New Physics: Sae Mulli,
Vol. 72, No. 2, February 2022, pp. 142∼145
http://dx.doi.org/10.3938/NPSM.72.142

A Derivation of the Relativistic Energy-momentum Relations by Introducing a Thought Experiment of Head-on Collision of two Identical Particles

Won Sik L'Yi*
Department of Physics, Chungbuk National University, Cheongju 28644, Korea

(Received 6 October 2021 : revised 8 December 2021 : accepted 8 December 2021)

The relativistic energy-momentum relations $E = \gamma mc^2$ and $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$, introduced by Einstein, are cornerstones of not only modern physics but also modern science and technology. However, the reasoning behind the derivation of these famous forms is challenging to understand intuitively. In this paper, we introduce a thought experiment where two identical particles with the same speed but opposite directions make a perfect inelastic head-on collision producing total rest for these particles. By applying Lorentz transformation rules to this experiment, we proved that the relations introduced by Einstein are necessary and sufficient to conserve momenta in any inertial frame.

Keywords: Relativistic momentum conservation, Thought experiment, Lorentz transformation

동일한 입자의 완전비탄성 충돌을 이용한 상대론적인 에너지-운동량 관계식 유도

이원식*
충북대학교 자연과학대학 물리학과, 청주 28644, 대한민국

(2021년 10월 06일 받음, 2021년 12월 08일 수정본 받음, 2021년 12월 08일 게재 확정)

현대 물리학뿐만 아니라 현대 과학 기술의 근간이 되는 아인슈타인의 상대론적인 에너지 운동량 관계식인 $E = \gamma mc^2$ 와 $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ 는 그 중요성에 비해서 직관적으로 이해하기는 쉽지 않다. 본 논문에서는 대칭성이라는 관점에서 운동량이 분명히 보존되는 충돌 현상, 즉 같은 속력을 가진 동일한 두 입자가 서로 반대 방향으로 날아와서 정면 충돌을 한 후 한 덩어리가 되어서 정지하는 사고 실험에서, 이 충돌 현상이 운동량 중심계 뿐만 아니라 일반적인 좌표계에서도 충돌 전후의 운동량이 보존 되려면 아인슈타인이 제시한 에너지-운동량 관계식이 만족되어야 한다는 것이 필요하고도 충분한 조건임을 증명하였다.

Keywords: 상대론적 운동량 보존, 사고실험, 로렌츠변환

I. 서 론

질량이 m 인 입자가 움직여가는 세계선을 입자의 고유시간 τ 로 표시하여 $x^\mu(\tau)$ 라 둘 때, 상대론적인 에너지-운동량 관계식인 $E = \gamma mc^2$ 와 $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ 는 보통 사차원벡터로

*E-mail: wslyi@chungbuk.ac.kr

$p^\mu = m\,dx^\mu/d\tau$ 와 같이 표현 되어진다. 이것은 뉴턴 역학에서의 운동량 관계식 $\mathbf{p} = m\,d\mathbf{x}/dt$ 의 자연스런 일반화이다. [1] 뉴턴 역학에서 시간은 스칼라이므로 고전역학적 운동량은 $\mathbf{x}$와 같이 벡터가 된다. 그리고 뉴턴역학의 이러한 운동량의 정의에서부터, 에너지는 일-에너지 정리, 즉 입자에 해 준 일은 운동에너지의 증가로 나타난다는 사실을 적용하여 상대론적인 운동량을 사용하여 얻을 수 있는 힘에서부터 물체가 얻게되는 에너지를 구하게 되는데, 그 결과 에너지의 상대론적인 꼴은 $E = \gamma mc^2$ 라는 것을 얻게 된다.

