

## Study of Dynamics in $f(R)$ Gravity

Seoktae KOH\*

Department of Science Education, Jeju National University, Jeju 63243, Korea and  
Research Institute of Education & Science, Jeju National University, Jeju 63243, Korea

Jong-Kwan WOO

Department of Physics, Jeju National University, Jeju 63243, Korea

(Received 18 September 2015 : revised 19 October 2015 : accepted 19 October 2015)

The introduction of a new type of matter or a modification of gravity are usually considered in order to explain the recent finding of an accelerating Universe. Cosmic microwave background measurements and observations of Type Ia supernova imply  $w \simeq -1$ . In this work, we construct a dynamical autonomous system of the  $f(R) \propto R^n$  modified gravity model and find the equilibrium points. We check the stability of the equilibrium points by using the Jacobian matrix and a phase space analysis, and we constrain the power index  $n$  by using the condition for an accelerating Universe.

PACS numbers: 98.80.Cq, 04.62.+v

Keywords: Accelerating universe, General relativity,  $f(R)$  modified gravity, Dynamical autonomous system

## $f(R)$ 중력에서 동역학 연구

고석태\*

제주대학교 과학교육과 & 교육과학연구소, 제주 63243

우종관

제주대학교 물리학과, 제주 63243

(2015년 9월 18일 받음, 2015년 10월 19일 수정본 받음, 2015년 10월 19일 게재 확정)

최근 우주의 가속팽창을 설명하기 위해서 새로운 에너지원을 도입하거나 아인슈타인의 일반상대성이론을 변형시킨 중력 이론을 고려한다. 플랑크 위성의 우주배경복사와 초신성 관측 등에 따르면  $w \simeq -1$  임을 가리키고 있으며, 아인슈타인 중력을 변형시키는 모형의 경우도 현재 관측 결과를 만족하고 있다. 특별히 이 연구에서는 많이 연구되고 있는  $f(R) \sim R^n$  모형을 동역학 자율계에서 평형점과 고유값을 통해서 안정성 문제를 알아보고 안정적인 해와 가속팽창 해를 구할 수 있는지 연구하였다. 또한 핵합성 시기의 온도 진화식으로부터 가능한  $n$ 의 범위를 구해보고 이 범위에서 가속팽창 해를 구할 수 있는지 확인하였다.

PACS numbers: 98.80.Cq, 04.62.+v

Keywords: 가속팽창 우주, 일반상대성 이론,  $f(R)$  변형 중력이론, 동역학 자율계

\*E-mail: kundol.koh@jejunu.ac.kr



### I. 서론

Type 1a 초신성 관측 [1,2]을 통해서 현재 우리 우주는 가속팽창을 하고 있다는 것이 알려졌다. WMAP 위성 [3,4]과 플랑크 위성 [5,6]의 우주배경복사 (CMB) 관측을 통하여 현재 우리 우주는 암흑 에너지가 약 70%, 암흑 물질이 약 25%를 차지함으로써 아직 그 실체를 알 수 없는 물질과 에너지가 전체 우주 구성물질의 약 95% 정도가 차지하고 있다.

현재 우주의 가속 팽창 [7]을 설명하기 위하여 스칼라 입자 등과 같은 입자나 물질을 도입하여 설명하려는 시도 [8]가 있으며, 이 때 고려하는 물질은 입자물리의 표준 모형에서 고려되지 않는 다른 종류의 입자여야 한다. 또 다른 시도로서는 아인슈타인의 일반상대성 이론을 변형 시킴으로써 변형된 중력이론 [9–11]으로 가속팽창을 설명하려는 시도가 있다. 두 가지 시도가 현재 활발히 이루어지고 있으며 아직 어떤 시도가 올바른 시도인지는 더 많은 관측이 이루어져야 할 것으로 보인다.

