

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



Dinâmica Estocástica e Cosmologia: Alguns Resultados Analíticos

Autor: João Maria da Silva

Orientador: Prof. Dr. José Ademir Sales de Lima

Tese de doutorado apresentada ao Departamento de Física Teórica e Experimental da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial à obtenção do título de **DOUTOR** em **FÍSICA**.

Natal, Fevereiro de 2008

"O homem, como qualquer animal, é por natureza indolente. Se nada o estimula, mal se dedica a pensar e se comporta guiado apenas pelo hábito, como um autômato"
(Albert Einstein).

Aos meus pais, José Graciano e Iracema

Agradecimentos

- Ao supremo Deus criador de todo o Universo, por ter me concedido o dom do pensar, essa é a maior riqueza da existência humana.
- Ao Professor José Ademir Sales de Lima, pelo exemplo, pela orientação, pela dedicação e, principalmente, pelo amigo que tem sido durante todo esse tempo. Trabalhar com o professor Ademir foi um privilégio.
- Ao Professor Janilo Santos, por sua co-orientação, pelo estímulo e por nossas discussões.
- Ao Professor Raimundo Silva, por nossas discussões e colaboração no artigo sobre a estatística de Kaniadakis.
- À minha mãe Iracema e ao meu pai José Graciano, por terem me incentivado e me fornecido o suporte emocional e moral. Eles são meus verdadeiros e eternos ídolos.
- Aos meus irmãos: Amimatéia, João Paulo, Leonardo, Joelma, Sônia, Sandra, Simone, Nadeje, Liege e Maria Aparecida, pelo apoio que eles têm me dado sempre.
- Ao Sr. Waldemar de Aro e família, pelo exemplo de vida, pela motivação, pelo apoio e pela inestimável amizade.

- À senhora D. Vanete Carmem mãe do amigo Lúcio Marassi Júnior, pela amizade e apoio de sempre. Sua sabedoria é digna de admiração e com ela muito aprendi. Da mesma forma, meus sinceros agradecimentos ao Sr. Lúcio Marassi de Almeida, pela amizade de longa data e pelo estímulo de sempre.
- Aos meus amigos João Vital, Lúcio Marassi, Rose Clívia, Hidalyn Theodore, Carlos Heitor, Pedro Carlos, Francisco Carlos, Edcarlos, Armando Araújo, Luiz Pinheiro, Daniel Brito, Gustavo e outros mais, que de forma direta ou indireta, contribuíram de maneira significativa para a conclusão deste trabalho.
- Ao amigo Jahyr Philipe, professor do departamento de direito da UFRN, pela amizade, pelos cafezinhos acompanhados de boas conversas e pelos jogos de futebol nos finais de tardes de terças e sextas.
- Aos funcionários Ricardo, Dona Benícia, Silvestre, Roberto, Djalmir, George, Celina, Jacira, Cléa, Jane e Isabel pela amizade e por estarem sempre presente.
- Aos professores: Janilo Santos, Nilza Pires, Arthur Carriço, Nilson Sena, José Wilson, Rui Tertuliano, Jafelice, Bonelli, Gilvan Borba, Walter Eugênio, Francisco Alexandre e Fernando Nobre. Meus sinceros agradecimentos, em especial, aos professores Alzamir Costa e José Ferreira Neto, pela amizade, competência e pelos momentos de descontração com suas histórias engraçadas.
- A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta tese investigamos alguns problemas envolvendo duas áreas complementares, a saber: dinâmica estocástica e cosmologia. Na primeira linha de desenvolvimento, estendemos o formalismo de forças flutuantes desenvolvido por Langevin para uma classe de sistemas com amortecimento variável e, em seguida, discutimos algumas aplicações no domínio cosmológico. Nesse contexto, supondo que o efeito da radiação (banho térmico) é semelhante ao de uma perturbação estocástica (forças flutuantes), discutimos a evolução do campo escalar em cenários da nova inflação e no chamado efeito Meszaros.

Inicialmente, utilizando um ruído colorido na equação de Langevin, mostramos que as flutuações do campo “inflaton” experimentam um regime de difusão anômala. Considerando que a componente de radiação atua como uma possível correção estocástica sobre o efeito Meszaros, discutimos a influência do ruído sobre a evolução do contraste de densidade da matéria.

Seguindo outra abordagem estocástica, estudamos os modelos de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) como um fluido quântico na chamada formulação de Madelung. Nessa análise, as equações de FRW para os modelos fechados ($k = 1$) se reduzem a forma de um oscilador harmônico simples e as soluções da equação de Schrödinger associada bem como sua densidade de probabilidade são explicitamente obtidas. Mostramos também que a principal influência física do processo estocástico é evitar o colapso do modelo e, consequentemente, a singularidade cósmica.

Investigamos ainda dois problemas relacionados com modelos de energia escura (quintessência e gás de Chaplygin). Para o primeiro candidato, discutimos um método analítico que permite calcular o potencial de campo escalar numa mistura de um fluido perfeito e quintessência. Supondo que a quintessência é descrita por uma matéria-X, diversas quantidades de interesse cosmológico são determinadas. Para o gás de Chaplygin (versões de quintessência e quartessência), o redshift de transição é utilizado como um discriminador para se obter limites sobre os parâmetros cosmológicos relevantes. Os resultados obtidos estão de bom acordo com alguns estudos recentes utilizando observações de supernovas e dados da estrutura de grande escala do universo.

Abstract

In this thesis we investigate some problems involving two complementary areas, namely: Stochastic Dynamics and Cosmology. In the first line of development, we extend the formalism of fluctuating forces as developed by Langevin for a class of systems with variable damping, and, next, we discuss some applications to the cosmological domain. In this context, assuming that the effect of the radiation (thermal bath) is similar to a stochastic perturbation (fluctuating forces) we discuss the evolution of the scalar field in the new inflation, and in the so-called Meszaros effect.

Initially, by using a colored noise in the Langevin equation, we show that the fluctuations of the “inflaton” field undergoes an anomalous diffusion regime. By considering that the radiative component acts like a possible stochastic correction on the Meszaros effect, we discuss the influence of the noise on the evolution of the density contrast of matter.

Following a different stochastic approach, we study the Friedmann-Robertson-Walker (FRW) models as a quantum fluid in the so-called Madelung formulation. In such analysis, the FRW equations for closed models ($k = 1$) reduce to the form of a simple harmonic oscillator, and the solutions of the associated Schrödinger type equation and the probability density are explicitly computed. We also show that the main physical influence of the stochastic process is to avoid the collapse of the model, and, consequently, the cosmic singularity.

We also investigate two problems closely related to dark energy models

(quintessence and the Chaplygin gas). For the first candidate, we discuss an analytical method that permits to calculate the scalar field potential for a mixture of a perfect fluid and quintessence. By assuming that the quintessence is described by a X-matter component several quantities of cosmological interest are determined. For the Chaplygin gas (quintessence and quartessence versions), the transition redshift is used as a descriminator for obtaining limits on the relevant cosmological parameters. The results obtained here are in good agreement with recent studies based on observations of supernovas and data from the large scale structure of the Universe.

Sumário

1 Cosmologia Moderna: Aceleração do Universo e Energia Escura	8
1.1 Introdução	8
1.2 Modelos Cosmológicos do Tipo FRW	9
1.3 Acerelação em altos redshift's: Inflação	13
1.4 Aceleração em Baixos Redshifts: Energia Escura	15
1.4.1 Constante Cosmológica	16
1.4.2 Campo Escalar	18
1.4.3 Gás de Chapligyn	19
1.4.4 matéria- X	20
2 Movimento Browniano: Algumas Abordagens	26
2.1 Introdução	26
2.2 MB e Equação de Difusão: O Tratamento de Einstein . . .	29
2.3 MB e Forças Flutuantes: A Visão de Langevin	38
2.4 A Equação de Fokker-Planck	42
2.5 Caminhadas Aleatórias: O tratamento de M. Kac	44
2.6 A Equação de Difusão Generalizada	49
2.6.1 Alumas Soluções Numéricas	52
3 Movimento Browniano: Efeitos da Viscosidade Variável	54
3.1 Introdução	54
3.2 Formalismo de Langevin para Viscosidade Variável	55

3.2.1	Derivação da Equação de Movimento	57
3.2.2	Obtenção da Solução Geral	57
3.2.3	Viscosidade variável: Formalismo de Langevin	64
3.3	Ruído Colorido: O Caso Geral	67
4	Descrição Estocástica do Campo Inflaton	71
4.1	Introdução	71
4.2	Modelos de Inflação Morna	73
4.3	Campo Inflaton: Formalismo de Langevin	75
5	Influência de Um Termo Estocástico Sobre o Efeito Meszaros	80
5.1	Introdução	80
5.2	Teoria de Perturbação e a Evolução do Contraste de Densidade	81
5.3	Efeito Meszaros: O Tratamento Analítico	86
5.4	Áxions como WIMPs	88
5.5	A Influência do Termo Estocástico	89
5.5.1	O Efeito do Ruído Colorido	91
6	Formulação Estocástica dos Modelos Friedmann	93
6.1	Introdução	93
6.2	A Dinâmica do Universo: Um Formalismo Determinístico .	95
6.3	O Fluido de Madelung	99
6.4	Modelos de FRW na formulação de Madelung	101
7	Potencial Escalar e Cenários de Quintessência	105
7.1	Introdução	105
7.2	As Equações Básicas	107
7.3	Potencial do Campo Escalar e Matéria- X	109
7.3.1	Solução Geral para o Caso Plano ($k = 0$)	111
7.3.2	Solução para $k \neq 0$	114

7.4	Cálculo do Redshift de Transição	116
8	Aceleração cósmica em modelos de gás Chapligyn simplificado	118
8.1	Introdução	118
8.2	Equações Básicas do Modelo	120
8.2.1	Quintessência	122
8.2.2	Quartessência	126
8.2.3	Lei de Evolução da Temperatura	126
9	Conclusões e Perspectivas	131
A	Campo de Força Conservativa na Estatística de Kaniadakis	135
B	Movimento Browniano de Sistemas Interagindo Gravita-cionalmente	141

Listas de Figuras

2.1	Descrição bidimensional do movimento browniano publicado por J. Perrin em 1914	28
2.2	As curvas mostram a evolução temporal da distribuição $\eta(x, t)$ no regime difusivo unidimensional. Para tempos próximos de zero a curva sólida representa uma função delta centrada em torno da origem $x = 0$. Com o passar do tempo a distribuição evolui como uma gaussiana de largura variável. Como discutido no texto, a descrição de Einstein é válida para tempos longos.	34
2.3	As curvas mostram a solução exata da equação de difusão parabólica para valores específicos do tempo	52
2.4	As curvas mostram uma comparação entre as soluções da equação de difusão parabólica e hiperbólica	53
3.1	Evolução do coeficiente de fricção $\beta_q(t)$ para valores do parâmetro livre $q < 1$. Note que para o caso $q = 1$, teremos uma fricção constante. Entretanto, a taxa de decrescimento do coeficiente $\beta_q(t)$ aumenta continuamente com o tempo para valores de q cada vez menores.	59

3.2	Evolução do coeficiente de fricção $\beta_q(t)$ para valores do parâmetro livre $q > 1$. Inicialmente, o coeficiente $\beta_q(t)$ aumenta e se aproxima de um valor infinito no $t = [\beta(q - 1)]^{-1}$, quando então muda abruptamente de sinal eventualmente indo a zero para grandes valores do tempo.	60
3.3	Comportamento característico da amplitude dos q -osciladores para o valor $q = 0.1$. As curvas decaindo exponencialmente são representadas para um particular de $\beta = 0.1$, que descreve o oscilador subamortecido.	61
3.4	Comportamento característico da amplitude dos q -osciladores para o caso $\beta = 0.1$ e um valor do parâmetro livre $q = 0.5$	62
3.5	Amplitude dos q -osciladores para $\beta = 0.1$ e um valor particular do parâmetro livre $q = 0.99$	63
8.1	Parâmetro de desaceleração versus diagrama de redshift. . .	123
8.2	a) Plano Ω_{dm} - z_t para valores do redshift de transição no intervalo $0,33 \leq z_t \leq 0,59$, de acordo com Ries <i>et al.</i> [79]. As curvas correspondem a vários valores selecionados para α . b) Plano α - z_t com a região estimada do redshift de transição z_t para alguns valores escolhidos de Ω_{dm} . Note que apenas altos valores do parâmetro α são permitidos.	124
8.3	Plano α - Ω_{dm} com $z_t = 0,46 \pm 0,13$ conforme medidas de SN Ia. Vemos que valores de $\alpha \geq 0,7$ são compatíveis com a região observada.	125
8.4	Parâmetro de desaceleração versus diagrama redshift para modelos de quartessência. As curvas correspondem a vários valores do parâmetro α com Ω_b fixo em 0,044.	127

8.5	Plano α - z_t com valor estimado do redshift de transição. Neste gráfico, a linha sólida restringe os valores permitidos do parâmetro α , além do mais, delimita a existência de um limite superior/inferior deste parâmetro.	128
A.1	A figura acima representa a função distribuição (A.20) para os valores $\kappa = 0, 1$, $\kappa = 0, 5$, $\kappa = 0, 7$ e $\kappa = 0, 9$	140

Notação e Algumas Definições

Constante de Boltzmann: k_B

Número de Avogadro: N_a

Coeficiente de difusão: D

Coeficiente de viscosidade: β

Definição da q -exponencial: $e_q(x) = [1 + (1 - q)x]^{1/1-q}$

Definição da κ -exponencial: $e_\kappa(x) = [\sqrt{1 + \kappa^2 x^2} + \kappa x]^{1/\kappa}$

Fator de escala cósmica: $R(t)$

Densidade de energia atual do universo: ρ_0

Parâmetro quantificando o conteúdo atual de matéria total do universo:
 Ω_0

Parâmetro de Hubble: $H(t) = \dot{R}/R$

Parâmetro da equação de estado de um fluido perfeito: γ, ω

Constante de Planck: \hbar

Função de Bessel de primeira espécie: $J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$

Função de Bessel de segunda espécie: $Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$

Campo Inflaton (ou campo escalar): ϕ

Potencial do campo escalar: $V(\phi)$

Algumas Abreviações

HST = Hubble Space Telescope

FRW = Friedmann Robertson Walker

WMAP = Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

SN Ia = Supernovas tipo Ia

RCF = Radiação Cósmica de Fundo

TRG = Teoria da Relatividade Geral

HSS = High-z Supernova Search

SDSS = Sloan Digital Sky Survey

SCP = Supernova Cosmology Project

SNAP = Supernova Accelerating Probe

SNLS = Supernovae Legacy Survey

BAO = Sigla inglesa para designar as *Oscilações acústicas nos bárions*

LSS = Large Scale Structure (estruturas em grandes escalas)

CDM = Cold Dark Matter (modelos de matéria escura fria)

Λ CDM = Lambda Cold Dark Matter (modelos de matéria escura fria + constante cosmológica)

SCDM = Standard Cold Dark Matter (sigla inglesa para designar o *modelo padrão*)

WIMPs = Weakly Interacting Massive Particles (partículas massivas que interagem fracamente)

Introdução

Como é amplamente conhecido, a cosmologia é a parte da ciência que estuda a origem, a evolução e a estrutura do universo como um todo, tendo suas bases teóricas apoiadas fortemente na Teoria da Relatividade Geral (TRG). Desde suas origens, a cosmologia tem como objetivo principal construir modelos de universo que se adaptem fundamentalmente às observações astronômicas.

Atualmente, os avanços tecnológicos das ciências espaciais, em particular os grandes projetos de catalogação de supernovas Ia em altos *redshifts* (z), permitiram a entrada da cosmologia num período novo e promissor considerado por todos como a era da precisão astronômica [1, 2].

Os esforços direcionados a este campo do conhecimento contam com a participação de grandes grupos de pesquisa, empenhados em projetos tais como o *Supernova Cosmology Project* (SCP) [3], *High-z Supernova Search* (HSS) [4], *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) [5], além dos grandes satélites como o WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*), SNAP (*Supernova Accelerating Probe*) e o *PLANCK* que será lançado num futuro bem próximo. Em particular, as medidas das anisotropias da radiação cósmica de fundo obtidas recentemente pelo satélite WMAP, tem confirmado importantes aspectos do modelo cosmológico padrão [6, 7, 8]. Tais medidas têm revelado, de maneira cada vez mais convincente, que o universo é aproximadamente plano, o que está em acordo com as previsões do paradigma inflacionário [9].

O grande empenho dos grupos acima permitiu traçar um panorama desconhecido, até há pouco tempo atrás, pela comunidade acadêmica. Particularmente, os grupos *Supernova Search Team Collaboration* liderado por A. G. Riess e o *Supernova Cosmology Project Collaboration* liderado por S. Perlmutter, obtiveram de forma independente a descoberta de que o universo expande de forma acelerada, diferentemente do que se acreditava tendo como base a gravitação newtoniana [10, 11].

Esse feito tornou a aceleração cósmica uma das descobertas mais relevantes de todos os tempos para a cosmologia, trazendo profundas implicações sobre a natureza do conteúdo material do universo. Os inúmeros estudos, baseados nas observações de supernovas sobre uma ampla variedade de modelos cosmológicos, justificam que a aceleração atual deve-se exclusivamente a uma componente de energia com pressão negativa, contribuindo com aproximadamente 73% para o conteúdo cósmico. A componente de energia mencionada acima é usualmente chamada de energia escura¹.

Uma das consequências imediatas dos experimentos envolvendo supernovas têm sido a medida com bastante precisão de vários parâmetros cosmológicos, em especial o parâmetro de Hubble (H), o parâmetro de densidade dos bárions (Ω_B) e o parâmetro de densidade da matéria escura (Ω_{ME}). Esses estudos permitiram traçar um perfil da composição da matéria total do universo. As estimativas mais recentes mostram que 23% da matéria do universo está distribuída na forma de matéria escura (Ω_{ME}), 4% correspondendo a matéria bariônica (Ω_B), e o restante, aproximadamente 73%, fazendo parte da energia escura (Ω_{EE}) [12].

A descoberta desta componente escura tem motivado um intenso debate na literatura, justificando o fato da expansão acelerada do universo poder

¹A palavra *escura* aqui serve para designar a matéria que não emite radiação eletromagnética e que poderá ser detectada apenas pelos seus efeitos gravitacionais

ser explicada através de um fluido perfeito com uma pressão negativa (ou seja, $\omega = p/\rho = -1$, sendo p e ρ as densidades de pressão e energia, respectivamente) [12, 13, 14]. Teoricamente, esta conclusão não poderia ser justificada em termos da gravitação newtoniana, uma vez que o termo de pressão que aparece nas equações de Einstein² só é possível em virtude de um efeito relativístico geral. Entretanto, um termo de pressão positiva em relatividade geral contribui para o colapso da matéria assim como a sua densidade de energia. Este efeito puramente relativístico segue naturalmente como um efeito do caráter covariante da teoria [15].