그러나 상대론적인 에너지-운동량이 왜 필히 $p^\mu = m\,dx^\mu/d\tau$ 와 같은 꼴이어야 하는가에 대해서는 생각해볼 여지가 많다. 즉, 외력이 없는 경우에는 운동량은 보존된다는 것이 고전역학에서부터 이해된 상식적인 내용인데, 상대론적인 에너지-운동량도 이러한 조건을 만족하는가 하는 것에 대해서는 의문이 생긴다. 물론 이러한 의문을 해결하기 위해서 고전장론의 작용원리(action principle)와 네더정리(Noether theorem)을 사용하여서 시공간의 균일한 이동에 대한 작용량의 불변성에서부터 에너지-운동량의 꼴을 유도한다. [2] 그렇지만 운동량과 같은 간단한 물리량이 고전장론에 네더정리를 적용하는 추상적인 방식으로 유도하는 것은 물리량의 직관적 이해에 도움을 주지 못한다.

본 논문에서는 상대론적인 에너지와 운동량의 꼴을 유도하는데 있어서 운동량이 직관적으로 보존될 수 밖에 없는 사고실험을 구상하고, 여기에 상대론의 근간이 되는 로렌츠 변환을 적용하여 운동량과 에너지의 상대론적인 꼴을 구하고자 한다. 즉, 같은 속력을 가진 동일한 두 입자가 서로 반대 방향으로 날아와서 정면 충돌을 한 후 한 덩어리가 되어서 정지되는 사고실험을 수행한다. 이러한 충돌의 모습을 관찰하는 계는 운동량의 합이 없는 운동량중심계이다. 그런데 로렌츠변환은 복잡한 꼴을 가지기 때문에 이 충돌을 다른 좌표계에서 관측하게 될 경우, 운동량의 수학적인 꼴이 무엇인가에 따라서 그 좌표계에서는 운동량이 보존되기도 하고 그렇지 않을 수도 있다. 그러나 운동량의 보존은 물리적인 사실이므로 좌표계라는 관측계와 무관하게 보존되어야 하고, 그러므로 이러한 논리를 적용하여서 보존되어야 하는 운동량의 수학적인 꼴을 결정할 수 있다. 결론적으로 요약하면, 제안한 사고실험을 통해서 충돌 전후의 운동량이 보존 되려면 아인슈타인이 제시한 에너지-운동량 관계식이 만족되어야 한다는 것이 필요하고도 충분한 조건임을 증명하고자 한다.

II. 대칭성을 이용한 상대론적인 에너지-운동량 관계식

상대론적인 운동량의 꼴을 구하는 것에 대해서 어떠한 직관을 얻기 위해서, 우선 고전역학에서 정의된 운동량에 대해서 다시 한번 살펴보자. 고전역학에서 질량이 m 인 물체가 속도 $\mathbf{v}$로 움직여 갈 경우 운동량은 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$로 정의되는데, 이러한 정의가 유용한 것은 한 관성계에서 운동량이 보존이 되면 다른 관성계에서도 운동량이 보존이 되기 때문이다.

예를 들어 정지 질량이 m으로 똑 같은 동일한 두 물체가 같은 속력이지만 반대 방향으로 날아와서 정면충돌을 한 후 한 덩어리가 되어서 정지한 경우를 생각해 보자. 고전역학에서 두 물체의 충돌 전 운동량은 각각 $\mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}$ 와 $\mathbf{p}_2 = -m\mathbf{v}$ 같이 표현이 되는데, 두 운동량의 합은 0이다. 한편 충돌 후에는 두 물체가 정지해 있으므로 전체 운동량은 0이고, 그러므로 이 충돌에서 운동량은 보존이 된다.

한편 이 충돌에 대한 사고실험을 속도 $\mathbf{v}$로 움직여가는 관성계에서 살펴본다고 해 보자. 고전역학적인 속도 변환식

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v} \tag{1}$$

을 쓰면 충돌전 두 물체의 운동량은 $\mathbf{p}'_1 = m(\mathbf{v} - \mathbf{v})$ 혹은 $\mathbf{p}'_2 = m(-\mathbf{v} - \mathbf{v})$ 이므로 충돌전의 전체 운동량은 $\mathbf{p}'_{total} = -2m\mathbf{v}$가 된다. 한편 움직이는 관성계에서 본 두 물체의 충돌 후 속도는 $-\mathbf{v}$이므로 두 물체의 충돌후 운동량은 $2m(-\mathbf{v})$이다. 그로므로 움직이는 관성계에서 보았을 때 충돌 전후의 운동량은 보존이 된다.

