de borde repetimos el análisis realizado en el caso del Wilson Loop Circular, para el campo recordamos que definimos $\tilde{\Pi} = k \sin \theta$ por lo que el término de borde vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \int \sin \theta \frac{aN\tilde{\kappa}}{\pi\sqrt{\lambda}} F_{\tau\rho} d\tau d\rho d\theta &= \frac{2aN\tilde{\kappa}}{\pi\sqrt{\lambda}} \int_{-\tau_p/2}^{\tau_p/2} d\tau \int_{\rho_0}^{\rho = a \sinh \tilde{\kappa}} \operatorname{csch}^2 \rho \\ &= \frac{2aN\tau_p}{\pi^2} \left(\tilde{\kappa}^2 \coth \rho_0 - \tilde{\kappa} \sqrt{\tilde{\kappa}^2 + 1} \right) \end{aligned} \quad (5.67)$$

Mientras que para el término asociado a η el término correspondiente será:

$$\int d\tau d\theta [\eta p_\eta]_{\rho_0}^{a \sinh \tilde{\kappa}} = \int d\tau d\theta \frac{a\tilde{\kappa}^2 N \sin \theta \operatorname{csch}^3 \rho \sqrt{\tilde{\kappa}^2 - \sinh^2 \rho} \sin^{-1} \left(\frac{\sinh \rho}{\tilde{\kappa}} \right)}{2\pi^2 (\coth \rho - \cos \theta)} \quad (5.68)$$

Y realizando las integrales obtenemos el término correspondiente:

$$-\frac{2aN\tau_p}{\pi^2} \left(\tilde{\kappa}^2 \rho_0 \operatorname{csch}^3 \rho_0 \sqrt{\tilde{\kappa}^2 - \sinh^2 \rho_0} \sin^{-1} \left(\frac{\sinh \rho_0}{\tilde{\kappa}} \right) \right) \quad (5.69)$$

Juntando ahora la acción (5.66) y los términos de borde (5.69), (5.67) obtenemos el valor de expectación del Wilson Loop hiperbólico:

$$S = -\frac{aN\tau_p (\sqrt{\tilde{\kappa}^2 + 1} \tilde{\kappa} + \sinh^{-1} \tilde{\kappa})}{\pi^2} \quad (5.70)$$

5.5.2. A la Mikhailov

La solución (4.55) para el embedding de la $D3$ -brana encontrada en [9] permite el estudio del Wilson Loop holográfico para trayectorias tipo tiempo arbitrarias. Las coordenadas del volumen de mundo vienen dadas por τ_r, z, θ, ϕ , de acuerdo a la prescripción presentada originalmente por Hubeny-Semenoff [14] para la representación fundamental y la existencia de un horizonte de eventos en el caso del movimiento unidimensional (4.65) vemos que los rangos de las variables vendrán dados por:

$$z \in [z_0, z_h], \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi/2], \quad \tau_r \in (-\infty, \infty) \quad (5.71)$$

Con esta elección de coordenadas de volumen de mundo, el embedding (4.55) y la forma usual:

$$C_4 = \frac{L^4}{z^4} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (5.72)$$

Podemos determinar la acción para la brana:

$$\mathcal{L}_{DBI+WZ} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{-\tau_p/2}^{\tau_p/2} d\tau \int_0^{2\pi} d\phi \int_{z_0}^{z_h} dz \frac{\kappa^2 L^4 \sin \theta \cos \theta \ddot{x}(\tau_r)}{z(1 - \dot{x}(\tau_r)^2)} \quad (5.73)$$

El horizonte de eventos z_h (4.65) es una función no trivial en θ por lo que es necesario integrar primero en z y luego en θ :

$$\mathcal{L}_{DBI+WZ} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{-\tau_p/2}^{\tau_p/2} d\tau \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\kappa^2 L^4 \sin \theta \cos \theta \ddot{x}(\tau_r)}{(1 - \dot{x}(\tau_r)^2)} \log \frac{z_0}{z_h(\theta, \tau_r)} \quad (5.74)$$

A partir de la forma de esta integral puede verse que si el horizonte z_h no tuviese una dependencia explícita en θ el resultado sería nulo, esto permite simplificar la integral separando los términos $\log \frac{z_0}{z_h(\theta, \tau_r)}$ que dependen de θ , de esta manera y realizando la integral obtenemos que la acción *on-shell* para una trayectoria unidimensional arbitraria viene dada por:

$$\mathcal{L}_{DBI+WZ} = 2\pi L^4 \left(\sinh^{-1} \kappa - \kappa \sqrt{\kappa^2 + 1} \right) \int \frac{|\ddot{x}|}{\dot{x}^2 - 1} d\tau_r \quad (5.75)$$

Vemos que en el resultado la dependencia en κ se factoriza exactamente independientemente de la curva $x(\tau_r)$ que tomemos. Para obtener el resultado final es necesario considerar nuevamente los términos de borde, las componentes no nulas del tensor $F_{\mu\nu}$ son $F_{\tau_r z}$, $F_{\tau_r, \theta}$ por lo que para obtener la transformada de Legendre que buscamos es necesario integrar la expresión correspondiente a cada componente del tensor (4.63) para obtener la componente del campo A_μ obteniendo entonces:

$$\begin{aligned} \iiint d\phi d\theta d\tau_r A_{\tau_r} \frac{\partial \mathcal{L}_{DBI+WZ}}{\partial F_{\tau_r z}} \Big|_{z_0}^{z_h} &= - \iiint d\phi d\theta d\tau_r \frac{\kappa L^4 \sin \theta \sqrt{1 - \dot{x}^2}}{z} \Big|_{z_0}^{z_h} \\ \iiint d\phi d\theta d\tau_r A_\theta \frac{\partial \mathcal{L}_{DBI+WZ}}{\partial F_{\tau_r \theta}} \Big|_{z_0}^{z_h} &= 0 \end{aligned} \quad (5.76)$$