As evidências observacionais recentes sugerem uma ampla variedade de possíveis candidatos à energia escura, dentre os quais uma constante cosmológica (com equação de estado $\omega = -1$) seria a solução mais natural [16, 17, 18, 19]. As observações também sugerem que equações de estado com $\omega < -1$ também podem ser permitidas [20]. Em particular, este caso específico corresponde à então chamada energia escura fantasma (*phantom energy*) [21, 22]. Outras possibilidades incluem modelos de campos escalares [23, 24, 25, 26], gás de Chaplygin [27, 28, 29, 30] e matéria - X [31, 32].

Apesar dos inúmeros modelos teóricos aliados aos experimentos de supernovas, bem como análises conjuntas utilizando outros experimentos, ainda não existe um consenso capaz de traduzir a verdadeira essência da energia escura e, portanto, traçar um panorama mais realístico sobre o status atual do universo. Essa dificuldade gera a necessidade de se introduzir ingredientes novos que possam ser testados à luz das observações futuras. Em particular, ingredientes interessantes a serem incluídos seriam formulações estocásticas para compreender a evolução global do universo [35]. Para esclarecer este ponto, é interessante notar que a suposição de homogeneidade, imposta pelo princípio cosmológico, naturalmente conduz

²Veja as equações (1.4) e (1.5) no capítulo I.

a uma lei de Hubble determinística. Tal afirmação pode ser justificada tendo como base o diagrama *magnitude-redshift* para galáxias e outros objetos galáticos em baixos redshifts. Isso significa que para galáxias mais próximas (baixos redshifts), a lei de Hubble induz um caráter puramente determinístico da evolução do universo. Entretanto, para objetos como quasares em altos redshifts [33, 34] os dados de supernovas revelam um espalhamento no diagrama *magnitude-redshift*, mostrando que o mesmo está em desacordo com a lei de Hubble determinística. Portanto, para estudar as propriedades do universo em altos redshifts (quando o universo era jovem), é necessária a introdução de formalismos estocásticos (não determinísticos).

Os estudos sobre teorias estocásticas em cosmologia têm melhorado consideravelmente a nossa compreensão sobre a natureza não determinística de alguns modelos cosmológicos. Em particular, a aplicação de formulações estocásticas neste campo tem recebido uma considerável atenção na literatura [35, 37, 38, 39, 40]. Recentemente, essa técnica tem sido utilizada para calcular a evolução estocástica de alguns parâmetros cosmológicos [41, 42].

Atualmente, os processos estocásticos constituem uma ferramenta da física extremamente apropriada para se investigar sistemas de não equilíbrio nos mais diferentes domínios, incluindo economia [36], biologia, física da matéria condensada, astrofísica [43] e cosmologia [35]. Por exemplo, no campo das ciências econômicas, é possível investigar um sistema que possui características semelhantes a de um sistema randômico. Nesse caso, conceitos de física estatística, tais como dinâmica estocástica, correlação de curto e longo alcance e auto-similaridade, permitem um entendimento do comportamento global do sistema. Usualmente, tais sistemas estão entre os mais fascinantes e intrigantes sistemas complexos que podem ser investigados.

Portanto, é no contexto da cosmologia e na aplicação de formulações estocásticas que se insere a presente tese. Nossa estudo será delimitado por duas linhas básicas, a saber: (i) dinâmica estocástica e (ii) cosmologia.

Os objetivos básicos da tese podem ser delineados como segue:

- No capítulo *I* é feito uma breve revisão do status atual da cosmologia moderna, onde apontamos alguns possíveis candidatos que possam explicar a recente aceleração do universo, descoberta à luz das observações de supernovas Ia.
- No capítulo *II*, faremos uma revisão detalhada da teoria padrão do movimento browniano e apresentamos quatro maneiras independentes de reproduzir os mesmos resultados. Primeiramente, discutiremos o tratamento de Einstein [44] que foi de fundamental importância para a consolidação da teoria. Em seguida, discutiremos o tratamento de Paul Langevin [45] obtido via uma equação diferencial estocástica. Posteriormente, apresentaremos o tratamento em termos da equação Fokker-Planck [46] e, finalmente, a abordagem via caminhadas aleatórias proposta originalmente por M. Kac [47].
- No capítulo *III* discutiremos o comportamento estocástico de uma classe de sistemas físicos descritos por uma viscosidade dependente do tempo. Nossa análise é baseada na aplicação de uma equação de Langevin com viscosidade variável na qual, por simplicidade, consideramos inicialmente o caso com potencial nulo. As quantidades fisicamente relevantes para um sistema clássico executando movimento browniano, tais como o deslocamento quadrático médio e o deslocamento médio, bem como a velocidade média e a velocidade quadrática média, são determinadas analiticamente.
- No capítulo *IV* estendemos o formalismo desenvolvido no capítulo *III* para o caso de potenciais quadráticos e endereçamos nossa análise ao

domínio cosmológico, especialmente no novo cenário inflacionário. Em linhas gerais, estudamos a influência de um banho térmico assumindo que ele é responsável pela evolução estocástica do campo escalar. Calculamos o conjunto completo das soluções analíticas, incluindo os ruídos branco e colorido.

- No capítulo V rediscutiremos o problema do Efeito Meszaros, considerando que o banho térmico (componente de radiação) atua como uma possível correção estocástica. Aplicando o formalismo de Langevin, analisaremos a maneira como a componente não relativística evolui quando o termo estocástico (ruído) é introduzido na equação de evolução para contraste de densidade da matéria (δ). Para o caso de ruído branco, mostraremos que o crescimento total do contraste δ até o equilíbrio matéria-radiação é apenas 1,2 vezes o resultado padrão.
- No capítulo VI desenvolvemos uma variante do formalismo estocástico proposto por M. Novello na referência [35]. Em nossa análise, as equações de Fridmann-Robertson-Walker (FRW) para um fluido relativístico são reduzidas para a forma simples da equação de um oscilador harmônico, a qual depende fortemente do parâmetro de curvatura (K) e do parâmetro da equação de estado (ω). A dinâmica estocástica do oscilador, ou equivalentemente, dos modelos de FRW, é formulada através de uma perspectiva quântica, usualmente denominada de *fluido de Madelung*. O conjunto completo das soluções são determinadas analiticamente e a correção estocástica tem como objetivo exclusivo, evitar o colapso dos modelos.
- No capítulo VII, exploramos as implicações físicas para o redshift de transição sobre uma classe de modelos cosmológicos acelerados, comumente chamada de *gás de Chaplygin simplificado*. Esses modelos são controlados por um parâmetro livre (α) tornando-os mais interessantes por serem mais maleáveis, ou seja, de mais fácil estudo. Em particular, usando o

diagrama de magnitude de supernovas Ia, será mostrado que nos cenários onde o gás de Chapligyn exerce o papel de uma quintessência, teremos $\Omega_{ME} \leq 0,42$, $\alpha \geq 0,7$ e redshift de transição $z_T = 0,46 \pm 0,13$. Alguns aspectos termodinâmicos também serão estudados. Para este caso especial do gás de Chapligyn simplificado, será mostrado que a lei de evolução da temperatura tem um comportamento semelhante aos modelos de energia fantasma (*phantom energy*).

- No capítulo VIII, será proposto um novo método analítico para determinar o potencial escalar $V(\phi)$, para o caso de uma mistura de fluido perfeito mais quintessência, em cosmologias do tipo FRW. O formalismo desenvolvido é uma consequência imediata das equações de Einstein e será aplicado para valores arbitrários do parâmetro de curvatura (K) e dos parâmetros das equações de estado (γ , ω). O conjunto completo das soluções descrevendo a evolução do potencial escalar ($V(\phi)$), bem como o valor do campo (ϕ) e as respectivas densidades de energia serão obtidas analiticamente, e serão válidas para valores arbitrários dos parâmetros (γ , ω).
- Finalmente, no capítulo IX apresentaremos as conclusões. Faremos um breve resumo dos principais resultados da tese e indicaremos algumas perspectivas futuras. Nos apêndices *A* e *B* apresentaremos alguns resultados complementares ao presente trabalho. Com o intuito de facilitar uma eventual consulta por parte dos estudantes, professores e pesquisadores interessados, observamos que as contribuições originais desta tese encontram-se nos capítulos III, IV, V, VI, VII e VIII, bem como no apêndice A.

Capítulo 1

Cosmologia Moderna: Aceleração do Universo e Energia Escura

1.1 Introdução

Conforme já definido na introdução desta tese, a Cosmologia estuda a origem, a estrutura e evolução do universo como um todo. Sua base teórica é solidamente apoiada na teoria da relatividade geral¹ (TRG), que fornece uma descrição quantitativa da estrutura geométrica do espaço-tempo [48]. Tal estrutura é determinada pela distribuição de matéria do universo e tem suas relações matemáticas descrita pelas equações de Einstein.

O objetivo principal da Cosmologia é construir modelos matemáticos que sejam consistentes com os resultados das observações astronômicas. Atualmente, a maioria dos dados cosmológicos podem ser interpretados dentro de uma estrutura coerente conhecida como o *modelo cosmológico padrão*, o qual é baseado na teoria do Big Bang e no paradigma inflacionário. Sabe-se que o presente status do modelo cosmológico padrão é fortemente suportado por quatro grandes pilares, a saber, (i) existe uma estrutura teórica baseada na teoria relatividade geral estabelecida por

¹A teoria da Relatividade Geral é uma teoria relativística para o campo gravitacional e foi formulada por Einstein no começo do século 20 como uma extensão natural da Relatividade Especial afim de incorporar os sistemas gravitacionais (acelerados).

Einstein e Friedmann nos anos vinte [49], (*ii*) a descoberta da expansão universal por Edwin Hubble no final da década de vinte [50], (*iii*) a abundância relativa de elementos leves explicada por Gamov nos anos quarenta² [51], e finalmente, (*iv*) a descoberta da radiação cósmica de fundo por Penzias e Wilson em 1965 [52]. Esse fundo de radiação cósmica constitui o remanescente de uma fase extremamente densa e quente (Big Bang) e reforçou consideravelmente a estrutura teórica e a confiança no modelo cosmológico padrão.

Sabe-se hoje que a história do universo é dividida basicamente em quatro fases. Inicialmente, existe uma fase inflacionária caracterizada por uma dominação na densidade de energia de um campo escalar (ϕ). Em seguida, devido as oscilações deste campo, e consequentemente o decaimento em fótons³, ocorre uma fase dominada por radiação (partículas relativísticas). Posteriormente, à medida que o universo esfria, ocorre uma fase dominada por matéria que se estende até por volta do redshift $z \sim 1$, quando o universo passa a ser dominado pela energia escura e entra no presente regime acelerado.

No presente capítulo abordaremos, em linhas gerais, as propriedades físicas descrevendo o modelo cosmológico padrão e as recentes descobertas que conduziram a idéia de um universo em expansão.

1.2 Modelos Cosmológicos do Tipo FRW

Teoricamente, a nossa compreensão atual sobre a evolução do universo é baseado nos chamados modelos cosmológicos de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), que compreende uma classe de modelos onde a história do

²Os estudos de Gamov e colaboradores sugeriram, pela primeira vez, a possibilidade de todos os elementos químicos terem sido formados no universo primitivo.

³Logo após a expansão provocada pelo regime inflacionário, a temperatura do universo decai consideravelmente, de modo que o campo escalar ϕ deve oscilar coerentemente em torno do seu valor mínimo produzindo fótons para reaquecer o universo.

universo começa a partir de uma grande explosão, comumente denominada na literatura de *Big Bang* (palavra inglesa para designar uma grande explosão).

A dinâmica do universo e os modelos acima mencionados nascem das equações de campo da relatividade geral, também conhecidas como equações de Einstein, as quais, são escritas na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci definido por $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$, $R = R^{\mu}_{\mu}$ é o escalar de curvatura, $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento dos campos de matéria e G é a constante de Newton da gravitação.

As equações acima estabelecem um compromisso entre a distribuição de matéria do universo e a métrica que o mesmo deve satisfazer. Essencialmente, as soluções desse conjunto de equações diferenciais não-lineares e acopladas são extremamente difíceis de se resolver sem que nenhum insight seja dado a priori. Contudo, Einstein e Friedmann sugeriram que uma hipótese fundamental deveria ser justificada em termos das simetrias do universo, ou seja, quando observado em larga escala, o universo deveria ser homogêneo e isotrópico⁴.

Esta hipótese junto com as equações de campo da Relatividade Geral, equações (1.1), fornecem o elemento de linha (métrica) do espaço-tempo conhecido na literatura como elemento de linha de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) [48, 53]

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(\sin^2\theta d\theta^2 + d\phi^2) \right] \quad (1.2)$$

onde (r, θ, ϕ) são as coordenadas da hipersuperfície espacial, t é o tempo cósmico, $R(t)$ denota o fator de escala do universo e k ($= 0, \pm 1$) descreve

⁴Em cosmologia, esta hipótese é conhecida como princípio cosmológico e tem importância fundamental para se obter as soluções das equações de campo da Relatividade Geral, a saber, o conjunto de equações diferenciais e acopladas (1.1).

o índice de curvatura da hipersuperfície. Os modelos com k positivo, negativo ou nulo são denominados, respectivamente, fechados (elípticos), abertos (hiperbólicos) ou planos (parabólicos).

Qualitativamente, as equações de campo escritas na forma (1.1) indicam a forma pela qual a presença da matéria deve afetar a geometria do universo e vice-versa. Dito de outra forma, como o conteúdo energético do espaço-tempo deve satisfazer as leis de conservação, tendo em vista a sua relação com as quantidades geométricas que são automaticamente conservadas.

Para ser consistente com a hipótese de homogeneidade e isotropia mencionado acima, o conteúdo material do universo em larga escala é descrito por um fluido perfeito satisfazendo um tensor de energia-momento

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

onde ρ é a densidade de energia e p é a pressão do fluido medidas no referencial quadrimensional comóvel ($u^\mu u_\nu = 1$).

Utilizando o tensor de energia-momento dado acima, as equações (1.1) assumem a seguinte forma

$$8\pi G\rho = 3\frac{\dot{R}^2}{R^2} + 3\frac{k}{R^2}, \quad (1.4)$$

$$8\pi Gp = -2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{k}{R^2} \quad (1.5)$$

que são as equações governando a evolução do fator de escala cósmica num universo preenchido por um fluido perfeito tal como descrito por (1.3). Combinando o conjunto de equações acima, ou equivalentemente, projetando a divergência do tensor de energia-momento (1.3), na direção de uma quadrivelocidade ($u_\mu T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$), obtemos a lei de conservação da energia

$$\dot{\rho} + 3H(t)(\rho + p) = 0, \quad (1.6)$$

onde $H = \dot{R}/R$ é o parâmetro de Hubble medindo a taxa de variação do

volume do universo⁵. A equação de conservação (1.6) também pode ser reescrita na seguinte forma

$$d(\rho R^3) = -pd(R^3). \quad (1.7)$$

O significado físico desta equação é muito claro: ela nos diz que a mudança na densidade de energia de um elemento de volume comóvel $d(\rho R^3)$, é igual a menos a pressão vezes a mudança no volume.

Conforme mencionado antes, no contexto do modelo cosmológico padrão, o conteúdo de matéria do universo é representado por um fluido perfeito, satisfazendo o tensor de energia-momento descrito por (1.3). Neste caso, é usualmente assumido que tal fluido satisfaz uma equação de estado escrita na forma

$$p = (\gamma - 1)\rho, \quad (1.8)$$

onde o parâmetro γ caracteriza os diversos estágios da evolução cósmica. De um modo geral, argumentos teóricos [55] restrigem o parâmetro γ ao intervalo $[0, 2]$.

Como pode ser facilmente observado, inserindo a equação de estado acima na lei de conservação da energia (1.6), obtemos a solução geral para qualquer era cósmica

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3\gamma}, \quad (1.9)$$

onde as quantidades com índice zero se referem aos valores atuais. Alguns casos interessantes podem ser obtidos da expressão acima. Em particular, o caso limite $\gamma = 0$ e $\gamma = 2$ delimita os regimes de estado de vácuo (constante cosmológica) e *stiff matter*, uma espécie de matéria extremamente rígida, comumente conhecida na literatura como matéria de Zeldovich. Outro regime interessante é obtido quando consideramos que a densidade de

⁵O valor atual do parâmetro de Hubble medidos pelo *HST Key Project* é $H_o = (72 \pm 8) \text{ km Mpc}^{-1}\text{s}^{-1}$ e pelo WMAP é $H_o = 73,4^{+2,8}_{-3,8} \text{ km Mpc}^{-1}\text{s}^{-1}$. Para mais detalhes sobre o corrente status na determinação do parâmetro de Hubble, veja a referência [54].

matéria do universo em média é da ordem de $10^{-30} kg/cm^3$, ou seja, o fluido é muito denso e pode ser descrito por uma matéria não relativística sem pressão ($\gamma = 1$). Com isso, de (1.9) obtemos

$$\rho_m(t) \sim R^{-3}, \quad (1.10)$$

sendo $\rho_m(t)$ a densidade de energia da matéria. Para o caso de universo dominado por radiação (estágios iniciais), teremos $\gamma = 4/3$, e de (1.9) segue imediatamente que

$$\rho_r(t) \sim R^{-4}, \quad (1.11)$$

onde estamos considerando que $\rho_r(t)$ é a densidade de energia da radiação.

1.3 Acerelação em altos redshift's: Inflação

A descrição básica do que atualmente chamamos de *inflação*, é baseada na idéia de que existiu uma época na qual a densidade de energia do vácuo foi a componente dominante no universo. Como o próprio nome sugere, inflação corresponde a uma era cósmica na qual o universo sofreu uma transição de fase que gerou um estágio de expansão acelerada. Durante esse regime, é usualmente suposto que a expansão do universo é dirigida por um campo escalar $\phi(t)$ rolando lentamente em busca do valor mínimo do seu potencial (regime slow roll). Do ponto de vista da cosmologia moderna, a necessidade de um modelo inflacionário é de importância fundamental para resolver algumas inconsistências presentes no modelo cosmológico padrão.

Os primeiros desenvolvimentos da cosmologia inflacionária iniciou-se ainda nos anos 70, com a descoberta de que a densidade de energia de um campo escalar poderia ser interpretada como uma espécie de energia do vácuo ou constante cosmológica [56]. Entretanto, o primeiro modelo com uma motivação simples e realista, capaz de explicar propriedades tais como homogeneidade e isotropia espacial só foi obtido no começo dos anos 80 e é

popularmente conhecido como *velho cenário inflacionário* [62]. Desde a sua construção há cerca de três décadas, o paradigma inflacionário tornou-se um modelo universalmente viável para resolver alguns problemas presentes no modelo cosmológico padrão, tal como já mencionado acima.

Atualmente, o paradigma inflacionário comprehende uma extensa classe de modelos que se destacam na literatura, dentre os quais podemos citar o modelo original, comumente conhecido como velho cenário inflacionário [57, 58, 62], modelos de inflação caótica [59], novo cenário inflacionário [60, 61, 66, 63, 64], inflação natural [67], inflação híbrida [68], inflação quintessencial [69], inflação estocástica [70, 71, 72, 73, 74] e, mais recentemente, os modelos de inflação morna proposto originalmente por Berera [75, 76].