본 연구에서는 변형된 중력 이론 중에서  $f(R) \propto R^n$  형태로 주어지는 모형을 고려한다. 변형된 중력이론이 아인슈타인의 일반상대성 이론과 다르다면 우주의 진화 과정을 통해서 핵합성 과정에도 영향을 끼쳤을 것이다. 빅뱅 대폭발 이후 약 1~3분 후에 일어나는 핵합성에는 우주의 팽창정도를 나타내는 허블 변수가 큰 영향을 끼친다. 변형된 아인슈타인 장방정식으로부터 허블 변수가 어떻게 변화되는지를 계산하고 그로부터 우주 온도의 진화식을 유도해 낼 수 있다. 우주 온도에 대한 조건으로부터 가능한  $n$ 의 범위를 계산한다.

변형된 중력이론에서 동역학 자율계 [12]를 구성하고 평형점을 찾을 수 있다. 평형점들이 안정성 여부를 야코비안 행렬의 고유값으로 판별할 수 있고 또한 위상계적을 통해서 수치적으로 확인할 수 있다. 평형점에서 가속 팽창 [13]의 해가 가능하기 위해서는 유효 상태방정식 변수  $w_{eff}$ 가  $-\frac{1}{3}$ 보다 작거나 혹은 감속팽창 변수  $q$ 가 0보다 작아야 한다. 이러한 조건을 만족하는 평형점들의  $n$ 의 범위를 찾아보고 우주 핵합성 시기의 온도 진화식으로부터 구한  $n$ 의 범위와 비교해 본다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II절에서  $f(R)$  중력이론의 액션으로부터 방정식을 구하고 편평한 프리드만-르메트르-로버트슨-워커 (FLRW) 시공간에서의 장방정식을 계산한다. III절에서는  $f(R) \propto R^n$ 으로 주어질 때, 핵합성 시기의 우주의 진화를 고려한다. 우주가  $a \propto t^\alpha$ 로 변화한다고 가정할 때,  $\alpha$ 와  $n$ 의 관계식을 알아보고, 또한 온도의 진화식을 구해본다. 온도의 진화식으로부터  $n$ 이 만족해야 할 값을 구해본다. IV절에서는 동역학 자율계

를 구성하고, 평형점들의 안정성을 야코비안 행렬의 고유값과 위상계적을 통해서 알아보고 가속팽창이 일어나기 위한 조건을 알아본다. 마지막으로 V절에서 본 연구의 결론과 요약을 한다.

### II. 모형

중력이  $f(R)$ 의 형태로 주어지는 다음과 같은 액션을 고려한다.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} f(R) + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \phi_m) \right]. \quad (1)$$

여기서  $\kappa^2 = 8\pi/M_p^2$ 이고,  $M_p$ 는 플랑크 질량이다.  $\phi_m$ 는 물질 장을 나타낸다. 매트릭 텐서  $g_{\mu\nu}$ 에 대해서 액션 (1)을 변분시키면 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(eff)}, \quad (2)$$

$$T_{\mu\nu}^{(eff)} = \frac{1}{\kappa^2 F} \left[ \kappa^2 T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(f - RF) + F_{;\mu\nu} - \square F g_{\mu\nu} \right]. \quad (3)$$

여기서  $F = df/dR$ 이다.

다음과 같이 주어지는 균질하고 등방인 FLRW 매트릭을 고려하면

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (4)$$

장방정식 (2)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$3H^2 F + \frac{1}{2}(f - RF) + 3H\dot{F} = \kappa^2 \rho, \quad (5)$$

$$\left( \dot{H} + 3H^2 \right) F - \frac{1}{2}\dot{f} - \ddot{F} - 2H\dot{F} = \kappa^2 p, \quad (6)$$

식 (2)에서 에너지-운동량 텐서는 완전유체 (perfect fluid) 형태로 주어진다고 가정하였다.

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (7)$$

편평한 FLRW 매트릭에서 리치스칼라는 다음과 같이 주어진다.

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}). \quad (8)$$

(5)과 (6)으로부터 에너지 보존이 성립함을 알 수 있다.

