



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**FORMACIÓN Y EVOLUCIÓN DE
ESTRUCTURAS EN EL MODELO DE
MATERIA OSCURA DIFUSA**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Doctor en Ciencias en el área de Física

PRESENTA:

Iván Margarito Álvarez Rios

DIRECTOR:

Dr. Francisco Shidarth Guzmán Murillo

CODIRECTOR:

Dr. José Antonio González Cervera



Morelia, Michoacán, México.

Marzo 2025

*A Daniela, cuyo amor y apoyo constante han sido la
fuerza detrás de este logro. Gracias por recordarme
siempre que los sueños se alcanzan cuando se camina
en compañía.*

Agradecimientos

Este logro no habría sido posible sin el apoyo y guía de tantas personas que me han acompañado a lo largo de este camino.

En primer lugar, expreso mi más profundo agradecimiento al Dr. Francisco Shidarta Guzmán Murillo, mi asesor, por su paciencia, orientación y apoyo constante. Su experiencia y confianza en mis capacidades han sido fundamentales para mi desarrollo académico y personal.

También extendiendo mi agradecimiento a los miembros de mi comité tutorial, quienes desempeñaron un papel crucial en el éxito de este proyecto. Al Dr. José Antonio González Cervera, a la Dra. Ana Aurelia Avilez López, al Dr. Tonatiuh Matos Chassin y al Dr. Umberto Cotti Gollini, por sus sugerencias, observaciones y permanente apoyo académico.

Agradezco a mis colaboradores, los profesores Paul R. Shapiro, Tula Bernal, Pierre-Henri Chavanis y Jens Niemeyer, por sus valiosas contribuciones, así como por el aprendizaje compartido que enriqueció este proceso de investigación.

Quisiera reconocer también a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y al Instituto de Física y Matemáticas, por brindarme los recursos y el entorno necesarios para el desarrollo de este trabajo. Asimismo, agradezco a la Secihti por el financiamiento recibido durante mis estudios de posgrado, cuyo respaldo fue crucial para la realización de este proyecto.

A lo largo de este camino, conté con la compañía de colegas y amigos que hicieron este proceso más enriquecedor. A mis compañeros de oficina, Curi y Flavio, gracias por las largas jornadas de trabajo, las conversaciones que aliviaron el estrés y los momentos de aprendizaje mutuo.

A mis grandes amigos Gustavo y Tena, gracias por ser un pilar de apoyo constante en mi vida. Su compañía y consejos me ayudaron a mantenerme enfocado y motivado.

A mi familia, mi mayor fuente de fortaleza. A mis hermanos Andrea y Carlos, cuyo amor y ejemplo han sido esenciales. Andrea, gracias por estar siempre presente en los momentos más importantes de mi vida. Carlos, a pesar de los retos que has enfrentado, sigues ocupando un lugar especial en mi corazón, con el mismo cariño y agradecimiento de siempre. A mis sobrinos, por su ternura y por recordarme la importancia de celebrar cada logro.

A mi madre, quien con su dedicación y esfuerzo me ha guiado en cada paso. Gracias por tu amor infinito, tus enseñanzas y por ser siempre el ejemplo más grande de fortaleza y resiliencia.

Finalmente, a Daniela, mi compañera de vida. Gracias por estar a mi lado, por brindarme tu amor y comprensión en cada paso del camino. Tú y nuestras perrijas, Julieta, Coco y Blaki, son mi mayor inspiración y mi razón para seguir adelante.

A todos ustedes, mi más sincero y profundo agradecimiento.

Publicaciones

La lista de publicaciones aceptadas y en proceso de revisión relacionadas con esta tesis se presenta a continuación:

1. **Álvarez-Rios, I.**, Guzmán, F. S., Niemeyer, J. Fermion-Boson Stars as Attractors in Fuzzy Dark Matter and Ideal Gas Dynamics. arXiv:2412.13382 (en revisión).
2. Palomares-Chavez, C., **Álvarez-Rios, I.**, & Guzmán, F. S. Black Holes as Condensation Points of Fuzzy Dark Matter Cores. arXiv:2412.15465 (en revisión).
3. **Álvarez-Rios, I.**, & Guzmán, F.S. Behavior of test particles in FDM galactic halos (en revisión).
4. Rodríguez-Lara, D., **Álvarez-Rios, I.**, & Guzmán, F. S. Numerical Solution of Partial Differential Equations using the Discrete Fourier Transform. arXiv:2412.12308 (aceptado).
5. **Álvarez-Rios, I.**, & Guzmán, F. S. Solutions of the Schrödinger-Poisson equations for n -dimensional states (aceptado).
6. **Álvarez-Rios, I.**, Guzman, F. S., & Chavanis P. H. (2024). Galactic rotation curves of low surface brightness galaxies using core-halo fuzzy dark matter configurations. *Physical Review D*, 110(6), 063502. DOI:10.1103/PhysRevD.110.063502.
7. Tena-Contreras, C., **Álvarez-Rios, I.**, & Guzmán, F. S. (2024). Construction of Ground-State Solutions of the Gross–Pitaevskii–Poisson System Using Genetic Algorithms. *Universe*, 10(8), 0309. DOI:10.3390/universe10080309.
8. **Álvarez-Rios, I.**, & Guzmán, F. S. (2024). Effects of boundary conditions on the core-halo mass scaling relation of fuzzy dark matter structures. *Physical Review D*, 110(2), 023530. DOI:10.1103/PhysRevD.110.023530.
9. **Álvarez-Rios, I.**, & Guzmán, F. S. (2023). Spherical solutions of the Schrödinger-Poisson system with core-tail structure. *Physical Review D*, 108(6), 063519. DOI:10.1103/PhysRevD.108.063519.
10. **Álvarez-Rios, I.**, & Guzmán, F. S. (2023). Stationary solutions of the Schrödinger-Poisson-Euler system and their stability. *Physics Letters B*, 843, 137984. DOI:10.1016/j.physletb.2023.137984.
11. **Álvarez-Rios, I.**, Guzmán, F. S., & Shapiro, P. R. (2023). Effect of boundary conditions on structure formation in fuzzy dark matter. *Physical Review D*, 107(12), 123524. DOI:10.1103/PhysRevD.107.123524.

12. **Álvarez-Rios, I.**, & Guzmán, F. S. (2022). Exploration of simple scenarios involving fuzzy dark matter cores and gas at local scales. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 518(3), 4446–4457. DOI:10.1093/mnras/stac3395.
13. **Álvarez-Rios, I.**, & Guzmán, F. S. (2022). Construction and Evolution of Equilibrium Configurations of the Schrödinger–Poisson System in the Madelung Frame. *Universe*, 8(8), 432. DOI:10.3390/universe8080432.
14. Guzmán Murillo, F. S., **Álvarez-Rios, I.**, & González, J. A. (2021). Merger of galactic cores made of ultralight bosonic dark matter. *Revista Mexicana de Física*, 67(1), 75–83. DOI:10.31349/revmexfis.67.75.

Resumen.

En este trabajo se estudia la materia oscura utilizando el modelo de Materia Oscura Difusa (*FDM*, por sus siglas en inglés). Se presentan simulaciones numéricas que describen la formación y evolución de estructuras autogravitantes bajo este modelo. En primer lugar, se analizan configuraciones basadas en *FDM* pura, enfocadas en el estudio de las primeras estructuras formadas en el universo y en las estructuras galácticas que emergen a partir de ellas.

Posteriormente, se extiende el análisis para incluir la contribución de la materia visible, la cual influye significativamente en la dinámica de los halos galácticos. Procesos como el enfriamiento de gas, la formación estelar y la retroalimentación se incorporan en las simulaciones para evaluar su impacto en la distribución de densidad y estabilidad de las estructuras.

Las simulaciones se desarrollaron utilizando un nuevo código diseñado para acoplar de manera eficiente las ecuaciones de Schrödinger-Poisson (SP) que describen la materia oscura con las ecuaciones hidrodinámicas que rigen la materia visible. Este enfoque permite una modelación más precisa y detallada de los procesos de formación de estructuras a escala local en el universo.

Los resultados de este estudio proporcionan una mayor comprensión sobre la interacción entre materia oscura y bariónica, así como sobre su influencia en la evolución de galaxias y cúmulos galácticos, un resumen de las aportaciones de este trabajo son:

Asbtract.

In this work, dark matter is studied using the Fuzzy Dark Matter (*FDM*) model. Numerical simulations are presented to describe the formation and evolution of self-gravitating structures under this model. First, configurations based on pure *FDM* are analyzed, focusing on the study of the earliest structures formed in the universe and the galactic structures that emerge from them.

Subsequently, the analysis is extended to include the contribution of visible matter, which significantly influences the dynamics of galactic halos. Processes such as gas cooling, star formation, and feedback are incorporated into the simulations to evaluate their impact on the density distribution and structural stability.

The simulations were carried out using a new code designed to efficiently couple the Schrödinger-Poisson (SP) equations describing dark matter with the hydrodynamic equations governing visible matter. This approach enables a more precise and detailed modeling of structure formation processes at local scales in the universe.

The results of this study provide a deeper understanding of the interaction between dark and baryonic matter, as well as their influence on the evolution of galaxies and galactic clusters.

Palabras clave: Condensados de Bose-Einstein, materia oscura, hidrodinámica, sistemas autogravitantes, métodos numéricos

CONTENIDO

1. Introducción	1
2. Modelo y Ecuaciones	7
2.1. Materia Visible	8
2.2. Materia Oscura	11
2.2.1. Marco de Schrödinger-Poisson	12
2.2.2. Marco de Madelung-Poisson	14
2.3. Acoplamiento Materia Visible y Materia Oscura	16
2.3.1. Diagnóstico	18
2.3.2. Adimensionalización del Sistema	18
3. Métodos Numéricos	21
3.1. Métodos Pseudoespectrales	22
3.1.1. Transformada Discreta de Fourier	22
3.1.2. Transformadas Discretas del Seno y Coseno de Fourier usando FFT .	28
3.1.3. Solución de la ecuación de Poisson	30
3.1.4. Solución de la ecuación de Schrödinger	32

3.2. Métodos de Volúmenes Finitos	36
3.2.1. Análisis Característico de las Ecuaciones de Euler	36
3.2.2. Método HLLE	38
3.3. Implementación Computacional	40
4. Simulaciones de Materia Oscura Difusa	41
4.1. Núcleos galácticos	41
4.1.1. Soluciones estacionarias	42
4.1.2. Estabilidad	45
4.1.3. Atracción	48
4.2. Fusiones de Núcleos Galácticos	53
4.2.1. Sistemas Binarios	54
4.2.2. Sistemas multinúcleos	63
4.3. Soluciones esféricas con estructura núcleo-halo	73
4.3.1. Soluciones núcleo-halo no diferenciables	74
4.3.2. Construcción de perfiles núcleo-halo galácticos no esféricas	87
4.4. Partículas de Prueba	96
4.4.1. Construcción del núcleo-halo que usaremos	96
4.4.2. Escenarios donde se integran las partículas de prueba	101
4.4.3. Ecuaciones de movimiento para partículas de prueba	101
4.4.4. Movimiento de partículas de prueba	104
5. Simulaciones de Materia Oscura Difusa Acoplada a un Gas Ideal	111

5.1. Estrellas Newtonianas de Fermiones y Bosones	112
5.1.1. Soluciones estacionarias	112
5.1.2. Estabilidad	117
5.1.3. Atracción	119
5.2. Fusiones de NFBS	129
5.2.1. Sistemas Binarios	130
5.3. Fusiones entre núcleos <i>FDM</i> y nubes de gas	134
5.3.1. Condiciones iniciales	134
5.3.2. Espacio de parámetros	135
5.3.3. Gas ideal	136
5.3.4. Polvo	140
5.4. Rastreo de la materia oscura a través de la materia bariónica	143
5.4.1. Condiciones iniciales de la función de onda	143
5.4.2. Condiciones iniciales del fluido	144
5.4.3. Energía interna baja	145
5.4.4. Energía interna media	146
5.4.5. Energía interna alta	148
6. Simulaciones de Materia Oscura Difusa acoplada a un Hoyo Negro	153
6.1. Soluciones estacionarias	154
6.2. Dinámica del sistema <i>FDM+BH</i>	157
6.2.1. Método numérico	157

6.2.2. Condiciones iniciales	158
6.2.3. Simulaciones	158
6.2.4. Condensación y dinámica del núcleo	159
7. Conclusiones	165
A. Apéndice	169
A.1. Soluciones estacionarias y su estabilidad: Estrellas TOV	169
REFERENCIAS	175

Capítulo 1

Introducción

La materia oscura es una componente fundamental del universo que no interactúa directamente con la radiación electromagnética, lo que la hace invisible a los telescopios. Sin embargo, su existencia ha sido inferida a partir de diversos efectos gravitacionales observados. El primer indicio significativo fue proporcionado por Fritz Zwicky en 1933, al estudiar la dinámica del cúmulo de Coma. Zwicky notó que la masa visible en este cúmulo no era suficiente para explicar las altas velocidades de las galaxias en su interior, lo que lo llevó a sugerir la presencia de una “masa faltante” que generaba el campo gravitacional necesario para mantener el cúmulo unido [1].

Décadas después, estudios detallados de las curvas de rotación de galaxias, realizados por Vera Rubin y Kent Ford en la década de 1970, reforzaron esta hipótesis [2]. En particular, observaron que el gas en las regiones externas de las galaxias espirales se mueve con mayor velocidad de lo esperado si solo se considera la materia visible. Esto sugiere la existencia de un halo de materia oscura que extiende su influencia gravitacional más allá del disco galáctico. Alternativamente, algunos modelos han propuesto modificar las leyes de Newton, como la Dinámica Newtoniana Modificada (MOND) [3]. En este trabajo, nos inclinamos por la validez de las leyes de Newton y la existencia de la materia oscura.

El modelo de Materia Oscura Fría (*CDM*, por sus siglas en inglés) surge como una solución a diversos problemas en la formación de estructuras cósmicas. En este marco, la materia oscura no relativista desempeña un papel crucial al proporcionar la gravedad necesaria para el colapso de las pequeñas fluctuaciones de densidad en el plasma primordial, lo que da lugar a la formación de galaxias y cúmulos. Si la materia oscura fuera caliente, es decir, compuesta

por partículas relativistas en el universo temprano, su gran libre recorrido medio impediría la formación de estructuras a pequeñas escalas debido al efecto de *free-streaming* [4].

Observaciones de la distribución de galaxias y del fondo cósmico de microondas indican que la materia oscura debe ser fría o, en algunos modelos, tibia, permitiendo la formación temprana de halos de materia oscura que actúan como semillas gravitacionales para la evolución de galaxias [5]. Además, simulaciones cosmológicas y datos de la misión Planck han revelado que aproximadamente el 27 % de la densidad de energía del universo corresponde a esta componente invisible [6]. Sin la materia oscura, muchas de las estructuras astronómicas observadas no habrían podido consolidarse en la escala temporal del universo, lo que refuerza la necesidad de su existencia.

En este contexto, el comportamiento gravitacional de la materia oscura se modela bajo el régimen newtoniano, dado que los potenciales gravitacionales son débiles y las velocidades características de las estructuras formadas son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz. Este enfoque ha permitido desarrollar simulaciones numéricas que reproducen con gran precisión la distribución de materia a gran escala en el universo, proporcionando un sólido respaldo al modelo *CDM*.

Entre los modelos actuales, destaca el modelo de Materia Oscura Difusa (*FDM*, por sus siglas en inglés), el cual postula que la materia oscura está compuesta por bosones ultraligeros de espín cero [7, 8]. Este modelo ofrece soluciones a discrepancias clave del paradigma de *CDM*, como el *cusp-core problem* [9]. En el interior de las estructuras colapsadas, la presión cuántica generada por la naturaleza ondulatoria de la materia oscura evita la formación de perfiles cuspidales, dando lugar a un núcleo central cuya densidad coincide con el estado fundamental del sistema [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]. Esta característica permite reproducir con mayor precisión las curvas de rotación galácticas [20]. Además, el modelo *FDM* mitiga el *missing satellites problem* [21], ya que la supresión de la formación de estructuras a escalas pequeñas reduce el número de galaxias satélites esperadas en comparación con el modelo estándar de *CDM*.

El modelo *FDM* exhibe una serie de características distintivas que lo diferencian del paradigma estándar de *CDM*, pero que, al mismo tiempo, lo hacen compatible con observaciones cosmológicas a grandes escalas. Una de sus propiedades fundamentales es la granularidad en los halos galácticos, que emerge debido a la interferencia cuántica de las ondas de materia oscura. Esta estructura granular introduce fluctuaciones de densidad coherentes en escalas de la longitud de onda de De Broglie, lo que podría tener implicaciones observacionales en lentes gravitacionales débiles y en la dinámica de las galaxias enanas [22, 8, 23].

Pese a estas diferencias, el modelo *FDM* es asintóticamente equivalente a *CDM* en escalas suficientemente grandes, ya que la naturaleza ondulatoria de la materia oscura se vuelve irrelevante en regiones donde la longitud de onda de De Broglie es mucho menor que las estructuras colapsadas [8, 24]. En consecuencia, la evolución de las grandes estructuras cósmicas

sigue las predicciones estándar del modelo *CDM*, lo que permite que *FDM* sea consistente con observaciones de lentes gravitacionales fuertes y la distribución de cúmulos de galaxias [22, 25]. Además, la turbulencia cuántica en estos sistemas introduce efectos adicionales en la dinámica de los halos y galaxias satélites, generando predicciones que pueden ser contrastadas con observaciones futuras [23, 26, 27].

La masa del bosón m_B en el modelo de *FDM* es un parámetro clave, ya que debe ser lo suficientemente pequeña para abordar los problemas a pequeña escala del modelo *CDM* (como la formación de núcleos en halos y la supresión de la estructura a pequeña escala), pero lo suficientemente grande para reproducir el comportamiento de *CDM* en escalas cosmológicas. Los estudios sugieren que esta masa debe estar en el rango $m_B \sim 10^{-23} - 10^{-21}$ eV. A partir de la función de luminosidad de galaxias en alto corrimiento al rojo, se ha obtenido la restricción $m_B > 1.2 \times 10^{-22}$ eV [28], mientras que estudios del Lyman- α forest imponen un límite más estricto de $m_B \gtrsim 2 \times 10^{-21}$ eV [29, 30]. Para resolver los problemas a pequeña escala de *CDM*, el valor más comúnmente utilizado en simulaciones es $m_B \sim 10^{-22}$ eV. Desde un punto de vista cosmológico, el análisis del fondo cósmico de microondas (CMB) y la distribución de galaxias ha establecido un límite inferior de $m_B > 10^{-24}$ eV [31], mientras que la función de luminosidad en el ultravioleta y restricciones de reionización sugieren un valor mínimo de $m_B > 10^{-23}$ eV [32]. Sin embargo, estos valores están en tensión con resultados que indican $m_B > 10^{-25}$ eV [33], lo que refleja la falta de consenso sobre la masa exacta del bosón ultraligero y la necesidad de exploraciones adicionales. Además, la auto-interacción entre los bosones es otro parámetro relevante que puede modificar significativamente la construcción y fenomenología de las estructuras formadas en este marco teórico, afectando las restricciones actuales sobre la masa del bosón [34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42].

En el caso de las galaxias enanas, como Eridanus II, se ha demostrado que los núcleos de los halos de *FDM* presentan un movimiento aleatorio que puede afectar la estabilidad de cúmulos estelares [43]. Esta dinámica en general estocástica también ha sido explorada en el contexto de fluctuaciones de campos bosónicos [44]. Además, la interacción entre la materia oscura y los pulsos de púlsares podría revelar modulaciones características que no han sido estudiadas en detalle [45].

Por otro lado, la búsqueda de materia oscura mediante métodos experimentales ha avanzado considerablemente. Sensores cuánticos espaciales han mejorado los límites de detección para partículas ultraligeras vinculadas gravitacionalmente al Sol [46], mientras que observaciones en la corona solar han identificado posibles conversiones resonantes de materia oscura en señales de radio [47].

Detectores de ondas gravitacionales como LIGO y GEO 600 han establecido restricciones significativas sobre las posibles interacciones entre la materia oscura escalar y la materia ordinaria [48, 49]. Estos instrumentos, diseñados originalmente para la detección de ondas gravitacionales provenientes de fusiones de objetos compactos, han demostrado ser herramientas prometedoras para explorar nuevas propiedades de la *FDM*. En particular, su extrema

sensibilidad a perturbaciones en el espaciotiempo permite buscar señales que podrían delatar la presencia de campos escalares ultraligeros, cuya interacción con interferómetros terrestres podría manifestarse como oscilaciones coherentes en las mediciones de longitud o en la frecuencia de los relojes atómicos acoplados a estos experimentos. El uso de detectores de ondas gravitacionales para este propósito abre una nueva vía en la búsqueda de materia oscura, proporcionando un complemento a las restricciones obtenidas a partir de observaciones astrofísicas y cosmológicas, y permitiendo explorar escenarios en los que la materia oscura exhiba interacciones débiles pero detectables con la materia visible.

La materia visible, compuesta por gas, estrellas y polvo, también es crucial para modelar correctamente la estructura galáctica. Ejemplos como el *Bullet Cluster* muestran una separación evidente entre la materia visible y la materia oscura, confirmando que esta última no interactúa directamente con la materia ordinaria, pero ejerce una influencia gravitacional determinante [50]. Los procesos de formación estelar, retroalimentación y enfriamiento de gas modifican la distribución de masa dentro de los halos galácticos de *FDM* y viceversa [51].

Los resultados de esta tesis han generado avances clave en la comprensión y modelado de la *FDM* y su interacción con la materia visible, impactando el estudio de la formación y evolución de estructuras en el universo.

En términos de desarrollo metodológico, se ha implementado un algoritmo genético para la construcción de soluciones del estado fundamental del sistema Gross-Pitaevskii-Poisson (GPP), demostrando su utilidad para problemas con múltiples parámetros 7. Asimismo, la implementación de la transformada rápida de Fourier para la resolución de ecuaciones diferenciales ha permitido abordar problemas computacionales complejos 4.

A partir de estas herramientas, se han construido soluciones estacionarias tanto en el sistema Schrödinger-Poisson como en el marco de Madelung, verificando que estas configuraciones son estables e independientes del marco utilizado 13. Además, se ha extendido el análisis a modelos con múltiples bosones de masas iguales, demostrando que la estabilidad de estas soluciones también se mantiene en escenarios con varios componentes 5.

Se han construido soluciones estacionarias del sistema Schrödinger-Poisson-Euler (SPE), proporcionando modelos de equilibrio que sirven como referencia para simulaciones numéricas. Se ha demostrado que la estabilidad de estas soluciones depende críticamente de la ecuación de estado utilizada para la materia visible, con estabilidad observada en configuraciones politrópicas y relajación hacia estados distintos en el caso de un gas ideal 10. Además, se ha comprobado que estas soluciones emergen como atractores del sistema a partir de condiciones iniciales aleatorias, lo que sugiere que pudieron haber sido las primeras estructuras virializadas en formarse dentro del modelo *FDM*. Asimismo, se ha evidenciado que la interacción gravitacional entre la materia oscura y la visible puede sincronizar las oscilaciones de ambos componentes, lo que podría proporcionar restricciones observacionales adicionales al modelo *FDM* 1. Estos hallazgos permiten delimitar condiciones iniciales realistas para

simulaciones de formación de galaxias y evolución de estructuras en el marco de *FDM*.

Adicionalmente, se ha explorado la interacción entre *FDM* y agujeros negros supermasivos, encontrando que estos últimos pueden actuar como puntos de condensación de la materia oscura, modificando la evolución y distribución de densidad del núcleo galáctico. Se ha identificado un mecanismo mediante el cual la oscilación del agujero negro dentro del núcleo de *FDM* redistribuye la densidad central, lo que podría proporcionar predicciones observacionales clave para evaluar la viabilidad del modelo 2.

Estas soluciones de equilibrio, inicialmente virializadas, sirven como punto de partida para estudiar escenarios más complejos que describen la formación de estructuras a escalas locales, tales como las fusiones binarias 14. Se ha demostrado que, en el interior de la estructura resultante de una fusión, se forma un núcleo que evoluciona hacia el estado base del sistema debido al enfriamiento gravitacional. Un estudio detallado en 11 confirma que este proceso está ligado a la elección de condiciones de frontera aisladas, que permiten expulsar la masa y energía cinética fuera del dominio numérico, relajando así el sistema. En contraste, en un dominio periódico, la energía total y la masa se conservan, permitiendo una dinámica más compleja y la formación de halos alrededor del núcleo galáctico. Además, las condiciones de frontera periódicas imponen restricciones adicionales, ya que permiten reescalar la energía total sin alterar la dinámica del sistema, lo que sugiere que las fórmulas empíricas utilizadas en estos estudios deben ser cuidadosamente calibradas para garantizar su aplicabilidad en diferentes simulaciones 8.

Estos hallazgos confirman además la naturaleza atractora de los núcleos formados en el interior de los halos. Basado en esto, se ha desarrollado un método para la construcción de estructuras núcleo-halo, combinando el estado base del sistema con una envoltura adicional que permite ajustar curvas de rotación más allá de la región central 9. Estas estructuras iniciales son inestables y evolucionan hacia configuraciones relajadas con una estructura núcleo-halo bien definida.

El desarrollo de modelos de halos con perfiles multimodo ha permitido ajustar curvas de rotación de galaxias de baja luminosidad superficial 6. Sin embargo, se ha encontrado que, aunque estas configuraciones pueden ser virializadas inicialmente, su evolución en escalas de tiempo cosmológicas genera acumulación de materia en los núcleos galácticos. Esto sugiere que la evolución natural de configuraciones *FDM* podría explicar ciertas características observadas en galaxias, como la presencia de picos en sus curvas de rotación a radios pequeños 8.

Otro resultado relevante ha sido la identificación de comportamiento caótico en trayectorias de partículas de prueba dentro de estructuras núcleo-halo de *FDM* cuando se consideran sus características anisotrópicas y su dependencia temporal 3. Se encontró que, mientras las órbitas permanecen circulares bajo un potencial gravitacional promedio en el tiempo y ángulos, la verdadera estructura fluctuante induce trayectorias erráticas, con mayor sensibilidad en la

región del núcleo que en el halo. Este comportamiento caótico ha sido cuantificado a través del cálculo de exponentes de Lyapunov, mostrando que la dinámica de partículas de prueba es inherentemente caótica en todo el dominio, con exponentes más altos en la región central. Esto sugiere que el comportamiento colectivo de partículas, como el de un gas acoplado a una estructura núcleo-halo de *FDM*, podría exhibir correlaciones no triviales y potencialmente evolucionar hacia un estado más estacionario, lo que abre una nueva línea de investigación en la dinámica de materia visible en presencia de materia oscura bosónica.

Estos avances han sido posibles gracias al desarrollo del nuevo código **CAFE-FDM**, presentado en 12 para simulaciones con condiciones de frontera aisladas y ampliado en 11 para incluir condiciones de frontera periódicas. Este desarrollo numérico sienta las bases para simulaciones más eficientes de la dinámica de *FDM* en escenarios cosmológicos y astrofísicos. En conjunto, estos resultados fortalecen la base teórica y numérica para el estudio de la materia oscura bosónica ultraligera y ofrecen nuevas herramientas para evaluar su papel en la evolución de galaxias y estructuras cósmicas.

A partir de los avances numéricos alcanzados, es posible profundizar en el estudio de la interacción entre la materia oscura y la materia visible mediante simulaciones detalladas y escenarios complejos. Con este propósito, el presente documento se organiza de la siguiente manera:

- En el **Capítulo 2**, se presentan las ecuaciones fundamentales que describen la dinámica de la materia oscura difusa (*FDM*), así como los acoplamientos relevantes que permiten su interacción con otros componentes del sistema.
- El **Capítulo 3** detalla los métodos numéricos implementados para resolver el sistema de ecuaciones, abarcando técnicas de discretización espacial, esquemas de evolución temporal y estrategias para optimizar la estabilidad y precisión de las simulaciones.
- En el **Capítulo 4**, se analizan los resultados obtenidos en simulaciones de *FDM* pura, centrándose en los procesos de condensación, formación de estructuras y la dinámica resultante bajo diferentes condiciones de frontera.
- El **Capítulo 5** amplía el análisis al incluir un gas ideal acoplado a la materia oscura, lo que permite explorar la interacción entre materia oscura y materia bariónica en escenarios galácticos y estudiar su impacto en la formación y evolución de estructuras complejas.
- Por otro lado, en el **Capítulo 6** se extiende el estudio de la *FDM* para incluir la influencia de agujeros negros, investigando cómo actúan como puntos de condensación y su efecto sobre la dinámica de la materia oscura en su entorno inmediato.
- Finalmente, en el **Capítulo 7**, se presentan las conclusiones generales del estudio, destacando los hallazgos más relevantes, las implicaciones en la formación de estructuras y las posibles líneas de investigación futura.

Capítulo 2

Modelo y Ecuaciones

En este capítulo se presenta el modelo teórico que describe la dinámica del sistema compuesto por materia visible y materia oscura difusa. La materia visible, modelada como un fluido de gas ideal compresible, se describe en la sección 2.1 mediante las ecuaciones de Euler. Por otro lado, la materia oscura, representada por una condensación de bosones ultraligeros, se aborda en la sección 2.2 utilizando las ecuaciones Schrödinger-Poisson (SP). Estos dos componentes se acoplan gravitacionalmente, formando un sistema dinámico complejo, el cual se describe en la sección 2.3.

Se abordan las ecuaciones para la materia visible, que incluyen la conservación de la masa, el momento y la energía, así como su ecuación de estado. Posteriormente, se analizan las ecuaciones para la *FDM* y su acoplamiento con la materia visible, donde la gravedad juega un papel fundamental en la evolución de ambos componentes.

Este marco teórico permite explicar las simulaciones que se mostrarán más adelante, proporcionando una base para estudiar fenómenos como la formación de estructuras y las curvas de rotación galáctica.

SECCIÓN 2.1

Materia Visible

La dinámica de la materia visible puede modelarse, en el caso más simple, como un fluido macroscópico autogravitante gobernado por las ecuaciones de Euler-Poisson (EP):

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\partial_t (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \mathbf{I}) = -\rho \nabla V, \quad (2.2)$$

$$\partial_t E + \nabla \cdot [\vec{v} (E + p)] = -\rho \vec{v} \cdot \nabla V, \quad (2.3)$$

$$\nabla^2 V = 4\pi G \rho, \quad (2.4)$$

donde ρ representa la densidad de materia, \vec{v} el campo de velocidades de un elemento de fluido, p la presión, e la energía interna específica, V el potencial gravitacional y $E = \rho (e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2)$ la energía total por unidad de volumen, siendo G la constante gravitacional de Newton. Estas ecuaciones son fundamentales para modelar el comportamiento de los fluidos autogravitantes, los cuales se encuentran en una gran variedad de situaciones astrofísicas, tales como en la dinámica de gas intergaláctico, de las regiones de formación estelar o incluso de la materia que conforma los núcleos galácticos [52, 53].

El sistema EP consta de seis ecuaciones diferenciales parciales: la primera ecuación (2.1) representa el principio de conservación de la masa, el cual dicta cómo evoluciona la densidad del fluido en el tiempo y asegura que la masa total dentro de un volumen cerrado se conserve. La segunda ecuación (2.2) representa el principio de conservación del momento, proporcionando una ecuación de evolución para el momento volumétrico y considerando la interacción gravitacional que actúa sobre el fluido. La tercera ecuación (2.3) representa la conservación de la energía, proporcionando la ecuación de evolución para la energía total volumétrica, que incluye tanto la energía interna como la cinética del fluido. Finalmente, la ecuación de Poisson (2.4) representa la restricción del potencial gravitacional que debe satisfacerse durante toda la evolución del fluido, ligada a la distribución de la masa a través de la ley de gravitación de Newton.

Dado que hay un total de siete variables, el sistema se encuentra indeterminado. Una manera de cerrar el sistema es usando la termodinámica del gas, la cual proporciona una relación entre algunas variables macroscópicas del sistema mediante la elección de una ecuación de estado $p = p(\rho, e)$, siendo en este documento una opción el considerar un gas ideal cuya ecuación de estado es

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \quad (2.5)$$

donde γ es el índice adiabático, que depende de las propiedades termodinámicas del gas, o bien, se puede elegir una ecuación de estado politrópica de la forma

$$p = K\rho^{1+1/n}, \quad (2.6)$$

siendo K la constante politrópica y n el índice politrópico, el cual depende del tipo de fluido que se modela, caracterizando la relación entre la presión y la densidad del fluido. Las ecuaciones de estado proporcionan una herramienta útil para conectar las propiedades macroscópicas del fluido con sus variables termodinámicas, y permiten interpretar los procesos termodinámicos que surgen de la dinámica del gas.

Este sistema de ecuaciones diferenciales parciales corresponde a un fluido sin conductividad térmica, no viscoso, en el que las partículas no interactúan entre sí, lo cual es una aproximación válida en muchos casos astrofísicos. No obstante, cabe resaltar que en algunos contextos más específicos, como en la dinámica de ciertos gases o en condiciones extremas de densidad y temperatura, sería necesario considerar otros efectos como la viscosidad o la conductividad térmica, lo que llevaría a un modelo más complejo. Una descripción macroscópica detallada de la deducción de estas ecuaciones puede encontrarse en [54]. Este sistema de ecuaciones definen un Problema de Valores Iniciales (PVI) el cual será resuelto en un dominio cartesiano 3+1, donde se deben especificar los valores de las variables al tiempo inicial $t = 0$:

$$\rho(0, \vec{x}) = \rho_0(\vec{x}), \quad (2.7)$$

$$\vec{v}(0, \vec{x}) = \vec{v}_0(\vec{x}), \quad (2.8)$$

$$e(0, \vec{x}) = e_0(\vec{x}), \quad (2.9)$$

El resto de las variables se obtienen de la ecuación de estado $p(0, \vec{x}) = p(\rho_0, e_0)$ y de la definición de energía total $E(0, \vec{x}) = \rho_0 \left(e_0 + \frac{1}{2} |\vec{v}_0|^2 \right)$. Este conjunto de condiciones iniciales es fundamental para la simulación del comportamiento espacial y temporal del sistema, ya que a partir de estos valores se resolverán las ecuaciones de EP en el tiempo y el espacio.

Si bien el uso de un fluido perfecto puede parecer limitante, en realidad, para muchos problemas astrofísicos, un gas ideal proporciona una primera aproximación suficientemente buena que puede capturar las dinámicas principales sin necesidad de complicar excesivamente el modelo. El uso de un gas ideal en el modelado de la dinámica de la materia visible mediante el sistema de ecuaciones EP es una elección justificada por su simplicidad y aplicabilidad en

muchas condiciones astrofísicas. Aunque los gases más complejos pueden proporcionar detalles adicionales, el gas ideal ofrece una primera aproximación robusta que facilita el análisis y la comprensión inicial del sistema estudiado.

En términos de simulaciones numéricas, el gas ideal no es necesariamente más sencillo de modelar, ya que puede generar choques hidrodinámicos, los cuales pueden dar lugar a la formación de estructuras como brazos espirales en las galaxias. Un modelo sin viscosidad es más adecuado para capturar estos fenómenos, ya que permite la formación y propagación de los choques sin suavizar sus efectos. Por otro lado, la inclusión de procesos radiativos introduce escalas de tiempo adicionales y requiere un tratamiento detallado de la transferencia de energía, lo que puede volver los cálculos prohibitivos en términos de tiempo computacional y complejidad. Al no considerar estos efectos radiativos, es posible realizar estudios preliminares que se enfoquen únicamente en la hidrodinámica del sistema, permitiendo explorar distintos escenarios de manera eficiente [55]. En futuras investigaciones, la incorporación de efectos no ideales podría proporcionar una descripción más completa de estos sistemas, pero el modelo actual sigue siendo una herramienta útil para analizar la dinámica de la materia visible en interacción con la materia oscura.

Es fundamental conocer las ecuaciones que gobiernan la dinámica de la materia oscura, ya que esta domina gravitacionalmente en escalas grandes, como las que se observan en las estructuras galácticas. Sin embargo, dado que su naturaleza aún es desconocida, diferentes modelos han sido propuestos para describir su comportamiento. En el paradigma de *CDM*, se asume que está compuesta por partículas masivas y no relativistas, cuyo efecto gravitacional puede estudiarse mediante simulaciones tipo *N*-cuerpos, en las cuales la materia oscura se trata como un fluido de partículas en un régimen colisionalmente frío.

Una alternativa interesante es la materia oscura bosónica ultraligera (*FDM*), que debido a su longitud de onda de de Broglie macroscópica puede modelarse mediante una ecuación de onda no lineal, permitiendo describir su evolución como un gas de bosones a través del sistema de Schrödinger-Poisson. Esta característica introduce efectos cuánticos a escalas astrofísicas, dando lugar a estructuras con propiedades distintas a las predichas por *CDM*, como núcleos solitónicos en halos galácticos y la supresión de la fragmentación a escalas pequeñas. El estudio detallado de estas ecuaciones resulta crucial para comprender la dinámica de la materia oscura y evaluar sus posibles manifestaciones observacionales en la formación y evolución de galaxias.

SECCIÓN 2.2

Materia Oscura

Un Condensado de Bose-Einstein (*BEC*, por sus siglas en inglés) es un gas cuántico formado por bosones, que son partículas de espín entero múltiplo de la constante de Planck reducida \hbar [56]. Estas partículas, cuando se enfrían a temperaturas cercanas al cero absoluto, ocupan el mismo estado cuántico fundamental, lo que da lugar a un fenómeno macroscópico en el que las propiedades cuánticas se manifiestan a escalas macroscópicas. En este estado, todas las partículas que forman el gas se encuentran en la misma fase cuántica, y se describen mediante una única función de onda colectiva $\Psi(t, \vec{x})$, conocida como el parámetro de orden, que representa el comportamiento global del sistema.

La dinámica de un *BEC* está regida por la ecuación de Gross-Pitaevskii (GP), una ecuación diferencial parcial no lineal que describe la evolución temporal de la función de onda $\Psi(t, \vec{x})$. Esta ecuación se expresa como:

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m_B}\nabla^2\Psi + m_B V\Psi + g|\Psi|^2\Psi, \quad (2.10)$$

donde $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m_B$ es el coeficiente no lineal que describe la interacción entre los bosones, a_s es la longitud de dispersión entre pares de bosones, m_B es la masa del bosón, y V es el potencial externo que actúa como una trampa que confina al gas de bosones, ayudando a mantener atrapado el gas. La ecuación de GP es fundamental en la descripción de sistemas bosónicos ultrafríos y se usa extensamente en la investigación de condensados, donde las interacciones entre partículas pueden ser de diferentes tipos, dependiendo de los valores de a_s [57]. Este fenómeno fue observado por primera vez en un gas de Rubidio a temperaturas extremadamente bajas [58].

El modelo de *BEC* de Materia Oscura (*BECDM*, por sus siglas en inglés) postula que la materia oscura está compuesta por partículas bosónicas de espín cero que, bajo condiciones adecuadas, forman un *BEC* [59]. En este modelo, la naturaleza cuántica de la materia oscura puede explicarse como un condensado bosónico que se distribuye a gran escala en el universo. En el caso del *BECDM*, el potencial externo que confina el gas de bosones no es impuesto externamente, sino que es autogenerado por la propia densidad de materia del ensamble. Esta interacción autogenerada se describe mediante la ecuación de Poisson, que relaciona el potencial gravitacional con la distribución de materia [60]:

$$\nabla^2 V = 4\pi G m_B |\Psi|^2, \quad (2.11)$$

donde G es la constante gravitacional de Newton. Esta ecuación muestra cómo la distribución de masa del *BEC* de materia oscura genera el potencial gravitacional necesario para mantener atrapado el gas.

El modelo *BECDM* presenta dos parámetros fundamentales que no se conocen con exactitud: la masa del bosón m_B y la longitud de dispersión a_s de las interacciones entre los bosones. La longitud de dispersión a_s describe la fuerza de las interacciones entre las partículas del *BEC*, y la masa del bosón m_B determina las características cuánticas de la materia oscura. En muchos estudios, se asume que las interacciones entre los bosones son muy débiles, lo que implica que a_s podría ser pequeño o incluso cero.

En este modelo, se postula que los bosones son ultraligeros, con una masa del orden de 10^{-22} eV [7, 61, 62, 8]. Esta pequeña masa implica que la longitud de onda de De Broglie λ_{dB} asociada con los bosones es de varias decenas de parsecs, lo que impide la formación de estructuras de materia oscura a escalas más pequeñas que λ_{dB} . En este contexto, la materia oscura no tiene la capacidad de acumularse en estructuras densas. La longitud de onda de De Broglie, que influye en la estabilidad de las estructuras colapsadas, es una consecuencia directa de la naturaleza cuántica del sistema [63].

Una simplificación comúnmente utilizada es la suposición de que la interacción entre los bosones es despreciable, lo que implica $a_s = 0$. Este caso recibe el nombre de *FDM*.

El modelo *FDM* es, en efecto, una simplificación del modelo *BECDM*, donde se asume que $a_s = 0$. No obstante, en muchos estudios, ambos modelos se tratan de manera intercambiable cuando se considera la dinámica de la materia oscura difusa. La principal diferencia radica en la inclusión de las interacciones entre bosones, que en el caso del *FDM* se descartan.

En el marco del modelo *FDM*, las ecuaciones que gobiernan la dinámica de la materia oscura se reducen al sistema SP, el cual describe la evolución temporal de la función de onda Ψ y el potencial gravitacional V . Este sistema es una aproximación válida cuando las interacciones entre las partículas son mínimas. Existen dos enfoques clave para resolver este sistema, que se describen desde dos marcos diferentes de referencia descritos a continuación.

2.2.1 Marco de Schrödinger-Poisson

La dinámica de la *FDM* está gobernada por el sistema SP, que describe la interacción entre el parámetro de orden y el potencial gravitacional autoinducido por su propia distribución de densidad [64, 10, 22]. Las ecuaciones que rigen este sistema son:

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m_B}\nabla^2\Psi + m_B V\Psi, \quad (2.12)$$

$$\nabla^2 V = 4\pi G m_B (\rho_{FDM} - \epsilon \bar{\rho}_{FDM}), \quad (2.13)$$

donde $\Psi(t, \vec{x})$ es la función de onda que describe el estado del gas de bosones, m_B es la masa del bosón, y $\rho_{FDM} = m_B |\Psi|^2$ representa la densidad de masa del gas. El valor $\bar{\rho}_{FDM}$ es el promedio de la densidad en un cierto dominio espacial $D \subset \mathbb{R}^3$ dado por:

$$\bar{\rho}_{FDM} := \frac{1}{\int_D d^3x} \int_D \rho_{FDM} d^3x.$$

El parámetro ϵ toma el valor $\epsilon = 0$ si el gas se supone asilado y $\epsilon = 1$ en el que el PVI se resuelve en un dominio periódico. Al igual que las ecuaciones de Euler-Poisson (2.1-2.4), es necesario especificar el valor inicial de la función de onda:

$$\Psi(0, \vec{x}) = \Psi_0(\vec{x}),$$

y con esto basta para determinar V a $t = 0$.

Una característica clave del sistema es su invarianza ante el siguiente cambio de escala, lo que significa que las soluciones de las ecuaciones pueden ser escaladas sin alterar la forma general del comportamiento dinámico [65] cuando se aplica la transformación:

$$\{t, \vec{x}, \Psi, V\} \rightarrow \{\lambda^2 t, \lambda^{-1} \vec{x}, \lambda^2 \Psi, \lambda^2 V\}, \quad (2.14)$$

donde λ es un número real. Esta propiedad de invarianza de escala es útil y tiene varias implicaciones importantes:

- **Autosemejanza y escalabilidad física:** La invarianza bajo un cambio de escala implica que las soluciones del sistema pueden ser autosemejantes. Es decir, si se posee una solución para un conjunto de condiciones iniciales, es posible obtener una nueva solución para un sistema con diferentes escalas simplemente escalando el tiempo, el espacio y las funciones de onda y potencial. Esto es particularmente relevante en el contexto de la *FDM*, ya que permite estudiar el comportamiento del sistema a diferentes escalas sin necesidad de resolver el problema completo en cada una de ellas, lo cual facilita el análisis en una amplia gama de contextos físicos.

- **Conservación de propiedades globales:** La invarianza de escala asegura que ciertas propiedades globales del sistema, como la masa total o la energía, permanecen proporcionales a las escalas elegidas. Esto proporciona una comprensión más clara de cómo las propiedades globales del sistema varían cuando se modifican las características espaciales o temporales del mismo. Por ejemplo, la longitud de onda de De Broglie, que juega un papel fundamental en la *FDM*, puede cambiar dependiendo de la escala del sistema.

En resumen, la invarianza de escala del sistema Schrödinger-Poisson facilita tanto el análisis teórico como las simulaciones numéricas. Esta propiedad no solo permite estudiar el comportamiento del sistema en diferentes escalas, sino que también proporciona una herramienta poderosa para simplificar el tratamiento de sistemas complejos, asegurando que las propiedades globales y el comportamiento dinámico sean consistentes a través de las diversas escalas. Además, la invarianza de escala ofrece una visión más profunda sobre las propiedades fundamentales del sistema en múltiples niveles de análisis.

2.2.2 Marco de Madelung-Poisson

Una alternativa importante para expresar el sistema de SP es a través de la transformación de Madelung [66], la cual permite representar la función de onda como una combinación de una magnitud y una fase. Esta transformación se define de la siguiente manera:

$$\Psi = \sqrt{\rho_{FDM}/m_B} e^{iS/\hbar}, \quad (2.15)$$

donde $\rho_{FDM} = m_B |\Psi|^2$ es la densidad de materia del gas de bosones, y S representa la fase, que está relacionada con el momento del sistema. Al introducir esta transformación en el sistema de ecuaciones SP (2.12-2.13), se obtienen nuevas ecuaciones en términos de las variables macroscópicas, que simplifican en algunos escenarios el análisis físico y numérico del problema.

Para la parte imaginaria de las ecuaciones, se obtiene la ecuación de conservación de la densidad, que tiene la forma:

$$\partial_t \rho_{FDM} + \nabla \cdot \left(\rho_{FDM} \frac{\nabla S}{m_B} \right) = 0, \quad (2.16)$$

Esta ecuación expresa la conservación de la masa del gas de bosones, considerando que el flujo de la densidad está dado por el producto de la densidad ρ_{FDM} y el gradiente de la fase

S , dividido por la masa del bosón m_B .

Por otro lado, la parte real del sistema da lugar a una ecuación que describe la evolución temporal de la fase S , la cual se presenta como:

$$\partial_t S + \frac{1}{2m_B} |\nabla S|^2 + m_B V + m_B Q = 0, \quad (2.17)$$

Aquí, V es el potencial gravitacional, y Q es el denominado potencial cuántico, el cual está definido como:

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m_B^2} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho_{FDM}}}{\sqrt{\rho_{FDM}}}, \quad (2.18)$$

El potencial cuántico Q puede interpretarse como una corrección cuántica a la dinámica del gas, que surge debido a los efectos de interferencia y dispersión de la función de onda [67]. De manera equivalente, el gradiente del potencial cuántico se puede escribir como:

$$\nabla Q = -\frac{1}{\rho_{FDM}} \nabla \cdot \mathbf{p}_Q, \quad (2.19)$$

donde \mathbf{p}_Q es el tensor de presión cuántico, que se define como:

$$\mathbf{p}_Q = -\left(\frac{\hbar}{2m_B}\right)^2 \nabla \otimes \nabla \ln \rho_{FDM}. \quad (2.20)$$

Este tensor describe las fuerzas cuánticas que actúan sobre el sistema debido a las fluctuaciones en la densidad.

Si tomamos el gradiente de la ecuación que describe la evolución de la fase S (2.17) y definimos el campo de velocidad como $\vec{v} = \nabla S / m_B$, entonces podemos reescribir las ecuaciones de conservación de la masa, la conservación del momento y la ecuación de Poisson del sistema Schrödinger-Poisson en el marco de Madelung-Poisson (MP) de la siguiente manera:

$$\partial_t \rho_{FDM} + \nabla \cdot (\rho_{FDM} \vec{v}) = 0, \quad (2.21)$$

$$\partial_t (\rho_{FDM} \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho_{FDM} \vec{v} \otimes \vec{v} + \mathbf{p}_Q) = -\rho_{FDM} \nabla V, \quad (2.22)$$

$$\nabla^2 V = 4\pi G (\rho_{FDM} - \epsilon \bar{\rho}_{FDM}). \quad (2.23)$$

De esta forma, podemos observar que el sistema de ecuaciones (2.21-2.23) es equivalente al sistema de Euler acoplado a la ecuación de Poisson, lo que lo convierte en un sistema hidrodinámico cuántico [64]. Este sistema es conocido como el marco de Madelung-Poisson (MP), y proporciona una descripción más accesible y física del comportamiento del gas de bosones, utilizando variables macroscópicas como la densidad ρ_{FDM} y el campo de velocidades \vec{v} .

En este marco, es más sencillo entender la dinámica del gas de bosones, ya que se puede interpretar el comportamiento del sistema en términos de las propiedades macroscópicas de fluido. Además, este formalismo permite una mayor claridad a la hora de analizar las interacciones y la evolución del gas de bosones a lo largo del tiempo. Esto resulta de gran utilidad tanto en el análisis teórico como en la simulación numérica de la dinámica de la materia oscura bosónica y otros sistemas cuánticos de partículas.

SECCIÓN 2.3

Acoplamiento Materia Visible y Materia Oscura

En los modelos anteriores, hemos tratado tanto el modelo de materia visible como el modelo de materia oscura como dos componentes independientes, cada una con su propia dinámica. Sin embargo, un aspecto fundamental que debemos considerar es la interacción gravitacional entre estas dos formas de materia. Dado que la materia oscura no interactúa directamente con el espectro electromagnético, no puede ser observada a través de los medios tradicionales de la astronomía, como la radiación electromagnética [50]. Sin embargo, se sabe que la materia oscura ejerce una influencia gravitacional significativa sobre la materia visible, afectando la evolución y distribución de las galaxias y otras estructuras astrofísicas.

En este contexto, la materia oscura y la materia visible deben ser consideradas como un sistema acoplado que interactúa únicamente a través de la gravedad [68]. Por lo tanto, el modelo adecuado para describir la dinámica de este sistema es el sistema acoplado de ecuaciones Schrödinger-Poisson-Euler (SPE), que modela tanto el comportamiento de la materia visible, representada generalmente por un fluido de gas ideal, como la materia oscura, descrita por una función de onda asociada a partículas bosónicas. Este sistema de ecuaciones incorpora las interacciones gravitacionales entre las dos especies de materia, permitiendo una descripción más completa de la dinámica galáctica.

El sistema completo de ecuaciones que rige la evolución del sistema acoplado es el siguiente:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.24)$$

$$\partial_t (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \mathbf{I}) = -\rho \nabla V, \quad (2.25)$$

$$\partial_t E + \nabla \cdot [\vec{v} (E + p)] = -\rho \vec{v} \cdot \nabla V, \quad (2.26)$$

$$p = p(\rho, e), \quad (2.27)$$

$$i\hbar \partial_t \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m_B} \nabla^2 \Psi + m_B V \Psi, \quad (2.28)$$

$$\nabla^2 V = 4\pi G (\rho_T - \epsilon \bar{\rho}_T), \quad (2.29)$$

donde $\rho_T = \rho + \rho_{FDM}$ es la densidad total y el resto de variables tienen la misma interpretación que hemos descrito anteriormente.

Una característica importante de este sistema es su invariancia bajo transformaciones de escala. Es decir, el sistema mantiene su forma funcional cuando se realiza un cambio de escala λ . Bajo este cambio, las variables del sistema se transforman de acuerdo con la siguiente regla:

$$\{t, \vec{x}, \rho, \vec{v}, e, p, \Psi, V\} \rightarrow \{\lambda^{-2}t, \lambda^{-1}\vec{x}, \lambda^4\rho, \lambda^{-1}\vec{v}, \lambda^{-2}e, \lambda^2p, \lambda^2\Psi, \lambda^2V\}, \quad (2.30)$$

Esta transformación afecta las distintas variables del sistema, lo que permite estudiar la evolución del sistema en diferentes escalas. En particular, la energía total $E = \rho(e + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2)$ se transforma como $E \rightarrow \lambda^2 E$, lo que implica que la energía total aumenta o disminuye con el cambio de escala. Este comportamiento es consistente con la forma de las ecuaciones de conservación de la energía y el momento.

Si cerramos el sistema mediante una ecuación de estado politrópica, la constante politrópica K debe transformarse de la siguiente manera:

$$K \rightarrow \lambda^{-2-4/n} K, \quad (2.31)$$

lo que asegura que la ecuación de estado siga siendo válida bajo transformaciones de escala. Este tipo de invariancia es útil para estudiar el comportamiento auto-similar de las estructuras a gran escala, como los halos de materia oscura, y permite hacer predicciones sobre cómo éstas estructuras evolucionan con el tiempo.

En resumen, el sistema SPE proporciona una herramienta poderosa para estudiar la interacción gravitacional entre la materia visible y oscura, permitiendo modelar fenómenos como la distribución conjunta de materia a escalas locales [69].

2.3.1 Diagnóstico

En cualquier sistema macroscópico, existen varias cantidades físicas fundamentales que deben ser diagnosticadas a lo largo de su evolución para caracterizar correctamente el estado del sistema. En la Tabla 2.1, se muestran las definiciones de diversas cantidades clave para la materia visible y la materia oscura difusa, incluyendo las masas $M_{\text{gas},FDM}$, las energías cinéticas $K_{\text{gas},FDM}$, las energías potenciales $W_{\text{gas},FDM}$, los momentos lineales $\vec{p}_{\text{gas},FDM}$, los momentos angulares $\vec{L}_{\text{gas},FDM}$ y la energía interna U_{gas} de la materia visible. Estas cantidades no solo nos proporcionan información sobre el estado dinámico del sistema, sino que también nos permiten evaluar la evolución temporal de la materia visible y oscura.

Además, a partir de estas definiciones, es posible calcular las energías totales de ambos componentes del sistema. La energía total de la materia visible está dada por $E_{\text{gas}} = K_{\text{gas}} + W_{\text{gas}} + U_{\text{gas}}$, mientras que la energía total de la materia oscura difusa se define como $E_{FDM} = K_{FDM} + W_{FDM}$. También se pueden calcular los factores de virialización, que ofrecen una medida de la relación entre las energías cinética, potencial e interna. Los factores de virialización están dados por $Q_{\text{gas}} = 2K_{\text{gas}} + W_{\text{gas}} + 3U_{\text{gas}}$ para el gas y $Q_{FDM} = 2K_{FDM} + W_{FDM}$ para la materia oscura difusa.

Estas cantidades de diagnóstico transforman bajo el cambio de escala λ de la siguiente manera:

$$\{M, K, W, \vec{p}, \vec{L}\} \rightarrow \{\lambda M, \lambda^3 K, \lambda^3 W, \lambda^2 \vec{p}, \lambda \vec{L}\}, \quad (2.32)$$

donde hemos omitido los subíndices que especifican si las cantidades corresponden al gas o a la materia oscura difusa (FDM).

2.3.2 Adimensionalización del Sistema

La transformación del sistema en un sistema de coordenadas adimensional garantiza la uniformidad de las unidades y evita problemas derivados de escalas dispares al realizar cálculos numéricos. Para lograrlo, realizamos las siguientes transformaciones: $\tilde{t} = tt_0$, $\tilde{\vec{x}} = \vec{x}x_0$, $\tilde{\rho} = \rho\rho_0$, $\tilde{\vec{v}} = \vec{v}v_0$, $\tilde{p} = pp_0$, $\tilde{V} = VV_0$, $\tilde{E} = EE_0$, $\tilde{e} = ee_0$, $\tilde{\Psi} = \Psi\Psi_0$, donde las variables sin tilde son adimensionales y se dice que son unidades de código, mientras que las que tienen tilde son físicas. Los factores de escala adecuados para el sistema GPP son:

Diagnóstico para el gas		Diagnóstico para la FDM	
M_{gas}	$= \int_D \rho d^3x$	M_{MO}	$= m_B \int_D \Psi ^2 d^3x$
K_{gas}	$= \frac{1}{2} \int_D \rho \vec{v} ^2 d^3x$	K_{FDM}	$= \frac{\hbar^2}{2m_B} \int_D \Psi^* \nabla^2 \Psi d^3x$
W_{gas}	$= \frac{1}{2} \int_D \rho V d^3x$	W_{FDM}	$= \frac{m_B}{2} \int_D \Psi^* V \Psi d^3x$
\vec{p}_{gas}	$= \int_D \rho \vec{v} d^3x$	\vec{p}_{FDM}	$= -i\hbar \int_D \Psi^* \nabla \Psi d^3x$
\vec{L}_{gas}	$= \int_D \rho \vec{x} \times \vec{v} d^3x$	\vec{L}_{FDM}	$= -i\hbar \int_D \Psi^* \vec{x} \times \nabla \Psi d^3x$
U_{gas}	$= \int_D \rho e d^3x$		

Cuadro 2.1: En la parte izquierda y derecha se muestra el diagnóstico para el gas y la materia oscura difusa, respectivamente. En ambos sistemas, M es la masa, K la energía cinética, W la energía potencial, \vec{p} el momento lineal y \vec{L} el momento angular. Por último, solo se tiene energía interna, U_{gas} , para el gas. Las cantidades de diagnóstico se miden en el dominio $D \subset \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
t_0 &= \frac{m_B x_0^2}{\hbar} \sim 5.096 \times 10^{-2} \left(\frac{m_{22}}{\lambda^2} \right) \text{ Gyr}, \\
v_0 &= \frac{\hbar}{m_B x_0} \sim 19.20 \left(\frac{m_{22}}{\lambda} \right) \text{ km/s}, \\
\rho_0 &= \frac{m_B x_0}{4\pi G m_B^2 x_0^4} \sim 6.820 \times 10^6 \left(\frac{\lambda^4}{m_{22}^2} \right) \text{ M}_\odot/\text{kpc}^3,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

el resto se puede calcular como $e_0 = V_0 = v_0^2$, $E_0 = p_0 = \rho_0 v_0^2$ y $\Psi_0 = \sqrt{\rho_0/m_B}$, y se definió el factor de escala de longitud $x_0 = \lambda^{-1} \text{ kpc}$ y la masa del bosón $m_B = m_{22} \times 10^{-22} \text{ eV}/c^2$.

De esta forma, el sistema posee efectivamente un único grado de libertad, que expresamos en términos de un factor de escala λ , equivalente a la transformación (2.30) y (2.32). Con estas nuevas variables, el sistema SPE puede reescribirse en unidades adimensionales como:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \tag{2.34}$$

$$\partial_t (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \mathbf{I}) = -\rho \nabla V, \tag{2.35}$$

$$\partial_t E + \nabla \cdot [\vec{v} (E + p)] = -\rho \vec{v} \cdot \nabla V, \tag{2.36}$$

$$p = p(\rho, e), \tag{2.37}$$

$$i \partial_t \Psi = -\frac{1}{2} \nabla^2 \Psi + V \Psi, \tag{2.38}$$

$$\nabla^2 V = \rho_T - \epsilon \bar{\rho}_T, \tag{2.39}$$

En general el PVI asociado al sistema (2.24-2.39) queda formulado especificando las condiciones de frontera y las condiciones iniciales para las variables $\{\rho, \vec{v}, e, \Psi\}$ del sistema SPE.

Capítulo 3

Métodos Numéricos

La solución del sistema SPE (2.34-2.39) se plantea como un Problema de Valores Iniciales (PVI) de evolución restringida. En este sistema, las ecuaciones de Euler y Schrödinger describen la dinámica de las variables macroscópicas del fluido y del parámetro de orden, respectivamente, mientras que la ecuación de Poisson impone una restricción que debe satisfacerse en cada instante de tiempo.

El dominio de integración se define como $[0, t_f] \times D$, donde $D = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}]$, y se discretiza en una malla uniforme de tamaño finito:

$$D^d = \{(x_i, y_j, z_k) \in D\}$$

con

$$x_i = x_{\min} + i\Delta x, \quad y_j = y_{\min} + j\Delta y, \quad z_k = z_{\min} + k\Delta z,$$

para $i = 0, \dots, N_x - 1$, $j = 0, \dots, N_y - 1$, $k = 0, \dots, N_z - 1$. Las resoluciones espaciales están dadas por

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N_x}, \quad \Delta y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{N_y}, \quad \Delta z = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{N_z},$$

y, para simplificar la implementación numérica, se adopta $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$. La discretización temporal se define como el conjunto discreto $t^n = n\Delta t$ con

$$\Delta t = Ch^2,$$

donde C es un factor CFL cuyo valor regula la estabilidad del esquema numérico.

Dada la naturaleza del sistema SPE, se emplean distintos métodos numéricos según la ecuación a resolver. En particular, la ecuación de Schrödinger y la ecuación de Poisson se resuelven mediante métodos pseudoespectrales, descritos en la Sección 3.1, mientras que las ecuaciones de Euler se discretizan con esquemas de volúmenes finitos, abordados en la Sección 3.2. Finalmente, en la Sección 3.3 se detalla la implementación computacional, incluyendo estrategias de paralelización y manejo de datos.

SECCIÓN 3.1

Métodos Pseudoespectrales

Los métodos numéricos pseudo-espectrales son una herramienta poderosa para resolver EDPs [70], combinando las ventajas de los métodos espectrales con la eficiencia computacional de los métodos basados en transformadas rápidas. A diferencia de los métodos espectrales tradicionales, en los cuales las derivadas se calculan directamente en el espacio espectral, los métodos pseudo-espectrales realizan la transformación al espacio de Fourier para aprovechar la convergencia exponencial, pero evalúan las funciones y sus derivadas en puntos físicos distribuidos en el dominio.

3.1.1 Transformada Discreta de Fourier

En esta sección, describimos la aproximación de la transformada de Fourier, comenzando con el caso unidimensional y extendiendo el método a dimensiones superiores. Estas aproximaciones se basan en definir funciones sobre un dominio discreto y encontrar representaciones aritméticas de los operadores de Fourier en dicho dominio. Antes de adentrarnos en la aplicación práctica, es fundamental introducir un teorema clave en la teoría de señales: el teorema de muestreo.

Teorema de Muestreo y sus Implicaciones

Consideremos una función continua $p(t)$ muestreada en intervalos regulares de longitud Δt . Si su transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{p(t)\} := \hat{p}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{2\pi i f t} dt, \quad (3.1)$$

tiene un ancho de banda finito, es decir, que $\hat{p}(f) = 0$ para frecuencias $|f| \geq f_c$, donde $f_c = \frac{1}{2\Delta t}$ es la frecuencia de Nyquist, entonces la función $p(t)$ está completamente determinada por sus valores muestreados $p_n = p(t_n)$, con $t_n = n\Delta t$ para $n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$. En este caso, $p(t)$ se puede reconstruir exactamente a partir de sus muestras mediante la siguiente fórmula de interpolación:

$$p(t) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \frac{\sin[2\pi f_c(t - n\Delta t)]}{\pi(t - n\Delta t)}. \quad (3.2)$$

La demostración de este resultado involucra la transformada de Fourier tanto de la función peine de Dirac como de la función rectángulo. Aunque no nos centraremos en la demostración detallada aquí, discutiremos las implicaciones clave de este teorema para las señales muestreadas.

En primer lugar, cualquier función que se construya a partir de muestras discretas tomadas en intervalos regulares Δt tendrá un espectro de Fourier limitado al ancho de banda $|f| < f_c$. En segundo lugar, si el intervalo de muestreo Δt es demasiado grande, ocurrirá un fenómeno conocido como aliasing. El aliasing provoca que las frecuencias superiores a la frecuencia de Nyquist se representen incorrectamente, moviéndose falsamente al intervalo $|f| < f_c$, lo que genera distorsión en la señal muestreada.

Teniendo esto en cuenta, cualquier método numérico u observación basado en una muestra finita de una función solo podrá capturar un espectro limitado de frecuencias. Como consecuencia, puede fallar en detectar frecuencias de interés fuera de este espectro. Una estrategia para mitigar el aliasing es usar conjuntos múltiples de muestras con intervalos más pequeños, asegurando que las señales se muestreen de manera consistente y que las frecuencias altas se representen con precisión.

Con esta comprensión, estamos ahora preparados para aplicar una versión discreta de la transformada de Fourier (3.1).

Transformada Discreta de Fourier en 1D

Para construir la versión discreta de la transformada de Fourier (TF), comenzamos definiendo un dominio discreto y finito:

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.3)$$

donde N es el número de puntos en la malla, y la función $p(t)$ evaluada en estos puntos se denota como p_n . De esta manera, la integral en la ecuación (3.1) se puede aproximar mediante una suma de Riemann:

$$\hat{p}(f) \approx \sum_{j=0}^{N-1} p_j e^{2\pi i f j \Delta t} \Delta t. \quad (3.4)$$

A continuación, para establecer una correspondencia entre los dominios temporal y frecuencial, definimos un dominio discreto de frecuencias, en lugar de tratar f como continuo:

$$f_k = \frac{k}{N\Delta t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.5)$$

donde la transformada de Fourier se evalúa en los puntos f_k , es decir, $\hat{p}_k = \hat{p}(f_k)$. En consecuencia, la transformada de Fourier toma la forma:

$$\hat{p}_k = \sum_{j=0}^{N-1} p_j e^{2\pi i j k / N} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (3.6)$$

De este modo, la Transformada Discreta de Fourier (*DFT*, por sus siglas en inglés) de la función discreta $\vec{p} = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_{N-1})^T$ se define como:

$$P_k = \sum_{j=0}^{N-1} p_j \omega_N^{jk}, \quad (3.7)$$

donde $\omega_N := e^{2\pi i / N}$. Esto es equivalente a la expresión matricial:

$$\vec{P} = \text{DFT}(\vec{p}) := \mathbf{W}\vec{p}, \quad (3.8)$$

donde la matriz \mathbf{W} se define como:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \omega_N^{0 \cdot 0} & \omega_N^{0 \cdot 1} & \cdots & \omega_N^{0 \cdot (N-1)} \\ \omega_N^{1 \cdot 0} & \omega_N^{1 \cdot 1} & \cdots & \omega_N^{1 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_N^{(N-1) \cdot 0} & \omega_N^{(N-1) \cdot 1} & \cdots & \omega_N^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

De estas formulaciones se derivan dos propiedades importantes de la *DFT*:

1. La *DFT* es periódica, es decir, $P_{k+N} = P_k$.
2. La inversa de la matriz \mathbf{W} está dada por $\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{W}^\dagger$, donde \mathbf{W}^\dagger es la transpuesta conjugada de \mathbf{W} .

