

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Дальневосточный федеральный университет «ДВФУ»

На правах рукописи



Танашкин Алексей Сергеевич

**Влияние нетривиальной топологии на вакуумы решеточных
калибровочных теорий и спиновых систем**

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
НИЯУ МИФИ
Шевченко Владимир Игоревич

Владивосток — 2023

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Нетривиальная топология в теории поля и спиновых системах	11
1.1 Индуцирование нетривиальной топологии вакуума	11
1.2 Влияние границ на вакуум в теории поля	15
1.2.1 Энергия нулевых колебаний	15
1.2.2 Эффект Казимира как наблюдаемое проявление вакуумных флуктуаций	17
1.2.3 Реструктуризация вакуума между границами	20
Глава 2. Влияние пластин Казимира на вакуум калибровочных теорий в $2+1$ измерениях	23
2.1 Компактная электродинамика в $2+1$ измерениях	23
2.1.1 Общая характеристика и особенности компактной электродинамики	24
2.1.2 Влияние граничных условий Казимира на вакуум компактной электродинамики	29
2.1.3 Выводы о влиянии граничных условий Казимира на вакуум компактной электродинамики в $2+1$ измерениях . . .	48
2.2 $SU(2)$ глюодинамика в $2+1$ измерениях	51
2.3 Выводы	63
Глава 3. Решеточная регуляризация квантовой теории поля	64
3.1 Переход от пространства Минковского к евклидовому пространству	64
3.2 Переход от непрерывного пространства к дискретной решетке . . .	65
3.3 Формулировка $U(1)$ калибровочной теории на решетке	67
3.4 Магнитные монополи на решетке	68
3.5 Казимировские условия на решетке	70
Глава 4. Влияние граничных условий Казимира на структуру вакуума компактной КЭД в $3+1$ измерениях	74
4.1 Плотность монополей при отсутствии поверхностей Казимира . . .	74
4.2 Свойства монополей при наличии поверхностей Казимира	76

4.3	Петля Полякова как параметр порядка	80
Глава 5. Влияние граничных условий Казимира на структуру вакуума теории Янга-Миллса с калибровочной группой $SU(3)$ в $3+1$ измерениях		
		83
5.1	Энергия Казимира и новое граничное связанное состояние глюонов	83
5.2	Кваркитон - связанное состояние кварка и его образа в хромометаллическом зеркале	87
5.3	Признаки деконфайнмента между пластинами	92
Глава 6. Исследование основных состояний нелокальной модели Поттса		
		94
6.1	Нелокальная модель Поттса на случайной решетке и алгоритм нахождения ее основного состояния	97
6.1.1	Определение нелокальной модели Поттса на случайной решетке	97
6.1.2	Алгоритм минимизации	100
6.2	Анализ минимизированных конфигураций нелокальной модели Поттса на случайной решетке	101
6.2.1	$q \leq 4$	102
6.2.2	$q \geq 5$	104
6.2.3	Стабильность модели при разных параметрах	106
6.2.4	Нарушение цветовой симметрии	107
Заключение		109
Список литературы		112

Введение

В последнее время отмечается непрекращающийся интерес к теориям с нетривиальной топологией вакуума. Само понятие вакуумного состояния теории получило развитие с возникновением квантовой теории поля и формулировкой первой по-настоящему успешной такой теории – квантовой электродинамики (КЭД) [1], показавшей ранее недостижимое согласие с экспериментом, например в предсказании таких величин, как аномальный магнитный момент электрона и лембовский сдвиг. Примерно в то же время Казимиром [2] была исследована простейшая модификация вакуума КЭД, путем добавления двух плоских идеально проводящих параллельных пластин, и предсказано возникновение силы притяжения между ними на небольших расстояниях. Ввиду сложности экспериментальной проверки эффекта, он долгое время оставался в тени, пока эксперимент Ламоро [3], а следом за ним Мохидина и Роя [4], не привели к новому всплеску внимания теоретиков к данной теме.

Эффект Казимира является, пожалуй, наиболее известным вакуумным эффектом, вызванным нетривиальной топологией теории, и данная идея добавления граничных условий взята за основу во многих моделях и может сильно влиять на структуру вакуума теории. В качестве примера можно привести хорошо зарекомендовавшую себя модель мешков, рассматривающую адрон как сферическую область в фазе деконфайнмента, отделенную от внешней среды, находящейся в фазе конфайнмента, отражающей стенкой [5]. Другим примером является сигма-модель с граничными условиями Дирихле, приводящими к восстановлению киральной симметрии [6]. Также было показано, что наличие границ может привести к возникновению новых степеней свободы в связанных системах, например в конформных теориях поля [7].

Бурное развитие квантовой теории поля совпало с широким применением нового подхода к исследованию термодинамических свойств ансамблей частиц, начало которому положил Изинг, исследовав явление ферромагнетизма путем построения решетки, в узлах которой находятся магнитные моменты атомов, направленные либо вверх, либо вниз. Модель и ее различные модификации и обобщения оказалась невероятно успешной, в том числе приведя к возникновению формулировки квантовой теории поля на решетке, что дало возможность численных исследований в тех областях, где аналитический подход

плохо применим. Решеточные методы можно использовать как для исследования материальных или калибровочных полей, так и их комбинаций.

Большой интерес представляет связь спиновых моделей и решеточных калибровочных теорий [8]. В новаторской работе [9] было получено значение критической температуры для двумерной модели Изинга методом введения дуальной решетки, и показано соответствие между высоко и низко температурными фазами модели. С тех пор концепция дуальности занимает важное положение в статистических моделях и теории поля. Дальнейшее развитие она получила после выхода революционной работы Ф. Вегнера [10], в которой он предложил калибровочную $Z(2)$ модель как теорию, обладающую нетривиальной фазовой структурой при отсутствии спонтанной намагниченности (спонтанного нарушения симметрии). Это было достигнуто путем введения локальной симметрии, которая не может быть нарушена спонтанно. Было получено несколько важных результатов, показывающих глубокую связь спиновой и калибровочной моделей Изинга. В качестве примера можно привести эквивалентность двумерной калибровочной модели и одномерной спиновой модели Изинга. Другим примером является дуальность трехмерных калибровочной и спиновой моделей Изинга.

Идеи Вегнера вскоре были обобщены на случай непрерывных спиновых переменных и соответствующих им непрерывных групп симметрии. Например, было установлено соответствие двумерной абелевой калибровочной теории и одномерной XY модели, как обладающих только неупорядоченной фазой [11]. Но более интересным является случай двумерной XY модели, которая, как было продемонстрировано [12], содержит топологические возмущения (вихри), распределение которых и характеризует две различные фазы модели. Данное поведение аналогично влиянию соответствующих топологических возмущений (магнитных монополей) на фазовую структуру четырехмерной абелевой калибровочной теории [13]. Более общая схема соответствия спиновых моделей и калибровочных теорий была предложена А.А. Мигдалом [14]. Она включает в себя в том числе и неабелевы теории. В частности, была показана эквивалентность $SU(2)$ калибровочной теории (теории Янга-Миллса) в двух измерениях и одномерной спиновой $SU(2) \times SU(2)$ модели (модели Гейзенберга) – в обоих случаях присутствует только одна фаза. Для спиновой модели это неупорядоченная фаза с экспоненциально падающей корреляционной функцией, что соответствует фазе конфайнмента калибровочной теории. Не менее интересной является связь данной спиновой модели в двух измерениях и калибровочной $SU(2)$ теории в

четырёх. Обе модели обладают свойством асимптотической свободы, в них запрещено спонтанное нарушение глобальной симметрии, и помимо этого они имеют динамический механизм образования массовой щели.

В то время как вакуумная структура вышеописанных теорий хорошо изучена, четкое представление о влиянии на нее нетривиальной топологии теории только начинает формироваться. Данная работа выполнена с намерением развития данной области, и с учетом глубокой связи решеточных калибровочных теорий в четырех измерениях и двумерных спиновых моделей, в ходе исследования были рассмотрены абелевая и неабелева теории в $3+1$ измерениях и спиновая модель Поттса на плоскости. Но источники нетривиальной топологии были выбраны разными - в калибровочной теории она была внесена за счёт локальных низкоразмерных дефектов, в то время как в спиновой модели Поттса нетривиальность топологии была достигнута комбинацией случайной решетки и нелокальности взаимодействия.

Важной характеристикой любой теории является масштаб, на котором существует взаимодействие. По этому признаку теории можно условно поделить на три группы: к первой группе относятся теории с взаимодействием между ближайшими соседями (модель Изинга, Z_N модель, XY модель и др.), ко второй группе теории с дальним взаимодействием (гравитационное, электромагнитное взаимодействия), а к третьей теории с нелокальным взаимодействием, к которым можно отнести некоторые модели взаимодействия нейронов, проблемы компьютерного зрения, задачи комбинаторной топологии.

Открытым вопросом является возможность существования нетривиальных вакуумных конфигураций в нелокальных моделях. В этом плане нелокальная модель Поттса на случайной решетке представляется отличным объектом для исследования. В классической модели Поттса каждому узлу решетки ставится в соответствие спин из конечного дискретного набора элементов мощностью q . Данная модель при $q = 2, 3, \dots$ эквивалентна спиновой Z_N модели (также известной как часовая модель, или векторная модель Поттса, в которой углы направления спинов отличаются друг от друга на дискретное значение $\frac{2\pi}{q}$, а сам спин принимает значения в форме комплексных корней из единицы. В свою очередь, часовая модель переходит в XY модель в пределе при $q \rightarrow \infty$).

В предложенной модели Поттса на случайной решетке нелокальность взаимодействия реализуется через введение масштаба – параметра, определяющего расстояние R (с некоторой погрешностью δ) на котором происходит взаимодей-

ствие между частицами. Модель имеет прямое отношение к дискретной версии нерешенной на настоящий момент задачи комбинаторной топологии, известной под именем проблемы Нелсона-Эрдёша-Хадвигера (НЭХ) – в какое наименьшее число цветов можно раскрасить плоскость, чтобы никакие две точки на единичном расстоянии не были покрашены в один цвет [15]. Анализ основных состояний нелокальной модели Поттса может улучшить оценку решения данной проблемы и предоставить направление для дальнейшего исследования.

В диссертации проведен анализ вакуумов теорий с нетривиальной топологией. Помимо упомянутой спиновой модели Поттса с нелокальным взаимодействием, были рассмотрены две калибровочные теории поля с добавлением граничных условий Казимира. Это компактная электродинамика с калибровочной группой $U(1)$, которая является абелевой теорией и неабелева теория Янга-Миллса с калибровочной группой $SU(3)$. Обе теории обладают богатой фазовой структурой и исследование влияния на неё казимировских пластин может помочь улучшить понимание свойств их вакуумов.

Целью данной работы является исследование вакуумных состояний в калибровочных теориях и спиновых системах с нетривиальной топологией.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Исследовать структуру вакуума калибровочной абелевой $U(1)$ теории при наличии бесконечных двумерных границ;
2. Исследовать структуру вакуума калибровочной неабелевой $SU(3)$ теории при наличии бесконечных двумерных границ;
3. Исследовать структуру основных состояний нелокальной спиновой модели Поттса на случайной решетке.

Научная новизна:

1. Впервые изучено влияние пластин Казимира на структуру вакуума $(3+1)$ -компактной электродинамики;
2. Впервые рассмотрен решеточный подход для исследования эффекта Казимира в $(3+1)$ -глюодинاميке и изучено влияние пластин Казимира на деконфайнмент цвета, а также предсказано возникновение новых граничных состояний глюонов и кварков;
3. Впервые было проведено исследование нелокальной модели Поттса на дискретной решетке с взаимодействием на конечном расстоянии, описаны основные состояния данной модели и полученные результаты

интерпретированы в контексте поиска решения дискретной проблемы Нелсона-Эрдёша-Хадвигера, которая остается открытой.

Теоретическая и практическая значимость В представленной диссертационной работе впервые проводится комплексное исследование калибровочных и спиновых моделей с нетривиальной топологией. Работа носит преимущественно теоретический характер, но полученные результаты имеют большую практическую ценность. В частности, проведенное исследование эффекта Казимира для компактной электродинамики может найти применение в наноэлектронике, где в настоящее время данный эффект начинает активно использоваться. Взятый за основу метод исследования структуры вакуума при наличии Казимировских пластин в компактной электродинамике был с успехом применён для анализа вакуума более сложной неабелевой теории Янга-Миллса, были предложены новые граничные состояния и обоснована необходимость их дальнейшего исследования. Кроме того, результаты работы дают основание считать изложенную методологию эффективным способом изучения модели мешков для адронов. Исследование спиновой нелокальной модели Поттса на случайной решетке, также проведенное впервые, отождествляется с известной нерешенной проблемой комбинаторной топологии, проблемой Нелсона-Эрдёша-Хадвигера. На основании полученных результатов диссертации сделано предположение о сужении диапазона возможных решений данной проблемы.

Методология и методы исследования. Исследования калибровочных теорий проводились методами квантовой теории поля на решетке, которые позволяют изучать непертурбативные процессы. В качестве решеточного действия было выбрано действие Вильсона. Расчет наблюдаемых проводился с использованием методов Монте-Карло. Для генерации конфигураций был реализован алгоритм тепловой бани (heat bath). Для достижения максимальной эффективности вычисления были распараллелены с помощью технологии NVIDIA® CUDA®. Основные состояния нелокальной спиновой модели Поттса на случайной решетке были получены путем применения алгоритма имитации отжига (simulated annealing). Все вычисления были проведены на суперкомпьютере Восток1 Дальневосточного федерального университета.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Казимировские граничные условия приводят к изменению структуры вакуума компактной электродинамики в $3+1$ измерениях, что выражается в подавлении монопольного конденсата между пластинами, и, как след-

ствие, точка фазового перехода конфайнмент-деконфайнмент смещается в сторону области сильной связи;

2. В SU(3) глюодинамике в 3+1 измерениях при наличии пластин Казимира на границе возникает новая квазичастица с массой $m_{\text{gt}} = 1.0(1)\sqrt{\sigma} = 0.49(5)$ ГэВ, что в несколько раз меньше массы основного состояния 0^{++} глюбола, $M_{0^{++}} = 3.405(21)\sqrt{\sigma} = 1.653(26)$ ГэВ. Квазичастица, с предложенным названием «глютон», интерпретирована как непертурбативное связанное состояние глюона и его образа противоположного цвета в хромометаллическом зеркале.
3. Качественно обосновано наличие аналогичных связанных состояний для тяжелых кварков, названных кваркитонами, образованных кварком и его отражением в хромометаллическом зеркале.
4. На небольших расстояниях между хромометаллическими пластинами проявляются признаки деконфайнмента цвета.
5. Основные состояния нелокальной модели Поттса на случайной решетке характеризуются образованием цветовых кластеров гексагональной формы с нетривиальным смешиванием на границах
6. Численно продемонстрировано отсутствие состояния с нулевой энергией для пяти цветов.
7. Основное состояние модели для пяти цветов характеризуется нарушением цветовой симметрии при сохранении геометрической.

Достоверность полученных результатов обеспечивается надежностью применявшихся методов и подтверждается результатами апробации работы.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

- Online workshop «Advanced computing in particle physics», 31 May – 24 June 2021, «Nonlocal Potts model on random lattice and chromatic number of the plane»;
- Virtual tribute to the conference «Quark confinement and the hadron spectrum», 2 – 6 Aug 2021, «Nonlocal Potts model on random lattice and chromatic number of the plane»;
- 10th International conference on new frontiers in physics (ICNFP 2021), Kolymbari, Crete, Greece, 23 Aug – 2 Sep 2021, «Non-local Potts model on random lattice and chromatic number of a plane»;

- XVth International conference «Quark confinement and the hadron spectrum», Stavanger, Norway, 1 – 6 Aug 2022, «The influence of the Casimir effect on the vacuum structure of (3+1)-dimensional compact electrodynamics»;
- III International workshop «Lattice and functional techniques for QCD», Saint Petersburg, Russia, 10 – 14 Oct 2022, «Casimir effect in (3+1)d lattice Abelian and non-Abelian gauge theories»;
- International workshop «Infinite and finite nuclear matter (INFINUM-2023)», Dubna, Russia, 27 Feb – 3 Mar 2023, «The Casimir effect in Abelian and Non-Abelian lattice gauge theories: induced phase transitions and new boundary states».

Личный вклад. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором либо в соавторстве при его непосредственном участии.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 3 статьях в ведущих научных журналах первого квартиля с высоким импакт-фактором, согласно Web of Science и Scopus. Зарегистрированы 4 программы для ЭВМ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 6 глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 121 страницу, включая 51 рисунок и 1 таблицу. Список литературы содержит 117 наименований.

Глава 1. Нетривиальная топология в теории поля и спиновых системах

В данной главе рассматриваются основные способы индуцирования нетривиальной топологии в теории поля и спиновых системах и приведен обзор вакуума Казимира как наиболее известного примера задания нетривиальной топологии путем добавления нейтральных плоских параллельных идеально проводящих пластин.

1.1 Индуцирование нетривиальной топологии вакуума

Существует несколько механизмов индуцирования нетривиальной топологии вакуума, различных по своей природе.

Во-первых, ее можно задать вручную путем ограничения одной из размерностей, вводя так называемые низкоразмерные дефекты, к которым относятся двумерные поверхности в трех измерениях и кривые в двух измерениях. Наиболее известным следствием подобных дефектов является возникновение силы притяжения между плоскими параллельными идеальнопроводящими пластинами, известное как эффект Казимира. История его обнаружения и исследования кратко описана в следующей секции 1.2, но прежде чем приступить к ее изложению, рассмотрим механизм динамического индуцирования нетривиальной топологии. Ярким его проявлением является существование нуль-размерных абелевых монополей в компактной электродинамике [16] и монополей т'Хофта-Полякова в неабелевых калибровочных теориях, которые обязаны своим возникновением нетривиальным топологическим свойствам калибровочной группы [17]. Часто абелевы монополи связывают с монополями Дирака [18]. Магнитные монополи Дирака представляют собой точечные магнитные заряды, которые могут быть введены в уравнения Максвелла с целью сделать их симметричными по отношению к электрическому и магнитному полям. Магнитное поле монополя с зарядом g является радиальным и описывается соотношением

$$\mathbf{B} = \frac{g}{r^3} \mathbf{r} = -g \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad (1.1)$$

в системе СГС. Так как $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta^3(r)$, то

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi g\delta^3(r), \quad (1.2)$$

правая часть которого соответствует точечному магнитному заряду. Так как поле \mathbf{B} радиально, полный поток через сферу с центром в начале координат равен

$$\Phi = 4\pi r^2 \mathbf{B} = 4\pi g. \quad (1.3)$$

Рассмотрим частицу с электрическим зарядом e в поле этого монополя. Ее волновая функция равна

$$\psi = |\psi| \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et) \right]. \quad (1.4)$$

При наличии электромагнитного поля, мы имеем $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \left(\frac{e}{c}\right)\mathbf{A}$, поэтому

$$\psi \rightarrow \psi \exp \left(-\frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \right), \quad (1.5)$$

то есть произойдет изменение фазы α волновой функции

$$\alpha \rightarrow \alpha - \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}. \quad (1.6)$$

Рассмотрим замкнутый контур при фиксированных r, θ и угле φ , изменяющемся от 0 до 2π . Тогда полное изменение фазы будет равно

$$\Delta\alpha = \frac{e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{e}{\hbar c} \int \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\hbar c} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\hbar c} \Phi(r, \theta), \quad (1.7)$$

где $\Phi(r, \theta)$ – поток через часть сферы, определенную некоторыми значениями r и θ . При изменении θ меняется поток через эту часть сферы. При $\theta \rightarrow 0$ контур стягивается в точку и поток, проходящий через эту часть сферы, стремится к нулю. При увеличении контура поток через часть сферы также увеличивается и при $\theta \rightarrow \pi$ мы в соответствии с выражением (1.3) должны получить

$$\Phi(r, \pi) = 4\pi g. \quad (1.8)$$

Но так как при $\theta \rightarrow \pi$ контур снова стягивается в точку, из требования конечности $\Phi(r, \pi)$ с учетом (1.7) следует, что потенциал \mathbf{A} сингулярен при $\theta = \pi$. Данные рассуждения справедливы в случае сферы любого радиуса, так что потенциал \mathbf{A} сингулярен вдоль всей отрицательной полуоси z . Эта линия сингулярности

называется дираковской струной. За счет выбора подходящей системы координат, струну Дирака можно расположить вдоль любого направления, при этом она должна быть непрерывной, но не обязательно прямой. За счет сингулярности фотонного поля в его геометрическом центре, магнитные монополи называют топологическими дефектами, и их наличие задает нетривиальную топологию.

Монополи оказывают существенное влияние на вакуум теории. В компактной электродинамике, являющейся полигоном для исследования более сложных неабелевых теорий, конденсат монополей приводит к генерации массовой щели и свойству конфайнмента. Ведущая роль монопольных токов в конфайнменте пробных электрических зарядов описана в недавно опубликованном обзоре М.Чернодуба [16], посвященному проблеме кофайнмента в КХД. На рисунке 1.1 приведено взятое оттуда схематическое изображение механизма.



Рисунок 1.1 — Схематическое изображение удерживающей струны между пробными электрическими зарядами за счет циркуляции монополей j_{mon} . Изображение взято из [16].

Значительная часть главы 2 диссертации посвящена рассмотрению влияния низкоразмерных дефектов на динамику нуль-размерных монополей в двух пространственных измерениях, изменение которой в свою очередь может привести к реструктуризации вакуума компактной электродинамики. Описаны как аналитический, так и численный подходы, которые дают согласующиеся результаты и дополняют друг друга. Анализ структуры вакуума при наличии плоских пластин в трех пространственных измерениях и их влияния на динамику монополей приведен в главе 4.

Как следует из изложенного выше, вакуум калибровочных теорий (в том числе и решеточных) может обладать нетривиальной структурой, но до насто-

ящего времени вопрос, можно ли тоже самое сказать об основных состояниях спиновых систем, остается открытым, хотя спиновые системы и решеточные калибровочные теории тесно связаны между собой. Спиновые системы характеризуются тонким взаимодействием структуры спинового пространства с геометрией и топологией среды (определяемой структурой решетки и ядром взаимодействия), в которой они находятся. В частности, если в модели есть фазовый переход при некотором значении обратной температуры β , корреляционная длина в окрестности данной точки может быть много больше, чем масштаб микроскопической структуры решетки. В результате корреляторы на больших расстояниях становятся нечувствительными к этой структуре и могут соответствовать некоторой непрерывной теории, которая разделяет с оригинальной моделью только глобальные параметры, такие как размерность и топология. В то время как далеко от точки фазового перехода микроструктура решетки отчетливо проявляется.

Но кроме рассмотрения теории в непрерывном пространстве, существует другой способ исключить зависимость от микроструктуры решетки, заключающийся во введении случайной решетки, узлы которой случайным образом распределены по пространству [19]. И в этом случае нелокальное взаимодействие кардинально меняет топологию системы, делая ее нетривиальной. Действительно, для регулярной решетки локальное взаимодействие принципиально не отличается от нелокального (взаимодействия на конечном расстоянии) – в обоих случаях узлы решетки имеют одинаковое число взаимодействующих с ними соседей. Например для d -размерной модели Изинга на гиперкубической регулярной решетке с радиусом взаимодействия R оно в точности равно $2d$. Для случайной решетки рассмотрим N узлов, случайно распределенных по d -мерной области размера L . В таком случае средняя плотность узлов равна $\rho = \frac{N}{L^d}$, а среднее число соседей у узла

$$n \sim \rho R^{d-1} \delta, \quad (1.9)$$

где δ это ширина кольца взаимодействия. При условии что каждый спин в среднем имеет хотя бы одного соседа, то существует $\sim R^d \rho \gg 1$ невзаимодействующих с ним спинов, которые ближе к нему, чем те, с которыми он взаимодействует. То есть число спинов, взаимодействующих с узлом много меньше числа спинов, находящихся к нему ближе, но не взаимодействующих с ним. В этом и заключается наиболее поразительное различие между моделями на регулярных и случайных решетках – взаимодействие на конечном расстоянии аналогично взаимодействию

между ближайшими соседями для регулярной, но не для случайной решетки. Для случайной решетки, как видно из выражения (1.9), число соседей зависит от радиуса взаимодействия R , в то время как для регулярной решетки оно постоянно.

Тем самым, с целью исследования вакуумов теорий с нетривиальной топологией, в настоящей диссертации сделана попытка объединения уже имеющихся результатов в двух пространственных измерениях для калибровочных теорий с новыми данными для трех пространственных измерений, полученных автором в процессе научной работы. Для полноты изложения материала автор рассматривает и спиновые системы ввиду их тесной связи с решеточными калибровочными теориями, исследуемыми в настоящей работе.

1.2 Влияние границ на вакуум в теории поля

Интерес к изучению влияния границ на вакуум теории поля естественным образом возник из концепции нулевых колебаний, являющейся одним из парадоксальных результатов квантовой теории поля, сформулированной в первой половине XX века. Изменение энергии нулевых колебаний вакуума при наличии низкоразмерных дефектов (плоских бесконечных двумерных пластин) составляет суть эффекта Казимира, давшего мощный импульс к исследованию теорий с подобными дефектами вакуума. В настоящей секции приведен краткий обзор развития данной темы и рассмотрены некоторые примечательные случаи индуцирования пластинами перестройки вакуума между ними (за исключением калибровочных теорий, которым посвящена отдельная глава 2).

1.2.1 Энергия нулевых колебаний

Предположение о энергии нулевых колебаний вакуума впервые было сделано М. Планком в 1912 году при исследовании проблемы излучения абсолютно твердого тела [20]. Планк получил выражение для энергии U осциллятора с ча-

стотой ν при температуре T

$$U = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + \frac{1}{2}h\nu, \quad (1.10)$$

которая не обращается в ноль при $T \rightarrow 0$. В то же время спектральная плотность энергии излучения

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (1.11)$$

стремилась к нулю при $T \rightarrow 0$, то есть результат Планка можно интерпретировать как ненулевую энергию вакуума материального поля, но не электромагнитного. Энергия нулевых колебаний электромагнитного поля была введена В. Нернстом четыре года спустя [21], а через некоторое время Р. Малликен показал, что концепция ненулевой энергии вакуума отлично согласуется с экспериментальными данными о спектрах излучения монооксида бора [22]. Через пару лет квантовая теория свободного электромагнитного поля при отсутствии источников была сформулирована М. Борном, В. Гейзенбергом и П. Йорданом [23], и применена П. Дираком для описания испускания и поглощения излучения [24]. Новая нерелятивистская теория предсказывала существование флуктуаций вакуума электромагнитного поля, а современная релятивистская квантовая теория была заложена в работах Р. Фейнмана [1] и Д. Швингера [25; 26], где понятию вакуумных флуктуаций полей и их взаимодействию с электромагнитным полем и полями материи отводится одно из основных мест. Согласно современным представлениям, вакуумные флуктуации представляют собой непрерывный процесс рождения и уничтожения виртуальных частиц. Пары виртуальных частиц и античастиц могут возникать из вакуума и уничтожаться «обратно в вакуум», а их время жизни определяется соотношением неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1.12)$$

Из предсказания энергии нулевых колебаний следует вывод, что энергия вакуума бесконечна. Действительно, если энергия каждой моды поля с волновым вектором \mathbf{k} равна $\frac{1}{2}\hbar\omega_k$ а частота ω_k может принимать любые значения, то полная энергия вакуума

$$E_{\text{tot}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2}\hbar\omega_k \quad (1.13)$$

принимает бесконечное значение. В то время как не представляется возможным измерить энергию вакуума и напрямую обнаружить ее присутствие, так как она является неотъемлемым элементом всего пространства, можно наблюдать ее изменение в разных областях пространства, путем применения соответствующих граничных условий.

1.2.2 Эффект Казимира как наблюдаемое проявление вакуумных флуктуаций

В 1948 году Х. Казимир был первым, кто показал, что разность бесконечных энергий может принимать конечное значение и быть физической величиной [2], которую можно экспериментально измерить. В своей работе Казимир рассмотрел электромагнитный вакуум с добавленными идеально проводящими пластинами, расположенными параллельно друг другу на расстоянии d . Вычислив разность энергии вакуума между пластинами $E(d)$ (тоже являющейся бесконечной) и энергии вакуума в остальном пространстве $E(\infty)$, Казимир получил следующее выражение:

$$\delta E = E(d) - E(\infty) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3} L^2, \quad (1.14)$$

где $L \gg d$ это линейный размер пластины. Выражение (1.14) называется энергией Казимира. Ее можно интерпретировать как потенциальную энергию системы, то есть энергию, которую необходимо затратить, чтобы свести пластины с бесконечного удаления на расстояние d . Отсюда плотность энергии Казимира:

$$\frac{\delta E}{L^2} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3}. \quad (1.15)$$

Дифференцируя (1.15) по d находим силу притяжения между пластинами на единицу площади:

$$\frac{F(d)}{L^2} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4}. \quad (1.16)$$

Полученный результат следует из предположения, что пластины накладывают ограничения на непрерывный спектр волн, тем самым позволяя существовать внутри стоячим волнам только определенной длины. Добавление идеально проводящих пластин приводит к дискретизации волнового спектра между пластинами и дополнительно производит его инфракрасное обрезание, не позволяя волнам

с длиной $\lambda > d$ существовать между пластинами. Данный классический вывод эффекта Казимира подробно рассмотрен в оригинальной работе Казимира [2], а также в учебниках по квантовой теории поля [27; 28].

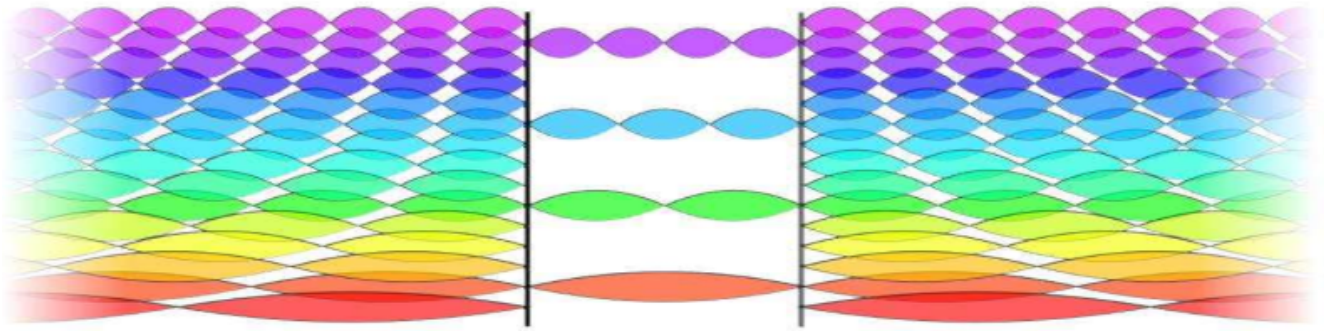


Рисунок 1.2 — Схематическая иллюстрация классической интерпретации эффекта Казимира. Изображение взято из [29].

Наиболее наглядное (среди известных автору) схематическое изображение физики эффекта было представлено в работе [29] и приведено на рисунке 1.2.

Помимо традиционного подхода к вычислению эффекта Казимира, энергия и сила Казимира между идеально проводящими нейтральными пластинами могут быть получены из предположения о том, что виртуальные фотоны обладают импульсом $\frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}$. Те из них, что отражаются от стенок снаружи, оказывают давление на пластины, побуждая их сближение, в то время как виртуальные фотоны, заключенные между стенок, оказывают давление в противоположном направлении. Так как спектр внутри пластин дискретный и в нём отсутствует инфракрасная часть, то результирующим эффектом будет возникновение силы притяжения между пластинами. В работе [30] было показано, что данная сила равна полученному Казимиром выражению (1.16). Ещё один способ вывода силы (1.16) был продемонстрирован Д. Швингером и соавторами в рамках теории источников [31].

С момента публикации Казимиром результата (1.15), были исследованы и более сложные геометрии, например, сферическая поверхность [32]. Парадоксально, но в данном случае эффект от сферической границы приводит к отталкивающей силе, а выражение для энергии Казимира ΔE имеет вид:

$$\Delta E \cong +0.09 \frac{\hbar c}{2r}, \quad (1.17)$$

где r это радиус сферы. Позднее результат Т. Буайе был подтвержден и улучшен работами [33—35].

Обнаружение возможности существования отталкивающей силы Казимира привело к поиску других геометрий, где энергия Казимира так же была бы положительной. Наиболее очевидным кандидатом является случай двух полусфер, находящихся на расстоянии R друг от друга. Но существует так называемая «запрещающая теорема» [36], отвергающая это предположение а вместе с ним и все, касающиеся зеркально симметричных поверхностей. Теорема утверждает, что если поместить два тела, являющиеся зеркальными отражениями друг друга, в электромагнитный или скалярный вакуум, то между ними возникнет сила притяжения. Это очень сильное утверждение, существенно ограничивающее реализацию отталкивающей силы Казимира между поверхностями. Тем не менее, недавние исследования указывают, что такая возможность есть. Так, в работе К. Цзяна и Ф. Вильчека [37], природа отталкивающего взаимодействия лежит в самой среде, на которую накладываются граничные условия. В киральной среде нарушается киральная симметрия фотонов, происходит их разделение на обладающих левой и правой круговой поляризацией, что приводит к смене знака силы Казимира. Схематическое изображение данной системы приведено на рисунке 1.3.

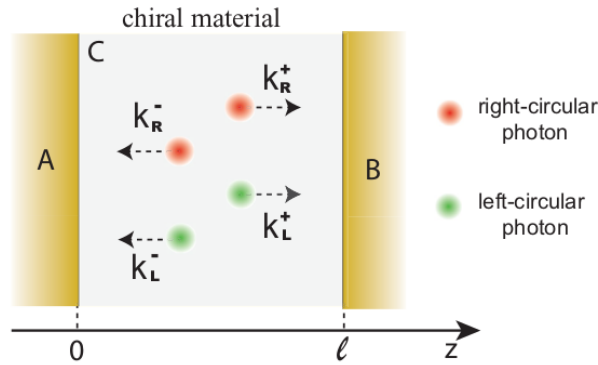


Рисунок 1.3 — Схематическая иллюстрация эффекта Казимира в киральной среде. Две параллельные незаряженные плоские пластины A и B , расположенные на расстоянии l друг от друга, помещены в киральную среду C . Красные и зеленые точки обозначают фотоны с правой и левой круговой поляризацией соответственно. Стрелки указывают направление распространения киральных фотонов. $k_{R(L)}^{\pm}$ описывает их скорость, где \pm отображает направление распространения, а R/L киральность. Изображение взято из [37].

Похожие идеи представлены в работе [38], в которой авторы, используя киральную версию КЭД с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{i}{4}g\theta F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (1.18)$$

где θ это поле, описывающее киральный материал, получили выражение для силы Казимира, выраженной относительно классического казимировского взаимодействия (1.16). График относительной силы $\tilde{F}(\theta'_+, \theta'_-)$, зависящей только от разности $\theta'_+ - \theta'_-$ дуальных углов $\theta'_\pm = \arctan(g\theta_\pm)$, приведен на рисунке 1.4.

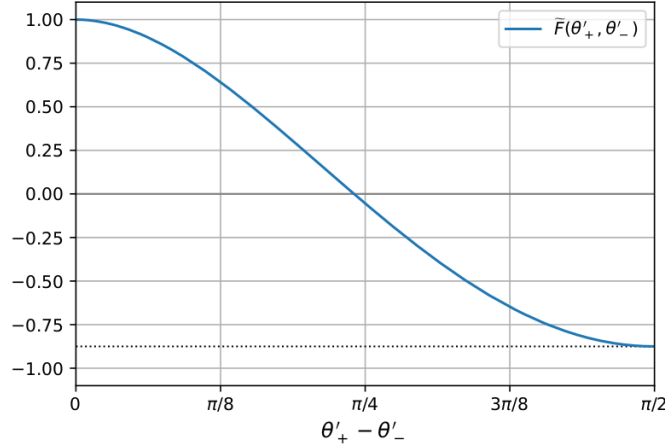


Рисунок 1.4 — График зависимости киральной силы Казимира $\tilde{F}(\theta'_+ - \theta'_-)$ от разности дуальных углов $\theta'_\pm = \arctan(g\theta_\pm)$. Пунктирная линия соответствует максимальному значению отталкивающей силы $-\frac{7}{8}F_{\text{Cas}}^{\text{qed}}$. В точке $\theta'_+ - \theta'_- \approx 0.755$ сила Казимира исчезает и меняет характер от притягивающего к отталкивающему. Изображение взято из [38].