Falta considerar el término asociado a la coordenada radial z que vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \iiint d\phi d\theta d\tau_r z \frac{\partial \mathcal{L}_{DBI+WZ}}{\partial z'} &= - \iiint d\phi d\theta d\tau_r \frac{\kappa L^4 \sin \theta}{(z(1 - \dot{x}^2))^{5/2}} \left[z^2 \dot{x}^2 + (\dot{x}^2 - 1)^3 + \right. \\ &\quad \left. + 2z\kappa \cos \theta \dot{x}^2 \sqrt{1 - \dot{x}^2} \ddot{x} - 2z\kappa \cos \theta \sqrt{1 - \dot{x}^2} \ddot{x} \right] \Big|_{z_0}^{z_h} \end{aligned} \quad (5.77)$$

Juntando ambas expresiones para los términos de borde (5.76) y (5.77) se puede ver que $z_0 \rightarrow 0$ no tiene ninguna divergencia, y realizando las integrales vemos que el resultado viene dado por:

$$4\pi L^4 \sinh^{-1} \kappa \int \frac{|\ddot{x}|}{\dot{x}^2 - 1} d\tau_r \quad (5.78)$$

Ahora el valor de expectación del Wilson Loop holográfico vendrá dado por:

$$S_{DBI+WZ} - S_{borde} = -2\pi L^4 \left(\kappa \sqrt{\kappa^2 + 1} + \sinh^{-1} \kappa \right) \int \frac{|\ddot{x}|}{\dot{x}^2 - 1} d\tau_r \quad (5.79)$$

Vemos que efectivamente la solución del área descrita por la $D3$ -brana dual al Wilson Loop para una trayectoria arbitraria $x(\tau_r)$ tiene factorizada su componente asociada a κ y es exactamente el mismo resultado que en el caso del círculo (4.39).

La trayectoria hiperbólica tipo tiempo (5.1b) es un caso particular de una trayectoria del tipo $x(\tau_r)$, en particular la expresión para la misma puede obtenerse fácilmente:

$$x = \pm \sqrt{a^{-2} + \tau_r^2} \quad (5.80)$$

A partir de la solución (5.79) podemos encontrar automáticamente el resultado para esta trayectoria realizando la integral en τ_r :

$$S_{hiperbola} = 2\pi L^4 \left(\kappa \sqrt{\kappa^2 + 1} + \sinh^{-1} \kappa \right) \sinh^{-1}(aT) \quad (5.81)$$

En donde introducimos un *cut-off* T en el tiempo retardado del quark. El mismo puede relacionarse con el tiempo propio τ_p en el caso en que $\tau_p \rightarrow \infty$ mediante:

$$aT \sim \frac{e^{\tau_p}}{2} \quad (5.82)$$

De manera que en dicho límite recuperamos la expresión obtenida previamente (5.70).

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo a futuro

Durante los últimos años, el estudio de la teoría de cuerdas en el marco de la conjetura *AdS/CFT*, originalmente propuesta por Maldacena en [18], ha generado diversas líneas de trabajo. Debido a que dicha dualidad relaciona los regímenes de acoplamiento débil/fuerte es necesario desarrollar métodos que permitan obtener resultados exactos en la teoría de campos que permitan chequear la conjetura de manera no trivial. Técnicas de integrabilidad o localización son ejemplos en los cuales esto es posible, dentro de este último es que podemos entender el cálculo del valor de expectación del Wilson loop circular en términos tanto de cuerdas fundamentales como de *D*-branas. Encontrar otras trayectorias supersimétricas en las cuales sea posible encontrar un argumento similar al de la trayectoria circular es un desafío abierto.

El estudio de la trayectoria hiperbólica, en la cuál de manera análoga al círculo, tiene el resultado a 1-loop constante (5.9), los diagramas de interacción se cancelan a orden $g^4 N^2$ y es también una trayectoria que preserva 1/2 de las supersimetrías [2] permite conjeturar que también hay un argumento de localización que arroja el resultado exacto. De igual manera, esta trayectoria es el caso más simple en el cual se puede utilizar la construcción de Mikhailov [20], la extensión a representaciones de rango mayor hecha por Guijosa, Fiol & Pedraza [9] y la propuesta introducida por Hubeny & Semenoff [14], para tratar la aparición del horizonte de eventos en dichas construcciones a la hora de evaluar on-shell la acción, para representaciones de rango mayor del grupo de gauge.

Para esta trayectoria encontramos que efectivamente para la representación fundamental el resultado del límite de supergravedad de la teoría de cuerdas (5.37)

concuera con el cálculo mediante el modelo de matrices (5.24):

$$\begin{aligned}\langle W \rangle_{cuerdas} &= \exp \left[\frac{i\sqrt{\lambda}a\tau_p}{\pi} \right] \\ \langle W \rangle_{\mathcal{N}=4} &= N \frac{-i\pi}{\sqrt{2}(\sqrt{\lambda}a\tau_p)^{3/2}} \exp \left[i \frac{\sqrt{\lambda}a\tau_p}{\pi} \right]\end{aligned}\tag{6.1}$$

En donde para encontrar esta concordancia fue necesario integrar hasta el horizonte de eventos.