Seja qual for a versão, todas elas remetem ao mesmo significado físico, ou seja, um estágio de expansão acelerada do fator de escala cósmica. De acordo com estes modelos, inflação é um expansão exponencial do universo emergindo de um estado de falso vácuo, que corresponde a um estado *meta-estável* sem partículas ou campos, no entanto com um alto valor da energia [77, 78]. Quando a inflação é vista como uma dinâmica do campo escalar, a equação de estado relacionando as densidades de energia e pressão é dada por $p_\phi = \omega \rho_\phi$, ou equivalentemente,

$$\omega = \frac{p_\phi}{\rho_\phi}. \quad (1.12)$$

Sabendo que as densidades de energia e pressão são escritas como $p_\phi = (1/2)\dot{\phi}^2 - V(\phi)$ e $\rho_\phi = (1/2)\dot{\phi}^2 + V(\phi)$, vemos portanto que quando o termo de potencial ($V(\phi)$) predomina sobre o termo cinético ($\dot{\phi}^2$) teremos $\omega = -1$, ou seja, a expansão do universo é acelerada e o comportamento é semelhante ao de uma constante cosmológica.

Na seção seguinte, veremos que o regime de aceleração atual do universo (aceleração em baixos redshifts) pode ser explicado à luz de alguns

candidatos a energia escura, tais como campo escalar (descrição semelhante ao da inflação), constante cosmológica, matéria- X e gás de Chapligyn.

1.4 Aceleração em Baixos Redshifts: Energia Escura

Em 1998, alguns resultados baseado nas observações de *supernova tipo Ia*, publicados independentemente por dois grupos diferentes (Supernova Cosmology Projeto e High-z Supernova Search)⁶ mudaram drasticamente a nossa visão sobre o status atual do universo [10, 11]. Os estudos realizados por tais grupos concluíram que o universo está expandindo de forma acelerada, diferentemente do que se acreditava durante várias décadas. Desde as primeiras publicações em 1998, recentemente o acúmulo de dados obtidos através dos experimentos de supernova Ia têm reproduzido uma extensa coleção de trabalhos na literatura sobre o assunto, sendo que todos eles confirmam, de forma cada vez mais precisa, a existência da expansão acelerada do universo [79, 80, 81, 82].

Implicitamente, para explicar a aceleração atual, o experimento baseado nas observações de supernova Ia sugerem que a densidade de energia do universo é repulsiva e aparece como uma componente de *energia escura*, ou seja, uma forma desconhecida de energia com uma pressão negativa. Essa idéia traz consequências que podem ser justificada através de um formalismo termodinâmico. Como é bem conhecido, o efeito da viscosidade gerada pela expansão do universo tráz como consequência imediata a diminuição da pressão efetiva. Em princípio, tal efeito simula uma equação de estado entre energia e pressão da seguinte forma: $p_{ef} = -\rho$, onde ρ é a densidade de energia do universo e p_{ef} é a pressão termodinâmica.

A existência desta componente desconhecida de energia desconhecida também pode ser confirmada independentemente (de forma indireta) pelos

⁶Os sites na web desses dois projetos são: <http://supernova.LBL.gov> e <http://cfa-www.harvard.edu/supernova>.

estudos baseado nas flutuação da radiação cósmica de fundo (mantida à temperatura de 3k) [83], estrutura de larga escala [84], idade de objetos em altos redshifts [85], além de experimentos de raios-x obtidos de aglomerados de galáxias [86]. Atualmente, o espectro de potência angular das flutuações no background de micro-onda cósmica favorece um modelo com parâmetro de densidade $\Omega_{total} = 1$, um valor já previsto pela inflação, enquanto o parâmetro de densidade associado a matéria escura é $\Omega_m \sim 0,3$. A diferença $\Omega_{EE} = \Omega_{total} - \Omega_m \sim 0,7$, que corresponde ao parâmetro de densidade associada a componente de energia escura.

Embora a energia escura mude a nossa visão tradicional sobre o universo, a ausência de um guia natural da teoria de física de partículas sobre a sua natureza dá origem a um intenso debate na literatura, bem como a muitas especulações teóricas. Nas subseções seguintes, faremos uma pequena discussão sobre cada um dos possíveis candidatos a energia escura.

1.4.1 Constante Cosmológica

A idéia de descrever essa componente desconhecida de energia através de uma constante cosmológica (Λ = Energia do Vácuo), vem a ser o mais antigo e mais natural candidato, já que a sua descrição é a mais simples do ponto de vista matemático, mas não a única possibilidade.

Historicamente, o termo Λ foi introduzido originalmente por Einstein em 1917 numa tentativa de obter um modelo cosmológico estático, o qual era baseado na relatividade geral e no princípio cosmológico [87]. Neste caso, a constante cosmológica Λ corresponde a uma componente escura espacialmente uniforme e independente do tempo, que deve ser interpretada classicamente como um fluido perfeito simples obedecendo uma equação de estado $p_v = -\rho_v$.

Classicamente, entende-se como vácuo, uma regiaão do espaço desprovida de matéria, radiação ou qualquer outra forma de energia,

gerando assim um tensor de energia momento identicamente nulo ($T_V^{\mu\nu} \equiv 0$). Entretanto, do ponto de vista da teoria quântica de campos, para cada campo quântico deve existir o seu estado de vácuo no qual a sua energia é mínima. Sendo assim, devido as relações de incertezas, os campos quânticos flutuam em torno do valor zero, mesmo na ausência de partículas e só podem ser considerados nulos quando se tomam os seus valores médios. A existência das flutuações de vácuo se justificam por vários fenômenos quânticos, dentre os quais, o deslocamento das linhas espectrais do átomo de hidrogênio (Lamb Shift) e o efeito casimir⁷ (Casimir Effect) [88, 89].

Formalmente, do ponto de vista da teoria quântica de campos, a presença de Λ é devido a energia de ponto zero de todas as partículas e campos preenchendo o universo. Sendo assim, o vácuo de um campo quântico pode ser tratado como um conjunto infinito de osciladores harmônicos independentes, cada um deles no estado fundamental, contribuindo com suas próprias oscilações de ponto zero [91]. Neste caso, cada modo de vibração de um dado campo quântico contribui com $\frac{1}{2}\hbar\omega$ para a energia total. Entretanto, existe um problema fundamental relacionado ao candidato Λ que é usualmente conhecido na literatura moderna como *o problema da constante cosmológica* [90]. A justificativa para este *enigma* vem do fato de que a expectativa teórica prever um valor $\Lambda \sim 10^{71}GeV^4$, enquanto que o limite cosmológico sugere um valor $\Lambda \sim 10^{-47}GeV^4$. Vemos portanto, que existe uma diferença $\sim 10^{120}$ ordens de grandeza entre os dois limites. Este problema localizado na interface da cosmologia, astrofísica e a teoria quântica de campos tem sido considerado por alguns autores como a maior crise da física moderna [90, 91]. A possibilidade de que uma constante cosmológica seja um candidato convincente para explicar a expansão acelerada do universo tem inspirado vários autores e reproduzido

⁷O efeito Casimir é amplamente conhecido pela força que surge entre duas placas planas e condutoras dispostas paralelamente e imersas num vácuo a uma distância l .

uma intensa coleção de reviews na literatura [92, 16, 17]. Para uma revisão um pouco mais detalhada, veja como exemplo, as referências [18, 19]. Por ora, proseguiremos examinando outras possibilidades que podem explicar a atual aceleração do universo.

1.4.2 Campo Escalar

Talvez a maneira mais simples e natural de descrever a componente de energia escura responsável pela atual aceleração do universo seja através de um campo escalar primordial [24, 25, 26, 2]. Para o caso de um universo em expansão, um campo escalar espacialmente homogêneo com potencial $V(\phi)$ e minimamente acoplado com a gravidade obedece a seguinte equação de movimento [93]

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (1.13)$$

onde o ponto (\cdot) significa derivada em relação ao tempo e linha $(')$ indica derivadas com respeito ao campo ϕ . Como vemos, a equação acima é semelhante a um sistema clássico com a taxa de expansão $3H$ desempenhando o papel de uma viscosidade. As densidades de energia e pressão do associada ao campo ϕ são dados respectivamente por

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (1.14)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (1.15)$$

Assumindo uma equação de estado da forma $p = \omega\rho$, vemos que

$$\omega = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (1.16)$$

Note que, se o campo varia lentamente o termo de potencial é dominante, ou seja, teremos $V(\phi) \gg \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$, o que implica em $\omega \sim -1$. Sendo assim, o comportamento do campo escalar é semelhante ao de uma constante cosmológica tal como discutido na subseção acima.

1.4.3 Gás de Chapligyn

A primeira tentativa de explicar a expansão acelerada do universo através de um gás do tipo Chapligyn foi introduzido originalmente por Kamenshichik em 2001 [94]. Este modelo foi desenvolvido com mais detalhes logo depois por Bilic *et al.* [95], Bento *et all* [27] e Benaoum [28]. Em geral, essa variante tem sido proposta como uma descrição unificada de modelos contendo matéria escura e energia escura. Esta componente de fluido exótico pode ser caracterizada macroscopicamente por uma equação de estado da forma

$$p_c = -A/\rho_{ch}^\alpha, \quad (1.17)$$

onde A é uma constante positiva e α é um parâmetro pertencente ao intervalo $[0, 1]$. Nesta expressão, o parâmetro $\alpha \neq 1$ representa uma generalização da expressão original ($\alpha = 1$) proposta por Kamenshichik [94], enquanto para $\alpha = 0$ ela descreve um modelo com constante cosmológica (Λ CDM).

Recentemente, a possibilidade de unificar o setor escuro cosmológico por meio de um gás do tipo Chapligyn com equação de estado (1.17), tem recebido considerável atenção na literatura, veja por exemplo, as referências [29, 30, 96, 97]. Em particular, o capítulo VIII desta tese é dedicada ao estudo da aceleração cósmica utilizando os modelos de gás de Chapligyn aqui citados. Os resultados básicos do nosso estudo inclui o cálculo do parâmetro de desaceleração como uma função do redshift $q(z)$ nos casos de quintessência e quartessência, bem como o cálculo da evolução da temperatura. Os resultados básicos estão discutidos com mais detalhes na referência [98].

A dinâmica do gás de Chapligyn é discutida com mais detalhes no capítulo VIII. Por ora, mostraremos apenas que a densidade de energia obtida via lei de conservação

$$\dot{\rho}_C + 3\frac{\dot{R}}{R}(\rho_C + p_C) = 0 \quad (1.18)$$

é dada por

$$\rho_C = \left[A + B \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(1+\alpha)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (1.19)$$

ou equivalentemente,

$$\rho_C = \rho_{C_0} \left[A_s + (1 - A_s) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(1+\alpha)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (1.20)$$

onde ρ_{C_0} é a densidade de energia atual e $A_s = A/\rho_{C_0}^{1+\alpha}$ é uma quantidade relacionada com o atual valor da velocidade do som no gás, veja por exemplo a referência [97]. Como pode ser visto da equação (1.19), o gás de Chapligyn aqui discutido delimita dois regimes teóricos, a saber, matéria não relativística

$$\rho_C(R \rightarrow 0) \simeq \frac{\sqrt{B}}{R^3} \quad (1.21)$$

e energia escura

$$\rho_C(R \rightarrow \infty) \simeq \sqrt{A}. \quad (1.22)$$

Tal comportamento motivou vários autores a proporem um sistema unificado para tentar descrever a natureza do setor escuro cosmológico. Muitas previsões deste modelo já foram confrontadas com alguns resultados observacionais. Em particular, mostraremos no capítulo VIII que usando diagrama de magnitude de supernovas Ia, os vínculos sobre o parâmetro α para o caso de quartessência sugerem um valor $0.70 \leq \alpha \leq 0.89$ [98]. Outras previsões já foram confrontadas por diversos autores, como exemplo veja as referências [99, 100, 101, 102].

1.4.4 matéria- X

Primeiramente introduzida por Turner e White [31] em 1997, a possibilidade de explicar a aceleração corrente à luz de uma matéria- X

tem recebido considerável atenção na literatura. Tal matéria é descrita pela equação de estado

$$p_x = \omega \rho_x, \quad (1.23)$$

onde ω é um parâmetro livre. Como pode ser visto, para o valor particular $\omega = -1$ temos como caso limite uma constante cosmológica ($p = -\rho$), que é uma condição necessária e suficiente para acelerar o universo. Em geral, o intervalo relevante para o parâmetro ω situa-se entre $[0, -1]$. Fisicamente, este intervalo delimita dois regimes teóricos, ou seja, para $\omega = 0$ a dinâmica do universo é determinada pela matéria escura (fluido sem pressão) enquanto que para $\omega = -1$ a dinâmica é determinada por uma constante cosmológica. Entretanto, alguns trabalhos publicados recentemente na literatura consideram a possibilidade $\omega < -1$ [103, 104]. Esta condição implica que os modelos de matéria- X podem ser divididos em duas categorias, a saber, o modelo padrão onde $-1 \leq \omega \leq 0$ e o modelo de matéria- X estendido com $\omega < -1$. Este último é comumente chamado na literatura de modelo *Phantom Energy* [22, 21], palavra inglesa para denominar *energia fantasma*.

Uma variante destes modelos de matéria- X (XCDM) considera ainda a possibilidade do parâmetro ω assumir uma dependência temporal ou, equivalentemente, uma função do redshift, $p_x = \omega(z)\rho_x$. Isso significa que os modelos com ω constante são os mais simples e seus parâmetros livres são basicamente dois (Ω_x, ω), tornando assim o modelo mais facilmente limitado pelos teste cosmológicos. Quanto a dependência funcional de ω , geralmente ela é assumida apriori e varia com alguma potência do redshift, vejamos como exemplo o caso $\omega(z) = \omega_0(1 + z)^n$ [105].

A descrição dinâmica dos modelos dirigidos por matéria- X é baseada numa soma de dois fluidos perfeitos. O primeiro representando a componente dominante, que no caso seria a matéria- X , e o segundo é um

fluido ordinário representando radiação ou matéria. O tensor de energia momento representando cada uma das componente por ser escrito na forma

$$T_{\alpha\beta} = (p_x + \rho_x)u_\alpha u_\beta - p_x g_{\alpha\beta} \quad (1.24)$$

$$T_{\alpha\beta} = (p + \rho)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} \quad (1.25)$$

onde p_x e ρ_x , p e ρ , representa, respectivamente, a densidade de energia e pressão de cada uma das componentes. As equações de Einstein para esta componente escura podem ser escritas como

$$8\pi G(\rho + \rho_x) = 3\frac{\dot{R}^2}{R^2} + 3\frac{k}{R^2} \quad (1.26)$$

$$8\pi G(p + p_x) = -2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{k}{R^2}. \quad (1.27)$$

Além disso, considerando que cada componente é conservada separadamente, teremos ainda:

$$\dot{\rho}_x + 3\frac{\dot{R}}{R}(p_x + \rho_x) = 0 \quad (1.28)$$

e

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}(p + \rho) = 0. \quad (1.29)$$

Considerando que a matéria- X (componente dominante) satisfaz a equação de estado (1.23) com ω constante e a outra componente de fluido satisfazendo uma equação de estado do tipo (lei gamma)

$$p = (\gamma - 1)\rho, \quad (1.30)$$

as equações de campo (1.26) - (1.27) podem ser facilmente integradas e obtemos como resultado:

$$\rho_\gamma = \rho_{\gamma_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3\gamma} \quad \text{e} \quad \rho_x = \rho_{x_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3(1+\omega)}, \quad (1.31)$$

sendo ρ_{γ_0} e ρ_{x_0} os valores atuais de cada uma das componentes. Note que na fase atual, onde o fluido ordinário é a matéria escura ($\gamma = 1$), as equações acima podem ser reescritas como

$$\rho_m \sim R^{-3} \quad \text{e} \quad \rho_x \sim R^{-3(1+\omega)}, \quad (1.32)$$

desde que $\rho_m(t)$ seja a densidade de energia da matéria e $\rho_x(t)$ a densidade de energia da matéria- X . Note que os regimes de matéria ($\rho_m \sim R^{-3}$) e radiação ($\rho_r \sim R^{-4}$) não modificam a lei de escala da matéria- X . Fisicamente, isso nos mostra que se o parâmetro ω for negativo, a matéria- X começou a dominar recentemente, resultado esse que mantém os processos físicos na era da radiação tal como a nucleosíntese primordial. É interessante notar também que, no caso $\omega = -1$ temos $p_x = -\rho_x$, ou seja, este caso extremo descreve uma constante cosmológica e atua como uma fronteira para comparar a consistência do modelo. Como vemos, essas considerações justificam o valor $-1 < \omega < 0$ para o parâmetro da equação de estado da matéria- X . Entretanto, também é interessante saber qual o valor crítico do parâmetro ω para o qual teremos um universo acelerado.

Para esclarecer este ponto, note que uma combinação das duas equações de Einstein, equação (1.26) e (1.27), implica na seguinte expressão para a aceleração

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}[\rho + \rho_x + 3(p + p_x)]R. \quad (1.33)$$

A expressão acima nos mostra que, teremos um modelo acelerado ($\ddot{R} > 0$) somente se a mistura dos dois fluido violar a condição de energia forte⁸ $\rho + \rho_x + 3(p + p_x) < 0$, ou equivalentemente,

$$\rho + 3p + (1 + 3\omega)\rho_x < 0. \quad (1.34)$$

Para o caso de matéria ($p = 0$), o parâmetro da equação de estado da

⁸Esta condição para o caso de uma mistura de dois fluidos perfeito implica que $\rho + \rho_x + 3(p + p_x) \geq 0$

matéria- X obtido da expressão acima é

$$\omega < -\frac{1}{3} \left[1 + \frac{\rho_m}{\rho_x} \right], \quad (1.35)$$

que independe do parâmetro de curvatura do modelo. Como vemos, a imposição de um modelo acelerado será satisfeita somente se

$$\omega < -\frac{1}{3} \left[1 + \frac{\Omega_m}{\Omega_x} \right]. \quad (1.36)$$

Utilizando uma combinação elementar das equações de campo (1.26) e (1.27) juntamente com as definições dos parâmetros cosmológicos básicos⁹ podemos mostrar facilmente que os parâmetros de curvatura e desaceleração podem ser escritos como

$$\frac{k}{H_0^2 t_0^2} = \Omega_m + \Omega_x - 1 \quad (1.37)$$

e

$$q_0 = \frac{1}{2} [\Omega_m + (1 + 3\omega)\Omega_x], \quad (1.38)$$

sendo Ω_x o parâmetro de densidade da matéria- X . Além do mais, utilizando uma combinação das equações de campo (1.26) e (1.27), e as mesmas definições dos parâmetros cosmológicos, é fácil mostrar que a integral primeira para o caso plano pode ser escrita como

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_m \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 + \Omega_x \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(1+\omega)} \right]. \quad (1.39)$$

Portanto, os testes que discutem essa classe de modelos são de alguma forma, baseado na equação acima.