La segunda propiedad nos permite recuperar la función original a partir de sus componentes de Fourier mediante la *DFT* inversa (*iDFT*, por sus siglas en inglés):

$$p_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P_k \omega_N^{-jk}, \quad (3.10)$$

o, de forma equivalente, en notación matricial:

$$\vec{p} = \text{iDFT}(\vec{P}) := \frac{1}{N} \text{DFT}(\vec{P}^*)^* = \frac{1}{N} \mathbf{W}^\dagger \vec{P}, \quad (3.11)$$

donde el símbolo $*$ denota el conjugado complejo. Es importante señalar que el cálculo directo de la *DFT* requiere $\mathcal{O}(N^2)$ operaciones, lo cual puede ser costoso en términos computacionales. Sin embargo, Danielson y Lanczos desarrollaron un algoritmo más eficiente, conocido como la Transformada Rápida de Fourier (*FFT*, por sus siglas en inglés), que reduce significativamente el costo computacional [71].

Transformada Rápida de Fourier

Dado un conjunto de datos p_j , donde $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ y suponiendo que N es par, la *DFT* P_k se puede expresar como la suma de dos *DFTs*, cada una de longitud $N/2$:

$$\begin{aligned} P_k &= \sum_{j=0}^{N/2-1} p_{2j} \omega_N^{(2j)k} + \sum_{j=0}^{N/2-1} p_{2j+1} \omega_N^{(2j+1)k} \\ &= \sum_{j=0}^{N/2-1} p_{2j} \omega_{N/2}^{jk} + \sum_{j=0}^{N/2-1} p_{2j+1} \omega_{N/2}^{jk} \omega_N^k. \end{aligned}$$

Aquí, ω_N^k es independiente de j , por lo que se puede factorizar fuera de la segunda suma. Así, podemos reescribir la ecuación como:

$$P_k = P_k^P + \omega_N^k P_k^I, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1, \quad (3.12)$$

donde P_k^P y P_k^I representan las *DFTs* de los componentes pares e impares de la secuencia, respectivamente. En esta descomposición, k toma $N/2$ valores tanto para las transformadas pares como para las impares, lo que reduce efectivamente el problema original en dos *DFTs* más pequeñas.

Para estas *DFTs* más pequeñas, se aplican las siguientes condiciones de periodicidad:

$$\begin{aligned} P_{k+N/2}^P &= P_k^P, \\ P_{k+N/2}^I &= P_k^I. \end{aligned}$$

Además, el factor ω_N^k cumple con la siguiente identidad importante:

$$\omega_N^{k+N/2} = -\omega_N^k. \quad (3.13)$$

Los $N/2$ términos restantes se pueden calcular utilizando:

$$P_{k+N/2} = P_k^P - \omega_N^k P_k^I, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1. \quad (3.14)$$

Este proceso reduce la complejidad computacional de $\mathcal{O}(N^2)$ en el caso de una *DFT* directa a $\mathcal{O}(N \log N)$, haciendo que la *FFT* sea mucho más eficiente para valores grandes de N .

Transformada Rápida de Fourier en 3D

La *FFT* en tres dimensiones extiende el concepto de la *FFT* en 1D para datos tridimensionales. El principio básico sigue siendo el mismo: descomponer el cálculo de la *DFT* en operaciones más pequeñas y eficientes, lo que permite reducir la complejidad computacional para datos en un volumen.

Dado un conjunto tridimensional de datos $p_{i,j,k} = p(x_i, y_j, z_k)$ los cuales denotan los valores de la función $p : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en el dominio discreto D^d , la *DFT* tridimensional $P_{l,m,n}$ se puede escribir como la suma de tres transformadas de Fourier unidimensionales aplicadas a lo largo de cada eje x , y , y z :

$$P_{l,m,n} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} p_{i,j,k} \omega_N^{(il+jm+kn)}, \quad (3.15)$$

donde $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$ es el factor de peso. Para simplificar este cálculo y aprovechar la eficiencia de la *FFT*, se realiza en tres pasos:

1. Primero se calcula una *FFT* 1D a lo largo de la dirección x para cada par de y y z fijos:

$$P_{l,j,k} = \sum_{i=0}^{N-1} p_{i,j,k} \omega_N^{il}.$$

2. Luego, se calcula una *FFT* 1D a lo largo de la dirección y para cada par de x y z fijos:

$$P_{l,m,k} = \sum_{j=0}^{N-1} P_{l,j,k} \omega_N^{jm}.$$

3. Finalmente, se realiza una *FFT* 1D a lo largo de la dirección z para cada par de x y y fijos:

$$P_{l,m,n} = \sum_{k=0}^{N-1} P_{l,m,k} \omega_N^{kn}.$$

Este enfoque divide el problema tridimensional en tres problemas unidimensionales consecutivos, lo que permite aprovechar la estructura eficiente de la *FFT* en cada dimensión. La

implementación de la *FFT* en 3D puede ser especialmente útil para el análisis de datos definidos en dominios que corresponden a paralelepípedos rectangulares en campos como la física, la astronomía y la simulación de fluidos.

Además, la *FFT* en 3D también conserva la periodicidad en las tres direcciones espaciales, por lo que es adecuada para sistemas de ecuaciones definidos en dominios periódicos. Esto es particularmente útil en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, como en la ecuación de Schrödinger o en la simulación de flujos de fluidos incomprensibles en este trabajo.

En resumen, los métodos pseudo-espectrales con *FFT* representan una herramienta eficiente y precisa para resolver EDPs en dominios periódicos, aprovechando la estructura espectral del problema para mejorar tanto la precisión como el rendimiento computacional. Cuando se presentan otro tipo de condiciones de frontera como lo son de Dirichlet o Neumann, es posible redefinir este concepto para seguir aprovechando la eficiencia de la *FFT*.

3.1.2 Transformadas Discretas del Seno y Coseno de Fourier usando FFT

La Transformada Discreta del Seno (*DST*, por sus siglas en inglés) y la Transformada Discreta del Coseno (*DCT*, por sus siglas en inglés) son versiones modificadas de la TF, utilizadas para descomponer señales en componentes sinusoidales (seno y coseno, respectivamente). A diferencia de la TF tradicional, que utiliza funciones exponenciales complejas, tanto la *DST* como la *DCT* emplean funciones seno y coseno como elementos base, lo que las hace especialmente útiles en ciertos tipos de problemas que involucran condiciones de frontera específicas.

Transformada Discreta del Seno (*DST*)

La *DST* es ideal para situaciones en las que la función que estamos analizando cumple con condiciones de frontera de *Dirichlet*, es decir, donde la función se anula en los extremos del intervalo, como es el caso de una cuerda vibrante con ambos extremos fijos. En este contexto, la señal se puede extender de forma *impar*, lo que hace que se use la función seno, ya que el seno tiene la propiedad de ser impar.

La *DST* descompone una señal en componentes sinusoidales de la forma:

$$p(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right).$$

Para calcular la *DST* usando la *FFT*, se extiende la señal original de forma impar. Es decir, se duplican los datos originales de forma que los valores a la derecha del final del intervalo original son negativos y reflejan los valores a la izquierda. Luego, se calcula la *FFT* de esta señal extendida, y finalmente, se toma la parte imaginaria del resultado para obtener la *DST*:

$$\tilde{p}_k = \begin{cases} p_k, & \text{si } 0 \leq k < N, \\ -p_{2N-k-1}, & \text{si } N \leq k < 2N. \end{cases}$$

$$P_k = FFT(\tilde{p})_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$DST(p)_k = \text{Im}(P_k).$$

Transformada Discreta del Coseno (*DCT*)

Por otro lado, la *DCT* es más adecuada cuando la función cumple con condiciones de frontera de *Neumann*, es decir, donde la derivada de la función se anula en los extremos del intervalo. Esta es una situación común en problemas donde la solución debe ser continua en los bordes.

La *DCT* descompone la señal en componentes cosenoidales, que son funciones pares:

$$p(t) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right).$$

Para implementar la *DCT* utilizando la *FFT*, la señal se extiende de manera *par*. Es decir, los valores a la derecha del final del intervalo original son una copia de los valores originales reflejados. Después, se calcula la *FFT* de la señal extendida y se toma la parte real del resultado para obtener la *DCT*:

$$\tilde{p}_k = \begin{cases} p_k, & \text{si } 0 \leq k < N, \\ p_{2N-k-1}, & \text{si } N \leq k < 2N. \end{cases}$$

$$P_k = FFT(\tilde{p})_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$DCT(p)_k = \text{Re}(P_k).$$

Estos enfoques permiten utilizar la eficiencia de la *FFT* para realizar transformadas de seno y coseno sin tener que implementar directamente las transformadas discretas.

3.1.3 Solución de la ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson en tres dimensiones se expresa como:

$$\nabla^2 V = \rho_T, \quad \vec{x} = (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3, \quad (3.16)$$

donde V es el potencial gravitacional y ρ_T es la densidad total que genera el potencial. Esta ecuación puede resolverse aplicando condiciones de frontera apropiadas en ∂D . Para abordar la ecuación de Poisson en el espacio de Fourier, aplicamos la transformada de Fourier, denotada por \mathcal{F} , obteniendo:

$$-\omega^2 \mathcal{F}\{V\} = \mathcal{F}\{\rho_T\}, \quad (3.17)$$

donde $\omega^2 = \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}$ con $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ es el vector de frecuencias espaciales. Esta expresión surge de la propiedad de diferenciación de la transformada de Fourier, que establece:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^k V}{\partial x_i^k}\right\} = (-i\omega_i)^k \mathcal{F}\{V\}.$$

Para calcular la transformada de Fourier de V , es fundamental garantizar que se cumplan ciertas condiciones. En particular, es crucial que la función fuente ρ_T sea regular. En los métodos numéricos empleados, es necesario que $\mathcal{F}\{V\}(\omega = 0)$ sea finita. Esta condición implica que el lado izquierdo de la ecuación (3.17) debe anularse, lo que lleva a la conclusión de que el lado derecho también debe ser cero.

Con el fin de cumplir esta condición, introducimos una nueva función:

$$g = \rho_T - \bar{\rho}_T,$$

donde $\bar{\rho}_T$ representa el valor medio de la densidad fuente ρ_T sobre el dominio D , definido como:

$$\bar{\rho}_T = \frac{1}{\int_D d^3x} \int_D \rho_T(t, \vec{x}) d^3x, \quad (3.18)$$

siendo $\int_D d^3x$ el volumen del dominio D . Así, podemos reformular la ecuación de Poisson como:

$$\nabla^2 V = \rho_T - \bar{\rho}_T. \quad (3.19)$$

La solución de esta ecuación puede escribirse como:

$$V = \mathcal{F}^{-1} \left\{ -\frac{\mathcal{F}\{\rho_T - \bar{\rho}_T\}}{\omega^2} \right\}, \quad (3.20)$$

Sin embargo, esta expresión solo puede calcularse de manera exacta en situaciones particulares. En aplicaciones prácticas, reemplazamos el operador de Fourier \mathcal{F} por la *FFT* en el caso de condiciones de frontera periódicas, o por los operadores *DST* o *DCT* si las condiciones de frontera son de tipo Dirichlet o Neumann, respectivamente.

Es importante notar que el uso de la *DST* implica que el potencial gravitacional se anule en la frontera del dominio D . Si deseamos imponer otro tipo de condiciones de frontera, planteamos el problema de la siguiente manera:

$$\nabla^2 V(\vec{x}) = g(\vec{x}), \quad \vec{x} \in D, \quad (3.21)$$

$$V(\vec{x}) = V_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \partial D. \quad (3.22)$$

Para aplicar correctamente la *DST*, reescribimos este problema en términos de la variable $u = V - V_0$, que satisface:

$$\nabla^2 u(\vec{x}) = g(\vec{x}) - g_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in D, \quad (3.23)$$

$$u(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \partial D, \quad (3.24)$$

donde $g_0 = \nabla^2 V_0$. Resolver este nuevo problema es adecuado para la aplicación de la *DST*, y una vez solucionado, podemos recuperar el potencial original mediante $V = u + V_0$. En nuestro caso particular, imponemos condiciones de frontera monopulares, es decir, $V_0 \sim -\frac{M}{4\pi r}$. Sin embargo, este potencial es inapropiado numéricamente debido a que diverge en el origen. Para evitar este inconveniente, lo reemplazamos por un potencial regularizado:

$$V_0 = -\frac{M}{4\pi\sqrt{r^2 + \epsilon^2}},$$

donde elegimos el parámetro $\epsilon = 3h$, siendo h la resolución del dominio discreto. Entonces, el término g_0 se expresa como:

$$g_0 = \frac{3M\epsilon^2}{(r^2 + \epsilon^2)^{5/2}}.$$

Con esta formulación, hemos establecido los pasos necesarios para resolver numéricamente la ecuación de Poisson en el sistema SPE (2.24-2.29). A continuación, procederemos a describir los métodos empleados para la evolución del parámetro de orden Ψ .

3.1.4 Solución de la ecuación de Schrödinger

La evolución temporal del parámetro obedece la ecuación de Schrödinger:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi, \quad (3.25)$$

donde $\hat{H} = -\frac{1}{2}\nabla^2 + V$ es el operador Hamiltoniano, $\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$ es el operador laplaciano en coordenadas cartesianas (x, y, z) y V es el potencial gravitacional. Para abordar numéricamente la evolución de Ψ , es necesario discretizar el operador \hat{H} en el espacio D^d y el tiempo t^n , lo que nos permitirá implementar diferentes métodos de solución.

Métodos Explícitos

Los métodos explícitos para la evolución de la ecuación de Schrödinger se destacan por su simplicidad y facilidad de implementación, lo que los hace particularmente atractivos para simulaciones numéricas. En este enfoque, la función de onda en el tiempo t^{n+1} se calcula

utilizando únicamente los valores de la función de onda en el tiempo anterior t^n . Esto se traduce en una formulación clara y directa del proceso de evolución.

Un método común para describir esta evolución se basa en el operador de evolución temporal, que está dado por $e^{-i\hat{H}t}$. Formalmente, la solución a la ecuación de Schrödinger para potenciales que no dependen del tiempo se escribe como

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{-i\hat{H}t}\Psi(\vec{x}, 0). \quad (3.26)$$

Sin embargo, es posible demostrar que para potenciales que dependen del tiempo es válida la aproximación [72]:

$$\Psi^{n+1} = e^{-i\hat{H}^n\Delta t}\Psi^n, \quad (3.27)$$

siendo Ψ^n y Ψ^{n+1} las función de onda evaluada en los tiempos t^n y t^{n+1} , respectivamente y \hat{H}^n el Hamiltoniano al tiempo t^n . Calcular el operador de evolución temporal $e^{-i\hat{H}^n\Delta t}$ de manera directa puede ser complicado, especialmente para Hamiltonianos que involucran términos no triviales. Para facilitar este cálculo, se puede hacer una aproximación mediante la descomposición del operador en dos partes: el término cinético y el término potencial. Esto permite escribir:

$$\Psi^{n+1} = e^{i\nabla^2\Delta t/2}e^{-iV^n\Delta t}\Psi^n + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad (3.28)$$

Aquí, Ψ^n y Ψ^{n+1} representan a las funciones de onda al tiempo t^n y $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, respectivamente, mientras que V^n representa el potencial y ∇^2 es el operador laplaciano que corresponde a la parte cinética del Hamiltoniano al tiempo t^n en todo punto $(x_i, y_j, z_k) \in D^d$. La expresión anterior implica que primero se aplica el operador de potencial $e^{-iV^n\Delta t}$, seguido del operador cinético $e^{i\nabla^2\Delta t/2}$. Esta estrategia, conocida como *split-step*, permite realizar el cálculo en el espacio de Fourier, lo cual es computacionalmente eficiente, y se describe en detalle como:

$$\begin{aligned} \Psi^{n+a} &= e^{-iV^n\Delta t}\Psi^n, \\ \Psi^{n+1} &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-i(2\pi k)^2/2} \mathcal{F}(\Psi^{n+a}) \right\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde $k^2 = \vec{k} \cdot \vec{k}$ es el número de onda.

Otra variante de esta clase de métodos es el *strang splitting*. El principio fundamental consiste en descomponer el operador de evolución temporal $e^{-i\hat{H}^n \Delta t}$ en tres partes: potencial-cinética-potencial. Esta descomposición permite aplicar el operador de manera secuencial y aprovechar las propiedades de cada parte.

Formalmente, el operador se puede expresar como:

$$e^{-i\hat{H}^n \Delta t} = e^{-iV^n \Delta t/2} e^{i\nabla^2 \Delta t/2} e^{-iV^n \Delta t/2} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad (3.30)$$

y se describe en detalle como:

$$\begin{aligned} \Psi^{n+a} &= e^{-iV^n \Delta t/2} \Psi^n, \\ \Psi^{n+b} &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-i(2\pi k)^2/2} \mathcal{F}(\Psi^{n+a}) \right\} \\ \Psi^{n+1} &= e^{-iV^n \Delta t/2} \Psi^{n+b}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

La ventaja de estas aproximaciones es que, al descomponer el operador de evolución, se puede aplicar el potencial y el término cinético de manera más manejable, lo que lleva a una mejora en la estabilidad y precisión del método. Sin embargo, es importante notar que estas aproximaciones introducen un error de orden $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, lo que significa que el error se reduce cuadráticamente a medida que disminuye el tamaño del paso de tiempo.

En resumen, los métodos explícitos ofrecen un enfoque intuitivo y eficiente para la evolución temporal de la ecuación de Schrödinger, siendo ampliamente utilizados en simulaciones numéricas donde se requiere una rápida implementación y un cálculo directo de la función de onda.

A pesar de su simplicidad y facilidad de implementación, los métodos explícitos para la evolución de la ecuación de Schrödinger presentan varias desventajas:

1. **Estabilidad Condicional:** Los métodos explícitos son generalmente inestables para ciertos tamaños de paso de tiempo. La estabilidad del método depende del tamaño de Δt en relación con las características del sistema. Si Δt es demasiado grande, pueden surgir oscilaciones no físicas o el método puede diverger.
2. **Acumulación de Errores:** A medida que se avanza en el tiempo, los errores numéricos se acumulan, afectando la precisión de la solución conforme avanza el tiempo. Esto puede ser particularmente problemático en simulaciones a largo plazo.

En general, aunque los métodos explícitos son intuitivos y fáciles de implementar, sus limitaciones en estabilidad y eficiencia pueden hacer que sean menos adecuados para ciertos

problemas en comparación con métodos implícitos, que, aunque más complejos, a menudo son más estables y permiten pasos de tiempo más grandes.

Métodos Implícitos

Los métodos implícitos, en contraste con los explícitos, calculan la función de onda en el tiempo t^{n+1} utilizando también valores en el tiempo t^{n+1} . Esto implica la resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas en cada paso de tiempo, lo que puede aumentar significativamente el costo computacional. Sin embargo, estos métodos son más estables y permiten elegir pasos de tiempo más grandes sin comprometer la precisión.

Un ejemplo de un esquema implícito es el método de Crank-Nicolson, que se puede formular utilizando el operador de evolución temporal de la siguiente manera:

$$\Psi^{n+1/2} = e^{-i\hat{H}^n \Delta t/2} \Psi^n, \quad \text{o bien} \quad \Psi^{n+1/2} = e^{i\hat{H}^{n+1} \Delta t/2} \Psi^{n+1}. \quad (3.32)$$

Igualando estas dos expresiones, se obtiene:

$$e^{i\hat{H}^{n+1} \Delta t/2} \Psi^{n+1} = e^{-i\hat{H}^n \Delta t/2} \Psi^n. \quad (3.33)$$

Al realizar una expansión hasta segundo orden, se tiene lo siguiente:

$$\left(1 + i\frac{\Delta t}{2} \hat{H}^{n+1}\right) \Psi^{n+1} = \left(1 - i\frac{\Delta t}{2} \hat{H}^n\right) \Psi^n + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad (3.34)$$

que se puede reescribir como:

$$\Psi^{n+1} = \Psi^n - i\frac{\Delta t}{2} \left[\hat{H}^{n+1} \Psi^{n+1} + \hat{H}^n \Psi^n \right] + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (3.35)$$

Este enfoque combina la información del tiempo anterior y del futuro, proporcionando una excelente estabilidad y precisión en la evolución de la función de onda.

En particular, nosotros resolvemos esta ecuación (3.35) no lineal mediante el método de punto fijo. Para ello, denotamos el lado derecho como la función $g(\Psi^{n+1})$ y el método consiste en iterar según la relación:

$$\Psi_{k+1}^{n+1} = g(\Psi_k^{n+1}), \quad (3.36)$$

hasta que se cumpla la condición $\|\Psi_{k+1}^{n+1} - \Psi_k^{n+1}\|_2 < \epsilon$, donde $\|\cdot\|_2$ representa la norma 2. Comenzamos las iteraciones tomando $\Psi_0^{n+1} = \Psi^n$.

Con esto hemos descrito cómo resolver tanto la ecuación de Poisson como la ecuación de Schrödinger. Por lo tanto, para abordar la resolución del sistema completo (2.24-2.29), solo nos queda detallar los métodos numéricos necesarios para la resolución de las ecuaciones de Euler, los cuales se describen en la siguiente sección.

SECCIÓN 3.2

Métodos de Volúmenes Finitos

3.2.1 Análisis Característico de las Ecuaciones de Euler

El sistema de ecuaciones de Euler (2.34-2.36) puede expresarse en forma vectorial como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (3.37)$$

donde \mathbf{U} es un vector de variables conservadas, $\vec{\mathbf{F}} = (\mathbf{F}^x, \mathbf{F}^y, \mathbf{F}^z)$ representa los flujos conservativos y \mathbf{S} el vector de fuentes. Estos elementos se definen como:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v^x \\ \rho v^y \\ \rho v^z \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^i = \begin{pmatrix} \rho v^i \\ \rho v^i v^x + \delta_{ix} p \\ \rho v^i v^y + \delta_{iy} p \\ \rho v^i v^z + \delta_{iz} p \\ v^i (E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \partial_x V \\ -\rho \partial_y V \\ -\rho \partial_z V \\ -\rho \vec{v} \cdot \nabla V \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

donde $i \in \{x, y, z\}$ y δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Alternativamente, el sistema (3.37) se puede reescribir en forma matricial como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_i \mathbf{A}^i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (3.39)$$

donde las matrices $\mathbf{A}^i := \partial_{\mathbf{U}} \mathbf{F}^i$ son las matrices jacobianas de los flujos. Estas matrices son diagonalizables con valores propios dados por la matriz diagonal:

$$\mathbf{\Lambda}^i = \begin{pmatrix} v_i - c_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_i + c_s \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

y las matrices de eigenvectores derechos son:

$$\mathbf{R}^x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_x - c_s & v_x & 0 & 0 & v_x + c_s \\ v_y & v_y & 1 & 0 & v_y \\ v_z & v_z & 0 & 1 & v_z \\ H - v_x c_s & \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 & v_y & v_z & H + v_x c_s \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{R}^y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_x & v_x & 1 & 0 & v_x \\ v_y - c_s & v_y & 0 & 0 & v_y + c_s \\ v_z & v_z & 0 & 1 & v_z \\ H - v_y c_s & \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 & v_x & v_z & H + v_y c_s \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{R}^z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_x & v_x & 1 & 0 & v_x \\ v_y & v_y & 0 & 1 & v_y \\ v_z - c_s & v_z & 0 & 0 & v_z + c_s \\ H - v_z c_s & \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 & v_x & v_y & H + v_z c_s \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

donde $H = \frac{E+p}{\rho}$ es la entalpía total y $c_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial e}}$ es la velocidad local del sonido. Estas matrices satisfacen la relación de diagonalización:

$$\mathbf{A}^i = \mathbf{R}^i \mathbf{\Lambda}^i (\mathbf{R}^i)^{-1}. \quad (3.44)$$

Como resultado, el sistema de Euler es hiperbólico, ya que posee cinco valores característicos reales y un conjunto completo de eigenvectores linealmente independientes en cada dirección espacial, lo que garantiza que el PVI que obedece estas ecuaciones esté bien planteado [54].

3.2.2 Método HLLE

Los métodos numéricos basados en volúmenes finitos buscan resolver un problema algebraico basado en los valores promedio de las celdas dentro del dominio discreto D^d . Para ello, se define el volumen de control como

$$\Omega_{i,j,k} := [x_i - \Delta x/2, x_i + \Delta x/2] \times [y_j - \Delta y/2, y_j + \Delta y/2] \times [z_k - \Delta z/2, z_k + \Delta z/2], \quad (3.45)$$

el cual tiene un volumen $\Delta\Omega = \Delta x \Delta y \Delta z$. Al integrar el sistema de Euler (3.37) sobre el volumen de control y dividir por su volumen, se obtiene la siguiente forma discreta:

$$\frac{d\bar{U}_{i,j,k}}{dt} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^x - \mathbf{F}_{i-1/2,j,k}^x}{\Delta x} + \frac{\mathbf{F}_{i,j+1/2,k}^y - \mathbf{F}_{i,j-1/2,k}^y}{\Delta y} + \frac{\mathbf{F}_{i,j,k+1/2}^z - \mathbf{F}_{i,j,k-1/2}^z}{\Delta z} = \bar{S}_{i,j,k}, \quad (3.46)$$

donde se ha aplicado el teorema de la divergencia y se han definido los valores promediados de las funciones \mathbf{U} y \mathbf{S} en el volumen de control como:

$$\bar{U}_{i,j,k}(t) := \frac{1}{\Delta\Omega} \int_{\Omega_{i,j,k}} \mathbf{U}(t, \vec{x}) d^3x, \quad (3.47)$$

$$\bar{S}_{i,j,k}(t) := \frac{1}{\Delta\Omega} \int_{\Omega_{i,j,k}} \mathbf{S}(\mathbf{U}(t, \vec{x})) d^3x. \quad (3.48)$$

De manera análoga, los flujos en cada dirección se definen como

$$\mathbf{F}_{i\pm 1/2,j,k}^x := \mathbf{F}^x(\bar{\mathbf{U}}_{i\pm 1/2,j,k}), \quad (3.49)$$

y de forma similar para las demás direcciones. Para simplificar el cálculo, se asume que la fuente promedio se puede aproximar como $\bar{S}_{i,j,k} = \mathbf{S}(\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k})$.

El método HLLE reemplaza los flujos $\mathbf{F}_{i\pm 1/2,j,k}^x$ con flujos numéricos definidos por:

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^{x,\text{HLLE}} = \frac{\lambda_-^x \mathbf{F}^x(\bar{\mathbf{U}}_{i+1,j,k}) - \lambda_+^x \mathbf{F}^x(\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}) + \lambda_-^x \lambda_+^x (\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k} - \bar{\mathbf{U}}_{i+1,j,k})}{\lambda_+^x - \lambda_-^x}, \quad (3.50)$$

donde λ_{\pm}^x representan las velocidades características mínima y máxima del sistema, calculadas como:

$$\lambda_-^x = \min(0, \min(\Lambda_{i,j,k}^x)), \quad (3.51)$$

$$\lambda_+^x = \max(0, \max(\Lambda_{i,j,k}^x)). \quad (3.52)$$

Siguiendo este procedimiento en todas las direcciones, se obtiene la versión discreta del sistema:

$$\frac{d\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}}{dt} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^{x,\text{HLLE}} - \mathbf{F}_{i-1/2,j,k}^{x,\text{HLLE}}}{\Delta x} + \frac{\mathbf{F}_{i,j+1/2,k}^{y,\text{HLLE}} - \mathbf{F}_{i,j-1/2,k}^{y,\text{HLLE}}}{\Delta y} + \frac{\mathbf{F}_{i,j,k+1/2}^{z,\text{HLLE}} - \mathbf{F}_{i,j,k-1/2}^{z,\text{HLLE}}}{\Delta z} = \mathbf{S}(\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}), \quad (3.53)$$

el cual se resuelve numéricamente utilizando un método de Runge-Kutta explícito de tercer orden.

Para aproximar $\bar{\mathbf{U}}$ en el esquema de volúmenes finitos, se emplean técnicas de reconstrucción de flujos en las interfaces, como los esquemas de *Godunov* y *Minmod*.

El esquema de *Godunov* asume que \mathbf{U} es constante en cada volumen de control y calcula los flujos en las interfaces resolviendo un problema de Riemann entre celdas adyacentes. Este método es robusto pero limitado a precisión de primer orden.

El esquema *Minmod*, en cambio, emplea una reconstrucción lineal de \mathbf{U} dentro de cada celda para mejorar la precisión. Usa una interpolación limitada que previene oscilaciones no físicas y garantiza estabilidad. La función *Minmod* selecciona la pendiente más conservadora entre las opciones disponibles, proporcionando un esquema de primer orden en presencia de choques y de segundo orden en regiones suaves. En estas últimas, su precisión coincide con la de diferencias finitas de segundo orden [54].

Un comentario importante es que en las ecuaciones de Euler aparecen términos proporcionales a $1/\rho$, lo que implica que si la densidad se anula, pueden surgir problemas numéricos debi-

do a singularidades. Para evitar esto, se emplea un artificio numérico: el uso de una *atmósfera*, que consiste en imponer una densidad mínima que permea todo el dominio numérico. Para un ejemplo más detallado de esta técnica, puede consultarse el apéndice A.

SECCIÓN 3.3

Implementación Computacional

La implementación numérica se desarrolla en Fortran, empleando bibliotecas diseñadas desde cero, especializadas en el análisis de métodos espectrales y de volúmenes finitos. Además, se optimiza la gestión de datos mediante la biblioteca HDF5. Las simulaciones de prueba se ejecutan en arquitecturas paralelas, utilizando la biblioteca MPI para la paralelización, y se validan mediante la comparación con soluciones analíticas y otros métodos numéricos, incluidos los de diferencias finitas. La evolución de los sistemas físicos se visualiza con herramientas gráficas como GNUPlot, Matplotlib y VisIt. El resultado es el código **CAFE-FDM**, presentado en [69, 73]

Capítulo 4

Simulaciones de Materia Oscura Difusa

En este capítulo se presentan distintas simulaciones numéricas que modelan configuraciones de *FDM* cuya evolución obedece del sistema SP (2.12-2.13). Se abordan tanto soluciones estacionarias como dinámicas, explorando su estabilidad y comportamiento en distintos escenarios astrofísicos.

En la Sección 4.1 se analizan soluciones estacionarias de la materia oscura bosónica, incluyendo la formación de núcleos galácticos y el estudio de su estabilidad y atracción. Posteriormente, en la Sección 4.2 se investigan procesos dinámicos de fusión de estos núcleos galácticos, considerando sistemas binarios y configuraciones multinúcleo.

Finalmente, en la Sección 4.3 se estudian soluciones esféricas con estructura núcleo-halo con perfiles que describen la distribución de materia oscura en galaxias.

SECCIÓN 4.1

Núcleos galácticos

Los núcleos galácticos, comúnmente conocidos como estrellas de bosones Newtonianas, son soluciones cuántico-gravitacionales del sistema Schrödinger-Poisson que describen distribuciones estables de *FDM* que surgen de la evolución en la formación de estructura [11, 12, 13,

14, 16, 17, 18, 19].

Estas soluciones, caracterizadas por una densa concentración central de bosones, exhiben propiedades únicas de estabilidad, lo que las convierte en un excelente modelo para los centros de halos galácticos y otras estructuras cosmológicas. Además, aunque los núcleos pueden formarse a partir de configuraciones arbitrarias, su evolución muestra que tienden a ser asintóticamente, en promedio, **soluciones estacionarias** del sistema. Esto significa que, tras un periodo de relajación debido a interacciones gravitacionales y cuánticas, la estructura del núcleo converge hacia una configuración estable que es bien descrita por soluciones de equilibrio.

La **estabilidad** de estas configuraciones ha sido ampliamente estudiada y depende de la relación entre los efectos gravitacionales y cuánticos [37, 34, 43, 74, 75, 76, 69, 77, 78]. En particular, los núcleos galácticos en su estado fundamental, o solución de equilibrio, pueden resistir colapsos o dispersiones bajo ciertas condiciones iniciales de energía y masa.

Además, estos núcleos son **atractores** gravitacionales en el espacio de configuraciones, lo que significa que, bajo una variedad de perturbaciones externas o colisiones, tienden a evolucionar de manera natural hacia una configuración de equilibrio estable [22, 25, 23, 79, 80, 81]. Estos núcleos que emergen de forma natural en simulaciones de formación de estructura, en realidad, se aproximan al estado base del sistema en promedio espacial y temporal [73].

El interés en los núcleos galácticos no solo radica en su estabilidad, sino también en su rol potencial como unas de las primeras estructuras formadas en el universo primigenio. Se cree que estas configuraciones pudieron actuar como semillas gravitacionales, atrayendo y acumulando materia alrededor de ellas, lo que posteriormente llevaría a la formación de galaxias y otras estructuras a gran escala. En este sentido, la atracción de los núcleos galácticos sugiere que estos objetos desempeñan un papel clave en la evolución de la estructura cósmica.

4.1.1 Soluciones estacionarias

Las ecuaciones estacionarias del sistema SP (2.12-2.13) se construyen asumiendo que el parámetro de orden puede reescribirse como $\Psi(t, \vec{x}) = \psi(r)e^{-i\omega t}$, con ω un eigenvalor y $\psi(r)$ una función real de la coordenada radial r . Con estas suposiciones, el sistema SP se escribe de la siguiente manera, según [64, 65]:

$$-\frac{1}{2r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + V\psi = \omega\psi, \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \psi^2. \quad (4.2)$$

Para asegurar soluciones físicamente aceptables, imponemos ciertas condiciones de frontera. Para el parámetro de orden estacionario ψ , requerimos que $\psi(0) = \psi_c$, $\psi'(0) = 0$ y $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi = \lim_{r \rightarrow \infty} \psi' = 0$. Esto garantiza la regularidad en el origen y la desaparición en el infinito, convirtiendo el problema en un problema de Sturm-Liouville para el eigenvalor ω .

Para el potencial gravitacional V , establecemos $V(0) = V_c$ y $V'(0) = 0$. La elección de V_c puede ser arbitraria, ya que cambiar esta condición a $V_c + V_a$ es equivalente a encontrar un eigenvalor $\omega + V_a$ para algún valor arbitrario V_a . Estas condiciones de frontera aseguran soluciones físicamente significativas que satisfacen los requisitos de regularidad y aislamiento.

Dado que este conjunto de ecuaciones se resuelve numéricamente, es conveniente escribirlo como un sistema de primer orden definiendo las variables $\phi = r^2 \frac{d\psi}{dr}$ y $m = r^2 \frac{dV}{dr}$. El sistema anterior se reescribe entonces como:

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{\phi}{r^2}, \quad (4.3)$$

$$\frac{d\phi}{dr} = 2r^2 (V - \omega) \psi, \quad (4.4)$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{m}{r^2}, \quad (4.5)$$

$$\frac{dm}{dr} = r^2 \psi^2, \quad (4.6)$$

con las condiciones de frontera $\psi(0) = \psi_c$, $\phi(0) = 0$, $V(0) = V_c$, $M(0) = 0$ y $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0$.

Ahora bien, si vemos este mismo sistema desde el marco de MP (2.21), el sistema se reduce al siguiente conjunto de ecuaciones para un gas de bosones en equilibrio hidrostático y esféricamente simétrico:

$$0 = -\rho \frac{d}{dr} (V + Q), \quad (4.7)$$

$$\frac{dm}{dr} = \rho r^2, \quad (4.8)$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{m}{r^2}, \quad (4.9)$$

entonces podemos decir que un parámetro de orden estacionario es equivalente al equilibrio hidrostático en un gas de bosones. La ecuación (4.7) puede integrarse una vez

$$Q + V = \omega, \quad (4.10)$$

donde ω es una constante de integración. Recordemos que $Q = -\frac{1}{2} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$, si definimos $\phi = r^2 \frac{d\sqrt{\rho}}{dr}$ el sistema en equilibrio hidrostático puede escribirse como un sistema de primer orden en la coordenada radial como

$$\frac{d\sqrt{\rho}}{dr} = \frac{\phi}{r^2}, \quad (4.11)$$

$$\frac{d\phi}{dr} = 2r^2(V - \omega)\sqrt{\rho}, \quad (4.12)$$

$$\frac{dm}{dr} = \rho r^2, \quad (4.13)$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{m}{r^2}. \quad (4.14)$$

La solución del sistema (4.3-4.6) es equivalente a la solución del sistema (4.11-4.13) como se muestra en [77]. Esto suele resolverse mediante el método de *shooting*, ver por ejemplo [64]. Otra estrategia empleada es el uso de *Algoritmos Genéticos* presentados en [76]. Independientemente del método utilizado, las soluciones se construyen en un dominio finito $D = [0, r_{\max}]$, donde las condiciones de frontera se redefinen aproximadamente como $\psi(r_{\max}) \approx \psi'(r_{\max}) \approx 0$. Es decir, utilizamos un valor finito r_{\max} en el cual se busca satisfacer las condiciones de frontera aproximadamente en la frontera externa r_{\max} .

La construcción de una única solución estacionaria con $\psi_c = 1$ en el marco SP o bien $\rho_c = 1$ en el MP es suficiente para producir toda la familia de soluciones del sistema utilizando la transformación de escala (2.14). Por lo que en la Figura 4.1 se muestra el estado base del sistema en ambos marcos (también llamada esta solución como estrella de bosones, soliton o incluso el núcleo), junto al perfil empírico [22]:

$$\rho_{\text{soliton}}(r) = \rho_c \left[1 + (2^{1/8} - 1) \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right]^{-8}, \quad (4.15)$$

donde ρ_c es la densidad central y r_c es el radio del núcleo, definido como el radio donde la densidad del soliton es un medio de la densidad central. Numéricamente se encuentra el valor del radio del núcleo $r_c \approx 1.30$ para $\rho_c = 1$. Usando la transformación de escala (2.14)

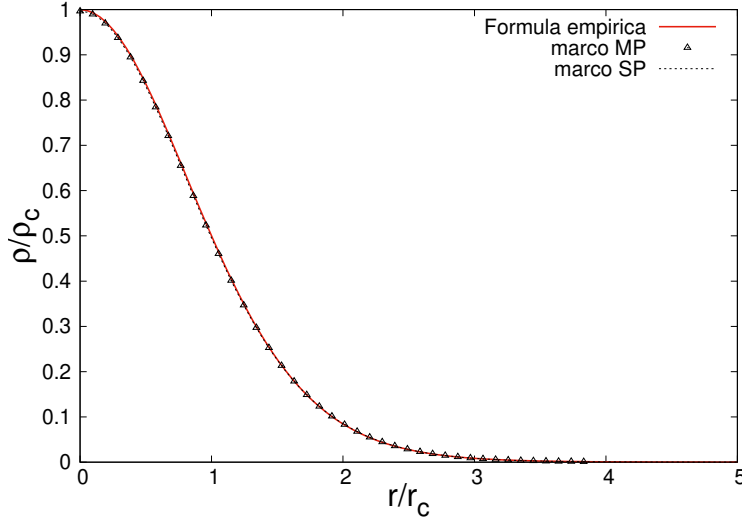


Figura 4.1: Densidades $|\psi|^2$ y ρ de la solución de equilibrio del estado base en los marcos SP y MP, respectivamente. En el marco SP se resuelven las ecuaciones (4.3)-(4.6) para la función de onda central $\psi_c = 1$. En el marco MP se usan las ecuaciones (4.11)-(4.14) con la densidad central $\rho_c = 1$. Las soluciones numéricas se construyen en el dominio $r \in D = [0, 10]$ discretizado con una resolución espacial $\Delta r = 2.5 \times 10^{-4}$. De igual manera se muestra la fórmula empírica (4.15) normalizando respecto al radio del núcleo $\rho_c = 1$ y el radio del núcleo $r_c = 1.30$.

es posible escribir la relación $\rho_c \approx (1.30/r_c)^4$ para un radio del núcleo arbitrario, o bien en unidades físicas:

$$\rho_c \approx \frac{\hbar^2}{4\pi G m_B^2} \left(\frac{1.30}{r_c} \right)^4 \approx 1.983 \times 10^7 \left(\frac{\text{kpc}^4}{m_{22}^2 r_c^4} \right) M_\odot, \quad (4.16)$$

donde m_{22} está definido como $m_{22} = m_B \times 10^{-22} \text{eV}^{-1}$, y las unidades del radio del núcleo son $[r_c] = \text{kpc}$.

4.1.2 Estabilidad

Una consideración adicional entre las soluciones en los marcos SP y MP es cómo evolucionan estas configuraciones. De hecho, optar por un marco u otro justifica el uso de diferentes métodos numéricos. En el marco SP, es habitual emplear métodos de Diferencias Finitas o bien métodos pseudoespectrales, con una variedad de integradores de tiempo, tanto explícitos como implícitos, debido a que la ecuación de Schrödinger es dispersiva y evita la formación de discontinuidades. En contraste, las ecuaciones en el marco MP es cuasilineal, lo que puede

resultar en la formación de discontinuidades y choques, incluso cuando se parte de datos iniciales suaves, requiriendo así otros enfoques numéricos como los discutidos en la Sec. 3.2 para las ecuaciones de Euler.

Un aspecto muy importante es la diferenciación de la función de onda Ψ , ya que, en general, se puede considerar que las configuraciones de equilibrio involucran funciones suaves. Por otro lado, en el marco de MP, algunas de las variables no son continuas. Esto se observa en la definición de S , es decir, el argumento de la función Ψ , que no está definido en el origen. Por lo tanto, en todos los casos donde S no es espacialmente constante, se generarán datos iniciales con velocidades discontinuas que tenderán a producir ondas de choque, las cuales no aparecen en el marco SP. Una discontinuidad en la velocidad conduce a una discontinuidad en la densidad y , en consecuencia, Q y ∇Q no están definidos en el lado derecho de la ecuación (2.18). Solo en casos donde la función S es constante, la evolución puede llevar a una solución, incluso una solución débil.

Por lo tanto, consideramos que los problemas en los que se pueden comparar los marcos SP y MP deben ser aquellos con un campo de velocidad constante. A continuación, describimos una comparación de la evolución de la configuración del estado base en cada uno de los marcos.

Para simular la evolución, interpolamos las soluciones de equilibrio de la Figura 4.1, construidas en coordenadas esféricas. En el dominio cúbico $D^d = [-20, 20]^3$ con una resolución $h = 0.4$ y un número de Courant $CFL = 0.25$, donde serán evolucionados.

Una vez que las configuraciones de equilibrio en el marco SP se interpolan en el dominio 3D descrito en coordenadas cartesianas, resolvemos el sistema (2.12)-(2.13) para evolucionar la configuración en el marco SP usando métodos numéricos en diferencias finitas. Del mismo modo, cuando la configuración de equilibrio construida dentro del marco de MP se interpola en el dominio 3D, resolvemos las ecuaciones (2.21)-(2.23) mediante volúmenes finitos.

Para comparar los aspectos esenciales de las configuraciones estas soluciones del estado base, evolucionamos las configuraciones de equilibrio y seguimos su comportamiento durante 200 unidades de tiempo. Utilizando los métodos numéricos descritos anteriormente para la evolución, integramos en el tiempo las ecuaciones para estas configuraciones centradas en el origen de coordenadas, y en la Figura 4.2 mostramos el valor central de la densidad, $|\Psi(t, \vec{0})|^2$, en el marco SP y $\rho(t, \vec{0})$ en el marco de MP. El resultado indica que la configuración permanece oscilando con un modo consistente con el modo esférico dominante de la configuración, con un período $T = 21.64$ como se señala en [82] utilizando el marco SP. Cuando se utiliza el marco de MP, hay una reducción del período en el tiempo. Estas oscilaciones son esencialmente producidas por el error de truncamiento inherente de los métodos desde la construcción del perfil inicial. Es decir, el perfil encontrado al resolver numéricamente el problema de los eigenvalores es solo una aproximación del estado base exacto del sistema SP. Por lo tanto, la configuración inicial podría interpretarse como el estado base de la solución exacta más

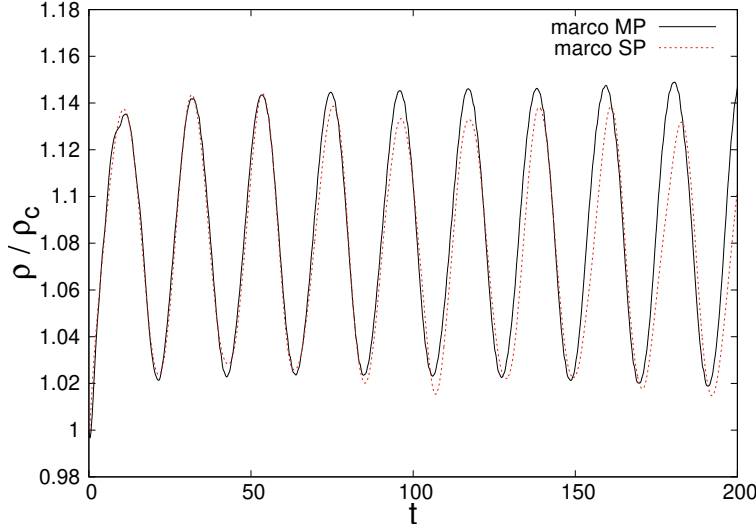


Figura 4.2: Densidad central $|\Psi(t, \vec{0})|^2$ para la solución en el marco SP y $\rho(t, \vec{0})$ en el marco de MP, en función del tiempo. Este gráfico muestra que el primer modo de oscilación es similar, aunque no es perfectamente igual en ambos marcos. En el marco SP, el período coincide con el reportado en [82], mientras que en el marco de MP el período se reduce con el tiempo debido a disipación numérica.

una perturbación esférica debido al uso de métodos numéricos. Así, podemos observar que ambos marcos mantienen la estructura inicial estable, lo que sugiere que la estabilidad es una propiedad del perfil solitónico y no del método numérico utilizado.

En la Figura 4.3 mostramos la evolución de la masa M y la energía total $E = K + W$ de las soluciones en función del tiempo. Podemos observar que en el marco MP, la masa es ligeramente mayor que en el marco SP, debido a la contribución de la atmósfera. Dado que esta atmósfera es del orden de $\rho_{\text{atm}} \sim 10^{-8}$, contribuye con una masa del orden de $M_{\text{atm}} \sim 10^{-3}$. Por otro lado, la masa en el marco SP disminuye al utilizar el método MoL, debido a la disipación de la integración temporal con el método explícito RK3.

En cuanto a la energía total, los valores en los dos marcos no coinciden debido a la diferencia en la masa, lo que contribuye a la energía gravitacional W . Por esta razón, en el marco de MP, la energía total E es menor que en el marco SP.

En el contexto de la solución de las ecuaciones SP, los métodos de diferencias finitas y los métodos pseudoespectrales se muestran como los más adecuados debido a su capacidad para manejar de manera eficiente las complejidades inherentes a la evolución de las soluciones en este marco. Por otro lado, los métodos de volúmenes finitos, comúnmente utilizados en el marco MP, tienen limitaciones importantes, ya que se restringen a casos donde la fase S es constante. Dado esto, a partir de ahora, todas las simulaciones serán realizadas exclusivamente dentro del marco SP, aprovechando las ventajas de los métodos de diferencias finitas y

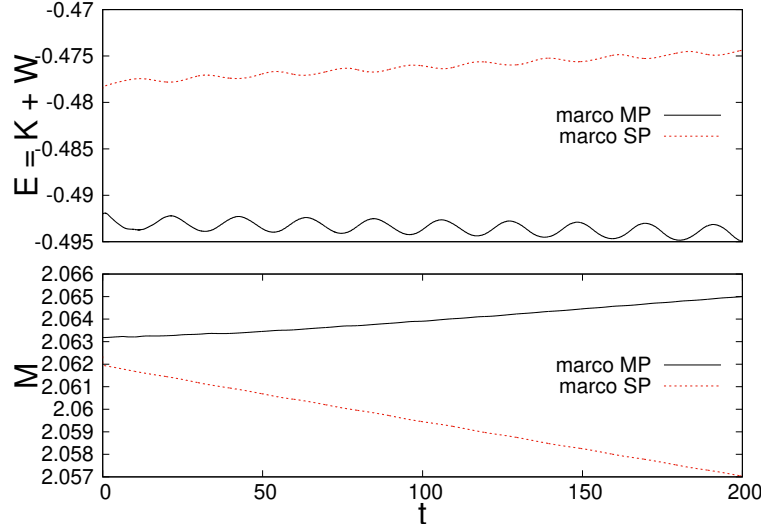


Figura 4.3: Evolución de la energía total $E = K + W$ y la masa M de la configuración de equilibrio en los dos marcos.

pseudoespectrales para una mayor precisión y estabilidad en las soluciones obtenidas.

4.1.3 Atracción

Como se ha demostrado previamente, los núcleos galácticos son soluciones estables del sistema SP [65, 10]. No obstante, una característica importante de estas soluciones es que actúan como atractores en el tiempo, lo que significa que cualquier configuración inicial de un minicúmulo de densidad tiende a colapsar y formar una estrella de bosones. Para entender este proceso en detalle, consideremos el caso más general [13, 19].

Supongamos inicialmente una función de onda en el espacio de momentos descrita por $\mathcal{F}(\Psi) = \frac{M^{1/2}}{\pi^{3/4}} e^{-p^2/2} e^{iS}$, donde S es una fase aleatoria en cada punto del espacio de momentos, entre 0 y 2π , y M es la masa total del gas de bosones en el dominio numérico D . Es decir, el módulo de la función de onda está localizado en el espacio de momentos, mientras que, debido al principio de incertidumbre de Heisenberg, se encuentra disperso en el espacio de posiciones. Este comportamiento es consistente con lo propuesto en [83], donde se sugiere que la formación de una estrella de bosones es un proceso robusto e independiente del perfil inicial de la función de onda.

En este contexto, la estructura resultante puede identificarse como un **minicúmulo bosónico**, una concentración densa de materia oscura ultraligera que emerge debido a la autoatracción gravitacional del gas de bosones. A diferencia de halos galácticos más extendidos, estos minicúmulos corresponden a configuraciones compactas que se forman en las primeras etapas

del universo y pueden persistir como subestructuras dentro de galaxias o cúmulos de materia oscura.

La formación de estos objetos sigue un proceso de condensación gravitacional, en el cual las interacciones cuánticas y gravitacionales llevan a la estabilización de un núcleo solitónico rodeado por una envolvente extendida. Este mecanismo ha sido estudiado en simulaciones cosmológicas donde se observa que, a través de colisiones y fusiones, los minicúmulos pueden contribuir a la evolución de la estructura a gran escala. El tiempo característico de condensación de un núcleo τ_g , puede deducirse mediante la teoría de relajación del sistema SP o de la ecuación de Landau. Este tiempo está dado en términos del radio del minicúmulo R , la velocidad característica v y la densidad promedio $\bar{\rho}$ del minicúmulo [83] como:

$$\tau_g = \frac{b\sqrt{2}}{12\pi^3} \frac{m_B v^6}{G^2 \bar{\rho}^2 \Lambda}, \quad b \sim 1, \quad (4.17)$$

donde $\Lambda = \log(m_B v R)$ es el logaritmo Coulombiano, y b es un coeficiente determinado a partir de simulaciones numéricas.

Para estudiar la evolución del sistema, simulamos este perfil en el dominio cúbico $D = [-L/2, L/2]^3$, donde $L > 2\pi/k_J$, con $k_J = (4\bar{\rho})^{1/4}$ el número de Jeans adimensional. El objetivo es observar la condensación de la nube de gas en un único núcleo, lo que nos permite analizar el proceso de condensación a detalle.

Como validación de nuestro código, reproducimos los resultados de [19] para un minicúmulo con masa $M = 1005.3$, en un dominio de longitud $L = 18$, usando $N = 128$ puntos de malla en el dominio discreto con condiciones de frontera periódicas. En la Figura 4.4, se muestran ocho instantáneas del perfil de densidad, centradas en el máximo de la densidad, en tiempos $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60$ y 70 (en unidades de código). Estas imágenes ilustran el proceso de condensación que lleva a la formación de un núcleo galáctico.

Para un análisis más detallado, la Figura 4.5 muestra el promedio angular de la densidad $\rho_{avg}(t, r)$ calculado como:

$$\rho_{avg}(t, r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \rho d\Omega, \quad (4.18)$$

donde $\Omega = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ es el ángulo sólido, y $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ son los elementos diferenciales de las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . Los resultados se comparan con el perfil ajustado de un solitón mediante la fórmula empírica (4.15), que se muestra con líneas continuas en las instantáneas correspondientes a los tiempos $t = 20, 40$ y 100 . Estos resultados confirman que, a partir de $t = 20$, la estructura formada en el máximo de la densidad corresponde al

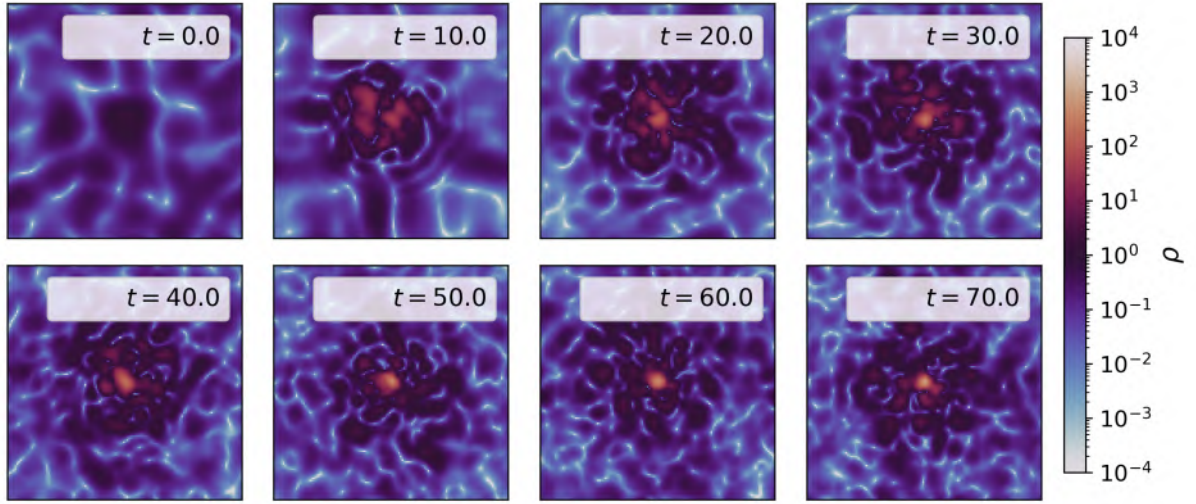


Figura 4.4: Instantáneas del perfil de densidad tomadas cada $t = 10$ unidades de tiempo, centradas en el punto donde se localiza el máximo valor de la densidad. Se observa la formación de un solitón en el origen.

estado base solución del sistema SP (2.12-2.13), lo que confirma la naturaleza atractora de está solución.

Además de este proceso de condensación, en [19] se demostró que el núcleo formado en el centro del minicúmulo acreta masa inicialmente a un ritmo de crecimiento proporcional a $t^{1/2}$, que eventualmente disminuye a un ritmo más lento de $t^{1/8}$. En la Figura 4.6, mostramos el crecimiento de la densidad máxima en función del tiempo, que sigue este comportamiento.

Como comentario adicional, es relevante considerar el comportamiento de la densidad fuera del núcleo, es decir, en la región más allá de un radio de transición r_t . En esta zona, el comportamiento de la función de onda cambia respecto al del estado base, y el decaimiento de la densidad deja de ser exponencial para volverse polinomial. Específicamente, el perfil de densidad en esta región, fuera de la esfera de radio r_t , sigue el comportamiento descrito por la fórmula empírica de Navarro-Frenk-White (NFW) [84] obtenida en simulaciones de *CDM* y constituyo el perfil estándar:

$$\rho_{\text{NFW}}(r) = \frac{\rho_s}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s} \right)^2}, \quad (4.19)$$

donde r_t y r_s son dos parámetros que deben ser determinados. El parámetro de densidad ρ_s se obtiene imponiendo la continuidad entre el perfil del núcleo y el perfil NFW (el perfil del halo). Esto se traduce en la condición $\rho_{\text{soliton}}(r_t) = \rho_{\text{NFW}}(r_t)$, asegurando una transición

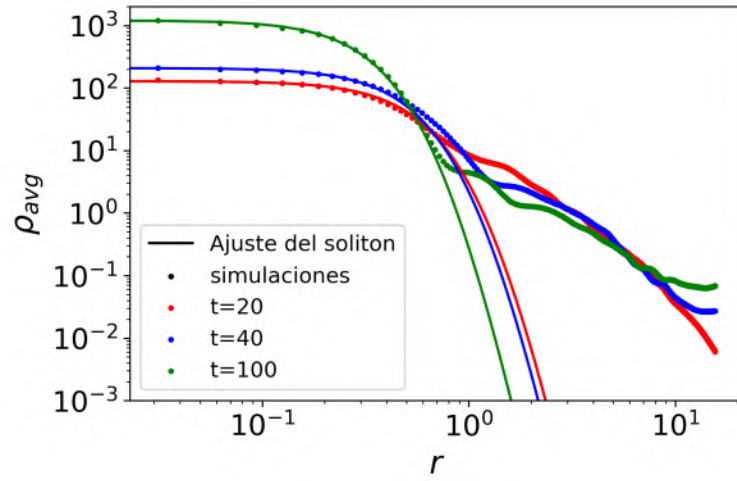


Figura 4.5: Instantáneas a los tiempos $t = 20, 40$ y 100 del promedio de la densidad sobre el ángulo sólido (4.18), mostradas mediante puntos junto al ajuste del perfil del solitón (4.15), representado por líneas continuas.

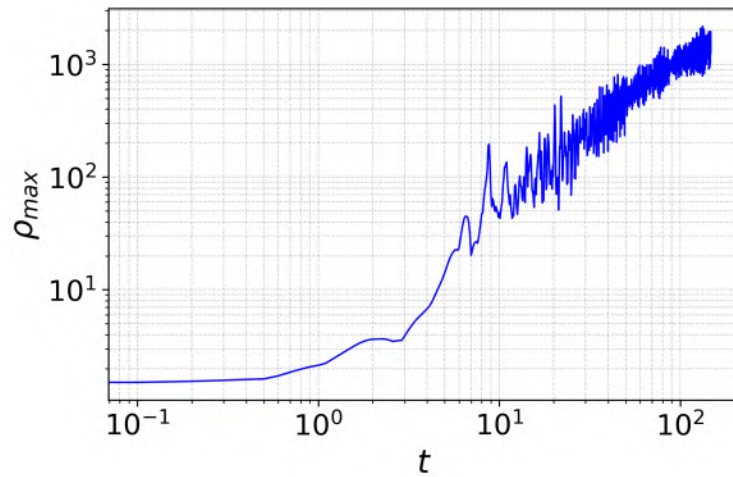


Figura 4.6: Crecimiento de la densidad máxima en función del tiempo. Inicialmente, el ritmo de crecimiento es proporcional a $t^{1/2}$, que eventualmente disminuye a $t^{1/8}$.

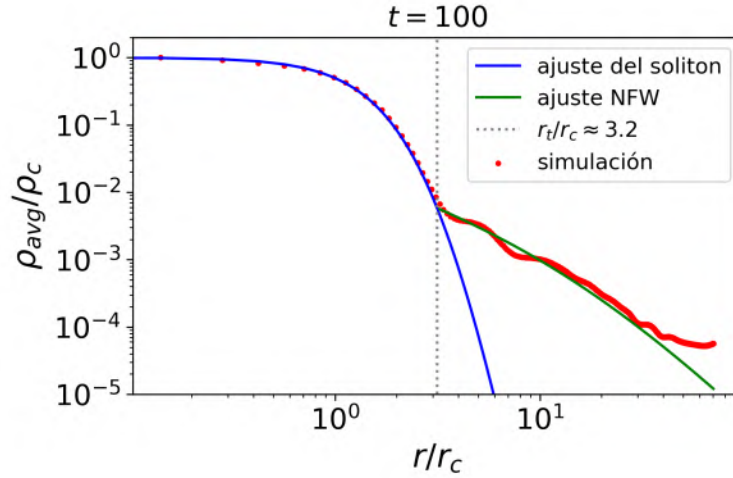


Figura 4.7: Instantánea en el tiempo $t = 100$ del promedio de la densidad sobre el ángulo sólido (4.18), mostrada mediante puntos. El ajuste del perfil del solitón (4.15) se representa con la línea continua azul, mientras que el ajuste del perfil NFW (4.19) se muestra con una línea discontinua roja. El radio de transición entre el núcleo y el halo es $r_t \approx 3.2r_c$.

continua entre ambos perfiles.

Para visualizar este fenómeno con mayor detalle, en la Figura 4.7 se muestra el promedio de la densidad ρ_{avg} en el tiempo $t = 100$. En esta figura, además del ajuste correspondiente al solitón previamente presentado, se enfatiza el ajuste en la región del halo, donde $r > r_t$. El valor de $r_t \approx 3.2r_c$ fue ajustado con alta precisión utilizando el perfil NFW, como se observa en la figura.

Este ajuste sugiere un hecho importante: los efectos cuánticos presentes en el sistema Schrödinger-Poisson tienen una mayor relevancia en las regiones donde se forma el núcleo. En contraste, en las zonas externas del halo, el comportamiento promedio se asemeja al observado en simulaciones de *Cold Dark Matter* (CDM), lo que indica que en estas regiones los efectos cuánticos se vuelven menos dominantes.

Sin embargo, es crucial notar que esta conclusión se obtiene al considerar el promedio angular de la densidad 4.18. Si en lugar de este promedio se analiza la densidad puntual, se observa que las regiones externas exhiben una estructura granular, producto de la interferencia de ondas superpuestas en esta zona. Esto implica que, aunque el perfil global del halo pueda parecer similar al caso clásico de *CDM* en promedio, la granularidad cuántica sigue desempeñando un papel en la dinámica del sistema.

Como comentario final, es importante destacar que, según el modelo de *FDM*, las primeras estructuras estables formadas en el universo a partir de materia oscura habrían sido los núcleos galácticos. Esto sugiere que estructuras mayores, como las galaxias, podrían haber

surgido a través de la fusión de estos. Por tanto, en la siguiente sección, abordaremos la dinámica de estas fusiones y analizaremos sus implicaciones en la formación de estructuras a gran escala en el universo.

SECCIÓN 4.2

Fusiones de Núcleos Galácticos

Los sistemas binarios y las fusiones multinucleares de solitones proporcionan una perspectiva fascinante sobre la materia oscura ultraligera y su impacto en la evolución cósmica temprana.

En los **sistemas binarios**, dos núcleos de *FDM* interactúan gravitacionalmente, orbitando entre sí mientras sus efectos cuánticos, como la presión cuántica y la gravedad, estabilizan la dinámica del sistema [85, 86]. Estos sistemas proporcionan una plataforma única para estudiar el comportamiento de las estructuras galácticas en presencia de perturbaciones externas, revelando información sobre su evolución a lo largo del tiempo. Comprender la dinámica de los sistemas binarios de núcleos galácticos es esencial para desentrañar su rol en la formación y evolución de estructuras cosmológicas a gran escala, como las galaxias y los cúmulos de galaxias, particularmente en las etapas tempranas del universo.

Las **fusiones multinucleares** son otro proceso relevante, donde múltiples núcleos galácticos colisionan y se fusionan en una única estructura más masiva. En estos eventos, la configuración final depende principalmente de la masa y la energía totales [11, 12]. Estos procesos de fusión podrían haber sido cruciales para la formación de halos galácticos y otras estructuras de materia oscura en las primeras etapas del universo. Además, las fusiones multinucleares ayudan a entender cómo estos núcleos galácticos alcanzan su estabilidad y qué factores determinan su configuración final.

Ambos fenómenos, tanto los sistemas binarios como las fusiones multinucleares, juegan un papel fundamental en la comprensión de cómo los núcleos galácticos podrían haber sido las primeras estructuras gravitacionales en el universo temprano. Estas primeras fusiones y sistemas binarios podrían haber actuado como semillas gravitacionales, atrayendo y acumulando materia a su alrededor, lo que finalmente permitió la formación de galaxias y cúmulos.

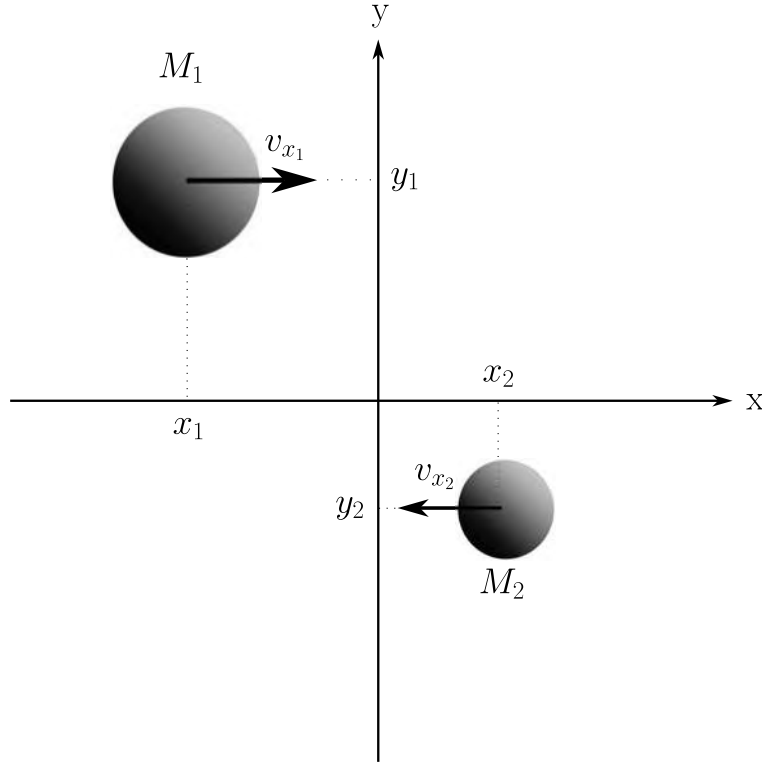


Figura 4.8: Ilustración del escenario inicial para la fusión binaria de núcleos solitónicos.

