



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE FISICA

---

Trabajo de Tesis Doctoral:

Mecánica Cuántica en espacio-tiempo

---

Tesista: Nahuel L. Diaz

Director: Raúl Dante Rossignoli

Codirector: Juan Mauricio Matera

Año: 2024

---

## Resumen

La presente tesis enfrenta la problemática de establecer si es posible construir una versión de la mecánica cuántica (MC) en espacios de Hilbert que trate al espacio y al tiempo en pie de igualdad, y considere a la simetría de Lorentz de manera explícita en teorías relativistas. La relevancia actual de este problema, intrínseco al área de fundamentos de la mecánica cuántica, radica en las potenciales implicancias para otras áreas como la información, la computación y la gravedad cuántica, y, sobre todo, para el reciente conjunto de ideas que yace en la intersección de las mismas. En la tesis se construye progresivamente un formalismo con las características deseadas, proporcionando así una respuesta afirmativa a la pregunta inicial. La construcción comienza con la generalización del formalismo de Page y Wootters al caso de partículas relativistas y luego al de varias partículas. Esto conlleva a introducir espacios de Hilbert ampliados a través de álgebras que tratan al tiempo y al espacio en pie de igualdad. A través del concepto de operador acción, una versión cuántica de la acción clásica, se establece la existencia de una correspondencia entre los espacios de Hilbert ampliados y la MC convencional. Se demuestra a su vez que la suma sobre historias de la formulación de Feynman adquiere un nuevo significado en estos espacios. Finalmente, se combinan todos los resultados anteriores en una discusión sobre las deficiencias del espacio de fases clásico para abarcar explícitamente simetrías del espacio-tiempo, y sobre como estas son heredadas por la MC, afectando incluso a su formulación ampliada. Se propone entonces una versión aumentada de la formulación Hamiltoniana clásica que involucra corchetes de Poisson simétricos en espacio-tiempo para campos de materia y corchetes de Poisson asociados a las posibles foliaciones del espacio-tiempo. Esta formulación clásica permite obtener ecuaciones de movimiento invariantes en el espacio de fase. Su cuantización lleva directamente a los espacios de Hilbert ampliados, donde además la foliación es cuántica y la simetría de Lorentz explícita. Condicionando con respecto a autoestados de foliación, en analogía con el formalismo de Page y Wootters, se recupera la correspondencia con la MC convencional. Finalmente, se discuten las novedades introducidas por el formalismo, y su potencial para proporcionar nuevas intuiciones de carácter teórico, informacional y computacional, y para introducir teorías físicas que no encuentran una correspondencia con la MC usual.

## Abstract

This thesis addresses the problem of establishing whether it is possible to construct a version of quantum mechanics (QM) in Hilbert spaces that treats space and time on equal footing and considers Lorentz symmetry explicitly in relativistic theories. The current relevance of this problem, intrinsic to the area of the quantum foundations, lies in its potential implications for other areas such as quantum information, quantum computation, and quantum gravity, and especially for the recent set of ideas that lie at the intersection of these fields. In this thesis, a formalism with the desired characteristics is progressively constructed, thus providing an affirmative answer to the initial question. The construction begins with the generalization of the Page and Wootters formalism to the case of relativistic particles and then to multiple particles. This involves introducing enlarged Hilbert spaces through algebras that treat time and space equally. Through the concept of the action operator, a quantum version of the classical action, the existence of a correspondence between the enlarged Hilbert spaces and conventional QM is established. It is also demonstrated that the path integral formulation of Feynman acquires new meaning in these spaces. Finally, all the previous results are combined in a discussion about the deficiencies of the classical phase space in explicitly encompassing spacetime symmetries, and how these are inherited by QM, even affecting its extended formulation. An augmented version of the classical Hamiltonian formulation is then proposed, involving symmetric Poisson brackets in spacetime for matter fields and Poisson brackets associated with possible foliations of spacetime. This classical formulation yields covariant equations of motion in phase space. Its quantization leads directly to the enlarged Hilbert spaces, where the foliation is also quantum, and the Lorentz symmetry is explicit. By conditioning with respect to foliation eigenstates, in analogy with the Page and Wootters formalism, the correspondence with conventional QM is recovered. Finally, the novelties introduced by the formalism are discussed, as well as its potential to provide new insights of a theoretical, informational, and computational nature, and to introduce physical theories that do not have a correspondence with those formulated in conventional QM.

# Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a la universidad pública y gratuita de calidad y a todos aquellos que la hacen posible. No está de más remarcar lo singular de nuestro sistema universitario y científico, y recordar que es importante no darlo por sentado, especialmente en los tiempos actuales. Un profundo agradecimiento corresponde, sin lugar a dudas, a mis directores Raúl Rossignoli y Mauricio Matera, quienes, además de guiarme en el proceso de la tesis con su amplia experiencia, me tuvieron la confianza necesaria que me permitió perseguir mis ideas. Un agradecimiento especial también a Marco Cerezo, con quien he tenido la ocasión de colaborar durante mi doctorado y quien, con su experiencia y calidez humana por igual, me abrió nuevos horizontes. Aprovecho también para agradecer a todos aquellos colegas y amigos, dentro y fuera de la academia, que directa o indirectamente contribuyeron a mi formación e ideas con su interacción. Otro especial agradecimiento a Mari, por su compañía durante estos años de intenso trabajo. Finalmente, el mayor agradecimiento se lo lleva mi familia, principalmente mis padres, por hacer mi formación posible y por sus años de soporte y sacrificio incansable.



# Lista de publicaciones

Las ideas desarrolladas en la presente tesis llevaron a las publicaciones científicas [1-6] indicadas a continuación. Durante el transcurso del Doctorado, se realizó también una pasantía en el Laboratorio de Los Alamos (EEUU), en la que se finalizó el trabajo [6] y en la que se desarrollaron los trabajos [7, 8] sobre computación cuántica, no incluidos en esta Tesis.

- [1] *History state formalism for Dirac's theory*,  
N. L. Diaz y R. Rossignoli,  
Physical Review D **99** (2019), 045008.
- [2] *History state formalism for scalar particles*,  
N. L. Diaz, J. M. Matera y R. Rossignoli,  
Physical Review D **100** (2019), 125020.
- [3] *Spacetime quantum actions*,  
N. L. Diaz, J. M. Matera y R. Rossignoli,  
Physical Review D **103** (2021), 065011.
- [4] *Path Integrals from Spacetime Quantum Actions*,  
N. L. Diaz, J. M. Matera y R. Rossignoli,  
arXiv:2111.05383 (2023).
- [5] *Spacetime quantum and classical mechanics with dynamical foliation*,  
N. L. Diaz, J. M. Matera y R. Rossignoli,  
Physical Review D **109** (2024), 105008.
- [6] *Parallel-in-time quantum simulation via Page and Wootters quantum time*,  
N. L. Diaz, P. Braccia, M. Larocca, J. M. Matera, R. Rossignoli, M. Cerezo,  
arXiv:2308.12944 (2023).

- 
- [7] *Showcasing a barren plateau theory beyond the dynamical Lie algebra*,  
N. L. Diaz et al.,  
arXiv:2310.11505 (2023).
- [8] *Does provable absence of barren plateaus imply classical simulability?*  
*Or, why we need to rethink variational quantum computing*,  
M Cerezo, Martin Larocca, Diego García-Martín, N. L. Diaz, et al. ,  
arXiv:2312.09121 (2023)



# Índice general

<b>I</b>	<b>Introducción y motivación</b>	<b>8</b>
1.1	El tiempo y las revoluciones de la física . . . . .	8
1.2	Descripción general de la propuesta . . . . .	12
<b>II</b>	<b>Preliminares: El tiempo y la mecánica cuántica</b>	<b>15</b>
2.1	Mecánica cuántica tradicional y la objeción de Pauli . . . . .	15
2.2	Relatividad especial y Teorías cuánticas de campos . . . . .	17
2.3	Tiempo cuántico . . . . .	20
<b>III</b>	<b>Tiempo cuántico y la teoría de Dirac</b>	<b>27</b>
3.1	Partícula de Dirac libre . . . . .	29
3.2	Reloj bidimensional y tiempo propio . . . . .	32
3.2.1	Reloj bidimensional . . . . .	33
3.2.2	Sobre la interpretación de $\tau$ . . . . .	34
3.3	Partícula de Dirac en un campo externo . . . . .	35
3.4	Densidad invariante . . . . .	37
3.5	Conclusiones . . . . .	39
	<b>Apéndices</b>	<b>40</b>
3.1	Norma de Dirac . . . . .	40
3.2	Expansión de estados en variables continuas . . . . .	40
3.3	Densidad Invariante . . . . .	42
<b>IV</b>	<b>Tiempo cuántico y partículas escalares</b>	<b>43</b>
4.1	Partícula Escalar . . . . .	45
4.1.1	Formalismo . . . . .	45
4.1.2	Relación con la representación de Wigner . . . . .	48
4.1.3	Propagador de Klein-Gordon . . . . .	49
4.1.4	Normalización en Tiempo . . . . .	51

4.2	Ecuación de Klein-Gordon en un campo externo . . . . .	54
4.3	Límite No Relativista . . . . .	58
4.4	Espacio de Fock Extendido . . . . .	60
4.5	Discusión . . . . .	62
<b>Apéndices</b>		<b>64</b>
4.1	Densidad de corriente . . . . .	64
4.2	Cuantización extendida de una teoría parametrizada . . . . .	66
<b>V</b>	<b>Segunda cuantización extendida y el concepto de acción cuántica</b>	<b>68</b>
5.1	Acción cuántica y el formalismo de Page y Wootters . . . . .	69
5.1.1	Consideraciones Relativistas . . . . .	72
5.2	Formalismo . . . . .	73
5.2.1	Espacio de Hilbert . . . . .	73
5.2.2	Traslaciones en el Tiempo y el operador Acción . . . . .	76
5.2.3	El caso cuadrático . . . . .	79
5.3	Discusión . . . . .	80
<b>VI</b>	<b>Integrales de Feynman a partir de acciones cuánticas</b>	<b>82</b>
6.1	Suma sobre historias como traza cuántica . . . . .	82
6.1.1	“Time-slicing” en espacios de Hilbert . . . . .	82
6.1.2	Funciones de correlación con orden temporal y térmicas . . . . .	85
6.1.3	Bases extendidas y distintas representaciones de Integrales de camino . . . . .	88
6.1.4	Sistemas generales y consideraciones computacionales cuánticas . . . . .	91
6.2	Formalismo con tiempo continuo . . . . .	95
6.2.1	Formalismo y límite de $\tau$ chico . . . . .	95
6.2.2	Funcionales generadores e invariancia- $\tau$ . . . . .	97
6.2.3	Estados en el espacio-tiempo y límite de $\tau$ grande . . . . .	99
6.3	Conclusiones . . . . .	104
<b>Apéndices</b>		<b>105</b>
6.1	$T$ general en propagadores . . . . .	105
6.2	Demostración de la relación entre $\mathcal{S}$ , $\mathcal{P}_t$ y $\mathcal{V}$ , y funciones de correlación	106
6.3	Sobre la “función de partición” del oscilador armónico en el límite continuo . . . . .	108

6.4	Principio de acción estacionaria a partir de un valor medio cuántico . . .	109
-----	--	-----

<b>VII</b>	<b>Mecánica cuántica y clásica en el espacio-tiempo con foliación dinámica</b>	<b>112</b>
------------	--	------------

7.1	Resumen del capítulo . . . . .	112
7.2	Introducción . . . . .	113
7.3	Formalismo de espacio de fases en el espacio-tiempo . . . . .	116
7.3.1	Una analogía espacial introductoria al problema . . . . .	116
7.3.2	Transformación de Legendre covariante . . . . .	118
7.3.3	Estructura simpléctica en el espacio-tiempo . . . . .	122
7.3.4	Ecuaciones de movimiento a partir de corchetes extendidos . . .	124
7.4	Mecánica cuántica en el espacio-tiempo . . . . .	128
7.4.1	Cuantización extendida . . . . .	128
7.4.2	Partículas Extendidas . . . . .	131
7.4.3	Correladores en el espacio tiempo y mapeo a la MC convencional a foliación fija . . . . .	134
7.4.4	Estados generalizados al espacio-tiempo . . . . .	140
7.5	Entrelazamiento entre materia y foliación . . . . .	144
7.5.1	Partículas como operadores controlados por la foliación . . . .	144
7.5.2	Estados entrelazados entre materia-foliación y la covarianza explícita de los valores esperados . . . . .	147
7.6	Conclusiones y perspectivas . . . . .	151

<b>Apéndices</b>		<b>155</b>
------------------	--	------------

7.1	Expresiones clásicas y cuánticas para un $n^\mu$ tipo tiempo general . . .	155
7.2	El caso del campo de Dirac . . . . .	157
7.3	Purificación generalizada para bosones libres generales . . . . .	160
7.4	Correspondencia con la MC convencional para espacio-tiempo discreto y sistemas cuánticos generales . . . . .	162

<b>VIII</b>	<b>Conclusiones y perspectivas de la tesis</b>	<b>171</b>
-------------	--	------------

<b>IX</b>	<b>Anexo: Aplicación computacional de PW</b>	<b>179</b>
-----------	--	------------

9.1	Formalismo del tiempo cuántico y su discretización . . . . .	179
9.2	De relojes-qubit a simulaciones paralelas en tiempo . . . . .	182
9.2.1	Formalismo . . . . .	182
9.2.2	Protocolos secuenciales y en paralelo en el tiempo . . . . .	186

9.3	Acceso a información dinámica a través del entrelazamiento sistema-tiempo . . . . .	190
9.3.1	Propiedades, relación con el problema de equilibración y con las fluctuaciones temporales de observables . . . . .	190
9.3.2	Protocolos para calcular el entrelazamiento sistema-tiempo . .	195
9.4	Simulaciones numéricas . . . . .	197
9.4.1	Promedios de tiempo discreto y entrelazamiento sistema-tiempo	199
9.5	Discusión . . . . .	202

# Introducción y motivación

## 1.1 El tiempo y las revoluciones de la física

El concepto de tiempo, como medida de transformación, atraviesa toda la física. Incluso, en una primera aproximación, podríamos definir a las leyes de la física como el conjunto de reglas que permiten predecir el estado de un sistema a lo largo del tiempo dada cierta información sobre el mismo en un instante “inicial”. Sin embargo, ¿qué entendemos por tiempo? Quizás para un físico, más crucial que ofrecer una definición semánticamente precisa de un concepto, es especificar su rol en una dada descripción matemático/conceptual de la naturaleza, y cómo se relaciona con las demás cantidades físicas (y por ende cómo se mide). Queda claro, por lo tanto, que la respuesta depende del marco conceptual, o rama de la física si se prefiere, que estemos considerando.

En el contexto de la física clásica no relativista, el tiempo se asocia con un parámetro real que cualquier observador puede medir mediante un movimiento periódico (un reloj), en relación al cual puede comparar cambios en otros sistemas físicos. Además, se asume que todos los sistemas de referencia van a coincidir en la descripción de dichos cambios, lo cual podemos reducir a que el tiempo no se ve afectado por las transformaciones de Galileo.

Como es bien sabido, la definición previa sufrió una modificación radical en la primera de las revoluciones de la física de principios del siglo XX: la relatividad de Einstein. En este nuevo marco, y restringiéndonos a la relatividad especial, las coordenadas espacio-temporales que un observador utiliza para describir cierto conjunto de eventos, ya no se traducen a otros observadores de acuerdo a las transformaciones de Galileo. En cambio esto ocurre de acuerdo a las transformaciones de Lorentz, que involucran “combinar al tiempo con el espacio”. Detrás de esta nueva construcción matemática está la finitud de la velocidad de propagación de la información,

que ha de ser la misma para todo observador y que impide sincronizar relojes de forma trivial si estos están separados espacialmente. De manera más abstracta, e importante para la relatividad general, se pasa a hablar de espacio-tiempo como un concepto más fundamental. En particular, queda claro que las leyes de la física tienen que poder escribirse de manera tal que exhiban simetría cuatridimensional<sup>1</sup>. En esta perspectiva geométrica, la única asimetría en las ecuaciones físicas es un signo relativo entre las direcciones temporales y espaciales. A esta construcción todavía hay que agregarle una noción que permita hablar de observadores, y observaciones, concepto que idealizamos como medidas efectuadas “en un dado tiempo”. En una primer aproximación esto puede efectuarse volviendo a una imagen tridimensional a través de una foliación del espacio-tiempo: las foliaciones definen superficies de simultaneidad y una dirección de tiempo. La covarianza (en cuatro dimensiones) de las leyes de la física garantizan que las predicciones físicas no dependan de la elección de la foliación.

La segunda gran revolución de la física de principios del siglo XX, y posiblemente aún más radical, es la mecánica cuántica. Paradójicamente, en este nuevo marco el tiempo mantiene su carácter clásico y pre-relativista. Esto puede reconducirse a que la formulación canónica de la mecánica cuántica está fuertemente ligada a la formulación Hamiltoniana de la física clásica, que precede a la relatividad, y no se adapta al carácter geométrico de las simetrías de Einstein. Aún así, las teorías cuánticas con mayor poder predictivo, que en conjunto conforman el modelo estándar, combinan la relatividad especial con la cuántica. Detrás de esta “unificación” está la idea de foliación que describimos anteriormente: las teorías de campos se cuantizan de acuerdo a una foliación dada, proceso que esconde la simetría de Lorentz a nivel matemático, pero que, notablemente <sup>2</sup>, es compatible con la covarianza de las

---

<sup>1</sup>Es muy interesante el punto de vista de Dirac [9] sobre la evolución de los esquemas físicos. En particular, él describe el primer paso de Newton como el pasaje de una simetría bidimensional, que no tiene en cuenta el “arriba y abajo”, a una tridimensional. El siguiente paso de Einstein nos llevó de una simetría tridimensional, que no tiene en cuenta al tiempo, a una cuatridimensional. Por otro lado, Dirac sostiene que la mecánica cuántica parece volver a esta última simetría menos fundamental.

<sup>2</sup>Cabe ir destacando que en este sentido, las teorías cuánticas de campos, escritas en el formalismo canónico, no tratan al tiempo y al espacio de manera completamente simétrica (vease el siguiente capítulo). A su vez, no es trivial que una simetría clásica escondida por el proceso de cuantización se traduzca a una simetría cuántica. Un ejemplo que involucra la simetría de Lorentz es el de una cuerda bosónica, que, bajo la cuantización en el cono de luz, mantiene la invarianza de Lorentz solo en 26 dimensiones [10].

predicciones físicas [11].

Ciertamente, existe otra formulación de la mecánica cuántica: la formulación de Feynman [12]. Esta versión está directamente ligada a la formulación Lagrangiana de las leyes de la mecánica. Al igual que la formulación Lagrangiana (que como la Hamiltoniana precede a la relatividad) resultó ser adecuada para capturar las simetrías cuadridimensionales, la formulación de Feynman permite tratar al espacio-tiempo de manera simétrica. Esto es particularmente conveniente a la hora de tratar con teorías cuánticas de campos, pues en esta forma, el carácter covariante es explícito. Por otro lado, las integrales de Feynman están asociadas a “sumas clásicas”, en el sentido de que su definición no está asociada al espacio matemático característico de la cuántica, esto es, a un espacio de Hilbert.

Finalmente mencionemos que de momento no es posible compatibilizar la relatividad general, esto es la completa covarianza de las leyes de la física, con la mecánica cuántica. Esto es de esperarse en el caso canónico, pues hemos visto que el tiempo y el espacio son fundamentalmente distintos en cualquier teoría cuántica, incluso en las teorías de campos, dando así lugar a dificultades a veces agrupadas bajo el nombre de “el problema del tiempo” [13-15]. Sin embargo, en la formulación de Feynman, el problema surge una vez más, pero adoptando una nueva forma: las integrales de Feynman naturalmente cuentan en exceso configuraciones equivalentes, que deben ser compensadas con la introducción de “ghosts”, una tarea no trivial en este caso [16]. Esto introduce un obstáculo (lejos de ser el único) a la hora de construir una teoría cuántica de la gravedad.

Podríamos argumentar que el gran avance dado por Einstein en su famoso paper “*On the electrodynamics of moving bodies*” [17], tuvo origen en un minucioso estudio del proceso mediante el cual obtenemos información y cómo dicho proceso está intrínsecamente vinculado a las leyes de la física (en este caso, a las ecuaciones de Maxwell). En tiempos más recientes, nos encontramos con preguntas similares y con un alcance comparable. Por ejemplo, Michael Nielsen en su tesis doctoral [18] nos plantea la pregunta “*What is discovered when the laws of physics are used as the foundation for investigations of information processing and computation?*”. En su caso se refiere a aquellas leyes de la física que pueden formularse en el contexto de la mecánica cuántica. Este tipo de preguntas originaron lo que algunos autores indican como una nueva (o segunda) revolución cuántica. Usualmente se asocia a esta revolución con la capacidad de utilizar sistemas cuánticos para procesar información, dando así origen a nuevas tecnologías, tales como las computadoras cuánticas. Sin embargo,

esto es solo una parte de la revolución. Notablemente, comprender el tipo de procesos de información, comunicación y/o computación que son permitidos por la física, nos provee de un nuevo tipo de intuición y conocimiento. Un ejemplo clave aquí es el del Teorema de Bell [19]: en una de sus versiones, un “juego” de comunicación entre dos partes [20] nos permite responder de manera científicamente comprobable una pregunta tan profunda como es la existencia o no de “variables ocultas” [21]. Quiero aquí remarcar que este interrogante va más allá de ciertas leyes particulares de la física. Cuando se afirma que no existe una teoría de variables ocultas locales que haga las mismas predicciones que la mecánica cuántica, no se está hablando de alguna teoría específica, sino más bien de la mecánica cuántica como marco teórico (o si se prefiere como una generalización de la teoría clásica de probabilidades). Más de una teoría cuántica puede hacer de “soporte” para violar las desigualdades. Por claridad posterior déjenme entonces definir lo que yo entiendo como mecánica cuántica a lo largo de esta tesis: *la mecánica cuántica es un marco matemático para el desarrollo de teorías físicas*. Posiblemente esta sea la versión comúnmente aceptada en el contexto de la relativamente reciente teoría de la información cuántica [22].

Al poner el énfasis en el marco y no necesariamente en leyes particulares de la física se abre toda una nueva dimensión para estudiar viejos interrogantes. En particular, regresando al tema del tiempo, podemos preguntarnos si hay algo fundamental en la asimetría entre espacio y tiempo que nos propone la cuántica, o si al contrario estos conceptos han de ser tratados en pie de igualdad como indica la relatividad. Si no hay una razón física, entonces dicha asimetría debería poder eliminarse. Esto nos lleva entonces a la pregunta principal de esta tesis.

*¿Es posible construir un marco teórico que trate tiempo y espacio en pie de igualdad y que, a su vez, bajo reglas matemáticas simples, produzca las mismas predicciones físicas que la cuántica convencional?*

Cabe aquí hacer un par de aclaraciones sobre nuestras intenciones. En primer lugar, queremos conservar los elementos matemáticos básicos de la formulación canónica, como estados y operadores. Esto es, no queremos introducir ideas matemáticas ajenas a los espacios de Hilbert. En este sentido (y otros que quedarán claros a lo largo de la tesis), la formulación de Feynman no nos provee una respuesta. Resultará de todos modos muy relevante para nuestros propósitos, como debería ser si vamos por el camino indicado. En segundo lugar, si bien este tipo de pregunta están asociadas a la cuántica como marco, queremos ser tan conservadores como nos sea posible. No dudamos de la necesidad de las teorías cuánticas de campos para defi-



nir teorías interactuantes que sean a su vez relativistas <sup>3</sup>. Lo que buscamos es un marco suficientemente poderoso que permita reescribir a dichas teorías de manera explícitamente covariante. De esta manera, buscando que el marco se adapte a las teorías de campos, sabremos identificar de manera precisa las asimetrías a tratar. Quiero remarcar también mi principal intuición subyacente al perseguir las ideas que llevaron a esta tesis: El hecho de que las teorías cuánticas de campos canónicas sean compatibles con la relatividad, y que a su vez la cuántica pueda ser formulada a la Feynman, nos indican que el rol especial que tiene el tiempo en mecánica cuántica no es algo fundamental, sino más bien un “accidente histórico”. Los resultados obtenidos en esta tesis soportan esta hipótesis. Cabe remarcar que preguntas similares se han planteado múltiples veces en el pasado, principalmente en el contexto de la gravedad cuántica [14, 15, 23-27]. Sin embargo, ninguna solución completa ha sido alcanzada, como muestra el reciente resurgimiento de interés por el tema que ha dado lugar a múltiples propuestas novedosas en los últimos años [28-36] y que reflejan la intuición de la “segunda revolución cuántica”. A su vez, en el estado actual, ninguna propuesta en la literatura (hasta donde el autor conoce, y reflejado por trabajos muy recientes [36, 37]) responde a la problemática propuesta.

## 1.2 Descripción general de la propuesta

Dado que la búsqueda de una respuesta al interrogante previo ha pasado por distintas etapas, y que las mismas se vuelcan en esta tesis, por claridad, daremos aquí una pequeña guía para el lector. Mencionemos en primer lugar que el lector interesado exclusivamente en el resultado principal puede saltar directamente al capítulo VII. Allí se presenta de manera auto-contenida nuestra propuesta final [5]. Sin embargo, las ideas y aprendizajes parciales tal vez sean importantes para su entendimiento. A su vez, los capítulos previos contienen varios resultados que son de interés en sí mismos y no necesariamente parte del formalismo final. En la figura I.1 mostramos un esquema visual de la tesis y las motivaciones de los distintos capítulos.

Nuestro punto de partida tal vez sea natural, tratar de cuantizar al tiempo. Esto es, definir un observable que identifiquemos con el tiempo, matemáticamente descrito por un operador. Afortunadamente, ya existía un formalismo que permita hacer esto: el formalismo de Page y Wootters (PW) [14]. Por su relevancia para

---

<sup>3</sup>Si bien no nos centraremos en las teorías de cuerdas, o en los formalismos inspirados en estas (como el formalismo línea de mundo), algunos comentarios y conexiones con las mismas surgirán naturalmente.

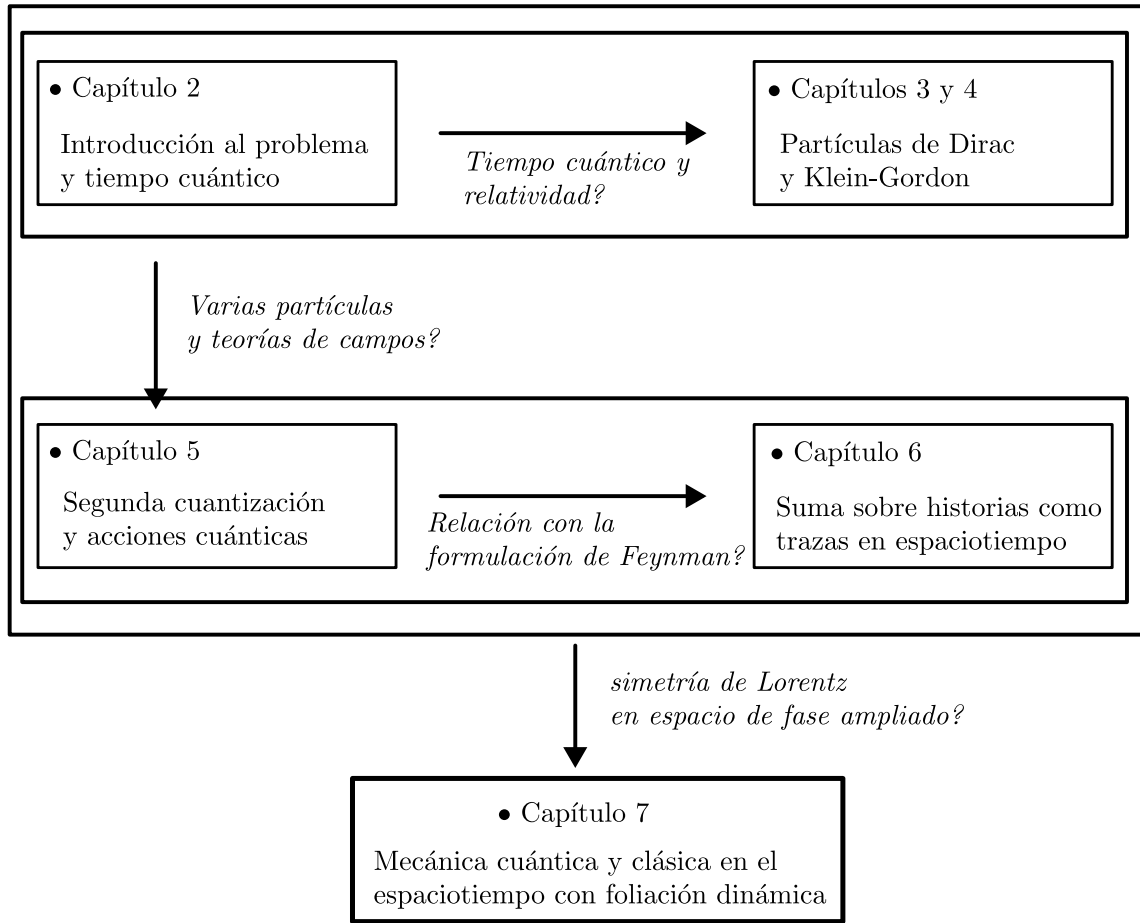


Figura I.1: Esquema de los capítulos de la tesis y su contenido. Junto a las flechas se indica el interrogante principal que nos llevó de los resultados presentados en un capítulo hacia el siguiente.

nosotros, daremos una breve descripción de esta propuesta en el capítulo II. También describiremos nuevas implicancias del mismo en información cuántica en el Anexo IX [6]. Es interesante notar que este formalismo aplica a cualquier sistema cuántico cuya dinámica está descrita por la ecuación de Schrödinger. En este sentido no es un formalismo relativista. Tampoco es necesariamente cierto que cuantizar el tiempo nos dé una descripción simétrica entre espacio y tiempo. Existe, sin embargo, un escenario donde esto sí se puede lograr: en el tratamiento de partículas individuales donde la posición espacial es un observable. El primer paso de nuestra investigación fue generalizar el formalismo de PW a partículas con dinámica relativista. Esto nos permitió obtener un primer modelo cuántico donde tiempo y espacio están en pie de igualdad. Estos resultados se presentan en los capítulos III y IV, donde se estudian los casos de la ecuación de Dirac [1] y Klein-Gordon [2] respectivamente.

Cómo es bien sabido, las teorías de una sola partícula relativista (en el sentido previo) llevan a inconsistencias. Por este motivo, en una segunda etapa estudiamos

la generalización a sistemas de varias partículas de los formalismos anteriores. El camino más fructuoso resultó ser el de segunda cuantización. Tomando como unidad básica a las “partículas de PW” (objetos cuatridimensionales), propusimos una segunda cuantización extendida, no equivalente al espacio de Fock de las teorías de campos canónicas. Sorprendentemente, esto lleva directamente al concepto de acción cuántica. Dedicamos una buena porción de tiempo estudiando estos objetos y sus propiedades, con la esperanza de recuperar la dinámica usual mediante su uso. Esto se describe en los capítulos V [3] y VI [4]. Un avance importante fue comprender su relación con la formulación de Feynman, que nos permitió efectivamente conectar con la física usual. La comparación entre el espacio de Fock extendido y el usual, nos permitió también comprender de manera precisa en qué sentido la formulación canónica, como marco, no permite un tratamiento simétrico entre espacio y tiempo (véase la discusión sobre producto tensorial en el capítulo II).

Con el entendimiento de las acciones cuánticas logramos una correspondencia entre la cuántica usual y una formulación en un espacio de Hilbert simétrico en espacio y tiempo a nivel del álgebra de operadores. Dicha álgebra involucra posiciones (o campos) a su vez que sus momentos conjugados, y en este sentido no es más que una extensión del álgebra canónica al espacio-tiempo. Sin embargo, a la hora de introducir dinámica esto origina un nuevo problema: las acciones cuánticas, escritas en las variables canónicas, contienen la asimetría heredada de la transformada de Legendre. Para enfrentar este problema, planteamos una revisión de la formulación Hamiltoniana clásica. En particular notamos que la elección de tiempo de la transformada de Legendre, que corresponde a elegir una foliación, puede tratarse “dinámicamente”, en el sentido de que es conveniente asociarle corchetes de Poisson. A su vez comprendimos que los corchetes de Poisson clásicos de los campos pueden extenderse también al espacio-tiempo, y usarse para reobtener las ecuaciones de movimiento. Al cuantizar esta nueva versión de la física clásica, logramos finalmente obtener una mecánica cuántica que es a la vez canónica, explícitamente covariante y cuyas predicciones coinciden con las de la formulación usual. Esta formulación, que presentamos en el capítulo VII, además de estar asociada a acciones cuánticas, introduce el concepto de foliación cuántica como última pieza necesaria para abarcar simetrías del espacio-tiempo en variables de espacios de fase [5]. Finalmente, en el capítulo VIII presentamos las conclusiones de la tesis, analizando también las nuevas perspectivas y posibilidades abiertas por el formalismo.

# Preliminares: El tiempo y la mecánica cuántica

“Quantum mechanics is actually, contrary to its reputation, unbelievably simple; once you take all the physics out.”

---

Scott Aaronson

## 2.1 Mecánica cuántica tradicional y la objeción de Pauli

Los observables físicos en mecánica cuántica (MC) están asociados a operadores Hermíticos que actúan en el espacio de Hilbert de posibles estados del sistema. Por ejemplo, si consideramos una partícula sin estructura en una recta, el espacio de Hilbert que asociamos es  $\mathcal{H} = \text{span}\{|x\rangle\}$ , que puede introducirse a partir del operador posición  $\hat{x} = \int dx x|x\rangle\langle x|$  (en general obviaremos la notación  $\hat{O}$  para operadores y escribiremos simplemente  $O$ ; sí usaremos extensivamente la notación de Dirac). El espectro continuo del operador se deduce de imponer el álgebra canónica de conmutadores (también impondremos  $\hbar \equiv 1$ )

$$[x, p] = i, \tag{2.1}$$

con  $p$  el operador momento. Claramente un estado general puede ser expandido como

$$|\psi\rangle = \int dx \psi(x)|x\rangle \tag{2.2}$$

y la acción de  $p$  entonces puede ser descripta como  $p|\psi\rangle = \int dx (-i\psi'(x))|x\rangle$  donde se usó que  $\langle x'|p|x\rangle = -i\delta'(x - x')$  y la relación de completitud que sigue de  $\langle x'|x\rangle = \delta(x - x')$ .

Hasta este punto, no se han hecho consideraciones que involucren la evolución del sistema a lo largo del tiempo. Incluso en este ejemplo tan elemental la intuición relativista sugiere introducir un operador  $\hat{t}$ . Por otro lado necesitamos especificar la dinámica de alguna forma, independientemente de si queremos hacer medidas de tiempo de algún tipo. Se nos enseña desde jóvenes (no diría desde chicos) que la dinámica ha de ser descrita por un hamiltoniano  $H(x, p)$ . Una muy buena razón a favor de esto es el hecho de que estamos usando una variable  $p$  como parte de la definición de nuestro espacio matemático y, en la formulación clásica el espacio de fases de variables  $(x, p)$  está asociado a la formulación hamiltoniana.

Supongamos entonces que queremos emplear alguna función (en principio arbitraria)  $H(x, p)$  de los operadores posición y momento para describir la dinámica del sistema (y por un momento, que desconocemos los avances de Schrödinger). Trate-mos ahora de usar la “intuición relativista” que nos lleva a definir  $\hat{t}$ : en analogía al álgebra canónica, y por simetría entre espacio y tiempo, podríamos querer imponer un álgebra análoga que nos defina completamente al operador tiempo. Esto sugiere el álgebra

$$[t, H] = i. \quad (2.3)$$

Inmediatamente nos encontramos con un problema: incluso en el ejemplo más básico de una partícula libre  $H = \frac{p^2}{2m}$  (argumentos de límite clásico nos fija esta forma) el espectro del hamiltoniano no es toda la recta real. Este hecho, combinado con el álgebra que impusimos, impone restricciones al operador  $t$ . En otras palabras, al álgebra anterior es incompatible con un operador  $t$  cuyo espectro es la recta real a no ser que  $H$  tenga el mismo espectro<sup>1</sup>: la dinámica modifica la definición del supuesto operador tiempo. También es bien sabido que en general  $H$  tendrá un espectro discreto. Por muy extraña que pueda ser la MC nunca se vió a un sistema cuántico afectando a los relojes “clásicos” de un laboratorio!

Los argumentos anteriores se conocen bajo el nombre de *la objeción de Pauli* [38] y aplican a cualquier sistema cuántico. Estos muestran que si definimos al espacio de Hilbert de la manera usual no hay ninguna posibilidad de tratar al tiempo cuánticamente. En cambio, la evolución temporal se impondrá de acuerdo a la ecuación de Schrödinger con  $t$  un parámetro clásico.

---

<sup>1</sup>La manera de convencerse de esto es aplicando  $e^{i\alpha t}$  sobre autoestados de energía  $|E\rangle$  y notando que esto induce un desfase  $E \rightarrow E + \alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

## 2.2 Relatividad especial y Teorías cuánticas de campos

Lo anterior luce muy mal desde el punto de vista relativista. Sin embargo, los físicos construyeron algo tan fundamental como el modelo estándar a partir de la intersección de ideas cuánticas y relativistas. ¿Cómo se superó dicha barrera? La respuesta de manual es la siguiente “las teorías cuánticas de campos tratan tanto al espacio como al tiempo como parámetros clásicos”. Déjenme discutir aquí en que sentido esto es cierto y en que sentido tiempo y espacio siguen sin estar en pie de igualdad.

Tomemos como ejemplo el caso de un campo escalar  $\phi(x)$  en  $D = d + 1$  dimensiones. La cuantización canónica impone el álgebra [39, 40]

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.4)$$

con  $\pi(t, \mathbf{y})$  el momento conjugado al campo. Notemos dos hechos más: aquí separé las coordenadas del espacio-tiempo de los campos  $x, y$  en  $x = (t, \mathbf{x}), y = (t, \mathbf{y})$ . La razón es la siguiente. Las álgebras convencionales (ya sea cuánticas o clásicas, i.e., asociadas a corchetes de Poisson) están definidas a tiempo fijo. Entonces, dada una elección de tiempo, tenemos que hablar de un campo en una dada posición del espacio  $\mathbf{x}$ . Luego, ¿qué significa el índice temporal? Aquí ya estoy suponiendo que estos campos se encuentran en el esquema de Heisenberg:

$$\phi(t, \mathbf{x}) := e^{iHt}\phi(\mathbf{x})e^{-iHt}, \quad \pi(t, \mathbf{x}) := e^{iHt}\pi(\mathbf{x})e^{-iHt}. \quad (2.5)$$

Notemos entonces que si bien es cierto que  $t$  y  $\mathbf{x}$  son parámetros, su rol en la teoría cuántica es muy diferente. Por un lado el índice de tiempo está asociado a evolución y  $\phi(t, \mathbf{x})$  depende de la teoría particular. En cambio el índice de espacio está asociado al álgebra canónica, y todas las teorías que describen al mismo campo comparten la misma álgebra, en particular, el operador  $\phi(t = 0, \mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})$  es el mismo para todo  $H$ . Enfatizamos también que la distinción entre espacio y tiempo está ligada a una elección arbitraria de observador (o de foliación del espacio-tiempo).

Lo anterior es bien sabido, aunque usualmente solo se afirma que la formulación canónica no permite tratar la simetría de Lorentz de manera explícita. Déjenme discutir ahora algunas consecuencias adicionales de esta asimetría. En primer lugar, notemos que mientras los conmutadores a tiempos iguales no se ven afectados por la elección de  $H$  (pues  $e^{-iHt}$  es unitario), la cantidad

$$F(x, x') := [\phi(x^0, \mathbf{x}), \pi(x'^0, \mathbf{x}')] \quad (2.6)$$

es una función complicada que depende de la teoría. Es más, es fácil ver que esta cantidad (que no es un observable) no es invariante de Lorentz frente a un simple cambio de coordenadas  $(x, x') \rightarrow (\Lambda x, \Lambda x')$  (con  $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu$  la transformación de coordenadas). Mostremos esto en el escenario más simple posible, el de una teoría de Klein-Gordon libre y fijemos  $D = 3 + 1$ . En este caso la densidad Hamiltoniana toma la forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (2.7)$$

que puede derivarse de la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2$ . A estos campos libres se los puede entonces expandir en terminos de modos como

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}} \left( a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} \right) \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \quad (2.8)$$

$$\pi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}} (-i) \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} \left( a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} \right) \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \quad (2.9)$$

con  $[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ . Notemos también que el Hamiltoniano toma la forma normal

$$H := \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3p E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}, \quad (2.10)$$

donde  $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  y también fijamos  $c \equiv 1$ . También denotaremos con  $|0\rangle$  el estado fundamental de  $H$ .

Ahora que diagonalizamos el Hamiltoniano, es directo computar  $F(x, x') = [\phi(x), \pi(x')]$ . El resultado es

$$[\phi(x), \pi(x')] = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-x')} \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}. \quad (2.11)$$

Como es bien sabido  $d^3p$ , no es una medida invariante y por lo tanto la cantidad anterior (como distribución) no puede transformar bien <sup>2</sup>.

En cambio, la medida  $d^3p/2E_{\mathbf{p}}$  es invariante, y es precisamente lo que aparece al calcular otro conmutador:

$$[\phi(x), \phi(x')] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \left( e^{-ip(x-x')} - e^{ip(x-x')} \right) \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}. \quad (2.12)$$

Esta cantidad, transforma adecuadamente y se anula para  $x - x'$  un intervalo tipo espacio [40]. En particular, esto muestra que para este tipo de intervalos  $\langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(y^0, \mathbf{y}) \phi(y'^0, \mathbf{y}') | 0 \rangle$  para  $y, y'$  las coordenadas asociadas por un observador inercial

<sup>2</sup>Quizás el lector sospeche que en realidad elegimos de manera poco conveniente el algebra de operadores de creación y aniquilación, y que imponer  $[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = 2E_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$  pueda de alguna manera ayudar. Eso no es cierto, pues este resultado no depende de la elección de modos.

que mide a los eventos  $x, x'$  como simultáneos a tiempo  $y^0$ . Esto permite ver a todo correlador tipo espacio como un correlador tradicional de operadores no evolucionados: podemos escribir, si ignoramos sutilezas del continuo,  $\langle 0|\phi(y^0, \mathbf{y})\phi(y^0, \mathbf{y}')|0\rangle \equiv \langle 0|\phi(y^0, \mathbf{y}) \otimes \phi(y^0, \mathbf{y}')|0\rangle$  con el producto tensorial, enfatizando que estos operadores actúan en espacios de Hilbert distintos, i.e. que son “osciladores” independientes, mientras que las correlaciones están contenidas en el estado fundamental  $|0\rangle$  (véanse resultados sobre entrelazamiento en teorías de campos [41]). Enfatizamos también que  $\langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle = \langle 0|\phi(y^0, \mathbf{y}) \otimes \phi(y^0, \mathbf{y}')|0\rangle$  para intervalos tipo espacio implica automáticamente  $[\phi(x), \phi(x')] = 0$ , pues campos independientes claramente conmutan.

Afortunadamente, a la hora de obtener predicciones físicas, uno puede reescribir las ecuaciones en términos de  $[\phi(x), \phi(x')]$  en vez de  $[\phi(x), \pi(x')]$ . Es más, si nos centramos en teoría de perturbaciones, nos alcanza con el propagador anterior de la teoría libre: la mayoría de la física en campos es descrita por la matriz  $S$  que podemos expandir esquemáticamente como

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dt_1 \int dt_2 \cdots \int dt_n \hat{T}\{V_I(t_1)V_I(t_2)\dots V_I(t_n)\}, \quad (2.13)$$

con  $V_I(t)$  la parte interactuante del Hamiltoniano en el esquema de interacción y  $\hat{T}$  indicando el orden temporal. Por ejemplo para un campo escalar podríamos tener  $V_I(t) = \int d^3x \frac{\lambda}{4!}\phi^4(t, \mathbf{x})$ . En general  $V_I(t) = \int d^3x \mathcal{V}_I(t, \mathbf{x})$  lo cual permite reescribir la serie de Dyson como

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \cdots \int d^4x_n \hat{T}\{\mathcal{V}_I(x_1)\mathcal{V}_I(x_2)\dots \mathcal{V}_I(x_n)\}. \quad (2.14)$$

De no ser por el orden temporal ahora sí tendríamos una expresión covariante. El paso final que nos garantiza la preservación de la simetría de Lorentz es el siguiente: para intervalos conectados causalmente (tipo tiempo), el orden temporal no depende del observador. El único problema podríamos tenerlo para regiones causalmente desconectadas (tipo espacio). Pero, notablemente, uno encuentra en teorías relativistas

$$[\mathcal{V}_I(x), \mathcal{V}_I(x')] = 0 \quad \text{para } x - x' \text{ tipo espacio.} \quad (2.15)$$

Esto sucede porque los campos libres de teorías relativistas conmutan para regiones causalmente desconectadas, como en el ejemplo de arriba (para campos no reales, el mecanismo por el cual esto ocurre puede asociarse a la cancelación entre propagadores de partícula/antipartícula en regiones tipo espacio). Este hecho conduce a



la condición anterior, como es claro en el ejemplo del campo escalar si se toma una interacción local de la forma  $\mathcal{V}_I(x) = \mathcal{V}[\phi_I(x)]$ . El ordenamiento de operadores deja entonces de importar si estos son locales y están asociados a puntos desconectados causalmente.

En resumen, las teorías cuánticas de campos nos garantizan que las predicciones físicas son independientes del observador. El mecanismo por el cuál esto funciona, no pasa por el álgebra canónica, pues esta rompe la simetría de Lorentz explícitamente. En cambio, las expresiones finales asociadas a la matriz  $S$  nos señalan que la cantidad de interés es el conmutador de la parte interactuante de la densidad Hamiltoniana, que a su vez se puede reconducir al conmutador entre campos libres. Cabe remarcar que este hecho es muy peculiar: el tratamiento de otras simetrías, como pueden ser las rotaciones en el espacio, se centran en álgebra canónica pues corresponden a transformaciones canónicas. En cambio, cualquier intento de definir explícitamente las transformaciones de Lorentz en teorías de campos requiere información dinámica. El carácter geométrico de la relatividad se pierde en una formulación Hamiltoniana clásica y en consecuencia, también en el formalismo cuántico asociado a un espacio de Hilbert. Esto no sucede en la formulación de Feynman donde la forma de la matriz  $S$  es natural con el ordenamiento temporal implícito. Sin embargo, trabajar en la formulación de Feynman significa abandonar el concepto de espacio de Hilbert por completo.

## 2.3 Tiempo cuántico

Las consideraciones de las dos secciones previas nos dejan aparentemente sin mucha opción: o trabajamos con espacios de Hilbert, asociados a la formulación canónica y Hamiltoniana, pero donde la simetría de Lorentz (si presente) permanece implícita, o empleamos las integrales de Feynman asociadas a sumas clásicas, abandonado a los espacios de Hilbert. Sorprendentemente, a pesar de las objeciones históricas que describimos previamente existe una manera muy natural de “cuantizar al tiempo” que describimos en esta sección. Gran parte del contenido de esta tesis fue dedicado a entender donde “encaja” el tratamiento cuántico del tiempo en la dicotomía anterior.

Cuál es la falla del argumento de Pauli? En el intento anterior propusimos definir un operador tiempo en el espacio de Hilbert de una partícula unidimensional con base  $|x\rangle$ . Esto es para el operador tiempo  $t$  buscábamos  $t = t(x, p)$ . Por otro lado, una intuición relativista genuina nos sugiere algo completamente distinto: tratar

a  $t$  como una dimensión en sí misma clásicamente, y por lo tanto considerar un espacio de Hilbert de la forma  $|t, x\rangle$ . De hecho, esto es lo que hacemos si pasamos de una partícula unidimensional a una bidimensional en cuyo caso la generalización es  $|x\rangle \rightarrow |x, y\rangle$ .

**Formalismo de Page y Wootters.** La propuesta anterior nos plantea inmediatamente el problema de recuperar la dinámica de alguna manera que no puede coincidir con la evolución unitaria tradicional. Notablemente, existe una solución particularmente elegante a este problema dada por el mecanismo de Page y Wootters (PW) [14]<sup>3</sup>: guiados por el problema del tiempo en gravedad cuántica, que se origina porque al cuantizar canónicamente la gravedad se obtiene una “ecuación de Schrodinger sin tiempo”, los autores se proponen recuperar la evolución cuántica de un sistema en un “universo” globalmente estacionario. Los autores argumentan que la evolución temporal que observamos es en realidad una dependencia con grados de libertad de un “reloj interno” [14]. Luego muestran que dado un sistema global en un estado estacionario, formado por dos subsistemas no interactuantes, el reloj y el resto, la evolución del segundo subsistema está determinada por las correlaciones con el reloj, es más, esta evolución “imita” la que se obtiene a través de las ecuaciones de movimiento. Nos referimos a este conjunto de ideas como mecanismo de Page y Wootters [14].

Describiremos aquí la esencia matemática del formalismo de Page y Wootters. No haremos particular énfasis en su formulación original ni en su interpretación, que no serán particularmente útiles para nuestros propósitos.

La construcción comienza considerando un sistema global bipartito con espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{T}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ , donde  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$  es el espacio de Hilbert del sistema original que queremos describir. Asumimos que el espacio del “reloj”  $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$  está generado por los autoestados del operador  $T$  que satisface las reglas de conmutación canónica

$$[T, P_T] = i. \quad (2.16)$$

Cabe destacar que  $P_T \neq H$ , simplemente es el momento conjugado al tiempo y actúa en  $\mathcal{H}_T$ , i.e.  $P_T \equiv P_T \otimes \mathbb{1}$ . Elegimos la base de autoestados del operador tiempo que

---

<sup>3</sup>Antes que estos autores, Dirac ya había propuesto promover al tiempo a una variable dinámica en espacios de fase [42]. A su vez propuso un método de cuantización de dicho esquema que lleva directamente al espacio de Hilbert empleado en el formalismo de PW. Sin embargo, Dirac no se centra en el uso del espacio ampliado, menos aún en su interpretación como “sistema+reloj”.

cumple

$$T|t\rangle = t|t\rangle, \quad (2.17)$$

de manera tal que satisfaga  $\langle t|t'\rangle = \delta(t - t')$ . En su versión más simple, que es la que describimos aquí  $T$  y  $P_T$  tienen como espectro a la recta real.

Se supone luego que el estado global reloj-sistema se encuentra en un estado estático puro (no normalizado) de la forma

$$|\Psi\rangle = \int dt |t\rangle |\psi(t)\rangle. \quad (2.18)$$

El estado del sistema puede recuperarse proyectando en el estado del reloj,  $|\psi(t)\rangle = \langle t|\Psi\rangle$ . Esta operación tiene que entenderse en el siguiente sentido<sup>4</sup>:

$$|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \text{Tr}_T [\Pi_t |\Psi\rangle\langle\Psi|], \quad \Pi_t = |t\rangle\langle t| \otimes \mathbb{I}. \quad (2.19)$$

Si  $|\psi(t)\rangle$  se encuentra normalizado entonces este es el estado condicional del sistema luego de una medida local en el reloj con resultado  $t$ .

Considerando ahora estados que satisfacen la ecuación

$$\mathcal{J}|\Psi\rangle = 0, \quad (2.20)$$

con

$$\mathcal{J} = P_T \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H, \quad (2.21)$$

donde  $H$  es el Hamiltoniano del sistema, se recupera la evolución unitaria y la ecuación de Schrödinger:

$$\langle t|\mathcal{J}|\Psi\rangle = 0 \Rightarrow i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle. \quad (2.22)$$

Esta ecuación es simple de probar notando que  $\langle t'|P_T|t\rangle = -i\frac{d}{dt}\delta(t - t')$ .

Vemos entonces que si bien el estado  $|\Psi\rangle$  no tiene ninguna dependencia temporal, el estado  $|\psi(t)\rangle$ , obtenido condicionando sobre el sistema reloj, evoluciona de la misma manera que en mecánica cuántica convencional. Identificamos entonces a  $|\psi(t)\rangle$  con el estado del sistema en la representación de Schrödinger. La evolución del sistema es no trivial sii el estado global es entrelazado pues para un estado estacionario del sistema  $U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = e^{-iE(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle$ ,

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \int dt |t\rangle |\psi(t)\rangle = \int dt |t\rangle U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \\ &= \left( \int dt e^{-iE(t-t_0)} |t\rangle \right) \otimes |\psi(t_0)\rangle. \end{aligned} \quad (2.23)$$

---

<sup>4</sup>Consideremos una base  $|k\rangle$  en  $\mathcal{H}_S$  de modo que  $|\Psi\rangle = \sum_{t,k} \psi_{tk} |t, k\rangle$  (por simplicidad en notación discreta). El vector  $\langle t|\Psi\rangle$  es el ket  $|\psi(t)\rangle = \sum_k \psi_{tk} |k\rangle$  de  $\mathcal{H}_S$  que representa el mismo estado que  $\rho_S(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ .

Remarquemos algunos hechos. La objeción de Pauli [38] sobre la posibilidad de definir un operador temporal en mecánica cuántica fue evitada: el operador  $P_T$  actúa en espacio de Hilbert diferente, y en consecuencia conmuta con el Hamiltoniano del sistema [29]. La definición del operador  $T$  ya no se ve afectada por la dinámica. Es más, si hay definido un generador de traslaciones espaciales  $\mathbf{P}_S$ , conmuta con el generador de las traslaciones temporales  $P_T$ , como debe ser dado que espacio y tiempo son grados de libertad independientes [29], de acuerdo a nuestra intuición relativista.

Notemos ahora que el estado global cumple

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int dt = T \rightarrow \infty, \quad (2.24)$$

con  $T$  la longitud del tiempo de la historia del sistema. Si consideramos una “ventana” de tiempo  $t \in [-T/2, T/2]$ , imponiendo condiciones periódicas y dividiendo al estado por  $\sqrt{T}$ , el estado global está normalizado. El precio a pagar es que no obtenemos soluciones exactas de la ecuación de universo anterior a no ser que el espectro de  $H$  sea  $2\pi m/T$ , con  $m$  entero. Esto en principio no es un problema grave (en el caso no relativista) pues a medida que  $T$  crece se puede aproximar cualquier espectro con precisión arbitraria.

Consideremos ahora nuevamente el caso de la partícula unidimensional. Los estados  $|\mathbf{x}\rangle$  son base de  $\mathcal{H}_S$ , expandiendo en esta base a  $|\psi(t)\rangle$  el estado global (ya normalizado) se escribe

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int dt d^3x \psi(\mathbf{x}, t) |t, \mathbf{x}\rangle := \int dt d^3x \Psi(\mathbf{x}, t) |t, \mathbf{x}\rangle, \quad (2.25)$$

donde la función de onda  $\psi(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle$  y la función  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  se relacionan de la siguiente manera

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\Psi(\mathbf{x}, t)}{1/\sqrt{T}}. \quad (2.26)$$

Notemos que la probabilidad  $dP(t, t + dt)$  de encontrar al reloj en un entorno  $dt$  del autoestado  $t$  es igual a  $dt/T$ . Por otro lado la interpretación usual de la función de onda identifica  $|\psi(\mathbf{x}, t)|^2$  con la densidad de probabilidad de encontrar al sistema en un entorno de  $\mathbf{x}$  dado el tiempo  $t$ , esto es  $dP((\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x})|t) = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d^3x$ . Por definición de probabilidad condicional

$$dP((\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x})|t) = \frac{dP((\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x}) \wedge (t, t + dt))}{dP(t, t + dt)}. \quad (2.27)$$

Comparando con (2.26), concluimos que  $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$  es la densidad de probabilidad conjunta de encontrar al sistema en un entorno de  $\mathbf{x}$  y al reloj en un entorno de  $t$ ,

dicho de otra manera  $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$  es la densidad de probabilidad del sistema de estar en un entorno  $(\mathbf{x}, t)$  en el espacio-tiempo. Como consecuencia de la homogeneidad en el tiempo esta densidad es sencillamente proporcional a  $|\psi(\mathbf{x}, t)|^2$ . Esto significa que ambas densidades contienen la misma información y dada la arbitrariedad de  $T$  en estas consideraciones podemos simplemente trabajar con  $T \rightarrow \infty$ .

El caso de un Hamiltoniano dependiente del tiempo es una extensión directa del esquema previo: se reemplaza el operador  $\mathcal{J}$  por  $\mathcal{J} = P_T \otimes \mathbb{1} + H(T)$ , donde el operador  $H(T)$  se obtuvo promoviendo el parámetro  $t$  del Hamiltoniano  $H(t)$  a operador  $T$ . Imponiendo el vpinculo (2.20), con el nuevo operador  $\mathcal{J}$ , se obtiene que  $|\psi(t)\rangle$  satisface la ecuación de Schrödinger con Hamiltoniano dependiente del tiempo [29].

Mencionemos finalmente que es posible construir una versión de tiempo discreto del formalismo, como ha sido explorado en [43] y ampliado en [44], [45]. En el anexo IX presentamos dicho formalismo y discutimos en mayor detalle el concepto de entrelazamiento sistema-tiempo, en relación a aplicaciones computacionales del formalismo.

**Aspectos en común y diferencias con el formalismo línea de mundo.** Cabe agregar una pequeña discusión sobre otro esquema que permite hacer MC tratando espacio y tiempo en pie de igualdad. Se trata de formalismos inspirados en teorías de cuerdas [46] que permiten hablar de teorías relativistas que expresan cantidades en QFT en un formalismo de *primera cuantización*. Esto es, no se piensa en las partículas involucradas como excitaciones de los campos, sino más bien como entidades “ficticias” pero útiles para representar cantidades matemáticas. Si bien encontraremos muy poco este formalismo a lo largo de la tesis (con una notable excepción el capítulo VI), se incluye por completitud en la discusión del capítulo. A su vez, es interesante comparar esta propuesta con el formalismo de PW aplicado a una partícula.

Consideremos el ejemplo más simple [10, 47]. Definamos la acción

$$S = \int dt \sqrt{g} \left[ g^{tt} \frac{1}{2} \frac{dX^\mu}{dt} \frac{dX_\mu}{dt} - \frac{1}{2} m^2 \right] \quad (2.28)$$

donde pensamos en  $g$  como una métrica unidimensional. Esta acción es invariante frente a difeomorfismos generales, esto es, podemos parametrizar la variedad unidimensional (que será un segmento o un círculo) de cualquier manera sin cambiar su forma. En este sentido nos provee un modelo de *covarianza general*. Puede pensarse también en esta acción como una versión de segundo orden de la acción

$S' = m \int ds \equiv m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^2}$ , que puede recuperarse de  $S$  variando sobre la métrica. Está claro que  $S$  describe una partícula puntual relativista propagándose en el espacio tiempo, esto es definiendo una línea de mundo. A su vez podemos ver a  $S$  como la acción de los campos  $X^\mu(\tau)$  que viven en una dimensión. Mencionemos también que las teorías de cuerdas pueden entenderse como una generalización de  $S$  donde ahora la variedad es bidimensional y asociada a una hoja de mundo, esto es a una cuerda propagándose [10].

La cuantización tradicional de este tipo de acciones tiene bastante en común con el formalismo de PW pero también ciertas diferencias importantes. Cabe a su vez destacar que el formalismo línea de mundo tiene muchas aplicaciones, principalmente en el contexto de teorías de gauge [46]. Aquí solo comentaremos aspectos muy elementales pero pertinentes a la tesis.

Consideremos primero el esquema más común [47], y más natural desde las integrales de Feynman. Esquemáticamente, un propagador se escribirá como  $\int \frac{\mathcal{D}X \mathcal{D}g}{\text{Vol}} e^{iS}$  donde dividimos por el volumen de gauge asociado a los difeomorfismos y fijaremos los valores de  $X^\mu$  en los extremos. Podemos calcular esta integral eligiendo  $g^{tt} = 1$  y notando que el único invariante frente a difeomorfismos es la longitud de la línea de mundo que llamaremos  $\tau$ . Entonces tenemos

$$G(x, y) = \int \frac{\mathcal{D}X \mathcal{D}g}{\text{Vol}} e^{iS} = \int_0^\infty d\tau \int_{x(0)=x}^{x(\tau)=y} \mathcal{D}X e^{iS} = \int_0^\infty d\tau G(x, y, \tau) \quad (2.29)$$

donde  $G(x, y, \tau) \propto \int d^D p e^{i(p^2+m^2)\tau} e^{-ip(x-y)}$ . De modo que  $G(x, y)$  es proporcional al propagador de Feynman de una teoría libre de un campo escalar en  $D$  dimensiones, con  $D$  la cantidad de campos  $X^\mu$ . Notemos que en esta construcción hay un operador tiempo  $X^0$  de modo que podemos escribir por ejemplo en un espacio de Hilbert  $G(x, y, \tau) = \langle y | e^{i\tau(p^2+m^2)} | x \rangle$  para  $X^\mu | x \rangle = x^\mu | x \rangle$ .

Por otro lado, en un acercamiento a lo “cuantización canónica de la gravedad” [48, 49], y viendo al problema desde los espacios de Hilbert, se enfatiza otro aspecto de esta construcción. La idea es reconocer que el Hamiltoniano  $H_s$  asociado a  $S$  se anula idénticamente (en un sentido débil siguiendo Dirac [42]) como consecuencia de nuestra libertad de gauge. Esto constituye entonces un “constraint” (que es del primer tipo) a imponer a nivel cuántico. Uno pide entonces  $H_s |\Psi\rangle = 0$  para estados físicos. Hasta aquí el esquema parece idéntico al de PW. Sin embargo, en vez de considerar a esta condición como la que define un subespacio, se la identifica como la definición de un *nuevo* espacio de Hilbert, distinto al espacio “cinemático” donde actúa  $H_s$ . Uno luego induce un producto interno desde el espacio cinemático,

esencialmente imponiendo  $\langle \psi' | \psi \rangle := \langle \Phi | \Psi \rangle$  con  $\Pi | \Phi \rangle = | \Psi' \rangle$  para  $\Pi$  el proyector en  $J \equiv 0$  y  $|\psi\rangle, |\psi'\rangle$  estados del espacio físico. De esta manera se evita tener estados de norma infinita [48]. El precio a pagar es que solo los operadores que preservan el constraint inducen observables en el espacio de Hilbert físico. Entonces, en particular el operador tiempo, que no cumple esta condición, ha de ser abandonado.

Las similitudes entre estos esquemas y el formalismo de PW no son casuales. Si uno emplea una acción no relativista clásica (que puede no ser la de una partícula, pero nos restringimos a este caso para comparar) y decide “promover”  $t$  a una variable dinámica, esto puede hacerse parametrizando  $t \equiv t(\tau)$  y empleando a  $\tau$  como parámetro de evolución. Esta parametrización es arbitraria y la acción resultante contiene varias características de la simetría frente a difeomorfismos que caracteriza  $S$ . La cuantización de ese esquema es muy similar a lo discutido en los párrafos anteriores [49] (vease también el capítulo V). Por otro lado, PW proponen algo muy distinto. Además de cuantizar a esta teoría con un  $t$  dinámico, éste se interpreta como un grado de libertad físico de un sistema auxiliar, el reloj si se quiere. Al tomar este punto de vista, el espacio de Hilbert cinématico deja de ser auxiliar. En cambio es un espacio de Hilbert “real” asociado al sistema+reloj. De modo que el vpinculo  $J|\Psi\rangle = 0$  define un verdadero subespacio. El ingrediente extra, para reobtener la física convencional es la idea de *condicionar* sobre estados del reloj. Este ingrediente solo está presente en el esquema de PW.

## Tiempo cuántico y la teoría de Dirac

“A great deal more was hidden in the Dirac equation than the author had expected when he wrote it down in 1928.”

---

*Weisskopf on Dirac*

La descripción del capítulo anterior de una partícula trata al tiempo y al espacio de manera simétrica a nivel cuántico. En esta formulación espacio y tiempo están asociados a operadores. Sin embargo, el mecanismo de Page y Wootters, en la forma que describimos, y que se encontraba en la literatura, solo permitía reobtener la ecuación de Schrödinger de la partícula. Como es bien sabido, esta ecuación no es compatible con la relatividad pues involucra, e.g., una derivada primera en tiempo y una derivada segunda en espacio. Pero entonces, ¿en qué sentido tratamos a espacio y tiempo de manera simétrica?

El tema amerita un poco de discusión. Supongamos a modo de ejemplo que tenemos una partícula bidimensional. En el formalismo de PW disponemos entonces de una base del espacio de Hilbert global de la forma  $|t, x, y\rangle \equiv |t\rangle \otimes |x, y\rangle \equiv |t\rangle \otimes |x\rangle \otimes |y\rangle$  con  $|x, y\rangle$  base de  $\mathcal{H}_S$ . Consideremos ahora la definición de rotaciones en  $\mathcal{H}_S$ . En este caso definimos primero el generador de rotaciones en el plano  $L_{xy} = xp_y - yp_x$  y obtenemos una representación unitaria de las rotaciones por exponenciación. Notemos que la definición de rotaciones está dada independientemente del Hamiltoniano  $H$  del sistema, y de si el sistema tiene simetría de rotación. Una vez definido  $L_{xy}$  uno puede preguntarse si  $[L_{xy}, H] = 0$ , en caso afirmativo decimos que hay simetría frente a rotaciones, pero incluso si no hay simetría la representación unitaria de la transformación está dada por el espacio de Hilbert.

Lo mismo sucede con el formalismo de PW: el tratamiento simétrico entre espacio y tiempo nos permite definir por ejemplo  $L_{tx} := Tp_x + xP_T$ . Notablemente, independizamos la definición de una transformación de Lorentz de la dinámica, en



analogía a lo que sucede con las rotaciones. Podemos ahora preguntarnos ¿cuando se preserva el subespacio físico frente a la acción de un boost? Es fácil de ver que la condición es equivalente a preguntarnos si  $[L_{tx}, \mathcal{J}] = 0$  con  $\mathcal{J}$  el operador de universo definido en 2.21. Para una partícula sin estructura (espín por ejemplo) uno puede convencerse de que esta condición no puede cumplirse de manera elegante <sup>1</sup>. Esta es la forma rigurosa de afirmar que el formalismo de PW en su forma original es *no relativista*.

Pero ¿existe algún  $\mathcal{J}$  que nos permita satisfacer la condición anterior? Afortunadamente, la ecuación de Dirac puede escribirse como una ecuación de Schrödinger. Esto sugiere aplicar el mecanismo de PW a una partícula de Dirac, pues intuitivamente el  $\mathcal{J}$  asociado debería satisfacer la condición de invarianza. Con este argumento nos propusimos estudiar la generalización del formalismo para reinterpretar la ecuación de Dirac en este marco. El resultado, descrito en este capítulo y publicado en [1], muestra que efectivamente combinando los formalismos de PW y Dirac se obtiene una formulación explícitamente relativista de una partícula en un espacio de Hilbert <sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Talvez para partículas libres y permitiendo tomar raíces cuadradas de operadores algo pueda hacerse. De todas formas estas ideas claramente sufren de problemas y no se pueden generalizar a por ejemplo la presencia de campos externos

<sup>2</sup>El lector podría verse sorprendido por esta afirmación, después de todo la ecuación de Dirac es famosa por su éxito al combinar relatividad y cuántica (ignorando el problema de las soluciones de “energía negativa”). Sin embargo, recordemos que la normalización de la función de onda de Dirac se impone en hiper-superficies. Esto significa, que a pesar de la apariencia relativista de su ecuación, el espacio de Hilbert subyacente en su formulación no es covariante (léanse los detalles en las siguientes secciones).

### 3.1 Partícula de Dirac libre

Con la intención de construir una teoría para el electrón (positrón) fijamos  $\mathcal{H}_S = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^4$  de acuerdo a [50]. Una elección adecuada del producto interno en el espacio completo  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{C}^4$  garantizará la simetría de Lorentz. Un estado general de universo puede ser escrito como

$$|\Psi\rangle = \sum_{\sigma=0}^3 \int d^4p \Psi_{\sigma}(p) |p, \sigma\rangle \quad (3.1)$$

donde  $|p, \sigma\rangle = |p_0\rangle_T |\mathbf{p}, \sigma\rangle_S$  son los autoestados impropios de los operadores  $P_{\mu}$  (para  $\mu = 0$  el operador actúa en el espacio del reloj, para  $\mu = 1, 2, 3$  en el espacio del sistema) y, digamos, de  $\sigma_{12}$  y  $\gamma_0$  (aquí  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]$ , con  $\frac{\hbar}{2}\sigma_{\mu\nu} = \frac{\hbar}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho}\Sigma_{\rho}$  el operador de espín para  $\mu, \nu = 1, 2, 3$ ). Los estados  $|p\rangle, |\sigma\rangle$  cumplen  $\langle p'|p\rangle = \delta^{(4)}(p - p')$ ,  $\langle \sigma|\sigma'\rangle = \delta_{\sigma\sigma'}$ . Definimos el estado del sistema adjunto  $\langle \mathbf{p}, \sigma| := \langle \mathbf{p}, \xi | \gamma_{\xi\sigma}^0$ .

Debido a que  $d^4p$  es una medida invariante de Lorentz podemos introducir en este espacio operadores de boost unitarios  $U(\Lambda)$  respecto del producto

$$\langle \bar{\Psi}_1 | \Psi_2 \rangle \equiv \int d^4p \bar{\Psi}_1(p) \Psi_2(p), \quad (3.2)$$

con  $\bar{\Psi}(p) = \Psi^{\dagger}(p)\gamma^0$ :

$$U(\Lambda)|p, \sigma\rangle = S_{\sigma\xi}(\Lambda)|\Lambda p, \xi\rangle, \quad (3.3)$$

donde  $\Lambda_{\nu}^{\mu} = e^{w_{\nu}^{\mu}}$  y  $S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}w^{\mu\nu}}$ <sup>3</sup>. La unitariedad surge a partir de la propiedad  $S^{\dagger}\gamma^0 S = \gamma^0$  para transformaciones de Lorentz que preservan la dirección del tiempo. El estado transformado es entonces

$$U(\Lambda)|\Psi\rangle = \sum_{\sigma=0}^3 \int d^4p \Psi'_{\sigma}(p) |p, \sigma\rangle, \quad (3.4)$$

con

$$\Psi'_{\sigma}(p) = \langle p, \sigma | U(\Lambda) | \Psi \rangle = S_{\alpha\sigma} \Psi_{\alpha}(\Lambda^{-1}p). \quad (3.5)$$

Podemos definir también los estados  $|x, \sigma\rangle = |x^0\rangle |\mathbf{x}, \sigma\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p e^{ipx} |p, \sigma\rangle$  con  $px = p_{\mu}x^{\mu}$ , los cuales, empleando la Ec. (3.3), transforman como  $U(\Lambda)|x, \sigma\rangle = S_{\sigma\xi}(\Lambda)|\Lambda x, \xi\rangle$ . Si los  $|x, \sigma\rangle$  son autoestados de operadores  $X^{\mu}$ , entonces las reglas de conmutación canónicas pueden resumirse como  $[X^{\mu}, P_{\nu}] = i\delta_{\nu}^{\mu}$ .

<sup>3</sup>El espectro continuo no acotado del reloj asegura que el estado (3.3) está bien definido. La representación activa del boost preserva la partición. Esto evidencia que todo observador es capaz de identificar el reloj.

El paso siguiente es considerar las Ecs. (2.20)-(2.21) con  $\mathcal{J}$  contruido con el Hamiltoniano de Dirac libre  $H_D = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m$ ,

$$\mathcal{J} = P_0 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_D. \quad (3.6)$$

Entonces la ecuación

$$\mathcal{J}|\Psi\rangle = 0, \quad (3.7)$$

implica (fijando  $x^0 = t$ ),

$$\langle t|\mathcal{J}|\Psi\rangle = 0 \Rightarrow i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)|\psi(t)\rangle \quad (3.8)$$

con  $|\psi(t)\rangle = \langle t|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\sigma=0}^3 \int d^3p e^{-ip_0 t} \Psi_{\sigma}(p) |\mathbf{p}, \sigma\rangle$ . De manera equivalente, definiendo  $\mathbb{J} = -\gamma^{\mu} P_{\mu}$ , podemos reescribir la Ec. (3.7) (una ecuación de autovalores de  $\mathcal{J}$  con autovalor 0) como una ecuación de autovalores para  $\mathbb{J}$  con autovalor  $m$ :

$$\gamma^0 \mathcal{J}|\Psi\rangle = 0 \Leftrightarrow -\gamma^{\mu} P_{\mu}|\Psi\rangle = m|\Psi\rangle. \quad (3.9)$$

Como consecuencia del teorema fundamental de Pauli [51],  $S^{-1}(\Lambda) \gamma^{\mu} S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu}$  y por lo tanto  $U^{-1}(\Lambda) \gamma^{\mu} P_{\mu} U(\Lambda) = \gamma^{\mu} P_{\mu}$ . Consecuentemente, la ecuación (3.9) define un subespacio invariante, i.e.,

$$(\gamma^{\mu} P_{\mu} + m)|\Psi\rangle = 0 \Rightarrow (\gamma^{\mu} P_{\mu} + m)U(\Lambda)|\Psi\rangle = 0. \quad (3.10)$$

Podemos también reescribir la Ec. (3.9) en términos de  $\Psi_{\sigma}(x) := \langle x, \sigma|\Psi\rangle$  recuperando la forma covariante de la ecuación de Dirac [52] (notar que  $\langle x, \sigma|P_{\mu}|\Psi\rangle = -i\partial_{\mu}\Psi_{\sigma}(x)$ )

$$\langle x, \sigma|(\gamma^{\mu} P_{\mu} + m)|\Psi\rangle = 0 \Rightarrow i\gamma^{\mu}_{\sigma\xi} \partial_{\mu} \Psi_{\xi}(x) = m\Psi_{\sigma}(x). \quad (3.11)$$

Los estados que satisfacen (3.9) pueden ser escritos en la forma (en lo que sigue las sumas sobre  $\sigma$ ,  $s$  y  $r$  están implícitas)

$$\begin{aligned} |\Psi_m\rangle &= \int d^4p \delta(p^{\mu} p_{\mu} - m^2) H^{+}(p^0) u_{\mathbf{p}\sigma}^s a_s(\mathbf{p}) |p, \sigma\rangle \\ &\oplus \int d^4p \delta(p^{\mu} p_{\mu} - m^2) H^{-}(p^0) v_{-\mathbf{p}\sigma}^r b_r(\mathbf{p}) |p, \sigma\rangle \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde, fijando  $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$

$$u_{\mathbf{p}\sigma}^s = \frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}} + m}} \begin{pmatrix} (E_{\mathbf{p}} + m)\chi^s \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi^s \end{pmatrix}_{\sigma} \quad (3.13a)$$

$$v_{\mathbf{p}\sigma}^r = \frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}} + m}} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi^r \\ (E_{\mathbf{p}} + m)\chi^r \end{pmatrix}_{\sigma} \quad (3.13b)$$

con  $s, r = 0, 1$ . La presencia del cuarto ket implica ortogonalidad entre los subespacios de partícula y antipartícula. En el subespacio de soluciones de la ecuación (3.9) el producto interno pseudoeuclídeo anterior se vuelve isomorfo a dos productos euclídeos como consecuencia de las relaciones [53]:

$$\bar{u}_{\mathbf{p}}^r u_{\mathbf{p}}^s = 2m\delta^{rs} \quad (3.14a)$$

$$\bar{v}_{\mathbf{p}}^r v_{\mathbf{p}}^s = -2m\delta^{rs} \quad (3.14b)$$

Dado que la superposición de estados de partícula y antipartícula no ocurren en la naturaleza [54], consideraremos solo uno de los dos términos en (3.12). En lo que sigue, trabajamos en el subespacio de partícula sin pérdida de generalidad.

El producto entre estados de diferentes masas pero misma distribución de espín-momento da como resultado (ver Apéndice A y B)

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Psi}_{m'} | \Psi_m \rangle &= \int \frac{d^3p}{4E_{\mathbf{p},m'}E_{\mathbf{p},m}} \delta(E_{\mathbf{p},m} - E_{\mathbf{p},m'}) \bar{u}_{\mathbf{p},m}^s u_{\mathbf{p},m'}^r \\ &\quad \times a_s^*(\mathbf{p}, m) a_r(\mathbf{p}, m') \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$= \delta(m - m') \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}} ||a(\mathbf{p})||^2 \quad (3.16)$$

La normalización<sup>4</sup>  $\langle \bar{\Psi}'_m | \Psi_m \rangle = \delta(m - m')$  implica entonces  $\int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}} ||a(\mathbf{p})||^2 = 1$  y en consecuencia la norma de Dirac (ver abajo). Un estado de electrón-reloj puede escribirse como (omitiendo el subíndice  $m$ )

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^4x \psi_{\sigma}(x) |x, \sigma\rangle, \quad (3.17)$$

$$\psi_{\sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}} u_{\sigma}^s(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p}) e^{-ipx}|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}. \quad (3.18)$$

A partir de la invarianza de  $d^4x$  sigue la ley de transformación  $\psi'_{\sigma}(x) = S_{\alpha\sigma} \psi_{\sigma}(\Lambda^{-1}x)$ . Es más, un simple calculo muestra que  $\int d^3x \psi^{\dagger}(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}} ||a(\mathbf{p})||^2 = 1$ , recuperando la normal de Dirac usual [52].

El estado del electrón puede entonces recuperarse por probabilidad condicional como

---

<sup>4</sup>Matemáticamente podemos pensar que estamos trabajando con un “rigged Hilbert space” y las autofunciones del operador de masa son funciones generalizadas. Su normalización permite expandir estados generales  $|\Psi\rangle \in L_2(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{C}^4$  como  $|\Psi\rangle = \int dm \phi(m) |\Psi_m\rangle$ , donde  $\langle \bar{\Psi} | \Psi \rangle = \int dm |\phi(m)|^2 = 1$ . Vemos que los estados normalizados en tiempo, por ejemplo estados con historia finita, corresponden a estados con alguna dispersión en masa. Podemos pensar en los estados  $|\Psi_m\rangle$  como la idealización correspondiente a una partícula con una historia infinita y relación de dispersión infinitamente bien definida.

$$|\psi(t)\rangle_e = \frac{\langle t|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\bar{\Psi}|\Pi_t^{\gamma^0}|\Psi\rangle}} \quad (3.19)$$

con  $\Pi_t^{\gamma^0} = |t\rangle\langle t| \otimes \gamma^0$  y  $\langle\bar{\Psi}|\Pi_t^{\gamma^0}|\Psi\rangle = \frac{1}{2\pi} \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi}$ . La ley de transformación de la función de onda implica la invarianza de esta cantidad (ver Apéndice A).

La correspondencia con la teoría de Dirac está completa si notamos que el valor de expectación de un observable  $M_e$ , en un dado tiempo  $t$ , se obtiene como sigue:

$$\langle M_e \rangle(t) = \frac{\langle\bar{\Psi}|\Pi_t^{\gamma^0} M|\Psi\rangle}{\langle\bar{\Psi}|\Pi_t^{\gamma^0}|\Psi\rangle} = {}_e\langle\psi(t)|M_e|\psi(t)\rangle_e, \quad (3.20)$$

donde  $M := \mathbb{1} \otimes M_e$ .

Como consideración final escribimos la relación general entre el producto invariante en el espacio 4-dimensional con el producto de Dirac en el espacio ordinario 3-dimensional a masa  $m$  fija:

$$\langle\bar{\Phi}_{m'}|\Psi_m\rangle = \delta(m - m') (\phi, \psi)_m \quad (3.21)$$

donde definimos  $(\phi, \psi)_m := \int d^3x \phi_m^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi_m(\mathbf{x}, t)$ , y  $\langle\bar{\Phi}_{m'}|\Psi_m\rangle = \frac{1}{2\pi} \int d^4x \bar{\phi}_{m'}(x) \psi_m(x)$ .