Como uma aplicação do formalismos geral discutido aqui, dedicaremos o capítulo VII desta tese ao cálculo do potencial de campo escalar que ao mesmo tempo é compatível com os modelos de matéria- X

⁹O parâmetro de densidade da matéria é definido por $\Omega_m = (\rho_m/\rho_c)$ onde ρ_c é a densidade crítica definida por $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$. Similarmente, o parâmetro de densidade da matéria- X é definido por $\Omega_x = (\rho_x/\rho_c)$, enquanto que o parâmetro de desaceleração é $q_0 = -\frac{\ddot{R}R}{R^2}$.

aqui apresentados. Mostraremos que, se a matéria- X interage apenas gravitacionalmente, ou seja, se não existe transferência de energia e processos de decaimento, somente uma classe restrita de potenciais é matematicamente permitida e o conjunto completo das soluções será determinada por este novo método. Em particular, mostraremos que o potencial $V(\phi)$ para o caso de uma mistura contendo um fluido perfeito mais uma componente de matéria- X pode ser escrito como [106]

$$V(\phi) = \frac{1-\omega}{2} \rho_{\phi_0} \left(\frac{\Omega_{\phi_0}}{\Omega_{\gamma_0}} \right)^{\frac{1+\omega}{\gamma-\omega-1}} \sinh^{-\frac{2(1+\omega)}{\gamma-\omega-1}} \left[\frac{3(\gamma-\omega-1)\sqrt{8\pi}}{2\sqrt{3(1+\omega)}} \frac{\phi}{m_{pl}} \right], \quad (1.40)$$

onde γ e ω são os parâmetros da equação de estado para o fluido relativístico e a matéria- X , ρ_{ϕ_0} e Ω_{ϕ_0} são os valores atuais do parâmetro de densidade e densidade de energia do campo escalar.

Capítulo 2

Movimento Browniano: Algumas Abordagens

2.1 Introdução

O movimento irregular de pequenas partículas imersas numa solução foi originalmente observado em 1928 pelo botânico inglês Robert Brown [107]. Ele notou que as partículas em suspensão adquiriam uma espécie de movimento errático que posteriormente ficaria popularmente conhecido pelo nome de movimento browniano (MB).

Nas décadas seguintes, inúmeras tentativas foram realizadas para desvendar a natureza do movimento browniano. Experimentos de laboratório mostraram que o movimento fica mais intenso quando se reduz a viscosidade do meio ou o tamanho das partículas brownianas, e também quando se eleva a temperatura da solução. Muitas causas possíveis foram aos poucos sendo eliminadas, tais como: atrações ou repulsões entre as partículas suspensas, ações capilares ou higrométricas, bolhas temporárias de ar, correntes de conveção no interior da solução, gradientes de temperatura ou algum tipo de perturbação mecânica, além de outros tipos de instabilidades no fluido.

Somente a partir de 1860 começou a tomar forma o ponto de vista

moderno de que o *zigue-zague* das partículas brownianas poderia ser devido às colisões com as moléculas do fluido. Verificou-se que suas trajetórias não apresentavam tangentes (ou seja, as curvas não seriam diferenciáveis), e também que o movimento randômico aparentemente nunca cessava. No entanto, a verdadeira causa do fenômeno permaneceu um mistério até 1905, quando finalmente foi elucidado por Einstein no seu artigo de 1905 [44].

O tratamento de Einstein para o MB é um dos trabalhos intelectuais mais notáveis de todos os tempos. Sua solução representou um grande avanço científico nos campos da Química e da Física, tornando a teoria atômico-molecular uma parte fundamental da estrutura da matéria. Como uma espécie de bônus extra, o tratamento de Einstein também forneceu uma estimativa do número de Avogadro que foi verificada, com grande precisão, nos experimentos efetuados por Jean Perrin [108].

Posteriormente, um esforço considerável foi canalizado por muitos autores para generalizar e compreender o tratamento de Einstein. Importantes contribuições foram dadas por Smoluchowski [109], Langevin [110], Fokker [111], Burger [112], Fürther [113], Ornstein [114], Planck [115], Kac [47] e muitos outros.

Atualmente, o movimento browniano permanece na fronteira da pesquisa como um exemplo importante de processo estocástico, e constitui uma ferramenta fundamental para o estudo de sistemas físicos de não equilíbrio. Tais sistemas são encontrados em diferentes áreas da física, desde o nível microscópico, como verificado na difusão de partículas num solvente, até escalas de ordem astronômicas, tal como observado em sistemas estelares [116]. Um exemplo interessante desse último tipo é representado por um Buraco Negro (BN) no centro de um sistema estelar denso. Teoricamente, quando sua massa é muito grande, o BN pode adquirir um movimento que é semelhante ao de uma partícula em suspensão num líquido ou num gás [43]. Em cosmologia, movimentos brownianos com

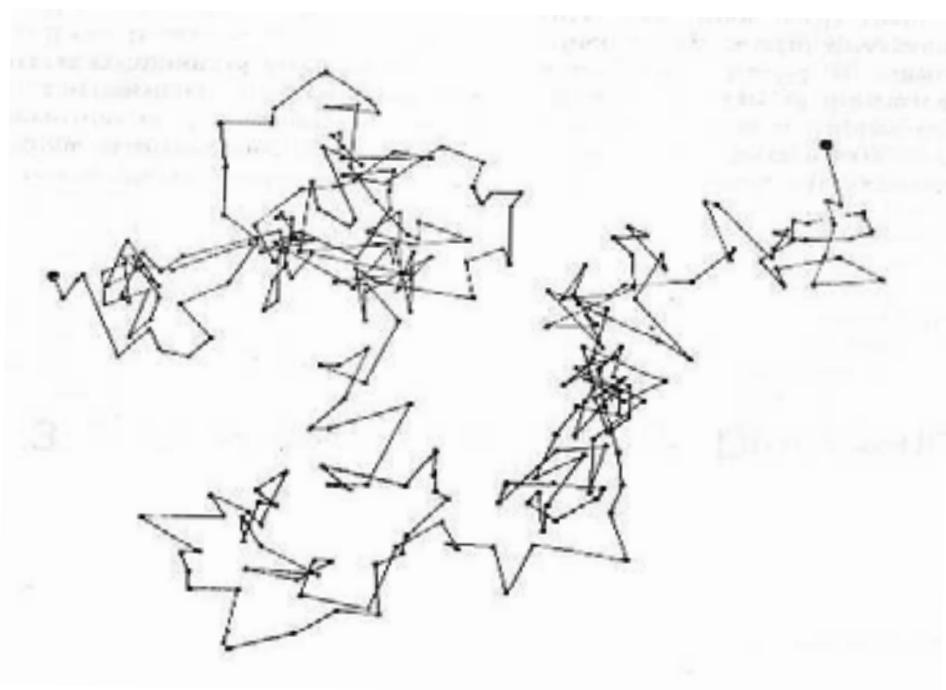


Figura 2.1: A figura acima (publicada por J. Perrin) mostra a trajetória de uma partícula executando movimento browniano. O movimento é extremamente irregular (a trajetória praticamente não apresenta tangentes), sendo mais ativo para temperaturas mais altas ou em fluidos menos viscosos. Observando-se uma mesma amostra por aproximadamente 20 anos concluiu-se que o movimento nunca cessa.

barreiras fixas ou móveis são também bastante empregados para estudar os processos de formação da estrutura de larga escala, tais como galáxias, aglomerados de galáxias e vazios [117]. Mais recentemente, outros tipos de contribuições foram obtidas na investigação de sistemas com memória, objetivando estabelecer relações entre os regimes de difusão anômala e normal [118].

No presente capítulo, mostraremos como é possível abordar o movimento browniano de quatro maneiras distintas, a saber: o tratamento difusivo de Einstein, o procedimento estocástico ou de força flutuante proposto por Paul Langevin, a abordagem via equação de Fokker-Planck, e finalmente, as caminhadas aleatórias de Mark Kac [47]. Discutiremos também com bastante detalhe, as limitações presentes na abordagem difusiva. Em particular, mostraremos que a equação parabólica na qual Einstein baseou sua explicação deve ser substituída por uma equação do tipo hiperbólica que também surge naturalmente no tratamento via caminhadas aleatórias.

Para ser mais preciso, as abordagens discutidas neste capítulo estão delineadas com detalhes na referência [119].

2.2 MB e Equação de Difusão: O Tratamento de Einstein

Para estudar o comportamento irregular das partículas em suspensão que surge devido aos movimentos moleculares térmicos, suporemos que cada partícula executa um movimento completamente independente das outras partículas. Como veremos, essa hipótese é válida somente se os intervalos de tempos considerados não são demasiadamente pequenos. Seguindo o formalismo de Einstein [44], consideraremos um intervalo de tempo τ , que é pequeno em comparação com o tempo de observação, porém suficientemente longo, para que os movimentos executados por

diferentes partículas neste intervalo de tempo possam ser considerados eventos independentes.

Suponhamos que existam N partículas em suspensão no líquido. No intervalo de tempo τ , as coordenadas x das partículas variam de $\Delta x = \mu$, onde μ pode assumir valores diferentes (positivo ou negativo) para cada partícula. Uma determinada lei de distribuição de probabilidades deve ser satisfeita pela variável μ : A fração de partículas que sofre um deslocamento entre x e $x + \mu$ no intervalo de tempo τ , pode ser expressa por uma equação da forma [44]

$$dN/N = \phi(\mu)d\mu \quad (2.1)$$

com a distribuição $\phi(\mu)$ satisfazendo a condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\mu)d\mu = 1 \quad (2.2)$$

onde $\phi(\mu)$ é uma função par, $\phi(\mu) = \phi(-\mu)$, suposta diferente de zero apenas para pequenos valores de μ . Considere também que $\eta(x, t)$ é o número de partículas por unidade de comprimento, e calculemos a distribuição de partículas no instante $t + \tau$, a partir da distribuição delas no instante t . Pela definição da função $\phi(\mu)$, o número de partículas que no instante $t + \tau$ se encontram entre x e $x + \mu$, é dado por:

$$\eta(x, t + \tau)dx = dx \int_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \eta(x + \mu, t)\phi(\mu)d\mu. \quad (2.3)$$

Como τ é muito pequeno, podemos fazer uma expansão temporal de η até segunda ordem¹

$$\eta(x, t + \tau) \cong \eta(x, t) + \tau \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial \eta^2(x, t)}{\partial t^2} + \dots \quad (2.4)$$

¹Einstein obteve seus resultados fazendo a expansão no tempo somente até primeira ordem [?]. Por razões que serão discutidas adiante, consideraremos termos até segunda ordem em τ na expansão da função $\eta(x, t)$.

e como μ também é pequeno, para sermos consistentes devemos desenvolver $\eta(x + \mu, t)$ em potências até segunda ordem em μ

$$\eta(x + \mu, t) \cong \eta(x, t) + \mu \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + \frac{\mu^2}{2!} \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2} + \dots \quad (2.5)$$

Inserindo os resultados acima na equação (2.3) obtemos

$$\eta + \frac{\partial \eta}{\partial t} \tau + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \eta \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\mu) d\mu + \frac{\partial \eta}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \phi(\mu) d\mu + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2}{2} \phi(\mu) d\mu. \quad (2.6)$$

No lado direito dessa equação, o segundo termo é identicamente nulo uma vez que $\phi(\mu) = \phi(-\mu)$. Logo, considerando a equação (2.2), vemos que η satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

onde definimos

$$D = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2}{2} \phi(\mu) d\mu. \quad (2.8)$$

A equação (2.7) representa uma espécie de difusão generalizada. A quantidade $\eta(x, t)$ é a concentração de partículas por unidade de comprimento em torno de x num instante arbitrário e a constante D é o coeficiente de difusão. No limite

$$\tau \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \ll \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.9)$$

a equação (2.7) se reduz para

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (2.10)$$

que é forma padrão da equação de difusão, na qual Einstein baseou a sua explicação do MB. A equação (2.7) é do tipo hiperbólica e generaliza a equação de difusão usual que é do tipo parabólica². Na seção final desse trabalho analisaremos a solução analítica da equação de difusão

²Uma classificação das equações diferenciais parciais pode ser vista na referência [120].

generalizada. Por enquanto, prosseguiremos com a descrição einsteiniana do movimento browniano.

Como um exemplo para ilustrar esse tratamento, vamos obter a solução da equação (2.10) quando o processo difusivo satisfaz a seguinte condição inicial

$$\eta(x, t = 0) = N\delta(x) \quad (2.11)$$

onde N é o número total de partículas e δ denota a função delta de Dirac. Como seria esperado, tal condição implica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x, t = 0) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} N\delta(x) dx = N. \quad (2.12)$$

A solução de (2.10) pode ser facilmente obtida pela técnica das integrais de Fourier. De acordo com esse método, a concentração pode ser definida como

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_k(t) e^{ikx} dk \quad (2.13)$$

onde os coeficientes da expansão, $\eta_k(t)$, são determinados pela transformada inversa

$$\eta_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x', t) e^{-ikx'} dx'. \quad (2.14)$$

Calculando as derivadas temporal e espacial de $\eta(x, t)$ e substituindo suas expressões na equação de difusão (2.10), obtemos a seguinte forma integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial t} + Dk^2 \eta_k \right) e^{ikx} dk = 0. \quad (2.15)$$

Como a equação acima é válida para todo instante, seu integrando deve ser identicamente nulo, ou seja,

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial t} + Dk^2 \eta_k = 0 \quad (2.16)$$

cuja solução é da forma

$$\eta_k(t) = \eta_{k0} e^{-Dk^2 t}. \quad (2.17)$$

Com este resultado, a definição (2.13) pode ser escrita como:

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{k0} e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dk. \quad (2.18)$$

Por outro lado, considerando que

$$\eta(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{k0} e^{ikx} dk \quad (2.19)$$

temos para a transformada inversa

$$\eta_{k0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x', 0) e^{-ikx'} dx' \quad (2.20)$$

e de (2.18) podemos escrever

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x', 0) dx' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Dk^2 t} e^{ik(x-x')} dk = \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x', 0) dx' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Dk^2 t} \times \\ &\quad (\cos[k(x - x')] + i \sin[k(x - x')]) dk. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Note que a segunda parcela na expressão acima é igual a zero, pois se trata do produto de uma função par por uma função ímpar, com a equação se reduzindo para

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x', 0) dx' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Dk^2 t} \cos[k(x - x')] dk. \quad (2.22)$$

A integração deste resultado é mais facilmente obtida considerando as seguintes mudanças de variáveis: $k = y$, $\mu = x - x'$ e $\alpha = Dt$, com a expressão (2.22) tomando a seguinte forma

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x', 0) e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dt}} dx'. \quad (2.23)$$

Finalmente, observando que a condição (2.11), implica que as partículas estão inicialmente localizadas na origem, ou seja, $\eta(x', 0) = N\delta(x')$, a concentração pode ser escrita como

$$\eta(x, t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (2.24)$$

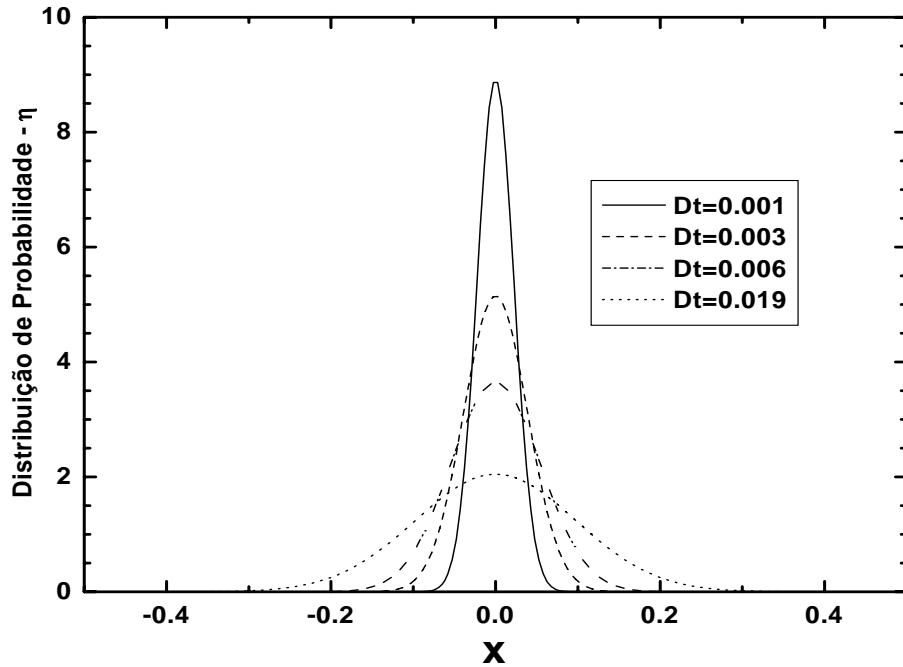


Figura 2.2: As curvas mostram a evolução temporal da distribuição $\eta(x, t)$ no regime difusivo unidimensional. Para tempos próximos de zero a curva sólida representa uma função delta centrada em torno da origem $x = 0$. Com o passar do tempo a distribuição evolui como uma gaussiana de largura variável. Como discutido no texto, a descrição de Einstein é válida para tempos longos.

O resultado acima nos mostra que as partículas se comportam como num processo gaussiano difusivo. A função $\eta(x, t)$ inicialmente representa uma delta centrada em torno da origem $x = 0$. No entanto, à medida que o tempo passa a distribuição evolui como uma gaussiana de largura variável (ver Figura 2).

Tendo calculado a função $\eta(x, t)$, é interessante determinar a distribuição de probabilidade de que uma partícula da amostra ocupe a posição entre x e $x + \mu$, quando em $t = 0$, iniciou seu movimento da posição x_0 com velocidade inicial v_0 . O conhecimento de tal função é de fundamental importância para se calcular quantidades de interesse físico,

tais como o deslocamento quadrático médio e a variância. A distribuição de probabilidade pode ser obtida dividindo-se a concentração pelo número total de partículas. Ou seja,

$$P(x, t) = \frac{\eta(x, t)}{N} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (2.25)$$

Comparando essa equação com a distribuição de probabilidades gaussiana

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.26)$$

vemos que $\langle x \rangle = 0$, enquanto para a variância temos $\sigma^2 = 2Dt$.

Este resultado significa que na teoria do movimento browniano, as grandezas fisicamente relevantes estão diretamente relacionadas com os primeiros e os segundos momentos da distribuição, que é uma propriedade geral da função gaussiana [120]. Tais momentos podem ser calculados da relação:

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n P(x, t) dx. \quad (2.27)$$

Utilizando a função distribuição (2.26), o valor de $\langle x \rangle$ e σ^2 podem ser obtidos diretamente por cálculos algébricos considerando a expressão geral acima. O primeiro momento é o deslocamento médio³

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = 0. \quad (2.28)$$

Seguindo a mesma prescrição, o segundo momento da distribuição é o deslocamento quadrático médio⁴

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = 2Dt \quad (2.29)$$

que na teoria do MB é conhecida como relação de Einstein. O coeficiente de difusão D na equação (2.29) deve ser uma função da temperatura e da

³O integrando de (2.28) é composto pelo produto de uma função par por uma função ímpar.