Para la representación anti-simétrica del grupo de gauge el modelo de matrices fue resuelto en [12] y concuerda con el cálculo en términos de $D5$ -branas presentado en (5.47):

$$\begin{aligned}\langle W \rangle_{D5} &= \exp \left[\frac{2N}{3\pi} \sin^3 \theta_0 \left(\frac{\sqrt{\lambda}a\tau_p}{\pi} \right) \right] \\ \langle W_k \rangle &= \frac{1}{\dim(\mathcal{R}_{as})} \langle \text{Tr}_{as}[U] \rangle = \exp \left[\frac{2N\sqrt{\lambda}a\tau_p}{3\pi} \frac{\sin^3 \theta_k}{\pi} \right]\end{aligned}\tag{6.2}$$

Para la representación simétrica del grupo de gauge el cálculo en términos de $D3$ -branas se realizó de dos maneras distintas, una de ellas puede entenderse en términos de la continuación analítica del círculo en la hipérbola mientras que para la otra se utilizó la construcción de Guijosa, Fiol & Pedraza [9] la cual involucra el horizonte de eventos presente en el volumen de mundo de la $D3$ -brana. Si bien este cálculo es bastante intrincado debido a la forma del embedding (4.53) es sorprendente que la dependencia en κ se factorice independientemente de la trayectoria $x^\mu(\tau_r)$ elegida arrojando el mismo resultado que el presentado en el otro método:

$$\langle W \rangle_{D3} = \exp \left[-i \frac{aN\tau_p (\tilde{\kappa}\sqrt{\tilde{\kappa}^2 + 1} + \sinh^{-1} \tilde{\kappa})}{\pi^2} \right]\tag{6.3}$$

Sin embargo si tomamos el resultado del modelo de matrices para la representación simétrica (5.28) observamos una discrepancia con (6.3) si tomamos que:

$$\tilde{\kappa} = \frac{\pi\sqrt{\lambda}k}{aN}\tag{6.4}$$

de manera análoga al caso del círculo, en donde ahora k es el rango de la representación del grupo de gauge

$$\langle W_s \rangle = \exp \left[2N \left(\frac{kaT\sqrt{\lambda}}{4N\pi} \sqrt{1 + \frac{k^2a^2\lambda T^2}{16N^2\pi^2}} + \sinh^{-1} \frac{kaT\sqrt{\lambda}}{4N\pi} \right) \right]\tag{6.5}$$

Si bien la forma funcional de ambas soluciones es la misma, la dependencia con los parámetros físicos del problema (a, T) es distinta. El resultado del modelo de matrices corresponde a la re-sumación de los diagramas tipo *ladder* por lo que esta discrepancia podría deberse a que a ordenes mayores en λ los diagramas de interacción no se cancelan. También cabe preguntarse qué sentido tiene mantener dentro de (6.5) el \sinh^{-1} y la raíz cuadrada si el resultado es válido en el límite $T \rightarrow \infty$, es decir que tendríamos:

$$\langle W \rangle \simeq \exp \left[\frac{k^2 \lambda a^2 T^2}{8N\pi^2} \right] \quad (6.6)$$

que resulta ser la exponenciación del resultado a 1-loop (5.9) de acuerdo a lo propuesto en [diego] .

Por otro lado, en el caso de la representación fundamental fue clave el orden en el que se tomaron los límites en el modelo de matrices (5.25,5.26) para recuperar el resultado de la teoría de cuerdas, esto podría indicar que en el caso de representaciones de rango mayor esa sutileza entra en juego en la construcción de la solución presentada por Hartnoll [12]. Por último no es obvio que la identificación entre k y λ (5.64) tenga que ser exactamente la misma que en el caso circular, si dicha relación incluyese un término proporcional a $T^{1/2}$ recuperaríamos el resultado buscado, sin embargo no hay algún motivo aparente que nos permita dilucidar qué relación es la correcta.

A pesar de esta discrepancia entre los resultados el método propuesto por Hubeny, Semenoff para tratar el horizonte de eventos parece funcionar, esto abre la posibilidad de continuar trabajando con la construcción propuesta por Guijosa, Fiol & Pedraza (4.53 para trayectorias arbitrarias tipo tiempo, para esto será necesario estudiar la estructura de la métrica inducida en el volumen de mundo de manera tal de poder evaluar el valor de expectación del Wilson loop para trayectorias más arbitrarias. Si bien no existen resultados exactos conocidos para dichas teorías, está conjeturado [Diego] qué en el límite $\kappa \rightarrow \infty$ se produce una exponenciación eikonal del resultado a 1-loop, resultado que podría verificarse para este conjunto de trayectorias. Dentro de esta verificación futura, un primer paso puede ser la trayectoria hiperbólica tipo tiempo:

$$x^\mu = a^{-1} (\cosh a\tau, \sinh a\tau, 0, 0) \quad (6.7)$$

en este caso los términos de borde presentes en (5.11) no se cancelan por lo que no se espera que el resultado venga dado por la suma de los diagramas tipo *ladder*, el resultado de $D3$ -brana dual para la representación simétrica fue obtenido considerando la transformación conforme correspondiente y presenta, como es de esperar, una estructura del tipo $\mathbf{H}_2 \times S^2$. Esta solución introduce una nueva divergencia

debido a la extensión de \mathbf{H}_2 para la cual es necesario introducir un ordenamiento de los límites a tomar para poder recuperar el límite de $\kappa \rightarrow \infty$ y así poder corroborar esta conjetura.