## 3.2 Reloj bidimensional y tiempo propio

Hemos visto que es posible ampliar el espacio de Hilbert de la partícula incluyendo un reloj, preservando la simetría de Lorentz gracias a un producto invariante definido en el espacio ampliado. Es más, para estados físicos que satisfacen una ecuación sin tiempo, la noción de ortogonalidad que surge de este producto Ec. (3.16), implica la norma usual de la teoría de Dirac. En esta sección mostramos que el producto invariante que introdujimos motivados por argumentos de simetría surge naturalmente cuando se introduce un segundo reloj. El objetivo es discutir la identificación usual del tiempo en el formalismo PW con el tiempo propio [55]. Mientras esta identificación es satisfactoria en el caso no relativista, la descripción de la evolución temporal a través de la ecuación de Dirac implica necesariamente la acción no local de las transformaciones de Lorentz. Esto conlleva a interpretar la variable del reloj como tiempo en un dado sistema de referencia. Uno puede preguntarse si no habrá un camino diferente a seguir, en particular si no es posible emplear una ecuación análoga a (2.20) que luego de condicionar provea la evolución temporal del estado del sistema parametrizada por un parámetro invariante  $\tau$ . Obtener dicha ecuación

significaría promover el rol de  $t$  a una variable dinámica, pero esto es exactamente lo que el formalismo de PW ya hace. No es entonces sorprendente que introduciendo un “tiempo propio” de esta manera, siga una extensión del formalismo de la sección previa. Aquí desarrollamos dicha extensión.

### 3.2.1 Reloj bidimensional

Consideremos un reloj bidimensional con espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_C = L^2(\mathbb{R}^2)$  y base  $\{|\tau\rangle \otimes |t\rangle\}$ , de manera que  $\langle\tau'|\tau\rangle = \delta(\tau' - \tau)$  y  $\langle t'|t\rangle = \delta(t - t')$ , y el mismo espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S$  para el sistema que anteriormente. Un estado del sistema completo puede ser escrito como

$$|\Phi\rangle = \int d\tau |\tau\rangle |\Psi(\tau)\rangle = \int dm \phi(m) |m\rangle |\Psi(m)\rangle \quad (3.22)$$

donde  $|\tau\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dm e^{-im\tau} |m\rangle$  y  $|\Psi(\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dm \phi(m) e^{im\tau} |\Psi(m)\rangle \in \mathcal{H}_T \otimes \mathcal{H}_S$ , el espacio de Hilbert de la sección anterior. Asumiremos que el Hamiltoniano del universo toma la forma

$$\mathcal{J} = P_\tau \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \gamma^\mu P_\mu. \quad (3.23)$$

Notemos que  $\mathcal{J}$  tiene la misma forma no-interactuante que antes en la partición tiempo propio-resto, pero es no separable en la partición reloj-resto.

Ahora, la ecuación

$$\mathcal{J}|\Phi\rangle = 0 \quad (3.24)$$

implica  $\langle\tau|\mathcal{J}|\Phi\rangle = 0$ , i.e.,

$$i\partial_\tau |\Psi(\tau)\rangle = \gamma^\mu P_\mu |\Psi(\tau)\rangle \quad (3.25)$$

y, en la base conjugada,

$$(\gamma^\mu P_\mu + m) |\Psi(m)\rangle = 0. \quad (3.26)$$

Esta es la ecuación de universo de la sección previa, la cual determina un subespacio invariante de  $\mathcal{H}_T \otimes \mathcal{H}_S$  respecto a transformaciones de Lorentz propias. Esto significa que en el espacio completo  $\tilde{U}(\Lambda) := \mathbb{1}_\tau \otimes U(\Lambda)$  deja la forma de la ecuación (3.25) invariante. En general, transformaciones que dejan invariante la forma de (3.25) preservan también su cuadrado y en consecuencia una métrica quintodimensional. Esto define un espacio de Snyder [56].

Expandiendo los estados  $|\Psi(\tau)\rangle$  en la base  $|x, \sigma\rangle$  de  $\mathcal{H}_T \otimes \mathcal{H}_S$  obtenemos

$$\gamma^\mu p_\mu \Psi(x, \tau) = i\partial_\tau \Psi(x, \tau) \quad (3.27a)$$

$$\bar{\Psi}(x, \tau) \gamma^\mu p_\mu = i\partial_\tau \bar{\Psi}(x, \tau) \quad (3.27b)$$

con  $\Psi_\sigma(x, \tau) := \langle x, \sigma | \Psi(\tau) \rangle$  y  $\bar{\Psi}(x, \tau) := \Psi^\dagger(x, \tau) \gamma^0$ . De esta manera,

$$\partial_\mu j^\mu(x, \tau) = -\frac{d}{d\tau} \bar{\Psi}(x, \tau) \Psi(x, \tau), \quad (3.28)$$

donde  $j^\mu(x, \tau) := \bar{\Psi}(x, \tau) \gamma^\mu \Psi(x, \tau)$ , lo cuál implica que para funciones de onda bien comportadas la cantidad  $\int d^4x \bar{\Psi}(x, \tau) \Psi(x, \tau) = \langle \bar{\Psi}(\tau) | \Psi(\tau) \rangle$  se conserva, i.e., el operador de evolución  $U(\tau) = e^{-i\gamma^\mu p_\mu \tau}$  preserva esta norma. Vemos entonces que el producto invariante que hemos elegido en el espacio  $\mathcal{H}_T \otimes \mathcal{H}_S$  es aquel preservado por la evolución en  $\tau$ . Más aún si ahora expandimos en la base de masa y elegimos la normalización (3.16) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Psi}(\tau) | \Psi(\tau) \rangle &= \int dm dm' \phi^*(m') \phi(m) e^{i\tau(m-m')} \langle \bar{\Psi}(m') | \Psi(m) \rangle \\ &= \int dm |\phi(m)|^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Podemos entonces imponer  $\int dm |\phi(m)|^2 = 1$  e interpretar  $\phi(m)$  como una distribución en masa.

### 3.2.2 Sobre la interpretación de $\tau$

Una versión escalar de la ecuación (3.27) con Hamiltoniano  $p^\mu p_\mu$  apareció varias veces en la literatura [57, 58], y una versión en segundo orden fue discutida en [59], donde  $\tau$  se identificó con el tiempo propio. En el presente caso, la relación clásica (relativista) momento/velocidad de una partícula libre con tiempo propio  $\tau$  vale como un promedio calculado con el producto inducido:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle x^\mu \rangle &= \int d^4x \bar{\Psi}(x, \tau) i [\gamma^\nu p_\nu, x^\mu] \Psi(x, \tau) \\ &= \int d^4x \bar{\Psi}(x, \tau) \gamma^\mu \Psi(x, \tau) \\ &= \int \int \frac{dm d^3p}{2E_{\mathbf{p}, m}} |\phi(m)|^2 |a(\mathbf{p}, m)|^2 \left( \frac{p^\mu}{m} \right) = \left\langle \frac{p^\mu}{m} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde hemos usado la identidad de Gordon [51]. Sin embargo, para una partícula con masa definida, la evolución en  $\tau$  es trivial. En consecuencia, la identificación de  $\tau$  con el tiempo propio no es adecuada. Podemos en cambio pensar que  $\tau$  parametriza las fases relativas de distintas historias de la partícula cuya información está contenida en los estados  $|\Psi(m)\rangle$  a través del valor de la masa y la distribución espín-momento. En una hipotética superposición de diferentes masas, i. e. , diferentes partículas, sería posible ver interferencia entre historias separadas y entonces evolución no trivial en el parámetro  $\tau$ .

### 3.3 Partícula de Dirac en un campo externo

La descripción adecuada de interacciones requiere una teoría de campos. Aquí simplemente trabajamos con la teoría original de Dirac de una partícula en un campo clásico externo. Introducimos la interacción reemplazando  $\mathbb{J} = -\gamma^\mu P_\mu$  por

$$\mathbb{J}_A = -\gamma^\mu (P_\mu + eA_\mu(X)), \quad (3.31)$$

con  $A_\mu(X)|x\rangle = A_\mu(x)|x\rangle$ . Entonces un estado  $|\Psi\rangle = \int d^4x \Psi_\sigma(x)|x, \sigma\rangle$  satisface

$$\mathbb{J}_A|\Psi\rangle = m|\Psi\rangle, \quad (3.32)$$

si la función de onda  $\Psi(x)$  cumple

$$(\gamma^\mu(-i\partial_\mu + eA_\mu) - m)\Psi(x) = 0. \quad (3.33)$$

Ahora nos centramos en el caso de un  $A^\mu$  independiente del tiempo en un dado sistema de referencia. Primero definimos las autofunciones (normalizadas) de  $H(m) = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) + \beta m + eA_0$ ,

$$H(m)\varphi_{kl}(\mathbf{x}, m) = E_k(m)\varphi_{kl}(\mathbf{x}, m), \quad (3.34)$$

donde el subíndice  $l$  indica autoestados con misma energía. Entonces toda solución de (3.33) es de la forma  $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k,l} c_{kl} e^{-iE_k(m)t} \varphi_{kl}(\mathbf{x}, m)$ , lo cual lleva a

$$|\Psi_m\rangle = \sum_k c_k |E_k(m)\rangle |k(m)\rangle, \quad (3.35)$$

donde  $c_k |k(m)\rangle = \sum_l c_{kl} \int d^3x \varphi_{kl}^\sigma(\mathbf{x}, m) |\mathbf{x}, \sigma\rangle$ , con  $|c_k|^2 = \sum_l |c_{kl}|^2$  y  $\langle k'(m) | k(m) \rangle = \delta_{kk'}$ , mientras  $|E_k(m)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{-iE_k(m)t} |t\rangle$ .

Ahora demostraremos que si excluimos potenciales que dependen de  $m$ , e.g., la gravedad, la condición  $\langle \bar{\Psi}_{m'} | \Psi_m \rangle = \delta(m - m')$  implica la normalización usual

$$2\pi \int d^3x \Psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_k |c_k|^2 = 1. \quad (3.36)$$

#### Demostración

Empleando (3.35) encontramos,

$$\langle \bar{\Psi}_{m'} | \Psi_m \rangle = \sum_{k,k'} c_{k'}^* c_k \delta(E_k(m) - E_{k'}(m')) \langle \bar{k}'(m') | k(m) \rangle. \quad (3.37)$$



Vamos a demostrar la relación de ortogonalidad especial

$$\delta(E_k(m) - E_{k'}(m')) \langle \overline{k'(m')} | k(m) \rangle = \delta(m - m') \delta_{kk'}, \quad (3.38)$$

que implica  $\langle \bar{\Psi}_{m'} | \Psi_m \rangle = \delta(m - m') \sum_k |c_k|^2$ , donde

$$\langle \overline{k'(m')} | k(m) \rangle = \sum_{l', l} \frac{c_{k'l'}^* c_{kl}}{c_{k'}^* c_k} \int d^3x \bar{\varphi}_{k'l'}(\mathbf{x}, m') \varphi_{kl}(\mathbf{x}, m). \quad (3.39)$$

Analizamos el lado derecho de la ecuación (3.39) separadamente para  $k = k'$  y  $k \neq k'$ .

Primero notemos que para  $k = k'$  en (3.38),  $\delta(E_k(m) - E_k(m')) = \delta(m - m')/|dE_k(m)/dm|$ . Al derivar la Ec. (3.34) respecto a  $m$  se obtiene

$$(H(m) - E_k(m)) \frac{d\varphi_{kl}(\mathbf{x}, m)}{dm} = \left( \frac{dE_k(m)}{dm} - \beta \right) \varphi_{kl}(\mathbf{x}, m).$$

Al multiplicar a izquierda por  $\varphi_{k'l'}^\dagger(\mathbf{x}, m)$  e integrar en todo el espacio obtenemos el resultado importante de que estas autofunciones satisfacen la condición de ortogonalidad adicional

$$\int d^3x \bar{\varphi}_{k'l'}(\mathbf{x}, m) \varphi_{kl}(\mathbf{x}, m) = \frac{dE_k(m)}{dm} \delta_{ll'}, \quad (3.40)$$

donde empleamos la hermiticidad de  $H(m)$  y la ortonormalidad de sus autoestados respecto al producto usual. La primer parte de la demostración está completa si asumimos el resultado estándar  $dE_k(m)/dm > 0$  para  $E_k(m) > 0$ .

El término con  $k \neq k'$  en (3.38) contribuye solo cuando  $E_{k'}(m') = E_k(m)$ . Dado que

$$\begin{aligned} H(m) \varphi_{kl}(\mathbf{x}, m) &= E_k(m) \varphi_{kl}(\mathbf{x}, m) \\ H(m') \varphi_{k'l'}(\mathbf{x}, m') &= E_{k'}(m') \varphi_{k'l'}(\mathbf{x}, m'), \end{aligned}$$

multiplicando a izquierda la primera (segunda) ecuación por  $\varphi_{k'l'}^\dagger(m')$  ( $\varphi_{kl}^\dagger(m)$ ), integrando en todo el espacio y restando los resultados (conjugando uno de ellos), encontramos

$$\begin{aligned} (m - m') \int d^3x \bar{\varphi}_{k'l'}(\mathbf{x}, m') \varphi_{kl}(\mathbf{x}, m) &= \\ [E_k(m) - E_{k'}(m')] \int d^3x \varphi_{k'l'}^\dagger(\mathbf{x}, m') \varphi_{kl}(\mathbf{x}, m). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Entonces, si  $E_k(m) = E_{k'}(m')$  la primer integral se *anula* para  $m \neq m'$ , implicando que estas autofunciones satisfacen en este caso una relación de ortogonalidad extendida, lo cual conlleva al valor nulo de (3.39) para  $k \neq k'$ . Notemos, sin embargo, que tal relación de ortogonalidad no vale en general para  $E_k(m) \neq E_{k'}(m')$ . Los

resultados previos implican entonces la Ec. (3.38).  $\square$

Quedó entonces demostrado que siempre que exista un sistema de referencia en el cual  $A_\mu$  sea independiente de  $t$ , el producto invariante implica la norma de Dirac. También mencionamos que para  $A^\mu$  independiente de  $t$  (y  $\tau$ ) la extensión del tratamiento de la sección 3.2 es directa.

### 3.4 Densidad invariante

Examinamos aquí algunas propiedades básicas de la “densidad espacio-tiempo”  $\bar{\Psi}(x)\Psi(x)$  que corresponde al producto invariante  $\langle \bar{\Psi} | \Psi \rangle$  que introdujimos. Tal densidad no es definida positiva ni en el subespacio de partícula ni en el de antipartícula. Sin embargo, en el caso 1+1 dimensional para la distribución  $a(p) = e^{-\epsilon E_p}$  y masa  $m \neq 0$ , es positiva en todo el espacio-tiempo. Más aún en el límite  $\epsilon \rightarrow 0^+$  se anula en la región tipo espacio del cono de luz centrado en  $(x, t) = (0, 0)$ . Notemos también que esta distribución corresponde al reemplazo formal  $t \rightarrow t - i\epsilon$  en el caso de una distribución de momento llana. Más aún, para  $x \rightarrow z$ , puede considerarse como una distribución  $3d \propto \delta(p_x)\delta(p_y)e^{-\epsilon E_p}$ , en cuyo caso  $\Psi(\mathbf{x}, t, \epsilon)$  es, para  $\epsilon \rightarrow 0^+$  y  $t \rightarrow 0$  un autoestado de la tercer componente del operador posición de Pryce  $\mathbf{q} = \mathbf{x} + \frac{1}{2E_p^2}(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\Sigma} + im\beta\boldsymbol{\alpha})$  [60].

Los espinores en el caso 1+1 dimensional tienen dos componentes ( $\sigma = 0, 1$ ) y espín fijo. La correspondiente función de onda (no normalizada) es (Ec. (3.12))

$$\psi_\sigma(x, t, \epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2E_p} e^{-i(t-i\epsilon)E_p + ipx} \frac{1}{\sqrt{E_p + m}} \begin{pmatrix} E_p + m \\ p \end{pmatrix}_\sigma, \quad (3.42)$$

y satisface la ecuación unidimensional  $i\partial_t\psi(x, t) = -i\sigma_1\partial_x\psi(x, t) + m\sigma_3\psi(x, t)$ . Ahora  $\sigma_3$  reemplaza  $\gamma^0$  cuando calculamos  $\bar{\Psi}(x, t)$ . Entonces,  $\bar{\Psi}(x, t)\Psi(x, t) = \frac{1}{2\pi}[|\psi_0(x, t, \epsilon)|^2 - |\psi_1(x, t, \epsilon)|^2]$ .

Integrando explícitamente en (3.42) [61] puede probarse explícitamente (ver Apéndice 3.3) que tal diferencia es *positiva*  $\forall x, t$  si  $\epsilon > 0$ . Y en el límite  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , obtenemos, para  $\bar{\psi}(x, t)\psi(x, t)$  y  $\psi^\dagger(x, t)\psi(x, t)$ ,

$$\bar{\psi}(x, t)\psi(x, t) = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{t^2 - x^2}} & x^2 < t^2 \\ 0 & x^2 > t^2 \end{cases}, \quad (3.43)$$

$$\psi^\dagger(x, t)\psi(x, t) = \begin{cases} \frac{\pi|t|}{t^2 - x^2} & x^2 < t^2 \\ \frac{\pi|x|}{x^2 - t^2} e^{-2m\sqrt{x^2 - t^2}} & x^2 > t^2 \end{cases}. \quad (3.44)$$

De donde, (3.43) es positiva en el sector tipo tiempo, y se anula en la región tipo espacio. En cambio, (3.44) se mantiene positiva en esta última [50]. Es también fácil ver que  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{\psi}(x, t, \epsilon) \psi(x, t, \epsilon) \right) \propto \delta(x)$ .

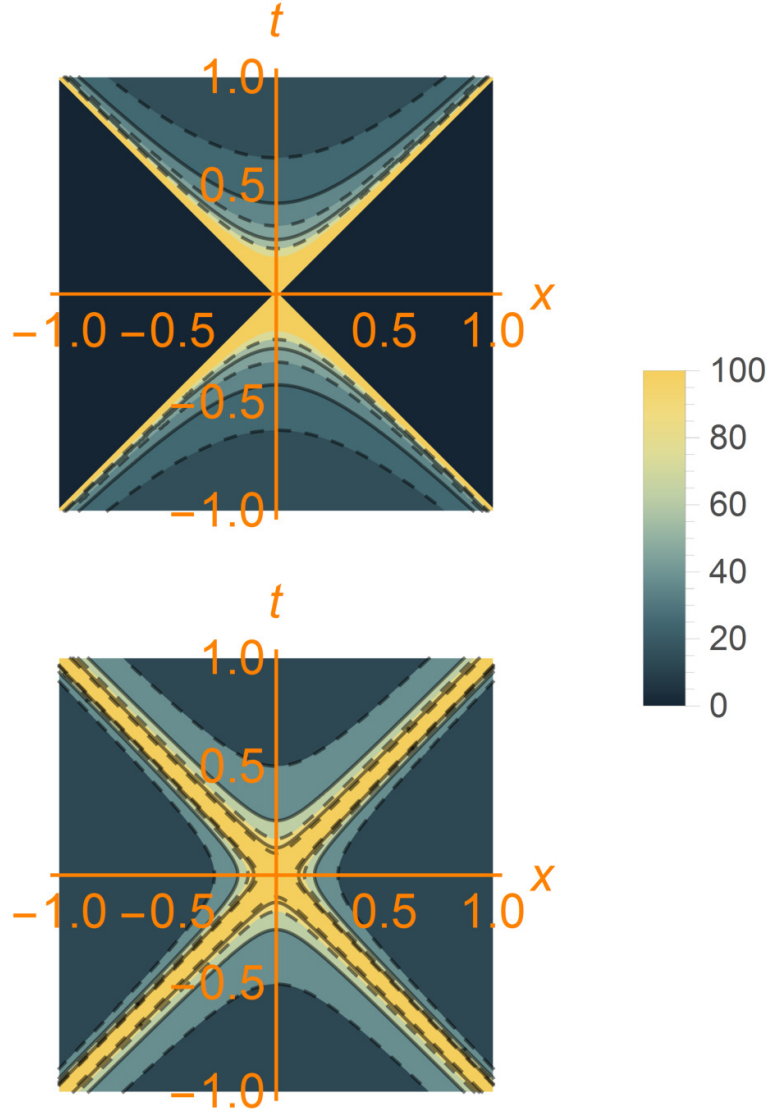


Figura III.1: Curvas de nivel de la densidad invariante (3.43) (panel superior) y la densidad de Dirac (3.44) (panel inferior), para  $m \equiv mc/\hbar = 1$ . La primera se anula en la región tipo espacio (aquí  $x$  y  $t \equiv ct$  están en unidades de  $\hbar/mc$ ).

En [57] la densidad tipo Schrödinger de la versión escalar de la Ec. (3.27) se interpreta como densidad de probabilidad espacio-tiempo. En el presente caso  $\bar{\Psi}(x, \tau) \Psi(x, \tau) \propto \int dm dm' \phi^*(m') \phi(m) e^{i(m-m')\tau} \bar{\psi}_{m'}(x, t) \psi_m(x, t)$  es la cantidad correspondiente. En el caso 1+1 dimensional ya discutido, y en el límite  $\epsilon \rightarrow 0^+$

encontramos

$$\bar{\psi}_{m'}(x, t)\psi_m(x, t) = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{t^2-x^2}}e^{-i(m-m')\sqrt{t^2-x^2}} & x^2 < t^2 \\ 0 & x^2 > t^2 \end{cases} \quad (3.45)$$

En consecuencia,  $\bar{\Psi}(x, t, \tau)\Psi(x, t, \tau)$  se anula fuera del cono de luz para toda distribución de masa  $\phi(m)$ . En cambio en el interior del cono de luz  $\bar{\Psi}(x, t, \tau)\Psi(x, t, \tau) \propto \frac{1}{\sqrt{t^2-x^2}}|\Phi(\tau - \sqrt{t^2-x^2})|^2$ , donde  $\Phi(\tau)$  indica la transformada de Fourier de la función  $\phi(m)$ . Vemos que la región positiva de la densidad, que corresponde a la parte interna del cono de luz, se mantiene positiva al evolucionar en  $\tau$ , mientras que la región externa se mantiene nula. Más aún, en el caso general  $\epsilon > 0$ ,  $\bar{\Psi}(x, t, \tau)\Psi(x, t, \tau) > 0$  para toda distribución de masa, como se muestra en el Apéndice 3.3.

### 3.5 Conclusiones

Vimos que el mecanismo de Page y Wootters es particularmente adecuado para proveer de un espacio de Hilbert covariante a la ecuación de Dirac. Por un lado, vemos que la definición de las transformaciones de Lorentz es puramente cinemática y puede elegirse de manera tal que la función de onda, entendida ahora como una densidad de probabilidad en el espacio tiempo, transforme como en la formulación de Dirac. Frente al producto invariante en 4-dimensiones las transformaciones de Lorentz son unitarias. Al imponer la ecuación de universo de PW correspondiente al Hamiltoniano de Dirac, queda claro que el subespacio físico es invariante frente a las transformaciones de Lorentz.

Notablemente, la ecuación de universo puede entenderse como una ecuación de autovalores de masa. En este sentido, introducir un operador tiempo nos lleva a la definición de un operador de masa. Aún más, la condición de ortonormalidad entre autovectores de masa distinta, conecta la norma en 4-dimensiones con la norma usual de Dirac en hipersuperficies de 3-dimensiones. Esta conexión, que puede mostrarse también para la ecuación de Dirac en un campo externo, se basa en propiedades de ortogonalidad especiales que se derivan de la ecuación de Dirac misma. Este resultado resuelve los problemas de normalización para tiempo infinito del caso no relativista.

También se discutieron aspectos adicionales, como la derivación de lo anterior al considerar una dimensión extra, que puede nuevamente interpretarse desde el mecanismo de PW, y algunas propiedades de la densidad de probabilidad en 4-dimensiones.

## Apéndices

### 3.1 Norma de Dirac

De la conservación de la carga y la ley de transformación de la corriente  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ , se sigue la invarianza de la norma de Dirac [62]:

$$\int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x \psi'^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi'(\mathbf{x}, t), \quad (3.46)$$

con  $\psi'(\mathbf{x}, t) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$ . Expandiendo la función de onda de una partícula libre en la base de momento, y utilizando la propiedad [53]

$$u_{\mathbf{p}}^{(s')\dagger} u_{\mathbf{p}}^{(s)} = \delta^{ss'} 2E_{\mathbf{p}},$$

encontramos

$$\int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}} ||a(\mathbf{p})||^2,$$

con  $||a(\mathbf{p})||^2 := |a_0(\mathbf{p})|^2 + |a_1(\mathbf{p})|^2$ .

De la invarianza tanto de  $p.x|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}$  como de la medida  $\frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}}$ , la igualdad (A1) puede reafirmarse como

$$\int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}} ||a(\mathbf{p})||^2 = \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}} 2E_{\Lambda\mathbf{p}}} a_{s'}^*(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p}) F_{\Lambda}^{s's}(\mathbf{p}),$$

implicando la relación

$$F_{\Lambda}^{s's}(\mathbf{p}) = u_{\mathbf{p}}^{s'\dagger} S^\dagger(\Lambda) S(\Lambda) u_{\mathbf{p}}^s = \delta^{ss'} 2E_{\Lambda\mathbf{p}},$$

donde hemos definido  $F_{\Lambda}^{s's}(\mathbf{p}) = u_{\mathbf{p}}^{s'\dagger} S^\dagger(\Lambda) S(\Lambda) u_{\mathbf{p}}^s$ .

### 3.2 Expansión de estados en variables continuas

Consideramos un conjunto completo continuo de estados  $\{|p\rangle\}$  que abarca un espacio  $\mathcal{H}$  y satisface  $\langle p'|p\rangle = \delta(p - p')$ , y un estado de la forma

$$|\psi\rangle = \int \phi(p) |p\rangle dp,$$

satisfaciendo  $\langle \psi | \psi \rangle = \int |\phi(p)|^2 dp = 1$ . Si  $E(p)$  es una función monótona de  $p$ , podemos reescribir  $|\psi\rangle$  como

$$|\psi\rangle = \int \phi(p(E)) |p(E)\rangle \frac{dp}{dE} dE \quad (3.47)$$

$$= \int \Phi(E) |E\rangle dE, \quad (3.48)$$

donde  $\Phi(E) = \phi(p(E))/\sqrt{|dE/dp|}$  y  $|E\rangle = |p(E)\rangle/\sqrt{|dE/dp|}$ , tal que

$$\int |\Phi(E)|^2 dE = 1, \quad \langle E'|E\rangle = \delta(E - E').$$

La extensión a estados definidos en  $\mathcal{H}^{\otimes n}$  es aparente: el cambio de  $n$  variables  $p_i$  a nuevas  $n$  variables independientes  $E_i(\mathbf{p})$  se procede de la misma manera, con  $|E_1 \dots E_n\rangle = |p_1 \dots p_n\rangle/\sqrt{|J|}$  y  $J$  el jacobiano  $\partial(E_1, \dots, E_n)/\partial(p_1, \dots, p_n)$ . Sin embargo, note que estos estados pueden asociarse a diferentes particiones de  $\mathcal{H}^{\otimes n}$ : Si  $P_i|p_i\rangle = p_i|p_i\rangle$ ,  $[P_i, P_j] = 0$ , podemos escribir  $|p_1, \dots, p_n\rangle = |p_1\rangle \dots |p_n\rangle$  y de manera similar,  $|E_1, \dots, E_n\rangle = |E_1\rangle \dots |E_n\rangle$ , con  $H_i(\mathbf{p})|E_i\rangle = E_i(\mathbf{p})|E_i\rangle$  y  $[H_i, H_j] = 0$ .

Considerando ahora estados en  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$  de la forma

$$|\Psi\rangle = \int \phi(p, q)|pq\rangle dp dq,$$

obviamente tenemos  $\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int \bar{\phi}_1(p, q)\phi_2(p, q) dp dq$ . Y si  $\phi_i(p, q) = g_i(p, q)\delta(f_i(p, q) - c_i)$ , obtenemos un solapamiento finito

$$\begin{aligned} \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle &= \int \bar{g}_1(p, q)g_2(p, q)\delta(f_1(p, q) - c_1)\delta(f_2(p, q) - c_2) dp dq \\ &= \bar{g}_1(p, q)g_2(p, q)/|J|, \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde  $J = \partial(f_1, f_2)/\partial(p, q)$  y el resultado final se evalúa en la intersección de ambas curvas (asumida aquí para existir y ser única; la extensión al caso general es directa). Por otro lado, si  $f_1(p, q) = f_2(p, q) = f(p, q)$ , obtenemos,

$$\begin{aligned} \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle &= \int \bar{g}_1(p, q)g_2(p, q)\delta(f(p, q) - c_1)\delta(f(p, q) - c_2) dp dq \\ &= \delta(c_1 - c_2) \int \bar{g}_1(p, q)g_2(p, q) dv/|J|, \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde la integral es a lo largo de la curva  $f(p, q) = c_1$ , con  $J = \partial(f, v)/\partial(p, q)$  y  $v(p, q)$  cualquier función tal que  $(f, v)$  sean variables independientes. Por ejemplo  $dv/|J| = dp/|f_q|$  si  $v = p$ . La normalización adecuada de estos estados implicaría entonces  $\int \bar{g}_i(p, q)g_i(p, q) dv/|J| = 1$ .

Note que estos estados  $|\Psi_i\rangle$  pueden escribirse como

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \int g(p, q)\delta(f(p, q) - c)|pq\rangle dp dq \\ &= \int g(p, q)|pq\rangle dv/|J| \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$= \int g(p, q)|pq\rangle dp/|f_q|, \quad (3.52)$$

con las dos últimas integrales sobre la curva  $f(p, q) = c$ , que define la función  $q(p)$  a usarse en la última integral. Además, también podemos reescribir la última integral en las formas más simétricas (usando  $|q(p)\rangle = |p\rangle/\sqrt{|dq/dp|}$ , Ecs. (3.47–(3.48)),

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \int g(p, q) |p\rangle |p\rangle dp / \sqrt{|f_q f_p|} \\ &= \int g(p, q) |q\rangle |q\rangle dq / \sqrt{|f_q f_p|}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Estas expresiones representan descomposiciones de Schmidt continuas de  $|\Psi\rangle$ .

### 3.3 Densidad Invariante

Para probar que  $\bar{\Psi}(x, t, \epsilon)\Psi(x, t, \epsilon)$  es positivo para  $\epsilon > 0$ , es suficiente mostrar que  $F(x, t, \epsilon) := |\psi_0(x, t, \epsilon)/\psi_1(x, t, \epsilon)|^2 > 1$ . Al realizar la integración en (3.42) [61] encontramos

$$\psi_0(x, t, \epsilon) = \frac{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sqrt{x^2 - (t - i\epsilon)^2} + i(t - i\epsilon)} e^{-m\sqrt{x^2 - (t - i\epsilon)^2}}}{2\sqrt{x^2 - (t - i\epsilon)^2}}, \quad (3.54)$$

$$\psi_1(x, t, \epsilon) = \frac{\sqrt{2\pi} i x e^{-m\sqrt{x^2 - (t - i\epsilon)^2}}}{2\sqrt{x^2 - (t - i\epsilon)^2} \sqrt{\sqrt{x^2 - (t - i\epsilon)^2} + i(t - i\epsilon)}}, \quad (3.55)$$

y por lo tanto,

$$F(x, t, \epsilon) = 1 + \frac{2\sqrt{f(x, t, \epsilon)} \left( t \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \epsilon \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right) + f(x, t, \epsilon) - (x^2 - \epsilon^2 - t^2)}{x^2}, \quad (3.56)$$

donde  $f(x, t, \epsilon) = \sqrt{(x^2 - \epsilon^2 - t^2)^2 + 4x^2\epsilon^2}$  y  $\gamma(x, t, \epsilon) := \arg(x^2 + \epsilon^2 - t^2 + 2i\epsilon t)$ . Note que  $F(x, t, \epsilon)$  es independiente de  $m$ . Para  $\epsilon > 0$  y  $t \geq 0$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $0 \leq \gamma \leq \pi$  mientras que para  $t \leq 0$ ,  $-\pi \leq \gamma \leq 0$ . En ambos casos  $t \sin(\frac{\gamma}{2}) \geq 0$ ,  $\cos(\frac{\gamma}{2}) \geq 0$ . Entonces el cociente en (3.56) es claramente positivo. Por otro lado, para  $\epsilon = 0$ ,  $\gamma = 0$  y el cociente se convierte en  $(|x^2 - t^2| - (x^2 - t^2))/x^2$ , implicando  $F(x, t, 0) = 1$  si  $|x| > |t|$  y  $F(x, t, 0) = 2t^2/x^2 - 1$  si  $|x| < |t|$ . De la Ec. (3.42) notamos, al hacer la integral, que  $\psi_0^*(x, t, \epsilon, m')\psi_0(x, t, \epsilon, m) - \psi_1^*(x, t, \epsilon, m')\psi_1(x, t, \epsilon, m) = \psi_1^*(x, t, \epsilon, m')\psi_1(x, t, \epsilon, m) (F(x, t, \epsilon) - 1)$ , con  $F(x, t, \epsilon)$  definido en (3.56). Esto implica

$$\bar{\Psi}(x, t, \tau)\Psi(x, t, \tau) \propto \left| \int dm \phi(m) e^{im\tau} \psi_1(x, t, \epsilon, m) \right|^2 (F(x, t, \epsilon) - 1) > 0$$

ya que  $F(x, t, \epsilon) > 1$ .

## Tiempo cuántico y partículas escalares

En los capítulos anteriores describimos como el formalismo de Page y Wootters permite recuperar la ecuación de Schrödinger y nuestra extensión a la ecuación de Dirac. En este capítulo, basado en la publicación [2], aprovechamos estos conceptos aún más y desarrollamos el caso de las partículas escalares, obteniendo nuevas perspectivas sobre el tema. Uno de los principales resultados es la definición de un espacio de Hilbert consistente para la ecuación de Klein-Gordon [63, 64], tanto en el caso libre como en presencia de un campo externo, donde el producto interno es el producto canónico en cuatro dimensiones. Es notable que esta construcción, y la posterior normalización adecuada de estados de masa fija, que son autoestados de una ecuación tipo Wheeler-DeWitt [13], aseguren la norma tridimensional ( $3d$ ) usual. Además, en el caso libre, el subespacio de masa definida se asigna a la representación estándar de Wigner [65], implicando directamente la medida invariante estándar  $3d$ . Mientras que los resultados correspondientes para el caso libre se obtuvieron previamente en el contexto de la gravedad cuántica [48, 66-68], el espacio cuatridimensional ( $4d$ ) se consideró allí como un espacio de Hilbert auxiliar (cinemático) (del cual se infería el importante resultado de un producto  $3d$  inducido para estados “físicos”). Aquí lo promovemos al estatus de un espacio físico real. Esto permite elevar el tiempo de un parámetro a un operador, lo que a su vez requiere promover la masa, que en ambas ecuaciones de Dirac y Klein-Gordon se asume como un parámetro fijo, a un observable cuántico. Este enfoque ofrece ventajas conceptuales sustanciales incluso si solo se considera el subespacio (subespacio propio) de estados de masa definida, pero además abre el camino a nuevas posibilidades [1], como estados cuánticos más generales con fluctuaciones de masa y un espacio de Fock extendido basado en entidades cuatridimensionales. Además, el presente tratamiento de las interacciones revela que



tales estados generales ya están implícitos al expresar las soluciones correspondientes en términos de los estados libres, en analogía con las contribuciones fuera de capa de masa en tratamientos perturbativos para sistemas de muchas partículas en interacción. Estos resultados proporcionan una nueva perspectiva que podría ser adecuada para tratar el problema del espacio de Hilbert del marco de Wheeler DeWitt de la gravedad cuántica [13, 25, 69, 70].

La construcción básica del espacio de Hilbert explícitamente covariante adecuado para partículas escalares se presenta en la Sec. 4.1.1, donde se definen los estados de eventos  $|x\rangle$  como autoestados de los operadores hermiticos  $X^\mu$ , con  $X^0$  introducido de acuerdo con el formalismo de PW. Luego se muestra que el producto de Klein-Gordon  $3d$  emerge de la ortogonalidad  $4d$  de los autoestados de masa. Esto conduce a la Sec. 4.1.2 donde se establece la relación con la representación estándar de partículas únicas del grupo de Poincaré [65], junto con la correspondencia uno a uno entre los estados de historia de masa fija  $4d$  y aquellos de la representación Wigner escalar usual. Dado que los estados de historia son más generales, esta correspondencia solo se mantiene en un subespacio de masa particular, excluyendo así los estados  $|x\rangle$ . Sin embargo, se muestra en la Sec. 4.1.3 que los estados localizados en el espacio-tiempo se pueden proyectar en el “subespacio físico”, proporcionando información física geométrica. Este resultado se emplea para obtener la amplitud de propagación libre de un campo escalar [40] dentro del presente formalismo. La acción adecuada de operadores covariantes en subespacios físicos se aclara aún más en la Sec. 4.1.4 al descomponer el espacio de Hilbert de acuerdo con sus diferentes sectores de masa y energía. En particular, se discute la no acotación de  $P^0$ , el generador de las traslaciones temporales. La normalización en el tiempo se considera en la misma sección, donde se muestra explícitamente que un estado normalizable general en el espacio de Hilbert covariante es una superposición de los anteriores estados propios impropios” de masa.

En la Sec. 4.2 se generaliza la ecuación del universo para incluir interacciones con un campo externo. La ecuación de Klein-Gordon con un potencial se obtiene al proyectar sobre  $|x\rangle$  la ecuación de valor propio asociada. Luego se demuestra que la conexión correcta entre el producto extendido canónico y el producto de Klein-Gordon se mantiene para cualquier campo externo independiente de la masa y el tiempo (para una elección de calibre y marco de referencia dados). También se comenta cómo la consideración de estados sin masa definida ya está implícita al tratar con interacciones.

Algunas de las nuevas perspectivas que se derivan del régimen relativista se transfieren al caso no relativista en la Sec. 4.3. En particular, se deriva una propuesta para la normalización de estados con historias infinitas en una discusión no relativista autocontenida. También se discute brevemente el caso de un potencial dependiente linealmente de la masa.

La construcción consistente de la representación de partículas individuales también permite una definición consistente de un espacio de Fock donde el bloque de construcción es la partícula como una entidad cuatridimensional. En la Sec. 4.4 se explora esta “segunda cuantización de historias”. La identificación de la Sec. 4.1.2 se extiende al espacio de Fock estándar de la teoría de campo escalar a través de la definición de un subespacio adecuado y la generalización del operador del universo a un operador de un solo cuerpo. Finalmente, se discuten las conclusiones y perspectivas en la Sec. 4.5.

## 4.1 Partícula Escalar

### 4.1.1 Formalismo

Un estado histórico general para una partícula escalar puede escribirse como

$$|\Psi\rangle = \int d^4p \Psi(p)|p\rangle \quad (4.1)$$

donde  $|p\rangle \in \mathcal{H}$  son los autoestados impropios de los cuatro operadores  $P_\mu$ . Aquí  $\mathcal{H} = S(\mathbb{R}^4), L^2(\mathbb{R}^4), S^*(\mathbb{R}^4)$  es el espacio de Hilbert equipado construido a partir de  $L^2(\mathbb{R}^4)$ , y  $S(\mathbb{R}^4)$  es el espacio de Schwartz. Los operadores de impulso se definen por

$$U(\Lambda)|p\rangle = |\Lambda p\rangle, \quad (4.2)$$

con  $\Lambda^\mu{}_\nu = e^{w^\mu{}_\nu}$  y  $w_{\mu\nu} = -w_{\nu\mu}$  un tensor antisimétrico. El estado transformado se convierte en

$$U(\Lambda)|\Psi\rangle = \int d^4p \Psi'(p)|p\rangle, \quad (4.3)$$

con

$$\Psi'(p) = \langle p|U(\Lambda)|\Psi\rangle = \Psi(\Lambda^{-1}p). \quad (4.4)$$

También podemos introducir los estados  $|x\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p, e^{ipx}|p\rangle$  con  $px = p_\mu x^\mu = p^0 x^0 - \sum_{i=1}^3 p^i x^i$ , que se transforman como  $U(\Lambda)|x\rangle = |\Lambda x\rangle$ . Si  $|x\rangle$  son autoestados de operadores  $X^\mu$ , estos últimos satisfacen las relaciones de conmutación  $[X^\mu, P_\nu] = i\delta^\mu_\nu$ . Claramente los operadores  $P_\mu, L_{\mu\nu} := X_\mu P_\nu - X_\nu P_\mu$  proporcionan una representación

del álgebra de Lie del grupo de Poincaré, donde vale la pena notar que  $P_0$  no es el Hamiltoniano (ver Sec. 4.1.4) y que la representación actúa sobre  $\mathcal{H}$  y no sobre un campo clásico. La representación es manifiestamente unitaria ya que

$$\langle \tilde{\Psi} | U(\Lambda)^\dagger U(\Lambda) | \Psi \rangle = \int d^4p \tilde{\Psi}'^*(p) \Psi'(p) = \langle \tilde{\Psi} | \Psi \rangle. \quad (4.5)$$

Consideremos ahora el operador

$$\mathcal{J} = P^\mu P_\mu. \quad (4.6)$$

La ecuación

$$\mathcal{J}|\Psi\rangle = m^2|\Psi\rangle, \quad (4.7)$$

tiene por solución general

$$\begin{aligned} |\Psi_{m^2}\rangle &= \int d^4p \delta(p^\mu p_\mu - m^2) H^+(p^0) \alpha(\mathbf{p}) |p\rangle \\ &\oplus \int d^4p \delta(p^\mu p_\mu - m^2) H^-(p^0) \beta(\mathbf{p}) |p\rangle \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde  $H^\pm$  denota la función de Heaviside tal que  $\pm$  corresponde a  $p^0$  positivo o negativo y  $m^2$  es un autovalor real del operador hermitico  $\mathcal{J}$ . Definiendo  $\Psi(x) = \langle x | \Psi \rangle$ , la Ec. (4.7) se convierte en la usual ecuación de Klein-Gordon [63, 64],

$$\langle x | (P^\mu P_\mu - m^2) | \Psi \rangle = 0 \Rightarrow (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \Psi(x) = 0, \quad (4.9)$$

cuya invariancia es evidente ya que  $\Psi'(x) = \langle x | U(\Lambda) | \Psi \rangle = \Psi(\Lambda^{-1}x)$ . Dado que

$$\delta(p^\mu p_\mu - m^2) H^+(p^0) = \frac{\delta(p^0 - E_{\mathbf{p}m})}{2E_{\mathbf{p}m}}, \quad (4.10)$$

con  $E_{\mathbf{p}m} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ , una solución arbitraria con  $p^0$  positivo puede escribirse explícitamente como

$$|\Psi_{m^2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^4x \psi(x) |x\rangle, \quad (4.11)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}m}} \alpha(\mathbf{p}) e^{-ipx|p^0=E_{\mathbf{p}m}}, \quad (4.12)$$

donde  $\psi(x) = \sqrt{2\pi} \Psi(x)$ . Bajo una transformación de Lorentz,  $\alpha(\mathbf{p}) \rightarrow \alpha(\Lambda^{-1}\mathbf{p})$  (Ec. (4.8)), lo que implica que  $\frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}m}}$  es invariante, en concordancia con el resultado bien conocido. El producto de dos soluciones correspondientes a diferentes autovalores  $m^2$  y  $\tilde{m}^2$  produce

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\tilde{m}^2} | \Psi_{m^2} \rangle &= \int \frac{d^3p}{4E_{\mathbf{p}\tilde{m}}E_{\mathbf{p}m}} \delta(E_{\mathbf{p}m} - E_{\mathbf{p}\tilde{m}}) \tilde{\alpha}(\mathbf{p}) \alpha(\mathbf{p}) \\ &= \delta(m^2 - \tilde{m}^2) \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}m}} \tilde{\alpha}^*(\mathbf{p}) \alpha(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

ya que  $\delta(E_{\mathbf{p}m} - E_{\mathbf{p}\tilde{m}}) = \delta(m^2 - \tilde{m}^2)2E_{\mathbf{p}m}$ . En el caso de dos soluciones con la misma distribución de momentos a igual masa, entonces

$$\langle \Psi_{\tilde{m}^2} | \Psi_{m^2} \rangle = \delta(m^2 - \tilde{m}^2) \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}m}} |\alpha(\mathbf{p})|^2, \quad (4.14)$$

con una expresión similar en términos de  $\beta(\mathbf{p})$  para  $p^0$  negativo (las soluciones con  $p^0$  positivo y negativo son ortogonales).

Es fácil ver a partir de la Ec. (4.12) que

$$\int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}m}} |\alpha(\mathbf{p})|^2 = Q(\psi, \psi)$$

con

$$Q(\varphi, \psi) := i \int d^3x (\varphi^*(\mathbf{x}, t) \partial_t \psi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t) \partial_t \varphi^*(\mathbf{x}, t)) \quad (4.15)$$

y  $\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(x)$ . Ya que

$$\langle \Psi_{\tilde{m}^2} | \Psi_{m^2} \rangle = \delta(m^2 - \tilde{m}^2) Q(\psi, \psi), \quad (4.16)$$

la normalización apropiada de estas soluciones en  $S^*(\mathbb{R}^4)$  implica, notablemente, la normalización usual de Klein-Gordon [63]  $Q(\psi, \psi) = 1$ , es decir,

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\tilde{m}^2} | \Psi_{m^2} \rangle &= \delta(m^2 - \tilde{m}^2) \Leftrightarrow \\ i \int d^3x (\psi^*(\mathbf{x}, t) \partial_t \psi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t) \partial_t \psi^*(\mathbf{x}, t)) &= 1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

El estado de una partícula en un momento dado  $t$  puede identificarse con el estado “condicionado”  $|\psi(t)\rangle := \sqrt{2\pi} \langle t | \Psi_{m^2} \rangle$ , con  $|t\rangle = |x^0\rangle$  para  $x^0 = t$ , y por lo tanto  $\psi(\mathbf{x}, t)$  con la función de onda de Klein-Gordon  $\langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle$ . En el caso de partículas masivas ( $m$  positiva), se puede elegir en cambio la normalización  $\langle \Psi_{\tilde{m}} | \Psi_m \rangle = \delta(m - \tilde{m})$ , en cuyo caso

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\tilde{m}} | \Psi_m \rangle &= \delta(m - \tilde{m}) \Leftrightarrow \\ \frac{i}{2m} \int d^3x (\psi^*(\mathbf{x}, t) \partial_t \psi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t) \partial_t \psi^*(\mathbf{x}, t)) &= 1, \end{aligned} \quad (4.18)$$

es decir,  $\int d^3x \rho(\mathbf{x}, t) = 1$ , con  $\rho(\mathbf{x}, t)$  la densidad usual de Klein-Gordon [71, 72], que en el límite no relativista se reduce a la de Schrödinger para soluciones de energía positiva.

Más generalmente, ahora es fácil probar las siguientes relaciones

$$\langle \Phi_{\tilde{m}^2}^\pm | \Psi_{m^2}^\pm \rangle = \pm \delta(\tilde{m}^2 - m^2) Q(\varphi, \psi), \quad (4.19)$$

$$\langle \Phi_{\tilde{m}^2}^\pm | \Psi_{m^2}^\mp \rangle = 0, \quad (4.20)$$

donde el signo  $\pm$  indica el signo de  $p^0$  y  $\langle \Phi_{\tilde{m}^2} | \Psi_{m^2} \rangle$  obviamente también se puede expresar como  $\frac{1}{2\pi} \int d^4x \varphi^*(x) \psi(x)$ . Es importante notar que las relaciones anteriores proporcionan una condición de normalización positiva para ambos signos de  $p^0$  ya que  $\langle \Psi_{\tilde{m}^2}^\pm | \Psi_{m^2}^\pm \rangle = \delta(\tilde{m}^2 - m^2) |Q(\psi, \psi)|$ . La positividad sigue del producto canónico en  $L^2(\mathbb{R}^4)$ , pero implica la “norma” usual. La conexión entre ambos productos también se puede derivar de relaciones extendidas satisfechas por la densidad de corriente. Estas relaciones se obtienen en el Apéndice 4.1 usando el presente formalismo. Los resultados de las Ecs. (4.19, 4.20) concuerdan con el tratamiento general dentro de la cuantización de sistemas invariantes bajo reparametrización [66] (ver Sec. 4.1.3 y el Apéndice 4.2). Un resultado análogo que conecta un producto invariante  $4d$  con el producto de Dirac  $3d$  también es válido para partículas de Dirac [1] (véase el capítulo anterior).

### 4.1.2 Relación con la representación de Wigner

La relación entre los productos tridimensionales y cuatridimensionales proporciona una conexión entre una solución de masa fija de (4.7) y la representación usual (escalar) de una partícula en  $L^2(\mathbb{R}^3, d\mu(p))$  donde  $d\mu(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}}$ . Los estados impropios de momento usuales  $|\mathbf{p}\rangle_w \in L^2(\mathbb{R}^3, d\mu(p))$  están normalizados como  ${}_w\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle_w = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ . Notamos que la normalización invariante estándar requiere la adición del factor  $2E_{\mathbf{p}}$  para compensar la no invariancia del volumen espacial [40, 73].

La conexión con el presente formalismo se hace evidente si expandimos una solución (4.8) como, estableciendo  $a(\mathbf{p}) = \frac{\alpha(\mathbf{p})}{\sqrt{(2\pi)^3}}$ ,  $b(\mathbf{p}) = \frac{\beta(\mathbf{p})}{\sqrt{(2\pi)^3}}$ ,  $E_{\mathbf{p}m} \rightarrow E_{\mathbf{p}}$  y notando que  $\delta(p^\mu p_\mu - m^2) H^\pm(p^0) = \delta(p^0 \mp E_{\mathbf{p}m}) / 2E_{\mathbf{p}}$ ,

$$|\Psi_{m^2}\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} a(\mathbf{p}) |E_{\mathbf{p}m} \mathbf{p}\rangle, \quad (4.21)$$

$$\oplus \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} b(\mathbf{p}) | - E_{\mathbf{p}m} \mathbf{p}\rangle, \quad (4.22)$$

donde hemos introducido los estados

$$|\pm E_{\mathbf{p}m} \mathbf{p}\rangle := (2\pi)^{3/2} \int dp_0 \delta(p_0 \mp E_{\mathbf{p}m}) |p_0 \mathbf{p}\rangle, \quad (4.23)$$

que satisfacen  $(r, r' = \pm 1)$

$$\langle r E_{\mathbf{p}'m'} \mathbf{p}' | r' E_{\mathbf{p}m} \mathbf{p} \rangle = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}} \delta_{rr'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(m^2 - m'^2). \quad (4.24)$$

El factor  $2E_{\mathbf{p}}$  ahora surge naturalmente de la condición de ortogonalidad de la masa.

La correspondencia uno a uno entre los estados

$$|\Psi_{m^2}\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} a(\mathbf{p}) |E_{\mathbf{p}m}\mathbf{p}\rangle \in \mathcal{H}, \quad (4.25)$$

y los estados

$$|\psi\rangle_w = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} a(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle_w \in L^2(\mathbb{R}^3, d\mu(p)), \quad (4.26)$$

es ahora explícita ya que en ambos casos

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} |a(\mathbf{p})|^2 = 1, \quad (4.27)$$

y sus propiedades de transformación son idénticas. Se debe notar que mientras  $|\psi\rangle_w$  (Ec. 4.26) representa una partícula en un tiempo fijo (o equivalentemente, en la imagen de Heisenberg),  $|\Psi_{m^2}\rangle$  (Ec. 4.25) representa en cambio la historia completa de la partícula. De hecho, también podemos expresar (4.25) como  $|\Psi_{m^2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-iE_{\mathbf{p}}t} a(\mathbf{p}) |t\mathbf{p}\rangle$ , donde  $|t\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp_0 e^{ip_0 t} |p_0\mathbf{p}\rangle$  (notar que  $|\mathbf{p}\rangle$  difiere de  $|\mathbf{p}\rangle_w$ ) definiendo así el estado histórico apropiado de  $|\psi\rangle_w$  en el marco relativista.

### 4.1.3 Propagador de Klein-Gordon

Dado un estado general en  $\mathcal{H}$ , puede proyectarse en el subespacio de estados que satisfacen (4.7) con un autovalor fijo  $m^2$  mediante el operador

$$\Pi_{m^2} := \delta(\mathcal{J} - m^2). \quad (4.28)$$

En general, esto deja contribuciones tanto de  $p^0$  positivo como negativo. Para la presente discusión es útil introducir proyectores adicionales  $P^\pm := \int dp_0 H^\pm(p_0) |p_0\rangle\langle p_0| \otimes \mathbb{1}$ , satisfaciendo  $[P^\pm, \Pi_m] = 0$ , y definir  $\Pi_{m^2}^\pm := P^\pm \Pi_{m^2}$ . En particular, es interesante proyectar  $|x\rangle$  en el espacio de estados de partículas “físicas”:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \Pi_{m^2}^+ |x\rangle &= \sqrt{2\pi} P^+ \delta(\mathcal{J} - m^2) \int \frac{d^4p}{\sqrt{(2\pi)^4}} e^{ipx} |p\rangle \\ &= \int \frac{d^4p}{\sqrt{(2\pi)^3}} \delta(p^\mu p_\mu - m^2) H^+(p_0) e^{ipx} |p\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{i(E_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p}\mathbf{x})} |E_{\mathbf{p}m}\mathbf{p}\rangle, \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde el factor  $\sqrt{2\pi}$  en la primera línea se incluyó para normalización (ver Ec. (4.34)). Estos estados corresponden (en el sentido discutido en la Sec. 4.1.2) a los

estados de una partícula  $\phi(x)|0\rangle$ , donde  $\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (e^{-ipx} a_{\mathbf{p}} + e^{ipx} a_{\mathbf{p}}^\dagger) |_{p^0=E_{\mathbf{p}}}$  es el campo de Klein-Gordon en la imagen de Heisenberg para la teoría libre con masa  $m$ , y  $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ . Además, a partir de (4.29) se deduce la siguiente identidad

$$2\pi \langle y | \Pi_{m^2}^+ | x \rangle = \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle = D(y - x), \quad (4.30)$$

donde

$$D(y - x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)} |_{p^0=E_{\mathbf{p}}}, \quad (4.31)$$

es el *propagador de Klein-Gordon* (o amplitud) [40] para la teoría libre con masa  $m$ , que se puede interpretar inmediatamente. Al seleccionar las contribuciones de masa fija de un evento  $x$  (ver también Sec. 4.1.4), obtenemos un estado cuya probabilidad de estar en otro evento  $y$  es esencialmente igual a la amplitud para que la partícula se propague de  $x$  a  $y$ . Notamos que no se introdujo explícitamente una evolución unitaria ya que los estados contienen toda la información temporal. En cambio, se realizó una “selección” adecuada entre las historias posibles mediante el uso del proyector.

A partir de la Ec. (4.30) vemos que podemos reescribir la proyección de un evento como

$$\sqrt{2\pi} \Pi_{m^2}^+ | x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^4z D_{m^2}(z - x) | z \rangle, \quad (4.32)$$

donde agregamos el índice  $m^2$  para hacer explícita la dependencia de la masa. También podemos calcular la superposición entre dos eventos proyectados como

$$\begin{aligned} 2\pi \langle y | \Pi_{m'^2}^+ \Pi_{m^2}^+ | x \rangle &= 2\pi \int d^4z \langle y | \Pi_{m'^2}^+ | z \rangle \langle z | \Pi_{m^2}^+ | x \rangle \\ &= 2\pi \delta(m^2 - m'^2) \langle y | \Pi_{m^2}^+ | x \rangle \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$= \delta(m^2 - m'^2) D(y - x) \quad (4.34)$$

donde en (4.33) hemos empleado la Ec. (4.29). Por lo tanto, con la normalización empleada para los eventos proyectados, su superposición es directamente el propagador multiplicado por la función delta de masa. La identidad (4.33) implica

$$\int d^4z D_{m'^2}(y - z) D_{m^2}(z - x) = 2\pi \delta(m^2 - m'^2) D(y - x). \quad (4.35)$$

La parte finita es nuevamente esencialmente el propagador mientras que la presencia de la función delta está de acuerdo con la discusión de la Sec. 4.1. Sin embargo, vemos de la Ec. (4.1.3) que podemos reinterpretar la aparición de la delta de Dirac como el resultado de sumar todos los puntos posibles del espacio-tiempo  $z$  de la

$$\int d^4 z \left( x \begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} z \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array} y \right) = 2\pi\delta(m^2 - m'^2) \left( x \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \bullet \end{array} y \right)$$

Figura 4.1.1: Representación pictórica de las dos caracterizaciones equivalentes de la cantidad  $\langle y | \Pi_{m'}^+ \Pi_m^+ | x \rangle$ . Cada línea representa una amplitud  $D(y - x)$ .

propagación de  $x$  a  $y$  con el punto intermedio adicional  $z$ . Este resultado se representa pictóricamente en la Fig. 4.1.1.

En las técnicas de promediación de grupo, el resultado (4.1.3) se emplea para inducir el producto interno del espacio de Hilbert físico [67] que en este caso corresponde a una partícula con masa fija. En la notación actual, esto se puede expresar de la siguiente manera: Sea  $|\Phi_{m^2}\rangle := \Pi_{m^2}|\Phi\rangle$  y  $|\Psi_{m^2}\rangle$  dos soluciones de la restricción (4.7), entonces  $(\Phi_{m^2}|\Psi_{m^2})_{\text{phys}} := \langle\Phi|\Psi_{m^2}\rangle$ , que es equivalente a las relaciones (4.19, 4.20) sin la delta de Dirac en (4.19). En nuestro enfoque, preservamos la delta de masa ya que se considera que el espacio de Hilbert extendido es físicamente relevante, como se señala en las siguientes secciones. Como consecuencia, los subespacios “físicos” de  $\mathcal{H}$  son subespacios genuinos (el espacio de soluciones de (4.7) y  $\mathcal{H}$  comparten el mismo producto interno).

También mencionamos que  $\Pi_{m^2}$  tiene la representación formal

$$\Pi_{m^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp[i\tau(\mathcal{J} - m^2)],$$

que se asemeja a los métodos de tiempo propio [74]. De hecho, el resultado de restringir la misma integral a  $\tau$  positivos (y añadir una parte imaginaria infinitesimal  $i\epsilon$ ) es proporcional al operador inverso de  $\mathcal{J} - m^2$ , cuyos elementos de matriz son iguales al propagador de Feynman y para el cual sigue valiendo un significado proyectivo asintótico [66].

#### 4.1.4 Normalización en Tiempo

Un estado de la forma

$$|\Psi\rangle = \int dm^2 (\gamma^+ \phi^+(m^2) |\Psi_{m^2}^+\rangle + \gamma^- \phi^-(m^2) |\Psi_{m^2}^-\rangle), \quad (4.36)$$

donde  $|\Psi_{m^2}^\pm\rangle$  son estados normalizados definidos como en (4.19) ( $\langle\Psi_{m'^2}^\pm|\Psi_{m^2}^\pm\rangle = \delta(m^2 - m'^2)$ ) con

$$\int dm^2 |\phi^\pm(m^2)|^2 = 1, \quad (4.37)$$

y

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = |\gamma^+|^2 + |\gamma^-|^2 = 1, \quad (4.38)$$



pertenece a  $L^2(\mathbb{R}^4)$ . Ahora demostraremos que cualquier estado  $|\Psi\rangle \in L^2(\mathbb{R}^4)$  admite la representación (4.36). Esto es en principio evidente ya que la integral sobre todos los valores reales de  $m^2$  cubre el espectro del operador hermitico  $\mathcal{J}$  y  $|\Psi_{m^2}^\pm\rangle$  son estados generales con masa definida y signo de  $p^0$ . Esto también significa que la consideración de estados que son normalizables en tiempo (por ejemplo, historial de tiempo finito) es equivalente a permitir una incertidumbre de masa/signo de  $p^0$ . Los estados  $|\Psi_{m^2}^+\rangle$  pueden considerarse como la idealización correspondiente a una partícula con historial infinito y relación de dispersión infinitamente bien definida, en cuyo caso sigue la correspondencia de la Sec. 4.1.2.

*Prueba.* Un estado normalizado arbitrario  $|\Psi\rangle \in L^2(\mathbb{R}^4)$  puede expandirse como

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \int d^4p \langle p|\Psi\rangle |p\rangle = \int d^4p \int dm^2 \delta(p^\mu p_\mu - m^2) |\langle p|\Psi\rangle| p\rangle \\ &= \int dm^2 \left[ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}m}} \langle E_{\mathbf{p},m}\mathbf{p}|\Psi\rangle |E_{\mathbf{p}m}\mathbf{p}\rangle \right. \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\left. + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}m}} \langle -E_{\mathbf{p},m}\mathbf{p}|\Psi\rangle |-E_{\mathbf{p}m}\mathbf{p}\rangle \right] \quad (4.40)$$

donde  $\int dm^2 \dots = \int_0^\infty dm^2 \dots + \int_{-\infty}^0 dm^2 \dots$  incluye todos los valores reales de  $m^2$ . Usando las Ecs. (4.21)–(4.22), las Ecs. (4.39)–(4.40) se ven que son de la forma (4.36) con  $a(\mathbf{p}) = \langle E_{\mathbf{p},m}\mathbf{p}|\Psi\rangle / (\gamma^+ \phi^+(m^2))$ ,  $b(\mathbf{p}) = \langle -E_{\mathbf{p},m}\mathbf{p}|\Psi\rangle / (\gamma^- \phi^-(m^2))$  y

$$\gamma^\pm \phi^\pm(m^2) = \sqrt{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}m}} |\langle \pm E_{\mathbf{p}m}\mathbf{p}|\Psi\rangle|^2}.$$

Involucran cuatro términos distintos, según los signos de  $m^2$  y  $E_{\mathbf{p}m}$ . Para  $m^2 < 0$  la integración  $d^3p$  se restringe a la región  $|\mathbf{p}|^2 > -m^2$ , como se muestra en la Fig. 2.  $\square$

Los cuatro términos que surgen de descomponer un estado general  $|\Psi\rangle \in L^2(\mathbb{R}^4)$  de acuerdo a los signos de  $m^2$  y  $p^0$  en las Ecs. (4.39)–(4.40) pertenecen a subespacios ortogonales que son representaciones de espacio de Hilbert de las clases correspondientes de representaciones irreducibles del grupo de Poincaré [65, 75]. Esta exhaustividad de  $\mathcal{H}$  es precisamente lo que permite representar eventos  $|x\rangle$  y en particular la definición de un operador de tiempo  $T$  tal que  $T := X^0|x\rangle = x^0|x\rangle$ . El operador de traslación en el tiempo  $P^0 = \int d^4p p^0 |p\rangle \langle p|$  es, como se esperaba, no acotado, sin embargo, esto no es un problema en el presente formalismo, en contraste con otros

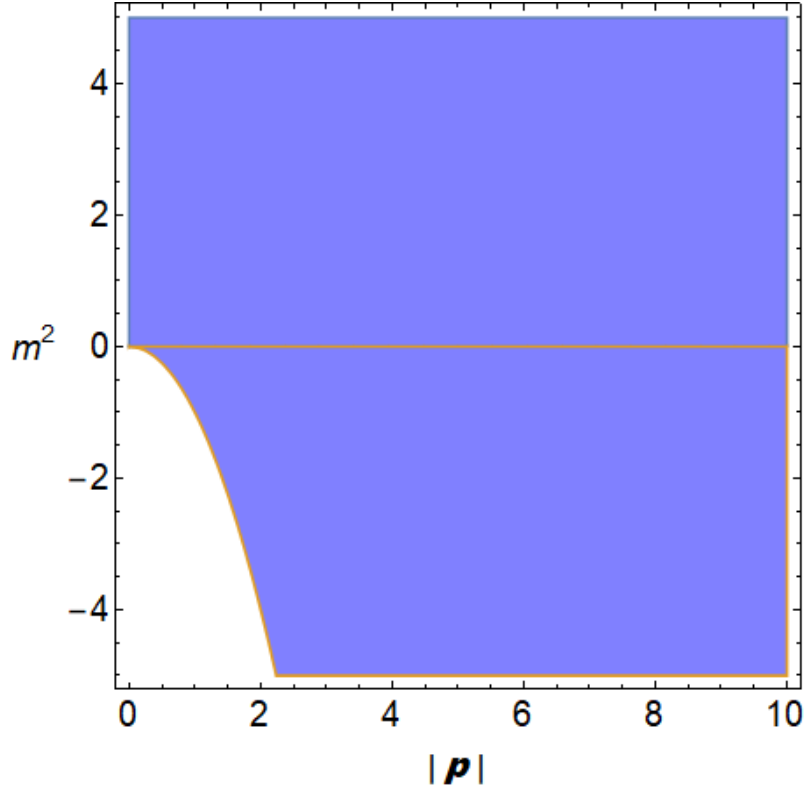


Figura 4.1.2: Región de integración en variables  $m^2$  y  $\mathbf{p}$ . Aquí  $|\mathbf{p}|$  es el modulo del 3-momento  $\mathbf{p}$ .

enfoques [49, 76]: Al escribir (como en las Ecs. (4.39)–(4.40))

$$P^0 = \int dm^2 \left[ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}m}} E_{\mathbf{p}m} |E_{\mathbf{p}m} \mathbf{p}\rangle \langle E_{\mathbf{p}m} \mathbf{p}| \right. \quad (4.41)$$

$$\left. - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}m}} E_{\mathbf{p}m} | - E_{\mathbf{p}m} \mathbf{p}\rangle \langle - E_{\mathbf{p}m} \mathbf{p}| \right], \quad (4.42)$$

se hace evidente que las cuatro regiones de  $\mathcal{H}$  contribuyen a su espectro llevando, como consecuencia, a que no sea acotado. En cambio, en estados que pertenecen a una representación irreducible particular, impuesta “a posteriori” por la Ec. (4.7) y por una elección dada del signo de  $p^0$ ,  $P^0$  actúa correctamente:

$$P^0 | \pm E_{\mathbf{p}m} \mathbf{p} \rangle = \pm E_{\mathbf{p}m} | \pm E_{\mathbf{p}m} \mathbf{p} \rangle. \quad (4.43)$$

La ventaja del presente enfoque es evidente: los operadores covariantes se definen independientemente de la teoría particular, aún así, después de elegir una teoría dada, o superposición de ellas, estos operadores, que aún se definen como antes, actúan correctamente. Esto es precisamente lo que ya hemos encontrado al proyectar un evento en la Sec 4.1.2: el estado  $|x\rangle$ , al que asociamos un significado geométrico, es “no-físico” para una teoría con masa fija  $m^2$  y  $p^0 > 0$ , sin embargo, el estado físico “más cercano” corresponde al bien conocido estado  $\phi(x)|0\rangle$ . Además, un tratamiento

perturbativo de una teoría interactuante implica implícitamente estados con una masa indefinida cuando se expande en términos de la base libre. Esto ya se puede discutir dentro de un tratamiento de “primera cuantización” de las interacciones como se muestra en la Sec. 4.2.

## 4.2 Ecuación de Klein-Gordon en un campo externo

Hasta ahora la discusión se centró en el caso de una partícula libre. En esta sección discutimos las interacciones a nivel de primera cuantización tratando los campos como entidades externas. Esto seguirá de una extensión directa de las ideas previas que, notablemente, todavía proporciona la conexión correcta entre la norma invariante y la normalización de Klein-Gordon, y más generalmente, entre el producto canónico en  $L^2(\mathbb{R}^4)$  y el producto de Klein-Gordon. Reemplazamos  $\mathcal{J} = P^\mu P_\mu$  por

$$\mathcal{J}_A = (P^\mu + eA^\mu(X))(P_\mu + eA_\mu(X)), \quad (4.44)$$

con  $A_\mu(X)|x\rangle = A_\mu(x)|x\rangle$ . Un estado  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^4x \psi(x)|x\rangle$  satisface

$$\mathcal{J}_A|\Psi\rangle = m^2|\Psi\rangle, \quad (4.45)$$

sii  $\psi(x)$  satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$((-i\partial_\mu + eA_\mu)(-i\partial^\mu + eA^\mu) - m^2)\psi(x) = 0. \quad (4.46)$$

Ahora consideremos el caso donde  $A_\mu(X)$  no depende de  $T$  ni de  $m^2$ . Considerando soluciones de energía definida  $E$ ,  $\psi(x) = e^{-iEt}\psi(\mathbf{x})$ , la Ec. (4.46) conduce a la ecuación

$$[F(E) - m^2]\psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.47)$$

donde  $F(E) = (E - eA_0)^2 - (\mathbf{P} + e\mathbf{A})^2$  es un operador hermitico con respecto al producto estándar en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , que no depende de  $m^2$ . Entonces podemos escribir una solución general de (4.46) como

$$\psi_{m^2}(x) = \sum_k c_k \psi_k(x, m^2), \quad (4.48)$$

$$\psi_k(x, m^2) = e^{-iE_k(m^2)t} \psi_k(\mathbf{x}, m^2), \quad (4.49)$$

donde  $k$  etiqueta los modos de energía definida  $E_k(m^2)$  y  $\psi_k(\mathbf{x}, m^2)$  las funciones propias correspondientes, obtenidas de la Ec. (4.47). Estos satisfacen la ortogonalidad de Klein-Gordon  $Q_A(\psi_{k'}(m^2), \psi_k(m^2)) = 0$  para  $E_k(m^2) \neq E_{k'}(m^2)$ , donde

$$(D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(\mathbf{x}))$$

$$Q_A(\phi, \psi) = i \int d^3x (\phi^*(\mathbf{x}, t) D_0 \psi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t) D_0^* \phi^*(\mathbf{x}, t)) . \quad (4.50)$$

La solución resultante de (4.45) es

$$|\Psi_{m^2}\rangle = \sum_k c_k |\Psi_k(m^2)\rangle , \quad (4.51)$$

$$|\Psi_k(m^2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^4x \psi_k(x, m^2) |x\rangle . \quad (4.52)$$

Demostraremos en primer lugar que soluciones con energías definidas  $E_k(m^2)$  satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\langle \Psi_{k'}(m'^2) | \Psi_k(m^2) \rangle = \delta(m^2 - m'^2) Q_A(\psi_{k'}, \psi_k) s_k \quad (4.53)$$

donde  $s_k = \text{sgn}(\frac{dE_k}{dm^2})$  y el lado izquierdo es el producto canónico en  $L^2(\mathbb{R}^4)$ . Este es un resultado no trivial que se desprende de relaciones de ortogonalidad “especiales” de las soluciones usuales de la ecuación de Klein-Gordon, como se muestra a continuación. Si bien garantiza la ortogonalidad esperada de estados propios con diferentes masas, a igual masa vincula directamente el producto estándar en  $\mathbb{R}^4$  con el producto de Klein-Gordon en  $\mathbb{R}^3$ , lo cual a su vez asegura la ortogonalidad de estados con diferentes energías a igual masa e implica  $Q_A(\psi_k, \psi_k) s_k = |Q_A(\psi_k, \psi_k)|$ .

En segundo lugar, demostraremos, eligiendo modos ortogonales  $\psi_k(m^2)$  (para  $k \neq k'$ ,  $Q_A(\psi_{k'}(m^2), \psi_k(m^2)) = 0$ ), que la relación (4.53) implica

$$\langle \Psi'_{m'^2} | \Psi_{m^2} \rangle = \delta(m'^2 - m^2) \sum_k c_k'^* c_k |Q_A(\psi_k, \psi_k)| , \quad (4.54)$$

para un estado general con masa definida, que es idéntico a  $\delta(m'^2 - m^2) |Q_A(\psi', \psi)|$  cuando todos los  $Q_A(\psi_k, \psi_k)$  tienen el mismo signo (es decir, todos los modos de “energía positiva” en condiciones estándar). Esta es la extensión buscada de las Ecs. (4.19).

*Demostración.* La superposición entre dos soluciones (4.52) con energías definidas arroja

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{k'}(m'^2) | \Psi_k(m^2) \rangle &= \delta(E_{k'}(m'^2) - E_k(m^2)) \\ &\times \int d^3x \psi_{k'}^*(\mathbf{x}, m'^2) \psi_k(\mathbf{x}, m^2) . \end{aligned} \quad (4.55)$$

Estados con diferentes energías son automáticamente ortogonales mientras que la condición de igual energía puede separarse en dos contribuciones: energías iguales a masas iguales, o energías iguales a masas diferentes (y diferentes  $k$ ). Consideremos primero el segundo caso: escribiendo

$$[F(E_k(m^2)) - m^2] \psi_k(\mathbf{x}, m^2) = 0 \quad (4.56)$$

$$[F(E_{k'}(m'^2)) - m'^2] \psi_{k'}(\mathbf{x}, m'^2) = 0, \quad (4.57)$$

multiplicando a la izquierda por  $\psi_{k'}^*(\mathbf{x}, m'^2)$  ( $\psi_k^*(\mathbf{x}, m^2)$ ) la primera (segunda) ecuación, integrando en todo el espacio y restando (conjugando uno de los resultados) obtenemos

$$(m'^2 - m^2) \int d^3x \psi_{k'}^*(\mathbf{x}, m'^2) \psi_k(\mathbf{x}, m^2) = (E_k(m^2) - E_{k'}(m'^2)) Q_A(\psi_{k'}(m'^2), \psi_k(m^2)) \quad (4.58)$$

donde hemos utilizado la hermiticidad de  $(\mathbf{P} + e\mathbf{A})^2$ . Para  $E_{k'}(m'^2) = E_k(m^2)$  entonces

$$(m'^2 - m^2) \int d^3x \psi_{k'}^*(\mathbf{x}, m'^2) \psi_k(\mathbf{x}, m^2) = 0, \quad (4.59)$$

implicando una condición de ortogonalidad extendida para  $m'^2 \neq m^2$  cuando las energías coinciden. Concluimos que no surgen contribuciones de masas diferentes en (4.55). Note también que para  $m'^2 = m^2$  pero  $E_k(m^2) \neq E_{k'}(m^2)$  la Ec. (4.58) conduce a la condición de ortogonalidad estándar de Klein-Gordon  $Q_A(\psi_{k'}(m^2), \psi_k(m^2)) = 0$ .

Los resultados anteriores (4.55), (4.59) nos permiten escribir, para modos de igual energías ( $E_k(m^2) = E_{k'}(m^2) \forall m^2$ )

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{k'}(m'^2) | \Psi_k(m^2) \rangle &= \frac{\delta(m'^2 - m^2)}{|dE_k/dm^2|} \\ &\times \int d^3x \psi_{k'}^*(\mathbf{x}, m'^2) \psi_k(\mathbf{x}, m^2). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Esta segunda parte de la demostración implica encontrar una expresión para  $dE_k/dm^2$ . Esto se logra derivando la Ec. (4.56) con respecto a  $m^2$ , que da como resultado

$$[F'(E_k) \frac{dE_k}{dm^2} - 1] \psi_k(\mathbf{x}, m^2) = [F(E_k) - m^2] \frac{d\psi_k(\mathbf{x}, m^2)}{dm^2}.$$

con  $F'(E_k) = 2(E_k - eA_0)$ . Ahora multiplicamos a la izquierda por una solución con la misma energía  $\psi_{k'}^*(\mathbf{x}, m^2)$  e integramos en el espacio; obtenemos

$$\int d^3x \psi_{k'}^*(\mathbf{x}, m^2) \psi_k(\mathbf{x}, m^2) \left[ F'(E_k) \frac{dE_k}{dm^2} - 1 \right] = 0, \quad (4.61)$$

y así, para  $E_k(m^2) = E_{k'}(m^2)$ ,

$$\int d^3x \psi_{k'}^*(\mathbf{x}, m^2) \psi_k(\mathbf{x}, m^2) = \frac{dE_k}{dm^2} Q_A(\psi_{k'}(m^2), \psi_k(m^2)) \quad (4.62)$$

que es la extensión natural de (4.58) para  $m^2 = m'^2$  y  $E_k(m^2) = E_{k'}(m^2)$ . Insertando esta relación en (4.60) conduce al resultado (4.53). La Ec. (4.61) también revela una condición de ortogonalidad adicional: los modos ortogonales a energías iguales según el producto de Klein-Gordon también son ortogonales en el producto canónico de  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , asumiendo que  $\frac{dE_k}{dm^2} \neq 0$ .  $\square$

Finalmente, observamos de la Ec. (4.53) que imponer la normalización

$$\langle \Psi_{k'}(m'^2) | \Psi_k(m^2) \rangle = \delta(m^2 - m'^2) \delta_{kk'}$$

lleva directamente a la normalización de Klein-Gordon  $|Q_A(\psi_{k'}(m^2), \psi_k(m^2))| = \delta_{kk'}$ .

La extensión rigurosa de los presentes resultados a un potencial general  $A_\mu(X)$  y espacios-tiempo curvos implica nuevos conceptos y será presentada en otro lugar. No obstante, se discuten identidades generales para la densidad de corriente en presencia de un potencial general en el Apéndice 4.1. El caso de un  $A_\mu$  dependiente de la masa se discute brevemente en el límite no relativista para la gravedad newtoniana en la Sec. 4.3.

Los resultados de esta sección pueden emplearse directamente para definir un espacio de Hilbert físico a  $m^2$  fijo (como se mencionó antes para el caso libre) reemplazando  $\Pi_{m^2} \rightarrow \delta(\mathcal{J}_A - m^2)$ , extendiendo así programas de cuantización anteriores [66, 67] al caso donde un  $A_\mu$  externo está presente. Sin embargo, y quizás más importante, observamos que los estados propios de masa de  $\mathcal{J}_A$  en la Ec. (4.45) obviamente no son estados propios de la partícula libre  $\mathcal{J}$  de la Ec. (4.7), ya que  $\mathcal{J}_A$  y  $\mathcal{J}$  no conmutan. Por lo tanto, la expansión de estados propios  $|\Psi_{m^2}^A\rangle$  de  $\mathcal{J}_A$  en términos de aquellos de  $\mathcal{J}$  generalmente implica una expansión sobre diferentes masas (y también puede involucrar energías negativas) como la considerada en la Sec. 4.1.4. Así, la consideración de estados sin una masa definida en la representación de la base libre ya está implícita al tratar con un campo externo, es decir, con interacciones. Esto a su vez revela que el espacio de Hilbert extendido, comúnmente considerado como una construcción auxiliar, juega un papel físico inevitable en un formalismo de  $4d$ . Además, cualquier fluctuación de los campos  $A_\mu$ , que en un escenario más realista también son dinámicos, llevaría al sistema a explorar diferentes sectores de masa de  $\mathcal{H}$ .

### 4.3 Límite No Relativista

Es bien sabido que para soluciones de energía positiva en el límite no relativista  $E'/m \ll 1$  (orden  $(v/c)^2$ , con  $E' = E - m$ ) la ecuación de Klein-Gordon se reduce a la ecuación de Schrödinger [71]. En particular, la norma de Klein-Gordon para partículas masivas se convierte en la norma estándar de Schrödinger. Por lo tanto, se espera que una versión no relativista de la Ec. (4.18) en términos de la norma mecánica cuántica usual se mantenga como un límite. De hecho, este es el caso, pero es instructivo derivar este resultado directamente del régimen no relativista.

Primero recordamos que la ecuación de Schrödinger se puede recuperar para estados  $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}_S$  imponiendo una restricción estática global sobre los estados  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_T \otimes \mathcal{H}_S$ . Aquí  $\mathcal{H}_T$  está generado por los estados propios  $|t\rangle$  del operador  $T$  que satisface la conmutación canónica  $[T, P_T] = i$ . En la interpretación de PW [14]  $\mathcal{H}_T$  se considera como el espacio de Hilbert de un reloj cuántico de modo que el parámetro  $t$  es una etiqueta de estados  $|t\rangle$  de este sistema particular.