Примечательно, что сила Казимира в данном случае, будучи изначально притягивающей, постепенно ослабевает с ростом разности дуальных углов, достигает нуля, и затем меняет знак, становясь отталкивающей, снова возрастает, достигая по модулю практически классической величины, $\frac{7}{8}F_{\text{Cas}}^{\text{qed}}$. Примерами материалов, описываемых киральным лагранжианом (1.18), являются топологические диэлектрики [39] и полуметаллы Вейля [40].

1.2.3 Реструктуризация вакуума между границами

Запрещающая теорема, утверждающая о невозможности возникновения отталкивающей силы Казимира между зеркально симметричными поверхностями, поднимает фундаментальный вопрос о переходе от сферической поверхности с отталкивающим взаимодействием к двум полусферам с притягивающим взаимодействием, как изображено на рисунке 1.5. При уменьшении расстояния между полусферами сила притяжения между ними возрастает, но в сингулярной точке

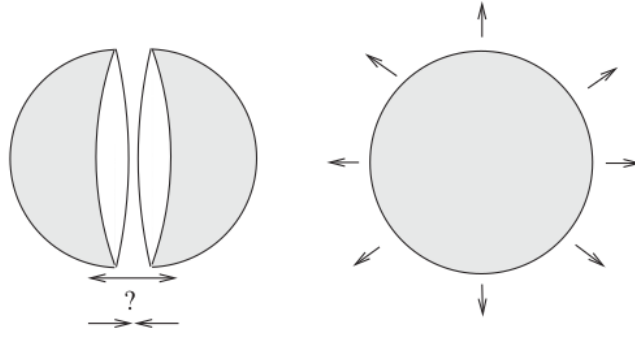


Рисунок 1.5 — Переход от притягивающего характера взаимодействия к отталкивающему. Слева две полусферы на некотором расстоянии R друг от друга, справа сфера, которую можно рассматривать как предельный случай двух полусфер при $R = 0$. Изображение взято из [36].

$R = 0$ она меняет знак согласно (1.17) и становится отталкивающей! Данный парадокс можно попробовать объяснить из общих соображений, руководствуясь тем, что сфера представляет собой замкнутую поверхность, в то время как полусферы нет. Дополнительно, сфера обладает непрерывной симметрией вращения, а полусферы только зеркальной симметрией. Несмотря на то, что разрешение данного парадокса не входит в цели и задачи настоящей диссертации, эта проблема позволяет предположить, что изначальная интерпретация эффекта Казимира как эффекта конечного объема, где введенные границы накладывают ограничения на спектр вакуумных флуктуаций, не является исчерпывающим описанием влияния границ на вакуум теории. Свойства вакуума Казимира зависят от геометрии граничных условий. Также было обнаружено, что наложение граничных условий может влиять на взаимодействия полей и приводить к изменению структуры вакуума.

Одним из примеров является вывод К. Шарнхорста, который указывает на изменение свойств вакуума между пластинами. Приняв во внимание радиационные поправки к энергии Казимира (1.15), возникающие в результате взаимодействия электромагнитного вакуума и моря Дирака [41], Шарнхорст получил, что скорость распространения низкочастотного света в казимировском вакууме в направлении перпендикулярном пластинам превышает скорость распространения света в вакууме c на значение

$$\delta c = +\frac{11\pi^2}{90^2}\alpha_{\text{e.m.}}\left(\frac{\hbar}{m_e c R}\right)^4, \quad (1.19)$$

где m_e это масса электрона, а $\alpha_{\text{e.m.}}$ — постоянная тонкой структуры. В последующей работе с Г. Бартоном [42] из предположения о казимировском вакууме как о

пассивной среде, в которой мнимая часть показателя преломления $n_{\perp}(\omega)$ неотрицательна, было сделано заключение о том, что в казимировском вакууме скорость фронта электромагнитной волны $c/n_{\perp}(\infty)$ выше соответствующей скорости c при отсутствии границ. Несмотря на кажущуюся неоднозначность, данный результат не противоречит специальной теории относительности [43]. Эффект Шарнхорста указывает на изменение фундаментальных физических масштабов за счет непертурбативной динамики и конечного размера системы, являющихся следствием наложения граничных условий Казимира.

В качестве другого примера изменения структуры вакуума и сдвига физического масштаба в присутствии границ можно привести восстановление киральной симметрии для взаимодействующих фермионов. Известно, что в неограниченном пространстве теория с лагранжианом

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi + \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2 \quad (1.20)$$

обладает фазой спонтанного нарушения симметрии, которое возникает за счет образования динамического кирального конденсата $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$. При высоких температурах происходит фазовый переход второго рода и симметрия восстанавливается. Но добавление в теорию граничных условий Казимира сильно меняет критическое поведение теории. В этом случае критическая температура понижается и фазовый переход становится переходом первого рода, и для небольших расстояний между пластинами киральная симметрия восстанавливается вплоть до нулевой температуры [44]. Данный пример показывает, что границы могут приводить к реструктуризации вакуума, влиять на критическое поведение теории и присущие ей симметрии. Для более подробного ознакомления с исследованиями влияния граничных условий на поля материи можно обратиться к обзорам А. Молочкова [45] и М. Чернодуба [46], на основе которых и был представлен данный краткий обзор.

Системы с фермионами представляются перспективным объектом для изучения влияния на теорию добавления нетривиальной топологии, но в рамках диссертационной работы фокус в области ограниченных систем был сделан на чисто калибровочные теории - компактную электродинамику и теорию Янга-Миллса в $3+1$ измерениях. Но прежде чем приступить к изложению полученных результатов, полезно будет рассмотреть данные теории в $2+1$ измерениях. Этому посвящена следующая глава диссертации.

Глава 2. Влияние пластин Казимира на вакуум калибровочных теорий в $2+1$ измерениях

В данной главе приведен обзор литературы об исследовании влияния бесконечных плоских пластин на вакуумы абелевой и неабелевой калибровочных теорий в двух пространственных измерениях. Так как в этом случае двумерные пластины сводятся к одномерным объектам, проводам, то в текущей главе термины «провода» и «пластины» используются взаимозаменяемо. Показано, что численный подход из первых принципов, необходимый для исследования вакуумов теорий в трех пространственных измерениях, замечательно согласуется с выводами полученными с помощью аналитического подхода, что дополнительно подтверждает обоснованность его применения для изучения систем с бóльшим числом измерений. Также, в целях формирования более полного представления об изучаемой теме, в главе описаны некоторые результаты, полученные автором, но на момент подготовки диссертации не опубликованные. К ним относится исследование энергии Казимира в теории Янга-Миллса с калибровочной группой $SU(3)$.

2.1 Компактная электродинамика в $2+1$ измерениях

Обзор влияния границ на вакуум калибровочных теорий удобно начать с компактной электродинамики в $2+1$ измерениях. Данная теория представляет собой чистую калибровочную теорию с группой $U(1)$. Несмотря на то, что в ней отсутствуют поля материи, за ней прочно закрепилось название «компактная электродинамика» (или компактная КЭД). Прилагательная «компактная» указывает на компактность калибровочной группы $U(1)$, элементы которой образуют окружность в комплексной плоскости. Компактная формулировка теории имеет много общего с некомпактной — обе описывают динамику фотонов, но компактная теория содержит ещё топологические дефекты, о которых будет сказано ниже.

2.1.1 Общая характеристика и особенности компактной электродинамики

Эта теория является отличным инструментом для исследования таких непертурбативных явлений, как линейный конфайнмент электрических зарядов и генерация массовой щели. Свойство конфайнмента характеризуется линейным потенциалом $V(R)$ взаимодействия двух противоположных электрических зарядов, находящихся на расстоянии R :

$$V(L) = \sigma L, \quad (2.1)$$

где σ это натяжение удерживающей струны между ними. Из данного выражения следует, что для разделения зарядов на бесконечное расстояние нужно затратить бесконечную энергию. В фазе конфайнмента возникает феномен массовой щели, что означает обретение фотоном ненулевой массы. Помимо этого, при конечной температуре модель обладает нетривиальной фазовой структурой, что проявляется в существовании фазы деконфайнмента, в которой линейный потенциал исчезает и заряды становятся свободными.

Перечисленные особенности делают компактную электродинамику отличной пробной моделью для исследования более сложной теории Янга-Миллса, описывающей динамику глюонов в квантовой хромодинамике. Непертурбативные свойства компактной электродинамики являются результатом динамики абелевых монополей, которые возникают в модели как следствие компактности абелевой калибровочной группы. Монополи это частице-подобные объекты, обладающие магнитным зарядом. Их мировые линии в двух пространственных измерениях свободятся к точкам, таким образом можно описывать монополь, как инстантон. При нулевой температуре монополи образуют газ, который и приводит к конфайнменту электрических зарядов и образованию массовой щели. Монополи часто называют топологическими дефектами, поскольку монополь характеризуется сингулярностью («дефектом») фотонного поля в его геометрическом центре. Вместе с фотонами, монополи являются базовыми объектами, динамику которых описывает компактная электродинамика. Фотоны представляют стандартный пертурбативный сектор модели, они описывают кулоновский член потенциала взаимодействия между зарядами, в то время как монополи отвечают за непертурбативный сектор, приводя к таким явлениям как конфайнмент и генерация массовой щели.

Относительно тематики настоящей диссертации важно исследовать, каким образом добавление нетривиальной топологии в виде казимимировских пластин (проводов в случае двух пространственных измерений) влияет на непертурбативные свойства теории и на ее вакуумную структуру. Такой тщательный анализ для компактной электродинамики в 2+1 измерениях уже был проведен в работах [47; 48]. Ниже представлены основные полученные результаты.

По сравнению с теориями в большем числе измерений, компактная электродинамика в 2+1 измерениях обладает важным преимуществом, множество выводов в ней можно получить аналитически. Данные результаты затем можно сравнить с результатами, полученными с помощью численного подхода, подробно описанного в главе 3 настоящей работы. Поскольку в данной работе исследуются стационарные процессы в системах, находящихся в термодинамическом равновесии, то представляется удобным перейти от пространства Минковского к евклидовому путем введения комплексного времени. В нем лагранжиан компактной электродинамики записывается следующим образом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2, \quad (2.2)$$

где $F_{\mu\nu}$ это тензор поля. Однако в отличие от свободной U(1) калибровочной теории, в данном случае тензор поля состоит из двух частей:

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{\text{ph}} + F_{\mu\nu}^{\text{mon}}. \quad (2.3)$$

Первая часть выражения (пертурбативная) совпадает с тензором поля свободной U(1) теории и соответствует векторному фотонному полю A_μ :

$$F_{\mu\nu}^{\text{ph}}[A] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.4)$$

Вторая часть является непертурбативной и соответствует вкладу монополей:

$$F_{\mu\nu}^{\text{mon}}(\mathbf{x}) = -g_{\text{mon}} \epsilon_{\mu\nu\alpha} \partial_\alpha \int d^3y D(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}), \quad (2.5)$$

Величина ρ это плотность монополей, которая задается как сумма зарядов монополей по всем их пространственным позициям:

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_a q_a \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a), \quad (2.6)$$

где величина q_a это заряд a -го монополя, выраженный в единицах элементарного заряда монополя Дирака

$$g_{\text{mon}} = \frac{2\pi}{g}, \quad (2.7)$$

который, в свою очередь, определен через элементарный электрический заряд g . Величина D в выражении (2.5) является скалярным пропагатором

$$D(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{k^2} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad (2.8)$$

удовлетворяющим дифференциальному уравнению второго порядка

$$-\Delta(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}). \quad (2.9)$$

Таким образом, действие теории

$$S[A, \rho] = \frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu}^2 \quad (2.10)$$

зависит от векторного фотонного поля A_μ и плотности монополей ρ и может быть разложено на сумму фотонной и монополярной частей:

$$S[A, \rho] = \frac{1}{4} \int d^3x (F_{\mu\nu}^{\text{ph}}[A] + F_{\mu\nu}^{\text{mon}}[\rho])^2 \equiv S^{\text{ph}}[A] + S^{\text{mon}}[\rho], \quad (2.11)$$

где пертурбативная фотонная часть записывается как

$$S^{\text{ph}}[A] = \frac{1}{4} \int d^3x (F_{\mu\nu}^{\text{ph}}[A])^2, \quad (2.12)$$

а непертурбативная монополярная часть имеет вид

$$S^{\text{mon}}[\rho] = \frac{g_{\text{mon}}^2}{2} \int d^3x \int d^3y \rho(\mathbf{x}) D(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}). \quad (2.13)$$

Используя выражение для монополярной плотности (2.6), можно записать монополярную часть (2.13) в терминах кулоновского газа монополей:

$$S^{\text{mon}}[\rho] = \frac{g_{\text{mon}}^2}{2} \sum_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}} q_a q_b D(\mathbf{x}_a - \mathbf{y}_b) + N S_0, \quad (2.14)$$

где

$$S_0 = \frac{g_{\text{mon}}^2}{2} D(\mathbf{0}) \quad (2.15)$$

это самодействие монополей. Данный член является расходящимся, но его можно перенормировать.

Статистическая сумма теории

$$Z = \int \mathcal{D}A \prod_{\text{mon}} e^{-S[A, \rho]} \quad (2.16)$$

подразумевает интегрирование по фотонным конфигурациям A и сумму по всем монопольным конфигурациям, характеризующимися монопольными плотностями ρ . Мера интегрирования по монопольным конфигурациям можно записать следующим образом:

$$\oint_{\text{mon}} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \prod_{a=1}^N \left(\sum_{q_a=\pm 1} \zeta \int d^3 x_a \right). \quad (2.17)$$

В данном выражении проводится интегрирование по позициям x_a всех N монополей, суммирование по магнитным зарядам q_a и затем сумма общего числа монополей N , учитывая фактор вырождения $1/N!$. Параметр ζ это так называемая «летучесть», которая контролирует монопольную плотность.

Из разделяемости действия на фотонную и монопольные части (2.11) следует возможность разделения статистической суммы:

$$Z = Z_{\text{ph}} \cdot Z_{\text{mon}}, \quad (2.18)$$

где

$$Z_{\text{ph}} = \int \mathcal{D}A e^{-S_{\text{ph}}[A]}, \quad (2.19)$$

$$Z_{\text{mon}} = \oint_{\text{mon}} e^{-S_{\text{mon}}[\rho]} \quad (2.20)$$

это фотонные и монопольные части, соответственно.

Монопольную часть статистической суммы (2.20), описывающую непертурбативные эффекты, можно переформулировать в терминах нелинейной модели синус-Гордона. Полный вывод можно найти в работе [47], здесь же приведён результат, который будет использован далее:

$$Z_{\text{mon}} = \oint_{\text{mon}} e^{-S_{\text{mon}}[\rho]} \equiv C \int \mathcal{D}\chi \exp \left\{ - \int d^3 x \mathcal{L}_s(\chi) \right\}, \quad (2.21)$$

где χ это действительное скалярное поле,

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{2g_{\text{mon}}^2} (\partial_\mu \chi)^2 - 2\zeta \cos \chi \quad (2.22)$$

лагранжиан модели синус-Гордона, C – некоторая константа. Данная модель представляет собой дуальную формулировку кулоновского газа монополей (2.14) и описывает динамику монопольной плотности (2.6) в терминах скалярного

действительного поля χ . Модель (2.22) предоставляет удобный инструмент для исследования непертурбативных свойств компактной электродинамики. Из нее можно вывести [47] среднюю монопольную плотность кулоновского газа монополей

$$\varrho \equiv \langle |\rho| \rangle \equiv \langle N \rangle = \frac{\partial \ln Z_{\text{mon}}}{\partial \ln \zeta} = 2\zeta. \quad (2.23)$$

Скалярное поле χ обладает массой

$$m_{\text{ph}} = g_{\text{mon}} \sqrt{2\zeta} \equiv \frac{2\pi\sqrt{2\zeta}}{g}. \quad (2.24)$$

Нижний индекс у m_{ph} указывает на то, что данная масса скалярного поля является и массой калибровочного (фотонного) поля. Выражение (2.24) получено с помощью разложения лагранжиана синус-Гордона (2.22) по флуктуациям дуального поля χ с использованием определения монопольного заряда (2.7):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g_{\text{mon}}^2} [(\partial_\mu \chi)^2 + m_{\text{ph}}^2 \chi^2] + O(\chi^4). \quad (2.25)$$

Калибровочное поле A_μ состоит из регулярного фотонного поля и сингулярного монопольного поля, что и приводит к разделению тензора поля (2.3). Можно показать, что во взаимодействиях посредством обмена фотоном безмассовый полюс исчезает и остается массивный полюс скалярного поля χ , который определяет радиус взаимодействия. Выражение для m_{ph} (2.24) можно переписать через среднюю плотность монополей, используя (2.23). Тогда оно принимает вид

$$m_{\text{ph}} = \frac{2\pi\sqrt{\varrho_{\text{mon}}}}{g}, \quad (2.26)$$

откуда явно видно, что газ монополей приводит к генерации массовой щели системе, или, другими словами, обретению фотоном массы, которая пропорциональна квадратному корню из плотности монополей.

Так как выражения (2.25) и (2.26) получены при условии незначительности флуктуаций скалярного поля χ ($\langle \chi^2 \rangle \leq 1$), то это предполагает, что флуктуациями индивидуальных монополей можно пренебречь. Поскольку монополи могут влиять друг на друга на расстоянии дебайевского радиуса $\lambda_D = m_{\text{ph}}^{-1}$, данное требование выполняется, если число монополей в дебайевском объеме существенно велико, $\varrho_{\text{mon}} \lambda_D^3 \geq 1$. Используя (2.26), последнее условие $\langle \chi^2 \rangle \leq 1$ можно переписать в виде

$$\varrho_{\text{mon}}^{1/2} \leq \frac{g^3}{(2\pi)^3}, \quad (2.27)$$

что эквивалентно

$$\varrho_{\text{mon}}^{1/2} g_{\text{mon}}^3 \leq 1. \quad (2.28)$$

Это означает, что оценка массы фотона является верной, если плотность монополей невелика. По этой причине, выражения (2.27) и (2.28) часто называют приближением разреженного газа.

Другим важным свойством компактной электродинамики, как было отмечено выше, является линейный конфайнмент электрических зарядов. Между парой статических зарядов, расположенных на расстоянии $R \geq \lambda_D$, существует удерживающий потенциал (2.1), линейно возрастающий с увеличением R . Натяжение удерживающей струны σ выражается формулой

$$\sigma = \frac{8\sqrt{2}\zeta}{g_{\text{mon}}} \equiv \frac{4g\sqrt{\varrho_{\text{mon}}}}{\pi}, \quad (2.29)$$

вывод которой можно найти в [49]. Примечательно, что компактная электродинамика является одной из немногих теорий, где свойство конфайнмента может быть получено аналитически.

2.1.2 Влияние граничных условий Казимира на вакуум компактной электродинамики

Формулировка граничных условий Казимира

После того, как кратко сформулированы основные свойства вакуума компактной электродинамики, можно перейти к описанию того, как изменяется вакуум теории в присутствии граничных условий Казимира. Их можно задать двумя эквивалентными способами — либо с помощью идеального электрического проводника, на границе которого тангенциальная компонента электрического поля и нормальная компонента магнитного поля зануляются, либо с использованием идеального магнитного проводника, когда электрическая и магнитная компоненты меняются ролями. Условия первого (электрического) типа являются

общепринятыми в работах по эффекту Казимира, и их можно записать следующим образом:

$$\varepsilon^{\mu\alpha\beta} n_\mu(x) F_{\alpha\beta}, \quad (2.30)$$

где $n_\mu(x)$ это вектор нормали к границе в точке x . Данные условия в двух пространственных измерениях реализуются путем добавления двух параллельных проводов, находящихся на расстоянии R друг от друга. Тангенциальная компонента электрического поля в каждой точке провода x зануляется:

$$E_\parallel(x) = 0. \quad (2.31)$$

Чтобы вычислить, как изменится лагранжиан и статсумма теории после добавления пластин (проводов) Казимира, удобно рассмотреть общую формулировку условий Казимира для произвольной двумерной мировой поверхности S [47]. Для описания поверхности S введем вектор $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \xi)$, где τ и ξ это временной и пространственный параметры соответственно. Тогда элемент поверхности можно представить как

$$s_{\mu\nu}(x) = \int d\tau \int d\xi \frac{\partial \bar{x}_{[\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial \bar{x}_{\nu]}}{\partial \xi} \delta^{(3)}(x - \bar{x}(\tau, \xi)), \quad (2.32)$$

где $a_{[\mu}, b_{\nu]} = a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu$. Тогда условие (2.31) может быть записано в ковариантной форме

$$F^{\mu\nu}(x) s_{\mu\nu}(x) = 0. \quad (2.33)$$

Пару двух статичных параллельных проводов, расположенных на расстоянии R можно параметризовать с помощью пары векторов

$$\bar{x}_\pm(\tau, \xi) \equiv (x_1, x_2, x_3) = \left(\pm \frac{R}{2}, \xi, \tau \right). \quad (2.34)$$

Провода являются статичными по отношению к временному направлению x_3 . Тогда элемент поверхности (2.32) принимает вид

$$s_{\mu\nu}^\pm(x) = (\delta_{\mu,2}\delta_{\nu,3} - \delta_{\nu,3}\delta_{\mu,2})\delta(x_1 \mp R/2). \quad (2.35)$$

Подставляя данное выражение в общее условие (2.33), получаем формулировку граничных условий Казимира для параллельных идеально проводящих статичных проводов:

$$F_{23}(\pm R/2, x_2, x_3) = 0. \quad (2.36)$$

Полученное условие соответствует (2.31), так как $F_{23} \equiv E_2$ это параллельная проводкам компонента электрического поля.

В формализме интеграла по траекториям, граничное условие (2.33) можно применить, введя следующий δ функционал:

$$\delta_S[F] = \prod_x \delta(F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) s_{\mu\nu}(\mathbf{x})). \quad (2.37)$$

Его можно переписать через интегрирование по множителю Лагранжа $\lambda(\mathbf{x})$:

$$\delta_S[F] = \int \mathcal{D} \exp \left[\frac{i}{2} \int d^3x \lambda(\mathbf{x}) F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) s_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \right] \equiv \int \mathcal{D} \exp \left[\frac{i}{2} \int d^3x F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) J_{\mu\nu}(\mathbf{x}; \lambda) \right], \quad (2.38)$$

где

$$J_{\mu\nu}(\mathbf{x}; \lambda) = \lambda(\mathbf{x}) s_{\mu\nu}(\mathbf{x}). \quad (2.39)$$

В случае двух параллельных пластин (проводов) получаем:

$$\delta_S[F] = \int \mathcal{D}\lambda_+ \int \mathcal{D}\lambda_- \exp \left[i \int dx_2 \int dx_3 \sum_{a=\pm 1} \lambda_a(x_2, x_3) F_{23} \left(a \frac{R}{2}, x_2, x_3 \right) \right]. \quad (2.40)$$

В этом выражении интегрирование под экспонентой производится по двумерной мировой поверхности, а интегрирование по множителям Лагранжа λ_1 и λ_2 обеспечивает выполнение условий Казимира (2.36) на плоских мировых поверхностях левого ($x_1 = +R/2$) и правого ($x_1 = -R/2$) проводов соответственно. Используя данное выражение, статистическую сумму теории (2.18) в присутствии пластин Казимира можно записать следующим образом:

$$Z_S = \int \mathcal{D}A \sum_{\text{mon}} e^{-S_{\text{ph}}[A] - S_{\text{mon}}[\rho]} \delta_S[F]. \quad (2.41)$$

В данном случае, в отличие от (2.18), полностью разделить фотонные и монополярные вклады не представляется возможным:

$$Z_S = \int \mathcal{D}\lambda Z_{\text{ph}}[\lambda] Z_{\text{mon}}[\lambda], \quad (2.42)$$

$$Z_{\text{ph}}[\lambda] = \int \mathcal{D}A e^{-S_{\text{ph}}[A] + \frac{i}{2} \int d^3x F_{\text{ph}}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) J_{\mu\nu}(\mathbf{x}; \lambda)}, \quad (2.43)$$

$$Z_{\text{mon}}[\lambda] = \sum_{\text{mon}} e^{-S_{\text{mon}}[\rho] + \frac{i}{2} \int d^3x F_{\text{mon}}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) J_{\mu\nu}(\mathbf{x}; \lambda)}. \quad (2.44)$$

Интегрируя фотонную часть по A_μ получаем:

$$\begin{aligned} Z_{\text{ph}}[\lambda] &= \int \mathcal{D}A \exp \left[\int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i A_\mu J^\mu \right) \right] \\ &= C \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^3x d^3y J_\mu(\mathbf{x}; \lambda) D(\mathbf{x} - \mathbf{y}) J_\mu(\mathbf{y}; \lambda) \right], \end{aligned} \quad (2.45)$$

где C это некоторая константа, которая будет опущена далее. Сохраняющийся ток $J_\mu(\mathbf{x}; \lambda)$ связан с поверхностным тензором $J_{\mu\nu}(\mathbf{x}; \lambda)$ следующим соотношением:

$$J_\mu(\mathbf{x}; \lambda) = \partial^\nu J_{\mu\nu}(\mathbf{x}; \lambda), \quad \partial^\mu J_\mu(\mathbf{x}; \lambda) = 0. \quad (2.46)$$

Из (2.32) и (2.39) получаем выражение тока (2.46) для параллельных пластин

$$J_\mu = \sum_{a=\pm} \delta \left(x_1 - \frac{aR}{2} \right) \left(\delta_{\mu 2} \frac{\partial \lambda_a}{\partial x_3} - \delta_{\mu 3} \frac{\partial \lambda_a}{\partial x_2} \right), \quad (2.47)$$

где $\lambda_\pm = \lambda_\pm(x_2, x_3)$ это множители Лагранжа, соответствующие первому и второму проводу, соответственно.

Вклад монополей (2.44) в статистическую сумму (2.41) можно оценить аналогично тому, как это было сделано в случае отсутствия граничных условий. В формулировке синус-Гордона получим:

$$Z_{\text{mon}}[\lambda] = \int \mathcal{D}\chi \exp \left\{ - \int d^3x \mathcal{L}_S(\chi; \lambda) \right\}. \quad (2.48)$$

здесь лагранжиан \mathcal{L}_χ синус-Гордона (2.22) заменен на

$$\mathcal{L}_S(\chi; \lambda) = \frac{1}{2g_{\text{mon}}^2} \left[\partial_\mu (\chi(\mathbf{x}) - q(\mathbf{x}, \lambda)) \right]^2 - 2\zeta \cos \chi(\mathbf{x}) \quad (2.49)$$

путем введения «ротора» от поверхностного тензора (2.39):

$$q(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{g_{\text{mon}}}{2} \int d^3x D(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varepsilon_{\alpha\mu\nu} \partial^\alpha J^{\mu\nu}(\mathbf{y}; \lambda). \quad (2.50)$$

Для двух параллельных проводов данная функция принимает вид:

$$q(\mathbf{x}) = g_{\text{mon}} \int dy_2 dy_3 \sum_{a=\pm} \lambda_a(y_2, y_3) \frac{\partial}{\partial x_1} D \left(x_1 - \frac{aR}{2}, x_2 - y_2, x_3 - y_3 \right). \quad (2.51)$$

Подставляя выражения (2.43) для фотонной части и (2.44) для монополярной части, получаем выражение для статистической суммы при наличии граничных условий

Казимира:

$$Z_S = \int \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}\chi \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^3x d^3y J_\mu(\mathbf{x}; \lambda) D(\mathbf{x} - \mathbf{y}) J_\mu(\mathbf{y}; \lambda) - \int d^3x \left(\frac{1}{2g_{\text{mon}}^2} [\partial_\mu (\chi(\mathbf{x}) - q(\mathbf{x}, \lambda))]^2 - 2\zeta \cos \chi(\mathbf{x}) \right) \right]. \quad (2.52)$$

Отсюда можно сделать вывод о нетривиальном влиянии граничных условий Казимира на дуальное поле синус-Гордона. Действительно, интуитивно условие зануления электрического поля на мировой поверхности (2.31) проводов позволяет предположить выполнение граничных условий Дирихле или Неймана для дуального поля χ , что означало бы зануление поля χ или его производной на границах. Но, как следует из (2.52), данное предположение неверно.

Полученное выражение для статистической суммы (2.52) можно разложить по степеням скалярного поля $\chi(\mathbf{x})$, причем членами $\chi^n(\mathbf{x})$ степени $n = 4$ и выше можно пренебречь, если мы оставляем только ведущий порядок в приближении разреженного газа (2.28). В таком случае, функционал под экспонентой будет квадратичным относительно как дуального поля χ , так и множителя Лагранжа λ , что позволяет его проинтегрировать и получить потенциал Казимира.

Потенциал Казимира для параллельных статичных проводов

Выражение потенциала Казимира зависит от присутствия или отсутствия монополей. Как следует из уравнения (2.23), случай отсутствия монополей реализуется путем зануления летучести ($\zeta = 0$) Тогда нелинейный член в лагранжиане синус-Гордона (2.22) уходит, и стат. сумма (2.52) становится независимой от функционала q , так как его теперь можно внести в поле синус-Гордона χ путем сдвига $\chi \rightarrow \chi + q$. В этом случае можно проинтегрировать по полю χ и стат. сумма (2.52) примет вид:

$$Z_S = \int \mathcal{D}\lambda e^{-\frac{1}{2} \int d^3x d^3y J_\mu(\mathbf{x}; \lambda) D(\mathbf{x} - \mathbf{y}) J_\mu(\mathbf{y}; \lambda)}. \quad (2.53)$$

Отсюда можно вывести [47] выражение для потенциала Казимира для параллельных проводов при отсутствии монополей:

$$V_{\text{Cas}}(R) = -\frac{\zeta(3)}{16\pi} \frac{1}{R^2}, \quad (2.54)$$

где $\zeta(x)$ это дзета-функция Римана, $\zeta(3) \approx 1.20206$.

В случае ненулевой плотности монополей, которая контролируется параметром летучести $\zeta \neq 0$, действие поля синус-Гордона можно разложить по небольшим флуктуациям дуального поля (2.25). Тогда статистическая сумма 2.52 принимает вид:

$$Z_S = \int \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}\chi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^3x d^3y J_\mu(\mathbf{x}; \lambda) D(\mathbf{x} - \mathbf{y}) J_\mu(\mathbf{y}; \lambda) - \frac{1}{2g_{\text{mon}}^2} \int d^3x [(\partial_\mu(\chi - q(\lambda)))^2 + m_{\text{ph}}^2 \chi^2] \right\}. \quad (2.55)$$

В нее не включены члены $O(\chi^4)$, так как в приближении разреженного газа учитывается только ведущий порядок разложения. Интегрируя по χ и проведя некоторые преобразования [47], можно вывести плотность энергии Казимира при наличии монополей:

$$V_{\text{Cas}}^{\text{mon}}(R, m_{\text{ph}}) = -\frac{\zeta(3)}{16\pi} \frac{1}{R^2} f_{\text{mon}}(m_{\text{ph}} R), \quad (2.56)$$

где функция

$$f_{\text{mon}}(x) = -\frac{2x^2}{\zeta(3)} \int_0^\infty dy \log \left(1 - e^{-2x\sqrt{y+1}} \right) \quad (2.57)$$

изображена на рисунке 2.1.

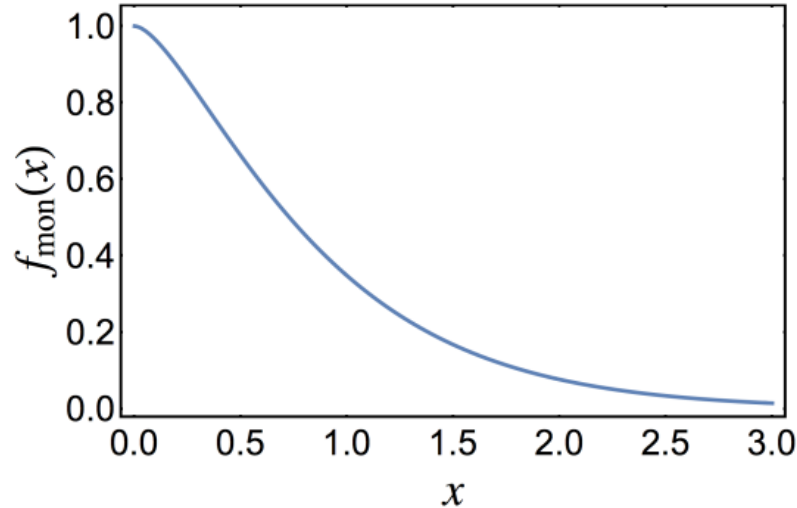


Рисунок 2.1 — Функция $f(x)$ из выражения для плотности энергии Казимира (2.56). Изображение взято из [47].

Если сравнить выражения (2.54) плотности энергии Казимира при отсутствии монополей и (2.56) при их наличии, то можно заметить, что второе от

первого отличается только наличием дополнительного множителя (2.57), но данный множитель приводит к очень интересному заключению. Для небольших расстояний между пластинами, или низкой монопольной плотности, $Rm_{\text{ph}} \ll 1$, функция f принимает близкие к единице значения, что свидетельствует о близких значениях плотностей энергии Казимира при отсутствии и наличии монополей. Но с увеличением расстояния между пластинами и/или увеличением плотности монополей, как видно из рисунка 2.1, плотность энергии Казимира будет уменьшаться по сравнению со значениями при отсутствии монополей. При $m_{\text{ph}}R \gg 1$ функция (2.57) падает экспоненциально:

$$f_{\text{mon}}(x) = \frac{2x}{\zeta(3)} e^{-2x} + \dots, \quad x \gg 1, \quad (2.58)$$

что свидетельствует об экспоненциальном подавлении плотности энергии Казимира.

Таким образом можно сделать вывод, что в приближении разреженного газа наличие динамических монополей приводит к подавлению эффекта Казимира для проводов, расположенных на большом расстоянии. Данный непертурбативный эффект показывает, что структура вакуума теории может влиять на эффекты, возникающие в результате наложения граничных условий. Но верно и обратное - в компактной электродинамике в $2+1$ измерениях, граничные условия оказывают влияние на структуру вакуума. Чтобы пронаблюдать данные эффекты, необходимо перейти к решеточной формулировке теории.

Влияние условий Казимира на конденсат монополей

Аналитический подход, позволивший получить выражение (2.56) для плотности энергии Казимира, применим только в приближении разреженного газа (2.28), когда плотность монополей очень мала. Для исследования теории при больших значениях концентрации монополей, необходимо использовать другие методы. Одним из таких методов, позволяющим исследовать непертурбативные свойства теории, является метод решеточной регуляризации, в котором непрерывное пространство-время заменяется дискретной решеткой, шаг которой и естественным образом вводит ультрафиолетовое обрезание, избавляя теорию от

расходимостей и позволяя вычислять наблюдаемые, физические значения которых затем получают беря непрерывный предел при устремлении шага решетки к нулю. Описанию решеточной регуляризации посвящена вторая глава настоящей работы, в данном же разделе кратко вводятся необходимые для дальнейшего описания понятия.

Действие (2.10) в решеточной формулировке принимает вид

$$S[\theta] = \beta \sum_P (1 - \cos \theta_P), \quad (2.59)$$

где β это решеточная константа связи, связанная с непрерывной константой связи (электрическим зарядом g) соотношением

$$\beta = \frac{1}{g^2 a}, \quad (2.60)$$

это размер шага решетки. Плакет $P \equiv P_{x,\mu\nu}$ определяется координатой x узла решетки и двумя перпендикулярными единичными векторами μ и ν , задающими плоскость, в которой берется наименьший из возможных замкнутых контуров обхода по линкам. Каждому линку на решетке присваивается значение калибровочного поля

$$\theta_{x,\mu} \in [-\pi, \pi). \quad (2.61)$$

Элементы калибровочного поля, принадлежащие плакету, образуют плакетную переменную (угол)

$$\theta_{P_{x,\mu\nu}} = \theta_{x,\mu} + \theta_{x+\hat{\mu},\nu} - \theta_{x+\hat{\nu},\mu} - \theta_{x,\nu}, \quad (2.62)$$

которая связана с непрерывным тензором поля $F_{\mu\nu}$ соотношением

$$\theta_{P_{x,\mu\nu}} = a^2 F_{\mu\nu}(x) + O(a^4). \quad (2.63)$$

Решеточное действие (2.59) инвариантно относительно изменения плакетной переменной на величину 2π

$$\theta_P \rightarrow \theta_P + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.64)$$

В непрерывном пределе (2.63) при $a \rightarrow 0$ сдвиги на 2π становятся сингулярными функциями, пропорциональными $2\pi/a^2$. Данные сдвиги соответствуют листам Дирака, которые представляют собой мировые линии струн Дирака, оканчивающиеся абелевыми монополями. Абелевы монополи являются физическими,

калибровочно инвариантными топологическими дефектами. Как было сказано в подсекции 2.1.1, в 2+1 измерениях монополи это точечные инстантоно-подобные объекты. Их плотность в непрерывном пределе задается выражением (2.6). В решеточной регуляризации локальная плотность монополей

$$\rho_x = \frac{1}{2\pi} \sum_{P \in C_x} (-1)^P \bar{\theta}_P, \quad (2.65)$$

определенная для произвольного куба C_x , является дивергенцией физической части решеточного тензора поля (2.62)

$$\bar{\theta}_P = \theta_P + 2\pi k_P \in [-\pi, \pi), \quad k_P \in \mathbb{Z}, \quad (2.66)$$

где k_P это целое число, подобранное таким образом, чтобы плакетный угол $\bar{\theta}_P$ был в интервале $[-\pi, \pi)$. Удобно вести плотность монополей внутри какого-то объема V , например, между пластинами:

$$\rho_{\text{mon}} = \frac{1}{|V|} \sum_{x \in V} |\rho_x|. \quad (2.67)$$

Для компактной электродинамики в 2+1 измерениях плотность монополей представляет собой монотонную быстро убывающую функцию решеточной константы связи β . В отсутствии пластин она изображена на рисунке 2.2.