4.2.1 Sistemas Binarios

Para analizar la fusión binaria ilustrada en la Figura 4.8, consideramos el siguiente escenario: el primer núcleo, ubicado a la izquierda, tiene una masa $M_1 = M(r_{c,1})$, una posición inicial $\vec{x}_1 = (x_1, y_1, 0)$ y una velocidad inicial $\vec{v}_1 = (v_{x_1}, 0, 0)$. El segundo núcleo, a la derecha, tiene una masa $M_2 = M(r_{c,2})$, una posición inicial $\vec{x}_2 = -M_R \vec{x}_1$ y una velocidad inicial $\vec{v}_2 = -M_R \vec{v}_1$, donde $M_R = M_2/M_1$ es la razón de masas entre los núcleos solitónicos de la izquierda y la derecha. De este modo, el parámetro de orden inicial es:

$$\Psi(0, \vec{x}) = \sqrt{\rho_{\text{soliton}}(|\vec{x} - \vec{x}_1|)} e^{i\vec{v}_1 \cdot \vec{x}} + \sqrt{\rho_{\text{soliton}}(|\vec{x} - \vec{x}_2|)} e^{i\vec{v}_2 \cdot \vec{x}}. \quad (4.20)$$

La masa total de cada núcleo galáctico está dada por la expresión:

$$M = 4\pi \int_0^\infty \rho_{\text{soliton}}(r) r^2 dr = \frac{33.95}{r_c}. \quad (4.21)$$

Efecto de las condiciones de frontera

Un aspecto de vital importancia es explorar los efectos de las condiciones de frontera en la evolución de sistemas binarios de núcleos galácticos. Analizaremos las diferencias clave entre las condiciones de frontera periódicas y aisladas durante la fusión de dos núcleos en equilibrio. Las condiciones periódicas, frecuentemente utilizadas en simulaciones cosmológicas de formación de estructuras, introducen interacciones adicionales entre las imágenes periódicas de los núcleos a lo largo de cada eje del dominio, lo que influye en la dinámica de la fusión. Por otro lado, las condiciones aisladas permiten que la energía y la masa se disipen fuera del sistema, imitando mejor un entorno cerrado y sin perturbaciones externas.

Se estudiará cómo estos dos enfoques afectan la evolución gravitacional de los núcleos, desde su interacción inicial hasta la configuración final resultante, con especial atención en la formación de colas de materia y la redistribución de energía en el sistema.

Dividimos este estudio en dos casos: el primero para dos núcleos que se fusionan únicamente por efecto de la gravedad, y el segundo para dos núcleos con momento angular distinto de cero.

Fusión frontal en caída libre. Para ilustrar este escenario, realizamos una serie de simulaciones en dominios $[-20, 20]^3$ y $[-40, 40]^3$, utilizando la misma resolución espacial y temporal que en los ejemplos anteriores. Elegimos tres configuraciones iniciales para los núcleos, con posiciones en A) $(\pm 5, 0, 0)$, B) $(\pm 10, 0, 0)$ y C) $(\pm 15, 0, 0)$. Esperamos que el dominio fuera de la caja, plagado de imágenes periódicas de las configuraciones binarias, afecte la dinámica de la colisión. Para comparar, también simulamos la fusión usando condiciones de frontera aisladas.

Los resultados de las simulaciones para el Caso A se resumen en la Figura 4.11. A la izquierda se presenta el potencial gravitacional inicial a lo largo del eje x , y a la derecha, el momento frontal $\langle p_x \rangle$ integrado en los semidominios $x < 0$ y $x > 0$. En la primera fila, se incluyen los resultados usando condiciones de frontera aisladas, donde el tiempo de fusión es $t \sim 14.9$, definido como el momento en que se alcanza el máximo momento frontal. En las filas segunda y tercera se muestran los resultados con condiciones periódicas en los dominios $[-20, 20]^3$ y $[-40, 40]^3$, respectivamente. El tiempo de fusión se ve afectado por el tamaño del dominio periódico: el dominio más pequeño retrasa la fusión debido a la atracción entre las imágenes gravitacionales periódicas. Además, la magnitud del momento frontal también se ve alterada.

El Caso B es notablemente diferente. Aquí, las condiciones de frontera periódicas implican la existencia de configuraciones binarias idénticas en los dominios vecinos, separadas exactamente por 20 unidades de longitud a lo largo del eje x y por 40 unidades en los ejes y y z . Esta disposición genera una matriz infinita de núcleos a lo largo del eje x , y se espera que los campos gravitacionales se compensen en esa dirección.

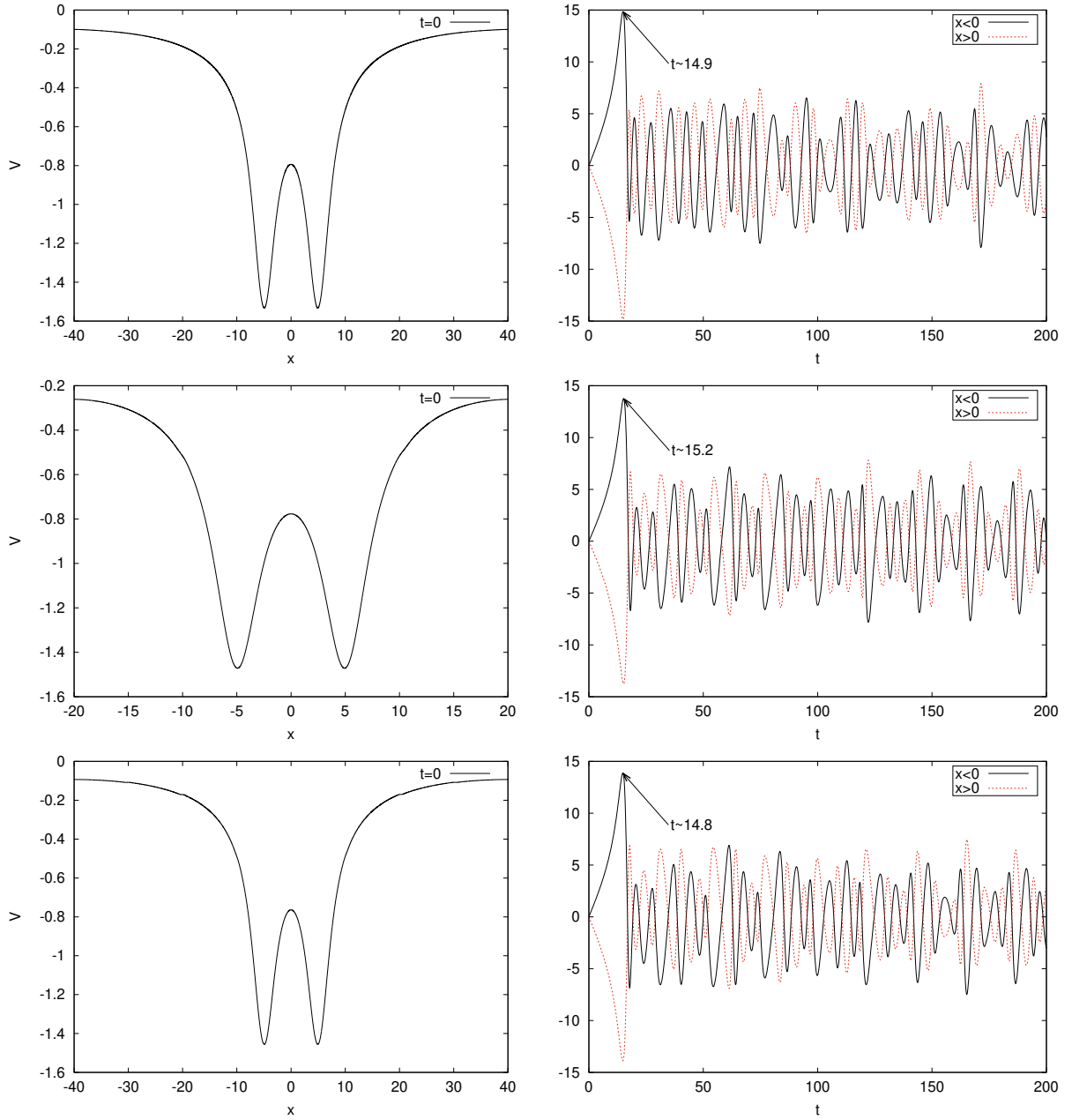


Figura 4.9: Caso A. A la izquierda se muestra el potencial gravitacional inicial a lo largo del eje x , ilustrando sus mínimos locales y comportamiento en los límites. A la derecha, se presenta el momento frontal $\langle p_x \rangle$, integrado en los semidominios $x < 0$ y $x > 0$, como función del tiempo. La primera fila corresponde al escenario con condiciones de frontera aisladas, mientras que la segunda y tercera muestran resultados para dominios periódicos $[-20, 20]^3$ y $[-40, 40]^3$, respectivamente.

Los resultados para el Caso B se presentan en la Figura 4.11. A la izquierda se muestra el potencial gravitacional inicial a lo largo del eje x , y a la derecha $\langle p_x \rangle$, desde arriba hacia abajo, para los dominios aislado, periódico $[-20, 20]^3$, y periódico $[-40, 40]^3$, respectivamente.

En la segunda fila, los núcleos tardan significativamente más en fusionarse. Aunque podría esperarse que los núcleos no se fusionaran debido a la compensación de los campos gravitacionales a lo largo del eje x , una sutil asimetría en el potencial gravitacional en el centro del dominio permite que finalmente se fusionen después de 115 unidades de tiempo.

La tercera fila de resultados, con un dominio periódico más grande, muestra un tiempo de colisión más cercano al del caso aislado, ya que los pozos potenciales de los núcleos vecinos están más distanciados.

El Caso C revela una contribución más significativa de las condiciones de frontera periódicas. En lugar de ser atraídos entre sí, los núcleos son atraídos hacia sus imágenes periódicas a lo largo del eje x . Los resultados se muestran en la Figura 4.11. En el escenario aislado, los núcleos colisionan frontalmente, mientras que en el dominio periódico colisionan "desde atrás", como lo indica el momento lineal, que es positivo para $x > 0$ y negativo para $x < 0$, lo que sugiere una separación inicial entre los núcleos.

Fusión en órbita. Este caso estudia la colisión de dos solitones con momento angular orbital. Como ejemplo ilustrativo, tomamos las condiciones iniciales con los solitones centrados en $(-10, 10, 0)$ y $(10, -10, 0)$, con velocidades iniciales de $(0.1, 0, 0)$ y $(-0.1, 0, 0)$, respectivamente. Evolucionamos el sistema en el dominio $D = [-40, 40]^3$ con condiciones de frontera aisladas, y en los dominios $D = [-20, 20]^3$ y $D = [-40, 40]^3$ con condiciones de frontera periódicas.

En el sistema aislado, se observa que parte de la materia y del momento angular es radiada, como se ha reportado en [87, 88]. Bajo condiciones periódicas, la materia y el momento angular reingresan al dominio, interactuando nuevamente con el sistema binario. En la Figura 4.12 se muestran instantáneas de los isocontornos de la densidad $|\Psi|^2$ en los tiempos $t = 0, 100, 200, 300, 400$ y 500 , de izquierda a derecha.

En la parte superior de la figura, se muestran los resultados con el dominio aislado, donde la configuración final tiene rotación y se mantiene estable. La fila central muestra la evolución con condiciones de frontera periódicas en el dominio pequeño, simulando una red infinita de configuraciones en equilibrio. La simetría y el tamaño del dominio hacen que las fuerzas externas sobre cada configuración se compensen, resultando en movimiento rectilíneo uniforme. En la fila inferior, las instantáneas en el dominio periódico grande muestran que la reentrada de materia, expulsada durante la fusión, permite la formación de perfiles de cola. Este fenómeno es clave para comprender las distribuciones de densidad extendidas.

Con condiciones de frontera aisladas y periódicas en $D = [-40, 40]^3$, se forma una única

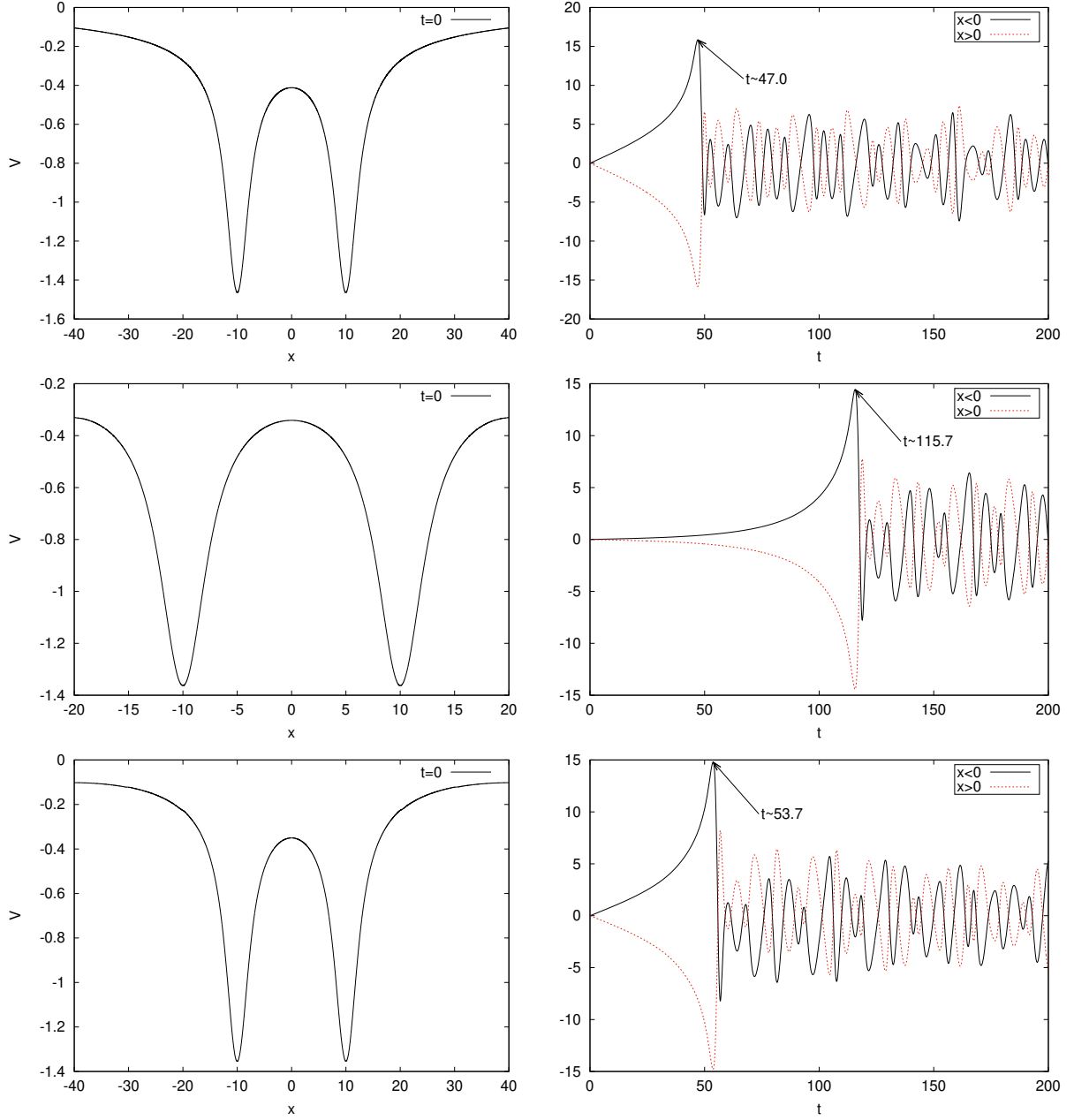


Figura 4.10: Caso B. De arriba hacia abajo, se muestran los resultados para el dominio aislado $[-20, 20]^3$, el dominio periódico $[-20, 20]^3$, y el dominio periódico $[-40, 40]^3$.

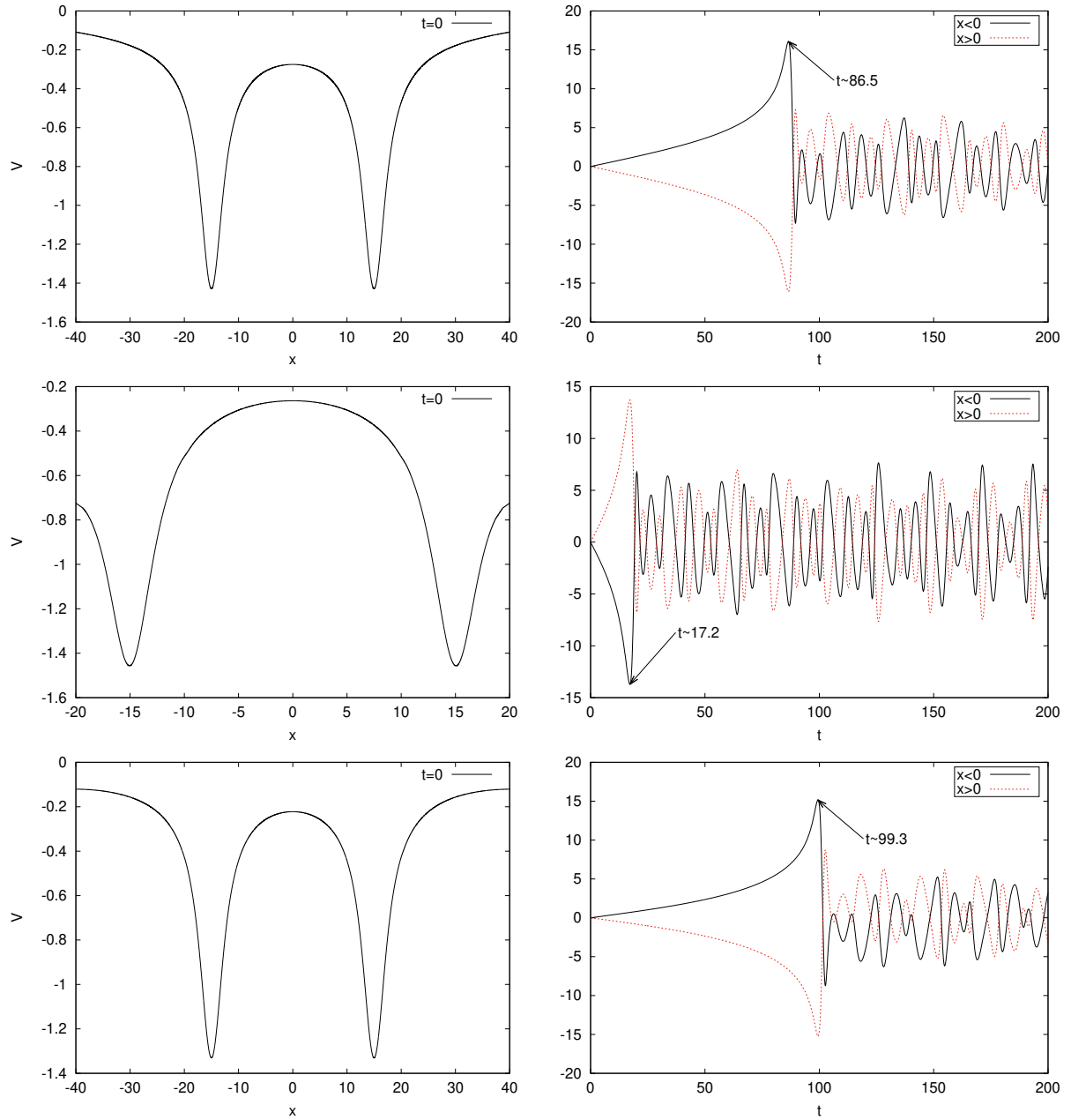


Figura 4.11: Caso C. De arriba hacia abajo, se presentan los resultados para el dominio aislado $[-20, 20]^3$, el dominio periódico $[-20, 20]^3$, y el dominio periódico $[-40, 40]^3$.

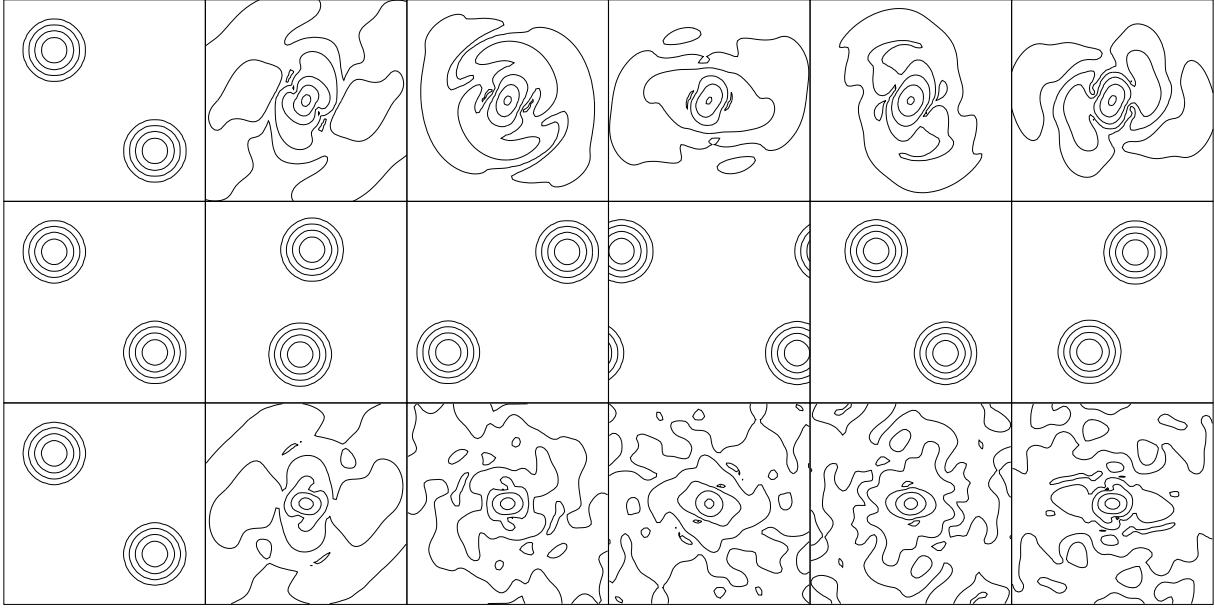


Figura 4.12: Instantáneas de los contornos de densidad $|\Psi|^2$ en los tiempos $t = 0, 100, 200, 300, 400$ y 500 , para condiciones de frontera aisladas en el dominio $D = [-40, 40]^3$ (arriba), condiciones de frontera periódicas en $D = [-20, 20]^3$ (medio) y $D = [-40, 40]^3$ (abajo).

distribución de densidad en el origen, cuyo perfil promediado se muestra en la Figura 4.13 a lo largo del eje x . Este perfil es consistente con el perfil de núcleo (4.15). Nótese que bajo condiciones de frontera periódicas, el perfil de cola no sigue un decaimiento exponencial, sino polinómica, un comportamiento relevante que no ocurre en el caso aislado.

Los diagnósticos de masa y momento angular para este sistema se presentan en la Figura 4.14. La masa total se conserva bien en el dominio periódico, mientras que en el caso aislado se pierde aproximadamente el 28 % debido a la radiación. Similarmente, el momento angular es radiado fuera del dominio aislado, mientras que bajo condiciones periódicas, observamos la reentrada de momento angular en el dominio pequeño. No se encuentra una tendencia clara del L_z en función del tamaño del dominio.

Los resultados de estas simulaciones muestran aspectos importantes de la dinámica de sistemas binarios de solitones con momento angular orbital. En el caso aislado, se pierde una fracción significativa de la masa y el momento angular, lo que lleva a una reducción del 28 % de la masa total y a la formación de una estructura rotante con menor energía. En contraste, bajo condiciones periódicas, la reentrada de materia y energía permite que se conserven.

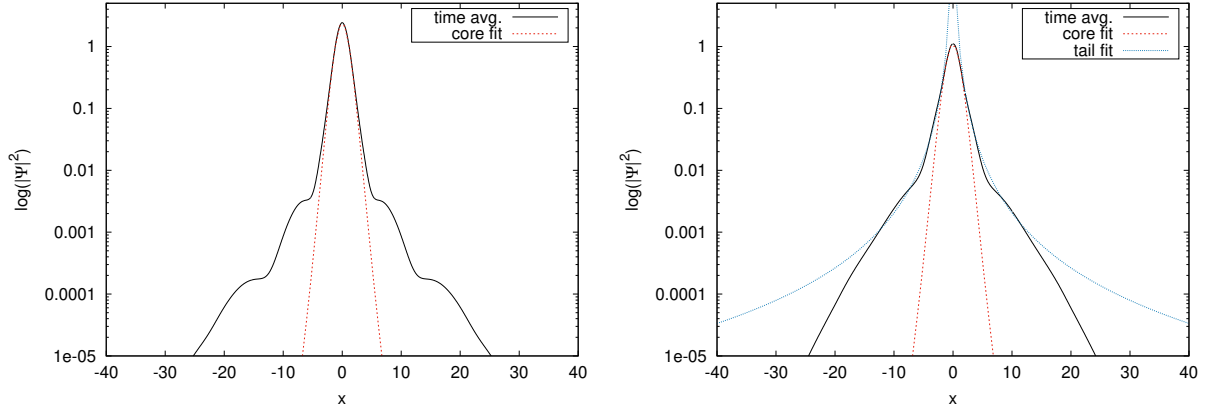


Figura 4.13: Promedio temporal de la densidad en el intervalo $t \in [250, 500]$, tras la fusión de las configuraciones en equilibrio. Simulado en el dominio $[-40, 40]^3$. A la izquierda, con condiciones de frontera aisladas; a la derecha, con condiciones periódicas.

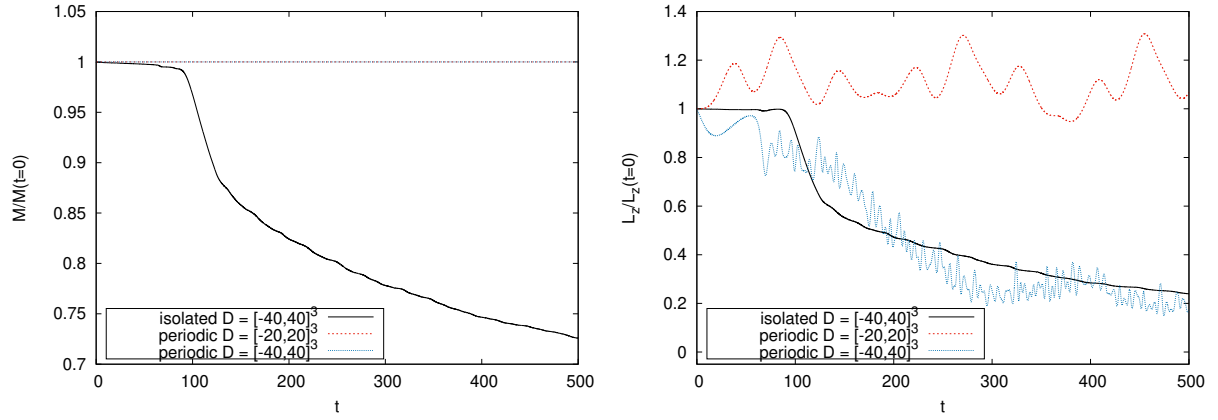


Figura 4.14: Evolución de la masa total M y del momento angular L_z para un sistema binario con momento angular no nulo, bajo condiciones de frontera aisladas en $D = [-40, 40]^3$ (líneas negras sólidas), y condiciones periódicas en $D = [-20, 20]^3$ (líneas rojas punteadas) y $D = [-40, 40]^3$ (líneas azules discontinuas).

Determinación de la masa final del núcleo

Los resultados obtenidos muestran el impacto crucial que tienen las condiciones de frontera en la evolución de sistemas binarios con momento angular. Mientras que las condiciones aisladas promueven la pérdida de masa y energía total, las condiciones periódicas permiten la preservación de estas cantidades, resultando en configuraciones más complejas y dinámicas. A partir de estos hallazgos, proponemos utilizar condiciones periódicas sobre el parámetro de orden para preservar la masa y energía total del sistema, lo que facilita una dinámica más rica fuera del núcleo formado tras la fusión. Esto permite que el sistema se comporte de manera análoga al caso aislado, asegurando una evolución comparable al sistema aislado y conservando dichas cantidades.

La evolución de este sistema tiene lugar en el dominio espacial $D = [-20, 20]^3$, discretizado con $N = 128$ puntos, y se desarrolla durante 250 unidades de tiempo de código, con una resolución temporal de $\Delta t = 0.01$. La densidad del solitón izquierdo se fija en $\rho_{c,1} = 1$, con una posición inicial $\vec{x}_1 = (-5, y_0, 0)$, donde y_0 toma los valores 5 y 10. El componente no nulo de la velocidad inicial toma los valores $v_{x_1} = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ y 0.25 . El solitón derecho tiene valores de densidad central de $\rho_{c,2} = 1.5$ y 2.0 , lo que da lugar a un total de 20 simulaciones de fusiones de solitones.

En el caso en que el parámetro de orden se implemente con condiciones de frontera aisladas, mediante una esponja que elimina los modos salientes de la función de onda por medio de un potencial imaginario [87, 88], originalmente implementado en [65], se sugiere que las estructuras formadas a partir de la fusión generan un núcleo galáctico virializado en el interior de la estructura, el cual está rodeado por un halo que disminuye gradualmente debido al enfriamiento gravitacional. Este fenómeno es consecuencia de la pérdida de masa y momento angular por las condiciones de frontera aisladas [73], como se mostró previamente.

Además, en [87] se determinó que la masa del núcleo resultante es aproximadamente el 70 % de la suma de las masas de los núcleos iniciales, independientemente de la configuración inicial. Este resultado destaca la robustez del proceso de fusión, sugiriendo que una fracción significativa de la masa se mantiene concentrada en el núcleo central, mientras que el halo exterior pierde progresivamente masa. Para confirmar este resultado, monitoreamos la masa del núcleo correspondiente a la configuración de densidad máxima con la que se obtiene la densidad promedio ρ_{avg} . De este modo, podemos calcular la masa de este núcleo como:

$$M_c = 4\pi \int_0^{r_c} \rho_{\text{avg}} r^2 dr. \quad (4.22)$$

Así, definimos la razón de masa entre el núcleo resultante de la fusión y la suma de las masas de los núcleos iniciales como:

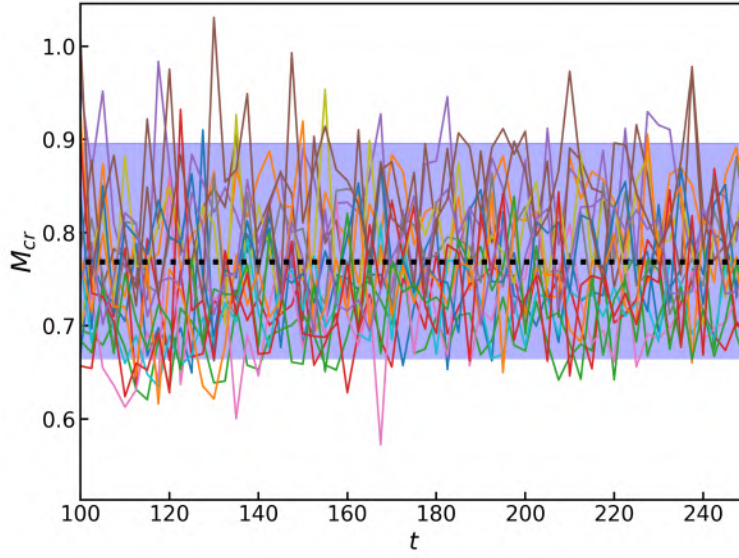


Figura 4.15: Relaciones de masa del núcleo M_{cr} para distintas configuraciones iniciales. La línea punteada representa el valor promedio $M_{cr,avg} = 0.7685^{+0.1272}_{-0.1052}$, donde la banda mide la amplitud promedio máxima y mínima de estas oscilaciones.

$$M_{cr} = \frac{M_c}{M_c^1 + M_c^2}, \quad (4.23)$$

donde M_c^1 y M_c^2 son las masas de las configuraciones iniciales ubicadas a la izquierda y derecha del dominio, respectivamente. Los resultados obtenidos para este conjunto de simulaciones se muestran en la Figura 4.15, donde se ilustra la evolución de esta cantidad tras la fusión. La línea punteada representa el valor promedio $M_{cr,avg} = 0.7685^{+0.1272}_{-0.1052}$, y la banda de error corresponde a las amplitudes promedio máximas y mínimas de oscilación respecto al valor promedio.

4.2.2 Sistemas multinúcleos

Efecto de las condiciones de frontera

Investigamos un último problema, más complejo, relacionado con la formación de núcleos. Inspirándonos en estudios previos [89, 87, 25], simulamos la fusión de 30 configuraciones de equilibrio con una masa bosónica ultraligera de $m_B = 10^{-22} \text{ eV}/c^2$. Estas configuraciones de equilibrio tienen masas aleatorias en el rango de $2.6 \times 10^8 M_\odot$ a $26 \times 10^8 M_\odot$, y están posicionadas inicialmente de manera aleatoria dentro de un cubo de lado de 30 kpc, lo que

permite la comparación entre condiciones de frontera periódicas y aisladas. En el caso del dominio periódico, evolucionamos el sistema tanto en un dominio cúbico pequeño como en un dominio cúbico grande, con lados de 80 kpc y 100 kpc, respectivamente. Usamos las mismas posiciones iniciales, configuraciones y resolución en ambos casos, lo que nos permite aislar los efectos del tamaño del dominio sobre la dinámica del sistema.

Los resultados se resumen en la Figura 4.16. A la izquierda/derecha mostramos los resultados obtenidos en las simulaciones en el dominio pequeño/grande. En la parte superior, mostramos algunas instantáneas de la densidad proyectada sobre el eje x , que muestran el comportamiento dinámico y los patrones de interferencia que cambian con el tiempo. En la fila del medio, mostramos una instantánea de la densidad en tres dimensiones, en un momento en que el núcleo ya está formado. Finalmente, calculamos un promedio de la densidad en el tiempo y en varias direcciones desde el centro del núcleo, para ajustar la estructura núcleo-halo que mostramos en la tercera fila. El núcleo se ajusta utilizando la función (4.15) mediante dos métodos. En el primer método, ajustamos el núcleo con r_c y ρ_c como parámetros libres, obteniendo los mejores ajustes con $(r_c \sim 0.228 \text{ kpc}, \rho_c \sim 2.42 \times 10^9 M_\odot/\text{kpc}^3)$ y $(r_c \sim 0.223 \text{ kpc}, \rho_c \sim 2.51 \times 10^9 M_\odot/\text{kpc}^3)$ en los dominios pequeño y grande, respectivamente, representados con la línea azul. En el segundo método, se impone que la relación de escalamiento $Mr_c \sim \text{constante}$ se mantenga, lo que implica una restricción en los dos parámetros libres; en este caso, los parámetros ajustados son $(r_c \sim 0.311 \text{ kpc}, \rho_c \sim 2.13 \times 10^9 M_\odot/\text{kpc}^3)$ y $(r_c \sim 0.309 \text{ kpc}, \rho_c \sim 2.19 \times 10^9 M_\odot/\text{kpc}^3)$ en los dominios pequeño y grande, respectivamente, cuyos perfiles están representados con líneas rojas. Finalmente, la cola se ajusta con el perfil NFW [84]. Los parámetros de ajuste son $\rho_s \sim 4.6525 \times 10^5 M_\odot/\text{kpc}^3$, $r_s \sim 7.473 \text{ kpc}$ para el dominio pequeño y $\rho_s \sim 3.3 \times 10^5 M_\odot/\text{kpc}^3$, $r_s \sim 8.67 \text{ kpc}$ para el dominio grande. La simulación tiene una duración de $\sim 12.7 \text{ Gyr}$, un intervalo de tiempo dentro del cual ninguna de las configuraciones ha alcanzado el estado de virialización, lo que explica por qué, en el caso del dominio periódico, la restricción $Mr_c \sim \text{constante}$ aún no se cumple, como se esperaba de acuerdo a [87].

Para comparación, simulamos este escenario utilizando condiciones de aislamiento, donde se espera que el enfriamiento gravitacional lleve la configuración hacia un perfil solitónico de equilibrio en tiempo asintótico. Utilizamos los mismos parámetros numéricos que en la simulación con condiciones de frontera periódicas, con un dominio de lado 80 kpc y 30 solitones distribuidos inicialmente en una caja de lado 30 kpc alrededor del centro del dominio. Los resultados se resumen en la Figura 4.17, que incluye algunas instantáneas de la densidad a lo largo del eje x , ilustrando la concentración de densidad restringida por la presencia de la esponja. Además, una vista volumétrica de las instantáneas resalta la concentración de densidad y el perfil solitónico de la misma.

Los parámetros de ajuste para el perfil de densidad promedio del núcleo en la ec. (4.15) utilizando el primer método, con los dos parámetros de ajuste libres, son $(r_c = 2.64 \text{ kpc}; \rho_c = 4.74 \times 10^5 M_\odot/\text{kpc}^3)$, mientras que al utilizar el segundo método se obtienen $(r_c = 2.54 \text{ kpc}; \rho_c = 4.81 \times 10^5 M_\odot/\text{kpc}^3)$ al imponer la condición $Mr_c \sim \text{constante}$. Cabe destacar que, a dife-

rencia del dominio periódico, en este caso los perfiles de ajuste son muy similares, como se ilustra con las curvas azules y rojas en la parte inferior de la Figura 4.17. Finalmente, para completar, los parámetros de una cola con el perfil NFW son $\rho_s \sim 1.74 \times 10^5 M_\odot/\text{kpc}^3$ y $r_s \sim 6.26 \text{ kpc}$.

Esta simulación ilustra la dinámica del enfriamiento gravitacional en 3D a partir de condiciones iniciales que están lejos de ser esféricamente simétricas. Trabajos previos (ver, por ejemplo, [10]) demostraron que cuando las condiciones iniciales son esféricamente simétricas, el enfriamiento gravitacional lleva a la configuración asintóticamente hacia la solución de estado fundamental del núcleo solitónico, con un perfil de densidad que disminuye abruptamente fuera del núcleo. También se encontró que algunas no esfericidades fueron expulsadas en escenarios simples axisimétricos [90]. Como resultado, se ha hipotetizado que el núcleo solitónico correspondiente al estado fundamental es la solución atractora para un rango más amplio de condiciones iniciales, siempre que se permita que ocurra el enfriamiento gravitacional y se dé tiempo suficiente al sistema para alcanzar un estado de relajación.

Nuestra simulación aquí representa un intento de demostrar esto de manera explícita en 3D, a partir de condiciones iniciales que se apartan claramente de la simetría esférica, con control del enfriamiento gravitacional implementado a través de los efectos aislantes de las condiciones de frontera tipo esponja. Si bien el tiempo simulado, del orden de 12.7 Gyr, no es lo suficientemente largo como para permitir que el sistema complete su relajación hacia el estado asintótico de la solución de estado fundamental, claramente se está moviendo en esa dirección con el tiempo. Por el contrario, cuando la misma configuración inicial se simuló con condiciones de frontera periódicas, sin esponja para absorber la masa y energía expulsadas por el enfriamiento gravitacional, el perfil de densidad se ajusta con un núcleo solitónico rodeado por un halo. Aunque no está completamente relajado al final del tiempo simulado, el caso aislado (es decir, con esponja) ya muestra un núcleo solitónico rodeado por un perfil que disminuye exponencialmente hacia radios grandes, mucho más pronunciadamente que en el caso con condiciones de frontera periódicas.

Relación de escalamiento de masa

En [22], basado en los resultados de Simulaciones de Formación de Estructuras (SFS), se encontró una relación de escalamiento entre las siguientes cantidades:

$$M_c = \text{constante} \left(\frac{E}{M} \right)^{1/2}, \quad (4.24)$$

donde M_c es la masa central integrada del perfil de densidad de solitón (4.15) desde el origen hasta el radio del core r_c (4.22), $E = K + W$ es la energía total y M la masa total. La relación

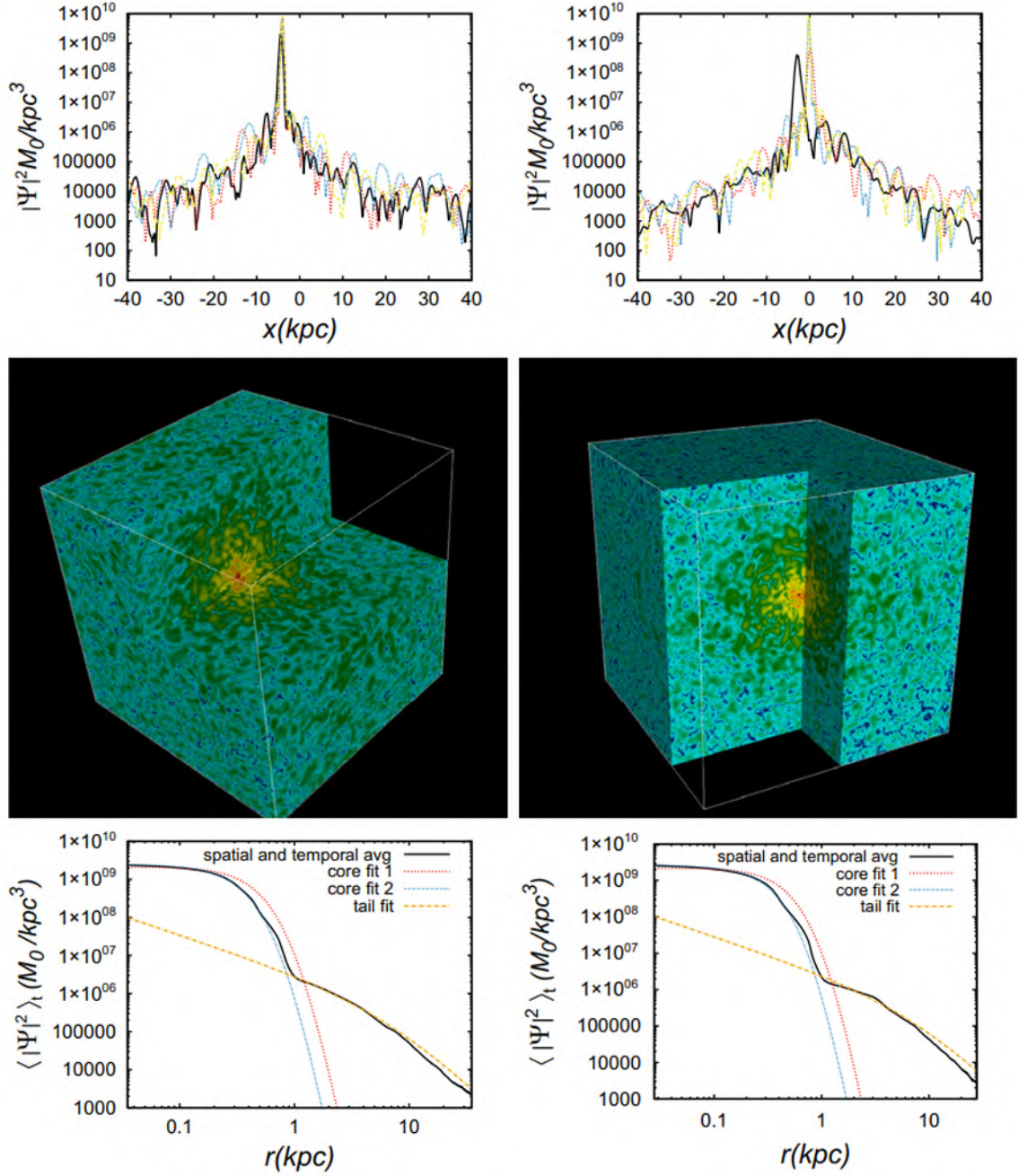


Figura 4.16: A la izquierda/derecha mostramos los resultados para el dominio pequeño/grande. En la primera fila mostramos algunas instantáneas de la densidad a lo largo de una línea paralela al eje x que pasa por la posición de máxima densidad, lo que muestra cuán dinámico es el sistema. En la segunda fila mostramos una vista en volumen de la densidad que ilustra la distribución de la nube bosónica. En la tercera fila mostramos el ajuste de la densidad usando la fórmula (4.15) para el núcleo y (4.19) para la cola NFW.

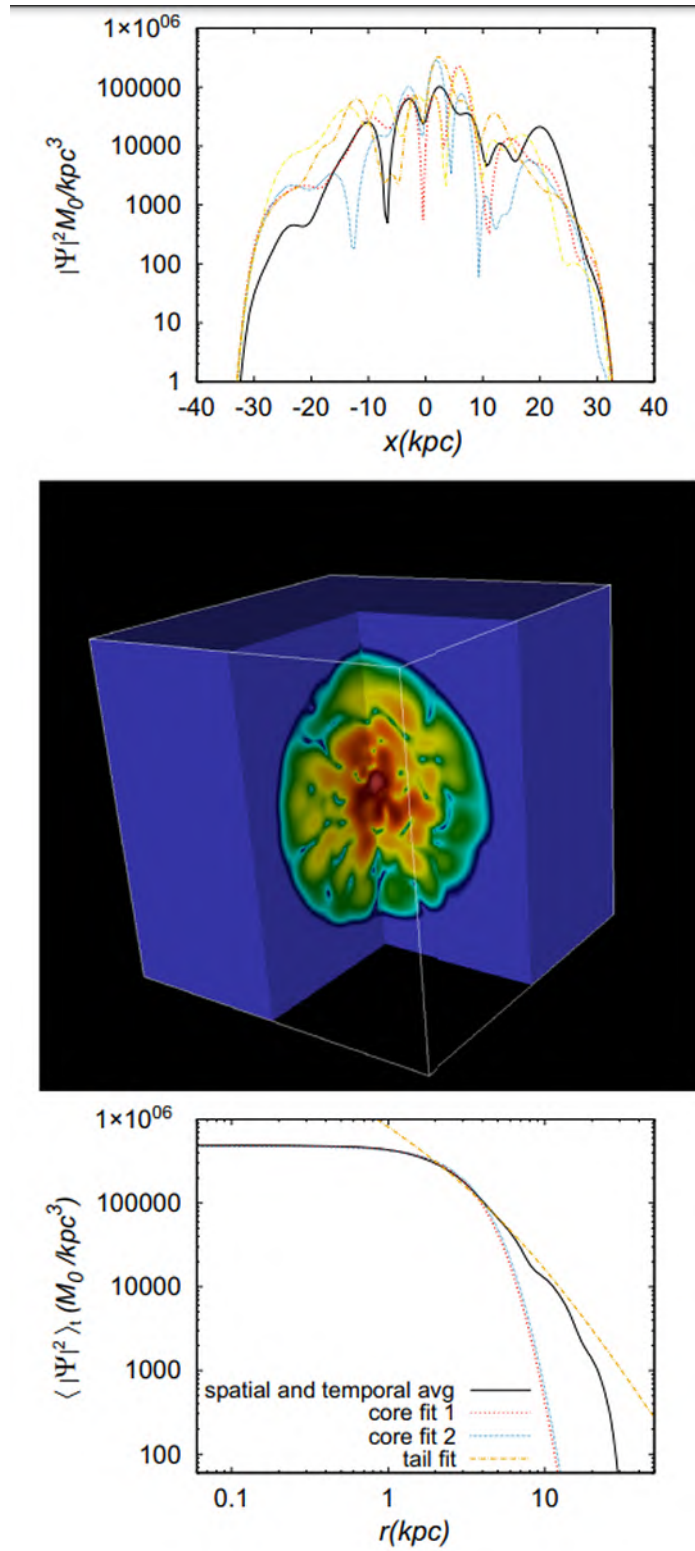


Figura 4.17: Parte superior: Instantáneas de la densidad a lo largo del eje x que ilustran cuán localizada está la densidad. Parte media: Vista tridimensional de la densidad que muestra la concentración de materia dentro de la región esponja. Parte inferior: Perfil de densidad y su comparación con los ajustes en las regiones del núcleo y la cola; nótese que los ajustes del núcleo concuerdan.

de escalamiento (4.24) asocia la masa del núcleo en el lado izquierdo con la dispersión del halo en el lado derecho. Este resultado fue confirmado mediante un conjunto controlado de simulaciones locales de fusiones multinúcleos que colapsan para formar estructuras núcleo-halo [91].

Posteriormente, en [87], se propuso una relación de escalamiento diferente, donde la masa del núcleo se normaliza con M , dejando una relación de escalamiento invariante bajo la escala λ . La relación de escalamiento propuesta es:

$$\frac{M_c}{M} = \beta \Xi^\alpha, \quad \Xi := \frac{|E|}{M^3} \left(\frac{\hbar}{Gm_B} \right)^2, \quad (4.25)$$

donde α y β son constantes determinadas a partir de simulaciones. Esta relación se obtuvo a partir de fusiones binarias y se encontró que en varias simulaciones con diferentes condiciones iniciales $\alpha \sim 1/4$ en el caso de fusiones en órbita y $\alpha \sim 1/6$ para colisiones frontales. Para fusiones multicore similares a las de [91], se encontró que α está entre $1/6$ y $1/2$. Una firma importante de este análisis es que se utilizaron condiciones de frontera de aislamiento en las simulaciones.

En [25], un estudio similar basado en fusiones multisoliónicas encuentra que $\alpha \sim 1/3$, más precisamente en el rango de $1/4$ a $1/2$. La diferencia con los resultados de [87] podría deberse a las condiciones de frontera utilizadas, aisladas en [87] y periódicas en [25], lo que ayuda a preservar la energía y la masa en todo el dominio durante las simulaciones.

Otros estudios basados en diferentes historias de formación de núcleos encuentran $\alpha \sim 1/5 - 1/4$ como resultado del ajuste de núcleo-halos finales, y $\alpha \sim 1/3$ cuando la relación de escalamiento se promedia espacialmente [15]. A partir del colapso esférico se encontró que $\alpha \sim 1/3$ [92, 14]. Más recientemente, en [93], la construcción de soluciones núcleo-halo con simetría esférica muestra $\alpha \sim 1/3$, mientras que al relajarse $\alpha \sim 1/2$. Las diferencias entre las diversas relaciones de escalamiento llevaron al análisis en [94], donde se identifica la diversidad de α con diferentes historias de formación usando varias simulaciones bajo diversos escenarios físicos [12].

Exploramos la posibilidad de que esta diversidad se deba a algunos detalles de implementación no completamente especificados en las simulaciones de *FDM*, específicamente las condiciones de frontera para el potencial gravitacional. En enfoques Lagrangianos que involucran, por ejemplo, métodos *SPH*, las condiciones de frontera no son un gran problema, ya que es suficiente cambiar la topología del dominio imponiendo condiciones periódicas sin imponer valores de referencia para el potencial gravitacional en ninguna frontera Euleriana. Sin embargo, cuando se utilizan simulaciones en el marco Euleriano para la dinámica *FDM*, como en las referencias principales [91, 87, 25], el potencial de referencia parece ser sutil e importante.

Para explicar nuestro punto, explotamos la invariancia de gauge V_0 del sistema SP, que permite establecer valores de referencia arbitrarios del potencial en las fronteras del dominio numérico. Luego producimos simulaciones de fusiones multicore en un dominio periódico y estudiamos el efecto de usar diferentes valores de referencia del potencial gravitacional sobre el valor de α .

Podemos distinguir entre dos escenarios considerados en las simulaciones de *FDM*. Uno de ellos asume que el sistema bajo estudio permanece aislado y las condiciones de frontera implementadas en el límite numérico simulan una superficie transparente que permite la salida de materia. En este caso, las cantidades M y E , integradas en el dominio D , cambian en el tiempo debido a la pérdida de materia expulsada durante el proceso de enfriamiento gravitacional [17, 10], y la cantidad Ξ no se conserva en el tiempo. En este escenario, como se hace en [87], las condiciones de frontera son únicas, en el sentido de que el potencial en las fronteras está dado por $V = -M/r +$ términos multipolares, donde r es la distancia desde el centro del dominio hasta cada punto en la frontera del dominio de simulación D correspondiente al caso aislado.

El segundo escenario, como se ha mencionado, corresponde al uso de condiciones de frontera periódicas, las cuales reciclan los componentes de materia y energía dentro del dominio numérico. De este modo, las propiedades globales, como la masa total M y la energía E , se preservan a lo largo de la evolución del sistema. En este caso, las condiciones de frontera carecen de una especificación clara, y el valor del potencial gravitacional en la frontera no está bien definido en varios análisis que estudian la relación de escala entre el núcleo y el halo. Entre los dos tipos de condiciones de frontera existen una serie de efectos que pueden ser curiosidades o tener implicaciones serias, como se discute en [73], los cuales pueden depender del tipo de condición de frontera combinada con el tamaño del dominio de simulación.

El dominio periódico es en el que queremos enfocarnos, ya que es el más utilizado en la construcción de relaciones de escala núcleo-halo en simulaciones dinámicas de *FDM*. Comenzamos señalando que el sistema de Schrödinger-Poisson es invariante bajo la transformación de norma V_0 , definida por

$$\{\Psi, V\} \rightarrow \{\Psi e^{-im_B V_0 t/\hbar}, V + V_0\}, \quad (4.26)$$

lo cual deja invariantes a ρ , M y K , mientras que la energía gravitacional sufre la traslación

$$W \rightarrow W + V_0 M. \quad (4.27)$$

Como consecuencia, la energía total se transforma como $E \rightarrow E + V_0 M$, lo cual a su vez cambia el valor de Ξ . Esto compromete la relación de escala (4.25), la cual depende de V_0 .

Ilustramos este efecto utilizando un único escenario asequible, consistente en la fusión multinúcleo que forma una configuración final de núcleo-envolvente *FDM*. De manera similar a [91, 87, 25], preparamos conjuntos de datos iniciales con entre 3 y 18 solitones, con masas aleatorias que van desde $1.5 \times 10^8 M_\odot$ hasta $4 \times 10^8 M_\odot$, distribuidos aleatoriamente dentro de un cubo de 60 kpc de lado. Este cubo está centrado dentro del dominio numérico, que es un cubo de 80 kpc de lado. Asumimos una masa del bosón $m_B = 10^{-22} \text{eV}/c^2$. Los datos iniciales también están preparados de tal manera que no haya un momento angular neto, de modo que la relación de escala dependa solo de M y E , y no del momento angular, como ocurre en las fusiones binarias.

Evolucionamos estas condiciones iniciales utilizando condiciones de frontera periódicas. Las resoluciones de tiempo y espacio son $h = 62.5 \text{ pc}$ y $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3} \text{ Gyr}$, y la evolución dura 14 Gyr para permitir que el sistema se relaje. Utilizamos estas simulaciones para explorar el comportamiento usando diferentes valores de V_0 . Definimos tres valores diferentes para el potencial gravitacional en la frontera:

Potencial A. En un primer escenario, fijamos el potencial en las caras de la frontera como

$$V_A = V - \text{máx}(V) - G \frac{M}{r_{\text{max}}}, \quad (4.28)$$

donde $\text{máx}(V)$ representa el valor máximo de V , que ocurre en las esquinas de la caja, y $r_{\text{max}} := \sqrt{3}/40 \text{ kpc}$ es la mitad de la longitud diagonal del dominio cúbico. Este potencial se utiliza como una aproximación de las condiciones de frontera monopolaes utilizadas en sistemas aislados.

Potencial B. Añadimos un valor constante V_0 a V_A

$$V_B = V_A + V_0, \quad (4.29)$$

lo que corresponde a un simple cambio de referencia de V_A a través de la constante V_0 , y en principio, de acuerdo con la invarianza (4.26), debería dar la misma dinámica que con V_A , excepto por una fase en Ψ . Para este ejercicio usamos dos valores de la constante $V_0 = 1843, 3685 \text{ km}^2/\text{s}^2$, o equivalentes a $V_0 = 5, 10$ en unidades del código.

Como ilustración de la evolución de estas fusiones multicore, en la Fig. 4.18 mostramos instantáneas de la densidad ρ , $\text{Re}(\Psi)$ y la fase de Ψ durante la evolución para una de nuestras simulaciones. Las instantáneas corresponden a 0, 3, 9 y 14 Gyr de izquierda a derecha, y se toman en un plano perpendicular al eje y que pasa por el centro del núcleo final. Estas gráficas muestran el proceso de acumulación de materia durante la simulación, así como el

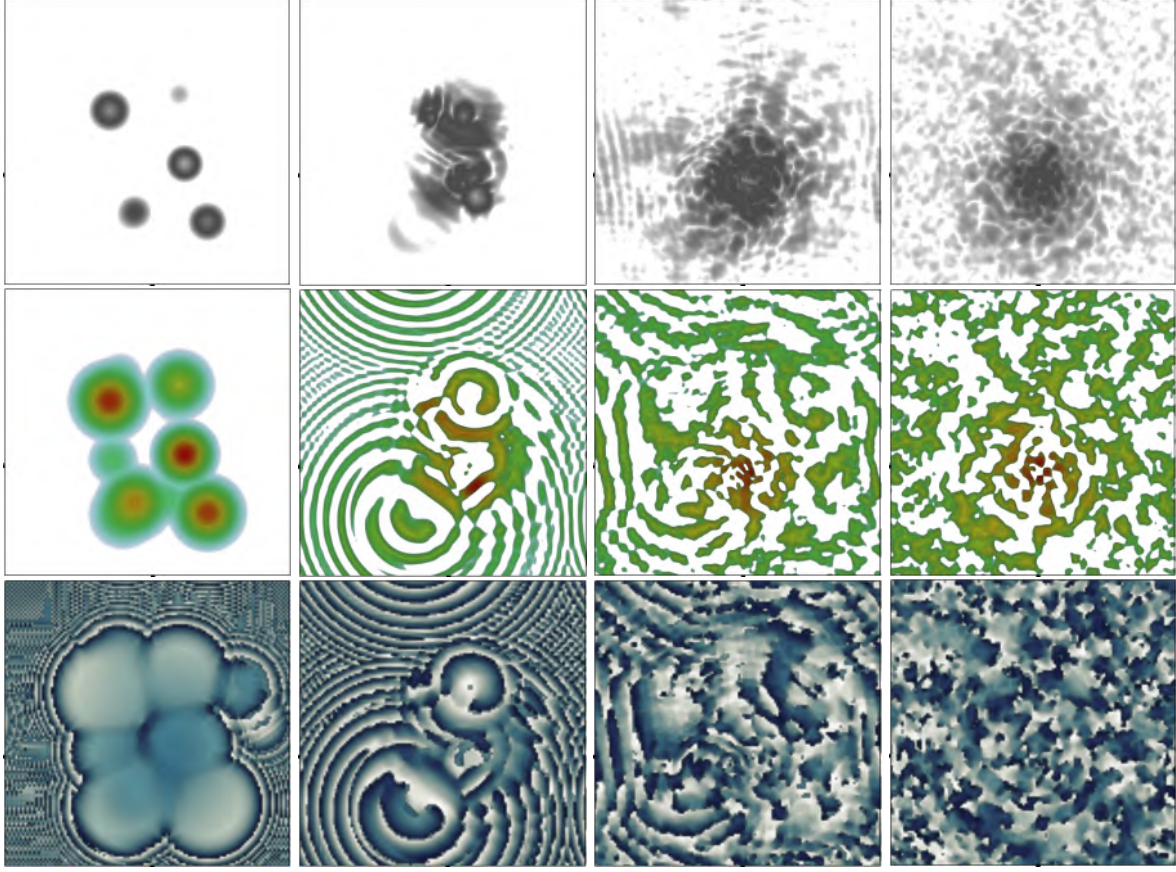


Figura 4.18: Instantáneas de una de nuestras simulaciones, para la densidad ρ en la fila superior, la parte real de Ψ en la fila del medio y la fase de Ψ en la fila inferior. Estas se toman, de izquierda a derecha, en los momentos 0, 3, 9 y 14 Gyr, en un plano perpendicular al eje y que pasa por el núcleo final. La densidad ilustra la acumulación de varios núcleos iniciales desde el inicio hasta el tiempo final. La parte real y la fase de Ψ muestran los patrones de interferencia y la evolución de la función de onda en el dominio periódico.

comportamiento de la función de onda. Utilizamos esta ventana temporal de evolución para que se forme un núcleo, mientras que para nuestro análisis calculamos promedios espaciales y temporales de la densidad solo durante el intervalo entre 12 y 14 Gyr, como se detalla a continuación.

Simulamos las fusiones multinúcleo y procesamos los datos como se describe para una simulación particular anteriormente, hasta obtener M_c en función del tiempo. Este valor de M_c se calcula cada 0.05 Gyr entre los 12 y 14 Gyr. Luego calculamos el promedio de los 41 valores de M_c en esta ventana temporal, y la desviación estándar de todos estos valores se utiliza para definir una barra de error en el valor de M_c . Este valor, junto con las integrales M y E en todo el dominio, define puntos en un diagrama M_c/M vs Ξ . Estos puntos se ajustan con el ansatz (4.25) para encontrar los mejores valores de ajuste de α y β .

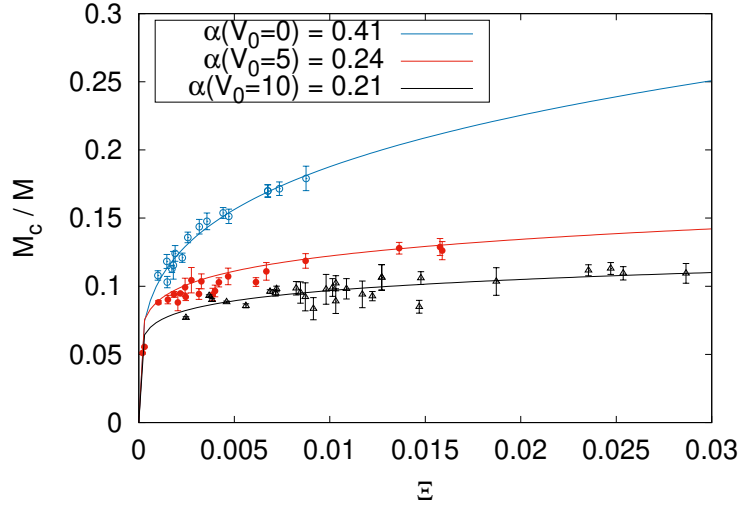


Figura 4.19: Graficamos M_c/M vs Ξ para cada una de las simulaciones, y para los tres casos con $V_0 = 0, 5, 10$ en azul, rojo y negro respectivamente. Cada punto corresponde al promedio de los valores de M_c durante los últimos 2 Gyr de cada simulación, mientras que las barras de error son la desviación estándar de los valores utilizados para calcular dicho promedio. Las líneas continuas son los mejores ajustes utilizando la fórmula (4.25).

Los resultados se resumen en la Figura 4.19, donde mostramos los ajustes de la relación de escala núcleo-halo con la fórmula (4.25) obtenida de nuestras simulaciones utilizando los potenciales V_A y los dos casos V_B , específicamente para $V_0 = 0, 5, 10$. Los valores del exponente α son respectivamente $\alpha = 0.407 \pm 0.008$, 0.237 ± 0.011 , 0.212 ± 0.017 .

Para el potencial V_A , es decir $V_0 = 0$, correspondiente a la condición de frontera monopolar aproximada, encontramos que la relación de escala núcleo-halo tiene un exponente $\alpha \approx 0.4$, consistente con las fusiones multinúcleo reportadas en [25] y las estructuras generales construidas en casos de simetría esférica [93], donde la condición de frontera monopolar se impone por construcción. Por otro lado, para el potencial V_B con $V_0 = 5, 10$, α es cercano a $\sim 1/4$. Aunque dinámicamente es el mismo sistema, mostramos cómo, redefiniendo el potencial de referencia, encontramos una relación de escala diferente.

En resumen, en esta sección se describieron simulaciones de fusiones de núcleos galácticos que dieron lugar a la formación de las primeras galaxias. Se enfatizó la importancia de las condiciones de frontera y sus implicaciones en la dinámica de estos sistemas. Se destacó que, en el caso de simulaciones con condiciones de frontera aisladas, el efecto de enfriamiento gravitacional eventualmente lleva al sistema a su estado base, mientras que las condiciones de frontera periódicas, al mantener cantidades globales como la masa y la energía total conservadas, simulan un escenario que conduce a estructuras más dinámicas fuera del núcleo galáctico, adoptando un perfil tipo NFW (4.19).

Encontramos que la relación de escala núcleo-halo puede variar dependiendo del valor de referencia del potencial gravitacional. En dominios periódicos, esto podría ser el factor responsable de la aparición de distintos valores de α en diferentes escenarios de simulación y tamaños de dominio. Ilustramos este resultado utilizando la invariancia de calibración en V_0 dentro del escenario particular de fusiones de múltiples núcleos.

Especulamos que la falta de estandarización en la elección del potencial gravitacional de referencia en diversas simulaciones podría ser una de las razones detrás de la dispersión y diversidad observada en la relación de escala, como se ha estudiado en, por ejemplo, [80, 94].

Es importante destacar que los resultados de este trabajo aplican al caso en el que el dominio es periódico y se impone un valor del potencial en las caras del dominio. En contraste, el desplazamiento del potencial no es relevante cuando se emplean condiciones de frontera aisladas, como en [87].

SECCIÓN 4.3

Soluciones esféricas con estructura núcleo-halo

En las secciones anteriores hemos descrito el proceso en el cual se crearon las primeras estrellas de bosones a partir de una densidad homogénea e isotrópica. Con estas estrellas se formaron las primeras galaxias a partir de fusiones, dando como resultado galaxias con un perfil promedio descrito mediante

$$\rho_{\text{NH}} = \rho_{\text{soliton}}(r)\Theta(r - r_t) + \rho_{\text{halo}}(r)\Theta(r_t - r), \quad (4.30)$$

donde ρ_{soliton} corresponde al perfil empírico de los solitones 4.15 que se originan en el centro de las galaxias, de acuerdo al modelo *FDM*. Este perfil está descrito por el radio del núcleo r_c y se extiende hasta un radio de transición r_t , que oscila entre los valores $\sim 2r_c$ y $4r_c$ [11, 95, 20]. El núcleo es envuelto por el perfil ρ_{halo} , usualmente descrito por el perfil de NFW 4.19. Sin embargo, este perfil es solo un promedio espacial y también temporal, por lo que si deseamos describir la dinámica de este tipo de galaxias, es necesario construir una función de onda consistente con el modelo. En esta sección exploraremos dos métodos distintos para lograrlo.