Los estados  $|\Psi\rangle$  pueden expandirse como

$$|\Psi\rangle = \int dt |t\rangle |\psi(t)\rangle, \quad (4.63)$$

mientras que el estado del sistema en el “tiempo”  $t$  es  $|\psi(t)\rangle = \langle t|\Psi\rangle$ . Al imponer la ecuación

$$\mathcal{J}|\Psi\rangle = 0, \quad (4.64)$$

con

$$\mathcal{J} = P_T \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H, \quad (4.65)$$

donde  $H$  es el Hamiltoniano del sistema, se obtiene la ecuación de Schrödinger estándar [29]:

$$\langle t|\mathcal{J}|\Psi\rangle = 0 \Rightarrow i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle. \quad (4.66)$$

La implicación anterior es válida para Hamiltonianos arbitrarios si el espectro de  $P_T$  es toda la línea real, lo que también implica el mismo espectro para  $T$ . Bajo esta condición los estados  $|\Psi\rangle$  no pueden normalizarse en  $\mathcal{H}$  [29]: en términos generales,  $\langle \Psi|\Psi\rangle$  es igual a  $\langle \psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle$  veces la (infinita) longitud del tiempo. Por otro lado, si nos enfocamos en el caso de una partícula escalar, a partir de la discusión de la Sec. 4.1.4 podemos inferir cómo relacionar adecuadamente la norma de estos estados globales con la norma de  $|\psi(t_0)\rangle$ . También es importante notar que en el caso relativista la cantidad  $\langle \Psi|\Psi\rangle$  no está relacionada con la longitud del tiempo

como antes, ya que los estados condicionados  $|\psi(t)\rangle$  están normalizados según la norma de Klein-Gordon, no la de Schrödinger. Ahora nos enfocamos en el caso  $\mathcal{H}_S = \text{span}\{|\mathbf{x}\rangle\}$  de modo que

$$|\Psi\rangle = \int dt d^3x |t\rangle |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle \equiv \int dt d^3x \psi(\mathbf{x}, t) |t\mathbf{x}\rangle, \quad (4.67)$$

y consideramos primero el caso libre  $H = \frac{P^2}{2m}$ . Nótese que desde el punto de vista mecánico cuántico, el valor propio cero en la Ec. (4.64) no juega un papel especial ya que un valor propio desplazado de  $\mathcal{J}$  corresponde a una traslación global de energía. Por otro lado, dado que estamos tratando con una partícula libre, es prudente establecer el cero de la energía en su valor de energía de reposo (positivo)  $mc^2$  (donde hemos reintroducido momentáneamente la velocidad de la luz  $c$ ). Entonces tenemos

$$\langle t\mathbf{x} | (\mathcal{J} + m) | \Psi \rangle = 0 \Rightarrow \left( -i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{-\nabla^2}{2m} + m \right) \psi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (4.68)$$

cuyas soluciones son claramente de la forma

$$|\Psi_m\rangle = \int d^3p a(\mathbf{p}) |p^2/2m + m, \mathbf{p}\rangle, \quad (4.69)$$

implicando

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{m'} | \Psi_m \rangle &\approx \delta(m - m') \int d^3p \frac{|a(\mathbf{p})|^2}{|1 - \frac{p^2}{2m^2}|} \\ &= \delta(m - m') \int d^3p |a(\mathbf{p})|^2 \times \left( 1 + O\left(\frac{E'_p}{m}\right) \right) \end{aligned}$$

(asumimos que  $|a(\mathbf{p})|$  es significativa solo para  $p \ll m, m'$ ). Hasta  $O(p^2/m^2)$ , esta ecuación coincide con la Ec. (4.14) después de reemplazar  $a(\mathbf{p}) = \alpha(\mathbf{p})/(2E_{\mathbf{p}})$ . Encontramos que en este régimen las soluciones con diferentes “valores propios”  $m$  son ortogonales, incluso si  $\mathcal{J}$  depende de la masa. Además, para estados de momentos no relativistas, que es precisamente el régimen de validez de la ecuación de Schrödinger para una partícula, la condición de ortogonalidad implica la norma de Schrödinger (hasta correcciones relativistas):

$$\langle \Psi_{m'} | \Psi_m \rangle = \delta(m - m') \Rightarrow \langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle = 1 + O(v^2/c^2). \quad (4.70)$$

Esto también significa que los estados historia  $|\Psi\rangle$  pueden normalizarse de acuerdo con la discusión de la Sec. 4.1.4, un resultado que proporciona (en el presente caso) una interpretación física a la propuesta de regularización de [29].



Este resultado puede extenderse fácilmente en este mismo contexto (pero también se deduce del límite no relativista de la Sec. 4.2) a Hamiltonianos de la forma

$$H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2}{2m} + V(\mathbf{x}) + m\phi(\mathbf{x}) + m, \quad (4.71)$$

donde  $\mathbf{A}$ ,  $V$  y  $\phi$  son independientes de la masa, empleando una estrategia similar a la de la Sec. 4.2 que ya se utilizó para el Hamiltoniano de Dirac en [1]. Una modificación menor sigue del potencial dependiente de la masa  $m\phi(\mathbf{x})$ : ya que ahora  $\langle x|(P_T + H)|\Psi_m\rangle = 0$  produce

$$\begin{aligned} \left( i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2}{2m} - V(\mathbf{x}) \right) \psi(\mathbf{x}, t) \\ = m(1 + \phi(\mathbf{x}))\psi(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4.72)$$

la ecuación del universo debe considerarse como una ecuación de autovalores generalizada (hasta correcciones relativistas provenientes del término dependiente de la masa en el lado izquierdo). Para lograr la ortogonalidad, el producto generalizado  $(\Psi|\Psi) := \langle\Psi|(1 + \phi(\mathbf{X}))|\Psi\rangle = \int d^4x (1 + \phi(\mathbf{x}))|\psi(\mathbf{x}, t)|^2$  debe emplearse en principio. Sin embargo, si se reintroduce  $c$ ,  $(\Psi|\Psi) = \int d^4x (1 + \phi(\mathbf{x})/c^2)|\psi(\mathbf{x}, t)|^2$  y vemos que  $\phi(\mathbf{x})/c^2$  debe descartarse en este orden [77]. Esto implica que los potenciales que dependen linealmente de la masa, como un potencial gravitatorio newtoniano, no requieren un tratamiento especial en el orden más bajo en  $c$ . Aún es notable que este análisis simple sugiere una conexión entre la gravedad y la curvatura ya que solo se hicieron consideraciones de Mecánica Cuántica y gravedad newtoniana junto con la condición de energía de masa en reposo  $E = mc^2$ .

## 4.4 Espacio de Fock Extendido

En esta sección exploramos la construcción de un espacio de Fock  $\mathcal{H}_{EF}$  donde el bloque de construcción es la base de partícula individual (sp)  $\{|p\rangle\}$ , mientras que la sp usual correspondiente en  $\mathcal{H}_F$  es  $\{a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle_F = |\mathbf{p}\rangle\}$ . Los estados  $|p\rangle$  se reinterpretan como la base de un espacio de sp, es decir,

$$|p\rangle = c_p^\dagger|0\rangle, \quad (4.73)$$

donde los operadores de creación/aniquilación satisfacen, ya que  $\langle p'|p\rangle = \delta^4(p - p')$ , el álgebra

$$[c_p, c_{p'}^\dagger] = \delta^{(4)}(p - p'), \quad (4.74)$$

$$[c_p, c_{p'}] = [c_p^\dagger, c_{p'}^\dagger] = 0. \quad (4.75)$$

Este álgebra es explícitamente preservada por operadores de impulso cuya definición,

$$U(\Lambda)c_p U^\dagger(\Lambda) = c_{\Lambda p}, \quad (4.76)$$

sigue de la Ec. (4.2). Note que  $U(\Lambda) = \exp\left[-\frac{i}{2}w^{\mu\nu}L_{\mu\nu}\right]$  es explícitamente unitaria y que

$$L_{\mu\nu} = i \int d^4p c_p^\dagger \left( p_\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} - p_\nu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) c_p,$$

el generador de transformaciones de Lorentz, es un operador hermitico de un cuerpo.

Definiendo  $\mathcal{J}$  como el operador de un cuerpo

$$\mathcal{J} = \int d^4p (p^2 - m^2) c_p^\dagger c_p, \quad (4.77)$$

que es el operador del universo que corresponde a (4.6), el subespacio físico se define por aquellos estados construidos a partir de operadores de creación que conmutan con  $\mathcal{J}$ :

$$[\mathcal{J}, c_p^\dagger] = (p^2 - m^2) c_p^\dagger = 0 \Rightarrow p^2 = m^2. \quad (4.78)$$

Como base de este subespacio, podemos emplear, para  $p^0 > 0$ , los operadores

$$c_{\mathbf{p}}^{(m)} := \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{2E_{\mathbf{p}m}}} \int dp_0 \delta(p_0 - E_{\mathbf{p}m}) c_{p_0 \mathbf{p}}, \quad (4.79)$$

que satisfacen

$$[c_{\mathbf{p}}^{(m)}, c_{\mathbf{p}'}^{\dagger(m')}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(m^2 - m'^2), \quad (4.80)$$

y transforman, según (4.76), como

$$U(\Lambda) c_{\mathbf{p}}^{(m)} U^\dagger(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda \mathbf{p}m}}{E_{\mathbf{p}m}}} c_{\Lambda \mathbf{p}}^{(m)}. \quad (4.81)$$

Un estado de una partícula de masa  $m$  se escribe entonces como

$$\begin{aligned} |\Psi_{m^2}\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}m}}} a(\mathbf{p}) c_{\mathbf{p}}^{\dagger(m)} |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}m}} a(\mathbf{p}) |E_{\mathbf{p}m} \mathbf{p}\rangle, \end{aligned} \quad (4.82)$$

donde

$$|E_{\mathbf{p}m} \mathbf{p}\rangle := \sqrt{2E_{\mathbf{p}m}} c_{\mathbf{p}}^{\dagger(m)} |0\rangle. \quad (4.83)$$

De acuerdo con la discusión de la Sec. 4.1.2, el estado  $|\Psi_{m^2}\rangle$  se puede identificar con la historia de

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}m}}} a(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle_F \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}m}} a(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle, \end{aligned} \quad (4.84)$$

donde  $a_{\mathbf{p}}$  son los operadores  $3d$  estándar:

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (4.85)$$

con

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}m}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle_F. \quad (4.86)$$

Ahora es sencillo extender esta identificación a muchas partículas. A partir de la ley de transformación usual de los operadores  $a_{\mathbf{p}}$ ,  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ , y la Ec. (4.81), se sigue que estas identificaciones son independientes del marco de referencia.

Es ahora interesante considerar un estado de dos partículas

$$|\Psi\rangle = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}}} a(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) c_{\mathbf{p}_1}^{\dagger(m)} c_{\mathbf{p}_2}^{\dagger(m)} |0\rangle$$

donde  $c_{\mathbf{p}_i}^{\dagger(m)} \propto c_{p^0 \mathbf{p}}$  con  $p^0 = E_{\mathbf{p}m}$  son los operadores definidos en (4.79). Mediante una transformada de Fourier en  $p_1^0, p_2^0$ , obtenemos

$$|\Psi\rangle = \int \frac{dt_1 dt_2 d^3 p_1 d^3 p_2}{\sqrt{2\pi} (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_1} \sqrt{2\pi} (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_2}} e^{-iE_{\mathbf{p}_1} t_1} e^{-iE_{\mathbf{p}_2} t_2} a(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) c_{t_1 \mathbf{p}_1}^\dagger c_{t_2 \mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle. \quad (4.87)$$

Vemos entonces que este estado no tiene una estructura simple en tiempo de la forma  $\int dt d^3 p_1 d^3 p_2 \psi(t, p_1, p_2) c_{t \mathbf{p}_1}^\dagger c_{t \mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle$ . Esto es importante dado que dicha forma no puede ser preservada por transformaciones de Lorentz. La estructura más compleja de  $|\Psi\rangle$  es una novedad del caso relativista que es necesaria para representar boosts.

## 4.5 Discusión

Hemos visto que es posible construir un formalismo de estado histórico consistente para una partícula escalar cuyo concepto de tiempo comparte las ideas matemáticas subyacentes del mecanismo de Page y Wothers [14]. La consideración de un espacio de Hilbert adecuado para la representación de operadores explícitamente covariantes, junto con una ecuación del universo atemporal, permite una derivación simple de la ecuación de Klein-Gordon, tanto en el caso libre como con un campo externo, que complementa las derivaciones previas de las ecuaciones de Schrödinger [29] y Dirac [1]. El producto canónico de  $L^2(\mathbb{R}^4)$ , que es invariante, proporciona una norma positiva para este espacio de Hilbert. Es notable que la posterior normalización adecuada de los estados on-shell asegura directamente la norma usual en  $3d$  incluso en presencia del campo externo, extendiendo resultados anteriores derivados a través de métodos de “group-averaging” en el contexto de la gravedad cuántica [66, 67].

Pero además, el espacio de Hilbert extendido, normalmente considerado como una construcción cinemática auxiliar, aquí se promueve a un espacio físico real, de acuerdo con la consideración del tiempo como un operador. La importancia de preservar el espacio completo en  $4d$  se hace evidente cuando se toma en cuenta la no conmutatividad de los operadores de masa para diferentes teorías, por ejemplo, con y sin campos externos, lo que implica que el sistema naturalmente comienza a explorar todo el espacio cuando se activa una interacción. Este enfoque también proporciona un espacio de Hilbert consistente en  $4d$  para la ecuación de Klein-Gordon, que es explícitamente covariante y, por lo tanto, difiere de los tratamientos recientes de PW de formulaciones Hamiltonianas basadas en raíces cuadradas [78] de la ecuación de Klein-Gordon [79]. Las consideraciones relativistas actuales también nos han permitido inferir cómo normalizar estados con historias infinitas en un límite no relativista bien definido, proporcionando una interpretación física a la propuesta de regularización previa para la ecuación de Schrödinger [29]. En este sentido, el mecanismo de PW resulta ser particularmente adecuado para el contexto relativista.

Al mismo tiempo, las nuevas características del formalismo resultante plantean dificultades en la interpretación relacional original [14]: El parámetro de tiempo que resulta de “condicionar el reloj” se identifica inequívocamente con el tiempo en un marco de referencia dado por la ecuación de Klein-Gordon. Una interpretación relacional nos llevaría a la conclusión de que un único reloj (cuántico) es suficiente para describir la evolución de una partícula para cualquier observador, en claro contraste con la necesidad de una convención de sincronización como la sincronización de Einstein [17]. Además, esto también requiere que el espectro de  $T$  sea continuo e ilimitado, por lo que difícilmente se puede asociar con un observable de un reloj que no sea una coordenada. Estas consideraciones sugieren que en este contexto es más adecuado simplemente tratar a  $t$  como una coordenada adicional de la partícula misma, como también sugiere el enfoque de Stueckelberg (ver Apéndice 4.2). En el marco de la relatividad general, identificaríamos el parámetro de tiempo con el “tiempo coordenado” en lugar de un intervalo de tiempo medido por un reloj.

Sobre esta base, hemos explorado la construcción de un espacio de Fock donde el bloque de construcción es la partícula como una entidad de 4 dimensiones, extendiendo así el formalismo a un escenario de muchas partículas y definiendo una “segunda cuantización” de historias. A través de la definición de un subespacio adecuado, sigue una identificación con los estados estándar de muchas partículas. Al mismo tiempo, se revela una estructura temporal más rica. Esto sugiere una exten-

sión no trivial a la teoría cuántica de campos, diferente de una aplicación directa del mecanismo original de PW.

## Apéndices

### 4.1 Densidad de corriente

En el presente formalismo, la densidad de corriente de Klein-Gordon asociada con un estado arbitrario  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^4x \psi(x)|x\rangle$  en presencia de un potencial general  $A_\mu(X)$ ,

$$j_A^\mu(x) = i(\psi^*(x)D^\mu\psi(x) - \psi(x)D^{\mu*}\psi^*(x)) , \quad (4.88)$$

donde  $D^\mu = \partial^\mu + ieA^\mu$ , puede escribirse como

$$j^\mu(x) = 2\pi \langle x | J_A^\mu | x \rangle , \quad (4.89)$$

donde

$$J_A^\mu = -(P_A^\mu |\Psi\rangle\langle\Psi| + |\Psi\rangle\langle\Psi| P_A^\mu) , \quad (4.90)$$

con  $P_A^\mu = P^\mu + eA^\mu$ , es un operador hermitico. Ahora podemos expresar la 4-divergencia de la corriente como

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_A^\mu(x) &= 2\pi i \langle x | [P_\mu, J_A^\mu] | x \rangle = 2\pi i \langle x | [P_\mu^A, J_A^\mu] | x \rangle \\ &= 2\pi i \langle x | [|\Psi\rangle\langle\Psi|, \mathcal{J}_A] | x \rangle \end{aligned} \quad (4.91)$$

donde  $P_\mu^A = P_\mu + eA_\mu$  y  $\mathcal{J}_A = P_A^\mu P_\mu^A$  es el operador (4.44). Si  $|\Psi\rangle$  es un autovector de  $\mathcal{J}_A$ , es decir, un estado con masa definida  $|\Psi_{m^2}\rangle$ , entonces  $[|\Psi\rangle\langle\Psi|, \mathcal{J}_A] = 0$  y obtenemos el resultado bien conocido

$$\partial_\mu j_A^\mu(x) = 0 .$$

Las relaciones anteriores pueden generalizarse inmediatamente a una densidad de corriente de dos estados

$$\begin{aligned} j_A^\mu(\phi, \psi, x) &= i(\phi^*(x)D^\mu\psi(x) - \psi(x)D^{\mu*}\phi^*(x)) \\ &= 2\pi \langle x | J_A^\mu(\Phi, \Psi) | x \rangle , \end{aligned} \quad (4.92)$$

donde

$$J_A^\mu(\Phi, \Psi) = -(P_A^\mu |\Psi\rangle\langle\Phi| + |\Psi\rangle\langle\Phi| P_A^\mu) . \quad (4.93)$$

La Ec. (4.91) ahora se convierte en

$$\partial_\mu j_A^\mu(\phi, \psi, x) = 2\pi i \langle x | [[\Psi]\langle\Phi|, \mathcal{J}_A] | x \rangle. \quad (4.94)$$

Si  $|\Psi\rangle$  y  $|\Phi\rangle$  son ambos soluciones de la ecuación de Klein-Gordon con la misma masa, es decir, autoestados de  $\mathcal{J}_A$  con el mismo autovalor  $m^2$ , entonces  $[[\Psi]\langle\Phi|, \mathcal{J}_A] = 0$ , implicando

$$\partial_\mu j_A^\mu(\phi, \psi, x) = 0. \quad (4.95)$$

Por otro lado, para dos autoestados  $|\Psi_{m^2}\rangle, |\Phi_{m'^2}\rangle$  con masas diferentes  $m^2$  y  $m'^2$ , obtenemos en cambio

$$[[\Psi_{m^2}\rangle\langle\Phi_{m'^2}|, \mathcal{J}_A] = (m'^2 - m^2)|\Psi_{m^2}\rangle\langle\Phi_{m'^2}|, \quad (4.96)$$

implicando la identidad extendida

$$\partial_\mu j_A^\mu(\phi_{m'^2}, \psi_{m^2}, x) = i(m'^2 - m^2)\psi_{m^2}(x)\phi_{m'^2}^*(x), \quad (4.97)$$

que es válida para *cualquier* potencial independiente de la masa  $A^\mu(X)$  (no necesariamente independiente del tiempo).

Para  $m^2 = m'^2$ , integrando sobre  $d^3x$  y asumiendo que  $j_A^\mu(\phi_{m^2}, \psi_{m^2}^*, x)$  desaparece para grandes  $|\mathbf{x}|$ , la Ec. (4.97) conduce al resultado bien conocido de  $Q(\phi, \psi)$  constante en el tiempo, en acuerdo con la Ec. (4.16). Para  $m^2, m'^2$  generales esta relación puede emplearse para re-obtener las relaciones anteriores (4.16) y (4.58) (para un potencial independiente del tiempo y de la masa) por integración de (4.97) sobre  $d^3x$ , asumiendo nuevamente el desvanecimiento de  $j_A^\mu$  para grandes  $|\mathbf{x}|$ .

La densidad de corriente de dos estados también puede expresarse como

$$j_A^\mu(\phi, \psi, x) = \langle\Phi|J_A^\mu(x)|\Psi\rangle \quad (4.98)$$

donde  $J_A^\mu(x) := J_A^\mu(x, x)$  (Ec. (4.93)) es el operador hermitico

$$J_A^\mu(x) = -(\Pi(x)P_A^\mu + P_A^\mu\Pi(x)), \quad (4.99)$$

con  $\Pi(x) = |x\rangle\langle x|$ . Además,  $Q_A(\phi, \psi)$  puede reformularse como

$$Q_A(\phi, \psi) = \langle\Phi|\int d^3x J_A^\mu(x)|\Psi\rangle = \langle\Phi|Q_A(t)|\Psi\rangle, \quad (4.100)$$

$$Q_A(t) = -(\Pi(t)P_A^0 + P_A^0\Pi(t)), \quad (4.101)$$

donde  $\Pi(t) = \int d^3x \Pi(x) = |t\rangle\langle t| \otimes \mathbb{1}$ . Todas las relaciones de este apéndice también se aplican, por supuesto, en el caso libre  $A_\mu(X) = 0$  ( $P_A^\mu \rightarrow P^\mu, \mathcal{J}_A \rightarrow \mathcal{J}$ ).

## 4.2 Cuantización extendida de una teoría parametrizada

Aquí presentamos una versión alternativa para derivar el formalismo de estado histórico de una partícula que está estrechamente relacionada con la propuesta de Stueckelberg [57]. Aunque el enfoque anterior es autocontenido, esta perspectiva diferente aclara aún más que no es estrictamente necesario una interpretación relacional para el parámetro  $t$ . Al mismo tiempo, recuperar el formalismo de esta manera permite una primera comparación con el enfoque convencional de la gravedad cuántica [49].

Considere la acción de una partícula unidimensional para una lagrangiana independiente del tiempo

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}) . \quad (4.102)$$

Promoviendo  $t$  a una coordenada y parametrizando el espacio de configuración  $(t, q)$  con una variable  $\tau$  podemos escribir

$$S[q(\tau), t(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, tL\left(q, \frac{\dot{q}}{\dot{t}}\right) \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, \tilde{L}(q, \dot{q}, \dot{t}) . \quad (4.103)$$

Los momentos asociados con  $\tilde{L}$  son [49]:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_q &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} = p_q \\ p_t &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{t}} = -H , \end{aligned} \quad (4.104)$$

mientras que el Hamiltoniano es  $\tilde{H} = \tilde{p}_q \dot{q} + p_t \dot{t} - \tilde{L} = \dot{t}(H + p_t)$ . Si definimos el “super Hamiltoniano”  $H_s \equiv H + \tilde{p}_t$  entonces de la Ec. (4.104)

$$H_s = H + p_t \approx 0 , \quad (4.105)$$

donde con  $\approx$  indicamos que esto es una restricción débil [80]. Al aplicar la cuantización canónica *al espacio de configuración extendido*, ya que  $t$  y  $p_t$  están en el espacio de fases, se obtiene un Hilbert ampliado, que puede escribirse como  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_t \otimes \mathcal{H}_q$ . La restricción del super Hamiltoniano (4.105) define el subespacio

$$H_s|\Psi\rangle = (P_t \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H)|\Psi\rangle = 0 , \quad (4.106)$$

que es precisamente la ecuación del universo del formalismo de PW para una partícula unidimensional y tiempo continuo discutido en la Sec. 4.3. Hemos obtenido

mediante este método las nociones familiares del formalismo de estado histórico no relativista *sin considerar un reloj de referencia:  $t$  es una coordenada*.

Debe enfatizarse que el procedimiento convencional de cuantización de un sistema parametrizado no conduce al presente formalismo donde se define un operador de tiempo [49]. La diferencia clave es que estamos asociando un espacio de Hilbert ampliado al espacio de configuración extendido de modo que la restricción (4.106) también tiene un significado físico en lugar de solo uno formal (o auxiliar) [66]. La presente propuesta está más cerca del enfoque de Stueckelberg para la mecánica cuántica relativista [57]. De hecho, el Hamiltoniano  $R$  introducido por Stueckelberg bajo consideraciones relativistas generales, que para una partícula libre es  $R = \frac{1}{2}P_\mu P^\mu$ , conduce a la ecuación de Stueckelberg [57]

$$R \Psi(x, \tau) = i \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(x, \tau), \quad (4.107)$$

que para soluciones estacionarias en  $\tau$   $\Psi(x, \tau) = \exp\left(\frac{-im^2}{2}\tau\right)\Psi(x)$  produce la Ec. (4.7). La norma de Stueckelberg  $\int d^4x |\Psi(x, \tau)|^2$ , que es independiente de  $\tau$  para una solución de la Ec. (4.107), es precisamente la que hemos empleado en la Sec. 4.1 y está relacionada con la norma de Klein-Gordon para soluciones de masa fija. Las mismas consideraciones se aplican para el caso general  $R = \frac{1}{2}\pi_\mu \pi^\mu$ , donde  $\pi_\mu = P_\mu + eA_\mu$ , como sigue inmediatamente de los resultados de la Sec. 4.2.



## Segunda cuantización extendida y el concepto de acción cuántica

“And so I’m stuck to have to continue this investigation, and of course you appreciate that this is the secret reason for doing any work, no matter how absurd and irrational and academic it looks: we all realize that no matter how small a thing is, if it has physical interest and is thought about carefully enough, you’re bound to think of something that’s good for something else.”

---

Richard P. Feynman

Hemos visto que cuando un operador para el espacio está definido, el uso de un operador tiempo nos permite dar descripciones cuánticas en espacios de Hilbert que a su vez dan una representación explícita de la simetría de Lorentz. Hemos mostrado esto en dos escenarios asociados a una sola partícula. Podemos pensar en lo anterior como “modelos de juguete” donde la relatividad y una formulación canónica (ampliada) conviven. ¿Podemos ir más allá de este modelo?

Esto nos requiere sin lugar a duda discutir la relación de lo anterior con las teorías cuánticas de campos. Un primer intento podría ser aplicar el formalismo de PW directamente. Si bien nada impide seguir este camino, queda inmediatamente claro que no hay mucho por ganar: si tratamos al tiempo como operador, pero el espacio es un parámetro clásico, estamos generando más asimetría que en el caso convencional. En cambio, recordemos que en el último capítulo introdujimos el concepto de segunda cuantización del formalismo de PW <sup>1</sup>. Si bien esta idea por

---

<sup>1</sup>Con “segunda cuantización”, nos referimos al esquema matemático riguroso que, dado un cierto conjunto de estados de una partícula (en el presente caso estados  $|tq\rangle$  y  $|q\rangle$ ; ver abajo), permite construir un espacio de Fock de partículas indistinguibles. Véase, por ejemplo, [72]. No debe confundirse con los argumentos históricos de QFT [81].

sí sola no es particularmente esclarecedora, nos conduce a un resultado notable: la segunda cuantización del operador de universo  $\mathcal{J}$  toma la forma de *la acción clásica*. Este resultado, junto con la caracterización de las *acciones cuánticas* y del espacio matemático en el cual se encuentran definidas sugiere un camino completamente novedoso para formular las teorías cuánticas de campos. En esta formulación, las álgebras canónicas se encuentran extendidas al espacio-tiempo. También podríamos decir, si se nos permite no ser particularmente rigurosos, que las excitaciones de los campos son “partículas de Page y Wootters”.

## 5.1 Acción cuántica y el formalismo de Page y Wootters

El tratamiento de una partícula parametrizada <sup>2</sup> (unidimensional para simplificar) para un Lagrangiano independiente del tiempo  $L(q, \dot{q})$  conduce a una restricción débil clásica [42]  $H_S = p_t + H \approx 0$  con  $p_t = \frac{\partial(iL(q, \dot{q}/i))}{\partial \dot{t}}$ . Esta condición se cuantiza como [49, 82]

$$H_S|\Psi\rangle = (P_t \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H)|\Psi\rangle = 0, \quad (5.1)$$

donde  $P_t \otimes \mathbb{1} = i \int dt dt' dq \frac{d}{dt'} \delta(t' - t) |tq\rangle \langle t'q|$ ,  $\mathbb{1} \otimes H = \int dt dq dq' \langle q' | H | q \rangle |tq'\rangle \langle tq|$  y

$$\langle t'q' | tq \rangle = \delta(t - t') \delta(q - q'), \quad (5.2)$$

que comúnmente se considera como una condición auxiliar en un “espacio cinemático”  $\mathcal{K}$  para definir el espacio físico (que no es un subespacio adecuado). Alternativamente, se asigna una interpretación relacional a esta ecuación donde  $H_S$  se considera como el Hamiltoniano de un sistema global compuesto “reloj”+“sistema”. Este es el caso del formalismo PW donde se define un operador de tiempo hermitiano como observable del reloj  $T = \int dt t |tq\rangle \langle tq|$ .

En cambio, si el espacio cinemático se promueve al estatus de un espacio “físico” y, además, las partículas se consideran como objetos de  $d + 1$  dimensiones (para  $d$  dimensiones espaciales), el escenario adecuado para muchas partículas idénticas es un espacio Fock extendido  $\mathcal{H}$  [2], diferente del convencional y *diferente del formalismo PW aplicado a un espacio Fock* (o equivalentemente, de la dinámica hamiltoniana generalizada de un espacio Fock convencional). Esto se logra reinterpretando los

---

<sup>2</sup>Si bien en principio veníamos hablando del formalismo de PW, es interesante ver como consideraciones similares valen para partículas parametrizadas. Ambos casos se explican y relacionan a continuación.

estados  $|tq\rangle$  como estados sp  $|tq\rangle = A^\dagger(t, q)|\Omega\rangle$  (con  $A(t, q)|\Omega\rangle = 0$ ,  $\langle\Omega|\Omega\rangle = 1$ ) que, considerando la Ec. (5.2) y una partícula bosónica, implica

$$[A(t, q), A^\dagger(t', q')] = \delta(t - t')\delta(q - q'). \quad (5.3)$$

Luego se puede generalizar

$$H_S \rightarrow -\mathcal{J} \quad (5.4)$$

con

$$\mathcal{J} = \int dt \int dq dq' A^\dagger(t, q') [i\partial_t \delta(q - q') - \langle q' | H | q \rangle] A(t, q) \quad (5.5)$$

que notablemente puede relacionarse con la acción clásica. Para ver esto definamos operadores de campo y momento  $\phi(t, q) := \frac{A(t, q) + A^\dagger(t, q)}{\sqrt{2}}$ ,  $\pi(t, q) := \frac{A(t, q) - A^\dagger(t, q)}{i\sqrt{2}}$ . Obtenemos entonces

$$\mathcal{J} = \int dt dq \phi \dot{\pi} - \int dt H \quad (5.6)$$

donde llamamos  $H$  al segundo termino de  $\mathcal{J}$  sin la integral en tiempo (véase abajo el Hamiltoniano de segunda cuantización convencional). Notemos también como el primer término tiene precisamente la forma de la *transformada de Legendre clásica*. Puede también probarse [3] que esta estructura del operador es invariante frente a transformaciones canónicas (o de Bogoliubov), de modo que no depende de cómo definamos los campos. Finalmente, remarquemos que el campo y su momento satisfacen el álgebra

$$[\phi(t, q), \pi(t', q')] = i\delta(t - t')\delta(q - q') \quad (5.7)$$

que *no* es un conmutador a tiempos iguales.

Como consecuencia de lo anterior, los estados de “single particle” (sp) (pero no los estados de múltiples partículas) en  $\mathcal{H}$  son formalmente idénticos a los estados PW mientras que los elementos de matriz sp de los operadores  $\mathcal{J}, \mathcal{T}$  son iguales a los elementos de matriz de  $H_S, T$  respectivamente (incluyendo  $\mathcal{J}|\Psi\rangle = 0$  para  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_p$  siendo formalmente equivalente a la Ec. (5.1) para estados sp). Note, sin embargo, que la estructura de producto entre “tiempo” y “resto”, esencial para “condicionar en un reloj”, se pierde por completo [2].

También cabe destacar que la segunda cuantización del espacio de Hilbert convencional  $\mathfrak{H}$  de la partícula, que está generado por estados  $|q\rangle$ , conduce también a una teoría de campos, ahora en un espacio de Fock  $\mathfrak{H}^F$  generado por operadores  $a^\dagger(q)$  de tal manera que  $|q\rangle = a^\dagger(q)|0\rangle$ . Este es el sistema descrito en el presente

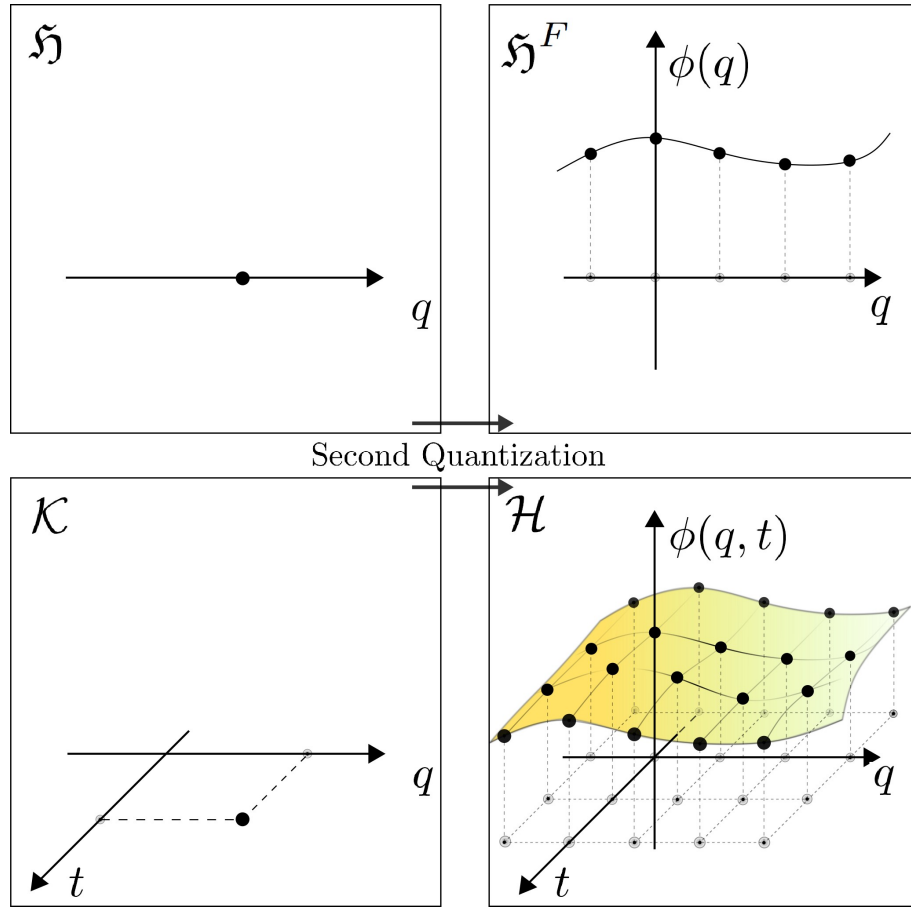


Figura 5.1.1: A la izquierda, las dos descripciones de una partícula: La convencional en el espacio de Hilbert  $\mathfrak{H}$  (panel superior) y la descripción generalizada en espacio-tiempo en el espacio de Hilbert  $\mathcal{K}$  (panel inferior). A la derecha, la segunda cuantización de los esquemas anteriores. La segunda cuantización de  $\mathfrak{H}$  conduce a una teoría de campos en un espacio de Hilbert convencional  $\mathfrak{H}^F$  que es isomorfo a un producto tensorial en el espacio de copias de  $\mathfrak{H}$ , es decir,  $\mathfrak{H}^F \approx \bigotimes_q \mathfrak{H}_q$  (panel superior derecho). La segunda cuantización de  $\mathcal{K}$  conduce en cambio a un espacio extendido  $\mathcal{H} \approx \bigotimes_t \mathfrak{H}_t^F = \bigotimes_{t,q} \mathfrak{H}_{tq}$  donde la estructura de producto tensorial se aplica tanto al espacio como al tiempo y es posible representar configuraciones de campo en espacio-tiempo (panel inferior derecho). La descripción del campo en este espacio de Hilbert extendido se puede obtener inmediatamente aplicando el formalismo presentado en este capítulo a este caso particular.

Hilbert  $\mathcal{H}$ :  $\mathcal{J}$  en la Ec. (5.5) es precisamente la acción cuántica espacio-temporal que corresponde al Hamiltoniano

$$H = \int dq dq' \langle q' | H | q \rangle a^\dagger(q') a(q) \quad (5.8)$$

obtenido mediante la segunda cuantización del Hamiltoniano de la partícula. La relación entre estos diferentes espacios de Hilbert se representa en la Fig. 5.1.1.

Finalmente, cabe mencionar que mientras en  $\mathfrak{H}^F$  la estructura de producto aplicada al espacio permite representar configuraciones de campo en un tiempo dado

como estados propios de  $\phi(q) = \frac{a(q)+a^\dagger(q)}{\sqrt{2}}$  [83]

$$|\phi(q)\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2} \int dq [a^\dagger(q)(a^\dagger(q) - 2\sqrt{2}\phi(q))]\right] |0\rangle, \quad (5.9)$$

en  $\mathcal{H}$  la estructura de producto se extiende al tiempo permitiendo representar configuraciones espacio-temporales

$$|\phi(q, t)\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2} \int dt dq [A^\dagger(t, q)(A^\dagger(t, q) - 2\sqrt{2}\phi(t, q))]\right] |\Omega\rangle. \quad (5.10)$$

### 5.1.1 Consideraciones Relativistas

El formalismo presente es particularmente adecuado para una interpretación geométrica de los sitios espacio-temporales: Para  $q \rightarrow \mathbf{x}$  y  $\mathbf{A}(t, q) \rightarrow A(x)$ , definimos el operador de boosts  $U(\Lambda)$  como  $U^\dagger(\Lambda)A(x)U(\Lambda) = A(\Lambda x)$ . El álgebra ampliada

$$[A(x), A^\dagger(y)] = \delta^{(4)}(x - y) \quad (5.11)$$

se conserva explícitamente cuando  $\Lambda$  es una transformación de Lorentz. Esto produce  $U(\Lambda)|\phi(x)\rangle = |\phi(\Lambda^{-1}x)\rangle$  para el estado de campo coherente

$$|\phi(x)\rangle = \exp\left[\int d^4x \phi(x)A^\dagger(x)\right] |\Omega\rangle \quad (5.12)$$

que es la propiedad de transformación correcta de un *estado que representa una configuración de campo (escalar) en el espacio-tiempo* (un razonamiento similar se sostiene para los estados (5.10) para  $q \rightarrow \mathbf{x}$ ).

Para introducir subespacios físicos invariantes podemos emplear una propuesta previa de los autores [2] (más recientemente presentada también en [84]) que consiste en considerar una versión de segunda cuantización de la restricción  $H_s^{\text{rel}}|\Psi\rangle := (P^\mu P_\mu - m_0^2)|\Psi\rangle = 0$  (y  $P^0 > 0$ ) donde los operadores hermitianos  $P^\mu$  satisfacen  $[X^\mu, P_\nu] = i\delta^\mu_\nu$  con  $X^0 = T$  el operador de tiempo PW [2]. La restricción  $H_s^{\text{rel}}|\Psi\rangle = 0$  también surge del tratamiento de sistemas invariantes de reparametrización pero considerando ahora la acción clásica  $S = -m_0 \int d\tau$  [49, 82]. Este tratamiento conduce a

$$H_S^{\text{rel}} \rightarrow \mathcal{J}_{\text{rel}} = - \int d^4x A^\dagger(x)(\partial^2 + m_0^2)A(x) \quad (5.13)$$

de tal manera que  $[U(\Lambda), \mathcal{J}_{\text{rel}}] = 0$  e implica

$$\frac{\langle \phi(x) | \mathcal{J}_{\text{rel}} | \phi(x) \rangle}{\langle \phi(x) | \phi(x) \rangle} = S[\phi(x), \phi^*(x)] \quad (5.14)$$

donde  $S[\phi(x), \phi^*(x)] = - \int d^4x \phi^*(x)(\partial^2 + m_0^2)\phi(x)$  es la *acción clásica de un campo escalar libre* ( $\eta_{00} = 1$ ,  $c = 1$ ). El resultado (5.14) sugiere una profunda conexión entre técnicas de partículas y una formulación de la QFT en este entorno ampliado.

Esta nueva forma de la acción cuántica también admite una descomposición normal de tal manera que  $[\mathcal{J}_{\text{rel}}, A^\dagger(m^2, \mathbf{p})] = (m^2 - m_0^2)A^\dagger(m^2, \mathbf{p})$  implicando en cada sector de masa el producto invariante tridimensional [2]. Como consecuencia, también emergen los conmutadores correctos entre operadores de campo físicos (el componente de  $\phi(x) \propto A(x) + A^\dagger(x)$  a masa fija) [3].

Vemos que la posibilidad de representar configuraciones espacio-temporales de los campos abre la posibilidad de preservar explícitamente las simetrías del espacio-tiempo (covarianza de Lorentz en el ejemplo anterior) a nivel del espacio de Hilbert y en particular en procesos de cuantización. Como consecuencia fundamental, el producto invariante correcto emerge en  $\mathcal{H}_p$  a partir del producto interno global (estándar) de  $\mathcal{H}$  en el caso considerado [2].

## 5.2 Formalismo

### 5.2.1 Espacio de Hilbert

Las consideraciones anteriores, si bien introductorias, muestran dos aspectos notables: en primer lugar, un formalismo de varias partículas que contenga al de PW en el subespacio de una partícula está asociado a álgebras simétricas en el espacio-tiempo. En segundo lugar, surge naturalmente el concepto de acción cuántica, que solo está definida en este espacio de Hilbert ampliado. A partir de ahora ya nos desligaremos del formalismo de PW y, basados en [3], haremos una construcción que postula lo anterior como punto de partida. Comencemos primero por discutir mejor qué significa tener álgebras en espacio-tiempo y la estructura del espacio de Hilbert.

Introducimos en esta sección un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  adecuado para representar trayectorias (ver Fig. 5.2.1) de un conjunto de bosones definidos por operadores  $a_i, a_j^\dagger$ ,  $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$ ,  $[a_i, a_j] = 0$ , para  $i, j$  números cuánticos arbitrarios (por ejemplo,  $i$  puede representar una posición discretizada  $\mathbf{x}$ ), que generan un espacio de Fock “convencional”  $\mathfrak{H}$  de estados  $\prod_i (a_i^\dagger)^{n_i} |0\rangle$  (con  $a_i |0\rangle = 0$ ). Con este propósito definimos operadores de creación/aniquilación  $A_i(t), A_j^\dagger(t)$  en “cada” corte temporal, satisfaciendo  $[A_i(t), A_j(t')] = 0$  y

$$[A_i(t), A_j^\dagger(t')] = \delta(t - t')\delta_{ij}, \quad (5.15)$$

con  $A_i(t)|\Omega\rangle = 0 \ \forall t \in [-T/2, T/2]$ , que generan un espacio de Fock extendido  $\mathcal{H}$ . Aquí  $|\Omega\rangle = \bigotimes_j |0\rangle_{t_j}$ , donde el producto tensorial se debe interpretar como el límite continuo de sitios temporales discretos igualmente espaciados con espaciamento  $\epsilon$ , tal que  $t_j = \epsilon j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  y  $A_i(t_j) = A_{it_j}/\sqrt{\epsilon}$ , con  $A_{it_j}|0\rangle_{t_j} = 0$  y  $[A_{it_j}, A_{i't_{j'}}^\dagger] = \delta_{jj'}\delta_{ii'}$ . El álgebra de la Ec. (5.15) se recupera de  $\delta(t_j - t_{j'}) \equiv \delta_{jj'}/\epsilon$ .

El espacio de Hilbert extendido  $\mathcal{H}$  de estados  $\prod_{i,j} (A_{it_j}^\dagger)^{n_{ij}}|\Omega\rangle$  puede entonces escribirse como  $\mathcal{H} = \bigotimes_j \mathfrak{H}_{t_j}$  con  $\mathfrak{H}_{t_j}$  el espacio de Fock generado por los operadores  $A_{it_j}^\dagger$  (fijo  $j$ ). También cabe señalar que podemos escribir  $\mathfrak{H} = \bigotimes_i \mathfrak{H}_i$  y entonces

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{i,j} \mathfrak{H}_{ij},$$

con  $\mathfrak{H}_{ij} \equiv \mathfrak{H}_{it_j}$ , que es la simetría del espacio de Hilbert buscada entre el “espacio” (índice  $i$ ) y el tiempo (ver Fig. 5.2.1).

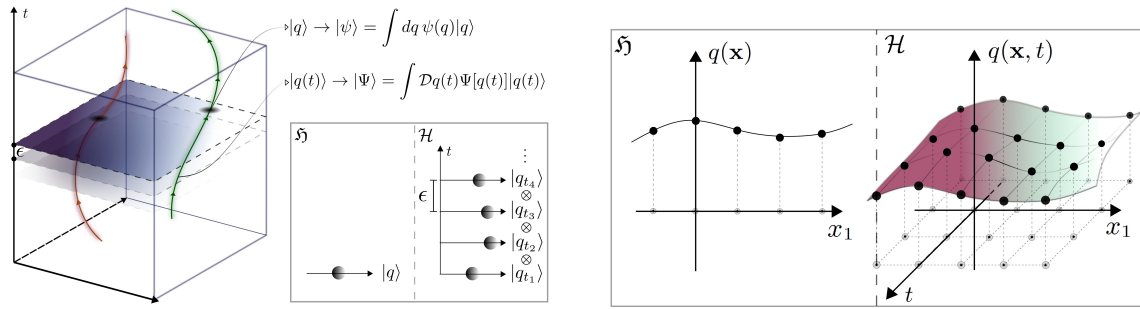


Figura 5.2.1: Representación de dos partículas clásicas (distinguibiles) moviéndose en el espacio-tiempo plano cuyas trayectorias pueden parametrizarse como  $(t, q_a(t), q_b(t))$  (a la izquierda). La MC convencional describe esta situación empleando una base de estados de producto  $|\mathbf{q}\rangle = |q_a\rangle \otimes |q_b\rangle$  que representan las posiciones en un tiempo dado en el espacio de Hilbert  $\mathfrak{H}$ . En cambio, en  $\mathcal{H}$  se representan los caminos completos por  $|\mathbf{q}(t)\rangle = |q_a(t)\rangle \otimes |q_b(t)\rangle \propto \bigotimes_j |q_{at_j}\rangle \otimes |q_{bt_j}\rangle$  (Ec. (5.21)), donde  $|q_i(t)\rangle \propto \bigotimes_j |q_{it_j}\rangle$  (a la derecha) que establece una aplicación completamente simétrica del producto tensorial a los grados de libertad espaciales y temporales. Además, la evolución temporal clásica  $\mathbf{q}(t) \rightarrow \mathbf{q}(t + \Delta t)$  se puede ver desde un punto de vista pasivo como un desplazamiento  $t \rightarrow t - \Delta t$  del conjunto completo del “manifold”. En nuestra formulación, la evolución temporal cuántica emerge de  $e^{i\mathcal{P}_t(-\Delta t)}|\mathbf{q}(t)\rangle = |\mathbf{q}(t + \Delta t)\rangle$ . La simetría entre espacio y tiempo se hace aún más evidente en el panel inferior con un ejemplo diferente: El producto tensorial en espacio de una teoría cuántica de campos convencional se extiende aquí al espacio-tiempo.

Esta construcción nos permite especificar una trayectoria clásica en el espacio de fases, dentro de los límites impuestos por la incerteza cuántica, en términos de un estado historia coherente factorizado de la forma:

$$|\alpha(t)\rangle := \exp \left[ \int dt \alpha(t) \cdot \mathbf{A}^\dagger(t) \right] |\Omega\rangle, \quad (5.16)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha}(t) \cdot \mathbf{A}^\dagger(t) = \sum_i \alpha_i(t) A_i^\dagger(t)$  (o un integral para etiquetas continuas).

Aquí  $\exp \left[ \int dt \mathcal{O}(t) \right] = \bigotimes_j \exp [\epsilon \mathcal{O}(t_j)]$ , donde  $\mathcal{O}(t) \equiv \mathcal{O}(\mathbf{A}(t), \mathbf{A}^\dagger(t), t)$ , tal que

$$\mathbf{A}(t) |\boldsymbol{\alpha}(t)\rangle = \boldsymbol{\alpha}(t) |\boldsymbol{\alpha}(t)\rangle. \quad (5.17)$$

Note que  $|\boldsymbol{\alpha}(t)\rangle = e^{\alpha A^\dagger} |\Omega\rangle$ , donde  $A^\dagger = \int dt \boldsymbol{\alpha}(t) \cdot \mathbf{A}^\dagger(t) / \alpha$  con  $\alpha = [\int dt |\boldsymbol{\alpha}(t)|^2]^{1/2}$ , es un operador colectivo de creación de bosones de trayectoria. El conjunto (sobre)completo de estas trayectorias genera  $\mathcal{H}$ :

$$\int \mathcal{D}^2 \boldsymbol{\alpha}(t) e^{-\int dt |\boldsymbol{\alpha}(t)|^2} |\boldsymbol{\alpha}(t)\rangle \langle \boldsymbol{\alpha}(t)| = \mathbb{1} \quad (5.18)$$

donde  $\mathcal{D}^2 \boldsymbol{\alpha}(t) := \prod_{i,j} \frac{d^2 \alpha_i(t_j)}{\pi} \epsilon$ .

Otras bases alternativas son proporcionadas, por ejemplo, por operadores  $\mathbf{Q}(t) = \frac{\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^\dagger(t)}{\sqrt{2}}$ ,  $\mathbf{P}(t) = \frac{\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^\dagger(t)}{i\sqrt{2}}$ , de tal manera que

$$[Q_i(t), P_j(t')] = i\delta(t - t')\delta_{ij} \quad (5.19)$$

(establecemos  $\hbar = 1$ ). Entonces podemos definir los estados propios correspondientes  $|\mathbf{q}(t)\rangle$ ,  $|\mathbf{p}(t)\rangle$ , que satisfacen

$$\mathbf{Q}(t) |\mathbf{q}(t)\rangle = \mathbf{q}(t) |\mathbf{q}(t)\rangle, \quad \mathbf{P}(t) |\mathbf{p}(t)\rangle = \mathbf{p}(t) |\mathbf{p}(t)\rangle. \quad (5.20)$$

Explícitamente, podemos escribir <sup>3</sup>, [83, 85]

$$|\mathbf{q}(t)\rangle = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int dt \mathbf{A}^\dagger(t) \cdot (\mathbf{A}^\dagger(t) - 2\sqrt{2}\mathbf{q}(t)) \right] |\Omega\rangle \quad (5.21)$$

de tal manera que  $|\mathbf{q}(t)\rangle = \bigotimes_j \gamma_j |\mathbf{q}_{t_j}\rangle_{t_j}$  con  $\mathbf{q}_{t_j} = \sqrt{\epsilon} \mathbf{q}(t_j)$ ,  $\gamma_j = \sqrt[4]{\pi} e^{|\mathbf{q}_{t_j}|^2/2}$  y  ${}_{t_j} \langle \mathbf{q}_{t_j} | \mathbf{q}'_{t_j} \rangle_{t_j} = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$ . La relación de completitud se lee

$$\int \mathcal{D}\mathbf{q}(t) e^{-\int dt |\mathbf{q}(t)|^2} |\mathbf{q}(t)\rangle \langle \mathbf{q}(t)| = \mathbb{1}$$

con  $\mathcal{D}\mathbf{q}(t) = \prod_{i,j} dq_i(t_j) \sqrt{\pi\epsilon}$ . Fórmulas similares se aplican para  $|\mathbf{p}(t)\rangle$ . Estas bases espacio-temporales permiten un enfoque novedoso para las representaciones de integrales de camino, como se discutirá en el siguiente capítulo.

<sup>3</sup>El estado propio de posición canónico  $|q\rangle$  se puede expresar como  $|q\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|q\rangle \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = \frac{e^{-q^2/2}}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{a^{\dagger,2}}{2} + \sqrt{2}qa^\dagger} |0\rangle$  [83]. El caso multidimensional  $|\mathbf{q}\rangle = \bigotimes_i \frac{e^{-q_i^2/2}}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{a_i^{\dagger,2}}{2} + \sqrt{2}q_i a_i^\dagger} |0\rangle \propto e^{-\frac{1}{2}[\sum_i a_i^\dagger (a_i - 2\sqrt{2}q_i)]} |0\rangle$  se puede generalizar inmediatamente a campos continuos [85].



### 5.2.2 Traslaciones en el Tiempo y el operador Acción

Consideremos el generador de traslaciones en el tiempo  $\mathcal{P}_t$  que en el presente escenario se define

$$\mathcal{P}_t := \int d\omega \omega \mathbf{A}^\dagger(\omega) \cdot \mathbf{A}(\omega) = \int dt \mathbf{A}^\dagger(t) \cdot i\dot{\mathbf{A}}(t) \quad (5.22)$$

$$= \frac{1}{2} \int dt [\mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{Q}}(t) - \mathbf{Q}(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}(t)] \quad (5.23)$$

donde  $\mathbf{A}(\omega)$  es la transformada de Fourier (FT) de  $\mathbf{A}(t)$ , de tal manera que  $\mathbf{A}(t) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{A}(\omega) e^{-i\omega t}$  y  $i\dot{\mathbf{A}}(t) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{A}(\omega) \omega e^{-i\omega t}$  coincide con la derivada “de sitio”. Asumimos condiciones periódicas  $\mathbf{A}(-T/2) = \mathbf{A}(T/2)$ . El operador  $\mathcal{P}_t$  satisface

$$e^{i\mathcal{P}_t \Delta t} \mathbf{A}(t) e^{-i\mathcal{P}_t \Delta t} = \mathbf{A}(t + \Delta t), \quad (5.24)$$

lo que para  $\Delta t \rightarrow 0$  conduce a

$$[\mathcal{P}_t, \mathbf{A}(t)] = -i\dot{\mathbf{A}}(t), \quad (5.25)$$

en acuerdo con la Ec. (5.22).

Notablemente, el integrando en (5.23) tiene la forma de la *transformación de Legendre* que conecta el Hamiltoniano con el Lagrangiano en la mecánica clásica. Esto sugiere la introducción de un nuevo objeto que para la teoría trivial se reduce a  $\mathcal{P}_t$ :

$$\mathcal{J} := \int dt [\mathbf{A}^\dagger(t) \cdot i\dot{\mathbf{A}}(t) - \mathcal{H}(\mathbf{A}(t), \mathbf{A}^\dagger(t), t)], \quad (5.26)$$

que será indicado como *operador de acción cuántica espacio-temporal* (no confundir con la acción de Schwinger <sup>4</sup>, [86]) por su coincidencia formal con la clásica. Aquí  $\int dt \mathcal{H}(\mathbf{A}(t), \mathbf{A}^\dagger(t), t) \equiv \sum_t H(\mathbf{A}_t, \mathbf{A}_t^\dagger, t)$  para  $H(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger, t)$  un Hamiltoniano (cuántico) convencional (y  $dt = \epsilon$ ), de acuerdo con la convención de que  $\mathcal{J}$  tenga unidades

---

<sup>4</sup>En la formulación de Schwinger, un conjunto completo de operadores conmutantes está disponible en superficies espaciales [86]. Esto implica conmutadores no nulos para operadores de campo causalmente conectados. En cambio, cualquier conmutador de tiempo desigual entre  $\mathbf{A}(t)$  y  $\mathbf{A}^\dagger(t)$  se anula. Las álgebras convencionales se recuperan “a posteriori” en los subespacios físicos. Además, la integración en  $\mathcal{J}$  involucra todos los valores de tiempo sin ninguna referencia a estados particulares.

de  $\mathcal{P}_t$ . Un resultado notable es que  $\mathcal{J}$  y  $\mathcal{P}_t$  están *relacionados unitariamente*<sup>5</sup>:

$$\mathcal{J} = \mathcal{V}^\dagger \mathcal{P}_t \mathcal{V} = \int d\omega \omega \tilde{\mathbf{A}}^\dagger(\omega) \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\omega) \quad (5.27a)$$

$$= \int dt \tilde{\mathbf{A}}^\dagger(t) \cdot i\dot{\tilde{\mathbf{A}}}(t) \quad (5.27b)$$

$$= \frac{1}{2} \int dt [\tilde{\mathbf{P}}(t) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{Q}}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{Q}}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{P}}(t)], \quad (5.27c)$$

donde

$$\mathcal{V}^\dagger := \hat{T}' \exp \left[ -i \int dt \int_{t_0}^t dt' \mathcal{H}(\mathbf{A}(t), \mathbf{A}^\dagger(t), t') \right] \quad (5.28)$$

es un *producto tensorial en el tiempo de operadores convencionales de evolución temporal*  $U(t, t_0) = \hat{T}' \exp \left[ -i \int_{t_0}^t dt' H(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger, t') \right]$  ( $\hat{T}'$  denota ordenamiento temporal aplicado a  $t'$ ) y

$$\tilde{\mathbf{A}}(\omega) = \mathcal{V}^\dagger \mathbf{A}(\omega) \mathcal{V}, \quad \tilde{\mathbf{A}}(t) = \mathcal{V}^\dagger \mathbf{A}(t) \mathcal{V}, \quad (5.29)$$

con  $\tilde{\mathbf{A}}(t)$  la FT de  $\tilde{\mathbf{A}}(\omega)$  (del mismo modo  $\tilde{\mathbf{Q}}(t) = \mathcal{V}^\dagger \mathbf{Q}(t) \mathcal{V}$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}(t) = \mathcal{V}^\dagger \mathbf{P}(t) \mathcal{V}$ ). Aquí  $t_0$  es un tiempo de referencia tal que  $\tilde{\mathbf{A}}(t_0) = \mathbf{A}(t_0)$ . En particular, para  $\mathcal{H}$  independiente del tiempo,

$$\mathcal{V}^\dagger = \exp \left[ -i \int dt (t - t_0) \mathcal{H}(\mathbf{A}(t), \mathbf{A}^\dagger(t)) \right]. \quad (5.30)$$

Dado que en este contexto  $\mathcal{J}$  es el operador que define una evolución temporal particular, el resultado (5.27a) está relacionando unitariamente todas las teorías con la trivial. Esto también significa que en  $\mathcal{H}$  todas las teorías físicas parecen estar relacionadas unitariamente entre sí. Tal resultado general es una consecuencia de la notable propiedad de las acciones cuánticas espacio-temporales de tener el mismo espectro independientemente del Hamiltoniano. Esto debería compararse con el hecho obvio de que diferentes Hamiltonianos tienen diferentes espectros, lo que también significa que tal relación unitaria entre teorías nunca podría haberse revelado en una formulación Hamiltoniana.

La prueba de (5.27a) se basa en las propiedades básicas de  $\mathcal{P}_t$  como generador de traslaciones en el tiempo y supone condiciones periódicas para  $T$  finito (algo que en principio siempre se puede forzar o implementar con un  $\mathcal{H}$  bien comportado en el límite  $T \rightarrow \infty$ ). Observe que las Ecs. (5.24) y (5.27) implican

$$e^{i\mathcal{J}\Delta t} \tilde{\mathbf{A}}(t) e^{-i\mathcal{J}\Delta t} = \tilde{\mathbf{A}}(t + \Delta t) \quad (5.31)$$

---

<sup>5</sup>No incluiremos la prueba original dada en [3]. En cambio, se presentan resultados análogos en el capítulo siguiente usando una estrategia diferente. Sin embargo, puede verse este resultado aplicado al caso de acciones cuadráticas en la siguiente subsección

de tal manera que  $\mathcal{J}$  es el generador de traslaciones en el tiempo en la base normal para un Hamiltoniano no nulo. Por lo tanto, los operadores  $\tilde{\mathbf{A}}(t)$  satisfacen

$$[\mathcal{J}, \tilde{\mathbf{A}}(t)] = -i\dot{\tilde{\mathbf{A}}}(t), \quad (5.32)$$

de acuerdo con (5.27b). De hecho, son los únicos operadores de aniquilación que cumplen (5.32) y  $\tilde{\mathbf{A}}(t_0) = \mathbf{A}(t_0)$ . La unicidad es una consecuencia inmediata de (5.31) que implica

$$\tilde{\mathbf{A}}(t) = e^{i\mathcal{J}\Delta t} \mathbf{A}(t_0) e^{-i\mathcal{J}\Delta t} \quad (5.33)$$

cuando  $\Delta t = t - t_0$ . La relación (5.33) es un resultado notable por sí mismo que proporciona una expansión en potencias de  $\Delta t$  del operador “evolucionado”  $\mathcal{V}^\dagger \mathbf{A}(t) \mathcal{V}$ .

En el contexto del enfoque de historias consistentes, y para el caso particular de un oscilador armónico independiente del tiempo, se introdujo una acción análoga que cumple con la Ec. (5.33) en [87].

También observamos que para un operador periódico general (o bien comportado en el límite  $T \rightarrow \infty$ )  $\mathcal{U} = \exp\left[\int dt, \mathcal{M}(\mathbf{A}(t), \mathbf{A}^\dagger(t), t)\right]$ , la Ec. (5.24) produce

$$[\mathcal{P}_t, \mathcal{U}] = i \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}. \quad (5.34)$$

Para  $\mathcal{M}(\mathbf{A}(t), \mathbf{A}^\dagger(t))$  independiente del tiempo,  $[\mathcal{P}_t, \mathcal{U}] = 0$ . Si  $i\mathcal{M}(\mathbf{A}(t), \mathbf{A}^\dagger(t))$  también es hermitiano, esto implica  $\mathcal{U}^\dagger \mathcal{P}_t \mathcal{U} = \mathcal{P}_t$ , es decir,  $\mathcal{P}_t$  es invariante bajo *transformaciones canónicas* independientes del tiempo  $\mathbf{A}(t) \rightarrow \mathcal{U}^\dagger \mathbf{A}(t) \mathcal{U}$ . Esto significa que sin imponer condiciones iniciales, la forma diagonal (5.27a) no es única e implica

$$[\mathcal{U}, \int dt, \mathcal{H}(\mathbf{A}(t), \mathbf{A}^\dagger(t), t)] = 0 \Rightarrow [\mathcal{U}, \mathcal{J}] = 0. \quad (5.35)$$

En particular, una *simetría independiente del tiempo* de  $H$ ,  $[M(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger), H(t)] = 0$ , es una *simetría de  $\mathcal{J}$* :  $[\mathcal{U}, \mathcal{J}] = 0$ , para  $\epsilon \mathcal{M}(\mathbf{A}(t), \mathbf{A}^\dagger(t)) = M(\mathbf{A}_t, \mathbf{A}_t^\dagger)$ . Por otro lado, para  $H$  independiente del tiempo se sigue de la Ec. (5.24) que  $e^{i\mathcal{P}_t \Delta t}$  satisface la Ec. (5.35), es decir,  $\mathcal{J}$  es *invariante bajo traducciones en el tiempo* y por lo tanto  $[\mathcal{P}_t, \mathcal{J}] = 0$ .

Finalmente, es apropiado mencionar que ahora son posibles diferentes definiciones de localización temporal: Como ocurre con la localización espacial en las teorías cuánticas de campos (QFT) con importantes implicaciones en las relaciones de incertidumbre espacial [53, 88], la *localización temporal es ahora un aspecto emergente* de la “rejilla”. Diferentes definiciones de esta noción también implicarían diferentes *relaciones de incertidumbre energía-tiempo* de acuerdo con los operadores involucrados. Un ejemplo es proporcionado por el *operador de tiempo* de una sola partícula

(sp)  $\mathcal{T} := \int dt t \mathbf{A}^\dagger(t) \cdot \mathbf{A}(t)$  que se reduce en estados sp al operador de Page y Wootters (PW) [14] empleado en otros formalismos recientes con tiempo cuántico [1, 2, 29, 44, 79, 89-92]. En este caso, se puede demostrar que

$$[\mathcal{P}_t, \mathcal{T}] = i\mathcal{N}, \quad (5.36)$$

donde  $\mathcal{N} := \int dt \mathbf{A}^\dagger(t) \cdot \mathbf{A}(t) = \int d\omega \mathbf{A}^\dagger(\omega) \cdot \mathbf{A}(\omega)$  es el operador número (por ejemplo,  $\mathcal{N}(A_i^\dagger(t))^{n_i} |\Omega\rangle = n_i(A_i^\dagger(t))^{n_i} |\Omega\rangle$ ). Entonces  $\Delta\mathcal{T}\Delta\mathcal{P}_t \geq \frac{1}{2}|\langle\mathcal{N}\rangle|$  a través de la desigualdad de Cauchy–Schwarz en  $\mathcal{H}$ . A pesar de la importancia del par energía-tiempo en la MC [93], este tratamiento generalmente se evita por la imposibilidad de introducir un operador de tiempo en  $\mathfrak{H}$  [93-95].

### 5.2.3 El caso cuadrático

En lo siguiente, desarrollamos explícitamente el caso de teorías bosónicas cuadráticas como un ejemplo importante de (5.26). Para un Hamiltoniano cuadrático general <sup>6</sup>

$$H(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^\dagger & \mathbf{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0(t) & \gamma(t) \\ \gamma^*(t) & \omega_0^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\dagger \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}^\dagger K(t) \boldsymbol{\psi}$$

donde  $\omega_0$  ( $\gamma$ ) son matrices hermitianas (simétricas) y  $\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\dagger \end{pmatrix}$  satisface

$$\Pi = [\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}^\dagger] := \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\psi}^\dagger - ((\boldsymbol{\psi}^\dagger)^t \boldsymbol{\psi}^t)^t = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix},$$

la acción cuántica (5.26) se convierte en

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int dt [\boldsymbol{\Psi}^\dagger(t) \Pi i \dot{\boldsymbol{\Psi}}(t) - \boldsymbol{\Psi}^\dagger(t) K(t) \boldsymbol{\Psi}(t)], \quad (5.37)$$

con  $\boldsymbol{\Psi}(t) = (\mathbf{A}(t), \mathbf{A}^\dagger(t))^t$ ,  $[\boldsymbol{\Psi}(t), \boldsymbol{\Psi}^\dagger(t')] = \Pi \delta(t - t')$ . Se verifica primero que bajo cualquier transformación de Bogoliubov (BT) constante  $\boldsymbol{\Psi}(t) \rightarrow W_0 \boldsymbol{\Psi}(t)$ , donde  $W_0^\dagger \Pi W_0 = \Pi$  (transformación canónica lineal independiente del tiempo), la forma de  $\mathcal{J}$  se preserva (con  $K \rightarrow W_0^\dagger K W_0$ ). Se ve entonces que la forma diagonal (5.27a)

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int dt \tilde{\boldsymbol{\Psi}}^\dagger(t) \Pi i \dot{\tilde{\boldsymbol{\Psi}}}(t) = \frac{1}{2} \int d\omega \omega \tilde{\boldsymbol{\Psi}}^\dagger(\omega) \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(\omega), \quad (5.38)$$

puede lograrse aplicando en (5.37) una BT *diagonal en tiempo*

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = W(t) \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(t), \quad (5.39)$$

<sup>6</sup> Para  $q_i = (a_i + a_i^\dagger)/\sqrt{2}$ ,  $p_i = i(a_i^\dagger - a_i)/\sqrt{2}$ ,  $[q_i, p_j] = i\delta_{ij}$ ,  $H = \frac{1}{2} \sum_{i,j} t_{ij} p_i p_j + v_{ij} q_i q_j + u_{ij} (q_i p_j + p_j q_i)$  con  $t, v$  matrices simétricas, y las matrices  $t, v, u$  directamente relacionadas con  $\omega_0, \gamma$  [96].

donde  $W(t)$  satisface la ecuación de Heisenberg <sup>7</sup>

$$i\dot{W}(t) = \Pi K(t)W(t) \quad (5.40)$$

con  $W(t_0) = \mathbb{1}$  de modo que  $\tilde{\Psi}(t_0) = \Psi(t_0)$  (implicando  $W^\dagger(t)\Pi W(t) = \Pi \forall t$ ). Esto está de acuerdo con las Ecs. (5.28)–(5.29) ya que en el presente caso  $\mathcal{V} = \exp\left[\frac{i}{2} \int dt \Psi^\dagger(t)M(t)\Psi(t)\right]$  con  $e^{-i\Pi M(t)} = W(t)$ , y

$$\mathcal{V}^\dagger \Psi(t) \mathcal{V} = \tilde{\Psi}(t), \quad \mathcal{V}^\dagger \Psi(\omega) \mathcal{V} = \tilde{\Psi}(\omega) \quad (5.41)$$

son BTs equivalentes a (5.39).

Esta es la única solución que satisface la condición inicial  $\tilde{\mathbf{A}}(t_0) = \mathbf{A}(t_0)$ , como probamos en la Ec. (5.33).

## 5.3 Discusión

Vimos como la segunda cuantización de PW nos lleva directamente a definir un operador cuántico que corresponde clásicamente al concepto de acción en el espacio de fases (en las variables posición y momento). Notablemente, la parte de la acción que tiene la forma de la transformada de Legendre, es el generador de traslaciones temporales. Cabe diferenciar al mismo del Hamiltoniano: el operador  $\mathcal{P}_t$  traslada a lo largo de los espacio de Hilbert de tiempo y, en este sentido, su definición es geométrica no dinámica. Esto está asociado al hecho de que el tiempo, si bien es un parámetro clásico, tiene ahora el mismo significado que el espacio en teorías de campos: no es más que un índice que etiqueta el espacio de Hilbert en el que actúa un dado operador. Este es también el motivo principal por el cual podemos definir el operador acción en el espacio ampliado y no en el convencional: las acciones están “off-shell” esto es, los operadores que la definen no tienen relación alguna con el esquema de Heisenberg y de hecho son independientes para tiempos distintos. En la formulación usual, no es útil considerar por ejemplo una integral en tiempo del Hamiltoniano, pues operadores a tiempos distintos no son independientes.

En este capítulo se han estudiando distintas propiedades de las acciones cuánticas y aclarado el espacio de Hilbert en el que estas están definidas. Por otro lado, he dejado afuera las propuestas publicadas en [3] que involucran recuperar la evolución unitaria convencional. La principal razón para omitir esa discusión es que la

---

<sup>7</sup> Ahora asumimos que  $\Pi K(t)$  tiene valores propios reales, lo que está asegurado por  $K(t)$  definido positivo [96], para garantizar condiciones periódicas.

misma estaba principalmente fundamentada en intentar generalizar el concepto de subespacio físico del formalismo de PW. Si bien dicha generalización es en principio siempre posible, no resulta particularmente útil para teorías no cuadráticas. En cambio, en el siguiente capítulo se presenta un camino mucho más natural y relevante para nuestros propósitos para conectar el concepto de acción con la MC tradicional, y que permite recuperar la dinámica asociada a evoluciones unitarias.

# Integrales de Feynman a partir de acciones cuánticas

“There is a pleasure in recognizing old things from a new point of view.”

---

*Richard P. Feynman*

Es bien sabido que el concepto de acción clásica aparece en la MC a través de las integrales de Feynman. A diferencia de nuestras acciones cuánticas, en la formulación de Feynman la acción no está asociada a un observable. En cambio, las propiedades cuánticas aparecen como consecuencia de la “suma sobre historias” involucrada. En particular, esto significa que la acción necesita ser evaluada por fuera de las trayectorias que la extremizan, esto es de las trayectorias clásicas.

A priori, ninguno de estos conceptos parece relacionarse directamente con las ideas de PW y/o con nuestras acciones cuánticas. Notablemente, como probaremos en esta sección siguiendo [4] existe una clara conexión: el concepto de acción cuántica y los espacios de Hilbert extendidos proveen de un significado cuántico canónico (entiéndase como asociado a la matemática de la formulación canónica) a las integrales de Feynman.

## 6.1 Suma sobre historias como traza cuántica

### 6.1.1 “Time-slicing” en espacios de Hilbert

Comenzamos nuestra exposición considerando el ejemplo común de “path integrals” (PI) que describen una sola partícula en  $1d$ . Todas las ideas pueden generalizarse inmediatamente a sistemas bosónicos generales como señalamos a lo largo de la sección. En la sección 6.1.4 también comentamos cómo nuestro enfoque es más general

ya que se aplica a cualquier sistema mecánico cuántico, incluidos los de dimensión finita.

Un procedimiento estándar para obtener la formulación de Feynman a partir de la canónica es expresar el propagador como

$$\langle q' | e^{-iHT} | q \rangle = \int \prod_{t=1}^{N-1} dq_t \prod_{t=0}^{N-1} \langle q_{t+1} | e^{-iH\epsilon} | q_t \rangle \quad (6.1)$$

con  $H$  un Hamiltoniano independiente del tiempo,  $q_0 = q$ ,  $q_N = q'$ ,  $\epsilon = T/N$  y donde usamos  $\int dq |q\rangle\langle q| = \mathbb{1}$  (también fijamos  $\hbar = 1$ ). Cada término en el integrando puede entonces relacionarse con la exponencial de la acción hasta primer orden en  $\epsilon$ . Por otro lado, dado que el integrando es un producto de elementos de matriz de  $e^{-iH\epsilon}$ , tiene una representación natural en un nuevo espacio de Hilbert  $\mathcal{H} := \otimes_t \mathfrak{H}_t$  construido sobre el producto tensorial de  $N$  copias del convencional  $\mathfrak{H}$ , una para cada rebanada:

$$\prod_{t=0}^{N-1} \langle q_{t+1} | e^{-iH\epsilon} | q_t \rangle = \langle q_1 q_2 \dots q_N | \otimes_{t=0}^{N-1} e^{-iH\epsilon} | q_0 q_1 \dots q_{N-1} \rangle = \langle \mathbf{q}' | e^{i\mathcal{P}_t\epsilon} \otimes_{t=0}^{N-1} e^{-iH\epsilon} | \mathbf{q} \rangle \quad (6.2)$$

con  $|\mathbf{q}\rangle := |q_0 q_1 \dots q_{N-1}\rangle = \otimes_t |q_t\rangle$  una base de estados cuánticos a los que podemos referirnos como *estados de trayectoria cuántica*.

En la última igualdad hemos cambiado el orden de  $\langle q_1 \dots q_N |$  a  $\langle \mathbf{q}' | = \langle q_N q_1 \dots q_{N-1} |$  de modo que tanto el ket  $|q\rangle$  como el bra  $\langle q' |$  aparezcan en el Hilbert  $\mathfrak{H}_0$  (que puede identificarse con  $\mathfrak{H}_N$ ). Esto se implementó mediante la aplicación de un “operador de traslación temporal” unitario definido por

$$e^{i\mathcal{P}_t\epsilon} |q_1 q_2 \dots q_N\rangle := |q_N q_1 \dots q_{N-1}\rangle. \quad (6.3)$$

Este operador traslada “geométricamente” las diferentes rebanadas de tiempo del espacio de Hilbert, y no está relacionado con la información dinámica proporcionada por el Hamiltoniano. Como resultado, ha surgido naturalmente de la Ec. (6.2) el *operador cuántico* adimensional  $\mathcal{S}$  satisfaciendo

$$e^{i\mathcal{S}} := e^{i\mathcal{P}_t\epsilon} \otimes_{t=0}^{N-1} e^{-iH\epsilon}. \quad (6.4)$$

Es natural denominar  $\mathcal{S}$  como acción cuántica (AC): integrar (6.2) en las variables  $q_t$  produce (ver Ec. (6.1)) el resultado *exacto*

$$\langle q' | e^{-iHT} | q \rangle = \int \prod_{t=1}^{N-1} dq_t \langle \mathbf{q}' | e^{i\mathcal{S}} | \mathbf{q} \rangle \quad (6.5a)$$

$$= \text{Tr}_{\mathcal{H}} [e^{i\mathcal{S}} |q\rangle_0 \langle q'|] , \quad (6.5b)$$



donde  $\text{Tr}_{\mathcal{H}}$  denota la traza en el espacio de Hilbert extendido y  $|q\rangle_0\langle q'| = |q\rangle_0\langle q'| \otimes_{t \neq 0} \mathbb{1}_t$ . Vemos que la contribución de una sola trayectoria (discreta) es el elemento de matriz del operador  $e^{i\mathcal{S}}$  asociado con la trayectoria en cuestión. Así, los elementos de matriz de la AC están tomando el papel de la acción clásica en la formulación convencional de PI. Además, mientras la ecuación (6.5a) es una suma clásica sobre historias, representa una evaluación particular de la traza cuántica en (6.5b) que emplea la base de trayectoria cuántica  $|\mathbf{q}\rangle$ . Esto se puede ver insertando la relación de completitud  $\int \prod_{t=0}^{N-1} dq_t |\mathbf{q}\rangle\langle \mathbf{q}| = \mathbb{1}$  en (6.5b).

Para establecer un contacto directo con la formulación de Feynman, consideremos un Hamiltoniano estándar  $H = p^2/2m + V(q)$ . En este caso, el lado izquierdo en (6.5a) puede expresarse como el conocido PI de Feynman [12], implicando

$$\int_{\substack{q(T)=q' \\ q(0)=q}} \mathcal{D}q(t) e^{iS_{\text{cl}}} = \int \prod_{t=1}^{N-1} dq_t \langle \mathbf{q}' | e^{i\mathcal{S}} | \mathbf{q} \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{H}} [e^{i\mathcal{S}} |q\rangle_0 \langle q'|], \quad (6.6)$$

donde  $S_{\text{cl}}$  denota la acción clásica evaluada a lo largo de la trayectoria. Para un  $N$  grande, el integrando en (6.5a) debe entonces volverse proporcional a  $e^{iS_{\text{cl}}}$  con  $\prod_{t=1}^{N-1} dq_t \propto \mathcal{D}q(t)$ . Por otro lado, la Ec. (6.6) se sostiene exactamente  $\forall N \geq 2$  sin interpolación clásica entre  $q_t, q_{t+1}$ , lo que significa que en general los elementos de matriz de  $\mathcal{S}$  difieren de  $S_{\text{cl}}$ .

Para mostrar explícitamente la relación entre la AC y la clásica, notemos primero que la definición (6.3) implica

$$\langle \mathbf{q} | e^{i\mathcal{P}_t \epsilon} | \mathbf{p} \rangle = e^{i\epsilon \sum_t p_t \frac{(q_{t+1} - q_t)}{\epsilon}} \langle \mathbf{q} | \mathbf{p} \rangle, \quad (6.7)$$

donde  $q_N = q_0$ , lo que revela una clara conexión entre los elementos de matriz de  $\mathcal{P}_t$ , el generador de las traslaciones temporales, y una versión discreta de la transformada de *Legendre* clásica. Esto sigue directamente de la relación canónica  $\langle q | p \rangle = e^{ipq} / \sqrt{2\pi}$  aplicada aquí a  $|\mathbf{p}\rangle = \otimes_t |p_t\rangle$  y  $|\mathbf{q}\rangle$ , que produce  $\langle \mathbf{q} | \mathbf{p} \rangle = e^{i \sum_t p_t q_t} / (2\pi)^{N/2}$ . Note también que los estados  $|\mathbf{q}\rangle, |\mathbf{p}\rangle$  son autoestados de los operadores  $q_t, p_t$  actuando en  $\mathfrak{H}_t$  y globalmente satisfaciendo el álgebra “extendida” (pero canónica)  $[q_t, p_{t'}] = i\delta_{tt'}$  que puede usarse para definir  $\mathcal{H}$ .