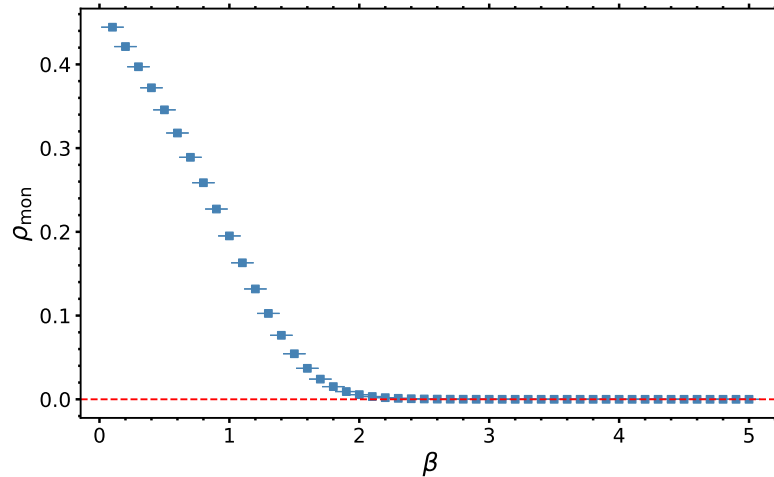


Рисунок 2.2 — Плотность монополей ρ_{mon} как функция решеточной константы связи β .

Из данного графика видно, что в отсутствии пластин концентрация монополей высока для низких значений решеточной константы связи β , но с возрастанием β быстро падает, исчезая при $\beta \gtrsim 2$.

Пластины Казимира зануляют поток электромагнитного поля из/в область между пластинами, поэтому согласно теореме Гаусса общая плотность монополей должна быть равна нулю. Помимо этого, близко-расположенные пластины сжимают сферический трехмерный магнитный поток от монополей в двумерный, и результирующая конфигурация является более энергетически затратной. Следовательно, можно предположить, что пластины будут подавлять плотность монополей между ними, и чем меньше расстояние между ними, тем сильнее будет проявляться данный эффект. Уменьшение расстояния между пластинами влечет «сжатие» магнитного поля между ними, приводя к увеличению его энергии. В свою очередь, это приводит к увеличению массы монополей, а чем больше масса, тем меньше плотность монополей. То есть с уменьшением расстояния между пластинами газ монополей будет становится более разреженным, и наоборот. Действительно, расчеты в работе [47] полностью подтверждают данные предположения. На рисунке 2.3 приведена зависимость плотности монополей между пластинами от расстояния между ними.

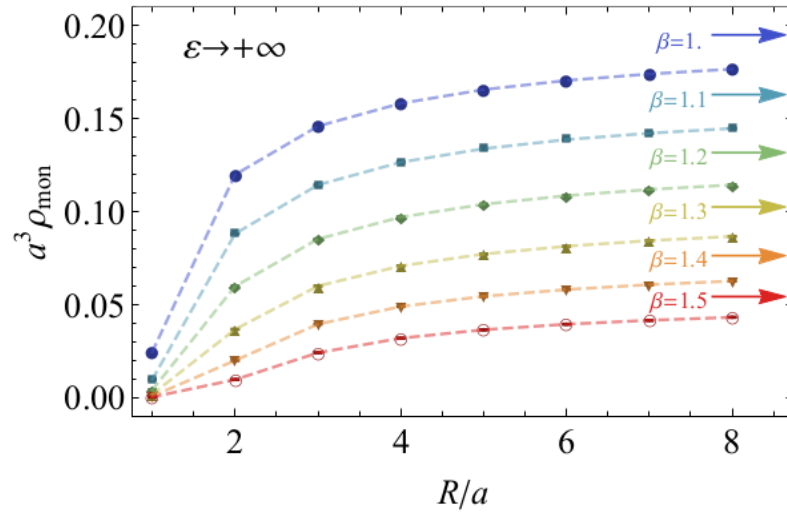


Рисунок 2.3 — Плотность монополей ρ_{mon} как функция расстояния между пластинами R в решеточных единицах для различных значений решеточной константы связи β . Стрелки указывают на значения плотности монополей в пределе $R \rightarrow \infty$. Данный график приведен для идеально проводящих пластин, когда диэлектрическая проницаемость пластин $\varepsilon \rightarrow \infty$. Изображение взято из [47].

Видно, что чем меньше расстояние между пластинами, тем меньше плотность монополей между ними, она возрастает с ростом R , и предел $R \rightarrow \infty$ соответствует ситуации, когда пластины отсутствуют. Для минимального расстояния между пластинами $R = 1a$ плотность монополей принимает околонулевые значения. В этом случае, из-за того что две грани решеточного монополя касаются

пластин (мировых линий проводов), магнитный поток не может проходить через них (в направлении нормали к пластинам). Для его распространения остаются только два других направления, таким образом динамика монополей становится по-существу двумерной. Данное наблюдение проиллюстрировано на рисунке 2.4.

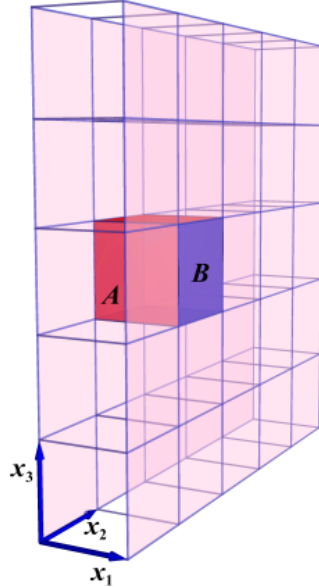


Рисунок 2.4 — Монополь, заключенный между пластинами, находящимися на минимально возможном расстоянии $R = a$. B обозначает грани, касающиеся пластин, A - остальные, через которые магнитный поток может проходить. Изображение взято из [47].

Размерная редукция оказывает влияние на взаимодействие монополей и антимонполей. В частности, трехмерный кулоновский $\frac{1}{r}$ потенциал (2.8) взаимодействия переходит в двумерный логарифмический потенциал:

$$D_{3D}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \rightarrow D_{2D}(\mathbf{x}) = \frac{2}{R} \log \frac{|\mathbf{x}|}{R}. \quad (2.68)$$

Примечательно, что в результате быстро убывающий кулоновский потенциал преобразуется в медленно растущий логарифмический. Логарифмическая функция представляет собой удерживающий потенциал, а это значит, что индивидуальные монополи между близко расположенными пластинами должны образовывать магнитные диполи, состоящие из пары монополь-антимонполь. Данный процесс действительно прослеживается на симуляциях. На рисунке 2.5 показаны конфигурации монополей между пластинами (рисунок 2.5a) и в остальном пространстве (рисунок 2.5б). Между пластинами концентрация монополей существенно ниже, более того, внутри пластин монополи образуют диполи, в то время как вне пластин наблюдается обычный монополярный газ.

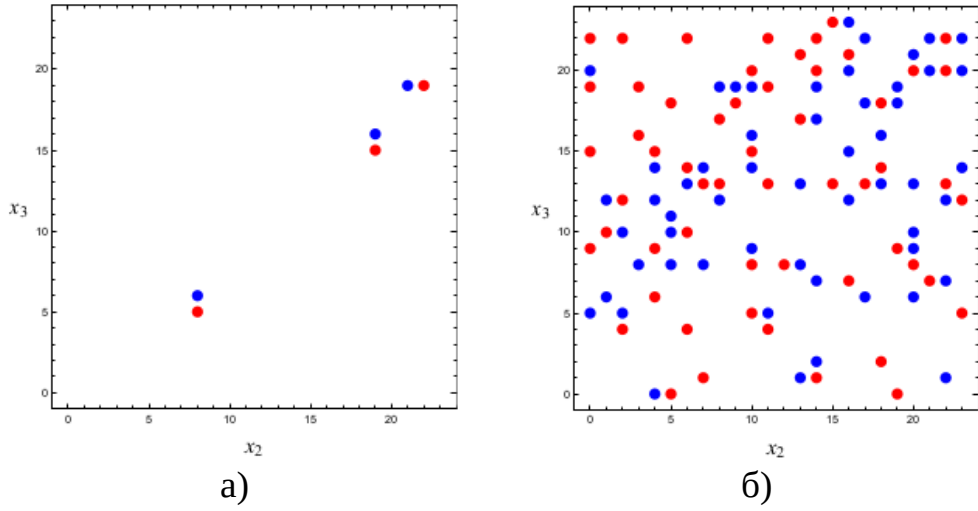


Рисунок 2.5 — **(а)**: Конфигурация монополей между пластинами. **(б)**: конфигурация монополей снаружи пластин. Изображение взято из [47].

Переход от газа монополей к газу диполей должен приводить к исчезновению массовой щели и фазовому переходу конфайнмент-деконфайнмент между пластинами. Параметр порядка, который обычно используется для отслеживания такого перехода, это петля Полякова, представляющая собой замкнутый контур по всем временным линкам решетки и определенная для пространственного узла решетки x :

$$L_x \equiv L(x_1, x_2) = \exp \left\{ i \sum_{x_3=0}^{L_t-1} \theta_3(x_1, x_2, x_3) \right\}. \quad (2.69)$$

Для бесконечной решетки, в фазе конфайнмента абсолютное значение петли Полякова, усредненное по всем пространственным сайтам, равно нулю, а в фазе деконфайнмента оно отлично от нуля. В случае нулевой температуры, при которой были получены выше описанные результаты, петля Полякова не всегда является репрезентативным маркером фазового перехода, в $(2+1)$ -мерной теории каких-то признаков перехода конфайнмент-деконфайнмент обнаружить не удалось. Помимо этого известно, что $(2+1)$ -компактная электродинамика в отсутствии граничных условий обладает только фазой конфайнмента, фазового перехода в фазу деконфайнмента при нулевой температуре нет. Чтобы в этом убедиться, достаточно взглянуть на графики зависимости плакетной переменной и восприимчивости действия от решеточной константы связи β , приведенные на рисунке 2.6. График плакетной переменной (Рис. 2.6а) показывает отсутствие резких изменений в поведении функции, что свидетельствует об отсутствии перехода в фазу деконфайнмента. Тем не менее, его можно разбить на две части

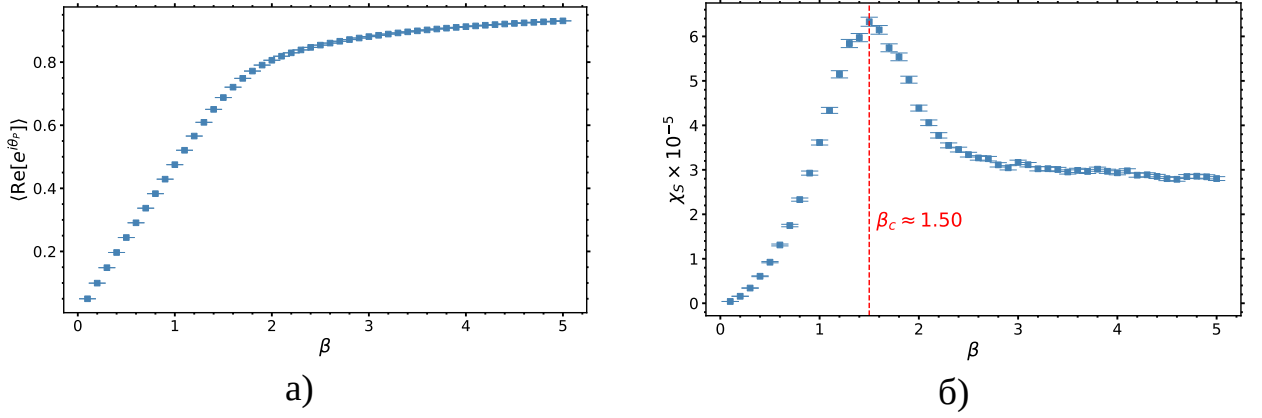


Рисунок 2.6 — **(а)**: Зависимость плакетной переменной $\langle \text{Re}[e^{i\theta_P}] \rangle$ от решеточной константы связи β . **(б)**: Зависимость восприимчивости $\chi_S = \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2$ действия (2.59) от решеточной константы связи β . Обе наблюдаемые посчитаны в отсутствии границ Казимира.

по характеру функциональной зависимости. Первая часть демонстрирует явное линейное поведение, указывая на сильную связь, которое затем приобретает экспоненциальный характер, свидетельствуя о переходе к режиму слабой связи. Границу между данными режимами можно отследить, взглянув на график восприимчивости действия (Рис. 2.6б). Он содержит локальный максимум в точке $\beta \approx 1.50$, что указывает на примерную позицию точки перехода сильная-слабая связь. Для такого перехода характерен плавный характер пика (производная в точке максимума существует и равна нулю). В случае фазового перехода конфайнмент-деконфайнмент, возникающего в компактной электродинамике в 3+1 измерениях, пик восприимчивости действия выражен намного сильнее, и производная в точке перехода не существует. Соответствующий рисунок 4.1г приведен в главе 4. Переход сильная-слабая связь принадлежит к типу «кроссовер» и его положение может отличаться в зависимости от конкретной наблюдаемой.

В случае конечной температуры компактная электродинамика в 2+1 измерениях характеризуется фазовым переходом в фазу деконфайнмента. Влияние пластин Казимира на точку перехода будет описано ниже, но прежде чем приступить к его изложению, уместно будет привести результаты решеточных вычислений энергии Казимира, опубликованные в [47], и сравнить их с выводами, полученными с помощью аналитического подхода в подсекции 2.1.2.

Влияние монополей на энергию Казимира (на основе решеточных симуляций)

Плотность энергии вакуумных флуктуаций задается компонентой T^{00} тензора энергии-импульса калибровочного поля (2.10):

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{g^2} F^{\mu\alpha} F_{\alpha}^{\nu} + \frac{1}{4g^2} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (2.70)$$

В пространстве Минковского эта компонента имеет вид:

$$T^{00} = \frac{1}{2g^2} (E_x^2 + E_y^2 + B_z^2), \quad (2.71)$$

где $E_x = F_{01}$, $E_y = F_{02}$, $B_z = -F_{12}$ соответствующие компоненты тензора поля (2.3) с метрикой $(+, -, -)$. После перехода к евклидовому пространству компоненты электрического поля меняют знак, а компонента магнитного поля остается без изменения:

$$T_E^{00} = \frac{1}{2g^2} (-E_x^2 - E_y^2 + B_z^2). \quad (2.72)$$

При нулевой температуре (пространственные и временные размеры решетки равны), система инвариантна относительно поворота на угол $\pm\pi/2$ вокруг оси $x \equiv x_1$. В результате такого поворота компоненты E_x и B_z переходят в друг друга:

$$\langle E_x^2 \rangle = \langle B_z^2 \rangle, \quad (2.73)$$

и выражение для средней плотности энергии (2.72) сильно упрощается:

$$\langle T_E^{00} \rangle = -\frac{1}{2g^2} \langle E_y^2 \rangle. \quad (2.74)$$

Как было показано в секции 1.2, в непрерывной теории плотность энергии бесконечна, как в отсутствии пластин, так и между ними, и плотность энергии Казимира можно вычислить как разность плотностей энергии между пластинами и в отсутствии пластин. В евклидовом пространстве это выражение принимает вид

$$\varepsilon_R(x) = \langle T_E^{00}(x) \rangle_R - \langle T_E^{00}(x) \rangle_0, \quad (2.75)$$

где индексы "R" и "0" означают наличие пластин на расстоянии R и их отсутствие соответственно.

Поскольку пластины (провода) параллельны друг-другу, плотность энергии (2.75) зависит только от координаты x_1 , которая перпендикулярна пластинам. Это

предоставляет возможность ввести полную плотность энергии Казимира на единицу длины проводов:

$$V_{\text{Cas}}(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \varepsilon_R(x_1) \equiv -\frac{1}{2g^2} \langle \langle E_y^2 \rangle \rangle, \quad (2.76)$$

где обозначение $\langle \langle E_y^2 \rangle \rangle$ представляет собой интеграл плотности энергии (2.75) по координате x_1 :

$$\langle \langle E_y^2(x_1) \rangle \rangle = \int dx_1 [\langle E_y^2(x_1) \rangle_R - \langle E_y^2 \rangle_0]. \quad (2.77)$$

В решеточной регуляризации данное выражение принимает вид

$$\langle \langle E_y^2(x_1) \rangle \rangle = \sum_{x_1=0}^{L_s-1} [\langle E_y^2(x_1) \rangle_R - \langle E_y^2 \rangle_0]. \quad (2.78)$$

Итого получаем, что плотность энергии Казимира равна:

$$V_{\text{Cas}}(R) = \beta \langle \langle \cos \theta_{23} \rangle \rangle. \quad (2.79)$$

Данное выражение было исследовано численно в работе [47] и получена зависимость плотности энергии Казимира от расстояния между пластинами, показанная на рисунке 2.7.

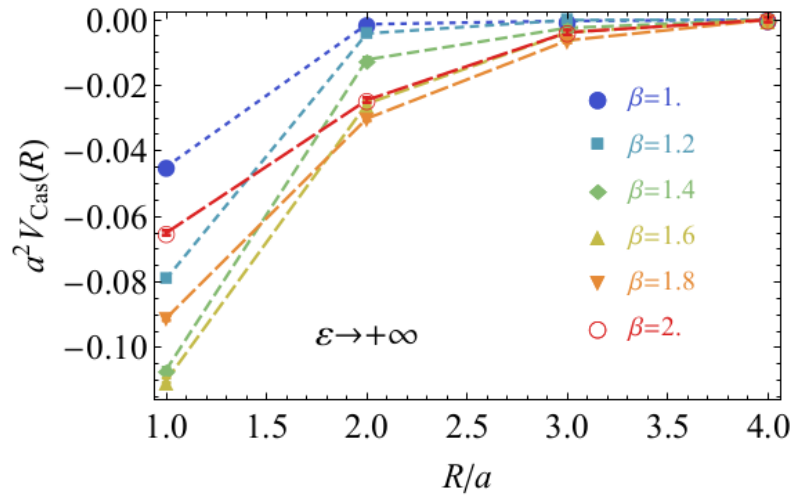


Рисунок 2.7 — Плотность энергии Казимира (2.79) как функция расстояния между пластинами R в решеточных единицах для различных значений решеточной константы связи β . Данный график приведен для идеально проводящих пластин, когда диэлектрическая проницаемость пластин $\varepsilon \rightarrow \infty$. Изображение взято из [47].

Данная зависимость показывает, что потенциал Казимира является монотонной функцией расстояния между пластинами. В области слабой связи ($\beta \simeq 2$) потенциал Казимира принимает умеренные значения и характеризуется относительным дальнодействием. Но в области сильной связи (при более низких значениях решеточной константы связи β), потенциал становится близкодействующим, в то же время его величина увеличивается на небольших расстояниях. Если взять область ещё более сильной связи ($\beta \simeq 1$), то его радиус действия ещё больше снижается, при этом величина снижается тоже.

Данные результаты во многом согласуются с выводами, полученными аналитическим путем в приближении разреженного газа. Наличие монополей приводит к генерации массовой щели, что проявляется как возникновение массы у фотона (2.26), это уменьшает эффект Казимира, его радиус действия тоже уменьшается вследствие дополнительного экспоненциального фактора, что следует из (2.56), (2.57) и (2.58). Но поведение потенциала Казимира для промежуточных значений решеточной константы нельзя в полной мере объяснить аналитическими вычислениями в рамках приближения разреженного газа. По-видимому, формирование пар монополь-антимонгополь, показанное на рисунке 2.5a, приводит к дальнодействию потенциала Казимира за счет отсутствия массовой щели. Помимо этого, повышение плотности монополей вне пластин создает дополнительное давление на пластины, результатом которого является возрастание потенциала Казимира.

Влияние пластин Казимира на переход конфайнмент-деконфайнмент при конечной температуре

Как было сказано в одном из предыдущих пунктов «Влияние условий Казимира на конденсат монополей», Казимировские граничные условия приводят к подавлению монопольной плотности между пластинами и переходу от монопольного газа к газу диполей, что уменьшает удерживающие свойства вакуума и может способствовать фазовому переходу в фазу деконфайнмента, где линейный потенциал (2.1) между зарядами исчезает и они становятся свободными. При нулевой температуре явных признаков перехода конфайнмент-деконфайнмент обнаружить не удалось, поэтому в последующей работе [48] было рассмотрено

влияние пластин Казимира на структуру вакуума компактной электродинамики в $2+1$ измерениях при конечной температуре. Данная теория обладает фазовым переходом в фазу деконфайнмента, что позволяет исследовать влияние граничных условий Казимира на точку фазового перехода. При изучении влияния пластин на конденсат монополей при нулевой температуре было обнаружено, что пластины подавляют концентрацию монополей между ними и способствуют ослаблению удерживающих свойств вакуума. При конечной температуре T , которая обратно пропорциональна размеру решетки во временном направлении L_t и шагу решетки a

$$T = \frac{1}{L_t a}, \quad (2.80)$$

между пластинами происходят аналогичные изменения в структуре монопольного газа. Но в отличие от теории при нулевой температуре, в данном случае предположение об ослаблении конфайнмента можно проверить, и петля Полякова (2.69) является отличным для этого инструментом. Математическое ожидание петли Полякова $\langle L_x \rangle$ связано со свободной энергией F_x изолированного статического электрического заряда следующим соотношением:

$$e^{-F_x/T} = \langle L_x \rangle, \quad (2.81)$$

где температура T , выраженная в единицах константы связи g^2 , является линейной функцией от решеточной константы связи:

$$\frac{T}{g^2} = \frac{\beta}{L_t}. \quad (2.82)$$

Это выражение легко получить из (2.60) и (2.80). В фазе конфайнмента, где низкие значения температуры и решеточной константы связи, параметр порядка $\langle L_x \rangle$ равен нулю. Отсюда вытекает, что свободная энергия бесконечна. Это подразумевает невозможность существования изолированного электрического заряда. В фазе деконфайнмента (высокая температура и большие значения β) среднее петли Полякова отлично от нуля, что свидетельствует о конечной свободной энергии, предполагающей существование свободных электрических зарядов.

Петля Полякова между пластинами как функция решеточной константы связи β для различных расстояний между пластинами приведена на рисунке 2.8.

Из него видно, что петля Полякова является монотонно возрастающей функцией от β , а в силу соотношения (2.82) она растёт с увеличением температуры, причем поведение данной наблюдаемой в отсутствии пластин (кривая

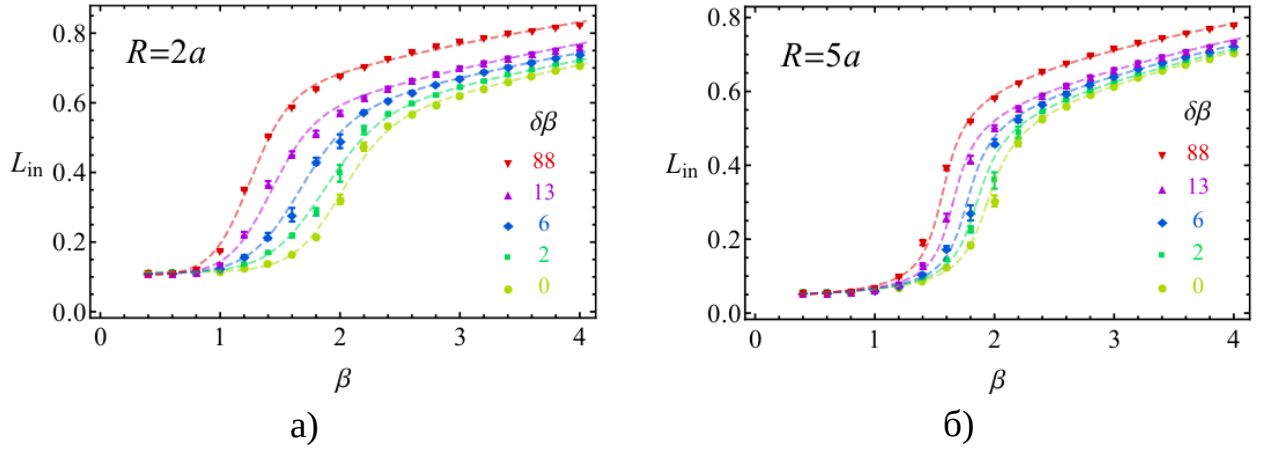


Рисунок 2.8 — Модуль петли Полякова между пластинами как функция решеточной константы связи β для проводов с различной диэлектрической проницаемостью ε , связанной с относительной диэлектрической проницаемостью проводов $\delta\beta = (\varepsilon - 1)\beta$. **(а):** $R = 2a$, **(б):** $R = 5a$. Изображение взято из [48].

светло-зеленого цвета с $\delta\beta = 0$) аналогично поведению в их присутствии, что указывает на схожие характеристики соответствующих фаз теории - для конфайнмента характерна низкая температура, для деконфайнмента высокая. Помимо этого, рисунок показывает, что петля Полякова растет с увеличением диэлектрической проницаемости проводов, а это предполагает ослабление удерживающих свойств вакуума между пластинами. В пользу последнего аргумента также свидетельствует сравнение графиков петли Полякова для различных расстояний между пластинами (рисунки 2.8а и 2.8б). Чем меньше расстояние между пластинами, тем выше значения петли Полякова, и тем меньше проявляется конфайнмент электрических зарядов. Значения петли Полякова между пластинами для максимальной из представленных на графике диэлектрических проницаемостей ($\delta\beta = 88$) существенно выше значений при отсутствии пластин ($\delta\beta = 0$), что указывает на деконфайнмент между пластинами.

Кривые на рисунке 2.8 отлично фиттируются функцией

$$L^{\text{fit}}(\beta) = L_0 + L_1 \beta^\nu \left(\arctan[\kappa(\beta - \beta_c)] + \frac{\pi}{2} \right), \quad (2.83)$$

где L_0 , L_1 , ν , κ и β_c это параметры фита, причем последний параметр β_c является псевдокритической точкой, в которой происходит фазовый переход в фазу деконфайнмента. Приставка «псевдо» означает, что данное значение справедливо для системы конечного объема, которое в пределе бесконечного объема стремится к истинной критической точке.

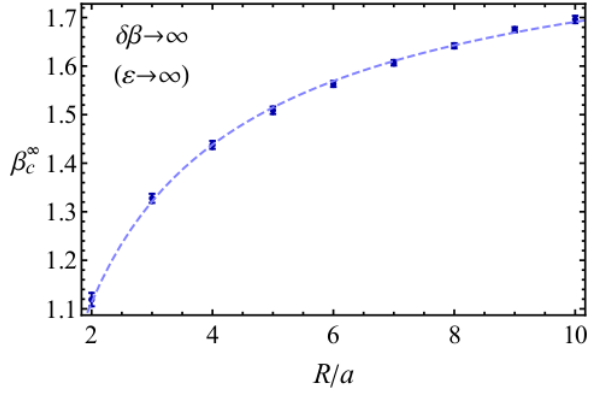


Рисунок 2.9 — Зависимость (псевдо)критической константы связи от расстояния между пластинами для идеально проводящих пластин ($\delta\beta \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow \infty$). Изображение взято из [48].

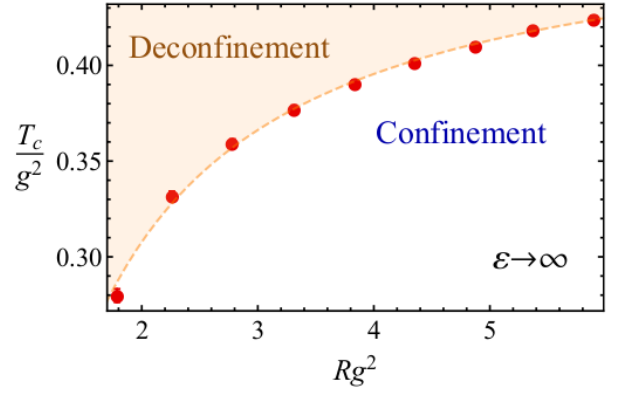


Рисунок 2.10 — Фазовая диаграмма вакуума компактной электродинамики в 2+1 измерениях между идеальными проводниками, расположенными на расстоянии R . Данные приведены в физических единицах. Пунктирная линия представляет собой фит данных функцией (2.84). Изображение взято из [48].

Переход в фазу деконфайнмента между пластинами отлично согласуется с изменением структуры монополей между ними. Пластины подавляют конденсат монополей внутри, а так как газ монополей тесно связан со свойством конфайнмента, то его подавление способствует наступлению фазы деконфайнмента.

Уменьшение конденсата монополей между пластинами вместе с ростом петли Полякова позволяют предположить о снижении температуры фазового перехода конфайнмент-деконфайнмент между пластинами. Согласно (2.82), (псевдо)критическая температура фазового перехода прямо пропорциональна соответствующему значению решеточной константы связи. Поэтому при наличии пластин Казимира переход в фазу деконфайнмента должен осуществляться при более низком значении β , чем при их отсутствии. Данное предположение полностью подтверждается графиком зависимости (псевдо)критического значения решеточной константы связи β_c от расстояния между пластинами, приведенным на рисунке 2.9.

Из него видно, что с уменьшением расстояния между пластинами, значение β_c перехода в фазу деконфайнмента снижается. В пределе $R \rightarrow \infty$ данное значение должно совпасть в пределах ошибок с точкой фазового перехода в отсутствии пластин, но в работе [48], на основе которой написан текущий обзор,

это предположение не проверялось. Тем не менее в пользу данного предположения говорит проведенный автором в рамках диссертации анализ компактной электродинамики в $3+1$ измерениях, где оно полностью подтверждается. Данный анализ приведен в главе 4.

Из данных рисунка 2.9, используя соотношение (2.82) между температурой и решеточной константой связи, можно получить значения критических температур перехода в фазу деконфайнмента в физических единицах электромагнитного заряда g . Данный график приведен на рисунке 2.10. Примечательно, что данные на графике отлично описываются простой функцией

$$T_c(R) = T_c^\infty - \frac{C_0}{R}, \quad (2.84)$$

где $C_0 = 0.35(1)$, а T_c^∞ это значение температуры перехода в фазу деконфайнмента между бесконечно удаленными пластинами, равное

$$T_c^\infty \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} T_c(R) = 0.483(2) \cdot g^2. \quad (2.85)$$

Таким образом, близко расположенные провода изменяют структуру вакуума между ними, способствуя деконфайнменту электрических зарядов. Теоретически, исходя из поведения функции (2.84), при расстоянии между пластинами $R \leq R_c$, где R_c соответствует нулевой критической температуре, фаза конфайнмента отсутствует, и при любой температуре вакуум между пластинами находится в фазе деконфайнмента. Соответствующее критическое значение было оценено равным

$$R_c = 0.72(1) \frac{1}{g^2}, \quad (2.86)$$

но нужно понимать, что данное значение было получено в результате экстраполяции функции (2.84) на низкие расстояния между пластинами, для которых нет численных данных, поэтому этот результат нужно воспринимать с осторожностью.

2.1.3 Выводы о влиянии граничных условий Казимира на вакуум компактной электродинамики в $2+1$ измерениях

Из обзора литературы по реструктуризации вакуума компактной электродинамики в $2+1$ измерениях, приведенного выше, можно сделать следующие выводы.

Во-первых, существует очень интересная связь между магнитными монополями и энергией Казимира. Из аналитического выражения (2.56) следует, что наличие монополей уменьшает плотность энергии Казимира и приводит к быстрому ее уменьшению при удалении пластин друг от друга, то есть потенциал Казимира становится близкодействующим. Данное заключение отлично согласуется с численными расчетами. Но в тоже время граничные условия Казимира оказывают подавляющее действие на монополи между пластинами. Пластины Казимира сжимают поток монополей, по существу делая взаимодействие между монополями двумерным. В двух измерениях это взаимодействие подчиняется удерживающему логарифмическому потенциалу (2.68), что подразумевает объединение монополей и антимонполей в дипольные пары. В данных условиях массовая щель отсутствует, и как следствие не происходит подавления нулевых колебаний между пластинами. Таким образом, образование магнитных диполей приводит к дальнодействию потенциала Казимира. При этом плотность монополей между пластинами существенно ниже чем снаружи. Эта разница между плотностями монополей повышает внешнее давление на пластины и увеличивает потенциал Казимира. То есть с одной стороны конденсат монополей уменьшает потенциал Казимира, но с другой стороны плотность монополей между пластинами снижается, что вызывает дополнительное давление снаружи на пластины, приводя к увеличению потенциала Казимира. Но стоит отметить, что данные рассуждения применимы только в области слабой связи, так как в области сильной связи из-за большой плотности монополей расстояние между ними становится меньше размера пары монополь-антимонполь, и выше описанный механизм уже не реализуется.

Во-вторых, подавление плотности монополей между пластинами сигнализирует об ослаблении удерживающих свойств вакуума между пластинами и фазовом переходе в фазу деконфайнмента. В то время как при нулевой температуре достоверных признаков данного явления обнаружить не удалось, то при конечной температуре эффект отлично отслеживается. Критическая температура фазового перехода конфайнмент-деконфайнмент между пластинами ниже, чем снаружи или в их отсутствии. Схематически данный эффект наглядно показан на отличном рисунке 2.11.

Предположительно, начиная с определенного расстояния между пластинами, вакуум теории всегда находится в фазе деконфайнмента, независимо от

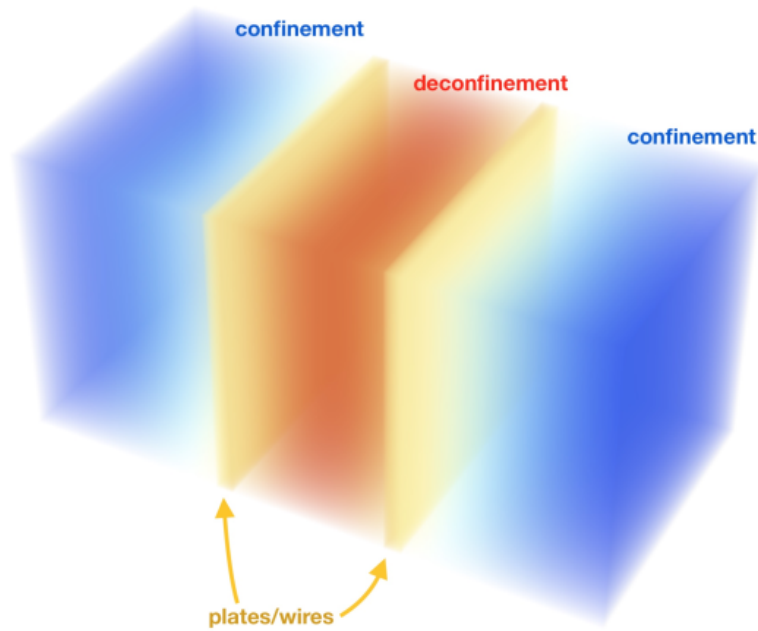


Рисунок 2.11 — Фазовый переход, вызванный граничными условиями Казимира: близко расположенные провода (пластины) приводят к деконфайнменту электрических зарядов в фазе конфайнмента компактной электродинамики. Изображение взято из [48].

температуры, в то время как вне пластин при низких температурах вакуум находится в фазе конфайнмента.