이러한 사고실험을 상대론적으로 검증하기 위해서, 위에서 도입한 사고 실험에 특수상대론적인 속도 변환을 적용하여서 충돌 전후에 운동량이 보존되게 해 보자. 이를 위해 정지 질량이 m 인 물체가 속도 $\mathbf{v}$로 움직일 경우, 상대론적인 운동량의 꼴은

$$\mathbf{p} = \Gamma(v)\,m\mathbf{v} \tag{2}$$

이라고 하자. 여기서 v는 벡터 $\mathbf{v}$의 크기를 말한다. 그리고 위에서 도입한 동일한 입자의 정면충돌에서, 속도 $\mathbf{v}$로 움직이던 물체가 충돌 후 정지할 경우 질량이

$$m \to \Omega(v)\,m \tag{3}$$

이 된다고 가정하자. 물론 고전역학적 결과는 속도가 빛속도에 비해서 무시될 경우 존중되어야 하기 때문에 $\Gamma(0) = \Omega(0) = 1$ 이라는 추가 조건을 요구한다. 이렇게 상대론적인 운동량의 꼴을 가정하면, 우리의 사고실험에서 동일한

물체의 정면충돌을 관측하는 운동량중심계에서는 물체의 전체 운동량은 0으로서 보존된다는 것을 쉽게 확인 할 수 있다.

이제 (2)과 (3)를 가정하면 운동량중심계에서는 운동량이 보존되는 것을 확인했으므로, 이 실험을 일반적인 관성계에서 관측하여도 운동량이 보존되려면 (2)과 (3)의 $\Gamma(v)$와 $\Omega(v)$는 어떤 꼴이 되어야 하는지 살펴보자. 이를 위해 실험실계에서 보았을 때 운동량중심계는 속도 $\mathbf{v} = V\hat{\mathbf{x}}$ 로 움직인다고 하자. 그리고 실험실계에서 관측한 물리량 A를 운동량중심계에서 관측한 하면 그 값이 A'이라고 하자.[2] 이때 빛속도를 1이라 두면 두 관성계 사이의 시간 지연요소는 $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2}$ 이다.

운동량중심계에서 정면충돌하는 두 물체가 xy 평면에 놓여있다고 하면, 한 물체는 아래에서 위로 올라가고, 다른 물체는 위에서 아래로 내려간다. 이 둘을 구분하기 위해서 아래에서 위로 올라가는 물체는 아래첨자 U를 사용하여 나타내기로 하고, 위에서 아래로 내려오는 물체는 아래첨자 D를 사용해서 나타내기로 하자. 다른 말로 표현하면, 물체 속도의 y 성분이 양의 값을 가지는 것은 아래첨자 U로 나타내고, 물체 속도의 y 성분이 음의 값을 나타내는 것은 아래첨자 D로 표현한다. 즉 실험실계에서 본 두 물체의 속력은 v_U와 v_D 로 표현하겠다는 것이다.

이제 운동량중심계에 대해서 $-V\hat{\mathbf{x}}$ 로 움직이는 실험실계에서도 운동량이 보존된다고 해 보자. 상대론적인 속도 더하기 공식

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V} \tag{4}$$

$$v_y = \frac{1}{\gamma}\frac{v'_y}{1 + v'_x V} \tag{5}$$

을 쓰면 운동량이 실험실계에서 보존될 조건은

$$\Gamma(v_U)m\frac{v'_x + V}{1 + v'_x V} + \Gamma(v_D)m\frac{-v'_x + V}{1 - v'_x V} = \Gamma(V)2\Omega(v')mV \tag{6}$$

$$\Gamma(v_U)m\frac{1}{\gamma}\frac{v'_y}{1 + v'_x V} + \Gamma(v_D)m\frac{1}{\gamma}\frac{-v'_y}{1 - v'_x V} = 0 \tag{7}$$