4.3.1 Soluciones núcleo-halo no diferenciables

Proponemos un método para construir configuraciones de equilibrio núcleo-halo, que son soluciones del sistema de ecuaciones de SP asumiendo simetría esférica e independencia temporal. Estas configuraciones cubren el dominio $[0, r_{\max}] = [0, r_t] \cup [r_t, r_{\max}]$, es decir, la región del núcleo unida con la región del halo, donde r_t es un radio de transición entre ambas regiones. En el núcleo asumimos que hay una solución solitónica, y desde r_t en adelante integramos las ecuaciones estacionarias de SP asumiendo ciertas condiciones de frontera en r_t y r_{\max} . La familia de soluciones está parametrizada por la masa total de la configuración, y el perfil de densidad del halo se ajusta para cumplir con el valor de la masa total.

Se encuentran soluciones de equilibrio no triviales para una velocidad radial no nula de la FDM en la región del halo, lo cual compromete su estabilidad. Para estudiar los efectos de la velocidad del halo, evolucionamos las soluciones de equilibrio y encontramos que, tras un tiempo transitorio inicial, la densidad se redistribuye y forma una nueva configuración que llamamos solución *relajada*, ya que resulta de la evolución de una solución de equilibrio que de alguna manera está en un estado de equilibrio *tenso*. La solución relajada oscila cerca de un estado virializado y, en promedio, también presenta la estructura núcleo-halo. Este no es un efecto nuevo; también ocurre en soluciones multimodales construidas en [96], donde la suposición de estacionariedad es solo una aproximación que permite la construcción de estados iniciales, aunque después de la evolución la configuración se redistribuye y oscila en el tiempo.

Un análisis adicional incluye la curva de rotación (RC) asociada tanto a las configuraciones de equilibrio como a las relajadas. Medimos cómo la RC de estas últimas se desvía de las primeras. Encontramos que la desviación es de porcentajes menores al 15 % incluso para razones de masa núcleo-halo del orden de ~ 0.2 , lo cual corresponde a configuraciones dominadas por el halo, mientras que para configuraciones dominadas por el núcleo, la desviación debería ser aún menor.

Asumiendo simetría esférica, independencia temporal de la densidad y que la fase puede escribirse como $S(t, r) = -\omega t + \tilde{S}(r)$, donde r es la coordenada radial, las ecuaciones se reducen al siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en el marco de MP de la Sección 2.2:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho v) = 0, \quad (4.31)$$

$$\frac{1}{2} v^2 + Q + V = \omega, \quad (4.32)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \rho - \langle \rho \rangle, \quad (4.33)$$

donde la velocidad radial es $v := \frac{d\bar{S}}{dr}$. El núcleo solitónico de las estructuras encontradas en simulaciones coincide con soluciones de equilibrio construidas asumiendo $v = 0$ y aislamiento asintótico $\epsilon = 0$ como se describe en [77], que son equivalentes a aquellas en el marco SP [64, 65]. Estas soluciones se aproximan con el perfil de densidad solitónico (4.15) obtenido empíricamente a partir de simulaciones de formación de estructuras [22, 25]. Donde $\omega \approx -0.6922$, $\rho_{0,nucleo} = 1$ con $r_c \approx 1.30569$.

Ahora, lo que hacemos es construir una solución del sistema (4.31)-(4.33) en el dominio $r \in [0, r_{\max}]$ dividido en dos regiones. En la región central del *núcleo* $r \in [0, r_t]$, $r_t < r_{\max}$, asumimos que hay un núcleo con el perfil de densidad (4.15), mientras que en el dominio $r \in [r_t, r_{\max}]$, que llamamos la región del *halo*, habrá un perfil de densidad resultante de la implementación de condiciones de frontera. Llamamos r_t al radio de transición entre núcleo y el halo. Dado que la densidad del núcleo está prescrita por la ecuación (4.15), solo se tiene que resolver el sistema (4.31)-(4.33) en la región del *halo* $r \in [r_t, r_{\max}]$, que escrito como un sistema de primer orden es:

$$\rho'_{halo} = u_{halo}, \quad (4.34)$$

$$u'_{halo} = 4(V_{halo} + \frac{1}{2}v_{halo}^2 - V_0)\rho_{halo} \quad (4.35)$$

$$-\frac{2u_{halo}}{r} + \frac{u_{halo}^2}{2\rho_{halo}}, \quad (4.36)$$

$$V'_{halo} = \frac{M_{halo}}{r^2}, \quad (4.37)$$

$$M'_{halo} = r^2 \rho_{halo}, \quad (4.38)$$

$$\bar{S}'_{halo} = v_{halo}, \quad (4.39)$$

donde $' := \frac{d}{dr}$ y $v_{halo} = \frac{A}{r^2 \rho_{halo}}$ es prescrito, con A constante, como sugiere la condición en la ecuación (4.31). Para la integración, imponemos las siguientes condiciones de frontera el radio de transición r_t :

$$\begin{aligned} \rho_{halo}(r_t) &= \rho_{nucleo}(r_t), \\ u_{halo}(r_t) &= u_{nucleo}(r_t), \\ V_{halo}(r_t) &= V_{nucleo}(r_t), \\ M_{halo}(r_t) &= M_{nucleo}(r_t), \\ \bar{S}_{halo}(r_t) &= 0, \\ M_{halo}(r_{\max}) &= M_{\max}, \end{aligned}$$

donde V_{nucleo} y M_{nucleo} corresponden a la solución de la ecuación de Poisson (4.33) con den-

sidad (4.15). Nótese que la parte espacial de la fase \bar{S} es continua en r_t , pero no es necesario que sea diferenciable, lo que implica que v tiene una discontinuidad en r_t . Además, el sub-sistema (4.34)-(4.38) es invariante bajo el cambio de signo en la velocidad v , excepto por la ecuación (4.39), lo que implica que se pueden construir dos soluciones que satisfacen las condiciones de frontera, una con velocidad radial hacia adentro y otra con velocidad radial hacia afuera.

Resolvemos estas ecuaciones utilizando el método de *shooting* con un integrador de Runge-Kutta de cuarto orden que busca el valor de A , comenzando con una suposición inicial hasta que se cumple la condición $M_{halo}(r_{max}) = M_{max}$ dentro de una tolerancia. Los resultados son el perfil de densidad radial, el campo de velocidad radial, el potencial gravitacional y el perfil de masa del halo.

Una vez que se ha resuelto el sistema (4.34)-(4.39), es posible escribir la función de onda en todo el dominio núcleo-halo (NH) de la siguiente manera:

$$\Psi_{NH}(t, r) \approx \begin{cases} \sqrt{\rho_{nucleo}(r)} e^{-V_0 i t} & r < r_t, \\ \sqrt{\rho_{halo}(r)} e^{-V_0 i t + i \bar{S}_{halo}(r)} & r \geq r_t. \end{cases} \quad (4.40)$$

Algunos ejemplos ilustrativos son los siguientes. Si el radio de transición es $r_t = 3.5r_c \approx 4.58$ en unidades del sistema de ecuaciones, un valor consistente con los de [25], asumiendo tres valores de la masa total $M_{max} = 10, 20, 40$ y usando el dominio con $r_{max} = 100$, el parámetro de disparo converge a los valores $A \approx \pm 8.61 \times 10^{-2}, \pm 1.51 \times 10^{-1}$ y $\pm 2.08 \times 10^{-1}$ respectivamente. En la Figura 4.20 mostramos el perfil de densidad de estas tres soluciones representativas. La densidad tiene el perfil del núcleo (4.15) para $r < r_t$, mientras que para $r \geq r_t$ las líneas punteadas corresponden a la solución en la zona de la *halo* de las Ecuaciones (4.34)-(4.39). El perfil de densidad muestra las típicas oscilaciones de los modos excitados con $\ell = 0$ explorados en [96]. En nuestro caso, el perfil de densidad resultante admite un ajuste con el perfil NFW:

$$\rho_{halo}(r) = \frac{\rho_{0,NFW}}{\left(\frac{r}{R_s} \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)\right)^2}. \quad (4.41)$$

Nótese que la materia en la región del halo tiene una velocidad finita dada por $v_{halo} = \frac{A}{r^2 \rho_{halo}}$. La solución resultante en todo el dominio es, por tanto, un núcleo estacionario rodeado por una halo con una estructura en capas de densidad y velocidad. A diferencia de [96], el objetivo de la solución no es el perfil NFW, sino M_{max} . Este es un aspecto conveniente, ya que automáticamente tenemos una relación de masa núcleo-halo como objetivo que describimos más adelante.

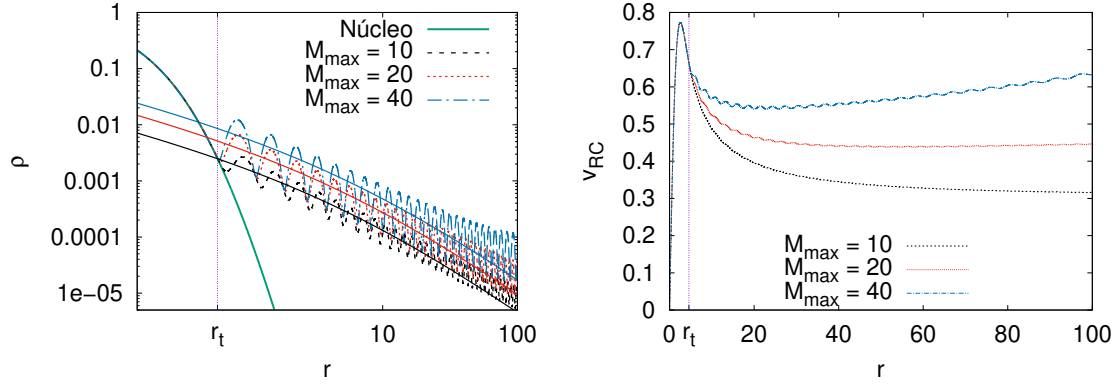


Figura 4.20: (Arriba) Perfil de densidad de las soluciones con masa total $M_{max} = 10, 20, 40$ y $r_{max} = 100$. Para $r < r_t$, el perfil es solitónico. Fuera de esto, para $r \geq r_t$, las líneas punteadas corresponden al perfil obtenido para las soluciones de equilibrio, mientras que las líneas sólidas son los ajustes de ρ_{halo} usando la fórmula NFW (4.41) que mejor se ajusta a la región del halo. (Abajo) Curvas de rotación correspondientes a las tres soluciones, donde se puede notar la tendencia de mayor velocidad para mayor masa.

Además de la densidad, en la Figura 4.20 también mostramos la curva de rotación (RC) debida al núcleo-halo construido con la fórmula

$$v_{RC}(r) = \begin{cases} \sqrt{M_{nucleo}(r)/r} & r < r_t, \\ \sqrt{M_{halo}(r)/r} & r \geq r_t \end{cases} \quad (4.42)$$

y se puede notar la tendencia de una mayor velocidad de rotación para una mayor masa total M_{max} . Estos tres casos ejemplifican el efecto de M_{max} en el perfil de densidad y, por lo tanto, en la curva de rotación.

Ahora ilustramos los efectos del radio de transición r_t . En la Figura 4.21 mostramos los resultados de tres soluciones con $r_t = 2.5r_c, 3.0r_c$ y $3.5r_c$, un rango admisible según [97, 94], mientras esta vez fijamos la masa total objetivo en $M_{max} = 50$. La densidad del núcleo es inafectada, mientras que la densidad del halo es diferente en la fase y amplitud de la oscilación. Dado que la diferencia en el perfil de densidad del halo es pequeña, las curvas de rotación también son muy similares para los tres valores del radio de transición. Los resultados de las Figuras 4.20 y 4.21 implican que las curvas de rotación solo dependen significativamente de la masa total objetivo M_{max} del sistema y no del radio de transición r_t que separa núcleo de halo en nuestras soluciones.

Discontinuidad de v . Examinemos de cerca la condición de continuidad en la fase \bar{S} en r_t que se refleja en una discontinuidad del campo de velocidad v . Para ello mostramos las partes real

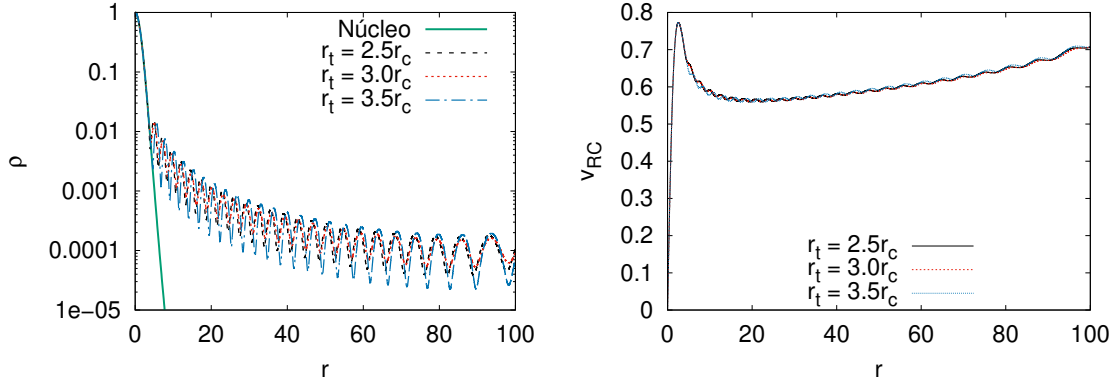


Figura 4.21: (Arriba) Perfil de densidad de las soluciones con $r_t = 2.5r_c$, $3.0r_c$ y $3.5r_c$ para la masa $M_{max} = 50$. (Abajo) Curvas de rotación de las tres soluciones. Estos resultados indican que r_t no afecta el perfil del halo, y por lo tanto la curva de rotación siempre y cuando la masa total sea la misma.

e imaginaria de la función de onda de la solución en la Figura 4.22, sabiendo que $\Psi = \sqrt{\rho}e^{iS}$, donde ρ y S son las soluciones del sistema (4.34)-(4.39) para el caso con $M_{halo}(100) = 10$. Se puede observar que hay una no-diferenciabilidad en la esfera de radio r_t donde el núcleo y el halo están unidos. Uno podría sentir la tentación de evitar este problema manipulando la fase de la función de onda del núcleo solitónico, ya que la función de onda $\Psi(r, t) = e^{i\omega t}\psi(r)$, con ω el valor propio de la solución de equilibrio del estado fundamental [65], y uno podría manipular la fase con un t apropiado para que $\text{Im}(\Psi)$ no sea cero con la continuidad apropiada en $r = r_t$. Sin embargo, esto implicaría automáticamente que la fase S dentro del núcleo no es cero, y eso significaría que la velocidad allí tampoco sería cero, lo cual está en desacuerdo con la construcción de soluciones solitónicas [77].

Una vez que hemos visto que M_{max} es el parámetro más influyente en las soluciones, recopilamos información que depende de su valor. Fijamos $r_t = 3.5r_c$ y construimos un conjunto de soluciones para $M_{max} \in [5, 50]$. En la Figura 4.23 mostramos la dependencia de la constante A como función de la condición de frontera $M_{halo}(r_{max} = 100) = M_{max}$, donde la curva sigue un perfil logarítmico.

Diagnóstico

Para monitorear la evolución del sistema, calculamos la masa total definida como $M = \int_D |\Psi|^2 d^3x$. Para verificar el comportamiento de la energía, calculamos la energía cinética $K = -\frac{1}{2} \int_D \Psi^* \nabla^2 \Psi d^3x$ y la energía potencial $W = \frac{1}{2} \int_D V |\Psi|^2 d^3x$, las cuales son útiles para obtener la energía total $K + W$ y la función de virialización $2K + W$.

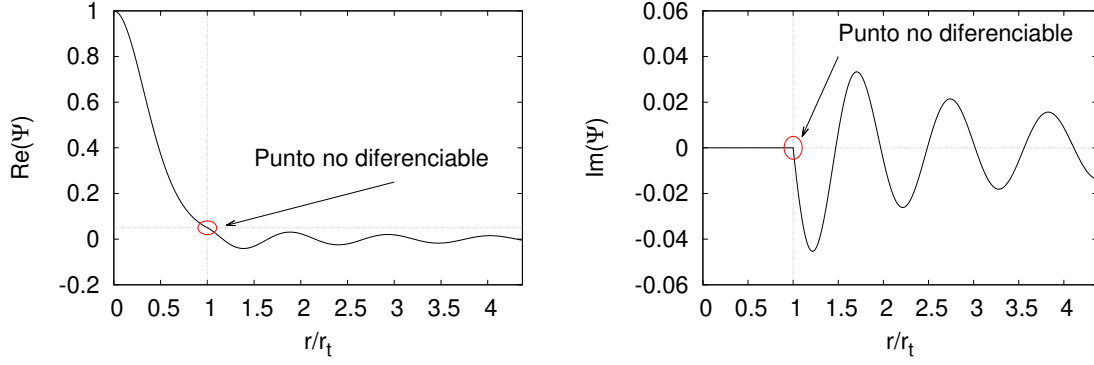


Figura 4.22: En la parte izquierda/derecha mostramos la parte real/imaginaria de la función de onda. Nótese la no-diferenciabilidad en $r_t = 3.5r_c$ para la masa objetivo $M_{\text{halo}}(100) = 10$. Esta condición es el resultado de unir la solución del núcleo en la región $r < r_t$ con la solución del halo en la región $r \geq r_t$.

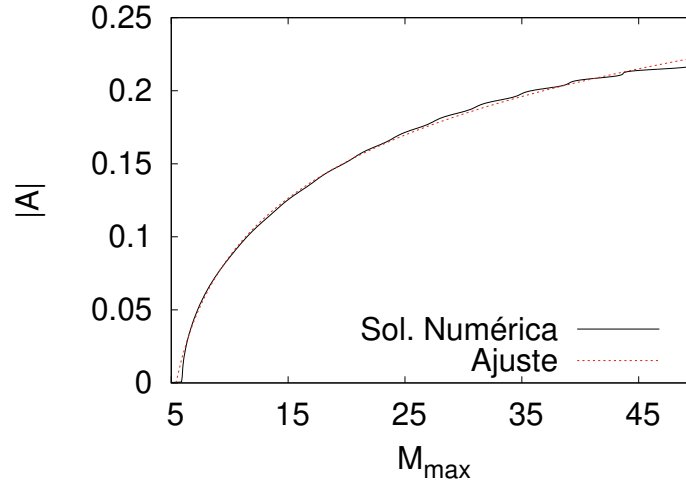


Figura 4.23: Constante A como función de M_{max} obtenida del método de *shooting* y el ajuste con una función logarítmica.

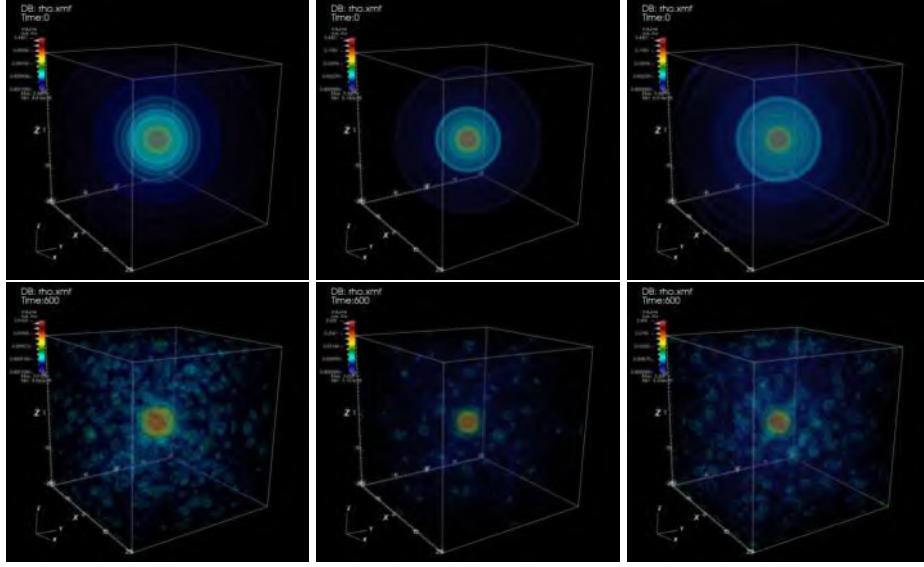


Figura 4.24: Instantáneas de la densidad $|\Psi|^2$ en los tiempos $t = 0$ (fila superior) y $t = 600$ (fila inferior) para la evolución de las configuraciones de equilibrio con $M_{max} = 10$ (columna izquierda), $M_{max} = 20$ (columna central) y $M_{max} = 40$ (columna derecha) con un radio de transición $r_t = 3.5r_c$. El dominio utilizado es $D = [-20, 20]^3$.

Evolución de las configuraciones. Utilizamos las mismas tres soluciones de equilibrio descritas anteriormente, con $M_{max} = 10, 20$ y 40 y el radio de transición en $r_t = 3.5r_c$, cuyos perfiles de densidad se muestran en la Figura 4.20. La simulación se lleva a cabo en dos tamaños de dominio espacial $D = [-20, 20]^3$ y $[-40, 40]^3$, utilizando resoluciones espaciales $40/63$ y $80/127$, respectivamente. El dominio temporal es $t \in [0, 600]$ y la resolución temporal es $\Delta t = 0.1$ en todos los casos.

En las Figuras 4.24 y 4.25 mostramos instantáneas de $|\Psi|^2$ en el tiempo inicial y $t = 600$, para la evolución de las tres soluciones con $M_{max} = 10, 20$ y 40 , ilustrando el desarrollo del sistema en los dominios pequeño y grande. La dinámica es desencadenada por la velocidad radial inicial de la materia en la región de la cola que perturba el núcleo y redistribuye la cola que interactúa consigo misma debido a las condiciones periódicas de frontera, lo que produce la típica interferencia observada en simulaciones de formación de estructuras así como la colisión de múltiples núcleos [22, 25, 23, 73].

En la Figura 4.26 presentamos la evolución de algunos escalares en función del tiempo. A la izquierda/derecha mostramos diagnósticos utilizando el dominio pequeño/grande. La primera fila muestra la evolución de la masa, que se conserva durante la evolución. La segunda fila muestra la energía total en función del tiempo, que después de un transitorio inicial permanece aproximadamente constante en el tiempo. La tercera fila muestra la cantidad $2K + W$, que inicialmente es cero pero luego aumenta debido al transitorio inicial, después de lo cual la cantidad empieza a oscilar cerca de cero, lo que indica que la configuración tiende a acer-

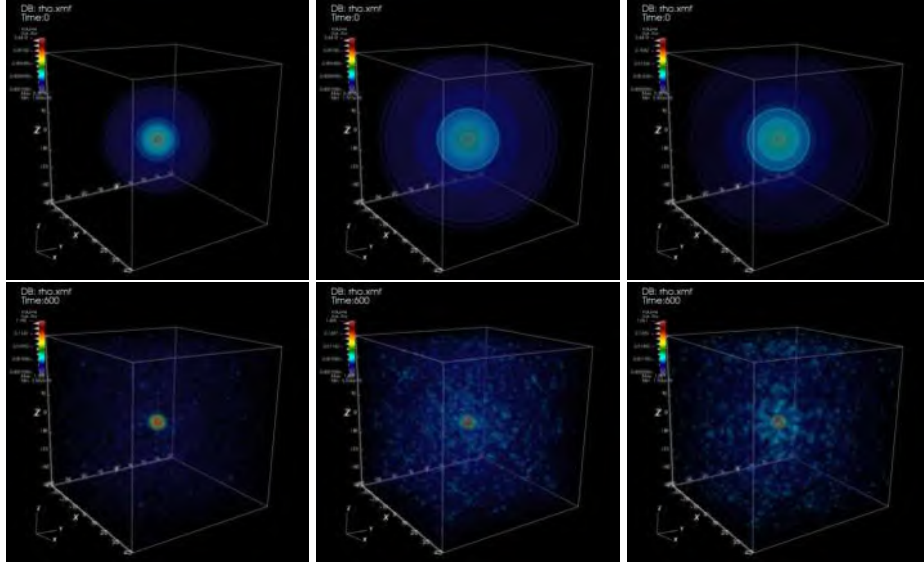


Figura 4.25: Instantáneas de la densidad $|\Psi|^2$ en los tiempos $t = 0$ (fila superior) y $t = 600$ (fila inferior) para la evolución de las configuraciones de equilibrio con $M_{max} = 10$ (columna izquierda), $M_{max} = 20$ (columna central) y $M_{max} = 40$ (columna derecha) con un radio de transición $r_t = 3.5r_c$. El dominio utilizado es $D = [-40, 40]^3$.

carse nuevamente a un estado virializado que llamamos configuración *relajada*. Finalmente, la cuarta fila muestra la densidad de masa en el origen en función del tiempo, que después del transitorio inicial oscila regularmente. El transitorio inicial se debe al hecho de que establecemos la constante A como positiva, por lo que la velocidad de la cola apunta hacia el núcleo, lo que produce un flujo entrante que comprime inicialmente el núcleo y la evolución es seguida por la expansión y estabilización alrededor de un estado virializado.

Evolución

La idea ahora es estudiar la evolución de estas soluciones. Sabiendo que la velocidad en la cola no es nula, se espera que el movimiento afecte las propiedades de toda la configuración núcleo-halo. Encontramos que, de hecho, la velocidad añade un impulso inicial a la solución y desencadena un comportamiento dinámico del *FDM* en todo el dominio. Lo que sigue es que la configuración se acomoda alrededor de un estado virializado, lo que llamamos una versión *relajada* de la solución. Por lo tanto, por un lado queremos medir cuán lejos está la configuración relajada de la solución inicial en términos de distribución de materia y, por otro lado, determinar que estas soluciones relajadas son de larga duración.

Para esto, interpolamos nuestra función de onda Ψ_{NH} 4.40 en un dominio 3D, donde resolvemos el sistema SP.

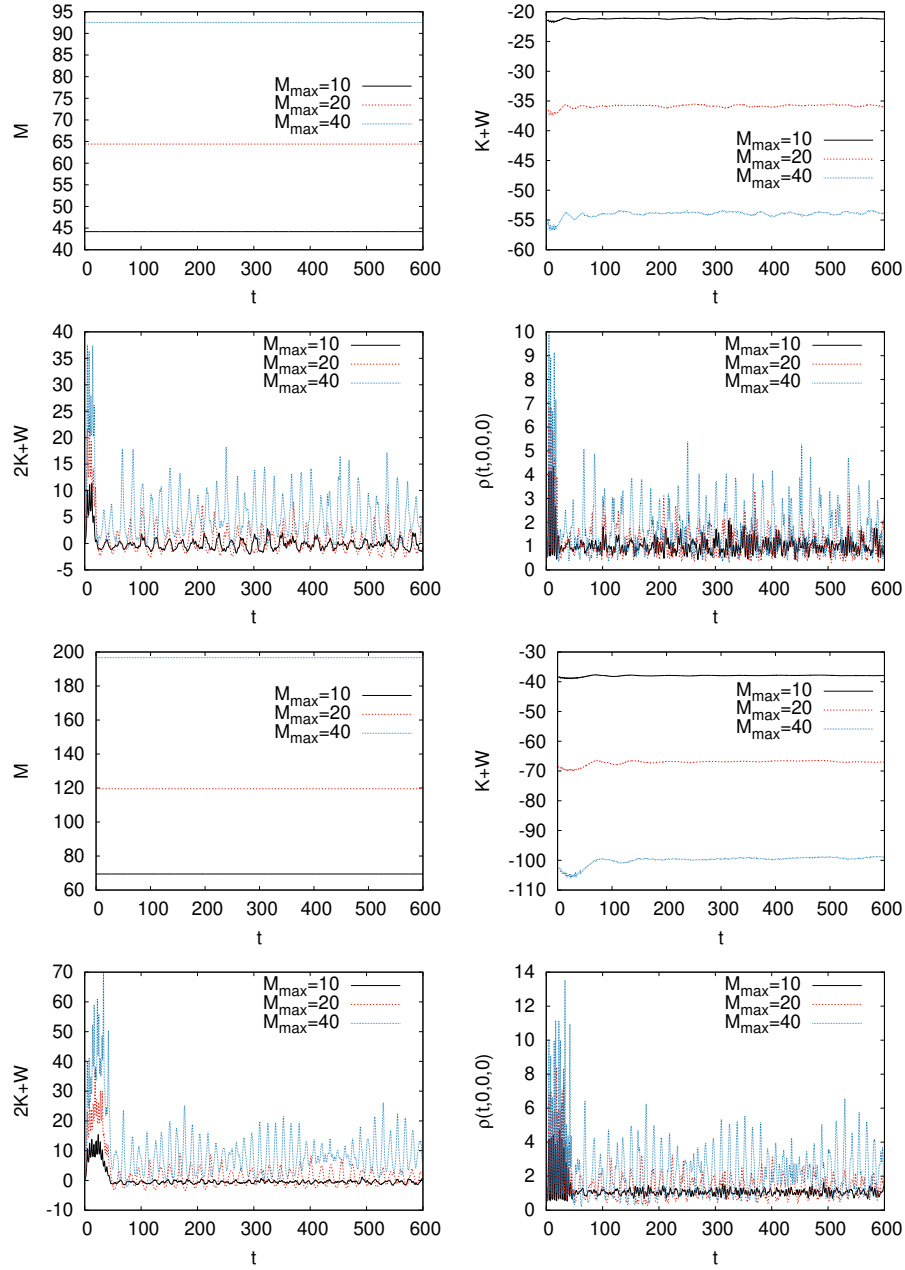


Figura 4.26: Escalares monitoreados durante la evolución en el dominio pequeño (columna izquierda) y el dominio grande (columna derecha). En la primera línea, la serie temporal de la masa muestra que los métodos de espectro pseudoespectral conservan la masa. En la segunda línea, la serie temporal de la energía total muestra que cuando la evolución comienza, la energía total se disipa y luego permanece aproximadamente constante. En la tercera línea, la serie temporal de la cantidad $2K+W$ ilustra cómo el sistema inicialmente virializado sufre el transitorio inicial y luego tiende a un estado casi virializado. En la cuarta línea, la serie temporal de la densidad de masa en el origen muestra que inicialmente la configuración colapsa ligeramente, causando un aumento rápido en la densidad, que luego se expande nuevamente y alcanza un valor cercano al inicial.

Densidad. Investigamos la utilidad de las configuraciones de equilibrio estudiando su evolución y evaluando cuánto se desvía la distribución de materia del perfil inicial. La evolución de la densidad se presenta en la Figura 4.27, donde la columna de la izquierda muestra la evolución en un dominio pequeño $D = [-20, 20]^3$, y la columna de la derecha muestra la evolución en el dominio grande $D = [-40, 40]^3$. Las primeras tres filas corresponden a $M_{max} = 10, 20$ y 40 , respectivamente. Las líneas negras corresponden a la densidad de la configuración de equilibrio, mientras que las líneas grises corresponden a una serie de instantáneas de la densidad que ilustran la variación del perfil a lo largo del tiempo. Las líneas punteadas corresponden al promedio temporal de la densidad, que es similar al de la configuración inicial. Las diferencias entre los perfiles de equilibrio y relajados son mayores para M_{max} grandes y menores cuando el sistema se evoluciona en el dominio grande.

Esto se puede explicar porque, según la Figura 4.23, la constante objetivo del método de *shooting* A es una función creciente de M_{max} , y por lo tanto, v_{halo} aumenta a medida que crece A . Esto implica que cuanto mayor es la masa objetivo M_{max} , mayor es la velocidad en la cola, y juntos impactan el núcleo menos dominante con un impulso más fuerte. Al final, la densidad y las curvas de rotación de la configuración relajada se desvían más de la configuración de equilibrio para M_{max} más grandes.

Curvas de rotación. También analizamos la variación en el tiempo de las curvas de rotación de las configuraciones de equilibrio. La Figura 4.28 muestra las curvas de rotación en la columna de la izquierda para el dominio pequeño y en la columna de la derecha para el dominio grande. Los paneles superior, medio e inferior corresponden a los datos iniciales de nuestras soluciones con $M_{max} = 10, 20$ y 40 , respectivamente. Las líneas negras representan la curva de rotación de la configuración de equilibrio inicial, mientras que los gráficos en gris son instantáneas de su evolución a lo largo del tiempo. Las líneas punteadas son el promedio temporal de la curva de rotación. En la parte inferior de esta figura mostramos la desviación relativa del promedio temporal de la curva de rotación con respecto a la curva de rotación en el tiempo inicial. También se puede observar que la desviación es mayor para los valores más grandes de M_{max} .

Relación masa núcleo-halo

Esta relación se establece entre varios escalares del sistema SP y se expresa en el exponente α en la relación entre la masa del núcleo M_c , la masa total del sistema núcleo-halo M y la energía total E :

$$\frac{M_c}{M} = \beta \left(\frac{|E|}{M^3} \right)^\alpha \quad (4.43)$$

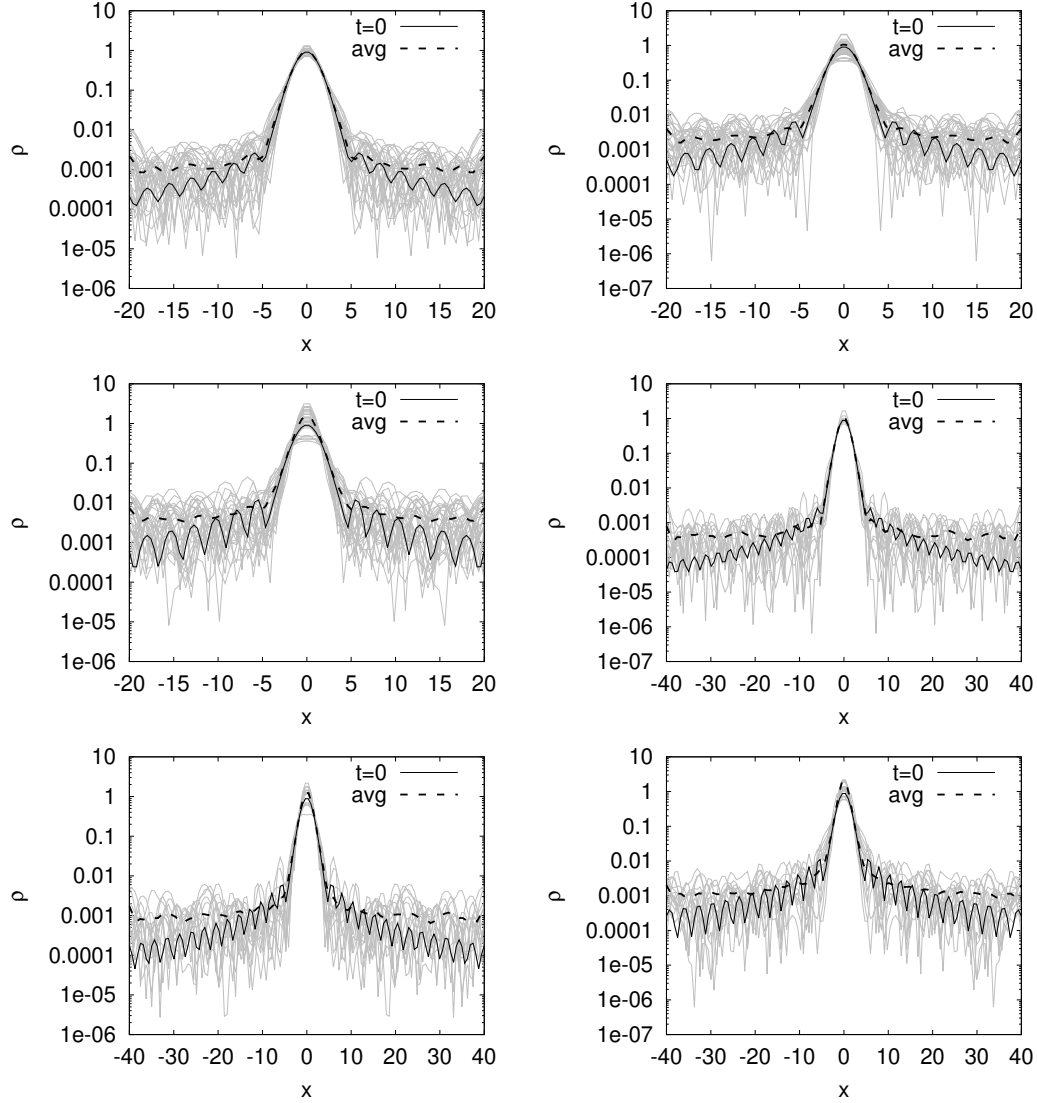


Figura 4.27: La columna izquierda muestra la evolución de la densidad de las soluciones de equilibrio utilizando el dominio pequeño $D = [-20, 20]^3$, mientras que la columna derecha muestra la evolución utilizando el dominio grande $[-40, 40]^3$. Las primera, segunda y tercera filas corresponden a las condiciones iniciales con $M_{max} = 10, 20$ y 40 , respectivamente. Las líneas negras corresponden a las condiciones iniciales, las líneas grises son instantáneas durante la evolución y la línea punteada es la densidad promedio en el tiempo de la solución relajada.

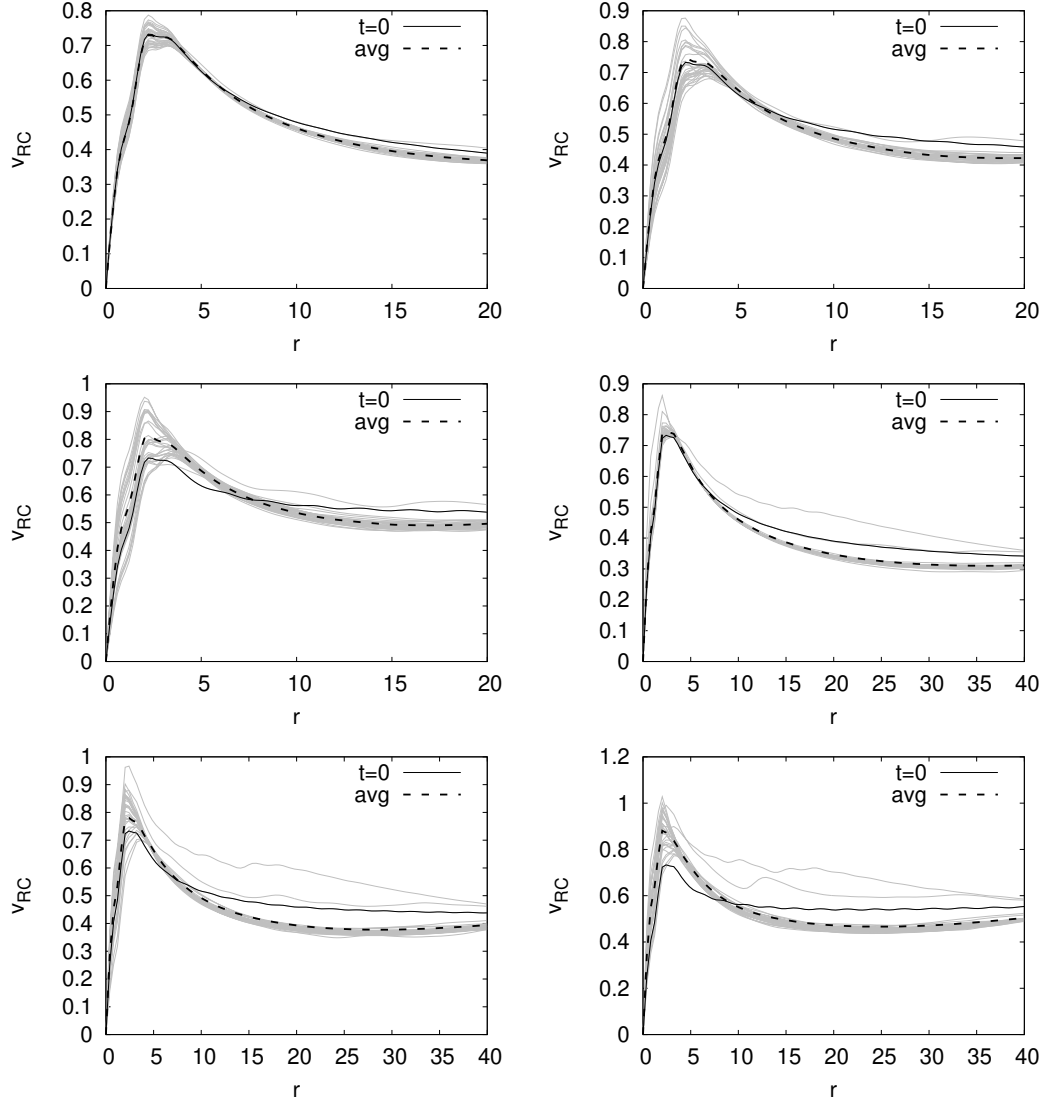


Figura 4.28: La columna izquierda/derecha muestra la evolución de las curvas de rotación de las soluciones de equilibrio utilizando el dominio pequeño/grande. Las primera, segunda y tercera filas corresponden a las soluciones de equilibrio iniciales con $M_{max} = 10, 20$ y 40 , respectivamente. Las líneas negras corresponden a las condiciones iniciales, las líneas grises son instantáneas durante la evolución y las líneas punteadas son el promedio temporal de la curva de rotación de la solución relajada. En la parte inferior incluimos la diferencia relativa entre la curva de rotación inicial y la promedio para los tres valores de M_{max} .

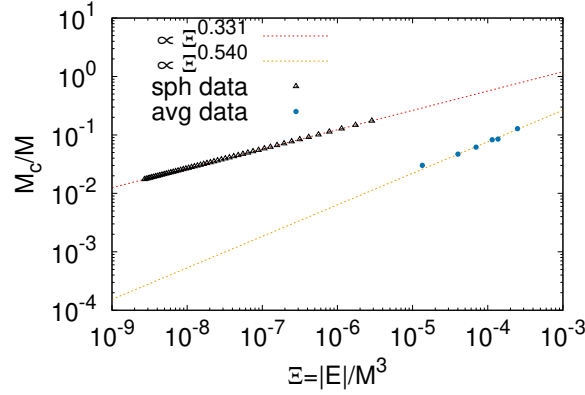


Figura 4.29: Relación masa núcleo-halo para un número de soluciones de equilibrio, así como para las soluciones relajadas obtenidas de la evolución de las seis simulaciones con las que hemos estado trabajando. Ajustamos los datos con líneas que indican que las configuraciones de equilibrio se escalan con $\alpha = 1/3$, mientras que el conjunto de soluciones evolucionadas decae en un conjunto que se escala con $\alpha = 0.54$.

en unidades del código. Se ha encontrado que el exponente α tiene diferentes valores, dependiendo del método utilizado para llegar a las configuraciones núcleo-halo.

Las soluciones NH construidas aquí tienen una escala tal que $\alpha \sim 1/3$ como se ilustra en la Figura 4.29. Este comportamiento es consistente con la relación núcleo-halo encontrada en [25] a partir de la colisión de muchos solitones distribuidos al azar y también es consistente con la colisión de muchos solitones bajo condiciones específicas en [15]; también es consistente con el exponente encontrado en [92, 14] resultante del colapso esférico.

Se espera que la relación masa núcleo-halo cambie para la solución relajada como consecuencia del impulso inicial del campo de velocidad de la cola sobre el núcleo y la cola misma, además del efecto de las condiciones de frontera discutido previamente. El transitorio inicial afecta a los escalares del sistema como se observa en la Figura 4.26. Durante la evolución, el valor de M_c cambia en el tiempo debido a las oscilaciones del núcleo y M depende del tamaño del dominio porque en el dominio pequeño $[-20, 20]^3$ la porción de M_{max} que cabe dentro del dominio es menor que la porción en el dominio grande $[-40, 40]^3$, algo que no afecta a las soluciones de equilibrio integradas en coordenadas esféricas hasta $r_{max} = 100$, una esfera más grande que cualquiera de los dos dominios cúbicos numéricos. De manera análoga, la integración de la energía también depende del tamaño del dominio. Los resultados en la Figura 4.29 para la configuración relajada indican que las configuraciones inicialmente en equilibrio evolucionan hacia un conjunto de configuraciones que se escalan con $\alpha = 0.54$, más similar a la escala obtenida con SFS [91], aquellas encontradas a partir de la fusión de núcleos de masas desiguales [87], así como aquellas obtenidas utilizando argumentos termodinámicos [98].

Así pues, hemos construido soluciones núcleo-halo del sistema SP con simetría esférica. La familia de soluciones está parametrizada por la masa total de la configuración M_{max} .

Mientras que el núcleo es estacionario, similar a las soluciones de equilibrio en el estado fundamental, la halo tiene una velocidad no nula. De este modo, cuando se permite la evolución de las configuraciones, estas evolucionan y se ajustan alrededor de una configuración relajada que oscila cerca de un estado virializado. La densidad promedio de estas configuraciones relajadas preserva el perfil de densidad núcleo-halo, aunque con una desviación respecto a la solución inicial de equilibrio. Esta desviación es mayor para masas totales más grandes del sistema M_{max} .

La motivación para construir soluciones de equilibrio era usarlas como modelos realistas de halos, más simples que aquellos construidos con grandes superposiciones de modos en [96], y mucho más sencillos que los obtenidos en simulaciones de formación de estructura. Sin embargo, entre las soluciones iniciales de equilibrio y las soluciones relajadas, estas últimas parecen ser más consistentes con las observadas en simulaciones de formación de estructuras [91] y en fusiones multisoliton [25, 23], debido a la interferencia en la zona de la halo; desafortunadamente, necesitan evolucionar y, por lo tanto, ya no son tan económicas computacionalmente. Este hecho limita la aplicabilidad original, más optimista, de construir fácilmente grandes catálogos de soluciones de equilibrio que podrían utilizarse para ajustar curvas de rotación. No obstante, las soluciones de equilibrio son similares a las relajadas para masas pequeñas de M_{max} . En nuestro espacio de parámetros, las diferencias entre las soluciones de equilibrio y las relajadas son pequeñas para $M_{max} = 10$, un caso en el cual la relación masa núcleo/halo es del orden de ~ 0.2 , lo que aún es un régimen útil y esperamos que las soluciones sean provechosas en dicho régimen.

Finalmente, concluimos sobre la relación masa núcleo/halo. Encontramos que las soluciones de equilibrio escalan con un exponente $\alpha = 1/3$, mientras que el conjunto utilizado para ilustrar la evolución de las configuraciones de equilibrio decae hacia un conjunto que escala con una potencia $\alpha = 0.54$, difiriendo posiblemente por las condiciones de frontera.

4.3.2 Construcción de perfiles núcleo-halo galácticos no esféricas

Queremos construir soluciones del sistema SP que sean consistentes con ciertas curvas de rotación galácticas. Para construir la función de onda del núcleo-halo, seguimos una estrategia similar a la descrita en [99] y [96]. Asumimos un perfil de densidad objetivo ρ_T y nuestro objetivo es construir una función de onda Ψ_0 que sea consistente con este perfil de densidad y satisfaga el sistema SP. Para ello, consideramos que la densidad objetivo es una función esféricamente simétrica, dependiendo únicamente de la coordenada radial r , lo cual permite resolver la ecuación de Poisson (2.11) en simetría esférica, expresada como el siguiente sistema de primer orden:

$$\frac{dV_T}{dr} = G \frac{M_T}{r^2}, \quad (4.44)$$

$$\frac{dM_T}{dr} = 4\pi r^2 \rho_T, \quad (4.45)$$

donde ρ_T es la densidad objetivo y M_T es la función de masa. Una vez resuelta la ecuación de Poisson, el potencial resultante V_T depende de r . Este potencial se introduce en la versión estacionaria de la ecuación de Schrödinger (2.12), la cual recuerda al problema del átomo de hidrógeno, con la diferencia notable de que el potencial de Coulomb es reemplazado por el potencial V_T , escrito como un problema de Sturm-Liouville:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_B} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2}{2m_B} \frac{L^2}{r^2} \psi_j + m_B V_T \psi_j = E_j \psi_j, \quad (4.46)$$

donde

$$L^2 = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (4.47)$$

es el operador de momento angular al cuadrado y j denota el estado propio ψ_j con energía propia E_j . Para resolver esta ecuación, asumimos una separación de variables para $\psi_j := \psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \phi)$, donde $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ son los armónicos esféricos y $R_{n\ell}$ se expresa como $R_{n\ell} := u_{n\ell}/r$, con $u_{n\ell}$ satisfaciendo la siguiente ecuación radial:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_B} \frac{d^2 u_{n\ell}}{dr^2} + \left(\frac{\hbar^2}{2m_B} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + m_B V_T(r) \right) u_{n\ell} = E_{n\ell} u_{n\ell}, \quad (4.48)$$

donde n, ℓ y m son los "números cuánticos", y hemos usado la identidad $L^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell+1) Y_{\ell m}$. Nombramos a la función de onda Ψ_0 como aquella que ajusta la densidad objetivo, y que puede expresarse como una combinación lineal de las funciones propias ψ_j :

$$\Psi_0 = \sum_j a_j \psi_j e^{-iE_j t/\hbar}. \quad (4.49)$$

El perfil de densidad asociado con la función de onda está dado por $|\Psi_0|^2$:

$$\begin{aligned}
|\Psi_0|^2 &= \left(\sum_j a_j \psi_j e^{-iE_j t/\hbar} \right) \left(\sum_k a_k^* \psi_k^* e^{iE_k t/\hbar} \right) \\
&= \sum_j |a_j|^2 |\psi_j|^2 + \sum_{j \neq k} a_j a_k^* \psi_j \psi_k^* e^{i(E_k - E_j)t/\hbar}.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Al ajustar densidades en simulaciones de formación de estructuras o colisiones multicúmulos, es fundamental asumir que ρ_T es una cantidad promediada sobre el ángulo sólido y el tiempo. Por lo tanto, consideramos que la densidad objetivo se puede descomponer como:

$$\begin{aligned}
\langle |\Psi_0|^2 \rangle_{T \rightarrow \infty} &:= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\Psi_0(t, \vec{x})|^2 dt \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{n,\ell} (2\ell + 1) |\tilde{a}_{n\ell}|^2 |R_{n\ell}|^2,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

donde T es el intervalo temporal para calcular promedios en tiempo. Los coeficientes se escriben como $a_{n\ell m} = \tilde{a}_{n\ell} e^{i\Theta_{n\ell m}}$, siendo $\Theta_{n\ell m}$ fases aleatorias entre 0 y 2π . Para derivar la Ecuación (4.51) usamos la identidad $\sum_m |Y_{lm}(\theta, \phi)|^2 = (2\ell + 1)/4\pi$. Alternativamente, un *promedio espacial* sobre el ángulo sólido $\Omega := [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ se calcula como:

$$\begin{aligned}
\langle |\Psi_0|^2 \rangle_{\Omega} &:= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} |\Psi_0(t, \vec{x})|^2 d\Omega \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{n,\ell} (2\ell + 1) |\tilde{a}_{n\ell}|^2 |R_{n\ell}|^2.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Así, los promedios temporal y espacial son equivalentes.

Descripción del método de ajuste

La expansión de la función de onda (4.49) se determina utilizando un *Algoritmo Genético* (AG), donde se asume que el ADN de cada organismo en la población consiste en los coeficientes $\tilde{a}_{n\ell}$. El número máximo de genes considerados es $N_{\text{DNA}} = n_{\text{max}} \ell_{\text{max}}$, donde los números cuánticos toman los valores $n = 1, 2, \dots, n_{\text{max}}$ y $\ell = 0, 1, \dots, \ell_{\text{max}} - 1$. La función de aptitud de cada individuo se define por el escalar

$$\eta = \frac{1}{1 + |Q_0|} \left[\frac{1}{r_{\max}} \int_0^{r_{\max}} \frac{(\rho_T - \rho)^2}{\rho_T} dr \right]^{-1}, \quad (4.53)$$

donde el factor $1 + |Q_0|$ es insignificante cuando $|Q_0| < 1$, pero cuando $|Q_0| > 1$, el valor de la función de aptitud disminuye para perfiles que se alejan del estado de virialización. Finalmente, $r_{\max} = 2r_0$ es el límite superior del dominio numérico donde se resuelve el problema de autovalores (4.46).

El funcionamiento del AG se basa en la generación aleatoria de una población inicial de N_{org} organismos. Calculamos la función de aptitud η para cada individuo, y seleccionamos los k organismos mejor adaptados. Siguiendo un enfoque elitista, estos individuos seleccionados persisten en la siguiente generación. De estos k organismos, se eligen aleatoriamente N_{cross} para cruzarse y producir descendientes para la siguiente generación; en el contexto biológico, uno típicamente elige $N_{\text{cross}} = 2$, pero en un AG no hay tal limitación, y $N_{\text{cross}} = 5$ resultó ser más efectivo. Estos padres seleccionados comparten aleatoriamente su material genético, es decir, los coeficientes de la expansión, para crear un nuevo individuo. Este proceso se repite $N_{\text{org}} - k$ veces hasta completar nuevamente el tamaño de la población inicial N_{org} .

Los organismos en la nueva generación pueden adaptarse de manera más eficaz mediante un proceso de mutación que funciona de la siguiente forma. Se genera un nuevo número aleatorio $\beta_{n\ell}$ en el rango de 0 a 1, que representa la probabilidad de que el gen $\tilde{a}_{n\ell}$ sufra una mutación. Cada gen tiene su propia probabilidad de cambio. Posteriormente, se genera un nuevo número aleatorio $\gamma_{n\ell}$, y la mutación ocurre si $\gamma_{n\ell}$ supera a $\beta_{n\ell}$. En tales casos, el coeficiente $\tilde{a}_{n\ell}$ se modifica a $\alpha \tilde{a}_{n\ell}$, donde α es un número aleatorio seleccionado en el rango de -1.5 a 1.5 para todos los valores de n y ℓ .

Finalmente, se aplica un segundo tipo de mutación, conocida como mutación diferencial. Esta mutación implica seleccionar el organismo i -ésimo con ADN definido por los coeficientes $\tilde{a}_{n\ell}^{(i)}$ y una aptitud $\eta^{(i)}$. Posteriormente, se seleccionan aleatoriamente otros dos organismos con ADN $\tilde{a}_{n\ell}^{(1)}$ y $\tilde{a}_{n\ell}^{(2)}$. Se crea un nuevo organismo combinando linealmente estos coeficientes como $\tilde{a}_{n\ell}^{(\text{new},i)} = \tilde{a}_{n\ell}^{(i)} + \delta(\tilde{a}_{n\ell}^{(1)} - \tilde{a}_{n\ell}^{(2)})$, donde δ es un número entre 0 y 1, con aptitud $\eta^{(\text{new},i)}$. Si $\eta^{(\text{new},i)} > \eta^{(i)}$, el organismo i -ésimo es reemplazado por el nuevo organismo. Este proceso se repite para $i = 1, 2, \dots, N_{\text{org}}$.

Obsérvese que la función de aptitud es una norma del error entre la densidad de la expansión multipolar y la densidad objetivo. Considerando la aleatoriedad en varias etapas del algoritmo genético (AG), puede suceder que diferentes conjuntos de coeficientes de la expansión, o equivalentes individuos con diferentes ADN, puedan tener valores similares de η . En este sentido, la expansión del perfil puede ser degenerada.

Sin embargo, aunque la expansión pueda presentar degeneraciones, nuestro interés radica

en identificar un mínimo local que proporcione la mejor aproximación al perfil de densidad objetivo. En particular, buscamos una solución que corresponda a un estado Ψ_0 cercano al equilibrio virial, asegurando así que la configuración obtenida sea físicamente relevante y estable dentro del marco del problema estudiado.

Nuestro objetivo es ajustar las densidades de materia oscura galáctica. Inspirados por [99] y [96], utilizamos un tipo de perfil de densidad objetivo que discutimos a continuación.

Evolución de los perfiles galácticos

Investigamos la evolución de los perfiles núcleo-halo descritos en la sección anterior, así como la del perfil pseudo-isotermo (PISO),

$$\rho_{PISO} = \frac{\rho_p}{1 + \left(\frac{r}{r_p}\right)^2}, \quad (4.54)$$

mediante la evolución de la función de onda optimizada utilizando el algoritmo genético, aplicado a los modelos *núcleo-NFW* y *núcleo-PISO* con los parámetros de la Tabla 4.1, en el contexto del sistema Schrödinger-Poisson completamente dependiente del tiempo (2.12-2.13). Para ello, utilizamos nuestro código **CAFE-FDM** [69, 73].

núcleo-NFW					
Galaxy	r_c (kpc)	r_t (kpc)	r_s (kpc)	r_0 (kpc)	Σ_0 ($M_\odot \text{pc}^{-2}$)
ESO4880049	2.157	1.102	12.55	52.77	243
UGC11616	1.860	1.676	7.434	38.04	386
F730V1	1.867	1.841	8.118	40.01	370
núcleo-PISO					
Galaxy	r_c (kpc)	r_t (kpc)	r_p (kpc)	r_0 (kpc)	Σ_0 ($M_\odot \text{pc}^{-2}$)
ESO4880049	2.269	3.260	2.631	66.49	155
UGC11616	1.850	2.474	1.792	52.82	294
F730V1	1.869	2.082	1.625	54.41	345

Cuadro 4.1: Parámetros de mejor ajuste para tres galaxias de bajo brillo superficial (LSB) utilizando los perfiles de densidad núcleo-NFW y núcleo-PISO, obtenidos al fijar la masa del bosón en $m_B = 10^{-23}$ eV.

Para evitar que la función de onda colapse hacia un perfil solitónico aislado, como se ha reportado en [10] y [90], implementamos condiciones de frontera periódicas. Estas garantizan la persistencia de un núcleo rodeado por una envolvente, así como la conservación de la masa y la energía total del sistema a lo largo de la evolución.

Como condiciones iniciales, inyectamos la función de onda (4.49) en el tiempo $t = 0$, $\Psi(0, \vec{x}) = \Psi_0$, centrada en el cubo 3D $D = [-r_0, r_0]^3$. Cabe destacar que cuando los coeficientes están fijos, la función de onda puede poseer un momento total distinto de cero, calculado como $\vec{p}_0 = -i\hbar \sum_{j,k} a_k^* a_j \int_D \psi_k^* \nabla \psi_j d^3x$. Corregimos entonces la función de onda inicial como $\Psi(0, \vec{x}) = \Psi_0 e^{-i\vec{p}_0 \cdot \vec{x}/M}$, donde $M := \int_D \rho d^3x$ representa la masa total en el dominio. Esta elección asegura que la función de onda inicial tenga momento lineal total cero, permitiendo que la evolución mantenga el núcleo cerca del centro del dominio. El dominio fue discretizado con una resolución espacial de $\Delta = r_0/128$ en las tres direcciones espaciales. Para capturar la dinámica temporal, se empleó una resolución temporal que cumple $\Delta t/\Delta < 0.25$ en unidades de código, y la evolución se realizó en una ventana de tiempo de 2 Gyr.

La evolución de cada galaxia se ilustra a través de capturas de la densidad y el campo de velocidad en el plano $z = 0$ en los tiempos $t = 0, 1$ y 2 Gyr, en las Figuras 4.30 y 4.31. Estas simulaciones utilizan las condiciones iniciales con los perfiles de densidad objetivo núcleo-NFW y núcleo-PISO, respectivamente.

Es evidente que, aunque las configuraciones están inicialmente cerca de un estado de virialización, evolucionan y no permanecen estacionarias, ni siquiera en promedio, sino que desarrollan cierta dinámica. Para comprender mejor la evolución de toda la configuración, analizamos la dependencia temporal de la masa del núcleo para cada una de las galaxias de la muestra de la Tabla 4.1. La masa del núcleo M_c es la integral de la densidad desde el origen hasta r_c , y su valor como función del tiempo se muestra en la Fig. 4.32 para seis configuraciones durante 7 Gyr. Nótese que la masa del núcleo oscila con una tendencia general creciente que puede entenderse como la acreción de materia desde la envolvente granular, lo cual indica que el aumento de masa se debe a efectos colisionantes [100, 101], interpretados como condensación en el régimen cinético [102] o condensación de ondas [103]. Este crecimiento lento pero constante de la masa del núcleo se ha mostrado como inevitable tras el tiempo de saturación [19]. Este crecimiento de masa del núcleo parece inevitable y es posiblemente la razón por la cual cualquier configuración con estructura granular evolucionará y el núcleo crecerá. Como resultado, la dinámica se ve influenciada y la densidad promedio en la evolución se desvía de los promedios de los datos iniciales, un efecto descrito también en [96].

La implicación es que la redistribución de la densidad también distorsionará la curva de rotación. Ilustramos esta diferencia calculando el promedio espaciotemporal de la densidad $\langle \rho \rangle$, que ahora es solo una función de la coordenada radial. Una vez obtenida la densidad promedio, calculamos la curva de rotación radial como $v_{RC} = \sqrt{Gm(r)/r}$, donde $m(r)$ es

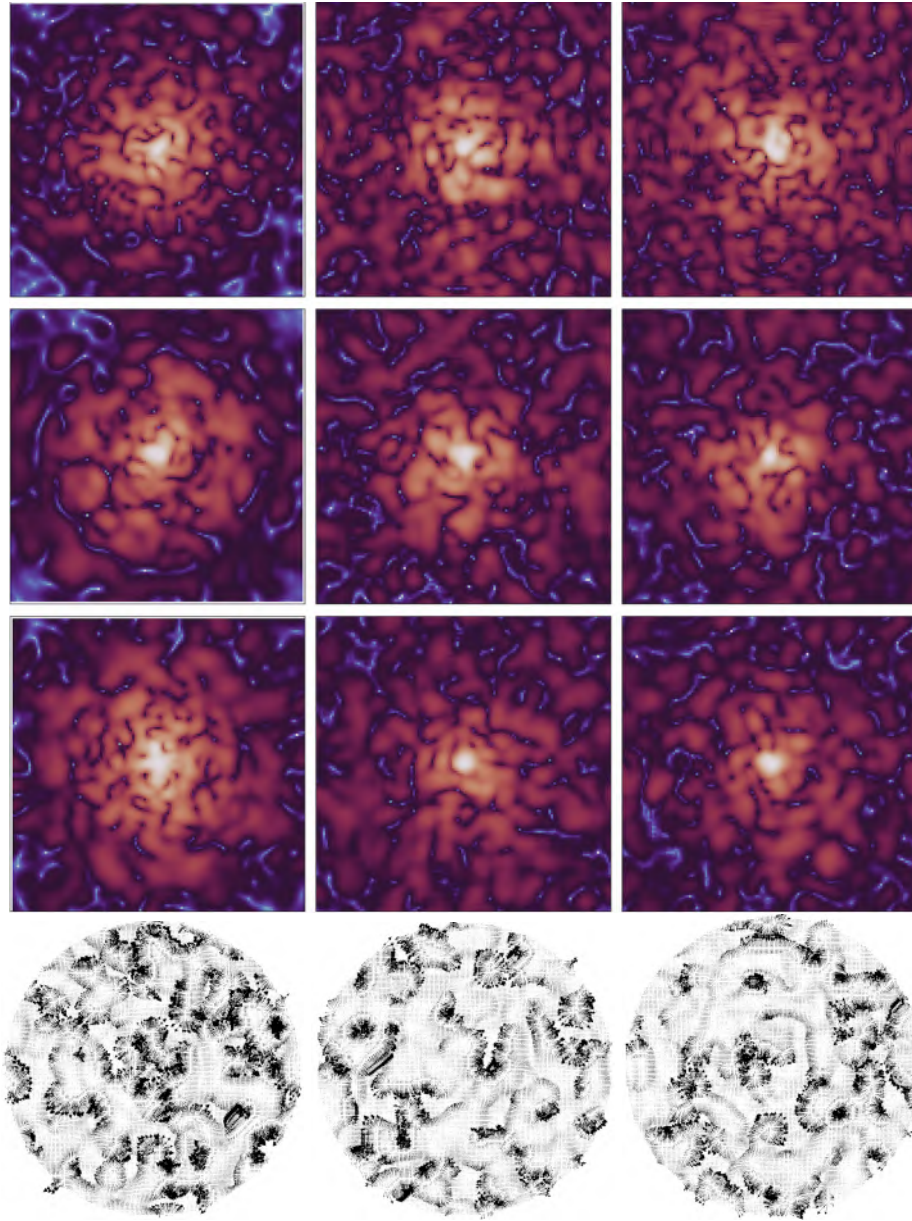


Figura 4.30: Las tres primeras filas muestran capturas de la densidad en el plano $z = 0$ para las galaxias ESO4880049, UGC11616 y F730V1, respectivamente, asumiendo el perfil objetivo núcleo-NFW. La primera columna corresponde al tiempo inicial, mientras que la segunda y tercera columnas corresponden a los tiempos $t = 1$ y 2 Gyr, respectivamente. La cuarta fila muestra capturas en 0, 1 y 2 Gyr del campo de velocidades para la galaxia F730V1, a modo de ilustración.