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (9)$$

### III. $R^n$ 중력 모형에서 우주 진화

$f(R) \propto R^n$  형태를 갖는 모형에서 핵합성 (BBN)이 일어날 시기의 진화 식을 계산해 보고 현재 우주의 진화를 설명할 수 있는  $n$ 의 조건을 구해 볼 수 있다. 핵합성이 일어날 시기는 복사 우세기이므로 상태 방정식은  $p = \rho/3$ 으로 쓸 수 있고 (9)으로부터  $\rho \propto a^{-4}$ 임을 알 수

있다. 스케일 인자 (scale factor)가 다음과 같이 주어진다 고 하면

$$a(t) \propto t^\alpha, \tag{10}$$

(5)과 (6)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$-\frac{n(\alpha + 2n - 3)}{2(2\alpha - 1)} + \frac{1}{2} = \kappa^2 \rho \left( \frac{6\alpha(2\alpha - 1)}{At^2} \right)^{-n}, \tag{11}$$

$$\frac{n(4n + 3\alpha - 5)}{6(2\alpha - 1)} - \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{3\alpha(2\alpha - 1)} - \frac{1}{2} = \kappa^2 p \left( \frac{6\alpha(2\alpha - 1)}{At^2} \right)^{-n}. \tag{12}$$

(11)와 (12)은  $p = \rho/3$ 의 상태 방정식이 주어지는 경우  $\alpha = \frac{n}{2}$ 을 만족해야 한다. 그러면 에너지 밀도는 (11)로부터

$$\rho = \frac{1}{\kappa^2} g_\alpha \left( \frac{1}{At^2} \right)^{2\alpha}. \tag{13}$$

여기서

$$g_\alpha = \frac{1}{\kappa^2} \frac{-10\alpha^2 + 8\alpha - 1}{2(2\alpha - 1)} \left( \frac{6\alpha(2\alpha - 1)}{At^2} \right)^n \tag{14}$$

이다. 복사 우세기에 에너지 밀도와 온도 사이의 관계식을 이용하면

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \tag{15}$$

으로 쓸 수 있고, 우주의 온도와 진화 시간 사이의 관계식은 다음과 같이 주어지게 된다.

$$T = \left( \frac{15}{4\pi^3 g_*} \right)^{1/4} g_\alpha^{1/4} M_p^{1/2} \left( \frac{1}{At^{1/2}} \right)^{\alpha/2}. \tag{16}$$

여기서  $g_*$ 은 에너지 밀도의 상대론적 자유도이다.  $T \geq 0$ 이 되기 위해서는  $g_\alpha \geq 0$  [14-16]이 되어야 하며 따라서  $\alpha$ 는

$$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{4 + \sqrt{6}}{10}, \tag{17}$$

혹은

$$1 \leq n \leq \frac{4 + \sqrt{6}}{5}, \tag{18}$$

을 만족해야 한다. 좀 더 강한 제한으로서 핵합성 특히 중수소 ( $D$ )와 헬륨 ( $^4He$ ) 양의 관측으로부터 주어질 수 있는데, Ref. 16에 따르면  $(n - 1) = (-0.86 \pm 1.9) \times 10^{-4}$  (95% C.L.)으로 주어진다. 제한식 (18)으로 주어지는 경우, 최근 가속팽창을 설명할 수 있는지 여부를 다음 장에서 동역학 분석을 통해서 알아보려고 한다.

### IV. 동역학 분석

다음과 같은 차원이 없는 변수를 도입하면

$$x = \frac{R}{6nH^2}, \quad y = \frac{(n-1)\dot{R}}{HR}, \quad \Omega = \frac{\kappa^2 \rho}{3H^2 R^n}, \tag{19}$$

1차 미분방정식의 동역학 자율계 (dynamical autonomous systems)을 구성할 수 있다.

$$x' = f(x, y) = \frac{1}{n-1} xy - 2nx^2 + 4x, \tag{20}$$

$$y' = g(x, y) = nx + 1 - 3x - 3w(1 + (1-n)x + y) - y^2 - nxy. \tag{21}$$

Table 1. Eigenvalues of the equilibrium points  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{D}$ .

Points	Eigenvalues
$\mathcal{A}$	$(2, \frac{4n-5}{n-1})$
$\mathcal{B}$	$(\frac{4n-3}{n-1}, -2)$
$\mathcal{C}$	$(\frac{-3+13n-8n^2}{(-1+n)(-1+2n)}, \frac{-4n+5}{n-1})$
$\mathcal{D}$	$(\lambda_1, \lambda_2)$

여기서 다음의 구속식을 이용하여  $\Omega$ 를 제거하였으며

$$1 + (1 - n)x + y - \Omega = 0, \tag{22}$$

'은  $N \equiv \ln a$ 에 대한 미분을 나타낸다.