Apéndice A

Wilson Loops en $\mathcal{N} = 4$ SYM

La definición del Wilson Loop supersimétrico introducida en (1.42):

$$W(\mathcal{C}) = \frac{1}{N} \text{Tr} \mathcal{P} \exp \left[\oint_{\mathcal{C}} d\tau (i A_{\mu}^a T_a \dot{x}^{\mu}(\tau) + \Phi^i(x) y_i) \right] \quad (\text{A.1})$$

Determina el acoplamiento de los campos de la teoría con la trayectoria $x^{\mu}(s)$ de una partícula cargada, dicho acoplamiento no es trivial y puede obtenerse recordando que para una teoría que contenga campos de materia en la representación fundamental de G la definición del operador de Wilson loop viene dada por una función de correlación de dichos campos en términos de la integral funcional. El factor de fase que acompaña al resultado determina entonces el acoplamiento y por ende la definición del WL.

Sin embargo la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM no cuenta con campos de materia, es decir que es necesario introducir bosones W mediante un mecanismo de higgs. Consideremos la teoría con grupo de simetría $SU(N+1)$ que rompemos mediante el mecanismo de higgs a $SU(N+1) \mapsto SU(N) \times U(1)$, esta ruptura de simetría introducirá en la teoría de campos un quark masivo que es denominado bosón W debido a que es un bosón de Goldstone. Esta ruptura de simetría puede pensarse también en la descripción dual en términos de branas, $\mathcal{N} = 4$ SYM con grupo de simetría $SU(N+1)$ se obtiene considerando un stack de $N+1$ $D3$ -Branas en una teoría de cuerdas tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$, el mecanismo de higgs dual a la ruptura de simetría consiste en tomar una de las $D3$ -Branas y separarla del stack, este proceso permite que las cuerdas abiertas puedan empezar/terminar en el stack remanente de N Branas y se extiendan hasta la brana separada, una cuerda que empieza en el stack y termina en la brana obtiene una masa proporcional a la longitud de la separación, si queremos obtener un quark que no sea dinámico, o que sus fluctuaciones sean irrelevantes es necesario darle una masa muy grande o lo que es equivalente alejar la brana del stack una distancia infinita.

El operador de Wilson definido en (A.1) incluye solamente campos bosónicos, esto se debe a que la parte fermiónica puede obtenerse mediante la acción de supersimetría [10], es decir que dicho operador no es primario y puede obtenerse de (A.1). Consideremos entonces una teoría tipo $\mathcal{N} = 4$ SYM con grupo de simetría $SU(N+1)$ de manera tal que la parte bosónica de la acción viene dada por:

$$\hat{S} = \frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(\hat{D}_\mu\hat{\Phi}_i)^2 - \frac{1}{4}[\hat{\Phi}_i, \hat{\Phi}_j]^2 \quad (\text{A.2})$$

La ruptura de simetría $SU(N+1) \mapsto SU(N) \times U(1)$ descompone esquemáticamente los campos $\hat{\Phi}_i$ y \hat{A}_μ según:

$$\hat{A}_\mu = \begin{pmatrix} A_\mu & w_\mu \\ w_\mu^\dagger & a_\mu \end{pmatrix} \quad \hat{\Phi}_i = \begin{pmatrix} \Phi_i & w_i \\ w_i^\dagger & M\theta_i \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

En donde ahora A_μ es el campo de gauge en $SU(N)$ (en donde estamos ignorando los índices de color a por simplicidad), a_μ es el campo asociado a $U(1)$, M es una constante, $\theta^2 = 1$ y w_i es el bosón que usaremos para construir el Wilson Loop. Podemos introducir esta expansión de los campos en la acción bosónica (A.2) obteniendo:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= +\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(D_\mu\Phi_i)^2 - \frac{1}{4}[\Phi_i, \Phi_j]^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu M\theta_i)^2 + (\partial_{[\mu}a_{\nu]})^2 \\ &+ \frac{1}{2}w_i^\dagger((\Phi_k - M\theta_k)^2\delta_{ij} - (\Phi_i + M\Theta_i)(\Phi_j + M\Theta_j))w_j \\ &+ \frac{1}{2}((D_\mu - ia_\mu)w_i)^2 + \dots \\ &= S_{SU(N)} + \frac{1}{2}(\partial_\mu M\theta_i)^2 + \frac{1}{4}f_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}((D_\mu - ia_\mu)w_i)^2 \\ &+ \frac{1}{2}w_i^\dagger((\Phi_k - M\theta_k)^2\delta_{ij} - (\Phi_i + M\Theta_i)(\Phi_j + M\Theta_j))w_j + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

En donde $F_{\mu\nu}$ y $f_{\mu\nu}$ son los esfuerzos asociados a $SU(N)$ y $U(1)$ respectivamente y \dots representa términos de orden mayor en w_i que no aportan para la construcción del operador.