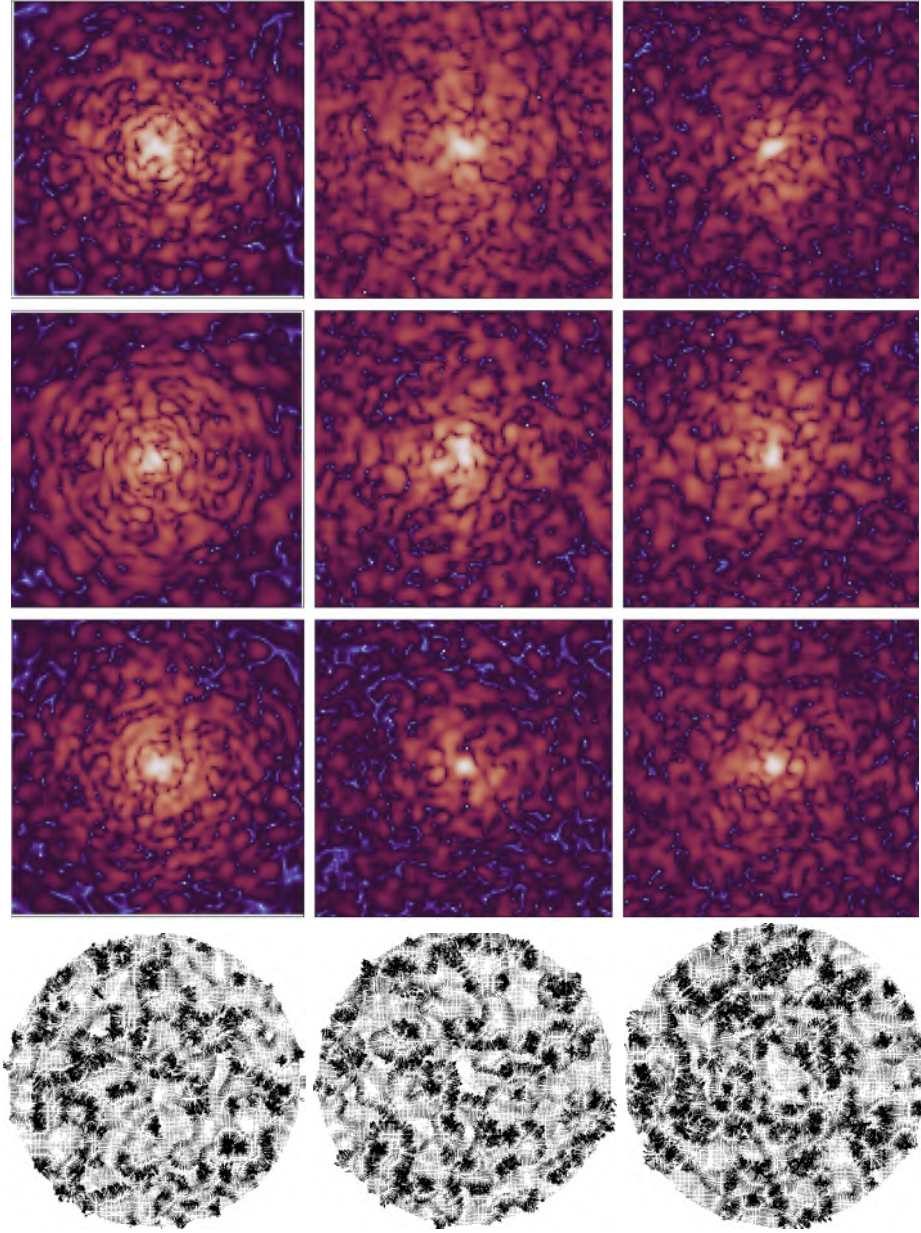


Figura 4.31: Las tres primeras filas muestran capturas de la densidad en el plano $z = 0$ para las galaxias ESO4880049, UGC11616 y F730V1, respectivamente, asumiendo el perfil objetivo núcleo-PISO. La primera columna corresponde al tiempo inicial, mientras que la segunda y tercera columnas corresponden a los tiempos $t = 1$ y 2 Gyr, respectivamente. La cuarta fila muestra capturas en 0, 1 y 2 Gyr del campo de velocidades para la galaxia F730V1, a modo de ilustración.

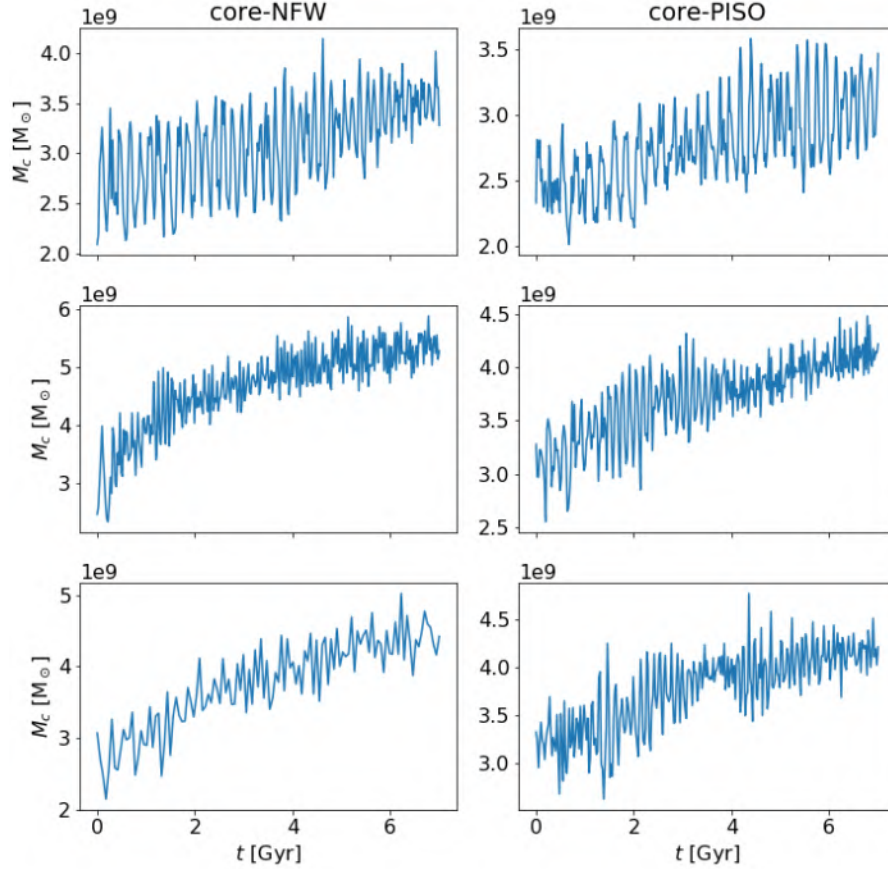


Figura 4.32: Evolución de M_c como función del tiempo durante 7 Gyr. Las tres primeras filas corresponden a las galaxias ESO4880049, UGC11616 y F730V1, respectivamente. La primera columna corresponde al perfil núcleo-NFW y la segunda columna corresponde al perfil núcleo-PISO. Los gráficos indican que el núcleo acreta masa a largo plazo, lo que implica una concentración de materia dependiente del tiempo. Este proceso se interpreta como la acreción de materia en la envolvente granular. Este crecimiento de masa ha sido mostrado como inevitable después de la saturación del núcleo tras la relajación [19] y parece ser universal en las estructuras núcleo-halo que evolucionan [102].

la densidad de masa integrada hasta el radio r . Para cada halo, los resultados se presentan en la Figura 4.33. La discrepancia entre la configuración inicial y la evolucionada es notable. La concentración de materia en la región del núcleo cambia definitivamente la curva de rotación, con un pico característico de una masa concentrada.

SECCIÓN 4.4

Partículas de Prueba

Las estructuras núcleo-halo en el modelo *FDM* parecen ser el componente esencial en la formación de la red cósmica, y por lo tanto, su estudio es esencial para el modelo. Las estructuras *FDM* son dependientes del tiempo, y los perfiles de densidad también son resultado de un promedio temporal adicional sobre los promedios angulares. Así, cuando se presenta una fórmula para los perfiles núcleo-halo en función de r , esta se refiere a un promedio espacial y temporal, sin implicar que la densidad sea estática o esféricamente simétrica.

Esta dependencia angular y temporal implica que el potencial gravitacional también es anisótropo y dependiente del tiempo. Por lo tanto, exploramos el movimiento de partículas de prueba más allá de los perfiles universales idealizados esféricamente simétricos para *FDM* que ya hemos discutido antes.

El objetivo de nuestro análisis es estudiar el movimiento de partículas de prueba bajo el potencial gravitacional de una estructura núcleo-halo formada, asumiendo que la configuración es anisótropa y dependiente del tiempo, evolucionando según las ecuaciones SP (2.12)-(2.13).

4.4.1 Construcción del núcleo-halo que usaremos

Como se mencionó anteriormente, la formación de estas estructuras fue descubierta por primera vez en simulaciones de formación de estructuras [22, 25, 23, 79, 80, 81]. Sin embargo, poco después, fueron construidas en escenarios menos exigentes computacionalmente, específicamente mediante la fusión múltiple de núcleos, como se describe en [91] y trabajos posteriores [25, 87]. Más allá de eso, las estructuras núcleo-halo se construyeron recientemente ab initio, sin necesidad de evolución de estructuras o multi-solitones, utilizando la expansión multimodal.

De estos tres métodos, consideramos la estructura formada por la fusión de múltiples núcleos que ha pasado por un proceso de relajación, como se describe en [73], cuya densidad se

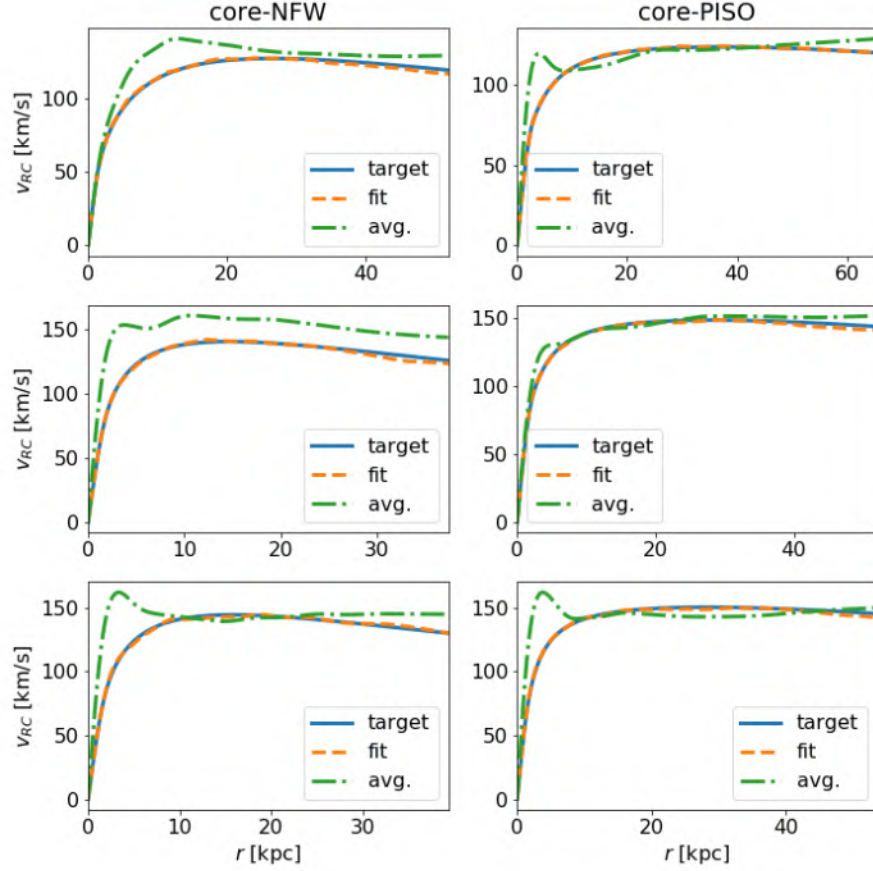


Figura 4.33: Curva de rotación objetivo, ajustada y promedio de tres galaxias de la muestra. Las tres primeras filas corresponden a ESO4880049, UGC11616 y F730V1, respectivamente. La primera columna corresponde al perfil núcleo-NFW, y la segunda columna al perfil núcleo-PISO. La línea continua azul representa la curva de rotación asociada con la densidad objetivo, mientras que la línea punteada naranja ilustra la densidad ajustada obtenida en la 1000a generación. La línea punteada verde representa el promedio temporal de los promedios espaciales durante 7 Gyr de evolución.

muestra en la Figura 4.34. Este es el resultado de la fusión de 10 núcleos solitónicos con masas aleatorias, que dieron como resultado una masa final de $\sim 2.598 \times 10^{11} M_\odot$. Estos núcleos se encuentran inicialmente en reposo, ubicados aleatoriamente dentro de un dominio cúbico de 40 kpc, discretizado con una resolución de $h = 5/32$ kpc. La evolución para formar este halo abarca 1.4 Gyr con una resolución temporal de $\Delta t = 10^{-4}$ Gyr.

En la Figura 4.35, se muestran los diagnósticos del sistema, incluyendo la densidad máxima normalizada con la densidad promedio del núcleo, la energía cinética $K := -\frac{\hbar^2}{2m} \int \Psi^* \nabla^2 \Psi d^3x$, la energía potencial $W := \frac{1}{2} \int \rho V d^3x$, la energía total $E := K + W$, la función virial $Q := 2K + W$, normalizada con respecto al valor inicial de la energía total $E(0) \approx -1.652 \times 10^{16} M_\odot \text{km}^2/\text{s}^2$, y la masa total $M = \int \rho d^3x$, normalizada con respecto al valor inicial $M(0) \approx 2.598 \times 10^{11} M_\odot$. El comportamiento de estas cantidades demuestra la relajación de la configuración núcleo-halo, donde la densidad oscila alrededor de un valor específico. La función virial muestra que el núcleo-halo está en equilibrio virial, es decir, $Q \approx 0$. Las energías cinética y potencial oscilan alrededor del valor de relajación, y la energía y masa totales indican que el método numérico las mantiene casi constantes.

La densidad del núcleo-halo oscila en el espacio y en el tiempo alrededor de un perfil promedio calculado de la siguiente manera:

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_i}^{t_f} \langle \rho \rangle_\Omega dt, \quad (4.55)$$

con $T = t_f - t_i$ siendo el intervalo temporal sobre el cual se calcula el promedio temporal, con $t_i = 1.0$ y $t_f = 1.4$ Gyr; siendo $\langle \rho \rangle_\Omega$ el promedio sobre el ángulo sólido calculado de acuerdo a la expresión (4.52). Este perfil de densidad radial genera un potencial gravitacional radial $\langle V \rangle$ a través de la ecuación de Poisson (2.11). Este perfil estacionario se caracteriza por la formación de un núcleo solitónico, rodeado por un perfil que decae como r^{-3} , aproximadamente descrito por un perfil de NFW, como se muestra en [25, 73]. En la Figura 4.36, se presenta la densidad promedio calculada según esta fórmula (4.52), junto con un ajuste utilizando la expresión empírica para ρ_{NH} dada en la ec. (4.30) con los valores de ajuste $r_c = 0.2621$ kpc, $r_t = 0.9427$ kpc y $r_s = 1.844$ kpc. Estos valores satisfacen la relación $r_t \approx 3.597 r_c$, que es aproximadamente el valor reportado en [25]. La densidad central se obtiene a partir del radio del núcleo mediante la expresión (4.16) $\rho_c \approx 1.983 \times 10^7 \left(\frac{\text{kpc}}{m_{22}^2 r_c^4} \right) M_\odot$. La densidad ρ_s se determina asumiendo que la densidad núcleo-halo es continua en r_t . Por lo tanto, se tiene $\rho_s = \rho_{\text{soliton}}(r_t) \frac{r_t}{r_s} \left(1 + \frac{r_t}{r_s} \right)^2$, como en [97].

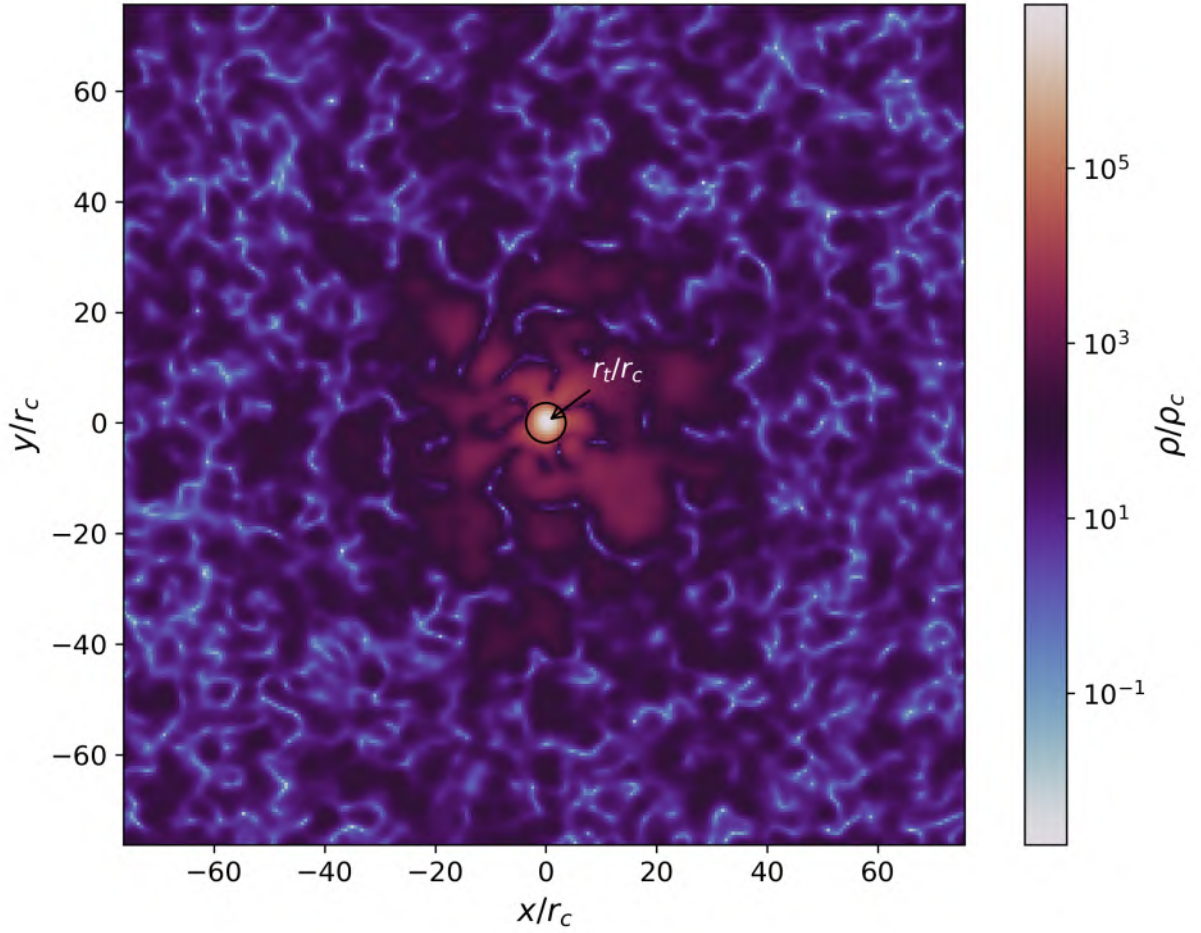


Figura 4.34: Densidad del núcleo-halo en el tiempo inicial en el plano $z = 0$, producido por la fusión de múltiples núcleos. Los ejes están normalizados con respecto al radio del núcleo $r_c \approx 0.2621$ kpc, mientras que la densidad está normalizada con respecto a $\rho_c \approx 4.201 \times 10^{11} \text{ M}_\odot/\text{kpc}^3$. El círculo representa el radio de transición $r_t/r_c \approx 3.597$ entre el núcleo y halo.

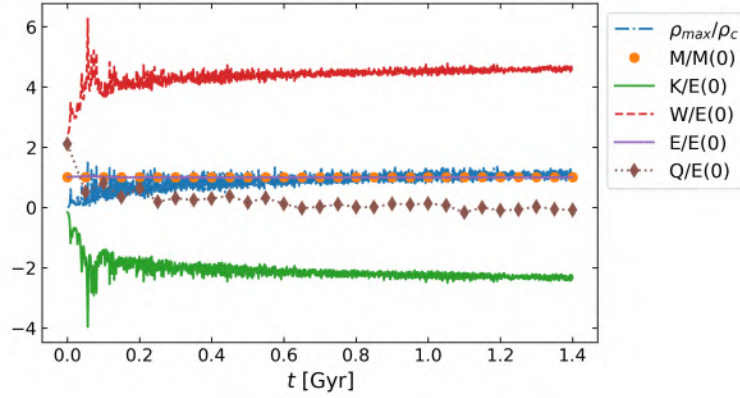


Figura 4.35: Diagnóstico que muestra la densidad máxima normalizada con respecto a la densidad promedio del núcleo, la energía cinética (K), energía potencial (W), energía total ($E = K + W$) y función virial ($Q = 2K + W$) normalizada con respecto a la energía total inicial $E(0)$, así como la masa total (M) normalizada con respecto a la masa inicial. Estos parámetros destacan el proceso de relajación del halo, con oscilaciones de densidad alrededor de un valor promedio. La función virial indica virialización ($Q \approx 0$), y la estabilidad de la energía total y la masa demuestra la unitariedad del método numérico.

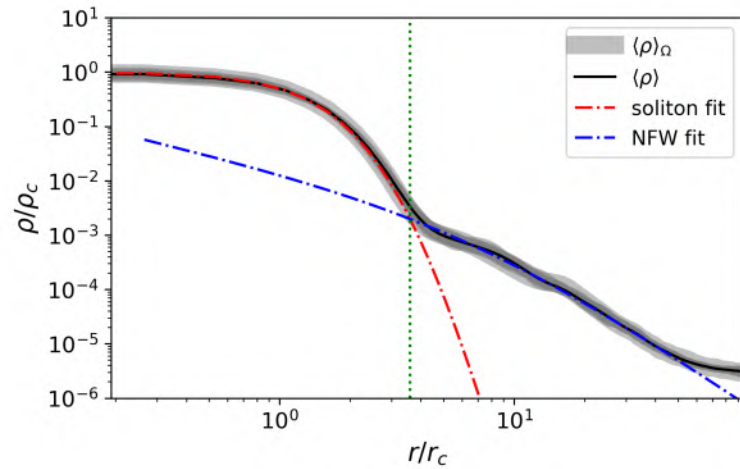


Figura 4.36: El área sombreada representa los perfiles instantáneos promedio radiales de la densidad del núcleo-halo formado, calculados mediante la fórmula (4.52) en el intervalo temporal T . La línea sólida representa el perfil promedio espacio-temporal calculado con la fórmula (4.55) la cual es el promedio de las curvas grises. La línea vertical denota el radio de transición r_t , que separa la región del núcleo solitónico ($r < r_t$), descrito por la ecuación (4.15), de la región de la envolvente ($r > r_t$), descrita por el perfil NFW (4.19).

4.4.2 Escenarios donde se integran las partículas de prueba

Hasta ahora, hemos construido lo que será nuestra estructura núcleo-halo de trabajo para el modelo *FDM*. Ahora, el movimiento de las partículas de prueba será estudiado en dos escenarios claramente diferentes:

1. Un primer escenario de prueba de fondo para comparación, en el cual asumimos que la densidad promediada espacio-temporal, representada por la línea negra en la Figura 4.36, es independiente del tiempo y esféricamente simétrica, generando el *potencial gravitacional estacionario* $\langle V \rangle$.
2. Un segundo escenario, en el que la estructura, aunque casi en equilibrio virial, evoluciona en el tiempo, resultando en una densidad granular altamente cinética en el halo y un núcleo oscilante, lo que implica un *potencial gravitacional* V verdaderamente dependiente del tiempo.

En el **primer escenario**, se deben resolver las ecuaciones de movimiento para partículas de prueba en un potencial estacionario esféricamente simétrico. Esta es una suposición típica, por ejemplo, al ajustar curvas de rotación galácticas, donde se promedian las estructuras granulares para simplificar los modelos, como se ilustra en la sección anterior 4.3.

En el **segundo escenario**, la estructura evoluciona de acuerdo con el sistema SP (2.12)-(2.13). Para este caso, continuamos la evolución del núcleo-halo durante 1.274 Gyrs adicionales, durante los cuales integramos las ecuaciones de movimiento de las partículas de prueba con el fin de estudiar los efectos de la verdadera dinámica de la *FDM*.

4.4.3 Ecuaciones de movimiento para partículas de prueba

A continuación, escribimos las ecuaciones de movimiento de una partícula de prueba en cada uno de los dos escenarios.

Potencial estacionario

En este caso, para el potencial promediado en el espacio y el tiempo $\langle V \rangle$, que es esféricamente simétrico e independiente del tiempo, las ecuaciones de movimiento de una partícula de prueba toman la forma

$$\frac{d^2 \langle \vec{x}_p \rangle}{dt^2} = - \nabla \langle V \rangle|_{\vec{x}=\langle \vec{x}_p \rangle} = - \left. \frac{d \langle V \rangle}{dr} \right|_{r=r_p} \frac{\langle \vec{x}_p \rangle}{r_p}, \quad (4.56)$$

o equivalentemente

$$\frac{d^2 \langle \vec{x}_p \rangle}{dt^2} + \omega_p^2 \langle \vec{x}_p \rangle = 0, \quad (4.57)$$

donde

$$\omega_p^2 := \frac{1}{r} \left. \frac{d \langle V \rangle}{dr} \right|_{r=r_p}, \quad (4.58)$$

y $r_p = |\langle \vec{x}_p \rangle|$, donde $\langle \vec{x}_p \rangle$ representa la trayectoria de la partícula de prueba en el potencial estacionario $\langle V \rangle$, y también definimos $\langle \vec{v}_p \rangle := \frac{d \langle \vec{x}_p \rangle}{dt}$ como su velocidad. En este caso, tenemos un escenario bien conocido: una partícula bajo la influencia de una fuerza central. Aquí, la energía específica total $\langle E_p \rangle = \frac{1}{2} |\langle \vec{v}_p \rangle|^2 + \langle V \rangle|_{\vec{x}=\langle \vec{x}_p \rangle}$ y el momento angular específico total $\langle \vec{L}_p \rangle = \langle \vec{x}_p \rangle \times \langle \vec{v}_p \rangle$ se conservan. Esto implica que la trayectoria de la partícula ocurrirá únicamente en el plano perpendicular a $\langle \vec{L}_p \rangle$, que elegimos ser el plano $z = 0$.

La construcción de trayectorias circulares en este potencial servirá como un caso de control para realizar comparaciones, ya que en el segundo escenario donde el potencial depende del tiempo, las trayectorias pueden desviarse de la circularidad. Una partícula en una órbita circular de radio r_p tiene la siguiente trayectoria:

$$\langle \vec{x}_p \rangle = r_p \left(\cos \left(2\pi \frac{t}{T_p} \right), \sin \left(2\pi \frac{t}{T_p} \right), 0 \right), \quad (4.59)$$

donde $T_p = 2\pi/\omega_p$ es el periodo en el cual la partícula completa una órbita circular.

Potencial dinámico

En este escenario, una partícula de prueba experimenta la fuerza gravitacional debido al potencial gravitacional dependiente del tiempo V . En consecuencia, la trayectoria de la partícula de prueba evoluciona simultáneamente con la dinámica de la estructura *FDM*, siguiendo las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d^2 \vec{x}_p}{dt^2} = - \nabla V|_{\vec{x}=\vec{x}_p}, \quad (4.60)$$

donde \vec{x}_p representa la posición de la partícula de prueba, y definimos su velocidad como $\vec{v}_p := \frac{d\vec{x}_p}{dt}$. Es importante notar que, en este caso, la energía específica total de la partícula de prueba $E_p = \frac{1}{2}|\vec{v}_p|^2 + V|_{\vec{x}=\vec{x}_p}$ y el momento angular específico $\vec{L}_p = \vec{x}_p \times \vec{v}_p$ no se conservan debido a la naturaleza dependiente del tiempo del potencial gravitacional. Esto implica que la trayectoria de la partícula no ocurrirá únicamente en el plano perpendicular a $\langle \vec{L}_p \rangle$ como en el escenario estacionario.

Condiciones iniciales

Para estudiar las diferencias de movimiento en los dos escenarios, resolveremos las ecuaciones de movimiento para un número de partículas de prueba cuyas condiciones iniciales corresponderán a trayectorias circulares en diferentes radios. Al resolver numéricamente las ecuaciones (4.57) para diferentes radios, y verificar con la fórmula (4.59), encontramos el periodo como función del radio, ilustrado en la Figura 4.37 para el potencial estacionario $\langle V \rangle$. De esta gráfica extraemos la fórmula empírica:

$$T_p = a_1 \left(\frac{r}{r_c} \right)^{1.392} \left(1 - a_2 \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right), \quad (4.61)$$

con los parámetros de ajuste $a_1 = 1.064 \times 10^{-3}$ y $a_2 = 1.668 \times 10^{-5}$.

Se definen tres conjuntos de $N_p = 100$ partículas. Usamos condiciones iniciales para movimiento circular con $\vec{x}_p(0) = r_p(1, 0, 0)$ y velocidad $\vec{v}_p = \frac{2\pi r_p}{T_p}(0, 1, 0)$, donde el periodo T_p está dado por la fórmula (4.61). Definimos tres conjuntos de $N_p = 100$ partículas: el primer conjunto con posiciones iniciales x distribuidas uniformemente en el intervalo $r_p \in (0, r_0]$, donde $r_0 = 92.99r_c$. Observamos que estas partículas tienen posiciones iniciales tanto dentro del núcleo como en la región del halo. Los conjuntos segundo y tercero tienen posiciones iniciales x ligeramente desviadas de las del primer conjunto, de manera que para el segundo conjunto las posiciones se multiplican por un factor de 1.001, y para el tercero por 1.01. La idea es estudiar posteriormente la sensibilidad a las condiciones iniciales para prever un comportamiento caótico.

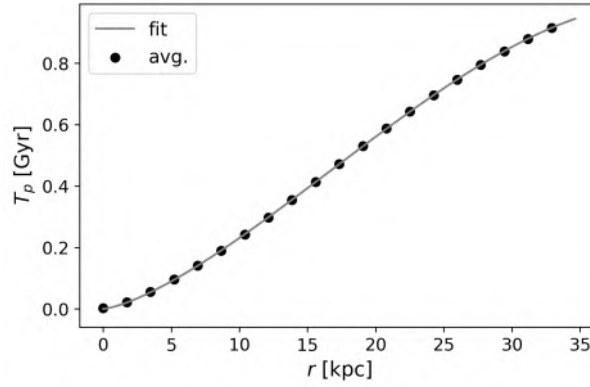


Figura 4.37: Periodo en el que una partícula de prueba completa una órbita circular alrededor del sistema para el potencial estacionario $\langle V \rangle$, donde los puntos negros representan la solución numérica y la línea punteada gris una fórmula de ajuste.

Condiciones de frontera

Por lo general, las condiciones de frontera no se consideran necesarias para ecuaciones diferenciales ordinarias de partículas de prueba. Sin embargo, cuando se trabaja con el potencial requerido en la segunda ley de Newton, que está confinado al dominio numérico donde se conoce la solución, es necesario aplicar las mismas condiciones de frontera que en el sistema SP (2.10-2.11). En nuestro caso, se emplean condiciones de frontera periódicas. En consecuencia, una partícula que sale del dominio numérico por una cara, reingresa por la cara opuesta, manteniendo así la consistencia con el potencial gravitacional.

Finalmente, la integración de las ecuaciones de movimiento se lleva a cabo con un método de Runge-Kutta de cuarto orden.

4.4.4 Movimiento de partículas de prueba

Caso de potencial estacionario

Para comprobar que la integración numérica de las trayectorias funciona correctamente, resolvemos las ecuaciones de movimiento (4.57) para el potencial $\langle V \rangle$ y comparamos con la solución exacta (4.59). Los resultados de la integración numérica son consistentes con los resultados exactos, según los cuales las posiciones de las partículas están dadas por $\langle x_p \rangle = r \cos[\omega_r t]$, $\langle y_p \rangle = r \sin[\omega_r t]$, $\langle z_p \rangle = 0$, donde la frecuencia angular y el periodo para una partícula que inicia en un radio r son, respectivamente, $\omega_r = \sqrt{\frac{1}{r} \frac{d\langle V \rangle}{dr}}$ y $T_r = 2\pi/\omega_r$.

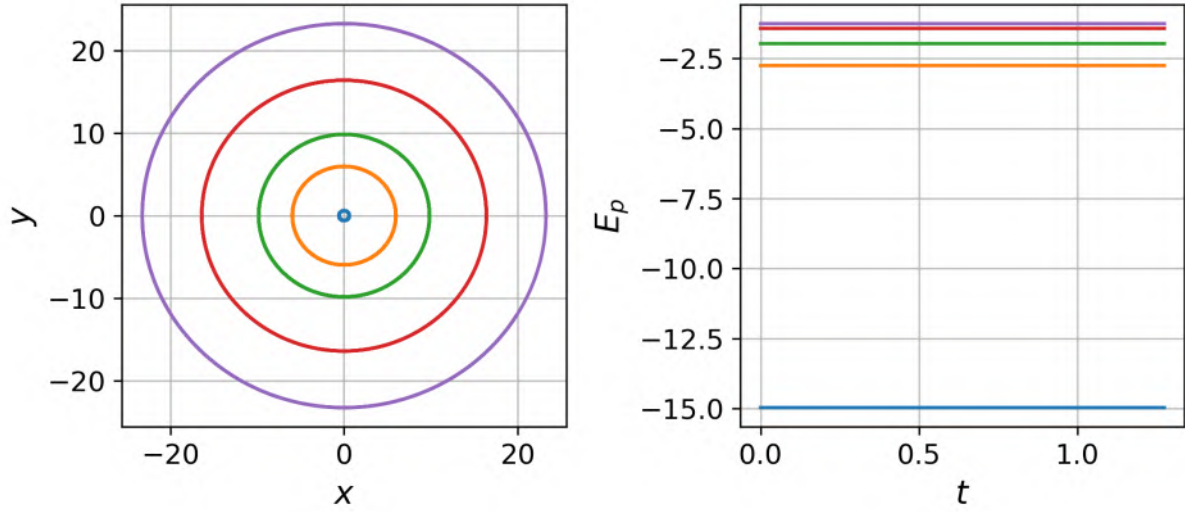


Figura 4.38: A la izquierda, trayectorias de una muestra de partículas de prueba en el potencial estacionario en el plano $z = 0$, las cuales son circulares y, por lo tanto, consistentes con la descripción de las condiciones iniciales. A la derecha, la energía total en función del tiempo para la misma muestra de partículas de prueba, lo que ilustra la conservación de energía.

Los resultados se ejemplifican en la Figura 4.38 para una muestra del conjunto completo de condiciones iniciales. A la izquierda, se muestra que las trayectorias son verdaderamente circulares, y a la derecha, que se satisface la conservación de la energía dentro de la precisión numérica, ya que las trayectorias se mantienen en el mismo camino durante los 1.4 Gys de evolución.

Potencial dependiente del tiempo

En este caso, resolvemos las ecuaciones de movimiento (4.60) durante la evolución de la estructura núcleo-halo según el sistema (2.10)-(2.11), del cual extraemos V en todos los instantes. Integramos para todas las condiciones iniciales y finalmente rastreamos las trayectorias de las partículas que eran circulares en el caso del potencial estacionario.

La Figura 4.39 ilustra la proyección de algunas trayectorias de partículas de prueba en diferentes planos, bajo la influencia del potencial completamente dependiente del tiempo V . Estas se comparan con las trayectorias bajo el potencial promedio estacionario $\langle V \rangle$. Las trayectorias muestran un comportamiento errático para radios iniciales pequeños, cercanos y dentro del núcleo, donde parecen ser caóticas. Para radios iniciales más grandes, alejados del núcleo, las trayectorias parecen ser más uniformes, aunque también se desvían de los caminos circulares.

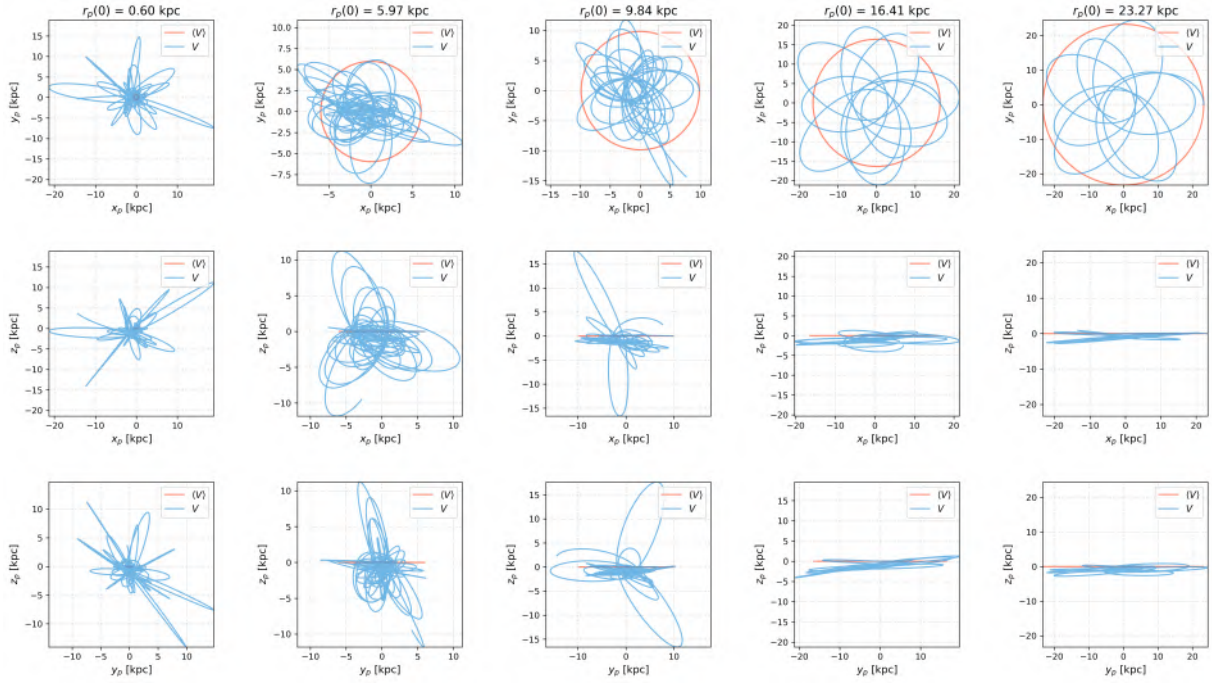


Figura 4.39: Las líneas azules representan las trayectorias de las partículas de prueba bajo la influencia del potencial estacionario $\langle V \rangle$, para algunas de las condiciones iniciales de la Figura 4.38. Las líneas naranjas representan las trayectorias de las partículas bajo el potencial completamente dependiente del tiempo V , para las mismas condiciones iniciales. Las tres filas muestran las proyecciones de las trayectorias en los planos xy , xz y yz , respectivamente. Cada columna corresponde a las condiciones iniciales $x_p(0) = 0.6000, 6.560, 12.53, 18.49$ y -15.27 , de izquierda a derecha.

Para un análisis más detallado, la Figura 4.40 presenta, a la izquierda, la distancia radial de las partículas $r_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$ como función del tiempo. Se observa que para radios pequeños, las trayectorias oscilan con diferentes modos, mientras que para radios más grandes, tienden a recuperar trayectorias circulares. Esta figura ilustra cómo V acelera a las partículas con diferentes modos e intensidades a lo largo del tiempo. A la derecha, mostramos la energía específica total de las partículas, la cual no se conserva, indicando cómo el potencial inyecta energía en las trayectorias.

Trayectorias caóticas

La trayectoria de la partícula parece ser caótica en el caso del potencial completamente dependiente del tiempo, mostrando un comportamiento marcadamente diferente al caso radial. Sin embargo, ahora demostraremos que la trayectoria es caótica en un sentido más estricto. Un sistema dinámico de primer orden se dice que exhibe caos si (ver, por ejemplo, [104]):

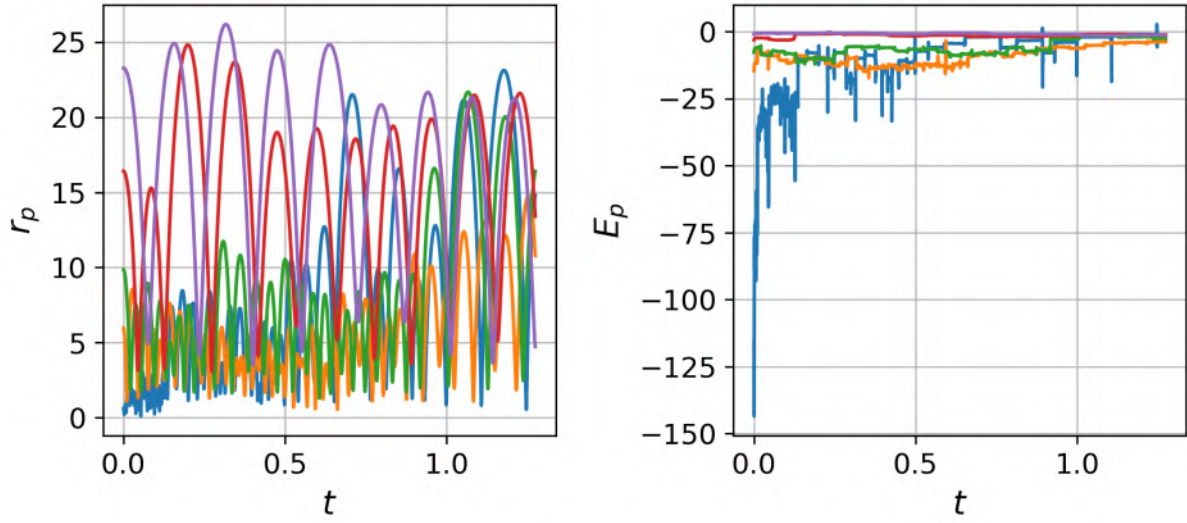


Figura 4.40: A la izquierda, la distancia al origen de las partículas de prueba como función del tiempo, en el caso del potencial dinámico V . Estas difieren del radio constante correspondiente al caso estacionario en la Figura 4.38. Estas diferencias surgen porque el potencial dinámico acelera a las partículas y, en consecuencia, la energía específica no se conserva, como se ilustra a la derecha.

1. Es un sistema no lineal.
2. Es un sistema en al menos tres dimensiones.
3. Es sensible a las condiciones iniciales.

Las dos primeras condiciones se cumplen para las ecuaciones de evolución de las partículas de prueba, ya que el potencial es no lineal y el sistema tiene dimensión seis cuando se considera como un sistema de primer orden en el tiempo. Para verificar la tercera condición, utilizamos las trayectorias de los tres conjuntos de condiciones iniciales para las partículas definidas anteriormente. Las filas superior, intermedia e inferior de la Figura 4.41 muestran las proyecciones de las trayectorias de cinco partículas en los planos xy , xz y yz , respectivamente. Cada columna corresponde a un valor de las condiciones iniciales $x_p(0) = 1.19, 4.18, 7.16, 10.14$ y 13.42 kpc de izquierda a derecha. El segundo y tercer conjunto tienen una coordenada inicial x modificada por un factor de 1.01 y 1.001, respectivamente. Observe que, para las tres primeras columnas, correspondientes a posiciones iniciales cercanas al núcleo, las trayectorias son muy sensibles a las condiciones iniciales. Para las últimas dos columnas, correspondientes a posiciones más alejadas del núcleo, las trayectorias se comportan de manera más similar para las tres posiciones iniciales, aunque continúan desviándose debido a la diferencia en las condiciones iniciales.

Para comprobar si existe una desviación exponencial entre trayectorias inicialmente muy

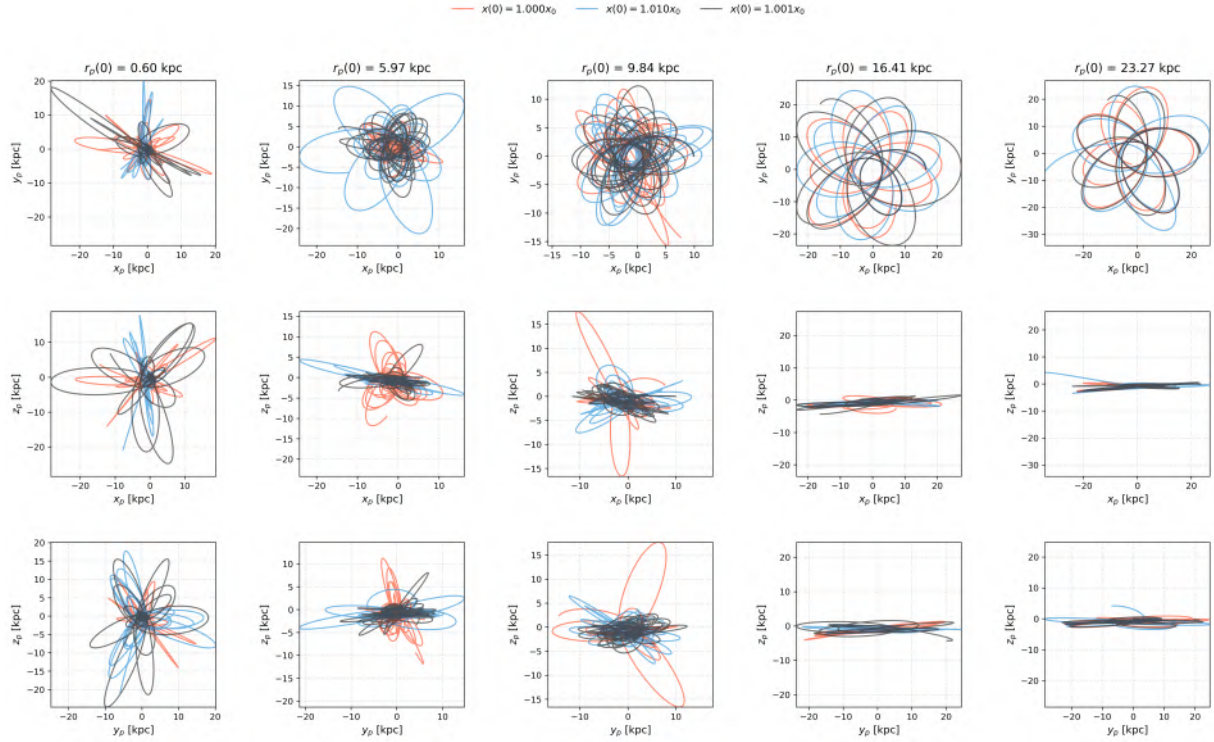


Figura 4.41: Sensibilidad a la posición inicial en la trayectoria de cinco partículas de prueba con tres condiciones iniciales cercanas $x_p(0) = x_0$, $x_p(0) = 1.01x_0$ y $x_p(0) = 1.001x_0$. Las filas superior, intermedia e inferior muestran las proyecciones de las trayectorias de las partículas en los planos xy , xz y yz , respectivamente. Cada columna corresponde a las condiciones iniciales $x_p(0) = 1.19, 4.18, 7.16, 10.14$ y 13.42 kpc, de izquierda a derecha.

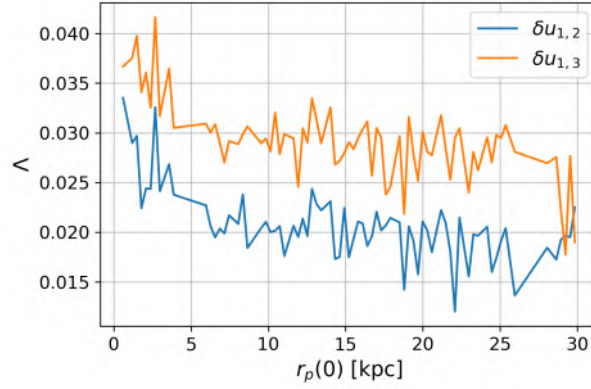


Figura 4.42: Exponente de Lyapunov máximo como función de la coordenada inicial x de las partículas de prueba. Las líneas continuas corresponden a desviaciones entre las condiciones iniciales $x_p(0) = x_0$ y $x_p(0) = 1.01x_0$. Las líneas punteadas corresponden a desviaciones entre las condiciones iniciales $x_p(0) = x_0$ y $x_p(0) = 1.001x_0$.

cercanas, calculamos el Exponente de Lyapunov Máximo (ELM), definido como:

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{|\delta \vec{u}(0)| \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \left(\frac{|\delta \vec{u}(t)|}{|\delta \vec{u}(0)|} \right), \quad (4.62)$$

donde $\vec{u} = (\vec{x}_p, \vec{v}_p)$ es la posición en el espacio fase de la partícula, que representa el estado del sistema dinámico de seis dimensiones, y $\delta \vec{u}$ es el desplazamiento entre dos soluciones que se comparan, con una separación inicial $\delta \vec{u}(0)$. Sin embargo, como no conocemos la solución en el dominio continuo, aproximamos el exponente ELM de la siguiente manera:

$$\Lambda \approx \frac{2}{t_H} \log \left(\frac{|\delta \vec{u}(t_H/2)|}{|\delta \vec{u}(0)|} \right). \quad (4.63)$$

La Figura 4.42 muestra el ELM para los vectores de desplazamiento entre el primer y el segundo conjunto de condiciones iniciales, y entre el primero y el tercero. Observa dos cosas: primero, independientemente del desplazamiento inicial, el ELM es siempre positivo, lo que indica la presencia de caos en todo el dominio numérico. Segundo, el caos es más pronunciado en una región cercana al núcleo.

Hemos mostrado los efectos de la anisotropía y la dependencia temporal de una estructura núcleo-halo *FDM* en las partículas de prueba.

Las condiciones iniciales de las partículas de prueba corresponden a trayectorias circulares, las cuales verificamos que se mantienen circulares cuando el potencial gravitacional utilizado

es el potencial promedio en el tiempo y en el ángulo sólido. Sin embargo, una vez que estas mismas trayectorias se integran en la estructura anisotrópica y dependiente del tiempo, las trayectorias no permanecen circulares, ni siquiera en el mismo plano. En su lugar, muestran un comportamiento errático, el cual es más evidente para trayectorias dentro o cerca del núcleo que en la región del halo.

Para cuantificar la sensibilidad de las trayectorias a las condiciones iniciales, integramos trayectorias de partículas de prueba con posiciones iniciales cercanas y determinamos el exponente de Lyapunov de su divergencia. El resultado muestra que este siempre es positivo, lo que indica que las trayectorias son caóticas en todo el dominio, con exponentes mayores cerca del núcleo.

Una implicación directa de este resultado es que las trayectorias de partículas de prueba obtenidas al considerar que la estructura *FDM* está dada por las fórmulas núcleo-halo estacionarias y esféricamente simétricas, las cuales son promedios de la configuración anisotrópica y dependiente del tiempo, son muy diferentes de aquellas obtenidas al considerar la estructura real, es decir, la configuración no promediada, anisotrópica y dependiente del tiempo.

El comportamiento colectivo de las partículas, por ejemplo el de un gas sobre una estructura núcleo-halo *FDM*, puede revelar nuevas correlaciones y posiblemente un comportamiento colectivo más estacionario, como los obtenidos para sistemas colectivos en (e.g. [105, 106]).

Con estos resultados, hemos concluido el análisis del comportamiento dinámico de partículas de prueba bajo la influencia de una estructura núcleo-halo de *FDM* anisotrópica y dependiente del tiempo. Las trayectorias muestran una sensibilidad significativa a las condiciones iniciales, así como un comportamiento caótico generalizado, especialmente en las regiones cercanas al núcleo.

Sin embargo, las partículas de prueba representan solo una aproximación idealizada. En escenarios físicos más realistas, la materia visible, como el gas bariónico, interactúa dinámicamente con la materia oscura en estructuras galácticas. Por lo tanto, es necesario estudiar cómo se comporta un gas ideal cuando está acoplado a las estructuras de *FDM*.

En el próximo capítulo, exploraremos esta interacción dinámica entre la materia oscura difusa y el gas visible. Analizaremos cómo el potencial gravitacional dependiente del tiempo afecta a la evolución del gas, así como las posibles correlaciones colectivas que puedan surgir en este sistema combinado.

Capítulo 5

Simulaciones de Materia Oscura Difusa Acoplada a un Gas Ideal

En el capítulo anterior (4), analizamos la dinámica y los estados estacionarios de la *FDM* considerada como la única componente de una estructura. Esta elección se justifica por razones cosmológicas: aproximadamente el 72 % del contenido total de materia y energía del universo corresponde a la energía oscura, la cual domina exclusivamente en escalas cosmológicas al ser responsable de la expansión acelerada del universo. Por otro lado, cerca del 24 % corresponde a la materia oscura, que desempeña un papel gravitacional fundamental en la formación y evolución de estructuras. Finalmente, el 4 % restante está compuesto por materia visible.

Si bien en escalas galácticas la materia oscura predomina en términos gravitacionales, la materia visible es esencial, ya que es la que podemos observar directamente mediante telescopios. Por ello, en este capítulo extendemos el estudio al caso en el que la materia visible se acopla gravitacionalmente a la materia oscura, utilizando el modelo de Schrödinger-Poisson-Euler (2.34-2.39).

Además, el capítulo anterior sirve como una validación del código implementado para la evolución de la *FDM*, mientras que una prueba independiente del código para la solución de las ecuaciones de Euler se presenta en el apéndice A.

En este capítulo se presentan simulaciones numéricas que exploran la interacción gravitacional entre la *FDM* y el gas, utilizando el modelo de SPE. Se abordan tanto soluciones estacionarias como dinámicas, investigando su estabilidad y el impacto de la materia visible

en la evolución de la estructura galáctica.

En la Sección 5.1 se analizan las soluciones estacionarias del sistema acoplado de SPE, conocidas como estrellas de fermiones y bosones Newtonianas (*NFBS*, por sus siglas en inglés), en las que se estudian el equilibrio y la distribución de la materia oscura junto con el gas de fermiones. A continuación, en la Sección 5.2, se exploran procesos dinámicos como las fusiones de *NFBS*, prestando especial atención a cómo estas fusiones afectan la evolución de los halos galácticos.

SECCIÓN 5.1

Estrellas Newtonianas de Fermiones y Bosones

En esta sección estudiamos la construcción de **soluciones estacionarias** del sistema SSPE bajo simetría esférica, con el objetivo de describir configuraciones compuestas por materia bosónica y fermiónica. Estas soluciones, conocidas en relatividad general como estrellas de bosones y fermiones, las denominamos en nuestro régimen newtoniano como *NFBS* (por sus siglas en inglés).

Además de su construcción, exploramos la **estabilidad** de estas configuraciones, ya que poseen un potencial interés astrofísico. En particular, su estabilidad es relevante para comprender su viabilidad en escenarios astrofísicos realistas, donde las interacciones entre la materia bosónica y fermiónica pueden desempeñar un papel clave en la evolución de estas estructuras.

Finalmente, investigamos la **atractoriedad** de estas soluciones en el espacio de configuraciones. Al igual que las Estrellas de Bosones Newtonianas [65], estas configuraciones se comportan como soluciones atractoras dentro de una región de parámetros cercana al equilibrio. Las soluciones sin el componente fluido ya habían sido identificadas como atractoras en escenarios simples [10, 107] y como atractoras promedio en simulaciones de formación de estructuras [22, 108]. Determinar si estas soluciones siguen siendo atractoras cuando se incluye materia visible completamente acoplada a la *FDM* es un aspecto particularmente interesante de este estudio.

5.1.1 Soluciones estacionarias

Las ecuaciones estacionarias del sistema SPE (2.34-2.39) se derivan bajo dos supuestos principales: el parámetro de orden se encuentra en un estado estacionario y el fluido que obedece

las ecuaciones de Euler está en equilibrio hidrostático. Además, se impone simetría esférica. Bajo estas condiciones, el sistema queda expresado como:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{dV}{dr}, \quad (5.1)$$

$$-\frac{1}{2r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + V\psi = \omega\psi, \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \rho + \psi^2. \quad (5.3)$$

Para reformular el sistema en un conjunto de ecuaciones de primer orden, introducimos las variables $\phi = r^2 \frac{d\psi}{dr}$ y $M = r^2 \frac{dV}{dr}$, obteniendo:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{M}{r^2}, \quad (5.4)$$

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{\phi}{r^2}, \quad (5.5)$$

$$\frac{d\phi}{dr} = 2r^2(V - \omega)\psi, \quad (5.6)$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{M}{r^2}, \quad (5.7)$$

$$\frac{dM}{dr} = r^2 (\rho + \psi^2), \quad (5.8)$$

donde $4\pi M(r)$ representa la masa total integrada hasta el radio r . Para cerrar el sistema, utilizamos una ecuación de estado politrópica:

$$p = K\rho^{1+1/n}, \quad (5.9)$$

donde K es la constante politrópica y n el índice politrópico.

Para obtener soluciones físicamente aceptables, imponemos condiciones de regularidad en el origen, como $\rho(0) = \rho_c$ y $\psi(0) = \psi_c$, además de condiciones asintóticas, $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi = \lim_{r \rightarrow \infty} \psi' = 0$, lo que permite interpretar ω como un autovalor del sistema. En el caso del fluido, la presión se integra hasta un radio finito R_{gas} , definido como el primer cero de ρ , correspondiente al radio del componente fermiónico.

A diferencia del caso desacoplado, donde las transformaciones de escalamiento permiten generar familias completas de soluciones, el sistema acoplado requiere resolver (5.4-5.9) para cada par (ψ_c, ρ_c) , fijando K y n .

Sin embargo, la constante politrópica puede eliminarse mediante la transformación:

$$\{r, p, \rho, \psi, \phi, V, M\} \rightarrow \{K^{-n/2}r, K^n p, K^n \rho, K^{n/2}\psi, \phi, V, K^{-n/2}M\}, \quad (5.10)$$

lo que mantiene invariante el sistema (5.4-5.8) y transforma (5.9) en $p = \rho^{1+1/n}$. Esto equivale a resolver el sistema con $K = 1$, permitiendo explorar soluciones únicamente variando (ψ_c, ρ_c) para un n fijo.

Por ejemplo, consideremos $n = 1.5$, donde $\gamma = 1 + 1/n = 5/3$, apropiado para gases monoatómicos en equilibrio isentrópico. Exploramos el espacio de parámetros $(\psi_c, \rho_c) \in (0, 1.25] \times (0, 20]$, excluyendo cero en ambas componentes, ya que corresponden a soluciones ya analizadas en el capítulo 4 y el apéndice A.

En la Figura 5.1, el panel superior muestra las compacidades $M_{\text{gas}}/R_{\text{gas}}$ y M_{FDM}/r_{90} de cada componente en función de la densidad central ρ_c para distintos valores de ψ_c : 0.25, 0.5, 0.75, 1.0 y 1.25.

En el panel inferior, se presentan las razones de masa $M_{\text{gas}}/M_{\text{FDM}}$ y de radios R_{gas}/r_{90} para los mismos valores de ψ_c . Aquí, el radio r_{90} se define como el radio r dentro del cual se encierra el 90 % de la masa total del sistema.

1. *Compacidad de la componente fermiónica ($M_{\text{gas}}/R_{\text{gas}}$):* La compacidad del politrópo es una función creciente de ρ_c , lo que indica que el gas de fermiones tiende a ser más compacto a medida que su densidad central aumenta. Sin embargo, esta compacidad disminuye con respecto a ψ_c , reflejando que, a medida que el componente bosónico se vuelve más dominante, el gas de fermiones se expande y pierde compacidad.
2. *Compacidad del componente bosónico (M_{FDM}/r_{90}):* El comportamiento de la compacidad bosónica es opuesto al del componente fermiónico. Es una función decreciente de ρ_c e incrementa con valores mayores de ψ_c , mostrando que el componente bosónico tiende a ser menos compacto a medida que el gas de fermiones se densifica.
3. *Razón de masas ($M_{\text{gas}}/M_{\text{FDM}}$):* Esta razón crece con ρ_c , lo que sugiere que el componente fermiónico se vuelve más masivo en comparación con el bosónico a densidades centrales mayores. Además, la razón disminuye con ψ_c , reflejando la mayor contribución de la materia bosónica en sistemas con valores elevados de ψ_c .

4. *Razón de radios* (R_{gas}/r_{90}): Este parámetro aumenta con ρ_c , mostrando una expansión relativa del gas de fermiones en comparación con el componente bosónico. Para valores de $\rho_c < 5$, esta razón disminuye con ψ_c , pero para densidades centrales mayores, se aproxima asintóticamente a una cota $R_{\text{gas}} \sim 2.63r_{90}$.

Es importante notar que estas cuatro cantidades son invariantes bajo la transformación (5.10). Esto implica que las relaciones entre las propiedades físicas de ambos componentes (fermiónico y bosónico) no dependen del valor específico de la constante politrópica K , sino únicamente de los parámetros iniciales (ψ_c, ρ_c) y del índice politrópico n .

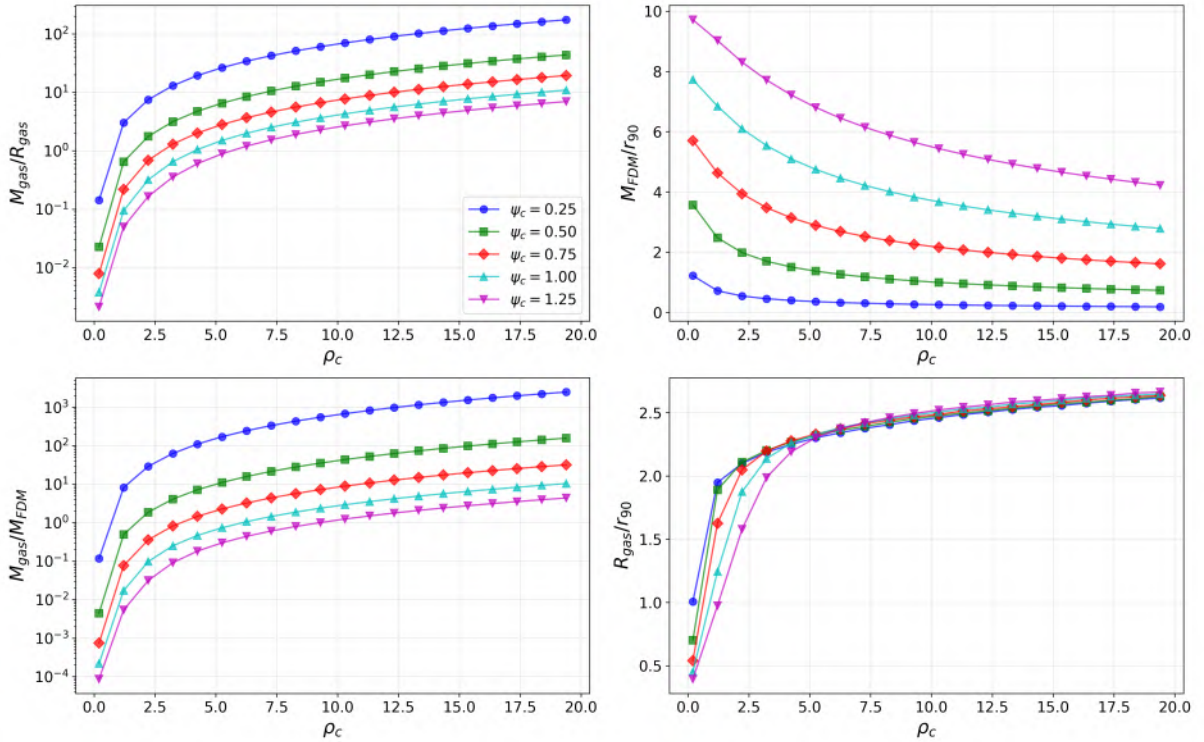


Figura 5.1: Compacidades, razones de masa y radios. Panel superior: compacidad del componente fermiónico $M_{\text{gas}}/R_{\text{gas}}$ (izquierda) y del bosónico M_{FDM}/r_{90} (derecha) en función de ρ_c para $\psi_c = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25$. Panel inferior: razones $M_{\text{gas}}/M_{\text{FDM}}$ (izquierda) y R_{gas}/r_{90} (derecha) en función de ρ_c .

Para analizar en mayor detalle la dependencia individual de cada componente en términos de los valores iniciales del par (ψ_c, ρ_c) , en la Figura 5.2 se muestra del lado izquierdo la desviación porcentual del radio del núcleo r_c . Este se define, al igual que en el capítulo anterior, como el valor donde la densidad bosónica es la mitad de su valor central, es decir, $\psi^2(r_c) = \psi_c^2/2$. Se compara con el valor de r_c sin componente fermiónica, dado por $r_c(\rho_c = 0) \sim 0.130/\sqrt{\psi_c}$. En el lado derecho de la figura, se presenta el radio del gas R_{gas} . Ambas cantidades se muestran en función de la razón de masas $M_{\text{gas}}/M_{\text{FDM}}$ para los valores $\psi_c = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ y 1.25 .

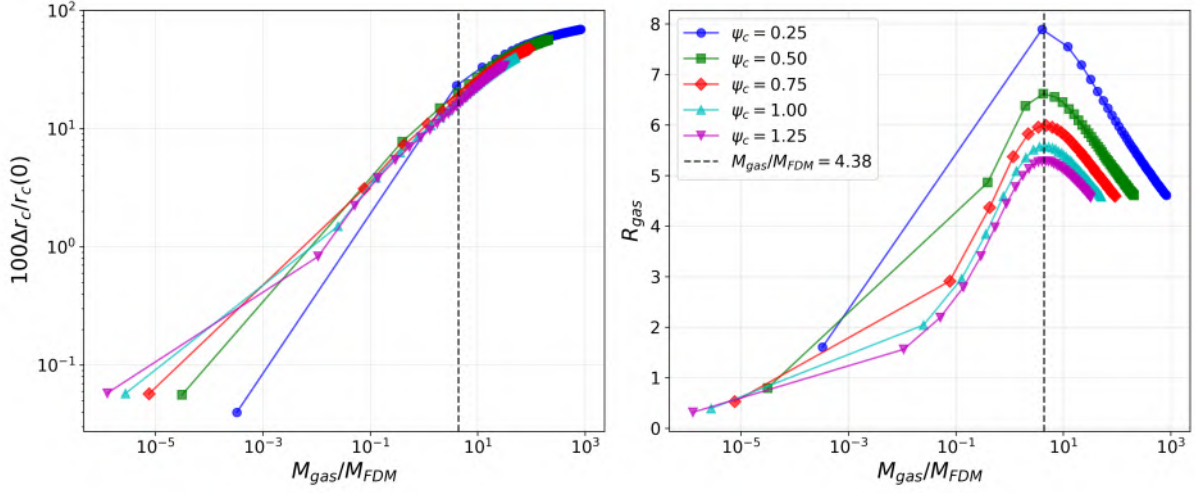


Figura 5.2: Panel izquierdo: Desviación porcentual del radio del núcleo r_c del componente bosónico respecto a su valor cuando $\rho_c = 0$. Panel derecho: Radio del gas, que presenta un valor máximo en $M_{gas}/M_{FDM} \sim 4.38$. Ambas cantidades se presentan como función de este invariante, para los valores de $\psi_c = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ y 1.25 .