Para una partícula libre con Hamiltoniano  $H = H(p)$  la ecuación (6.7) se generaliza exactamente a  $\langle \mathbf{q}' | e^{i\mathcal{S}} | \mathbf{p} \rangle = \exp\{i \sum_t \epsilon [p_t(q_{t+1} - q_t)/\epsilon - H(p_t)]\} \langle \mathbf{q}' | \mathbf{p} \rangle$ . En cambio, para  $H = p^2/2m + V(q)$  se puede usar una aproximación de Trotter de primer orden para obtener

$$\langle \mathbf{q}' | e^{i\mathcal{S}} | \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{q}' | e^{i\bar{\mathcal{S}}} | \mathbf{q} \rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (6.8)$$

donde hemos definido  $e^{i\bar{S}} := e^{i\mathcal{P}_t\epsilon} \otimes_t e^{-i(p_t^2/2m)\epsilon} e^{-iV(q_t)\epsilon}$ . Luego, usando la relación de completitud de  $\mathbf{p}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}' | e^{i\bar{S}} | \mathbf{q} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int \prod_{t=1}^{N-1} \frac{dp_t}{2\pi} \exp \left[ i\epsilon \sum_t (p_t \dot{q}_t - H(p_t, q_t)) \right] \Big|_{q_0=q}^{q_N=q'} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi i\epsilon/m})^N} \exp \left[ i\epsilon \sum_t \left( \frac{1}{2} m \dot{q}_t^2 - V(q_t) \right) \right] \Big|_{q_0=q}^{q_N=q'}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

donde hemos usado (6.7) y con  $\dot{q}_t := (q_{t+1} - q_t)/\epsilon$ . El resultado (6.8)-(6.9) es la relación anticipada entre los elementos de matriz de  $e^{iS}$  y la acción clásica. La ecuación (6.9) muestra que el PI de Feynman, rebanado en el tiempo, es igual a  $\text{Tr}_{\mathcal{H}} [e^{i\bar{S}} |q\rangle_0 \langle q'|]$ .

Destaquemos que los resultados anteriores son válidos para sistemas bosónicos generales, ya que su generalización se sigue directamente extendiendo las álgebras convencionales, es decir

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij} \longrightarrow [q_{ti}, p_{t'j}] = i\delta_{ij}\delta_{tt'} \quad (6.10)$$

para  $i, j$  números cuánticos arbitrarios. Por ejemplo, si  $i$  denota un índice espacial, el álgebra extendida es *simétrica en el espacio-tiempo* [3] (ver también sec. 6.2.3). El caso de Hamiltonianos dependientes del tiempo también es sencillo, y se sigue reemplazando en las Ecs. (6.2), (6.4)  $\otimes_t e^{-iH_t\epsilon} \rightarrow \otimes_t U[(t+1)\epsilon, t\epsilon]$  con las Ecs. (6.5, 6.9) manteniéndose. La consideración a intervalos de evolución  $T$  generales y/o propagadores que evolucionan un intervalo  $T' < T$  se discute en 6.1, mientras que los sistemas de dimensión finita se consideran en 6.1.4.

### 6.1.2 Funciones de correlación con orden temporal y térmicas

La formulación PI proporciona un enfoque geométrico elegante para manejar funciones de correlación que es simétrico en espacio y tiempo. Esto contrasta con el enfoque convencional del espacio de Hilbert: la formulación canónica define correladores especificando los valores de tiempo de operadores en la imagen de Heisenberg, mientras que la posición de operadores en el espacio suele asociarse con “sitios” (y por lo tanto con diferentes espacios de Hilbert). En cambio, la versión PI de los correladores solo implica la inserción de, por ejemplo, posiciones  $q$  en ciertos puntos del espacio-tiempo. En esta sección, mostramos cómo se puede desarrollar un tratamiento simétrico en el espacio-tiempo similar dentro del espacio de Hilbert extendido.

Consideremos el *producto tensorial de operadores de evolución temporal*

$$\mathcal{V}^\dagger := \otimes_{t=0}^{N-1} U_t(t\epsilon) = \hat{T}' \exp \left[ -i \sum_{t=0}^{N-1} \int_0^{t\epsilon} dt' H_t(t') \right], \quad (6.11)$$

que es separable en tiempo y unitario ( $\hat{T}'$  denota ordenación en el tiempo en la variable  $t'$ ). Su acción sobre un producto tensorial de operadores generales produce

$$\mathcal{V} (\otimes_t O^{(t)}) \mathcal{V}^\dagger = \otimes_t O_H^{(t)}(t) \quad (6.12)$$

con  $O_H^{(t)}(t)$  siendo el operador de Heisenberg evolucionado “ $t$ ” en el tiempo  $t$ . Note que el índice del sitio está dictando la cantidad de evolución.

Es notable que  $\mathcal{V}$  relaciona  $\mathcal{P}_t$  con  $\mathcal{S}$  de la siguiente manera (ver demostración en el Apéndice 6.2):

$$e^{i\mathcal{S}} = U_0(T) \mathcal{V}^\dagger e^{i\mathcal{P}_t \epsilon} \mathcal{V}. \quad (6.13)$$

Esta expresión se puede utilizar para relacionar operadores  $\mathcal{S}$  de diferentes teorías también. Para la evolución periódica  $U_0(T) = \mathbb{1}$  y se recupera la relación unitaria discutida en [3]. Además, (6.13) puede extenderse para considerar interacciones no separables en el tiempo definidas por acoplamientos entre diferentes rebanadas de tiempo, una posibilidad física que está más allá del alcance de la MC convencional.

El resultado (6.13) es particularmente útil porque permite la introducción de la evolución temporal a través de (6.12) en relaciones donde el operador de traslación temporal está involucrado. En particular, proporciona una expresión general para *funciones de correlación ordenadas en el tiempo*, como se muestra en el Apéndice 6.2. Para la partícula 1d de la sección 6.1.1, esto se lee:

$$\langle q', T | \hat{T} [q_{\mathbf{h}}(t_1) \dots q_{\mathbf{h}}(t_n)] | q \rangle = \int \prod_{t=1}^{N-1} dq_t q_{t_1} \dots q_{t_n} \langle \mathbf{q}' | e^{i\mathcal{S}} | \mathbf{q} \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{H}} [e^{i\mathcal{S}} (\otimes'_t q_t) | q \rangle_0 \langle q' |], \quad (6.14)$$

con  $|q, T\rangle = U^\dagger(T) |q\rangle$  y  $\otimes'_t$  indicando que solo se incluyen operadores en los tiempos  $t_1, \dots, t_n$  (e identidades de lo contrario) de modo que  $\otimes'_t \hat{q}_t | \mathbf{q} \rangle = q_{t_1} \dots q_{t_n} | \mathbf{q} \rangle$  (ver Fig. 6.1.1). La evolución del estado final  $\langle q' |$  surge del factor de borde  $U_0(T)$  en (6.13) mientras que el *ordenamiento temporal emerge* del ordenamiento de los sitios temporales. La traza espacio-temporal (6.14) generaliza la Ec. (6.5) y su forma refleja la expresión PI correspondiente. También comparte la misma interpretación geométrica del PI, ahora válida a nivel del espacio de Hilbert.

Ya que el resultado (6.13) es una consecuencia directa de (6.3), se sostiene para sistemas generales e incluso si  $\mathcal{V}$  no es unitario (con  $\mathcal{V}^\dagger \rightarrow \mathcal{V}^{-1}$ ), lo cual en particular

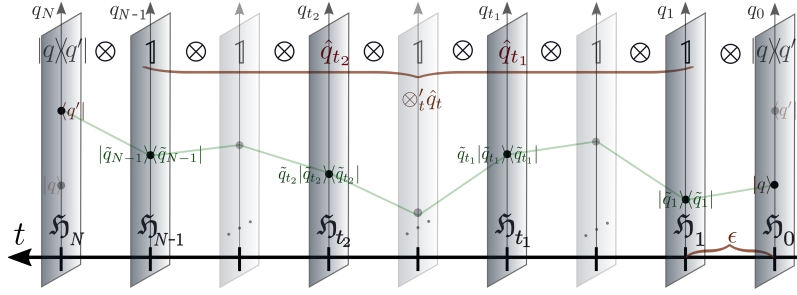


Figura 6.1.1: Representación pictórica de los operadores involucrados en la representación extendida de  $\langle q', T | \hat{T}[q_h(t_1)q_h(t_2)] | q \rangle$  para  $t_2 > t_1$ . Se ha “insertado” un operador apropiado en cada Hilbert  $\mathfrak{H}_t$ . También se muestra una contribución de una trayectoria discreta  $\tilde{q}(t)$  para enfatizar la similitud entre la interpretación usual y la construcción del espacio de Hilbert.

permite representar *funciones de partición* y *funciones de correlación térmicas*. Para obtener las primeras, notamos que la Ec. (6.5) implica, para un  $H$  general,

$$\text{Tr}_{\mathfrak{H}}[e^{-iHT}] = \text{Tr}_{\mathcal{H}}[e^{i\mathcal{S}}]. \quad (6.15)$$

Entonces, para  $-iHT \rightarrow -\beta H$  la ecuación (6.15) produce la *función de partición* de  $H$ . Además, utilizando las Ecs. (6.13) y (6.30), ahora obtenemos, estableciendo  $\langle \dots \rangle_{\beta} := \text{Tr}[e^{-\beta H} \dots] / \text{Tr}[e^{-\beta H}]$ ,

$$\langle \hat{T}_{\theta} q(\theta_1) \dots q(\theta_n) \rangle_{\beta} = \frac{\text{Tr}_{\mathcal{H}}[e^{i\mathcal{S}} \otimes_t q_t]}{\text{Tr}_{\mathcal{H}}[e^{i\mathcal{S}}]} \quad (6.16)$$

que es la *función de correlación termodinámica de estados térmicos*  $\propto e^{-\beta H}$ . (aquí,  $\theta = it$ ). Note que a diferencia de la Ec. (6.14) no estamos especificando ningún estado inicial (final) en la rebanada 0 ya que la información del estado térmico ya está codificada dentro de  $e^{i\mathcal{S}}$  con  $U_0(T) \rightarrow e^{-\beta H}$ ,  $\mathcal{V}^{\dagger} \rightarrow \mathcal{V}^{-1}$  en la Ec. (6.13). De hecho, la linealidad y generalidad de las expresiones de la traza implican (ver también 6.1.4) que el estado térmico en sí mismo se puede obtener como una traza parcial (sobre todos los modos excepto aquellos en  $t = 0$ ) del exponencial del operador de acción cuántica <sup>1</sup>:

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr}_{\mathfrak{H}}[e^{-\beta H}]} = \frac{\text{Tr}_{t \neq 0}[e^{i\mathcal{S}}]}{\text{Tr}_{\mathcal{H}}[e^{i\mathcal{S}}]}. \quad (6.17)$$

La extensión al caso de números cuánticos adicionales  $q \rightarrow q_i$ ,  $p \rightarrow p_i$  es directa y simétrica en espacio y tiempo (las variables extendidas son  $q_{ti}, p_{tj}$  según (6.10)). De hecho, remarquemos que cuando se consideran correladores de igual tiempo, por ejemplo, de dos puntos, se sostiene lo siguiente:

$$\langle q_i q_j \rangle_{\beta} = \langle q_{0i} q_{0j} \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \langle p_i p_j \rangle_{\beta} = \langle p_{0i} p_{0j} \rangle_{\mathcal{H}} \quad (6.18)$$

<sup>1</sup>Note que la rotación de Wick no afecta a  $e^{i\mathcal{P}_t \epsilon}$ , tal que  $e^{i\mathcal{S}} = e^{i\mathcal{P}_t \epsilon} \otimes_t e^{-H\epsilon}$  en (6.16)-(6.17), con  $\epsilon = \beta/N$ .

donde  $\langle \dots \rangle_{\mathcal{H}} := \text{Tr}[e^{i\mathcal{S}} \dots] / \text{Tr}[e^{i\mathcal{S}}]$  en acuerdo con (6.17). En este caso, tanto el lado izquierdo como el lado derecho son correladores en el sentido tradicional, como los que definen el entrelazamiento espacial. En cambio, cuando consideramos operadores en diferentes tiempos, las expresiones se convierten en

$$\langle \hat{T}_\theta q_i(\theta_1) q_j(\theta_n) \rangle_\beta = \langle q_{t_1 i} q_{t_2 j} \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \langle \hat{T}_\theta p_i(\theta_1) p_j(\theta_n) \rangle_\beta = \langle p_{t_1 i} p_{t_2 j} \rangle_{\mathcal{H}}, \quad (6.19)$$

lo que, desde la perspectiva convencional (lado izquierdo), ya no son correladores genuinos (por ejemplo, el producto de operadores en general se vuelve no hermítico, incluso para tiempo real). De manera notable, desde la perspectiva de  $\mathcal{H}$  (el lado derecho), nada ha cambiado y estos valores medios siguen siendo correladores “atemporales” de operadores hermíticos. Esto demuestra que la información sobre si una separación entre operadores es espacial o temporal está contenida en la AC misma.

Note también que el estado reducido  $\rho_V := \text{Tr}_{\bar{V}}[\rho]$  donde la traza parcial es sobre modos fuera de una región  $V$  ahora puede recuperarse de

$$\rho_V = \frac{\text{Tr}_{t \neq 0, \bar{V}}[e^{i\mathcal{S}}]}{\text{Tr}_{\mathcal{H}}[e^{i\mathcal{S}}]} \quad (6.20)$$

lo cual es una traza parcial en el espacio-tiempo *fuera de la región de interés en el espacio-tiempo*. Para acciones cuadráticas, este resultado se sigue de los correladores previos solos. Como novedad, el formalismo permite considerar trazas parciales *sobre regiones generales del espacio-tiempo*. En principio, solo aquellas asociadas con hipersuperficies espaciales corresponderían a estados cuánticos convencionales y entropías reales, pero la traza parcial está bien definida en general. Curiosamente, investigaciones recientes [97, 98] sobre las conexiones entre el entrelazamiento temporal y la geometría en el contexto de la correspondencia dS/CFT utilizan matrices de densidad reducidas no hermíticas (en el espacio de Hilbert convencional  $\mathfrak{H}$ ) y “entropías” de entrelazamiento complejas (esencialmente ya que una “distancia” temporal es imaginaria).

### 6.1.3 Bases extendidas y distintas representaciones de Integrales de camino

Dado que las Ecs. (6.5b)–(6.6) y (6.14)–(6.16) se expresan en términos de trazas, diferentes bases del presente  $\mathcal{H}$  extendido, ahora pueden ser empleadas para calcularlas. Estas diferentes bases están formadas por un conjunto completo de estados extendidos, es decir, estados en  $\mathcal{H} = \otimes_t \mathfrak{H}_t$ . Incluyen bases separables en el tiempo, como la formada por los estados  $|\mathbf{q}\rangle$  empleados en la sección 6.1.1 (que genera el

usual “PI del espacio de configuración”), así como, por supuesto, bases *entrelazadas en el tiempo*, formadas por combinaciones lineales irreducibles de estados producto.

Ahora es conveniente definir operadores de aniquilación (y creación) en el sitio temporal  $t$ ,

$$A_t := e^{i\phi}(\eta q_t + ip_t/\eta)/\sqrt{2} \quad (6.21)$$

para  $\eta, \phi \in \mathbb{R}$  constantes, satisfaciendo  $[A_t, A_{t'}^\dagger] = \delta_{tt'}$ . Denominaremos su vacío como  $|\Omega\rangle = \otimes_t |0_t\rangle$ , que es un estado de trayectoria separable en el tiempo. Los estados extendidos generales se obtienen así por la aplicación de operadores de creación sobre el vacío. En particular, para  $\eta \equiv e^{i\phi} \equiv 1$ ,  $|\mathbf{q}\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_t A_t^\dagger (A_t^\dagger - 2\sqrt{2}q_t)\right] |\Omega\rangle$  [3], mostrando nuevamente que las trayectorias cuánticas son estados extendidos particulares (y separables).

También podemos emplear una base separable de “estados coherentes de trayectoria”

$$|\boldsymbol{\alpha}\rangle := \exp\left\{\left[\sum_t \alpha_t A_t^\dagger\right]\right\} |\Omega\rangle = \otimes_t |\alpha_t\rangle_t \quad (6.22)$$

para  $|\alpha\rangle_t$  un estado coherente convencional (no normalizado) en  $\mathfrak{H}_t$  tal que

$$\int \prod_t \frac{d^2\alpha_t}{\pi} e^{-\sum_t |\alpha_t|^2} |\boldsymbol{\alpha}\rangle \langle \boldsymbol{\alpha}| = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$$

y  $A_t |\boldsymbol{\alpha}\rangle = \alpha_t |\boldsymbol{\alpha}\rangle$ . La integral resultante puede relacionarse fácilmente con *PI de estados coherentes discretizados* (CSPI) bajo la aproximación usual de  $\epsilon$  pequeño  $\langle \alpha | e^{-i\epsilon H(a, a^\dagger)} | \alpha \rangle \approx e^{-i\epsilon H_N(\alpha, \alpha^*)}$  para  $H = H_N$  con  $H_N =: H_N$  : ordenado normalmente. De hecho,

$$\frac{\langle \boldsymbol{\alpha} | e^{i\mathcal{S}} | \boldsymbol{\alpha} \rangle}{\langle \boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{\alpha} \rangle} \approx \exp\left[i\epsilon \sum_t \left(\frac{\alpha_{t+1}^* - \alpha_t^*}{\epsilon} \alpha_t - H_N(\alpha_t, \alpha_{t+1}^*)\right)\right] = e^{iS_{\text{cl}}}, \quad (6.23)$$

donde  $S_{\text{cl}}$  es la acción clásica (en rebanadas de tiempo) para  $H_N$  a lo largo de la trayectoria definida por  $|\boldsymbol{\alpha}\rangle$ .

Por otro lado, la acción no separable del operador de traslación temporal sugiere la introducción de nuevas *bases no locales en el tiempo*: definimos a través de la Transformada de Fourier (FT) los operadores

$$A_n := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_t e^{i\omega_n t \epsilon} A_t \quad (6.24)$$

con  $\omega_n = 2\pi n/T$  para  $n \in \mathbb{Z}$ , y un “vacío extendido”  $|\Omega\rangle$  definido por  $A_n |\Omega\rangle = A_t |\Omega\rangle = 0$ . Por lo tanto, podemos escribir [3]

$$e^{i\mathcal{P}_t \epsilon} = e^{i\epsilon \sum_n \omega_n A_n^\dagger A_n}, \quad (6.25)$$

que claramente satisface  $e^{i\mathcal{P}_t\epsilon}O_te^{-i\mathcal{P}_t\epsilon} = O_{t+1}$  para  $O_t = A_t$ , y por lo tanto también para cualquier operador local en el tiempo como  $q_t$  y  $p_t$ . Esta forma normal de  $e^{i\mathcal{P}_t\epsilon}$  es invariante bajo transformaciones canónicas independientes del tiempo [3] (y por lo tanto independiente del parámetro  $\eta$  en  $A_t$ ). Y para  $\omega_n, \omega_{-n}$  tomando valores simétricos alrededor de 0, la condición  $[\mathcal{P}_t, \sum_t H_t] = 0$  (y la invarianza de la forma normal de  $\mathcal{P}_t$ ) también se verifica.

El mismo estado coherente (6.22) puede reescribirse en la base de Fourier como  $|\boldsymbol{\alpha}\rangle = e^{\sum_n \alpha_n A_n^\dagger} |\Omega\rangle$  para  $\alpha_n := \sum_t e^{i\omega_n t\epsilon} \alpha_t / \sqrt{N}$ . Si usamos la Ec. (6.25) y evaluamos la traza (6.15) en esta base, se obtiene la expansión tipo Matsubara del PI de estado coherente [99] (las frecuencias  $\omega_n$  en  $\mathcal{P}_t$  son precisamente las frecuencias de Matsubara). Dado que los CSPI aquí surgen de las bases (6.22), vemos que las *expansiones tipo Matsubara* en el espacio de funciones clásicas *corresponden a un cambio de base no local en el tiempo* en  $\mathcal{H}$ .

Los modos de Fourier también proporcionan una expansión diferente para las AC. En particular, para un oscilador armónico de masa  $m$  y frecuencia  $\omega$ ,

$$H_t = \frac{p_t^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q_t^2 = \omega \left( A_t^\dagger A_t + \frac{1}{2} \right),$$

permiten una evaluación directa de la traza en la base de los autoestados de  $\mathcal{S}$ : usando  $\sum_t A_t^\dagger A_t = \sum_n A_n^\dagger A_n$  (y  $\eta = \sqrt{m\omega}$ ) podemos escribir directamente el operador AC en la forma normal

$$\mathcal{S} = \epsilon \sum_n [(\omega_n - \omega) A_n^\dagger A_n - \omega/2]. \quad (6.26)$$

Vemos que la AC es diagonal en la base *no local en el tiempo*  $|\tilde{\mathbf{n}}\rangle = \prod_n [(A_n^\dagger)^{\tilde{n}_n} / \sqrt{\tilde{n}_n!}] |\Omega\rangle$  que satisface  $A_n^\dagger A_n |\tilde{\mathbf{n}}\rangle = \tilde{n}_n |\tilde{\mathbf{n}}\rangle$ . Al usar esta base de Fock para calcular la traza obtenemos

$$\text{Tr } e^{i\mathcal{S}} = \sum_{\tilde{\mathbf{n}}} \langle \tilde{\mathbf{n}} | e^{i\mathcal{S}} | \tilde{\mathbf{n}} \rangle = e^{-i\omega T/2} \prod_n \frac{1}{1 - e^{i\epsilon(\omega_n - \omega)}} = \frac{1}{2i \sin(\omega T/2)}. \quad (6.27)$$

Uno reconoce inmediatamente la “función de partición” del oscilador armónico, en concordancia con la Ec. (6.15) (ver la prueba de (6.27) en el Apéndice 6.3).

Por otro lado, dado que la AC es un operador cuadrático bosónico, se sostiene que

$$\text{Tr } e^{i\mathcal{S}} = e^{-i\omega T \det^{-1}[\mathbb{1} - e^{iS}]}, \quad (6.28)$$

donde la matriz  $S$  está definida por

$$[\mathcal{S}, A_t^\dagger] = \sum_{t'} S_{t't} A_{t'}^\dagger. \quad (6.29)$$

Esto permite escribir la AC como  $\mathcal{S} = \sum_{t',t} A_{t'}^\dagger S_{t't} A_t$ , que, cuando lo comparamos con (6.26), produce

$$S_{t't} = \frac{\epsilon}{N} \sum_n (\omega_n - \omega) e^{i\omega_n \epsilon(t-t')} = \epsilon \left( i \frac{d}{dt'} - \omega \right) \delta_{tt'}.$$

Entonces, es claro que el producto en la Ec. (6.27) es el determinante en la Ec. (6.28), con  $\epsilon(\omega_n - \omega)$  los autovalores de la matriz  $S$ . Un procedimiento similar se puede emplear en (6.5) para calcular propagadores, por ejemplo,  $\langle 0, T | 0 \rangle = e^{-i\omega T/2} \det[\bar{M}]^{-1}$  con  $\bar{M}$  la matriz obtenida al remover la primera columna y fila de  $M = \mathbb{1} - e^{iS}$ .

Como ejemplo final, al cambiar de la base de trayectoria de estados  $|\mathbf{q}\rangle$  a una base de Fourier  $|\tilde{\mathbf{q}}\rangle$ , donde  $\tilde{q}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_t e^{i\omega_n t \epsilon} q_t = \tilde{q}_{-n}^\dagger$ , obtenemos el útil PI sobre coeficientes de Fourier  $\tilde{q}_n$  [99, 100]. Escenarios más complicados y ricos pueden ser considerados, como sugieren interacciones más complicadas.

#### 6.1.4 Sistemas generales y consideraciones computacionales cuánticas

Con respecto a los sistemas cuánticos generales, la aplicación de las ideas principales es directa y no necesariamente relacionada con los PIs: la idea clave es que hay una conexión natural entre el producto interno en un espacio de Hilbert convencional  $\mathfrak{H}$  y el producto interno en  $\mathcal{H} = \mathfrak{H}^{\otimes N}$ . En completa generalidad, puede expresarse para de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathfrak{H}} [O^{(N-1)} \dots O^{(0)} |i\rangle \langle i'|] &= \langle i' | O^{(N-1)} \dots O^{(0)} |i\rangle = \sum_{i_1, \dots, i_{N-1}} \prod_t \langle i_{t+1} | O^{(t)} | i_t \rangle \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}} [e^{i\mathcal{P}_t \epsilon} \otimes_t O^{(t)} |i\rangle_0 \langle i'|] \end{aligned} \quad (6.30)$$

para  $\sum_i |i\rangle \langle i| = \mathbb{1}$  una base completa general y  $e^{i\epsilon \mathcal{P}_t} |i_0 i_1 \dots i_{N-1}\rangle = |i_{N-1} i_0 i_1 \dots\rangle$ . Por ejemplo, en el caso más básico,

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}} [e^{i\mathcal{P}_t \epsilon} (|i\rangle \langle i'| \otimes \mathbb{1})] = \text{Tr}_{\mathcal{H}} \sum_j e^{i\mathcal{P}_t \epsilon} |ij\rangle \langle i'j| = \sum_j \langle i'j | ji \rangle = \sum_j \langle i' | j \rangle \langle j | i \rangle = \langle i' | i \rangle,$$

lo que muestra claramente la coincidencia de la traza en  $\mathcal{H} = \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$  con la suma de Feynman sobre una amplitud intermedia [12]. Es interesante notar que para estos “dos cortes” el trabajo anterior funciona esencialmente como la prueba SWAP [101]. También podemos entender el caso general como una generalización de esta prueba, con el generador de traslaciones temporales construido a partir de la composición de operadores SWAP. Esto tiene una elegante representación diagramática en el lenguaje de redes tensoriales como se muestra en la figura 6.1.2.



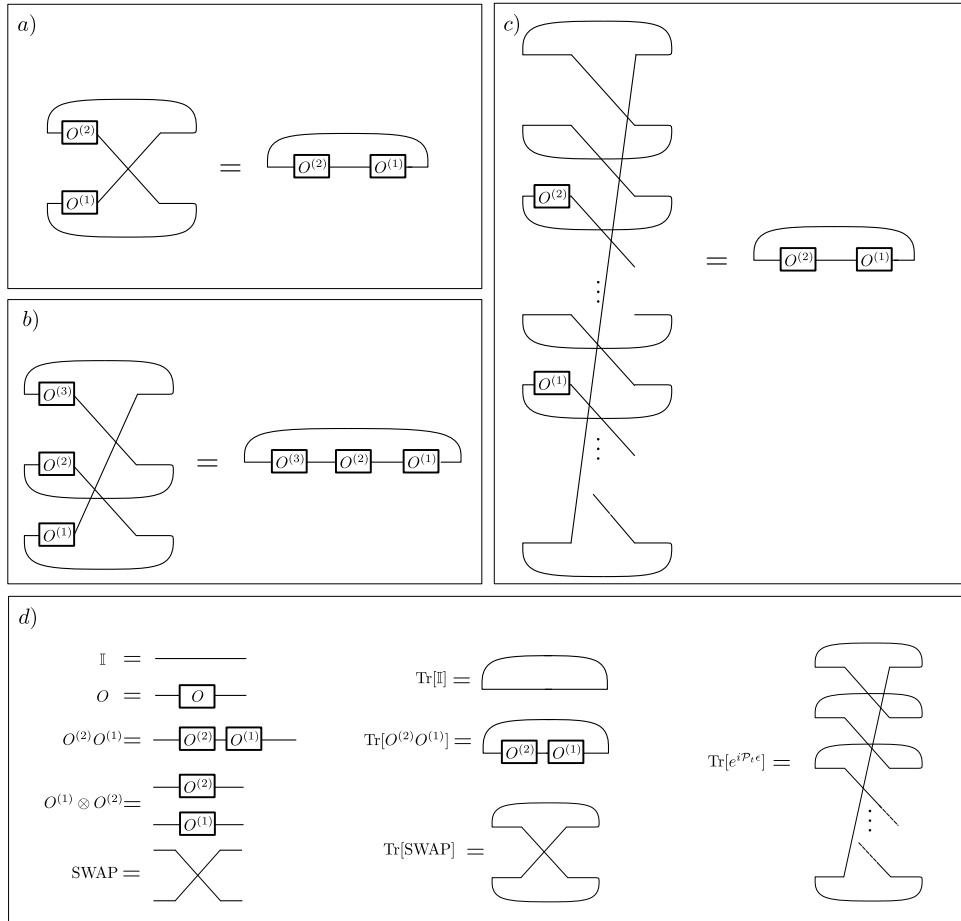


Figura 6.1.2: **Representación diagramática del mapa que conecta trazas en la versión extendida de la Mecánica Cuántica con las convencionales.** El mapa que conecta trazas de operadores dentro de  $\mathcal{H} = \otimes_t \mathfrak{h}_t$  con trazas de operadores en  $\mathfrak{h}$  se representa aquí en notación de red tensorial (las convenciones se muestran en d)). En a) mostramos esencialmente una prueba SWAP. En b) una generalización de dos a tres “cortes”. En cambio, en c) mostramos el ejemplo de una función de correlación de dos puntos, como la trata el formalismo. Es interesante notar que las muchas sumas en el lado izquierdo del diagrama, representadas por las líneas en cada fila vertical (correspondiendo cada una a una rebanada de tiempo diferente), son precisamente la suma sobre historias. También se observa que la expansión diagramática muestra que  $e^{i\mathcal{P}_t\epsilon}$  puede representarse como la composición de muchos SWAPs.

Aunque no exista una noción clásica de trayectoria, aún podemos asociar el índice  $t$  con cortes de tiempo y referirnos a los estados  $|\mathbf{i}\rangle := \otimes_t |i_t\rangle$  como trayectorias cuánticas en analogía con  $|\mathbf{q}\rangle$  (cuando se consideran operadores evolucionados en el tiempo en el lado izquierdo también surgirá un orden temporal). En otras palabras, siempre podemos establecer un *mapa* entre una versión de la Mecánica Cuántica que aplica una estructura de producto tensorial en el tiempo y la formulación convencional. Esta conexión también se empleó en [102] para investigar teoremas relacionados con funcionales de decoherencia [103, 104] dentro de espacios de Hilbert “duplicados” de la forma  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$  (nos interesamos en  $\mathcal{H}$  en sí y en los PIs).

Una consecuencia básica de la Ec. (6.30) y la linealidad de la traza es una expresión para *valores medios*:

$$\text{Tr}[O^{(1)}O^{(2)}\dots\rho] = \text{Tr}[e^{i\mathcal{P}_t\epsilon}(\otimes_t O^{(t)})\rho^{(0)}] \quad (6.31)$$

para  $\rho$  una matriz de densidad general en  $\mathfrak{H}$  y  $\rho^{(0)}$  el mismo operador actuando en el corte inicial de  $\mathcal{H}$ . Además, la definición estándar de la traza parcial (6.30) implica

$$O^{(1)}O^{(2)}\dots = \text{Tr}_{t \neq 0}[e^{i\mathcal{P}_t\epsilon} \otimes_t O^{(t)}] \quad (6.32)$$

lo que da lugar en particular a una “traza parcial en el tiempo” para estados:

$$\rho = \text{Tr}_{t \neq 0}[e^{i\mathcal{P}_t\epsilon} \rho^{(0)}]. \quad (6.33)$$

En cambio, para  $O^{(t)} = e^{-iH\epsilon}$  obtenemos una expresión para el operador de evolución temporal:  $e^{-iHT} = \text{Tr}_{t \neq 0}[e^{i\mathcal{S}}]$ .

Dado que los productos tensoriales son una característica básica subyacente en la computación cuántica [105], la capacidad de describir propiedades temporales y térmicas mediante un “time-slicing en espacios de Hilbert” es un hecho computacional interesante en sí mismo. Además, dado que los principales resultados se expresan en términos de trazas de operadores, submodelos de computación cuántica que emplean el poder de un qubit [106, 107] (ver Fig. 2, arriba) se pueden aplicar al espacio extendido. Como ejemplo, mostramos en la Fig. 2 (abajo) un circuito que calcula el l. i. de la Ec. (6.31) para operadores unitarios  $O^{(i)}$ , a través de la “suma sobre historias” implícita en el lado derecho. Estas herramientas también podrían ser útiles para expandir las discusiones sobre la conexión entre la dinámica de circuitos cuánticos y los integrales de trayectoria [108].

Las expresiones anteriores se aplican directamente tanto a sistemas finitos distinguibles como a sistemas bosónicos. La extensión natural del formalismo a fermiones



## 6.2 Formalismo con tiempo continuo

### 6.2.1 Formalismo y límite de $\tau$ chico

Ahora consideraremos la generalización al continuo de las ideas previas. Por simplicidad, comenzamos la discusión volviendo al caso de una partícula en  $1d$ .

Necesitamos generalizar tanto los operadores como relaciones como (6.15). En el primer caso, el límite continuo debe obtenerse por medios estándar pero aplicado a operadores extendidos: definimos <sup>2</sup>  $q(t) := q_t/\sqrt{\epsilon}$ ,  $p(t) := p_t/\sqrt{\epsilon}$  de tal modo que en el límite  $\epsilon \rightarrow 0^+$

$$[q(t), p(t')] = i\delta(t - t'). \quad (6.34)$$

De manera similar,  $A(t) = A_t/\sqrt{\epsilon}$  implicando  $[A(t), A^\dagger(t')] \rightarrow \delta(t - t')$ . Bajo este límite, el generador de traslaciones temporales está explícitamente relacionado con la *transformada de Legendre*:

$$\mathcal{P}_t = \int dt A^\dagger(t) i\dot{A}(t) = \frac{1}{2} \int dt [p(t)\dot{q}(t) - q(t)\dot{p}(t)] \quad (6.35)$$

con  $\dot{A}(t) = \sum_n \omega_n e^{-i\omega_n t} A_n/\sqrt{T}$  y  $dt \equiv \epsilon$  [3]. Esto es una consecuencia directa de la Ec. (6.25). Notamos que (6.35) es equivalente a  $\int dt p(t)\dot{q}(t)$ .

Por otro lado, la generalización al continuo del “mapa” que conecta los productos internos de  $\mathfrak{H}$  y  $\mathcal{H}$  (ver, por ejemplo, Ecs. (6.15-6.16)) no es trivial: mientras que el generador de traslaciones temporales tiene un límite adecuado, el concepto de trasladar un paso de tiempo ya no tiene sentido. Sin embargo, si introducimos una escala de tiempo arbitraria  $\tau$ , el operador apropiado que traslada una cantidad  $\tau$ , está bien definido como  $e^{i\mathcal{P}_t\tau}$  y satisface  $e^{i\mathcal{P}_t\tau} A(t) e^{-i\mathcal{P}_t\tau} = A(t + \tau)$ .

Análogamente, podemos definir una AC

$$\mathcal{S}_\tau := \tau \int dt \left[ p(t)\dot{q}(t) - \frac{p^2(t)}{2m} - \mathcal{V}(q(t)) \right], \quad (6.36)$$

con  $\mathcal{V}(q(t)) := \tau^{-1}V(q(t)\sqrt{\tau})$  de modo que para  $V(q)$  admitiendo una serie de potencias,  $\mathcal{S}_\tau$  es al menos de orden  $\sqrt{\tau}$  (hasta una constante). Por ejemplo, para un oscilador armónico (por el momento con energía del punto cero nula)  $\mathcal{S}_\tau = \tau \int dt [A^\dagger(t)(i\partial_t - \omega)A(t)]$ , un operador que comparte algunas similitudes (sin la escala de tiempo  $\tau$ ) con el propuesto en [87] en el contexto del enfoque de Isham [110] para la formulación de historias continuas de la Mecánica Cuántica [103, 104].

<sup>2</sup>Por conveniencia de notación, estamos usando la misma variable  $t$  en el caso continuo para indicar la cantidad que en el discreto corresponde a  $\epsilon t$  para  $t$  el índice discreto adimensional.

A priori, no es evidente que las definiciones anteriores sean útiles. Sin embargo, al menos heurísticamente (una discusión más rigurosa se proporciona a continuación y en la siguiente subsección) podemos usar estas ideas para recuperar PIs en analogía con el caso discreto: usando la base de estados coherentes, escribimos  $\text{Tr}[e^{i\mathcal{S}_\tau}] = \int \mathcal{D}^2\alpha(t) e^{-\int dt |\alpha(t)|^2} \langle \alpha(t) | e^{i\mathcal{S}_\tau} | \alpha(t) \rangle$ , con

$$|\alpha(t)\rangle = \exp \left[ \int dt \alpha(t) A^\dagger(t) \right] |\Omega\rangle \quad (6.37)$$

el límite continuo del estado (6.22) con  $\alpha(t) \approx \alpha_t/\sqrt{\epsilon}$ . Para el oscilador armónico, el primer orden en una expansión formal en potencias de  $\tau$  produce

$$\text{Tr} e^{i\mathcal{S}_\tau} \approx \int \mathcal{D}^2\alpha(t) e^{i\tau \int dt [\alpha^*(t)(i\partial_t - \omega)\alpha(t)]} = \det^{-1}[-i\tau(i\partial_t - \omega)], \quad (6.38)$$

donde usamos  $\langle \alpha(t) | e^{i\mathcal{S}_\tau} | \alpha(t) \rangle = \langle \alpha(t) | e^{i\omega\tau} \alpha(t + \tau) \rangle$ . Esto es precisamente lo que se obtiene a través del CSPI convencional si se elige  $\tau$  de tal manera que  $\mathcal{D}_F^2\alpha(t) \equiv \mathcal{D}^2[\alpha(t)/\sqrt{\tau}]$ , con  $\mathcal{D}_F^2\alpha(t)$  la “medida de Feynman”. Este argumento se extiende a otras bases y expone un enfoque simple para teorías generales: en una formulación continua, después de que cálculos como (6.38) se han realizado, la identificación anterior produce a las PI convencionales bajo cambios de variables como  $\sqrt{\tau}\alpha(t) \rightarrow \alpha(t)$ . Desde este punto de vista,  $\det[i\tau\mathbb{1}]$  es la constante convencionalmente codificada en la medida que “regulariza” el determinante funcional divergente (6.38).

También se nota que la Ec. (6.38) es el límite formal de pequeño  $\tau$  de la Ec. (6.28) y estamos esencialmente calculando el determinante de la “matriz”  $S$  (con  $\epsilon \rightarrow \tau$ ) en la Ec. (6.29), ahora el operador diferencial definido por

$$[\mathcal{S}_\tau, A^\dagger(t)] = -i\tau(i\partial_t - \omega)A^\dagger(t). \quad (6.39)$$

El formalismo introduce naturalmente este operador diferencial como una transformación lineal entre operadores *extendidos*  $A(t)$ , sin referencia a un espacio de funciones clásicas (que surge en algunas evaluaciones particulares de la traza). Además, órdenes superiores en  $\tau$  corrigen los problemas [111, 112] asociados con la energía del vacío en CSPIs (continuos).

Desde una perspectiva más rigurosa, también podemos evaluar la traza anterior en la base de Fourier en cuyo caso se sostiene la Ec. (6.26) (con  $\epsilon \rightarrow \tau$ ). Entonces, en completa analogía con el caso discreto (Ec. (6.27)), la traza se relaciona con un determinante, que puede hacerse fácilmente finito: bajo la ligera modificación del operador

$$\mathcal{S}_\tau = \tau \sum n(\omega_n - \omega + i\tilde{\epsilon}\omega_n^2) A_n^\dagger A_n, \quad (6.40)$$

$\text{Tr}[e^{i\mathcal{S}_\tau}]$  se convierte en un determinante *finito* para  $\tau\tilde{\epsilon} > 0$ , abriendo interesantes perspectivas matemáticas (también podemos establecer  $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(\tau)$ , ver 6.3 y la conjetura allí). En lo siguiente omitimos el nuevo término pero, donde sea necesario, puede restaurarse fácilmente sin comprometer los resultados principales.

### 6.2.2 Funcionales generadores e invariancia- $\tau$

Es bastante notable que el operador  $\mathcal{S}_\tau$  tenga importantes propiedades de  $\tau$ -invariancia, las cuales permiten una definición y evaluación simples de funcionales generadores, válidos para  $\tau$  finito. Ahora lo demostraremos en un ejemplo claro empleando exclusivamente propiedades de operadores y trazas en el espacio de Hilbert: no es necesaria ninguna definición matemática sutil de medidas de dimensión infinita. Sin embargo, tanto la simplicidad que caracteriza a los PIs como la conexión familiar con la física clásica pueden recuperarse en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Considere el operador AC  $\mathcal{S}_\tau[j]$ , que es una función de una corriente  $j(t)$  que aparece en la energía potencial  $V(q) = m\omega^2 q^2/2 - \sqrt{m}j(t)q$ . Podemos expandirlo como

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\tau[j] &= \tau \int dt \left[ A^\dagger(t)(i\partial_t - \omega)A(t) + \sqrt{\frac{m}{\tau}}j(t)q(t) \right] \\ &= \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ (\omega_n - \omega)A_n^\dagger A_n + \frac{j_{-n}}{\sqrt{2\omega\tau}}A_n + \frac{j_n}{\sqrt{2\omega\tau}}A_n^\dagger \right].\end{aligned}\quad (6.41)$$

donde empleamos los modos de Fourier no locales en el tiempo  $A_n$  y definimos  $j_n := \int dt e^{i\omega_n t} j(t)/\sqrt{T}$ , los coeficientes de Fourier de la corriente fuente  $j(t)$ . La representación  $n$  revela inmediatamente una importante *relación unitaria* entre acciones cuánticas con y sin fuente:

$$\mathcal{S}_\tau[j] = \mathcal{U}^\dagger (\mathcal{S}_\tau[0] + \mathbb{1} S_{\text{cl}}^*[j]) \mathcal{U}, \quad \text{para } \mathcal{U}^\dagger A_n \mathcal{U} = A_n + \frac{j_n}{\sqrt{2\omega\tau}(\omega_n - \omega)} \quad (6.42)$$

con

$$S_{\text{cl}}^*[j] = - \sum_n \frac{|j_n|^2}{2\omega(\omega_n - \omega)} = \frac{i}{2} \int dt dt' j(t') G(t - t') j(t), \quad (6.43)$$

la *acción clásica* (no un operador) evaluada en la solución clásica. Aquí  $G(t - t')$  es la función de Green del operador diferencial  $(\partial_t^2 + \omega^2)$  cuya expansión de Fourier

$$G(t - t') = i \sum_n \frac{e^{-i\omega_n(t-t')}}{T(\omega_n^2 - \omega^2)},$$

aparece naturalmente en (6.42) empleando (6.41) y la relación  $(\omega_n - \omega)^{-1} - (\omega_n + \omega)^{-1} = 2\omega(\omega_n^2 - \omega^2)^{-1}$  (asumimos como de costumbre sin caústicas). Este resultado

también puede verse notando que la acción clásica a lo largo de una trayectoria arbitraria está relacionada con el promedio  $\langle \alpha(t) | \mathcal{S}_\tau[j] | \alpha(t) \rangle$  de la acción cuántica en el estado coherente de la trayectoria correspondiente (ver Apéndice 6.4 para detalles).

Ahora definimos el funcional generador para esta teoría y  $\tau$  arbitrario como

$$Z_\tau[j] := \text{Tr}[e^{i\mathcal{S}_\tau[j]}]. \quad (6.44)$$

Para pequeños  $\tau$ , las consideraciones hechas en la sección 6.2.1 sugieren una conexión con la definición usual del funcional generador  $Z[j] = \int \mathcal{D}q e^{iS_{\text{cl}}[j]}$ , donde la acción clásica depende de  $j(t)$  ( $S_{\text{cl}}[j] = \int dt [m\dot{q}^2(t)/2 - m\omega^2 q^2(t)/2 + \sqrt{m}j(t)q(t)]$ ). Notablemente, dado que la transformación (6.42) preserva la traza, la relación  $Z_\tau[j]/Z_\tau[0]$  es de hecho  $\tau$ -invariante y su evaluación inmediata:

$$\frac{Z_\tau[j]}{Z_\tau[0]} = e^{iS_{\text{cl}}^*[j]} \quad (6.45)$$

en acuerdo con el resultado estándar  $Z[j] = Z[0]e^{iS_{\text{cl}}^*[j]}$  [99]. Cabe mencionar que la Ec. (6.45) se sostiene exactamente  $\forall \tau \neq 0$ . También mencionamos que una invariancia similar se sostiene en la formulación discreta de intervalos de tiempo y puede desarrollarse por medios similares.

Además, en el límite  $T \rightarrow \infty$  (considerando un intervalo de tiempo simétrico y la adición de una pequeña parte imaginaria a  $\omega$ ),  $\sum_n 2\pi/T \rightarrow \int d\tilde{\omega}$  implicando  $G(t-t') \rightarrow D_F(t-t')$  y por lo tanto

$$Z_\tau[j] = Z_\tau[0] \exp \left( -\frac{1}{2} \int dt dt' j(t') D_F(t-t') j(t) \right) \quad (6.46)$$

con  $D_F(t-t') = m \langle 0 | \hat{T}[q_I(t)q_I(t')] | 0 \rangle$  el *propagador de Feynman* (se puede considerar este sistema como una teoría de campos de 0 dimensiones, en cuyo caso se suele fijar  $m = 1$ , siendo el papel de la masa desempeñado por  $\omega$ ). Aquí  $|0\rangle$  es el vacío “libre”, es decir, el estado fundamental de la parte cuadrática del Hamiltoniano y  $q_I(t)$  es un operador de posición convencional evolucionado sin la fuente. Note que, en analogía con la Ec. (6.16), no es necesario especificar el estado  $|0\rangle\langle 0|$  en la definición de  $Z_\tau[j]$ .

Las derivadas funcionales de  $Z_\tau[j]/Z_\tau[0]$  aparecen ahora vinculadas a una variación del operador  $e^{i\mathcal{S}_\tau[j]}$  proporcionando expresiones generales  $\tau$ -invariantes para *funciones de correlación en el vacío*. En particular,

$$D_F(t_1 - t_2) = m \hat{T}_\tau \int_0^\tau \frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau}} \int_0^\tau \frac{d\tau_2}{\sqrt{\tau}} \frac{\text{Tr}[e^{i\mathcal{S}_\tau[0]} q_I(t_1, \tau_1) q_I(t_2, \tau_2)]}{\text{Tr}[e^{i\mathcal{S}_\tau[0]}]}. \quad (6.47)$$

Para obtener la Ec. (6.47) se puede escribir

$$e^{i\mathcal{S}_\tau[j]} = e^{i\mathcal{S}_\tau[0]} \hat{T}_\tau \exp \left( i \int dt \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau}} \sqrt{m} j(t) q_I(t, \tau') \right) \quad (6.48)$$

para  $q_I(t, \tilde{\tau}) := e^{-i\mathcal{S}_\tau[0]} q(t) e^{i\mathcal{S}_\tau[0]}$  y derivar con respecto a  $j(t)$  a nivel de operador (el orden temporal en (6.47)-(6.48) se aplica al parámetro  $\tau$ ). En general, este procedimiento muestra que para cada operador en la función de correlación debemos insertar un operador en el Hilbert apropiado, en analogía con la Fig. (6.1.1). Luego integramos sobre cada  $\tau_i$  preservando el orden de  $\tau$ .

Para pequeños  $\tau$ , la forma de la Ec. (6.14) se recupera de (6.47), con operadores  $q_I(t, \tau) \rightarrow q(t)$  insertados en el tiempo de evolución:

$$\frac{\int \mathcal{D}q, e^{iS_{cl}} q(t_1) q(t_2)}{\int \mathcal{D}q, e^{iS_{cl}}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\text{Tr}[e^{i\mathcal{S}_\tau[0]} \sqrt{\tau} q(t_1) \sqrt{\tau} q(t_2)]}{\text{Tr}[e^{i\mathcal{S}_\tau[0]}]}, \quad (6.49)$$

Además, la descripción de teorías generales en este límite corresponde a expresiones de traza con acciones generales  $\mathcal{S}_\tau$  (Ec. (6.36)), en estrecha analogía con las definiciones de PI y de acuerdo con la discusión de la sección 6.2.1. En particular, la sustitución de una AC interactiva en (6.49), produce el propagador interactivo correspondiente y las reglas de Feynman asociadas.

### 6.2.3 Estados en el espacio-tiempo y límite de $\tau$ grande

#### Trazas extendidas como valores medios del vacío en el espacio-tiempo

La posibilidad de una definición útil de estados en escenarios de espacio-tiempo<sup>3</sup> ha sido explorada recientemente en la literatura [28, 30, 31, 102]. Esto ha provocado discusiones sobre posibles modificaciones, ya sea en los axiomas que definen un estado [28, 30] o en la naturaleza del espacio de Hilbert considerado [31, 102]. La propiedad de invarianza- $\tau$  nos permite considerar una nueva posibilidad: en el límite  $\tau \gg 1$  tenemos

$$e^{i\mathcal{S}_\tau[0]} \rightarrow |\Omega\rangle\langle\Omega|, \quad (6.50)$$

es decir, la exponencial de la acción cuántica de espacio-tiempo se convierte en un proyector sobre el *vacío de espacio-tiempo* de la teoría libre, en analogía con el límite  $T \rightarrow \infty$  de un operador de evolución temporal convencional  $e^{-iHT} \rightarrow |0\rangle\langle 0|$ , con  $|0\rangle$  el vacío *no extendido* libre de  $H$  (sin embargo, el límite de  $\tau$  no requiere

<sup>3</sup>Debe leerse como “estados en el espacio-tiempo”, por ejemplo, estados que representan configuraciones de campo en el espacio-tiempo (en contraste con configuraciones en el espacio); no debe confundirse con estados del propio espacio-tiempo, que no está cuantizado en este trabajo.



$T \rightarrow \infty$ ). Entonces, para cantidades  $\tau$ -invariantes, las sumas asociadas sobre historias, que en principio involucran una base completa de estados de espacio-tiempo, pueden reducirse a valores de expectación únicos del vacío de espacio-tiempo. La  $\tau$ -invariancia está revelando así una “interpolación continua” entre estas dos nociones aparentemente diferentes.

En particular, para el funcional generador de la sección anterior, las Ecs. (6.46), (6.48) y (6.50) implican

$$\frac{Z_\tau[j]}{Z_\tau[0]} = \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}q e^{iS_{\text{cl}}[j]} \quad (6.51)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \Omega | \hat{T}_\tau \exp \left( i \int dt \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau}} \sqrt{m} j(t) q_I(t, \tau') \right) | \Omega \rangle. \quad (6.52)$$

Vemos que el funcional generador “normalizado” es un valor medio puro del vacío de espacio-tiempo (con  $Z_\tau[0] \rightarrow 1$ ).

Consideraciones similares son válidas para el propagador de Feynman y para cualquier otra cantidad relacionada con funcionales generadores, con las Ecs. (6.47) y (6.50) implicando

$$\langle 0 | \hat{T} q_I(t_1) q_I(t_2) | 0 \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{T}_\tau \int_0^\tau \frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau}} \int_0^\tau \frac{d\tau_2}{\sqrt{\tau}} \langle \Omega | q_I(t_1, \tau_1) q_I(t_2, \tau_2) | \Omega \rangle. \quad (6.53)$$

Tenga en cuenta que en el lado izquierdo el cuadro de interacción en  $\mathfrak{H}$  corresponde a la evolución en  $t$  mientras que el cuadro de interacción en  $\mathcal{H}$  a la evolución en  $\tau$  (mientras que  $t$  indica el espacio de Hilbert de  $q(t)$ ). También es fácil ver que  $\theta(t_1 - t_2) \langle 0 | q_I(t_1) q_I(t_2) | 0 \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau \frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau}} \int_0^\tau \frac{d\tau_2}{\sqrt{\tau}} \theta(\tau_1 - \tau_2) \langle \Omega | q_I(t_1, \tau_1) q_I(t_2, \tau_2) | \Omega \rangle$ . El propagador para otras teorías puede definirse a partir de estos elementos básicos y relacionarse también con valores medios del vacío.

### Estados extendidos en teorías cuánticas de campos relativistas

Podemos mejorar la relación (6.53) eliminando el límite explícito en  $\tau$  y dejando solo una integral sobre la variable  $\tau_1 - \tau_2$ . Notablemente, el resultado relaciona los estados sp en  $\mathcal{H}$  con aquellos considerados en enfoques inspirados en la teoría de cuerdas (y otros formalismos de tiempo cuántico, como se sugiere en [3]). Para una comparación adecuada, es apropiado trabajar en  $D = d + 1$  dimensiones de espacio-tiempo simplemente reemplazando  $q(t) \rightarrow \phi(x)$ ,  $p(t) \rightarrow \pi(x)$  de tal manera que el álgebra (6.10) produce

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta^{(d+1)}(x - y). \quad (6.54)$$

Note que (6.54) *no* es una relación de conmutación en tiempo igual como la convencional en  $d$  dimensiones espaciales: la “delta extra” corresponde a la dimensión

temporal (ver Ec. (6.34)). Esto no debe confundirse con la cuantización canónica de una teoría clásica con una dimensión extra: no es el número de dimensiones lo que se modifica, sino la construcción del espacio de Hilbert y el esquema de cuantización resultante. Sin embargo, podemos especular que el parámetro  $\tau$  podría tratarse como una coordenada “holográfica” que conecta la teoría de  $d + 1$  con una teoría canónica de  $d + 2$  (un poco de análisis muestra que la teoría extra-dimensional debe ser altamente no local para manejar interacciones).

También aprovechamos la oportunidad para discutir brevemente la invariancia de Lorentz a nivel del espacio de Hilbert: el nuevo álgebra es explícitamente covariante para

$$U^\dagger(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda) = \phi(\Lambda x), \quad U^\dagger(\Lambda)\pi(x)U(\Lambda) = \pi(\Lambda x).$$

con  $U(\Lambda)$  la transformación sp unitaria asociada a la transformación de Lorentz  $\Lambda$  [2]. Por lo tanto, las transformaciones de Lorentz se definen geoméricamente en  $\mathcal{H}$ , en analogía con las rotaciones e independientemente de la dinámica. Además, si introducimos una AC “de segundo orden”

$$\mathcal{S}_\tau^{(2)}[j] := -\tau \int d^D x \left[ A^\dagger(x)(\partial^2 + m^2)A(x) - \sqrt{\frac{m}{\tau}}j(x)\phi(x) \right], \quad (6.55)$$

con  $A(x) := (\sqrt{m}\phi(x) + i\pi(x)/\sqrt{m})/\sqrt{2}$ , es claro que  $[\mathcal{S}_\tau^{(2)}[0], U(\Lambda)] = 0$  (ver también [3]). Los operadores locales  $A(x)$  satisfacen  $[A(x), A^\dagger(y)] = \delta^{(d+1)}(x - y)$ . Esta breve introducción de la covarianza de Lorentz muestra que la formulación canónica de espacio-tiempo dentro de  $\mathcal{H}$  permite preservar explícitamente las simetrías de espacio-tiempo, una ventaja previamente exclusiva de la formulación PI. También muestra que se pueden introducir formas más generales de ACs <sup>4</sup>.

Con estas convenciones, el campo puede expandirse como

$$\phi(x) = \int \frac{d^D p}{\sqrt{(2\pi)^D 2m}} \left( e^{ipx} A(p) + e^{-ipx} A^\dagger(p) \right), \quad (6.56)$$

con los operadores  $A(p)$  la TF de  $A(x)$ , que son los que llevan  $\mathcal{S}^{(2)}\tau[0]$  a su forma normal:

$$\mathcal{S}_\tau^{(2)}[j] := \tau \int d^D p \left[ (p^2 - m^2)A^\dagger(p)A(p) + \frac{j(-p)}{\sqrt{2\tau}}A(p) + \frac{j(p)}{\sqrt{2\tau}}A^\dagger(p) \right]. \quad (6.57)$$

---

<sup>4</sup>Mientras que la generalización a  $d + 1$  de  $S_\tau[j]$  y resultados relacionados es directa, estamos empleando la acción de segundo orden para preservar explícitamente la covarianza de Lorentz en todos los pasos. Esto se puede lograr también con  $S_\tau[j]$ , pero requiere una discusión adecuada de la elección del tiempo en la transformación de Legendre, que se presentará en el siguiente capítulo.

Todos los resultados previos relacionados con el funcional generador, incluyendo la  $\tau$ -invariancia, se mantienen en completa analogía: definiendo como antes  $Z_\tau^{(2)}[j] = \text{Tr}[e^{i\mathcal{S}_\tau^{(2)}[j]}]$ , obtenemos

$$Z_\tau^{(2)}[j] = Z_\tau^{(2)}[0] \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^D x d^D y j(x) D_F(x-y) j(y) \right), \quad (6.58)$$

una generalización multidimensional de la Ec. (6.43), con el propagador de Feynman  $D_F(x-y) = \langle 0 | \hat{T} \phi_I(x) \phi_I(y) | 0 \rangle$  apareciendo ahora explícitamente (como de costumbre, estamos ajustando  $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$ ). Además, se obtiene una nueva versión de la Ec. (6.50):

$$e^{i\mathcal{S}_\tau^{(2)}[0]} \rightarrow |\Omega\rangle\langle\Omega| \quad (6.59)$$

cuando  $\tau \rightarrow \infty$  y donde  $|\Omega\rangle$  es el espacio-tiempo de  $A(x)$  que satisface  $A(x)|\Omega\rangle = A(p)|\Omega\rangle = 0$ ,  $U(\Lambda)|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$ . Al separar las partes de la AC con y sin la fuente, como en la Ec. (6.48), obtenemos

$$\langle 0 | \hat{T} \phi_I(x) \phi_I(y) | 0 \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{T}_\tau \int_0^\tau \frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau}} \int_0^\tau \frac{d\tau_2}{\sqrt{\tau}} m \langle \Omega | \phi_I(x, \tau_1) \phi_I(y, \tau_2) | \Omega \rangle, \quad (6.60)$$

para  $\phi_I(x, \tau) := e^{-i\mathcal{S}_\tau^{(2)}[0]} \phi(x) e^{i\mathcal{S}_\tau^{(2)}[0]}$ , el operador de campo “evolucionado” con la acción de segundo orden. Es sencillo demostrar que ambos ordenamientos de  $\tau$  producen la mitad del propagador ( $D_F(x-y) = D_F(y-x)$ ), mientras que la invariancia de Lorentz es manifiesta en el lado izquierdo ya que  $\phi_I(\Lambda x, \tau) = U^\dagger(\Lambda) \phi_I(x, \tau) U(\Lambda)$  y el vacío de espacio-tiempo es invariante.

El resultado (6.60) es la versión en  $D$  dimensiones de (6.53) que puede compararse con expresiones similares a la teoría de cuerdas: utilizando la Ec. (6.56) el integrando en (6.60) se puede escribir para  $\tau_1 > \tau_2$  como  $\langle \Omega | A(x) e^{i(\tau_1 - \tau_2)\mathcal{J}^{(2)}} A^\dagger(y) | \Omega \rangle / 2$ , con

$$\mathcal{J}^{(2)} := \tau^{-1} \mathcal{S}_\tau^{(2)}[0] = \int d^D p (p^2 - m^2) A^\dagger(p) A(p), \quad (6.61)$$

independiente de  $\tau$ . Entonces, dado que el integrando en (6.60) depende solo de la diferencia  $\tau_1 - \tau_2$ , encontramos

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{T} \phi_I(x) \phi_I(y) | 0 \rangle &= \int_0^\infty d\tau \langle \Omega | A(x) e^{i\tau \mathcal{J}^{(2)}} A^\dagger(y) | \Omega \rangle \\ &= \int_0^\infty d\tau \langle x | e^{i\tau \mathcal{J}^{(2)}} | y \rangle \end{aligned} \quad (6.62)$$

donde hemos definido los estados de partícula única (sp)

$$|x\rangle := \sqrt{2m} \phi(x) | \Omega \rangle = A^\dagger(x) | \Omega \rangle. \quad (6.63)$$

Notablemente, el resultado del espacio de Fock extendido (6.62) involucra el operador  $\mathcal{J}^{(2)}$ , que es la versión “segunda cuantizada” de  $\mathcal{J}_{\text{sp}}^{(2)} = P^2 - m^2$  (ver Ec. (6.61) y [2, 3]) definiendo la condición de capa de masa de partículas parametrizadas [42, 67, 113] a través de  $\mathcal{J}_{\text{sp}}^{(2)}|\Psi\rangle = 0$  en  $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ . Así, para contracciones de dos puntos, la forma (6.62) se reduce a la conocida expresión “worldline” (línea de mundo) del propagador [46, 66]  $\langle 0|\hat{T}\phi_I(x)\phi_I(y)|0\rangle = \int_0^\infty d\tau \langle x|e^{i\tau(P^2-m^2+i\epsilon)}|y\rangle$ , que involucra solo estados sp (en primera cuantización).

Cabe señalar que en el enfoque actual los resultados anteriores emergen de una formulación de espacio-tiempo completamente desarrollada de PIs y funciones de correlación de teorías cuánticas de campos (escalares). Las *excitaciones de los campos son ahora estados de espacio-tiempo*. Aunque el desarrollo adicional excede el alcance de este manuscrito, todos los ingredientes básicos para desarrollar teorías generales (interactuantes) ya están contenidos en él: por un lado, se pueden introducir teorías interactuantes (como de costumbre) a través de variaciones funcionales del funcional generador. A nivel del espacio de Hilbert extendido, esto define nuevas generalizaciones  $\tau$ -invariantes de ACs interactuantes, reduciéndose a acciones convencionales diagonales en tiempo solo para pequeños  $\tau$  (además del caso de una “interacción lineal” considerada en secciones anteriores). Por otro lado, las cantidades físicas surgen de funciones de correlación esencialmente a través de FTs completas en  $d+1$  (por ejemplo, la fórmula de reducción LSZ [114]). Mientras que en la formulación convencional la FT en tiempo está relacionada con la evolución unitaria, aquí dichas FTs conducen naturalmente a los operadores no locales en tiempo  $A^\dagger(p)$  que diagonalizan  $\mathcal{S}_\tau^{(2)}[0]$ .

Además, los momentos de cada partícula externa involucrada en los elementos de la matriz S satisfacen la condición de capa de masa. Esto lleva a operadores extendidos de creación (aniquilación) que son estacionarios” en la evolución” de  $\tau$ , es decir,

$$[\mathcal{S}_\tau^{(2)}[0], A^\dagger(E_{pm}, \mathbf{p})] = 0, \quad (6.64)$$

precisamente la condición introducida en [2, 3] en operadores que crean *estados físicos* (libres) actuando sobre  $|\Omega\rangle$ . Tales estados surgen entonces naturalmente para grandes  $\tau$  en la formulación extendida de teorías de dispersión y representan las partículas externas (asintóticamente libres).

Cabe mencionar que una restricción similar (pero no escrita en términos de ACs) ha sido introducida recientemente en [115] para teorías no interactuantes en el contexto de una formulación de la mecánica cuántica relativista en términos de eventos.

A pesar de algunas diferencias fundamentales en la interpretación [115] (sin embargo, cabe mencionar que una trayectoria puede considerarse como un conjunto de eventos, por lo tanto, el espacio de Hilbert es el mismo), nuestros resultados actuales proporcionan una ruta clara para introducir interacciones en esta nueva formulación relacionada también.

## 6.3 Conclusiones

Hemos proporcionado una formulación cuántica completa de los PIs de Feynman basada en un espacio de Hilbert de espacio-tiempo extendido y una AC concomitante. Las expresiones fundamentales pueden representarse como trazas de espacio-tiempo, y diferentes formulaciones de PI emergen naturalmente del uso de diferentes bases extendidas. Las representaciones estándar corresponden a bases de productos en el tiempo tipo trayectoria (por ejemplo, estados de trayectoria de coordenadas y coherentes), pero el formalismo también hace accesibles bases no locales en el tiempo. En particular, las evaluaciones tipo Fourier y Matsubara son casos especiales de estas últimas, que surgen naturalmente aquí a través de la base de autovalores de operadores AC cuadráticos.

En el caso de tiempo continuo (sección 6.2) esto permite definir y manipular expresiones de traza sin las sutilezas de los PIs convencionales, mientras que la conexión con la física clásica todavía puede discutirse dentro del marco de operadores (ver Apéndice 6.4). También surge la posibilidad de nuevos esquemas de regularización. Además, ahora se hace evidente una invariancia de escala temporal en las nuevas expresiones para funciones de correlación, lo que conduce a una conexión directa entre una AC dada y el vacío de espacio-tiempo correspondiente, como se muestra en 6.2.3. Cuando se aplica a campos cuánticos, se recuperan expresiones del enfoque de primera cuantización inspirado en la teoría de cuerdas [46] y/o del formalismo PW relativista descrito en [1, 2] al nivel de una partícula.

Desde una perspectiva más amplia, los resultados actuales constituyen un paso importante en el desarrollo de extensiones simétricas de espacio-tiempo generales de la MQ: a través de la nueva representación de los PIs, se logra formalmente una representación en el espacio de Hilbert simétrica de espacio-tiempo de cualquier teoría convencional, incluyendo el caso de teorías de campos cuánticos interactuantes (ver consideraciones en la sección 6.2.3). También se reveló una nueva ruta para una definición adecuada de estados físicos de espacio-tiempo explotando el mencionado

límite de gran  $\tau$ . Curiosamente, incluso para  $\tau$  finito o pequeño, se puede asignar una noción de estado a la representación anterior: la idea esencial es tratar la exponencial de la acción como un estado tipo térmico (ver algunos de los comentarios en la sección 6.1.2). Esto puede desarrollarse a través de una técnica de purificación “generalizada” recientemente introducida en el contexto de dualidades holográficas con el objetivo de discutir el entrelazamiento en el tiempo [97, 98] (en MQ convencional, no extendida). Dado que el enfoque excede la formulación de PI, se deja para futuras investigaciones.

En este mismo escenario, surgen posibilidades adicionales novedosas, como la consideración de interacciones no separables en el tiempo, la aparición de operadores cuánticos de tiempo y relaciones de incertidumbre entre energía y tiempo, y la definición rigurosa del entrelazamiento en el tiempo: de la misma manera que la segunda cuantización estándar es necesaria para la noción de una matriz de densidad reducida de un intervalo espacial, y por lo tanto para el entrelazamiento en el espacio [116], el presente formalismo de estados de espacio-tiempo cuantizados de segunda orden es un escenario natural para acomodar la noción de entrelazamiento en el tiempo. Al mismo tiempo, la convencional “suma sobre historias”, anteriormente solo accesible a través de cálculos clásicos, ahora admite la aplicación de protocolos cuánticos para la evaluación de trazas (6.1.4). Estos aspectos están actualmente bajo investigación.

## Apéndices

### 6.1 $T$ general en propagadores

En la construcción discreta desarrollada en el texto principal, hemos considerado  $N = T/\epsilon$  copias del espacio de Hilbert original mientras identificamos  $T$  con la cantidad de evolución de los estados finales. Aquí discutimos la situación más general que surge de relajar esta identificación en el caso de la partícula bosónica.

Primero notamos que la Ec. (6.5) del cuerpo principal también se sostiene en  $\mathcal{H}' = \otimes_{t=0}^{N'-1} \mathfrak{H}_t$  con  $N' > N$  y  $\mathcal{S}$  todavía definido como en la Ec. (6.4) pero con  $\mathcal{P}_t$  el generador de traslaciones temporales en  $\mathcal{H}'$ . Esto se sigue al reemplazar en el lado derecho de la Ec. (6.2)  $N \rightarrow N'$ ,

$$\otimes_{t=0}^{N-1} e^{-iH\epsilon} \equiv \otimes_{t=0}^{N'-1} e^{-iH\epsilon} \otimes_{t>N-1} \mathbb{1}_t$$

e integrando sobre las variables  $q_{t>N-1}$  de tal manera que la igualdad se sostiene. Entonces en la Ec. (6.5)  $N \rightarrow N'$  pero no en el producto de la Ec. (6.4). Esta

invariancia permite discutir cualquier evolución temporal de intervalo  $T < T' = N'\epsilon$  (con cualquier origen) dentro de un único espacio extendido  $\mathcal{H}'$ .

En particular, al considerar  $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \otimes \mathfrak{H}_N$

$$\langle q', T + \epsilon | q \rangle - \langle q', T | q \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{H}'} \left[ [e^{i\mathcal{S}'} - e^{i\mathcal{S}}] |q\rangle_0 \langle q'| \right] \quad (6.65)$$

donde  $e^{i\mathcal{S}'} = e^{i\mathcal{S}} e^{-i\epsilon H_N} = e^{-i\epsilon H_0} e^{i\mathcal{S}}$ . Escribiendo entonces

$$e^{i\mathcal{S}'} - e^{i\mathcal{S}} = [e^{-iH_0\epsilon} - \mathbb{1}] e^{i\mathcal{S}}, \quad (6.66)$$

y aplicando la Ec. (6.5) del cuerpo principal al lado derecho de la Ec. (6.65), se recupera la *ecuación de Schrödinger discreta*

$$\langle q', T + \epsilon | q \rangle - \langle q', T | q \rangle = \langle q', T | [e^{-iH\epsilon} - \mathbb{1}] | q \rangle \quad (6.67)$$

El límite continuo se sigue, por supuesto, al dividir ambos miembros por  $-i\epsilon$  de tal manera que para  $\epsilon \rightarrow 0$  el lado izquierdo es  $i$  veces la derivada en el tiempo de  $\langle q', T | q \rangle$  mientras que  $i[e^{-iH\epsilon} - \mathbb{1}]/\epsilon \rightarrow H$ .

También vemos que la Ec. (6.65) tiene exactamente la forma del *principio de acción de Schwinger* [86], que relaciona variaciones generales de  $\langle q', T | q \rangle$  con los elementos de matriz de variaciones del operador de acción de Schwinger. Sin embargo, en la formulación de Schwinger se dispone de un conjunto completo de operadores conmutativos en superficies tipo espacio (en un tiempo dado). Desde el punto de vista canónico, su AC involucra operadores en la imagen de Heisenberg para los cuales no se aplica ninguna álgebra extendida [3], una diferencia fundamental con la presente construcción.

## 6.2 Demostración de la relación entre $\mathcal{S}$ , $\mathcal{P}_t$ y $\mathcal{V}$ , y funciones de correlación

En esta sección demostraremos la ecuación (6.13) del cuerpo principal. Primero estableceremos la equivalencia entre ese resultado y la siguiente expresión:

$$e^{-i\mathcal{P}_t\epsilon} \mathcal{V}^\dagger e^{i\mathcal{P}_t\epsilon} = U_{N-1}^\dagger(T) \otimes_t U_t[(t+1)\epsilon, t\epsilon] \mathcal{V}^\dagger \quad (6.68)$$

*Demostración.* La prueba de la equivalencia sigue inmediatamente reescribiendo (6.68) como

$$\mathcal{V}^\dagger e^{i\mathcal{P}_t\epsilon} \mathcal{V} = e^{i\mathcal{P}_t\epsilon} U_{N-1}^\dagger(T) \otimes_t U_t[(t+1)\epsilon, t\epsilon].$$

Ahora, considerando que  $e^{i\mathcal{P}_t\epsilon}U_{N-1}^\dagger(T)e^{-i\mathcal{P}_t\epsilon} = U_0^\dagger(T)$  podemos escribir

$$U_0(T)\mathcal{V}^\dagger e^{i\mathcal{P}_t\epsilon}\mathcal{V} = e^{i\mathcal{P}_t\epsilon} \otimes_t U_t[(t+1)\epsilon, t\epsilon] = e^{i\mathcal{S}},$$

que es precisamente la Ec. (6.13) del cuerpo principal. Note que estamos considerando la definición general de  $e^{i\mathcal{S}}$  (posiblemente dependiente del tiempo).  $\square$

La prueba de la Ec. (6.13) en el cuerpo principal ahora se reduce a demostrar (6.68).

*Demostración.* La acción del operador de traslación en  $\mathcal{V}^\dagger = \otimes_{t=0}^{N-1} U_t(t\epsilon)$  en el lado izquierdo de (6.68) produce

$$\begin{aligned} e^{-i\mathcal{P}_t\epsilon} \otimes_{t=0}^{N-1} U_t(t\epsilon) e^{i\mathcal{P}_t\epsilon} &= \otimes_{t=0}^{N-1} U_{t-1}(t\epsilon) = \otimes_{t=0}^{N-2} U_t[(t+1)\epsilon] \\ &= U_{N-1}^\dagger(T) \otimes_{t=0}^{N-1} U_t[(t+1)\epsilon] \end{aligned} \quad (6.69)$$

donde usamos  $U(0) = \mathbb{1}$  y  $T = N\epsilon$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} \otimes_{t=0}^{N-1} U_t[(t+1)\epsilon]\mathcal{V} &= \otimes_{t=0}^{N-1} U_t[(t+1)\epsilon] \otimes_{t=0}^{N-1} U_t^\dagger(t\epsilon) \\ &= \otimes_{t=0}^{N-1} U_t[(t+1)\epsilon] U_t^\dagger(t\epsilon) = \otimes_{t=0}^{N-1} U_t[(t+1)\epsilon, t\epsilon], \end{aligned} \quad (6.70)$$

Al multiplicar (6.69) a la derecha por  $\mathcal{V}\mathcal{V}^\dagger = \mathbb{1}$  y usar (6.70), recuperamos (6.68).  $\square$

Ahora describimos cómo el resultado anterior permite una derivación directa de las expresiones de las funciones de correlación como (6.14). Recordamos que se puede mapear trazas convencionales de la composición de operadores en trazas de espacio-tiempo de productos tensoriales de operadores añadiendo el operador de traslación temporal  $e^{i\mathcal{P}_t\epsilon}$ , como se muestra en (6.30). Por otro lado, está claro que conjugar productos tensoriales de operadores con  $\mathcal{V}$  corresponde a evolucionarlos (ver (6.12)). Juntando todos estos resultados, podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle i', T | O_H^{(N-1)}(T) \dots O_H^{(2)}(2\epsilon) O_H^{(1)}(\epsilon) O_H^{(0)}(0) | i \rangle &= \text{Tr}_{\mathcal{H}} [e^{i\mathcal{P}_t\epsilon} \otimes_t O_H^{(t)}(t) | i \rangle_0 \langle i', T |] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}} [e^{i\mathcal{P}_t\epsilon} \mathcal{V} (\otimes_t O^{(t)}) \mathcal{V}^\dagger | i \rangle_0 \langle i' | U_0(T)] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}} [\underbrace{U_0(T) \mathcal{V}^\dagger e^{i\mathcal{P}_t\epsilon} \mathcal{V}}_{e^{i\mathcal{S}}} \otimes_t O^{(t)} | i \rangle_0 \langle i' |], \end{aligned} \quad (6.71)$$

donde en la última igualdad reconocemos la combinación de  $\mathcal{V}$  y  $e^{i\mathcal{P}_t\epsilon}$  que da lugar a  $e^{i\mathcal{S}}$  según el teorema anterior. Se puede establecer que los operadores sean iguales a la identidad, de modo que solo algunos de ellos realmente aparezcan en el lado izquierdo, lo cual en el lado derecho corresponde a “inserciones” particulares. También



debemos destacar que este resultado es general y puede aplicarse a cualquier sistema. En particular, se puede aplicar a sistemas bosónicos generales, como campos, y por lo tanto también se incluye el caso multidimensional discutido en la sección 6.1.2, que exhibe simetría de espacio-tiempo.

### 6.3 Sobre la “función de partición” del oscilador armónico en el límite continuo

Discutimos aquí la traza de  $e^{i\mathcal{S}_\tau}$  para el tiempo continuo y para

$$\mathcal{S}_\tau = \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\omega_n - \omega + i\tilde{\epsilon}\omega_n^2) A_n^\dagger A_n \quad (6.72)$$

$$= \tau \int dt A^\dagger(t) (i\partial_t - \omega - i\tilde{\epsilon}\partial_t^2) A(t). \quad (6.73)$$

Note que hemos introducido un factor de convergencia  $\propto \tilde{\epsilon}$  (por el momento  $\tilde{\epsilon} \in \mathbb{R}$ ).

Podemos calcular inmediatamente la traza en la base de Fock de Fourier ( $\tilde{n} \in \mathbb{N}$  es el número de ocupación de un cierto modo  $n$ ) obteniendo

$$\begin{aligned} \text{Tr}[e^{i\mathcal{S}_\tau}] &= \sum_{\tilde{\mathbf{n}}} \langle \tilde{\mathbf{n}} | e^{i\mathcal{S}_\tau} | \tilde{\mathbf{n}} \rangle = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} e^{i\tau(\omega_n - \omega + i\tilde{\epsilon}\omega_n^2)\tilde{n}_n} \\ &= \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left[ 1 - e^{i\tau(\omega_n - \omega + i\tilde{\epsilon}\omega_n^2)} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (6.74)$$

donde en el último paso asumimos  $|e^{i\tau(\omega_n - \omega + i\tilde{\epsilon}\omega_n^2)}| < 1 \forall n$ . Esto es estrictamente cierto para los modos  $n \neq 0$ . Para el modo 0, esto se mantiene para  $\omega$  ligeramente imaginario (como de costumbre), mientras que para  $\omega \in \mathbb{R}$  la serie converge a la distribución  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\tau\omega n} = \frac{1}{1 - e^{-i\tau\omega}} + \pi \sum_k \delta(\tau\omega + 2\pi k)$ . Si asumimos  $\tau\omega \neq 2\pi k$  el término delta puede ignorarse. Note que para  $N = T/\epsilon$  finito y  $\tilde{\epsilon} = 0$ , la Ec. (6.74) se convierte en el producto finito

$$\prod_{n=-\lfloor N/2 \rfloor}^{\lfloor (N-1)/2 \rfloor} \left[ 1 - e^{i\tau(\omega_n - \omega)} \right]^{-1} = \frac{e^{i\omega T/2}}{2i \sin(\omega T/2)} \quad (6.75)$$

donde la última expresión es válida para  $\tau = \epsilon$  y se sigue al expandir  $\frac{z^N}{z^N - 1}$  en términos de las  $N$  raíces de 1, con  $z = e^{-i\omega\epsilon}$ .

El producto infinito en (6.74) indica el inverso de

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=-N}^N \left[ 1 - e^{i\tau(\omega_n - \omega + i\tilde{\epsilon}\omega_n^2)} \right]$$

como se sigue, por ejemplo, considerando primero  $T/\epsilon = 2N + 1$  pasos de tiempo en  $\mathcal{H}$ . Podemos dividir el producto para  $N$  finito en dos términos con  $n \geq 1$  y una contribución de  $n = 0$ . La convergencia de los productos con  $n \geq 1$  está definida por la convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \exp[i\tau(\pm\omega_n - \omega + i\tilde{\epsilon}\omega_n^2)]$  que claramente converge absolutamente para  $\tau\tilde{\epsilon} > 0$  ( $|\exp[i\tau(\pm\omega_n - \omega + i\tilde{\epsilon}\omega_n^2)]| = \exp[-\tau\epsilon\omega_n^2]$ ).

De hecho, si dejamos, por ejemplo,  $\tilde{\epsilon} = \lambda\tau^2$  (con  $\lambda > 0$  una constante con unidades de  $[\text{tiempo}]^{-1}$ ) y  $\tau \in \mathbb{C}$ , el producto infinito original define una función analítica  $F(\tau)$  en el subconjunto del plano complejo definido por  $\text{Re}(\tau^3) > 0$  (esto se puede probar notando que la convergencia es compactamente normal en esta región [117]).