Para facilitar el análisis podemos tomar θ_i en la dirección 1 de manera que el término de masa para w_i viene dado por:

$$w_i^\dagger(\Phi_1 - M\theta_1)^2w_i - w_i^\dagger\Phi_i(\Phi_1 - M\theta_1)w_1 \quad (\text{A.5})$$

dado que estamos en la fase superconforme de la teoría los campos Φ_i tienen valor de expectación nulo y fluctuaciones pequeñas por lo que podemos afirmar que el autovalor de la masa es: $(\Phi_1 - M\theta_1)^2$ de manera que los dos términos presentes en (A.5) por:

$$w^\dagger(\Phi_1 - M\theta_1)^2w \quad (\text{A.6})$$

a partir de la acción (A.4) podemos observar el término cinético para el bosón que viene dado por:

$$\frac{1}{2}((D_\mu - ia_\mu)w_i)^2 \quad (\text{A.7})$$

Para construir el Wilson Loop consideraremos la función de correlación para w :

$$\langle w^\dagger(x)w(x)w(y)w^\dagger(y) \rangle = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi_i \mathcal{D}w \mathcal{D}a_\mu \mathcal{D}M\theta_i e^{-\hat{S}} w^\dagger(x)w(x)w(y)w^\dagger(y) \quad (\text{A.8})$$

que se puede entender como la circulación del bosón w una vez integrado en y . Utilizando (A.6), (A.7) y (A.4) podemos realizar la integral en $\mathcal{D}w$ obteniendo:

$$\begin{aligned} \langle w^\dagger(x)w(x)w(y)w^\dagger(y) \rangle &= \int \mathcal{D}M\theta_i \mathcal{D}a_\mu \exp\left(\int \frac{1}{2}(\partial_\mu M\theta_i)^2 + \frac{1}{4}f_{\mu\nu}^2\right) \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi_i e^{-S_{SU(N)}} \\ &\quad \times \langle x | \frac{1}{-\frac{1}{2}(D_\mu - ia_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\Phi_i - M\theta_i)^2} | y \rangle \\ &\quad \times \langle y | \frac{1}{-\frac{1}{2}(D_\mu - ia_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\Phi_i - M\theta_i)^2} | x \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

La función de dos puntos que aparece puede escribirse:

$$\begin{aligned} \langle x | \frac{1}{-\frac{1}{2}(D_\mu - ia_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\Phi_i - M\theta_i)^2} | y \rangle &= \\ &= \int dT \langle x | e^{T(\frac{1}{2}(D_\mu - ia_\mu)^2 - \frac{1}{2}(\Phi_i - M\theta_i)^2)} | y \rangle \\ &= \int dT \int_{x(0)=x}^{x(T)=y} \mathcal{D}x(s) \mathcal{D}p(s) e^{\int_0^T ds (-i\dot{x}_\mu(s)p^\mu - \frac{1}{2}(p_\mu + A_\mu + a_\mu)^2 - \frac{1}{2}(\Phi_i - M\theta_i)^2)} \\ &= \int dT \int_{x(0)=x}^{x(T)=y} \mathcal{D}x(s) e^{\int_0^T ds (-\frac{1}{2}\dot{x}_\mu^2(s) + iA_\mu \dot{x}^\mu + ia_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2}(\Phi_i - M\theta_i)^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Juntando todos estos resultados e integrando en y (A.8) obtenemos el resultado:

$$\begin{aligned} \int dy \langle w^\dagger(x)w(x)w(y)w^\dagger(y) \rangle &= \\ &= \int \mathcal{D}M\theta_i e^{-\int \frac{1}{2}(\partial_\mu M\theta_i)^2} \int dT \int_{x(0)=x}^{x(T)=y} \mathcal{D}x(s) e^{-\frac{1}{2} \int_0^T ds (\dot{x}_\mu^2 + M^2)} \\ &\quad \int \mathcal{D}a_\mu e^{\frac{1}{4}(f_{\mu\nu})^2} e^{\int ds ia_\mu \dot{x}^\mu} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi_i e^{-S_{SU(N)}} e^{\int ds (iA_\mu \dot{x}^\mu(s) - \frac{1}{2}\Phi_i^2 + M\Phi_i\theta^i)} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

El resultado previo (A.11) contiene muchos términos que requieren análisis. En primer lugar el término $M^2 \int \frac{1}{2}(\partial_\mu \theta_i)^2$ representa la acción para un campo libre θ_i ,

en el caso en el que rompemos $SU(N + 1)$ alejando infinitamente la brana M se vuelve muy grande y el término puede analizarse clásicamente. Se puede observar la presencia de un término asociado al campo de gauge a_μ que vive en la brana junto con el operador de wilson correspondiente (de manera análoga al visto en QED en (1.15)), cómo estamos considerando el límite en que $N \gg 1$ y $M \gg 1$ este término será de segundo orden. El segundo término en (A.11) considera todas las trayectorias posibles $x^\mu(s)$, de hecho no es invariante frente a reparametrizaciones de la curva. Se puede definir una parametrización general:

$$\begin{aligned} s &\rightarrow \tilde{s}(s) \\ \tilde{s}(0) &= 0 \\ \tilde{s}(s) &= T \end{aligned} \tag{A.12}$$

Para tener en cuenta el aporte de distintas parametrizaciones podemos realizar la integral sobre $c(s) = d\tilde{s}/ds$ en la acción:

$$- \int_0^T ds \left(\frac{1}{c} \dot{\tilde{x}}_\mu^2 + cM^2 \right) + \int_0^T ds \left(iA_\mu \dot{\tilde{x}}^\mu - c \frac{1}{2} \Phi_i^2 + cM \Phi_i \theta^i \right) \tag{A.13}$$

en el caso en que $M \gg 1$ el primer término domina la integral por lo que se localizará en:

$$c(s)^2 = \frac{\dot{\tilde{x}}^2(s)}{M^2} \tag{A.14}$$

Con esta condición vemos que el término que depende de Φ_i^2 es despreciable. Jun-tando todos los resultados obtenidos:

$$\begin{aligned} \int dy \langle w^\dagger(x) w(x) w(y) w^\dagger(y) \rangle &= \\ &= \int \mathcal{D}x(s) e^{-\int ds M |\dot{x}|} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi_i e^{-S_{SU(N)}} e^{\int_0^1 (iA_\mu \dot{x}^\mu + |\dot{x}| \Phi_i \theta^i)} \end{aligned} \tag{A.15}$$

notando que el término $\int ds M |\dot{x}|$ es simplemente la Masa por la longitud de la curva y podemos extraerlo fuera de la integral funcional, obteniendo entonces el acoplamiento buscado para el Wilson Loop.