와 같은데, 여기서 v'_x는 운동량중심계에서 본 물체 U의 속도의 x 성분이다. 그러면 (7)에서부터

$$\Gamma(v_U)\frac{1}{1 + v'_x V} = \Gamma(v_D)\frac{1}{1 - v'_x V} \tag{8}$$

을 얻는다. 그리고 이 사실을 (6)에 적용하면 결국

$$\Gamma(v_U)\frac{1}{1 + v'_x V} = \Gamma(v_D)\frac{1}{1 - v'_x V} = \Gamma(V)\Omega(v') \tag{9}$$

도 얻게 된다.

실험실계가 다름 아닌 운동량중심계인 경우에는

$$V = 0 \tag{10}$$

$$v_D = v_U = v' \tag{11}$$

이므로 (9)에서 $\Gamma(0) = 1$를 적용하면 다음과 같은

$$\Gamma(v) = \Omega(v) \tag{12}$$

함수 관계를 얻는다. 이를 다시 (9)에 적용하면

$$\Gamma(v_U)\frac{1}{1 + v'_x V} = \Gamma(V)\Gamma(v') \tag{13}$$

이 된다.

이제 실험실계 중에서 물체 U가 정지한 좌표계, 즉 $v_U = 0$ 인 경우를 생각해 보자. 이것은 운동량중심계에서 본 물체 U의 속도를 실험실계가 따라잡고 간다는 것이다. 다시 말해서, 운동량중심계에서 본 실험실계의 속도 $\mathbf{v}_{LM}$ 는 운동량중심계에서 본 물체 U의 속도 $v'_x\hat{\mathbf{x}}$와 같다. 한편 $\mathbf{v} = V\hat{\mathbf{x}}$는 실험실계에 대한 운동량중심계의 속도이고, 이것은 운동량중심계에 대한 실험실계의 속도 $\mathbf{v}_{LM}$와 크기는 같고 방향은 반대이므로

$$\mathbf{v} = -\mathbf{v}_{LM} = -v'_x\hat{\mathbf{x}} \tag{14}$$

혹은 $V = -v'_x$, $v'_y = 0$ 이다. 이 사실을 (13)에 적용하고 (12)에 $\Gamma(v_U = 0) = 1$을 사용하면 $1/(1-V^2) = \Gamma(V)^2$, 혹은

$$\Gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} = \Omega(V) \tag{15}$$

을 얻게 된다.

그러므로 위의 사실을 (2)에 적용하면 상대론적인 운동량의 꼴은 필히

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \tag{16}$$

이어야 함을 알 수 있다. 뿐만 아니라 정지 질량이 m인 물체가 정면 충돌하여 정지하게 될 경우 물체의 질량은

$$m \to \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots \tag{17}$$

로 변하는데, 이것은 잘 알려져 있는바와 같이 물체의 운동에너지가 질량에너지 형태로 변환되기 때문에 발생하는 질

[2] 지금의 사고실험을 특수상대론에서 사용하는 보통의 표기법과 비교하면, 실험실계가 기본적인 관성계이고 운동량중심계는 실험실계에 대해서 속도 $V\hat{\mathbf{x}}$ 로 움직이는 계이다.

량의 증가를 나타낸다. 이런 의미에서 상대론적인 관점에서 보면, 모든 충돌에서 에너지의 형태는 변할지라도 그 값은 보존된다는 것을 알 수 있다. 이것은 물론 양자장론에서 Noether의 정리를 통해 잘 설명되어진다. [2]

이제 위에서 얻은 운동량 보존의 필요조건, 즉 (15)을 유도할 때 한 입자의 속력이 0으로 관측되는 어느 특별한 실험실계를 상정했었는데, 이 결과는 충분조건, 즉 임의의 실험실계에서도 적용될 수 있음을 살펴보자. 이를 위해서 물체의 고유시간의 흐름 $d\tau = dt/\gamma$를 쓰면 (16)와 (17)는 다음과 같이 정의된 상대론적인 에너지-운동량 벡터

$$p^\mu = \gamma m \frac{dx^\mu}{dt} = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{18}$$

로 표현되는데, 이를 사용하여 증명하고자 한다.