También “conjeturamos” que el límite  $\tau \rightarrow 0^+$  de  $F(\tau)$  toma el valor exacto *finito*  $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} F(\tau) = e^{i\omega T/2}/[2i \sin(\omega T/2)]$ , de acuerdo con (6.75), lo cual verificamos numéricamente. Esto implicaría para la acción correspondiente

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \text{Tr}[e^{iS\tau}] = \text{Tr}[e^{-iHT}], \quad (6.76)$$

donde hemos restaurado la contribución del vacío  $S\tau \rightarrow S\tau - \mathbb{1}T\omega/2$ . Destacamos la diferencia con el tratamiento continuo usual que necesita alguna regularización o una constante infinita codificada en la medida para proporcionar un resultado finito (y que no tiene en cuenta adecuadamente la contribución del vacío en el caso de CSPI). Considerando que para pequeños  $\tau$  podemos relacionar esta misma traza con la expresión de PI de la función de partición, la corrección de la conjetura proporcionaría una definición rigurosa de PI en el continuo.

## 6.4 Principio de acción estacionaria a partir de un valor medio cuántico

La aparición de  $S_{\text{cl}}^*$  en (6.42) también se puede entender notando primero que el promedio del AC en los estados coherentes de espacio-tiempo (Ec. (6.37)) es

$$\langle S_{\tau}[j] \rangle_{\alpha} = \frac{\langle \alpha(t) | S_{\tau}[j] | \alpha(t) \rangle}{\langle \alpha(t) | \alpha(t) \rangle} = S_{\text{cl}} + \gamma \quad (6.77)$$

con  $S_{\text{cl}}$  la acción clásica a lo largo de la trayectoria  $(q_{\text{cl}}(t), p_{\text{cl}}(t))$  definida como  $q_{\text{cl}}(t) := \sqrt{\tau} \frac{\alpha(t) + \alpha^*(t)}{\sqrt{2m\omega}}$ ,  $p_{\text{cl}}(t) := \sqrt{\tau} \frac{\alpha(t) - \alpha^*(t)}{i\sqrt{2/m\omega}}$ . Aquí  $\gamma$  es una constante independiente de  $j$  y  $\tau$  que surge de la energía del vacío. La relación (6.77) es una consecuencia directa de

$$A(t)|\alpha(t)\rangle = \alpha(t)|\alpha(t)\rangle \quad (6.78)$$

lo que también implica  $\langle \sqrt{\tau} q(t) \rangle_\alpha = q_{\text{cl}}(t)$  y  $\langle \sqrt{\tau} p(t) \rangle_\alpha = p_{\text{cl}}(t)$ .

Como consecuencia, la solución clásica corresponde a un valor estacionario del valor medio (6.77). Esto se puede imponer directamente en la base de Fourier  $|\alpha\rangle$  notando que  $S_{\text{cl}} = \tau \sum_n (\omega_n - \omega) \alpha_n^* \alpha_n + \frac{j_n^*}{\sqrt{2\omega\tau}} \alpha_n + \frac{j_n}{\sqrt{2\omega\tau}} \alpha_n^*$ . Por lo tanto, en el presente caso, la condición estacionaria

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_n^*} \langle \mathcal{S}_\tau[j] \rangle_\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial S_{\text{cl}}}{\partial \alpha_n^*} = 0 \quad (6.79)$$

produce  $\alpha_n^* = -\frac{j_n}{\sqrt{2\omega\tau}(\omega_n - \omega)}$  (el símbolo “\*” indica la solución). Esto define la solución de trayectoria coherente  $\alpha^*(t) = \sum_n e^{-i\omega_n t} \alpha_n^* / \sqrt{T}$ . Note que (6.79) es equivalente a una variación en posición y momento en la base de Fourier, relacionada con las variables de posición y momento anteriores por una transformación canónica. En términos de las últimas, la condición (6.79) produce

$$q_{\text{cl}}^*(t) = i \int dt' G(t - t') \frac{j(t')}{\sqrt{m}} \quad (6.80)$$

y  $p_{\text{cl}}^*(t) = m q_{\text{cl}}^*(t)$  con  $(\partial_t^2 + \omega^2) q_{\text{cl}}^*(t) = j(t) / \sqrt{m}$  en acuerdo con la ecuación de Euler-Lagrange (y sin ninguna dependencia en  $\tau$ ). La media del AC a lo largo de la solución clásica es

$$\langle \mathcal{S}_\tau[j] \rangle_{\alpha^*} = -\tau \sum_n \frac{j_n j_{-n}}{2\omega\tau(\omega_n - \omega)} = S_{\text{cl}}^*, \quad (6.81)$$

con  $S_{\text{cl}}^*$  la acción clásica evaluada en la solución, en concordancia con (6.77), que también es independiente de  $\tau$ . También cabe mencionar que  $|\alpha^*(t)\rangle = \mathcal{U}^\dagger |\Omega\rangle$  es el *vacío* de los operadores desplazados  $\mathcal{U}^\dagger A_n \mathcal{U}$  con

$$\mathcal{U} := e^{-\sum_n [\alpha_n^* A_n^\dagger - (\alpha_n^*)^* A_n]} \quad (6.82)$$

de tal modo que  $\mathcal{U}^\dagger A_n \mathcal{U} = A_n - \alpha_n^*$ , en concordancia con la definición anterior (6.42). Ahora está claro que el factor constante que surge de la acción de  $\mathcal{U}$  sobre  $\mathcal{S}_\tau[0]$  debe ser  $S_{\text{cl}}^*$ : al evaluar el valor medio de la Ec. (6.42) a lo largo del estado  $|\alpha^*(t)\rangle$ , la contribución del segundo término se anula ya que  $\langle \alpha^*(t) | \mathcal{U}^\dagger \mathcal{S}_\tau[0] \mathcal{U} | \alpha^*(t) \rangle = \langle \Omega | \mathcal{S}_\tau[0] | \Omega \rangle = 0$ .

Además, cuando uno expande  $S_{\text{cl}}$  alrededor de la solución clásica, el primer orden desaparece (Ec. (6.79)) mientras que el segundo es la misma acción sin la fuente pero evaluada a lo largo de la trayectoria “fluctuante” (los órdenes superiores, por supuesto, desaparecen). En términos de valores medios cuánticos esto se puede escribir como  $\langle \mathcal{S}_\tau[j] \rangle_\alpha = S_{\text{cl}}^* + \langle \mathcal{S}_\tau[0] \rangle_{\alpha - \alpha^*} = S_{\text{cl}}^* + \langle \mathcal{U}^\dagger \mathcal{S}_\tau[0] \mathcal{U} \rangle_\alpha$ , que es justo el valor esperado

de la Ec. (6.42). Para pequeños  $\tau$ , podemos emplear las consideraciones anteriores para reobtener (6.45) a partir de argumentos familiares tipo PI: de acuerdo con la discusión en la sec. 6.2.1 podemos escribir

$$Z_\tau[j] \approx \int \mathcal{D}^2\alpha(t) e^{i\langle \mathcal{S}_\tau[j] \rangle_\alpha} = e^{iS_{\text{cl}}^*} \int \mathcal{D}^2\alpha(t) e^{i\langle \mathcal{S}_\tau[0] \rangle_\alpha}, \quad (6.83)$$

con el reemplazo  $\langle \mathcal{S}_\tau[0] \rangle_{\alpha-\alpha^*} \rightarrow \langle \mathcal{S}_\tau[0] \rangle_\alpha$  sosteniéndose en la última igualdad porque estamos integrando sobre todas las trayectorias. En el cociente  $Z_\tau[j]/Z_\tau[0]$  el "factor de fluctuación" se cancela como en el enfoque convencional de PI y en acuerdo con la derivación más general independiente de  $\tau$ .

# Mecánica cuántica y clásica en el espacio-tiempo con foliación dinámica

Este capítulo presenta los resultados publicados en [5]. Los mismos constituyen en conjunto la principal contribución de esta tesis al problema planteado en el capítulo I. Debido a su longitud extensa, y al hecho de que el capítulo es mayormente auto-contenido, presentamos primero un breve resumen del mismo.

## 7.1 Resumen del capítulo

El espacio de fase convencional de la física clásica trata el espacio y el tiempo de manera diferente, y esta diferencia se transfiere a las teorías de campos y la mecánica cuántica (MC). En este capítulo, el espacio de fase se amplía mediante dos extensiones. En primer lugar, promovemos la elección del tiempo de la transformada de Legendre a una variable dinámica. En segundo lugar, extendemos los corchetes de Poisson de los campos de materia a una forma simétrica en el espacio-tiempo. El consiguiente “espacio de fases espacio-temporal” se emplea para obtener una versión explícitamente covariante de las ecuaciones de Hamilton para teorías de campos relativistas. Luego se presenta una cuantización tipo canónica del formalismo en la que los campos satisfacen relaciones de conmutación espacio-temporales y la foliación es cuántica. En este enfoque, la acción clásica también se promueve a un operador y retiene la covarianza explícita a través de su no-separabilidad en la partición materia-foliación. El problema de establecer una correspondencia entre el nuevo marco no causal (donde los campos en diferentes tiempos son independientes) y la MC convencional se resuelve mediante una generalización de los correladores tipo espacial a espacio-tiempo. En esta generalización, el Hamiltoniano es reemplazado por la acción, y las partículas convencionales por partículas fuera de capa de masa. Cuan-

do la foliación es cuantizada, el mapa previo se recupera condicionando en estados propios de la foliación, en analogía con el mecanismo de Page y Wootters. También proporcionamos una interpretación de la correspondencia en la que la estructura causal de una teoría dada emerge de las correlaciones cuánticas entre el sistema y un entorno. Esta idea es válida para sistemas cuánticos generales y permite generalizar la matriz de densidad a un operador que contiene la información de correladores tanto en espacio como en tiempo.

## 7.2 Introducción

La mecánica clásica está construida sobre las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana, ambas desarrolladas antes de la llegada de la relatividad y la mecánica cuántica (MC). A pesar de los cambios revolucionarios introducidos por estas teorías posteriores, los formalismos de Lagrange y Hamilton han permanecido en gran medida sin modificaciones. El enfoque Lagrangiano ha demostrado ser muy adecuado para manejar las simetrías del espacio-tiempo reveladas por las teorías de Einstein, mientras que el enfoque Hamiltoniano ha inspirado ampliamente el marco de la MC y define el procedimiento canónico para cuantizar una teoría dada. El uso de la formulación Hamiltoniana en la relatividad es menos natural: el proceso de pasar de un Lagrangiano a un Hamiltoniano implica seleccionar una variable de tiempo específica, lo que tiene el efecto de distinguir a un observador particular por sobre los demás. Esta ruptura explícita de las simetrías relativistas es heredada por el espacio de fases de la formulación Hamiltoniana y se transmite a las reglas algebraicas que subyacen a toda teoría cuántica.

Al mismo tiempo, es ampliamente conocido que las teorías cuánticas de campos relativistas (usaremos la abreviación anglosajona QFT) producen predicciones independientes del observador, incluso si se sigue un enfoque Hamiltoniano canónico. Esta característica importante, discutida en los años fundacionales de las QFTs [11], también es validada por las expresiones relacionadas en la formulación del Integral de Caminos de Feynman [12, 118], que enfatiza los Lagrangianos sobre los Hamiltonianos. El precio a pagar por usar las “Path Integrals” (PI) es que la estructura convencional de espacio de Hilbert de la MC canónica es reemplazada por el uso de “sumas sobre historias” en el espacio de configuración clásico.

Lo anterior parece indicar que las asimetrías entre el espacio y el tiempo a nivel cuántico no son fundamentales sino más bien un artefacto de la formulación Hamil-

toniana canónica. Entonces, se puede plantear el problema de formular la MC de manera que extienda los elementos matemáticos familiares, como estados y operadores, para que sean simétricos en el espacio-tiempo. Varias discusiones relacionadas con este tema, que se aplican tanto a teorías relativistas como no relativistas, han surgido recientemente [2-4, 28, 30-33, 119-121]. Estas discusiones resaltan que lo anterior es un problema abierto y desafiante de interés actual: una solución genuina tiene el potencial de extender las intuiciones asociadas con las correlaciones cuánticas al dominio del tiempo. Por ejemplo, la reciente discusión sobre el espacio emergiendo del entrelazamiento [122, 123] no puede extenderse de manera directa al tiempo (y luego al espacio-tiempo). Cambiando a áreas más aplicadas, ya se han propuesto protocolos de computación cuántica que emplean ideas de tiempo cuántico [29, 43, 44] para mapear complejidades temporales a espaciales [6, 124]. También está claro que el tema es relevante en escenarios donde la covarianza general entra en juego, como en la gravedad cuántica, en cuyo caso el uso de técnicas convencionales de QFT no es suficiente [14, 15, 24, 25, 37, 66, 110, 125]. El problema requiere una revisión crítica de todos los aspectos involucrados, incluyendo las formulaciones básicas de la mecánica clásica y, en particular, del espacio fase de la formulación Hamiltoniana.

En este capítulo, introducimos un marco que integra sin problemas la covarianza relativista en un espacio fase extendido que puede ser cuantizado de manera directa. Nuestro enfoque principal es el caso de las teorías de campos de la relatividad especial, un escenario que nos permite sentar las bases de una MC simétrica en el espacio-tiempo guiada por la simetría de Lorentz. Notablemente, varios conocimientos revelados por el caso relativista, incluido un mapa a la MC convencional, se pueden aplicar a cualquier teoría mecánica cuántica, incluidas las teorías no relativistas. Como remarcamos a lo largo del capítulo, se puede considerar el marco final como un conjunto independiente (simétrico en el espacio-tiempo) de reglas para formular la MC, y explorar sus consecuencias desde el punto de vista de la MC como una generalización de la teoría de probabilidades clásica. Este punto de vista complementario de nuestro trabajo, que parece ser particularmente adecuado para abordar los problemas de fundamentos mencionados anteriormente, solo se explora preliminarmente.

La construcción comienza modificando el espacio fase convencional de la dinámica Hamiltoniana de dos maneras: En primer lugar, la elección del tiempo de la transformación de Legendre, que define el Hamiltoniano a partir de un Lagrangiano dado, se trata como dinámica. En segundo lugar, se introducen Corchetes de Poisson

(CP) espacio-temporales para campos de materia que no distinguen entre espacio y tiempo. Se proporciona una manera directa de recuperar la dinámica clásica utilizando el espacio fase ampliado y la acción clásica (escrita en términos de las variables del espacio fase ampliado). Las nuevas versiones de las ecuaciones de Hamilton son explícitamente covariantes, una característica que en la mecánica clásica convencional solo se logra en el espacio de configuración. Todas estas características clásicas se presentan en la sección 7.3 después de un ejemplo introductorio proporcionado en la sección 7.3.1.

Luego, en la sección 7.4 se propone una versión espacio-temporal de la MC reemplazando todos los CP por conmutadores (en el caso bosónico; ver comentarios en la sección 7.6). Una consecuencia directa es que la foliación también se cuantiza, permitiendo una definición geométrica de las transformaciones espacio-temporales, que no depende de la dinámica. La acción se cuantiza también, dando lugar a un operador de “acción cuántica espacio-temporal”, un objeto recientemente introducido en [3, 4] (ver también [87]), aquí modificado para tener en cuenta una foliación dinámica. En esta sección, también mostramos cómo la diagonalización de acciones cuánticas libres conduce a partículas con una relación de dispersión general. La única diferencia entre partículas en capa de masa y fuera de la capa de masa es si conmutan o no con la acción. En ambos casos, sus propiedades de transformación están bien definidas, como lo inducen las propiedades de transformación de los campos, momentos, foliación y operadores de acción de teorías relativistas.

En nuestro marco, los operadores en diferentes tiempos conmutan, y el tiempo se trata como un “índice” geométrico, en completa analogía con el espacio e indistinguible de este a nivel algebraico. Esto plantea el desafío de recuperar la evolución de la MC convencional (en una foliación dada) dentro de lo que es esencialmente un marco no causal. Notablemente, este problema se puede resolver como se presentó recientemente en [4]. En la sección 7.4.3, desarrollamos algunas de las ideas presentadas en [4] más a fondo para establecer una correspondencia general entre la formulación espacio-temporal y QFT convencional a través de funciones de correlación en una foliación fija. El límite clásico también se analiza y se señalan algunas posibles conexiones con holografía [126].

Además, la emergencia previa de la evolución temporal admite una interpretación natural en términos de un estado puro generalizado (proyector no ortogonal) que involucra un entorno correlacionado con el sistema dado. Este objeto matemático, que podemos identificar con una generalización natural de la noción de estado al



espacio-tiempo, codifica toda la información sobre el estado inicial, su evolución y la estructura causal de la teoría. Para teorías libres, se puede construir a partir de un par de vacíos globales conjugados entrelazados que abarcan el sistema y un entorno, y en general está asociado con una purificación generalizada que involucra la acción cuántica. También comentamos cómo la formulación da un nuevo significado operacional a las funciones de correlación, permitiendo así el uso de protocolos de computación cuántica para su estimación. Todas estas características se describen en la sección 7.4.4 para un campo escalar, mientras que comentarios adicionales para el espacio-tiempo discreto y sistemas generales se proporcionan en los Apéndices 7.3 y 7.4.

La sección 7.5 trata sobre el hecho de que los estados propios invariantes de la acción están entrelazados en la partición materia-foliación. Como consecuencia, la noción de partícula se vuelve no separable de la foliación. En particular, mostramos que los operadores de escalera deben entenderse como operadores controlados por la foliación, teniendo así estados propios entrelazados. Además, los estados propios invariantes son necesariamente entrelazados y tienen la estructura subyacente al mecanismo de Page y Wootters (PW) [14]. Explotamos esta analogía para introducir la noción de condicionamiento en estados de foliación, mostrando que para estados tipo clásicos se recupera la correspondencia de la sección 7.4.3. Finalmente, mostramos cómo las predicciones físicas de la teoría se transforman adecuada y explícitamente una vez que la foliación es cuántica. La posibilidad de efectos genuinos de foliación cuántica también se considera brevemente.

Finalmente, en 7.6, se discute la relevancia de nuestros resultados en diferentes contextos, junto con las perspectivas futuras de la formulación propuesta, y su posible impacto en la formulación canónica de gravedad cuántica y en temas de fundamentos y computación cuántica.

## 7.3 Formalismo de espacio de fases en el espacio-tiempo

### 7.3.1 Una analogía espacial introductoria al problema

Comenzamos nuestra discusión proporcionando un ejemplo sobre cómo una transformación de Legendre de la acción y el espacio fase resultante pueden ocultar una simetría espacial explícita de un sistema. Consideremos la siguiente densidad La-

grangiana  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_y\phi)^2$ . Es claro que el Lagrangiano tiene una simetría rotacional en  $(x, y)$  como parte de su simetría de Lorentz, que se manifiesta en las ecuaciones de movimiento  $\partial_\mu\partial^\mu\phi = \partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi - \partial_y^2\phi = 0$ . Ahora introduzcamos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \pi] &:= \partial_y\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_y\phi)} - \mathcal{L} \\ &= -\frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2\end{aligned}\tag{7.1}$$

que es una densidad “Hamiltoniana” definida por la transformada de Legendre que reemplaza  $-\partial_y\phi \rightarrow \pi$ . Aunque ciertamente es un cambio de variables mal motivado,  $\mathcal{H}$  debería conservar la información completa del sistema, ya que la transformación es invertible. De hecho, un uso directo de la ecuación de movimiento produce las ecuaciones

$$\begin{aligned}\partial_y\pi &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} = -\partial_t^2\phi + \partial_x^2\phi \\ \partial_y\phi &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} = -\pi,\end{aligned}\tag{7.2}$$

que tienen la forma de las ecuaciones de Hamilton en las nuevas variables. Claramente, después de derivar la primera ecuación con respecto a  $\partial_y$ , la segunda ecuación devuelve  $\partial_\mu\partial^\mu\phi = 0$ . También se pueden obtener (7.2) a partir de una variación de la acción en variables del espacio fase <sup>1</sup>. Notemos que el lado derecho de (7.2) se puede escribir en términos de corchetes de Poisson (CP), es decir,  $-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} = \{\pi, H\}$ ,  $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} = \{\phi, H\}$ , donde  $H = \int dt dx \mathcal{H}$  es la “Hamiltoniana” y los CP canónicos aquí son

$$\{\phi(t, x), \pi(t', x')\} = \delta(t - t')\delta(x - x')\tag{7.3}$$

a  $y$  fijo (con los otros CP nulos). Las versiones cuánticas (conmutadores) de tales CP “rotados” fueron utilizadas recientemente en [97] para definir “entrelazamiento temporal”.

Curiosamente, vemos que uno puede recuperar las ecuaciones de movimiento apropiadas a partir de los CP que tratan a  $t$  en igualdad de condiciones con  $x$ . Además, estas relaciones canónicas se preservan explícitamente por una transformación

---

<sup>1</sup>Notemos que la variación en variables del espacio fase de la acción  $S = \int dt dx dy (\pi\phi_y - \mathcal{H})$ , con  $\mathcal{H}$  en (7.1), está bien definida (aquí  $\phi_{x^\mu} \equiv \partial_\mu\phi$ ). De hecho, se obtiene  $\delta S = \int dt dx dy [(\phi_y + \pi)\delta\pi - (\pi_y + \phi_{tt} - \phi_{xx})\delta\phi] + \int dx dt \pi\delta\phi|_{y_i}^{y_f} + \int dx dy \phi_t\delta\phi|_{t_i}^{t_f} - \int dy dt \phi_x\delta\phi|_{x_i}^{x_f}$ . Todos los términos de frontera desaparecen bajo suposiciones estándar, a saber  $\delta\phi(t_i) = \delta\phi(t_f) = 0$  y  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} \rightarrow 0$  para  $|x_i|$  grande en variedades no compactas, o  $\delta\phi = 0$  en todas las fronteras de un espacio-tiempo compacto [127]. Así, no surge ningún problema de “diferenciabilidad” [128]. Notemos, sin embargo, que  $\mathcal{H}$  en (7.1) no es positivo definido.

de Lorentz de la forma  $\phi(t, x) \rightarrow \phi(t', x')$ ,  $\pi(t, x) \rightarrow \pi(t', x')$ , que ahora se tratan como transformaciones simplécticas convencionales, en analogía con las rotaciones.

En cambio, las rotaciones en el plano  $(x, y)$  ya no pueden tratarse en su carácter geométrico natural: desde el punto de vista del espacio fase, una rotación involucra el parámetro de “evolución”  $y$ ; su descripción se convierte formalmente en un problema dinámico. Nótese también que solo aparece la derivada con respecto a  $x$  en  $\mathcal{H}$ , y la simetría está oculta. Esto es, por supuesto, un artefacto introducido por la transformación de Legendre “espacial” y la estructura del espacio fase asociada. De hecho, en la formulación Hamiltoniana convencional basada en  $\pi = \partial_t \phi$  los CP  $\{\phi(x, y), \pi(x', y')\} = \delta(x - x')\delta(y - y')$  se preservan explícitamente por una rotación. Por el contrario, en este enfoque convencional ya no podemos tratar las transformaciones de impulso como transformaciones simplécticas.

Un problema claro con la transformación de Legendre anterior es su selección de una dirección particular en el espacio. Claramente, un segundo “observador” puede elegir cualquier otra dirección  $y'$  y construir su propio espacio fase y CP canónicos a un  $y'$  fijo. Sin embargo, no hay una regla simple que relacione las dos construcciones que no involucre información dinámica a menos que  $y = y'$  (incluso si las condiciones iniciales se imponen a un  $t$  fijo, los espacios fase no incluyen  $y$  ( $y'$ )). Para conectar estos dos espacios fase diferentes necesitamos de alguna manera hacer seguimiento de la elección del momento. Además, para unificarlos se debe considerar una extensión de los CP que incluya todas las dimensiones espaciales. Estas son las principales modificaciones al enfoque Hamiltoniano convencional que desarrollamos en la próxima sección para el espacio-tiempo.

Nótese que otra posibilidad es incluir un segundo momento en la dirección  $x$  y tratar con una estructura multisimpléctica. No seguimos este enfoque diferente que ha sido explorado por otros autores [129-133] y cuya cuantización no es directa [132]. Además, recientemente se ha demostrado que una manera de cuantizar estas teorías es construir un momento canónico a partir de un poli-momento primero [134]. Uno podría usar esta ruta para relacionar nuestro trabajo con ideas multisimplécticas; sin embargo, nuestra propuesta es independiente de estas construcciones ya que no requiere tal paso preliminar.

### 7.3.2 Transformación de Legendre covariante

La situación que hemos descrito en el espacio, es análoga a la asimetría convencional en espacio-tiempo que se origina al separar el papel del espacio y el tiempo de

la misma manera que (7.1) separa  $x$  y  $y$  en nuestro “experimento” anterior. En esta sección generalizamos la definición convencional del momento a través de una transformación de Legendre covariante para eliminar la necesidad de una elección preferida del tiempo.

La idea clave es que el momento convencional conjugado a un campo dado  $\phi$  se puede escribir como

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(n^\mu \partial_\mu \phi)} \quad (7.4)$$

para  $n^\mu = \eta^{\mu 0}$ , con la convención para la métrica  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ . Pero esta elección de  $n^\mu$  es arbitraria, el único requisito para un espacio-tiempo plano y foliación siendo un vector *temporal*  $n^\mu n_\mu = 1$ , tal que describe observadores inerciales (no se considerarán vectores tipo espacio en el resto de este trabajo).

Por ejemplo, en el caso de  $1 + 1$  dimensiones podemos separar el tiempo y el espacio eligiendo una base  $n^\mu$ ,  $n_1^\mu$  con  $n_1^\mu n_\mu = 0$  y  $n_1^\mu n_{1\mu} = -1$ . Una parametrización general es proporcionada por observadores inerciales a una velocidad relativa  $v = \tanh \eta$  a un marco de referencia en “reposo” ( $n^\mu \equiv \eta^{\mu 0}$ ) de tal manera que su elección corresponde a

$$n^\mu = (\cosh \eta, \sinh \eta), \quad n_1^\mu = (\sinh \eta, \cosh \eta).$$

Ahora podemos introducir un  $\mathcal{H}$  covariante como la transformación de Legendre  $n$ -dependiente de  $\mathcal{L}$  definida como sigue:

$$\mathcal{H}[\phi, \pi, n_1^\mu \partial_\mu \phi] := \pi n^\mu \partial_\mu \phi - \mathcal{L}. \quad (7.5)$$

La densidad Hamiltoniana  $\mathcal{H}$  es una función del momento  $\pi$  definido como en (7.4) pero por una dirección arbitraria  $n^\mu$ , y las derivadas que son ortogonales a esa dirección (en este caso solo hay una). Nótese que esto no es un formalismo multisimplético: solo se ha introducido un momento, simplemente retenemos la información de la elección del tiempo.

Para escribir (7.5) explícitamente, se necesitan  $\partial_\rho \phi$  en términos de las derivadas perpendiculares. Para el caso de  $1 + 1$ , estas se obtienen fácilmente como

$$\partial_\rho \phi = n_\rho n^\mu \partial_\mu \phi - n_{1\rho} n_1^\mu \partial_\mu \phi = n_\rho \pi - n_{1\rho} n_1^\mu \partial_\mu \phi. \quad (7.6)$$

Ahora es sencillo reescribir cualquier  $\mathcal{L}$  como función de las nuevas variables.

Como ejemplo concreto, consideremos un campo escalar con densidad Lagrangiana  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2$ . Usando la Ec. (7.6) para escribir  $(\partial_\rho \phi)^2 = (n_\rho \pi)^2 +$

$(n_{1\rho}n_1^\mu\partial_\mu\phi)^2$ , la densidad Hamiltoniana covariante para un  $n^\mu$  tipo tiempo se puede escribir como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(n_1^\mu\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (7.7)$$

donde estamos omitiendo el argumento de  $\mathcal{H}$  para simplificar la notación. Para  $n^\mu = (1, 0)$  se recupera la densidad Hamiltoniana usual  $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\partial_1\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2$ . Sin embargo, para  $n^\mu$  generales, la contracción de los índices indica simetría de Lorentz. También se nota que para un  $n^\mu$  tipo tiempo la densidad Hamiltoniana es positiva.

Las ecuaciones de Hamilton correspondientes a  $\mathcal{H}$  tienen la misma forma que antes con las derivadas temporales  $\partial_t$  generalizadas a  $n^\mu\partial_\mu$ . Esto se puede ver fácilmente aplicando el principio de acción mínima en el espacio de fases <sup>2</sup> a

$$\mathcal{S} = \int d^{d+1}x (\pi n^\mu\partial_\mu\phi - \mathcal{H}), \quad (7.8)$$

un resultado que vale para campos generales, teorías y dimensiones  $D = d + 1$ . Para la Hamiltoniana (7.7) se obtienen

$$n^\mu\partial_\mu\pi = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} = (n_1^\mu n_1^\nu\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\phi \quad (7.9a)$$

$$n^\mu\partial_\mu\phi = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} = \pi \quad (7.9b)$$

lo que implica automáticamente (actuando con  $n^\mu\partial_\mu$  en la segunda ecuación)

$$\underbrace{[(n^\mu n^\nu - n_1^\mu n_1^\nu)]}_{\eta^{\mu\nu}} \partial_\mu\partial_\nu\phi + m^2\phi = 0 \quad (7.10)$$

que es simplemente la ecuación de Klein-Gordon. Claramente, la densidad Hamiltoniana convencional también produce esta ecuación covariante de segundo orden para  $\phi$ , sin embargo, no proporciona ecuaciones covariantes de primer orden separadas para  $\phi$  y  $\pi$  como las obtenidas en (7.9).

Además, el aspecto covariante de  $\mathcal{H}$  es nuevo y no solo formal: bajo transformaciones de Lorentz se tiene

$$\phi(x) \rightarrow \phi(\Lambda x) \quad (7.11a)$$

$$n^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu n^\nu \quad (7.11b)$$

$$\pi(x) \rightarrow \pi(\Lambda x) \quad (7.11c)$$

---

<sup>2</sup>asumiendo condiciones de frontera estándar, es decir, campos que desaparecen asintóticamente para  $|\mathbf{x}|$  grande, de acuerdo con  $n^\mu$  tipo tiempo

donde las ecuaciones (7.11b-7.11c) son una novedad del formalismo, mientras que (7.11a) se mantiene para un campo escalar. La ley de transformación de  $\pi$  se sigue de  $\pi = n^\mu \partial_\mu \phi$  asumiendo (7.11a) y (7.11b). La novedad importante es que bajo estas transformaciones la densidad Hamiltoniana se transforma como

$$\mathcal{H}(x) \rightarrow \mathcal{H}(\Lambda x), \quad (7.12)$$

es decir, es *un escalar de Lorentz*. Esto es compatible con la nueva relación entre  $\mathcal{H}$  y el tensor energía-momento que se encuentra fácilmente ser  $\mathcal{H} = n_\mu n_\nu T^{\mu\nu}$ .

Todas las propiedades anteriores se mantienen en dimensiones arbitrarias  $d + 1$  con el  $\mathcal{H}$  covariante siempre definido como en la Ec. (7.5). Por ejemplo, la generalización a  $d + 1$  de (7.7) es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(n^\mu n^\nu - \eta^{\mu\nu})\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad (7.13)$$

con el tensor  $n^\mu n^\nu - \eta^{\mu\nu}$  proyectando sobre las  $d$  direcciones espaciales  $n_i^\mu$  ortogonales a  $n^\mu$ , de tal manera que el término central en (7.13) es  $\sum_{i=1}^d (n_i^\mu \partial_\mu \phi)^2$ . Esto se puede ver fácilmente notando que los ejes completos del “marco de referencia” se pueden escribir como  $n_\alpha^\mu \equiv \partial x'^\mu / \partial x^\alpha$  con  $n_0^\mu \equiv n^\mu$  y utilizando

$$\eta^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \eta^{\alpha\beta} = n^\mu n^\nu - \sum_{i=1}^d n_i^\mu n_i^\nu \quad (7.14)$$

para  $x'^\mu$  relacionado con  $x^\mu$  a través de una transformación de Lorentz. Esto permite escribir  $\mathcal{H}$  como una función solo de  $n^\mu$  (en lugar de todos los  $n_\alpha^\mu$ ).

Las nuevas propiedades de transformación también implican la invariancia de la transformación de Legendre “integrada”

$$\mathcal{P}_0 := \int d^{d+1}x \pi n^\mu \partial_\mu \phi. \quad (7.15)$$

Como consecuencia, la acción en variables del espacio de fases (7.8) siempre tiene una expresión invariante de Lorentz también. Para el ejemplo del campo escalar se obtiene

$$\mathcal{S} = \int d^{d+1}x \left[ \pi n^\mu \partial_\mu \phi - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(n^\mu n^\nu - \eta^{\mu\nu})\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \right]. \quad (7.16)$$

En contraste, la acción convencional en el espacio de fases,  $\mathcal{S} = \int d^{d+1}x (\pi \dot{\phi} - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2)$  oculta la simetría de Lorentz ya que corresponde a elegir una dirección de tiempo  $n^\mu = \eta^{\mu 0}$  en (7.16).

En general, también es factible dejar la longitud  $n^\mu n_\mu$  arbitraria (pero no nula), sin afectar la ecuación final de Klein-Gordon (ver Apéndice 7.1). Mencionemos también que el tratamiento de campos no escalares se puede desarrollar siguiendo las mismas líneas presentadas en esta sección, simplemente adaptando las reglas de transformación (7.11). Esto se muestra en el caso de un campo de Dirac en el Apéndice 7.2. Allí se ejemplifican resultados principales adicionales para este campo, mientras que el ejemplo básico en el texto principal es el campo de Klein-Gordon.

### 7.3.3 Estructura simpléctica en el espacio-tiempo

El espacio fase convencional asociado con nuestra construcción previa corresponde a álgebras canónicas satisfechas en hipersuperficies fijas por los campos de materia. Para cada elección de  $n^\mu$ , se debe definir una estructura simpléctica. Por otro lado, nuestro objetivo es mantener  $n^\mu$  general y promoverlo a una variable “dinámica”, en el sentido explicado después de la Ec. (7.22), lo que involucra un álgebra de foliación.

Para mantener las álgebras de materia-foliación separadas, introducimos otro elemento en el formalismo: extendemos el espacio fase tratando cada campo en el espacio-tiempo y su momento conjugado como variables canónicas independientes que satisfacen

$$\{\phi(x), \pi(y)\} = \delta^{(d+1)}(x - y). \quad (7.17)$$

Los corchetes de Poisson se definen como de costumbre pero abarcan todas las variables

$$\{f, g\} = \int d^{d+1}x \left( \frac{\delta f}{\delta \phi(x)} \frac{\delta g}{\delta \pi(x)} - \frac{\delta g}{\delta \phi(x)} \frac{\delta f}{\delta \pi(x)} \right) \quad (7.18)$$

en perfecta simetría espacio-temporal<sup>3</sup> e independiente de cómo uno folie el espacio-tiempo.

Esta estructura simpléctica extendida permite un tratamiento directo de las simetrías del espacio-tiempo: Primero, la Ec. (7.17) implica

$$\{\phi, \mathcal{P}_0\} = n^\mu \partial_\mu \phi, \quad \{\pi, \mathcal{P}_0\} = n^\mu \partial_\mu \pi \quad (7.19)$$

lo que significa que  $\mathcal{P}_0$ , la transformación de Legendre integrada en el tiempo, genera traslaciones temporales en la dirección  $n^\mu$ . En este marco, las traslaciones temporales

---

<sup>3</sup>Desde la perspectiva matemática podemos identificar el espacio fase resultante  $\Omega$  con el límite  $N \rightarrow \infty$  del producto directo  $\Omega \equiv \omega_t^{\times N}$  para  $\omega_t$  el espacio fase tradicional definido en un  $t$  fijo. Esta es precisamente la estructura matemática convencionalmente aplicada a campos en el espacio de tal manera que  $\omega_t \equiv \omega_{tx}^{\times M}$  para  $M$  rebanadas espaciales y  $\omega_{tx}$  el espacio fase de un oscilador individual. En resumen, podríamos escribir  $\Omega \equiv \omega_{tx}^{\times N \cdot M}$ .

son geométricas e independientes de la evolución. Esto se refleja en el hecho de que  $\mathcal{P}_0$  genera las transformaciones y no el Hamiltoniano (este punto se discute más adelante cuando se considera la evolución en la Sección 7.3.4).

Para  $n^\mu = (1, 0, \dots)$  también podemos escribir  $\{\phi, \mathcal{P}_\mu\} = \partial_\mu \phi$  para  $\mathcal{P}_\mu = \int d^{d+1}x \pi \partial_\mu \phi$  que para  $\mu = 1, \dots, d+1$  es simplemente el momento convencional llevado por el campo integrado en el tiempo. Además,

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} := \int d^{d+1}x \pi (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \phi \quad (7.20)$$

genera las transformaciones de Lorentz

$$\{\mathcal{L}_{\mu\nu}, \phi\} = -(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \phi \quad (7.21a)$$

$$\{\mathcal{L}_{\mu\nu}, \pi\} = -(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \pi. \quad (7.21b)$$

A través de la exponenciación de las transformaciones anteriores, se obtienen así transformaciones de Poincaré generales finitas. En particular, se recuperan las propiedades de transformación de  $\phi$  y  $\pi$  en la Ec. (7.11). La adición de espín es directa pero introducida en el Apéndice 7.2 por simplicidad.

Para obtener la ley de transformación de  $n^\mu$  de manera similar, se puede definir una estructura simpléctica adicional: introducimos un momento conjugado  $\kappa_\nu$  tal que

$$\{n^\mu, \kappa_\nu\} = \eta^\mu_\nu. \quad (7.22)$$

Se puede imponer  $n^\mu n_\mu - 1 \approx 0$  como una restricción débil. Ahora es factible introducir  $l_{\mu\nu} = n_\nu \kappa_\mu - n_\mu \kappa_\nu$  de tal manera que

$$\{l_{\alpha\beta}, n_\mu\} = n_\alpha \delta_{\mu\beta} - n_\beta \delta_{\mu\alpha}. \quad (7.23)$$

Entonces

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} := \mathcal{L}_{\mu\nu} + l_{\mu\nu} \quad (7.24)$$

genera la transformación completa (7.11). Dentro de este formalismo, afirmar que una teoría es invariante de Lorentz es explícito <sup>4</sup> (ver, por ejemplo, la acción en la Ec. (7.16)):

$$\{\mathcal{S}, \mathcal{J}_{\mu\nu}\} = 0. \quad (7.25)$$

Nótese que  $\{\phi, n^\mu\} = \{\phi, \kappa^\mu\} = \{\pi, n^\mu\} = \{\pi, \kappa^\mu\} = 0$ , de tal manera que  $\{\mathcal{L}_{\mu\nu}, l_{\alpha\beta}\} = 0$ , en otras palabras, las álgebras son independientes. Por otro lado,  $\mathcal{S}$  tiene un CP no

---

<sup>4</sup>Notemos que agregar en un campo escalar un término  $\int d^{d+1}x \lambda(x) \phi^n(x)$  con  $\lambda(x) \neq \lambda(\Lambda x)$  o en un campo espinorial agregar  $\int d^{d+1}x \psi^\dagger \psi$  (ver Apéndice B) llevan a  $\{\mathcal{J}_{\mu\nu}, \mathcal{S}\} \neq 0$ . Esto es, términos que no respetan la simetría de Lorentz en el sentido usual, arruinan la condición.



nulo con todas las variables excepto con  $n^\mu$ , en particular  $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}_{\mu\nu}\} = -\{\mathcal{S}, l_{\mu\nu}\} \neq 0$ . Además, se debe notar que los generadores  $\mathcal{J}_{\mu\nu}$  son independientes del Hamiltoniano, lo que significa que hemos separado exitosamente las transformaciones de coordenadas de la dinámica.

La introducción de una estructura simpléctica asociada con  $n^\mu$  proporciona la pieza final para un tratamiento elegante de las simetrías del espacio-tiempo dentro de un marco de espacio de fases. Sin embargo, a primera vista, parece injustificado físicamente ya que no se ha introducido ninguna dinámica asociada. Al reflexionar, situaciones similares surgen en muchos escenarios físicos: considere, por ejemplo, una partícula en un campo magnético externo  $\mathbf{B}$  con acoplamiento  $H_{\text{int}} \propto -\mathbf{B} \cdot \mathbf{M}$  para  $\mathbf{M}$  el vector del momento magnético asociado con la partícula. Está claro que  $H_{\text{int}}$  exhibe simetría rotacional, incluso si no asociamos una estructura simpléctica con  $\mathbf{B}$  que implemente rotaciones. Sin embargo, podemos tratar  $\mathbf{B}$  como un campo dinámico formal en un espacio de fases adicional y definir un operador de rotación total  $R^{\text{tot}}$  que también rota  $\mathbf{B}$  tal que  $\{H_{\text{int}}, R^{\text{tot}}\} = 0$ , incluso si no aparecen términos dependientes del momento en  $H_{\text{int}}$  ( $\{H_{\text{int}}, \mathbf{B}\} = \mathbf{0}$ ). La descripción Hamiltoniana genuina del campo tiene una estructura simpléctica asociada que puede coincidir con la formal, pero se puede ignorar cuando se trata como una fuente externa.

Podemos especular que una situación similar puede surgir en investigaciones futuras con  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} + \mathcal{S}_{n^\mu}$  para  $\mathcal{S}_{n^\mu}$  incluyendo  $\kappa^\mu$  justo como  $H_{\text{int}} \rightarrow H_{\text{int}} + H_{A^\mu}$  hace dinámicos a  $A^\mu$  y  $\mathbf{B}$ . Aunque hemos introducido un espacio de fases de foliación por conveniencia matemática, una teoría de una métrica dinámica y foliaciones asociadas puede proporcionar una descripción dinámica genuina de  $n^\mu$  (ver también la discusión cuántica en las secciones 7.4.2-7.5). Por el contrario, las consideraciones en este trabajo apuntan a su existencia.

### 7.3.4 Ecuaciones de movimiento a partir de corchetes extendidos

En el nuevo marco surge una imagen “atemporal”: todas las variables espacio-temporales, incluyendo  $t \equiv x^\mu n_\mu$ , son índices de sitio de campos independientes en el espacio-tiempo. No hay ninguna variable que parametrize la evolución y no se asume una estructura causal a priori. Sin embargo, cualquier información dinámica debe codificarse dentro del espacio fase extendido dado que ya contiene al “tiempo”.

Notablemente, la nueva estructura simpléctica proporciona una forma elegante

de introducir evolución: la definición de los corchetes extendidos produce

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} = \left\{ \phi, \int d^{d+1}x \mathcal{H} \right\}, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = \left\{ \pi, \int d^{d+1}x \mathcal{H} \right\}. \quad (7.26)$$

Como consecuencia, la acción  $\mathcal{S}$  definida en (7.8) surge naturalmente como la diferencia entre las Ecs. (7.26) y (7.19) de tal manera que

$$n^\mu \partial_\mu \pi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = \{\pi, \mathcal{S}\} \quad (7.27a)$$

$$n^\mu \partial_\mu \phi - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} = \{\phi, \mathcal{S}\}. \quad (7.27b)$$

Cuando se igualan a cero, son precisamente las ecuaciones de Hamilton. Podemos definir un “subespacio físico” (o subvariedad) como

$$\{\pi(x), \mathcal{S}\} = \{\phi(x), \mathcal{S}\} \approx 0, \quad (7.28)$$

impuesto para todos los puntos del espacio-tiempo  $x$ . En esta formulación, estas deberían considerarse igualdades débiles con la evolución emergiendo de las propias restricciones. Imponen una igualdad entre desplazamientos en el tiempo, como los generados por  $\mathcal{P}_0$  (Ecs. (7.19)), y la transformación generada por el Hamiltoniano.

Por ejemplo, para el campo de Klein-Gordon la acción está dada por (7.16) que, con la adición de un término potencial  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} + \mathcal{V}(\phi)$ , produce

$$\begin{aligned} \{\pi(x), \mathcal{S}\} &= n^\mu \partial_\mu \pi - (n^\mu n^\nu - \eta^{\mu\nu}) \partial_\mu \partial_\nu \phi + m^2 \phi + \mathcal{V}'(\phi) \\ \{\phi(x), \mathcal{S}\} &= n^\mu \partial_\mu \phi - \pi. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Cuando estos se igualan a cero se convierten en las ecuaciones de Hamilton (ver (7.9)) implicando

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi + \mathcal{V}'(\phi) = 0. \quad (7.30)$$

Es sugestivo notar que la relación  $\pi = n^\nu \partial_\nu \phi$  es compatible con

$$\{\kappa_\mu, \mathcal{L}(x)\} = (\pi(x) - n^\nu \partial_\nu \phi(x)) \partial_\mu \phi(x) \approx 0 \quad (7.31)$$

con  $\mathcal{L}$  la densidad Lagrangiana en (7.16) (tal que  $\mathcal{S} = \int d^{d+1}x \mathcal{L}(x)$ ). Entonces, ya que  $\{n^\mu, \mathcal{S}\} = 0$  se cumple trivialmente, mientras que  $\{\kappa^\mu, \mathcal{S}\} \approx 0$  sigue de (7.31), cualquier función en el espacio de fases de foliación “conmuta” con la acción (en el subespacio físico). Si se agregara alguna parte dinámica  $\mathcal{S}_{n^\mu}$  a  $\mathcal{S}$  ( $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} + \mathcal{S}_{n^\mu}$ ), la acción de foliación  $\mathcal{S}_{n^\mu}$  determinaría las ecuaciones de movimiento de la foliación independientemente de la acción original de los campos de materia  $\mathcal{S}$ .

Algunos comentarios sobre las unidades son necesarios: los campos ahora tienen unidades reescaladas con un factor  $T^{-1/2}$  debido al delta de tiempo adicional. Esto significa que se puede introducir un parámetro de tiempo  $\tau$  para multiplicar  $\phi, \pi$  por  $\sqrt{\tau}$ . Para acciones cuadráticas esto significa un factor general  $\tau$  de tal manera que  $\tau\mathcal{S}$  es adimensional de acuerdo con una interpretación de  $\mathcal{S}$  como generador en la “evolución  $\tau$ ”. Las Ecuaciones (7.28) entonces pueden identificarse como las condiciones que definen constantes de movimiento  $\tau$  y el CP extendido (7.17) con un álgebra canónica a “tiempos  $\tau$ ” iguales en una teoría  $d + 2$ . Sin embargo, nótese que esta analogía no se extiende al álgebra de foliación. Consideramos que es más apropiado tratar el formalismo como describiendo teorías  $D = d + 1$  a través de un nuevo conjunto de reglas en lugar de teorías en  $d + 2$  en un enfoque canónico (ver sin embargo los comentarios en la sección 7.4.3). En general, si  $\phi, \pi$  satisfacen las ecuaciones de movimiento que surgen de un  $\mathcal{S}$  reescalado, entonces  $\sqrt{\tau}\phi, \sqrt{\tau}\pi$  tienen las unidades correctas y satisfacen las ecuaciones de movimiento convencionales. En esta sección, simplemente establecemos  $\tau \equiv 1$  pero este parámetro tiene consecuencias importantes en el caso cuántico.

Mencionemos que en el Apéndice 7.2 también se desarrolla el caso de la acción de Dirac. Allí mostramos cómo recuperar la ecuación de Dirac a partir de las restricciones previas. Cabe destacar que la ecuación en su forma Hamiltoniana exhibe explícitamente la covarianza de Lorentz para  $n^\mu$  general. Esto concuerda con la Ec. (7.25), que se mantiene para la acción de Dirac y  $\mathcal{J}^{\mu\nu}$  incluyendo el momento angular de spin.

También notemos que el presente formalismo se puede aplicar a cualquier sistema clásico y no solo a campos: uno “promueve” variables  $q_i, p_j$  que satisfacen  $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$  a  $q_i(t), p_j(t)$  tal que

$$\{q_i(t), p_j(t')\} = \delta_{ij}\delta(t - t'). \quad (7.32)$$

Para recuperar la evolución, entonces se introduce una acción  $\mathcal{S} = \int dt (p_i \dot{q}_i - H)$  y se imponen

$$\{q_i, \mathcal{S}\} = \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \approx 0 \quad (7.33a)$$

$$-\{p_i, \mathcal{S}\} = \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \approx 0. \quad (7.33b)$$

Se reconocen nuevamente las ecuaciones de Hamilton impuestas como restricciones.

Es fácil ver que los subespacios físicos son invariantes bajo las simetrías de transformación de la acción. De hecho, el generador  $G$  de cualquier simetría satisface

$\{G, \mathcal{S}\} = 0$ . Entonces, para una función  $F[\phi, \pi]$  (o  $F[q, p]$ ) dentro del subespacio físico, la identidad de Jacobi implica

$$\{F, \mathcal{S}\} = 0 \Rightarrow \{\{G, F\}, \mathcal{S}\} = 0, \quad (7.34)$$

es decir, el  $F$  transformado también está en el subespacio físico. Un ejemplo es proporcionado por la simetría de Lorentz para el campo escalar, como se describe en (7.25).

## 7.4 Mecánica cuántica en el espacio-tiempo

### 7.4.1 Cuantización extendida

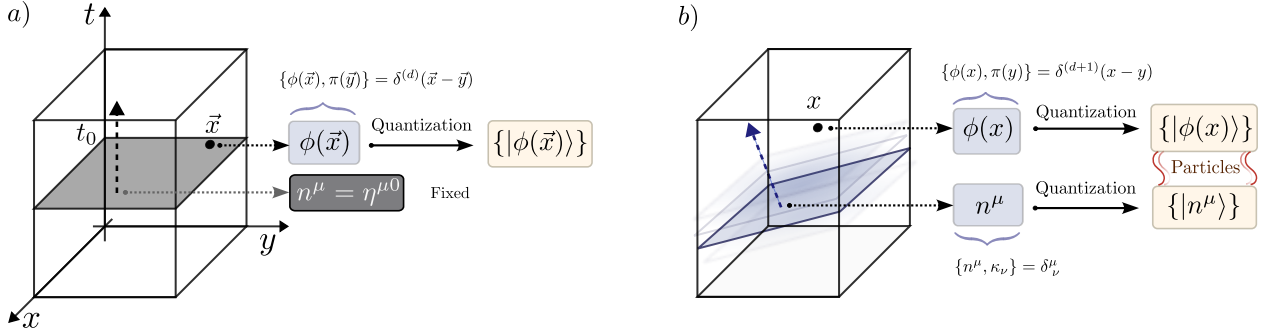


Figura 7.4.1: **Espacio fase estándar y cuantización versus el nuevo enfoque en el espacio-tiempo.** a) En la mecánica clásica Hamiltoniana, se define una estructura simpléctica para una elección fija de tiempo. La cuantización se realiza entonces en una hipersuperficie  $d$  dimensional dada promoviendo  $\phi(\mathbf{x})$  y  $\pi(\mathbf{x})$  a operadores cuánticos. Una base posible del espacio de Hilbert resultante está dada por configuraciones de campo en la hipersuperficie, denotadas por  $|\phi(\mathbf{x})\rangle$ . b) En el enfoque espacio-temporal, tanto los corchetes de Poisson como los conmutadores son simétricos en el espacio-tiempo y la foliación es “dinámica”. Una base del espacio de Hilbert está dada por el producto tensorial entre configuraciones espacio-temporales del campo  $|\phi(x)\rangle$  y los estados propios de la foliación  $|n\rangle \equiv |n^0, n^1, \dots, n^d\rangle$ . Operadores generales, como las acciones cuánticas del espacio-tiempo y los operadores de escalamiento resultantes (asociados con partículas “off-shell” extendidas) son no separables en la partición materia-foliación. Sus características covariantes explícitas se hacen factibles solo en el espacio de Hilbert completo.

El primer paso en la cuantización canónica convencional de una teoría Hamiltoniana es promover los corchetes de Poisson canónicos a conmutadores canónicos. Imponemos lo mismo a la álgebra extendida (7.17) implicando (establecemos  $\hbar \equiv 1$ )

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta^{(d+1)}(x - y), \quad (7.35)$$

con los demás conmutadores anulándose (también hemos asumido una álgebra bosónica). Entonces, cualquier función de las variables del espacio de fases también se promueve a un operador (a menos de las ambigüedades de ordenamiento usuales). Notablemente, en el esquema extendido esto significa que no solo el Hamiltoniano, sino también la acción  $\mathcal{S}$  expresada como en (7.8), ahora se promueven.

Es importante señalar que  $\phi(x) = \phi(t, \mathbf{x})$  no es el operador de campo evolucionado en el esquema de Heisenberg, sino que para cada tiempo se presenta un campo independiente y un momento asociado. En particular,

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t', \mathbf{x}')] = 0 \quad (7.36)$$

incluso para regiones causalmente conectadas. Esto es una declaración más fuerte que la microcausalidad; de hecho, no hay conexión causal entre campos (y momentos) en diferentes puntos del espacio-tiempo. En consecuencia, una base posible para este espacio de Hilbert está proporcionada por estados  $|\phi(x)\rangle$  que representan configuraciones de campo en *espacio-tiempo*, de tal manera que

$$\hat{\phi}(x)|\phi(x)\rangle = \phi(x)|\phi(x)\rangle, \quad (7.37)$$

con  $\langle\phi(x)|\phi'(x)\rangle = \delta^\infty[\phi(x) - \phi'(x)]$  equivalente al límite continuo de  $\prod_{x=(t,\mathbf{x})} \delta[\phi_x - \phi'_x]$ . También podemos considerar estos estados como estados de “trayectorias cuánticas” de estados propios de campo convencionales en un tiempo dado  $|\phi(\mathbf{x})\rangle$  en el sentido de que  $|\phi(x)\rangle \equiv \otimes_t |\phi_t(\mathbf{x})\rangle$  (con  $\langle\phi(\mathbf{x})|\phi'(\mathbf{x})\rangle = \delta^\infty[\phi(\mathbf{x}) - \phi'(\mathbf{x})]$ , ver también [3, 4] para una discusión más detallada). En otras palabras, el espacio de Hilbert que surge de (7.35) es isomorfo a un producto tensorial de copias en tiempo del espacio de Hilbert tradicional (esta declaración se vuelve rigurosa solo después de una discretización adecuada, ver Apéndice 7.4). Esto es válido para una álgebra bosónica, el caso fermiónico se puede desarrollar de manera similar con conmutadores reemplazados por anticonmutadores.

Como en el caso clásico Hamiltoniano, la ventaja de la álgebra extendida es el tratamiento explícito y geométrico de las simetrías del espacio-tiempo. De hecho, con estas definiciones se puede promover  $\mathcal{P}_0$  y  $\mathcal{L}_{\mu\nu}$  a operadores de tal manera que se obtiene una versión cuántica de las Ecs. (7.19, 7.21) reemplazando  $\{, \} \rightarrow -i[, ]$ . Entonces, por ejemplo,  $\mathcal{P}_0$  genera traslaciones geométricas en el tiempo como  $e^{i\tau\mathcal{P}_0}\phi(x)e^{-i\tau\mathcal{P}_0} = \phi(x^0 + \tau, \mathbf{x})$  para  $\tau \in \mathbb{R}$  y  $n^\mu = \eta^{\mu 0}$ .

Además, promovemos (7.22) a

$$[n^\mu, \kappa_\nu] = i\delta^\mu_\nu \quad (7.38)$$

como un álgebra independiente de los campos de materia, de tal manera que

$$[\phi(x), n^\mu] = [\phi(x), \kappa^\mu] = [\pi(x), n^\mu] = [\pi(x), \kappa^\mu] = 0. \quad (7.39)$$

Ahora podemos introducir el operador de momento angular total  $\mathcal{J}_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\mu\nu} + l_{\mu\nu}$ , como en la Ec. (7.24), con tanto  $\mathcal{L}$  como  $l$  ahora promovidos a operadores. Entonces, dentro del espacio de Hilbert completo podemos escribir la transformación de los operadores  $\phi$ ,  $n^\mu$  y  $\pi$  de forma unificada

$$\mathcal{U}^\dagger(\Lambda)\phi(x)\mathcal{U}(\Lambda) = \phi(\Lambda x) \quad (7.40a)$$

$$\mathcal{U}^\dagger(\Lambda)n^\mu\mathcal{U}(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu n^\nu \quad (7.40b)$$

$$\mathcal{U}^\dagger(\Lambda)\pi(x)\mathcal{U}(\Lambda) = \pi(\Lambda x), \quad (7.40c)$$

donde

$$\mathcal{U}(\Lambda) := \exp(i\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}/2) \quad (7.41)$$

es el operador unitario de Lorentz correspondiente a la transformación  $\Lambda = e^\omega$  ( $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ ). Las Ecuaciones (7.40) son, por supuesto, la versión cuántica de (7.11). Cabe destacar que la definición de  $\mathcal{U}(\Lambda)$  no involucra al Hamiltoniano, lo que significa que es independiente de la teoría.

La versión final del espacio de Hilbert que incluye la “foliación cuántica” se muestra en la Figura 7.4.1 y tiene una base de la forma

$$\{|\phi(x)\rangle \otimes |n\rangle\} \quad (7.42)$$

para  $\hat{n}^\mu |n\rangle = n^\mu |n\rangle$  ( $|n\rangle \equiv |n^0 \dots n^d\rangle$ ) y

$$\mathcal{U}(\Lambda)|\phi(x)\rangle \otimes |n\rangle = |\phi(\Lambda^{-1}x)\rangle \otimes |\Lambda^{-1}n\rangle. \quad (7.43)$$

Por supuesto, en el sector de foliación son posibles estados más generales  $|\psi\rangle = \int dn \psi(n)|n\rangle$  ( $dn \equiv dn^0 \dots dn^d$ ), incluyendo, por ejemplo, estados propios de momento, estados coherentes y estados de Fock. También se puede implementar la condición  $n^\mu n_\mu \approx 1$  como la restricción cuántica  $(n^\mu n_\mu - 1)|\psi\rangle = 0$  que solo permite la superposición de estados con  $n^2 = 1$  (asumido implícitamente a lo largo de esta sección).

Notablemente, un estado general mostrará claramente el entrelazamiento entre la partición materia-foliación. Esta característica emerge naturalmente del formalismo incluso cuando no se ha impuesto ningún mecanismo físico (no hemos considerado interacciones entre los sectores materia-foliación). En particular, la acción cuántica  $\mathcal{S}$  no es un operador producto, sino más bien un operador tipo “control”, es decir,

$$\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\hat{n}^\mu) = \int dn \mathcal{S}(n^\mu) \otimes |n\rangle\langle n|. \quad (7.44)$$

Este hecho tiene consecuencias que se discuten en las secciones 7.4.2 y 7.5. Por el momento, destacamos que es precisamente debido a esta estructura que podemos escribir

$$[\mathcal{S}, \mathcal{J}_{\mu\nu}] = 0, \quad (7.45)$$

indicando la covarianza de la acción explícitamente mientras

$$[\mathcal{S}, \mathcal{L}_{\mu\nu}] = -[\mathcal{S}, l_{\mu\nu}] \neq 0. \quad (7.46)$$

Notemos también que el Hilbert de  $n$  es isomorfo a una partícula  $d+1$ . Curiosamente, esta observación sugiere posibles conexiones con las recientes transformaciones de Marcos de Referencia Cuánticos [119] donde se define la noción de marco

de reposo de la partícula cuántica (sin embargo, la restricción enfatiza diferencias matemáticas e interpretativas importantes, al menos en esta etapa de desarrollo).

Es importante mencionar que en el contexto del enfoque de historias consistentes a la Mecánica Cuántica [24], también se ha reportado la necesidad de una foliación cuántica [133], un resultado que desafortunadamente no ha atraído mucha atención o desarrollo adicional. Aunque el tratamiento en [133] ha sido diferente (tanto clásicamente como en su versión cuántica) las razones para su introducción son las mismas: un tratamiento adecuado de las transformaciones de Lorentz en una QFT con álgebra extendida (también una característica del enfoque de Isham para historias continuas [110]).

### 7.4.2 Partículas Extendidas

Habiendo introducido el marco cinemático adecuado, comenzamos a discutir cómo introducir la dinámica dentro del formalismo. Una observación básica es que, dado que los campos en diferentes puntos del espacio-tiempo son independientes, no se asume causalidad a priori, y la evolución no puede corresponder a una transformación unitaria parametrizada como de costumbre: aunque “ $t$ ” es un parámetro, su significado es completamente diferente que en QFT convencional. Aquí se trata como un índice de “sitio” al igual que “ $\mathbf{x}$ ”. Sin embargo, nos gustaría recuperar las mismas predicciones de las MC tradicional con respecto a la evolución, al menos bajo suposiciones razonables como Hamiltonianos convencionales y foliaciones “clásicas” (posponemos la mayoría de la discusión sobre efectos relacionados con una foliación cuántica a la sección 7.5).

Como sugiere el caso clásico, la evolución debería surgir de la acción  $\mathcal{S}$ , ahora un operador cuántico. Consideremos como ejemplo concreto la acción de Klein-Gordon (7.16) con  $\phi, \pi, n^\mu$  operadores. Discutamos primero su diagonalización. Siendo un operador cuadrático para cada  $n^\mu$  fijo (ver Ec. (7.44)) su forma diagonal se logra fácilmente: expandimos los campos como

$$\phi(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{\sqrt{2E_p(n)}} (a(p)e^{-ipx} + h.c.) \quad (7.47a)$$

$$\pi(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (-i) \sqrt{\frac{E_p(n)}{2}} (a(p)e^{-ipx} - h.c.) \quad (7.47b)$$

para  $a^\dagger(p)$ ,  $a(p)$  operadores de creación (aniquilación) extendidos que satisfacen

$$[a(p), a^\dagger(p')] = (2\pi)^{(D)} \delta^{(D)}(p - p'), \quad (7.48)$$



con otros conmutadores anulándose. En estas expresiones

$$D = d + 1, \quad (7.49)$$

y hemos definido

$$E_p(n) := \sqrt{p^\mu p^\nu (\eta_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu) + m^2} \quad (7.50)$$

para  $n^\mu$  un operador: una función  $F$  de los operadores  $n^\mu$  debería interpretarse como  $F[n] \equiv \int dn F[n] |n\rangle \langle n|$  (para simplicidad, aquí hemos trabajado dentro del subespacio  $(n^\mu n_\mu - 1)|\psi\rangle = 0$ ; ver sección 7.5 y Apéndice 7.1).

En términos de estos operadores de escalera extendidos, la acción (7.16) tiene la forma normal

$$\mathcal{S} = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (p^\mu n_\mu - E_p(n)) a^\dagger(p) a(p), \quad (7.51)$$

donde hemos omitido una “constante” relacionada con la energía del vacío (curiosamente, el término que surge como de costumbre del ordenamiento normal de los operadores sigue siendo un operador en el sector de foliación; ver sección 7.5). Notar las dos contribuciones diferentes a las “frecuencias normales”  $p^\mu n_\mu - E_p(n)$ , con  $E_p(n)$  asociado con la densidad Hamiltoniana  $\mathcal{H}$  (ver también sección 7.5) mientras que

$$\mathcal{P}_0 = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p^\mu n_\mu a^\dagger(p) a(p). \quad (7.52)$$

Se puede demostrar que esta forma normal de  $\mathcal{P}_0$  no es única [3]. Para  $n^\mu \equiv \eta^{\mu 0}$  uno tiene  $p^\mu n_\mu - E_p(n) \rightarrow p^0 - \sqrt{p^2 + m^2}$ , es decir,  $E_p(n) \equiv E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  la energía relativista convencional.

La diagonalización previa de  $\mathcal{S}$  imita las expresiones de las QFT convencionales respecto a la diagonalización de un Hamiltoniano libre en  $d = D - 1$  dimensiones. Sin embargo, se deben notar diferencias importantes: la expansión de los campos en operadores de partículas es completamente *off-shell*, con  $p^0$  no relacionado con  $\mathbf{p}$ . Sin embargo, la cantidad  $E_p(n)$  que aparece en la forma normal de la parte Hamiltoniana de  $\mathcal{S}$  es positiva para todos  $p$ , permitiendo la expansión (7.47). La positividad sigue de la Ec. (7.14) que implica  $p^\mu p^\mu (\eta_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu) = \sum_i (p_\mu n_i^\mu)^2$ .

Además, en capa de masa, es decir, para  $p^0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  un cálculo directo produce  $E_p(n) = E_{\Lambda \mathbf{p}}$  para  $\Lambda$  definido como la transformación de Lorentz que lleva un  $n^\mu$  normalizado a la dirección de tiempo “canónica”  $n^\mu = \eta^{\mu 0}$ . En otras palabras,  $E_p(n)$  en capa de masa corresponde a la energía medida por el observador con eje  $n^\mu$ .

Un requisito básico de consistencia para las partículas extendidas, en general fuera de la capa de masas, es que diferentes observadores inerciales coincidan en su

noción (por ejemplo, su número) y propiedades (tras transformar sus momentos). Para que esto se cumpla, en consistencia con las reglas de transformación de los campos y su expansión en modos extendidos, es *crucial* que  $n^\mu$  sea un operador tal que

$$\mathcal{U}^\dagger(\Lambda)E_p(n)\mathcal{U} = E_p(\Lambda n), \quad (7.53)$$

De hecho, al notar que  $E_p(\Lambda^{-1}n) = E_{\Lambda p}(n)$  y que  $d^D p$  es una medida invariante, se encuentra fácilmente

$$\mathcal{U}^\dagger(\Lambda)a(p)\mathcal{U}(\Lambda) = a(\Lambda p). \quad (7.54)$$

En resumen, las partículas extendidas transforman adecuadamente (incluso fuera de capa de masa) porque  $E_p(n)$  también se ve afectada por la transformación cuántica. Esto requiere un  $n^\mu$  cuántico.

Se puede obtener más intuición notando que esto requiere  $[a(p), l_{\alpha\beta}] \neq 0$ , lo cual solo es posible si los operadores de creación/aniquilación actúan de manera no trivial en el espacio de Hilbert de la foliación. Esto se puede ver explícitamente invirtiendo las relaciones (7.47). El resultado es

$$a(p) = \int d^D x e^{ipx} \left( \sqrt{\frac{E_p(n)}{2}} \phi(x) + \frac{i}{\sqrt{2E_p(n)}} \pi(x) \right), \quad (7.55)$$

donde recordamos que  $n^\mu$  es un operador y como consecuencia  $[a(p), \kappa^\alpha] \neq 0$ . La noción misma de partícula cuántica, como una excitación de los campos (extendidos), se vuelve inseparable de la foliación cuántica. Revisitamos y expandimos este punto en la sección 7.5.

Ahora volvemos a la noción de subespacio físico sugerida por la discusión clásica de la sección 7.3.4. Utilizando la versión clásica de la expansión (7.47), se puede mostrar que las restricciones (7.28) impuestas en todos los tiempos son equivalentes a  $\{\mathcal{S}, a(p)\} \approx 0$  impuestas para todos los  $p$  (y su conjugado). Podemos imponer la mitad de estas infinitas restricciones a nivel cuántico exigiendo que los estados físicos sean aniquilados por las condiciones, es decir,

$$[\mathcal{S}, a(p)]|\Psi\rangle_{\text{phys}} = 0, \quad (7.56)$$

Esto requiere que las únicas partículas presentes en el subespacio físico sean aquellas en capa de masas, como se sigue de  $[\mathcal{S}, a(p)] = -[p^\mu n_\mu - E_p(n)]a(p)$  que solo se anula para  $p^0 = E_p$ . Una partícula en capa de masa es física en cualquier marco de referencia como se sigue de  $[\mathcal{J}_{\mu\nu}, \mathcal{S}] = 0$  y la identidad de Jacobi.

En este caso libre simple, es directo recuperar información dinámica de los estados físicos. Por ejemplo, para teorías cuadráticas bajo una traslación en el tiempo, los

operadores de escalera en la capa de masas “se mueven a través del tiempo” como si estuvieran evolucionando. Este hecho puede emplearse para obtener amplitudes de transición convencionales a partir del formalismo extendido, como se muestra en [3]. Otra característica interesante a notar es que los estados de una sola partícula (sp) tienen la forma de los estados de Page y Wootters (PW) [14, 29], como se muestra en [2, 3, 36]. En este sentido, se puede decir que las excitaciones de los campos, en su enfoque extendido, son partículas formuladas como en los formalismos inspirados en el tiempo/la cuerda cuántica [46].

En el caso libre, el subespacio físico tiene una interpretación clara como el espacio lineal de partículas en capa de masas (ver también los resultados en [1, 2] respecto a la normalización de estados). No obstante, a medida que las interacciones entran en juego, la noción de partícula se vuelve menos clara, al igual que el significado de los subespacios físicos. En lo siguiente, desarrollamos un enfoque mucho más poderoso para mapear cantidades extendidas a la evolución cuántica estándar que se sostiene para teorías con interacciones. El concepto de subespacio físico aparece nuevamente de manera natural al considerar procesos de dispersión en los cuales las partículas externas son consideradas (hablando no estrictamente) como asintóticamente libres en el sentido usual.

### 7.4.3 Correladores en el espacio tiempo y mapeo a la MC convencional a foliación fija

Además de las partículas, otro elemento clave de las teorías cuánticas de campos (y la MC en general) son los correladores. Los correladores convencionales están asociados con separaciones espaciales entre operadores. Para operadores hermíticos, tales correladores pueden interpretarse como el valor medio de un observable. En cambio, los correladores que involucran observables separados temporalmente no corresponden a operadores hermíticos, pero usualmente aparecen asociados con amplitudes de transición, por ejemplo, en teoría de perturbaciones. En esta sección, mostramos de manera completamente general cómo el formalismo extendido permite recuperar ambos de una manera unificadora. Esto introduce una correspondencia general entre la versión espacio-temporal de la MC y el enfoque convencional.

Recordemos primero que los operadores cuadráticos están completamente determinados por sus contracciones básicas (teorema de Wick). En el caso diagonal,

esencialmente se tiene el correlador

$$\langle a_k^\dagger a_l \rangle := \frac{\text{Tr}[\exp(-\sum_i \lambda_i a_i^\dagger a_i) a_k^\dagger a_l]}{\text{Tr}[\exp(-\sum_i \lambda_i a_i^\dagger a_i)]} = \frac{1}{\exp(\lambda_k) - 1} \delta_{kl}. \quad (7.57)$$

Aquí los índices  $k, l$  están “separados espacialmente”, en el sentido de que los operadores  $a_k^\dagger, a_l$  no evolucionan en el marco de referencia dado y corresponden a modos ortogonales. También hemos asumido una álgebra bosónica  $[a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl}$ , el caso fermiónico es análogo. Similarmente, uno podría considerar en cambio los correladores de posición-momento  $\langle q_i q_j \rangle$  y  $\langle p_i p_j \rangle$  para  $[q_i, p_j] = i\delta_{ij}$ , que corresponden al valor medio de operadores hermiticos.

El álgebra extendida (7.35) nos permite aplicar la ecuación (7.57) tanto a índices espaciales como temporales. Equivalentemente, podemos aplicarla a correladores fuera de capa de masas, como ahora lo permite (7.48). Notablemente, cuando la usamos en conjunto con un operador de acción cuadrática  $\mathcal{S}$ , e “insertamos” operadores en diferentes puntos en el tiempo, los propagadores de la MC convencional emergen naturalmente. Inversamente, uno podría “redescubrir” el operador  $\mathcal{S}$  como el único operador cuadrático cuyas contracciones espacio-temporales son los propagadores libres convencionales.

Este resultado, recientemente probado en [4] (capítulo VI) sin  $n^\mu$ , proporciona un mapa general entre la MC convencional en  $d$  dimensiones y la formulación extendida con álgebras en  $D = d + 1$  dimensiones. También lleva directamente a una redefinición de la formulación de integrales de camino como una traza que involucra la acción cuántica  $\mathcal{S}$ . Aquí proporcionamos una nueva derivación del mapa especialmente adecuada para teorías de campos, revelando así nuevas características. En la siguiente subsección 7.4.4, lo desarrollamos aún más proporcionando una interpretación en términos de estados generalizados y “pseudo” correlaciones. En esta sección, consideramos un  $n^\mu$  clásico. La extensión a un  $n^\mu$  cuántico se desarrolla en la sección 7.5, basándose en el caso de foliación clásica.

Queremos exponenciar el operador de acción, que no es adimensional, por lo que introducimos una escala de tiempo o energía inversa  $\tau$  (considerada como un parámetro real positivo por conveniencia) y definimos  $\mathcal{S}_\tau = \tau \mathcal{S}$  en el caso libre. Comentarios adicionales sobre esta nueva “coordenada” se hacen al final de esta sección, mientras que un enfoque complementario de “slicing de tiempo” se presenta en el Apéndice 7.4. Similarmente, para considerar campos con unidades correctas, agregaremos un factor  $\sqrt{\tau}$  para cada operador. Indicamos los correladores extendidos

de  $e^{i\mathcal{S}\tau}$  como

$$\langle \mathcal{O} \rangle := \frac{\text{Tr } e^{i\mathcal{S}\tau} \mathcal{O}}{\text{Tr } e^{i\mathcal{S}\tau}}. \quad (7.58)$$

Al reconocer que para un  $\mathcal{S}$  cuadrático la ecuación (7.58) puede considerarse como un caso particular de (7.57), se puede obtener fácilmente cualquier correlador espacio-temporal. Consideramos el ejemplo de la acción de Klein-Gordon que en su forma diagonal (7.51), caracterizada por partículas fuera de la capa de masas, nos lleva a

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(p)a(k) \rangle &= \frac{\text{Tr} \left[ \exp \left\{ i\tau \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} (p'^0 - E_{\mathbf{p}'} + i\epsilon) a^\dagger(p') a(p') \right\} a^\dagger(p) a(k) \right]}{\text{Tr} \left[ \exp \left\{ i\tau \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} (p'^0 - E_{\mathbf{p}'} + i\epsilon) a^\dagger(p') a(p') \right\} \right]} \\ &= \frac{1}{\exp\{-i\tau(p^0 - E_{\mathbf{p}} + i\epsilon)\} - 1} (2\pi)^D \delta^{(D)}(p - k), \end{aligned} \quad (7.59)$$

donde hemos reemplazado  $E_{\mathbf{p}} \rightarrow E_{\mathbf{p}} - i\epsilon$  y asumido por simplicidad  $n^\mu = \eta^{\mu 0}$  (el caso general corresponde a  $p^0 - E_{\mathbf{p}} \rightarrow p^\mu n_\mu - E_p(n)$ ). Es interesante considerar el caso de pequeño  $\tau$  de esta expresión. Uno obtiene  $\langle a^\dagger(p)a(k) \rangle = \frac{1}{\tau} \frac{i}{(p^0 - E_{\mathbf{p}} + i\epsilon)} (2\pi)^D \delta^{(D)}(p - k) + \mathcal{O}(\tau)$  cuya transformada de Fourier en  $p^0$  produce una función de Heaviside en la variable conjugada, es decir, en la variable de tiempo.

Es importante notar que (7.59) no puede corresponder a un correlador genuino (teniendo la forma “espacial” de la Ec. (7.57)) en la Mecánica Cuántica tradicional, esencialmente porque el formalismo extendido tiene índices extra. En otras palabras, dado que el tiempo es un “índice de sitio” que indica operadores de campo independientes,  $p^0$  también se convierte en una etiqueta y denota operadores de escalera independientes: la mayoría de los correladores en el espacio de Hilbert extendido no corresponden a una única “contracción” de la Mecánica Cuántica tradicional. Solo para aquellos con operadores insertados en una única rebanada de tiempo es posible una identificación uno a uno. Como mostraremos ahora, la evolución emerge de esta aparente “redundancia”.

La Ec. (7.59) es el correlador básico en el espacio de momentos “off-shell” a partir del cual se pueden obtener correladores localizados en espacio-tiempo. Estos últimos se definen por la expansión (7.47). En particular, es sencillo calcular

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \frac{1}{\tau} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} + \mathcal{O}(\tau) \quad (7.60)$$

donde usamos  $\frac{i}{p^0 - E_{\mathbf{p}} + i\epsilon} - \frac{i}{p^0 + E_{\mathbf{p}} - i\epsilon} \equiv 2E_{\mathbf{p}} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$  y estamos considerando un pequeño  $\tau$ . Uno reconoce inmediatamente la expresión del propagador de Feynman lo que nos permite escribir

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \langle \sqrt{\tau} \phi(x) \sqrt{\tau} \phi(y) \rangle = \langle 0 | \hat{T} \phi_H(x) \phi_H(y) | 0 \rangle. \quad (7.61)$$

En el lado derecho,  $\phi_H(\mathbf{x}, t) := e^{iHt}\phi(\mathbf{x})e^{-iHt}$  es el operador de campo convencional (no extendido) en el esquema de Heisenberg y  $|0\rangle$  es el estado fundamental usual del Hamiltoniano de Klein-Gordon libre  $H$ , mientras que  $\hat{T}$  denota el ordenamiento temporal. En el lado izquierdo, los operadores no evolucionan con algún operador de evolución, en su lugar, su “posición en el tiempo” ha determinado el grado de evolución: el lado izquierdo de (7.61) siempre puede entenderse como un correlador como el de la Ec. (7.57), incluso para  $|x - y|$  tipo tiempo en cuyo caso emerge la evolución. Nótese también que en lugar de considerar el límite de pequeño  $\tau$  (positivo), lo que refleja la intuición de un espacio-tiempo discreto (ver Apéndice 7.4), se podría considerar integrar alrededor de loops en el plano complejo y explotar la estructura de polos de los correladores.

Los resultados anteriores también definen el tratamiento adecuado de teorías de campo interactuantes: consideremos  $\mathcal{S}_\tau \rightarrow \mathcal{S}_\tau + \mathcal{S}_{\text{int}}[\sqrt{\tau}\phi]$  para  $\mathcal{S}_{\text{int}}[\sqrt{\tau}\phi]$  teniendo la forma funcional clásica en los campos, por ejemplo, para una acción clásica  $S_{\text{int}} = -\int d^D x \frac{\lambda}{4!}\phi^4$  se tiene  $\mathcal{S}_{\text{int}} = -\int d^D x \frac{\lambda}{4!}\tau^2\phi^4$ . Entonces en el límite de pequeño  $\tau$ , el correlador “interactuante” de campos, definido al considerar toda la acción en (7.58), tiene la siguiente expansión:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \langle \sqrt{\tau}\phi(x)\sqrt{\tau}\phi(y) \rangle_{\text{int}} = \frac{\langle 0 | \hat{T} e^{iS_{\text{int}}[\phi_I]} \phi_I(x) \phi_I(y) | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{T} e^{iS_{\text{int}}[\phi_I]} | 0 \rangle}. \quad (7.62)$$

La igualdad es una consecuencia directa de (7.61) y el teorema de Wick (para “estados” Gaussianos) aplicado a la parte libre de la acción, con la parte interactiva expandida perturbativamente para un pequeño  $\tau$ . Por esta razón, la evolución que emerge es la que correspondería al esquema de interacción, es decir,  $\phi_I(t, \mathbf{x}) = e^{iH_0 t}\phi(\mathbf{x})e^{-iH_0 t}$  para  $H_0$  el Hamiltoniano de Klein-Gordon libre. Uno también reconoce en el lado derecho de (7.62) la expansión perturbativa del correlador interactuante  $\langle GS | \hat{T} \phi_H(x) \phi_H(y) | GS \rangle$ , con  $|GS\rangle$  el estado fundamental del Hamiltoniano interactuante. Asumiendo como es habitual la validez de la teoría de perturbaciones, concluimos que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \langle \sqrt{\tau}\phi(x)\sqrt{\tau}\phi(y) \rangle_{\text{int}} = \langle GS | \hat{T} \phi_H(x) \phi_H(y) | GS \rangle. \quad (7.63)$$

A partir de estas expresiones se pueden calcular las amplitudes de dispersión como es habitual, por ejemplo, utilizando la fórmula de reducción LSZ [114]. Se puede mostrar que la transformada de Fourier en  $d+1$  dimensiones involucrada se traduce en insertar operadores de escalera en los correladores. En otras palabras, las amplitudes de dispersión son proporcionales a correladores de la forma  $\langle \prod_i a(k_i) \prod_j a^\dagger(p_j) \rangle_{\text{int}}$  para  $p_j$  ( $k_i$ ) los momentos “entrantes” (“salientes”) (ver también [4] y sección 7.4.4).