Apéndice B

Embedding de $D3$ –branas para trayectorias arbitrarias

A partir de la solución presentada originalmente por Mikhailov fue posible proponer un embedding de $D3$ –brana para una curva \mathcal{C} tipo tiempo en el caso en que la velocidad dependa del tiempo (4.53) y encontrarlo explícitamente para el movimiento unidimensional. Sin embargo, en el caso de un movimiento tridimensional arbitrario, es necesario dar una prescripción exacta para el vector unitario $n^\mu(\tau, \theta, \phi)$ presente en (4.53), esto es equivalente a elegir etiquetas (θ, ϕ) para los rayos de luz emitidos en las diferentes direcciones de la esfera \mathbf{S}^2 que rodean a la trayectoria $\vec{x}(\tau)$.

Para considerar una velocidad arbitraria v^μ podemos simplemente considerar el vector $v_R^\mu = (1, 0, 0, 0)$ en reposo y realizar la transformación de Lorentz:

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v_1 & \gamma v_2 & \gamma v_3 \\ \gamma v_1 & 1 + \frac{\gamma^2 v_1^2}{1+\gamma} & \frac{\gamma^2 v_1 v_2}{1+\gamma} & \frac{\gamma^2 v_1 v_3}{1+\gamma} \\ \gamma v_2 & \frac{\gamma^2 v_1 v_2}{1+\gamma} & 1 + \frac{\gamma^2 v_2^2}{1+\gamma} & \frac{\gamma^2 v_2 v_3}{1+\gamma} \\ \gamma v_3 & \frac{\gamma^2 v_1 v_3}{1+\gamma} & \frac{\gamma^2 v_2 v_3}{1+\gamma} & 1 + \frac{\gamma^2 v_3^2}{1+\gamma} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

En donde v_i son las componentes de la 3–velocidad. En el caso en que el movimiento este acelerado en más de una dirección y quisiésemos utilizar este boost para definir $n^\mu(\tau, \theta, \phi)$ aparece una sutileza debido a que puntos sucesivos en la trayectoria no estarían relacionados solamente por un boost sino que también deberían incluir una rotación. La manera de construir entonces el vector $n(\tau, \theta, \phi)$ es pedir que este sea transportado paralelamente a lo largo de la línea de mundo según la ecuación del transporte de Fermi-Walker:

$$\partial_\tau n^\mu = (n \cdot \partial_\tau v) v^\mu - (n \cdot v) \partial_\tau v^\mu \quad (\text{B.2})$$

el último término no aporta ya que en nuestro caso $n \cdot v = 0$. Entonces para construir el vector $n^\mu(\tau, \theta, \phi)$ necesitamos en un tiempo τ_0 aplicar el boost (B.1) para definir $n^\mu(\tau_0, \theta, \phi)$ y luego evolucionarlo mediante la ecuación (B.2) para encontrar n^μ para tiempos arbitrarios como queríamos, por lo que la métrica inducida a partir del embedding (4.53) se obtiene por un cálculo directo. Para obtener el embedding total hace falta también el tensor eléctrico que puede obtenerse mediante [9]:

$$\begin{aligned}
 F_{trz} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{1}{\gamma z^2}, & F_{tr\theta} &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \kappa \partial_{tr} v \cdot n_2, \\
 F_{tr\phi} &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \kappa \sin \theta \partial_{tr} v \cdot n_3, & F_{z\theta} &= F_{z\phi} = F_{\theta\phi} = 0
 \end{aligned}
 \tag{B.3}$$

Apéndice C

Términos de borde para la hipérbola tipo tiempo

Para estudiar la cancelación de los términos de borde presentes en (5.11) es conveniente utilizar la parametrización:

$$X_{\pm}^{\mu} = (\sinh(\tau), \pm \cosh(\tau), 0, 0) \quad (\text{C.1})$$

Debido a que la inserción de t_2, t_3 puede ser tanto en una rama como la otra introducimos la notación $++$, $--$ para cuando la inserción se encuentra en la misma rama que t_1 y $+-$, $-+$ cuando se encuentra en la otra. Con esto los términos correspondientes que aparecerán en la cuenta serán: e introducimos $t_{ij} = t_i - t_j$,

Sistema	++	--	+-
$(X^{(i)} - X^{(j)})^2$	$2(1 - \cosh(t_{ij}))$	$2(1 - \cosh(t_{ij}))$	$2(1 + \cosh(\tilde{t}_{ij}))$
$\dot{X}^{(i)\mu} X_{\mu}^{(j)}$	$\sinh(t_{ij})$	$\sinh(t_{ij})$	$-\sinh(\tilde{t}_{ij})$
$\dot{X}^{(i)\mu} \dot{X}_{\mu}^{(j)}$	$-\cosh(t_{ij})$	$-\cosh(t_{ij})$	$-\cosh(\tilde{t}_{ij})$