Уместно будет процитировать вывод авторов исследования эффекта Казимира в $(2+1)$ -компактной электродинамике, сделанный в заключительной работе [48] цикла: «Можно заключить, что динамические монополи, линейный конфайнмент и генерация массовой щели с одной стороны и геометрия Казимира с другой как бы противодействуют друг-другу: наличие динамических монополей в вакууме подавляет силу Казимира-Полдера на больших расстояниях за счет генерации массовой щели, но в тоже время, диэлектрические и/или металлические провода снижают среднюю плотность монополей приводя к отсутствию линейного конфайнмента электрических зарядов на больших расстояниях и снижению массовой щели в вакууме между проводами».

Приведенный обзор серии научных работ об эффекте Казимира в $(2+1)$ -компактной электродинамике с одной стороны предоставляет базу для описания влияния граничных условий Казимира на вакуум компактной электродинамики в $3+1$ измерениях, а с другой стороны служит вступлением к описанию влияния данных условий на вакуум теории Янга-Миллса, которая имеет много общего с компактной электродинамикой, в частности обе теории обладают свойством кон-

файнмента и генерации массовой щели. В рамках диссертационной работы был исследован вакуум теории Янга-Миллса с калибровочной группой $SU(3)$ в $3+1$ измерениях, полученные результаты описаны в главе 5 настоящей работы. Но прежде чем перейти к изложению данного материала, полезно будет описать результаты исследования эффекта Казимира в более простой $SU(2)$ глюодинамике в $2+1$ измерениях, опубликованные в работе [50].

2.2 $SU(2)$ глюодинамика в $2+1$ измерениях

Двухцветовая глюодинамика хоть и является более доступной для анализа, чем ее трёхцветовая версия, являющаяся неотъемлемой частью КХД, но тем не менее имеет преимущественно непertурбативную структуру вакуума и слабо поддается аналитическому исследованию. Поэтому для изучения ее вакуумной структуры при наличии нетривиальной топологии (граничных условий Казимира) были применены методы теории поля на решетке, база для применения которых в случае казимировских пластин была заложена исследованием структуры вакуума компактной динамики в двух пространственных измерениях, описанным выше. Данный формализм естественным образом переносится на случай $SU(2)$ калибровочной теории. Её лагранжиан имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a}, \quad (2.87)$$

где тензор поля

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.88)$$

в отличие от электродинамики (2.4), содержит добавочный член, отвечающий за самодействие глюонов. В этом выражении a это цветовой индекс, пробегающий значения $(1, \dots, N_c^2 - 1)$, N_c — число цветов (два в данном случае), f^{abc} — структурные константы калибровочной группы $SU(N_c)$. Граничные условия Казимира представляют собой неабелевый аналог условий (2.30):

$$\varepsilon^{\mu\alpha\beta} n_\mu(x) F_{\alpha\beta}^a(x) = 0, \quad a = 1, \dots, N_c^2 - 1. \quad (2.89)$$

Идеально проводящие хромоэлектрические провода расположены в точках $x_1 = 0, R$, то есть вектор нормали к проводу $n_\mu = \delta_{\mu 1}$.

В вычислениях без учета самодействия можно задать $g = 0$, сводя таким образом теорию Янга-Миллса (2.87) с граничными условиями (2.89) к $N_c^2 - 1$ невзаимодействующим копиям электродинамики (2.2) с граничными условиями (2.30). В данном случае глюоны вносят одинаковый аддитивный вклад в энергию Казимира:

$$V_{\text{Cas}}^{\text{tree}} = -(N_c^2 - 1) \frac{\zeta(3)}{16\pi R^2}. \quad (2.90)$$

В отличие от решеточной формулировки компактной электродинамики с использованием Ли алгебры $\mathfrak{u}(1)$, $\text{SU}(2)$ глюодинамику для решеточных вычислений удобно формулировать в терминах группы $\text{SU}(2)$. В этом случае элемент группы $U_\mu(n)$ соответствует линку решетки в сайте n в направлении μ . Решеточное поле $U_\mu(n)$ и непрерывное поле A_μ^a связаны следующим соотношением:

$$U_\mu(n) \equiv U_\mu(x) = P e^{ig \int_x^{x+a\hat{\mu}} dx^\nu \hat{A}_\nu(x)} \simeq e^{iag\hat{A}_\mu(x)}, \quad (2.91)$$

где $\hat{A}_\mu = T^a A_\mu^a$, а T^a это генераторы неабелевой калибровочной группы, $[T^a, T^b] = 2if^{abc}T^c$. Групповым аналогом плакетной переменной (2.62) является выражение

$$U_P \equiv U_{P_{n,\mu\nu}} = U_{n,\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu} U_{n+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{n,\nu}^\dagger \quad (2.92)$$

в пределе шага решетки $a \rightarrow \infty$ сводящееся к непрерывному тензору поля (2.88).

Действие имеет вид:

$$S[U] \equiv \sum_P S_P = \sum_P = \sum_P \beta_P \left\{ 1 - \frac{1}{2} \text{Tr} U_P \right\}. \quad (2.93)$$

Это стандартное решеточное действие Вилсона, более подробно описанное в главе 2, но в данном случае $\text{Tr} U_P$ в силу свойств $\text{SU}(2)$ матриц является действительной величиной. В отсутствии пластин константа связи $\beta_P \equiv \beta$, где

$$\beta = \frac{4}{g^2} \quad (2.94)$$

стандартная решеточная константа связи. Величина g^2 имеет размерность массы и переходит в константу связи непрерывной теории Янга-Миллса при $a \rightarrow 0$. При наличии пластин величина $\beta_P = \beta$ вне пластин и $\beta_P = \lambda_w \beta$ для плакетов $P_{x,23}$, принадлежащих мировой поверхности проводов (пластин), расположенных в точках $x_1 = 0$ и $x_1 = R$. В пределе $\lambda_w \rightarrow \infty$ тангенциальная компонента

хромоелектрического поля зануляется ($U_{23} \rightarrow 1$ в решеточной формулировке), обеспечивая выполнение граничных условий (2.89). Величина λ_w является аналогом диэлектрической проницаемости ϵ , но для хромоелектрического поля («цветной» диэлектрической проницаемостью). Более подробно граничные условия Казимира в рамках решеточной регуляризации компактной электродинамики и глюодинамики обсуждаются в секции 3.5 главы 3.

Вывод выражения для плотности энергии Казимира аналогичен описанному выводу для компактной электродинамики и проводится на основе компоненты T^{00} тензора энергии-импульса, представляющей собой плотность энергии вакуумных флуктуаций глюонного поля. Тензор энергии-импульса для теории Янга-Миллса, за исключением дополнительного цветового индекса, практически полностью идентичен тензору в компактной электродинамике (2.70):

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha,a} F_a^{\nu,\alpha} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a F^{\alpha\beta,a}. \quad (2.95)$$

Его компонента T^{00} в пространстве Минковского имеет вид:

$$T^{00} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}_z^2 + \mathbf{E}_x^2 + \mathbf{E}_y^2), \quad (2.96)$$

и при метрике $(+, -, -)$ выполняется $E_x^a = F_{01}^a$, $E_y^a = F_{02}^a$ и $B_z^a = -F_{12}^a$, индекс a пробегает значения $a = 1, 2, 3$, и $\mathbf{E}_x^2 \equiv (E_x^a)^2$ и т.д. После перехода к евклидовому пространству путем введения мнимого времени ($t \rightarrow -i\tau$) плотность энергии вакуумных флуктуаций становится равной

$$T^{00} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}_z^2 - \mathbf{E}_x^2 - \mathbf{E}_y^2). \quad (2.97)$$

Как и в компактной электродинамике, в виду симметричности решетки относительно поворота вокруг оси x_1 на угол $\pm\pi/2$, $\langle \mathbf{B}_z^2 \rangle = \langle \mathbf{E}_x^2 \rangle$. Вычитая плотности энергии в присутствии и отсутствии пластин получаем плотность энергии Казимира:

$$\epsilon_R(x) = \langle T_E^{00}(x) \rangle_R - \langle T_E^{00}(x) \rangle_0 \equiv \frac{1}{2} \left(\langle \mathbf{E}_y^2 \rangle_0 - \langle \mathbf{E}_y^2(x) \rangle_R \right). \quad (2.98)$$

Здесь индексы 0 и R обозначают отсутствие и наличие пластин на расстоянии R соответственно. В данном уравнении ультрафиолетовые расходимости сокращаются, и в результате получается конечная величина, отражающее изменение плотности энергии вакуумных флуктуаций при наличии пластин. Данная величина

(2.98) зависит только от координаты x_1 , поэтому, как и при рассмотрении компактной электродинамики, удобно определить плотность энергии Казимира на единицу длины провода:

$$V_{\text{Cas}}^{\text{lat}}(R) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \varepsilon_R(x_1) = -\langle \langle S_{P_{23}} \rangle \rangle, \quad (2.99)$$

где по аналогии с (2.78)

$$\langle \langle S_{P_{23}}(x_1) \rangle \rangle = \sum_{x_1=0}^{L_s-1} [\langle S_{P_{23}}(x_1) \rangle_R - \langle S_{P_{23}} \rangle_0]. \quad (2.100)$$

Полученное выражение (2.99) представляет собой решеточную плотность энергии Казимира для неабелевой калибровочной теории. В физических единицах она выражается как

$$V_{\text{Cas}}(R) \equiv V_{\text{Cas}}^{\text{phys}}(R) = a^{-2} V_{\text{Cas}}^{\text{lat}}(R/a). \quad (2.101)$$

Непрерывный предел $a \rightarrow 0$ реализуется при $\beta \rightarrow \infty$ согласно выражению (2.94), но на практике можно работать только с конечными значениями β , поэтому при экстраполяции нужно учитывать $O(a^n)$ поправки. Для улучшения непрерывного скейлинга выражения (2.99) при конечных β авторами работы [50] было проделано следующее. Во-первых для уменьшения поправок на конечный размер, вместо решеточной константы связи β , была использована улучшенная версия с учетом среднего поля [51]:

$$\beta_I(\beta) = \beta \frac{1}{2} \langle \text{Tr} U_P \rangle(\beta). \quad (2.102)$$

Во-вторых, в физических единицах шаг решетки a был разложен в ряд по $\frac{1}{\beta_I}$ [51]:

$$a\sqrt{\sigma} = \frac{1.341(7)}{\beta_I} - \frac{0.421(51)}{\beta_I^2} + O(1/\beta_I^3), \quad (2.103)$$

где σ это натяжение удерживающей струны при нулевой температуре. В третьих, в решеточной теории возмущений значение среднего плакета $\langle \text{Tr} U_P \rangle$ содержит аддитивные и мультипликативные поправки. Первые из них соответствуют пертурбативному УВ-расходящемуся вкладу в вакуум, но он автоматически убирается выражением (2.100). Мультипликативные поправки возникают из-за того, что средний плакет $\langle \text{Tr} U_P \rangle$ не является физической величиной сам по себе, его ещё нужно домножить на β^4 :

$$\beta^4 \langle \text{Tr} U_{\mu\nu} \rangle \sim a^{-4} \langle \text{Tr} U_{\mu\nu} \rangle \sim \langle F_{\mu\nu}^2 \rangle_{\text{phys}}, \quad (2.104)$$

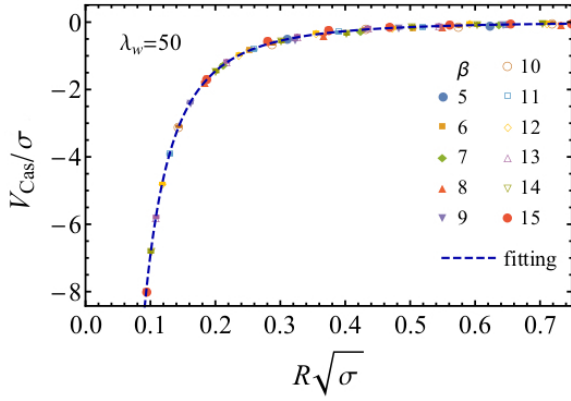


Рисунок 2.12 — Зависимость потенциала Казимира (2.106) от расстояния между практически идеальными проводами ($\lambda_w = 50$) в единицах натяжения струны σ . Изображение взято из [50].

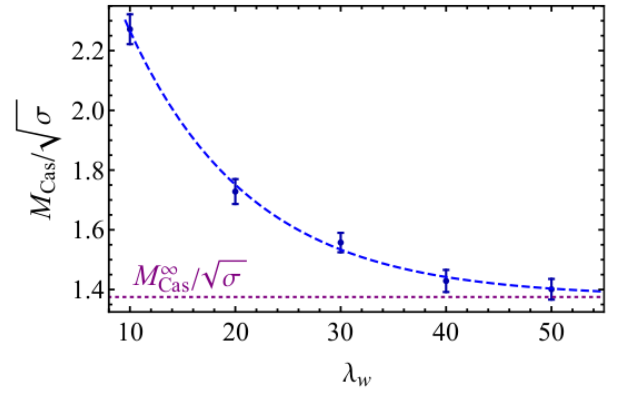


Рисунок 2.13 — Масса Казимира M_{Cas} как функция цветной диэлектрической проницаемости провода λ_w . Пунктирная линия представляет собой фит данных функцией (2.84). Горизонтальная пунктирная линия соответствует значению в пределе $\lambda_w \rightarrow \infty$ (2.109). Изображение взято из [50].

тогда величина (2.104) будет представлять физическое значение непертурбативного глюонного конденсата [52]. Чтобы улучшить конечно-размерный скейлинг, среднее значение плакета было нормализовано с учетом улучшенной константы связи (2.102):

$$\langle \text{Tr} U_{\mu\nu} \rangle \rightarrow \langle \text{Tr} U_{\mu\nu} \rangle_I = \left(\frac{\beta_I}{\beta} \right)^4 \langle \text{Tr} U_{\mu\nu} \rangle. \quad (2.105)$$

Таким образом, выражение для плотности энергии Казимира (2.99) после всех поправок принимает следующий вид:

$$V_{\text{Cas}}(R) = -\frac{1}{a^2(\sigma, \beta)} \left(\frac{\beta_I}{\beta} \right)^4 \langle \langle S_{P_{23}} \rangle \rangle_R^{\text{lat}}. \quad (2.106)$$

В пределе слабой связи $\beta \rightarrow \infty$ данное выражение стремится к (2.99), поскольку мат. ожидание плакета стремится к единице ($\frac{1}{2} \langle \text{Tr} U_P \rangle(\beta) \rightarrow 1$), а улучшенное значение константы связи β_I сходится к β .

На рисунке 2.12 приведены результаты численных расчетов плотности энергии Казимира для различных значений решеточной константы связи β и размеров решеток L . Данные прекрасно укладываются в одну кривую, которая была про-

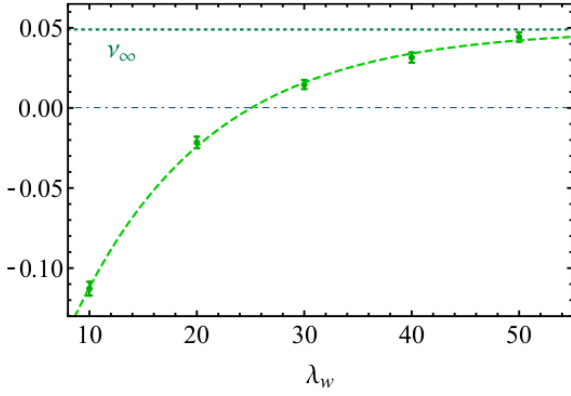


Рисунок 2.14 — Зависимость аномальной размерности ν от проводимости λ_w . Кривая представляет собой фит функцией (2.108), горизонтальный толстый пунктир соответствует аномальной размерности для идеальных проводов ($\lambda_w \rightarrow \infty$), чередующийся пунктир — аномальной размерности в в отсутствии взаимодействий.

Изображение взято из [50].

фиттирована следующей функцией:

$$V_{\text{Cas}}^{\text{fit}}(R) = -\frac{3\zeta(3)}{16\pi} \frac{1}{R^2} \frac{1}{(R\sqrt{\sigma})^\nu} e^{-M_{\text{Cas}}R}. \quad (2.107)$$

Степень σ была выбрана на основе размерного анализа, чтобы величина потенциала Казимира имела правильную размерность масса², так как он соответствует энергии Казимира неабелевых флуктуаций между проводами на единицу длины провода. Параметр ν это аномальная размерность потенциала Казимира на коротких расстояниях. Величина M_{Cas} , названная массой Казимира, соответствует эффективному экранированию потенциала Казимира на больших расстояниях за счет механизма генерации массовой щели, имеющего непертурбативную природу. При отсутствии взаимодействия массовая щель исчезает, $M_{\text{Cas}} = 0$, как и аномальная размерность ν , и потенциал (2.107) сводится к выражению (2.90).

Зависимость массы Казимира M_{Cas} и аномальной размерности ν от степени проводимости λ_w показаны на рисунках 2.13 и 2.14, соответственно.

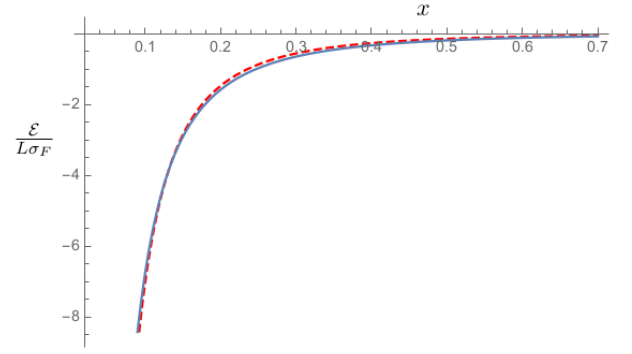


Рисунок 2.15 — Сравнение функций (2.107) (пунктирная линия), описывающей результаты численных симуляций, и выведенной аналитическим (2.117) (сплошная линия) для потенциала Казимира. Изображение взято из [53].

Обе величины отлично описываются функцией:

$$\mathcal{O}(\lambda_w) = \mathcal{O}^\infty + \alpha_{\mathcal{O}} e^{-\lambda_w/\lambda_w^{\mathcal{O}}}, \quad (2.108)$$

где $\mathcal{O} = M_{\text{Cas}}$, ν , $\alpha_{\mathcal{O}}$ и $\lambda_w^{\mathcal{O}}$ — параметры фита, $\mathcal{O}^\infty \equiv \lim_{\lambda_w \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\lambda_w)$.

Значение массы Казимира M_{Cas} в пределе идеального проводника $\lambda_w \rightarrow \infty$ равно

$$M_{\text{Cas}} = 1.38(3)\sqrt{\sigma}, \quad (2.109)$$

что в несколько раз ниже массы самого легкого глюбола в SU(2) (2+1)-мерной калибровочной теории:

$$M_{0++} \approx 4.7\sqrt{\sigma}. \quad (2.110)$$

Как можно видеть из рисунка 2.13, масса Казимира M_{Cas} убывает с ростом λ_w . В тоже самое время, это свидетельствует о том, что при $\lambda_w \rightarrow 1$ (провода отсутствуют) данное значение может приближаться к массе глюбола (2.110). Но простая форма фиттирующей функции (2.108) не позволяет проверить это предположение.

Экстраполяция (2.108) в пределе $\lambda_w \rightarrow \infty$ (рис. 2.14) дает следующее близкое к нулю значение аномальной размерности ν :

$$\nu_\infty = 0.05(2). \quad (2.111)$$

Интерпретация массы Казимира как массы нового граничного связанного состояния глюонов дана в главе 5 на основе анализа энергии Казимира в 3+1 измерениях. Другую интерпретацию предлагают авторы работы [53], в которой масса Казимира связывается с магнитной экранирующей массой в (3+1)-калибровочной теории при высоких температурах. В своей работе они продемонстрировали, что аналогично случаю компактной электродинамики, где был произведен аналитический вывод вклада монополей в энергию Казимира с помощью перехода к скалярному полю, представляющему газ монополей (2.22) (модель синус-Гордона), в неабелевой калибровочной теории энергия Казимира может быть отождествлена с энергией Казимира для скалярного поля. В таком случае она выражается через степени e^{-2mR} :

$$\varepsilon = -\dim G \frac{L}{16\pi R^2} \left[2mR \text{Li}_2(e^{-2mR}) + \text{Li}_3(e^{-2mR}) \right], \quad (2.112)$$

где m это масса скалярного поля между пластинами, $\dim G$ — размерность калибровочной группы, а $\text{Li}_s(w)$ это полилогарифмическая функция

$$\text{Li}_s(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n^s}. \quad (2.113)$$

Данную энергию можно записать через натяжение струны, соответствующее фундаментальному представлению

$$\sigma_F = e^4 \frac{c_A c_F}{4\pi}, \quad (2.114)$$

где c_A и c_F это значения квадратичного оператора Казимира в присоединенном и фундаментальном представлениях соответственно, которые в случае группы $SU(N_c)$ равны

$$c_A = N_c, \quad c_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}. \quad (2.115)$$

Используя соотношение $mR = \sqrt{c_A/\pi c_F} x$, $x = R\sqrt{\sigma_F}$, получаем:

$$V_{\text{Cas}}^{\text{th}} \equiv \frac{\varepsilon}{L\sigma_F} = -\frac{\dim G}{16\pi} \left[\frac{2\sqrt{c_A/\pi c_F}}{x} \text{Li}_2 \left(e^{-2\sqrt{c_A/\pi c_F} x} \right) + \frac{1}{x^2} \text{Li}_3 \left(e^{-2\sqrt{c_A/\pi c_F} x} \right) \right]. \quad (2.116)$$

Для рассматриваемого в настоящем пункте случая $N_c = 2$, выражение (2.116) принимает вид:

$$\frac{\varepsilon}{L\sigma_F} = -A \frac{\dim G}{16\pi} \left[\frac{1.84}{x} \text{Li}_2 \left(e^{-1.84x} \right) + \frac{1}{x^2} \text{Li}_3 \left(e^{-1.84x} \right) \right], \quad (2.117)$$

где A это параметр фита. Сравнение функций (2.107) и (2.117) приведено на рисунке 2.15. Из рисунка видно, что аналитическое выражение (2.117) прекрасно описывает результаты решеточных симуляций. Тем не менее, выражения предсказывают различные значения массы Казимира, в случае (2.117) она равна $\approx 0.92\sqrt{\sigma}$, хотя это значение так же существенно меньше массы глюоболла (2.110). Обе формулы (2.116) (в пределе $m \rightarrow 0$) и (2.107) (в пределе $M_{\text{Cas}} \rightarrow 0$ и $v \rightarrow 0$) корректно воспроизводят случай отсутствия самодействия глюонов (2.90) (безмассового скалярного поля в дуальной формулировке теории).

В связи с тем, что аналитическое выражение (2.116) описывает потенциал Казимира для произвольной $SU(N_c)$ калибровочной группы, интересным представляется сопоставление с ним результатов численных симуляций для других

групп, в первую очередь SU(3). Такая работа была проделана автором, но на момент подготовки диссертации не была опубликована, но тем не менее автор считает важным привести здесь результаты для более полного раскрытия темы. Обработка численных результатов была проведена описанным выше образом. Была использована улучшенная решеточная константа связи (2.102), а шаг решетки был разложен в ряд по подобию (2.103):

$$a\sqrt{\sigma} = \frac{3.318(12)}{\beta_I} - \frac{2.43(22)}{\beta_I^2} + O(1/\beta_I^3). \quad (2.118)$$

На рисунке 2.16 представлено сравнение исходных данных с улучшенными данными с помощью указанных преобразований. Видно, что данные преобразования

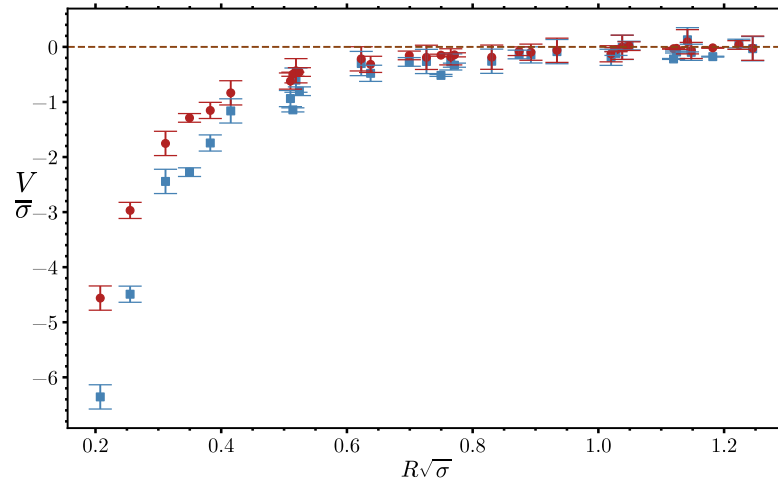


Рисунок 2.16 — Сравнение исходных данных для потенциала Казимира (синие квадраты) и улучшенных (красные окружности).

существенно улучшают потенциал. Улучшенные данные были профиттированы феноменологической функцией (2.107), которая в случае $N_c = 3$ имеет вид:

$$V_{\text{Cas}}(R) = -\frac{\zeta(3)}{2\pi} \frac{1}{R^2} \frac{1}{(R\sqrt{\sigma})^\nu} e^{-M_{\text{Cas}}}. \quad (2.119)$$

Помимо этого, фит был сделан аналитической функцией (2.116), которая для группы SU(3) принимает вид

$$\frac{\varepsilon}{L\sigma_F} = -A \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1.69}{x} \text{Li}_2(e^{-1.69x}) + \frac{1}{x^2} \text{Li}_3(e^{-1.69x}) \right]. \quad (2.120)$$

Результаты фиттирования данными функциями представлены на рисунке 2.17. Из данного рисунка можно сделать вывод, что обе функции достаточно точно описывают данные, но аналитическое выражение (2.120) дает некоторые расхождения

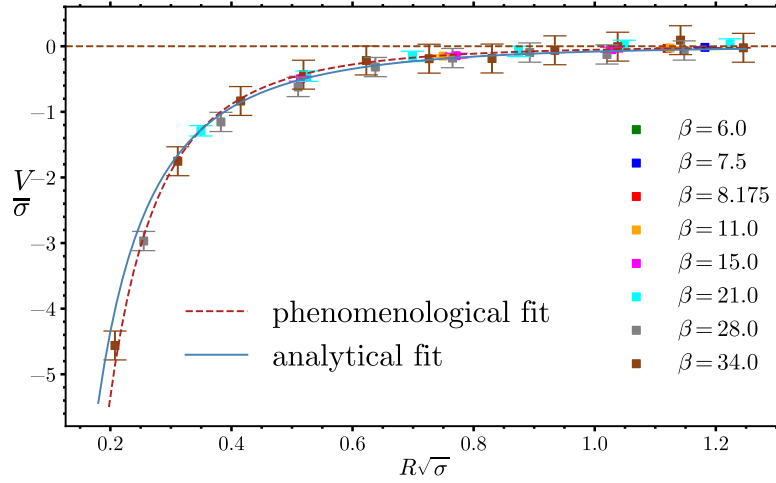


Рисунок 2.17 — Сравнение феноменологической (красный пунктир) и аналитической (синяя сплошная) функций, описывающих решеточные данные в SU(3) теории.

с наблюдаемыми данными для малых физических расстояний. Масса Казимира M_{Cas} в выражении (2.119) равна

$$M_{\text{Cas}} = 1.27(3)\sqrt{\sigma}, \quad (2.121)$$

что также существенно меньше массы глюболла

$$M_{0++} \approx 4.36\sqrt{\sigma}. \quad (2.122)$$

Как и в случае SU(2), масса Казимира из аналитического выражения (2.120) отличается от массы, полученной из фита (2.119):

$$M_{\text{Cas}}^{\text{an}} \approx 0.846\sqrt{\sigma}. \quad (2.123)$$

Но это может быть следствием различной формы функций (2.119) и (2.120). Аномальная размерность ν в случае SU(3) проявляется сильнее, чем для SU(2):

$$\nu = 0.226(11). \quad (2.124)$$

Отдельно стоит отметить значение коэффициента A в аналитической функции (2.120), который получился равным $A = 0.989(19)$, что, как и в случае SU(2), также очень близко к единице. Анализ потенциала Казимира в калибровочной SU(3) теории дает уверенность в корректном выборе феноменологической функции (2.107) для его описания — SU(2) как и SU(3) теория характеризуется новым массовым масштабом, который существенно меньше массы самого легкого глюболла, а также наличием аномальной размерности, которая оказывает влияние на

поведение потенциала Казимира на малых расстояниях между проводами. Помимо этого можно сделать вывод, что аналитическое выражение (2.116) хорошо описывает данные и для трех цветов, что дает основания полагать его корректность и в общем $SU(N_c)$ случае. Но желательна его экспериментальная проверка для $N_c > 3$.

Как видно из обзора КЭД, в вакууме теории между близко расположенными пластинами имеются признаки перестройки вакуума в фазу деконфайнмента. И если при нулевой температуре можно говорить только о косвенных признаках, то при конечной температуре эффект подтверждается численными симуляциями. Аналогичная тенденция наблюдается в теориях Янга-Миллса. На момент подготовки диссертации, автору известно только о двух работах в данной области, одна из них это [50], на основе которой написан обзор результатов для $SU(2)$ теории в $2+1$ измерениях, а другая по $SU(3)$ теории в $3+1$ измерениях подготовлена автором совместно с авторами предыдущей работы, она будет подробно рассмотрена в главе 5. В обеих работах проводилось исследование теории при нулевой температуре, где в отсутствии границ фазовый переход конфайнмент-деконфайнмент не наблюдается, вакуум теории всегда находится в фазе конфайнмента. В этом случае интересным для изучения представляется влияние близко расположенных пластин на фазовую структуру теории. Как уже было сказано, параметром порядка, позволяющим отличить удерживающую и свободную фазу теории, является петля Полякова. Для $SU(2)$ теории в двух пространственных измерениях она принимает вид:

$$L_x \equiv L(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \text{Tr} \prod_{x_3=0}^{L_t-1} U_3(x_1, x_2, x_3). \quad (2.125)$$

При нулевой температуре $L_t = L_s$, и петля Полякова вычисляется вдоль длинного временного направления, в то время как при конечной температуре $L_t \ll L_s$, и петля Полякова направлена вдоль короткого компактного времени. В этом заключается разница между казимировской геометрией и теорией при конечной температуре. На рисунке 2.18 показано ожидание модуля петли Полякова вне и между пластинами для произвольного значения решеточной константы связи β и высокой проводимости пластин λ_w . Такое поведение наблюдается для всех комбинаций данных параметров. При уменьшении расстояния между пластинами петля Полякова возрастает, что свидетельствует о наступлении

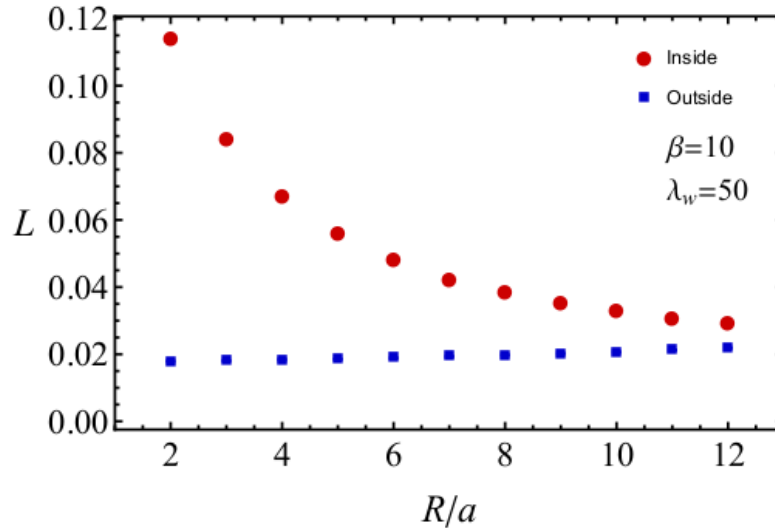


Рисунок 2.18 — Мат. ожидание модуля петли Полякова внутри и снаружи проводов как функция расстояния между ними в решеточных единицах. Изображение взято из [50].

деконфайнмента между пластинами. Однако, каких либо признаков критического поведения петли Полякова между пластинами обнаружено не было. Таким образом, глюоны между пластинами становятся свободными, а переход между фазами конфайнмента и деконфайнмента имеет, по всей видимости, характер гладкого некритического кроссовера или перехода бесконечного порядка по типу Березинского-Костерлица-Таулесса [12; 54; 55].

Подытоживая обзор влияния казимировских граничных условий на структуру вакуума теории Янга-Миллса с калибровочной группой $SU(2)$ в двух пространственных измерениях, можно отметить несколько важных моментов. Во-первых, на больших расстояниях между проводами (пластинами), взаимодействие Казимира является экспоненциально убывающей функцией от расстояния между пластинами. Инфракрасное затухание потенциала Казимира характеризуется массой Казимира, которая существенно меньше самого легкого глюбола теории. По мере того, как хромометаллические провода становятся менее проводящими ($\lambda_w \rightarrow 1$), масса Казимира повышается, предположительно приближаясь к массе глюбола. Во-вторых, на небольших расстояниях между пластинами взаимодействие Казимира немного отличается от канонического взаимодействия (2.90) за счет появления небольшой аномальной размерности. В-третьих, исследование удерживающих свойств вакуума указывает на плавный фазовый переход глюонных полей в фазу деконфайнмента между пластинами. Относительно низкое значение массы Казимира может быть результатом постепенного перехода

в фазу деконфайнмента в уменьшающейся конечной геометрии, что ослабляет образование массовой щели при нулевой температуре.

2.3 Выводы

Важно отметить, что в двух пространственных измерениях ещё есть возможность исследовать непертурбативные свойства вакуума аналитически. Как и в случае компактной электродинамики, так и теории Янга-Миллса это достигается с помощью перехода к дуальной формулировке теории в терминах скалярного поля. Наблюдается отличное согласие теоретических выводов и результатов численных симуляций, полученных в рамках расчетов в решеточной регуляризации теории поля. Это дает возможность применять решеточные методы для исследования свойств вакуума в трех пространственных измерениях при наличии границ, где из-за его непертурбативной природы аналитические методы уже не применимы. Результаты такого исследования приведены в главах 4 и 5. В следующей главе будет дано описание метода решеточной регуляризации теории поля, сформулированы граничные условия в рамках решеточного подхода и описаны методы численных симуляций.

Глава 3. Решеточная регуляризация квантовой теории поля

Вакуумы в теориях с нетривиальной топологией имеют непертурбативную природу, в следствие чего традиционные методы теории возмущений оказываются слабо эффективны для их изучения. Одним из подходов, позволяющим успешно работать с непертурбативными явлениями, является метод решеточной регуляризации пространства-времени, который, с одной стороны позволяет провести обрезание ультрафиолетовых расходимостей путем введения дискретной пространственно-временной решетки, а с другой, благодаря переходу из пространства Минковского к евклидовому, дает возможность применять методы статистической физики с помощью введения статистической суммы, представляющей собой интеграл по траекториям от различных физических полей [56].

Для аналитического вычисления подобного интеграла необходимо просуммировать по всему конфигурационному пространству, что является неосуществимой задачей. Поэтому для оценки таких интегралов по решетке широко применяются численные методы Монте Карло, суть которых заключается в аппроксимации точного значения путем усреднения по определенной выборке из пространства конфигураций. Важным достоинством методов Монте Карло является независимость ошибки аппроксимации от размерности пространства интегрирования – ошибка обратно пропорциональна квадратному корню из размера выборки, что позволяет оценить ее с произвольной точностью [57]. С помощью методов Монте Карло можно осуществить численное моделирование квантовой теории поля в решеточной формулировке путем программирования расчетов и их выполнения на суперкомпьютерах, и затем, взяв предел при устремлении шага решетки к нулю и размера решетки к бесконечности, получить искомые величины в физических единицах [58].

3.1 Переход от пространства Минковского к евклидовому пространству

Первым шагом в формулировке решеточной калибровочной теории является переход от искривленного пространства-времени Минковского к плоскому пространству Евклида. Это делается для получения возможности численно вы-

числять интегралы по траекториям. Рассмотрим производящий функционал калибровочного поля

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS_G}. \quad (3.1)$$

После перехода к мнимому времени с помощью преобразования $t \rightarrow it$ мнимость в экспоненте уходит и мы получаем выражение для функционала, аналогичное статистической сумме:

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu e^{-S_G}, \quad (3.2)$$

что позволяет оценить его численно с помощью решеточных вычислений.