Nótese también que para un  $n^\mu$  fijo pero general solo es necesario hacer el reemplazo  $p^0 - E_{\mathbf{p}} \rightarrow p^\mu n_\mu - E_p(n)$  en la Ec. (7.59). Las Ecuaciones (7.60-7.63) permanecen sin cambios.

Antes de continuar, nos gustaría señalar que las similitudes entre las expresiones anteriores y las de PI no son una coincidencia. Mientras que los resultados anteriores se han obtenido a partir de técnicas del espacio de Hilbert, asociadas con el álgebra de operadores, y por lo tanto son independientes del enfoque de Feynman, uno puede evaluar las trazas anteriores explícitamente en una base dada. Si se elige la base de configuraciones de campo del espacio-tiempo  $|\phi(x)\rangle$  (ver Ec. (7.37)) emergen PIs de Feynman, como se muestra en [4]. En este sentido, el formalismo está embebiendo la formulación PI en un espacio de Hilbert (véase el capítulo VI).

También es interesante discutir cómo el formalismo clásico extendido de la sección anterior se puede recuperar en el límite  $\hbar \rightarrow 0$ . En primer lugar, notemos que

$$\begin{aligned} [\phi(x), \mathcal{S}_\tau] &= i\dot{\phi}(x) - [\phi(x), \int d^D z \mathcal{H}] \\ -[\pi(x), \mathcal{S}_\tau] &= i\dot{\pi}(x) + [\pi(x), \int d^D z \mathcal{H}] \end{aligned} \quad (7.64)$$

tienen la forma de *ecuaciones de Heisenberg* si se igualan a cero (y absorbiendo los factores  $\tau$  en los campos). Notablemente, dado que la ciclicidad de la traza implica  $\langle[\dots, \mathcal{S}_\tau]\rangle \propto \text{Tr}\{e^{i\mathcal{S}_\tau}[\dots, \mathcal{S}_\tau]\} = 0$  para cualquier operador, tenemos  $\langle[\phi(x), \mathcal{S}_\tau]\rangle = \langle[\pi(x), \mathcal{S}_\tau]\rangle = 0$ , lo cual, según nuestro mapa (válido para pequeños  $\tau$ ), concuerda con las ecuaciones de Heisenberg en la Mecánica Cuántica convencional. Por otro lado, siguiendo un argumento similar al de la formulación estándar de PI, para  $\hbar \rightarrow 0$  las únicas contribuciones a la traza vienen esencialmente de configuraciones clásicas extremas de la acción (ver también [4]). Al mismo tiempo, dado que la forma de los conmutadores extendidos y los PB extendidos es la misma, podemos escribir

$$0 = \langle[\dots, \mathcal{S}_\tau]\rangle \stackrel{\hbar \rightarrow 0}{\sim} \{\dots, \mathcal{S}\}|_{\text{En capa de masa}} \quad (7.65)$$

donde el conmutador se aplica a cualquier operador cuántico extendido, y el CP a la función asociada del espacio de fases extendido (el ordenamiento se vuelve irrelevante en el límite de pequeño  $\hbar$ ). Este último se calcula primero según el álgebra extendida (7.17) y luego se evalúa en una solución de las ecuaciones de movimiento. Concluimos que el resultado cuántico  $\langle[\dots, \mathcal{S}_\tau]\rangle = 0$ , junto con las Ecs. (7.27), implican las ecuaciones de Hamilton para  $\hbar \rightarrow 0$ . Notablemente, emergen como un límite de la Mecánica Cuántica en el espacio-tiempo a través de los CP extendidos de la mecánica clásica en el espacio-tiempo.

Los resultados anteriores establecen una conexión básica entre las QFT extendidas y convencionales a temperatura cero (es decir, asociadas con el estado fundamental del Hamiltoniano en cuestión). También es interesante mencionar brevemente cómo surgen los propagadores térmicos para una ventana de tiempo finita de longitud  $T$ . Esencialmente, la diagonalización de la acción libre de Klein-Gordon ahora produce

$$\mathcal{S} = \frac{1}{T} \sum_n \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (w_n - E_{\mathbf{p}}) a_n^\dagger(\mathbf{p}) a_n(\mathbf{p}), \quad (7.66)$$

para  $w = 2\pi n/T$ , son las frecuencias de Matsubara, que surgen de la diagonalización de  $\mathcal{P}_0$ . También estamos asumiendo un tiempo compactificado (condiciones periódicas) tal que (7.48) se reemplaza por  $[a_n(\mathbf{p}), a_{n'}^\dagger(\mathbf{k})] = T\delta_{nn'}(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p} - \mathbf{k})$  mientras que las expansiones (7.47) se mantienen reemplazando la integral en  $p^0$  por una suma sobre  $n$  (con también  $(2\pi)^{-1} \rightarrow T^{-1}$ ). Si ahora consideramos  $E_{\mathbf{p}} \rightarrow -iE_{\mathbf{p}}$ , es fácil ver que (7.61) se reemplaza por la expansión de Matsubara del correlador (térmico) [135]. La temperatura correspondiente es  $\beta \equiv T$ .

Si también discretizamos el tiempo en  $N = T/\epsilon$  pasos, resultados como (7.61) se vuelven exactos para operadores “insertados” en tiempos conmensurables con  $\epsilon$ . También prescindimos de  $\tau$  que es reemplazado por el intervalo de tiempo  $\epsilon$  (ver Apéndice 7.4 para los detalles y la definición de la acción cuántica para el espacio-tiempo discreto). Además, dado que todos los correladores espaciales se obtienen de la acción cuántica simplemente considerando, por ejemplo, operadores en la rebanada inicial

$$e^{-\beta H} = \text{Tr}_{t \neq 0} e^{i\mathcal{S}}, \quad (7.67)$$

es decir, podemos recuperar el estado térmico convencional de la acción cuántica considerando una traza parcial sobre todos los tiempos excepto la rebanada inicial (estamos asumiendo una rotación de Wick de la parte de Hamiltoniano de la acción; esto no afecta a  $\mathcal{P}_0$ ). Aquí  $\beta \equiv T$ . Esto también implica que  $Z := \text{Tr} e^{-\beta H} = \text{Tr} e^{i\mathcal{S}}$ . Notablemente, en el formalismo extendido se pueden considerar trazas parciales sobre regiones arbitrarias del espacio-tiempo. En principio, solo aquellas asociadas con hipersuperficies espaciales corresponden a estados cuánticos convencionales (y entropías reales, ver sección 7.4.4) pero la traza parcial está bien definida en general [4].

Finalmente, mencionamos que si uno está interesado en estados (o transiciones) además de los térmicos o estados fundamentales, estos se pueden especificar agregando un proyector en la “rebanada inicial”, como se desarrolló en [4] y se muestra en el Apéndice 7.4.



También mencionemos que en [4] también se ha construido una versión con  $\tau$  finito, que puede emplearse para definir rigurosamente el límite  $\tau \rightarrow 0$  (un resultado que no se requiere aquí). En cambio, para grandes  $\tau$  se puede reescribir el mapa como un valor medio asintótico de operadores más complicados (evolucionados con  $\tau$ ) [4]. El valor medio anterior puede entonces asociarse a una teoría de  $D+1 = d+2$  con volumen del espacio-tiempo  $\propto d^{d+2}x = d\tau d^{d+1}x$ , esencialmente considerando  $\tau$  como un parámetro de evolución en el sentido convencional.

#### 7.4.4 Estados generalizados al espacio-tiempo

Podría argumentarse que el elemento más fundamental del marco matemático de la Mecánica Cuántica es la noción de estado. Los estados puros convencionales codifican toda la información sobre un sistema cuántico en un momento dado. El estado, por lo tanto, se asocia con predicciones físicas en un momento específico, como lo determinan los axiomas de la MC.

Aunque hemos establecido un mapa general entre cantidades del formalismo extendido a cantidades que involucran estados convencionales, este mapa depende del operador  $e^{i\mathcal{S}\tau}$  que claramente no es un estado ni una matriz de densidad <sup>5</sup>. Sin embargo, dado que en principio, todas las predicciones del sistema en diferentes tiempos se pueden extraer de los correladores en espacio-tiempo, se podría argumentar que alguna noción de “estado en espacio-tiempo” podría asignarse al mapa anterior. Inversamente, de ser posible definir correctamente una noción de estado en espacio-tiempo, esta debería estar relacionada con el mapa.

La Ecuación (7.59), que es esencialmente la distribución de Bose-Einstein con el papel del estado térmico reemplazado por  $e^{i\mathcal{S}\tau}$ , sugiere un curso de acción interesante: se podría considerar alguna forma de purificación de  $e^{i\mathcal{S}\tau}$  como las consideradas en “thermofield dynamics” para tratar efectos térmicos en QFTs con técnicas de temperatura cero [135]. Allí, las trazas térmicas son reemplazadas por valores medios en estados puros “ampliados” adecuadamente definidos. Esta idea se refuerza aún más por el hecho de que, considerando  $\mathcal{S}$  libre como el generador de evolución en  $\tau$  en una teoría de  $d+2$ ,  $e^{i\tau\mathcal{S}}$  toma el papel de un estado “térmico” de  $d+1$  con temperatura imaginaria  $-i\tau$ . Además, la Ec. (7.67) muestra explícitamente que la información de estados térmicos convencionales de  $d$  para Hamiltonianos arbitrarios también

---

<sup>5</sup>En [4] se muestra que para grandes  $\tau$  uno puede reescribir el mapa como un valor medio asintótico de operadores más complicados (evolucionados con  $\tau$ ). Aquí estamos más preocupados por una noción de estado para  $\tau$  arbitrario (incluso pequeño).

puede estar contenida en  $e^{i\mathcal{S}_\tau}$ . Aunque un enfoque tipo “thermofield dynamics” - estrictamente hablando- no es necesario (pues se puede usar el mapa en la forma de la subsección 7.4.3), este conduce a ideas interesantes sobre la naturaleza del operador no hermitico  $e^{i\mathcal{S}_\tau}$ .

Una “purificación” de  $e^{i\mathcal{S}_\tau}$  se obtiene fácilmente considerando dos estados diferentes que viven en un espacio de Hilbert duplicado. Considerando por simplicidad el límite  $T \rightarrow \infty$  y la teoría libre de Klein-Gordon, indicamos los operadores del “entorno” como, por ejemplo,  $\tilde{a}(p)$  (con  $[\tilde{a}(p), \tilde{a}^\dagger(k)] = (2\pi)^D \delta^{(D)}(p - k)$ ) y estados del entorno como  $|\tilde{\Psi}\rangle$ . Entonces, considerando una traza parcial sobre el ambiente  $E$ , podemos expresar  $e^{i\mathcal{S}_\tau}$  como un estado generalizado reducido:

$$\frac{e^{i\mathcal{S}_\tau}}{\text{Tr } e^{i\mathcal{S}_\tau}} = \text{Tr}_E R_\tau, \quad R_\tau := \frac{|\Omega_\tau\rangle\rangle\langle\langle\bar{\Omega}_\tau|}{\langle\langle\bar{\Omega}_\tau|\Omega_\tau\rangle\rangle}, \quad (7.68)$$

donde hemos introducido los dos estados puros globales

$$\begin{aligned} |\Omega_\tau\rangle\rangle &:= \exp \left[ \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{i\tau(p^0 - E_p + i\epsilon)/2} a^\dagger(p) \tilde{a}^\dagger(p) \right] |\Omega\rangle\rangle \\ |\bar{\Omega}_\tau\rangle\rangle &:= \exp \left[ \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{i\tau(E_p - p^0 + i\epsilon)/2} a^\dagger(p) \tilde{a}^\dagger(p) \right] |\Omega\rangle\rangle, \end{aligned} \quad (7.69)$$

con  $|\Omega\rangle\rangle = |\Omega\rangle|\tilde{\Omega}\rangle$  el vacío global y  $a(p)|\Omega\rangle = 0$ ,  $\tilde{a}(p)|\tilde{\Omega}\rangle = 0 \forall p$  (incluso fuera de capa de masa). Los estados (7.69) son de hecho vacíos de Bogoliubov entrelazados sistema-entorno de operadores globales de aniquilación (ver Apéndice 7.3 para detalles y prueba de (7.68)).

En (7.68) hemos definido el proyector no ortogonal (no hermitiano)  $R$  ( $R^2 = R$ ) con traza 1 (y por lo tanto un único valor propio no nulo 1), de tal manera que se puede considerar como una generalización de la noción de estado puro. También notamos que

$$\text{Tr } e^{i\mathcal{S}_\tau} = \langle\langle\bar{\Omega}_\tau|\Omega_\tau\rangle\rangle, \quad (7.70)$$

que es no nulo.

Curiosamente, este tipo de generalización de la purificación tradicional ha sido recientemente introducido [136] en el contexto de la correspondencia dS/CFT para definir una noción de entrelazamiento tipo tiempo [97, 98, 137, 138] (en MC convencional, no extendida donde no hay operador de acción). También se ha empleado para definir una cantidad dual (una pseudoentropía) a superficies de área mínima en espacio-tiempos dependientes del tiempo [136], según la correspondencia AdS/CFT [126]. El hecho de que estos estados generalizados surjan naturalmente tanto en esos contextos como en la presente versión en espacio-tiempo de la MC, puede ser un

indicador de que de hecho se requieren en cualquier extensión (suficientemente general) de la noción de estado al dominio temporal <sup>6</sup>. Una observación en apoyo de esta hipótesis es que, a diferencia de los estados convencionales, estos estados conducen a entropías complejas [98, 136, 137], lo cual puede estar relacionado con la naturaleza pseudo-Riemanniana del espacio-tiempo clásico (recordamos las conjeturas de espacio emergiendo del entrelazamiento [122, 123, 139]).

Con estos resultados en mano, podemos escribir los correladores en espacio-tiempo (7.58) como

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\langle \langle \bar{\Omega}_\tau | \mathcal{O} \otimes \mathbb{1}_E | \Omega_\tau \rangle \rangle}{\langle \langle \bar{\Omega}_\tau | \Omega_\tau \rangle \rangle} = \text{Tr}[R_\tau \mathcal{O} \otimes \mathbb{1}_E]. \quad (7.71)$$

Por ejemplo, el propagador de Feynman puede escribirse como  $\langle \langle \bar{\Omega}_\tau | \phi(x)\phi(y) | \Omega_\tau \rangle \rangle \propto \langle 0 | \hat{T} \phi_H(x) \phi_H(y) | 0 \rangle$  (ver (7.61)). Notablemente, vemos que la evolución emerge de las correlaciones entre el sistema y el entorno: dado que no hay indicación en los operadores  $\phi(x), \phi(y)$  sobre si  $x, y$  son variables de espacio o tiempo, está claro que toda la información sobre la estructura causal de la teoría está codificada en los estados entrelazados  $|\Omega_\tau\rangle, |\bar{\Omega}_\tau\rangle$ , como se representa en la Figura 7.4.2. Las correlaciones responsables de la emergencia de la evolución temporal son precisamente las que las recientemente introducidas pseudo entropías intentan cuantificar (por ejemplo,  $S(R_\tau) = -\text{Tr} R_\tau \log R_\tau = 0$  pero el “estado” del subsistema  $e^{iS_\tau}$  no es un proyector). La información completa sobre las correlaciones espaciales convencionales del estado  $|0\rangle$  también está codificada en  $R_\tau$ , ya que los correladores  $\langle 0 | \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{y}) | 0 \rangle, \langle 0 | \pi(\mathbf{x}) \pi(\mathbf{y}) | 0 \rangle$  son casos particulares de (7.71) correspondientes a  $\mathcal{O} = \phi(\mathbf{x}, t_0) \phi(\mathbf{y}, t_0), \mathcal{O} = \pi(\mathbf{x}, t_0) \pi(\mathbf{y}, t_0)$ , es decir, a la inserción de operadores en cortes espaciales. Estos aparecen, por ejemplo, en la definición de entrelazamiento espacial [41].

Además notemos que una cantidad del tipo (7.71) para operadores hermiticos también aparece en la MC convencional donde se denota como *valor débil* (“weak value”) [140]. Un correlador en espacio-tiempo entonces se puede entender como el valor débil de  $\mathcal{O} \otimes \mathbb{1}_E$  para  $\mathcal{O}$  hermitiano. Recordamos que mientras por ejemplo  $\hat{T} \phi_H(x) \phi_H(y)$  no es hermítico para una separación tipo tiempo,  $\mathcal{O} = \phi(x) \phi(y)$  es siempre un observable. Como consecuencia, se pueden usar técnicas existentes (ver, por ejemplo, [141] para formas de medir valores débiles) para acceder a (7.71) a través

---

<sup>6</sup>Hay otras extensiones útiles de la noción de estado asociadas con “tiempo cuántico” (ver, por ejemplo, [1, 2, 29, 43]). Sin embargo, ninguna de estas permite una traza parcial sobre regiones de tiempo [4].

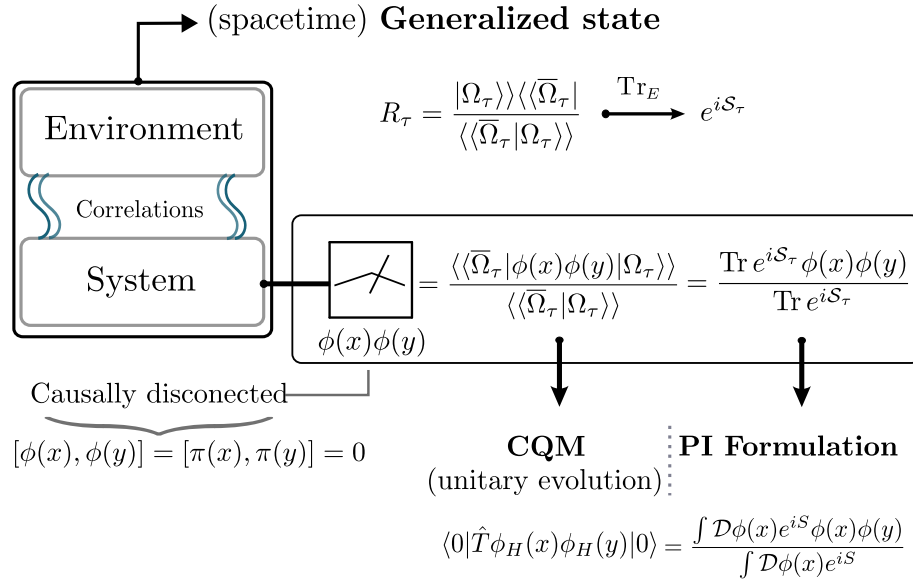


Figura 7.4.2: **Esquema de la correspondencia entre las formulaciones de la MC ( $n^\mu$  fijo).** En la formulación en espacio-tiempo, podemos codificar toda la información sobre un sistema dado y su evolución en estados generalizados, abarcando un entorno correlacionado con el sistema. Al “medir” solo en el sistema (ver las observaciones sobre valores débiles) se recuperan los propagadores convencionales y las reglas de Feynman. Se representa el ejemplo del propagador de Feynman, que corresponde al observable hermitico  $\phi(x)\phi(y)$ . A diferencia de la MC canónica (CQM) donde  $[\phi_H(x), \phi_H(y)] \neq 0$  dentro del cono de luz, en la formulación en espacio-tiempo cada campo  $\phi(x)$  es independiente de los demás y  $[\phi(x), \phi(y)] = 0$  para cualquier punto del espacio-tiempo (una afirmación mucho más fuerte que la microcausalidad). La información sobre evolución y causalidad está contenida en el estado generalizado sistema-entorno  $R_\tau$  y se puede pensar que emerge de las (“generalizadas/pseudo”) correlaciones entre los dos. Dado que el entorno se ignora, también se puede trabajar directamente con el “estado” parcial del sistema  $e^{iS_\tau}$ , como se describe en la sección 7.4.3. Se mostró en [4] que evaluaciones particulares de las trazas resultantes conducen a la formulación de PI (ver también Apéndice 7.4).

de mediciones. Este es un resultado interesante por sí mismo ya que proporciona a los correladores tipo tiempo un significado operacional directo, una observación que se sostiene para sistemas cuánticos generales, como se discute en el Apéndice 7.4. Además, es bien sabido cómo calcular tales cantidades en computadoras cuánticas (ver Figura 7.4.3; para un desarrollo reciente sobre circuitos cuánticos que miden valores débiles ver [142])

Otro caso de interés es la evaluación de amplitudes de dispersión. La Ecuación (7.63) sugiere considerar  $\mathcal{O} = a(k_1)a(k_2) \dots a(k_m)e^{iS_{int}}a^\dagger(p_1)a^\dagger(p_2) \dots a^\dagger(p_n)$ . De hecho, para momentos en capa de masa  $\langle \mathcal{O} \rangle$  es proporcional a los elementos de la matriz  $S$  (la proporcionalidad debe elegirse para coincidir con la fórmula LSZ, de tal manera que “ampute” líneas externas). Para mostrar esto es suficiente notar que

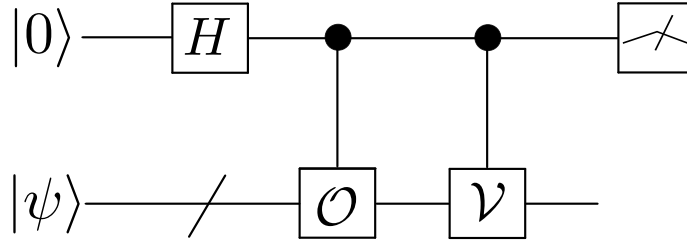


Figura 7.4.3: **Circuito cuántico para calcular una cantidad de la forma  $\langle \varphi | \mathcal{O} | \psi \rangle$ .** El esquema es una prueba de Hadamard donde se realizan mediciones en el qubit auxiliar (arriba) para estimar las partes real e imaginaria de  $\langle \psi | \mathcal{V} \mathcal{O} | \psi \rangle$ , y donde elegimos  $\mathcal{V}$  de modo que  $|\varphi\rangle = \mathcal{V}^\dagger |\psi\rangle$ . Utilizando estados  $|\psi\rangle$ ,  $|\varphi\rangle$  que definen un estado generalizado, se pueden calcular funciones de correlación en espacio-tiempo (ver también Apéndice 7.4).

$\langle \bar{\Omega}_\tau | \phi(x) a^\dagger(p) | \Omega_\tau \rangle \propto e^{-ipx}$  y usar los resultados de la subsección anterior para recuperar las *reglas de Feynman* en espacio de posición. Una aplicación directa de las técnicas usuales entonces se puede usar para obtener predicciones físicas finitas. Como comentario final, notamos que usando la Ec. (7.71) se pueden escribir los elementos de la matriz de dispersión como una amplitud de transición entre estados creados por modos (extendidos) “on-shell” sobre los vacíos globales (7.69). Estos estados también se pueden relacionar explícitamente con los estados físicos definidos en la Ec. (7.56) escribiendo  $|\Omega_\tau\rangle$ ,  $|\bar{\Omega}_\tau\rangle$  como transformaciones de Bogoliubov sobre el vacío del producto  $|\Omega\rangle$  (ver Apéndice 7.4).

## 7.5 Entrelazamiento entre materia y foliación

### 7.5.1 Partículas como operadores controlados por la foliación

Habiendo discutido el caso clásico, su cuantización y cómo establecer un mapa general a la MC convencional para un  $n^\mu$  fijo (con una interpretación de la evolución emergiendo de estados generalizados en espacio-tiempo), dedicamos una sección final para sentar las bases para manejar una foliación completamente cuántica.

Antes de proceder con una exposición matemática, vale la pena dedicar algo de discusión sobre por qué considerar un  $n^\mu$  cuántico podría ser físicamente relevante más allá de la consistencia del formalismo. Recordamos que la introducción de un álgebra asociada con  $n^\mu, p^\nu$  fue una necesidad matemática: una regla de transformación adecuada de las partículas off-shell extendidas solo se puede lograr si la foliación se modifica por la transformación, a su vez requiriendo un  $n^\mu$  cuántico. Como mostramos a continuación, esto es fundamental al considerar también los va-

lores esperados: teniendo en cuenta las propiedades de transformación de la foliación podemos probar la covarianza explícita de todos los valores medios, condicionada a valores clásicos de la foliación. Por otro lado, no hay nada que prevenga el uso de estados de foliación más generales. Aunque es razonable sospechar que esto podría estar señalando algo más profundo físicamente, obtener una mayor comprensión requiere desarrollo adicional como la aplicación del esquema de cuantización extendido a espacio-tiempos dinámicos (más allá del alcance del presente trabajo).

Por otro lado, es fácil imaginar escenarios en los cuales se asigna alguna noción de incertidumbre cuántica a los observadores. Dado que el formalismo proporciona un marco riguroso que contiene esta característica, es interesante explorarlo aún si solo por esta razón. Muchos de estos escenarios se pueden construir apelando al argumento de que en la práctica los observadores necesitan realizar mediciones para establecer su propia noción de espacio y tiempo. Dado que esas mediciones están descritas fundamentalmente por la MC, entonces se puede concluir que se hereda una incertidumbre cuántica. Este argumento se encuentra en la literatura en diferentes contextos [26, 32, 119, 121, 143-145], usualmente relacionado con alguna generalización de la MC y en relación con el “problema del tiempo”. Una observación particularmente interesante es que, según el principio cosmológico [146], se puede definir una foliación cósmica (o tiempo cósmico) de tal manera que el universo se vea homogéneo e isotrópico en cada momento. En una etapa temprana del universo, donde los efectos cuánticos pueden volverse importantes, estas hipótesis podrían no sostenerse, y la foliación podría volverse “difusa”.

Ahora volvemos al ejemplo de la teoría de Klein-Gordon libre y la noción de partículas extendidas introducida en 7.4.2 pero nos centramos en un  $n^\mu$  completamente cuántico. Ideas similares se sostienen para otras teorías de campo. Primero notemos que el operador  $a(p)$  que hemos introducido se puede escribir correctamente como

$$a(p) = \int dn a(p, n) \otimes |n\rangle\langle n| \quad (7.72)$$

para  $a(p, n)$  el operador de aniquilación obtenido reemplazando los operadores  $n^\mu$  en la Ec. (7.55) con el valor fijo  $n$ . Cada  $a(p, n)$  es un operador de aniquilación genuino que satisface  $[a(p, n), a^\dagger(p', n)] = (2\pi)^D \delta^{(D)}(p - p')$ , mientras que estrictamente

$$[a(p), a^\dagger(p')] = [a(p, n), a^\dagger(p', n)] \otimes \hat{\mathbb{1}}_n \quad (7.73)$$

lo que era implícito en (7.48). Aquí  $\hat{\mathbb{1}}_n$  se debe leer como el proyector sobre el subespacio generado por aquellos  $|n\rangle$  con  $n^\mu$  temporal. Notemos, sin embargo, que

podemos dejar  $\|n\|^2 > 0$  arbitrario en estas expresiones. Todas las expresiones en la sección 7.4.2 se sostienen para  $E_p(n) = \|n\| \sqrt{\left(\frac{n^\mu n^\nu}{\|n\|^2} - \eta^{\mu\nu}\right) p_\mu p_\nu + m^2}$ , como se muestra en el Apéndice 7.1.

La Ecuación (7.72) revela que  $a(p)$  tiene la forma de un operador controlado en el que los valores de los estados de foliación determinan cuál  $a(p, n)$  actúa (uno puede comparar esto con una operación de control-not entre qubits  $U_{\text{control-not}} = \sum_{n=0,1} (\sigma_x)^n \otimes |n\rangle\langle n|$  para  $\sigma_x$  la matriz de Pauli  $X$  actuando en el qubit controlado). Esta forma de escribir  $a(p)$  hace más claras sus propiedades de transformación: el operador  $a(p, n)$  actúa en el sector de materia y se transforma con  $\mathcal{U}_\phi(\Lambda) := \exp(i\omega_{\mu\nu}\mathcal{L}^{\mu\nu}/2)$  el operador de impulso que transforma los campos pero no la foliación. De hecho, la transformación completa de  $a(p)$  se puede entender como

$$\mathcal{U}^\dagger(\Lambda)a(p)\mathcal{U}(\Lambda) = \int dn (\mathcal{U}_\phi^\dagger(\Lambda)a(p, n)\mathcal{U}_\phi(\Lambda)) \otimes |\Lambda n\rangle\langle \Lambda n| \quad (7.74)$$

que, comparando con (7.54) produce

$$\mathcal{U}_\phi^\dagger(\Lambda)a(p, n)\mathcal{U}_\phi(\Lambda) = a(\Lambda p, \Lambda n), \quad (7.75)$$

una relación que también se puede obtener de (7.55) fijando  $n$ . Al emplear (7.55) también se puede demostrar que los diferentes operadores de aniquilación  $a(p, n)$  y  $a(p, n')$  están relacionados por transformaciones de Bogoliubov de tal manera que en general  $[a(p, n), a(p', n')] \neq 0$  para  $n \neq n'$ . En particular, (7.75) no preserva el número de partículas, solo la transformación completa lo hace.

Lo anterior también conduce al tratamiento adecuado de las fluctuaciones del vacío. Primero notemos que una expansión controlada similar se asigna a  $\mathcal{H}(\hat{n}) = \int dn \mathcal{H}(n) \otimes |n\rangle\langle n|$  con  $\mathcal{H}(n)$  actuando en el sector de materia. Entonces, cada  $\mathcal{H}(n)$  integrado se puede diagonalizar como un Hamiltoniano cuadrático usual, en analogía con los resultados en la sección 7.4.2 pero con un  $n$  clásico:

$$\int d^D x \mathcal{H}(n) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} E_p(n) a^\dagger(p, n) a(p, n) + \lambda(\|n\|) \quad (7.76)$$

con  $\lambda(\|n\|)$  una constante dependiente de  $n$  que surge de haber ordenado normalmente los operadores de escalera  $a(p, n)$ . Sorprendentemente, cuando esta “constante” se tiene en cuenta en el operador completo se tiene

$$\int d^D x \mathcal{H}(\hat{n}) = \int d^D x : \mathcal{H}(\hat{n}) : + \lambda(\|\hat{n}\|), \quad (7.77)$$

con  $\|\hat{n}\| = \int dn \|n\| |n\rangle\langle n|$ , es decir, en lugar de un cambio constante, el Hamiltoniano (integrado) almacena un *operador de energía del vacío* actuando en el espacio de Hilbert de la foliación.

Se puede mostrar que el operador de densidad de energía del vacío asociado es justo  $\hat{\rho}_{\text{vac}} := \rho_{\text{vac}} ||\hat{n}||$ , con  $\rho_{\text{vac}}$  la densidad de energía del vacío convencional. En este escenario simple, el único efecto de la foliación cuántica en la densidad de energía del vacío podría ser un promedio estadístico sobre escalas de energía inducido por  $|\psi(n)|^2 = |\langle n|\psi\rangle|^2 \neq 0$  para  $||n|| \neq 1$ .

### 7.5.2 Estados entrelazados entre materia-foliación y la covarianza explícita de los valores esperados

Otra consecuencia interesante de la expansión del operador (7.72) es que sus estados propios están, en general, entrelazados en la partición materia-foliación. Lo mismo es cierto para la acción cuántica  $\mathcal{S}$  (ver Ec. (7.44)). Consideremos, de hecho, el concepto de vacío. Para cada  $n$  fijo, los operadores  $a(p, n)$  tienen un vacío  $|\Omega_n\rangle$  tal que

$$a(p, n)|\Omega_n\rangle = 0 \quad (7.78)$$

para todos los valores de  $p$ , en general off-shell. Estos vacíos son todos estados en el sector de la materia y pueden ser explícitamente expandidos como  $|\Omega_n\rangle = \int \mathcal{D}\phi(x) \Psi_n[\phi(x)] |\phi(x)\rangle$  en la base (7.37) con  $\Psi_n[\phi(x)]$  su función de onda.

Por otro lado, podemos introducir un vacío tipo historia como

$$|\Omega\rangle = \int dn |\Omega_n\rangle \otimes |n\rangle, \quad (7.79)$$

satisfaciendo  $a(p)|\Omega\rangle = 0$ , con  $a(p) \equiv a(p, \hat{n})$ . El estado  $|\Omega\rangle$  contiene la información de los vacíos de todas las posibles direcciones temporales simultáneamente. Lo logra a través de su entrelazamiento con la foliación cuántica. De hecho, podemos recuperar el vacío de un observador dado como  $|\Omega_n\rangle = \langle n|\Omega\rangle$ , es decir, por *condicionamiento* en la foliación. Notablemente, esta característica y la estructura de (7.79) se asemejan al formalismo de Page y Wootters, presentado en el capítulo II, donde la evolución emerge de estados historia estacionarios por condicionamiento en lecturas de “relojes internos” [14, 29].

La simetría de Lorentz hace que el estado entrelazado  $|\Omega\rangle$  sea preferible sobre otros estados propios de  $a(p)$ : este estado satisface  $\mathcal{U}(\Lambda)|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$  o equivalentemente

$$\mathcal{J}_{\mu\nu}|\Omega\rangle = 0, \quad (7.80)$$

lo cual puede compararse con la ecuación del universo de PW [29], una ecuación tipo Wheeler-DeWitt. Esta propiedad es una consecuencia directa de (7.75) que implica



$\mathcal{U}(\Lambda)|\Omega_n\rangle \otimes |n\rangle = |\Omega_{\Lambda^{-1}n}\rangle \otimes |\Lambda^{-1}n\rangle$ . La integral en (7.79) deshace esta transformación a través de un cambio de variables trivial ( $|\det(\Lambda)| = 1$ ). Claramente, la invariancia no se satisface para superposiciones más generales, es decir, por estados que agregan pesos a la suma (7.79). En particular, los estados producto  $|\Omega_n\rangle \otimes |n\rangle$  son aniquilados por  $a(p)$  pero rompen explícitamente la simetría de Lorentz.

La estructura anterior se mantiene para estados generales. Esto se puede ver considerando una base de estados de Fock que, como es usual, se puede obtener actuando con operadores de creación  $a^\dagger(p)$  en el vacío  $|\Omega\rangle$ . Por ejemplo, un estado de Fock de dos partículas se puede escribir como

$$a^\dagger(p_1)a^\dagger(p_2)|\Omega\rangle = \int dn a^\dagger(p_1, n)a^\dagger(p_2, n)|\Omega_n\rangle \otimes |n\rangle. \quad (7.81)$$

En general, tenemos  $|\Psi\rangle = \int dn |\Psi_n\rangle \otimes |n\rangle$  de modo que  $\langle n|\Psi\rangle = |\Psi_n\rangle$  para  $|\Psi_n\rangle$  el estado para esa elección particular de tiempo, así recuperado por condicionamiento en la foliación. Todos estos estados satisfacen la ecuación de restricción  $\mathcal{J}_{\mu\nu}|\Psi\rangle = 0$ . Es interesante notar que se puede condicionar con respecto a estados más generales  $|\psi\rangle = \int dn \psi(n)|n\rangle$  que corresponden a una superposición cuántica de foliaciones. En este caso,  $\langle\psi|\Psi\rangle = \int dn \psi(n)|\Psi_n\rangle$  que induce una superposición particular de estados de materia.

Por otro lado, hemos visto en la sección 7.4.3 que la correspondencia entre el enfoque extendido y la MC convencional no es trivial, en el sentido de que requiere una suma (traza) sobre estados extendidos (sección 7.4.3). Esta traza puede ser purificada (sección 7.4.4) y reescrita como un valor medio generalizado en un espacio de Hilbert duplicado. Podemos entonces emplear los estados

$$\begin{aligned} |\Omega_\tau\rangle\rangle &= \int dn |\Omega_{\tau n}\rangle\rangle \otimes |n\rangle \\ |\bar{\Omega}_\tau\rangle\rangle &= \int dn |\bar{\Omega}_{\tau n}\rangle\rangle \otimes |n\rangle \end{aligned} \quad (7.82)$$

para  $|\Omega_{\tau n}\rangle\rangle, |\bar{\Omega}_{\tau n}\rangle\rangle$  definidos en (7.69) con la dependencia en  $n$  codificada en  $p^0 - E_p \rightarrow p^\mu n_\mu - E_p(n)$  y el vacío  $|\Omega_n\rangle\rangle = |\Omega_n\rangle|\tilde{\Omega}_n\rangle$  (los estados en la sección 7.4.4 deberían escribirse, en la notación de esta sección, con un subíndice  $n \equiv \eta^{\mu 0}$ ). Notamos que usamos un único espacio de Hilbert de foliación tanto para el sistema como para el ambiente. Las transformaciones de Lorentz se definen como antes con el operador de “momento angular” completo siendo

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\mu\nu} + \tilde{\mathcal{L}}_{\mu\nu} + l_{\mu\nu}. \quad (7.83)$$

Los estados de historia (7.82) satisfacen la condición de invarianza de Lorentz

$$\mathcal{J}_{\mu\nu}|\Omega_\tau\rangle\rangle = \mathcal{J}_{\mu\nu}|\bar{\Omega}_\tau\rangle\rangle = 0. \quad (7.84)$$

Con estas definiciones y notación, la representación (7.71) de correladores en espacio-tiempo debería escribirse como  $\langle \mathcal{O} \rangle_n = \langle \langle \bar{\Omega}_{\tau n} | \mathcal{O} \otimes \mathbb{1}_E | \Omega_{\tau n} \rangle \rangle / \langle \langle \bar{\Omega}_{\tau n} | \Omega_{\tau n} \rangle \rangle$ . Añadimos el subíndice  $n$  para indicar que el valor medio corresponde a la foliación fija  $n^\mu$ . Para recuperar  $\langle \mathcal{O} \rangle_n$  de los estados de historia (7.82) recurrimos al condicionamiento que puede escribirse en forma compacta como

$$\langle \mathcal{O} \rangle_n = \frac{\langle \langle \bar{\Omega}_\tau | \mathcal{O} \otimes \mathbb{1}_E \Pi_n | \Omega_\tau \rangle \rangle}{\langle \langle \bar{\Omega}_\tau | \Pi_n | \Omega_\tau \rangle \rangle}, \quad (7.85)$$

con  $\Pi_n := |n\rangle\langle n|$  y  $\mathcal{O}$  no necesariamente un operador separable en la partición materia-foliación pero que conmuta con  $n^\mu$  (por ejemplo,  $\mathcal{O} = a^\dagger(p)a(k)$ ). Esto también puede reescribirse como  $\langle \mathcal{O} \rangle_n = \text{Tr} R_{\tau n} \mathcal{O}_n$  con

$$R_{\tau n} := \frac{\langle n | \Omega_\tau \rangle \langle \langle \bar{\Omega}_\tau | n \rangle}{\langle \langle \bar{\Omega}_\tau | \Pi_n | \Omega_\tau \rangle \rangle}, \quad (7.86)$$

el estado generalizado condicionado al valor de foliación  $n^\mu$ . Así es como se recupera la MC convencional asociada con foliaciones fijas en el formalismo completo con foliaciones cuánticas. En otras palabras, hemos recuperado la correspondencia de la sección anterior 7.4.3 entre el enfoque en espacio-tiempo y la MC convencional introduciendo la idea de condicionamiento con respecto a los estados propios de  $n^\mu$ .

Además, como evidencia la Ec. (7.83), la foliación participa ahora en transformaciones espacio-temporales. Esto se refleja también en las propiedades de transformación de los valores medios. Lo que encontramos es que para teorías relativistas la declaración de invarianza de Lorentz se vuelve explícita:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(\Lambda \mathbf{x}) \rangle_{\Lambda n} &= \frac{\langle \langle \bar{\Omega}_\tau | U^\dagger(\Lambda) (\mathcal{O} \otimes \mathbb{1}_E \Pi_n) U(\Lambda) | \Omega_\tau \rangle \rangle}{\langle \langle \bar{\Omega}_\tau | U^\dagger(\Lambda) \Pi_n U(\Lambda) | \Omega_\tau \rangle \rangle} \\ &= \langle \mathcal{O}(\mathbf{x}) \rangle_n, \end{aligned} \quad (7.87)$$

donde, para ser concretos, hemos considerado un operador que depende explícitamente de cierto número de puntos del espacio-tiempo (por ejemplo,  $\mathcal{O}(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{O}(x_1, x_2, \dots) = \pi(x_1)\phi(x_2)\dots$ ). Notar que la primera igualdad no es una declaración dinámica: es solo una consecuencia de las reglas de transformación geométrica (7.40). Como tal, se sostiene independientemente de la teoría. En cambio, la segunda igualdad solo se mantiene para acciones relativistas que satisfacen (7.45) e implican (7.84). El importante resultado (7.87) nos dice que para teorías relativistas los valores esperados cuánticos son funciones de las coordenadas espacio-temporales  $\mathbf{x}$  y el vector de foliación  $n^\mu$ , combinados de manera invariante. Esto incluye funciones como integrales de momento que contienen términos  $p^2 - m^2$ , como en el propagador de Feynman, pero además términos como  $p^\mu n_\mu$ ,  $E_p(n)$  están permitidos dentro

de estas integrales, y de hecho aparecen, por ejemplo, en correladores de momento (regularizados)  $\langle \pi(x)\pi(y) \rangle_n$  que ahora también son cantidades invariantes. Lo mismo se aplica a cualquier otro valor medio, no necesariamente localizado en ciertos puntos del espacio-tiempo. Así, en nuestro enfoque, todas las *predicciones físicas son explícitamente covariantes*.

Lo anterior concluye la exposición sobre cómo el enfoque extendido permite recuperar predicciones físicas convencionales, mientras que al mismo tiempo hace explícitas sus simetrías espacio-temporales. Ahora comentemos brevemente sobre la posibilidad de ir más allá de la física convencional, buscando un efecto genuino de foliación cuántica. Notemos que si ahora reemplazamos el proyector  $\Pi_n$  con una mezcla estadística de foliaciones  $\Pi_n \rightarrow \rho_n = \int dn p(n) \Pi_n$  obtenemos  $\langle \langle \bar{\Omega}_\tau | \mathcal{O} \rho_n | \Omega_\tau \rangle \rangle = \langle \psi | \text{Tr} e^{i\mathcal{S}_\tau} \mathcal{O} | \psi \rangle$  para  $|\psi\rangle = \int dn e^{i\phi_n} \sqrt{p(n)} |n\rangle$ ,  $\phi_n \in \mathbb{R}$ , lo cual es solo una mezcla (“clásica”) estadística de valores medios. Al emplear  $e^{i\mathcal{S}_\tau}$  en la forma actual (conmutando con  $n^\mu$ ) no surge ningún efecto cuántico genuino de la foliación. Esto es, en principio, esperado de una teoría de materia-foliación no interactuante. Sin embargo, podemos postular que la generalización adecuada de la expresión anterior a una foliación cuántica (pura) completa se logra utilizando otros proyectores cuánticos  $\Pi_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ :

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\psi = \frac{\langle \langle \bar{\Omega}_\tau | \mathcal{O} \otimes \mathbb{1}_E \Pi_\psi | \Omega_\tau \rangle \rangle}{\langle \langle \bar{\Omega}_\tau | \Pi_\psi | \Omega_\tau \rangle \rangle} \quad (7.88)$$

lo cual corresponde al condicionamiento  $\langle \psi | \Omega_\tau \rangle$  con  $|\psi\rangle$  un estado arbitrario de la foliación (al menos para  $\mathcal{O}$  actuando trivialmente en la foliación, por ejemplo,  $\mathcal{O} = \phi(x)\phi(y)$ ; a los operadores de escalera se les pueden asignar los estados mismos). Estos nuevos valores medios pueden ser evaluados explícitamente utilizando, por ejemplo, que  $a(p, n)$  y  $a(p, n')$  están relacionados por una transformación de Bogoliubov.

Notemos que los términos individuales  $\langle \langle \bar{\Omega}_{\tau n'} | \mathcal{O} \otimes \mathbb{1}_E | \Omega_{\tau n} \rangle \rangle$  que surgen de (7.88) no pueden escribirse en términos de  $e^{i\mathcal{S}_\tau}$  a menos que  $n' = n$ . Así, la traza parcial sobre el ambiente ahora generaliza la acción de manera no trivial. En otras palabras, podemos acceder a este efecto cuántico de la foliación solo a través de la representación del sistema y ambiente de los correladores espacio-temporales (para la materia no interactuando con la foliación). La validez de esta generalización puede depender de si atribuimos o no una existencia física real al ambiente. Se puede comenzar a abordar tal pregunta considerando observables  $\mathcal{O}$  que no ignoran el ambiente como el considerado en la sección 7.4.4 (es decir, usar  $\mathcal{O} \neq \mathcal{O} \otimes \mathbb{1}_E$ ).

## 7.6 Conclusiones y perspectivas

Hemos demostrado que la MC admite una formulación basada en un espacio de Hilbert y a su vez simétrica en espacio-tiempo que trata todas las coordenadas espacio-temporales de los campos de materia como índices de sitio y describe las posibles foliaciones del espacio-tiempo a través de estados cuánticos. Hemos obtenido el formalismo cuantizando un espacio de fase clásico aumentado que mantiene la elección del tiempo de la transformación de Legendre como dinámica y que produce una versión explícitamente covariante de las ecuaciones de Hamilton. El proceso de cuantización conduce a acciones y operadores de partículas “off-shell” que son no separables en la partición materia-foliación, destacando la necesidad de una foliación cuántica para preservar la simetría de Lorentz.

El desafío de recuperar la evolución unitaria convencional en un marco con operadores de campo que conmutan para diferentes puntos del espacio-tiempo (incluso aquellos conectados causalmente en el sentido convencional) ha sido planteado y superado. El hallazgo crucial es la existencia de una correspondencia entre los correladores geométricos extendidos, asociados con la acción cuántica, y los propagadores convencionales asociados con el estado fundamental de un Hamiltoniano dado y la evolución unitaria. Los propagadores térmicos también pueden obtenerse compactificando el tiempo. Los correladores en tiempos iguales (para una foliación dada) corresponden a correladores convencionales como los que definen el entrelazamiento tipo espacio, pero para operadores insertados en diferentes tiempos, la evolución unitaria en el esquema de Heisenberg emerge. A partir de estas consideraciones, también se recuperan las reglas de Feynman y el límite clásico (en la versión extendida). Se presentaron también algunas observaciones sobre la posibilidad de reinterpretar este mapa como una correspondencia tipo holográfica, con la teoría de  $d + 1$  dimensiones surgiendo de una teoría de  $d + 2$  dimensiones. En particular, la escala de tiempo  $\tau$ , que aparece naturalmente al definir el mapa, podría identificarse con una coordenada holográfica. Estos aspectos, las eventuales relaciones con dualidades holográficas conocidas, y si la presencia de una escala de tiempo  $\tau$  proporciona alguna perspectiva sobre el proceso de renormalización, se dejan para investigaciones futuras.

Se mostró además que dicha emergencia de evolución temporal puede entenderse en términos de correlaciones con un entorno utilizando técnicas recientemente introducidas en el contexto de AdS/CFT (dS/CFT) [136, 137]. Desde este punto de vista, el sistema y el entorno están descritos globalmente por un estado puro gene-

realizado que contiene la información causal de la teoría. Esta perspectiva también proporciona un significado operacional directo a los propagadores tipo tiempo en términos de valores débiles. Esto plantea la pregunta natural de si se puede considerar el entorno como un sistema físico real inaccesible cuyas correlaciones con el sistema inducen su evolución en el tiempo. La situación se asemeja al mecanismo de PW, según el cual la evolución temporal emerge del entrelazamiento [43] entre un sistema y “el resto”. Otra propuesta similar es la “hipótesis del tiempo térmico” que utiliza la termalización de un estado estadístico para definir el “tiempo interno” [27] (ver también [35]). Aunque nuestro formalismo es en principio significativamente diferente de estas propuestas, estas ideas previas sobre la emergencia del tiempo, de interés actual en la literatura (ver introducción), animan a investigar más el tema del entorno.

La cuantización independiente de la foliación de los campos de materia permite una definición muy simple y explícita de las transformaciones espacio-temporales. Estas preservan el carácter geométrico de la relatividad de Einstein, ya que se definen independientemente de la dinámica. En este sentido, nuestra propuesta “desenreda” las transformaciones que mezclan espacio y tiempo de la información dinámica, esta última siendo codificada en estados generalizados como se describió anteriormente. En un sentido muy preciso, las transformaciones espacio-temporales aparecen nuevamente entrelazadas con la dinámica: la acción cuántica y los operadores de partículas son operadores controlados por foliación. Además, hemos visto que los estados propios invariantes de Lorentz de acciones invariantes, como el vacío de las partículas “off-shell” de la teoría dada, están entrelazados en la partición materia-foliación. También tienen la misma estructura que en el formalismo PW [14], una similitud que se ha utilizado para introducir el concepto de condicionamiento en la foliación. El condicionamiento especifica el observador relativo al cual se da la descripción dinámica del sistema (en contraposición a la emergencia de la evolución en el enfoque de PW). Al condicionar con respecto a estados fijos “clásicos” de la foliación se recupera la MC convencional, en el sentido de la correspondencia previa. Luego, hemos discutido bajo qué condiciones podrían surgir efectos cuánticos de la foliación.

En este manuscrito, nos hemos centrado en una foliación constante y en el espacio-tiempo de Minkowski. Aunque el espacio-tiempo sea plano, una generalización obvia es considerar una foliación no constante  $n^\mu = n^\mu(x)$ , por ejemplo, asociada con coordenadas de Rindler. En otras palabras, el formalismo admite una generaliza-

ción obvia al caso de un *campo de foliación*. Es fácil ver que al reemplazar  $n^\mu \rightarrow n^\mu(x)$  en  $\mathcal{S}$  para el campo escalar, se obtiene una versión de las ecuaciones de Hamilton para una foliación curva general, equivalente a la ecuación de Klein-Gordon. Según nuestra propuesta, también se impondría  $\{n^\mu(x), \kappa_\nu(y)\} = \delta^\mu_\nu \delta^{(D)}(x - y)$  clásicamente y  $[n^\mu(x), \kappa_\nu(y)] = i\delta^\mu_\nu \delta^{(D)}(x - y)$  en el caso cuántico, de modo que el espacio de Hilbert de la foliación ahora estaría generado por estados  $|n(x)\rangle$  representando configuraciones de campo en el espacio-tiempo ( $\hat{n}^\mu(x)|n(x)\rangle = n^\mu(x)|n(x)\rangle$ ). Además, se puede introducir un momento angular para este campo  $l_{\mu\nu}(x) := n_\nu(x)\kappa_\mu(x) - n_\mu(x)\kappa_\nu(x)$  de modo que se pueda transformar *unitariamente* cualquier estado propio de campo de foliación a otro. En particular, en el espacio-tiempo de Minkowski cualquier estado propio de foliación curva está relacionado unitariamente con  $|\eta^{\mu 0}\rangle$ , es decir,  $|n(x)\rangle = \exp[i \int d^D x l_{\mu\nu}(x) \Lambda^{\mu\nu}(x)] |\eta^{\mu 0}\rangle$ , que es una *versión cuántica* del concepto de *marco de referencia momentáneamente comóvil*. Esta transformación unitaria es separable en el espacio-tiempo reflejando nuestra intuición clásica, sin embargo, el tratamiento cuántico de la foliación permite muchas más posibilidades exóticas, como estados de la foliación entrelazados a través de diferentes puntos del espacio-tiempo.

Como en el caso de foliaciones constantes, cambiar de observador no afecta el álgebra de campos en acuerdo con  $[l_{\mu\nu}(x), \phi(x)] = [l_{\mu\nu}(x), \pi(x)] = 0$ . Esto debe contrastarse con el tratamiento habitual en QFT que requiere cuantizar en una hipersuperficie dada, por ejemplo, al considerar un observador de Rindler y derivar el efecto Unruh [147, 148]. Un cambio de observador, sin embargo, sí afecta la acción  $\mathcal{S}$ . En particular, es claro que una acción libre condicionada a una foliación curva sigue siendo una forma cuadrática pero diferente de la correspondiente a un observador inercial. Los modos normales entonces difieren en general por una transformación de Bogoliubov inducida por la curvatura de  $n^\mu(x)$ , lo que cambia el estado de vacío (recordamos que para dos foliaciones constantes, no surge cambio en el vacío). Esta sería la derivación del efecto Unruh desde dentro del enfoque espacio-temporal.

Hay otra característica interesante en el espacio-tiempo plano a considerar, preliminar para extender nuestro tratamiento a variedades genuinamente curvas. Aunque hemos empleado coordenadas de Minkowski para definir nuestra álgebra básica de campos y cuantización, es factible describir, por ejemplo, la acción en diferentes coordenadas curvilíneas. En general, esto lleva a reemplazar derivadas convencionales con derivadas covariantes  $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$  de modo que una contracción de la forma  $n^\mu \nabla_\mu$  corresponda a invarianza bajo *transformaciones de coordenadas generales*. Se puede demostrar fácilmente que las ecuaciones de Hamilton derivadas para  $n^\mu$  ge-

neral en otros sistemas de coordenadas tienen precisamente esta forma. Es factible obtener estos resultados imponiendo directamente álgebras (tanto de campos de materia como de foliaciones) con respecto a otros sistemas de coordenadas, lo que parece indicar que la relación entre sistemas de coordenadas podría tener una representación cuántica, otra posibilidad interesante abierta al trabajar con álgebras espacio-temporales. Curiosamente, un tratamiento cuántico que permita generalizaciones paramétricas es también el objetivo principal de las llamadas “teorías de campos parametrizadas” [37, 125], un enfoque en el que los campos de materia son funciones de coordenadas curvilíneas arbitrarias. Estas coordenadas están asociadas con posibles foliaciones del espacio-tiempo y también se cuantizan <sup>7</sup>. Sin embargo, incluso para el espacio-tiempo de Minkowski, este enfoque sufre problemas en dimensiones espacio-temporales distintas de  $1 + 1$ . Estas dificultades podrían ser eludidas desarrollando más nuestra propuesta, ya que, como mencionamos anteriormente, la información dinámica y geométrica están desacopladas.

Algunas observaciones sobre la posibilidad de aplicar el formalismo a la gravedad también pueden ser apropiadas (aunque actualmente especulativas): más allá de las justificaciones matemáticas y basadas en simetría para una foliación dinámica, también hemos sugerido que un espacio-tiempo dinámico podría llevar naturalmente a este concepto. Sería interesante (y autoconsistente) si esto pudiera derivarse aplicando el enfoque extendido a la gravedad, al menos trabajando a nivel semiclásico. Notamos que el formalismo emplea acciones definidas en variables del espacio de fase, lo que significa que siempre se necesita introducir un Hamiltoniano. Esto parece llevar directamente al enfoque convencional ADM [149] y su cuantización. Sin embargo, este no es el caso: mientras la cuantización canónica usual se basa en métricas evolucionando unitariamente en hipersuperficies, nuestro formalismo trataría la métrica de cada hipersuperficie como independiente. Esta característica, junto con una foliación cuántica, parece llevar en cambio a una descripción donde el grado de libertad físico es la métrica espacio-temporal completa (con algunas restricciones eventuales). En tal construcción, aún por desarrollar completamente, los tipos naturales de interrogantes no serían de naturaleza dinámica, sino intrínsecamente geométricos y asociados con correlaciones, en analogía con el caso de los campos que desarrollamos en este capítulo.

En cuanto a los campos de materia, el principal ejemplo que hemos empleado

---

<sup>7</sup>Aunque este procedimiento es análogo al enfoque PW, como se mostró recientemente en [37], allí los campos de materia no se cuantizan a través de un álgebra extendida como en nuestro esquema.

es el de un campo escalar. Aunque la mayoría de los resultados e ideas se sostienen para teorías de campo generales, se deben hacer algunas consideraciones nuevas en el tratamiento cuántico de los campos espinoriales relacionados con cómo el acoplamiento entre la foliación y el espín afecta la definición de los momentos. Esta discusión, y el caso de las teorías de gauge, típicamente asociadas con campos con espín, se pospone. No obstante, se presentan varias observaciones en el Apéndice 7.2, donde también se desarrolla completamente el tratamiento clásico de un campo de Dirac.

Notablemente, la mayoría de los conceptos que hemos desarrollado para campos se aplican a cualquier sistema mecánico cuántico, incluidos los no relativistas. De hecho, la idea de extender un álgebra convencional a “espacio-tiempo” siempre se puede aplicar. Esto permite construir el operador de acción cuántica asociado con un cierto Hamiltoniano cuántico, un procedimiento que no requiere una teoría clásica. Notablemente, la evolución unitaria siempre se recupera a través de sus correladores tipo tiempo asociados, como se muestra en [4] y el Apéndice 7.4. Como ejemplo concreto, desarrollamos la extensión espacio-temporal de una representación de qubit del álgebra  $\mathfrak{su}(2)$  en el Apéndice 7.4. También se puede introducir una purificación generalizada, como la que hemos empleado para la acción libre de Klein-Gordon, en general. Aunque esto no es trivial (y no presentamos el caso general) proporcionamos algunas ideas y ejemplos en el mismo Apéndice. Por estos medios, se puede reemplazar la noción convencional de estado y evolución unitaria de la MC con estados generalizados que codifican no solo el estado inicial, sino también la evolución y estructura causal de una teoría dada. Estas consideraciones abren el camino para desarrollar y aplicar nuevos esquemas de información y computación cuántica, como hemos discutido en la sección 7.4.4. Al mismo tiempo, proporcionan una formulación capaz de abordar las preguntas fundacionales cuánticas planteadas en la introducción.

## Apéndices

### 7.1 Expresiones clásicas y cuánticas para un $n^\mu$ tipo tiempo general

En este apéndice mostramos explícitamente cómo las relaciones clásicas y cuánticas que involucran la foliación se modifican por un  $n^\mu$  no normalizado.



Definimos  $||n|| = \sqrt{n^\rho n_\rho}$  y asumimos  $\sum_i ||n_i||^2 = -||n||^2$  (velocidad de la luz fija) y  $n_i^\mu n_\mu = 0$ . Entonces, la ecuación (7.14) se reemplaza por

$$n^\mu n^\nu - \sum_{i=1}^d n_i^\mu n_i^\nu = ||n||^2 \eta^{\mu\nu}. \quad (7.89)$$

Ecuaciones como (7.6) también necesitan ser reescaladas, por ejemplo,

$$\partial_\rho \phi = ||n||^{-2} (n_\rho n^\mu \partial_\mu \phi - n_{i\rho} n_i^\mu \partial_\mu \phi).$$

Para el caso libre de Klein Gordon se obtienen las ecuaciones clásicas

$$n^\mu \partial_\mu \phi = ||n||^2 \pi \quad (7.90)$$

y

$$\mathcal{H} = ||n^2|| \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{n^\mu n^\nu}{||n||^2} - \eta^{\mu\nu} \right) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (7.91)$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$n^\mu \partial_\mu \pi = \left( \frac{n^\mu n^\nu}{||n||^2} - \eta^{\mu\nu} \right) \partial_\mu \partial_\nu \phi - m^2 \phi \quad (7.92a)$$

$$n^\mu \partial_\mu \phi = ||n||^2 \pi \quad (7.92b)$$

lo que produce una vez más la ecuación de Klein-Gordon

$$(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2) \phi = 0. \quad (7.93)$$

Una expresión análoga se encuentra con la adición de un potencial. Estas pueden recuperarse como antes desde  $\mathcal{S} = \int d^D x (\pi n^\mu \partial_\mu \phi - \mathcal{H})$  y estableciendo  $\{\phi, \mathcal{S}\} = \{\pi, \mathcal{S}\} \equiv 0$ .

Después de la cuantización, la diagonalización de  $\int d^D x \mathcal{H}$  ahora conduce a

$$\begin{aligned} E_p(n) &= ||n|| \sqrt{\left( \frac{n^\mu n^\nu}{||n||^2} - \eta^{\mu\nu} \right) p_\mu p_\nu + m^2} \\ &= ||n|| \sqrt{\sum_i \left( \frac{n_i^\mu p_\mu}{||n||} \right)^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Todas las ecuaciones de la sección 7.4.2 se mantienen con  $E_p(n)$  dado por (7.94) y  $\pi n^\mu \partial_\mu \phi \rightarrow ||n^2||^{-1} \pi n^\mu \partial_\mu$ , de acuerdo con la nueva definición de  $\pi$ , equivalente a un reescalado de  $E_p$ . En la expansión normal de la acción, también se debe reemplazar  $p^\mu n_\mu \rightarrow ||n^2||^{-1} p^\mu n_\mu$  en consecuencia. Entonces se puede demostrar que las cantidades físicas como el propagador de Feynman permanecen invariantes, es decir, independientes de  $||n^2||$ .

Notemos que para  $m = 0$  y  $D = 1 + 1$  se tiene una teoría de campo conforme (CFT) y puede hacerse cualquier elección de  $n^\mu$  para diagonalizar  $\mathcal{S}$  a través de modos normales.

## 7.2 El caso del campo de Dirac

En este apéndice consideramos la aplicación del formalismo del texto principal al caso de una densidad de Lagrangiana de Dirac libre  $\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$ . Aunque las interacciones pueden introducirse siguiendo la línea desarrollada en el caso escalar libre, nos centramos en este ejemplo simple ya que el objetivo es mostrar cómo se trata el espín en un formalismo con foliación dinámica. Nuestro enfoque principal es el caso clásico, con algunas observaciones sobre la cuantización al final de la sección.

El momento generalizado para un  $n^\mu$  tipo tiempo general se define como antes, dando

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial(n^\mu \partial_\mu \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu n_\mu. \quad (7.95)$$

Para  $n^\mu = \eta^{\mu 0}$  recuperamos la relación usual  $\pi = i\psi^\dagger$ , ya que  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$  y  $(\gamma^0)^2 = 1$  como sigue del álgebra de Clifford de las matrices gamma  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ , con los corchetes indicando (solo aquí) anticonmutadores.

Por otro lado, notando que  $\gamma^\mu n_\mu \gamma^\nu n_\nu = \gamma^0 \gamma^0 = 1$ , donde hemos definido  $\gamma^0 := \gamma^\mu n_\mu$  como la primera matriz de un nuevo posible conjunto de matrices gamma (satisfaciendo el álgebra de Clifford), se puede invertir la relación del momento y escribir  $\bar{\psi} = -i\pi\gamma^\mu n_\mu$ . Entonces, tomando la transformada de Legendre covariante  $\mathcal{H}_D = \pi n^\mu \partial_\mu \psi - \mathcal{L}_D$  da como resultado

$$\mathcal{H}_D = \pi[(n^\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu n_\nu)\partial_\mu - im\gamma^\nu n_\nu]\psi. \quad (7.96)$$

Podemos demostrar que en esta forma  $\mathcal{H}_D$  solo depende de derivadas espaciales:

$$(n^\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu n_\nu)\partial_\mu = \gamma^\rho \gamma^\mu n_\rho (n_\mu n_\nu - \eta_{\mu\nu})\partial^\nu,$$

donde recordamos que  $n_\mu n_\nu - \eta_{\mu\nu}$  proyecta sobre las hipersuperficies espaciales ortogonales a  $n^\mu$ . Es interesante notar que la invariancia de Lorentz es explícita en esta forma (ver también abajo), mientras que la densidad del Hamiltoniano de Dirac convencional no exhibe la simetría explícitamente. La última se recupera de  $n^\mu = \eta^{\mu 0}$  lo que implica  $\gamma^\nu n_\nu = \gamma^0$  de modo que el primer término se convierte en  $(n^\mu - \gamma^0 \gamma^\mu)i\partial_\mu \equiv -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla$  (con  $\alpha^i = \beta\gamma^i, \beta = \gamma^0$ ).

La ecuación de Hamilton para  $\psi$  produce

$$n^\mu \partial_\mu \psi - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} = -i\gamma^\nu n_\nu (\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (7.97)$$

lo que automáticamente implica la ecuación de Dirac en su forma covariante. Además, si ahora introducimos el álgebra del espacio-tiempo clásico (7.17), es decir,

$$\{\psi(x), \pi(y)\} = \delta^{(d+1)}(x - y), \quad (7.98)$$

recuperamos lo anterior de

$$\{\psi, \mathcal{S}_D\} = -i\gamma^\nu n_\nu (\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi, \quad (7.99)$$

después de establecer  $\{\psi, \mathcal{S}_D\} \equiv 0$ . Aquí la acción de Dirac en variables de espacio de fase del espacio-tiempo es

$$\mathcal{S}_D = - \int d^{d+1}x i\pi\gamma^\nu n_\nu (\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi, \quad (7.100)$$

como se obtiene inmediatamente reemplazando  $\bar{\psi}$  con el momento usando la relación inversa de (7.95) como antes.

Discutamos ahora más sobre las propiedades de transformación de los campos. Asumimos la regla de transformación usual  $\psi(x) \rightarrow S_\Lambda \psi(\Lambda^{-1}x)$  donde hemos introducido la matriz

$$S_\Lambda := \exp(-i\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}/4), \quad (7.101)$$

para  $\sigma^{\mu\nu} = [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . Esto implica, como es habitual,  $S_\Lambda^{-1}\gamma^\mu S_\Lambda = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ . También imponemos, de acuerdo con la transformación de  $x^\mu$ ,  $n^\mu \rightarrow (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu n^\nu$ . Si ahora combinamos estas reglas con la definición de momento en la Ec. (7.95) obtenemos

$$\begin{aligned} \pi(x) &\rightarrow i\bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)S_\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda^\nu{}_\mu n_\nu = i\bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\gamma^\nu n_\nu S_\Lambda^{-1} \\ &= \pi(\Lambda^{-1}x)S_\Lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Esto nos permite resumir las propiedades de transformación como

$$\psi(x) \rightarrow S_\Lambda \psi(\Lambda^{-1}x) \quad (7.102a)$$

$$n^\mu \rightarrow (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu n^\nu \quad (7.102b)$$

$$\pi(x) \rightarrow \pi(\Lambda^{-1}x)S_\Lambda^{-1}. \quad (7.102c)$$

Nótese que en consecuencia, el álgebra (7.98) se preserva explícitamente por una transformación de Lorentz, tanto en los componentes del espacio-tiempo como en los espinoriales. Del mismo modo, cantidades como  $\mathcal{S}_D$  y  $\int d^{d+1}x \mathcal{H}$  son de hecho explícitamente invariantes: las transformaciones de  $\psi, \pi$  implican  $\gamma^\mu \rightarrow S_\Lambda^{-1}\gamma^\mu S_\Lambda$  para todas las matrices gamma, y siempre aparecen contraídas con  $n_\mu$  o  $\partial_\mu$ .

Las Ecs. (7.102) son la generalización espinorial de las Ecs. del texto principal (7.11) (la ligera diferencia en la convención respecto a las coordenadas es común para campos espinoriales). Para recuperar estas transformaciones del álgebra de espacio de fases extendido, consideramos el momento angular total

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = \mathcal{L}^{\mu\nu} + \mathcal{S}^{\mu\nu} + l^{\mu\nu} \quad (7.103)$$

con

$$\mathcal{L}^{\mu\nu} := - \int d^{d+1}x \pi (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \psi \quad (7.104)$$

$$\mathcal{S}^{\mu\nu} := \frac{i}{2} \int d^{d+1}x \pi \sigma^{\mu\nu} \psi \quad (7.105)$$

$$l^{\mu\nu} := n^\mu \kappa^\nu - n^\nu \kappa^\mu, \quad (7.106)$$

La única novedad respecto al caso del campo escalar es la parte espinorial  $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ , como se esperaba. Entonces las Ecs. (7.102) se pueden obtener de la acción del exponencial del momento angular total sobre los campos. Mostremos esto explícitamente hasta primer orden ( $\Lambda = 1 + \omega + \mathcal{O}(\omega^2)$ ) para la parte espinorial:

$$\begin{aligned} \psi + \frac{\omega_{\mu\nu}}{2} \{\mathcal{S}^{\mu\nu}, \psi\} &= \left(1 - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}\right) \psi = S_\Lambda \psi + \mathcal{O}(\omega^2) \\ \pi + \frac{\omega_{\mu\nu}}{2} \{\mathcal{S}^{\mu\nu}, \pi\} &= \pi \left(1 + \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}\right) = \pi S_\Lambda^{-1} + \mathcal{O}(\omega^2). \end{aligned}$$

Además, se puede probar fácilmente que  $\{\mathcal{L}^{\mu\nu}, \mathcal{S}^{\alpha\beta}\} = 0$  ya que  $\sigma^{\alpha\beta}$  no depende de las coordenadas del campo mientras que  $(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$  es independiente de los componentes espinoriales. También tenemos  $\psi(x) + \frac{\omega_{\mu\nu}}{2} \{\mathcal{L}^{\mu\nu}, \psi(x)\} = \psi(\Lambda^{-1}x) + \mathcal{O}(\omega^2)$  de modo que las series completas de corchetes anidados producen

$$\begin{aligned} \psi(x) + \frac{\omega_{\mu\nu}}{2} \{\mathcal{J}^{\mu\nu}, \psi(x)\} + \dots &= S_\Lambda \psi(\Lambda^{-1}x) \\ n^\rho + \frac{\omega_{\mu\nu}}{2} \{\mathcal{J}^{\mu\nu}, n^\alpha\} + \dots &= (\Lambda^{-1})^\rho_\alpha n^\alpha \\ \pi(x) + \frac{\omega_{\mu\nu}}{2} \{\mathcal{J}^{\mu\nu}, \pi(x)\} + \dots &= \pi(\Lambda^{-1}x) S_\Lambda^{-1}, \end{aligned} \quad (7.107)$$

donde los puntos suspensivos indican corchetes anidados de orden superior, por ejemplo, el siguiente orden siendo  $\frac{1}{2!} \frac{\omega_{\mu\nu} \omega_{\alpha\beta}}{4} \{\mathcal{J}^{\mu\nu}, \{\mathcal{J}^{\alpha\beta}, \dots\}\}$ . Estas son precisamente las transformaciones en las Ecs. (7.102).

Hagamos ahora algunos comentarios respecto a la cuantización del campo de Dirac según el esquema extendido. La primera diferencia natural con el caso del campo escalar es que se deben imponer reglas de anticonmutación, es decir, ahora se promueve el álgebra del espacio-tiempo (7.98) a un anticonmutador del espacio-tiempo. Esto garantiza la positividad de la energía (como en el caso usual). Esto también significa que el mapa que hemos establecido en la sección 7.4.3, y que discutimos para sistemas cuánticos más generales en el Apéndice 7.4, necesita ser modificado: ya que los campos en diferentes tiempos no conmutan, no hay una estructura de producto subyacente. En su lugar, se puede construir una correspondencia con la MC convencional a través del teorema de Wick en analogía con el enfoque en la sección 7.4.3 reemplazando (7.57) con su versión fermiónica, con algunas modificaciones adecuadas relacionadas con la paridad fermiónica.

Surgen sutilezas adicionales en el caso cuántico relacionadas con el hecho de que  $-i\pi \neq \psi^\dagger$  para un  $n^\mu$  general, es decir, la relación de anticonmutación no es entre el campo y su conjugado. Se puede demostrar que esto está en perfecto acuerdo con la covarianza de Lorentz explícita y nuevamente una razón para introducir  $n^\mu$ : por ejemplo, nótese que el álgebra  $\{\psi(x), i\psi^\dagger(y)\} = \delta^{(d+1)}(x-y)$  no es invariante ya que  $S_\Lambda$  no es una matriz unitaria, pero (7.98) lo es. De hecho, las transformaciones de Lorentz son unitarias con respecto a una definición apropiada del producto interno, inducida por lo anterior. Esto también está relacionado con el producto interno covariante introducido en [1] para partículas de Dirac (capítulo III). Finalmente, también se puede introducir un esquema de purificación generalizado para fermiones. Aunque ninguno de estos aspectos plantea un verdadero desafío, su exposición detallada justifica una discusión separada, que se abordará en trabajos futuros.

### 7.3 Purificación generalizada para bosones libres generales

En este apéndice, discutimos la purificación generalizada introducida en (7.67). Consideramos el caso de “operadores densidad generalizados” de la forma

$$\rho = \frac{e^{-H}}{\text{Tr } e^{-H}}, \quad H = \sum_k H_k = \sum_k \lambda_k a_k^\dagger a_k \quad (7.108)$$

donde permitimos que  $\lambda_k$  sea un número complejo general con  $\text{Re}(\lambda_k) > 0$  (para  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ ,  $\rho$  es un estado térmico con Hamiltoniano diagonal cuadrático).

Estos operadores pueden, por supuesto, escribirse como

$$\rho = \bigotimes_k Z_k^{-1} e^{-\lambda_k a_k^\dagger a_k} = \bigotimes_k Z_k^{-1} \sum_{n_k} e^{-\lambda_k n_k} |n_k\rangle_k \langle n_k| \quad (7.109)$$

de modo que solo necesitamos purificar cada  $\rho_k = e^{-H_k}$  (con  $\rho = \bigotimes_k \rho_k$ ) y tomar el producto tensorial al final. Aquí también hemos definido las “funciones de partición”  $Z_k := \text{Tr } e^{-H_k}$  de tal manera que  $Z := \text{Tr } e^{-H} = \prod_k Z_k$ . Nótese que la acción libre de Klein-Gordon  $e^{i\mathcal{S}_\tau}$  tiene precisamente esta forma con el índice  $k$  correspondiente al momento en  $D$  dimensiones.

Ahora introducimos para cada  $k$  los dos estados distintos (para simplificar la

notación omitimos los índices  $k$  en los estados)

$$\begin{aligned} |0_{\lambda_k}\rangle\rangle &= \sum_n e^{-\frac{\lambda_k n}{2}} |n\rangle|n\rangle = \exp\left(e^{-\frac{\lambda_k}{2}} a_k^\dagger \tilde{a}_k^\dagger\right) |0\rangle\rangle \\ |\bar{0}_{\lambda_k}\rangle\rangle &= \sum_n e^{-\frac{\lambda_k^* n}{2}} |n\rangle|n\rangle = \exp\left(e^{-\frac{\lambda_k^*}{2}} a_k^\dagger \tilde{a}_k^\dagger\right) |0\rangle\rangle, \end{aligned} \quad (7.110)$$

con  $|0\rangle\rangle := |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle$ . Podemos referirnos a los estados  $|n\rangle$  como estados del entorno con  $|0_{\lambda_k}\rangle\rangle, |\bar{0}_{\lambda_k}\rangle\rangle$  vectores de un espacio de Hilbert doblado generado por  $|n\rangle|\tilde{n}\rangle$ , tal como en una purificación térmica bosónica estándar. Nótese que  $|\bar{0}_{\lambda_k}\rangle\rangle$  corresponde al reemplazo  $\lambda_k \rightarrow \lambda_k^*$  en  $|0_{\lambda_k}\rangle\rangle$  de tal manera que

$$|0_{\lambda_k}\rangle\rangle_k \langle\langle \bar{0}_{\lambda_k} | = \sum_{n, n'} e^{-\lambda_k \frac{n+n'}{2}} |n\rangle\langle n'| \otimes |\tilde{n}\rangle\langle \tilde{n}'|. \quad (7.111)$$

Entonces, la traza parcial sobre el entorno produce

$$e^{-H_k} = \text{Tr}_E |0_{\lambda_k}\rangle\rangle \langle\langle \bar{0}_{\lambda_k} | \quad (7.112)$$

donde usamos  $\langle\tilde{n}|\tilde{n}'\rangle = \delta_{nn'}$ . Esto también implica

$$Z_k = {}_k \langle\langle \bar{0}_{\lambda_k} | 0_{\lambda_k} \rangle\rangle. \quad (7.113)$$

Para obtener el  $\rho$  completo tomamos el producto de los estados anteriores y definimos

$$\begin{aligned} |0_\lambda\rangle\rangle &= \otimes_k |0_{\lambda_k}\rangle\rangle_k = \exp\left(\sum_k e^{-\frac{\lambda_k}{2}} a_k^\dagger \tilde{a}_k^\dagger\right) |0\rangle\rangle \\ |\bar{0}_\lambda\rangle\rangle &= \otimes_k |\bar{0}_{\lambda_k}\rangle\rangle_k = \exp\left(\sum_k e^{-\frac{\lambda_k^*}{2}} a_k^\dagger \tilde{a}_k^\dagger\right) |0\rangle\rangle, \end{aligned} \quad (7.114)$$

para  $|0\rangle\rangle = |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle$  ahora los vacíos completos ( $|0\rangle = \otimes_k |0\rangle_k$ ,  $|\tilde{0}\rangle = \otimes_k |\tilde{0}\rangle_k$ ). Ahora es claro que

$$e^{-H} = \text{Tr}_E |0_\lambda\rangle\rangle \langle\langle \bar{0}_\lambda | \quad (7.115)$$

y

$$Z = \langle\langle \bar{0}_\lambda | 0_\lambda \rangle\rangle. \quad (7.116)$$

Es importante notar que para  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $|\bar{\Psi}\rangle\rangle = |\Psi\rangle\rangle$  y todas las expresiones anteriores se reducen a las de la purificación convencional.

Nótese también que  $|0_\lambda\rangle\rangle, |\bar{0}_\lambda\rangle\rangle$  son vacíos de Bogoliubov de los operadores de aniquilación

$$\begin{aligned} a'_k &:= u(\lambda_k) a_k + v(\lambda_k) \tilde{a}_k^\dagger \\ \tilde{a}'_k &:= u(\lambda_k) \tilde{a}_k + v(\lambda_k) a_k^\dagger \\ \bar{a}'_k &:= u(\lambda_k^*) a_k + v(\lambda_k^*) \tilde{a}_k^\dagger \\ \tilde{\bar{a}}'_k &:= u(\lambda_k^*) \tilde{a}_k + v(\lambda_k^*) a_k^\dagger \end{aligned} \quad (7.117)$$

respectivamente, para

$$u(\lambda_k) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\text{Re}(\lambda_k)}}} \quad v(\lambda_k) = -\frac{e^{-\lambda_k/2}}{\sqrt{1 - e^{-\text{Re}(\lambda_k)}}} \quad (7.118)$$

satisfaciendo  $|u(\lambda_k)|^2 - |v(\lambda_k)|^2 = 1$  (y por lo tanto  $[a'_k, a_l^{\dagger}] = [\tilde{a}'_k, \tilde{a}_l^{\dagger}] = [\bar{a}'_k, \bar{a}_l^{\dagger}] = [\tilde{\bar{a}}'_k, \tilde{\bar{a}}_l^{\dagger}] = \delta_{kl}$  con los otros conmutadores anulándose). Esto puede ser fácilmente probado mostrando explícitamente que

$$a'_k |0_\lambda\rangle\rangle = \tilde{a}'_k |0_\lambda\rangle\rangle = \bar{a}'_k |\bar{0}_\lambda\rangle\rangle = \tilde{\bar{a}}'_k |\bar{0}_\lambda\rangle\rangle = 0. \quad (7.119)$$

Entonces se puede aplicar el formalismo desarrollado en [150] para expresar los valores medios generalizados (como la Ec. (7.71)) como un valor de expectación en vacío en bases bi-ortogonales.

Para obtener las ecuaciones (7.69) se puede tomar el límite continuo de (7.114) directamente dentro de las sumas. Este paso se puede justificar aún más considerando primero un volumen de espacio-tiempo finito que hace que los índices de momento  $p$  sean discretos, recuperándose el álgebra (7.48) como el límite de volumen grande (véase también el enfoque convencional de la dinámica de campos térmicos [135]). Nótese que estos resultados se aplican directamente a un  $T$  finito y  $\epsilon$ , lo que permite recuperar correladores térmicos del mismo esquema de purificación (véase 7.4.3).

## 7.4 Correspondencia con la MC convencional para espacio-tiempo discreto y sistemas cuánticos generales

En este Apéndice discutimos cómo funciona la correspondencia del texto principal con la MC convencional para tiempo discreto y para sistemas y teorías generales. La noción de estado generalizado de espacio-tiempo, que surge de la purificación del mapa, también se puede aplicar, como mostramos en un sistema simple de un qubit.