⁴Note que a $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \alpha^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2})$ para n par.

geometria das partículas. Einstein mostrou que para partículas esféricas de raio a , o coeficiente D pode ser calculado a partir da mobilidade b e da temperatura do meio no qual a partícula se encontra. O parâmetro b pode ser obtido da fluidodinâmica, mais precisamente a partir da lei de Stokes [122]. A relação satisfeita por D é:

$$D = k_B T b = \frac{k_B T}{6\pi\beta a} \quad (2.30)$$

onde k_B é a constante de Boltzman, T é a temperatura, β representa o coeficiente de viscosidade do meio e $b = 1/6\pi\beta a$. Inserindo (2.30) em (2.29), temos para o deslocamento quadrático médio no MB

$$\langle x^2 \rangle = \frac{RT}{3\pi N_a \beta a} t. \quad (2.31)$$

Note que para obtermos a forma originalmente deduzida por Einstein [?], utilizamos o fato de que a constante de Boltzman k_B pode ser escrita como $k_B = R/N_a$, onde R é a constante universal dos gases e N_a é o número de Avogadro.

Portanto, vemos que a partícula se comporta como um processo difusivo com $\langle x^2 \rangle \propto t$. Toda essa formulação unidimensional pode ser consistentemente generalizada para três dimensões. Neste caso, não é difícil demonstrar que (2.31) assume a seguinte forma [122]

$$\langle r^2 \rangle = 6k_B T b t = \frac{RT}{\pi N_a \beta a} t. \quad (2.32)$$

É importante também mencionar que o resultado de Einstein (2.31), ou equivalentemente, (2.32), foi um dos primeiros exemplos de uma relação onde uma flutuação quadrática média está associada com um processo dissipativo (descrito pelo coeficiente de viscosidade β). Além disso, como os valores das quantidades $\langle r^2 \rangle$, t , β e a são diretamente mensuráveis, isto significa que o número de Avogadro pode ser estimado se tivermos um bom cronômetro e um microscópio [123]. Seguindo esse

procedimento, Jean Perrin [108] obteve valores experimentais do desvio quadrático médio que permitiram uma determinação mais precisa do número de Avogadro [123, 124]. Tais resultados também contribuíram significativamente para que a hipótese atômico-molecular tivesse aceitação geral como uma descrição realista da matéria.

Posteriormente, Einstein observou que seus resultados apresentavam inconsistências para tempos curtos comparados aos tempos característicos do sistema. Uma forma simples de perceber tais dificuldades é calculando a “velocidade média” da partícula usando a relação (2.31)

$$v = \frac{d\sqrt{\langle x^2 \rangle}}{dt} = \sqrt{\frac{RT}{2\pi N_a \beta a}} \frac{1}{\sqrt{t^{1/2}}}. \quad (2.33)$$

Vemos que no limite $t \rightarrow 0$, a velocidade $v \rightarrow \infty$, sendo esta a raiz da dificuldade. Outra maneira fácil de compreender este problema pode ser vista na Figura 2. Note que, para tempos próximos de zero temos uma função δ de Dirac centrada em $x = 0$, mostrando que inicialmente todas as partículas estão localizadas na origem. Por outro lado, para intervalos de tempos tão pequenos quanto se queira ($t = 0 + \epsilon$), a curva é uma gaussiana que se estende a todo espaço, indicando que as partículas se difundiram com uma velocidade infinita. Portanto, fica claro que os resultados de Einstein só permanecem válidos para um regime de tempo suficientemente longo em comparação a escala de tempo característica do sistema.

Para corrigir tais dificuldades, precisaríamos considerar o termo de derivada segunda com respeito ao tempo na equação de difusão (2.10). Em outras palavras, é importante considerar a solução analítica da equação (2.7), já que ela incorpora naturalmente o termo $\partial^2 \eta / \partial t^2$, sugerindo que para tempos curtos teremos uma descrição ondulatória. Discutiremos alguns detalhes dessa abordagem na seção final. Por enquanto, vamos proseguir examinando as diversas variantes da teoria do movimento browniano.

2.3 MB e Forças Flutuantes: A Visão de Langevin

Poucos anos após o trabalho de Einstein, o físico francês Paul Langevin [110], posteriormente seguido por Fürther [113], Ornstein [114] e outros mais, iniciaram uma série de estudos tentando uma possível generalização daqueles resultados. Tal abordagem, comumente conhecida como tratamento de Langevin, será examinada com detalhe nesta seção.

Segundo Langevin, o MB de uma partícula na ausência de um campo de força conservativo pode ser entendido com base numa equação diferencial estocástica, agora popularmente conhecida como equação de Langevin [110, 116, 121, 45]

$$\frac{dv}{dt} = -\beta v + \xi(t) \quad (2.34)$$

onde v denota a velocidade da partícula. Nesta equação, a influência do meio sobre o movimento da partícula é decomposta em duas partes. Em primeiro lugar, existe uma força que varia lentamente, $F = -\beta v$, representando uma fricção dinâmica sobre o movimento da partícula, onde β é o coeficiente de viscosidade do meio. Existe também uma força aleatória, $\xi(t)$, que varia rapidamente em comparação com os tempos de observação. Em outras palavras, $\xi(t)$ é uma força flutuante que é uma característica básica de uma equação diferencial estocástica. Langevin definiu as propriedades dessa função por duas condições (Γ é uma constante)

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \Gamma \delta(t - t') \quad (2.35)$$

que caracterizam o chamado ruído branco⁵.

⁵O ruído é branco (“white noise”) se o espectro de potência $S(\omega)$ da função correlação $\langle \xi(t)\xi(0) \rangle$ é independente da frequência, sendo $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \langle \xi(t)\xi(0) \rangle dt$. No tratamento de Langevin, $\langle \xi(t)\xi(0) \rangle = \Gamma \delta(t)$, temos $S(\omega) = \Gamma$.

Para determinar a solução analítica de (2.34), vamos primeiramente supor uma equação de Langevin geral escrita na seguinte forma:

$$\frac{dv}{dt} + f(t)v = \xi(t) \quad (2.36)$$

onde $f(t)$ é uma função arbitrária. Definindo

$$f(t) = \frac{\dot{g}(t)}{g(t)} \quad (2.37)$$

sendo $g(t)$ também arbitrária e $\dot{g}(t)$ sua derivada, a equação (2.36) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} \ln(vg(t)) = \frac{\xi(t)}{v}. \quad (2.38)$$

Note que (2.34) é recuperada para $g(t) = e^{\beta t}$.

Portanto, a equação acima, ou equivalentemente, a equação (2.36), pode ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dt} \ln(ve^{\beta t}) = \frac{\xi(t)}{v} \quad (2.39)$$

que pela mudança de variável, $u = ve^{\beta t}$, se reduz a forma elementar

$$\frac{du}{dt} = \xi(t)e^{\beta t} \quad (2.40)$$

com solução

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \xi(t')e^{\beta t'} dt'. \quad (2.41)$$

Retornando para a antiga variável v , vemos que a solução geral da equação de Langevin é dada por

$$v(t) = v_0 e^{-\beta t} + e^{-\beta t} \int_0^t \xi(t')e^{\beta t'} dt'. \quad (2.42)$$

O valor médio e a variância na velocidade deve ser calculado através das propriedades da função $\xi(t)$. Utilizando a condição (2.35) temos

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\beta t}. \quad (2.43)$$

A variância é mais facilmente obtida calculando-se primeiramente a diferença $v - \langle v \rangle$, de onde obtemos

$$v - \langle v \rangle = e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta t'} \xi(t') dt' \quad (2.44)$$

ou ainda

$$(v - \langle v \rangle)^2 = e^{-2\beta t} \int_0^t \int_0^t e^{\beta(t'+t'')} \xi(t') \xi(t'') dt'' dt'. \quad (2.45)$$

Tomando a média, utilizando novamente a condição (2.35) e afetuando a integração, obtemos facilmente

$$\sigma_v^2 = \frac{\Gamma}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t}) \quad (2.46)$$

onde $\sigma_v^2 = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$ é a variância na velocidade. Para calcular a constante Γ , observemos que o regime estacionário é obtido para tempos longos em comparação com os tempos de flutuação da função $\xi(t)$, indicando que $\langle v \rangle$ se anula em (2.43), e de (2.46) temos que

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\Gamma}{2\beta}. \quad (2.47)$$

Por outro lado, o teorema da equipartição garante que a energia cinética média de uma partícula em movimento corresponde a $\frac{1}{2}k_B T$ para cada grau de liberdade, mais precisamente

$$\frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T \quad (2.48)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann. Combinando as duas últimas expressões, obtemos a relação exata entre Γ e a temperatura do meio externo

$$\Gamma = \frac{2\beta k_B T}{m}. \quad (2.49)$$

Uma vez determinada a variância da velocidade é conveniente calcular o deslocamento quadrático médio, já que este é uma grandeza, experimentalmente mensurável (mais detalhes nessa abordagem pode ser vista em [45])

$$x = x_0 + \int_0^t v(t') dt' \quad (2.50)$$

onde x_0 é a posição da partícula em $t = 0$. Substituindo na integral acima o valor de $v(t)$ dado pela expressão (2.42), segue que

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 \int_0^t e^{-\beta t'} dt' + \int_0^t e^{-\beta t'} \int_0^{t'} \xi(t'') e^{\beta t''} dt' dt'' \\ &= x_0 + v_0 \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + \frac{1}{\beta} \int_0^t \xi(t'') (1 - e^{\beta(t''-t)}) dt''. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Desta equação obtemos o deslocamento médio

$$\langle x \rangle = x_0 + v_0 \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \quad (2.52)$$

sendo o deslocamento quadrático médio obtido calculando-se primeiramente a diferença

$$x - \langle x \rangle = \frac{1}{\beta} \int_0^t \xi(t'') (1 - e^{\beta(t''-t)}) dt'' \quad (2.53)$$

de onde obtemos

$$(x - \langle x \rangle)^2 = \frac{1}{\beta^2} \int_0^t \int_0^t \xi(t') \xi(t'') (1 - e^{\beta(t'-t)}) (1 - e^{\beta(t''-t)}) dt' dt''. \quad (2.54)$$

Na expressão acima, tomando a média, usando a condição (??) e efetuando as integrais obtemos facilmente

$$(\Delta x)^2 = \frac{\Gamma}{\beta^2} \left\{ t - \frac{2}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + \frac{1}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t}) \right\}. \quad (2.55)$$

Observe que no limite de tempos longos o termo dominante é o primeiro, mais precisamente

$$(\Delta x)^2 = \frac{\Gamma}{\beta^2} t = 2 \frac{k_B T}{m\beta} t \quad (2.56)$$

ou equivalentemente,

$$(\Delta x)^2 = 2Dt \quad (2.57)$$

que é a relação de Einstein (ver equação (2.29)). Vemos portanto, que no regime de tempos longos a abordagem de Langevin é equivalente a descrição

de Einstein. Neste limite também pode ser mostrado que a distribuição de probabilidades relativa à variável v obedece a uma distribuição maxweliana de velocidades [45]

$$P(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left\{-\frac{mv^2}{2k_B T}\right\}. \quad (2.58)$$

2.4 A Equação de Fokker-Planck

Como vimos na seção 3, a equação de Langevin na forma (2.34) descreve o movimento de uma partícula de massa m imersa num fluido com coeficiente de viscosidade β . Este mesmo sistema pode ser descrito por uma equação de movimento que governa a evolução temporal de uma distribuição de probabilidade. Tal equação é comumente conhecida como equação de Fokker-Planck e constitui o objeto de investigação desta seção. A equação de Fokker-Planck é um tipo especial de equação mestra [46, 45], freqüentemente usada como uma boa aproximação para descrever processos markovianos mais gerais.

Considere uma equação do tipo Langevin da seguinte forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t) \quad (2.59)$$

onde a variável x denota uma coordenada generalizada, que em princípio, pode ser a posição ou velocidade. Para esta variável independente, a equação de Fokker-Planck dependente do tempo é comumente escrita como [46, 45]

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[f(x)\eta(x, t)] + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.60)$$

onde $f(x)$ relaciona a natureza da força atuando na equação (2.59) e $\eta(x, t)$ representa a distribuição de probabilidade de encontrar a partícula no intervalo entre x e $x + \mu$. A equação acima também pode ser reescrita

como

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.61)$$

que representa uma equação de continuidade para a densidade de probabilidade $\eta(x, t)$, na qual a quantidade $S(x, t)$ deve ser interpretada como uma corrente de probabilidade definida por

$$S(x, t) = f(x)\eta(x, t) - \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x}. \quad (2.62)$$

A integração de (2.61) com x assumindo valores no intervalo $[a, b]$ nos fornece

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \eta(x, t) dx = S(a, t) - S(b, t) \quad (2.63)$$

e como

$$\int_a^b \eta(x, t) dx = 1 \quad (2.64)$$

segue que

$$S(a, t) = S(b, t), \quad (2.65)$$

nos mostrando que a conservação da probabilidade total é uma consequência direta das condições de contorno.

Vamos determinar a solução da equação de Fokker-Planck na forma (2.61) para o caso estacionário, considerando que os valores extremos $S(x = a, t)$ e $S(x = b, t)$ são nulos. Nestas condições, segue de (2.62) que

$$f(x)\eta(x) - \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x} = 0 \quad (2.66)$$

cuja solução é

$$\eta(x) = A e^{\frac{\Gamma}{2} \int f(x) dx} \quad (2.67)$$

onde a constante A é fixada pela condição de normalização de $\eta(x)$. Para o caso de uma força viscosa, $f = -\beta v$ e a constante Γ dada por (50), a solução acima assume a seguinte forma

$$\eta(v) = \left[\frac{m}{2\pi k_B T} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{mv^2}{2k_B T} \right] \quad (2.68)$$

que é a distribuição maxwelliana de velocidades.

A solução não estacionária é obtida diretamente da equação (2.60). Utilizando a mesma força viscosa do exemplo acima, tal equação pode ser representada como

$$\frac{\partial \eta(v, t)}{\partial t} = \beta \frac{\partial}{\partial v} [v\eta(v, t)] + \frac{\beta k_B T}{m} \frac{\partial^2 \eta(v, t)}{\partial v^2} \quad (2.69)$$

com solução dada por [46, 45, 127]

$$\eta(v, t) = \left[\frac{m}{2\pi k_B T(1 - e^{-2\beta t})} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{m(v - v_0 e^{-\beta t})^2}{2k_B T(1 - e^{-2\beta t})} \right]. \quad (2.70)$$

Comparando a expressão acima com a distribuição gaussiana (veja (2.26)), vemos que os valores da média $\langle v \rangle$ e da variância $(\Delta v)^2$ são respectivamente

$$\langle v \rangle = v_0 e^{-\beta t} \quad (2.71)$$

e

$$(\Delta v)^2 = \frac{k_B T}{m} (1 - e^{-2\beta t}) \quad (2.72)$$

que são os mesmos valores obtidos no tratamento de Langevin (cf. Eqs. (2.43) e (2.46)). Como seria esperado, vemos também de (2.70) que para tempos suficientemente longos, o sistema relaxa para o estado de equilíbrio, pois a distribuição de probabilidades se reduz para a distribuição de velocidades maxwelliana.

2.5 Caminhadas Aleatórias: O tratamento de M. Kac

O problema do caminhante aleatório, é dotado de um caráter bastante universal em física. No magnetismo, por exemplo, um átomo de spin 1/2 tem um momento magnético $\vec{\nu}$ e de acordo com a mecânica quântica, o spin pode estar “up” ou “down”, com respeito a uma dada direção. Se essas possibilidades são igualmente prováveis, então qual o momento

magnético médio $\langle \vec{\nu} \rangle$ para uma amostra contendo N átomos? Um outro problema bastante familiar, corresponde a difusão de partículas num meio intermolecular. Suponha que uma partícula percorre uma distância média l entre duas colisões sucessivas com as moléculas do meio. Qual será a distância percorrida após N colisões?

A solução para o problema da caminhada aleatória, na sua forma mais geral, é facilmente entendido considerando-se a versão mais simples do problema em uma dimensão, tal como originalmente investigado por M. Kac [47]. Suponha que um caminhante aleatório partindo da origem e se deslocando em linha reta, realiza n_1 passos de comprimento fixo l para a direita com probabilidade p e n_2 passos para a esquerda com probabilidade $q = 1 - p$, de modo que $p + q = 1$. Além do mais, estamos considerando que os passos são eventos mutuamente independentes. O problema é determinar qual a probabilidade $P_N(m)$ de encontrar o caminhante na posição $x = ml$, onde $-N \leq m \leq N$, depois de ter dado N passos. O número total de passos é

$$N = n_1 + n_2 \quad (2.73)$$

sendo m a grandeza que parametriza a distância líquida percorrida, isto é,

$$m = n_1 - n_2 \quad (2.74)$$

e como cada passo tem comprimento l , a distância que o caminhante percorre a partir da origem é dada por:

$$x = (n_1 - n_2)l = ml. \quad (2.75)$$

Considerando que os passos são estatisticamente independentes, de probabilidades p e q , a probabilidade de realizar n_1 passos para a direita e n_2 passos para a esquerda é independente da sequência de passos e pode ser escrita como [128]

$$p.p.p.....p \times q.q.q.....q = p^{n_1}q^{n_2}. \quad (2.76)$$

Existem várias maneiras de arranjar os N passos de forma que n_1 seja o número de passos para a direita e n_2 seja o número de passos para a esquerda. Na verdade, descobrir o número de maneiras de arranjar os n_1 e n_2 passos, é descobrir de quantas maneiras distintas podem ser arranjados $n_1 + n_2$ objetos, sendo que a permutação de qualquer um dos objetos $(n_1 + n_2)$ é irrelevante. Tal fato significa que o número de possibilidades distintas é exatamente [120]

$$\frac{N!}{n_1!n_2!} \quad (2.77)$$

e que a probabilidade total, $P_N(n_1)$, de realizar n_1 passos para a direita e n_2 para a esquerda num total de N passos, em qualquer ordem, é dada pelo produto

$$P_N(n_1) = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} \quad (2.78)$$

pois todas as sequências são independentes. Como vemos, o valor de $P_N(n_1)$ é uma distribuição binomial. Lembrando que a expansão binomial de $(p+q)^N$, onde p e q são dois números quaisquer, é dada por

$$(p+q)^N = \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} \quad (2.79)$$

segue que a distribuição $P_N(n_1)$ é normalizada, ou seja,

$$\sum_{n_1=0}^N P_N(n_1) = \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} = (p+q)^N = 1. \quad (2.80)$$

Vamos determinar a probabilidade $P_N(m)$ do caminhante se encontrar na posição $x = ml$. Das equações (2.73) e (2.74), temos

$$n_1 = \frac{N+m}{2} \quad e \quad n_2 = \frac{N-m}{2}. \quad (2.81)$$

Substituindo esses resultados em (2.78), pode ser visto facilmente que a distribuição $P_N(m)$ tem a forma

$$P_N(m) = \frac{N!}{(\frac{N+m}{2})!(\frac{N-m}{2})!} p^{\frac{N+m}{2}} q^{\frac{N-m}{2}} \quad (2.82)$$

ou, equivalentemente,

$$P_N(m) = \frac{N!}{(\frac{N+m}{2})!(\frac{N-m}{2})!} p^{\frac{N+m}{2}} (1-p)^{\frac{N-m}{2}}. \quad (2.83)$$

Para estabelecer uma conexão com o fenômeno de difusão, é necessário descrever o problema do caminhante aleatório por meio de uma equação diferencial envolvendo variáveis contínuas [47, 45, 128]. Suponha que τ seja o tempo necessário para realizar um passo, então $P_N(m)$ dado por (2.83) é a probabilidade da partícula se encontrar na posição $x = ml$ no tempo $N\tau$. Somente uma partícula que esteja em $x = (m-1)l$ ou $x = (m+1)l$ no tempo $t = (N-1)\tau$ poderá atingir a posição $x = ml$. No passo seguinte, a probabilidade $P_N(m)$ obedece a seguinte relação de recorrência [47]

$$P_{N+1}(m) = pP_N(m-1) + qP_N(m+1) \quad (2.84)$$

que representa um exemplo típico de um Processo Markoviano⁶. Equações estocásticas dessa natureza, nas quais os detalhes da dinâmica de um sistema físico são substituídos por leis probabilísticas, desempenham um papel extremamente importante no estudo de sistemas fora do equilíbrio.