3.2 Переход от непрерывного пространства к дискретной решетке

Вторым шагом в построении решеточной калибровочной теории является дискретизация пространства путем построения пространственно-временной дискретной решетки Λ (рисунок 3.1a). Она определяется как множество точек пространства с координатами

$$x_\mu = an_\mu, \quad n_\mu = (n_x, n_y, n_z, n_t), \quad n_i \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Точки x_μ называются узлами или сайтами решетки. Размерная константа a называется шагом решетки и обычно все величины измеряются единицах a . Два соседних узла на решетки связаны ребром l , которое задается координатой x его начала и направлением μ в пространстве:

$$l = \{x, \mu\}. \quad (3.4)$$

Ребро l связывает узлы с координатами x и $x + a\hat{\mu}$, где $\hat{\mu}$ это единичный вектор в направлении μ . Длины всех ребер берутся одинаковыми и равными значению шага решетки a . Квадрат, образованный четырьмя ребрами, называется плакетом $P_{x, \mu\mu}$.

Если пространственный размер решетки не ограничен, то число динамических степеней свободы бесконечно (но счетно). Вычисления методом Монте-Карло можно проводить только с конечным числом степеней свободы. Для их

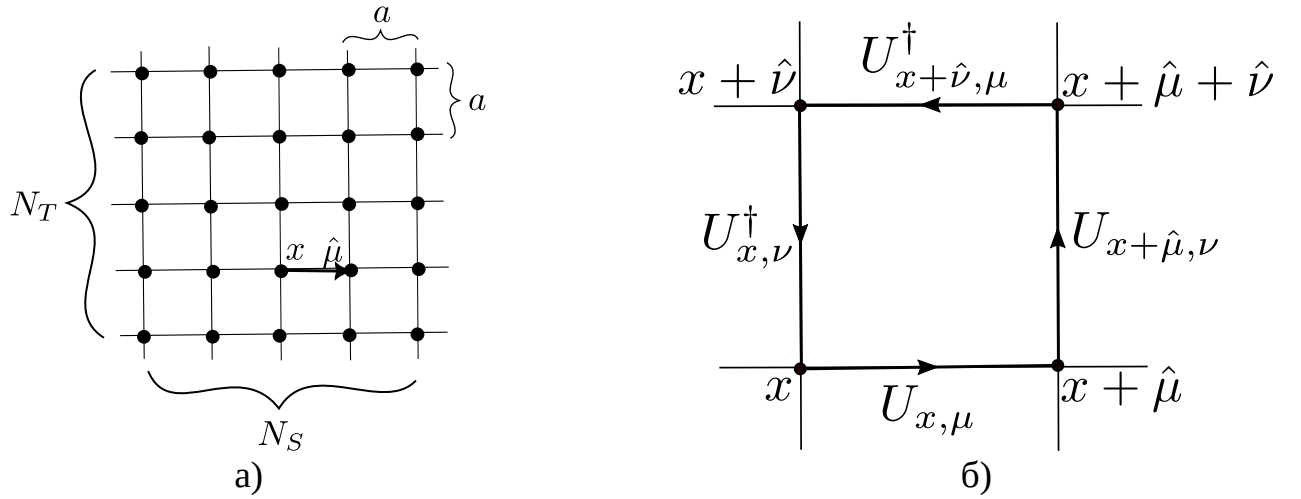


Рисунок 3.1 — (а) – схематическое изображение решетки, (б) – плакетная переменная.

ограничения рассматривается решетка конечного по всем направлениям размера $L_x \times L_y \times L_z \times L_t$, где $L_\mu = aN_\mu$. Обычно выбирается симметричная решетка по пространственным направлениям, а выбор размера временного направления зависит от того, при какой температуре рассматривается теория – для нулевой температуры пространственный размер N_S равен временному размеру N_T , а для конечной температуры $N_T \ll N_S$. При этом накладываются периодические граничные условия, то есть узлы, лежащие на параллельных ограничивающих гиперплоскостях, попарно отождествляются.

Калибровочные поля $U_{x,\mu}$ располагаются на линках решетки и являются элементами калибровочной группы. Калибровочной группой электродинамики является $U(1)$ группа, состоящая из комплексных чисел с единичным модулем. Калибровочной группой глюодинамики является группа $SU(N_c)$, где N_c это число цветов.

Плакетная переменная $U_{\mu\nu}$ показана на рисунке 3.16 и представляет собой произведение соответствующих групповых элементов:

$$U_{x,\mu\nu} = U_{x,\mu} U_{x+\hat{\mu},\nu} U_{x+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{x,\nu}^\dagger. \quad (3.5)$$

где при движении в отрицательном направлении $-\mu$ в общем случае берется эрмитово сопряжение линк-элемента, что для одного комплексного числа равносильно его комплексному сопряжению. Плакетная переменная $U_{\mu\nu}$ имеет смысл решеточного электромагнитного тензора и связана непрерывным тензором соотношением

$$U_{x,\mu\nu} = \exp[ia^2 F_{\mu\nu}(x) + O(a^3)], \quad (3.6)$$

которое можно получить, используя формулу Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа для произведения экспонент матриц [57].

При составлении решеточного действия необходимо, чтобы выполнялось условие его перехода к непрерывному действию

$$S_G = \frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}^2 d^4x. \quad (3.7)$$

Так же действие должно быть калибровочно инвариантным. Данным требованиям удовлетворяет бесконечно много решеточных действий, но наиболее удобное было предложено Вильсоном:

$$S = \frac{\beta}{N_c} \sum_{x \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \text{Re tr}[\mathbb{1} - U_{x,\mu\nu}], \quad (3.8)$$

где $\beta = 2N_c/g^2$ это решеточная константа связи. Для численных симуляций часто удобно его переписать в следующем виде:

$$S = \beta \sum_P (1 - \mathcal{P}), \quad \mathcal{P}_P = \frac{1}{N_c} \text{Re tr } U_P, \quad P \equiv P_{x,\mu\nu} = \{x, \mu\nu\}, \quad (3.9)$$

где U_P соответствует выражению (3.5).

В случае компактной электродинамики действие (3.8) принимает вид:

$$S = \beta \sum_{x \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \text{Re}(1 - U_{x,\mu\nu}), \quad (3.10)$$

Компактную электродинамику зачастую удобнее формулировать в терминах алгебры, а не группы, поэтому в следующей секции будет рассмотрена такая формулировка.

3.3 Формулировка U(1) калибровочной теории на решетке

Компактная U(1) калибровочная теория описывает динамику решеточного калибровочного (фотонного) поля $\theta_{x,\mu} \in [-\pi, +\pi)$, которое определено на линках решетки $l = x, \mu$, исходящих из точки x в направлении μ . В непрерывном пределе, $a \rightarrow 0$, решеточное поле $\theta_{x,\mu} = aA_\mu(x)$ связано с непрерывным калибровочным полем $A_\mu(x)$ шагом решетки a . Роль решеточного аналога тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ играет плакетный угол

$$\theta_{P_{x,\mu\nu}} = \theta_{x,\mu} + \theta_{x+\hat{\mu},\nu} - \theta_{x+\hat{\nu},\mu} - \theta_{x,\nu}, \quad (3.11)$$

построенный из полевых переменных $\theta_{x,\mu}$. Каждый плакет $P \equiv P_{x,\mu\nu}$ определяется позицией x и двумя векторами в плакетной плоскости, $\mu < \nu$, где индексы нумеруют оси $\mu, \nu = 1, \dots, 4$. Индексы $\mu = 1, 2, 3$ соответствуют пространственным направлениям, а $\mu = 4$ - мнимому евклидову времени

В непрерывном пределе плакетный угол (3.11) сводится к своему непрерывному аналогу $\theta_{P_{x,\mu\nu}} = a^2 F_{\mu\nu}(x) + O(a^4)$ для пертурбативных флуктуаций фотонного поля. Помимо пертурбативных флуктуаций, в модели так же присутствуют топологические конфигурации калибровочного поля (абелевы монополи), которые соответствуют большим вариациям решеточного калибровочного поля $\theta_{x,\mu} \sim 1$. В непрерывном пределе данные конфигурации являются сингулярными.

Решеточное действие модели

$$S[\theta] = \beta \sum_P (1 - \cos \theta_P) \quad (3.12)$$

задается путем суммирования по всем элементарным решеточным плакетам P . Для конфигураций без монополей решеточное действие (3.12) переходит в стандартное фотонное действие при $\beta = 4/e^2$, где e это электрический заряд. При наличии абелевых монополей, непрерывное действие принимает более сложную форму из-за включения в него сингулярных листов Дирака, прикрепленных к мировым линиям абелевых монополей [47].

Модель (3.11) называется компактной моделью, потому что абелева калибровочная группа теории соответствует компактному многообразию S^1 . Действие инвариантно относительно дискретных сдвигов плакетной переменной $\theta_P \rightarrow \theta_P + 2\pi n_P$, где $n_P \in \mathbb{Z}$.

3.4 Магнитные монополи на решетке

Компактность модели естественным образом приводит к возникновению сингулярных конфигураций калибровочного поля, абелевых монополей. В непрерывном пределе сдвиги на 2π , относительно которых решеточное действие (3.12) инвариантно, соответствуют физически ненаблюдаемым листам Дирака (то есть мировым линиям струн Дирака, исходящих из монополей). Открытые концы струн Дирака соответствуют траекториям абелевых монополей, которые являются физическими, калибровочно-инвариантными топологическими дефектами.

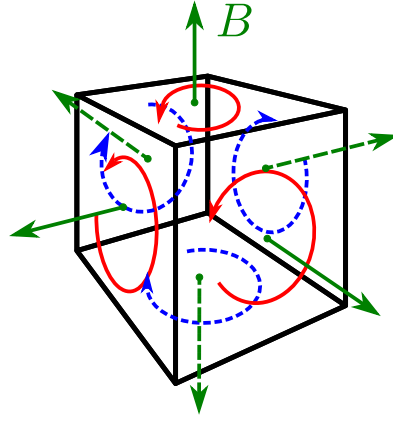


Рисунок 3.2 — Схематическое изображение магнитного заряда на решетке.

В компактной (3+1)-электродинамике монополи представляют собой частице-подобные объекты. На решетке монополярный ток $J_{x,\mu}$ может быть определен через дивергенцию физической части

$$\bar{\theta}_P = \theta_P + 2\pi k_P \in [-\pi, \pi), \quad k_P \in \mathbb{Z} \quad (3.13)$$

решеточного налога тензора электромагнитного поля θ_P . Траектория монополей соответствует набору трехмерных кубов $C_{x,\mu}$, содержащих ненулевой магнитный заряд, $j_{x,\mu} \neq 0$:

$$j_{x,\mu} = \frac{1}{2\pi} \sum_{P \in \partial C_{x,\mu}} (-1)^P \bar{\theta}_P \in \mathbb{Z}. \quad (3.14)$$

В данном выражении сумма берется по всем элементарным плакетам, составляющим грани куба $C_{x,\mu}$, а индекс μ , обозначающий локальное направление монополярного тока, является перпендикулярным трем осям, на которых расположен куб $C_{x,\mu}$. Множитель $(-1)^P$ введен для учета ориентации плакета. Вычисление магнитного заряда на решетке схематически изображено на рисунке 3.2. Например, если $j_{x,4} \neq 0$, то соответствующий трехмерный куб является пространственным кубом, содержащим статичный сегмент монополярной траектории.

В непрерывном пределе сумма (3.14) переходит в дивергенцию магнитного поля, и для сингулярных конфигураций поля происходит нарушение тождеств Бьянки, $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} \neq 0$. Выше описанный способ вычисления монополей на решетке впервые был опубликован в работе [59]. Монополярная траектория (3.14) образует замкнутую петлю, определенную на дуальной гиперкубической решетке [60].

Определим глобальную монопольную плотность

$$\rho = \frac{1}{\text{Vol}_4} \sum_{x,\mu} |j_{x,\mu}|, \quad (3.15)$$

где сумма производится по определенному четырехмерному объему решетки. Данная наблюдаемая была посчитана как для всей решетки, так и для объема внутри казимировских пластин, результаты описаны в главе 4.

В решеточных калибровочных теориях с абелевыми монополями связывают явление конфайнмента заряда, которое связано с невылетанием цвета в неабелевых калибровочных теориях, таких как КХД [60—62]. Конденсат монополей в абелевой калибровочной теории приводит к линейному конфайнменту электрических зарядов путем заключения электрического потока от электрических зарядов в тонкие электрические трубки, которые играют роль удерживающих струн. Поскольку струна представляет собой линейный объект с постоянной плотностью энергии σ на единицу длины, то увеличение расстояния R между частицей и античастицей приводит к линейному росту потенциала $V(R) \simeq \sigma R$. Параметр σ имеет смысл натяжения струны.

Данный механизм конфайнмента аналогичен (и дуален) формированию вихрей Абрикосова в сверхпроводниках, где электрически заряженный конденсат куперовских пар электронов заключает магнитный поток в тонкие вихри. Если поместить пару монополь-антимонгополь в сверхпроводник, она будет подвержена конфайнменту за счет возникновения вихря Абрикосова между ее составляющими. Механизм конфайнмента, основанный на конденсате монополей часто называется механизмом дуального сверхпроводника [61; 62].

3.5 Казимировские условия на решетке

В общем случае, для $(3+1)$ измерения, граничные условия Казимира определяются для трехмерных физических материалов, обладающих двумерными поверхностями. Если поверхность состоит из идеального металла, тогда две тангенциальные компоненты электрического поля и нормальная компонента магнитного поля зануляются. Данные граничные условия в ковариантной форме

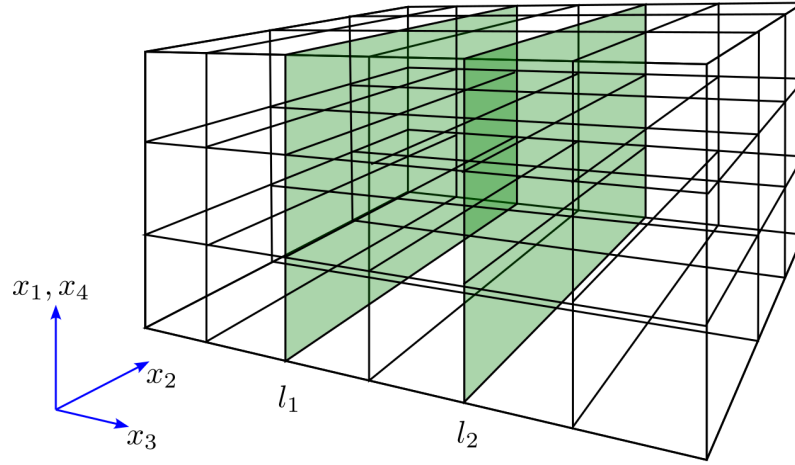


Рисунок 3.3 — Размещение двух параллельных поверхностей Казимира на решетке.

могут быть записаны следующим образом:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\nu\lambda}(x) v_{\sigma}(x) = 0, \quad \mu = 1, \dots, 4, \quad (3.16)$$

где

$$v_{\mu}(x) = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \int d^3\xi \frac{\partial \bar{x}^{\nu}}{\partial \xi_1} \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \bar{x}^{\sigma}}{\partial \xi_3} \delta^{(4)}(x - \bar{x}(\vec{\xi})), \quad (3.17)$$

это дуальный элемент объема мирового листа поверхности. Последняя задается векторной функцией $\bar{x}^{\mu} = \bar{x}^{\mu}(\vec{\xi})$ от трехмерного вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Рассмотрим две плоских статичных поверхности перпендекулярные оси x_1 , расположенные в точках $x_1 = l_1$ и $x_1 = l_2$, как показано на рисунке 3.3.

для каждой поверхности, локальный элемент объема, соответствующий 3.17, задается следующей формулой:

$$v_{\mu}(x) = \delta_{\mu,1} \delta(x_1 - l_a), \quad a = 1, 2, \quad (3.18)$$

где параметр a обозначает поверхности.

Для вывода вышеприведенной формулы можно воспользоваться следующей параметризацией a -ой поверхности: $\bar{x}_a^{\mu} = (l_a, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$. В таком случае, ковариантные условия (3.16) сводятся к трем условиям, которые включают нормальную компоненту магнитного поля и две тангенциальных компоненты элек-

трического поля соответственно:

$$B_1 \equiv F^{23}(x) \Big|_{x_1=l_a} = 0, \quad (3.19)$$

$$E_2 \equiv F^{24}(x) \Big|_{x_1=l_a} = 0, \quad (3.20)$$

$$E_3 \equiv F^{34}(x) \Big|_{x_1=l_a} = 0. \quad (3.21)$$

Из определения решеточного тензора (3.11) и его физической части (3.13) получаем следующие граничные условия [47; 63]:

$$\cos \theta_{x,\mu\nu} \Big|_{x_1=l_a} = 1, \quad (\mu, \nu) = (23, 24, 34), \quad (3.22)$$

для всех (x_2, x_3, x_4) и фиксированного $x_1 = l_a$ ($a = 1, 2$).

Наиболее простым способом применения данных граничных условий в формализме интеграла по траекториям является добавление множителей Лагранжа к стандартному действию (3.12):

$$S_\varepsilon[\theta] = \sum_P \beta_P(\varepsilon) \cos \theta_P. \quad (3.23)$$

Далее рассмотрим решеточную константу связи как функцию от диэлектрической проницаемости ε пластин Казимира:

$$\beta_P(\varepsilon) = \beta[1 + (\varepsilon - 1)\delta_{P,\mathcal{V}}], \quad (3.24)$$

Здесь \mathcal{V} обозначает множество плакетов $P_{x,\mu\nu}$, принадлежащих мировому объему пластин. При $\varepsilon = 1$ пластины отсутствуют, в то время как в пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$ компоненты физической части тензора (3.13) исчезают на мировом объеме пластин, то есть выполняются граничные условия (3.22).

Данный метод реализации граничных условий Казимира для компактной электродинамики очень просто обобщить для теории Янга-Миллса с калибровочной группой $SU(N_c)$. В таком случае появляется дополнительный индекс глюонного поля $a = 1, \dots, N^2 - 1$, учитывающий цветовые комбинации, в остальных граничные условия не отличаются от условий (3.21):

$$E_{\parallel}^{(a)}(x) \Big|_{x \in S} = B_{\perp}^{(a)}(x) \Big|_{x \in S} = 0. \quad (3.25)$$

На решетке, как и в случае компактной электродинамики, они выполняются путем введения локальной константы связи $\beta \rightarrow \beta_P$, где $\beta_P = \lambda\beta$ если плакет P касается или принадлежит гиперповерхности, образованной поверхностью S , и $\beta_P = \beta$ в остальных случаях. Величина λ играет роль множителя Лагранжа, данный множитель в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ гарантирует выполнение граничных условий (3.25).

Приведенный способ задания на решетке граничных условий Казимира далеко не единственный. Впервые эта проблема была рассмотрена О. Павловским и М. Улыбышевым в серии статей, посвященных исследованию эффекта Казимира в компактной и некомпактной электродинамике [64—66]. В них авторы для введения граничных условий добавляют в стандартное действие дополнительный член Черна-Саймонса, локализованный на трехмерной поверхности S :

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} \oint d^3s \varepsilon^{\sigma\mu\nu\rho} n_\sigma A_\mu(x) F_{\nu\rho}(x), \quad (3.26)$$

где $\varepsilon^{\sigma\mu\nu\rho}$ это символ Леви-Чивиты, n_σ это вектор нормали к граничной поверхности S , а λ является действительным параметром.

В случае, когда поверхность S представляет собой две параллельные пластины, расположенные друг от друга на расстоянии R , то действие (3.26) переходит в

$$S = \frac{\lambda}{2} \int ((\delta(x_3) - \delta(x_3 - R)) \varepsilon^{3\mu\nu\rho} A_\mu(x) F_{\nu\rho}(x) d^4x, \quad (3.27)$$

где векторы нормали к плоскостям противоположно направлены. При небольших значениях параметра λ пластины не оказывают влияния на электромагнитные поля, но с ростом λ ситуация меняется. Динамика полей на пластинах определяется действием Черна-Саймонса (3.27). Проварьировав действие, получим следующее уравнение движения:

$$\square A^\mu + \lambda(\delta(x_3) - \delta(x_3 - R)) \varepsilon^{3\sigma\nu\rho} A_\sigma \partial_\nu A_\rho = 0. \quad (3.28)$$

При устремлении $\lambda \rightarrow \infty$ получаем граничные условия на пластинах:

$$E_\perp \Big|_S = 0, \quad B_\parallel \Big|_S = 0. \quad (3.29)$$

Данные условия реализуют идеальный магнитный проводник и приводят к занулению потока электромагнитного поля через пластины, поэтому они полностью эквивалентны (3.21), которые использовались в исследованиях в рамках настоящей диссертации. На решетке граничные условия (3.29) реализуются путем введения нетривиальной конструкции, «мешка Вильсона», подробно описанной в работах [64; 66].

Глава 4. Влияние граничных условий Казимира на структуру вакуума компактной КЭД в 3+1 измерениях

В данной главе будет рассмотрено влияние эффекта Казимира на структуру вакуума компактной электродинамики. Все численные симуляции были проведены на решетке 24^4 , соответствующей нулевой температуре компактной U(1) калибровочной теории. Для генерации конфигураций использовался алгоритм тепловой бани [57; 67]. Для каждой точки, характеризующейся калибровочной константой связи β и расстоянием R между пластинами, было сгенерировано 7.5×10^5 траекторий, первые 10^5 из которых были отброшены для достижения термализации.

4.1 Плотность монополей при отсутствии поверхностей Казимира

Известно, что в U(1) калибровочной теории в области сильной связи, что соответствует $\beta \lesssim 1$, траектория монополей образует плотный перколирующий кластер [68]. Данный кластер соответствует конденсату монополей, который, согласно сценарию дуального сверхпроводника, ответственен за конфайнмент пробных электрических зарядов. Свойство перколяции предполагает, что любые две точки пространства обладают ненулевой вероятностью быть связанными монополярной траекторией.

В области слабой связи, при $\beta \gtrsim 1$, перколяционный кластер распадается, из чего можно сделать вывод об исчезновении монополярного конденсата, и, как в следствии, конфайнмента. Область сильной связи с наличием фазы конфайнмента и область слабой связи с фазой деконфайнмента разделены фазовым переходом первого рода [69; 70]. Несмотря на то, что перколяционные свойства монополярного кластера не были объектом исследования, точку фазового перехода можно установить путем изучения гораздо более простой величины – монополярной плотности (3.15).

Прежде чем приступить к случаю наличия казимировских поверхностей, рассмотрим однородную решетку без пластин.

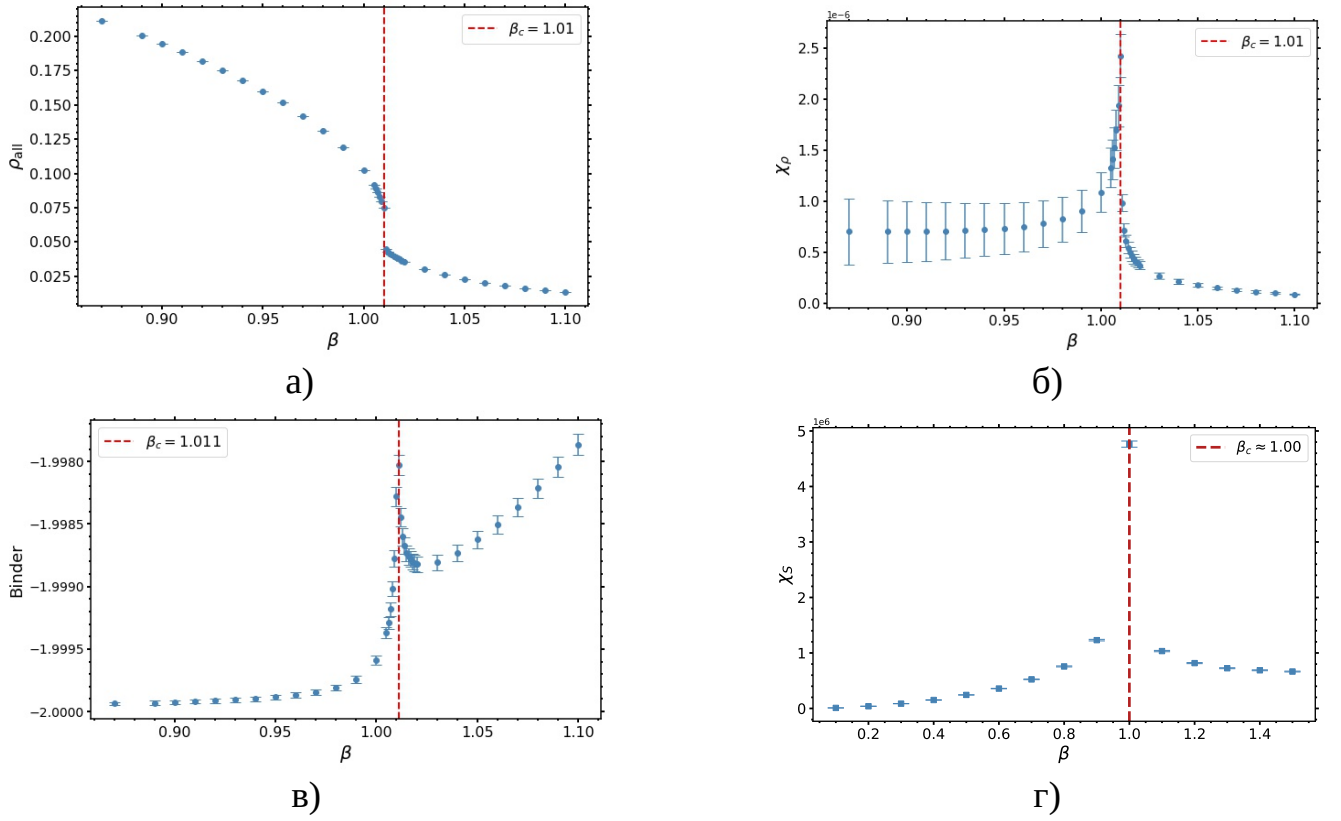


Рисунок 4.1 — Зависимость (а) плотности монополей ρ , (б) ее восприимчивости (4.1) и (в) кумулянта Биндера (4.2) для $\mathcal{O} = \rho$ и (г) восприимчивости действия от решеточной константы связи β в отсутствии пластин. Вертикальной линией показана точка фазового перехода, полученная из данных наблюдаемых.

На рисунке 4.1 представлены плотность монополей ρ , ее восприимчивость

$$\chi_\rho = \langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2 \quad (4.1)$$

и кумулянт Биндера

$$B_\rho = \frac{\langle \rho^4 \rangle}{\langle \rho^2 \rangle^2} - 3 \quad (4.2)$$

как функции решеточной константы связи β . Величины (4.1) и (4.2) характеризуют флуктуации монопольной плотности ρ . С увеличением β плотность монополей падает. Положение точки фазового перехода

$$\beta_c = 1.010(1) \quad (4.3)$$

можно определить на основе разрыва функции на рисунке 4.1а. Подобный разрыв присущ фазовым переходам первого рода. Он с высокой точностью совпадает с пиками соответствующих кривых восприимчивости (рисунок 4.1б) и кумулянта

Биндера (рисунок 4.1в). В окрестности точки фазового перехода были подсчитаны значения данных величин с шагом $\delta\beta = 0.001$ для достижения точности в оценке положения критического значения β_c . Позиция β_c совпадает с результатом для бесконечного объема [69]. Интересно отметить, что монополярная плотность ρ не единственная наблюдаемая, по которой можно отследить фазовый переход. На рисунке 4.1г показана восприимчивость действия Вильсона (3.10). Положения ее пика соответствует положению пика восприимчивости плотности монополей (рисунок 4.1б).

4.2 Свойства монополей при наличии поверхностей Казимира

Идеально проводящие пластины Казимира вводятся с помощью неоднородной константы связи соотношением (3.23), которая играет роль множителя Лагранжа, понижая физические флуктуации калибровочного поля на пластинах. Было выбрано достаточно большое значение диэлектрической постоянной $\epsilon = 10^3$, что соответствует асимптотически большому значению константы связи на пластинах, $\beta_P \rightarrow \infty$. Рассмотрены расстояния $R \equiv |l_1 - l_2| = 1, \dots, 8$ между пластинами.

Как видно из рисунка 4.2, близко расположенные пластины оказывают влияние на расположенные между ними монополи. Пластины уменьшают плотность монополей внутри, она становится меньше плотности снаружи. Более того, с увеличением решеточной константы β (область слабой связи), данный эффект проявляется ещё сильнее, что видно из сравнения 4.2а и 4.2б. Подавление монополей между пластинами позволяет предположить, что конфайнмент ослабляется между пластинами, и, следовательно, фазовый переход конфайнмент-деконфайнмент должен наступить при более высоких значениях константы связи (меньших значениях β). Данное наблюдение будет подтверждено ниже.

Отношение монополярной плотности между поверхностями ρ_{ins} и монополярной плотности $\rho_{\text{all}}^{\text{np}}$ при их отсутствии для различных R приведено на рисунке 4.3. Из графиков видно, что уменьшение расстояния между пластинами ведет к уменьшению плотности монополей между ними, причем в области слабой связи (бóльшие β) данный эффект заметен сильнее, чем в области сильной связи (меньшие β). Помимо этого, присутствует точка перегиба, которая смещается в сторону

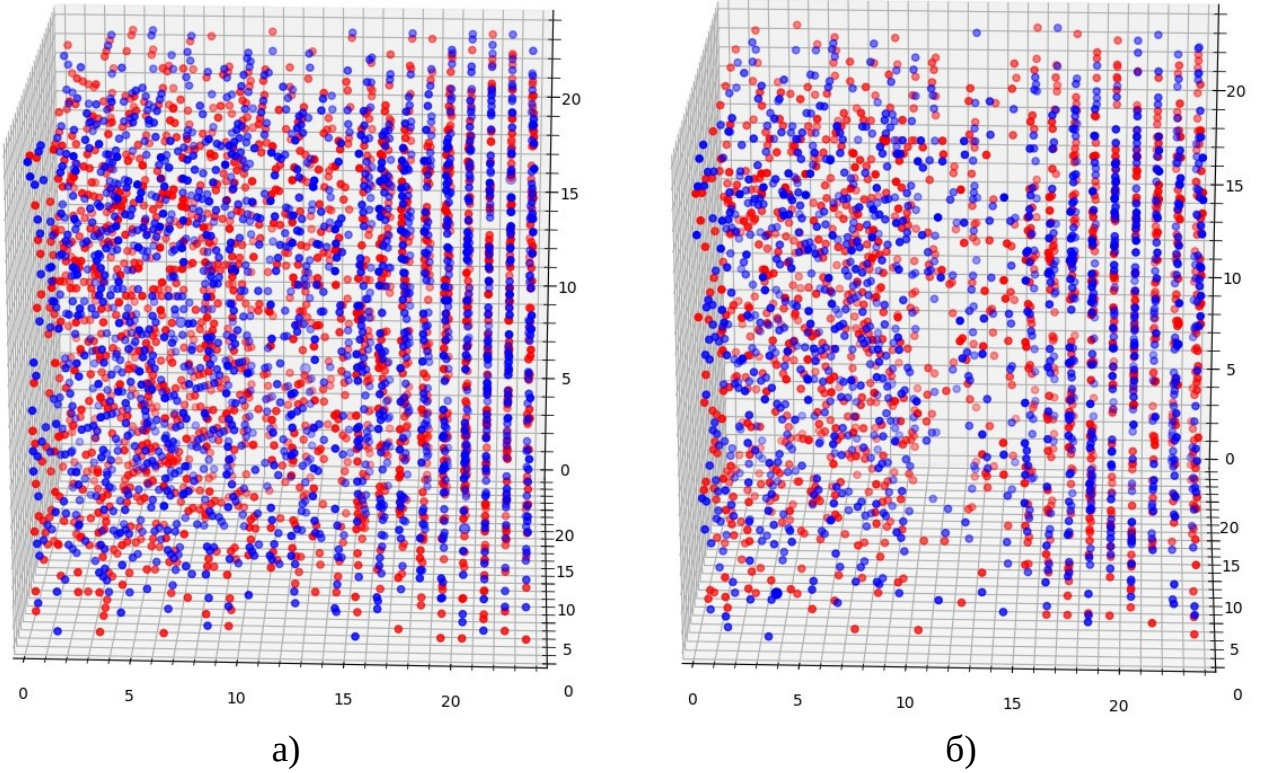


Рисунок 4.2 — Типичные примеры монопольных конфигураций в (а) фазе конфайнмента ($\beta = 0.8$) и (б) фазе деконфайнмента ($\beta = 0.9$) для пластин, находящихся на расстоянии $R = 3$. Монополи и антимонаполи изображены красными и синими точками, соответственно. Пластины, расположенные вертикально по центру решетки, не показаны.

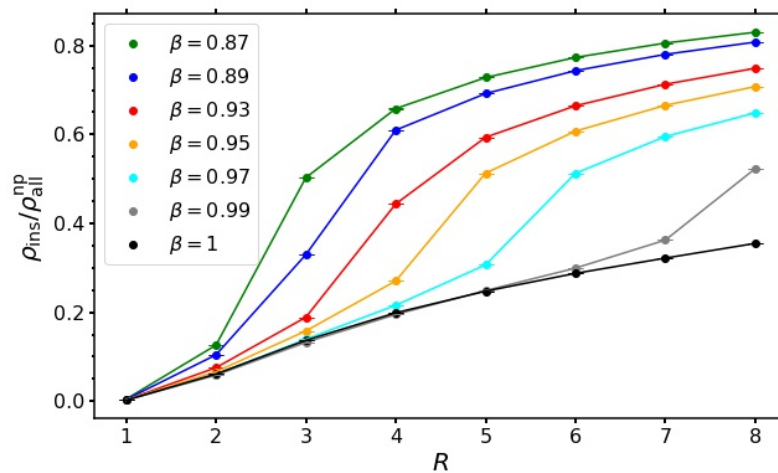


Рисунок 4.3 — Отношение $\rho_{\text{ins}}/\rho_{\text{all}}^{\text{np}}$ плотности монополей ρ_{ins} между пластинами Казимира к монопольной плотности при отсутствии пластин, $\rho_{\text{all}}^{\text{np}}$, как функция от расстояния между пластинами R для фиксированного набора значений решеточной константы связи β .

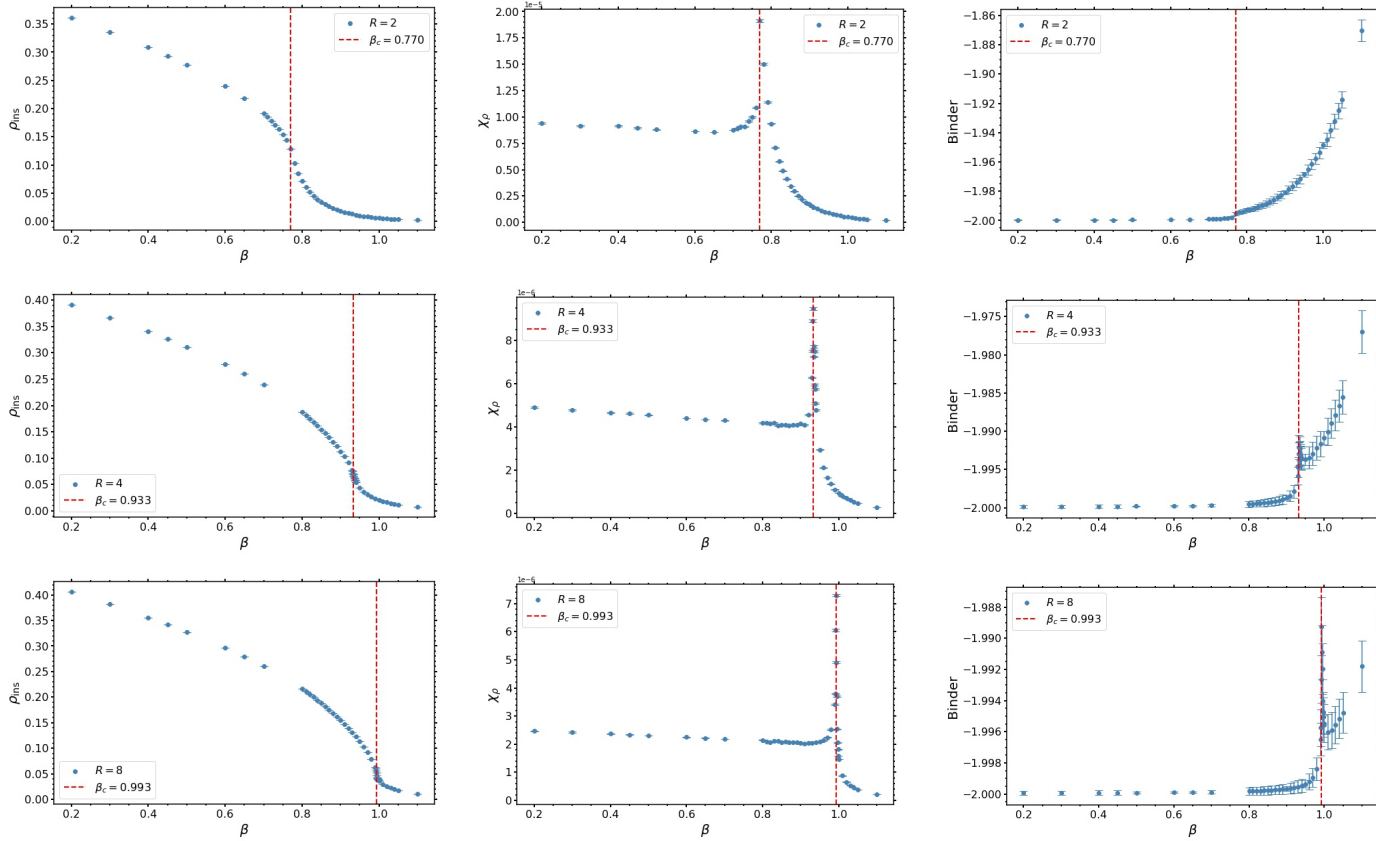


Рисунок 4.4 — Плотность монополей (левая колонка), ее восприимчивость (средняя колонка) и кумулянт Биндера (правая колонка), построенные как функция от β для трех расстояний между пластинами (сверху вниз): $R = 2, 4, 8$. Соответствующие критические значения решеточной константы связи, $\beta_c = \beta_c(R)$, указаны в легенде.