식 (20)과 (21)에서  $x' = 0, y' = 0$ 으로 둬므로써  $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$ 을 만족하는 고정점 혹은 평형점 (equilibrium points)을 얻을 수 있다.

$$\mathcal{A} : (0, -1)$$

$$\mathcal{B} : (0, 1 - 3w)$$

$$\mathcal{C} : (\frac{4n - 5}{(2n - 1)(n - 1)}, \frac{2(n - 2)}{2n - 1})$$

$$\mathcal{D} : (-\frac{3 - 4n + 3w}{2n^2}, -\frac{3(-1 + n)(1 + w)}{n})$$

최근 우주의 가속팽창을 설명하기 위하여 앞으로의 논의는 물질 우세기 (matter dominated era) 즉 상태 방정식 변수가  $w = 0$ 인 경우만을 고려한다. 이 평형점들이 주어진 중력 모형의 끌개 (attractor) 인지 혹은 안장점 (saddle point)인지 확인을 위해서는 평형점의 안정성을 확인할 필요가 있다. 평형점들의 안정성을 확인하기 위하여  $x, y$ 를  $x + \delta x, y + \delta y$ 로 섭동을 시켰을 때 평형점에서 발산하는지 혹은 진동하는지를 확인해야 한다. 평형점들의 안정성 여부는 식 (20)과 (21)의  $f(x, y)$ 와  $g(x, y)$ 의 야코비안의 고유값 [17]을 계산해서 알아볼 수도 있다.  $f(x, y)$ 와  $g(x, y)$ 의 야코비안 행렬 (Jacobian matrix)은 다음과 같이 주어지며

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n-1}y - 4nx + 4 & \frac{1}{n-1}x \\ n - 3 - 3w + 3nw - ny & -3w - 2y - nx \end{bmatrix} \tag{23}$$

이 야코비안 행렬의 고유값은 Table 1에 정리되어 있다.

Table 1에서 고정점  $\mathcal{D}$ 의 고유값은 다음과 같이 주어지는데

$$\lambda_1 = -\frac{3}{4n} - \frac{1}{4n(n-1)}\sqrt{(n-1)P(n)}, \tag{24}$$

$$\lambda_2 = -\frac{3}{4n} + \frac{1}{4n(n-1)}\sqrt{(n-1)P(n)}, \tag{25}$$

여기서

$$P(n) = -81 + 417n - 608n^2 + 256n^3, \tag{26}$$

이다.

평형점  $\mathcal{A}$ 의 경우,  $n > \frac{5}{4}$  이거나  $n < 1$  이면 고유값은 둘 다 양의 부호를 갖게 되며 따라서 평형점은 불안정하게 된다. Fig. 2의 빨간점은 평형점  $\mathcal{A}$ 를 나타내며, Fig. 2(a), 2(c) 그리고 Fig. 2(d)를 보게 되면 평형점  $\mathcal{A}$ 는 불안정한 점임을 알 수 있다. 반면에  $1 < n < \frac{5}{4}$  이면 고유값은 각각 양의 부호와 음의 부호를 갖기 때문에 안장점이 된다. Fig. 2(b)에서 빨간점 (평형점  $\mathcal{A}$ )는 안장점임을 확인할 수 있다.

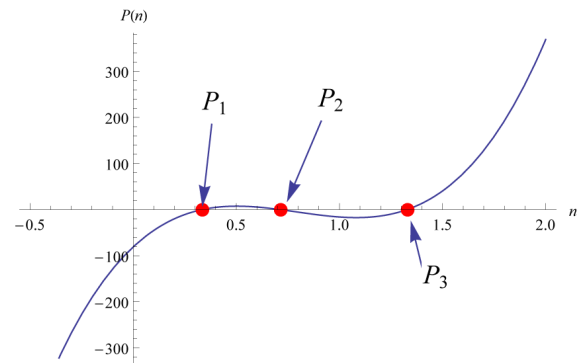


Fig. 1. (Color online)  $P(n)$  as a function of  $n$ .  $P_1, P_2$  and  $P_3$  denote the roots of  $P(n) = 0$ , respectively.