$\tilde{t}_{ij} = t_i + t_j$. Definimos por simplicidad:

$$\Delta = \alpha\beta|x^{(1)} - x^{(2)}|^2 + \alpha\gamma|x^{(1)} - x^{(3)}|^2 + \beta\gamma|x^{(3)} - x^{(2)}|^2 \quad (\text{C.2})$$

queremos ver entonces que los términos de borde presentes en:

$$\iiint dt_1 dt_2 dt_3 \partial^{(1)} \epsilon(t_1, t_2, t_3) \frac{(|\dot{x}^{(1)}| |\dot{x}^{(2)}| + \dot{x}^{(1)} \cdot \dot{x}^{(3)})}{\Delta^{2w-3}} + \iint dt_2 dt_3 [\epsilon(t_1, t_2, t_3) \frac{(|\dot{x}^{(1)}| |\dot{x}^{(2)}| + \dot{x}^{(1)} \cdot \dot{x}^{(3)})}{\Delta^{2w-3}}] \Big|_{t_1}^{t_1} \quad (\text{C.3})$$

se anulan exactamente en el caso en que el cut off $T \rightarrow \infty$. En total hay 8 combinaciones posibles que vendrán dadas por la siguiente notación $(+, +, +)$ en donde

cada lugar corresponde con t_1, t_2, t_3 y \pm con cada rama de la hipérbola. A modo de ejemplo podemos considerar el término $(-, +, +)$:

$$\frac{1 - \cosh(\tilde{t}_{13})}{\alpha\beta(1 + \cosh(\tilde{t}_{12})) + \alpha\gamma(1 + \cosh(\tilde{t}_{13})) + \beta\gamma(1 - \cosh(t_{32}))} \Big|_{t_1=T}^{t_1=-T} \quad (\text{C.4})$$

Tomando el límite $T \rightarrow \infty$ y quedandonos a primer orden en T obtenemos:

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\gamma + \beta e^{(t_2-t_3)}} - \frac{1}{\gamma + \beta e^{-(t_2-t_3)}} \right) \quad (\text{C.5})$$

De igual manera es posible realizar los otros casos. Para analizar la cancelación lo único que falta tener en cuenta es que cuando estamos en la rama de la izquierda estamos recorriendo la hipérbola de $+\infty$ a $-\infty$, y para que todas esten en el mismo sentido tenemos que hacer el cambio $t_i = -t_i$, de esa manera todas las contribuciones serán:

$$1. (-, +, +): \quad - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\gamma + \beta e^{(t_2-t_3)}} - \frac{1}{\gamma + \beta e^{-(t_2-t_3)}} \right) \quad (\text{C.6})$$

$$2. (+, -, +): \quad - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\gamma - \beta e^{(t_3-t_2)}} - \frac{1}{\gamma - \beta e^{-(t_3-t_2)}} \right) \quad (\text{C.7})$$

$$3. (+, +, -): \quad - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\gamma - \beta e^{(t_2-t_3)}} - \frac{1}{\gamma + \beta e^{-(t_2-t_3)}} \right) \quad (\text{C.8})$$

$$4. (-, -, +): \quad + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\gamma - \beta e^{-(t_3-t_2)}} - \frac{1}{\gamma - \beta e^{-(t_3+t_2)}} \right) \quad (\text{C.9})$$

$$5. (-, +, -): \quad + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\gamma - \beta e^{-(t_2-t_3)}} - \frac{1}{\gamma - \beta e^{-(t_2-t_3)}} \right) \quad (\text{C.10})$$

$$6. (+, -, -): \quad + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\gamma + \beta e^{-(t_3-t_2)}} - \frac{1}{\gamma + \beta e^{(t_3-t_2)}} \right) \quad (\text{C.11})$$

$$7. (+, +, +): \quad \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\gamma + \beta e^{(t_3-t_2)}} - \frac{1}{\gamma + \beta e^{-(t_3-t_2)}} \right) \quad (\text{C.12})$$

8. $(-, -, -)$:

$$-\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\gamma + \beta e^{(t_3-t_2)}} - \frac{1}{\gamma + \beta e^{-(t_3-t_2)}} \right) \quad (\text{C.13})$$

En donde vemos que efectivamente se cancelan todos los términos presente pero que esta cancelación sucede debido a la presencia de las dos ramas, ya que las cancelaciones de los términos no son entre términos de la misma rama. Esto determina que en el caso de la hipérbola tipo espacio (en la cual solo contamos con una rama) no esperamos que se cancelen los términos de borde de acuerdo a [2]