1. *Desviación porcentual* $100\Delta r_c/r_c(\rho_c = 0)$: Esta cantidad es una función creciente de la razón de masas, lo que indica que la contribución de materia fermiónica es significativa para núcleos donde $M_{gas}/M_{FDM} > 0.1$. Para estos valores, el núcleo se comprime cerca del 10 %, lo que sugiere que en núcleos donde la materia visible constituye aproximadamente el 10 % de la materia oscura, los modelos que tratan ambos componentes de forma independiente pueden presentar errores porcentuales mayores a este valor.
2. *Radio del gas* R_{gas} : Este radio alcanza un valor máximo, independiente del valor del parámetro central ψ_c , cercano a $M_{gas}/M_{FDM} \sim 4.38$. Este resultado, al ser un invariante de K , es general para todas las *NFBS*. El punto donde la componente fermiónica deja de expandirse y comienza a comprimirse ocurre cuando $M_{gas} \sim 4.38 M_{FDM}$.

Con esto podemos ver que el radio del núcleo bosónico r_c depende tanto del parámetro de orden central ψ_c como de la densidad central ρ_c . Por lo tanto, es de esperar que el perfil empírico de la estrella de bosones también cambie, como ocurre en el caso de una estrella de bosones con autointeracción [76] o en el sistema de un agujero negro acoplado con una estrella de bosones [75], donde el perfil empírico cambia respecto a la fórmula 4.15.

Sin embargo, aunque no proporcionemos un ajuste de r_c en términos de estas dos cantidades, podemos ver que con el r_c apropiado, el perfil empírico sin materia visible dado por 4.15 aún sigue siendo una buena aproximación para la solución numérica. Esto se muestra en el panel izquierdo de la Figura 5.3, donde se presentan las densidades bosónicas de algunas de las soluciones numéricas normalizadas respecto a su valor central ψ_c^2 en función del radio r

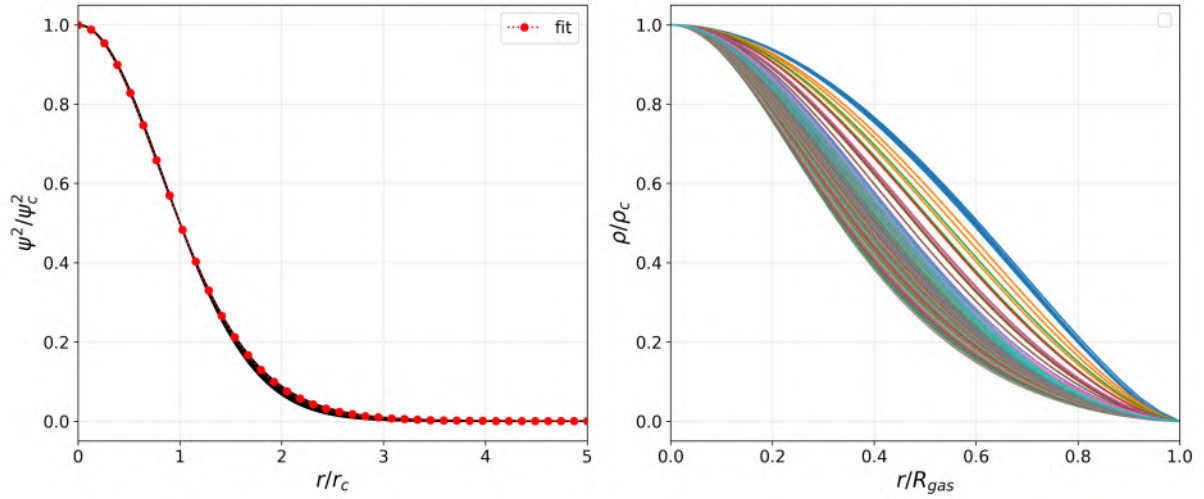


Figura 5.3: Panel izquierdo: Densidades bosónicas de soluciones numéricas normalizadas respecto a su valor central ψ_c^2 en función del radio r normalizado respecto al radio del núcleo r_c , junto con el ajuste empírico dado por 4.15. Panel derecho: Densidad del componente fermiónico normalizada respecto a su valor central ρ_c en función del radio r , normalizado respecto al radio del gas R_{gas} . A diferencia del componente bosónico, el perfil del componente fermiónico muestra un comportamiento más complejo que dificulta establecer una fórmula empírica para describirlo. Notar que ambos perfiles son invariantes bajo la transformación (5.10).

normalizado respecto al radio del núcleo r_c , junto al ajuste empírico 4.15.

Por otro lado, en el panel derecho se muestra la densidad del componente fermiónico normalizada respecto a su valor central ρ_c en función del radio r normalizado respecto al radio del gas R_{gas} . A diferencia del componente bosónico, este perfil tiene un comportamiento más exótico respecto a esta normalización, dificultando poder establecer una fórmula empírica que lo describa.

Notar que estos perfiles son independientes de la transformación (5.10).

5.1.2 Estabilidad

Un aspecto de vital importancia al analizar las soluciones estacionarias de cualquier sistema es determinar si son soluciones estables. En este sentido, exploramos la estabilidad de estas soluciones, de manera similar a como se hizo en el caso de las estrellas de bosones puras 4.1.2. Consideramos que las soluciones obtenidas numéricamente ya están perturbadas debido a la aproximación inherente a los métodos utilizados, por lo que investigamos si estas soluciones

son estables bajo dicha perturbación.

Para ello, establecemos como caso de prueba $K = 10$, ya que otro valor puede obtenerse tomando la transformación (5.10). Estudiamos tres situaciones: en el primer caso, la materia oscura bosónica domina sobre la materia visible; en el segundo caso, ambas contribuyen por igual; y en el tercer caso, la materia visible domina sobre la componente oscura. En particular, elegimos los invariantes $M_{gas}/M_{FDM} = 0.1, 1$ y 10 para estudiar estos tres escenarios, respectivamente fijando el valor central $\psi_c = 1$ y el índice politrópico $n = 1.5$.

La evolución del sistema se analiza bajo dos escenarios distintos:

1. *Evolución isentrópica:* En el primer escenario, suponemos que la evolución mantiene al gas en un estado isentrópico, por lo que la evolución se realiza utilizando la ecuación de estado politrópica 5.9.
2. *Evolución libre:* En el segundo escenario, suponemos que el politropo está en un estado isentrópico al tiempo inicial, y se permite una evolución libre mediante la ecuación de estado de un gas ideal 2.5.

Configuración de las Simulaciones

Para los propósitos de las simulaciones realizadas en este capítulo, utilizamos un esquema de integración temporal de Runge-Kutta de tercer orden (RK3) e imponemos condiciones de contorno periódicas en todas las variables. El término del lado derecho de la ecuación de Schrödinger (2.28) se discretiza mediante la *FFT*, mientras que las ecuaciones de Euler (2.24)-(2.26) se resuelven con métodos de Captura de Choques de Alta Resolución, específicamente con el esquema de flujos HLLE y el limitador minmod para la reconstrucción de variables. La ecuación de Poisson (2.29) se resuelve en cada paso de RK3 utilizando el método *FFT*. El paso temporal se establece para satisfacer la condición de Courant:

$$\frac{\Delta t}{h^2} < \frac{1}{6\pi}, \quad (5.11)$$

según la recomendación de [19]. Finalmente, el sistema de ecuaciones de SPE se cierra con la ecuación de estado del gas ideal (2.5) durante la evolución.

Las soluciones esféricamente simétricas se interpolan sobre el dominio espacial cartesiano $D = [-40, 40]^3$, que se discretiza utilizando $N = 128$ puntos en cada dirección. La evolución se explora en el dominio temporal $t \in [0, 200]$, discretizado con resolución temporal $\Delta t = CFL h^2$, donde $CFL = 0.1$ y $h = 5/16$, utilizando condiciones de frontera aisladas.

Evolución isentrópica

En la Figura 5.4, la primera columna muestra la evolución de la densidad central de ambas distribuciones de materia, normalizadas con respecto a su valor inicial. La segunda columna muestra la transformada de Fourier de estas series temporales, donde se obtiene la frecuencia de oscilación $\omega_c = 0.3140, 0.3180$ y 0.3142 para los casos con $MR = 0.1, 1$ y 10 , respectivamente. Se observa que las soluciones oscilan cerca de la configuración de equilibrio, lo que indica estabilidad.

Evolución libre

En la Figura 5.5, del lado izquierdo se presenta la evolución de las densidades centrales normalizadas respecto a sus valores centrales al tiempo inicial, mientras que del lado derecho se muestran las transformadas de Fourier de estas señales. La primera, segunda y tercera fila corresponden a los casos con $MR = 0.1, 1$ y 10 , respectivamente. Con respecto a estos resultados, es posible afirmar que las soluciones en una evolución con una ecuación de estado de un gas ideal no permanecen estables; sin embargo, las soluciones convergen a otra solución estable. El resultado de la evolución isentrópica se mantiene, es decir, el gas adquiere los mismos modos de oscilación que la componente bosónica.

La Figura 5.5 muestra instantáneas de la evolución de la densidad del fluido y la función de onda para los tres casos representativos. Se observa que al evolucionar una solución en equilibrio con una EoS de gas ideal, la distribución de densidad del gas no se mantiene en equilibrio, mientras que la de la función de onda sí lo hace.

En la Figura 5.6, se muestra la energía interna total del gas en función del tiempo. Se observa un incremento, lo que indica una compresión y calentamiento del gas, seguido de una expansión que lo enfría.

5.1.3 Atracción

Condiciones iniciales. Para la *FDM* seguimos el enfoque presentado en la Sección 4.1, en la cual se demuestra que la condensación es una característica inherente del sistema *FDM* en diversos escenarios, independientemente de la forma inicial de la nube [19]. En consecuencia, la condición inicial para el componente *FDM* se define en el espacio de momentos mediante el parámetro de orden $\hat{\Psi}(\vec{p}) = Ae^{-0.5p^2}e^{i\Theta}$, donde Θ es una fase aleatoria en el intervalo $[0, 2\pi]$ en cada punto del espacio de momentos, y A es un factor de normalización que garantiza una masa total M_{FDM} .

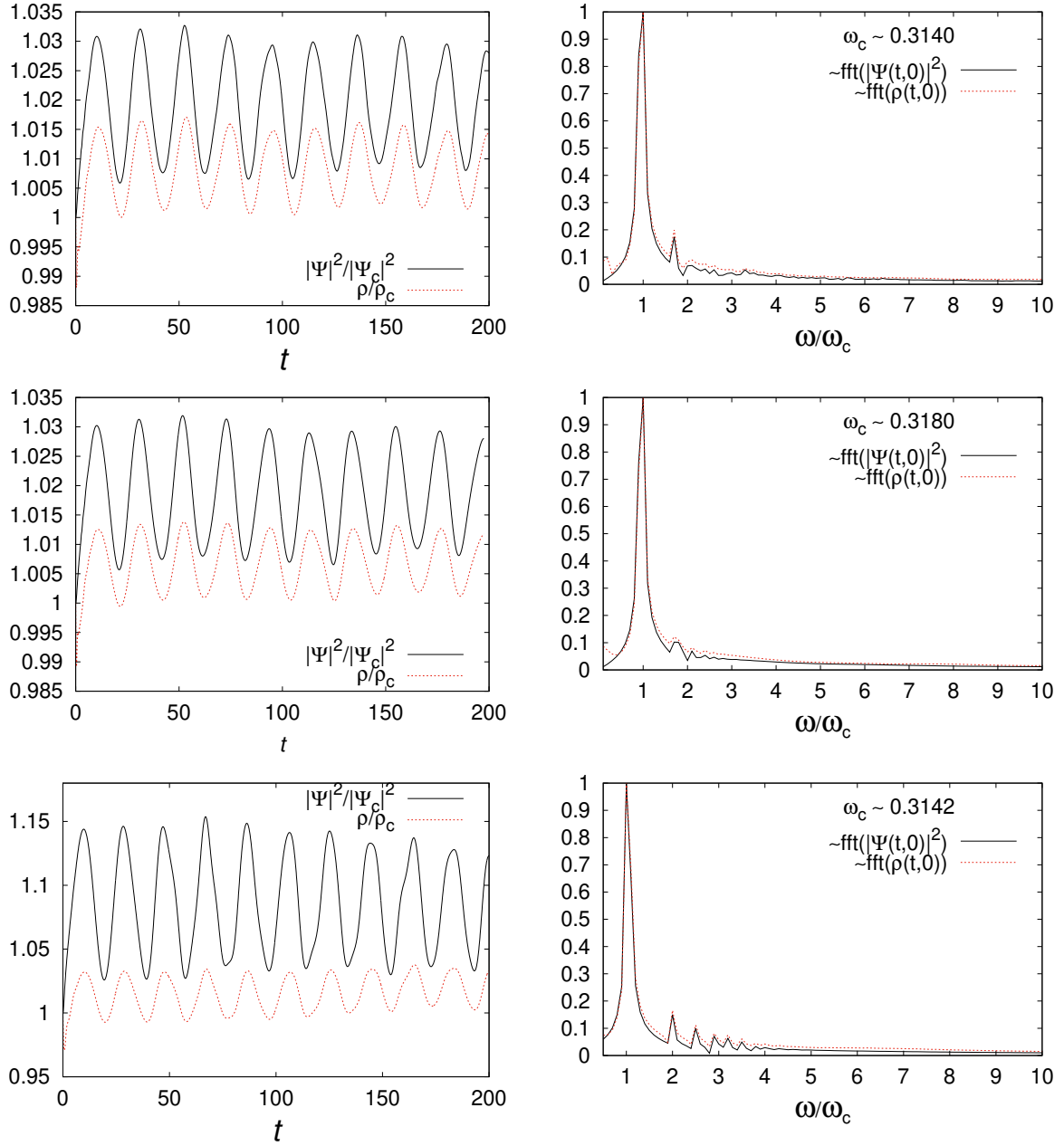


Figura 5.4: Evolución con la EoS politrópica. A la izquierda se muestra la evolución de las densidades centrales. A la derecha, la transformada de Fourier de estas densidades.

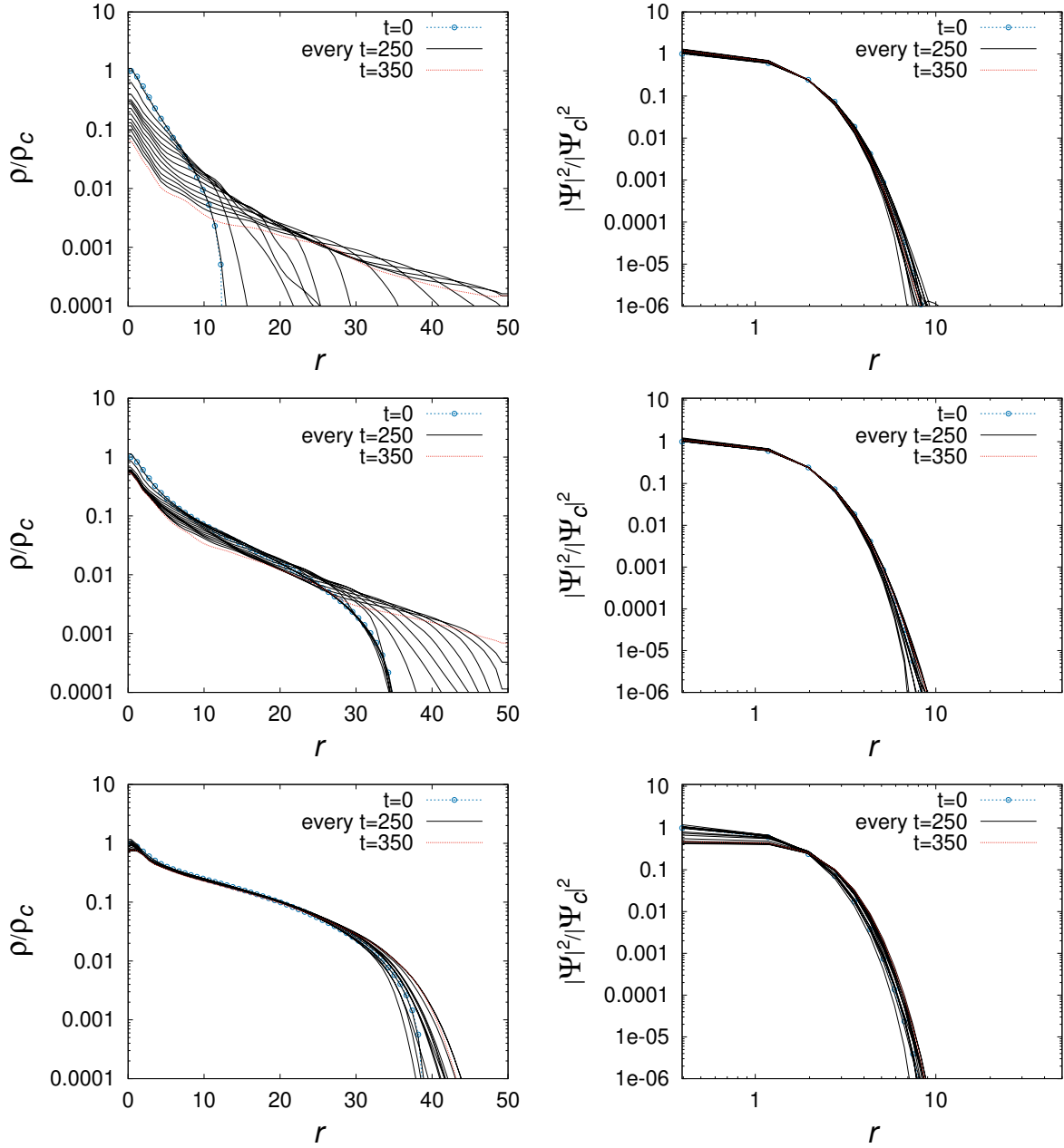


Figura 5.5: Instantáneas de la densidad del gas y la función de onda. Se observa que la función de onda oscila cerca de la configuración inicial, mientras que el gas se redistribuye.

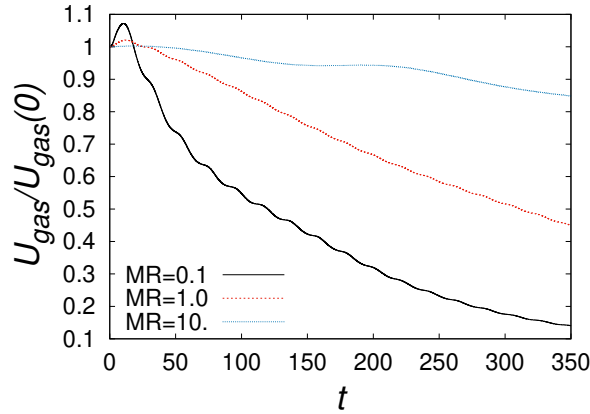


Figura 5.6: Energía interna total del gas ideal en función del tiempo para los valores $MR = 0.1, 1$ y 10 .

Para el gas ideal (*IG*, por sus siglas en inglés), seguimos una estrategia similar. Establecemos las condiciones iniciales de las variables del fluido generando una función de onda auxiliar análoga a la de *FDM*. Posteriormente, extraemos la densidad de masa y la velocidad a través de la transformación de Madelung (2.15). Finalmente, establecemos la presión inicial usando la ecuación de estado politrópica (2.6) y calculamos la energía interna específica inicial mediante la ecuación de estado del gas ideal (2.5).

El dominio espacial es un cubo discretizado con $N = 128$ puntos de malla por dimensión, lo que implica una resolución espacial de $h = L/128 = 9/64$.

En el contexto cosmológico, esta configuración puede interpretarse como un conjunto homogéneo idealizado de fluctuaciones de densidad y velocidad, formadas durante la relajación violenta de un halo colapsado. Los parámetros libres γ y K , que caracterizan el *IG*, permiten estudiar la sensibilidad de la configuración final a las propiedades del medio interestelar multifase de la galaxia. Un comportamiento más complejo, como el enfriamiento dependiente de la densidad o la retroalimentación cinética, no se espera que altere los resultados cualitativos, aunque deberá incluirse para obtener predicciones cuantitativas, lo cual dejamos para futuros estudios.

Espacio de Parámetros. Utilizamos un índice adiabático $\gamma = 5/3$, correspondiente a un índice politrópico $n = 3/2$ en procesos isentrópicos. Dado que la energía interna específica es proporcional a la temperatura y, en este caso, también a la constante politrópica K , exploramos los efectos de temperatura del *IG* en el instante inicial fijando K a valores de 0.1, 1 y 10 en unidades de código. La masa de la *FDM* se fija en $M_{FDM} = 1005.3$ dentro de un dominio cúbico de tamaño $L = 18$, parámetros tomados de una simulación estándar de formación de núcleos [19]. La masa del componente *IG* se define mediante una razón de masa $M_{IG} = MR \cdot M_{FDM}$, tomando $MR = 0.1$ y 0.2 .

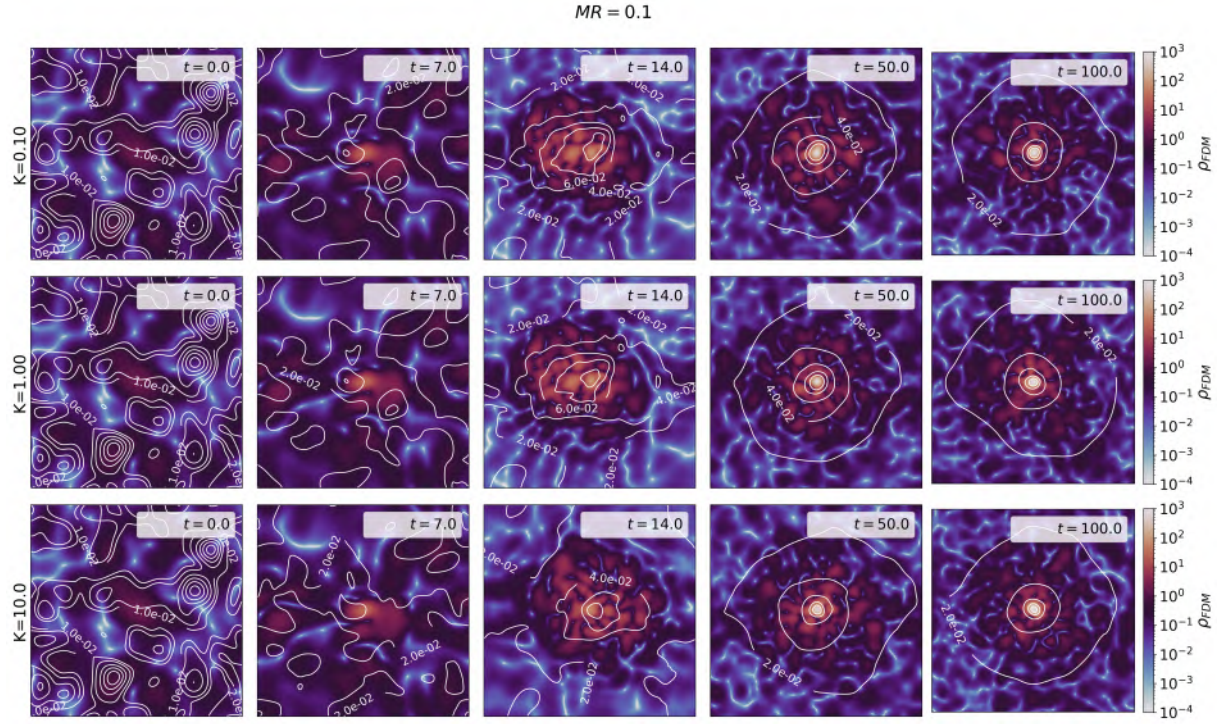


Figura 5.7: Evolución de las densidades ρ_{FDM} y ρ para las simulaciones con $MR = 0.1$, descritas mediante mapas de colores y contornos respectivamente. Estos gráficos están centrados en el máximo de la densidad de FDM para facilitar la ilustración. Cada columna presenta instantáneas en los tiempos $t = 0, 7, 14, 50$ y 100 , mientras que cada fila corresponde a simulaciones con constantes politrópicas $K = 0.1, 1.0$ y 10 . Se obtienen resultados similares para $MR = 0.2$.

Evolución. La evolución de las densidades de FDM y gas se ilustra en la Figura 5.7 para las simulaciones con $MR = 0.1$. Se presentan instantáneas en los tiempos $t = 0, 7, 14, 50$ y 100 , de izquierda a derecha en cada columna; cada fila corresponde a un valor diferente de la constante politrópica inicial $K = 0.1, 1.0$ y 10 , respectivamente. La densidad de FDM está representada mediante el mapa de colores, mientras que los contornos indican la distribución del IG . Estos gráficos revelan que la condensación de FDM impulsa el colapso del componente IG , lo que sugiere que la mezcla inicial de FDM - IG , partiendo de una distribución aleatoria de ambas componentes, lleva a un colapso final. Se sabe que la FDM se condensa en una configuración estable que, en promedio, se alinea con el estado fundamental del sistema de Schrödinger-Poisson [73, 13]. Este comportamiento lleva al IG a condensarse siguiendo el potencial gravitacional del núcleo de FDM , lo que indica la formación de una Estrella de Bosones Newtoniana [19]. Para analizar con mayor detalle este comportamiento, se presentan diagnósticos adicionales a continuación.

Diagnóstico. La evolución muestra que la distribución de la materia se condensa en una configuración casi estable. Para investigar esto con más detalle, calculamos una densidad prome-

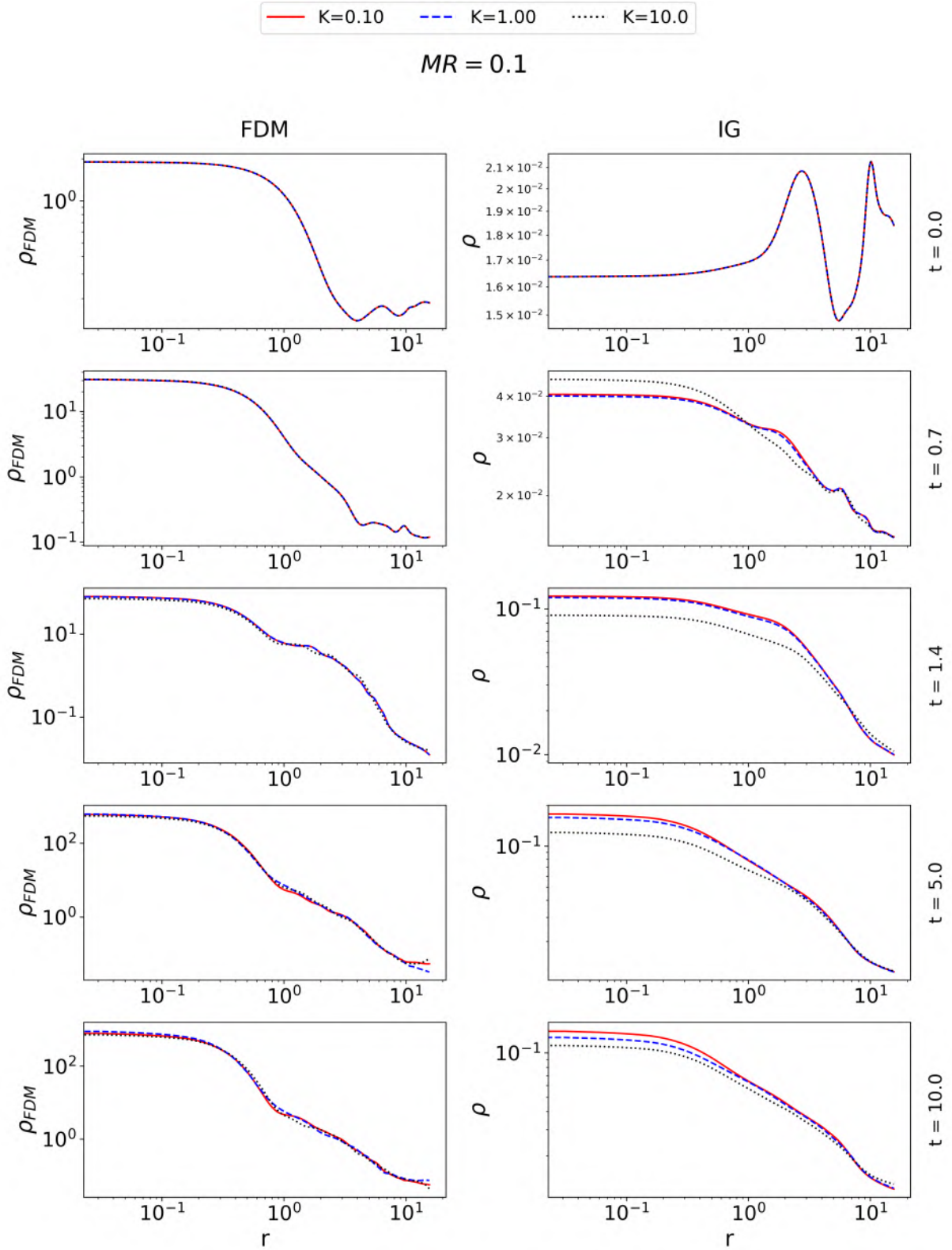


Figura 5.8: Promedio angular de ρ_{FDM} y ρ en diferentes instantes, centrado en el máximo de ρ_{FDM} para las simulaciones con $MR_{IG} = 0.1$. La línea roja sólida, la línea azul discontinua y la línea negra punteada corresponden a valores iniciales de $K = 0.1, 1$ y 10 , respectivamente. Se obtienen resultados similares para $MR_{IG} = 0.2$.

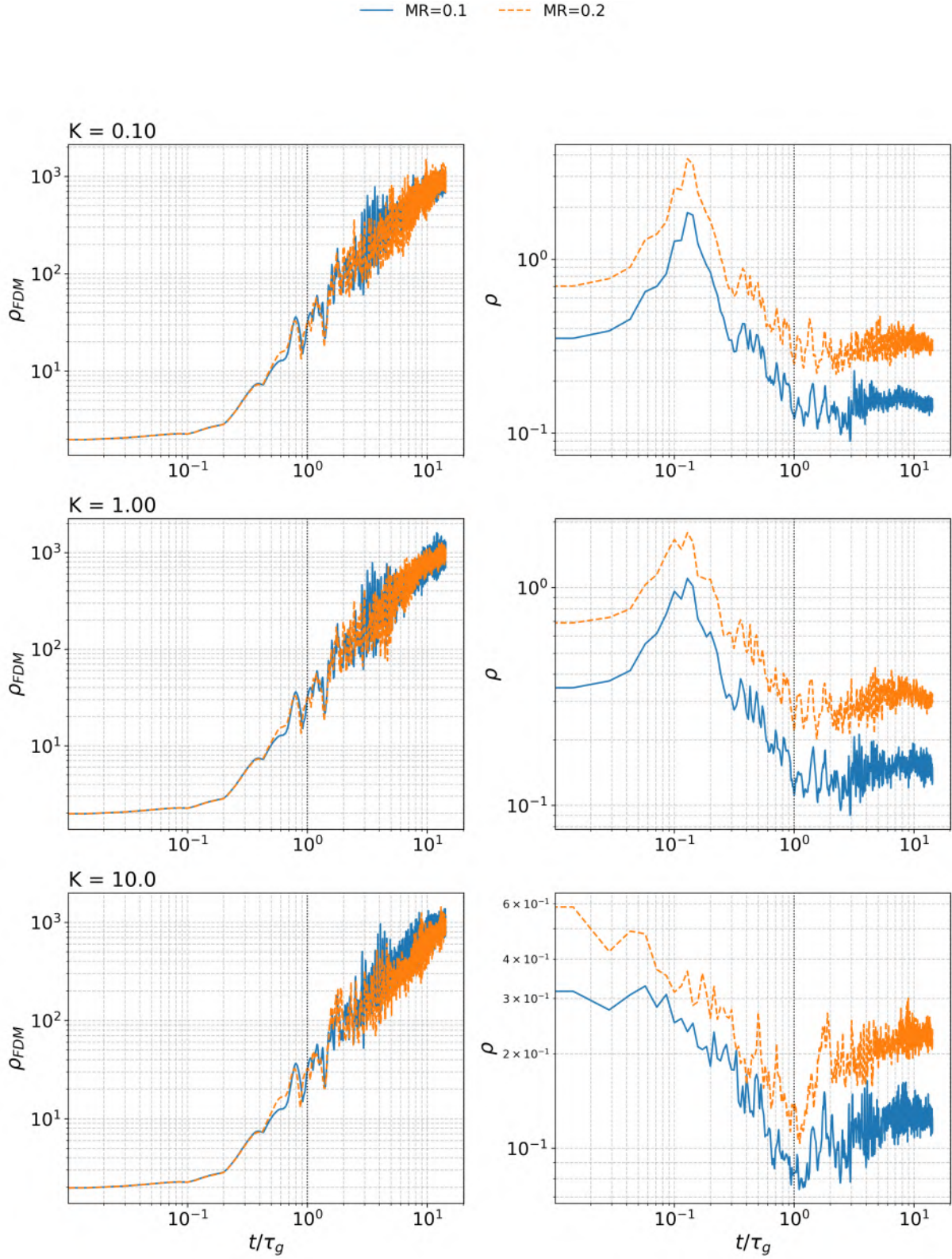


Figura 5.9: Máximo de ρ_{FDM} (izquierda) y ρ (derecha) en función del tiempo. Las filas superior, media e inferior corresponden a constantes politrópicas iniciales $K = 0.1, 1$ y 10 . Las líneas azules sólidas y anaranjadas discontinuas indican los casos con razones de masa $MR_{IG} = 0.1$ y $MR_{IG} = 0.2$.

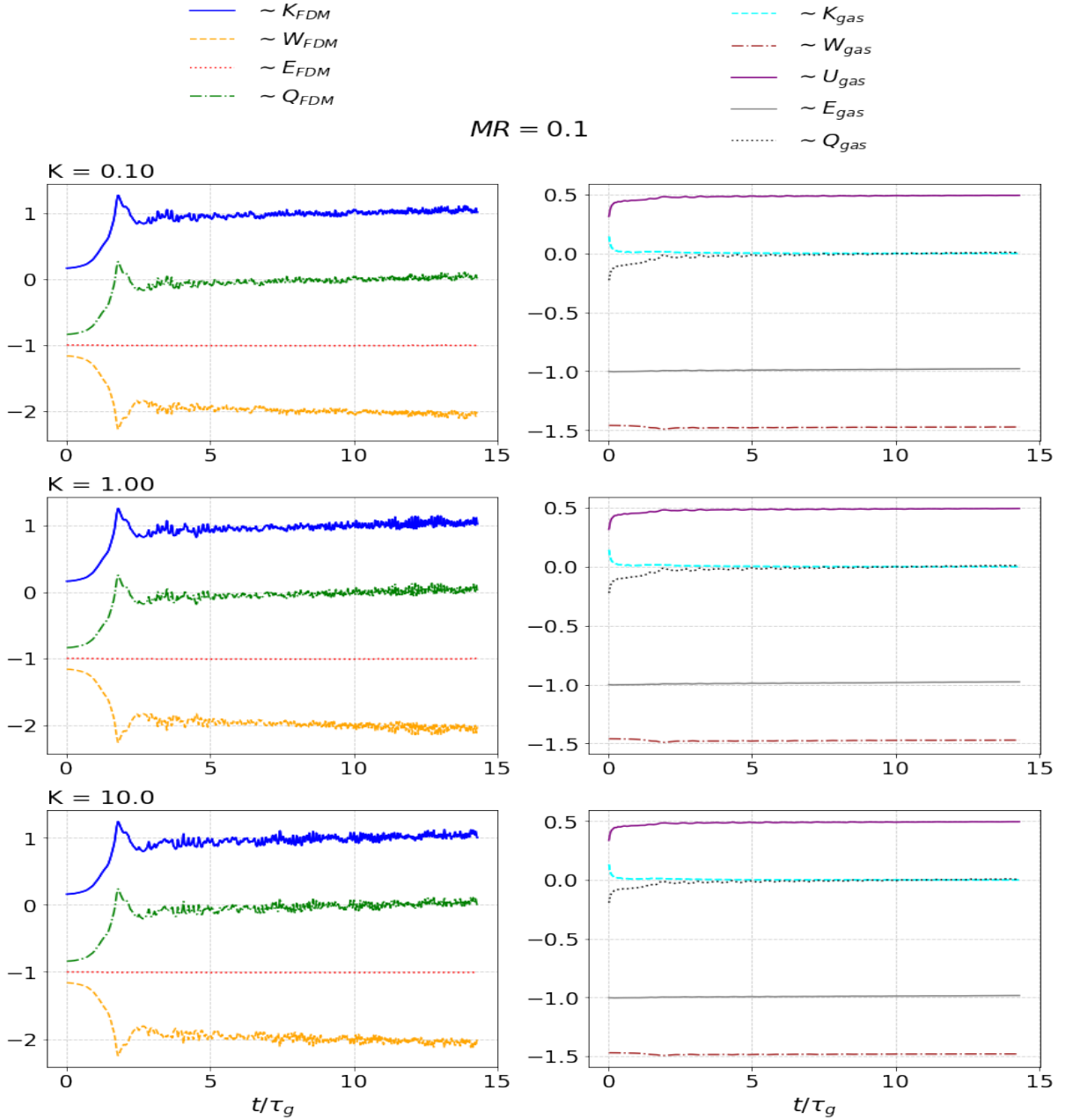


Figura 5.10: Evolución temporal de las propiedades del *FDM-IG* para las simulaciones con $MR = 0.1$. Estos gráficos ilustran el proceso de virialización del sistema *FDM-IG*, que conduce a la formación de una Estrella de Bosones Newtoniana. Para el componente *FDM*, se muestran la energía cinética K_{FDM} , la energía gravitacional W_{FDM} , la energía total E_{FDM} y el factor de virial Q_{FDM} , todos normalizados por la energía total absoluta inicial $|E_{FDM}(0)|$. Para el componente *IG*, se presentan la energía cinética K_{IG} , la energía gravitacional W_{IG} , la energía interna U_{IG} , la energía total E_{IG} y el factor de virial Q_{IG} , cada uno normalizado por la energía total absoluta inicial $|E_{IG}(0)|$. Estos diagnósticos energéticos resaltan la estabilización del sistema en una configuración virializada, con ambos componentes alcanzando valores de energía estables con el tiempo. Finalmente, $Q_{FDM} \sim 0$ y $Q_{IG} \sim 0$ con el tiempo, lo que indica que ambas componentes evolucionan de manera cercana a un estado virializado por separado. Se obtienen resultados similares para $MR = 0.2$.

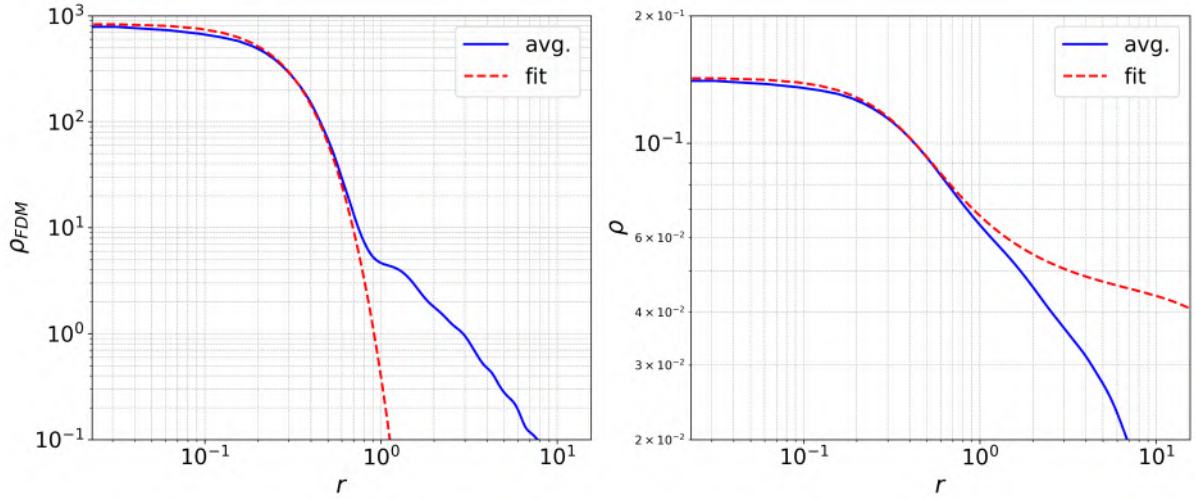


Figura 5.11: Promedio angular de ρ_{FDM} (izquierda) y ρ (derecha) para el caso $MR = 0.1, K = 0.1$ en $t = 100$, cuando el núcleo se ha relajado. Estas densidades en el núcleo se comparan con las densidades de una Estrella de Bosones Newtoniana. Considerando que las *NFBS* se construyen usando una ecuación de estado politrópica [74], encontramos que la *NFBS* que ajusta estas densidades relajadas del núcleo *FDM-IG* tiene una constante politrópica de aproximadamente 103.5. Estos resultados indican que el núcleo *FDM-IG* se aproxima a una *NFBS* estable, en equilibrio hidrostático radial y con entropía casi conservada, lo que respalda la naturaleza atractora de las *NFBS*. Todas las demás simulaciones presentan ajustes similares. Para este ajuste, no se empleó una fórmula universal fenomenológica para describir las densidades, sino que se resolvió el problema de autovalores de las *NFBS* repetidamente, buscando los parámetros de ajuste mediante un Algoritmo Genético.

diada angularmente sobre el ángulo sólido $\Omega = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, dada por $f_{\text{avg}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} f d\Omega$, que utilizamos para calcular las densidades promediadas. En nuestro caso, f será ρ_{FDM} y ρ . La Figura 5.8 presenta las densidades promediadas angularmente de los componentes *FDM-IG* para las simulaciones con $MR_{IG} = 0.1$, mientras que se encuentran resultados similares para $MR_{IG} = 0.2$. Cada fila corresponde a promedios calculados en los tiempos $t = 0, 7, 14, 50$ y 100 . Las líneas rojas continuas, azules discontinuas y negras punteadas corresponden a las constantes politrópicas $K = 0.1, 1$ y 10 , respectivamente, utilizadas en el tiempo inicial. La *FDM* forma un núcleo solitónico rodeado de una cola extendida, mientras que el componente *IG* muestra que, después de 14 unidades de tiempo, su perfil de densidad se vuelve más compacto a medida que K es más pequeño. Este comportamiento sugiere que temperaturas iniciales más altas resultan en una menor densidad central de la configuración final.

La evolución de la condensación, al menos la de la *FDM*, como se indica en [13, 19], puede seguirse a través del máximo de la densidad, que revela cómo el núcleo acumula masa de los alrededores hasta su saturación. En la Figura 5.9 mostramos el máximo de ρ_{FDM} y ρ como función del tiempo, para los dos valores de $MR = 0.1, 0.2$ y los tres valores de $K = 0.1, 1, 10$. Las líneas continuas azules y las discontinuas naranjas representan los resultados para $MR = 0.1$ y $MR = 0.2$. En todos los casos, el máximo de ρ_{FDM} crece como es típico sin el *IG*, comenzando en el tiempo de condensación τ_g [13, 19], en nuestro caso $\tau_g \sim 7$, y a partir de ahí empieza a formarse la condensación de un núcleo. Por otro lado, la densidad del *IG* antes de τ_g es errática e incluso disminuye, lo que indica una etapa de distribución casi uniforme; sin embargo, después de τ_g , la densidad del *IG* crece y se estabiliza, lo que indica que, después de que la *FDM* comience a condensarse y su potencial gravitacional dominante se profundice, el *IG* comienza a acumularse alrededor y se estabiliza. Esto se confirma con las instantáneas de la Figura 5.7.

El proceso de condensación resulta en un núcleo *FDM-IG* que se asienta en una configuración virializada del sistema SPE, como se muestra a continuación. La Figura 5.10 muestra la evolución de las diversas energías involucradas para las simulaciones con $MR_{IG} = 0.1$. Para el componente *FDM*, estas energías incluyen la energía cinética $K_{FDM} = -\frac{1}{2} \int_D \Psi^* \nabla^2 \Psi d^3x$, la energía gravitacional $W_{FDM} = \frac{1}{2} \int_D |\Psi|^2 V d^3x$, la energía total $E_{FDM} = K_{FDM} + W_{FDM}$, y el factor virial $Q_{FDM} = 2K_{FDM} + W_{FDM}$. Para el componente gas, los escalares son la energía cinética $K_{IG} = \frac{1}{2} \int_D \rho |\vec{v}|^2 d^3x$, la energía gravitacional $W_{IG} = \frac{1}{2} \int_D \rho V d^3x$, la energía interna $U_{IG} = \int_D \rho e d^3x$, la energía total $E_{IG} = K_{IG} + W_{IG} + U_{IG}$, y el factor virial $Q_{IG} = 2K_{IG} + W_{IG} + 3U_{IG}$. Resultados similares se encuentran para las simulaciones con $MR = 0.2$.

Los gráficos ilustran dos aspectos clave de la evolución. En primer lugar, el factor virial $Q = Q_{FDM} + Q_{IG} \approx 0$ para tiempos $t > \tau_g$ indica que el sistema ha alcanzado un equilibrio dinámicamente estable. Este valor cercano a cero de Q es un indicador confiable de virialización. Como resultado, la estructura general ya no experimenta cambios significativos, lo que indica que el sistema se ha asentado alrededor de una configuración estable.

Una segunda pista es la disminución de la energía cinética del *IG* hacia cero, lo que no solo indica la aproximación a un estado estacionario, sino también la aproximación hacia un equilibrio hidrostático. En el equilibrio hidrostático, la fuerza gravitacional hacia adentro se balancea con las fuerzas de presión hacia afuera, lo que da como resultado una configuración estable contra el colapso y la expansión. La pequeña energía cinética sugiere un movimiento interno mínimo dentro del gas, lo que indica que la distribución del gas se ha asentado en una configuración casi estable. En consecuencia, esta configuración relajada de *FDM-IG*, formada a través del proceso de condensación, transita hacia una estructura que mantiene el equilibrio bajo su propia gravedad y fuerzas de presión, características de un sistema autogravitante y balanceado hidrostáticamente, como es el caso de una estrella de bosones Newtoniana en equilibrio [74].

En la Figura 5.11 comparamos las densidades promediadas angularmente de ρ_{FDM} y ρ después de la relajación, con las densidades de una solución de estado fundamental de una estrella de bosones Newtoniana para una de nuestras simulaciones con $MR = 0.1$ en el tiempo $t = 100$. Una información adicional sobre las estrellas de bosones es que se construyen asumiendo una EoS politrópica, y en el caso de la Figura 5.11, la estrella de bosones que se ajusta a las densidades tiene una constante politrópica ~ 103.5 . Este tipo de ajuste sugiere no solo que el sistema *FDM-IG* alcanza un equilibrio radial hidrostático, sino también que la entropía se conserva casi completamente, lo que resalta la robustez de estas soluciones.

Con respecto a las propiedades de las configuraciones finales, los resultados se pueden resumir de la siguiente manera. Para un valor dado de MR , la densidad central y el radio del núcleo de la *FDM* son independientes de la constante politrópica inicial K del *IG* dentro de un margen de unos pocos por ciento; por otro lado, para el *IG*, encontramos que a medida que K es mayor, la densidad central es más pequeña, lo que indica que cuanto mayor es K , menos compacta es la distribución del *IG* dentro del núcleo de la *FDM*. Esta diversidad de distribuciones de *FDM-IG* se encuentra dentro de un amplio rango de soluciones de estrellas de bosones [74].

SECCIÓN 5.2

Fusiones de NFBS

Las *NFBS* representan soluciones atrachas del sistema SPE y son consideradas el estado base en configuraciones mixtas de materia oscura bosónica y materia visible. Estas estructuras combinan un núcleo central compuesto por un condensado bosónico con una envoltura de gas bariónico, logrando un equilibrio gravitacional.

En el contexto cosmológico, las *NFBS* actúan como posibles semillas de estructuras galácticas en el universo temprano. Durante la evolución del sistema, las interacciones gravitacionales entre múltiples *NFBS* pueden llevar a fusiones binarias o multinúcleo, un proceso en el cual los núcleos individuales se combinan formando una nueva estructura más masiva y estable. Estas fusiones están marcadas por la transferencia de masa, la redistribución energética y la formación de perfiles de densidad compuestos por ambos tipos de materia.

5.2.1 Sistemas Binarios

Los sistemas binarios de *NFBS* constituyen una configuración clave para estudiar las interacciones gravitacionales y de materia en modelos mixtos de materia oscura bosónica y materia visible. Entre las dinámicas más relevantes se encuentran dos escenarios principales: la fusión frontal y la fusión con momento angular. En la fusión frontal, dos núcleos colisionan directamente en trayectorias opuestas, lo que da lugar a la formación de ondas de choque y una separación de las componentes de materia. Por otro lado, en una fusión con momento angular, los núcleos orbitan alrededor de un centro de masa común, generando una redistribución dinámica más compleja marcada por la transferencia de momento angular, posibles estructuras en forma de disco y mayor estabilidad gravitacional en las etapas finales del proceso.

Fusión frontal

En un choque frontal entre dos *NFBS*, la materia bosónica, debido a su naturaleza condensada y autogravitante, atraviesa el punto de colisión con mínima dispersión. Por el contrario, el gas bariónico experimenta un calentamiento significativo y una redistribución, lo que da lugar a la formación de ondas de choque. Este comportamiento es análogo al fenómeno observado en el *Bullet Cluster* [50], donde se evidencia una separación espacial entre los perfiles de densidad de materia oscura y materia visible. Este proceso es especialmente relevante a escalas locales, ya que permite explorar fenómenos similares a los eventos de colisión galáctica a gran escala.

El estudio de la dinámica de una fusión frontal en sistemas binarios proporciona información crucial sobre la interacción gravitacional, la disipación de energía en el gas bariónico y la estabilidad de los núcleos bosónicos en entornos densos.

Condiciones iniciales. El sistema está compuesto por dos *NFBS*:

- La primera *NFBS*, ubicada en $(-10, 0, 0)$, tiene una función de onda central $\psi_c = 1$, una razón de masa $MR_0 = 0.1$ y una velocidad inicial $v_{x0} = 8$.

- La segunda *NFBS*, con $\psi_c = 2$ y $MR_0 = 0.5$, se coloca de forma que el centro de masa del sistema permanezca en el origen de coordenadas.

Aunque estas estructuras se generan con una ecuación de estado politrópica, su evolución se modela bajo la ecuación de estado de gas ideal, donde emergen como soluciones atractoras.

Condiciones de frontera. Las condiciones de frontera se configuran para minimizar perturbaciones externas. La función de onda se resuelve con condiciones periódicas mediante la *FFT*. Para mitigar la propagación de modos fuera del dominio, se implementa una esponja numérica. El potencial gravitacional se calcula con condiciones de Dirichlet utilizando la *DST*, mientras que el gas ideal emplea condiciones de flujo saliente.

Efecto Bullet Cluster. La Figura 5.12 muestra la evolución de los perfiles de densidad en la simulación, con instantáneas tomadas en los tiempos $t = 0, 1, 2$ y 3 . Los contornos azules representan la densidad de la componente *FDM*, mientras que los contornos y mapas de color rojos corresponden a la componente de gas ideal (*IG*). En el tiempo $t = 3$, se observa cómo parte del gas adopta la forma característica de una “bala”, reproduciendo los aspectos esenciales del fenómeno *Bullet Cluster*.

Análisis de las energías. El sistema hidrodinámico, regido por las ecuaciones de Euler, es inherentemente no lineal, lo que puede generar ondas de choque. Este fenómeno se describe mediante las condiciones de Rankine-Hugoniot [54], que establecen que una discontinuidad en la velocidad provoca una transferencia de energía cinética K_{IG} a energía interna U_{IG} . La Figura 5.13 muestra que, durante este proceso, la energía gravitacional W_{IG} y la energía total E_{IG} permanecen aproximadamente constantes.

En contraste, la componente *FDM*, al carecer de procesos de disipación térmica, no experimenta este tipo de transferencia de energía. Su energía total E_{FDM} permanece positiva, clasificando al sistema como no ligado. En sistemas binarios, una configuración se considera ligada si su energía total es negativa, permitiendo la estabilización gravitacional [85]. Sin embargo, en este caso, la falta de ligadura impide la formación de una estructura fusionada estable, lo que mantiene separadas las componentes de materia. Tanto la energía cinética K_{FDM} como la gravitacional W_{FDM} se mantienen casi constantes, salvo en el intervalo $t \in [1, 1.5]$, donde ocurre la superposición de solitones.

Fusión con momento angular

Condiciones iniciales. Para estudiar el proceso de fusión con momento angular, se utilizan diferentes configuraciones iniciales variando el parámetro de impacto y_0 y la velocidad inicial v_{x0} . Los valores de y_0 considerados son 5 y 10, mientras que la velocidad inicial v_{x0} se toma en el rango 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5, en unidades de código. Las propiedades de cada *NFBS* se

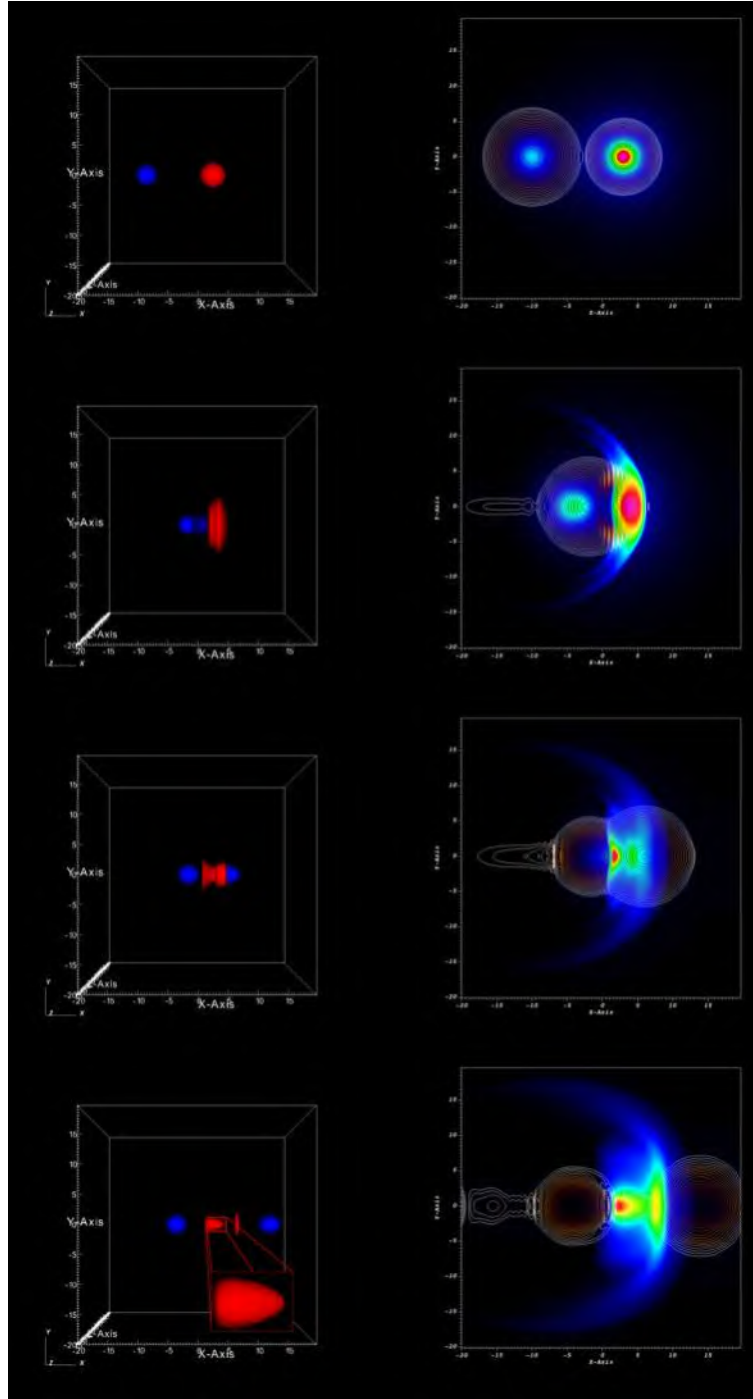


Figura 5.12: Evolución de los perfiles de densidad en el sistema *FDM-IG* durante una fusión frontal. Las instantáneas corresponden a los tiempos $t = 0, 1, 2$ y 3 , presentadas de arriba hacia abajo. Los paneles de la izquierda muestran los isocontornos de densidad, donde los contornos azules representan la componente *FDM* y los contornos rojos la componente de gas ideal (*IG*). Los paneles de la derecha muestran la proyección de estos perfiles en el plano $z = 0$, con isocontornos para la *FDM* y mapas de color para el *IG*. Se observa cómo la componente *IG* experimenta calentamiento y redistribución, formando una estructura de “bala” en la última etapa, mientras que la componente *FDM* mantiene una mayor coherencia gravitacional.

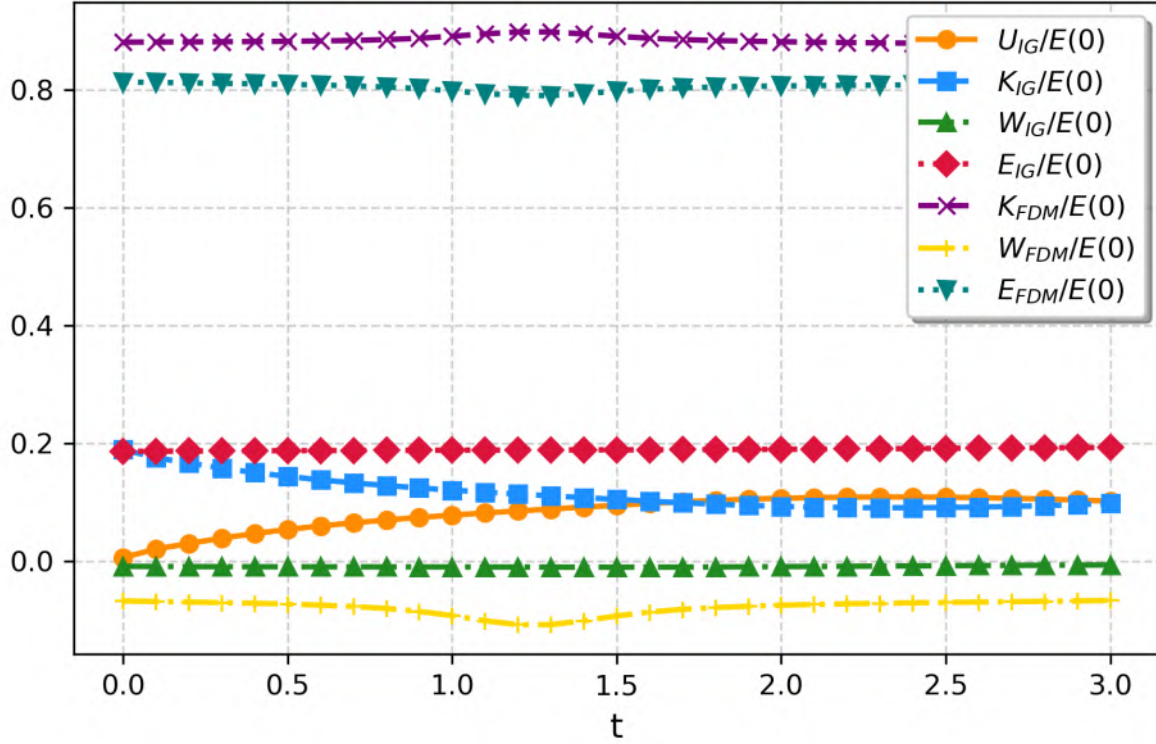


Figura 5.13: Evolución de las energías normalizadas respecto a su valor inicial para ambas componentes en una fusión no ligada. Las energías mostradas son: energía interna del gas U_{IG} , energía cinética del gas K_{IG} , energía gravitacional del gas W_{IG} , energía total del gas E_{IG} , energía cinética de la FDM K_{FDM} , energía gravitacional de la FDM W_{FDM} y energía total de la FDM E_{FDM} . Todas las energías están normalizadas respecto a la energía total E en $t = 0$.

mantienen constantes:

- La *NFBS* izquierda tiene un parámetro de orden central $\psi_c = 1$ y una razón de masa $MR_0 = 0.1$.
- La *NFBS* derecha tiene $\psi_c = 1.2$ y dos posibles configuraciones de razón de masa, $MR_0 = 0.1$ y 0.2 .

Condiciones de frontera. Las condiciones de frontera aplicadas al sistema son periódicas para las variables dinámicas, incluyendo el parámetro de orden y las variables conservativas del fluido. Esto garantiza la conservación de masa y energía tanto en la componente *FDM* como en el gas ideal (*IG*). Por otro lado, el potencial gravitacional utiliza condiciones de frontera de tipo Dirichlet, lo cual permite reproducir escalas dinámicas similares a las de un sistema aislado. Esta combinación de condiciones de frontera asegura una evolución dinámica coherente, al tiempo que permite la simulación de perturbaciones externas de forma controlada.

SECCIÓN 5.3

Fusiones entre núcleos *FDM* y nubes de gas

Un escenario particularmente interesante es la interacción entre la materia oscura y el gas bariónico. Suponiendo que las estructuras *FDM* dominan el campo gravitacional de un pozo potencial, y que una nube de gas se aproxima a dicho pozo, surge la posibilidad de analizar la dinámica del fluido acoplada a la dinámica de la *FDM*. Para explorar este fenómeno, realizamos simulaciones de la fusión entre un núcleo *FDM* y una nube de gas, modelada tanto como un gas politrópico como un gas sin presión. El objetivo es demostrar las capacidades del código para simular estos escenarios y utilizar herramientas de diagnóstico que monitorean las propiedades evolutivas del sistema *FDM*+gas.

5.3.1 Condiciones iniciales

El núcleo *FDM* se asume como la configuración de equilibrio del estado base, un núcleo perfecto, con una densidad central $\frac{1}{4\pi}$ que define su masa como $M_{FDM} = 2.06$ en unidades de código [65]. La configuración de gas puede ser una estrella TOV o una esfera de polvo, con una masa M_{gas} correspondiente al 10 % o 50 % de la masa de la *FDM*. Definimos la razón de masa como $MR = M_{gas}/M_{FDM}$.

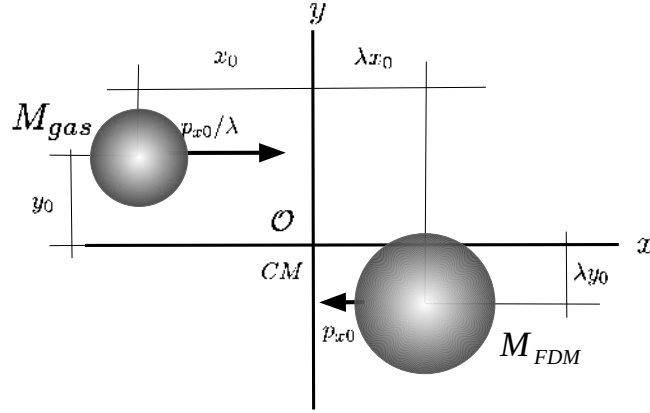


Figura 5.14: Esquema ilustrando las condiciones iniciales de la fusión entre el núcleo *FDM* y el fluido en el plano xy , con el centro de masa en el origen.

Las posiciones iniciales de los centros del núcleo *FDM* y la configuración de gas se establecen en $(MR \cdot x_0, MR \cdot y_0, 0)$ y $(x_0, y_0, 0)$, respectivamente, de modo que el centro de masa se encuentra en el origen de coordenadas. El momento inicial se aplica a lo largo del eje x , de manera que el centro de masa permanezca cerca del centro del dominio numérico. Si el núcleo *FDM* tiene un momento inicial $\vec{p}_{0,FDM} = (p_{0x}/M_{FDM}, 0, 0)$, el gas tiene un momento opuesto $\vec{p}_{0,gas} = -\vec{p}_{0,FDM}$. Este momento se implementa en la función de onda de equilibrio mediante el escalado $\Psi_{eq} \rightarrow e^{-ip_{0x}x/M_{FDM}} \Psi_{eq}$, lo que garantiza que el valor esperado del operador de momento \hat{p}_x sea $\langle \hat{p}_x \rangle = p_{0x}$.

En resumen, las posiciones y velocidades iniciales del sistema se parametrizan mediante el parámetro de impacto y_0 de la esfera de gas y el momento inicial p_{0x} del núcleo *FDM*. Estas condiciones se utilizan para integrar las ecuaciones SPE como un problema de valores iniciales.

5.3.2 Espacio de parámetros

Presentamos una muestra de fusiones entre núcleos *FDM* y configuraciones de fluido. Mostramos resultados para dos escenarios principales: i) un gas ideal con índice adiabático $\gamma = 5/3$ y ii) una esfera de polvo con $p = 0$. Para cada escenario, realizamos simulaciones variando el parámetro de impacto y_0 y el momento inicial p_{0x} , con dos valores de la razón de masa $MR = 0.1$ y 0.5 .

5.3.3 Gas ideal

Exploramos la fusión entre un núcleo *FDM* y una estrella TOV con índice adiabático $\gamma = 5/3$. El espacio de parámetros incluye una razón de masa $MR = 0.1, 0.5$, un parámetro de impacto $y_0 = 10, 15, 20$ y velocidades iniciales $v_{x0} = 0.1$ y 0.2 . Simulamos la evolución de estos encuentros en el dominio numérico $[-100, 100] \times [-100, 100] \times [-50, 50]$, utilizando refinamiento de malla (*FMR*) con dos niveles de refinamiento y una resolución de $h = 5/8$ en el segundo nivel. En el nivel de mayor refinamiento se utiliza $C = 0.1$.

La dinámica del sistema muestra que el gas tiende a orbitar el núcleo *FDM* en sentido horario. Cuando la estrella TOV se encuentra con el núcleo, la presión del gas fragmenta la estrella y el fluido circula alrededor del núcleo *FDM* desde ambos lados, lo que desencadena la formación de ondas de choque. Los diagnósticos sobre el comportamiento dinámico incluyen la virialización, la energía total, la liberación de momento angular y la evolución de la masa. En la Figura 5.15 se muestran estas variables hasta $t \sim 1000$, para todas las combinaciones de parámetros.