Fig. 2에서 파란점은 평형점  $\mathcal{B}$ 를 나타내며  $n < \frac{3}{4}$  이거나 또는  $n > 1$ 이면 양의 고유값과 음의 고유값을 각각 가지므로 안장점이 된다. Fig. 2에서 파란점은 모두 안장점임을 보여주고 있다. 반면  $\frac{3}{4} < n < 1$ 인 경우 고유값은 모두 음의 값을 가지므로 (0,1)은 안정적인 평형점이 된다.

평형점  $\mathcal{C}$ 는  $n < R_1 \equiv \frac{1}{16}(13 - \sqrt{73}), \frac{1}{2} < n < 1$ , 그리고  $R_2 \equiv \frac{1}{16}(13 + \sqrt{73}) < n$  영역에서 고유값은 모두 음

Table 2. Stability of the fixed points  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ , and  $\mathcal{C}$ .

Points	$n < R_1$	$R_1 < n < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < n < \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} < n < 1$	$1 < n < \frac{5}{4}$	$\frac{5}{4} < n < R_2$	$R_2 < n$
$\mathcal{A}$	unstable	unstable	unstable	unstable	saddle	unstable	unstable
$\mathcal{B}$	saddle	saddle	saddle	stable	saddle	saddle	saddle
$\mathcal{C}$	stable	saddle	stable	stable	unstable	saddle	stable

Table 3. Stability of the fixed point  $\mathcal{D}$ .

Points	$n < R_1$	$R_1 < n < P_1$	$P_1 < n < P_2$	$P_2 < n < \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} < n < 1$	$1 < n < P_3$	$P_3 < n < R_2$	$R_2 < n$
$\mathcal{D}$	saddle	stable	stable spiral	stable	saddle	stable spiral	stable	saddle

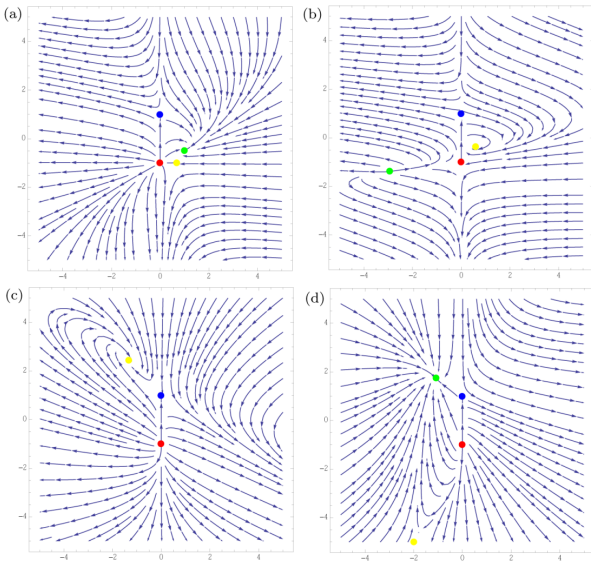


Fig. 2. (Color online) Phase portrait with (a)  $n = 1.5$ , (b) 1.13, (c) 0.55 and (d)  $n = -1.5$ . The red, blue, green and yellow circles represent the fixed points  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{D}$ , respectively. The green circle in 2(c) locates at outside of the figure box.

수가 되므로 안정적인 끌개가 된다. Fig. 2에서 초록점은 평형점  $\mathcal{C}$ 를 나타내며, Fig. 2(a)과 2(d)는 초록점이 안정적인 끌개가 됨을 보여주고 있다. Fig. 2(c)의 경우도 평형점  $\mathcal{C}$ 는 안정적인 끌개가 되지만 초록점은 그림 영역 밖에 놓여 있어서 표시는 되어 있지 않다.  $R_1 < n < \frac{1}{2}$  또는  $\frac{5}{4} < n < R_2$  영역에서는 고유값은 각각 양수와 음수의 값을 가지므로 안장점이 된다.