*Formalismo discreto.* Escribamos primero una versión de espacio-tiempo discreto del álgebra extendida (7.35):

$$[\phi_{im}, \pi_{jn}] = i\delta_{ij}\delta_{mn}, \quad (7.120)$$

donde  $i, j$  representan sitios de tiempo y  $m, n$  sitios espaciales. El álgebra canónica convencional correspondiente es  $[\phi_m, \pi_n] = i\delta_{mn}$  en tiempos iguales. Nótese que en el enfoque estándar los operadores de campo en diferentes puntos del espacio

conmutan, lo que significa que el espacio de Hilbert total tiene la estructura de producto  $\mathcal{H} = \otimes_m h_m$  con  $h$  el espacio de Hilbert de un solo modo bosónico. Cuando extendemos el álgebra como en (7.120) esto se generaliza al tiempo, con la nueva estructura del espacio de Hilbert siendo

$$\mathcal{H} = \otimes_i \mathcal{H}_i = \otimes_{i,m} h_{im}. \quad (7.121)$$

Vemos que una estructura de producto tensorial se aplica tanto al espacio como al tiempo. De hecho, no hay nada que distinga el tiempo y el espacio en (7.120), solo fijamos una convención para introducir la dinámica a continuación.

Tal estructura de producto en el tiempo se puede definir para cualquier sistema cuántico (el caso fermiónico es más sutil como se discute en el Apéndice 7.2): uno considera un espacio de Hilbert  $h$  y luego construye un espacio de Hilbert extendido  $\mathcal{H} = \otimes_i h_i$  para un número dado de tiempos. Si el espacio de Hilbert  $h$  tiene una base de estados  $|n\rangle$ , entonces

$$\mathcal{H} = \text{span}\{|n_1 n_2 \dots n_N\rangle\}, \quad (7.122)$$

es decir, tiene una base tipo "trayectoria cuántica", con  $N$  el número de cortes de tiempo. Definamos ahora un operador extendido  $e^{i\epsilon P_0}$  tal que

$$e^{i\epsilon P_0} |n_1 n_2 \dots n_N\rangle := |n_N n_1 n_2 \dots\rangle. \quad (7.123)$$

Se puede demostrar fácilmente [4] que

$$\text{Tr}[e^{i\epsilon P_0} \otimes_i O_i^{(i)}] = \text{Tr}[\hat{T} \Pi_i O^{(i)}], \quad (7.124)$$

donde la primera traza se toma en el espacio de Hilbert extendido mientras que la segunda en el convencional. El operador de ordenamiento temporal  $\hat{T}$  indica que el producto de operadores a la derecha debe seguir el ordenamiento temporal (de mayor a menor) a la izquierda. Esta es la esencia detrás de la correspondencia: el operador  $e^{i\epsilon P_0}$  está traduciendo trazas de productos tensoriales de operadores a trazas de la composición convencional de esos mismos operadores. Para concretar, mostremos esto para  $N = 2$ :

$$\begin{aligned} \text{Tr}[e^{i\epsilon P_0} A \otimes B] &= \sum_{n_1, n_2} \langle n_2 n_1 | A \otimes B | n_1 n_2 \rangle \\ &= \sum_{n_1, n_2} \langle n_1 | B | n_2 \rangle \langle n_2 | A | n_1 \rangle \\ &= \sum_n \langle n | BA | n \rangle = \text{Tr}[BA], \end{aligned} \quad (7.125)$$



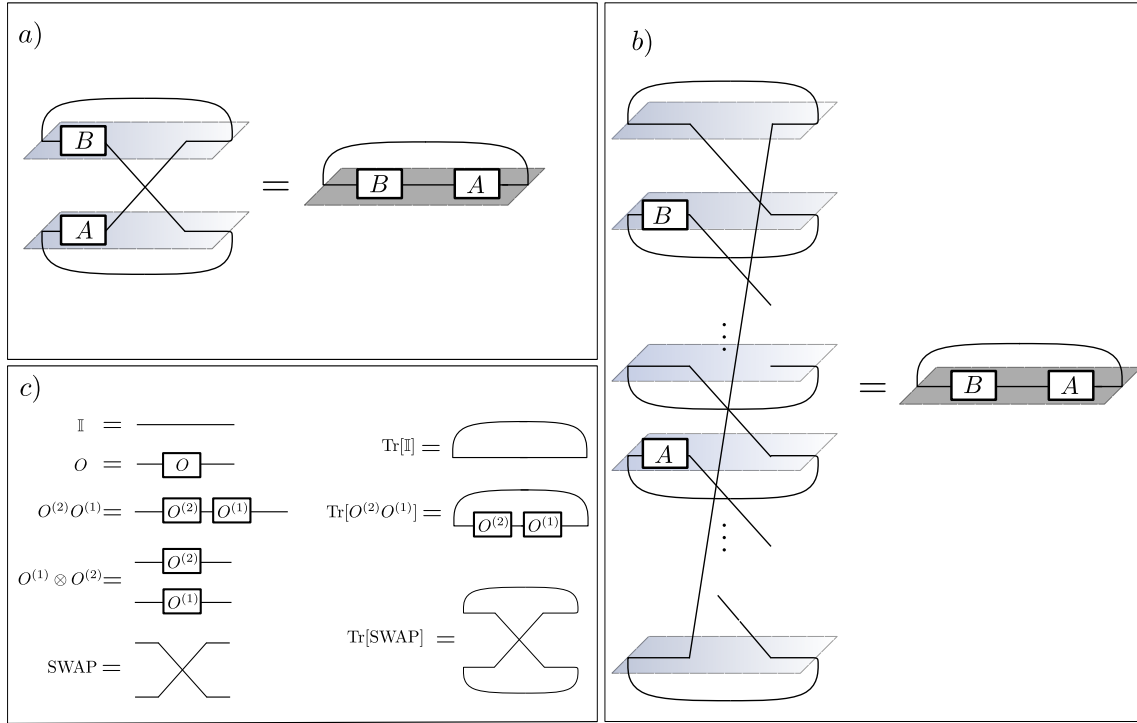


Figura 7.4.1: **Representación a lo “Tensor Network” de la correspondencia.** El operador  $e^{i\epsilon\mathcal{P}_0}$  permite traducir trazas en  $\mathcal{H} = \otimes_i h_i$  a trazas en  $h_i$ , como se ve fácilmente en la notación de tensor networks. La notación se introduce en c) mientras que los paneles a) y b) se han añadido para enfatizar que un espacio de Hilbert se asigna a cada rebanada de tiempo. Para las QFT, cada plano representa el espacio de Hilbert de campos cuantizados en una hipersuperficie dada. En a) representamos la Ec. (7.125). En b) mostramos la representación de la misma traza con un mayor número de rebanadas de tiempo.

que es la Ec. (7.124) para  $A = O^{(1)}$ ,  $B = O^{(2)}$ . Nótese que para  $N = 2$ ,  $e^{i\mathcal{P}_0}$  es simplemente el operador SWAP, y lo anterior es esencialmente una prueba de SWAP [101]. Notar también que este mismo correlador puede representarse en un espacio de Hilbert extendido con un número arbitrario de tiempos, como se muestra en la Figura 7.4.1 en notación de redes tensoriales.

El siguiente paso es relacionar la construcción cinemática anterior con correladores reales y con el operador de acción. En este escenario, la definición adecuada de la acción para un paso de tiempo  $\epsilon$  es

$$e^{i\mathcal{S}} := e^{i\epsilon\mathcal{P}_0} \otimes_i e^{-i\epsilon H_i} = e^{i\epsilon(\mathcal{P}_0 - \sum_i H_i)}. \quad (7.126)$$

De hecho, se demostró en [4] que

$$\text{Tr}[\langle\psi|_0 \langle\psi| e^{i\mathcal{S}} \otimes_i O_i^{(i)}] = \langle\psi, T|\hat{T} \Pi_i O_H^{(i)}(t_i)|\psi\rangle \quad (7.127)$$

con  $t_i = \epsilon i$ ,  $T = \epsilon N$  y  $|\psi, t\rangle := e^{-iHt}|\psi\rangle$ . En otras palabras, reemplazar  $\mathcal{P}_0$  con la acción  $\mathcal{S}$  en (7.124) corresponde a agregar evolución. La cantidad de evolución de

cada operador está determinada por el espacio de Hilbert en el que actúan. Además, para especificar el estado inicial lo insertamos en la rebanada de tiempo inicial ( $|\psi\rangle_0\langle\psi| \equiv |\psi\rangle_0\langle\psi| \otimes \mathbb{1}$ ).

También es sencillo extender (7.127) a Hamiltonianos dependientes del tiempo definiendo la acción como  $e^{i\mathcal{S}} = e^{i\epsilon P_0} \otimes_i U_i[(i+1)\epsilon, i\epsilon]$  con  $U_i(t', t)$  el operador de evolución temporal, evolucionando de  $t$  a  $t'$ , actuando en la rebanada  $i$ . También se podría añadir una dependencia temporal explícita a los operadores  $O^{(i)}$ . El ordenamiento temporal se preserva siempre y cuando la posición en el tiempo y la dependencia temporal externa sean consistentes (por ejemplo, si se está considerando un operador  $O = j(t)\phi_m$ , con  $j(t)$  una función, se debería insertar  $O_i = j(t)\phi_{im}$  para  $i\epsilon = t$ ).

Si solo se está interesado en el estado fundamental, se puede omitir el estado inicial agregando una parte imaginaria al tiempo (todo lo anterior se mantiene para un  $H$  no hermitiano [3]) y considerando el límite de tiempo grande, justo como se suele hacer en la formulación PI. Nuestro ejemplo principal podría reinterpretarse de esta manera. También se pueden considerar funciones de correlación térmicas haciendo el reemplazo (rotación de Wick)  $H \rightarrow -iH$  en la definición del operador  $\mathcal{S}$ . Un simple cambio de etiquetas de las ecuaciones anteriores da  $\text{Tr}[e^{i\mathcal{S}} \otimes_i O_i^{(i)}] = \text{Tr}[e^{-\beta H} \hat{T}_\theta \Pi_i O_H^{(i)}(\theta_i)]$  donde  $O_H(\theta) \equiv e^{H\theta} O e^{-H\theta}$  indicando “evolución térmica”, es decir, el operador “evolucionado” hasta la temperatura inversa  $\theta$  y  $\theta_i = i\epsilon$ . Esto también implica la Ec. (7.67) en el cuerpo principal y  $\text{Tr}[e^{i\mathcal{S}}] = \text{Tr}[e^{-\beta H}]$ .

*Tratamiento del espacio-tiempo de sistemas de qubits.* Ahora mostraremos en un ejemplo muy simple cómo se aplica la purificación generalizada además del caso de campo bosónico. Primero introducimos una situación convencional de dos qubits separados en el espacio en un momento dado para comparación. En este escenario describimos el estado asociado del sistema a través de una matriz de densidad que se puede escribir como

$$\rho = \sum_{i,j=0}^3 \langle P_i \otimes P_j \rangle_\rho P_i \otimes P_j \quad (7.128)$$

con  $\langle P_i \otimes P_j \rangle_\rho = \text{Tr}[\rho P_i \otimes P_j]$  y  $P_i$  matrices de Pauli para  $P_0 = \mathbb{1}$ . Esto significa que el estado define completamente los correladores en un momento dado y viceversa. Si el estado no es puro siempre podemos considerar una purificación y reescribir lo anterior como un valor medio de estado puro. Por ejemplo, para  $\rho = p|00\rangle\langle 00| + (1-p)|11\rangle\langle 11|$  podemos escribir

$$\langle P_i \otimes P_j \rangle_\rho = \langle\langle \Psi | P_i \otimes P_j \otimes \mathbb{1}_E | \Psi \rangle\rangle \quad (7.129)$$

donde el estado global que involucra el “entorno” puede ser elegido como  $|\Psi\rangle\rangle := \sqrt{p}|000\rangle + \sqrt{1-p}|111\rangle$  de tal manera que

$$\rho = \text{Tr}_E |\Psi\rangle\rangle\langle\langle\Psi|. \quad (7.130)$$

Ahora consideremos el caso de un solo qubit y dos tiempos en el nuevo enfoque. El nuevo formalismo describe la situación a través de un espacio de Hilbert que es isomorfo al del ejemplo anterior que involucra dos qubits. De hecho, describimos convencionalmente el espacio de Hilbert de un qubit como la representación más pequeña (irreducible) del álgebra  $[P_i, P_j] = 2i\epsilon_{ijk}P_k$ , donde  $i, j, k = 1, 2, 3$  y  $\epsilon_{ijk}$  es el símbolo de Levi-Civita. Nuestro formalismo impone entonces,

$$[P_{ti}, P_{t'j}] = \delta_{tt'} 2i\epsilon_{ijk}P_{tk}, \quad (7.131)$$

con la prescripción de emplear la representación convencional del espacio de Hilbert para cada rebanada de tiempo fija.

Por otro lado, según la discusión anterior, el operador de interés, es decir, el que produce los correladores en el espacio-tiempo (ver Ec. (7.127)) no es  $\rho$  sino

$$\bar{\rho} := |\psi\rangle\langle\psi| \otimes \mathbb{1} e^{i\mathcal{S}} = \sum_{i=0}^1 |\psi\rangle\langle i, \epsilon| \otimes |i\rangle\langle\psi, \epsilon|, \quad (7.132)$$

donde asumimos un estado inicial puro  $|\psi\rangle$  por simplicidad y usamos que para dos tiempos  $e^{i\mathcal{S}} = e^{i\epsilon\mathcal{P}_0} e^{-i\epsilon H} \otimes e^{-i\epsilon H}$ . También recordamos que  $|\psi, \epsilon\rangle \equiv e^{i\epsilon H}|\psi\rangle$ . Como cualquier otro operador,  $\bar{\rho}$  se puede escribir en términos de los correladores como

$$\bar{\rho} = \sum_{i,j=0}^3 \langle P_i \otimes P_j \rangle_{\bar{\rho}} P_i \otimes P_j, \quad (7.133)$$

donde sabemos por construcción que los valores medios satisfacen  $\langle P_i \otimes P_j \rangle = \text{Tr}[\bar{\rho} P_i \otimes P_j] = \langle\psi, T|P_j(\epsilon)P_i|\psi\rangle$ , con  $T = 2\epsilon$ . Podemos verificar esto explícitamente:

$$\begin{aligned} \langle P_i \otimes P_j \rangle_{\bar{\rho}} &= \sum_i \langle\psi, \epsilon|P_j|i\rangle\langle i, \epsilon|P_i|\psi\rangle \\ &= \sum_i \langle\psi, 2\epsilon|P_j(\epsilon)|i, \epsilon\rangle\langle i, \epsilon|P_i|\psi\rangle \\ &= \langle\psi, T|P_j(\epsilon)P_i|\psi\rangle, \end{aligned}$$

donde reorganizamos los términos en la primera igualdad y usamos la relación de completitud en la última. Nótese cómo los operadores aparecen según el orden temporal en el lado izquierdo, de acuerdo con (7.127). Lo anterior implica que  $\bar{\rho}$  es el

operador único en este espacio de Hilbert cuyos correladores en el tiempo son los propagadores convencionales. Nótese que los correladores en el tiempo ahora se tratan exactamente como en nuestro ejemplo espacial anterior. La diferencia entre las dos situaciones se codifica en las diferentes características de  $\rho$ ,  $\bar{\rho}$ , siendo el primero un estado pero no el segundo.

Notablemente, podemos interpretar  $\bar{\rho}$  como que surge de un estado generalizado: sin pérdida de generalidad escribamos  $|\psi\rangle = |0\rangle$ . Ahora introducimos un par de estados correlacionados con un entorno de qubit:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle\rangle &:= \frac{|000\rangle + |011\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\Phi\rangle\rangle &:= (e^{i\epsilon H} \otimes e^{i\epsilon H} \otimes \mathbb{1}) \frac{|000\rangle + |101\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (7.134)$$

Se puede verificar fácilmente que

$$\frac{\langle P_i \otimes P_j \rangle_{\bar{\rho}}}{\text{Tr } \bar{\rho}} = \frac{\langle \langle \Phi | P_i \otimes P_j \otimes \mathbb{1}_E | \Psi \rangle \rangle}{\langle \langle \Phi | \Psi \rangle \rangle} = \frac{\langle 0, T | P_j(\epsilon) P_i | 0 \rangle}{\langle 0, T | 0 \rangle}, \quad (7.135)$$

como se sigue de

$$\frac{\bar{\rho}}{\text{Tr } \bar{\rho}} = \text{Tr}_E R, \quad R := \frac{|\Psi\rangle\rangle \langle \langle \Phi|}{\langle \langle \Phi | \Psi \rangle \rangle}, \quad (7.136)$$

con  $R$  un estado generalizado, es decir, un proyector no ortogonal. También tenemos  $2 \langle \langle \Phi | \Psi \rangle \rangle = \text{Tr } \bar{\rho} = \langle 0, T | 0 \rangle$ , donde el factor 2 puede ser absorbido en los estados sin cambiar la condición  $R^2 = R$ . Hemos obtenido así una purificación generalizada de  $\bar{\rho}$ , como las que discutimos en la sección 7.4.4 del cuerpo principal y el Apéndice 7.3 para un campo bosónico. De hecho, se puede demostrar que obtener  $R$  es posible para cualquier sistema y evolución (véase también la discusión reciente en el contexto de espacio-tiempos holográficos dependientes del tiempo [97, 98, 137, 138]).

El ejemplo anterior muestra una vez más cómo el nuevo formalismo trata el espacio y el tiempo por igual, con el espacio de Hilbert de un qubit y dos tiempos teniendo dimensión  $2^2$  y siendo el mismo que el de dos qubits separados en el espacio en un solo tiempo. Las Ecuaciones (7.128) y (7.133) son formalmente las mismas, con las diferencias codificadas en los correladores. También vemos que la purificación generalizada (7.136) es análoga a la tradicional mostrada en (7.130). Por supuesto, considerar, por ejemplo, dos qubits y dos tiempos conduce a un espacio de dimensión  $2^4$  con todas las variables en igualdad de condiciones. Las diferencias entre espacio y tiempo no son aparentes a nivel del espacio de Hilbert, en cambio, se manifiestan en las propiedades de los “estados” con  $|\Psi\rangle\rangle \langle \langle \Psi|$  siendo un proyector ortogonal pero no  $R$ . Este último codifica no solo el estado inicial sino también la evolución y la estructura causal de la teoría.

*Caso bosónico y límite continuo.* Es interesante ver las consecuencias de este mapa en el caso del campo bosónico en espacio-tiempo discreto. Por ejemplo, lo anterior nos permite escribir

$$\text{Tr}[|\phi\rangle_0\langle\phi| e^{iS} \phi_{im}\phi_{jn}] = \langle\phi, T|\hat{T}\phi_{Hm}(t_i)\phi_{Hn}(t_j)|\phi\rangle \quad (7.137)$$

que es el “propagador de Feynman” para una ventana de tiempo finito  $T$  y para una configuración inicial y finita del campo en el espacio  $|\phi\rangle := \otimes_m |\phi_m\rangle$  ( $\hat{\phi}_m|\phi\rangle = \phi_m|\phi\rangle$  en una rebanada de tiempo dada, donde hemos introducido el sombrero para claridad).

Nótese que el lado derecho puede escribirse naturalmente como una integral de trayectoria entre las configuraciones  $\phi$  e insertando dos operadores de campo. El lado izquierdo parece sospechosamente similar a tal construcción, excepto por el hecho de que involucra operadores y una traza en el espacio de Hilbert (extendido). Para entender la relación entre los dos, uno debe expandir la traza en alguna base. Aunque son posibles infinitas elecciones, la base de autoestados del espacio-tiempo del campo  $|\phi\rangle := \otimes_{i,m} |\phi_{im}\rangle$  ( $\hat{\phi}_{im}|\phi\rangle = \phi_{im}|\phi\rangle$ <sup>8</sup>) lleva directamente a la PI de Feynman [4]. En este sentido, la formulación de PI emerge también del formalismo. Por ejemplo, fácilmente se ve que

$$\langle\phi|e^{i\epsilon\mathcal{P}_0}|\pi\rangle = \exp\left[i\epsilon\sum_{i,m}\pi_{im}\frac{(\phi_{i+1,m}-\phi_{im})}{\epsilon}\right]\langle\phi|\pi\rangle, \quad (7.138)$$

revelando que  $\mathcal{P}_0$  está relacionado con la transformada de Legendre, donde  $|\pi\rangle := \otimes_{i,m} |\pi_{im}\rangle$  es la base de autoestados del momento del campo.

Uno puede justificar aún más la aparición de la transformada de Legendre empleando una representación de modos normales de  $\mathcal{P}_0$ . Dados los operadores de aniquilación (creación)  $a_{im}, a_{im}^\dagger$  que satisfacen  $[a_{im}, a_{jn}^\dagger] = \delta_{ij}\delta_{mn}$  (relacionados linealmente con  $\phi_{im}, \pi_{im}$ ) se pueden definir modos de Fourier en el tiempo mediante  $a_{km} := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{i\omega_k j\epsilon} a_{jm}$  donde  $\omega_k = 2\pi k/T$  y  $k$  toma  $N = T/\epsilon$  valores diferentes. Entonces

$$\mathcal{P}_0 = \sum_{k,m} \omega_k a_{km}^\dagger a_{km} \quad (7.139)$$

produce  $e^{i\epsilon\mathcal{P}_0} a_{jm} e^{-i\epsilon\mathcal{P}_0} = a_{j+1,m}$  de acuerdo con (7.123). Si ahora reescribimos  $\mathcal{P}_0$  en la base de tiempo tenemos  $\mathcal{P}_0 = \sum_{m,j,j'} a_{j'm}^\dagger iD_{jj'} a_{jm}$  con  $D := -\frac{1}{N} \sum_k i\omega_k e^{i\omega_k(j-j')\epsilon}$  que es una versión discreta de una derivada en el tiempo de la delta de Kronecker  $\delta_{jj'}$ . La forma es una vez más la de la transformada de Legendre, ahora en las “variables”

<sup>8</sup>En la versión continua del texto principal,  $|\phi\rangle$  corresponde a  $|\phi(\mathbf{x})\rangle$  mientras que  $|\phi\rangle$  a  $|\phi(x)\rangle$

$a_{jm}, a_{jm}^\dagger$ . Nótese también que la Ec. (7.139) es una versión discreta de la expresión (7.52) del cuerpo principal para foliación canónica.

Además, considere el límite de espacio-tiempo continuo en el espacio de Hilbert. El procedimiento es el mismo que se suele hacer en el espacio, así que primero revisemos el escenario convencional espacial. Dado un espaciado constante  $a$ , se consideran operadores  $\phi(\mathbf{x}) := \frac{\phi_{\mathbf{m}}}{a^{d/2}}$ ,  $\pi(\mathbf{x}) := \frac{\pi_{\mathbf{m}}}{a^{d/2}}$  para  $\mathbf{x} = a\mathbf{m}$  (asumiendo  $d$  dimensiones) y  $\mathbf{m}$  un vector de entradas enteras. Entonces, el álgebra canónica  $[\phi_{\mathbf{m}}, \pi_{\mathbf{m}'}] = i\delta_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}$  implica

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = ia^{-d}\delta_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'} \rightarrow i\delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

en el límite  $a \rightarrow 0$ . El mismo tratamiento se puede aplicar para obtener (7.35) de (7.120) definiendo  $\phi(x) := \frac{\phi_{jm}}{\sqrt{\epsilon}a^{d/2}}$ ,  $\pi(x) := \frac{\pi_{jm}}{\sqrt{\epsilon}a^{d/2}}$ , con  $x = (\epsilon j, a\mathbf{m})$ , de modo que

$$[\phi(x), \pi(x')] = i\epsilon^{-1}a^{-d}\delta_{jj'}\delta_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'} \rightarrow i\delta^{(d+1)}(x - x').$$

Aunque ya no hay un número contable de rebanadas de tiempo (ni de rebanadas espaciales) aún se puede definir un operador de traslación en el tiempo y relacionarlo con la versión anterior. De hecho, se puede demostrar rigurosamente [3, 4] que la expansión (7.139) (con el índice  $k$  tomando valores enteros arbitrarios) lleva a  $\mathcal{P}_0 \rightarrow \int d^D x \pi(x) \dot{\phi}(x)$  para  $\epsilon, a \rightarrow 0$ , como sugiere (7.138) pero sosteniendo a nivel del operador y en acuerdo con los resultados del cuerpo principal. El límite de espaciado pequeño también supone  $\epsilon N = T$  constante, así como la condición espacial usual  $aM = L$  (para  $M$  el número de rebanadas espaciales y  $L$  la longitud total de la “caja”). Uno puede entonces tomar los límites  $T, L \rightarrow \infty$  para recuperar el formalismo del cuerpo principal. En este caso, los operadores de creación (aniquilación) de Fourier satisfacen también un álgebra continua, de acuerdo con Ec. (7.48): por ejemplo, manteniendo  $L$  finito se define  $a_m(p^0) := \sqrt{T}a_{km}$  con  $p^0 = 2\pi k/T$  de modo que  $[a_m(p^0), a_{m'}^\dagger(p'^0)] = T\delta_{kk'}\delta_{mm'} \rightarrow 2\pi\delta(p^0 - p'^0)\delta_{mm'}$ .

Nótese que el límite de tiempo continuo está bien definido para el operador  $\mathcal{P}_0$  en sí, de modo que  $e^{i\tau\mathcal{P}_0}$  implementa traslaciones geométricas en el tiempo como  $\phi(x) \rightarrow \phi(x^0 + \tau, \mathbf{x})$  para  $\tau \in \mathbb{R}$ . Por otro lado, si uno quisiera considerar primero el límite  $N \rightarrow \infty$  (manteniendo  $\epsilon$  finito, tal que  $j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$  y  $T = \epsilon N \rightarrow \infty$ ) la FT ahora lleva a  $p^0$  continuo en  $(-\Lambda, \Lambda)$  con  $\Lambda := (2\epsilon)^{-1}$  funcionando como un corte natural, de modo que la definición adecuada del generador de traslaciones en el tiempo se convierte en  $\mathcal{P}_0 := \sum_m \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dp^0 p^0 a_m^\dagger(p^0) a_m(p^0)$ , que toma el lugar de (7.139). Entonces  $e^{i\epsilon\mathcal{P}_0} a_{jm} e^{-i\epsilon\mathcal{P}_0} = a_{j+1, m}$  para cualquier entero  $j$ . En conclusión, en todos estos límites el generador de traslaciones en el tiempo está definido adecuadamente.

Estas definiciones constituyen una extensión natural del caso de un tiempo discreto compactificado y concuerdan con los posibles límites (es decir, pequeño espaciado y/o gran  $T$ ) de ese escenario básico.

Nótese que un tratamiento similar podría emplearse para otras álgebras de espacio-tiempo, como la de Ec. (7.131), llevando al reemplazo  $\delta_{tt'} \rightarrow \delta(t - t')$ .

## Conclusiones y perspectivas de la tesis

Presentamos a lo largo de la tesis un conjunto de resultados y aprendizajes parciales que nos llevaron finalmente a proponer una versión de la MC basada en espacios de Hilbert y que a su vez, cuando aplicada a teorías de campos, permiten hacer explícita la simetría de Lorentz. El espacio de Hilbert que introdujimos, no es el convencional sino que está basado en álgebras ampliadas para tratar a espacio y tiempo en pie de igualdad. A su vez, en el caso de teorías de campos relativistas mostramos que es también necesario cuantizar las posibles foliaciones del espacio-tiempo, algo que puede interpretarse como una cuantización de los sistemas de referencia. Otra importante novedad del formalismo son las acciones cuánticas, que nos permiten establecer un mapeo con la MC convencional y reinterpretar el rol de la formulación de Feynman. Al mismo tiempo, hemos mostrado que el mapeo lleva a generalizaciones del concepto de estado cuántico a objetos que codifican no solo el estado del sistema a tiempo fijo sino también su evolución y la estructura causal de una teoría. Por otra parte, introdujimos una formulación de la mecánica clásica en espacios de fases ampliados, cuya cuantización lleva al formalismo cuántico.

Vale la pena incluir una discusión sobre las diferencias conceptuales fundamentales entre nuestra propuesta y la MC tradicional, basada en evolución unitaria. Estas diferencias han sido pues totalmente cruciales para enfrentar el problema planteado y “acercar la cuántica a la relatividad”. Notablemente, el esquema final es en cierto sentido *más cuántico* que la formulación estándar, pues, en vez de asociar la evolución con un parámetro externo clásico, nuestro esquema codifica la información dinámica a través de (nuevas) correlaciones cuánticas, en sintonía con el espíritu de esta época. Para explicar mejor esta idea, déjenme retomar el ejemplo de un campo escalar  $\phi(x)$  y su momento conjugado  $\pi(x)$ . En la nueva formulación  $[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t', \mathbf{x})] = 0$  para todo par de tiempos y  $[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t', \mathbf{x})] = 0$  si  $t \neq t'$ . Esto significa que el momento es completamente independiente del campo, y de ninguna manera ligado a la cantidad  $\dot{\phi}$  (o a  $n^\mu \partial_\mu \phi$  si se prefiere). Vemos explícitamente que el momento no tiene,



a priori, ningún significado dinámico. En el caso clásico, recuperamos su significado tradicional a través de imponer un vínculo débil de la forma  $\{\phi, \mathcal{S}\} = \pi - n^\mu \partial_\mu \phi \approx 0$ . Cuánticamente, la situación es más compleja <sup>1</sup> y requiere computar “valores medios” con respecto a la acción. Esto es, dentro de llaves  $\langle \dots \rangle \equiv \text{Tr}[e^{i\mathcal{S}} \dots]$  el momento  $\pi$  sí adquiere significado dinámico. De igual manera, si bien  $\phi(x)$  es independiente de  $\phi(y)$  para  $x \neq y$ , incluso para un intervalo tipo tiempo,  $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle$  es el propagador de Feynman. Recordemos también que podemos reescribir lo anterior como un *valor débil* (weak value) [140]  $\langle \dots \rangle = \langle \langle \Phi | \dots | \Psi \rangle \rangle$  <sup>2</sup>, de modo que toda la información dinámica ha de estar contenida en los estados  $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle$ , no porque los hemos evolucionado unitariamente, sino porque contienen correlaciones cuánticas a través de distintos “slices” espacio-temporales. Considero que este resultado es realmente notable, pues la receta general para imponer las correlaciones que permitan recuperar la dinámica de una cierta teoría es extremadamente simple. Solo requiere “purificar” a la exponencial de la correspondiente acción cuántica  $\mathcal{S}$ , cuya forma suele ser la de la acción clásica.

Las consideraciones anteriores han sido de particular relevancia para obtener covarianza en espacios de Hilbert. Solo eliminando toda referencia a un parámetro externo de evolución se logra separar completamente la información dinámica de la geométrica. En particular, en nuestro formalismo, cuando definimos transformaciones de Lorentz para un dado campo, éstas están definidas geométricamente y de una vez por todas: la definición es la misma para todas las teorías, interactuantes o no, en analogía a lo que sucede con las rotaciones. Para saber si una teoría es invariante de Lorentz, nos preguntamos si  $[\mathcal{J}_{\mu\nu}, \mathcal{S}] = 0$  con  $\mathcal{J}_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\mu\nu} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes l_{\mu\nu}$  el generador de boosts, que hemos separado explícitamente en los sectores campos de materia y foliación. Decir que la acción conmuta con  $\mathcal{J}_{\mu\nu}$  sí es una afirmación de índole dinámica. A su vez, hemos visto que las acciones cuánticas son operadores no separables en la partición materia-foliación. Esta es la manera en la que reaparece en el formalismo la conexión entre transformaciones del espacio-tiempo y la dinámica.

<sup>1</sup>El lector familiarizado con la cuantización de teorías con vínculos podría preguntarse porqué no aplicamos el esquema correspondiente a nuestra propuesta clásica. De hecho, el formalismo de PW puede reobtenerse con dichos métodos, aplicados a una partícula parametrizada. Sin embargo, uno puede ver fácilmente que a diferencia de la partícula parametrizada los vínculos clásicos que introdujimos en el capítulo VII son de segunda clase y no de primera. Aplicar el esquema de Dirac lleva entonces a la cuántica tradicional, pues los corchetes de Dirac [42] coinciden con los de Poisson no ampliados. Ideas nuevas fueron entonces necesarias para no abandonar las álgebras ampliadas.

<sup>2</sup>Esta propiedad solo se mostró en 7.4.3 con  $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle$  vacíos de Bogoliubov para teorías libres, y en el caso de un qubit en 7.4, sin embargo puede mostrarse que es general.

A posteriori, esto es fácil de justificar si consideramos por ejemplo el efecto Unruh [147, 148]. El concepto de partícula y vacío está intrínsecamente ligado a como un observador separa espacio y tiempo. En nuestro formalismo dicha conexión aparece porque la acción no es separable de la foliación, de modo que su diagonalización, que determina el concepto de partícula, es foliación-dependiente. En particular, como se discutió en las conclusiones del capítulo VII, podemos aplicar fácilmente nuestro formalismo a observadores no inerciales (esto es, foliaciones curvas  $n^\mu(x)$ ), y esperamos reobtener la no equivalencia entre conceptos de vacío. Remarquemos que al emplear nuestro formalismo en fondo de Minkowski, las álgebras cumplidas por los campos no se modifican, solo habrá que especificar un estado cuántico diferente para la foliación, correspondiente por ejemplo a la de un observador de Rindler [148]. Para dar una idea concreta <sup>3</sup> sobre por qué es esto cierto consideremos coordenadas de Rindler  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2$  en  $1 + 1$  dimensiones tal que  $x = e^\xi \cosh(\eta)$ ,  $t = e^\xi \sinh(\eta)$ . Usando que  $\partial_\eta = \frac{\partial x^\mu}{\partial \eta} \partial_\mu = x \partial_t + t \partial_x$  puede verse que  $\mathcal{P}_\eta \equiv \mathcal{L}_{01}$ , esto es, el generador de traslaciones en el parámetro  $\eta$  es el generador de boosts <sup>4</sup>. A su vez  $\mathcal{L}_{01}$  puede obtenerse a partir de  $\mathcal{P}_0[\hat{n}]$  (el generador de traslaciones con  $\hat{n}^\mu(x)$  un operador) imponiendo  $n^\mu(x) = (x, t)^\mu$ . El tratamiento de esta situación es claramente muy distinto al canónico, donde se imponen álgebras canónicas en hiper-superficies dependientes del observador y se conecta la cuantización “a lo Rindler” con la cuantización “a lo Minkowski” a través de condiciones adecuadas (usualmente se usa que los campos y momentos coinciden en la semirrecta positiva a  $t = \eta = 0$ ).

Antes de proseguir analizando las nuevas posibilidades abiertas por el formalismo, cabe discutir aunque brevemente sobre algunas cuestiones más elementales que no han sido tratadas en detalle. En particular, en una tesis que habla de relatividad y teorías cuánticas de campos (sin que sean los temas centrales) no hemos incluido ningún cálculo que involucre un proceso de renormalización, proceso fundamental para extraer predicciones físicas. A su vez, sí hemos dado las expresiones generales a partir de las cuales derivar las reglas de Feynman y obtener funciones de correlación generales. Esto significa que si agregamos a esas expresiones la “maquinaria” convencional para obtener predicciones físicas, se llega a los mismos resultados. En este argumento estamos omitiendo una pieza importante, que no hemos tratado con sufi-

---

<sup>3</sup>Quiero aquí agradecer a Lucas Manzo, Jonatan Chaves y a Facundo Cruz por discusiones sobre el efecto Unruh.

<sup>4</sup>Estrictamente hablando esto es cierto en el “Rindler’s wedge”, sin embargo si uno considera correladores térmicos, que es lo relevante al derivar el efecto Unruh, entonces  $\mathcal{P}_\eta$  coincide con el generador de rotaciones en  $(t, x)$  en todo el espacio-tiempo, siendo el equivalente Euclídeo de  $\mathcal{L}_{01}$ .

ciente profundidad aún: ¿qué nos dice el formalismo ampliado sobre esta “maquinaria extra” que estamos dando por sentada? Siendo más concretos, ¿aparece algo nuevo en el proceso de renormalización al emplear el formalismo aquí propuesto? Cómo se mencionó en los capítulos VI y VII, la escala de tiempo  $\tau$  que empleamos para establecer el mapeo con la MC convencional para tiempo continuo podría ser una novedad importante. A su vez vimos en estos capítulos que en más de una situación es posible pensar (parcialmente) en el formalismo ampliado como un formalismo canónico en  $D+1 = d+2$  dimensiones con  $\tau$  un parámetro de evolución (recordemos el resultado en el capítulo VI que conecta nuestro mapa con expresiones del formalismo de línea de mundo [46]), ¿es esto un indicio de que existe una interpretación holográfica de nuestros resultados? Como hemos mencionado, no es simple escribir las teorías  $d+2$  dimensionales que se obtienen para  $\tau$  finito, pues estas son altamente no locales. Dejamos este asunto abierto de momento. Otro aspecto que no consideramos es el de establecer el mapeo entre el formalismo cuántico ampliado y el usual para el caso de fermiones y teorías de gauge. Respecto al primer caso, es simple definir acciones cuánticas fermiónicas basadas en álgebras de anticonmutadores ampliadas aunque hay que tener algún cuidado extra con la paridad a la hora de introducir las trazas que conectan con la MC tradicional. Esto no complica la discusión del formalismo introducido y provee una nueva manera de definir a las Integrales de Feynman para fermiones. Sin embargo, la presencia de un  $n^\mu$  cuántico para campos con espín sí introduce novedades que mencionamos brevemente en 7.2. Es interesante mencionar que en el caso de teorías clásicas emplear un formalismo multisimpléctico en presencia de teorías de gauge (a lo que puede asociarse un  $n^\mu$ ) puede dar ventajas a priori no obvias, como sucede en el caso de la formulación Hamiltoniana de la gravedad [151]. Sería interesante ver si dichas ventajas pueden importarse al caso cuántico a través de nuestro nuevo esquema de cuantización (recordemos que no hay una cuantización directa de los formalismo multisimplécticos). A su vez, queda claro que nuestro mapeo usado de forma directa ha de contar configuraciones equivalentes en exceso. Esto es, no hemos desarrollado el equivalente a lo que en Path Integrals se conoce como método de Faddeev–Popov [40]. Finalmente cabe mencionar que todo lo construido es suficiente en principio para representar de manera ampliada cualquier cantidad física de interés en MC tradicional no relativista. Esto significa que las bases para aplicar el formalismo a escenarios que incluyan medidas, canales cuánticos (por ej. sistemas abiertos), etc están dadas, aunque no hayamos ahondado en estos temas.

## Perspectivas

Podemos decir que el resultado principal de la tesis ha sido construir el formalismo del capítulo VII y mostrar su equivalencia con la física tradicional. Sin duda un formalismo es valioso si nos da un punto de vista novedoso que pueda servir para abordar problemas desde distintos ángulos. Creo haber cumplido el criterio de “novedad”, y considero haber dado algunas pistas sobre como el nuevo punto de vista puede dar ventajas a la hora de plantear viejos problemas. Por otro lado, posiblemente un mejor criterio para juzgar la utilidad de un formalismo nuevo es si este, además de ser equivalente a lo que conocemos en donde esperamos que lo sea, nos permite ir más allá. Existen sin duda varias direcciones a explorar que se han vuelto accesibles desde nuestra propuesta. Si bien su desarrollo se encuentra en una etapa inicial, me gustaría concluir la tesis indicando claramente estas perspectivas, que además son muy concretas:

- **Nuevos algoritmos de simulación en computadoras cuánticas.** En el anexo IX incluimos una aplicación computacional del formalismo de PW que permite hacer promedios temporales de cantidades físicas en paralelo en una computadora cuántica. En esta propuesta es clave tratar al tiempo como un operador de modo que podamos asignar parte de los qubits al tiempo mismo. ¿Podemos emplear nuestra propuesta final, basada en álgebras ampliadas y no en el operador tiempo de PW, para encontrar nuevos algoritmos cuánticos? La dirección más prometedora parece ser la de computar integrales de Feynman como se discutió en el capítulo VI. Allí vimos que la suma sobre historias que caracteriza a las integrales de Feynman puede obtenerse en una computadora cuántica. Más allá del algoritmo particular que hemos propuesto <sup>5</sup>, lo valioso de este resultado está en notar que al embeber nociones físicas como las trayectorias “off-shell” en un espacio de Hilbert, podemos automáticamente traducir dichas nociones a una computadora cuántica. Es más, el mapa de los capítulos VI y VII no está ligado necesariamente a integrales de Feynman de modo que podemos computar correladores espacio-temporales generales (por ejemplo de sistemas de espines) con la misma idea.

---

<sup>5</sup>Cabe notar que el algoritmo DQC1, que forma parte de nuestra idea para computar trazas, contrariamente a lo que sugiere un análisis superficial, no es eficiente en general [152]. Esto ocurre porque las trazas que este esquema computa se encuentran normalizadas, por ende solo trazas de operadores suficientemente cercanos a la identidad pueden obtenerse con pocas medidas al final de un circuito.

• **Generalización del concepto de estado cuántico.** Recordemos en primer lugar que en el formalismo ampliado del capítulo VII es posible codificar la evolución en estados  $|\Psi\rangle\rangle$ ,  $|\Phi\rangle\rangle$ , o tal vez más propiamente dicho, en el proyector no ortogonal  $R = |\Psi\rangle\rangle\langle\langle\Phi|/\langle\langle\Psi|\Phi\rangle\rangle$ . Mencionemos también que recientemente surgió interés por estudiar las correlaciones de este tipo de “estados” en la MC convencional (i.e., no ampliada), en el contexto de la correspondencia dS/CFT, para establecer si es posible pensar en el tiempo como una cantidad emergente de alguna medida en información cuántica [97], en analogía a lo que sucede con el espacio y el entrelazamiento en AdS/CFT [139]. En nuestro formalismo, las correlaciones contenidas en  $R$  son precisamente las responsables de que la evolución *emerja* de cantidades estáticas. Nuestra propuesta nos provee entonces de un marco capaz de definir rigurosamente y fácilmente cantidades análogas al entrelazamiento tipo espacio (el único que tiene sentido definir en MC convencional). En particular, tiene un claro significado hablar de correlaciones a través de “slices” temporales y está claro que las hay, de lo contrario encontraríamos siempre una evolución trivial. Es más, si recordamos que estas trazas están profundamente ligadas a la formulación de Feynman, podemos argumentar, sin hacer ninguna cuenta, que las correlaciones de estos estados han de proveer una nueva perspectiva sobre el límite clásico definido por  $\hbar \rightarrow 0$ . En particular, podemos plantear el problema de “comprimir” estos estados en analogía a lo que suele hacerse en las descomposiciones en Matrix Product States y Tensor Networks que emplean como criterio la no extensividad (leyes de área en vez de volumen) del entrelazamiento tipo espacio [153]. Mencionemos también que las descomposiciones en Tensor Networks proveen más que métodos numéricos, pues, al dar una gran intuición sobre la estructura de estados cuánticos, estos pueden usarse por ejemplo para capturar aspectos claves de holografía [154, 155]. Es natural investigar cuestiones similares empleando nuestra generalización de estado. A su vez, el tipo de correlaciones tipo tiempo permitidas por la MC tradicional está acotado. Esto es fácil de ver en el formalismo discreto donde escribimos  $e^{i\mathcal{S}} = e^{i\epsilon\mathcal{P}} \otimes_t e^{-i\epsilon H}$ , de modo que la parte entrelazante proviene del operador de traslaciones temporales.

• **Teorías físicas no mapeables a la MC convencional.** Las consideraciones anteriores nos llevan directamente a otro tema interesante que describiremos brevemente. Está claro que hay más operadores unitarios en los Hilbert ampliados que los que tienen la forma de  $e^{i\mathcal{S}}$  asociados a evolución separable desde la perspectiva ampliada (la parte Hamiltoniana es  $\otimes_t e^{-i\epsilon H}$ ). En particular esto significa que la cantidad de correladores independientes que podemos definir con el formalismo ampliado es drásticamente mayor a los que podemos obtener con el formalismo canónico

estándar. Podemos entonces definir teorías físicas que no tienen una correspondencia con las obtenidas desde la MC convencional. Se deja para el futuro explorar el significado de estas teorías y si es posible compatibilizarlas con las simetrías del espacio-tiempo que querramos imponer. Notemos también que en principio, este tipo de teorías asociadas a una parte Hamiltoniana entrelazante en tiempo podría no aportar correcciones en el límite clásico pues el efecto de entrelazamiento se perdería (ver también el punto previo).

- **Estados de foliación no clásicos.** Una novedad algo sorprendente del formalismo es el concepto de foliación como grado de libertad. Como hemos visto en el capítulo VII, hemos introducido este concepto por necesidad matemática y argumentado por su plausibilidad física por fuera de una verdadera teoría física que nos determine una dinámica asociada. Podríamos especular que una dinámica genuina ha de emerger si consideramos al espacio-tiempo mismo como dinámico y en consecuencia a sus posibles foliaciones. Sin embargo, este ingrediente no es parte del enfoque tradicional canónico que intenta cuantizar la gravedad tomando como grado de libertad la métricas inducidas en una dada hiper-superficies “inicial” y sus momentos conjugados de acuerdo a una foliación dada. En cambio, la independencia de dicha foliación, heredada de la covarianza general queda impuesta por “*constraints*” adicionales, siendo la ecuación de Wheeler–DeWitt uno de ellos [13]. Podemos preguntarnos, ¿qué ocurre si aplicamos nuestro esquema extendido a la gravedad misma? Lejos de tener un tratamiento completo del tema (recordemos en particular que no hemos tratado teorías de gauge en la tesis), déjenme notar que el esquema que surge es muy distinto. Por un lado, las métricas de hiper-superficies distintas serían independientes. Por otro, las foliaciones serían tratadas de manera dinámica. Esto parece indicar que el grado de libertad físico que se considera es la métrica completa del espacio-tiempo. A su vez habrá que tener en cuenta transformaciones de gauge y en principio al condicionar sobre estados de foliación fijos y *clásicos* uno recuperaría el tratamiento canónico usual. La ventaja sería simplemente no romper con la covarianza general en los pasos intermedios. A su vez es clara la analogía con el formalismo de PW, empleado justamente como modelo simplificado de este escenario, y que preserva los grados de libertad que usualmente se consideran “cinemáticos” (ver capítulo II). Por otro lado, el formalismo permite usar estados de foliación sin análogo clásico, por ejemplo asociado a superposición de foliaciones, que podemos asociar a un sistema de referencia cuantizado, o, de manera más exótica, podemos plantear estados entrelazados entre distintas regiones del espacio-tiempo como  $|n(x)\rangle \propto |n_1(x)\rangle_I |n_2(x)\rangle_{II} + |n_2(x)\rangle_I |n_1(x)\rangle_{II}$ , con I y II regiones desconectadas

que cubren todo el espacio-tiempo. Para que estas propuestas generen efectos cuánticos genuinos deberíamos considerar observables que no conmutan con  $n^\mu$ , lo cuál sugiere agregar un término que contenga al momento conjugado de  $n^\mu$  a la acción cuántica ya sea acoplado a la métrica o a los campos de materia. Una posible justificación semi-clásica de tal esquema surge de pensar que a la hora de determinar una foliación, un observador tiene que hacer medidas y dichas medidas están asociadas a interactuar con materia, siendo esta misma cuántica. Más concretamente, recordando los comentarios del observador de Rindler hechos más arriba, es natural asociar  $n^\mu \propto \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$ , esto es pensar que la foliación está asociada a hiper-superficies ortogonales a la línea de mundo de una partícula (o varias si queremos cubrir una región). Un primer modelo de foliación cuántica dinámica se obtiene al cuantizar esta(s) partícula(s) de modo que en el límite de masa grande uno recupere, a lo Feynman (ver el formalismo de línea de mundo del capítulo II), solo la línea de mundo clásica. Esto es, si tomamos el límite clásico de la partícula estamos en efecto condicionando sobre estados clásicos de foliación, precisamente lo que postulamos previamente. En cambio, si consideramos la dinámica cuántica de la partícula, que a su vez puede estar sometida a campos externos, lo que tenemos es una acción total que en general no conmuta con el operador  $n^\mu$  y donde la partícula y los campos están acoplados por este último de acuerdo a la forma de  $\mathcal{S}$  que hemos introducido. Lejos de ser una propuesta fundamental, este modelo nos provee de un primer ejemplo de cuantización semi-clásica de un sistema de referencia y que se reduce al esquema de nuestra propuesta cuando la partícula es muy masiva <sup>6</sup>. Este simple modelo muestra de por sí el potencial del formalismo para abrir nuevos caminos de investigación.

---

Hecho un resumen de nuestra propuesta, habiendo explicitado los temas aún en desarrollo, y considerando la nueva intuición que el formalismo final nos provee sobre el concepto de tiempo, creo poder concluir que el rol especial del tiempo que caracteriza a la formulación canónica convencional de la MC no es más que una construcción útil. Esta construcción puede eludirse sin abandonar el espíritu de la MC. Al contrario, la MC puede *ampliarse* dando lugar a un marco puramente cuántico que ya no describe a la materia en un tiempo dado, sometida a leyes de evolución dependientes de un parámetro clásico externo. En cambio, en su versión ampliada, la MC representa enteramente y de forma auto-contenida a la materia en el espacio-tiempo.

---

<sup>6</sup>Es interesante notar que en un experimento real que involucre acelerar a velocidades relativistas un “detector de Unruh”, conviene que el detector no sea particularmente masivo.

## Anexo: Aplicación computacional de PW

En esta sección presentamos un conjunto de aplicaciones del formalismo de tiempo cuántico del capítulo II, desarrolladas en colaboración con un grupo de computación cuántica de Los Alamos (EEUU). Omitiremos los detalles más técnicos, que pueden encontrarse en [6]. El principal objetivo ha sido la construcción de nuevos algoritmos cuánticos que emplean “qubits de tiempo”. También mostramos como el formalismo de PW y la noción de entrelazamiento sistema-tiempo nos proveen nuevas herramientas para el estudio de equilibración de sistemas cuánticos aislados. La idea básica detrás de este anexo está esquematizada en la Figura 9.0.1.

### 9.1 Formalismo del tiempo cuántico y su discretización

Consideremos un sistema cuántico de  $n$ -qubits con espacio de Hilbert asociado  $\mathcal{H}_S$ . Sea  $H$  un Hamiltoniano independiente del tiempo bajo el cual evoluciona el sistema. La evolución dinámica del sistema está determinada por la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle , \quad (9.1)$$

donde hemos establecido  $\hbar = 1$ . Es bien sabido que la solución de la Ec. (9.1) es dada por

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi_0\rangle , \quad \text{con} \quad U(t) = e^{-iHt} , \quad (9.2)$$

y donde  $|\psi_0\rangle$  es algún estado inicial del sistema.

Como se ha discutido anteriormente, y como se muestra en la Fig. 9.0.1(a), existe una asimetría inherente entre las variables de espacio y tiempo en la mecánica cuántica. A saber, la variable  $t$  sobre la cual tomamos una derivada es un parámetro



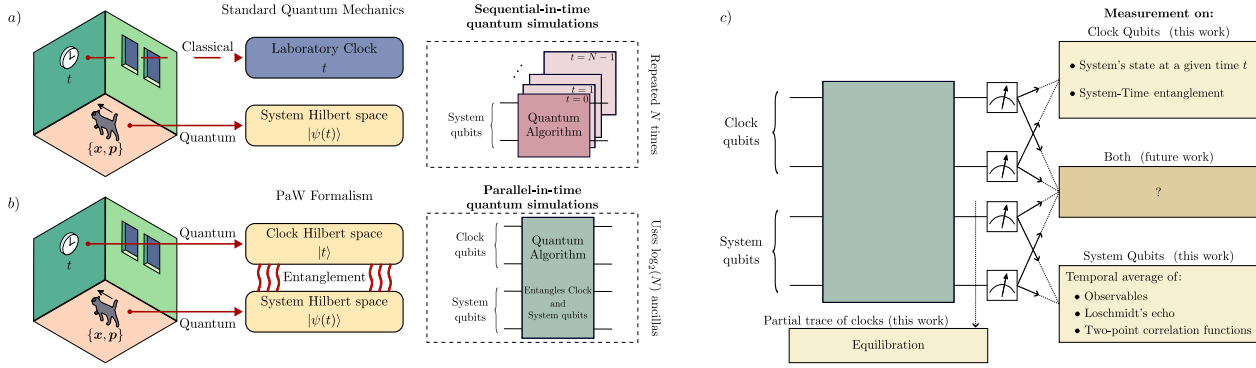


Figura 9.0.1: **Algoritmos cuánticos basados en la mecánica cuántica estándar o el formalismo PW.** a) En la mecánica clásica hamiltoniana, las variables dinámicas son funciones de las coordenadas del espacio de fases, posición  $\mathbf{x}$  y momento  $\mathbf{p}$ . En la mecánica cuántica estándar, se promueven  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{p}$  a operadores cuánticos, pero la variable tiempo  $t$  se trata como un parámetro clásico que es externo al sistema cuántico estudiado. Los algoritmos cuánticos para estudiar propiedades dinámicas basados en este marco se implementan para un tiempo fijo  $t$ . Si queremos calcular un promedio de  $N$  tiempos, necesitamos repetir la ejecución en  $N$  experimentos secuenciales en el tiempo. b) En el formalismo PW, el tiempo se trata como una variable cuántica, con su propio espacio de Hilbert asociado. En este trabajo presentamos algoritmos cuánticos para simulaciones paralelas en el tiempo que intercambian repeticiones de circuito por qubits auxiliares de reloj. c) Después de un protocolo de enlace adecuado, se tiene acceso no solo a propiedades del sistema en un tiempo dado, sino también a su historia completa. Esta información se puede recuperar realizando mediciones al final del circuito, que ahora pueden involucrar a los qubits del reloj, los qubits del sistema o ambos. Las mediciones en el sistema que están condicionadas a un valor de tiempo determinado dan propiedades del sistema en un tiempo dado. Más interesantemente, si solo se mide en el sistema e ignora completamente los valores del reloj, se obtienen promedios temporales. Esto es una consecuencia del entrelazamiento entre el sistema y el reloj que induce un canal cuántico útil cuando el reloj se trata como un entorno. Debido a la naturaleza cuántica del reloj y el sistema simulados, se pueden proponer muchas otras mediciones, lo que significa que los diferentes protocolos que discutimos en este manuscrito no agotan todas las posibilidades abiertas por este marco computacional.

completamente clásico que es externo al sistema cuántico. Una alternativa para incorporar completamente el tiempo en un marco cuántico es introducir un nuevo espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_T$  generado por algunos estados  $|t\rangle$  (ver Fig. 9.0.1(b)) tal que  $T|t\rangle = t|t\rangle$  y  $[T, P_T] = i\hbar$ , que en la base del tiempo lleva a  $P_T \equiv -i\hbar \frac{d}{dt}$ . Note que  $P_T$  no es el Hamiltoniano del sistema y de hecho  $[T, H] = 0$  (ya que actúan en espacios de Hilbert distintos). La evolución es entonces recuperada de una ecuación de Schrödinger extendida, involucrando ambos espacios de Hilbert del sistema y del reloj, que se da por  $\mathcal{J}|\Psi\rangle = 0$ , para  $\mathcal{J} = P_T \otimes \mathbb{1}_S + \mathbb{1}_T \otimes H$  y  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_T \otimes \mathcal{H}_S$ . Aquí  $\mathbb{1}_T$  y  $\mathbb{1}_S$  denotan respectivamente las identidades en  $\mathcal{H}_T$  y  $\mathcal{H}_S$ . En general,

la ecuación de Schrödinger extendida, junto con una condición inicial, conduce al entrelazamiento entre el sistema y el espacio de Hilbert del tiempo (hemos visto una descripción más detallada del formalismo en el capítulo II).

El esquema anterior también puede considerarse como la base matemática del mecanismo de Page y Wootters (PW). Bajo este marco, el *estado del universo*  $|\Psi\rangle$  es estacionario (ya que  $\mathcal{J}|\Psi\rangle = 0$ ) mientras que la evolución unitaria del subsistema  $S$  emerge condicionando el resto. En nuestra notación anterior esto significa que dado un estado del universo

$$|\Psi\rangle = \int dt |t\rangle |\psi(t)\rangle, \quad (9.3)$$

podemos recuperar el estado del sistema como  $|\psi(t)\rangle = \langle t|\Psi\rangle$  (asumiendo  $\langle t|t'\rangle = \delta(t-t')$ ). Más notablemente, se puede ver que  $\mathcal{J}|\Psi\rangle = (i\partial_t - H)|\psi(t)\rangle = 0$  recupera precisamente la ecuación de Schrödinger estándar con el índice  $t$  siendo degradado de una etiqueta de estado cuántico a un parámetro de tiempo.

Para hacer los estados  $|\Psi\rangle$  accesibles a computadoras cuánticas convencionales basadas en qubits (discretos), se necesita un marco de tiempo discreto adecuado. Afortunadamente, es fácil adivinar la forma de un *estado historia* de tiempo discreto. A saber, comenzamos introduciendo un espacio de Hilbert de dimensión finita  $\mathcal{H}_T$ , que denominamos como el espacio de Hilbert de *tiempo* o *reloj* con base  $|t\rangle$  satisfaciendo  $\langle t'|t\rangle = \delta_{tt'}$  para  $t = 0, \dots, N-1$ . Un estado historia discreto entonces se define como el estado

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} |t\rangle |\psi(\varepsilon t)\rangle, \quad (9.4)$$

con  $|\psi(\varepsilon t)\rangle = U(\varepsilon t)|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}_S$ . Aquí, tenemos  $\varepsilon = T/N$  el espaciado temporal para una ventana de tiempo dada  $T$ , mientras que  $t$  denota un índice adimensional discreto (de modo que  $\varepsilon t$  es un intervalo de tiempo físico).

En analogía con el caso continuo, se puede recuperar el estado del sistema en un tiempo dado condicionando como  $|\psi(\varepsilon t)\rangle \langle \psi(\varepsilon t)| = \text{Tr}_T[|\Psi\rangle \langle \Psi| \Pi_t] / \langle \Psi| \Pi_t | \Psi \rangle$  para  $\Pi_t = |t\rangle \langle t| \otimes \mathbb{1}_S$ . De esta manera, el estado evolucionado unitariamente se recupera para los valores de tiempo permitidos por  $\mathcal{H}_T$ . Note que esta operación es diferente de una traza parcial directa sobre los estados del reloj que generalmente produce un estado mixto. Resulta que la traza parcial induce un canal cuántico que también codifica información útil sobre la dinámica del sistema y su (eventual) equilibrio. De hecho, se puede pensar en los estados historia como una purificación de ese canal cuántico particular. Esto está relacionado con el entrelazamiento sistema-tiempo como discutimos en la Sección 9.3.

Aquí observamos que en el caso de que  $N$  sea una potencia de dos, el estado historia discreto se puede preparar con el circuito similar a la estimación de fase cuántica de la Fig. 9.2.1. Para  $N$  siendo una potencia de dos, se requieren  $\log(N)$  qubits auxiliares o de reloj (de ahora en adelante suponemos que los logaritmos son en base 2). Como tal, el espacio de Hilbert del reloj  $\mathcal{H}_T$  tiene una dimensión  $\dim(\mathcal{H}_T) = 2^{\log(N)} = N$ . Este resultado ha sido reportado recientemente en [43] y [44], donde el estado historia discreto de la Ec. (9.4) también ha sido extensamente estudiado.

Las ventajas de codificar estados historia en una computadora cuántica se vuelven claras una vez que se comienza a considerar mediciones al final del circuito que son diferentes de la simple condicionalidad: mientras que las mediciones condicionadas permiten recuperar propiedades del sistema en un tiempo dado, nuevas posibilidades genuinamente cuánticas se vuelven accesibles a través de los qubits del reloj. Un pequeño resumen de tales posibilidades se proporciona en la Fig. 9.0.1(c).

## 9.2 De relojes-qubit a simulaciones paralelas en tiempo

Aquí discutimos cómo el formalismo matemático de los relojes-qubit presentado en la sección anterior puede ser aprovechado para crear nuevos algoritmos cuánticos destinados a estudiar promedios de propiedades dinámicas en tiempo de sistemas cuánticos. En particular, en esta sección nos enfocamos en desarrollar algoritmos de tipo paralelo en tiempo que estiman promedios temporales de cantidades físicas.

### 9.2.1 Formalismo

Dado un Hamiltoniano independiente del tiempo  $H$  que actúa sobre  $n$ -qubits, y su operador de evolución temporal asociado  $U(t) = e^{-iHt}$ , consideramos el problema de estimar cantidades generales de la forma

$$\overline{F}(O_1, O_2, \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{dt}{T} e^{-i\omega t} \langle O_1(t) O_2 \rangle_\rho \quad (9.5)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{dt}{T} e^{-i\omega t} \text{Tr}[\rho O_1(t) O_2], \quad (9.6)$$

donde  $O_1(t) = U^\dagger(t) O_1 U(t)$ . Aquí,  $\rho$  es un estado de  $n$ -qubits actuando en el espacio de Hilbert  $d$ -dimensional  $\mathcal{H}_S$  (con  $d = 2^n$ ),  $O_1$  y  $O_2$  son dos operadores, y  $\omega \in \mathbb{R}$ .

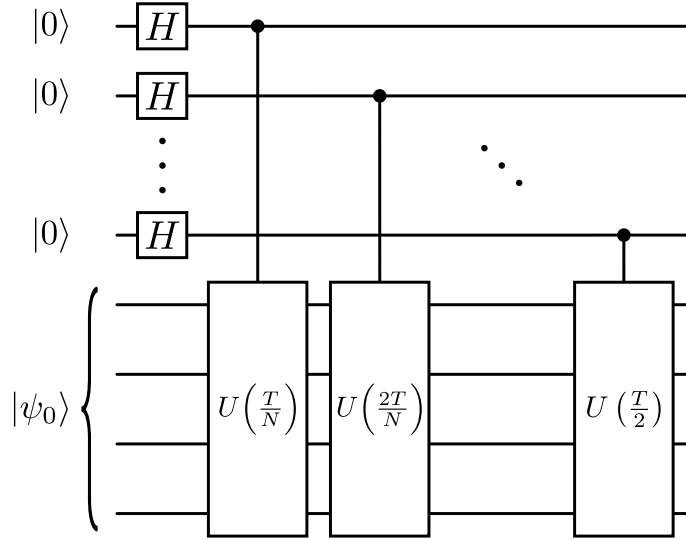


Figura 9.2.1: **Circuito para preparar estados historia.** Como se muestra arriba, el estado inicial de los qubits del reloj es  $|0\rangle^{\otimes \log(N)}$  mientras que el del sistema es  $|\psi_0\rangle$ . La acción de las compuertas de Hadamard es mapear el estado inicial a  $|+\rangle^{\otimes \log(N)} \otimes |\psi_0\rangle$ . Aquí, nos resulta conveniente escribir  $|+\rangle^{\otimes \log(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \otimes_{j=1}^{\log N} (|0_j\rangle + |1_j\rangle) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} |t\rangle$  donde hemos expresado  $t$  en su forma binaria  $t = \sum_{j=1}^{\log N} t_j 2^{j-1}$ . A continuación, las  $\log N$  compuertas controladas  $U(2^{j-1} \frac{T}{N}) = U(\frac{T}{N})^{2^{j-1}}$  para  $j = 1, \dots, \log N$  realizan las operaciones  $U(\varepsilon t) |\psi_0\rangle = |\psi(\varepsilon t)\rangle$  para  $U(\varepsilon t) = U(\frac{T}{N})^{\sum_{j=1}^{\log N} t_j 2^{j-1}}$ .

Para ilustrar la relevancia de la cantidad  $\overline{F}(\rho, O_1, O_2, \omega)$  en la Ec. (9.5) consideremos varios casos especiales. Primero, dejemos  $\omega = 0$  y  $O_2 = \mathbb{1}$ , lo que conduce a

$$\begin{aligned} \overline{F}(O_1) &:= \overline{F}(O_1, \mathbb{1}, 0) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{dt}{T} \langle O_1(t) \rangle_\rho. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Podemos ver que  $\overline{F}(\rho, O_1)$  simplemente corresponde a un promedio temporal infinito del observable  $O_1$ . Estas cantidades son cruciales para entender las propiedades dinámicas de sistemas cuánticos cerrados y en particular su equilibrio [156-158]. También son relevantes para el estudio de procesos de “quench” cuántico en teorías de campo [159] y de indicadores de transición de fase cuántica fuera del equilibrio a través de promedios de tiempo infinito de ecos de Loschmidt [160-164]. Luego, cuando  $\omega = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} \overline{F}(O_1, O_2) &:= \overline{F}(O_1, O_2, 0) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{dt}{T} \langle O_1(t) O_2 \rangle_\rho. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Aquí podemos reconocer  $\langle O_1(t) O_2 \rangle_\rho$  como una función de correlación de dos puntos (también conocida como función de Green dinámica). Las funciones de correlación

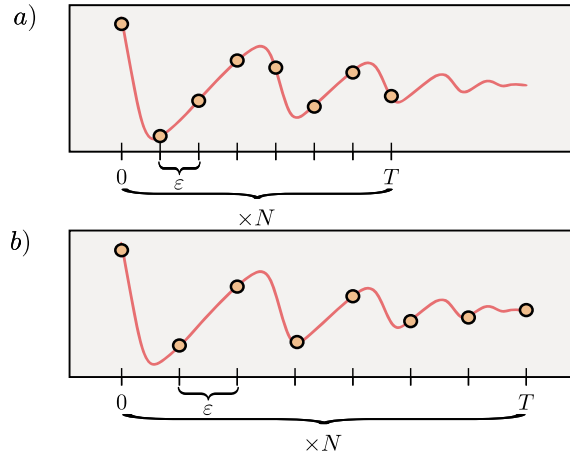


Figura 9.2.2: **Compromiso entre precisión y resolución.** Considere la aproximación del promedio de tiempo infinito de la Ec. (9.5) dada por la suma discreta en la Ec. (9.9). Para un número fijo de pasos de tiempo  $N$ , existe un compromiso entre el tamaño de la ventana  $\varepsilon$  y el tiempo final  $T$ . Es decir, un  $T$  más grande implica un tamaño de ventana  $\varepsilon$  más grande, y por lo tanto menos precisión. Por otro lado, un tiempo final  $T$  más pequeño implica más resolución en el promedio temporal a costa de menos precisión.

de dos puntos se utilizan para describir el comportamiento de un sistema bajo perturbaciones y son una herramienta ampliamente utilizada en sistemas de muchos cuerpos cuánticos y física de la materia condensada [165-168]. El promedio de tiempo infinito de  $\langle O_1(t)O_2 \rangle_\rho$  ha sido recientemente considerado en [169] para estudiar propiedades termodinámicas de sistemas cuánticos cerrados como la emergencia de disipación en tiempos tardíos.

Finalmente, notamos que la función general  $\bar{F}(O_1, O_2, \omega)$  corresponde a una transformada de Fourier de la función de correlación de dos puntos, que comúnmente se refiere como el factor de estructura dinámico en la comunidad de la materia condensada [170, 171]. Crucialmente, los factores de estructura dinámicos se utilizan para estudiar propiedades dinámicas de un sistema dado y tienen la propiedad de ser experimentalmente accesibles [172, 173], y generalmente siendo difíciles de calcular mediante simulaciones clásicas [171].

Aunque la importancia de la Ec. (9.5) es clara, el cálculo de  $\bar{F}(O_1, O_2, \omega)$  puede no ser sencillo. Por un lado, se espera generalmente que la simulación clásica de algún proceso dinámico cuántico mecánico sea exponencialmente costosa en computadoras clásicas. Tal escalado puede ser mitigado usando una computadora cuántica. Aquí, hay varios esquemas capaces de calcular cantidades de tiempo fijo de la forma  $\langle O_1(t)O_2 \rangle_\rho$  [170, 174-176]. Sin embargo, el problema persiste en que se necesita realizar el promedio temporal. En la práctica, esto se puede lograr mediante la apro-

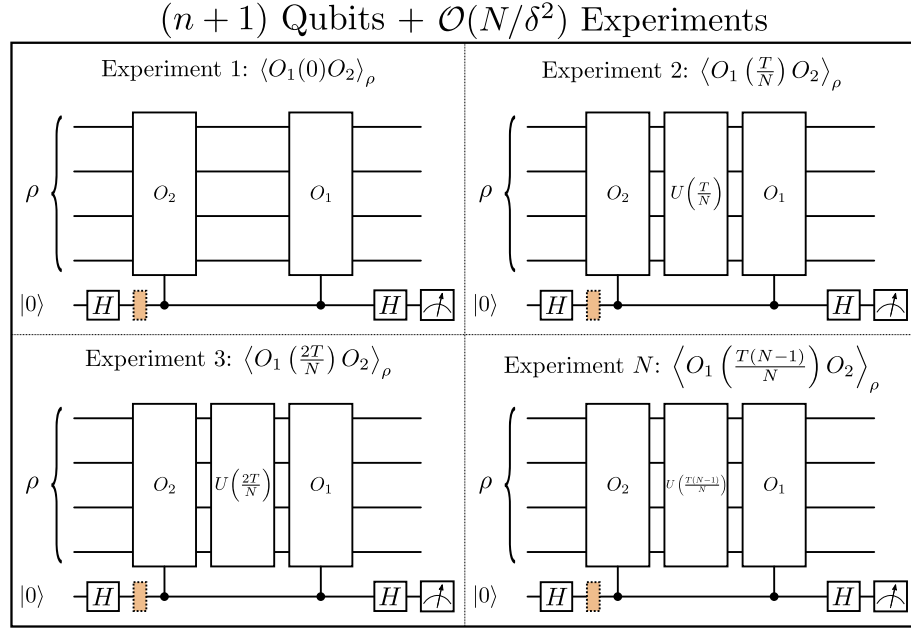


Figura 9.2.3: **Algoritmo para la estimación secuencial en el tiempo de la Ec. (9.9).** El algoritmo mostrado puede ser utilizado para calcular individualmente cada término en la suma. Es decir, los circuitos pueden ser usados para estimar cantidades de la forma  $\langle O_1(t)O_2 \rangle_\rho$ . Luego, se pueden combinar esos valores esperados clásicamente (así como añadir las fases apropiadas  $e^{-i\omega\epsilon t}$ ) para estimar la cantidad  $\tilde{F}(O_1, O_2, \omega)$  con una precisión  $\delta$ . La compuerta discontinua de color se reemplaza con una identidad (una compuerta  $S^\dagger$ ) para calcular la parte real (imaginaria) de  $\langle O_1(t)O_2 \rangle_\rho$ . Este enfoque requiere un dispositivo cuántico con  $(n + 1)$ -qubits y  $\mathcal{O}(N/\delta^2)$  experimentos diferentes.

ximación de tiempo discreto

$$\tilde{F}(O_1, O_2, \omega) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} e^{-i\omega\epsilon t} \langle O_1(\epsilon t)O_2 \rangle_\rho, \quad (9.9)$$

donde tenemos  $\epsilon = T/N$  (por simplicidad, de ahora en adelante supondremos que  $N$  es una potencia de 2). Es decir, para una ventana de tiempo (finita) dada  $T$ , estamos calculando el promedio sobre  $N$  puntos separados por un espaciado  $\epsilon$ . Como se muestra en la Fig. 9.2.2, el espaciado  $\epsilon$  determina el nivel de precisión en la aproximación, ya que un  $\epsilon$  más pequeño conduce a una discretización más precisa del integral y una mejor aproximación del verdadero promedio de tiempo infinito. Por otro lado, el tiempo final  $T$  determina la resolución de la aproximación, ya que un  $T$  más grande permite un intervalo de tiempo más largo a promediar, capturando más información sobre el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo. Se puede ver que tanto la resolución como la precisión pueden mejorar con un mayor número de pasos de tiempo discretos  $N$ .

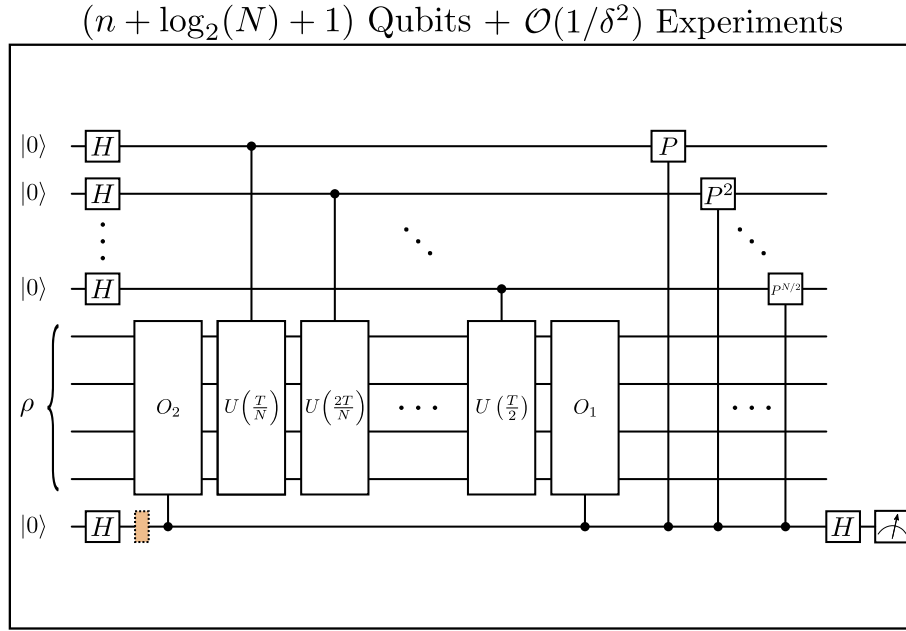


Figura 9.2.4: **Algoritmo para la estimación paralela en el tiempo de la Ec. (9.9).** El algoritmo mostrado puede ser utilizado para estimar directamente la cantidad  $\tilde{F}(O_1, O_2, \omega)$  con una precisión  $\delta$ . En la figura,  $P$  denota una compuerta de fase de  $\omega\varepsilon$ . Es claro que este algoritmo contiene como subrutina el circuito para preparar el estado historia de la Fig. 9.2.1. Este enfoque requiere un dispositivo cuántico con  $(n + \log(N) + 1)$ -qubits y  $\mathcal{O}(1/\delta^2)$  experimentos. La compuerta discontinua de color se reemplaza con una identidad (una compuerta  $S^\dagger$ ) para calcular la parte real (imaginaria) de  $\tilde{F}(O_1, O_2, \omega)$ .

## 9.2.2 Protocolos secuenciales y en paralelo en el tiempo

Consideremos ahora la tarea de estimar  $\tilde{F}(O_1, O_2, \omega)$  cuando  $O_1$  y  $O_2$  son operadores de Pauli mediante simulaciones secuenciales o en paralelo en el tiempo. Aquí, por secuencial, entendemos que cada término en la suma en la Ec. (9.9) se estima en un dispositivo cuántico ejecutando un número finito de “experimentos”. Por ejemplo, consideremos el circuito en la Fig. 9.2.3, como se muestra explícitamente en la Información Suplementaria, puede ser utilizado para estimar un valor esperado de la forma  $\langle O_1(\varepsilon t) O_2 \rangle_\rho$ . Por lo tanto, sostenemos que la siguiente proposición es válida.

**Proposition 1.** *El circuito en la Fig. 9.2.3, que requiere  $(n + 1)$ -qubits, puede ser utilizado para estimar la cantidad  $\tilde{F}(O_1, O_2, \omega)$  de la Ec. (9.9) hasta una precisión de  $\delta$  con  $\mathcal{O}(N/\delta^2)$  experimentos.*

La prueba de la Proposición 1, así como la de todos los otros resultados principales, se presenta en la Información Suplementaria.

Claramente, el hecho de que necesitemos estimar secuencialmente  $\langle O_1(\varepsilon t) O_2 \rangle_\rho$  para cada  $t = 0, \dots, N - 1$ , conlleva una complejidad en el número de experimentos

(es decir, número de llamadas al ordenador cuántico) que escala como  $\mathcal{O}(N)$ . Como mostramos ahora, esta complejidad puede ser reducida utilizando un esquema basado en el formalismo de estado historia discreto, que nos permite estimar directamente la suma total de la Ec. (9.9). Es decir, se sostiene el siguiente resultado.

**Teorema 9.2.1.** *El circuito en la Fig. 9.2.4, que requiere  $(n + \log(N) + 1)$ -qubits, puede ser utilizado para estimar la cantidad  $\tilde{F}(O_1, O_2, \omega)$  de la Ec. (9.9) hasta una precisión de  $\delta$  con  $\mathcal{O}(1/\delta^2)$  experimentos.*

Comparando la Proposición 1 y el Teorema 9.2.1 revela que al aprovechar el formalismo del estado historia discreto podemos cambiar la complejidad de experimentos de  $\mathcal{O}(N)$  por  $\mathcal{O}(\log(N))$ -qubits auxiliares. Es decir, el algoritmo en paralelo en el tiempo de la Fig. 9.2.4 permite un intercambio exponencial de recursos temporales a qubits.

Aquí destacamos que se puede observar en la Fig. 9.2.4 que el paso clave detrás del algoritmo para computar  $\tilde{F}(O_1, O_2, \omega)$  es el estado historia discreto. De hecho, el circuito en la Fig. 9.2.1 utilizado para crear el estado historia es una subrutina en la Fig. 9.2.4. Así, al aprovechar  $\log(N)$  ancillas, se pueden implementar simultáneamente todos los  $N$  operadores de evolución temporal  $U(\varepsilon t)$  para  $t = 0, \dots, N - 1$ , y por lo tanto computar todos los términos en la sumatoria que lleva a  $\tilde{F}(O_1, O_2, \omega)$ .

Note que mientras la Proposición 1 y el Teorema 9.2.1 son derivados y probados para el caso de  $O_1$  y  $O_2$  siendo operadores unitarios, uno puede fácilmente generalizar los resultados anteriores para el caso en que en su lugar se expresan como una combinación lineal de operadores de Pauli. En particular, si

$$O_i = \sum_{\mu=1}^{M_1} c_{\mu}^{(i)} U_{\mu}, \quad (9.10)$$

para  $U_{\mu}$  siendo un operador de Pauli, entonces las complejidades de experimento en la Proposición 1 y el Teorema 9.2.1 cambian respectivamente a  $\mathcal{O}(NM_1M_2/\delta^2)$  y  $\mathcal{O}(M_1M_2/\delta^2)$ . Aquí, nuevamente recuperamos un intercambio exponencial de recursos temporales a qubits mediante el algoritmo en paralelo en el tiempo.