Las observaciones generales son las siguientes. El gas se relaja hacia un estado virializado, ya que $2K_{gas} + W_{gas}$ tiende a cero en todos los casos, y su masa también se estabiliza, lo que indica que el fluido alcanza un equilibrio. El núcleo *FDM* oscila alrededor de un estado virial con $2K_{FDM} + W_{FDM}$ cercano a cero, mientras que su masa M_{FDM} disminuye con el tiempo debido a que una esponja numérica absorbe la densidad *FDM* al aproximarse a los límites del dominio. El momento angular del gas se estabiliza alrededor de un valor finito, al igual que el momento angular del núcleo *FDM* en la mayoría de los casos. La energía del gas $E_{gas} = K_{gas} + W_{gas}$ también se estabiliza, mientras que la energía de la *FDM* $E_{FDM} = K_{FDM} + W_{FDM}$, en esta escala temporal, se estabiliza.

La Figura 5.16 muestra una instantánea en tiempo tardío de las densidades del núcleo *FDM* y del gas para todas las combinaciones de parámetros. Estas simulaciones revelan una distribución de la densidad de gas en forma de disco en el plano ecuatorial, con diversas morfologías, incluyendo en algunos casos brazos espirales y en otros discos más uniformes. El movimiento del gas es permanente, y aquí solo capturamos una instantánea.

Estas simulaciones se pueden observar más de cerca. Por ejemplo, en la Figura 5.17 mostramos la densidad del núcleo *FDM* y del gas desde perspectivas superiores y laterales, para el caso particular $y_0 = 20$, $v_{x0} = 0.2$ y razón de masa $MR = 0.1, 0.5$. El gas se distribuye con alta densidad cerca del plano ecuatorial, y también aparece una sobredensidad similar a un bulbo. Por otro lado, el núcleo *FDM* mantiene una distribución casi esférica.

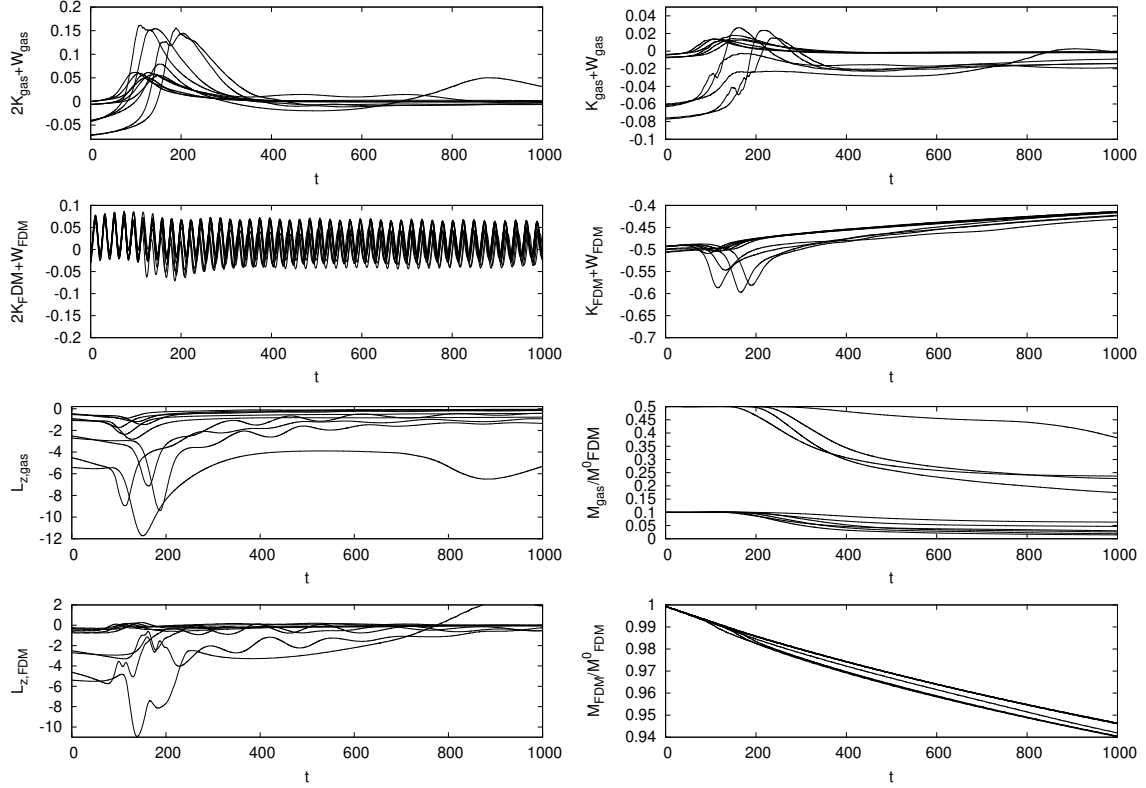


Figura 5.15: Fusión entre el núcleo *FDM* y la estrella TOV. Para todas las combinaciones de parámetros se muestra en el panel superior izquierdo la cantidad $2K + W$ para la *FDM* y el gas, en el panel superior derecho la energía total $K + W$, en el panel inferior izquierdo el momento angular total en la dirección z , y finalmente en el panel inferior derecho la masa normalizada con la masa inicial de la *FDM*, $M_{\text{FDM}}^0 \approx 2.06$, como función del tiempo.

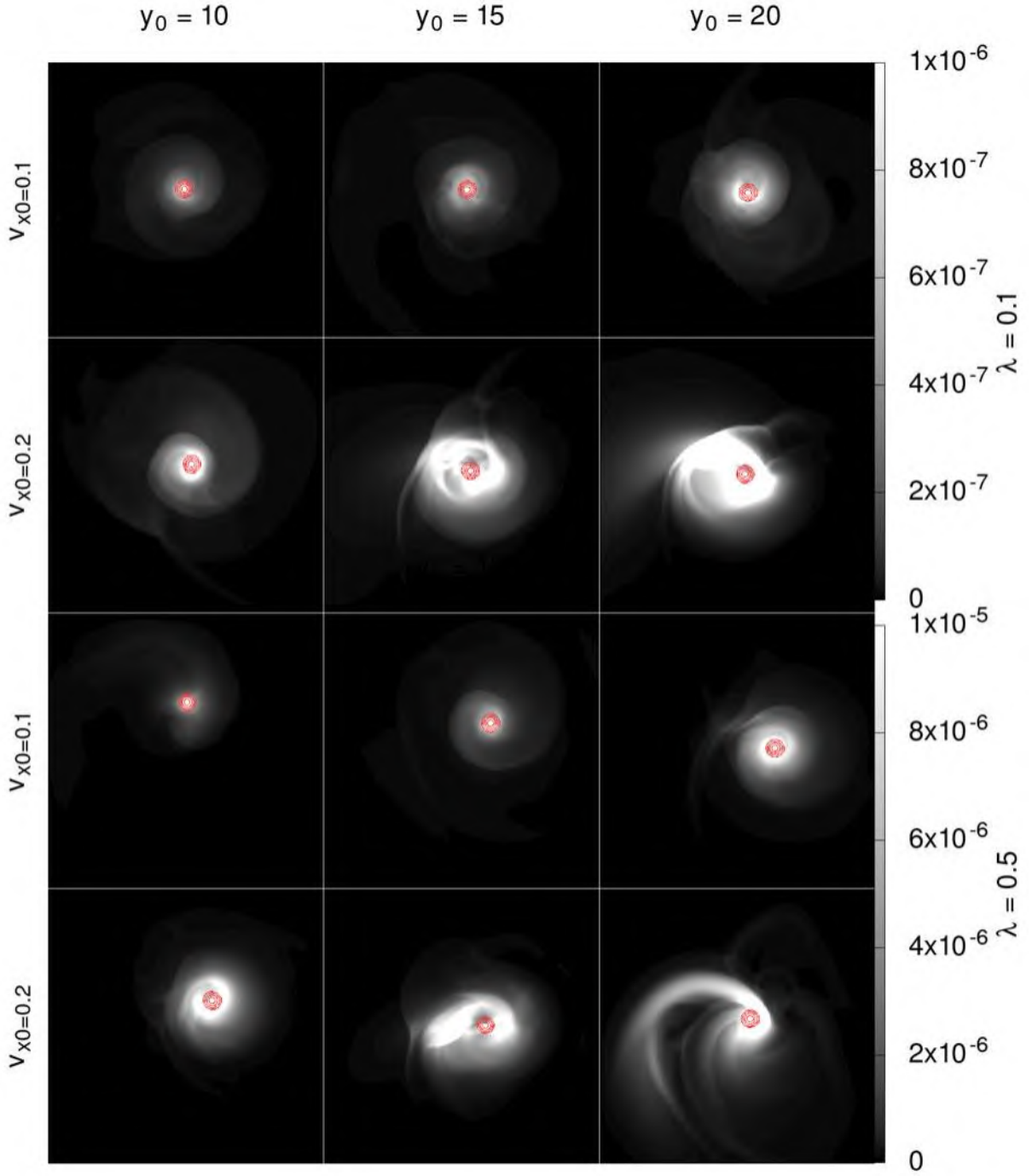


Figura 5.16: Fusión entre el núcleo *FDM* y la estrella TOV. Instantánea en $t \sim 1000$ de la densidad del gas ρ y contornos de $|\Psi|^2$ en el plano $z = 0$ para todas las combinaciones de parámetros.

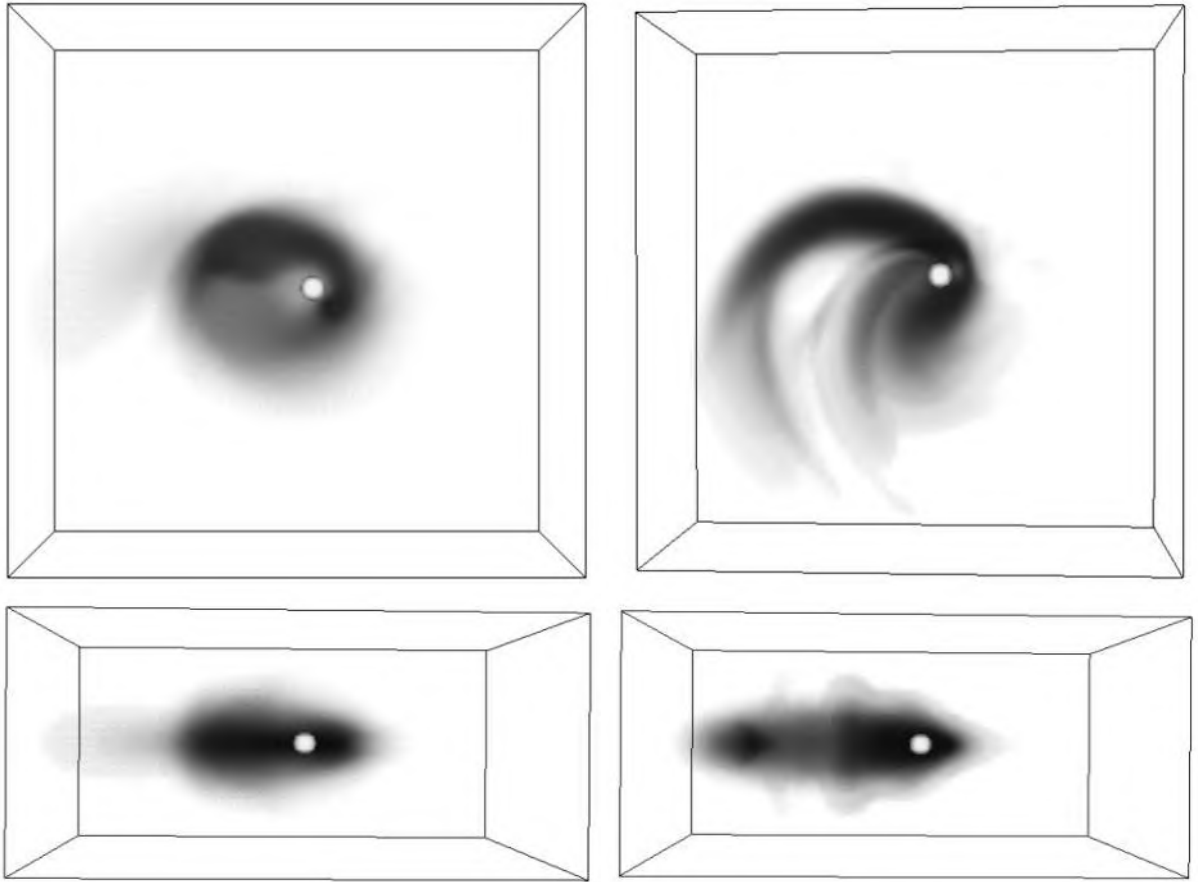


Figura 5.17: Instantánea en tiempo tardío de la fusión entre el núcleo *FDM* y la estrella TOV, para el caso $v_{x0} = 0.2$ y $y_0 = 20$. (Arriba) Densidad del gas ideal vista desde el eje z , y (abajo) vista desde el eje x . A la izquierda se muestra el caso con razón de masa $MR = 0.1$ y a la derecha $MR = 0.5$.

5.3.4 Polvo

Ahora exploramos la fusión entre un núcleo *FDM* y una esfera de polvo utilizando el mismo espacio de parámetros que en el escenario anterior. A diferencia del caso TOV, que es en sí mismo una configuración de equilibrio, en el caso del polvo simplemente usamos el perfil de densidad de TOV pero establecemos la presión en cero durante toda la evolución. Antes de la fusión, ocurre una dinámica no trivial, que incluye el colapso libre del polvo hacia su propio potencial gravitacional.

En este caso sin presión, utilizamos un dominio numérico $D = [-50, 50] \times [-50, 50] \times [-25, 25]$, más pequeño que en el caso anterior, y resolvemos el sistema utilizando un modo de malla única (*unigrid*) con resolución $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 10/16$. Para mantener la comparación, el espacio de parámetros incluye los mismos valores orbitales utilizados para la estrella TOV, es decir, con razón de masa $MR = 0.1, 0.5$, parámetro de impacto $y_0 = 10, 15, 20$ y velocidades iniciales de la esfera de polvo $v_{x0} = 0.1$ y 0.2 .

En los diagnósticos de este escenario, se encontraron resultados similares a los del caso de gas ideal en cuanto a virialización, energía total, masa y momento angular. Nuevamente, el fluido se virializa, adquiere un momento angular finito y su masa se estabiliza. Por otro lado, el núcleo *FDM* irradia el momento angular en la mayoría de los casos, no se virializa, pero oscila alrededor de un estado virial y pierde masa de forma continua debido a la expulsión durante el proceso de fusión.

La Figura 5.18 muestra una instantánea en tiempo tardío de la fusión entre las densidades del núcleo *FDM* y la esfera de polvo para todas las combinaciones de parámetros. En este caso, nuevamente, la densidad del fluido se concentra en el plano ecuatorial. Aunque no hay presión, en algunos casos se forman brazos espirales de alta densidad. El caso con $MR = 0.5$, $v_{x0} = 0.1$, $y_0 = 10$ ilustra cómo el rápido colapso del polvo antes de la disrupción genera un pozo gravitacional profundo que también distorsiona la *FDM*, lo que eventualmente expulsa ambos componentes del dominio. A diferencia del caso de gas ideal, en varias configuraciones de polvo en la Figura 5.18, la densidad del fluido se distribuye en estructuras con bordes irregulares.

Una vista en tiempo tardío de las densidades para el caso $y_0 = 20$, $v_{x0} = 0.2$ con razones de masa $MR = 0.1, 0.5$ se presenta en la Figura 5.19. Similar al caso de gas ideal, el polvo se distribuye en brazos espirales, esta vez en una distribución delgada concentrada cerca del plano ecuatorial debido a la ausencia de presión. Por otro lado, el núcleo *FDM* recupera una distribución casi esférica. Cabe destacar que el gas ideal en la Figura 5.17, para los mismos parámetros dinámicos iniciales, se distribuye en una estructura más gruesa cerca del plano ecuatorial en comparación con la distribución delgada del polvo, un comportamiento esperado debido a los efectos de presión.

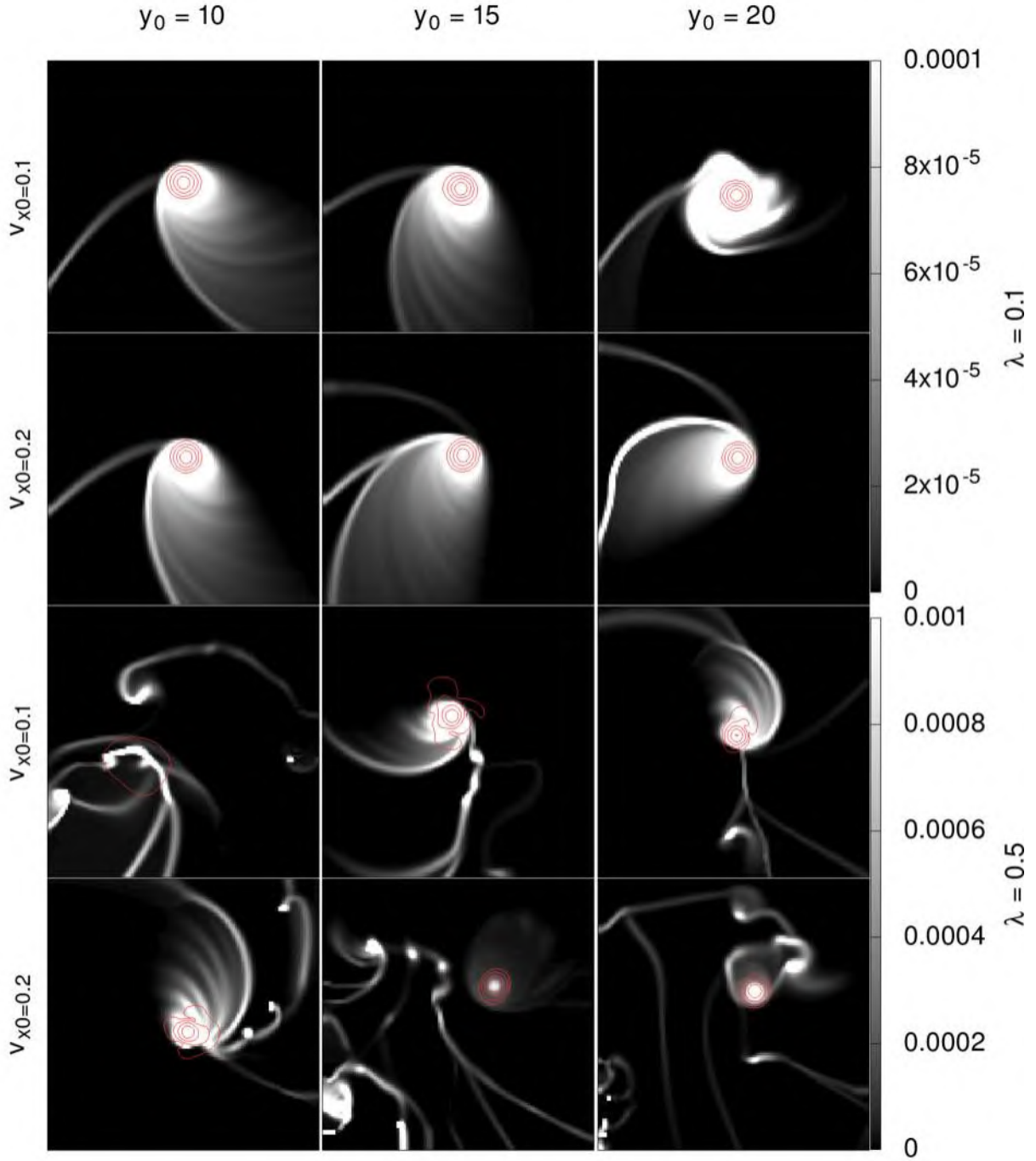


Figura 5.18: Instantánea en tiempo tardío ($t \sim 1000$) de la fusión entre el núcleo *FDM* y la esfera de polvo. La densidad del gas ρ se muestra en blanco, con contornos de $|\Psi|^2$ en el plano $z = 0$ para todas las combinaciones de parámetros.

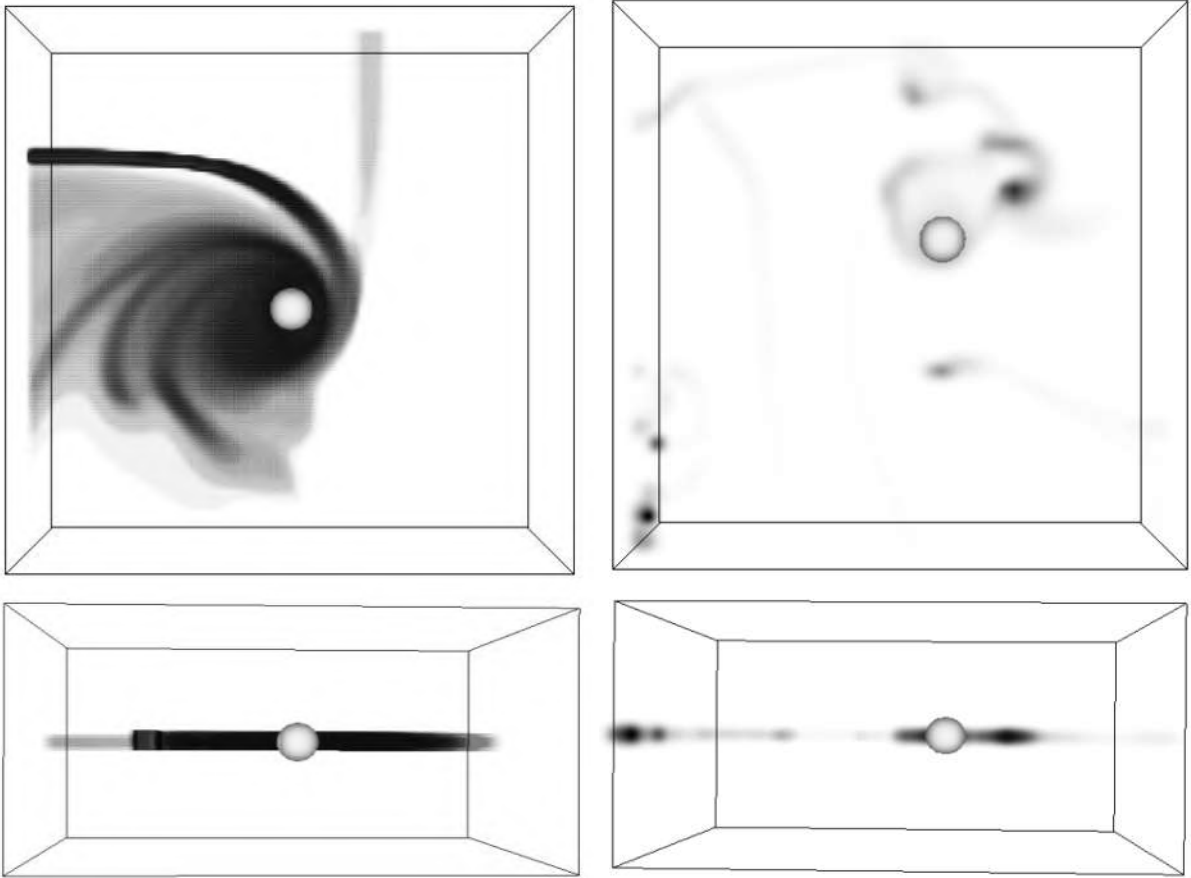


Figura 5.19: Instantánea en tiempo tardío de las densidades en la fusión entre el núcleo *FDM* y la esfera de polvo. (Arriba) Vista desde el eje z y (abajo) vista desde el eje x , para el caso $v_{x0} = 0.2$ y $y_0 = 20$. A la izquierda se muestra el caso con razón de masa $MR = 0.1$ y a la derecha $MR = 0.5$.

SECCIÓN 5.4

Rastreo de la materia oscura a través de la materia bariónica

En esta sección, exploramos cómo la *FDM*, interactúa dinámicamente con la materia bariónica en diferentes condiciones energéticas. El objetivo es analizar la transferencia de energía entre ambas componentes, así como los efectos gravitacionales que estas interacciones generan en la evolución del sistema.

Para este propósito, consideramos un modelo donde un núcleo solitónico de *FDM* está rodeado por un halo con un perfil tipo NFW. A este sistema se le añade una distribución de gas bariónico que inicialmente está en reposo y se caracteriza por una densidad uniforme. Estudiamos tres escenarios diferentes, definidos por la energía interna del gas: baja, media y alta. En cada caso, evaluamos la evolución temporal de las densidades del gas y de la *FDM*, así como la transferencia de energía entre ambos componentes.

Los diagnósticos realizados incluyen el seguimiento de las masas totales, la energía potencial, cinética e interna, y el análisis de los patrones de colapso, redistribución y estabilización del gas. Los resultados proporcionan información crucial sobre cómo la materia oscura y la materia bariónica influyen mutuamente en entornos gravitacionalmente dominados.

5.4.1 Condiciones iniciales de la función de onda

Como condiciones iniciales para la función de onda $\Psi_0(\vec{x})$, consideramos una configuración obtenida a partir de la evolución de la fusión de 30 configuraciones de equilibrio en caída libre del sistema Schrödinger-Poisson con condiciones de frontera periódicas (ref periodic). En el panel izquierdo de la Figura 5.20, se muestra la densidad en el plano $x-y$, mientras que en el panel derecho se presenta un perfil promedio, el cual tiene un núcleo solitónico descrito por la ecuación:

$$\rho_{core} = \rho_{0,core} \left[1 + 0.091 \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right]^{-8}, \quad (5.12)$$

donde $r_c = 0.28$ kpc y $\rho_{0,core} = 10^9 M_\odot/\text{kpc}^3$. Este perfil corresponde a una configuración de equilibrio cuyo núcleo tiene una masa del orden de $M_{soliton} \sim 11.59 \rho_0 r_c^3 \approx 2.5 \times 10^8 M_\odot$ y un radio aproximado de $r_t \sim 3.5 r_c \approx 0.98$ kpc. En la región del halo, para $r \gtrsim r_{soliton}$, el perfil de densidad es ajustado mediante un perfil NFW, donde $r_s = 5$ kpc y $\rho_s = 5.5 \times 10^5 M_\odot/\text{kpc}^3$.

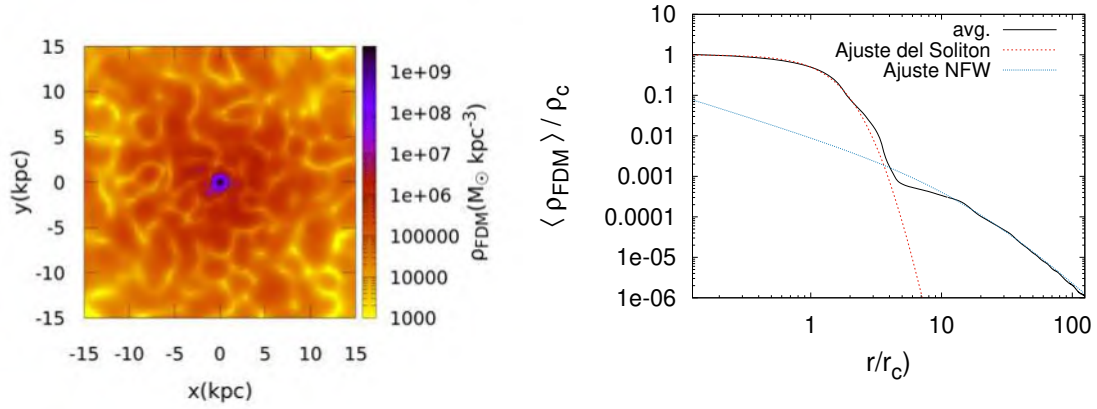


Figura 5.20: En el panel izquierdo se muestra la densidad ρ_{FDM} de la función de onda en el tiempo inicial en el plano $x - y$. El interior del círculo negro corresponde a la región donde se encuentra el núcleo solitónico, mientras que el exterior sigue un perfil NFW aproximado. En el panel derecho se muestra el perfil promedio de densidad (línea negra continua) ajustado al perfil solitónico descrito por la ecuación (5.12) (línea punteada roja) y al perfil NFW (línea punteada azul), marcando la región de transición en $r_{soliton} \sim 3.5r_c$.

Así, la configuración inicial de la función de onda consiste en un núcleo solitónico ya formado y un perfil NFW en la región exterior. A esta configuración se le añade materia bariónica para analizar los efectos que produce sobre ella.

5.4.2 Condiciones iniciales del fluido

Las condiciones iniciales para las variables hidrodinámicas corresponden a un fluido inicialmente en reposo, con densidad y energía específicas uniformes en todo el dominio, es decir, $\vec{v}_0(\vec{x}) = (0, 0, 0)$, $\rho_0(\vec{x})$ y $e_0(\vec{x})$ son constantes en el dominio. De esta manera, el fluido comenzará a acumularse en los pozos de potencial generados por la distribución de materia de la función de onda. Inicialmente, no hay presión suficiente para detener el colapso, ya que el gradiente de presión $p_0 = (\gamma - 1)\rho_0 e_0$ es nulo. Sin embargo, una vez iniciado el proceso, se generará un gradiente que dependerá de las condiciones iniciales de p_0 o, equivalentemente, de e_0 para una densidad fija ρ_0 .

Dado que la interacción entre ambas distribuciones de materia se produce a través de la gravedad, se espera una transferencia de energía entre los componentes del sistema, aunque la energía total debe conservarse. Además, como no hay transferencia de masa, esta debe mantenerse separada para cada componente. Por ello, durante el proceso de evolución, diagnosticamos las siguientes magnitudes.

Exploramos tres escenarios diferentes con una densidad de gas $\rho_0(\vec{x}) = 256.2 M_\odot / \text{kpc}^3$

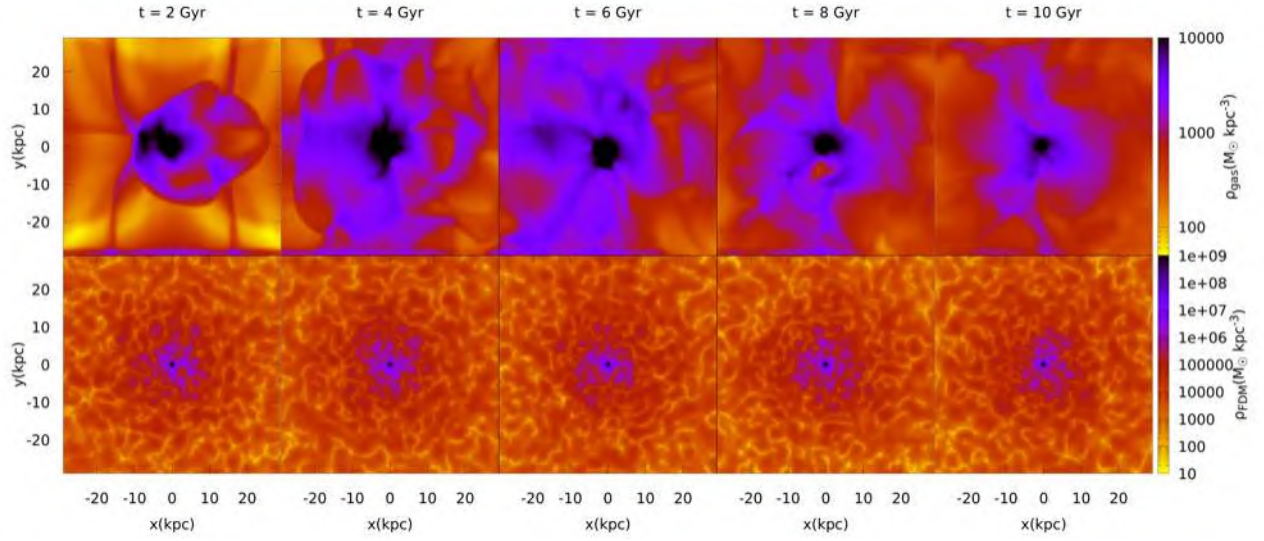


Figura 5.21: Instantáneas de la distribución de densidad del gas (arriba) y de la *FDM* (abajo) en los tiempos $t = 2, 4, 6, 8$ y 10 Gyr, de izquierda a derecha, en el plano $x - y$ para el caso de energía interna baja.

y energías internas $e_0(\vec{x}) = 9.39, 93.9$ y 939 MJ/kg, denominadas respectivamente como energía interna baja, media y alta. Los casos de energía baja y media corresponden a energías totales del gas con $E_{gas}(0) < 0$, es decir, la energía gravitacional domina sobre la energía interna del gas. En el caso de alta energía, $E_{gas}(0) > 0$, la energía interna domina sobre la gravitacional.

5.4.3 Energía interna baja

La Figura 5.21 muestra la evolución de la densidad del gas (arriba) y la densidad de la *FDM* (abajo) en los tiempos $t = 2, 4, 6, 8$ y 10 Gyr. En este caso, podemos observar que la baja energía específica inicial provoca el colapso del fluido en diferentes regiones, generando una dinámica que sigue los pozos de potencial creados por los patrones de interferencia en la densidad de la *FDM*. Por otro lado, la densidad de la *FDM* mantiene el núcleo solitónico formado.

El diagnóstico de las cantidades globales se muestra en la Figura 5.22. La parte superior de esta figura muestra la conservación de cada componente de las masas, que se mantiene con alta precisión. Por otro lado, en el panel derecho se observa una transferencia de energía desde la materia oscura bosónica hacia la distribución de gas. En este escenario, la energía total del gas deja de conservarse, ya que esta aumenta mientras que la energía de la *FDM* permanece constante. Esto indica que, en el caso de baja energía, el gas no afecta la dinámica de la

FDM. Lo contrario ocurre con el gas, que, al tener tan poca energía, colapsa abruptamente, comportándose de manera similar a un polvo. Después del colapso, el gas se calienta, pero pierde estabilidad numérica.

Para ver en detalle cómo ocurre esta transferencia, se muestra cada componente de la energía total de ambas distribuciones de materia en la parte inferior. En el lado izquierdo se observa cómo la energía cinética y la potencial oscilan, lo que indica una transferencia entre ambas debido a las fluctuaciones en los patrones de interferencia de la densidad. Sin embargo, en promedio, la energía total de la *FDM* se conserva. En el lado derecho, se observa cómo tanto la energía cinética como la interna del gas aumentan, indicando que el gas adquiere movimiento mientras se calienta, mientras que la energía potencial disminuye, sin compensar el aumento de las otras dos formas de energía.

5.4.4 Energía interna media

La Figura 5.23 muestra la evolución de la distribución de densidad del gas (arriba) y de la *FDM* (abajo) en los tiempos $t = 2, 4, 6, 8$ y 10 Gyr. Se observa que un núcleo de materia bariónica se forma desde etapas tempranas, mientras que fuera de este núcleo, la densidad adquiere una forma casi esférica, con algunos remanentes de densidad que se mueven dentro y fuera del dominio periódico. Por otro lado, la densidad de la *FDM* permanece con el núcleo solitónico ya formado, al igual que en el caso anterior.

El diagnóstico de las cantidades globales se muestra en la Figura 5.24. La parte superior de esta figura muestra la conservación de cada componente de las masas. En el panel derecho, se observa una transferencia de energía desde la materia oscura bosónica hacia la distribución de gas, con un incremento cercano al 1.7% respecto al valor inicial de la energía total $E_T(0)$. Para analizar en detalle cómo ocurre esta transferencia, se presentan los componentes de la energía total de ambas distribuciones en la parte inferior de la figura.

En el lado izquierdo, se observa cómo la energía cinética y la potencial oscilan, mostrando que existe una transferencia entre ambas debido a las fluctuaciones generadas por los patrones de interferencia en la densidad. Al final, se estima que la energía cinética aumenta aproximadamente un 1.3% , mientras que la energía potencial disminuye en torno al 3.0% respecto al valor $E_T(0)$, lo que indica que la energía transformada es principalmente la energía potencial. Por otro lado, los componentes de la energía del gas muestran un aumento de alrededor del 2.4% en la energía interna específica y del 0.7% en la energía cinética, mientras que la energía potencial disminuye un 1.4% . Esto evidencia que la materia oscura bosónica ultraligera pierde energía potencial, la cual se transfiere al gas en forma de energía cinética e interna.

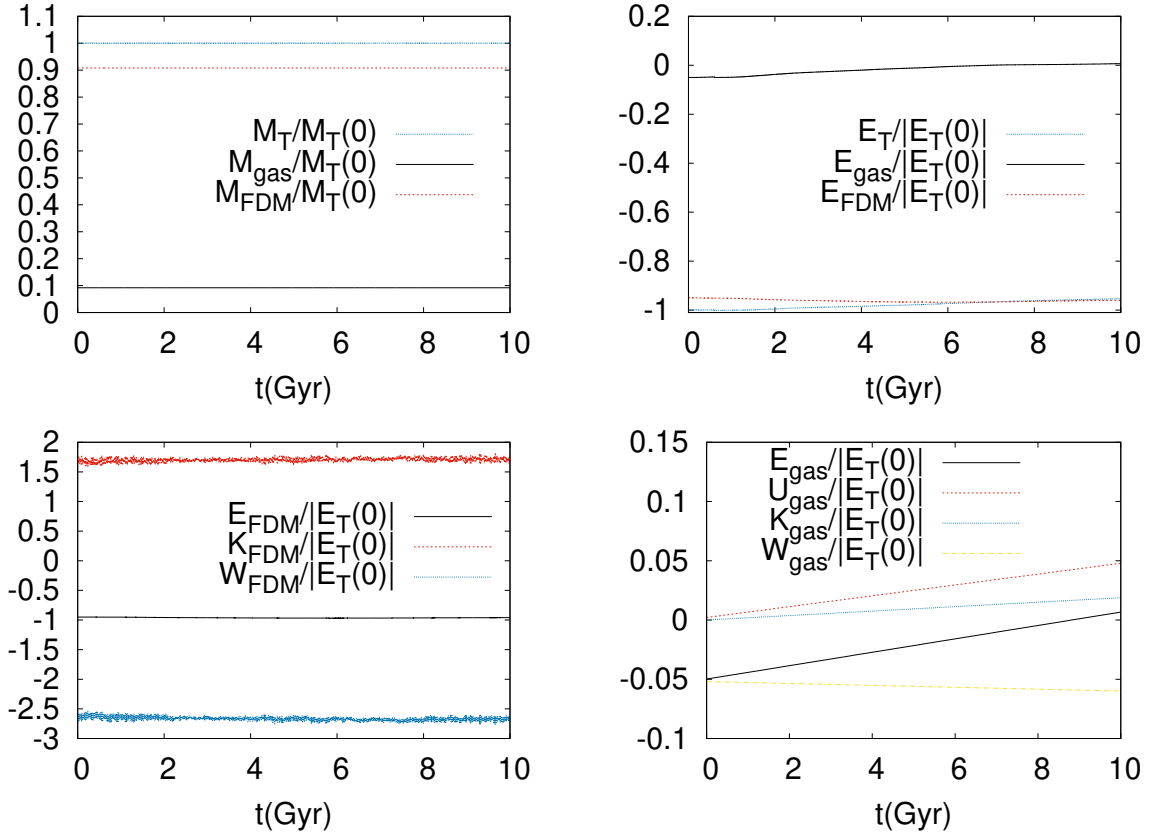


Figura 5.22: El panel superior derecho muestra la conservación precisa de la masa de la función de onda y del gas, así como de la masa total en función del tiempo. A la derecha, se observa que la energía total se conserva, mientras que la energía de la función de onda disminuye en un 1.7 %, y la energía total del gas aumenta en el mismo porcentaje con respecto a la energía inicial $E_T(0)$. En el panel inferior izquierdo, se muestra la conversión rápida y oscilatoria entre energía cinética y potencial. En el panel derecho, se observa la conversión entre los diferentes tipos de energía del gas, con un aumento en la energía cinética e interna y una disminución de la energía potencial con el tiempo.

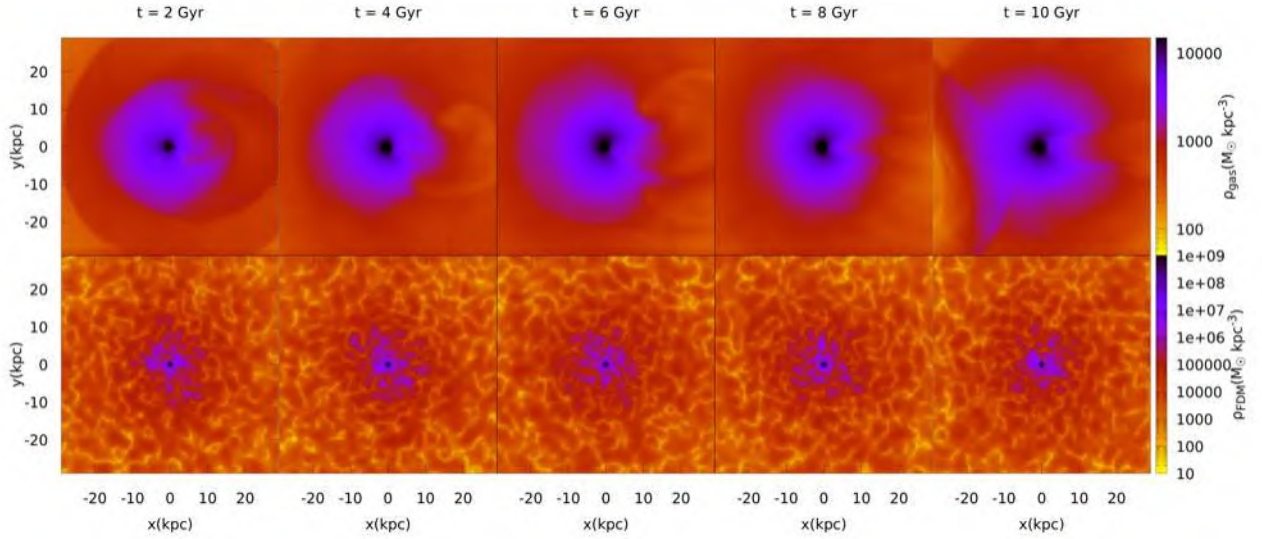


Figura 5.23: Instantáneas de la distribución de densidad del gas (arriba) y de la *FDM* (abajo) en los tiempos $t = 2, 4, 6, 8$ y 10 Gyr, de izquierda a derecha, en el plano $x - y$ para el caso de energía interna media.

5.4.5 Energía interna alta

La Figura 5.25 muestra la evolución de la distribución de densidad del gas (arriba) y de la *FDM* (abajo) en los tiempos $t = 2, 4, 6, 8$ y 10 Gyr. En este escenario de mayor energía, al igual que en el caso anterior, se forma un núcleo de materia bariónica, seguido por un halo esférico. Sin embargo, la dinámica de la densidad de la *FDM* no muestra cambios significativos respecto a los casos de energía baja y media.

El diagnóstico de las cantidades globales se muestra en la Figura 5.26. La parte superior de esta figura muestra la conservación de cada componente de las masas. En el panel derecho, se observa una transferencia de energía desde la materia oscura bosónica hacia la distribución de gas, con un incremento cercano al 0.32% respecto al valor inicial de la energía total $E_T(0)$. Para analizar en detalle cómo ocurre esta transferencia, se presentan los componentes de la energía total de ambas distribuciones en la parte inferior de la figura.

En el lado izquierdo, se observa cómo la energía cinética y la potencial oscilan, mostrando que existe una transferencia entre ambas debido a las fluctuaciones generadas por los patrones de interferencia en la densidad. Se estima que la energía cinética aumenta aproximadamente un 7.15% , mientras que la energía potencial disminuye en torno al 7.34% respecto al valor $E_T(0)$, lo que indica que la energía transformada es principalmente la energía potencial, con una magnitud del 0.32% .

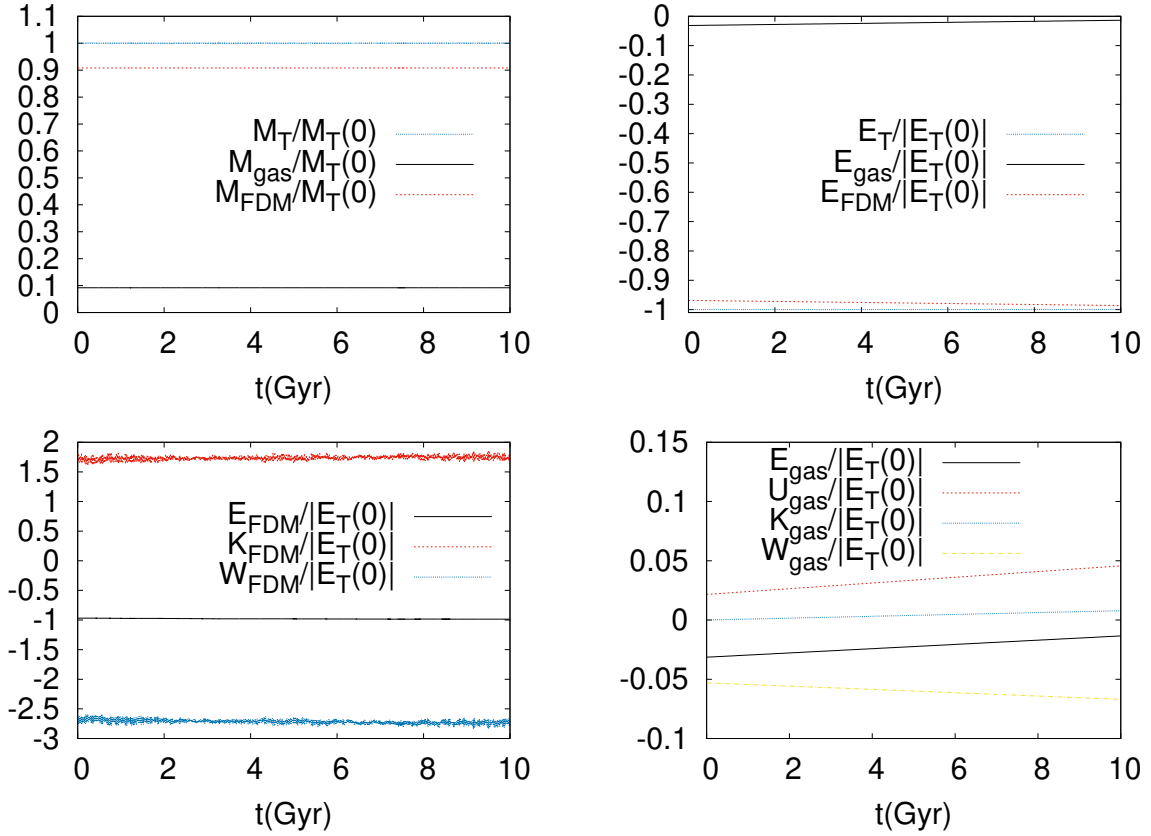


Figura 5.24: El panel superior derecho muestra la conservación con alta precisión de la masa de la función de onda, la masa del gas y la masa total en función del tiempo. En el panel derecho se observa que la energía total se conserva, mientras que la energía de la función de onda disminuye en un 1.7 %, compensada por un incremento equivalente en la energía total del gas respecto al valor inicial $E_T(0)$. En los paneles inferiores, el lado izquierdo muestra la conversión oscilatoria rápida entre energía cinética y potencial, mientras que en el lado derecho se observa el incremento de la energía cinética e interna del gas, acompañado de una disminución gradual de la energía potencial.

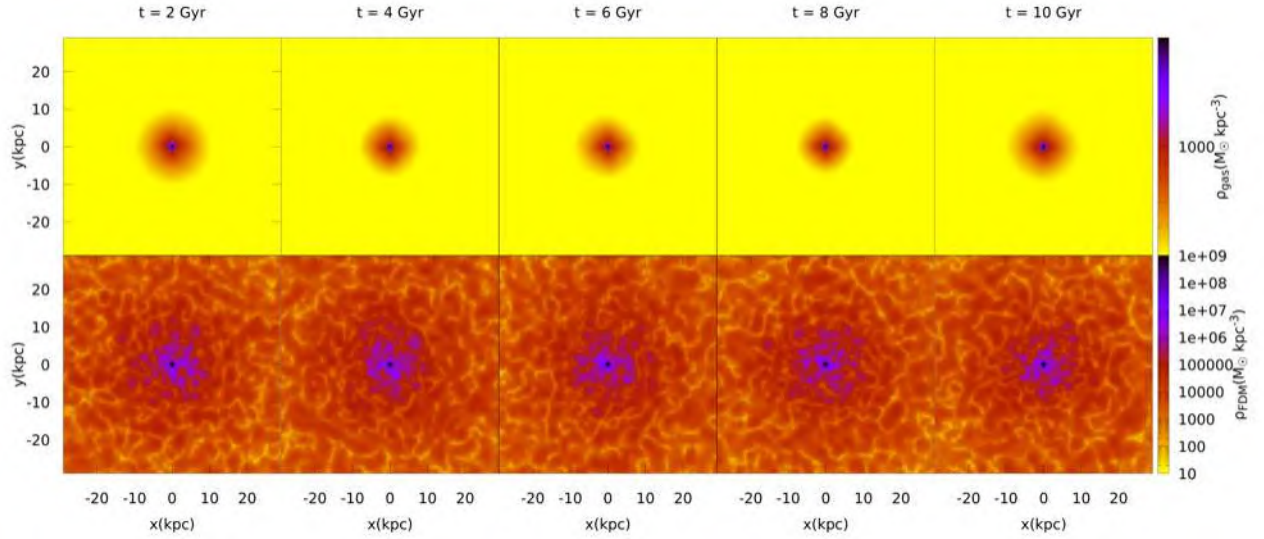


Figura 5.25: Instantáneas de la distribución de densidad del gas (arriba) y de la FDM (abajo) en los tiempos $t = 2, 4, 6, 8$ y 10 Gyr, de izquierda a derecha, en el plano $x - y$ para el caso de alta energía interna.

Por otro lado, los componentes de la energía del gas muestran que la energía interna específica y la energía cinética aumentan alrededor de 0.43% y 0.05% , respectivamente, mientras que la energía potencial disminuye un 0.16% . Esto evidencia que la materia oscura bosónica ultraligera pierde energía potencial, la cual se transfiere al gas en forma de energía cinética e interna.

Los resultados presentados en esta sección muestran cómo la interacción gravitacional entre la materia oscura bosónica ultraligera (FDM) y el gas bariónico depende fuertemente de las condiciones iniciales de energía interna del gas. Adicionalmente, se evidencia la formación de una estructura $NFBS$ en el centro del halo, donde el núcleo solitónico de FDM se encuentra rodeado por una distribución esférica de materia bariónica. Los principales hallazgos son los siguientes:

- En el caso de baja energía interna, el gas colapsa rápidamente hacia los pozos de potencial generados por el núcleo solitónico de la FDM , formando una estructura $NFBS$ en el centro del sistema. Durante este proceso, el gas experimenta un calentamiento significativo, aunque pierde estabilidad numérica debido a la rápida transferencia de energía. La dinámica de la FDM , en cambio, se mantiene prácticamente inalterada.
- En el escenario de energía interna media, el gas forma un núcleo denso de materia bariónica desde etapas tempranas, manteniendo la estructura $NFBS$ en el centro del halo. Se observa una transferencia de energía de la FDM al gas cercana al 1.7% de la energía total inicial. Este escenario muestra un balance más estable entre los distintos tipos de energía, lo que permite una evolución más controlada del sistema.

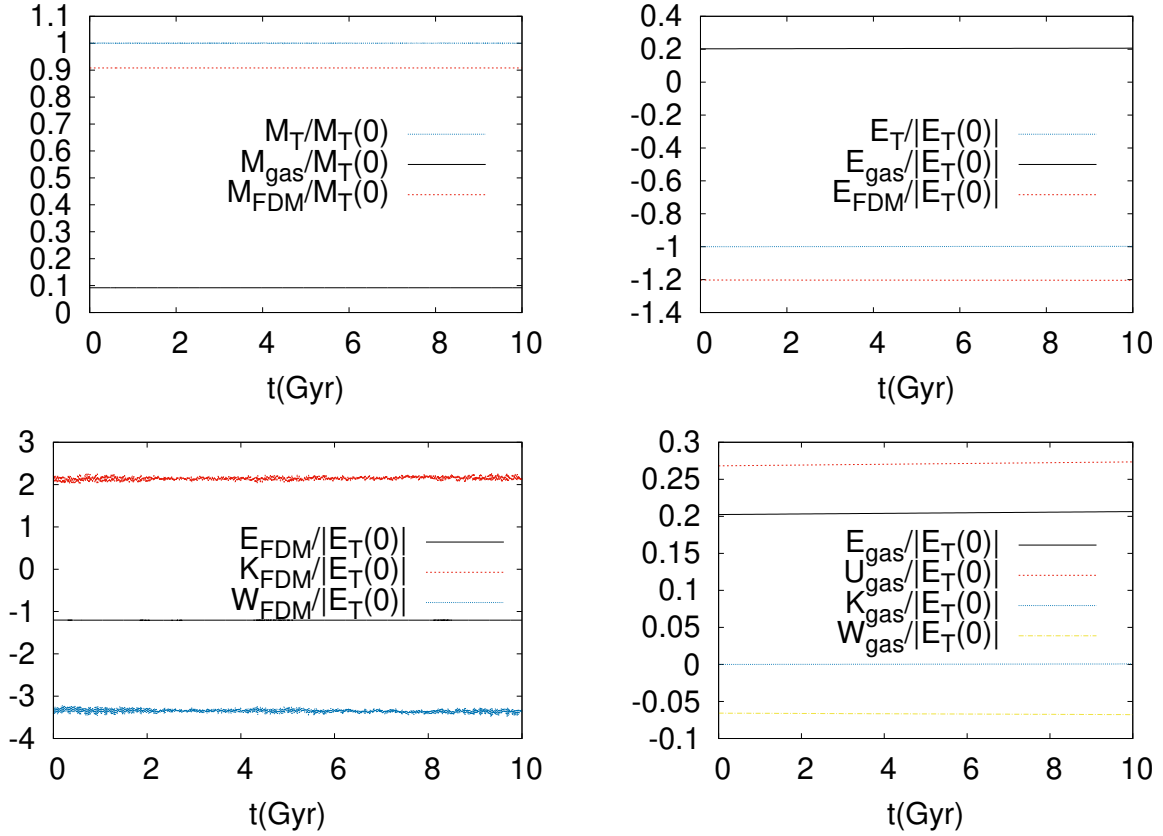


Figura 5.26: El panel superior derecho muestra la conservación precisa de la masa de la función de onda, la masa del gas y la masa total en función del tiempo. En el panel derecho se observa que la energía total se conserva, mientras que la energía de la función de onda disminuye en un 0.32 %, compensada por un incremento equivalente en la energía total del gas respecto al valor inicial $E_T(0)$. En los paneles inferiores, el lado izquierdo muestra la conversión rápida y oscilatoria entre energía cinética y potencial, mientras que en el lado derecho se observa el incremento de la energía cinética e interna del gas, acompañado de una disminución gradual de la energía potencial con el tiempo.

- En el caso de alta energía interna, el gas desarrolla una estructura similar, con un núcleo central rodeado de un halo esférico. La estructura *NFBS* persiste en el centro, pero la transferencia de energía hacia el gas es menor, del orden del 0.32 %. En este escenario, la energía interna del gas domina sobre la gravitacional, lo que ralentiza el colapso y genera un equilibrio más sostenido.
- En todos los escenarios, se observa que la materia oscura ultraligera pierde energía potencial, la cual es transferida al gas en forma de energía interna y cinética. Sin embargo, el grado de transferencia y la respuesta dinámica del sistema dependen del régimen energético inicial del gas.

Estos resultados muestran cómo las *NFBS* se condensan en el interior del halo granular, resaltando la importancia de la interacción entre la materia oscura y la materia bariónica en la formación y evolución de estructuras gravitacionales. La presencia de un núcleo solitónico de *FDM* y su interacción con el gas son factores clave para comprender la dinámica galáctica, así como la estabilización de estructuras tipo *NFBS* en el centro de los halos galácticos.

Capítulo 6

Simulaciones de Materia Oscura Difusa acoplada a un Hoyo Negro

Un elemento esencial introducido en la fenomenología de la *FDM* es la presencia de agujeros negros (*BH*, por sus siglas en inglés) y su comportamiento dentro de los núcleos de *FDM*. Por ejemplo, en [109, 110] se estudian las propiedades del perfil de densidad del núcleo de *FDM* bajo diversos regímenes del gas bosónico y escenarios que incluyen un agujero negro. En [111] se analiza la interacción entre el *FDM* y el agujero negro, enfocándose especialmente en la fricción dinámica y el arrastre de la estela detrás del agujero mientras se desplaza. De igual manera, en [112] se estudia la fricción dinámica de núcleos de *FDM* en escenarios de fusiones con agujeros negros. En [113] se explora la fusión de agujeros negros binarios que se mueven dentro de núcleos de *FDM*, en el contexto del problema del último pársec durante la fusión.

En contextos relacionados con ondas gravitacionales, se ha investigado la dinámica de agujeros negros binarios inmersos en *FDM* para estimar la extracción de momento angular debido a los efectos dinámicos de cúmulos de materia oscura dentro del núcleo [114]. Por otro lado, en [115] se analiza la eyección de agujeros negros supermasivos (*SMBH*) debido a la superposición de modos y la acumulación de efectos tipo caminata aleatoria dentro de halos de *FDM*. Además, en [116] se estudia el movimiento de una partícula puntual masiva en un entorno de *FDM* que incluye su granularidad, mientras que en [112] se analiza la colisión entre un núcleo de *FDM* y un *BH* super masivo (*SMBH*, por sus siglas en inglés).

Estos estudios consideran al agujero negro como un objeto newtoniano y se centran principalmente en los efectos dinámicos asociados a agujeros negros en movimiento. En un contexto

relativista, también se ha explorado la coexistencia y fenomenología de agujeros negros con materia oscura bosónica ultraligera. Por ejemplo, en [117, 118, 119, 120] se estudian diversos efectos de la dinámica de los agujeros negros sobre el campo escalar, incluyendo la fricción dinámica. Por otro lado, en [121, 122] el análisis se centra en la posible detección de materia oscura ultraligera mediante su influencia en la fenomenología de ondas gravitacionales, considerando también el caso con autointeracción [123]. En escenarios cosmológicos, se han estudiado procesos como la nucleación de nubes escalares [124].

En este capítulo, se estudian los efectos de un agujero negro durante la condensación del núcleo de FDM , siguiendo el método de relajación cinética desarrollado en [13, 125]. Este método utiliza condiciones iniciales aleatorias, lo que permite que la granularidad de la distribución de FDM se forme en presencia del agujero negro desde el instante inicial.

En nuestro análisis, se considera un agujero negro esférico simétrico en el régimen newtoniano, incorporando sus efectos gravitacionales en el sistema de ecuaciones de Schrödinger-Poisson que rige la dinámica del sistema $FDM+BH$. Sin embargo, se ignora la acreción parcial de materia oscura ondulatoria, ya que esta depende de la longitud de onda y el grosor de los paquetes de onda que se aproximan al agujero negro, como se demostró mediante relatividad numérica completamente no lineal en [126, 127]. También se omiten otros efectos de acreción no lineales en escenarios no simétricos [128].

SECCIÓN 6.1

Soluciones estacionarias

Construimos soluciones estacionarias para el problema $FDM+BH$ siguiendo [27], cuyas ecuaciones son equivalentes al sistema:

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m_B}\nabla^2\Psi + m_B(V + V_\bullet)\Psi, \quad (6.1)$$

$$\nabla^2 V = 4\pi G(\rho_{FDM} - \bar{\rho}_{FDM}), \quad (6.2)$$

donde $V_\bullet = -\frac{GM_{BH}}{r}$ representa el potencial gravitacional debido a un agujero negro de masa M_{BH} . El problema se resuelve en unidades del código, bajo simetría esférica y asumiendo una dependencia temporal armónica del tipo $\Psi = \psi(r)e^{-i\omega t}$, donde ψ es una función real. Estas suposiciones llevan a un problema de autovalores para el parámetro ω , imponiendo condiciones de frontera aisladas en el infinito y regularidad en el origen.

Este sistema exhibe invariancia bajo la transformación:

$$\{t', \Psi', x', V', \rho'_{FDM}, M'_{BH}\} \rightarrow \{\lambda^{-2}t, \lambda^2\Psi, \lambda^{-1}x, \lambda^2V, \lambda^4\rho_{FDM}, \lambda M_{BH}\},$$

donde λ es un parámetro arbitrario. Para construir un modelo fenomenológico de la densidad de FDM , definimos el invariante $\alpha = M_{BH}^2/\psi_0$ bajo la transformación λ , el cual permite parametrizar la familia de soluciones del problema de autovalores.

En el límite $V_\bullet \gg V$ o, de forma equivalente, $\alpha \gg 1$, el sistema se reduce al caso del átomo de hidrógeno, cuya solución fundamental es:

$$\psi(r) = 2 \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} e^{-r/a_0},$$

donde a_0 es el radio de Bohr. Por lo tanto, proponemos una fórmula que, en el límite de α grande, se aproxima a esta solución exponencial:

$$\rho(r, \alpha) = \rho_c e^{-\ln 2 \left(\frac{r}{r_c} \right)^\beta}, \quad (6.3)$$

donde ρ_c es la densidad central, el radio r_c se define como el radio donde la densidad disminuye a la mitad de su valor central, y β es una función dependiente de α que se determinará.

En escenarios puramente FDM , la solución fundamental del sistema SP (e.g., [65]) es difícil de utilizar para ajustes fenomenológicos en estructuras que evolucionan en simulaciones. Por ello, se propuso una fórmula práctica para modelar núcleos FDM de forma universal [22]. En este capítulo, adoptamos un enfoque similar. Dado que las soluciones del problema de autovalores $FDM+BH$ no se pueden emplear directamente para monitorizar la formación del núcleo alrededor de un agujero negro, necesitamos un perfil de densidad práctico que permita ajustar la densidad del núcleo de la solución.

Para ello, proponemos una función que ajusta las propiedades del núcleo. Por ejemplo, para el radio del núcleo r_c , consideramos la siguiente expresión:

$$r_c = 1.3\rho_c^{-1/4} (1 + a_1 \ln(a_2\alpha + 1) + a_3\alpha^{a_4}), \quad (6.4)$$

con los parámetros: $a_1 = -0.25355872$, $a_2 = 0.46241994$, $a_3 = 0.0663722$ y $a_4 = 0.33407792$.

Además, para cada valor de α , existe un valor asociado de β que, según la fórmula (6.3), ajusta la densidad obtenida de las ecuaciones (6.1)-(6.2). Este comportamiento se describe mediante la siguiente ecuación:

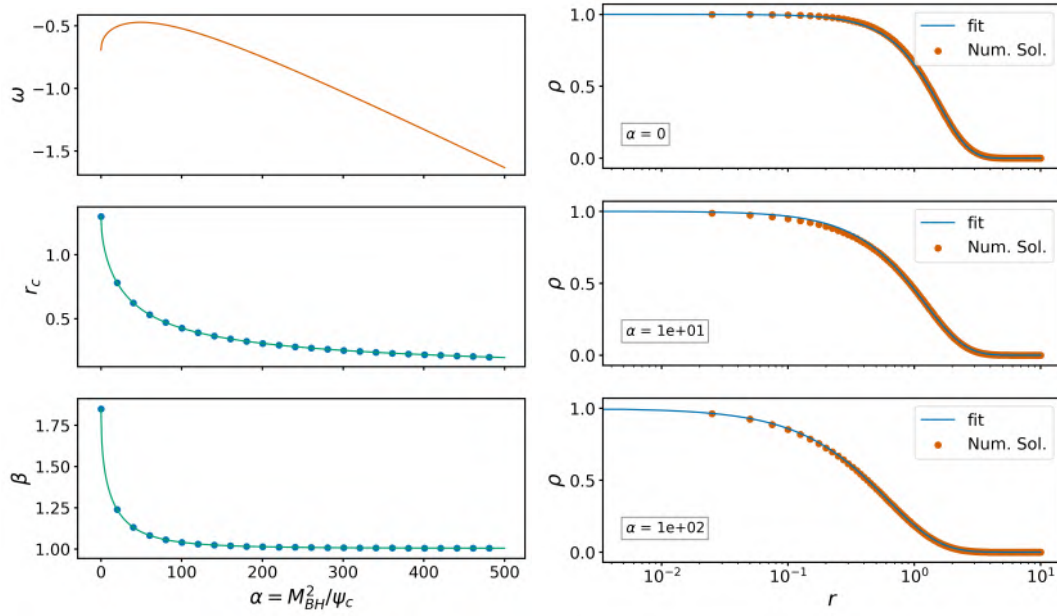


Figura 6.1: (Izquierda) Arriba: autovalor ω como función de α . Medio e inferior: radio del núcleo r_c y la función β como funciones de α , donde los puntos representan soluciones exactas del problema de autovalores y las líneas continuas corresponden a los valores obtenidos mediante las fórmulas (6.4) y (6.5). (Derecha) Comparación entre la solución numérica del problema de autovalores y la densidad resultante de las fórmulas (6.3), (6.4) y (6.5) para $\alpha = 0, 10, 100$.

$$\beta = \frac{b_1 \alpha^{b_2}}{\alpha^{b_3} + b_4} + b_5, \quad (6.5)$$

con $b_1 = -1.08334305$, $b_2 = 0.77866182$, $b_3 = 0.81228993$, $b_4 = 6.72089826$ y $b_5 = 1.84588407$.

En la Figura 6.1, se presenta el autovalor ω en función de α (panel superior). Los paneles intermedios e inferiores muestran el radio del núcleo r_c y la función β respectivamente, comparando los valores exactos obtenidos del problema de autovalores con aquellos calculados mediante las fórmulas propuestas (6.4) y (6.5).

En el panel derecho de la figura, se muestra la solución numérica del problema de autovalores junto con el perfil de densidad obtenido usando las fórmulas (6.3), (6.4) y (6.5), demostrando que el modelo propuesto es consistente incluso para valores de α que difieren en varios órdenes de magnitud ($\alpha = 0, 10, 100$).

Estos resultados confirman que el modelo propuesto es capaz de reproducir adecuadamente las soluciones del problema de autovalores y proporcionar un perfil práctico para utilizar en

simulaciones dinámicas que involucren núcleos de FDM en presencia de agujeros negros.