Fig. 2(b)는 초록점이 불안정한 점임을 나타내고 있는데  $1 < n < \frac{5}{4}$  영역에서는 고유값이 모두 양의 값을 가지므로 불안정한 평형점이 된다. Table 2에서 평형점  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ , 그리고  $\mathcal{C}$ 의 안정성에 관하여 정리를 하였다.

평형점  $\mathcal{D}$ 의 경우는 식 (24)과 (25)에서  $n$ 의 값은 물론 함수  $P(n)$ 에 따라서 안정성이 달라진다. 우선  $P(n)$ 의  $n$ 에 대한 모양을 Fig. 1에 그렸으며  $P(n) = 0$ 이 되는

$n$ 의 값을 각각  $P_1$ ,  $P_2$  그리고  $P_3$ 로 표시하였다.  $(n - 1)P(n) < 0$  이면 식 (24)과 (25)에서 제곱근이 허수가 되기 때문에 고유값들은 복소수가 된다. 이 경우 고유값의 실수부가 음수가 되면 나선형의 끌개 (stable spiral)이 되며 실수부가 양수가 되면 불안정한 점이 된다.  $P_1 \approx 0.33 < n < P_2 \approx 0.71$ 과  $1 < n < P_3 \approx 1.32$ 는 고유값  $\lambda_1$ 과  $\lambda_2$ 가 복소수가 되며  $n > 0$  이면 항상 실수부는 음수가 되므로 나선형의 안정점이 된다. Fig. 2에서 평형점  $\mathcal{D}$ 은 노란점으로 표시되었으며, Fig. 2(b)와 Fig. 2(c)는 복소수 고유값인 경우에 해당된다. 이 두 그림에서 노란점은 나선형 끌개임을 확인할 수 있다.  $n < 0$  이거나  $\frac{3}{4} < n < 1$  또는  $R_2 < n$  이면  $\lambda_1 < 0$  그리고  $\lambda_2 > 0$  이므로 안장점이다.  $0 < n < R_1$  인 경우는  $\lambda_1 > 0$ 이지만  $\lambda_2 < 0$ 이 되어 역시 안장점이 된다. Fig. 2(a)과 2(d)의 노란점은 안장점임을 확인할 수 있다. 평형점  $\mathcal{D}$ 의 안정성에 관하여 Table 3에 정리하였다.

Table 2와 Table 3의 평형점들이 가속팽창의 해를 줄 수 있는지 알아보려고 한다. (5)과 (6)을 다음과 같이 쓰면

$$3H^2F = \kappa^2\rho + \frac{1}{2}(RF - f) - 3H\dot{F} \equiv \kappa^2\rho_{eff}, \quad (27)$$

$$-2\dot{H}F = \kappa^2(\rho + p) + \ddot{F} - H\dot{F} \equiv \kappa^2(\rho_{eff} + p_{eff}), \quad (28)$$

유효 상태방정식 변수 (effective equation of state parameter)  $w_{eff}$ 는

$$w_{eff} = \frac{p_{eff}}{\rho_{eff}} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} \quad (29)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2n}{3}x_C, \quad (30)$$

로 주어진다. 여기서  $x_C$ 는  $x$ 의 고정점 값을 의미한다.

감속팽창 변수 (deceleration parameter)  $q$ 를 이용하면 (30)은

$$q = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2} = 1 - nx_C, \quad (31)$$

로 주어진다. 가속 팽창을 위해서는  $q < 0$ 이어야 하므로 평형점  $\mathcal{A}$ 와  $\mathcal{B}$ 는 가속 팽창의 해를 줄 수 없다. 평형점  $\mathcal{C}$ 의 경우는

$$n < \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \quad \text{또는} \quad \frac{1}{2} < n < 1 \quad \text{또는} \quad n > \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}), \quad (32)$$

를 만족하면 가속 팽창의 해를 줄 수 있다. (32)에서 주어진  $n$ 의 영역은 제한식 (18)과 만족하는 범위가 존재하지 않는다. 따라서 평형점  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  그리고  $\mathcal{C}$ 에서는 제한식 (18)을 만족하는 가속팽창의 해가 존재하지 않는다. 평형점  $\mathcal{D}$ 는  $q < 0$ 의 조건을 만족하기 위하여

$$n < 0 \quad \text{또는} \quad n > \frac{3}{2}, \quad (33)$$

를 만족하여야 한다. 하지만 (33) 역시 제한식 (18)을 만족하는  $n$ 의 범위가 존재하지 않는다. 따라서  $f(R) \propto R^n$ 으로 주어지는 변형된 중력에서는 제한식 (18)을 만족하는 평형점이 존재하지 않는다.