Ahora, consideremos  $\rho = O_1 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ ,  $O_2 = \mathbb{1}$  y  $\omega = 0$ . En este caso especial,

$$\overline{F}(|\psi_0\rangle\langle\psi_0|, \mathbb{1}, 0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{dt}{T} |\langle\psi_0|U(t)|\psi_0\rangle|^2. \quad (9.11)$$

La cantidad en el lado derecho es el promedio del eco de Loschmidt en tiempo infinito [160, 161, 163, 164], que denotamos como  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$ . Vemos que

$$\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0) \equiv \overline{F}(|\psi_0\rangle\langle\psi_0|, \mathbb{1}, 0). \quad (9.12)$$



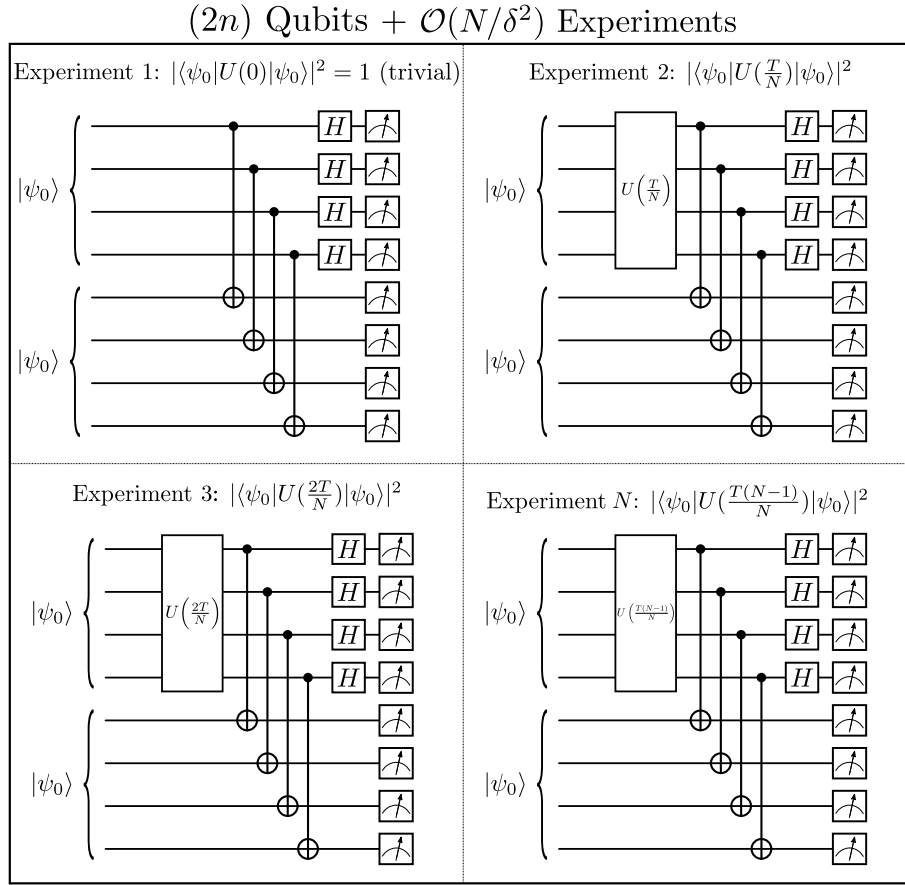


Figura 9.2.5: **Algoritmo para la estimación secuencial en el tiempo del eco de Loschmidt de la Ec. (9.13).** Mostramos un algoritmo que calcula, con precisión  $\delta$ , el overlap entre  $|\psi_0\rangle$  y  $U(\varepsilon t)|\psi_0\rangle$  para  $t = 0, \dots, (N-1)$ . El algoritmo se basa en mediciones en la base de Bell como se describe en [177]. Una vez que se estiman estos overlaps, podemos promediarlos clásicamente para estimar el promedio temporal discreto del eco de Loschmidt  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$ . Este enfoque requiere un dispositivo cuántico con  $(2n)$  qubits y  $\mathcal{O}(N/\delta^2)$  experimentos diferentes.

De manera similar, para su aproximación discreta en tiempo  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$ , podemos escribir

$$\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0) \equiv \tilde{F}(|\psi_0\rangle\langle\psi_0|, \mathbb{1}, 0) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} |\langle \psi_0 | U(\varepsilon t) | \psi_0 \rangle|^2. \quad (9.13)$$

Es claro que aunque  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$  puede ser calculado técnicamente con los circuitos en las Figs. (9.2.3) y (9.2.4), esto requiere expandir  $O_1 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$  en una combinación lineal de unitarios, y dicha suma generalmente contendrá exponencialmente muchos términos. Para mitigar este problema, también presentamos dos resultados que nos permiten estimar la Ec. (9.13) mediante simulaciones en tiempo secuencial o paralelo.

Primero, consideremos la siguiente proposición.

**Proposition 2.** *El circuito en la Fig. 9.2.5, que requiere  $(2n)$  qubits, puede ser usado para estimar la cantidad  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$  de la Ec. (9.13) hasta una precisión  $\delta$  con*

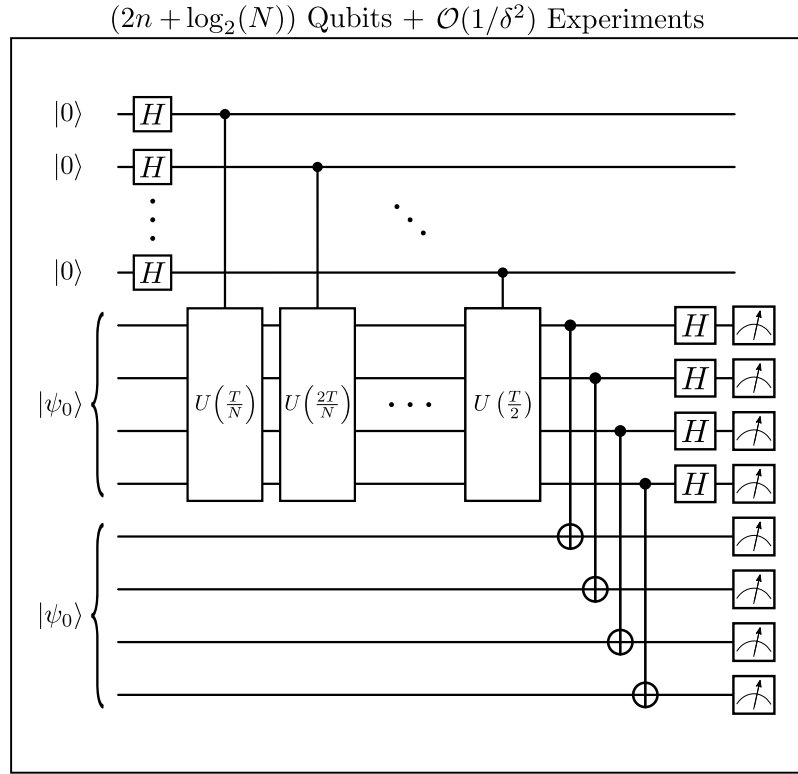


Figura 9.2.6: **Algoritmo para la estimación paralela en el tiempo del eco de Loschmidt de la Ec. (9.13).** Mostramos un algoritmo que calcula, con precisión  $\delta$ , el overlap entre el estado historia discreto  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$  y  $\mathbb{1} \otimes |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ . Como se muestra en la Ec. (9.14), el overlap entre estos dos estados es igual a  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$ . El algoritmo se basa en mediciones en la base de Bell como se describe en [177]. Este enfoque requiere un dispositivo cuántico con  $(2n + \log(N))$  qubits y  $\mathcal{O}(1/\delta^2)$  experimentos diferentes.

$\mathcal{O}(N/\delta^2)$  experimentos.

La Proposición (2) simplemente sigue de aplicar un test SWAP [101, 177-179] (o más específicamente, el algoritmo de superposición de estados de [177]) entre  $U(\varepsilon t) |\psi_0\rangle$  y  $|\psi_0\rangle$  para  $t = 1, \dots, (N-1)$ . Notamos que el caso  $t = 0$  es trivial ya que  $|\langle\psi_0| U(0) |\psi_0\rangle|^2 = 1$ . Cuando usamos el estado historia discreto podemos probar el siguiente teorema.

**Teorema 9.2.2.** *El circuito en la Fig. 9.2.6, que requiere  $(2n + \log(N))$  qubits, puede ser usado para estimar la cantidad  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$  de la Ec. (9.9) hasta una precisión  $\delta$  con  $\mathcal{O}(1/\delta^2)$  experimentos.*

Nuevamente, podemos ver a partir del Teorema 9.2.2 que realizar una simulación en paralelo en tiempo nos permite reducir exponencialmente la complejidad del experimento (de lineal en  $N$  a ser independiente de  $N$ ) al costo de  $\log(N)$  ancilas. De manera similar a la Proposición 2, la prueba del Teorema 9.2.2 simplemente se

deriva del cálculo del “overlap” entre el estado historia discreto  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$  y  $\mathbb{1}_T \otimes |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ . Explícitamente, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Tr}[|\Psi\rangle\langle\Psi| (\mathbb{1}_T \otimes |\psi_0\rangle\langle\psi_0|)] &= \langle\Psi|(\mathbb{1}_T \otimes |\psi_0\rangle\langle\psi_0|)|\Psi\rangle \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N \langle\psi(\varepsilon t) | \psi_0\rangle\langle\psi_0| \psi(\varepsilon t)\rangle \\ &= \tilde{\mathcal{L}}(\psi_0). \end{aligned} \tag{9.14}$$

### 9.3 Acceso a información dinámica a través del entrelazamiento sistema-tiempo

Hasta ahora, hemos visto que usar el estado historia nos permite transferir la complejidad de realizar múltiples experimentos a los requisitos de qubits de reloj auxiliares. Sin embargo, como mostraremos ahora, el entrelazamiento presente entre los qubits de tiempo y sistema en el estado historia tiene un significado operacional y contiene información que podemos usar para aprender sobre la dinámica del sistema. Además, revelaremos una conexión rigurosa y explícita entre estas correlaciones y el problema de equilibración. Los protocolos para obtener estas cantidades de variaciones de los circuitos anteriores también se proporcionan en esta sección.

#### 9.3.1 Propiedades, relación con el problema de equilibración y con las fluctuaciones temporales de observables

Primero, recordemos nuevamente que el estado historia discreto es un estado bipartito entre el espacio de Hilbert del sistema  $\mathcal{H}_S$  y el tiempo, o espacio de Hilbert del reloj  $\mathcal{H}_T$ . Es decir,  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_T \otimes \mathcal{H}_S$ . Además, es evidente desde la Fig. 9.2.1 y la Ec. (9.4) que los estados historia están, en general, entrelazados a través de la partición sistema-tiempo. A partir de ahora, nos referiremos a las correlaciones entre los qubits del sistema y los qubits del reloj como *entrelazamiento sistema-tiempo* (siguiendo [43]).

Es importante notar que, en general, (9.4) no está en la descomposición de Schmidt [22] de  $|\Psi\rangle$  (ya que los estados  $|\psi(t)\rangle$  no son necesariamente ortogonales). Sin embargo, existe una base en la que podemos escribir el estado historia como

$$|\Psi\rangle = \sum_l \sqrt{p_l} |l\rangle_T |l\rangle_S, \tag{9.15}$$

donde  $\sqrt{p_l}$  son los llamados coeficientes de Schmidt, y  $\{|l\rangle_S\}$ , y  $\{|l\rangle_T\}$  son conjuntos ortogonales de estados en  $\mathcal{H}_S$  y  $\mathcal{H}_T$ , respectivamente. Una forma sencilla de cuantificar el entrelazamiento sistema-tiempo es a través de la entropía lineal, definida como

$$E_2 = 1 - \text{Tr}[\rho_T^2] = 1 - \text{Tr}[\rho_S^2] = 1 - \sum_l p_l^2, \quad (9.16)$$

donde  $\rho_{T(S)} = \text{Tr}_{S(T)}[|\Psi\rangle\langle\Psi|]$  es el estado reducido del estado historia en los qubits del reloj (sistema). Aquí, denotamos como  $\text{Tr}_{S(T)}$  la traza parcial sobre los qubits del sistema (reloj). En principio, también se podrían considerar otras entropías como la entropía de Von Neumann. Sin embargo, la entropía lineal tiene la propiedad deseable de ser eficientemente calculable en un dispositivo cuántico (ver abajo).

Existe una conexión profunda entre el entrelazamiento sistema-tiempo y las propiedades dinámicas del sistema, en particular con el problema de su equilibración: Recordemos primero que dado un estado puro arbitrario (por simplicidad)  $|\psi\rangle = \sum_k c_k |k\rangle$  el promedio en el tiempo infinito de la matriz de densidad asociada es

$$\bar{\rho} = \int \frac{dt}{T} \sum_{k,k'} c_k c_{k'}^* e^{-i(E_k - E_{k'})t} |k\rangle\langle k'| \rightarrow \sum_k |c_k|^2 |k\rangle\langle k|, \quad (9.17)$$

donde se asume un  $T$  grande (infinito) y con  $H|k\rangle = E_k|k\rangle$ . En otras palabras, si el estado del sistema se promedia durante tiempos suficientemente largos, pierde todas las coherencias en la base de energía. Bajo condiciones experimentalmente realistas, es factible identificar este estado con el estado de equilibrio estacionario [156]. Para “la mayoría” de los observables esto de hecho se mantiene por tiempos cortos  $T$  [158], lo que significa que un promedio en una ventana de tiempo finita de los observables también es una cantidad interesante en general. El formalismo del tiempo cuántico ofrece una nueva interpretación a la pérdida de coherencias inducida por un promedio en el tiempo: dado que el sistema está “entrelazado con el tiempo”, perdemos información al ignorar los “qubits del reloj”. Esta pérdida induce precisamente el canal cuántico (de desfase)  $\rho \rightarrow \bar{\rho}$  en el límite de  $T$  grande y  $\varepsilon$  pequeño, un resultado que se puede derivar directamente de un formalismo cuántico del tiempo continuo <sup>1</sup>. Para el tiempo discreto se mantiene el siguiente resultado.

**Teorema 9.3.1.** *Sea  $|\Psi\rangle$  el estado historia discreto en la Ec. (9.4). La traza parcial sobre el reloj induce un canal cuántico que, en el límite de tiempo grande, implica*

---

<sup>1</sup>Para  $T$  infinito se deben considerar sutilezas relacionadas con la normalización de estados; ver [1, 2, 29].

que  $\rho_S \rightarrow \bar{\rho}$ . Además, para cualquier  $\varepsilon$  y  $N$  se sostiene la siguiente relación de mayorización:

$$\bar{\rho} \prec \rho_S = \tilde{\rho}, \quad (9.18)$$

donde  $\tilde{\rho}$  es una discretización de la Ec. (9.17). Además, para una evolución periódica con período  $\tau$  generada por un Hamiltoniano con  $M$  valores propios distintos (es decir,  $e^{-iH\tau} = \mathbb{1}$ ) y dado un estado historia con  $\log(M)$  qubits de reloj y una ventana de tiempo  $T = \tau$ , tenemos

$$\rho_S = \bar{\rho}. \quad (9.19)$$

Aunque expresado de una manera bastante abstracta, este resultado tiene muchos corolarios interesantes con un significado operacional claro. La razón de esto es que, en términos generales, el estado historia proporciona una manera de preparar el estado equilibrado de un sistema cuántico: simplemente se necesita preparar el estado historia e ignorar los qubits de reloj. De hecho, esta es la razón por la que funcionan las evaluaciones anteriores de promedios en el tiempo. Además, las entropías de entrelazamiento sistema-tiempo son de hecho un límite inferior para las entropías del estado en equilibrio, como se sigue directamente del Teorema 9.3.1 y las propiedades básicas de mayorización. Además, mostramos en [6] que uno puede *redescubrir* el formalismo del tiempo cuántico desde la purificación natural de este canal de desfase aproximado: el estado historia surge de una extensión isométrica simple  $U[K_t]$  del canal como  $|\Psi\rangle = U[K_t]|\psi_0\rangle$  con  $K_t$  los operadores de Krauss  $K_t = e^{-iHt\epsilon}/\sqrt{N}$ . El lector interesado puede referirse a [6] donde se proporciona la prueba del Teorema 9.3.1 junto con una discusión más detallada.

Con lo anterior en mente, consideremos nuevamente la tarea de estimar el promedio del eco de Loschmidt en el tiempo infinito en la Ec. (9.11). Recordemos que  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$  cuantifica el grado de reversibilidad de la evolución temporal y es un indicador de la estabilidad del sistema cuántico. Además, es fácil ver que

$$\bar{\mathcal{L}}(\psi_0) = \text{Tr}[\bar{\rho}^2], \quad (9.20)$$

es decir, el promedio en el tiempo infinito del eco de Loschmidt es la pureza del estado desfasado  $\bar{\rho}$ . Ahora podemos usar estas consideraciones y el Teorema 9.3.1 para obtener el siguiente resultado.

**Corolario 9.3.1.1.** *Sea  $|\Psi\rangle$  el estado historia discreto de la Ec. (9.4), y sea  $E_2$  la entropía lineal de la partición sistema-tiempo. Entonces, para todo  $T$  y  $N$  vale que*

$$E_2 \leq (1 - \bar{\mathcal{L}}(\psi_0)). \quad (9.21)$$

El corolario 9.3.1.1 tiene varias implicaciones importantes. Primero, limita la cantidad de entrelazamiento entre el sistema y los qubits del reloj. En particular, muestra que el entrelazamiento sistema-tiempo solo puede ser grande si el promedio en el tiempo infinito del valor del eco de Loschmidt es pequeño. A la inversa, si  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$  es grande,  $E_2$  tiene que ser pequeño. Segundo, señalemos que la Ec. (9.21) es válida para todos los valores de  $T$ , pero sobre todo, también para todos los valores de  $N$ . Para  $N$  y  $T$  grandes, la igualdad se alcanza asintóticamente, y tenemos que la Ec. (9.21) se convierte en  $\text{Tr}[\rho_T^2] \equiv \bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$ . Además, como veremos a continuación, nuestro análisis numérico muestra que  $\text{Tr}[\rho_T^2]$  puede proporcionar una mejor aproximación a  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$  que  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$ , lo que implica que no existe una relación general simple entre  $E_2$  y  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$ .

Podemos entender la intuición detrás del Corolario 9.3.1.1 de la siguiente manera. Supongamos que  $|\psi_0\rangle$  es un estado estacionario de la evolución unitaria. Por ejemplo, supongamos que  $|\psi_0\rangle$  es un estado propio de  $H$  con energía propia  $E_0$ , de modo que  $U(\varepsilon t)|\psi_0\rangle = e^{-i\varepsilon t E_0}|\psi_0\rangle$ . Entonces, el estado historia discreto se convierte en

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^{N-1} e^{-i\varepsilon t E_0} |t\rangle \otimes |\psi_0\rangle . \quad (9.22)$$

La Ec. (9.22) revela que  $|\Psi\rangle$  es separable. Tampoco es difícil verificar que en este caso  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0) = 1$ . Por otro lado, si  $|\psi_0\rangle$  evoluciona a través de  $N$  estados ortogonales  $\langle\psi(\varepsilon t)|\psi(\varepsilon t')\rangle = \delta_{tt'}$  entonces la Ec. (9.4) ya es la descomposición de Schmidt de  $|\Psi\rangle$  y el estado es máximamente entrelazado. El modelo de juguete anterior muestra que si el estado es cuasi estacionario (es decir, eco de Loschmidt grande), podemos esperar valores pequeños de entrelazamiento. De manera similar, si el estado cambia significativamente durante la evolución (por ejemplo, valor de eco de Loschmidt pequeño), entonces el estado historia probablemente poseerá grandes cantidades de entrelazamiento. Cabe señalar que la relación entre la distinguibilidad del estado evolucionado y el entrelazamiento sistema-tiempo fue reportada por primera vez en [43]. Sin embargo, la conexión con el eco de Loschmidt no se exploró en ese trabajo.

El resultado en el Corolario 9.3.1.1 puede ser aún más reforzado para el caso especial donde la evolución temporal es periódica. Es decir, cuando

$$e^{-iH\tau} = \mathbb{1} , \quad (9.23)$$

para algún  $\tau$ , y donde asumimos que  $H$  tiene  $M$  valores propios distintos, siendo  $M$  una potencia de dos. Ahora, encontramos que el siguiente resultado es válido.

**Corolario 9.3.1.2.** *Para una evolución periódica con periodo  $\tau$  generada por un Hamiltoniano con  $M$  valores propios distintos, como en la Ec. (9.23), entonces para un estado historia con  $\log(M)$  qubits de reloj y ventana de tiempo  $T = \tau$ , tenemos*

$$E_2 = (1 - \bar{\mathcal{L}}(\psi_0)) = (1 - \tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)). \quad (9.24)$$

El Corolario 9.3.1.2 muestra que para Hamiltonianos periódicos el entrelazamiento sistema-tiempo es exactamente el mismo que el promedio en tiempo infinito del eco de Loschmidt  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$ , así como la aproximación en tiempo discreto  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$ . Como se muestra en [6], el trazar induce ahora un canal completamente de desfase en la base de eigenestados de energía de modo que  $\rho_S = \tilde{\rho} = \bar{\rho}$ .

Los resultados anteriores que conectan el entrelazamiento sistema-tiempo con el eco de Loschmidt nos permiten derivar aún más significado operacional para  $E_2$  como un límite para las fluctuaciones temporales de observables. En Ref. [156], se demostró que dado un observable  $O$ ,  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$  proporciona un límite en las fluctuaciones temporales de observables como

$$\sigma_O^2 \leq \Delta_O^2 \bar{\mathcal{L}}(\psi_0) \quad (9.25)$$

con  $\Delta_O^2 = \lambda_{\max}[O] - \lambda_{\min}[O]$  (la diferencia entre los valores propios más grande y más pequeño de  $O$  en el subespacio de estados que satisfacen  $\langle n|\psi \rangle \neq 0$ ), y donde  $\sigma_O^2$  denota la varianza temporal

$$\begin{aligned} \sigma_O^2 &:= \overline{F(O)^2} - \bar{F}(O)^2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{dt}{T} \langle O(t) \rangle_{\psi_0}^2 - \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{dt}{T} \langle O(t) \rangle_{\psi_0} \right)^2. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Aquí hemos utilizado la notación definida en la Ec. (9.7) con  $F(O) \equiv \langle O \rangle$  (en un tiempo dado) mientras que el “promedio” denota promedio temporal. La Ec. (9.25) muestra que pequeños promedios de eco de Loschmidt temporales implican una pequeña varianza temporal del observable  $O$ , y viceversa. En otras palabras, un sistema con un pequeño  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$  solo puede exhibir fluctuaciones temporales más pequeñas en sus observables en comparación con un sistema con un gran eco de Loschmidt.

Debería ser claro ver que el Teorema 9.3.1.1 implica fácilmente el siguiente corolario.

**Corolario 9.3.1.3.** *Sea  $O$  un observable, y  $\sigma_O^2$  su varianza temporal como en la Ec. (9.26). El entrelazamiento sistema-reloj proporciona un límite en las fluctuaciones temporales como*

$$\sigma_O^2 \leq \Delta_O^2 (1 - E_2) = \Delta_O^2 \text{Tr}[\rho_S^2]. \quad (9.27)$$

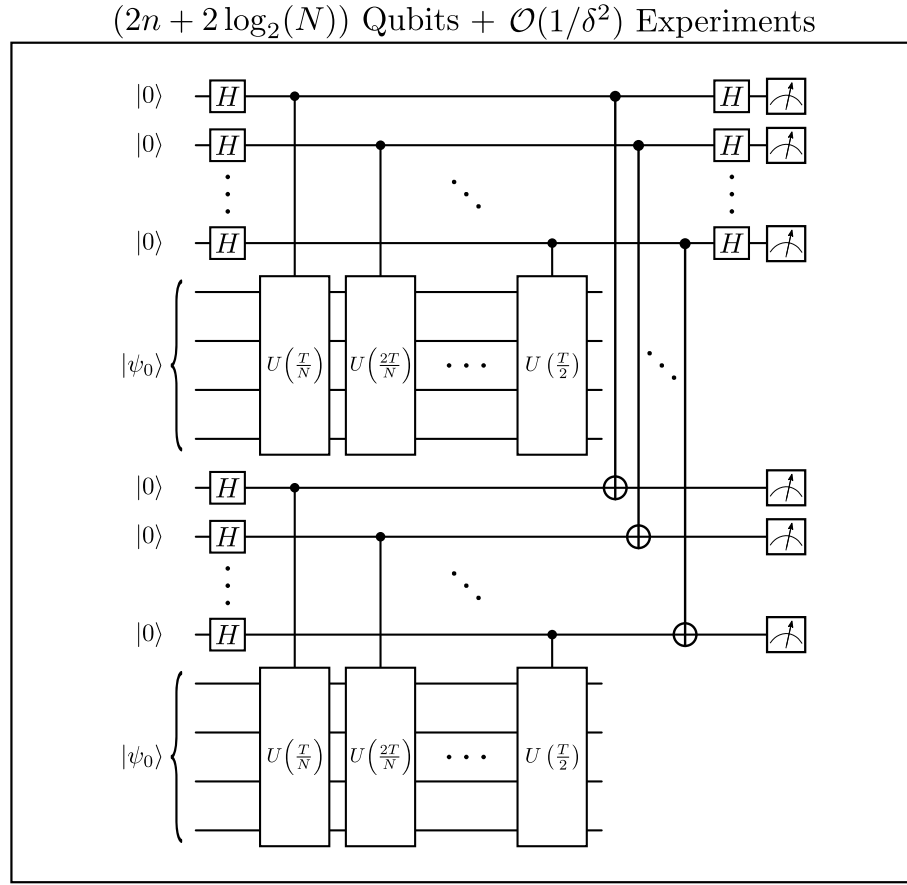


Figura 9.3.1: **Algoritmo para estimar  $E_2$  a través del solapamiento de estados.** Aquí consideramos la tarea de evaluar la Ec. (9.16). Al tomar dos copias del estado historia, podemos estimar  $\text{Tr}[\rho_T^2]$  hasta una precisión  $\delta$  mediante el circuito de solapamiento de estados en [177]. Este enfoque requiere un dispositivo cuántico con  $(2n + 2 \log(N))$ -qubits y  $\mathcal{O}(1/\delta^2)$  diferentes experimentos.

El Corolario 9.3.1.3 muestra un claro significado físico del entrelazamiento sistema-tiempo. Es decir, si  $E_2$  es pequeño, entonces el sistema es estable y predecible. Esto se deduce del hecho de que las varianzas temporales de los valores esperados serán pequeñas. Por el contrario, si el entrelazamiento sistema-tiempo es grande, entonces el sistema puede ser inestable e impredecible, como lo demuestran las posibles grandes fluctuaciones de observables.

### 9.3.2 Protocolos para calcular el entrelazamiento sistema-tiempo

Los teoremas y corolarios anteriores arrojan luz sobre la emocionante posibilidad de comprender la dinámica del sistema a través del entrelazamiento sistema-tiempo. Sin



embargo, para que estos resultados sean verdaderamente útiles, es necesario poder medir  $E_2$  desde el estado historia. Como podemos ver en la Ec. (9.16), necesitamos estimar  $\text{Tr}[\rho_S^2]$  o  $\text{Tr}[\rho_T^2]$ . Aunque matemáticamente no importa en absoluto en qué subsistema nos centramos, ya que su pureza es la misma (ver Ec. (9.15)), en la práctica puede ser sustancialmente más fácil trabajar con un sistema u otro.

Como evidencia heurísticamente nuestra numeración (ver más abajo), el estado historia discreto con un número de qubits de reloj  $\log(N)$  mucho menor que el tamaño del sistema  $n$  produce resultados que reproducen con precisión las propiedades promedio de tiempo infinito de la dinámica del sistema. Por lo tanto, asumiremos de ahora en adelante que  $\log(N) \ll n$ . Esta suposición implica que podemos calcular  $E_2$ , y por lo tanto aprender sobre el sistema, simplemente observando los qubits de reloj. Ahora presentamos dos métodos para estimar  $\text{Tr}[\rho_T^2]$ .

**Teorema 9.3.2.** *La cantidad  $E_2$  de la Ec. (9.16) puede ser estimada hasta una precisión  $\delta$  con el circuito en la Fig. 9.3.1, que requiere  $(2n+2\log(N))$ -qubits con  $\mathcal{O}(1/\delta^2)$  experimentos. De manera similar, también puede ser estimada con el circuito en la Fig. 9.3.2, que requiere  $(n+\log(N))$ -qubits con  $\mathcal{O}(N/\delta^2)$  experimentos.*

Cuando se usa el circuito en la Fig. 9.3.1, se preparan dos copias del estado historia  $|\Psi\rangle$  y luego se realiza el circuito de solapamiento de estados de Ref. [177]. Por otro lado, cuando se utiliza el circuito en la Fig. 9.3.2, se puede estimar  $E_2$  con una sola copia de  $|\Psi\rangle$  utilizando sombras clásicas, o mediciones aleatorizadas [180, 181]. Por ejemplo, uno puede preparar el estado historia y realizar una unitaria aleatoria en cada qubit, seguido de una medición en la base computacional. Los resultados de las mediciones se almacenan y luego se combinan clásicamente para estimar  $\text{Tr}[\rho_T^2]$ .

Para terminar esta sección, notamos que al comparar la Proposición 2, el Teorema 9.2.2, y el Teorema 9.3.2, el método para estimar  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$  o  $E_2$  con el menor requisito computacional (asumiendo  $\log(N) \ll n$ ) es el de la Fig. 9.3.2. Es decir, aquí podemos calcular  $E_2$  hasta una precisión  $\delta$  con un ordenador cuántico con  $(n+\log(N)) \ll 2n$  qubits y con  $\mathcal{O}(N/\delta)$  experimentos. Este resultado muestra entonces el poder de usar el estado historia ya que nos permite estudiar propiedades físicas del sistema (como delimitar  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$  o las varianzas temporales  $\Delta O^2$ ) con menos requisitos de lo que de otra manera necesitaríamos.

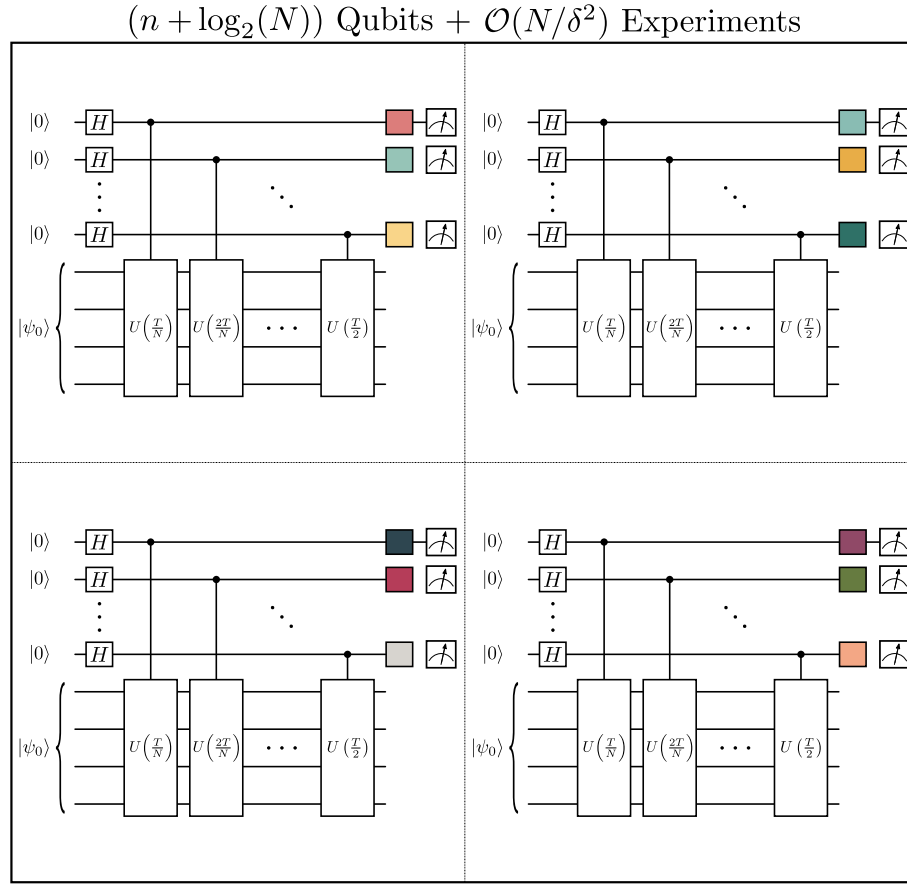


Figura 9.3.2: **Algoritmo para estimar  $E_2$  mediante mediciones aleatorias.** Aquí consideramos la tarea de evaluar la Ec. (9.16). Comenzamos con una copia del estado historia, y aplicamos una unitaria aleatoria (indicada por una compuerta de color) a cada qubit. Luego medimos cada qubit en la base computacional y registramos el resultado de la medición. Estos constituyen las llamadas "sombras clásicas" de  $\rho_T$ . Como se muestra en [180], este procedimiento nos permite estimar  $\text{Tr}[\rho_T^2]$  hasta una precisión  $\delta$  con un dispositivo cuántico con  $(n + \log(N))$ -qubits y  $\mathcal{O}(N/\delta^2)$  experimentos diferentes.

## 9.4 Simulaciones numéricas

En esta sección, primero proporcionamos simulaciones numéricas que muestran cómo las aproximaciones en tiempo discreto (computables a través de nuestros algoritmos) pueden capturar el comportamiento de sus contrapartes en tiempo continuo. De manera similar, también mostramos numéricamente que el entrelazamiento sistema-tiempo proporciona una nueva forma de entender las propiedades dinámicas del sistema.

En todos nuestros experimentos, consideramos un sistema de  $n$ -qubits evolucionando por una unidad generada por el modelo  $XX$  no uniforme dependiente del

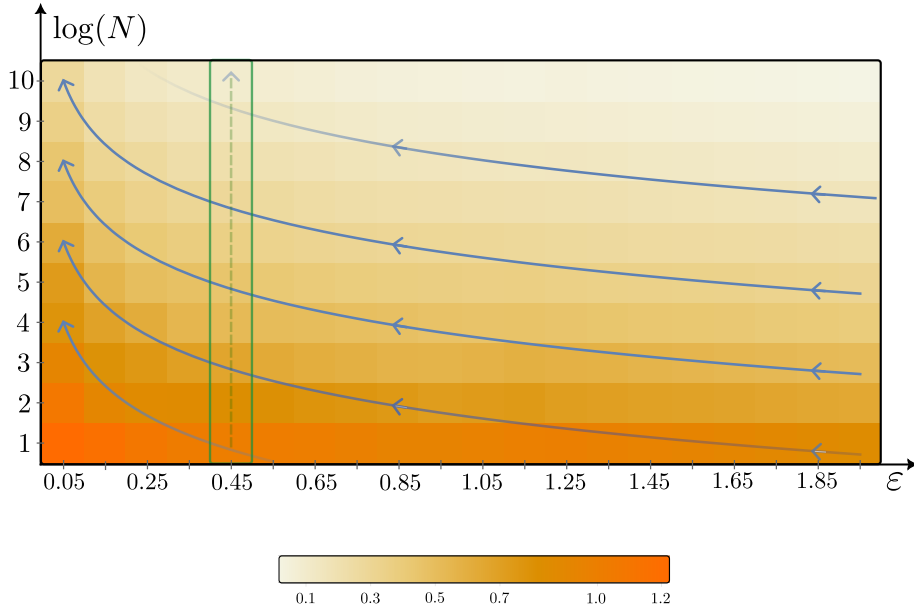


Figura 9.4.1: **Error promedio de aproximación**  $|\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0) - \tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)|$  **para una cadena de**  $n = 200$  **sitios.** La vertical indica el número de qubits de reloj mientras que el eje horizontal es el tamaño de ventana  $\varepsilon$ . Las curvas azules (sólidas) representan valores constantes de  $T$  con las flechas apuntando hacia la dirección de mayor resolución. Las flechas verdes indican un corte transversal de  $\varepsilon$  fijo y un  $\log(N)$  creciente que se muestra con más detalle en la Fig. 9.4.2.

tiempo, cuyo Hamiltoniano se lee como

$$H = \frac{J}{4} \sum_{j=1}^n (X_j X_{j+1} + Y_j Y_{j+1}) + \frac{\lambda}{4} \sum_{j=1}^n \cos(2\pi\alpha j) (Z_j + 2), \quad (9.28)$$

donde definimos condiciones de frontera periódicas como  $h_{n+1} \equiv h_1$  (para  $h = X, Y, Z$ ). Mediante la transformación de Jordan-Wigner [182], se puede mostrar que en el límite termodinámico este modelo exhibe una transición de deslocalización-localización en el punto crítico  $\lambda = J$ . De hecho, es bien sabido que tal transición induce cambios bruscos en propiedades dinámicas a largo plazo como el promedio del eco de Loschmidt [164]. Nuestro objetivo es entonces usar este modelo paradigmático como un banco de pruebas para mostrar que nuestro promedio de tiempo discreto propuesto del eco de Loschmidt puede capturar el comportamiento de sus contrapartes de tiempo continuo.

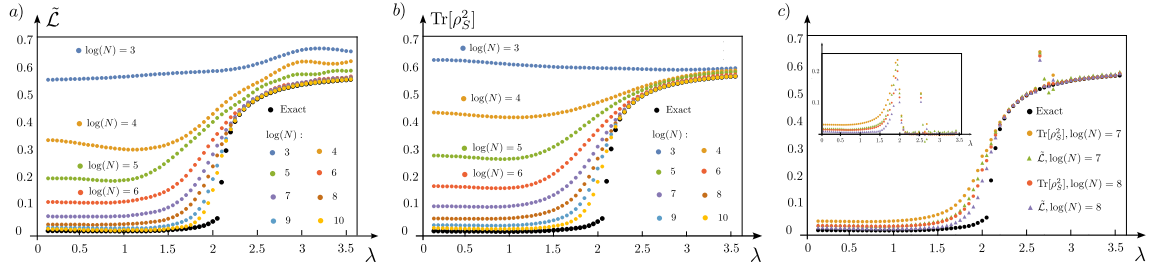


Figura 9.4.2: **Aproximaciones en tiempo discreto al eco de Loschmidt  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$  (puntos negros) en función de  $\lambda$  para una cadena de  $n = 200$  sitios.** En el panel a) mostramos el promedio exacto de tiempo infinito, así como la aproximación en tiempo discreto  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$  para diferentes valores de qubits de reloj  $\log(N)$  y para  $\varepsilon = 0,45$ . En b) presentamos el promedio exacto de tiempo infinito  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$  (puntos negros), así como la pureza del estado reducido  $\rho_S = \text{Tr}_T[|\Psi\rangle\langle\Psi|]$  para diferentes valores de qubits de reloj  $\log(N)$  y para  $\varepsilon = 0,45$ . En c) mostramos el promedio exacto de tiempo infinito  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$  (puntos negros), su aproximación en tiempo discreto  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$ , así como la pureza del estado reducido  $\rho_S = \text{Tr}_T[|\Psi\rangle\langle\Psi|]$  para diferentes valores de qubits de reloj  $\log(N)$  y para  $\varepsilon = 1,25$ . El recuadro corresponde a la diferencia entre cada aproximación y  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$ .

### 9.4.1 Promedios de tiempo discreto y entrelazamiento sistema-tiempo

Para estudiar el promedio en tiempo discreto del eco de Loschmidt hemos considerado una cadena de  $n = 200$  sitios con  $J = 2$ ,  $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , y un número de qubits de reloj que varía de 1 a 10, correspondiendo a un número máximo de  $N = 1024$  tiempos. Note que con esta elección, la dimensión del sistema es igual a  $2^{200}$  y por lo tanto, mucho mayor que la dimensión del espacio de Hilbert del reloj,  $N$ . Para estudiar los efectos del tamaño de la ventana, también hemos considerado valores de  $\varepsilon$  que van desde 0,05 hasta 1,95 con un espaciado de 0,1 (ver Fig. 9.2.2). El estado inicial de nuestras simulaciones es  $|\psi_0\rangle = (s_{99}^+ + s_{100}^+ + s_{101}^+)|\downarrow\downarrow\ldots\downarrow\rangle/\sqrt{3}$ , donde  $s_j^+$  denota el operador de creación en el sitio  $j$ . Por lo tanto, en  $t = 0$ , el estado está solo parcialmente deslocalizado en el medio de la cadena. Todas las simulaciones, incluyendo el cálculo del promedio exacto de tiempo infinito  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$ , se realizaron mediante diagonalización de Jordan-Wigner, y remitimos al lector a [6] para detalles adicionales.

En la Fig. 9.4.1 presentamos primero un gráfico bidimensional del error entre el promedio de tiempo infinito del eco de Loschmidt  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$  y su aproximación en tiempo discreto  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$  ( $|\bar{\mathcal{L}}(\psi_0) - \tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)|$ ) promediado sobre  $\lambda \in (0,1,3,5)$  (con un espaciado  $\Delta\lambda = 0,05$ ), para diferentes valores de  $\varepsilon$  y  $n$ . Aquí, podemos ver que, como se esperaba, el error se reduce al aumentar el número de qubits de reloj. La mejora

sigue dos tendencias. Primero, hay una mejora general al aumentar  $T$  (es decir, al moverse hacia arriba en el eje  $\log(N)$  para un  $\varepsilon$  fijo), ya que esto corresponde a una mayor precisión. Por otro lado, para un  $T$  constante, es beneficioso reducir  $\varepsilon$  (es decir, aumentar la resolución), como lo muestran las curvas sólidas azules.

Exploramos más a fondo el efecto de fijar  $\varepsilon$  y aumentar  $\log(N)$  en la Fig. 9.4.2 a). Allí mostramos  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$ , así como su aproximación en tiempo discreto  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$  para diferentes números de qubits de reloj como función de  $\lambda$  para una resolución fija  $\varepsilon = 0,45$  (línea discontinua vertical en la Fig. 9.4.1). Primero, notamos que el eco de Loschmidt de tiempo infinito capta la transición de deslocalización-localización que ocurre en  $\lambda = J = 2$ . En particular, para  $\lambda < 2$  vemos que  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$  es pequeño, indicando una fase deslocalizada. Por otro lado, para  $\lambda > 2$  el estado evolucionado está localizado ya que  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$  es grande. A continuación, observamos que a medida que  $\log(N)$  aumenta,  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$  rápidamente se convierte en una buena aproximación para su contraparte de tiempo infinito (como se esperaba de la Fig. 9.4.1). Sin embargo, la Fig. 9.4.2 también revela que  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$  capta la transición de deslocalización-localización incluso para un pequeño número de qubits de reloj. Ya para  $\log(N) = 6$  el punto de inflexión de  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$  se acerca al valor crítico  $\lambda = 2$ .

A continuación, estudiamos cómo el entrelazamiento sistema-tiempo, medido a través de la pureza del subsistema  $\text{Tr}[\rho_S^2]$  para  $\rho_S = \text{Tr}_T[|\Psi\rangle\langle\Psi|]$ , aproxima el promedio de tiempo infinito del eco de Loschmidt (ver Corolario 9.3.1.1). En la Fig. 9.4.2 b) trazamos  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$ , así como  $\text{Tr}[\rho_S^2]$ , para diferentes números de qubits de reloj como función de  $\lambda$ . Nuevamente, vemos una clara convergencia hacia  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$  a medida que se aumenta el número de qubits de reloj. Este resultado muestra que la pureza del subsistema proporciona una excelente aproximación de  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$ . Además, uno también puede observar que el entrelazamiento sistema-tiempo capta claramente la transición de deslocalización-localización. Este hecho puede entenderse fácilmente desde el hecho de que en la fase localizada el estado no cambia considerablemente con el tiempo, y por lo tanto se espera una pequeña cantidad de entrelazamiento. Este ejemplo ejemplifica perfectamente el hecho de que el entrelazamiento sistema-tiempo en el estado historia lleva información valiosa sobre la dinámica del sistema. Además, dado que sabemos que  $\text{Tr}[\rho_S^2] = \text{Tr}[\rho_T^2]$ , entonces se puede estimar la tomografía del estado reducido estudiando solo el estado reducido en los qubits de reloj  $\log(N) (\ll n)$ .

Las Figuras 9.4.2 a) y b) muestran que tanto el eco de Loschmidt en tiempo discreto como la pureza del subsistema proporcionan buenas aproximaciones de  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$ .

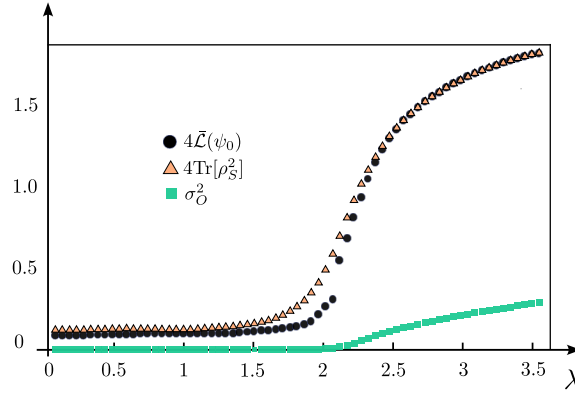


Figura 9.4.3: **Fluctuaciones observables como función de  $\lambda$  para una cadena de  $n = 100$  sitios.** Mostramos las fluctuaciones observables  $\sigma_O^2$ , el promedio de tiempo infinito del eco de Loschmidt  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$  y la pureza del subsistema reducido  $\text{Tr}[\rho_S^2]$ . Consideramos  $\log(N) = 9$  qubits de reloj, y tomamos  $\varepsilon = 0,5$

Para comparar mejor su rendimiento, mostramos en la Fig. 9.4.2 c) curvas para  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$  y  $\text{Tr}[\rho_S^2]$  para la misma cadena de  $n = 200$  espines, pero para  $\varepsilon = 1,25$ , es decir, para menos precisión (ver Fig. 9.2.2). En este régimen, se puede ver que mientras  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$  sufre de oscilaciones no deseadas,  $\text{Tr}[\rho_S^2]$  aún puede proporcionar una buena aproximación para el mismo número de qubits. En particular, la Fig. 9.4.2 c) muestra que  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$  puede ser menor que  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$  de maneras impredecibles (debido a la resolución insuficiente), lo que significa que  $\tilde{\mathcal{L}}$  no se puede usar estrictamente para proporcionar límites estrictos como el del Corolario 9.3.1.1. Mientras que  $\text{Tr}[\rho_S^2]$  también oscila, esta cantidad nunca cruza los puntos negros, en acuerdo con nuestros límites. Aquí también observamos que el entrelazamiento sistema-tiempo proporciona una mejor convergencia en la región localizada. Por otro lado, las curvas de entrelazamiento están por encima de las curvas de  $\tilde{\mathcal{L}}$  en el sector deslocalizado. Sin embargo, esta discrepancia puede mitigarse aumentando el número de qubits. Finalmente, notamos que en la Fig. 9.4.2 c) también representamos las diferencias  $(\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0) - \bar{\mathcal{L}}(\psi_0))$  y  $(\text{Tr}[\rho_S^2] - \bar{\mathcal{L}}(\psi_0))$ , que confirman que  $\text{Tr}[\rho_S^2]$  siempre es estrictamente mayor que  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$ , mientras que  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$  de hecho puede ser menor que el promedio de tiempo infinito.

Finalmente, como ejemplo del Corolario 9.3.1.3, también mostramos numéricamente cómo el entrelazamiento sistema-tiempo proporciona un límite para la fluctuación de los observables. Usamos como ejemplo el observable  $O = s_{L/2}^+ s_{L/2+1}^- + s_{L/2+1}^+ s_{L/2}^-$  y como estado inicial  $|\psi_0\rangle = (s_{L/2}^+ + s_{L/2+1}^+) |\downarrow \downarrow \dots \downarrow\rangle / \sqrt{2}$ . En este caso, los límites de la Ec. (9.27) se convierten en

$$\sigma_O^2 \leq 4\bar{\mathcal{L}}(\psi_0) \leq 4\text{Tr}[\rho_S^2] \quad (9.29)$$

ya que  $\Delta_O = 2$ . En la Fig. 9.4.3 mostramos los resultados numéricos para una cadena de  $n = 100$  sitios y  $\log(N) = 9$  qubits de reloj (es decir, 512 tiempos). Observamos que, aunque el límite no es estricto, tanto  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$  como  $\text{Tr}[\rho_S^2]$  son capaces de separar claramente las diferentes fases. Como se esperaba de nuestros límites, el entrelazamiento sistema-tiempo proporciona un límite menos estricto pero riguroso. Sin embargo, dado que se puede calcular eficientemente el entrelazamiento sistema-tiempo en computadoras cuánticas, este límite sigue siendo útil para fines prácticos. Además, es importante destacar nuevamente el hecho de que el entrelazamiento sistema-tiempo se obtiene de un formalismo de tiempo discreto (en contraste con  $\bar{\mathcal{L}}(\psi_0)$  que requiere promedios de tiempo infinito). Como tal, nuestra nueva noción de entrelazamiento sistema-tiempo proporciona información valiosa y estricta sobre la dinámica observable del sistema y su eventual equilibración (una característica no disponible para el eco de Loschmidt en tiempo discreto  $\tilde{\mathcal{L}}(\psi_0)$ ).

## 9.5 Discusión

La simulación de sistemas cuánticos ha sido considerada ampliamente como la aplicación más importante de la computación cuántica desde su concepción [183]. Tradicionalmente, el enfoque de las simulaciones cuánticas ha girado en torno al cálculo de estados cuánticos y cantidades físicas en un momento dado, aprovechando el crecimiento exponencial del espacio de Hilbert de los qubits para imitar el comportamiento de los sistemas de muchos cuerpos. Sin embargo, muchas cantidades fundamentales, como las funciones de correlación o el estado de equilibrio de un sistema cuántico, están asociadas con grandes sumas temporales de las anteriores. En este manuscrito hemos demostrado que al tratar el tiempo mismo de manera cuántica, lo cual en un esquema computacional corresponde al uso de qubits de reloj, esas cantidades se vuelven fácilmente accesibles.

Detalles adicionales de esta propuesta pueden encontrarse en [6]. Allí se discute en mayor profundidad los aspectos técnicos, incluyendo una estimación de la profundidad de los circuitos paralelos en tiempo, y se propone el uso de métodos variacionales cuánticos [7, 8, 184] para reducir aún más dicha profundidad.

Destaquemos también que, además de permitir la construcción de algoritmos novedosos, tratar al tiempo de manera cuántica nos provee de una nueva intuición sobre la equilibración de sistemas cuánticos, heredada de la estructura de los estados historia. Podemos especular que, en un futuro cercano, motivados por los resultados

actuales, los demás desarrollos en esta tesis podrían proporcionar más aplicaciones de carácter informacional y computacional relacionadas con el dominio temporal.



# Bibliografía

- [1] N. L. Diaz y R. Rossignoli, “History State Formalism for Dirac’s Theory”, *Phys. Rev. D* **99**, 045008 (2019).
- [2] N. L. Diaz, J. M. Matera y R. Rossignoli, “History State Formalism for Scalar Particles”, *Phys. Rev. D* **100**, 125020 (2019).
- [3] N. L. Diaz, J. M. Matera y R. Rossignoli, “Spacetime Quantum Actions”, *Phys. Rev. D* **103**, 065011 (2021).
- [4] N. L. Diaz, J. M. Matera y R. Rossignoli, “Path Integrals from Spacetime Quantum Actions”, *arXiv:2111.05383* (2021).
- [5] N. L. Diaz, J. M. Matera y R. Rossignoli, “Spacetime quantum and classical mechanics with dynamical foliation”, *Phys. Rev. D* **109**, 105008 (2024).
- [6] N. L. Diaz, P. Braccia, M. Larocca, J. M. Matera, R. Rossignoli y M. Cerezo, “Parallel-in-Time Quantum Simulation via Page and Wootters Quantum Time”, *arXiv:2308.12944* (2023).
- [7] N. L. Diaz, D. García-Martín, S. Kazi, M. Larocca y M Cerezo, “Showcasing a Barren Plateau Theory beyond the Dynamical Lie Algebra”, *arXiv:2310.11505* (2023).
- [8] M Cerezo, M. Larocca, D. García-Martín, N. L. Diaz, P. Braccia, E. Fontana, M. S. Rudolph, P. Bermejo, A. Ijaz, S. Thanasilp et al., “Does Provable Absence of Barren Plateaus Imply Classical Simulability? Or, Why We Need to Rethink Variational Quantum Computing”, *arXiv:2312.09121* (2023).
- [9] P. A. M. Dirac, “The Evolution of the Physicist’s Picture of Nature”, *Scientific American* **208**, 45-53 (1963).
- [10] M. Green, J. Schwarz y E. Witten, *Superstring Theory: Volume 1, Introduction*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 1988).

- [11] F. J. Dyson, “The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman”, *Phys. Rev.* **75**, 486 (1949).
- [12] R. P. Feynman, “Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics”, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948).
- [13] B. S. DeWitt, “Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory”, *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).
- [14] D. N. Page y W. K. Wootters, “Evolution without Evolution: Dynamics Described by Stationary Observables”, *Phys. Rev. D* **27**, 2885 (1983).
- [15] R. Gambini, R. A. Porto, J. Pullin y S. Torterolo, “Conditional Probabilities with Dirac Observables and the Problem of Time in Quantum Gravity”, *Phys. Rev. D* **79**, 041501(R) (2009).
- [16] L. D. Faddeev y V. N. Popov, “Covariant Quantization of the Gravitational Field”, *Soviet Physics Uspekhi* **16**, 777 (1974).
- [17] A. Einstein, “On the Electrodynamics of Moving Bodies”, *Ann. Phys. (Berl.)* **17**, 50 (1905).
- [18] M. A. Nielsen, “Quantum Information Theory”, *quant-ph/0011036* (2000).
- [19] J. S. Bell, “On the Einstein Podolsky Rosen Paradox”, *Physics Physique Fizika* **1**, 195 (1964).
- [20] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony y R. A. Holt, “Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories”, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969).
- [21] A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [22] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [23] C. J. Isham, “Canonical Quantum Gravity and the Problem of Time”, *Integrable systems, quantum groups, and quantum field theories*, 157 (1993).
- [24] C. J. Isham, “Quantum Logic and the Histories Approach to Quantum Theory”, *J. Math. Phys.* **35**, 2157 (1994).
- [25] K. V. Kuchař, “Time and Interpretations of Quantum Gravity”, *Int. J. Mod. Phys. D* **20**, 3 (2011).
- [26] C. Rovelli, “Time in Quantum Gravity: An Hypothesis”, *Phys. Rev. D* **43**, 442 (1991).

- 
- [27] C Rovelli, “Statistical Mechanics of Gravity and the Thermodynamical Origin of Time”, *Classical and Quantum Gravity* **10**, 1549 (1993).
  - [28] J. F. Fitzsimons, J. A. Jones y V. Vedral, “Quantum Correlations Which Imply Causation”, *Sci. Rep.* **5**, 18281 (2015).
  - [29] V. Giovannetti, S. Lloyd y L. Maccone, “Quantum Time”, *Phys. Rev. D* **92**, 045033 (2015).
  - [30] D. Horsman, C. Heunen, M. F. Pusey, J. Barrett y R. W. Spekkens, “Can a Quantum State over Time Resemble a Quantum State at a Single Time?”, *Proc. R. Soc. A* **473**, 20170395 (2017).
  - [31] J. Cotler, C. M. Jian, X. Qi y F. Wilczek, “Superdensity Operators for Spacetime Quantum Mechanics”, *J. High Energy Phys.* **2018**, 93 (2018).
  - [32] P. A. Höhn, A. R. H. Smith y M. P. E. Lock, “Trinity of Relational Quantum Dynamics”, *Phys. Rev. D* **104**, 066001 (2021).
  - [33] C Foti, A Coppoli, G. Barni, A Cuccoli y V. P., “Time and Classical Equations of Motion from Quantum Entanglement via the Page and Wootters Mechanism with Generalized Coherent States”, *Nat. Commun.* **12**, 1787 (2021).
  - [34] I. L. Paiva, A. C. Lobo y E. Cohen, “Flow of Time during Energy Measurements and the Resulting Time-Energy Uncertainty Relations”, *Quantum* **6**, 683 (2022).
  - [35] T. Favalli y A. Smerzi, “Peaceful Coexistence of Thermal Equilibrium and the Emergence of Time”, *Phys. Rev.D* **105**, 023525 (2022).
  - [36] V. Giovannetti, S. Lloyd y L. Maccone, “Geometric Event-Based Quantum Mechanics”, *New J. Phys.* **25**, 023027 (2023).
  - [37] P. A. Hoehn, A. Russo y A. R. Smith, “Matter Relative to Quantum Hypersurfaces”, *arXiv:2308.12912* (2023).
  - [38] W. Pauli, *Die Allgemeinen Prinzipien Der Wellenmechanik* (Springer, 1933).
  - [39] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields: Volume 1, Foundations* (Cambridge Univ. Press, 2005).
  - [40] M. E. Peskin, *An Introduction to Quantum Field Theory* (CRC Press, 2018).
  - [41] H. Casini y M. Huerta, “Entanglement Entropy in Free Quantum Field Theory”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 504007 (2009).

- [42] P. A. M. Dirac, “Generalized Hamiltonian Dynamics”, Canadian Journal of Mathematics **2**, 129-148 (1950).
- [43] A. Boette, R. Rossignoli, N. Gigena y M. Cerezo, “System-Time Entanglement in a Discrete-Time Model”, Phys. Rev. A **93**, 062127 (2016).
- [44] A. Boette y R. Rossignoli, “History States of Systems and Operators”, Phys. Rev. A **98**, 032108 (2018).
- [45] F Lomoc, AP Boette, N Canosa y R Rossignoli, “History States of One-Dimensional Quantum Walks”, Phys. Rev. A **106**, 062215 (2022).
- [46] C. Schubert, “Perturbative Quantum Field Theory in the String-Inspired Formalism”, Phys. Rep. **355**, 73 (2001).
- [47] E. Witten, “What Every Physicist Should Know about String Theory”, Physics Today **68**, 38 (2015).
- [48] D. Marolf, “Quantum Observables and Recollapsing Dynamics”, Class. Quantum Gravity **12**, 1199 (1995).
- [49] C. Kiefer, “Quantum Gravity”, Int. Ser. Monogr. Phys. **155**, 1-432 (2004).
- [50] B. Thaller, *The Dirac Equation* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992).
- [51] F. Schwabl, *Advanced Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005).
- [52] P. A. M. Dirac, “The Quantum Theory of the Electron. Part II”, Proc. R. Soc. Lond. A **118**, 351 (1928).
- [53] L. C. Céleri, V. Kiosses y D. R. Terno, “Spin and Localization of Relativistic Fermions and Uncertainty Relations”, Phys. Rev. A **94**, 062115 (2016).
- [54] F. Strocchi y A. S. Wightman, “Proof of the charge superselection rule in local relativistic quantum field theory”, J. Math. Phys. **15**, 2198 (1974).
- [55] V. Giovannetti, S. Lloyd y L. Maccone, “Quantum Time”, Phys. Rev. D **92**, 045033 (2015).
- [56] H. S. Snyder, “Quantized Space-Time”, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).
- [57] E. C. G. Stückelberg, “La Mecanique du point materiel en theorie de relativite et en theorie des quanta”, Helv. Phys. Acta **15**, 23 (1942).
- [58] H. V. Borzeszkowski y M. B. Mensky, “EPR Effect in Gravitational Field: Nature of Non-Locality”, Phys. Lett. A **269**, 197 (2000).

- 
- [59] V. Fock, “Die Eigenzeit in der klassischen und in der Quantenmechanik”, *Phys. Z. Sowjetunion* **12**, 404 (1937).
- [60] M. H. L. Pryce, *Proc. R. Soc. A* **195**, 1040 (1948).
- [61] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, editado por D. Zwillinger (Elsevier, USA, 2007).
- [62] J. D. Bjorken y S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1964).
- [63] O. Klein, “Quantentheorie Und Fünfdimensionale Relativitätstheorie”, *Z. Phys.* **37**, 895-906 (1926).
- [64] W. Gordon, “Der Comptoneffekt Nach Der Schrödingerschen Theorie”, *Z. Phys.* **40**, 117-133 (1926).
- [65] E. Wigner, “On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group”, *Ann. of Math.* **40**, 149-204 (1939).
- [66] J. B. Hartle y D. Marolf, “Comparing Formulations of Generalized Quantum Mechanics for Reparametrization-Invariant Systems”, *Phys. Rev. D* **56**, 6247 (1997).
- [67] D. Marolf, “Group Averaging and Refined Algebraic Quantization: Where Are We Now?”, en *9th Marcel Grossmann Conference* (World Scientific, 2000), página 1348.
- [68] D. Marolf, “Almost Ideal Clocks in Quantum Cosmology: A Brief Derivation of Time”, *Class. Quantum Gravity* **12**, 2469 (1995).
- [69] E. Anderson, “Problem of Time in Quantum Gravity”, *Ann. Phys. (Berl.)* **524**, 757 (2012).
- [70] M. Bojowald, P. A. Hoehn y A. Tsobanjan, “An Effective Approach to the Problem of Time”, *Class. Quantum Gravity* **28**, 035006 (2011).
- [71] W. Greiner et al., *Relativistic Quantum Mechanics*, volumen 3 (Springer, 1990).
- [72] F. Schwabl, *Advanced Quantum Mechanics* (Springer, 2008).
- [73] M. Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*, volumen 12 (Oxford University Press, 2005).
- [74] J. Schwinger, “On Gauge Invariance and Vacuum Polarization”, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).

- [75] N. N. Bogolyubov, A. A. Logunov e I. T. Todorov, *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory* (W.A. Benjamin, Inc., 1975).
- [76] W. G. Unruh y R. M. Wald, “Time and the Interpretation of Canonical Quantum Gravity”, *Phys. Rev. D* **40**, 2598 (1989).
- [77] H. Padmanabhan y T Padmanabhan, “Nonrelativistic Limit of Quantum Field Theory in Inertial and Noninertial Frames and the Principle of Equivalence”, *Phys. Rev. D* **84**, 085018 (2011).
- [78] K. Kowalski y J. Rembieliński, “Salpeter Equation and Probability Current in the Relativistic Hamiltonian Quantum Mechanics”, *Phys. Rev. A* **84**, 012108 (2011).
- [79] A. R. Smith y M. Ahmadi, “Quantizing Time: Interacting Clocks and Systems”, *Quantum* **3**, 160 (2019).
- [80] P. A. M. Dirac, “The Theory of Gravitation in Hamiltonian Form”, *Proc. Royal Soc. Lond. A* **246**, 333-343 (1958).
- [81] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, volumen 2 (Cambridge Univ. Press, 1995).
- [82] C. Rovelli y F. Vidotto, *Covariant Loop Quantum Gravity: An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory* (Cambridge University Press, 2014).
- [83] F. Soto-Eguibar y H. M. Moya-Cessa, “Harmonic Oscillator Position Eigenstates via Application of an Operator on the Vacuum”, *Rev. Mex. Fís. E* **59**, 122 (2013).
- [84] V. Vedral, *Spacetime as a Tightly Bound Quantum Crystal*, 2020.
- [85] M. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model* (Cambridge Univ. Press, 2014).
- [86] J. Schwinger, “The Theory of Quantized Fields”, *Phys. Rev.* **82**, 914 (1951).
- [87] K. Savvidou, “The Action Operator for Continuous-Time Histories”, *J. Math. Phys.* **40**, 5657 (1999).
- [88] I. Bialynicki-Birula y Z. Bialynicka-Birula, “Uncertainty Relation for Photons”, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 140401 (2012).
- [89] L. Maccone y K. Sacha, “Quantum Measurements of Time”, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 110402 (2020).

- 
- [90] G. Wendel, L. Martínez y M. Bojowald, “Physical Implications of a Fundamental Period of Time”, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 241301 (2020).
- [91] A. Nikolova, G. K. Brennen, T. J. Osborne, G. J. Milburn y T. M. Stace, “Relational Time in Anyonic Systems”, *Phys. Rev. A* **97**, 030101 (2018).
- [92] L. R. S. Mendes y D. O. Soares-Pinto, “Time as a Consequence of Internal Coherence”, *Proc. Royal Soc. Lond A* **475**, 20190470 (2019).
- [93] P. J. Coles, V. Katariya, S. Lloyd, I. Marvian y M. M. Wilde, “Entropic Energy-Time Uncertainty Relation”, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 100401 (2019).
- [94] W. Pauli y N. Straumann, *Die Allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik* (Springer, Berlin, Heidelberg, 1990).
- [95] Y. Aharonov y D. Bohm, “Time in the Quantum Theory and the Uncertainty Relation for Time and Energy”, *Phys. Rev.* **122**, 1649 (1961).
- [96] R. Rossignoli y A. M. Kowalski, “Complex Modes in Unstable Quadratic Bosonic Forms”, *Phys. Rev. A* **72**, 032101 (2005).
- [97] J. Harper, A. Mollabashi, T. Takayanagi, Y. Taki et al., “Timelike Entanglement Entropy”, *arXiv:2302.11695* (2023).
- [98] K Narayan, “De Sitter Space, Extremal Surfaces and "Time-Entanglement"”, *arXiv preprint arXiv:2210.12963* (2022).
- [99] E. Fradkin, *Quantum Field Theory: An Integrated Approach* (Princeton Univ. Press, 2021).
- [100] R Rossignoli, N Canosa y P Ring, “Thermal and Quantal Fluctuations for Fixed Particle Number in Finite Superfluid Systems”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1853 (1998).
- [101] H. Buhrman, R. Cleve, J. Watrous y R. De Wolf, “Quantum Fingerprinting”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 167902 (2001).
- [102] C. J. Isham, N. Linden y S. Schreckenberg, “The Classification of Decoherence Functionals: An Analog of Gleason’s Theorem”, *J. Math. Phys.* **35**, 6360 (1994).
- [103] R. B Griffiths, “Consistent Histories and the Interpretation of Quantum Mechanics”, *J. Stat. Phys.* **36**, 219 (1984).
- [104] M. Gell-Mann y J. Hartle, “Alternative Decohering Histories in Quantum Mechanics”, *arXiv 1905.05859* (2019).

- [105] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, “Quantum Computation and Quantum Information”, Phys. Today **54**, 60 (2001).
- [106] E. Knill y R. Laflamme, “Power of One Bit of Quantum Information”, Phys. Rev. Lett. **81**, 5672-5675 (1998).
- [107] A. Datta, A. Shaji y C. Caves, “Quantum Discord and the Power of One Qubit”, Phys. Rev. Lett. **100**, 050502 (2008).
- [108] M. D. Penney, D. E. Koh y R. W. Spekkens, “Quantum Circuit Dynamics via Path Integrals: Is There a Classical Action for Discrete-Time Paths?”, New J. Phys. **19**, 073006117 (2017).
- [109] Z. Cheng y C. A. Marianetti, “Foundations of Variational Discrete Action Theory”, Phys. Rev. B **103**, 195138 (2021).
- [110] C. J. Isham, N. Linden, K. Savvidou y S. Schreckenberg, “Continuous Time and Consistent Histories”, J. Math. Phys. **39**, 1818 (1998).
- [111] L. C. L. Y. Voon, “An Investigation of Coherent State Path Integrals as Applied to a Harmonic Oscillator and a Single Spin”, Tesis doctoral (University of British Columbia, 1989).
- [112] J. H. Wilson y V. Galitski, “Breakdown of the Coherent State Path Integral: Two Simple Examples”, Phys. Rev. Lett. **106**, 110401 (2011).
- [113] A. Chakraborty, P. Nandi y B. Chakraborty, “Fingerprints of the Quantum Space-Time in Time-Dependent Quantum Mechanics: An Emergent Geometric Phase”, Nucl. Phys. B **975**, 115691 (2022).
- [114] M. Srednicki, *Quantum Field Theory* (Cambridge Univ. Press, 2007).
- [115] V. Giovannetti, S. Lloyd y L. Maccone, “Geometric Event-Based Relativistic Quantum Mechanics”, New J. Phys. **25**, 023027 (2023).
- [116] G. Mussardo y J. Viti, “ $\hbar \rightarrow 0$  Limit of the Entanglement Entropy”, Phys. Rev. A **105**, 032404 (2022).
- [117] R. Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, volumen 172 (Springer Science & Business Media, 2013).
- [118] R. P. Feynman, “The Principle of Least Action in Quantum Mechanics, PhD Dissertation (1942)”, en *Feynman’s Thesis—a New Approach to Quantum Theory* (World Scientific, 2005).



- 
- [119] F. Giacomini, E. Castro-Ruiz y Č. Brukner, “Quantum Mechanics and the Covariance of Physical Laws in Quantum Reference Frames”, *Nat. Comm.* **10**, 494 (2019).
  - [120] T Favalli y A Smerzi, “A Model of Quantum Spacetime”, *AVS Quantum Science* **4**, 044403 (2022).
  - [121] I. L. Paiva, A. Te’eni, B. Y. Peled, E. Cohen e Y. Aharonov, “Non-Inertial Quantum Clock Frames Lead to Non-Hermitian Dynamics”, *Comm. Phys.* **5**, 298 (2022).
  - [122] M. Van Raamsdonk, “Building up Spacetime with Quantum Entanglement”, *Gen. Relativ. Gravit.* **42**, 2323 (2010).
  - [123] C. Cao, S. M. Carroll y S. Michalakis, “Space from Hilbert Space: Recovering Geometry from Bulk Entanglement”, *Phys. Rev. D* **95**, 024031 (2017).
  - [124] S. Barison, F. Vicentini, I. Cirac y G. Carleo, “Variational Dynamics as a Ground-State Problem on a Quantum Computer”, *Phys.Rev.Res.* **4**, 043161 (2022).
  - [125] C. Isham y K. Kuchar, “Representations of Spacetime Diffeomorphisms. I. Canonical Parametrized Field Theories”, *Ann. Phys. (N.Y.)* **164**, 288 (1985).
  - [126] J. Maldacena, “The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity”, *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999).
  - [127] M. Banados e I. Reyes, “A Short Review on Noether’s Theorems, Gauge Symmetries and Boundary Terms”, *Int.J.Mod.Phys.D* **25**, 1630021 (2016).
  - [128] T. Regge y C. Teitelboim, “Role of Surface Integrals in the Hamiltonian Formulation of General Relativity”, *Ann. Phys. (NY)* **88**, 286 (1974).
  - [129] T. de Donder, *Théorie Invariantive Du Calcul Des Variations* (Gauthier-Villars, 1930).
  - [130] H. Weyl, “Geodesic Fields in the Calculus of Variation for Multiple Integrals”, *Annals of Mathematics* **36**, 607 (1935).
  - [131] M. J. Gotay, “A Multisymplectic Framework for Classical Field Theory and the Calculus of Variations II: Space+ Time Decomposition”, *Differential Geometry and its Applications* **1**, 375 (1991).
  - [132] I. V. Kanatchikov, “Canonical Structure of Classical Field Theory in the Polymomentum Phase Space”, *Rep. Math. Phys.* **41**, 49 (1998).

- [133] C. Isham y K. Savvidou, “The Foliation Operator in History Quantum Field Theory”, *J. Math. Phys.* **43**, 5493 (2002).
- [134] D. Chester, X. D. Arsiwalla, L. H. Kauffman, M. Planat y K. Irwin, “Quantization of a New Canonical, Covariant, and Symplectic Hamiltonian Density”, *Symmetry* **16**, 316 (2024).
- [135] F. Khanna, *Thermal Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications* (World Scientific, 2009).
- [136] Y. Nakata, T. Takayanagi, Y. Taki, K. Tamaoka y Z. Wei, “New Holographic Generalization of Entanglement Entropy”, *Phys. Rev. D* **103**, 026005 (2021).
- [137] K. Doi, J. Harper, A. Mollabashi, T. Takayanagi e Y. Taki, “Pseudoentropy in dS/CFT and Timelike Entanglement Entropy”, *Phys. Rev. Lett.* **130**, 031601 (2023).
- [138] C.-S. Chu y H. Parihar, “Time-like Entanglement Entropy in AdS/BCFT”, *arXiv:2304.10907* (2023).
- [139] S. Ryu y T. Takayanagi, “Holographic Derivation of Entanglement Entropy from the Anti-de Sitter Space/Conformal Field Theory Correspondence”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 181602 (2006).
- [140] Y. Aharonov, D. Z. Albert y L. Vaidman, “How the Result of a Measurement of a Component of the Spin of a Spin-1/2 Particle Can Turn out to Be 100”, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1351 (1988).
- [141] J. Dressel, M. Malik, F. M. Miatto, A. N. Jordan y R. W. Boyd, “Colloquium: Understanding Quantum Weak Values: Basics and Applications”, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 307 (2014).
- [142] R. Wagner, Z. Schwartzman-Nowik, I. L. Paiva, A. Te’eni, A. Ruiz-Molero, R. S. Barbosa, E. Cohen y E. F. Galvão, “Quantum Circuits Measuring Weak Values and Kirkwood-Dirac Quasiprobability Distributions, with Applications”, *arXiv:2302.00705* (2023).
- [143] Y. Aharonov y T. Kaufherr, “Quantum Frames of Reference”, *Phys. Rev. D* **30**, 368 (1984).
- [144] E. Castro-Ruiz, F. Giacomini y Č. Brukner, “Dynamics of Quantum Causal Structures”, *Phys. Rev. X* **8**, 011047 (2018).
- [145] T. Favalli y A. Smerzi, “Time Observables in a Timeless Universe”, *Quantum* **4**, 354 (2020).

- 
- [146] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (New York: Wiley, 1972).
- [147] S. A. Fulling, “Nonuniqueness of Canonical Field Quantization in Riemannian Space-Time”, *Phys. Rev. D* **7**, 2850 (1973).
- [148] W. Unruh, “Notes on Black-Hole Evaporation”, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
- [149] R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner, “Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity”, *Phys. Rev.* **116**, 1322 (1959).
- [150] R Balian y E Brezin, “Nonunitary Bogoliubov Transformations and Extension of Wick’s Theorem”, *Il Nuovo Cimento B* (1965-1970) **64**, 37 (1969).
- [151] D. Harlow y J.-q. Wu, “Covariant Phase Space with Boundaries”, *J. High Energy Phys.* **2020**, 1-52 (2020).
- [152] J. M. Matera, D. Egloff, N. Killoran y M. Plenio, “Coherent control of quantum systems as a resource theory”, *Quantum Sci. Technol.* **1**, 01LT01 (2016).
- [153] J. Eisert, M. Cramer y M. B. Plenio, “Area Laws for the Entanglement Entropy: a Review”, *arXiv:0808.3773* (2008).
- [154] F. Pastawski, B. Yoshida, D. Harlow y J. Preskill, “Holographic Quantum Error-Correcting Codes: Toy Models for the Bulk/Boundary Correspondence”, *J. High Energy Phys.* **2015**, 1-55 (2015).
- [155] A. Jahn y J. Eisert, “Holographic Tensor Network Models and Quantum Error Correction: A Topical Review”, *Quantum Science and Technology* **6**, 033002 (2021).
- [156] P. Reimann, “Foundation of Statistical Mechanics under Experimentally Realistic Conditions”, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 190403 (2008).
- [157] N. Linden, S. Popescu, A. J. Short y A. Winter, “Quantum Mechanical Evolution towards Thermal Equilibrium”, *Phys. Rev. E* **79**, 061103 (2009).
- [158] A. S. Malabarba, L. P. García-Pintos, N. Linden, T. C. Farrelly y A. J. Short, “Quantum Systems Equilibrate Rapidly for Most Observables”, *Phys. Rev. E* **90**, 012121 (2014).
- [159] G. Mussardo, “Infinite-Time Average of Local Fields in an Integrable Quantum Field Theory after a Quantum Quench”, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 100401 (2013).

- [160] L. C. Venuti y P. Zanardi, “Universality in the Equilibration of Quantum Systems after a Small Quench”, *Phys. Rev. A* **81**, 032113 (2010).
- [161] L. C. Venuti, N. T. Jacobson, S. Santra y P. Zanardi, “Exact Infinite-Time Statistics of the Loschmidt Echo for a Quantum Quench”, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 010403 (2011).
- [162] A. Goussev, R. A. Jalabert, H. M. Pastawski y D. A. Wisniacki, “Loschmidt Echo”, *Scholarpedia* **7**, 11687 (2012).
- [163] J. Yang y A. Hamma, “Many-Body Localization Transition, Temporal Fluctuations of the Loschmidt Echo, and Scrambling”, *arXiv:1702.00445* (2017).
- [164] B. Zhou, C. Yang y S. Chen, “Signature of a Nonequilibrium Quantum Phase Transition in the Long-Time Average of the Loschmidt Echo”, *Phys. Rev. B* **100**, 184313 (2019).
- [165] G. Rickayzen, *Green’s Functions and Condensed Matter* (Courier Corporation, 2013).
- [166] E. Khatami, G. Pupillo, M. Srednicki y M. Rigol, “Fluctuation-Dissipation Theorem in an Isolated System of Quantum Dipolar Bosons after a Quench”, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 050403 (2013).
- [167] D. J. Luitz e Y. B. Lev, “Anomalous Thermalization in Ergodic Systems”, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 170404 (2016).
- [168] E. Kökcü, H. A. Labib, JK Freericks y A. F. Kemper, “A Linear Response Framework for Simulating Bosonic and Fermionic Correlation Functions Illustrated on Quantum Computers”, *arXiv preprint arXiv:2302.10219* (2023).
- [169] Á. M. Alhambra, J. Riddell y L. P. García-Pintos, “Time Evolution of Correlation Functions in Quantum Many-Body Systems”, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 110605 (2020).
- [170] J. S. Pedernales, R. Di Candia, I. L. Egusquiza, J. Casanova y E. Solano, “Efficient Quantum Algorithm for Computing n-Time Correlation Functions”, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 020505 (2014).
- [171] M. L. Baez, M. Goihl, J. Haferkamp, J. Bermejo-Vega, M. Gluza y J. Eisert, “Dynamical Structure Factors of Dynamical Quantum Simulators”, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **117**, 26123 (2020).

- 
- [172] R. Coldea, DA Tennant, EM Wheeler, E Wawrzynska, D Prabhakaran, M Telling, K Habicht, P Smeibidl y K Kiefer, “Quantum Criticality in an Ising Chain: Experimental Evidence for Emergent E8 Symmetry”, *Science* **327**, 177 (2010).
- [173] CJ Jia, EA Nowadnick, K Wohlfeld, YF Kung, C.-C. Chen, S Johnston, T Tohyama, B Moritz y TP Devereaux, “Persistent Spin Excitations in Doped Antiferromagnets Revealed by Resonant Inelastic Light Scattering”, *Nat. Commun.* **5**, 3314 (2014).
- [174] B. Bauer, D. Wecker, A. J. Millis, M. B. Hastings y M. Troyer, “Hybrid Quantum-Classical Approach to Correlated Materials”, *Phys. Rev. X* **6**, 031045 (2016).
- [175] JM Kreula, S. R. Clark y D Jaksch, “Non-Linear Quantum-Classical Scheme to Simulate Non-Equilibrium Strongly Correlated Fermionic Many-Body Dynamics”, *Sci. Rep.* **6**, 1 (2016).
- [176] R. Sakurai, W. Mizukami y H. Shinaoka, “Hybrid Quantum-Classical Algorithm for Computing Imaginary-Time Correlation Functions”, *Phys. Rev. Res.* **4**, 023219 (2022).
- [177] L. Cincio, Y. Subaşı, A. T. Sornborger y P. J. Coles, “Learning the Quantum Algorithm for State Overlap”, *New J. Phys.* **20**, 113022 (2018).
- [178] A. W. Harrow y A. Montanaro, “Testing Product States, Quantum Merlin-Arthur Games and Tensor Optimization”, *Journal of the ACM (JACM)* **60**, 1-43 (2013).
- [179] G. Gutoski, P. Hayden, K. Milner y M. M. Wilde, “Quantum Interactive Proofs and the Complexity of Separability Testing”, *Theory of Computing* **11**, 59 (2015).
- [180] H.-Y. Huang, R. Kueng y J. Preskill, “Predicting Many Properties of a Quantum System from Very Few Measurements”, *Nat. Phys.* **16**, 1050 (2020).
- [181] T. Brydges, A. Elben, P. Jurcevic, B. Vermersch, C. Maier, B. P. Lanyon, P. Zoller, R. Blatt y C. F. Roos, “Probing Rényi Entanglement Entropy via Randomized Measurements”, *Science* **364**, 260 (2019).
- [182] “Analyticity Breaking and Anderson Localization in Incommensurate Lattices”, *Ann. Israel Phys. Soc.* **3**, 133 (1980).

- [183] R. P. Feynman, “Simulating Physics with Computers”, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467 (1982).
- [184] M. Cerezo, A. Arrasmith, R. Babbush, S. C. Benjamin, S. Endo, K. Fujii, J. R. McClean, K. Mitarai, X. Yuan, L. Cincio y P. J. Coles, “Variational Quantum Algorithms”, *Nat. Rev. Phys.* **3**, 625 (2021).