Conforme visto anteriormente, se N é suficientemente grande, a função discreta $P_N(m)$ pode ser substituída por uma função contínua $\eta(N\tau, ml) = \eta(t, x)$. Reescrevendo a relação de recorrência (2.84) para $\eta(t, x)$, temos

$$P_{N+1}(m) = \eta((N+1)\tau, ml) = \eta(N\tau + \tau ml) = \eta(t + \tau, x) \quad (2.85)$$

$$P_N(m+1) = \eta(N\tau, (m+1)l) = \eta(N\tau, ml + l) = \eta(t, x + l) \quad (2.86)$$

$$P_N(m-1) = \eta(N\tau, (m-1)l) = \eta(N\tau, ml - l) = \eta(t, x - l). \quad (2.87)$$

Substituindo esses resultados em (2.84) e expandindo ambos os lados em série de Taylor até segunda ordem, obtemos

$$\eta + \tau \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{2} \tau^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = (p+q)\eta + l(q-p) \frac{\partial \eta}{\partial x} + (p+q) \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (2.88)$$

⁶Nos chamados processos markovianos não existe efeitos de memória, ou seja, a probabilidade condicional relativa a cada variável aleatória $q^i(t)$ de uma partícula, só depende do valor de $q^i = q_0^i$ num instante anterior t_0 [46, 121].

Considerando que a probabilidade total satisfaz $p+q = 1$, a equação acima se reduz para

$$\frac{\tau \partial^2 \eta}{2 \partial t^2} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{l}{\tau} (q-p) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{l^2}{2\tau} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad (2.89)$$

que representa uma equação generalizada para a caminhada aleatória. Por se tratar de uma equação diferencial do tipo hiperbólica, devemos esperar que sua solução seja válida também no regime de pequenos tempos, já que ela incorpora naturalmente, uma derivada segunda com respeito ao tempo na função $\eta(x, t)$. Como veremos na seção seguinte, esse fato é de fundamental importância para corrigir as inconsistências presentes na descrição de Einstein.

Algumas aproximações interessantes devem ser discutidas na equação (2.89). Primeiramente, observamos que a conexão direta com o movimento browniano difusivo é estabelecida quando assumimos que $p = q = 1/2$. Neste caso, definindo

$$D = \frac{l^2}{2\tau} \quad (2.90)$$

a equação (2.89) se reduz a

$$\frac{\tau \partial^2 \eta}{2 \partial t^2} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (2.91)$$

que é precisamente a equação (2.7). Novamente, a equação de difusão que serviu de base para o tratamento de Einstein é recuperada quando fazemos o mesmo tipo de aproximação (veja a equação (2.9)), ou seja,

$$\frac{\tau \partial^2 \eta}{2 \partial t^2} \ll \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (2.92)$$

Portanto, a conexão com o contínuo é estabelecida de maneira consistente, de modo que todo o tratamento posterior, em particular, o cálculo dos valores médios das grandezas fisicamente relevantes, permanece idêntico ao das seções (2) e (3).

2.6 A Equação de Difusão Generalizada

Como vimos, a equação comumente utilizada para descrever transmissão de calor e difusão de partículas, constitui na verdade, um modelo aproximado, ou seja, uma descrição menos rigorosa de tais fenômenos. Um argumento favorável a essa visão se baseia na idéia de que equações parabólicas do tipo (2.10) transmitem (em alguns regimes) sinais com velocidades infinitas. Naturalmente, tal resultado é inconsistente já que a velocidade máxima com a qual uma perturbação se propaga num fluido ou meio elástico deve ser da ordem da velocidade do som.

Se considerarmos que em cada intervalo de tempo τ uma partícula se desloca aleatoriamente com velocidade $v = l/\tau$, vemos que a equação (2.91) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{v^2}{D} \frac{\partial \eta}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (2.93)$$

que representa uma equação de onda amortecida para a caminhada aleatória.

Para estudar a influência do termo adicional na equação de movimento, vamos considerar uma onda plana se deslocando num meio infinito. Em $x = 0$ supomos que $\eta(0, t) = e^{i\omega t}$, onde ω é a freqüência de vibração da onda. Escrevendo a solução geral de (2.93) na forma

$$\eta(x, t) = e^{Ax} e^{i(\omega t - Bx)} \quad (2.94)$$

onde A e B são constantes, obtemos

$$A^2 = \frac{\omega^2}{2v^2} \left[\left(1 + \frac{v^4}{D^2 \omega^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (2.95)$$

e

$$B^2 = \frac{\omega^2}{2v^2} \left[\left(1 + \frac{v^4}{D^2 \omega^2} \right)^{1/2} + 1 \right] \quad (2.96)$$

com a velocidade de propagação da onda escrita como

$$v_p^2 = \frac{\omega^2}{B^2} = \frac{2v^2}{\left[\left(1 + \frac{v^4}{D^2\omega^2}\right)^{1/2} + 1\right]} < v^2. \quad (2.97)$$

Para o caso em que $\omega \ll v^2/D$, ou equivalentemente, $\partial^2\eta/\partial t^2 \ll \partial\eta/\partial t$ as relações anteriores se reduzem a

$$A^2 = B^2 = \frac{\omega}{2D} \quad (2.98)$$

$$v_p^2 = 2\omega D \quad (2.99)$$

que são os resultados obtidos da equação de difusão usual. Por outro lado, para o caso em que $\omega \gg v^2/D$, os resultados são também fisicamente consistentes, pois a velocidade de propagação da onda tem como limite a velocidade das partículas. De fato, a freqüência de vibração de uma onda se deslocando num meio difusivo não deve exceder a freqüência de colisão das partículas do meio.

A solução da equação (2.93) para as condições gerais $\eta(x, 0) = N\delta(x)$ e $(\partial\eta/\partial t)_{t=0} = 0$, válida para $|x| \leq vt$ pode ser escrita como [129]

$$\begin{aligned} \eta(x, t) = & Ne^{-t/\tau} \left[\frac{1}{2}\delta(x + vt) + \frac{1}{2}\delta(x - vt) \right] + \\ & \frac{N}{2v\tau} J_0 \left[\frac{(x^2 - v^2 t^2)^{1/2}}{v\tau} \right] + \frac{Nt}{2\tau} \frac{J_1[(x^2 - v^2 t^2)^{1/2}/v\tau]}{(x^2 - v^2 t^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.100)$$

sendo J_0 e J_1 funções de Bessel de primeira espécie.

Para o caso $|x| > vt$, a solução de D'Alambert para uma onda plana amortecida se deslocando na direção x é recuperada

$$\eta(x, t) = Ne^{-t/\tau} \left[\frac{1}{2}\delta(x + vt) + \frac{1}{2}\delta(x - vt) \right]. \quad (2.101)$$

Da expressão acima vemos também que a velocidade de propagação da onda nunca excede a velocidade das partículas. Como o produto $v\tau$ é da ordem do livre caminho médio λ , o argumento das funções J_0 e J_1 cresce

rapidamente quando $|x|$ é muito menor que vt . Neste caso, a expansão assintótica para as funções de Bessel fornecem

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \frac{\pi}{2}(\nu + \frac{1}{2}) \right]. \quad (2.102)$$

Portanto, (2.100) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \eta(x, t) = & Ne^{-t/\tau} \left[\frac{1}{2} \delta(x + vt) + \frac{1}{2} \delta(x - vt) \right] + \\ & \frac{Ne^{-\frac{t}{\tau}y^2}}{4v\tau} \left[\frac{\pi t}{2\tau} (1 - y^2)^{1/2} \right]^{-1/2} [1 + (1 - y^2)^{-1/2}] \end{aligned} \quad (2.103)$$

que representa a solução geral da equação de onda modificada para a caminhada aleatória, sendo $y = x/vt < 1$. Note que a expressão acima é composta de duas partes. O primeiro termo relaciona a solução de onda de D'Alambert que rapidamente se torna desprezível, enquanto que o segundo se refere a difusão das partículas.

No limite $y \ll 1$, ou equivalentemente $x \ll vt$ (tempos longos), o segundo termo da solução acima tende para

$$\eta(x, t) = \frac{N}{(2v^2\tau t\pi)^{1/2}} e^{-x^2/2v^2\tau t} = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt} \quad (2.104)$$

que é precisamente a solução da equação de difusão usual (Cf. (24)). Note que D foi reintroduzido pela definição (2.90).

Portanto, vemos que a equação ondulatória hiperbólica (2.7), ou equivalentemente (2.93), resolve o problema difusivo para tempos curtos, cuja existência foi reconhecida pelo próprio Einstein ao propor sua teoria do MB. Nesse aspecto, é importante ressaltar que muitos livros textos que tratam o problema difusivo não discutem o problema de tempos curtos, ou equivalentemente, se a propagação de uma perturbação com velocidade infinita num meio contínuo é conceitualmente correta.

2.6.1 Alumas Soluções Numéricas

Para justificar que a solução (2.100) é fisicamente correta, mostraremos nos gráficos seguintes algumas soluções numéricas da equação de difusão generalizada (2.93) e comparamos os resultados com a sua versão padrão, tal como descrita por (2.10). Os detalhes podem ser vistos na referência [130].

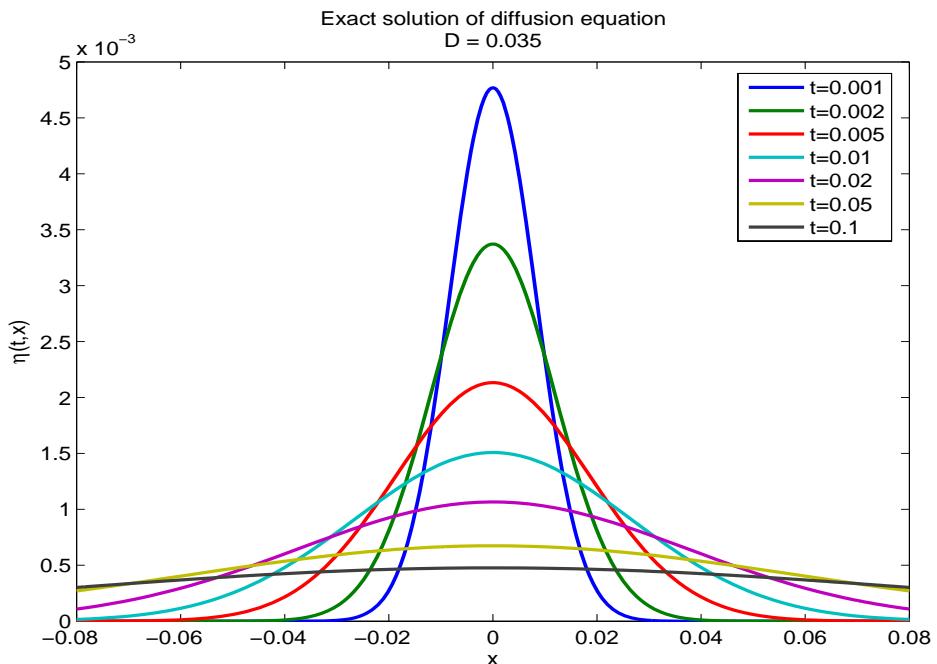


Figura 2.3: As curvas acima mostram o comportamento da solução obtida da equação de difusão parabólica (2.10) para valores específicos do tempo. Note que à medida em que o tempo se aproxima de zero, a função distribuição tende para uma função delta centrada em torno da origem $x = 0$, revelando um comportamento típico das equações parabólicas do tipo (2.10).

Na figura abaixo, vemos que para tempos curtos, ou seja, para $t \rightarrow 0$, as duas soluções coincidem e são descritas por uma função delta tal como deveríamos esperar.

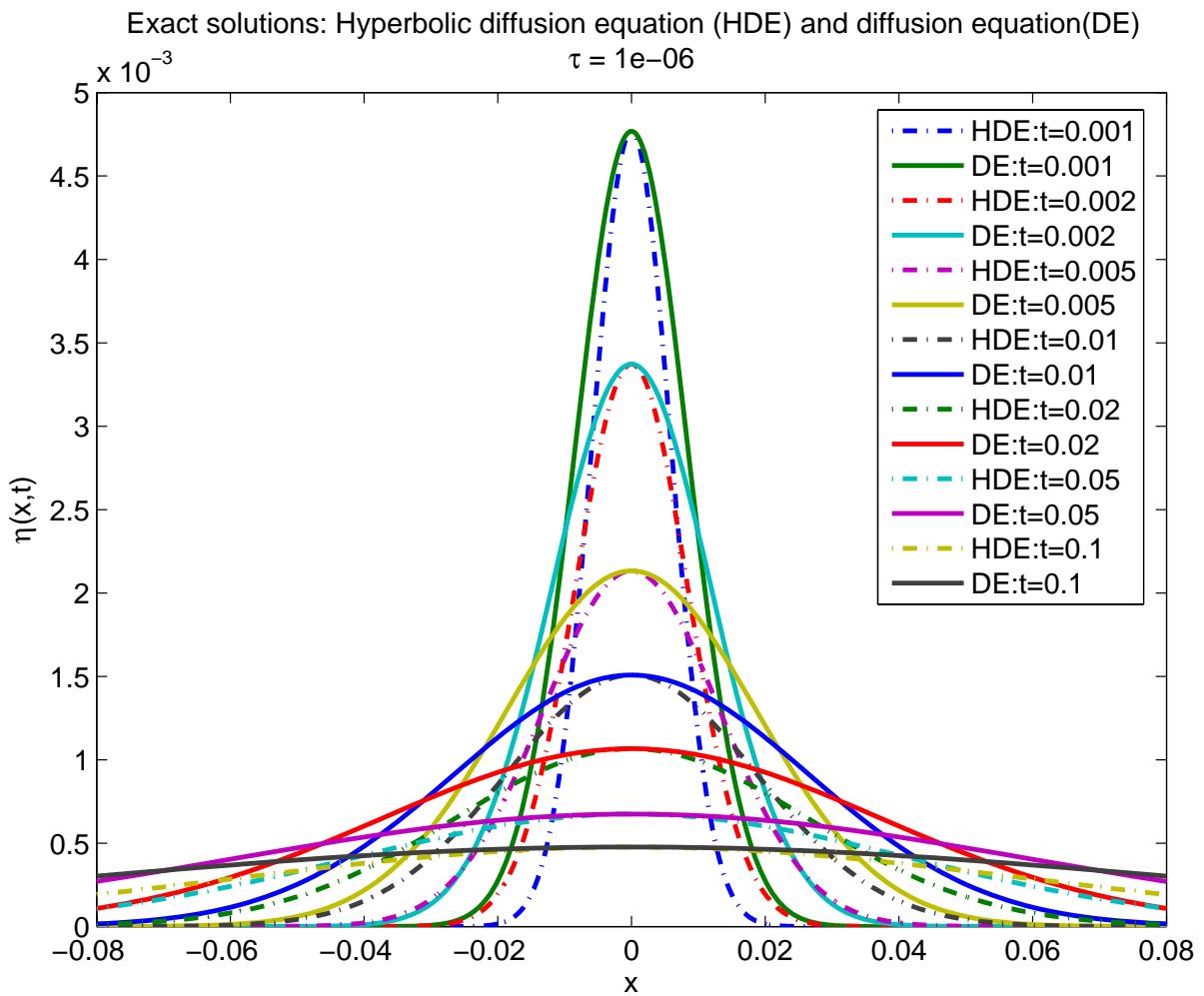


Figura 2.4: As curvas acima mostram uma comparação entre as soluções da equação de difusão parabólica e a sua versão hiperbólica para diferentes valores do tempo. Note que, para tempos curtos (tendendo a zero) o par de soluções coincidem, enquanto que, para tempos ligeiramente diferentes de zero, as duas soluções exibem comportamentos ligeiramente diferentes, ou seja, as curvas referentes a equação parabólica se alargam mais rapidamente do que as solução da equação hiperbólica.

Capítulo 3

Movimento Browniano: Efeitos da Viscosidade Variável

3.1 Introdução

Tradicionalmente, os estudos endereçados a teoria do movimento browniano em meios homogêniros (num líquido ou gás) revelam um comportamento padrão para o deslocamento quadrático médio ($\langle \Delta x \rangle^2$)². Mais precisamente, a evolução desta grandeza física é caracterizada por um crescimento linear no tempo, veja por exemplo, as relações (2.29) e (2.57) apresentadas no capítulo anterior. Entretanto, alguns sistemas físicos mais complexos exibem comportamentos ligeiramente diferente na quantidade ($\langle \Delta x \rangle^2$). Mais recentemente, estudos mais modernos nesta área apontam para uma relação do tipo lei de potência [131, 132]

$$\langle \Delta x \rangle^2 \sim t^\nu, \quad (3.1)$$

sendo $\nu \neq 1$. Particularmente, para os casos onde $\nu > 1$, o sistema descrito pela relação acima exibe um comportamento superdifusivo [133, 134, 135, 136, 137] enquanto que $\nu < 1$ o regime é subdifusivo [138]. O mesmo tipo de comportamento pode ser encontrado em diferentes sistemas físicos. Em especial, resultados equivalentes foram obtidos para o caso de sistemas

contendo efeitos de memórias¹ [118, 139, 140], viscosidade dependente do tempo [141], equações de difusão e de Fokker-Planck não linear e com derivadas fracionárias [142, 143, 144, 145, 146, 147]. Outros tipos de sistemas exibindo difusão anômala foram obtidos recentemente para uma classe especial de ruído colorido denominado de *dichotomous*, para o qual foi proposto uma função de correlação com uma exponencial dependente do tempo [148, 149]. O interesse crescente sobre esses sistemas vem da possibilidade de modificar substancialmente o comportamento padrão previsto pelo formalismo de Langevin, e como bônus extra, fornecem uma descrição física mais realista dos sistemas ditos *não Markovianos* [126].