## V. 결론

본 연구에서는 아인슈타인의 일반상대성 이론에서 변형된  $f(R) \propto R^n$ 의 변형된 중력 이론을 고려하였으며, 핵합성 시기의 온도 진화식으로부터  $1 \geq n \geq \frac{4+\sqrt{6}}{5}$ 을 만족해야 함을 확인했다. 또한  $R^n$  중력 이론에서 동역학 자율계를 구성하였고, 야코비안 행렬의 고유값으로부터 동역학 자율계의 평형점들의 안정성을 점검하였다. 수치적으로 위성궤적을 그려봄으로써 평형점의 안정성을 확인하였다. 물질 우세기에 가속 팽창이 가능하기 위해서는  $w_{eff} < -\frac{1}{3}$ 이거나  $q < 0$ 이어야 한다. 평형점  $\mathcal{C}$ 는  $n < \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$  또는  $\frac{1}{2} < n < 1$  또는  $n > \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ 을 만족하면 가속팽창을 할 수 있다. 표 2에서 위 영역은 모두 끝개가 됨을 알 수 있다. 평형점  $\mathcal{D}$ 는  $n < 0$  또는  $n > \frac{3}{2}$ 를 만족하면 가속팽창의 해를 줄 수 있다. 평형점  $\mathcal{C}$ 와 달리 위의 영역은 안장점이다. 하지만 평형점  $\mathcal{C}$ 와  $\mathcal{D}$ 의 가속 팽창의 가능한  $n$ 의 영역은 핵합성 시기의 온도 진화식으로부터 구한  $n$ 의 범위와 일치하지 않는다.

앞으로  $f(R) \propto R^n$ 과 다른 형태의  $f(R)$  변형 중력 이론을 고려해 보고 핵합성 관측과 일치하면서 가속팽창을 설명할 수 있는 변형된 중력 이론을 찾아보는 것은 매우 흥미로운 주제가 될 것이다.

## 감사의 글

이 논문은 2015학년도 제주대학교 학술진흥연구비 지원사업에 의하여 연구되었습니다.

## REFERENCES

- [1] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop and P. Nugent *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [2] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti and A. Diercks *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [3] D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu and M. R. Nolte *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).
- [4] G. Hinshaw, D. Larson, E. Komatsu, D. N. Spergel and C. L. Bennett *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **208**, 19 (2013).
- [5] P. A. R. Ade, N. Aghanim, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud and M. Ashdown *et al.* [Planck Collaboration], *Astron. Astrophys.* **571**, A16 (2014).
- [6] P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown and J. Aumont *et al.* [Planck Collaboration], arXiv:1502.01589 [astro-ph.CO].
- [7] R. R. Caldwell and M. Kamionkowski, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **59**, 397 (2009).
- [8] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006).
- [9] A. Joyce, B. Jain, J. Khoury and M. Trodden, *Phys. Rept.* **568**, 1 (2015).
- [10] A. D. Dolgov and M. Kawasaki, *Phys. Lett. B* **573**, 1 (2003).
- [11] L. Amendola, D. Polarski and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 131302 (2007).
- [12] S. Carloni, P. K. S. Dunsby, S. Capozziello and A. Troisi, *Class. Quant. Grav.* **22**, 4839 (2005).
- [13] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **75**, 083504 (2007).
- [14] G. Lambiase and G. Scarpetta, *Phys. Rev. D* **74**, 087504 (2006).
- [15] J. U. Kang and G. Panotopoulos, *Phys. Lett. B* **677**, 6 (2009).
- [16] M. Kusakabe, S. Koh, K. S. Kim and M. K. Cheoun, *Phys. Rev. D* **91**, 104023 (2015).
- [17] C. G. Boehmer and N. Chan, arXiv:1409.5585 [gr-qc].