SECCIÓN 6.2

Dinámica del sistema $FDM+BH$

El sistema de ecuaciones que rige la dinámica del sistema $FDM+BH$ es el siguiente sistema de ecuaciones de Schrödinger-Poisson (SP):

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m_B}\nabla^2\Psi + m_B V\Psi, \quad (6.6)$$

$$\nabla^2 V = 4\pi G(\rho_T - \bar{\rho}_T), \quad (6.7)$$

$$\ddot{\vec{x}}_{BH} = -\nabla V_{FDM}, \quad (6.8)$$

$$\nabla^2 V_{FDM} = 4\pi G(\rho_{FDM} - \bar{\rho}_{FDM}), \quad (6.9)$$

donde V es el potencial gravitacional debido al sistema combinado $FDM+BH$, mientras que V_{FDM} es el potencial generado únicamente por la FDM . El agujero negro (BH) se modela mediante una distribución de densidad aproximada $\rho_{BH} = M_{BH}\delta(\vec{x} - \vec{x}_{BH}) \simeq CM_{BH}e^{-|\vec{x}-\vec{x}_{BH}|^2/2\epsilon^2}$, donde C es un factor de normalización tal que la integral de la distribución corresponde a la masa total del agujero negro M_{BH} . La densidad total del sistema es $\rho_T = \rho + \rho_{BH}$ y \vec{x}_{BH} es la posición del agujero negro, el cual responde a la gravedad generada por la FDM .

6.2.1 Método numérico

El sistema adimensional se resuelve utilizando nuestro código **CAFE-FDM** [69], el cual implementa un método pseudo-espectral para discretizar las derivadas espaciales, un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) para la evolución temporal de la función de onda, y la FFT para resolver las ecuaciones de Poisson. Todas las simulaciones se realizan en un dominio cúbico periódico de lado L , con resolución espacial h .

Para la distribución del BH , usamos $\epsilon = 0.1h$, lo que reproduce resultados consistentes con [112] en dominios no periódicos, donde se utiliza un potencial gravitacional del tipo $V_\bullet = -\frac{GM_{BH}}{\sqrt{\max(r^2, \epsilon^2)}}$ en la ecuación de Schrödinger. Definir el BH mediante la distribución ρ_{BH} permite trabajar también en dominios periódicos.

6.2.2 Condiciones iniciales

El proceso de relajación cinética que lleva a la condensación del núcleo utiliza condiciones iniciales aleatorias para el gas bosónico, permitiendo la formación de sobredensidades que posteriormente colapsan y facilitan la condensación. Siguiendo [13, 125], utilizamos una distribución gaussiana en el espacio de momentos:

$$\Psi(\vec{p}) = Ae^{-0.5p^2}e^{iS},$$

donde S es una fase aleatoria en el rango $[0, 2\pi]$ para cada punto del espacio de momentos y A es un factor de normalización.

6.2.3 Simulaciones

Se realizaron 32 simulaciones utilizando el mismo tipo de configuración, pero con diferentes *semillas* para generar condiciones iniciales aleatorias del sistema FDM y considerando distintas masas de agujeros negros (BH): $M_{BH} = M/256, M/128, M/64, M/32$. Estas masas se encuentran dentro del rango utilizado en estudios sobre fricción dinámica [111] y en escenarios relacionados con la nucleación de estrellas de axiones por agujeros negros primordiales (PBH) [124].

Las diferentes semillas para las condiciones iniciales generan evoluciones distintas del sistema FDM en presencia de un BH . Sin embargo, los resultados de las simulaciones pueden clasificarse en dos escenarios principales:

1. **Formación cercana al BH :** Un miniclúster de FDM se forma cerca del agujero negro. Este miniclúster colapsa, se relaja y finalmente condensa su núcleo alrededor del BH .
2. **Formación lejana y fusión con el BH :** Un miniclúster de FDM se forma más allá del radio de marea del BH . Su evolución incluye la fusión con el agujero negro, donde finalmente ocurre la relajación y la condensación del núcleo.

De estos dos escenarios, el segundo es el caso más interesante, ya que ilustra claramente cómo el BH actúa como punto de condensación para la densidad de FDM .

Para ilustrar la evolución de este caso genérico, se utilizó una semilla específica para generar la fase aleatoria del FDM en el espacio de Fourier. Esto permitió establecer las condiciones

iniciales del sistema y estudiar su evolución utilizando las cuatro masas de agujeros negros mencionadas.

La evolución de estas cuatro simulaciones se presenta en la Figura 6.2, que contiene instantáneas de la densidad de FDM y la posición del agujero negro en distintos tiempos. En etapas tempranas ($t \sim 7$), se forma un miniclúster cerca de la esquina inferior derecha del dominio. Con el tiempo, este miniclúster se fusiona con el BH , siguiendo trayectorias distintas según la masa del agujero negro, y la condensación ocurre finalmente en la ubicación del BH .

6.2.4 Condensación y dinámica del núcleo

Para analizar el proceso de condensación, se monitorea la evolución de la densidad máxima ρ_{max} a lo largo del tiempo. Los resultados se presentan en la Figura 6.3, donde se observa que la condensación ocurre: la densidad crece siguiendo una ley de potencias en función del tiempo a partir de $t \sim 30$, lo que marca el inicio del proceso de condensación. Sin embargo, en etapas posteriores, la densidad máxima disminuye o se estabiliza, en contraste con el escenario de FDM puro, donde la densidad continúa creciendo indefinidamente [13, 125].

La disminución de ρ_{max} es menos pronunciada para agujeros negros menos masivos y puede interpretarse en términos del movimiento relativo entre el BH y el núcleo de materia oscura. El agujero negro, al estar en movimiento, arrastra la materia oscura a su alrededor e impide que la densidad siga aumentando. Este efecto es más fuerte para agujeros negros más masivos. En consecuencia, la presencia del BH tiende a aplanar la densidad del núcleo de FDM a largo plazo.

Movimiento relativo del agujero negro

En la Figura 6.4, se muestra la distancia entre el punto de densidad máxima y la posición del agujero negro para las cuatro masas consideradas. La evolución de esta distancia no sigue una tendencia clara debido al comportamiento no lineal y la dinámica granular del FDM . Cada simulación presenta fusiones entre el miniclúster y el BH en diferentes condiciones, posiciones y velocidades de fusión, lo que genera patrones variados.

También se analizó la velocidad del agujero negro. En la Figura 6.5 se presenta la componente x de la velocidad del BH , donde se observan oscilaciones similares a las descritas en [112] para núcleos esféricos suaves. En las simulaciones actuales, estas oscilaciones son menos regulares debido a que el núcleo no es inicialmente esférico ni suave, sino que presenta granularidad y dependencia temporal desde su formación.

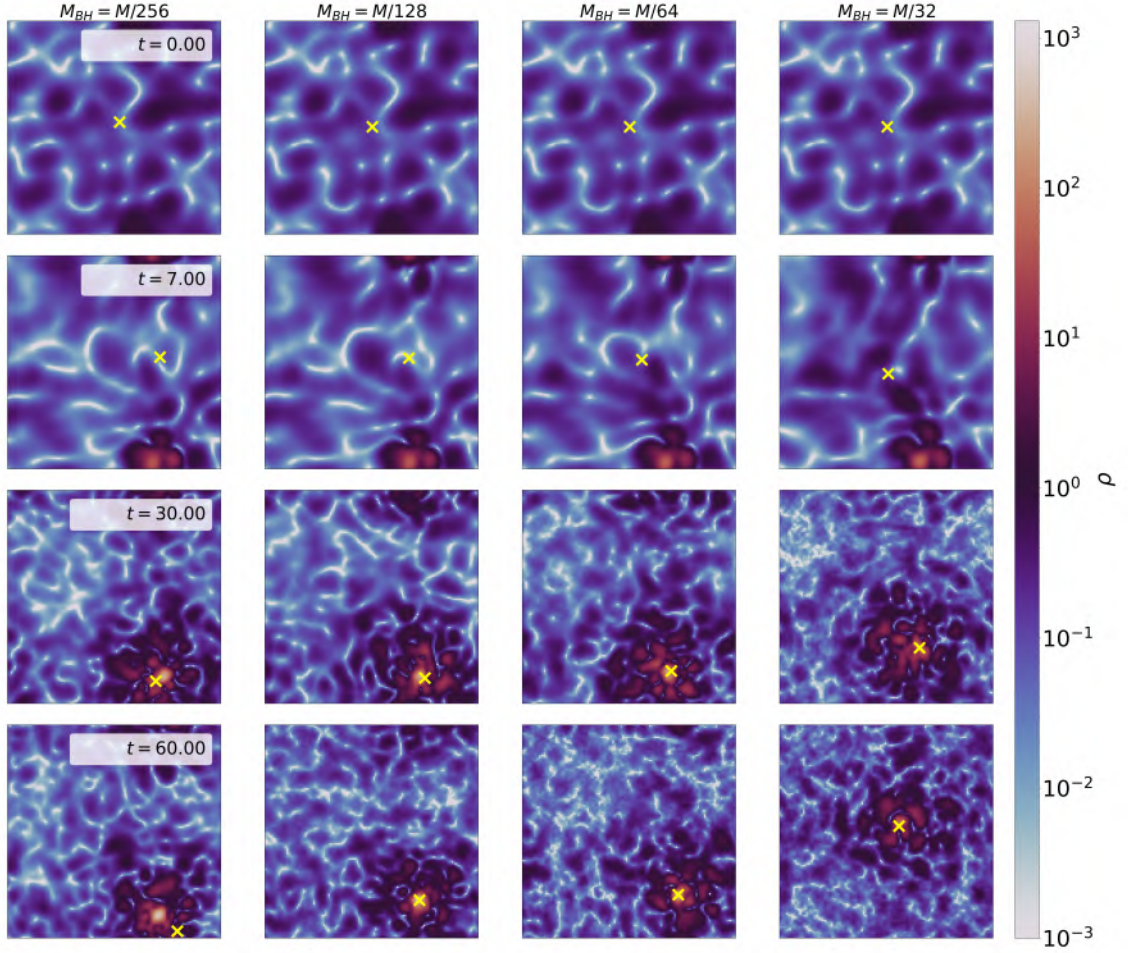


Figura 6.2: Instantáneas de la densidad proyectada en un plano que contiene la posición del agujero negro y es paralelo al plano xy del dominio numérico. La posición del agujero negro se representa con una cruz amarilla en diferentes momentos de las simulaciones con $M_{BH} = M/256, M/128, M/64$ y $M/32$. La evolución muestra la formación de un miniclúster cerca de la esquina inferior derecha, el cual posteriormente se fusiona con el BH. Durante la fusión, el agujero negro oscila con respecto al núcleo condensado, como se observa en las animaciones del material suplementario. Para $t \sim 60$, la materia oscura difusa alcanza el proceso de condensación.

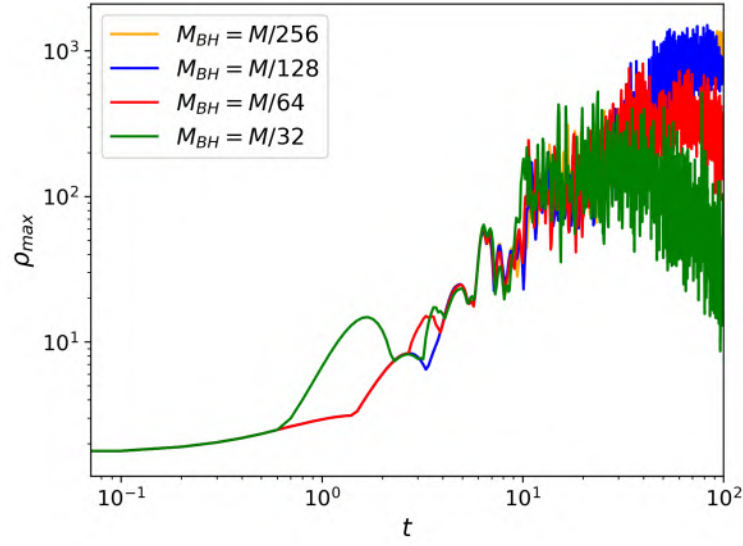


Figura 6.3: Evolución de ρ_{max} para diferentes masas de agujeros negros $M_{BH} = M/256, M/128, M/64, M/32$. Se observa que, para los agujeros menos masivos, la densidad sigue creciendo hasta $t \sim 60$, donde se estabiliza. En cambio, para los agujeros más masivos, la densidad máxima disminuye, evidenciando el efecto del *BH* sobre la condensación del núcleo.

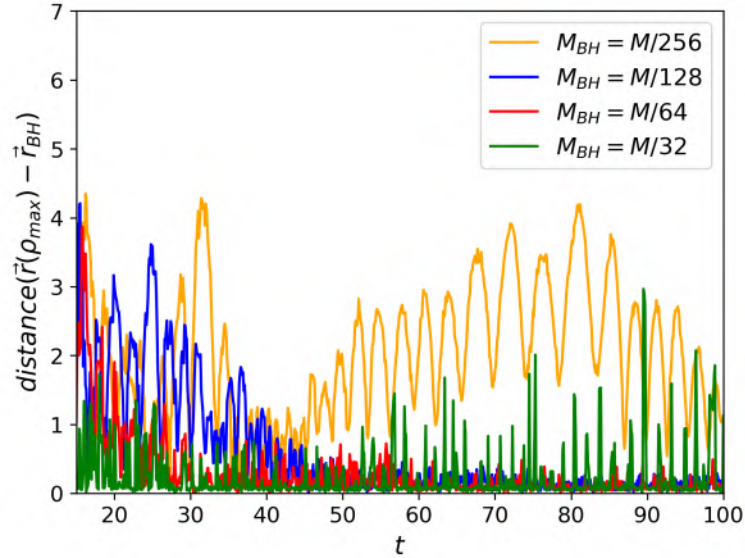


Figura 6.4: Distancia entre el punto de máxima densidad de *FDM* y la posición del agujero negro para masas $M_{BH} = M/256, M/128, M/64, M/32$. La falta de una tendencia clara se debe a que cada fusión ocurre en diferentes condiciones dinámicas y posiciones del dominio.

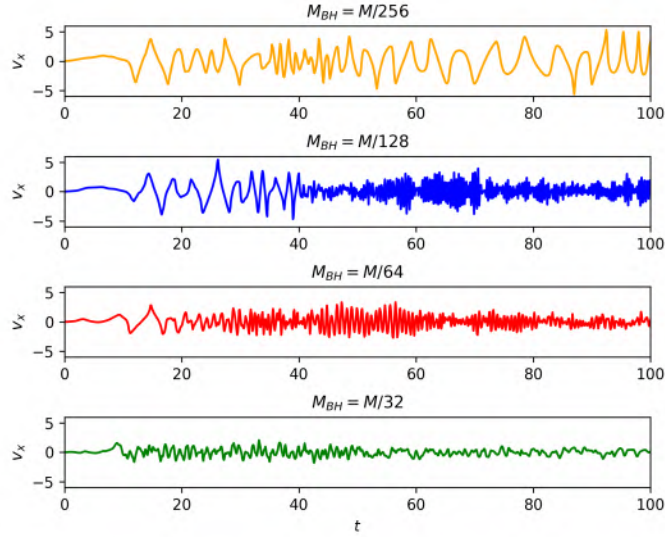


Figura 6.5: Componente x de la velocidad del agujero negro para $M_{BH} = M/256, M/128, M/64, M/32$. Las oscilaciones observadas son consistentes con aquellas propuestas en [112], aunque menos regulares debido a la granularidad del núcleo de FDM . Se observan pulsos de recalentamiento para $M_{BH} = M/128$ y $M/64$.

En los casos con $M_{BH} = M/128$ y $M/64$, se observan pulsos de recalentamiento.^{en} la velocidad, fenómeno también descrito en [112]. Las componentes y y z de la velocidad muestran un comportamiento similar. Las animaciones incluidas en el material suplementario ilustran completamente este proceso.

Ajuste del perfil de densidad del núcleo

A pesar de la dinámica compleja, se ajustó el perfil de densidad del núcleo de FDM , no solo en un instante fijo, sino promediando sobre una ventana temporal utilizando un modelo fenomenológico. Este modelo emula la solución estacionaria del problema de autovalores $FDM+BH$ descrita en [27] (véase Apéndice 6.1) y utiliza las ecuaciones (6.3)-(6.5) para el ajuste.

La Figura 6.6 muestra los ajustes obtenidos al promediar el perfil de densidad en el intervalo $t \in [70, 100]$. Se observa que la densidad central del núcleo disminuye a medida que aumenta la masa del BH . Para agujeros negros menos masivos ($M_{BH} = M/256, M/128$), el perfil de densidad es similar al del caso sin agujero negro ($M_{BH} = 0$), lo cual valida la consistencia de las simulaciones. Sin embargo, incluso los agujeros negros pequeños influyen en la

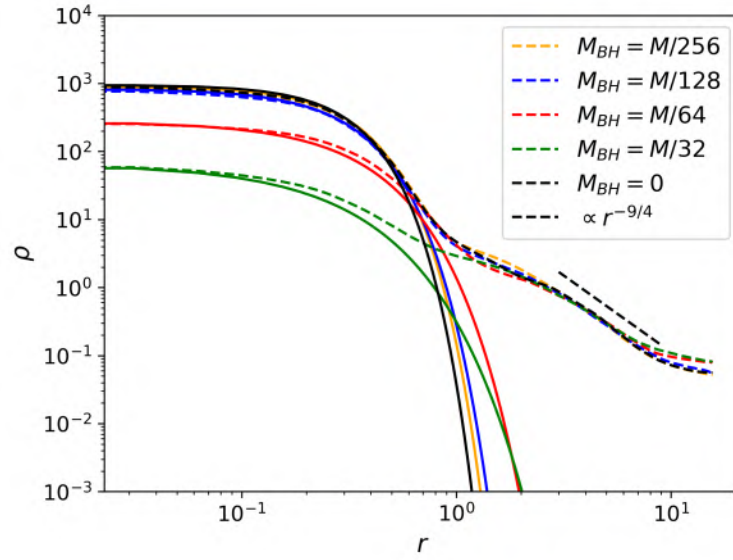


Figura 6.6: Ajuste del perfil de densidad promediado angular y temporalmente alrededor del agujero negro, utilizando la fórmula fenomenológica (6.3). El intervalo temporal utilizado es $t \in [70, 100]$. Se observa que a mayor masa del BH , menor es la densidad central del núcleo. Para los casos con agujeros negros menos masivos, el perfil se asemeja al caso sin BH , confirmando la validez de las simulaciones.

condensación al actuar como puntos de atracción para la materia oscura.

Los resultados de nuestras simulaciones demuestran que:

1. Los agujeros negros actúan como puntos de condensación para la materia oscura difusa.
2. La presencia del BH modifica la dinámica del núcleo formado, afectando la densidad central y la estabilidad del sistema.
3. Los perfiles de densidad resultantes pueden ajustarse utilizando soluciones estacionarias del problema de autovalores $FDM+BH$, lo que confirma que estos perfiles actúan como soluciones atractoras.

Estos hallazgos proporcionan evidencia adicional de la influencia significativa que los agujeros negros pueden tener en la formación de estructuras en escenarios de materia oscura difusa y abren nuevas posibilidades para futuros estudios observacionales y teóricos.

Capítulo 7

Conclusiones

- En este trabajo se ha desarrollado un nuevo software, creado desde cero. Este avance consiste en un código que resuelve de manera acoplada el sistema de ecuaciones de SP y las ecuaciones hidrodinámicas de Euler. Esta herramienta permite simular tanto escenarios de *FDM* pura como la interacción entre ésta y la materia bariónica, modelada mediante un gas ideal. Los resultados obtenidos proporcionan información relevante sobre la formación y evolución de estructuras galácticas.
- Las simulaciones de *FDM* realizadas han revelado información importante acerca del modelo. En sistemas con escalas inferiores a la longitud de Jeans —donde la expansión del universo no es determinante— se observa que nubes de gas bosónico se condensan, formando *mini-clusters*. Estas estructuras iniciales se alinean con el estado base del sistema, una solución estable. Estos núcleos galácticos, posiblemente las primeras estructuras formadas, dieron lugar a configuraciones más complejas mediante fusiones sucesivas. En particular, se encontró que en fusiones binarias la masa final del núcleo es aproximadamente el 76.85 % de la suma de las masas iniciales. Este resultado ofrece indicios sobre la formación de galaxias primigenias, caracterizadas por un núcleo solitónico rodeado de un perfil que decae polinomialmente, conocido como halo galáctico.
- Las condiciones de frontera juegan un papel crucial en la dinámica del sistema y en sus propiedades globales. El enfriamiento gravitacional y el acercamiento asintótico al estado base son fenómenos asociados a condiciones de frontera aisladas. Por otro lado, bajo condiciones de frontera periódicas, se conservan magnitudes globales como la masa y la energía total, lo que genera una redistribución de materia que inhibe el

enfriamiento gravitacional en la misma escala temporal que en el caso aislado.

- Los perfiles de la estructura *núcleo-halo* pueden generarse a partir de soluciones esféricas con una discontinuidad en la derivada en un punto denominado radio de transición. En este punto, la solución del solitón se conecta de forma continua con un modelo estacionario. Sin embargo, estas soluciones no son estables y tienden a relajarse hacia una estructura dinámica similar. Alternativamente, al utilizar perfiles empíricos, se puede resolver un problema inverso para encontrar una función de onda estacionaria que reproduzca dicho perfil en un promedio espacial o temporal. A pesar de ello, se observa que estos perfiles también son inestables, ya que el núcleo tiende a acumular masa desde el halo, fenómeno conocido desde la formación de solitones en los *mini-clústers*.
- Las simulaciones han reproducido diversos resultados conocidos en la literatura, lo que valida los métodos numéricos desarrollados para la *FDM* pura. La principal contribución de este trabajo es la inclusión de un gas ideal como modelo de materia visible, permitiendo así un estudio más completo de la interacción entre materia oscura y bariónica en entornos galácticos.
- Se encontró que el estado base del sistema SPE, denominado *NFBS*, es un atractor del sistema. Esta solución surge de manera natural a partir de condiciones iniciales aleatorias. En este contexto, los solitones que actúan como semillas de estructuras en el universo primigenio deben contener una contribución de materia bariónica. Este hecho es relevante, ya que dichos estados también se manifiestan en los centros galácticos, donde se forman los bulbos.

Los bulbos galácticos, estructuras densas compuestas mayormente por estrellas antiguas con poco gas, se explican en este modelo como una manifestación conjunta de materia visible y materia oscura bosónica. La formación simultánea de un núcleo bariónico y un núcleo *FDM* explica la elevada densidad estelar observada en el centro de las galaxias. Además, la contribución bariónica mejora la capacidad del modelo para reproducir características observadas, como la distribución de masa, el perfil de brillo y la dinámica estelar de los bulbos.

- Las simulaciones realizadas en este trabajo han permitido explorar en detalle la influencia de los agujeros negros sobre la materia oscura difusa (*FDM*) y su papel en los procesos de condensación y formación de núcleos galácticos. Los resultados muestran que los *BH* actúan como puntos de atracción para la materia oscura, promoviendo la formación de núcleos densos de *FDM* a su alrededor. Esta condensación se ve modulada por la masa del agujero negro y su dinámica relativa con respecto al núcleo en formación.

El análisis revela que el movimiento del *BH* induce oscilaciones en el núcleo de *FDM*, afectando la estabilidad del sistema y limitando la densidad máxima alcanzable. Los agujeros negros más masivos tienden a aplanar el perfil de densidad del núcleo al arrastrar la materia oscura en su entorno, mientras que los menos masivos permiten una

condensación más pronunciada. Además, se observa que incluso *BH* con masas reducidas influyen significativamente en la dinámica del *FDM*, actuando como centros de condensación y promoviendo la formación de miniclústers que eventualmente se fusionan con el agujero.

La fricción dinámica generada por la interacción entre el *BH* y el núcleo de *FDM* conduce a patrones de oscilación complejos, especialmente en medios granulares donde la estructura interna del *FDM* afecta la evolución del sistema. Estos patrones se alinean parcialmente con resultados previos en medios más homogéneos, pero destacan la importancia de considerar la granularidad en simulaciones detalladas.

Finalmente, los perfiles de densidad ajustados en torno al *BH* concuerdan con las soluciones teóricas estacionarias del problema de autovalores *FDM+BH*, lo que confirma que los agujeros negros no solo catalizan la condensación inicial, sino que también estabilizan la estructura del núcleo a largo plazo. Estos hallazgos aportan una nueva perspectiva sobre el papel de los *BH* en la evolución galáctica y abren posibilidades para utilizar la dinámica de la materia oscura difusa como herramienta para estudiar la presencia y características de agujeros negros en entornos galácticos.

- En conjunto, los avances presentados en este trabajo contribuyen significativamente a una mejor comprensión de los mecanismos que rigen la formación y evolución de estructuras galácticas. Los resultados respaldan la hipótesis de la materia oscura bosónica como una explicación viable para las propiedades observadas en galaxias de bajo brillo superficial. Este estudio sienta las bases para futuras investigaciones en modelos más completos que consideren la evolución galáctica en escenarios más realistas.

A

Apéndice

SECCIÓN A.1

Soluciones estacionarias y su estabilidad: Estrellas TOV

Suponemos un fluido autogravitante en equilibrio hidrostático y esféricamente simétrico. Bajo estas consideraciones, las ecuaciones de EP (2.1-2.4) se reducen a

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{dV}{dr}, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{dm}{dr} = r^2 \rho, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{m}{r^2}, \quad (\text{A.3})$$

las cuales forman un conjunto de tres ecuaciones diferenciales ordinarias para cuatro variables: la presión p , la densidad ρ , el potencial gravitacional V y la masa m encerrada en una esfera de radio r . Para cerrar el sistema, se utiliza la ecuación de estado politrópica

$$p = K\rho^{1+1/n}, \quad (\text{A.4})$$

donde K se conoce como constante politrópica y n es el índice politrópico. Este conjunto de ecuaciones se resuelve especificando sus valores en la frontera: $p(0) = p_c$, $\rho(0) = \rho_c$, $m(0) = 0$, $V(0) = V_c$ y $\rho(R) = 0$ donde $R > 0$ se interpreta como el radio de la estrella TOV. Notemos que el único valor que determina una solución de este sistema es la densidad central ρ_c (para una constante politrópica K y un índice politrópico n fijos), ya que la presión central p_c se obtiene mediante la ecuación de estado (A.4), mientras que el potencial central V_c se puede elegir de manera arbitraria, ya que el sistema (A.1-A.3) es invariante bajo traslaciones en el potencial $V \rightarrow V + V_c$.

El sistema (A.1-A.4) se puede escribir como una única ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n, \quad (\text{A.5})$$

la cual es conocida como la ecuación de Lane-Emden [130] y está sujeta a las condiciones de frontera $\theta(0) = 1$, $\frac{d\theta}{d\xi}(0) = 0$ y $\theta(\xi_1) = 0$, donde ξ_1 es el primer cero de la solución θ y se interpreta como el radio del politrópo. Las nuevas variables se definen como $\rho = \rho_c \theta^n$ y $r = \alpha \xi$, con $\alpha^2 = K(n+1)\rho_c^{\frac{1-n}{n}}$. La masa total M y el radio de la estrella $R = \alpha \xi_1$ se relacionan a través de la expresión

$$R^{\frac{3-n}{n}} M^{\frac{n-1}{n}} = \frac{4\pi K}{N_n}, \quad (\text{A.6})$$

donde

$$N_n := \frac{(4\pi)^{1/n}}{n+1} \left(\left[-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_1} \right)^{\frac{1-n}{n}} \xi_1^{\frac{n-3}{n}}, \quad (\text{A.7})$$

y la densidad central se puede reescribir como

$$\rho_c = \frac{M}{4\pi R^3} \frac{\xi_1^3}{\left[-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_1}}. \quad (\text{A.8})$$

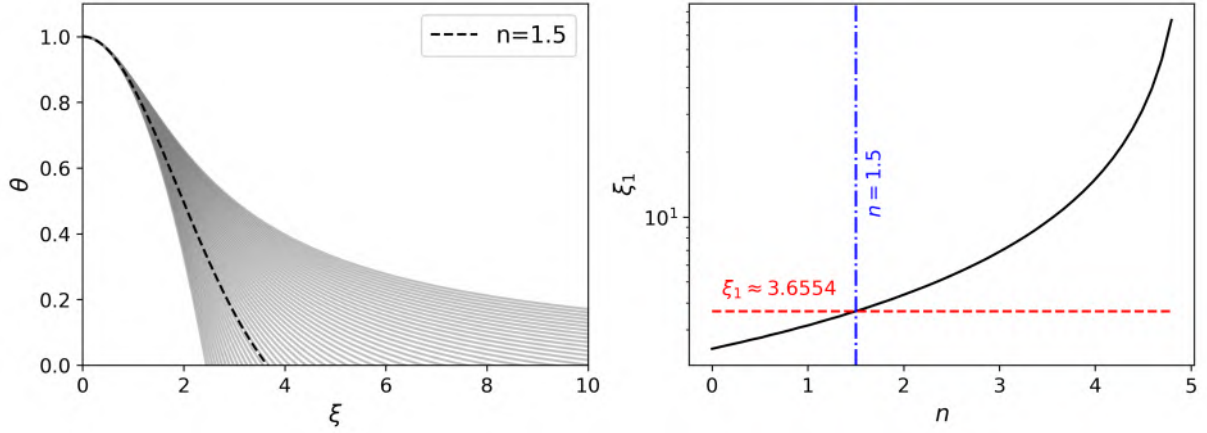


Figura A.1: A la izquierda se muestran soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden (A.5), destacando el caso $n = 1.5$ mediante una línea punteada. En el lado derecho, se presenta el radio de la estrella TOV ξ_1 como función del índice politrópico n , siendo $\xi_1 \approx 3.6554$ para $n = 1.5$.

En el lado izquierdo de la Figura A.1 se muestran algunas soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden (A.5) para un índice politrópico en el rango $n \in [0, 5]$, con un caso de especial interés para un valor de $n = 1.5$ representado mediante una línea punteada. En el lado derecho se muestra el radio de la estrella TOV ξ_1 como función del índice politrópico n , siendo para $n = 1.5$, $\xi_1 \approx 3.6554$. Obsérvese que esta es una función creciente. Existen algunas soluciones exactas para los valores de $n = 0, 1, 2$ y 5 [131], en las cuales se muestra que una estrella con $n = 5$ tiene un radio infinito, por lo que este valor es una cota para soluciones físicamente aceptables.

Una ecuación de estado politrópica no es más que un gas ideal en un proceso isentrópico, es decir, un proceso adiabático reversible en el cual la entropía del sistema permanece constante. Durante la evolución de un fluido pueden ocurrir choques hidrodinámicos, lo que implica una conversión de la energía cinética en energía interna en un proceso conocido como *calentamiento por choques* [132], en el cual se rompe el proceso isentrópico y el gas deja de comportarse como un politropo perfecto.

Bajo procesos isentrópicos, el índice adiabático de un gas ideal se relaciona con el índice politrópico mediante la expresión $\gamma = 1 + 1/n$, y la constante politrópica con la entropía específica σ mediante $K = e^{\sigma/C_V}$, donde C_V es la capacidad calorífica del gas a volumen constante. Para gases monoatómicos (como el helio y el hidrógeno, los elementos más abundantes en una estrella en la secuencia principal), se tiene un valor $\gamma = 5/3$ o bien $n = 1.5$. En este caso particular, las ecuaciones (A.6) y (A.8) tienen los valores aproximados $K \approx 0.4242GRM^{1/3}$ y $\rho_c \approx 1.428M/R^3$.

Entonces, estudiamos la estabilidad de procesos isentrópicos tomando como ejemplo la solu-

ción para $n = 1.5$ y considerando una estrella de masa $M = 1$ y radio $R = 10$ en unidades adimensionales. Para ello, la solución numérica corresponde a los datos iniciales de las ecuaciones de EP (2.1-2.4). Recordemos que los métodos numéricos solo son una aproximación a las soluciones en el límite continuo; por lo tanto, este tipo de condiciones iniciales pueden tratarse como la solución exacta del sistema estacionario más una perturbación debida al error de truncamiento de los métodos numéricos. Así, la evolución consiste en observar cuánto afecta esta perturbación a la solución en el tiempo. La evolución se lleva a cabo en el dominio espacial $D = [-2R, 2R]^3$ durante 100 unidades de tiempo, utilizando una resolución espacial de $h = R/16$ y una resolución temporal de $\Delta t = 0.25h$.

La Figura A.2 muestra cinco instantáneas a los tiempos $t = 0, 33.33, 66.67$ y 100.0 del perfil de densidad a lo largo del eje x , en las que se presenta cómo evoluciona el gas bajo ambas ecuaciones de estado. Podemos observar que el sistema se comporta de manera similar independientemente de la elección de la ecuación de estado, evolucionando hacia configuraciones muy cercanas a la densidad inicial. De hecho, en ambos casos, la densidad central, es decir, la densidad medida en el origen de coordenadas, decrece aproximadamente un 4 %, y no es posible notar una desviación significativa entre el caso isentrópico y el de un gas ideal, como se muestra en la Figura A.3.

Sin embargo, sí existe una pequeña desviación del proceso isentrópico inicial, lo cual se debe a los choques hidrodinámicos generados por un artificio numérico. Cabe destacar que la solución estacionaria solo es válida dentro de la región $|\vec{x}| \leq R$. En principio, fuera de esta esfera la solución para la densidad debería ser nula. Sin embargo, numéricamente esto no es posible, ya que en el lado derecho del sistema discretizado aparecen términos que varían como $1/\rho$, lo cual no está definido fuera de esta esfera. Por esta razón, es necesario introducir un artificio numérico en dicha región, denominado *atmósfera*, el cual establece un valor mínimo para la densidad, típicamente dentro del rango de los errores de redondeo.

Lo que se ha mostrado hasta ahora es que una perturbación, en este caso debida a la interfaz atmósfera-estrella, puede interrumpir un proceso isentrópico en un gas ideal y comenzar a calentarlo mediante los llamados choques hidrodinámicos, como se ilustra en la Figura A.4, donde se presenta la constante politrópica definida como $K = p/\rho^\gamma$ para un gas ideal. En dicha figura, se observa que esta constante deja de ser constante, lo que indica que el proceso deja de ser isentrópico.

Sin embargo, la dinámica en el interior de la estrella, aproximada mediante una ecuación de estado politrópica, sigue siendo bastante similar a la de un gas ideal. Esta sensibilidad es crucial, ya que los choques hidrodinámicos pueden ocurrir fácilmente en presencia de oscilaciones inducidas por una fuente externa, como se observa en estrellas compuestas por fermiones y bosones.

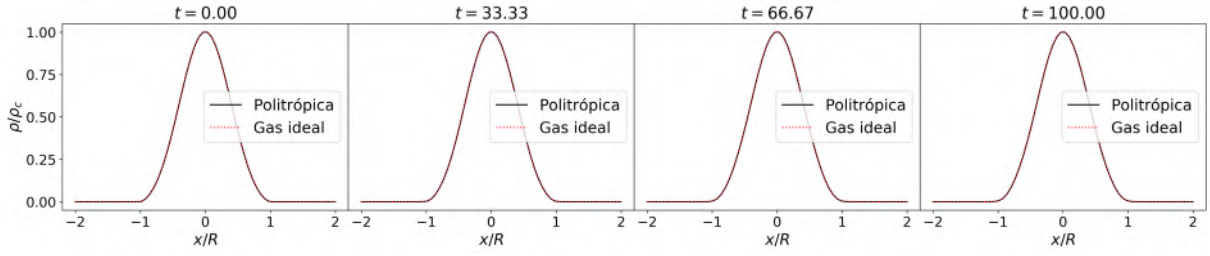


Figura A.2: Instantáneas a los tiempos $t = 0.00, 33.07, 66.14$ y 100.0 del perfil de densidad normalizado respecto al valor inicial ρ_c a lo largo del eje x normalizado respecto al radio de la estrella R . La línea continua negra corresponde a la evolución mediante una ecuación de estado politrópica mientras que la línea punteada roja a la evolución con una ecuación de estado de un gas ideal.

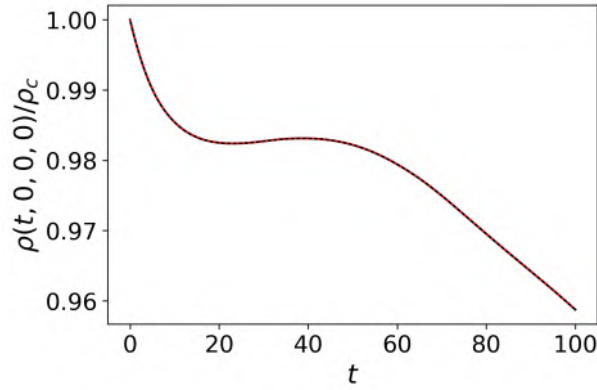


Figura A.3: Densidad medida en el origen de coordenadas como función del tiempo. La línea continua negra representa la evolución mediante una ecuación de estado politrópica mientras que la línea punteada roja con un gas ideal.

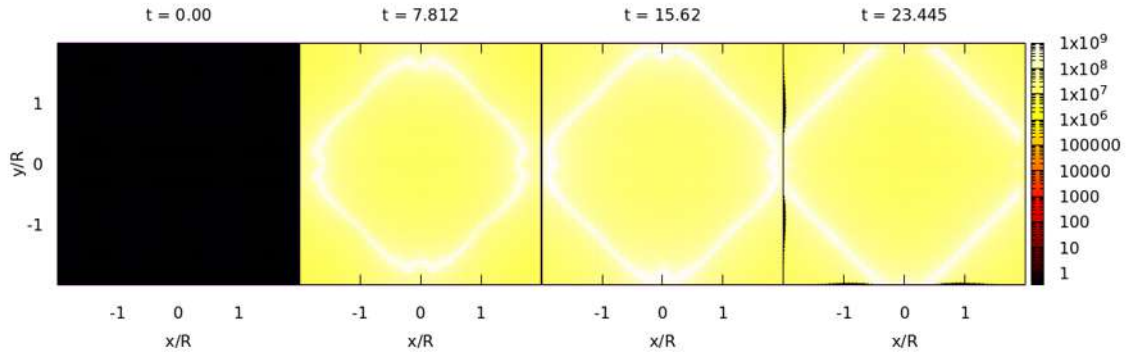


Figura A.4: Instantáneas de la cantidad constante politrópica p/ρ^γ para un gas ideal en los tiempos $t = 0.00, 7.812, 15.62$ y 23.44 en el plano $z = 0$. Se observa un incremento inmediato en su valor en la interfaz estrella-atmósfera debido a los choques hidrodinámicos provocados por el problema de Riemann en esta zona.

REFERENCIAS

- [1] F. Zwicky. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6:110–127, 1933.
- [2] V. C. Rubin, W. K. J. Ford, and N. Thonnard. Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 ($R = 4\text{kpc}$) to UGC 2885 ($R = 122\text{kpc}$). *ApJ*, 238:471–487, June 1980.
- [3] M. Milgrom. A modification of the newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *Astrophysical Journal*, 270:365–370, 1983.
- [4] J. R. Bond and A. S. Szalay. The collisionless damping of density fluctuations in an expanding universe. *Astrophysical Journal*, 274:443–468, 1980.
- [5] G. R. Blumenthal, S. M. Faber, J. R. Primack, and M. J. Rees. Formation of galaxies and large-scale structure with cold dark matter. *Nature*, 311:517–525, 1984.
- [6] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 641:A6, 2020. [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)].
- [7] T. Matos and L. A. Ureña-López. LETTER TO THE EDITOR: Quintessence and scalar dark matter in the Universe. *Classical and Quantum Gravity*, 17:L75–L81, July 2000.
- [8] Lam Hui, Jeremiah P. Ostriker, Scott Tremaine, and Edward Witten. Ultralight scalars as cosmological dark matter. *Phys. Rev. D*, 95:043541, Feb 2017.
- [9] W. J. G. de Blok, S. S. McGaugh, and V. C. Rubin. High-Resolution Rotation Curves of Low Surface Brightness Galaxies. II. Mass Models. *Astron. J.*, 122:2396–2427, November 2001.
- [10] F. S. Guzmán and L. Arturo Ureña López. Gravitational cooling of self-gravitating bose condensates. *The Astrophysical Journal*, 645(2):814D819, Jul 2006.
- [11] Bodo Schwabe, Jens C. Niemeyer, and Jan F. Engels. Simulations of solitonic core mergers in ultralight axion dark matter cosmologies. *Physical Review D*, 94(4), August 2016.

-
- [12] Xiaolong Du, Christoph Behrens, Jens C. Niemeyer, and Bodo Schwabe. Core-halo mass relation of ultralight axion dark matter from merger history. *Phys. Rev. D*, 95:043519, Feb 2017.
 - [13] D. G. Levkov, A. G. Panin, and I. I. Tkachev. Gravitational bose-einstein condensation in the kinetic regime. *Phys. Rev. Lett.*, 121:151301, Oct 2018.
 - [14] Mattia Mina, David F. Mota, and Hans A. Winther. Solitons in the dark: First approach to non-linear structure formation with fuzzy dark matter. *Astronomy & Astrophysics*, 662:A29, jun 2022.
 - [15] J. Luna Zagorac, Emily Kendall, Nikhil Padmanabhan, and Richard Easter. Soliton formation and the core-halo mass relation: An eigenstate perspective. *Phys. Rev. D*, 107:083513, Apr 2023.
 - [16] Philip Mocz, Anastasia Fialkov, Mark Vogelsberger, Michael Boylan-Kolchin, Pierre-Henri Chavanis, Mustafa A. Amin, Sownak Bose, Tibor Dome, Lars Hernquist, Lachlan Lancaster, Matthew Notis, Connor Painter, Victor H. Robles, and Jesus Zavala. Cosmological structure formation and soliton phase transition in fuzzy dark matter with axion self-interactions, 2023.
 - [17] Edward Seidel and Wai-Mo Suen. Formation of solitonic stars through gravitational cooling. *Phys. Rev. Lett.*, 72:2516–2519, Apr 1994.
 - [18] Xiaolong Du, Bodo Schwabe, Jens C. Niemeyer, and David Bürger. Tidal disruption of fuzzy dark matter subhalo cores. *Phys. Rev. D*, 97:063507, Mar 2018.
 - [19] Jiajun Chen, Xiaolong Du, Erik W. Lentz, David J. E. Marsh, and Jens C. Niemeyer. New insights into the formation and growth of boson stars in dark matter halos. *Phys. Rev. D*, 104:083022, Oct 2021.
 - [20] Victor H Robles, James S Bullock, and Michael Boylan-Kolchin. Scalar field dark matter: helping or hurting small-scale problems in cosmology? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 483(1):289–298, November 2018.
 - [21] A. Klypin, A. V. Kravtsov, O. Valenzuela, and F. Prada. Where Are the Missing Galactic Satellites? *apj*, 522:82–92, September 1999.
 - [22] Hsi-Yu Schive, Tzihong Chiueh, and Tom Broadhurst. Cosmic Structure as the Quantum Interference of a Coherent Dark Wave. *Nature Phys.*, 10:496–499, 2014a.
 - [23] Jan Veltmaat, Jens C. Niemeyer, and Bodo Schwabe. Formation and structure of ultralight bosonic dark matter halos. *Physical Review D*, 98(4), aug 2018.
 - [24] Jens C. Niemeyer. Small-scale structure of fuzzy and axion-like dark matter. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 113:103787, jul 2020.

-
- [25] Philip Mocz, Mark Vogelsberger, Victor H. Robles, Jesús Zavala, Michael Boylan-Kolchin, Anastasia Fialkov, and Lars Hernquist. Galaxy formation with Λ CDM i. turbulence and relaxation of idealized haloes. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 471(4):4559–4570, 2017.
 - [26] Xinyu Li, Lam Hui, and Tomer D. Yavetz. Oscillations and random walk of the soliton core in a fuzzy dark matter halo. *Physical Review D*, 103(2), jan 2021.
 - [27] Elliot Y Davies and Philip Mocz. Fuzzy dark matter soliton cores around supermassive black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 492(4):5721–5729, jan 2020.
 - [28] H. Y. Schive, T. Chiueh, T. Broadhurst, and K. W. Huang. Contrasting Galaxy Formation from Quantum Wave Dark Matter, ψ DM, with Λ CDM, using Planck and Hubble Data. *apj*, 818:89, February 2016.
 - [29] V. Irsic, M. Viel, M. G. Haehnelt, J. S. Bolton, and G. D. Becker. First constraints on fuzzy dark matter from Lyman- α forest data and hydrodynamical simulations. *ArXiv e-prints*, March 2017.
 - [30] E. Armengaud, N. Palanque-Delabrouille, C. Yèche, D. J. E. Marsh, and J. Baur. Constraining the mass of light bosonic dark matter using SDSS Lyman- α forest. *ArXiv e-prints*, March 2017.
 - [31] Renée Hlozek, Daniel Grin, David J. E. Marsh, and Pedro G. Ferreira. A search for ultralight axions using precision cosmological data. *Phys. Rev.*, D91(10):103512, 2015.
 - [32] Brandon Bozek, David J. E. Marsh, Joseph Silk, and Rosemary F. G. Wyse. Galaxy UV-luminosity function and reionization constraints on axion dark matter. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 450(1):209–222, 2015.
 - [33] Tanja Rindler-Daller and Paul R. Shapiro. Angular Momentum and Vortex Formation in Bose-Einstein-Condensed Cold Dark Matter Haloes. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 422:135–161, 2012.
 - [34] Victor H. Robles and T. Matos. Exact Solution to Finite Temperature SFDM: Natural Cores without Feedback. *Astrophys. J.*, 763:19, 2013.
 - [35] B. Li, T. Rindler-Daller, and P. R. Shapiro. Cosmological constraints on Bose-Einstein-condensed scalar field dark matter. *prd*, 89(8):083536, April 2014.
 - [36] Abril Suárez and Pierre-Henri Chavanis. Cosmological evolution of a complex scalar field with repulsive or attractive self-interaction. *Phys. Rev. D*, 95(6):063515, 2017.
 - [37] Abril Suárez and Pierre-Henri Chavanis. Jeans type instability of a complex self-interacting scalar field in general relativity. *Phys. Rev. D*, 98(8):083529, 2018.

-
- [38] Vincent Desjacques, Alex Kehagias, and Antonio Riotto. Impact of ultralight axion self-interactions on the large scale structure of the Universe. *Phys. Rev. D*, 97(2):023529, 2018.
 - [39] J. A. R. Cembranos, A. L. Maroto, S. J. Núñez Jareño, and H. Villarrubia-Rojo. Constraints on anharmonic corrections of Fuzzy Dark Matter. *JHEP*, 08:073, 2018.
 - [40] L. Arturo Ureña López. Scalar field dark matter with a cosh potential, revisited. *JCAP*, 06:009, 2019.
 - [41] Pierre-Henri Chavanis. Jeans mass-radius relation of self-gravitating Bose-Einstein condensates and typical parameters of the dark matter particle. *Phys. Rev. D*, 103(12):123551, 2021.
 - [42] Vicente Delgado and Antonio Muñoz Mateo. Self-interacting superfluid dark matter droplets. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 518(3):4064–4072, 2022.
 - [43] Hsi-Yu Schive, Tzihong Chiueh, and Tom Broadhurst. Soliton random walk and the cluster-stripping problem in ultralight dark matter. *Phys. Rev. Lett.*, 124:201301, May 2020.
 - [44] Gary P. Centers, John W. Blanchard, Jan Conrad, Nataniel L. Figueroa, Antoine Garcon, Alexander V. Gramolin, Derek F. Jackson Kimball, Matthew Lawson, Bart Pelsers, Joseph A. Smiga, Alexander O. Sushkov, Arne Wickenbrock, Dmitry Budker, and Andrei Derevianko. Stochastic fluctuations of bosonic dark matter. *Nature Communications*, 12(1), December 2021.
 - [45] Ivan De Martino, Tom Broadhurst, S.-H. Henry Tye, Tzihong Chiueh, Hsi-Yu Schive, and Ruth Lazkoz. Recognizing axionic dark matter by compton and de broglie scale modulation of pulsar timing. *Phys. Rev. Lett.*, 119:221103, Nov 2017.
 - [46] Yu-Dai Tsai, Joshua Eby, and Marianna S. Safronova. Direct detection of ultralight dark matter bound to the sun with space quantum sensors. *Nature Astronomy*, 7(1):113–121, 2023.
 - [47] Haipeng An, Xingyao Chen, Shuailiang Ge, Jia Liu, and Yan Luo. Searching for ultralight dark matter conversion in solar corona using low frequency array data. *Nature Communications*, 15(1), January 2024.
 - [48] Alexandre S. Göttel, Aldo Ejlli, Kanioar Karan, Sander M. Vermeulen, Lorenzo Aiello, Vivien Raymond, and Hartmut Grote. Searching for scalar field dark matter with ligo. *Phys. Rev. Lett.*, 133:101001, Sep 2024.
 - [49] Sander M. Vermeulen, Philip Relton, Hartmut Grote, Vivien Raymond, Christoph Affeldt, Fabio Bergamin, Aparna Bisht, Marc Brinkmann, Karsten Danzmann, Suresh

- Doravari, Volker Kringel, James Lough, Harald Lück, Moritz Mehmet, Nikhil Mukund, Séverin Nadji, Emil Schreiber, Borja Sorazu, Kenneth A. Strain, Henning Vahlbruch, Michael Weinert, Benno Willke, and Holger Wittel. Direct limits for scalar field dark matter from a gravitational-wave detector. *Nature*, 600(7889):424–428, December 2021.
- [50] Douglas Clowe, Marusa Bradac, Anthony H. Gonzalez, Maxim Markevitch, Scott W. Randall, Christine Jones, and Dennis Zaritsky. A direct empirical proof of the existence of dark matter. *The Astrophysical Journal*, 648(2):L109–L113, 2006.
- [51] L. Randall, J. Scholtz, and J. Unwin. Ultralight bosonic dark matter, galactic feedback, and precision astrophysics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 465(1):131–143, 2017.
- [52] Frank H. Shu. *The Physics of Astrophysics, Volume II: Gas Dynamics*. University Science Books, 1992.
- [53] Dongsu Ryu, Hyesung Kang, Eric Hallman, and T. W. Jones. Turbulence and magnetic fields in large-scale structure formation. *The Astrophysical Journal*, 593(2):599–610, 2003.
- [54] E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [55] Volker Springel. The cosmological simulation code gadget-2. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 364(4):1105–1134, 2005.
- [56] Franco Dalfovo, Stefano Giorgini, Lev P. Pitaevskii, and Sandro Stringari. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, 71:463–512, 1999.
- [57] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2008.
- [58] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science*, 269(5221):198–201, 1995.
- [59] C. G. Boehmer and T. Harko. Can dark matter be a Bose-Einstein condensate? *JCAP*, 0706:025, 2007.
- [60] L. Arturo Ureña López. Brief review on scalar field dark matter models. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 6, 2019.
- [61] Varun Sahni and Limin Wang. New cosmological model of quintessence and dark matter. *Phys. Rev. D*, 62:103517, Oct 2000.
- [62] W. Hu, R. Barkana, and A. Gruzinov. Fuzzy Cold Dark Matter: The Wave Properties of Ultralight Particles. *Physical Review Letters*, 85:1158–1161, August 2000.

-
- [63] David J. E. Marsh and Ana-Roxana Pop. Axion dark matter, solitons and the cusp-core problem. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 451(3):2479–2492, 2015.
 - [64] R. Ruffini and S. Bonazzola. Systems of self-gravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state. *Phys. Rev.*, 187:1767–1783, Nov 1969.
 - [65] F. S. Guzmán and L. Arturo Ureña López. Evolution of the schrödinger-newton system for a self-gravitating scalar field. *Phys. Rev. D*, 69:124033, Jun 2004.
 - [66] E. Madelung. Quantentheorie in hydrodynamischer form. *Zeitschrift für Physik*, 40(3):322–326, Mar 1927.
 - [67] P.-H. Chavanis. Mass-radius relation of Newtonian self-gravitating Bose-Einstein condensates with short-range interactions: I. Analytical results. *Phys. Rev. D*, 84:043531, 2011.
 - [68] A. Burkert. The structure of dark matter halos in dwarf galaxies. *The Astrophysical Journal*, 447(1):L25, jul 1995.
 - [69] Iván Álvarez-Rios and Francisco S Guzmán. Exploration of simple scenarios involving fuzzy dark matter cores and gas at local scales. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 518(3):3838–3849, nov 2022.
 - [70] Daniela Rodriguez-Lara, Ivan Alvarez-Rios, and Francisco S. Guzman. Numerical solution partial differential equations using the discrete fourier transform, 2024.
 - [71] James W. Cooley and John W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of Computation*, 19(90):297–301, 1965.
 - [72] Jianke Yang. *Nonlinear Waves in Integrable and Non-integrable Systems*. Monographs on Mathematical Modeling and Computation. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2010.
 - [73] Iván Álvarez-Rios, Francisco S. Guzmán, and Paul R. Shapiro. Effect of boundary conditions on structure formation in fuzzy dark matter. *Phys. Rev. D*, 107:123524, Jun 2023.
 - [74] Iván Álvarez Rios and Francisco S. Guzmán. Stationary solutions of the schrödinger-poisson-euler system and their stability. *Physics Letters B*, 843:137984, August 2023.
 - [75] Curicaveri Palomares-Chavez, Ivan Alvarez-Rios, and Francisco S. Guzman. Black holes as condensation points of fuzzy dark matter cores, 2024.
 - [76] Carlos Tena-Contreras, Iván Alvarez-Ríos, and Francisco S. Guzmán. Construction of ground-state solutions of the gross-pitaevskii-poisson system using genetic algorithms. *Universe*, 10(8), 2024.

-
- [77] Iván Alvarez-Ríos and Francisco S. Guzmán. Construction and Evolution of Equilibrium Configurations of the Schrödinger–Poisson System in the Madelung Frame. *Universe*, 8(8):432, August 2022.
 - [78] Hsi-Yu Schive, Tzihong Chiueh, and Tom Broadhurst. Soliton Random Walk and the Cluster-Stripping Problem in Ultralight Dark Matter. *prl*, 124(20):201301, May 2020.
 - [79] Philip Mocz, Anastasia Fialkov, Mark Vogelsberger, Fernando Becerra, Mustafa A. Amin, Sownak Bose, Michael Boylan-Kolchin, Pierre-Henri Chavanis, Lars Hernquist, Lachlan Lancaster, Federico Marinacci, Victor H. Robles, and Jesús Zavala. First star-forming structures in fuzzy cosmic filaments. *Phys. Rev. Lett.*, 123:141301, Oct 2019.
 - [80] Simon May and Volker Springel. Structure formation in large-volume cosmological simulations of fuzzy dark matter: impact of the non-linear dynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 506(2):2603–2618, jun 2021.
 - [81] Bodo Schwabe and Jens C. Niemeyer. Deep zoom-in simulation of a fuzzy dark matter galactic halo. *Phys. Rev. Lett.*, 128:181301, May 2022.
 - [82] F. S. Guzmán. Oscillation modes of ultralight bec dark matter cores. *Physical Review D*, 99(8), Apr 2019.
 - [83] D. G. Levkov, A. G. Panin, and I. I. Tkachev. Gravitational Bose-Einstein condensation in the kinetic regime. *Phys. Rev. Lett.*, 121(15):151301, 2018.
 - [84] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, and Simon D. M. White. A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering. *apj*, 490(2):493–508, December 1997.
 - [85] Ana A. Avilez and F. S. Guzmán. Relaxation of structures resulting from head-on mergers of ultralight bosonic dark matter cores. *Physical Review D*, 99(4), Feb 2019.
 - [86] F. S. Guzmán and Ana A. Avilez. Head-on collision of multistate ultralight bec dark matter configurations. *Physical Review D*, 97(11), Jun 2018.
 - [87] Bodo Schwabe, Jens C. Niemeyer, and Jan F. Engels. Simulations of solitonic core mergers in ultralight axion dark matter cosmologies. *prd*, 94(4):043513, August 2016.
 - [88] F. S. Guzmán, I. Alvarez-Ríos, and J. A. González. Merger of galactic cores made of ultralight bosonic dark matter. *Rev. Mex. Fis.*, 67(1 Jan-Feb):75–83, Jan 2021.
 - [89] Angel Paredes and Humberto Michinel. Interference of dark matter solitons and galactic offsets. *Physics of the Dark Universe*, 12:50–55, 2016.
 - [90] Argelia Bernal and F. S. Guzmán. Scalar field dark matter: Nonspherical collapse and late-time behavior. *Physical Review D*, 74(6), Sep 2006.

-
- [91] Hsi-Yu Schive, Ming-Hsuan Liao, Tak-Pong Woo, Shing-Kwong Wong, Tzihong Chiueh, Tom Broadhurst, and W. Y. Pauchy Hwang. Understanding the Core-Halo Relation of Quantum Wave Dark Matter from 3D Simulations. *Phys. Rev. Lett.*, 113(26):261302, 2014.
 - [92] Matteo Nori and Marco Baldi. Scaling relations of fuzzy dark matter haloes – i. individual systems in their cosmological environment. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 501(1):1539–1556, dec 2020.
 - [93] Iván Álvarez-Ríos and Francisco S. Guzmán. Spherical solutions of the schrödinger-poisson system with core-tail structure. *Phys. Rev. D*, 108:063519, Sep 2023.
 - [94] Hei Yin Jowett Chan, Elisa G M Ferreira, Simon May, Kohei Hayashi, and Masashi Chiba. The diversity of core–halo structure in the fuzzy dark matter model. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 511(1):943–952, jan 2022.
 - [95] P. Mocz, M. Vogelsberger, V. Robles, J. Zavala, M. Boylan-Kolchin, and L. Hernquist. Galaxy Formation with BECDM: I. Turbulence and relaxation of idealised haloes. *ArXiv e-prints*, May 2017.
 - [96] Tomer D. Yavetz, Xinyu Li, and Lam Hui. Construction of wave dark matter halos: Numerical algorithm and analytical constraints. *Phys. Rev. D*, 105:023512, Jan 2022.
 - [97] T. Bernal, L. M. Fernández-Hernández, T. Matos, and M. A. Rodríguez-Meza. Rotation curves of high-resolution LSB and SPARC galaxies with fuzzy and multistate (ultralight boson) scalar field dark matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 475(2):1447, April 2018.
 - [98] Pierre-Henri Chavanis. Derivation of the core mass-halo mass relation of fermionic and bosonic dark matter halos from an effective thermodynamical model. *Physical Review D*, 100(12), dec 2019.
 - [99] Shan-Chang Lin, Hsi-Yu Schive, Shing-Kwong Wong, and Tzihong Chiueh. Self-consistent construction of virialized wave dark matter halos. *Phys. Rev. D*, 97:103523, May 2018.
 - [100] Ben Bar-Or, Jean-Baptiste Fouvry, and Scott Tremaine. Relaxation in a fuzzy dark matter halo. *The Astrophysical Journal*, 871(1):28, January 2019. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.
 - [101] Pierre-Henri Chavanis. Landau equation for self-gravitating classical and quantum particles: application to dark matter. *European Physical Journal Plus*, 136(6):703, June 2021.
 - [102] D. G. Levkov, A. G. Panin, and I. I. Tkachev. Gravitational bose-einstein condensation in the kinetic regime. *Phys. Rev. Lett.*, 121:151301, Oct 2018.

-
- [103] Benedikt Eggemeier and Jens C. Niemeyer. Formation and mass growth of axion stars in axion miniclusters. *Phys. Rev. D*, 100:063528, Sep 2019.
 - [104] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
 - [105] El-Zantand and et al. The effect of fluctuating fuzzy axion haloes on stellar dynamics: a stochastic model. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 492(1):877D894, December 2019.
 - [106] Ben Bar-Or, Jean-Baptiste Fouvry, and Scott Tremaine. Relaxation in a fuzzy dark matter halo. *The Astrophysical Journal*, 871(1):28, jan 2019.
 - [107] Argelia Bernal and F. S. Guzmán. Scalar field dark matter: Head-on interaction between two structures. *Physical Review D*, 74(10), Nov 2006.
 - [108] Philip Mocz, Anastasia Fialkov, Mark Vogelsberger, Fernando Becerra, Xuejian Shen, Victor H Robles, Mustafa A Amin, Jesus Zavala, Michael Boylan-Kolchin, Sownak Bose, Federico Marinacci, Pierre-Henri Chavanis, Lachlan Lancaster, and Lars Hernquist. Galaxy formation with BECDM II. Cosmic filaments and first galaxies. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 494(2):2027–2044, 04 2020.
 - [109] Pierre-Henri Chavanis. Mass-radius relation of self-gravitating bose-einstein condensates with a central black hole. *Eur. Phys. J. Plus*, 134:352, 2019.
 - [110] Pierre-Henri Chavanis. Core mass-halo mass relation of bosonic and fermionic dark matter halos harboring a supermassive black hole. *Physical Review D*, 101(6), March 2020.
 - [111] Yourong Wang and Richard Easther. Dynamical friction from ultralight dark matter. *Phys. Rev. D*, 105:063523, Mar 2022.
 - [112] Russell Boey, Yourong Wang, Emily Kendall, and Richard Easther. Dynamical friction and black holes in ultralight dark matter solitons. *Phys. Rev. D*, 109:103526, May 2024.
 - [113] Hyeonmo Koo, Dongsu Bak, Inkyu Park, Sungwook E. Hong, and Jae-Weon Lee. Final parsec problem of black hole mergers and ultralight dark matter. *Physics Letters B*, 856:138908, 2024.
 - [114] Benjamin C. Bromley, Pearl Sandick, and Barmak Shams Es Haghi. Supermassive black hole binaries in ultralight dark matter. *Phys. Rev. D*, 110:023517, Jul 2024.
 - [115] Amr A El-Zant, Zacharias Roupas, and Joseph Silk. Ejection of supermassive black holes and implications for merger rates in fuzzy dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 499(2):2575–2586, September 2020.
 - [116] Lachlan Lancaster, Cara Giovanetti, Philip Mocz, Yonatan Kahn, Mariangela Lisanti, and David N. Spergel. Dynamical friction in a fuzzy dark matter universe. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(01):001–001, jan 2020.

-
- [117] Vitor Cardoso, Taishi Ikeda, Rodrigo Vicente, and Miguel Zilhão. Parasitic black holes: The swallowing of a fuzzy dark matter soliton. *Physical Review D*, 106(12), December 2022.
- [118] Dina Traykova, Rodrigo Vicente, Katy Clough, Thomas Helfer, Emanuele Berti, Pedro G. Ferreira, and Lam Hui. Relativistic drag forces on black holes from scalar dark matter clouds of all sizes. *Physical Review D*, 108(12), December 2023.
- [119] Yuri Ravanal, Gabriel Gómez, and Normal Cruz. Accretion of self-interacting scalar field dark matter onto a reissner-nordström black hole. *Physical Review D*, 108(8), October 2023.
- [120] Alexis Boudon, Philippe Brax, and Patrick Valageas. Supersonic friction of a black hole traversing a self-interacting scalar dark matter cloud. *Phys. Rev. D*, 108:103517, Nov 2023.
- [121] Jamie Bamber, Josu C. Aurrekoetxea, Katy Clough, and Pedro G. Ferreira. Black hole merger simulations in wave dark matter environments. *Physical Review D*, 107(2), January 2023.
- [122] Josu C. Aurrekoetxea, Katy Clough, Jamie Bamber, and Pedro G. Ferreira. Effect of wave dark matter on equal mass black hole mergers. *Physical Review Letters*, 132(21), May 2024.
- [123] Josu C. Aurrekoetxea, James Marsden, Katy Clough, and Pedro G. Ferreira. Self-interacting scalar dark matter around binary black holes. *Physical Review D*, 110(8), October 2024.
- [124] Mark P. Hertzberg, Enrico D. Schiappacasse, and Tsutomu T. Yanagida. Axion star nucleation in dark minihalos around primordial black holes. *Phys. Rev. D*, 102:023013, Jul 2020.
- [125] Jiajun Chen, Xiaolong Du, Erik W. Lentz, David J. E. Marsh, and Jens C. Niemeyer. New insights into the formation and growth of boson stars in dark matter halos. *Phys. Rev. D*, 104:083022, Oct 2021.
- [126] F. S. Guzmán and F. D. Lora-Clavijo. Spherical nonlinear absorption of cosmological scalar fields onto a black hole. *Phys. Rev. D*, 85:024036, Jan 2012.
- [127] F. G. Guzmán, I. Alvarez-Ríos, and J. A. González. Frequency shift of light emitted from growing and shrinking black holes. *Phys. Rev. D*, 104:084014, Oct 2021.
- [128] Vitor Cardoso, Taishi Ikeda, Rodrigo Vicente, and Miguel Zilhão. Parasitic black holes: The swallowing of a fuzzy dark matter soliton. *Phys. Rev. D*, 106:L121302, Dec 2022.

-
- [129] C. Palomares-Cávez, I. Alvarez-Rios, and F. S. Guzmán. Supplementary material. https://drive.google.com/file/d/1AZ-3B37CXU_MYTjrmUswvD3FYN8uZkzU/view. Accessed: 2024-12-18.
- [130] Stuart L. Shapiro and Saul A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. John Wiley & Sons, New York, 1983. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.
- [131] Shambhunath Srivastava. A New Solution of the Lane-Emden Equation of Index $n=5$. *apj*, 136:680–681, September 1962.
- [132] Miguel Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford University Press, 04 2008.

Iván Margarito Álvarez Ríos

FORMACIÓN Y EVOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS EN EL MODELO DE MATERIA OSCURA DIFUSA.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:436174072

Fecha de entrega

4 mar 2025, 7:25 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

4 mar 2025, 7:42 a.m. GMT-6

Nombre de archivo

FORMACIÓN Y EVOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS EN EL MODELO DE MATERIA OSCURA DIFUSA.pdf

Tamaño de archivo

66.3 MB

199 Páginas




57,242 Palabras

282,802 Caracteres

13% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

- 12%  Fuentes de Internet
- 8%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alertas de integridad para revisión

No se han detectado manipulaciones de texto sospechosas.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Doctorado en Ciencias en el Área de Física	
Título del trabajo	Formación y evolución de estructuras en el modelo de materia oscura difusa	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Iván Margarito Álvarez Ríos	ivan.alvarez@umich.mx
Director	Francisco Shidarth Guzman Murillo	francisco.s.guzman@umich.mx
Codirector	Jose Antonio Gonzalez Cervera	jose.gonzalez@umich.mx
Coordinador del programa	Umberto Cotti Gollini	doc.ciencias.fisica@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción

Asistencia en la redacción	No	
----------------------------	----	--

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	No	
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro		

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Iván Margarito Álvarez Ríos
Lugar y fecha	Morelia, Mich., a 26/02/2025