É nesse contexto de sistemas exibindo difusão anômala que se insere o presente capítulo. Em particular, mostraremos que a presença de uma viscosidade dependente do tempo na equação de Langevin pode exibir um regime de difusão anômala. Para ser mais preciso, neste capítulo apresentaremos o comportamento estocástico de uma classe de sistemas com amortecimento variável, os quais são descritos por uma lagrangiana dependente do tempo. Este formalismo estocástico é obtido assumindo uma dada expressão para o então chamado ruído colorido [141]. A equação diferencial será resolvida analiticamente e todas as quantidades fisicamente relevantes serão obtidas.

3.2 Formalismo de Langevin para Viscosidade Variável

Como é bem conhecido, os efeitos de uma viscosidade constante sobre os sistemas dissipativos são introduzidos por uma lagrangiana dependente do tempo, usualmente conhecida como lagrangiana de Batmann [150]. Nestes

¹Sistemas desse tipo são chamados de sistemas não Markovianos. Em tais sistemas, a probabilidade condicional relativa a uma determinada variável aleatória $x^i(t)$, só depende do valor $x^i = x_0^i$ num instante anterior t_0 [126, 121]

modelos de lagrangiana, tal viscosidade constante é introduzindo por uma exponencial dependente do tempo e desempenha um papel fundamental na descrição de sistemas oscilatórios. Por outro lado, muitos sistemas na natureza exibem viscosidades dependente do tempo, e portanto, não podem ser descritos dentro do formalismo original de Batemann. Para contornar essa dificuldade, foi proposto recentemente, uma classe paramétrica de lagrangianas que incorporam uma viscosidade dependente do tempo sobre o movimento de uma partícula clásica [151]. Este novo modelo de lagrangiana é descrito por um parâmetro contínuo q , assumindo valores sobre o intervalo $[0, 1]$ e se reduz ao caso padrão no limite $q \rightarrow 1$.

O modelo de lagrangiana acima mencionado, será denominada de q -lagrangiana, cuja representação matemática é dada por [151]

$$L_q(x, \dot{x}, t) = e_q(\beta t) \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right], \quad (3.2)$$

onde β é uma constante com dimensão de inverso de tempo, aqui representando o coeficiente de viscosidade. A distribuição $e_q(\beta t)$ representa uma generalização da função exponencial padrão, proposta em 1988 por Constantino Tsallis [152] na formulação não-extensiva da mecânica estatística. Esta função distribuição é comumente chamada de q -exponencial, cuja relação matemática é escrita como

$$e_q(\beta t) = [1 + (1 - q)\beta t]^{1/(1-q)}, \quad (3.3)$$

onde q representa um número real. Note que no limite $q \rightarrow 1$, a função distribuição acima recupera a exponencial usual, pois $e_1(\beta t) = e^{\beta t}$, e portanto, o modelo padrão de lagrangiana de Batemann será recuperado. Seguindo esta mesma linha, a generalização de outras funções especiais bem como a álgebra relacionada a elas também tem sido estudadas na literatura, como exemplo veja as referências [153, 154]. Para os casos estudados nesta tese, consideraremos apenas a propriedade mais fundamental dessa

q -exponencial, a qual pode ser definida pelo limite $\lim_{q \rightarrow 1} e_q(y) = e^y$.

Na presente seção, estudaremos em detalhe, o formalismo de Langevin para a classe paramétrica de lagrangianas descrita pela relação (3.2).

3.2.1 Derivação da Equação de Movimento

Utilizando cálculos algébricos simples, pode ser mostrado facilmente que a equação de Euler-Lagrange obtida da lagrangiana (3.2) é escrita como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{1 + (1 - q)\beta t} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{m} \frac{dV(x)}{dx} = 0, \quad (3.4)$$

que descreve um sistema geral com uma viscosidade efetiva dependente do tempo (β_q)

$$\beta_q(t) = \frac{\beta}{1 + (1 - q)\beta t}. \quad (3.5)$$

Para o caso de um potencial quadrado, mais precisamente, para $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$, onde m é a massa e ω_0 a frequência natural de oscilação, a equação acima (3.4) descreve uma categoria de sistemas gerais com viscosidade dependente do tempo que serão genericamente denominados q -osciladores. Mais precisamente, a equação geral de movimento é dada por [151]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta_q(t) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.6)$$

com a função $\beta_q(t)$ sendo descrita pela relação (3.5). Um estudo mais detalhado destes sistemas será feito na seção seguinte.

3.2.2 Obtenção da Solução Geral

Para uma melhor compreensão da física que será discutida na seção seguinte e no próximo capítulo, nesta seção daremos uma atenção especial aos sistemas com viscosidade dependente do tempo, comumente chamado de q -osciladores, tal como mencionado acima. Tais sistemas são descritos por

um parâmetro contínuo q tomando valores sobre os números reais. No nosso caso, o parâmetro q assumirá valores no intervalo $0 < q < 1$.

Como vemos, a q -lagrangiana (3.2) efetivamente descreve um oscilador amortecido com coeficiente de amortecimento dependente do tempo. Note que, em $t = 0$ temos $\beta_q(0) = \beta$ para todos os valores de q , ou seja, o movimento do sistema satisfaz a equação familiar para o oscilador com coeficiente de amortecimento constante. Porém, para tempos longos, ou mais precisamente, para uma escala de tempo $t >> |\beta(1 - q)|^{-1}$, o sistema descrito por (3.6) é um atrator natural para o oscilador harmônico simples².

O comportamento de $\beta_q(t)$ para diferentes valores de q é mostrado nas Figs. (3.1) e (3.2).

Para $q < 1$, o coeficiente $\beta_q(t)$ diminui continuamente com o tempo sendo a taxa de decrescimento mais rápida para menores valores de q . Porém, para $q > 1$, $\beta_q(t)$ inicialmente aumenta se aproximando de um valor infinito em $t = [\beta(q - 1)]^{-1}$, e então muda abruptamente seu sinal, se aproximando de zero para grandes valores do tempo. Naturalmente, estas características apontam um comportamento qualitativo bastante diferente para uma distribuição natural de q -osciladores em duas subclasses. A primeira é um subconjunto bem comportado caracterizado por $q < 1$, enquanto a segunda (o caso anômalo) tem q maior que a unidade.

Neste ponto, para obter soluções analíticas da equação de movimento (3.6) vamos considerar o mais interessante dos q -osciladores do ponto de vista físico, aquele para o qual o parâmetro q é menor que a unidade. Para tal, é conveniente fazer uma mudança de variável para um tempo auxiliar $T = 1 + (1 - q)\beta t$, com a equação original se reduzindo a forma

$$\frac{d^2x}{dT^2} - \frac{1}{(q - 1)} \frac{1}{T} \frac{dx}{dT} + \delta_q^2 x = 0, \quad (3.7)$$

²Note que para $t >> |\beta(1 - q)|^{-1} >> 1$, teremos $\beta_q(t >> 1) = 0$.

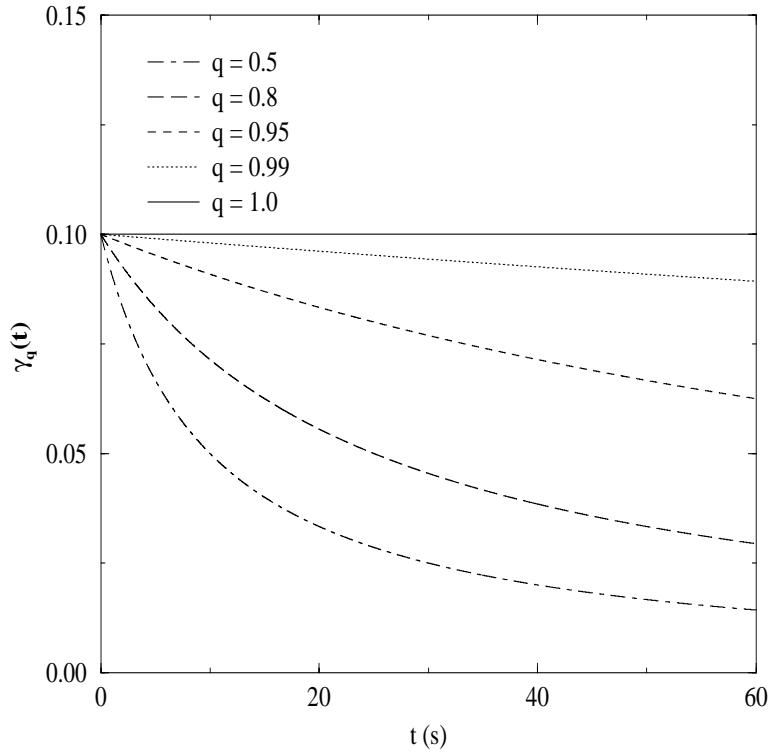


Figura 3.1: Evolução do coeficiente de fricção $\beta_q(t)$ para valores do parâmetro livre $q < 1$. Note que para o caso $q = 1$, teremos uma fricção constante. Entretanto, a taxa de decrescimento do coeficiente $\beta_q(t)$ aumenta continuamente com o tempo para valores de q cada vez menores.

onde

$$\delta_q = \frac{\omega_0}{\beta(1-q)}. \quad (3.8)$$

Como devemos checar, a solução geral de (3.7) pode ser escrita como [162]

$$x(T) = T^\nu \zeta_\nu(\delta_q T), \quad (3.9)$$

onde ζ_ν denota combinações lineares das funções de Bessel de ordem ν , as quais dependem do parâmetro q na forma $\nu = \frac{q}{(q-1)}$.

Retornando a antiga variável t , pode ser visto facilmente que a solução

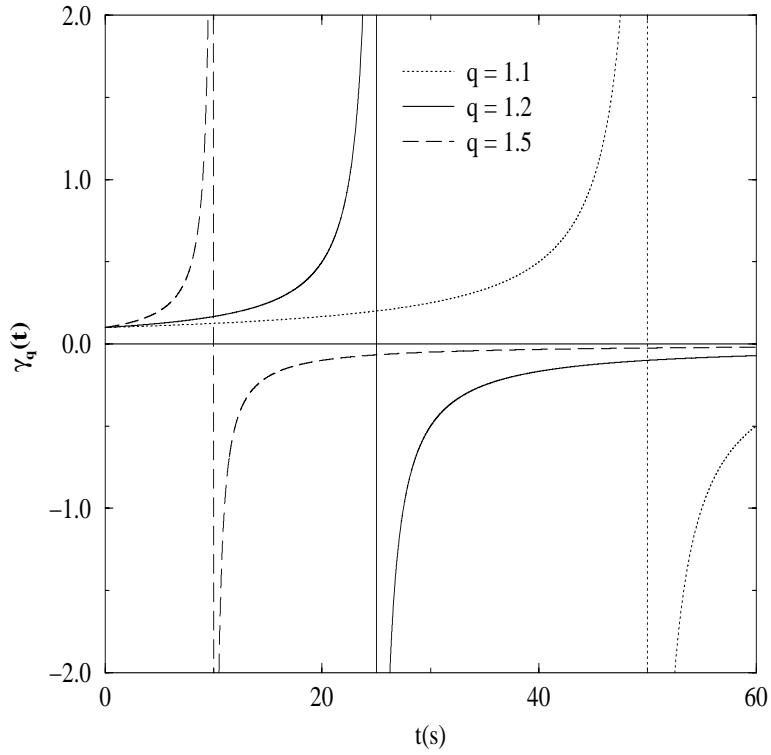


Figura 3.2: Evolução do coeficiente de fricção $\beta_q(t)$ para valores do parâmetro livre $q > 1$. Inicialmente, o coeficiente $\beta_q(t)$ aumenta e se aproxima de um valor infinito no $t = [\beta(q-1)]^{-1}$, quando então muda abruptamente de sinal eventualmente indo a zero para grandes valores do tempo.

geral da equação de movimento (3.6) é dada por [151]

$$x(t) = [e_q(\beta t)]^{-q} \{ AJ_\nu(\omega_0 t + \delta_q) + BY_\nu(\omega_0 t + \delta_q), \} \quad (3.10)$$

sendo J_ν e Y_ν são funções de Bessel de primeira e segunda espécie respectivamente, e A e B são constantes a serem determinadas de acordo com as condições iniciais. Para as condições iniciais arbitrárias $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$ as constantes A e B são

$$A = \frac{\pi}{2} \delta_q [x_0 Y_{\nu-1}(\delta_q) - \frac{v_0}{\omega_0} Y_\nu(\delta_q)] \quad (3.11)$$

$$B = -\frac{\pi}{2}\delta_q[x_0 J_{\nu-1}(\delta_q) - \frac{v_0}{\omega_0} J_\nu(\delta_q)]. \quad (3.12)$$

A Fig.(3.1) mostra os gráficos do q -oscilador para alguns valores do parâmetro q sobre o intervalo $0 < q < 1$.

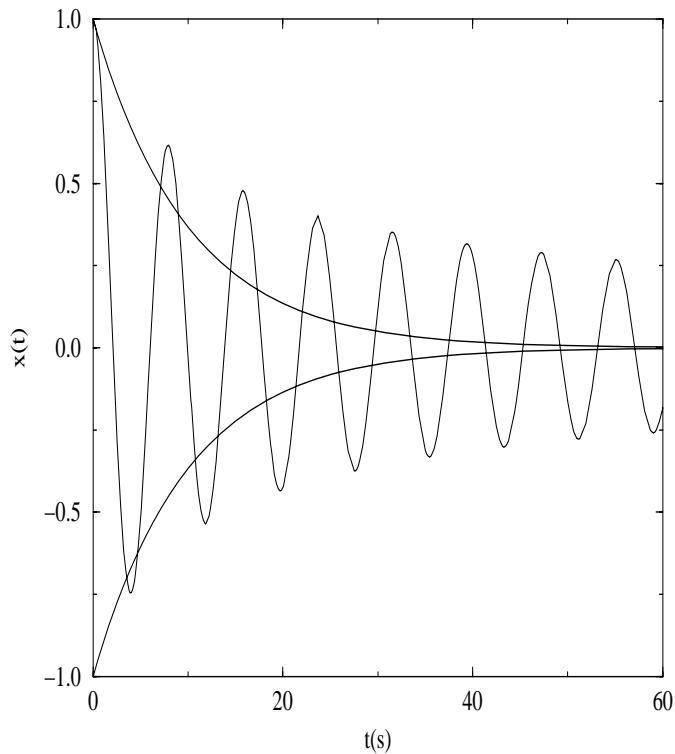


Figura 3.3: Comportamento característico da amplitude dos q -osciladores para o valor $q = 0.1$. As curvas decaíndo exponencialmente são representadas para um particular de $\beta = 0.1$, que descreve o oscilador subamortecido.

Nestes gráficos as condições iniciais foram escolhidas como sendo $v_0 = 0$, $x_0 = 1$ e também consideramos $\omega_0 = 8\beta$ e $\beta = 0.1$. Para o termo de amortecimento, esses valores do par (ω_0, β) descreve o denominado caso subamortecido. A ordem ν das funções de Bessel são ditadas pela escolha particular do parâmetro q . Para comparação, mostramos o envelope de soluções decaíndo exponencialmente para o correspondente oscilador

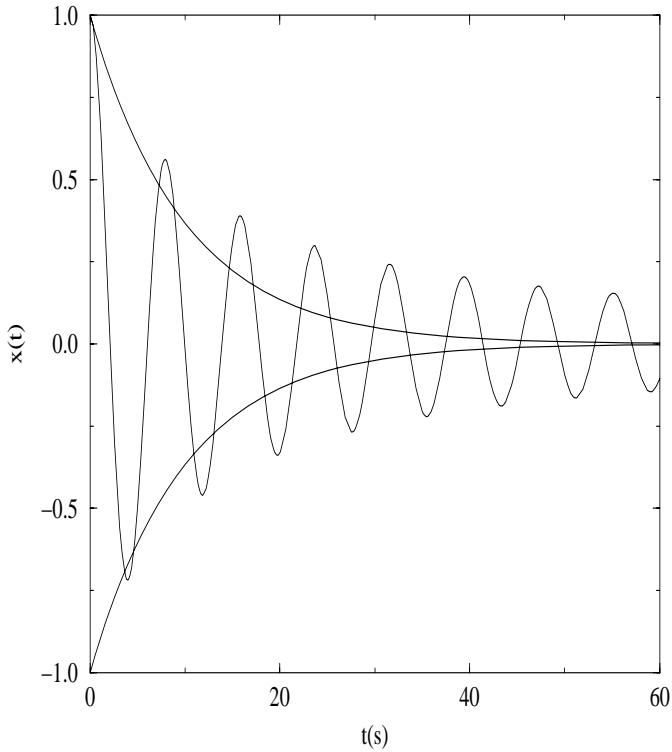


Figura 3.4: Comportamento característico da amplitude dos q -osciladores para o caso $\beta = 0.1$ e um valor do parâmetro livre $q = 0.5$.

subamortecido. Apesar de ter a mesma relação ω_0/β , verificamos que, para $q \neq 1$ a amplitude do período transiente sempre decresce mais lentamente que no caso padrão ($q = 1$). Como esperado, considerando que o parâmetro $q \rightarrow 1$, o q -oscilador se comporta como um oscilador subamortecido.

Em resumo, nesta seção apresentamos uma extensa classe de osciladores harmônico com amortecimento dependente do tempo. Esta espécie de sistema dinâmico foi formalmente motivado por uma q -lagrangiana dependente do tempo, generalizando a bem conhecida descrição de Bateman para o oscilador amortecido padrão.