우선, Lorentz 변환은 뉴턴역학적 삼차원 관점에서는 좌표의 원점이 움직이는 변환이지만, 사차원 시공간 연속체라는 입장에서 보면 시공간의 회전이라는 선형변환 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 이라는 사실을 염두에 두자. 우리에게 중요한 것은, 선형식은 선형변환에 의해서 그 꼴이 바뀌지 않는다는 것이다. 그런데 (18)로 표현된 에너지-운동량은 시공간의 변위로 표현한 벡터식이다. 그러므로 다음을 알수 있다. 즉, 관성기준계들은 선형변환으로 연결이 되어 있으므로 특수한 실험실계에서 운동량의 합이 보존되면 일반적인 실험실계에서도 보존된다.

결국 (16)로 표현된 운동량을 사용하면, 똑같은 두 개의 물체가 비탄성 정면충돌을 하여 한 덩어리가 되어 정지하는 물리 현상에서, 전체 운동량은 어떠한 관성 좌표계에서도 보존이 되고, 이와 아울러

$$E = \gamma m \tag{19}$$

으로 표현된 에너지도 보존된다는 것을 알 수 있다. 그러므로 상대론적인 운동량과 에너지를 나타내는 (16)와 (19)는 고전역학에서 상대론적인 효과를 적용시키면 그렇게 될 수 밖에 없는 꼴이라는 것을 알 수 있다.

III. 결 론

상대론적인 동역학은 고전 동역학을 바탕으로 한 것 위에 Lorentz 변환에 대한 공변성을 요구하여 얻어지는 것이다. 그러므로 상대론적인 에너지와 운동량의 꼴은 고전역학에서 익숙히 알고 있던 에너지와 운동량 꼴에서부터 출발하여 직관적이면서도 추상적이지 않는 방법으로 유도될 수 있다면 상대론적 동역학을 이해 하는데 있어서 많은 직관을 줄 것이다. 본 논문에서는 이러한 관점에서 출발하여 상대론적인 에너지$E = \gamma mc^2$ 와 운동량 $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ 을 유도하였다. 이를 위해 운동량이 분명하게 보존되는 충돌 현상, 즉 동일한 두 개의 물체가 서로 반대 방향으로 같은 속력으로 정면 충돌한 후 한 덩어리가 되는 사고실험을 상정하였다. 이 충돌에서 전체 운동량은 운동량중심계에서는 충돌 전이나 후에서 모두 0으로서 보존 되는데, 이를 다른 일반적인 관성기준계에서 관측할 경우, 속도에 대한 Lorentz 변환의 복잡한 꼴 때문에 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$는 보존이 되지 않는다. 그래서 운동량의 수정된 꼴로서 (2)를 가정하고, 속도 v움직이던 물체가 충돌하여 정지할 경우 질량이 (3)와 같이 된다고 한 후 어떠한 관성 기준계에서 관측하여도 운동량이 보존되려면 운동량과 에너지는 상대론적으로 잘 알려져 있는 꼴이 될 수 밖에 없음을 보였다. 이러한 논리로 상대론적인 에너지와 운동량의 꼴을 유도하는 것은 계산적인 면에서는 다소 복잡해 보여도 개념상으로는 자연스럽기 때문에 상대론적인 동역학을 이해하는데 도움을 주리라 생각된다.

REFERENCES

[1] M. Ludvigsen, *General Relativity, A Geometric Approach* Cambridge Univ, Cambridge, 2000; R. M. Wald, *General Relativity* Univ. Chicago, Chicago, 1984; S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* Wiley, New York 1972

[2] J. D. Bjorken and S. D. Drell *Relativistic Quantum Field Theory* McGraw-Hill, New York 1964; C. Itzykson and Z. Jean-Bernard, *Quantum Field Theory* McGraw-Hill, New York, 1980; M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* Addison Wesley, New York, 1995;