низких значений R по мере уменьшения решеточной константы связи β . Это обстоятельство свидетельствует о том, что в модели может быть переход, зависящий от β , точка которого смещается в направлении меньших R при возрастании β .

На рисунке 4.4 показаны монополярная плотность между пластинами, ее восприимчивость и кумулянт Биндера для трех значений расстояния между пластинами R . Из данных графиков можно сделать несколько важных выводов. Во первых, графики для всех величин аналогичны графикам 4.1. Во вторых, можно отметить что для любого фиксированного значения R , плотность монополей, ее восприимчивость и кумулянт Биндера имеют сингулярности при одинаковых значениях β , что указывает на наличие исходной термодинамической неустойчивости. И в третьих, позиции данных сингулярностей, $\beta_c = \beta_c(R)$, смещаются по направлению к области сильной связи по мере уменьшения расстояния R между

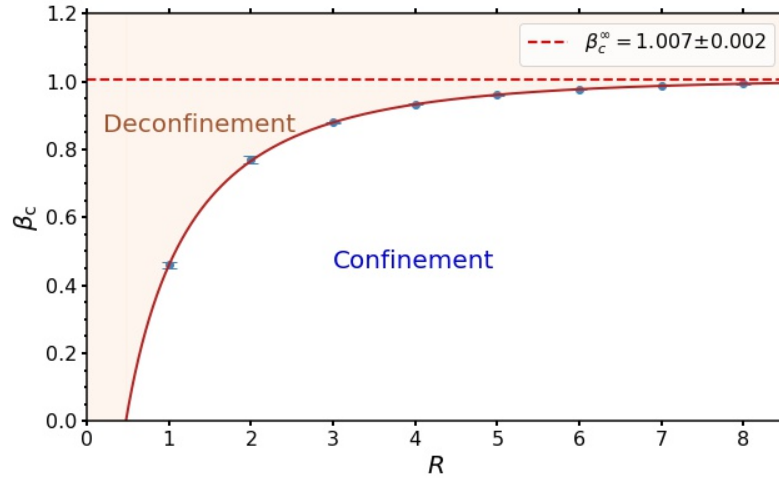


Рисунок 4.5 — Фазовая диаграмма вакуума компактной U(1) калибровочной теории между идеально металлическими пластинами на расстоянии R . Сплошная линия соответствует подобранной функции (4.4) критической константы связи β_c , при которой происходит фазовый переход конфайнмент-деконфайнмент в зависимости от значений R . Предел при $R \rightarrow \infty$ изображен пунктирной горизонтальной линией.

поверхностями. Другими словами, чем ближе пластины к друг другу, тем слабее становится вклад монополей в вакуум.

Зависимость критического значения константы связи β_c от расстояния между пластинами приведена на рисунке 4.5. Для описания данной зависимости была подобрана функция

$$\beta_c^{\text{fit}}(R) = \beta_c^\infty - \alpha \exp[-(R^2/R_0^2)^\nu], \quad (4.4)$$

где параметр $\beta_c^\infty = 1.0071(16)$ соответствует критическому значению константы связи для пластин, удаленных друг от друга на бесконечное расстояние. Данное значение близко к значению точки фазового перехода для конфигурации без пластин ((4.3)), что свидетельствует о согласованности выбранного подхода к исследованию структуры казимировского вакуума. Остальные параметры функции следующие: $\alpha = 3.7(6)$, $R_0 = 0.28(7)$ и $\nu = 0.257(16)$. График функции изображен на рисунке 4.5 сплошной линией, и она делит график на две области – область конфайнмента ($\beta < \beta_c$) и область деконфайнмента ($\beta > \beta_c$). Кривая фазового перехода представляет собой возрастающую функцию расстояния R между пластинами. Константа связи β_c становится равной нулю при $R_c = 0.47(7)$. Формально, на расстояниях меньше критического, $R < R_c$, у теории не может быть фазы конфайнмента. Но поскольку в дискретной теории мы имеем дело только с

натуральными значениями $R = 1, 2, \dots$, данное критическое значение не может быть достигнуто на решетке.

Потерю конфайнмента в вакууме между пластинами в 3+1 измерениях можно объяснить по аналогии с теорией в 2+1 измерениях [47]. Монополи и антимонаполи взаимодействуют друг с другом посредством обмена фотонами. В 3+1 измерениях при отсутствии пластин данное взаимодействие падает как $|x|^{-2}$. При добавлении пластин, система подвергается размерной редукции от 4-мерного к 3-мерному пространству-времени. В нем взаимодействие между (анти)-монополями усиливается и уменьшается медленнее, пропорционально $|x|^{-1}$. Эти два фактора приводят к распаду инфракрасных монопольных кластеров на более мелкие, и, как следствие, к исчезновению монопольного конденсата.

Для модели в 2+1 измерениях, этот же эффект приводит к образованию магнитно нейтральных пар монополь-антимонотополь (низкоразмерных аналогов мелких кластеров) и распаду кулоновского газа монополей (низкоразмерного аналога монопольного конденсата). Нейтральные пары (мелкие кластера) не в состоянии обеспечить конфайнмент, и он пропадает между достаточно близко расположенными пластинами.

4.3 Петля Полякова как параметр порядка

Обычно петля Полякова определяется для конечной температуры, когда $N_T \ll N_S$, но ее также можно использовать и при нулевой температуре ($N_T = N_S$). Петля Полякова в точке пространства x для абелевой калибровочной теории задается циклическим произведением временных линк-переменных:

$$P_x = \prod_{x_4=0}^{N_T-1} e^{i\theta_{x,x_4;\mu=4}}. \quad (4.5)$$

Петля Полякова не зависит от временного среза, на котором она определена и является калибровочно-инвариантным объектом. Мат. ожидание этой величины, $P = \langle P_x \rangle$ является параметром порядка: для решетки бесконечного объема $P \neq 0$ в фазе деконфайнмента и $P = 0$ в фазе конфайнмента. Для конечной решетки, которая исследуется в данной работе, мат. ожидание петли Полякова не равно нулю

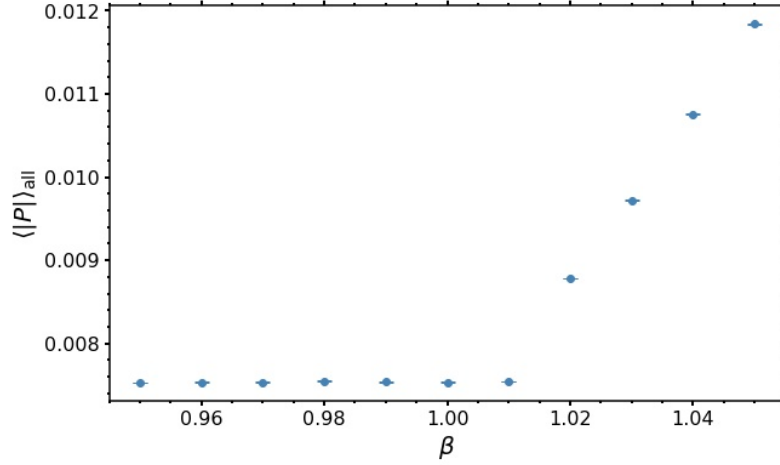


Рисунок 4.6 — Модуль петли Полякова как функция решеточной константы связи β в отсутствии пластин.

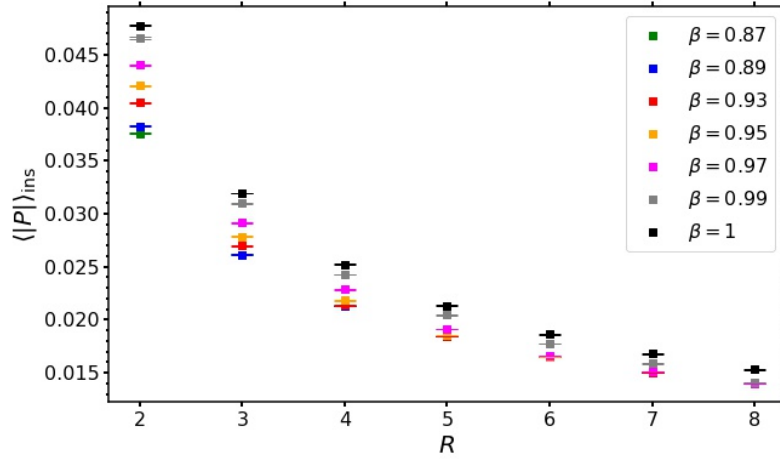


Рисунок 4.7 — Мат. ожидание петли Полякова в пространстве между пластинами Казимира на расстоянии R для набора фиксированных значений решеточной константы связи β .

в обеих фазах, но оно близко к нулю в фазе конфайнмента и возрастает в фазе деконфайнмента.

Мат. ожидание модуля петли Полякова, взятое по пространственному объему V_3 для фиксированного временного среза равно:

$$|P| = \left| \frac{1}{V_3} \sum_{x \in V_3} P_x \right|. \quad (4.6)$$

Данная величина в отсутствии пластин построена на рисунке 4.6, где показана область в окрестности фазового перехода. В точке β_c , определенной в (4.3) петля резко меняет свое поведение.

На рисунке 4.7 представлено мат. ожидание модуля петли Полякова между пластинами. Данная величина построена как функция расстояния между пласти-

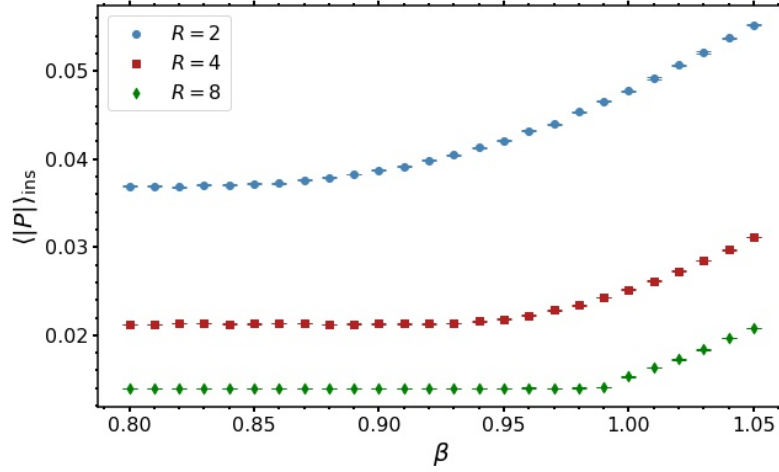


Рисунок 4.8 — Петля Полякова внутри пластин как функция от β при фиксированных значениях R .

нами R для того же набора значений β , который использовался в рисунке 4.3 при отображении плотности монополей между пластинами. Сокращение расстояния между ними способствует переходу в фазу деконфайнмента, что приводит к возрастанию петли Полякова (4.7) при снижении монопольной плотности (4.3). Данный эффект проявляется при всех значениях решеточной константы связи β . Аналогичная тенденция видна на рисунке 4.8, на котором изображена зависимость этой же величины от β для фиксированного набора значений R , используемых в рисунке 4.4. Таким образом, данные результаты находятся в согласии с фазовой диаграммой, изображенной на рисунке 4.5.

Глава 5. Влияние граничных условий Казимира на структуру вакуума теории Янга-Миллса с калибровочной группой SU(3) в 3+1 измерениях

В главе 2 были описаны результаты исследования вакуумной структуры SU(2) глюодинамики в 2+1 измерениях при наличии граничных условий Казимира. Особенностью двух пространственных измерений является возможность использования аналитического подхода для изучения непертурбативных свойств вакуума и его сравнения с численными методами, позволяющими исследовать более сложные системы. Аналитический подход и решеточные вычисления для исследования структуры вакуума между пластинами показали прекрасную согласованность полученных результатов — аналитическое выражение (2.117) для энергии Казимира отлично описывает данные на рисунке 2.15, полученные с помощью численных симуляций в рамках решеточного подхода. Оба подхода приводят к возникновению нового возмущения, массы Казимира, которая существенно ниже массы самого легкого глюбола, и предсказывают ослабление удерживающих свойств вакуума между пластинами.

В трех пространственных измерениях уже не существует аналитического подхода для исследования непертурбативных свойств вакуума, поэтому необходимо использовать численные методы. В данной главе описаны результаты исследования вакуума SU(3) глюодинамики в 3+1 измерениях при наличии граничных условий Казимира при нулевой температуре.

5.1 Энергия Казимира и новое граничное связанное состояние глюонов

В пространстве Минковского тензор энергии-импульса имеет следующий вид:

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (5.1)$$

где метрический тензор определяется как $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Плотность энергии \mathcal{E} в пространстве Минковского и Евклида связаны следующим соотношением:

$$\mathcal{E} \equiv T^{00} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2) \rightarrow T_E^{44} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}_E^2 - \mathbf{E}_E^2). \quad (5.2)$$

Решеточная плотность энергии Казимира на единицу площади Казимировских пластин при нулевой температуре на решетке L_s^4 задается правильно нормированной решеточной версией уравнения 5.2:

$$\mathcal{E}_{\text{Cas}} = \beta L_s \left(\sum_{i=1}^3 \langle \mathcal{P}_{i4} \rangle_S - \sum_{i<j=1}^3 \langle \mathcal{P}_{ij} \rangle_S \right), \quad (5.3)$$

и представляет собой разность между средними временными и пространственными плакетками при наличии зеркальных пластин S . В результате вычитания уничтожаются ультрафиолетовые расходимости нулевых колебаний вакуума. Плотность энергии Казимира является конечной физической величиной, зависящей только от расстояния между пластинами и зануляющейся при их отсутствии (при $R \rightarrow \infty$). Данная зависимость показана на рисунке 5.1. Видно, что данные

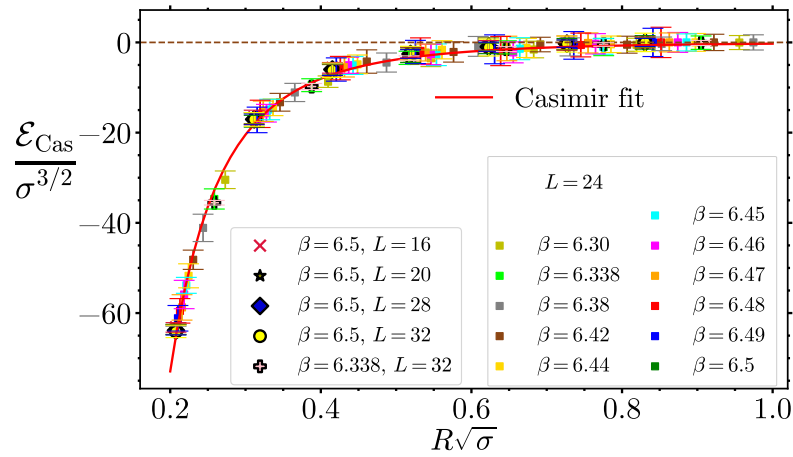


Рисунок 5.1 — Плотность энергии Казимира \mathcal{E}_{Cas} как функция расстояния R между идеальными хромометаллическими пластинами в единицах натяжения струны σ .

для различных значений решеточной константы связи β и размеров решеток L прекрасно укладываются в гладкую кривую, свидетельствуя об отсутствии существенных эффектов конечного размера и конечного объема.

Плотность энергии Казимира принимает большие по модулю отрицательные значения по мере уменьшения расстояния между пластинами. Такое поведение указывает на притягивающую природу неабелевой силы Казимира, что согласуется с ожидаемым поведением на коротких расстояниях, где глюоны проявляют асимптотическую свободу и Казимировские взаимодействия должны свестись к взаимодействию свободного безмассового векторного поля. На больших расстояниях между пластинами энергия Казимира уменьшается. В теориях со свободным безмассовым полем плотность энергии Казимира на единицу площади пластин с увеличением расстояния R падает как R^{-3} , в то время как в

массивных теориях поля плотность энергии Казимира уменьшается экспоненциально, $\mathcal{E}(R) \sim e^{-2mR}$. Множитель 2 присутствует в экспоненте по причине того, что частица проходит от одной пластины к другой, затем отражается, и проходит обратный путь, замыкая траекторию длиной $2R$. Следовательно, важно определить как быстро снижается энергия в пределе больших R , так как это поведение позволяет исследовать массовый спектр возмущений глюонного вакуума между хромометаллическими пластинами.

Как было показано в секции 2.2 главы 2, в двухцветовой глюодинамике в двух пространственных измерениях самое низкое возмущение между пластинами соответствует «частице Казимира» с массой существенно ниже минимальной массы глюбола теории. Помимо этого, масса Казимира связана с магнитной массой в трех пространственных измерениях. Также, в двух пространственных измерениях энергия Казимира калибровочного поля была отождествлена с энергией Казимира скалярного поля. Данный подход можно применить и в трех пространственных измерениях [71; 72]. Данные на рисунке 5.1 были описаны функцией энергии Казимира скалярного поля с массой m_{gt} :

$$\mathcal{E}_{\text{Cas}} = -C_0 \frac{2(N_c^2 - 1)m_{\text{gt}}^2}{8\pi^2 R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(2nm_{\text{gt}}R)}{n^2}, \quad (5.4)$$

где суммирование произведено по быстросходящимся функциям Бесселя второго рода $K_2(x)$, а префактор включает в себя $(N_c^2 - 1)$ цветовых комбинаций и двух спиновую поляризацию глюонов. Множитель C_0 был включен, чтобы учесть влияние массовой щели. На рисунке 5.1 фит функцией 5.4 изображен сплошной красной линией и имеет параметры $C_0 = 5.60(7)$ и

$$m_{\text{gt}} = 1.0(1)\sqrt{\sigma} = 0.49(5) \text{ ГэВ}. \quad (5.5)$$

О качестве данного фита свидетельствует статистика $\chi^2/\text{d.o.f.} \simeq 0.6$, что является хорошим показателем. Масса полученной частицы существенно меньше массы основного состояния глюбола $M_{0++} = 3.405(21)\sqrt{\sigma} = 1.653(26) \text{ ГэВ}$, что выглядит как противоречие, так как по определению масса основного состояния глюбола M_{0++} является наименьшей возможной массой в системе. Но вместе с тем этот факт не является сюрпризом, как уже было сказано, аналогичное явление было обнаружено и для частицы, которая характеризует поведение системы на больших расстояниях между пластинами в 2+1 измерениях.

Данное кажущееся противоречие объясняется тем, что масса основного состояния глюбола M_{0++} определяет массовую щель во всей системе, далеко от

границ, в то время как масса 5.5 является массой нового возмущения в теории Янга-Миллса, которое возникает исключительно из-за наличия границы. Данное граничное состояние, являющееся непертурбативным бесцветным состоянием глюонов связанных с их изображениями противоположного цвета в хромометаллическом зеркале, естественно назвать «глютон» по аналогии с поверхностным экситоном, возникающим в электронных системах.

Состояния, локализованные на границах системы, могут иметь меньшие массы, чем массовая щель в основной системе. В теории конденсированного состояния данный эффект возникает на контактах в полупроводниковых структурах (состояния Волкова-Панкратова [73]), и на границах топологических диэлектриков [74]. Однако глютон, в отличие от перечисленных состояний, имеет нетопологическое происхождение.

Глютон представляет собой неабелевый аналог поверхностного экситона, который является электрически нейтральной квазичастицей, возникающей в полупроводниках и изоляторах вблизи границ — электрон (дырка) в материале образует пару с образом дырки (электрона) в отражающей границе, что приводит к образованию нейтральной квазичастицы [75]. Такие пары электрон-дырка могут двигаться только вдоль границы материала. Исследованию поверхностных экситонов посвящено множество работ в области физики конденсированного состояния [76—79].

Глютон, помимо глюбола и глюампа, является ещё одним связанным состоянием глюонов. Глюбол это бесцветная частица состоящая из глюонов, характеризующаяся спином и массой. Она находится в основной среде, не на границах. Глюамп состоит из глюона, связанного струной с присоединенным источником, который можно рассматривать как глюон с бесконечно большой массой [80—83]. Хотя глюамп и не является физическим объектом и не может быть напрямую обнаружен на эксперименте, его теоретическое изучение обеспечивает ценный вклад в понимание непертурбативных удерживающих свойств КХД [84]. В отличие от глюампа, глютон может распространяться вдоль доменной стенки в КХД (например в модели мешков [5; 85]), таким образом потенциально влияя на стабильность таких состояний и оказывая физически измеряемый эффект.

Масса глютона (5.5) имеет такой же порядок, как и эффективная масса глюона, которая контролирует инфракрасное поведение глюонного пропагатора при фиксации калибровки [86]. Однако существует несколько аргументов в пользу того, что наблюдаемое связанное состояние является новой частицей, а

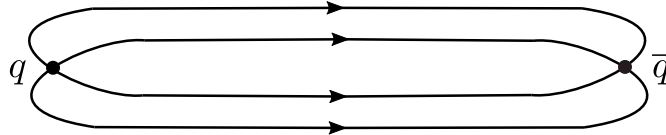


Рисунок 5.2 — Трубка потока от кварка к антикварку. Изображение взято из [58].

не проявлением глюона. Во-первых, в отличие от глюона, глютон является бесцветным объектом, в этом плане он ближе к глюболу. Во-вторых, масса глюона выводится из зависящего от калибровки пропагатора, что подразумевает ее фиксацию, в то время как взаимодействия Казимира сформулированы калибровочно-инвариантным способом. И, наконец, во взаимодействующих теориях, к которым относится рассматриваемая теория Янга-Миллса, энергию Казимира невозможно выразить через двухточечную функцию, какой является глюонный пропагатор (это можно сделать только в свободных теориях [87]).

5.2 Кваркитон - связанное состояние кварка и его образа в хромометаллическом зеркале

После аргументов, свидетельствующих в пользу существования бесцветных связанных состояний глюонов, возникает вопрос о существовании аналогичных состояний для кварков — связанной удерживающей струной пары кварка и его образа в хромометаллическом зеркале. Потенциальному возникновению данного состояния способствует явление конфайнмента цвета, так как в фазе конфайнмента силовые линии хромоелектрического поля между кварком и антикварком стягиваются в удерживающую струну, показанную на рисунке 5.2. Как было упомянуто в главе 2, данные трубки (струны) представляют собой физические объекты с конечной энергией на единицу длины, что приводит к линейному росту взаимодействия между кварками. Предложено несколько механизмов объяснения наблюдаемого явления. Один из них это модель дуального сверхпроводника второго рода, содержащего примеси магнитных монополей, предложенная Мандельштамом [61] и т'Хофтом [62]. В то время как магнитное поле не может проникнуть внутрь сверхпроводника в силу эффекта Мейснера [88], то после добавления внутрь сверхпроводника магнитных монополей, силовые линии магнитного поля должны где-то пройти в сверхпроводник, что приводит к возникновению струны Абрикосова между парой монополей и анти-

монополь, которая представляет собой трубку силовых линий магнитного поля. Ещё один механизм конфайнмента основан на так называемой модели мешков [89]. В данной модели адрон представлен как мешок, на глюонные поля внутри которого не накладывается никаких ограничений. Но распространение полей вне мешка запрещено соответствующими граничными условиями. Попытка извлечь кварк из такой системы приводит к вытягиванию мешка, и вытянутая часть мешка будет содержать глюо-электрический поток от вытягиваемого кварка к остальным составляющим протона. Наконец, наиболее изящный механизм заключается в добавлении в теорию неабелевых безмассовых калибровочных полей, описывающих глюоны и обладающих свойством самодействия (в отличие от электродинамики). Данные поля несут заряды, отличающие их друг от друга. В этом случае предположение конфайнмента заключается в том, что исходная теория с безмассовыми заряженными частицами нестабильна по отношению конденсации вакуума в состояние, в котором присутствуют только массивные заряженные возбуждения. В таких состояниях глюонный поток, связывающий кварки, образует трубки, что приводит к линейному конфайнменту [58].

В случае кварка, расположенного вблизи хромометаллического зеркала, свойство конфайнмента подразумевает возникновение удерживающей струны от кварка к зеркалу, связывая кварк с его отрицательным образом. Схематично данное состояние показано на рисунке 5.3. Таким образом можно ожидать удержание кварка нейтральным хромометаллическим зеркалом с помощью удерживающей струны. Поскольку глобально зеркало является безцветным объектом, возникающий цветовой заряд, который имитирует образ антикварка в зеркале, должен приводить к перераспределению цветового заряда на поверхности (бесконечного) зеркала. В связанной системе перераспределенный заряд может давать положительный вклад в свободную энергию системы кварк-зеркало, который в теории способен перевесить отрицательный вклад от кваркитона.

Так как в рамках исследования влияния граничных условий Казимира на вакуум теории Янга-Миллса рассматривались исключительно глюонные системы, то проверить формирование кваркитона напрямую путем вычисления спектра масс с кварковыми степенями свободы вблизи зеркала не представляется возможным. Но можно вычислить потенциал V_Q , который соответствует свободной энергии $F_Q(d)$ тяжелого кварка Q , расположенного на расстоянии d от зеркала $|$. Данная величина позволяет оценить, насколько сильно кварк притягивается или отталкивается зеркалом. Чтобы связать потенциал тяжелого кварка с его свобод-

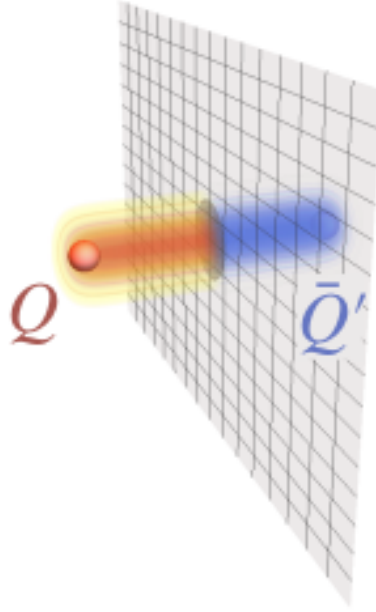


Рисунок 5.3 — Схематическое изображение кваркитона: кварк Q связан со своим образом в хромометаллическом зеркале (антикварком \bar{Q}') удерживающей струной. Автор изображения М. Чернодуб.

ной энергией, можно использовать оператор петли Полякова, который помещает пробный цветной заряд в пространственную точку \mathbf{x} . Петля Полякова уже была рассмотрена в главе 2 и 4 настоящей работы в качестве параметра порядка, позволяющего отследить фазовый переход в фазу деконфайнмента. Для теории с тремя цветами в $3 + 1$ измерении петля Полякова задается следующим образом:

$$P_x = \frac{1}{3} \text{Re Tr} \left(\prod_{x_4=0}^{L_t-1} U_{x,x_4} \right). \quad (5.6)$$

Эффект граничного зеркала можно вычислить через математическое ожидание петли Полякова:

$$\langle P_x \rangle(d) = \exp \{ -L_T F_Q(d) \}, \quad (5.7)$$

расположенной в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2, d)$ (для зеркала $x_3 = 0$) и усредненной по координатам x_1 и x_2 . L_T это длина решетки во временном направлении. При конечной температуре длина L_T фиксирована, $L_T = 1/T$, и выражение под экспонентой сводится к привычному отношению F/T . В термодинамическом пределе при нулевой температуре $L_T \rightarrow \infty$ петля Полякова зануляется, делая невозможной оценку потенциала (5.7) тяжелого кварка для больших L_T . По этой причине, чтобы качественно показать существование притяжения между кварком и зеркалом, была рассмотрена небольшая решетка с $L_T = 12a$. Математическое ожидание

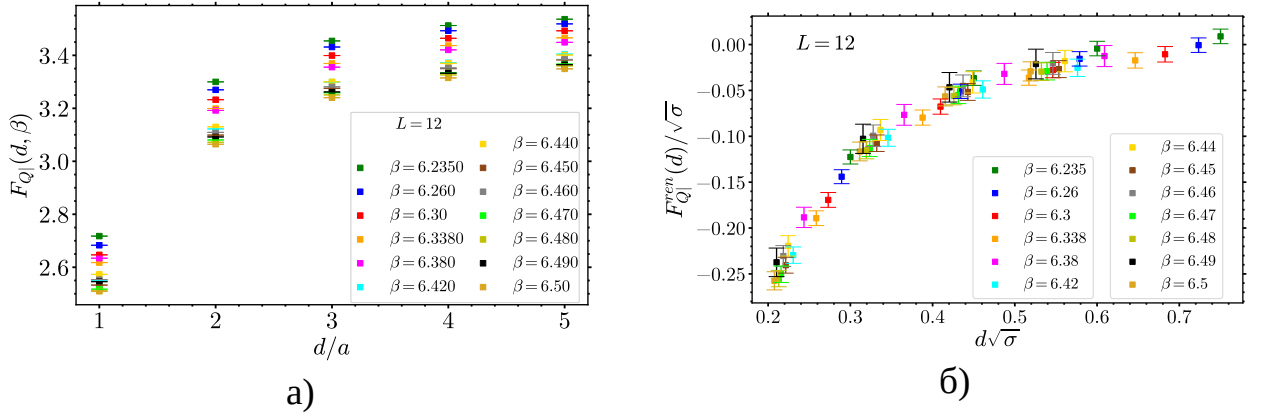


Рисунок 5.4 — Свободная энергия тяжелого кварка как функция расстояния от хромометаллического зеркала. **(а)**: Исходная энергия $F_{Q|}(d, \beta)$ без перенормировки, расстояние отложено в решеточных единицах. **(б)**: Перенормированная энергия $F_{Q|}^{ren}(d)$ в единицах натяжения струны σ .

петли Полякова (5.6) содержит нефизические независимые от расстояния вклады, обычно убираемые путем перенормировки. Перенормировка свободной энергии кварка исходя из ее поведения на коротких расстояниях представляется затруднительной из-за небольшого размера решетки. Но можно использовать тот факт, что на расстоянии $d = 6a$ (середина решетки) свободная энергия должна выполаживаться за счет периодичности решетки. Как видно из рисунка 5.4а, положение точки выполаживания не зависит от константы связи β .

Данный факт был использован для перенормировки свободной энергии:

$$F_{Q|}^{ren}(d) = F_{Q|}(d, \beta) - F_0(\beta), \quad (5.8)$$

где $F_0(\beta)$ отлично описывается тривиальной линейной зависимостью

$$F_0(\beta) = -15.5 + 2.9\beta. \quad (5.9)$$

График перенормированной свободной энергии приведен на рисунке 5.4б. Данные для различных решеточных обрезаний $a = a(\beta)$ укладываются в гладкую кривую, указывая на неплохой физический скейлинг. Из данного графика можно сделать вывод о притяжении тяжелого кварка плоским зеркалом, что приводит к формированию кваркитона. Выполаживание энергии для больших расстояний d происходит из-за эффекта конечного объема и должно уйти при увеличении объема решетки, а на небольших расстояниях наблюдается ожидаемое линейное поведение.

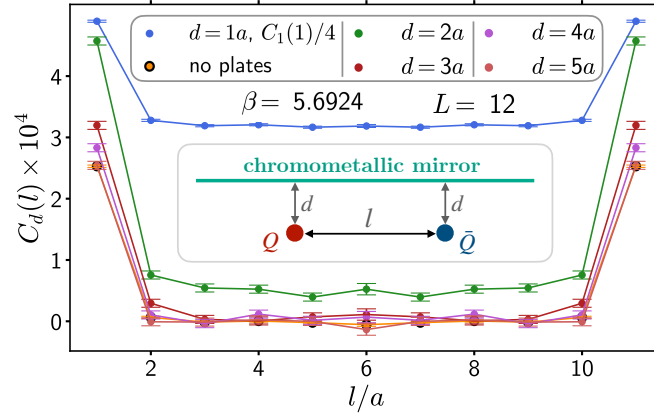


Рисунок 5.5 — Коррелятор петель Полякова $C_d(l)$, расположенных на расстоянии d от хромометаллического зеркала, и на расстоянии l друг от друга для $L = 12$ и $\beta = 5.6924$ ($a\sqrt{\sigma} \simeq 0.4$ [90]). Коррелятор при $d = 1a$ масштабирован на фактор $1/4$. Также показан коррелятор в отсутствии пластин.

Анализ поведения пары кварк-антикварк, расположенной на расстоянии d от зеркала (рисунок 5.5), дает дополнительный аргумент в пользу возникновения состояния кваркитона у границы.

Рассмотрим кварк Q и антикварк \bar{Q} расположенные на расстоянии l друг от друга и на расстоянии d от хромометаллического зеркала, как показано в центральной вставке рисунка 5.5. В самой простой модели линейного конфайнмента, где не учитывается кулоновское взаимодействие на малых расстояниях, энергия пары кварк-антикварк $Q\bar{Q}$ (мезона) будет равна $E_1 = \sigma l$. В тоже время, если кварк Q и антикварк \bar{Q} образуют соответствующие состояния кваркитонов $Q\bar{Q}'$ и $\bar{Q}Q'$, то каждый такой кваркитон даст вклад в энергию σd , а полная энергия данной системы будет равна $E_2 = 2\sigma d$. Следовательно, исходя из энергетических соображений, при небольшом расстоянии между кварком и антикварком $l < 2d$ должно формироваться обычной мезонное состояние $Q\bar{Q}$. Но при удалении кварка и антикварка на расстояние $l > 2d$ системе энергетически выгоднее образовать два состояния кваркитона: $Q\bar{Q} \rightarrow Q\bar{Q}' + \bar{Q}Q'$.

Данное предположение можно проверить численно, рассчитав коррелятор петель Полякова

$$C(l) = \langle P(x)P^*(x+l) \rangle. \quad (5.10)$$

Коррелятор и удерживающая струна связана следующим соотношением [57]:

$$C(l) \propto e^{-L_T a V(l)}, \quad (5.11)$$

где общая форма потенциала $V(l)$ имеет вид

$$V(l) = A + \frac{B}{l} + \sigma l. \quad (5.12)$$

На большом расстоянии от зеркала $d = 5a$, согласно полученным данным струна ведет себя обычным образом, так как коррелятор для пары $Q\bar{Q}$ совпадает с коррелятором при отсутствии зеркала. При уменьшении расстояния до зеркала коррелятор выходит на плато, тем самым показывая отсутствие зависимости от l , чем ставит вопрос о существовании струны. Более того, значения коррелятора при $d = 1a$ больше значений при $d = 2a$, что позволяет сделать вывод о распаде мезонного состояния на два кваркитона, и формировании новых струн между кварком (антикварком) и его образом (струна при $d = 1a$ короче струны при $d = 2a$).

Потенциальная возможность одиночного кварка образовывать пару со своим образом в хромометаллическом зеркале позволяет провести аналогию с системой двух взаимодействующих конденсатов Бозе-Эйнштейна, между которыми существует доменная стенка (в двух измерениях это струна), и натяжение струны определяет потенциал между парами вихрей на больших расстояниях [91]. В этом смысле такая пара вихрей аналогична мезону в КХД. Как одиночный кварк в КХД не может существовать из-за обладания бесконечной свободной энергией, так и одиночный вихрь не может существовать в конденсате Бозе-Эйнштейна. Но одиночные вихри тем не менее могут существовать на границе системы образовывая с ней связанное состояние. Такие состояния в сверхпроводниках обсуждаются в работах [92—94].