Bibliografía

- [1] David Berenstein *et al.* “The Operator Product Expansion for Wilson Loops and Surfaces in the Large N Limit”. (Sep. de 1998). DOI: 10.1103/PhysRevD.59.105023. arXiv: 9809188 [hep-th].
- [2] Volker Branding. “Supersymmetric Wilson Loops in the AdS / CFT Correspondence”. April 2008 (2008).
- [3] Simon Caron-Huot. “Notes on the scattering amplitude / Wilson loop duality”. (). DOI: 10.1007/JHEP07(2011)058. arXiv: 1010.1167.
- [4] Eric D’Hoker y Daniel Z. Freedman. “Supersymmetric Gauge Theories and the AdS/CFT Correspondence”. (Ene. de 2002), pág. 145. arXiv: 0201253 [hep-th].
- [5] Nadav Drukker y Bartomeu Fiol. “All-genus calculation of Wilson loops using D-branes”. *Journal of High Energy Physics* 2005.02 (feb. de 2005), págs. 010-010. DOI: 10.1088/1126-6708/2005/02/010. arXiv: 0501109 [hep-th].
- [6] Nadav Drukker y David J. Gross. “An exact prediction of N=4 supersymmetric Yang–Mills theory for string theory”. *Journal of Mathematical Physics* 42.7 (oct. de 2001), pág. 2896. DOI: 10.1063/1.1372177. arXiv: 0010274 [hep-th].
- [7] Nadav Drukker, David J. Gross e Hirosi Ooguri. “Wilson loops and minimal surfaces”. *Physical Review D* 60.12 (nov. de 1999), pág. 125006. DOI: 10.1103/PhysRevD.60.125006. arXiv: 9904191 [hep-th].
- [8] J.K. Erickson, G.W. Semenoff y K. Zarembo. “Wilson loops in supersymmetric Yang–Mills theory”. *Nuclear Physics B* 582.1-3 (ago. de 2000), págs. 155-175. DOI: 10.1016/S0550-3213(00)00300-X. arXiv: 0003055 [hep-th].
- [9] Bartomeu Fiol, Alberto Güijosa y Juan F. Pedraza. “Branes from light: embeddings and energetics for symmetric k-quarks in $N = 4$ SYM”. *Journal of High Energy Physics* 2015.1 (ene. de 2015), pág. 149. DOI: 10.1007/JHEP01(2015)149. arXiv: 1410.0692.

- [10] Jaume Gomis y Filippo Passerini. “Holographic Wilson Loops”. (Abr. de 2006). DOI: 10.1088/1126-6708/2006/08/074. arXiv: 0604007 [hep-th].
- [11] Sean A. Hartnoll. “Two universal results for Wilson loops at strong coupling”. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* 74.6 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevD.74.066006. arXiv: 0606178 [hep-th].
- [12] Sean A Hartnoll y S Prem Kumar. “Higher rank Wilson loops from a matrix model”. (2006). arXiv: 0605027v2 [arXiv:hep-th].
- [13] G. t. Hooft. “A planar diagram theory for strong interactions”. *Nuclear Physics, Section B* 72.3 (1974), págs. 461-473. DOI: 10.1016/0550-3213(74)90154-0. arXiv: 0550-3213(74)90154-0 [10.1016].
- [14] Veronika E. Hubeny y Gordon W. Semenoff. “Holographic Accelerated Heavy Quark-Anti-Quark Pair”. (Oct. de 2014), pág. 4. arXiv: 1410.1172.
- [15] Veronika E. Hubeny y Gordon W. Semenoff. “String worldsheet for accelerating quark”. (Oct. de 2014), pág. 28. arXiv: 1410.1171.
- [16] Clifford V. Johnson. “D-branes Primer”. *Igarss 2014* 1 (2014), págs. 1-5. DOI: 10.1007/s13398-014-0173-7.2. arXiv: arXiv:1011.1669v3.
- [17] Juan Maldacena. “Wilson Loops in Large N Field Theories”. *Physical Review Letters* 80.22 (jun. de 1998), págs. 4859-4862. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.4859. arXiv: 9803002 [hep-th].
- [18] Juan M. Maldacena. “The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity”. (Nov. de 1997). DOI: 10.1023/A:1026654312961. arXiv: 9711200 [hep-th].
- [19] Lionel Mason y David Skinner. “The Complete Planar S-matrix of N=4 SYM as a Wilson Loop in Twistor Space”. (). DOI: 10.1007/JHEP12(2010)018. arXiv: 1009.2225.
- [20] Andrei Mikhailov. “Nonlinear waves in AdS/CFT correspondence”. (Mayo de 2003), pág. 15. arXiv: 0305196 [hep-th].
- [21] Horatiu Nastase. *Introduction to the AdS / CFT Correspondence*. 1 edition. Cambridge University Press, 2009, págs. 1-92. DOI: 10.1007/978-3-642-04864-7. arXiv: arXiv:1310.4319v3.
- [22] M. E. Peskin y D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. 1995. DOI: 10.1063/1.2807734.
- [23] Vasily Pestun. “Localization of gauge theory on a four-sphere and supersymmetric Wilson loops”. (Dic. de 2007). DOI: 10.1007/s00220-012-1485-0. arXiv: 0712.2824.

- [24] Vasily Pestun *et al.* “Localization techniques in quantum field theories”. 11 (ago. de 2016), págs. 1-9. arXiv: 1608.02952.
- [25] J Polchinski. “String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond”. *Cambridge Monographs on Mathematical Physics, ...* (1998).
- [26] Joseph Polchinski. *String Theory: Volume 1, An Introduction to the Bosonic String*. 1998, pág. 424.
- [27] Mark Srednicki. *Quantum field theory*. Cambridge, 2005, pág. 557.
- [28] K. Zarembo. “Supersymmetric Wilson loops”. *Nuclear Physics B* 643.1-3 (nov. de 2002), págs. 157-171. DOI: 10.1016/S0550-3213(02)00693-4. arXiv: 0205160 [hep-th].
- [29] Barton Zwiebach. *A First Course in String Theory*. Vol. 53. 9. 2013, págs. 1689-1699. DOI: 10.1017/CB09781107415324.004. arXiv: arXiv:1011.1669v3.