5.3 Признаки деконфайнмента между пластинами

Помимо определения граничных состояний вакуума глюодинамики, важным является вопрос о влиянии граничных пластин Казимира на фазовый переход конфайнмент - деконфайнмент. Анализ энергии Казимира не позволяет сделать какие-то определенные заключения о наличии данного явления. Поэтому была рассмотрена свободная энергия тяжелого кварка, посчитанная в пространстве между пластинами $V(R)$:

$$L_T F_Q^{\text{Cas}}(R) = -\ln |P|_{V(R)} \equiv -\ln \left\langle \left| \sum_{x \in V(R)} P_x \right| \right\rangle. \quad (5.13)$$

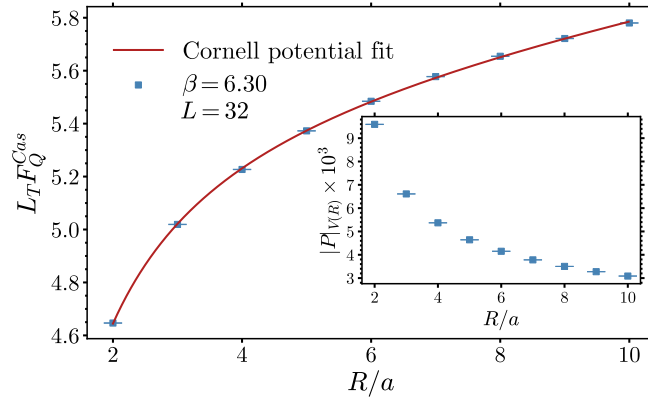


Рисунок 5.6 — Средняя свободная энергия тяжелого кварка в пространстве между пластинами, как ф-ия расстояния между ними.

На вставке в рисунке 5.6 показана петля Полякова в пространстве между пластинами $|P|_{V(R)}$. Она принимает конечные значения для небольшого расстояния R между пластинами и быстро уменьшается с его увеличением. Данное поведение указывает на деконфайнмент цвета между близко расположенными пластинами, что можно интерпретировать как формирование кваркитонов между тяжелым кварком и его образом в зеркале, обладающих конечной энергией. По мере увеличения расстояния между пластинами свободная энергия кваркитонов увеличивается, петля Полякова исчезает и система переходит в фазу конфайнмента.

Взаимодействие между кварками и антикварками часто описывается с помощью потенциала Корнелла, который включает себя линейное поведение на больших расстояниях и кулоновское взаимодействие на малых. Следовательно, средняя свободная энергия кваркитона тоже должна удовлетворять данному потенциалу. Рисунок 5.6 полностью подтверждает данное предположение, данные идеально описывается следующей кривой:

$$L_T F_Q^{Cas}(R/a) = -\frac{c_1}{R/a} + c_2 \frac{R}{a} + c_0. \quad (5.14)$$

Из данной зависимости видно, что тяжелый кварк в пространстве между пластинами обладает конечной энергией для небольших расстояний между пластинами, что указывает на деконфайнмент цвета. С увеличением расстояния между пластинами свободная энергия возрастает, приводя к исчезновению петли Полякова и установлению фазы конфайнмента.

Глава 6. Исследование основных состояний нелокальной модели Поттса

В предыдущих главах было рассмотрено влияние нетривиальной топологии на вакуум калибровочных теорий, таких как компактная электродинамика и $SU(2)$ и $SU(3)$ глюодинамика, в двух и трех пространственных измерениях. В ходе исследования было обнаружено несколько типичных закономерностей, общих для данных теорий, наиболее примечательными из которых являются возникновение нового массового масштаба и ослабление удерживающих свойств вакуума между границами. В данных теориях нетривиальность вакуума является следствием изменения геометрии и топологии системы, в то время как открытым вопросом остается существование нетривиальных конфигураций вакуума в системах с нелокальным взаимодействием. Одним из классов систем, где нелокальное взаимодействие можно ввести естественным образом, являются различные спиновые модели, определенные на дискретных решетках, находящие широкое применение в фундаментальной и прикладной науке. Модель Изинга и ее обобщение, модель Поттса, являются наиболее известными из них [95; 96]. Данные модели задаются путем присваивания некоторого «спина» из дискретного множества каждому узлу решетки и введением обменного взаимодействия между узлами, преимущественно локального. Множество дискретных значений спинов и сила взаимодействия обычно выбираются таким образом, что гамильтониан системы принимает неотрицательные действительные значения для любой спиновой конфигурации.

Будучи изначально введенными для изучения намагниченности, спиновые модели нашли применение в исследовании самых различных феноменов. Важным классом задач, формулируемых в терминах модели Поттса, является моделирование поведения сложных систем, начиная с исследований коллективного принятия решений [97] и проблем компьютерного зрения [98], заканчивая биологической эволюцией [99] и оптимизацией расписания авиационного персонала [100]. В подобных задачах, исследование зависимости фазовой структуры моделей и динамики фазовых переходов от эффективной температуры или внутренних параметров, позволяет определять свойства моделируемых систем [101]. Особый интерес представляют состояния с минимальной энергией и их структура.

Во многих случаях представляется удобным рассматривать семейство моделей Поттса в терминах теории среднего поля [102], ввиду возможности естественным образом применять стандартный аппарат статистической теории поля,

включая интеграл по путям [103]. Однако, в общем случае нахождение минимумов энергии модели Поттса является NP-трудной задачей, которая не может быть решена в разумное время. Как следствие, используются различные приближения и численные методы, позволяющие оценить точное решение как можно более эффективно.

Наиболее яркой особенностью данных моделей является тонкая связь между структурой спинового пространства, геометрией и топологией решетки, и обменным взаимодействием, описанная в секции 1.1 главы 1.

Подавляющая часть решеточных моделей относится к локальным, где идея учета взаимодействия только между ближайшими соседями связана с физической интерпретацией степеней свободы как спинов, взаимодействие которых уменьшается с увеличением расстояния между ними и достигает максимума между ближайшими. Модели с нелокальным взаимодействием гораздо меньше представлены в литературе. Тем не менее, они имеют важное значение для описания свойств биологических, социальных и технических сетей, которые нельзя отнести как к регулярным, так и к полностью случайным. Примерами систем такого рода могут служить сети с топологией «маленького мира», которые описывают некоторые свойства нейронных сетей живых организмов [104]. Как показано в работе [105], модель Поттса с нелокальным взаимодействием отлично подходит для описания таких систем. Кроме систем с данной топологией, нелокальные модели применимы для исследования систем с конечным числом степеней свободы. В качестве примеров можно привести исследование двумерных кристаллов на основе молекул, обладающих симметрией пятого порядка [106], изучение свойств жестких пятиугольников с помощью методов Монте-Карло [107] и исследование упаковки жестких ассиметричных ромбообразных частиц [108]. В данных работах были найдены различные паттерны, которые невозможно получить с использованием локальных моделей. В то время как нелокальность была использована для отражения физических свойств систем, в отдельных случаях ее можно ввести искусственно, как было сделано в работе [98], в которой было показано, что нелокальное взаимодействие сглаживает границы между областями различных цветов, тем самым делая модель Поттса с нелокальным взаимодействием привлекательной для решения различных задач компьютерного зрения.

Ещё одной областью, в которой модели с нестандартной топологией могут найти применение, являются задачи комбинаторной геометрии. Результаты настоящей работы были рассмотрены в контексте дискретной формулировки известной



Рисунок 6.1 — Решение проблемы НЭХ для одномерного случая – чередующиеся сегменты единичной длины с выколотой точкой с одного края.

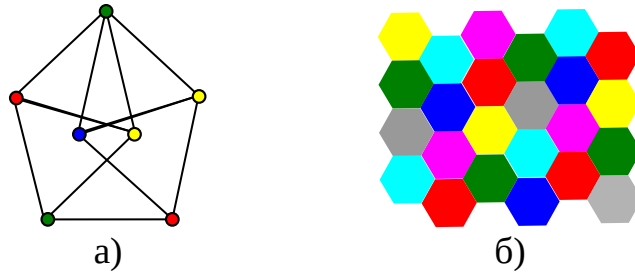


Рисунок 6.2 — Иллюстрация оценок хроматического числа плоскости: **(а)** Веретено Мозера – 11-вершинный граф единичных расстояний с хроматическим числом 4, показывающий, что четырех цветов недостаточно для раскраски плоскости требуемым образом; **(б)** Раскраска плоскости в семь цветов таким образом, что никакие две точки на единичном расстоянии не покрашены в один цвет.

нерешенной задачи о раскраске графа единичных расстояний. Данная задача известна как проблема Нелсона-Эрдёша-Хадвигера (НЭХ), которая ставит вопрос о минимальном числе цветов, необходимом для раскраски \mathbb{R}^d пространства таким образом, чтобы никакие две точки на единичном расстоянии не были покрашены в один цвет [109]. Существует множество литературы, посвященной данной проблеме [15; 110–113]. Для одномерного пространства решение тривиально и представлено на Рис. 6.1. Но уже для плоскости ответ неизвестен. Существовавшая нижняя оценка недостаточности трех цветов (Рис. 6.2а) недавно была улучшена путем построения нетривиального графа единичных расстояний, 1581 вершину которого невозможно раскрасить в 4 цвета [114]. Хотя в данном направлении идет постоянный поиск улучшения данной оценки [115; 116], в том числе и путем уменьшения числа вершин в соответствующем графе, на текущий момент принципиально новых результатов получено не было.

Верхняя оценка равна 7 цветам, соответствующее решение показано на Рис. 6.2б.

Решеточный подход к квантовой теории поля и моделирование различных видов спиновых взаимодействий на дискретных решетках имеют много общего. Оба метода опираются на фундамент статистической физики, имеют схожую методологию и в общем случае предоставляют отличный теоретический аппарат для описания сильнокоррелированных систем, и их последующего численного решения с использованием вероятностных методов Монте-Карло на суперком-

пьютерах, когда традиционные аналитические методы решения неприменимы. Связь решеточных калибровочных теорий и спиновых моделей обсуждается во введении к диссертации.

В данной главе впервые сформулирована и рассмотрена модель Поттса с нелокальным взаимодействием на случайной решетке и исследована структура ее основных состояний. Полученные результаты интерпретированы в рамках изучения дискретной версии проблемы НЭХ.

6.1 Нелокальная модель Поттса на случайной решетке и алгоритм нахождения ее основного состояния

6.1.1 Определение нелокальной модели Поттса на случайной решетке

Гамильтониан нелокальной модели Поттса, заданной на случайной решетке на плоскости, записывается следующим образом:

$$H = \sum_{x,y} J_{xy} \delta_{i(x)i(y)}, \quad (6.1)$$

где ядро взаимодействия J_{xy} между узлами x и y определяется как

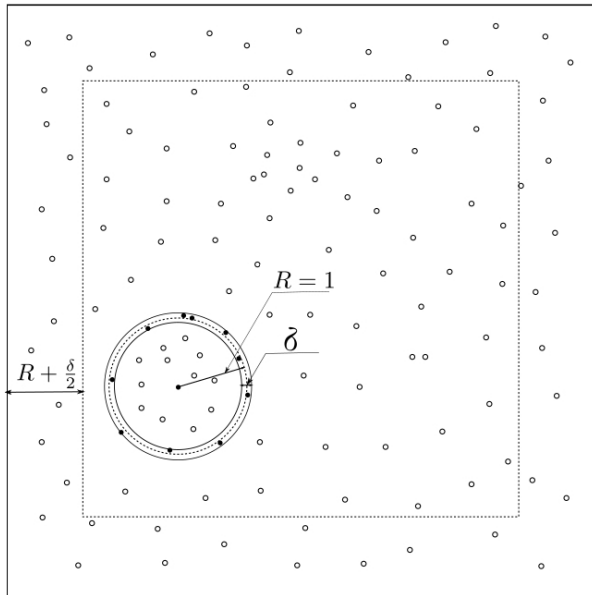
$$J_{xy} = \begin{cases} J, & R - \frac{\delta}{2} \leq |x - y| \leq R + \frac{\delta}{2} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6.2)$$

Радиус взаимодействия R принят равным 1, δ – это ширина кольца взаимодействия, $i(x)$ – значение спина (спина) в точке x , $\delta_{i(x)i(y)}$ — символ Кронекера. Схематическое изображение модели показано на рисунке 6.3а.

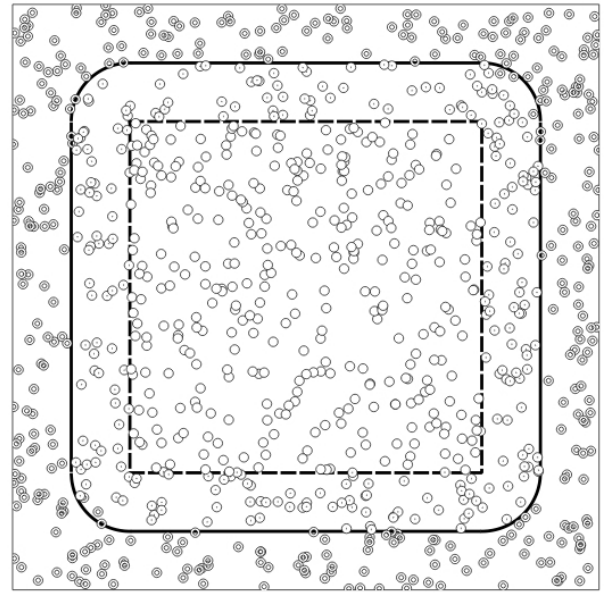
Важным параметром данной модели является среднее число соседей. Оно задается соотношением

$$\langle n \rangle = 2\pi\delta \frac{N}{L^2}. \quad (6.3)$$

В данной работе это число было зафиксировано $\langle n \rangle = 50$. Выбранное число достаточно большое, чтобы наблюдать базовые свойства модели, но одновременно с тем позволяет проводить численные симуляции за приемлимое время. Размер



а)



б)

Рисунок 6.3 — **(а)**: Схематическое изображение модели. Частица, расположенная в центре кольца, взаимодействует только с частицами, находящимися в ее кольце, которые по определению находятся на расстоянии $R \pm \delta/2$ от нее. За пределами области, помеченной пунктирным квадратом, цвета частиц зафиксированны, что представляет собой реализацию фиксированных граничных условий; **(б)**: Схематическое изображение энергетических зон. Все частицы обладают одинаковыми свойствами, но изображены по-разному в зависимости от принадлежности к соответствующей зоне. «Внутренняя» энергия вычисляется только между частицами, помеченными пустой окружностью, вклад от каждой пары таких частиц удваивается. Вклад пар, состоящих из частицы внутри пунктирной области и частицы, в области к ней примыкающей, помеченной окружностью с точкой внутри, учитывается один раз. Данные пары дают вклад в «наружную» энергию. Взаимодействие частиц, принадлежащих примыкающей к пунктирному квадрату области, не дает вклада в энергию, как и взаимодействия с частицами, помеченными символом кольца, которые находятся в самой внешней области изображения. Стоит отметить, что плотность частиц на схеме не должна вводить в заблуждение — в реальности она намного выше и данный пример приведен только в иллюстративных целях.

области был выбран $L = 20$, ширина кольца взаимодействия $\delta = 0.02$. Выбор данных параметров определяет число точек $N = 159\,155$ и более подробно обсуждается в разделе 6.2.3 секции 6.2.

Истинный минимум $E = 0$ достигается только тогда, когда в кольце взаимодействия каждой частицы нет частиц одного с ней цвета. Хотя данный минимум невозможно получить для небольшого числа цветов q , вакуумные конфигурации для этого случая (как и для больших значений q), представляют большой интерес. Помимо этого, в рамках исследования был поставлен вопрос, начиная с какого значения q энергия основного состояния системы достигает нуля (в пределах статистических ошибок).

Важным вопросом является определение граничных условий модели. Наиболее типичными являются периодические граничные условия, которые были использованы на ранних этапах исследования. Но затем было выявлено, что в случае их применения возникают различные граничные эффекты, вызванные нелокальностью модели, и, как следствие, зависимостью итоговых конфигураций от отношения размера области L к радиусу взаимодействия R . Поэтому, были приняты фиксированные граничные условия, схематически изображенные на рисунке 6.3а. Частицы, находящиеся за пределами области, ограниченной пунктирным квадратом, не изменяются в процессе минимизации. За счет того, что кольцо частиц с зафиксированным цветом оказывает влияние на частицы внутри, энергия системы должна быть вычислена на некотором отдалении от границы. Было принято решение считать энергию взаимодействия частиц внутри квадратной области размером 11×11 (пунктирная линия на рисунке 6.3б). Энергия E представляет собой сумму двух компонент: энергию E_{ins} взаимодействия частиц, находящихся внутри области подсчета энергии, и энергию E_{out} взаимодействия частиц внутри области и частиц, к ней примыкающей. Общая энергия системы задается соотношением:

$$E_{\text{tot}} = 2E_{\text{ins}} + E_{\text{out}}. \quad (6.4)$$

Дополнительно стоит отметить, что энергии E_{ins} и E_{out} являются неотрицательными величинами, поэтому зануление энергии в какой-то области означает и зануление энергии в любой из ее подобластей.

6.1.2 Алгоритм минимизации

Наиболее простым из возможных алгоритмов минимизации является жадный алгоритм, который принимает только ту конфигурацию, энергия которой не повысилась по сравнению с предыдущей. Аналогично периодическим граничным условиям, данный алгоритм был реализован на ранних стадиях исследования, но затем от него пришлось отказаться в связи с широко известным его недостатком, имевшем место и в данном случае — в итоге система принимает состояние, соответствующее определенному локальному минимуму, который может быть достаточно далеко от глобального.

Алгоритм имитации отжига [117] подходит гораздо лучше к данной проблеме минимизации и отличается от жадного алгоритма возможностью принятия конфигурации с увеличенной энергией. Вероятность данного события уменьшается со временем и в конце концов система приходит к состоянию которое мы будем отождествлять с вакуумом. Алгоритм начинает случайных обход точек с исходной конфигурации случайно распределенных по области точек с случайно заданными цветами. Цвета частиц меняются случайным образом, в то время как позиции остаются фиксированными. Если после замены цвета у частицы энергия системы уменьшается или остается неизменной, тогда предложенный цвет принимается. Но, и здесь состоит основное отличие от жадного алгоритма, если энергия повышается, то новый цвет принимается с вероятностью $P = \exp[(E - E')/T]$, где E это энергия текущего состояния системы, E' — энергия нового состояния, а T имеет смысл искусственной температуры, которая убывает как некоторая функция числа шагов. После рассмотрения различных кандидатов на роль функции температуры была выбрана линейная зависимость $T_{n+1} = T_n - \Delta T$. После прохода по всем частицам, температура понижается и выше описанный процесс повторяется до тех пор, пока температура не достигает нуля. В процессе работы алгоритма вероятность принятия конфигурации с увеличенной энергией снижается, и, как следствие, системе становится сложнее переходить между локальными минимумами.

Фундаментальное различие между жадным алгоритмом и алгоритмом имитации отжига показано на рисунке 6.4. На рисунке слева энергия стремительно падает на протяжении нескольких десятков проходов (под проходом понимается обход всех точек для фиксированной температуры), и системы оказывается в

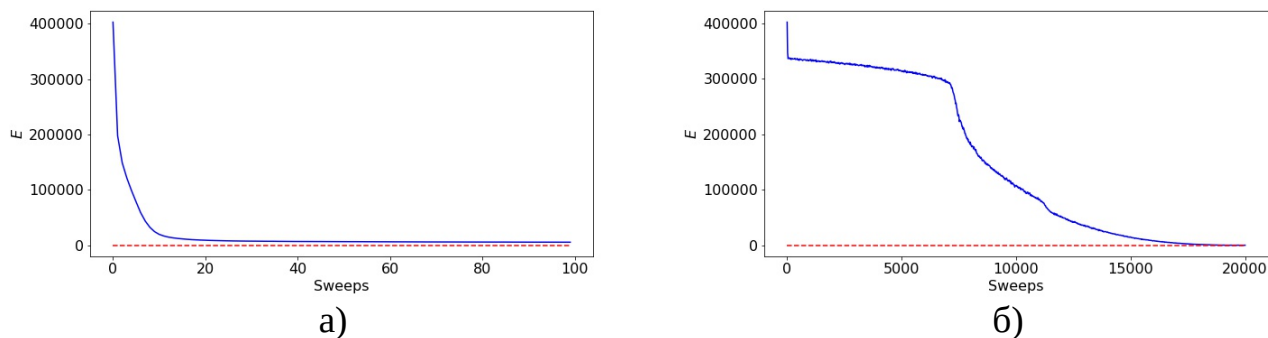


Рисунок 6.4 — Типичные кривые минимизации для $q = 6$. **(а)**: Жадный алгоритм; **(б)**: Алгоритм имитации отжига.

окрестности локального минимума, и в дальнейшем, уменьшить энергию удастся лишь незначительно. На рисунке справа, соответствующем алгоритму имитации отжига, ситуация сильно лучше, несмотря на порядки большее число итераций. Сначала, процесс минимизации аналогичен жадному, но затем наступает резкий переход к стадии медленного постепенного снижения энергии, которая занимает около трети всего процесса. Далее, в районе 7500 шагов, происходит фазовый переход – начинается кластеризация и энергия снова начинает очень быстро падать. Можно провести аналогию с процессом кристаллизации, а саму искусственно введенную температуру рассматривать как «температуру кристаллизации». Положение точки фазового перехода зависит от значения q . На завершающем этапе происходят некоторые флуктуации на границах сформировавшихся кластеров, и энергия падает ещё больше. В результате, алгоритм имитации отжига приводит к состояниям с намного меньшей энергией, чем те, к которым приходила система после минимизации жадным алгоритмом.

6.2 Анализ минимизированных конфигураций нелокальной модели Поттса на случайной решетке

Параметры модели, при которых происходила минимизация энергии, представлены в таблице 1.

Для каждого выбранного q было сделано 200 запусков процедуры минимизации, перед каждым запуском случайным образом генерировались цвета точек, позиции не менялись. В качестве проверки были проведены минимизации, где по-

Таблица 1 — Параметры модели, использованные при симуляциях.

Величина	Описание	Значение
R	радиус взаимодействия	1.0
δ	ширина кольца взаимодействия	0.02
L	линейный размер области	20.0
N	число частиц	159 155
q	число цветов	2..7
l_f	ширина граничной области	1.01
δ/R	локализация взаимодействия	0.02
$L/(R\sqrt{N})$	отношение среднего расстояния между точками к R	0.05
$2\pi RN\delta/L^2$	среднее число соседей у точки	50

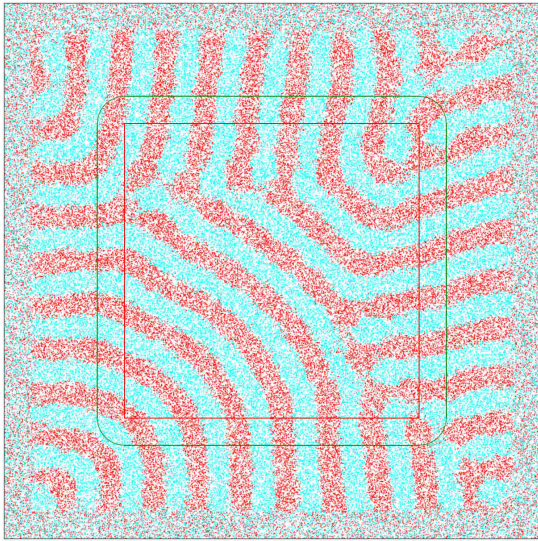
зиции точек менялись при новом запуске, но никаких отличий от первого случая обнаружено не было. В данном случае для задания случайной конфигурации на случайной решетке достаточно обновить цвета точек, в обновлении позиций нет необходимости. Более того, обновление позиций при каждом запуске приводит к необходимости пересчитывать соседей для каждой точки, что является достаточно затратной процедурой, которой лучше избежать, если нет свидетельств, что она оказывает какое-то влияние на результаты минимизации.

Ниже проведено описание результатов минимизации для различных q .

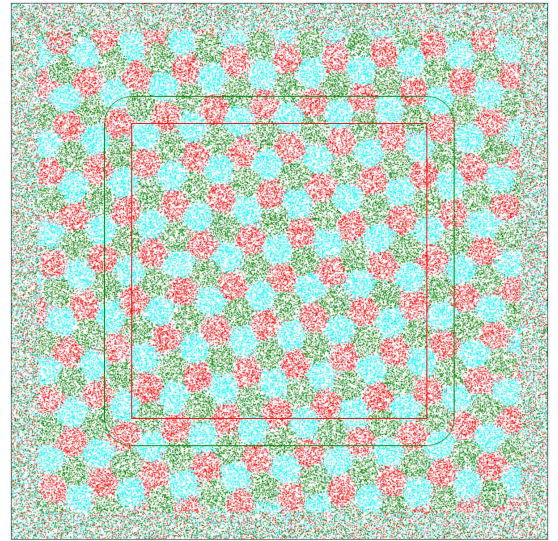
6.2.1 $q \leq 4$

Сначала рассмотрим случай $q = 2$. Типичные вакуумные конфигурации представлены чередующимися полосками и показаны на рисунке 6.5a. Энергия данных конфигураций составляет примерно 65% от исходной, соответствующей случайной раскраске.

Для $q = 3$ минимизированные конфигурации представляют собой гексагональный паттерн (рисунок 6.5б) с энергией около 31% от исходной конфигурации. Данное число соответствует правильной, практически «чистой» раскраске, которая возникает в 70% минимизаций. Интересное наблюдение заключается в том, что на границах кластеров возникает некоторое нетривиальное смешивание

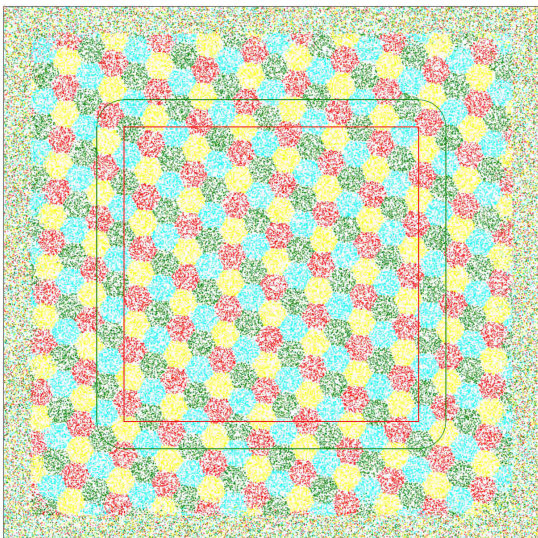


a)

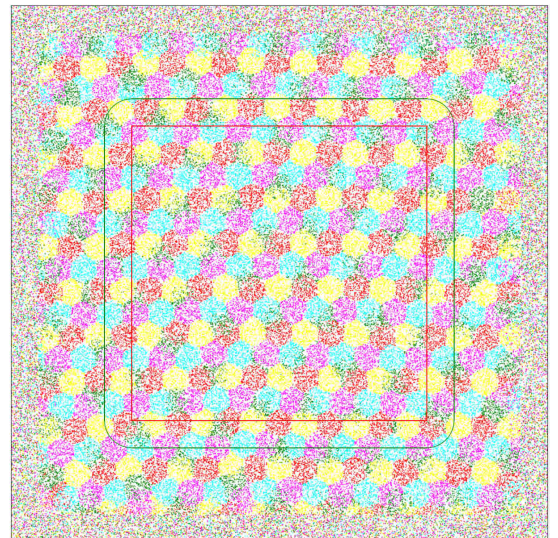


б)

Рисунок 6.5 — Типичные вакуумные конфигурации. **(а)**: $q = 2$; **(б)**: $q = 3$



a)



б)

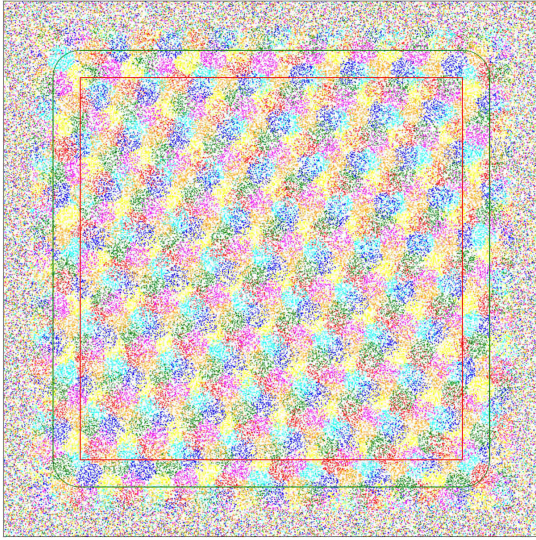
Рисунок 6.6 — Типичные вакуумные конфигурации. **(а)**: $q = 4$; **(б)**: $q = 5$

цветов, которое позволяет уменьшить энергию конфигурации по сравнению с идеальным гексагональным паттерном. Было установлено, что если взять идеально правильную конфигурацию с ребром шестигранника $l = 0.64$, то энергия такой конфигурации будет больше энергии минимизированной конфигурации, их соотношение будет около 0.86, то есть данный эффект оказывает достаточно сильное влияние.

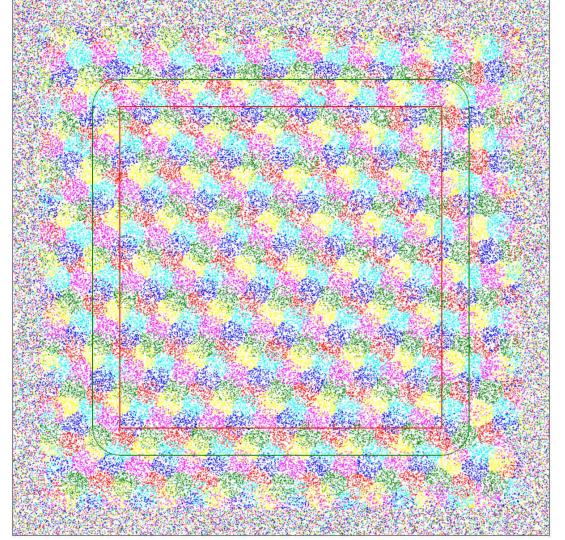
Для $q = 4$ энергия минимизированных конфигураций уже всего около 3% от исходной, но все ещё далека от нуля. По структуре данные конфигурации аналогичны конфигурациям для $q = 3$ — состоят из кластеров правильной гексагональной формы (рисунок 6.6a). Они составляют 40% от общего числа конфигураций, остальная часть имеет различные нерегулярности в своей структуре и бóльшую энергию. Эффект смешивания цветов на границах кластера играет ещё более высокую роль, чем в предыдущем случае — отношение энергий вакуумной конфигурации к энергии идеально правильной конфигурации с оптимальным размером ребра шестиугольника $l = 0.56$ равно 0.7. Если посмотреть на такие конфигурации невооруженным взглядом, то разницу между ними определить невозможно, а энергия различается на 30%, что является поразительным результатом, свидетельствующим о нетривиальной структуре вакуума исследуемой модели. Подводя итог анализу модели для малого количества цветов, можно отметить, что случай двух цветов не представляет особого интереса, но уже для трех цветов получены нестандартные структуры вакуумных конфигураций, обладающих все ещё далекой от нуля энергией, что в контексте проблемы НЭХ позволяет сделать вывод о том, что ее решением будет являться как минимум 5 цветов. Данное число цветов будет рассмотрено ниже.

6.2.2 $q \geq 5$

В данной секции удобнее будет провести анализ результатов в обратном порядке, поэтому сначала рассмотрим случай $q = 7$, который является верхней границей для решения проблемы НЭХ, и как следствие, для дискретной версии проблемы, которую описывает данная модель, энергия вакуумных конфигураций должна быть равна нулю. Это отличная проверка модели и алгоритма минимизации ее энергии. Решение на рисунке 6.26 удовлетворяет достаточно широкому

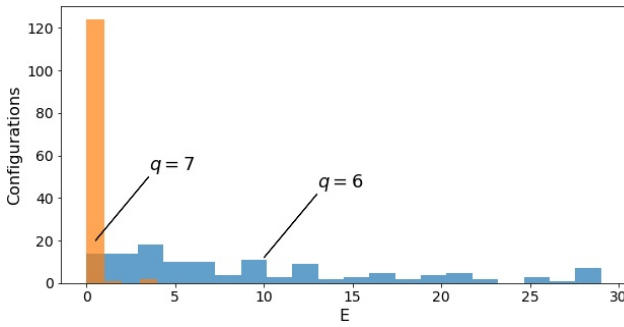


а)

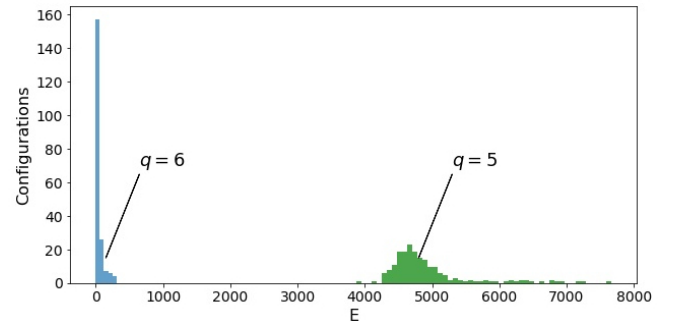


б)

Рисунок 6.7 — Примеры вакуумных конфигураций с $E = 0$. **(а):** $q = 7$; **(б):** $q = 6$.



а)



б)

Рисунок 6.8 — Сравнение распределений энергий для **(а):** шести и семи цветов, 127 конфигураций с наименьшей энергией; **(б):** пяти и шести цветов, 200 конфигураций.

диапазону длины ребра гексагона : $l \in (\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{2})$. После минимизации исходных конфигураций со случайной раскраской в 97.5% случаях получились конфигурации с нулевой энергией. Один из примеров показан на рисунке 6.7а.

При повышении среднего числа соседей в два раза (путем увеличения N), нулевая энергия была достигнута в 41% конфигураций. В отличие от $q = 3$ и $q = 4$ случаев, где преобладают «чистые» гексагональные конфигурации, для семи цветов подобной обнаружить не удалось. Тем не менее мы все равно имеем дело с кластерами правильной шестиугольной формы, но здесь гексагональные решетки для разных цветов накладываются друг на друга, происходит их смещение относительно друг друга. Это обстоятельство несколько не противоречит

конфигурации на рисунке 6.2б, так как нулевой энергии могут соответствовать конфигурации различной структуры, в том числе и нерегулярной.

Аналогичная структура наблюдается и для $q = 6$. Конфигурации с нулевой энергией возникают примерно в 4% случаях. Подавляющее число минимизаций приводит к околонулевым энергиям. Сравнительная гистограмма распределений для 6 и 7 цветов представлена на рисунке 6.8а. Пример конфигурации с нулевой энергией приведен на рисунке 6.7б. Очевидно, что если по аналогии с семью цветами построить гексагональное замощение плоскости, то энергия данной конфигурации не будет равна нулю, но поражает то, насколько она отличается от энергии минимизированных конфигураций. Энергия такой оптимальной конфигурации с ребром $l = 0.55$ равна 15 740, что разительно отличается от околонулевых значений вакуумных конфигураций.

Перейдем к описанию результатов для $q = 5$. Типичная конфигурация приведена на рисунке 6.6б. Как и в случае $q = 4$ формируется гексагональный кластерный паттерн, но представленный только четырьмя цветами, пятый цвет оказывается частично замещенным и представляет собой вкрапления частиц в общую регулярную гексагональную структуру. Соответствующие ему кластера имеют нерегулярную форму, а конкретный цвет может меняться в зависимости от подобласти. Мы можем наблюдать необычный конфликт цветовой и геометрической симметрией, и вторая преобладает — формируется регулярный паттерн ценой нарушения цветовой симметрии, так как число частиц с выпадающим цветом меньше, чем число частиц других цветов. Энергия таких минимизированных конфигураций составляет всего 1% от исходной. Тем не менее, как видно из гистограммы на рисунке 6.8б, существует огромный разрыв между распределениями энергий вакуума для пяти и шести цветов. На основании данных результатов можно сделать вывод о том, что энергия основного состояния для $q = 5$ не равна нулю.

6.2.3 Стабильность модели при разных параметрах

Как было упомянуто в секции 6.1, для анализа модели было выбрано фиксированное значение среднего числа соседей $\langle n \rangle = 50$. В то время как исследование зависимости поведения модели от вариации $\langle n \rangle$ не было задачей работы, рассмотрим несколько соображений, аргументирующих выбор данного параметра. Если

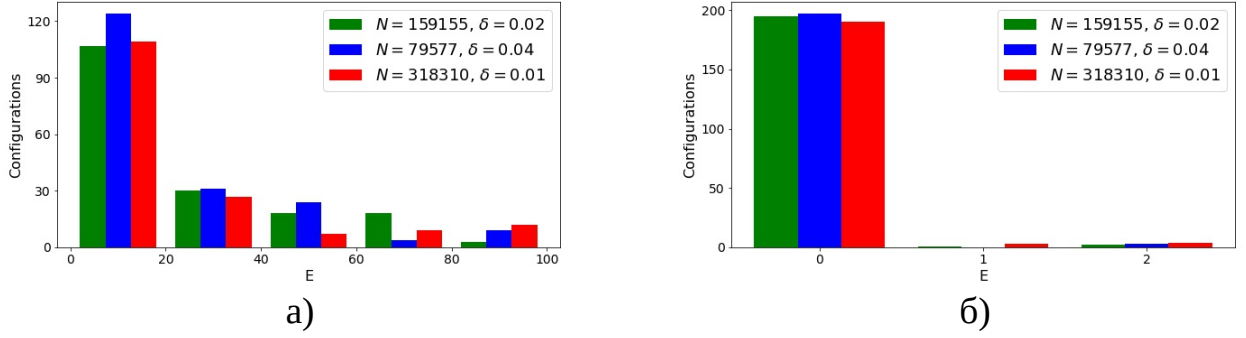


Рисунок 6.9 — Распределения энергий минимизированных конфигураций для различных пар (N, δ) . **(а):** $q = 6$; **(б):** $q = 7$

задать слишком малое значение $\langle n \rangle$, то кластеризации не произойдет. С этой стороны выбор ведущего к кластеризации $\langle n \rangle$ выглядит разумным. И нет никакой причины ожидать, что с увеличением $\langle n \rangle$ кластеризация может нарушиться. Минимумы энергии, достигнутые алгоритмом имитации отжига могут измениться, но данный вопрос требует отдельного достаточно масштабного исследования, что выходит за рамки данной работы. Среднее число соседей $\langle n \rangle$ задается двумя параметрами — числом частиц N и шириной кольца взаимодействия δ . Фиксируя $\langle n \rangle$, мы определяем обратную пропорциональность между N и δ . Важным является вопрос о стабильности модели относительно вариации данных параметров. На рисунке 6.9 показаны три комбинации N и δ для фиксированного числа соседей. Распределения энергий аналогичны для всех случаев — есть некоторые незначительные различия, но общая тенденция одинакова, что свидетельствует об устойчивости модели относительно вариации параметров при выбранном среднем числе соседей.

6.2.4 Нарушение цветовой симметрии

Наблюдаемое нарушение цветовой симметрии является следствием отсутствия кристаллографической симметрии пятого порядка. Для того, чтобы получить количественное описание данного явления, было исследовано отношение числа частиц с наименее представленным цветом $N_{\text{minc}}(A)$ к общему числу частиц $N(A)$ внутри области A . Зависимость данного отношения, нормализованного на число цветов q , показана на рисунке 6.10а. Кривые для исходной

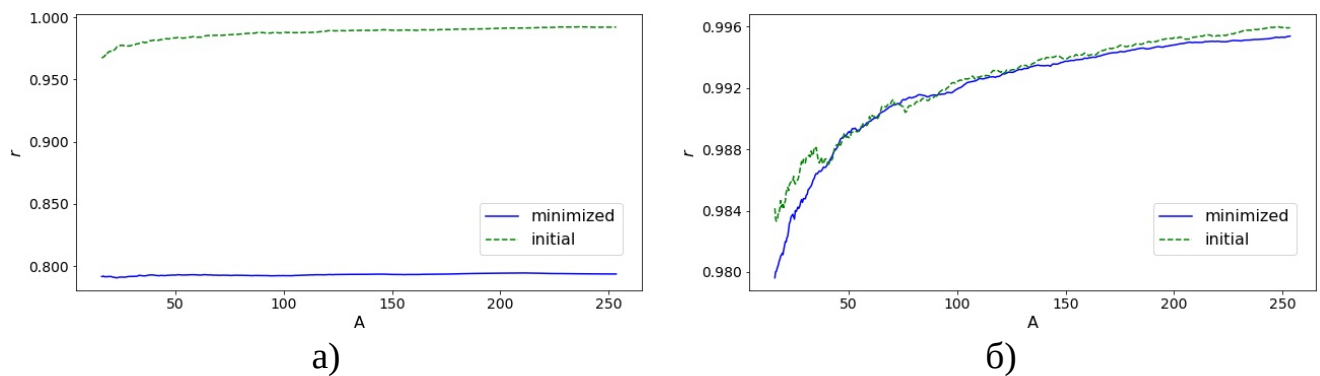


Рисунок 6.10 — Отношение числа частиц наименее представленного цвета к общему числу частиц. **(а)**: 5 цветов; **(б)**: три цвета.

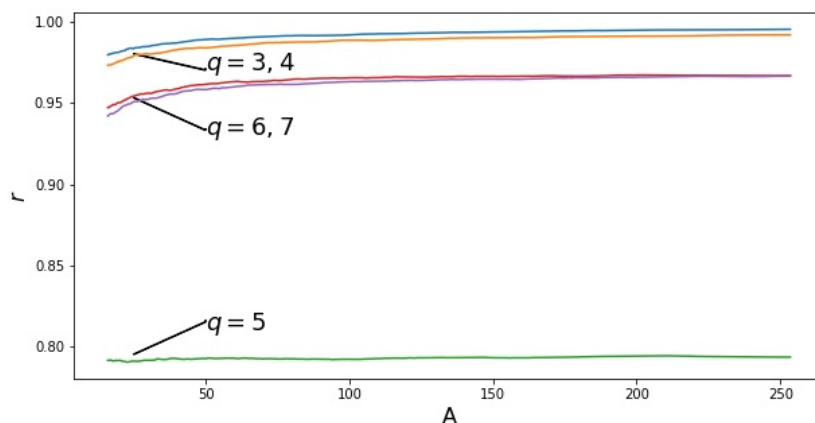


Рисунок 6.11 — Отношение числа частиц наименее представленного цвета к общему числу частиц для всех цветов. Можно наблюдать три уровня. Две верхние кривые соответствуют трем и четырем цветам, промежуточные – шести и семи цветам, а нижняя кривая представляет пять цветов.

случайной и минимизированной конфигураций серьезно отличаются. Что интересно, даже для относительно больших областей, вторая кривая не приближается к первой, они идут параллельно. Таким образом эффект представляется фундаментальным и проявляется не локально, а глобально. Для сравнения, на рисунке 6.10б приведена зависимость для трех цветов. В данном случае кривые идут вместе без каких-либо значимых расхождений. Суммарная картина представлена на рисунке 6.11. Из нее можно сделать вывод о том, что нарушение цветовой симметрии присуще не только пяти цветам, оно возникает и для шести и семи цветов (и даже для $q = 4$), но в намного меньшей степени.

Заключение

В представленной диссертации с помощью методов моделирования на решетке были исследованы вакуумы калибровочных теорий и основные состояния спиновых систем при наличии нетривиальной топологии. В качестве калибровочных теорий были выбраны компактная электродинамика и теория Янга-Миллса с калибровочной группой $SU(3)$. В обеих теориях нетривиальная топология вакуума задавалась граничными условиями Казимира, которые заключаются в помещении в вакуум нейтральных идеально проводящих пластин, ограничивающих одну из размерностей. В случае компактной электродинамики проанализировано, как такое изменение топологии влияет на поведение топологических дефектов теории, нуль-размерных монополей. В качестве спиновой модели была рассмотрена модель Поттса на случайной решетке, где нетривиальная топология была введена путем задания нелокального взаимодействия между спинами.

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Показано, что присутствие параллельных идеально проводящих пластин приводит к реструктуризации вакуума компактной электродинамики в $3+1$ измерениях. Это проявляется в подавлении монопольного конденсата между пластинами, и, как следствие, точка фазового перехода конфайнмент-деконфайнмент смещается в сторону сильной связи.
2. Обнаружено, что в $SU(3)$ глюодинамике в $3+1$ измерениях при наличии хромометаллических пластин на границе возникает новая квазичастица с массой $m_{\text{gt}} = 1.0(1)\sqrt{\sigma} = 0.49(5)$ ГэВ, что в несколько раз меньше массы основного состояния 0^{++} глюбола, $M_{0^{++}} = 3.405(21)\sqrt{\sigma} = 1.653(26)$ ГэВ. Данная квазичастица интерпретирована как непертурбативное связанное состояние глюона и его образа противоположного цвета в хромометаллическом зеркале. В качестве названия нового состояния предложен термин «глютон», по аналогии с поверхностным экситоном – граничной электрически-нейтральной квазичастицей, возникающей в полупроводниках и диэлектриках вблизи границ.
3. Выдвинуто предположение о наличии аналогичных связанных состояний для тяжелых кварков. В пользу их существования предложено несколько аргументов. Во-первых, проведен анализ зависимости свободной энергии тяжелого кварка от расстояния до хромометаллического

зеркала, результаты которого свидетельствует о притяжении кварка зеркалом. Во-вторых, выполнено исследование корреляторов петель Полякова для пробных цветных зарядов на различном расстоянии от зеркала, которое позволило установить механизм возникновения притяжения. Он заключается в формировании удерживающей струны между кварком и его образом в зеркале. Для обозначения данного состояния предложен термин «кваркитон».

4. Показано, что в $SU(3)$ теории петля Полякова в пространстве между пластинами, расположенными на небольшом расстоянии, принимает конечные значения. С увеличением расстояния между пластинами она быстро уменьшается, что указывает на формирование кваркитонов и деконфайнмент цвета между близкорасположенными пластинами. Также показано, что с увеличением расстояния между пластинами свободная энергия кваркитонов увеличивается, петля Полякова между пластинами исчезает, что приводит к восстановлению фазы конфайнмента.
5. Проведен анализ основных состояний нелокальной модели Поттса на случайной решетке, который продемонстрировал, что в основном состоянии системы цвета частиц формируют близкий к правильному гексагональный паттерн с некоторыми флуктуациями и нетривиальным смешиванием на границах цветовых кластеров.
6. Показано, что с увеличением числа цветов, энергия основного состояния системы быстро падает. Проведенный анализ распределений энергии для различного числа цветов показал, что для нулевой энергии вакуума необходимо как минимум шесть цветов.
7. Обнаружено, что основное состояние модели для пяти цветов характеризуется нарушением цветовой симметрии при сохранении геометрической. Показано, что четыре цвета образуют структуру из близких к правильным шестиугольников (как и в случае другого числа цветов), но пятый цвет оказывается вытесненным – число частиц данного цвета приблизительно на 20% меньше, чем число частиц других цветов.

С одной стороны, результаты выполненной работы подтверждают выводы, опубликованные ранее для $2+1$ измерений. В $(3+1)$ -компактной электродинамике между пластинами, как и в $(2+1)$ -теории, наблюдается ослабление удерживающих свойств вакуума между пластинами. В $(3+1)$ -глюодинамике с калибровочной группой $SU(3)$, как и в $(2+1)$ -теории с калибровочной группой $SU(2)$, обнару-

жен новый массовый масштаб, который в несколько раз меньше минимального массового масштаба теории – массы основного состояния 0^{++} глюбола. С другой стороны, в настоящей работе предложена интерпретация массового масштаба как нового граничного состояния, образованного глюоном со своим образом в хромометаллическом зеркале. Качественно обоснована возможность существования аналогичных состояний для кварков вблизи границ. Несомненно, данное заключение требует дальнейшей проверки. Например, интересным представляется исследование зависимости профиля струны между кварком и антикварком от расстояния между ними и расстояния до пластины. Решающим аргументом за или против новых граничных состояний кварков может быть исследование теории с фермионными степенями свободы. Использование в данной работе решеточных методов исследования вакуума с пластинами Казимира открывает возможности для применения данных методов для изучения более сложных граничных поверхностей, в первую очередь сферических, что очень актуально в контексте модели мешков для адронов.

Выполненный в работе анализ основных состояний спиновой нелокальной модели Поттса на случайной решетке продемонстрировал существование нетривиальных вакуумных конфигураций у данной модели. В начальном «горячем» состоянии модель обладает цветовой симметрией, но в процессе достижения основного состояния к ней добавляется симметрия геометрическая – вакуумные конфигурации представляют собой кластеризацию спинов в регулярные шестиугольники, образующие правильный паттерн с флуктуациями на границах. Но случай пяти цветов стоит особняком – как и для других цветов основное состояние характеризуется геометрической симметрией, но цветовая нарушается! Примечательно, что даже в этом случае энергия системы статистически существенно выше нуля, что позволяет сделать заключение о недостаточности пяти цветов для достижения нулевой энергии основного состояния. Данный вывод предоставляет сильный аргумент в пользу недостаточности пяти цветов для решения проблемы Нелсона-Эрдёша-Хадвигера, но для более определенных утверждений необходимо более систематическое исследование, которое несомненно позволит глубже изучить структуру основных состояний данной спиновой системы.

Таким образом, существование нетривиальной топологии теории приводит к существенной динамической модификации ее основного состояния. Это происходит как и в калибровочных теориях поля, так и в родственных им спиновых системах.

Список литературы

1. *Feynman, R. P.* Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics [Текст] / R. P. Feynman // Reviews of Modern Physics. — 1948. — Т. 20, № 2. — С. 367—387.
2. *Casimir, H. B. G.* On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates [Текст] / H. B. G. Casimir // Indag. Math. — 1948. — Т. 10. — С. 261—263.
3. *Lamoreaux, S. K.* Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6 micrometers range [Текст] / S. K. Lamoreaux // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Т. 78. — С. 5—8. — [Erratum: Phys.Rev.Lett. 81, 5475–5476 (1998)].
4. *Mohideen, U.* Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9 micrometers [Текст] / U. Mohideen, A. Roy // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Т. 81. — С. 4549—4552.
5. New extended model of hadrons [Текст] / A. Chodos [и др.] // Phys. Rev. D. — 1974. — Т. 9, вып. 12. — С. 3471—3495.
6. *Tiburzi, B. C.* Chiral Symmetry Restoration from a Boundary [Текст] / B. C. Tiburzi // Phys. Rev. D. — 2013. — Т. 88. — С. 034027.
7. *Herzog, C. P.* Boundary Conformal Field Theory and a Boundary Central Charge [Текст] / C. P. Herzog, K.-W. Huang // JHEP 10 (2017) 189. — 2017. — 19 июля. — Т. 2017.
8. *Kogut, J. B.* An introduction to lattice gauge theory and spin systems [Текст] / J. B. Kogut // Rev. Mod. Phys. — 1979. — Т. 51, вып. 4. — С. 659—713.
9. *Kramers, H. A.* Statistics of the Two-Dimensional Ferromagnet. Part I [Текст] / H. A. Kramers, G. H. Wannier // Phys. Rev. — 1941. — Т. 60, вып. 3. — С. 252—262.
10. *Wegner, F. J.* Duality in Generalized Ising Models and Phase Transitions without Local Order Parameters [Текст] / F. J. Wegner // Journal of Mathematical Physics. — 1971. — Т. 12, № 10. — С. 2259—2272.
11. *Balian, R.* Gauge fields on a lattice. I. General outlook [Текст] / R. Balian, J. M. Drouffe, C. Itzykson // Physical Review D. — 1974. — Т. 10, № 10. — С. 3376—3395.

12. *Kosterlitz, J. M.* Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems [Текст] / J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless // Journal of Physics C: Solid State Physics. — 1973. — Т. 6, № 7. — С. 1181—1203.
13. *Banks, T.* Phase transitions in Abelian lattice gauge theories [Текст] / T. Banks, R. Myerson, J. Kogut // Nuclear Physics B. — 1977. — Т. 129, № 3. — С. 493—510.
14. *Migdal, A.* Phase transitions in gauge and spin-lattice systems [Текст] / A. Migdal // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1975. — Т. 69. — С. 1457—1465.
15. *Guldan, F.* On a problem of coloring the real plane [Текст] / F. Guldan // Mathematica Bohemica. — 1991. — Т. 116, № 3. — С. 309—318.
16. *Chernodub, M.* QCD Vacuum as Dual Superconductor: Quark Confinement and Topology [Текст] / M. Chernodub // Handbook of Nuclear Physics. — Springer Nature Singapore, 2023. — С. 2897—2938.
17. *Arafune, J.* Topology of Higgs fields [Текст] / J. Arafune, P. G. O. Freund, C. J. Goebel // Journal of Mathematical Physics. — 1975. — Т. 16, № 2. — С. 433—437.
18. *Поликарпов, М.* Фракталы, топологические дефекты и невылетание в решеточных калибровочных теориях [Текст] / М. Поликарпов // УФН. — 1995. — Т. 165, № 6. — С. 627—644.
19. Coexistence of Ordered and Disordered Phases in Potts Models in the Continuum [Текст] / A. De Masi [и др.] // Journal of Statistical Physics. — 2009. — Т. 134, № 2. — С. 243—306.
20. *Planck, M.* Über die Begründung des Gesetzes der schwarzen Strahlung [Текст] / M. Planck // Annalen der Physik. — 1912. — Т. 342, № 4. — С. 642—656.
21. *Nernst, W.* Über einen Versuch, von quantentheoretischen Betrachtungen zur Annahme stetiger Energieänderungen zurückzukehren [Текст] / W. Nernst // Verhandlungen der Deutschen Physikalischen. — 1916. — № 18. — С. 83—116.
22. *Mulliken, R. S.* The Band Spectrum of Boron Monoxide [Текст] / R. S. Mulliken // Nature. — 1924. — Т. 114, № 2862. — С. 349—350.
23. *Born, M.* Zur Quantenmechanik. II. [Текст] / M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan // Zeitschrift für Physik. — 1926. — Т. 35, № 8/9. — С. 557—615.

24. *Dirac, P.* The quantum theory of the emission and absorption of radiation [Текст] / P. Dirac // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. — 1927. — T. 114, № 767. — С. 243—265.
25. *Schwinger, J.* Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation [Текст] / J. Schwinger // Physical Review. — 1948. — T. 74. — С. 1439—1461.
26. *Schwinger, J.* Quantum Electrodynamics. II. Vacuum Polarization and Self-Energy [Текст] / J. Schwinger // Physical Review. — 1949. — T. 75, № 4. — С. 651—679.
27. *Milonni, P. W.* The quantum vacuum: an introduction to quantum electrodynamics [Текст] / P. W. Milonni. — Academic Press, 1994.
28. *Ициксон, К.* Квантовая теория поля [Текст]. Т. 1 / К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер. — Москва: Мир, 1984.
29. *Kabashi, Y.* Casimir Effect [Текст] / Y. Kabashi, S. Kabashi // Journal of Natural Sciences and Mathematics of UT. Т. 4. — 2019.
30. *Milonni, P. W.* Radiation pressure from the vacuum: Physical interpretation of the Casimir force [Текст] / P. W. Milonni, R. J. Cook, M. E. Goggin // Physical Review A. — 1988. — T. 38, № 3. — С. 1621—1623.
31. *Schwinger, J.* Casimir effect in dielectrics [Текст] / J. Schwinger, L. L. DeRaad, K. A. Milton // Annals of Physics. — 1978. — T. 115, № 1. — С. 1—23.
32. *Boyer, T. H.* Quantum Electromagnetic Zero-Point Energy of a Conducting Spherical Shell and the Casimir Model for a Charged Particle [Текст] / T. H. Boyer // Physical Review. — 1968. — T. 174, № 5. — С. 1764—1776.
33. *Davies, B.* Quantum Electromagnetic Zero-Point Energy of a Conducting Spherical Shell [Текст] / B. Davies // Journal of Mathematical Physics. — 1972. — T. 13, № 9. — С. 1324—1329.
34. *Balian, R.* Electromagnetic waves near perfect conductors. II. Casimir effect [Текст] / R. Balian, B. Duplantier // Annals of Physics. — 1978. — T. 112, № 1. — С. 165—208.
35. *Milton, K. A.* Casimir self-stress on a perfectly conducting spherical shell [Текст] / K. A. Milton, L. L. DeRaad, J. Schwinger // Annals of Physics. — 1978. — T. 115, № 2. — С. 388—403.

36. *Kenneth, O.* Opposites Attract: A Theorem about the Casimir Force [Текст] / O. Kenneth, I. Klich // Physical Review Letters. — 2006. — Т. 97, № 16. — С. 160401.
37. *Jiang, Q.-D.* Chiral Casimir forces: Repulsive, enhanced, tunable [Текст] / Q.-D. Jiang, F. Wilczek // Physical Review B. — 2019. — Т. 99, № 12. — С. 125403.
38. The Casimir effect in chiral media using path integral techniques [Текст] / F. Canfora [и др.] // Journal of High Energy Physics. — 2022. — Т. 2022, № 9.
39. *Qi, X.-L.* Topological field theory of time-reversal invariant insulators [Текст] / X.-L. Qi, T. L. Hughes, S.-C. Zhang // Physical Review B. — 2008. — Т. 78, № 19. — С. 195424.
40. *Grushin, A. G.* Consequences of a condensed matter realization of Lorentz-violating QED in Weyl semi-metals [Текст] / A. G. Grushin // Physical Review D. — 2012. — Т. 86, № 4. — С. 045001.
41. *Bordag, M.* Quantum field theoretic treatment of the Casimir effect [Текст] / M. Bordag, D. Robaschik, E. Wieczorek // Annals Phys. — 1985. — Т. 165. — С. 192—213.
42. *Barton, G.* QED between parallel mirrors: light signals faster than c , or amplified by the vacuum [Текст] / G. Barton, K. Scharnhorst // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1993. — Т. 26, № 8. — С. 2037—2046.
43. *Liberati, S.* Faster-than- c Signals, Special Relativity, and Causality [Текст] / S. Liberati, S. Sonego, M. Visser // Annals of Physics. — 2002. — Т. 298, № 1. — С. 167—185.
44. *Flachi, A.* Strongly Interacting Fermions and Phases of the Casimir Effect [Текст] / A. Flachi // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Т. 110, № 6. — С. 060401.
45. *Molochkov, A.* Nonperturbative Casimir Effects: Vacuum Structure, Confinement, and Chiral Symmetry Breaking [Текст] / A. Molochkov // Proceedings of the Nobel Symposium 167. — 2023.
46. *Chernodub, M.* Nonperturbative Casimir Effects in Field Theories: aspects of confinement, dynamical mass generation and chiral symmetry breaking [Текст] / M. Chernodub, V. A. Goy, A. Molochkov // Proceedings of XIII Quark Confinement and the Hadron Spectrum — PoS(Confinement2018). — Sissa Medialab, 2019.

47. *Chernodub, M. N.* Nonperturbative Casimir effect and monopoles: compact Abelian gauge theory in two spatial dimensions [Текст] / M. N. Chernodub, V. A. Goy, A. V. Molochkov // Phys. Rev. D. — 2017. — Т. 95, № 7. — С. 074511.
48. *Chernodub, M. N.* Casimir effect and deconfinement phase transition [Текст] / M. N. Chernodub, V. A. Goy, A. V. Molochkov // Phys. Rev. D. — 2017. — Т. 96, № 9. — С. 094507.
49. *Polyakov, A.* Quark confinement and topology of gauge theories [Текст] / A. Polyakov // Nuclear Physics B. — 1977. — Т. 120, № 3. — С. 429—458.
50. Casimir Effect in Yang-Mills Theory in $D=2+1$ [Текст] / M. N. Chernodub [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2018. — Т. 121, № 19. — С. 191601.
51. *Teper, M. J.* $SU(N)$ gauge theories in $2+1$ dimensions [Текст] / M. J. Teper // Physical Review D. — 1998. — Т. 59, № 1. — С. 014512.
52. Plaquette expectation value and gluon condensate in three dimensions [Текст] / A. Hietanen [и др.] // Journal of High Energy Physics. — 2005. — Т. 2005, № 01. — С. 013—013.
53. *Karabali, D.* Casimir effect in $(2+1)$ -dimensional Yang-Mills theory as a probe of the magnetic mass [Текст] / D. Karabali, V. Nair // Physical Review D. — 2018. — Т. 98, № 10. — С. 105009.
54. *Berezinskii.* Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems having a continuous symmetry group I. Classical systems [Текст] / Berezinskii // Soviet Physics JETP. — 1971.
55. *Berezinsky, V. L.* Destruction of Long-range Order in One-dimensional and Two-dimensional Systems Possessing a Continuous Symmetry Group. II. Quantum Systems. [Текст] / V. L. Berezinsky // Sov. Phys. JETP. — 1972. — Т. 34, № 3. — С. 610.
56. *Макеенко, Ю.* Метод Монте-Карло в калибровочных теориях на решетке [Текст] / Ю. Макеенко // УФН. — 1984. — Т. 143, № 2. — С. 161—179.
57. *Gattringer, C.* Quantum chromodynamics on the lattice [Текст]. Т. 788 / C. Gattringer, C. B. Lang. — Berlin : Springer, 2010.
58. *Creutz, M.* Quarks, gluons and lattices [Текст] / M. Creutz. — Cambridge University Press, 1983.

59. *DeGrand, T. A.* Topological excitations and Monte Carlo simulation of Abelian gauge theory [Текст] / T. A. DeGrand, D. Toussaint // Physical Review D. — 1980. — Т. 22, № 10. — С. 2478.
60. *Chernodub, M. N.* Abelian projections and monopoles [Текст] / M. N. Chernodub, M. I. Polikarpov // NATO Advanced Study Institute on Confinement, Duality and Nonperturbative Aspects of QCD. — 1997. — С. 387—414.
61. *Mandelstam, S.* Vortices and Quark Confinement in Nonabelian Gauge Theories [Текст] / S. Mandelstam // Phys. Rept. — 1976. — Т. 23. — С. 245—249.
62. *'t Hooft, G.* Topology of the Gauge Condition and New Confinement Phases in Nonabelian Gauge Theories [Текст] / G. 't Hooft // Nucl. Phys. B. — 1981. — Т. 190. — С. 455—478.
63. *Chernodub, M. N.* Casimir effect on the lattice: U(1) gauge theory in two spatial dimensions [Текст] / M. N. Chernodub, V. A. Goy, A. V. Molochkov // Phys. Rev. D. — 2016. — Т. 94, № 9. — С. 094504.
64. *Pavlovsky, O.* Casimir energy in the compact QED on the lattice [Текст] / O. Pavlovsky, M. Ulybyshev. — 2009. — arXiv: [0901.1960](https://arxiv.org/abs/0901.1960).
65. *Pavlovsky, O.* Casimir energy calculations within the formalism of the noncompact lattice QED [Текст] / O. Pavlovsky, M. Ulybyshev // Int. J. Mod. Phys. A. — 2010. — Т. 25. — С. 2457—2473.
66. *Pavlovsky, O. V.* Casimir energy in noncompact lattice electrodynamics [Текст] / O. V. Pavlovsky, M. V. Ulybyshev // Theor. Math. Phys. — 2010. — Т. 164. — С. 1051—1063.
67. *Boudreau, J. F.* Applied Computational Physics [Текст] / J. F. Boudreau, E. S. Swanson. — New York : Oxford University Press, 2018.
68. *Ivanenko, T. L.* Condensate of Abelian monopoles and confinement in lattice gauge theories [Текст] / T. L. Ivanenko, A. V. Pochinsky, M. I. Polikarpov // Phys. Lett. B. — 1993. — Т. 302. — С. 458—462.
69. Compact QED under scrutiny: It's first order [Текст] / G. Arnold [и др.] // Nucl. Phys. B Proc. Suppl. / под ред. R. Edwards, J. W. Negele, D. Richards. — 2003. — Т. 119. — С. 864—866.

70. *Vettorazzo, M.* Electromagnetic fluxes, monopoles, and the order of the 4-d compact U(1) phase transition [Текст] / M. Vettorazzo, P. de Forcrand // Nucl. Phys. B. — 2004. — Т. 686. — С. 85—118.
71. *Cougo-Pinto, M. V.* Schwinger's method for the massive Casimir effect [Текст] / M. V. Cougo-Pinto, C. Farina, A. J. Segura-Santonja // Letters in Mathematical Physics. — 1994. — Т. 31, № 4. — С. 309—313.
72. *Barone, F.* Radiative corrections to the Casimir effect for the massive scalar field [Текст] / F. Barone, R. Cavalcanti, C. Farina // Nuclear Physics B - Proceedings Supplements. — 2004. — Т. 127. — С. 118—122.
73. *Volkov, B. A.* Two-dimensional massless electrons in an inverted contact [Текст] / B. A. Volkov, O. Pankratov // Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1985. — Т. 42, № 4. — С. 145—148.
74. *Hasan, M. Z.* Colloquium: Topological insulators [Текст] / M. Z. Hasan, C. L. Kane // Reviews of Modern Physics. — 2010. — Т. 82, № 4. — С. 3045—3067.
75. *Agranovich, V. M.* Surface Polaritons [Текст] / V. M. Agranovich. — Elsevier Science, Technology Books, 2012.
76. *Cocletzi, G. H.* Excitons: from excitations at surfaces to confinement in nanostructures [Текст] / G. H. Cocletzi, W. L. Mochán // Surface Science Reports. — 2005. — Т. 57, № 1/2. — С. 1—58.
77. *Agranovich, V. M.* Excitations in Organic Solids [Текст] / V. M. Agranovich. — Oxford University Press. — С. 512.
78. *Gavrilenko, V. I.* Optics of Nanomaterials [Текст] / V. I. Gavrilenko. — Taylor & Francis Group, 2010.
79. Excitons [Текст] / под ред. K. Cho. — Springer Berlin Heidelberg, 1979.
80. *Michael, C.* Adjoint sources in lattice gauge theory [Текст] / C. Michael // Nuclear Physics B. — 1985. — Т. 259, № 1. — С. 58—76.
81. *Campbell, N.* The adjoint source potential in SU(3) lattice gauge theory [Текст] / N. Campbell, I. Jorasz, C. Michael // Physics Letters B. — 1986. — Т. 167, № 1. — С. 91—93.

82. *Jorysz, I.* The field configurations of a static adjoint source in SU(2) lattice gauge theory [Текст] / I. Jorysz, C. Michael // Nuclear Physics B. — 1988. — ИЮНЬ. — Т. 302, № 3. — С. 448—470.
83. *Philipsen, O.* String breaking in SU(2) Yang Mills theory with adjoint sources [Текст] / O. Philipsen, H. Wittig // Physics Letters B. — 1999. — АПР. — Т. 451, № 1/2. — С. 146—154.
84. *Simonov, Y.* Gluelump spectrum in the QCD string model [Текст] / Y. Simonov // Nuclear Physics B. — 2001. — ЯНВ. — Т. 592, № 1/2. — С. 350—368.
85. Baryon structure in the bag theory [Текст] / A. Chodos [и др.] // Phys. Rev. D. — 1974. — Т. 10, вып. 8. — С. 2599—2604.
86. Gluon condensates and effective gluon mass [Текст] / J. Horak [и др.] // SciPost Physics. — 2022. — Т. 13, № 2.
87. *Milton, K. A.* The Casimir effect: physical manifestations of zero-point energy [Текст] / K. A. Milton. — World Scientific, 2001.
88. *Meissner, W.* Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit [Текст] / W. Meissner, R. Ochsenfeld // Naturwissenschaften. — 1933. — Т. 21, № 44. — С. 787—788.
89. Masses and other parameters of the light hadrons [Текст] / T. DeGrand [и др.] // Phys. Rev. D. — 1975. — Т. 12, вып. 7. — С. 2060—2076.
90. *Athenodorou, A.* The glueball spectrum of SU(3) gauge theory in 3 + 1 dimensions [Текст] / A. Athenodorou, M. Teper // Journal of High Energy Physics. — 2020. — Т. 2020, № 11.
91. *Son, D. T.* Domain walls of relative phase in two-component Bose-Einstein condensates [Текст] / D. T. Son, M. A. Stephanov // Physical Review A. — 2002. — Т. 65, № 6. — С. 063621.
92. *Silaev, M.* Stable fractional flux vortices and unconventional magnetic state in two-component superconductors [Текст] / M. Silaev // Physical Review B. — 2011. — Т. 83.
93. *Agterberg, D. F.* Microscopic prediction of skyrmion lattice state in clean interface superconductors [Текст] / D. F. Agterberg, E. Babaev, J. Garaud // Physical Review B. — 2014. — Т. 90, № 6. — С. 064509.

94. *Maiani, A.* Vortex nucleation barriers and stable fractional vortices near boundaries in multicomponent superconductors [Текст] / A. Maiani, A. Benfenati, E. Babaev // *Physical Review B*. — 2022. — Т. 105, № 22. — С. 224507.
95. *Beaudin, L.* A review of the Potts model [Текст] / L. Beaudin // *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*. — 2007. — Т. 8, вып. 1, № 13.
96. *Wu, F.* The Potts model [Текст] / F. Wu // *Rev. Mod. Phys.* — 1982. — Т. 54, вып. 1. — С. 235—268.
97. *Salahshour, M.* Phase Diagram and Optimal Information Use in a Collective Sensing System [Текст] / M. Salahshour // *Phys. Rev. Lett.* — 2019. — Т. 123, вып. 6. — С. 068101.
98. Efficient Minimization of the Non-local Potts Model [Текст] / M. Werlberger [и др.] // *SSVM* / под ред. А. М. Bruckstein [и др.]. — Springer Berlin Heidelberg, 2012. — С. 314—325.
99. *Drossel, B.* Biological evolution and statistical physics [Текст] / B. Drossel // *Advances in Physics*. — 2001. — Т. 50, № 2. — С. 209—295.
100. *Lagerholm, M.* Airline Crew Scheduling Using Potts Mean Field Techniques [Текст] / M. Lagerholm, C. Peterson, B. Söderberg // *European Journal of Operational Research*. — 2001. — Т. 120. — С. 81—96.
101. *Duminil-Copin, H.* Order/disorder phase transitions: the example of the Potts model [Текст] / H. Duminil-Copin // *Current Developments in Mathematics*. — 2015. — Т. 2015. — С. 27—71.
102. *Sportiello, A.* Combinatorial methods in statistical field theory: Trees, loops, dimers and orientations vs. Potts and non-linear σ -models [Текст] : дис. ... канд. / Sportiello Andrea. — Pisa, Scuola Normale Superiore, 2010.
103. *Kholodenko, A. L.* Onsager's reaction field for the Potts model from the path integral [Текст] / A. L. Kholodenko // *Journal of Statistical Physics*. — 1990. — Т. 58, № 1/2. — С. 355—370.
104. *D. J. Watts, S. W. S.* Collective dynamics of 'small-world' networks [Текст] / S. W. S. D. J. Watts // *Nature*. — 1998. — Т. 393. — С. 440.

105. *Ferraz, C. H. A.* Three-state Potts model on non-local directed small-world lattices [Текст] / C. H. A. Ferraz, J. L. S. Lima // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2017. — Т. 484. — С. 488—498.
106. Building 2D Crystals from 5-Fold-Symmetric Molecules [Текст] / T. Bauert [и др.] // *J. Am. Chem. Soc.* — 2009. — Т. 131, № 10. — С. 3460—3461.
107. Monte Carlo study of hard pentagons [Текст] / T. Schilling [и др.] // *Physical Review E*. — 2005. — Т. 71, вып. 036138.
108. Emergent tetratic order in crowded systems of rotationally asymmetric hard kite particles [Текст] / Z. Hou [и др.] // *Nature communications*. — 2020. — Т. 11, вып. 2064.
109. *Hadwiger, H.* Ungeloste Probleme No. 40 [Текст] / H. Hadwiger // *Elemente der Math.* — 1961. — № 16. — С. 103—104.
110. *Erdos, P.* Some unsolved problems [Текст] / P. Erdos // *Publ.Math.Inst Hung. Acad. Sci.* — 1961. — № 6. — С. 221—254.
111. *Erdos, P.* On a dimension of a graph [Текст] / P. Erdos, F. Harary, W. T. Tutte // *Mathematica*. — 1965. — № 12. — С. 118—122.
112. *Moser, L.* Solution to problem 10 [Текст] / L. Moser, W. Moser // *Canad. Math. Bull.* — 1961. — Т. 4. — С. 187—189.
113. *Saharon, S.* Axiom of choice and chromatic number of the plane [Текст] / S. Saharon, S. Alexander // *Journal of Combinatorial Theory Series A*. — 2003. — Т. 103, № 2. — С. 387—391.
114. *Grey, A. D. de.* The chromatic number of the plane is at least 5 arXiv:1804.02385 [Текст] / A. D. de Grey. — 2018.
115. *Exoo, G.* The Chromatic Number of the Plane is At Least 5: A New Proof [Текст] / G. Exoo, D. Ismailescu // *Discrete and Computational Geometry*. — 2020. — Т. 64, № 1. — С. 216—226.
116. *Gwyn, H.* A finite graph approach to the probabilistic Hadwiger-Nelson problem [Текст] / H. Gwyn. — 2020.
117. *Kirkpatrick, S.* Optimization by Simulated Annealing [Текст] / S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, M. P. Vecchi // *Science*. — 1983. — Т. 220, № 4598. — С. 671—680.