Para $q \neq 1$, vimos que o oscilador harmônico simples é um atrator estável para a classe de q -osciladores. Fisicamente, um q -oscilador fornece

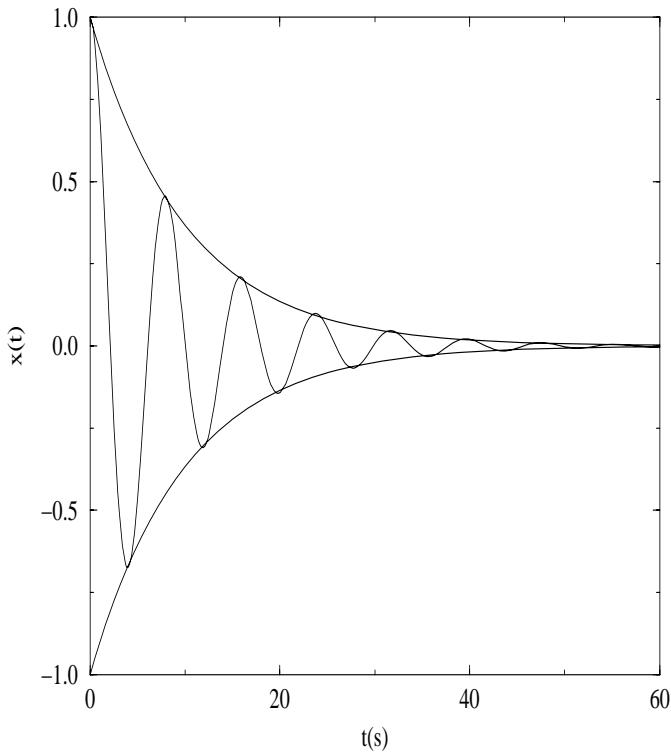


Figura 3.5: Amplitude dos q -osciladores para $\beta = 0.1$ e um valor particular do parâmetro livre $q = 0.99$.

uma descrição realística de fenômenos transitórios, onde a energia do sistema é parcialmente dissipada numa escala de tempo finita, e finalmente oscila harmonicamente em um dado modo normal. Em princípio, esta classe de comportamento também pode ter consequências interessantes para o problema de quantização de sistemas vibracionais não conservativos. Recordamos que as relações de Heisenberg não são obedecidas para o oscilador harmônico simples com coeficiente de amortecimento constante desde que o produto $\Delta x \Delta p$ decresce exponencialmente com o tempo³, indo a zero para $t \gg \beta^{-1}$ [163]. Entretanto, para os denominados q -osciladores este problema é resolvido de uma maneira natural, já que depois de um

³Netse caso, a relação exata é escrita como: $\Delta p \Delta x = e^{-\frac{1}{2}\beta t}$.

período transiente o sistema se comporta como um oscilador harmônico simples.

3.2.3 Viscosidade variável: Formalismo de Langevin

Inicialmente, para discutir o comportamento estocástico da equação (3.6), assumiremos apenas o caso com potencial nulo $V(x) = 0$. A formulação estocástica completa, isto é, com o termo de potencial quadrático $V(x) = (1/2)m\omega^2x^2$ será discutido em detalhes no capítulo seguinte. Com esta simplificação, a versão estocástica de (3.4), ou equivalentemente, da equação (3.6) é descrita por uma equação tipo Langevin [141]

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\beta v}{1 + (1 - q)\beta t} = \xi(t), \quad (3.13)$$

onde a quantidade $\xi(t)$ é a força estocástica que flutua rapidamente no tempo. As propriedades estatística desta força em geral são definidas pelas condições de Langevin (veja como exemplo, as expressões em (2.35)), ou mais precisamente, na versão moderna denominada de ruído branco [126]. Para esclarecer este ponto, mencionamos que uma melhor compreensão desta espécie de ruído pode ser obtida em termos do seu espectro de potência. No espaço de Fourier, o espectro de potência $S(\omega)$ da função de correlação $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle$ é definido como

$$S(\omega) = 2 \int_0^\infty e^{-i\omega t} \langle \xi(t)\xi(t') \rangle dt. \quad (3.14)$$

Note que, para qualquer função de correlação do tipo $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \Gamma\delta(t - t')$, onde Γ é uma constante, sempre teremos $S(\omega) = 2\Gamma = \text{constante}$, mostrando que o espectro de potência da teoria padrão de Langevin é independente da frequência ω . Fisicamente, isto significa que cada modo de Fourier é contemplado com igual quantidade de energia. Esta é a principal característica definindo o ruído branco. Por outro lado, se Γ é descrita por uma função do tempo ($\Gamma = \Gamma(t)$), teremos sempre $S = S(\omega)$,

caracterizando assim o chamado ruído colorido [141, 126]. Portanto, nesta versão os modos de Fourier são contemplados com diferentes quantidades de energia.

Voltando ao nosso caso, para fornecer uma descrição física mais realista das quantidades relevantes⁴, definimos a força estocástica pelas propriedades [169, 141]

$$\langle \xi(t) \rangle = 0; \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{\Gamma}{1 + (1 - q)\beta t} \delta(t - t'). \quad (3.15)$$

Note que a constante Γ presente na função de correlação padrão de Langevin ($\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \Gamma\delta(t-t')$), é efetivamente generalizada para uma função do parâmetro livre q e do tempo t , ou seja, $\Gamma_q(t) = \Gamma/[1 + (1 - q)\beta t]$. Similarmente ao caso anterior, o espectro de potência desta nova categoria de funções de correlação é definida por

$$S(\omega) = 2\Gamma \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega t}}{1 + (1 - q)\beta t} \delta(t - t') dt = f(\omega). \quad (3.16)$$

As condições físicas especificadas acima definem o chamado ruído colorido, conforme já mencionado antes e tem como caso particular o ruído branco de Langevin no limite $q \rightarrow 1$.

Sob tais condições especificadas acima, escrevemos a solução geral da equação diferencial (3.13) como:

$$v(t) = v_0[e_q(\beta t)]^{-1} + [e_q(\beta t)]^{-1} \int_0^t \xi(t') e_q(\beta t') dt'. \quad (3.17)$$

Como vemos, o último termo representa a contribuição do ruído colorido sobre o movimento da partícula browniana. Além do mais, no limite $q = 1$, a expressão acima reproduz a bem conhecida solução de Langevin para o caso de uma viscosidade constante, veja como exemplo a expressão (2.42).

⁴As quantidades físicas a que nos referimos são a variância na velocidade $\sigma_v^2 = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$ e na posição $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$. Quando a partícula browniana tem deslocamento médio nulo ($\langle x \rangle = 0$), sua variância σ_x^2 é equivalente ao deslocamento quadrático médio $\langle x^2 \rangle$.

A primeira condição em (3.15) define a velocidade média da partícula como a lei de potência

$$\langle v(t) \rangle = v_0 [e_q(\beta t)]^{-1} = v_0 [1 + (1 - q)\beta t]^{-\frac{1}{1-q}}, \quad (3.18)$$

se reduzindo a $\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\beta t}$ para $q = 1$. Para calcular a quantidade σ_v^2 , devemos quantificar primeiramente a diferença

$$v - \langle v(t) \rangle = [e_q(\beta t)]^{-1} \int_0^t \xi(t') e_q(\beta t') dt', \quad (3.19)$$

a qual, elevando ao quadrado e tomando a média obteremos

$$\sigma_v^2(t) = \frac{\Gamma}{2\beta} [1 - \{e_q(\beta t)\}^{-2}]. \quad (3.20)$$

Note que no limite $q \rightarrow 1$, a lei de potência acima se reduze ao caso padrão de Langevin, veja por exemplo a expressão (2.46) do capítulo II. Por outro lado, para tempos longos em comparação com o tempo característico do sistema ($t \gg \beta^{-1}$), a q -exponencial vai a zero e o teorema da equipartição da energia é recorrido consistentemente. Neste regime asintótico, teremos

$$\sigma_v^2 = \frac{\Gamma}{2\beta} = \frac{k_B T}{m}, \quad (3.21)$$

ou seja, o sistema tem relaxado ao seu estado de equilíbrio natural e a distribuição de probabilidade da variável aleatória σ_v^2 é governada por uma distribuição de velocidades maxwelliana.

As expressões matemática descrevendo a posição $x(t)$ e variância $\sigma_x^2(t)$ são obtidas da forma seguinte. A integração $x(t) = x_0 + \int_0^t v(t') dt'$ conduz imediatamente a expressão

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{v_0}{\beta q} [1 - [e_q(\beta t)]^{-q}] \\ &\quad + \frac{1}{\beta q} \int_0^t \xi(t') [\{e_q(\beta t')\}^{1-q} - e_q(\beta t') \{e_q(\beta t)\}^{-q}] dt', \end{aligned} \quad (3.22)$$

cujo valor médio é dado pela lei de potência

$$\langle x(t) \rangle = x_0 + \frac{v_0}{\beta q} \left\{ 1 - [1 + (1 - q)\beta t]^{-\frac{q}{1-q}} \right\}. \quad (3.23)$$

A variância é mais facilmente obtida calculando-se primeiramente a diferença $x - \langle x \rangle$

$$x - \langle x \rangle = \frac{1}{\beta q} \int_0^t \xi(t') \left[\{e_q(\beta t')\}^{1-q} - e_q(\beta t') \{e_q(\beta t)\}^{-q} \right] dt'. \quad (3.24)$$

Tal como antes, elevando ao quadrado e considerando a média da função de correlação em (3.15) teremos:

$$\sigma_x^2(t) = \frac{\Gamma}{\beta^2 q^2} \left[t + \frac{(1-q)\beta t^2}{2} - H_q(t) \right], \quad (3.25)$$

sendo a função $H_q(t)$ definida por

$$H_q(t) = \frac{2}{\beta(2-q)} \left\{ 1 - [e_q(\beta t)]^{-q} \right\} + \frac{1}{2\beta} \left\{ 1 - [e_q(\beta t)]^{-2q} \right\}. \quad (3.26)$$

A expressão (3.25) nos mostra que no regime asintótico $t \gg \beta^{-1}$, teremos $H_q \sim 1/(2\beta) - 2/(2-q)$ e portanto, $\sigma_x^2(t) \propto t^2$ já que H_q não é operante neste limite. Fisicamente, isto significa que o sistema exibe um regime de difusão anômala caracterizado por um comportamento superdifusivo. Note também que, tomando o limite $q \rightarrow 1$, (3.25) se reduz ao resultado usual, veja como exemplo a expressão (2.55). Entretanto, uma grande variedade de comportamento estocástico pode ser observado à medida que o parâmetro livre q é modificado continuamente.

Para uma descrição mais rigorosa do comportamento difusivo mostrado acima, na seção seguinte estudaremos a dinâmica estocástica da equação (3.13) considerando uma generalização do ruído colorido (3.15) pelo par de parâmetros arbitrários n e q .

3.3 Ruído Colorido: O Caso Geral

Para unificar o formalismo discutido na seção prévia, propomos uma classe de ruído colorido mais geral que deve exibir o mesmo tipo de comportamento anômalo descrito por duas constantes arbitrárias. Nossa

principal interesse é mostrar que esta espécie de ruído deve apresentar difusão anômala assumindo valores específicos dos parâmetros n e q , desde que $0 < q < 1$ e $n > 1$. Este tipo de ruído colorido é descrito pelas propriedades [141]

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{\Gamma}{[1 + (1 - q)\beta t]^n} \delta(t - t'). \quad (3.27)$$

Isto significa que o ruído branco no qual é baseado a descrição de Langevin pode ser recuperado por duas maneiras distintas, a saber, (i) para $n = 0$ e q arbitrário ou (ii) para $q = 1$ e n qualquer.

A solução geral da equação (3.13) considerando a primeira condição acima é independente do parâmetro n e pode ser escrita como antes

$$v(t) = v_0[e_q(\beta t)]^{-1} + [e_q(\beta t)]^{-1} \int_0^t \xi(t') e_q(\beta t') dt'. \quad (3.28)$$

Por outro lado, efetuando os cálculos algébricos necessários pode ser mostrado facilmente que a quantidade σ_v^2 evolui como:

$$\sigma_v^2 = \frac{\Gamma}{\beta[3 - q - n(1 - q)]} \left[[1 + (1 - q)\beta t]^{1-n} - \{e_q(\beta t)\}^{-2} \right]. \quad (3.29)$$

A expressão acima merece uma atenção especial. Fisicamente, ela nos mostra que a descrição de ruído branco ($n = 0$) não é compatível com o teorema da equipartição da energia, já que o mesmo não pode ser alcançado no regime assintótico. Para esclarecer este ponto, note que no limite $t \gg \beta^{-1}$ e $n = 0$ teremos $\sigma_v^2 \propto t$, diferentemente do resultado mostrado nas expressões (2.46) e (2.47) do capítulo II. Por outro lado, para o caso de ruído colorido com $n = 1$ a expressão acima é reescrita como

$$\sigma_v^2 = \frac{\Gamma}{2\beta} \left[1 - \{e_q(\beta t)\}^{-2} \right], \quad (3.30)$$

a qual, para tempos longos $t \gg \beta^{-1}$, teremos $\sigma_v^2 = \Gamma/(2\beta)$ que é a mesma expressão em (2.47). Portanto, a descrição de ruído colorido com $n < 1$ não é consistente com o teorema da equipartição da energia.

A solução geral para a coordenada de posição é feita como antes. Primeiro, notemos que a integração $x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')dt'$ no fornece

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{v_0}{\beta q} [1 - [e_q(\beta t)]^{-q}] + \\ &\quad \frac{1}{\beta q} \int_0^t \xi(t') [\{e_q(\beta t')\}^{1-q} - e_q(\beta t') \{e_q(\beta t)\}^{-q}] dt', \end{aligned} \quad (3.31)$$

cujo valor médio é

$$\langle x(t) \rangle = x_0 + \frac{v_0}{\beta q} [1 - [e_q(\beta t)]^{-q}]. \quad (3.32)$$

A variância é obtida calculando-se primeiramente a diferença $x - \langle x \rangle$, ou seja

$$x - \langle x \rangle = \frac{1}{\beta q} \int_0^t \xi(t') [\{e_q(\beta t')\}^{1-q} - e_q(\beta t') \{e_q(\beta t)\}^{-q}] dt'. \quad (3.33)$$

Utilizando a condição (3.27) e o desenvolvimento $\sigma_x^2(t) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$, finalmente obtemos:

$$\sigma_x^2(t) = \frac{\Gamma}{(\beta q)^2} \left[\frac{1}{\beta(3-n)(1-q)} \left([e_q(\beta t)]^{\frac{1-q}{3-n}} - 1 \right) - f_q + g_q \right], \quad (3.34)$$

sendo as funções f_q e g_q escritas como

$$f_q = \frac{2}{\beta(3-2q)} \{1 - [e_q(\beta t)]^{-q}\} \quad (3.35)$$

$$g_q = \frac{1}{\beta[3-q-n(1-q)]} \{1 - [e_q(\beta t)]^{-2q}\}. \quad (3.36)$$

No limite de tempos longos, ou seja $t \gg \beta^{-1}$, a variância evolui como

$$\sigma_x^2(t) = \frac{\Gamma}{(\beta q)^2} h_q [(1-q)\beta t]^{3-n}, \quad (3.37)$$

onde h_q é a função

$$h_q = \left[\frac{1}{(3-n)(1-q)} - \frac{3-n+q}{\beta[3-n-q(2-n)][2-n(1-q)]} \right]. \quad (3.38)$$

A interpretação física da expressão (3.37) é fundamental. Ela nos mostra que no regime assintótico a variância satisfaz uma lei de potência da forma $\sigma_x^2(t) \sim t^{3-n}$, e recupera o caso previamente investigado para o valor $n = 1$. Por outro lado, com o auxílio do teorema flutuação dissipaçāo⁵, pode ser mostrado facilmente que o coeficiente de difusão efetiva evolui como $D \sim t^{2-n}$. Fisicamente, isto significa que o comportamento superdifusivo ($D \rightarrow \infty$) acontece para valores de $n < 2$, enquanto para $n > 2$ o regime é subdifusivo ($D \rightarrow 0$).

⁵Uma das primeiras versões do teorema da flutuação dissipaçāo foi obtido por Einstein em 1905, cuja representação é dado pela famosa *relaçāo de Eisntein* $(\Delta x)^2 = 2Dt$. Posteriormente, outras versões foram obtidas ao longo dos anos por Nyquist [155], Callen [156, 157], Windon [158], Kubo [159], Mori [160], Hohenback [161] e outros mais.

Capítulo 4

Descrição Estocástica do Campo Inflaton

4.1 Introdução

Conforme já mencionado no capítulo I, todos os modelos inflacionários remetem a um período de expansão acelerada do universo onde o fator de escala cósmica $R(t)$ cresce exponencialmente com o tempo e atinge uma fase conhecida como *fase de Sitter*. Tal expansão é dirigida por um campo escalar $\phi(t)$, o qual satisfaz uma equação de movimento que é semelhante ao de um sistema clássico submetido a uma viscosidade constante

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (4.1)$$

onde a derivada em $\phi(t)$, significa uma derivada com relação ao tempo, $V(\phi)$ é o potencial do campo inflaton e H é o parâmetro de Hubble definido por:

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R}, \quad (4.2)$$

sendo $R(t)$ o fator de escala cósmica. Se o Universo expande satisfazendo uma lei de potência $R(t) \sim t^n$, temos que $H(t) = nt^{-1}$, e o campo $\phi(t)$ se comporta como um sistema clássico amortecido, cuja descrição será a de um oscilador harmônico para $V(\phi) = \frac{1}{2}\omega^2\phi^2$, onde o termo de viscosidade

está relacionado com a taxa de expansão do Universo. Neste caso temos um regime com lei de potência (*power law inflation*).

Ao invés de $R(t) \sim t^n$, um cenário mais geral pode ser obtido se o fator de escala cósmica satisfaz uma lei de potência do tipo:

$$R(t) = R_0 \left\{ 1 + \frac{3}{2}\gamma H_i t \right\}^{2/3\gamma}, \quad (4.3)$$

onde $R_0 = R(t_0)$ é o valor atual do raio do universo, H_i é o parâmetro de Hubble e γ é um parâmetro livre da equação de estado assumindo valores no intervalo $[0, 2]$. Para esta lei de expansão, vemos facilmente que a equação de movimento (4.1) é extendida para

$$\ddot{\phi} + 3\beta_\gamma(t)\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (4.4)$$

que é semelhante a equação diferencial (3.6) para o caso de um potencial quadrático ($V(\phi) \sim \phi^2$). Na equação acima, o termo de viscosidade dependente do tempo é dado por

$$\beta_\gamma(t) = \frac{H_i}{1 + \frac{3}{2}\gamma H_i t}, \quad (4.5)$$

que se reduz para a viscosidade constante e portanto a equação (4.1) no limite $\gamma \rightarrow 0$. Ainda neste limite a inflação exponencial $R(t) \sim e^{H_i t}$ é facilmente obtida. Como vemos, a equação de movimento (4.4) descreve o comportamento do campo escalar quando a viscosidade provocada pela taxa de expansão do universo é uma quantidade dependente do tempo. Por outro lado, escolhendo $H_i t = \frac{2}{3\gamma}$ vemos que (4.4) se reduz ao exemplo prévio com viscosidade constante ($\beta_\gamma(t) = 3H_i$).

No presente capítulo, o nosso interesse principal é estudar a influência de um *banho térmico* sobre a equação de movimento (4.4) assumindo que ele é responsável pela evolução estocástica do campo inflaton $\phi(t)$. A formulação estocástica aqui mencionada, transforma a equação (4.4) numa equação de movimento do tipo Langevin, onde as flutuações do inflaton

$\phi(t)$ assumem um papel fundamental nas perturbações de densidades termicamente induzidas, especialmente no formalismo de inflação morna. Para esclarecer melhor este ponto, na seção seguinte faremos um breve resumo do modelo de inflação morna e a sua abordagem estocástica para as flutuações do campo inflaton $\phi(t)$.

4.2 Modelos de Inflação Morna

Uma aplicação relevante da dinâmica de processos estocásticos no domínio cosmológico foi endereçada, recentemente, aos chamados modelos de inflação morna [76, 75]. Diferentemente do que acontece nos demais modelos, a equação de movimento descrevendo a evolução temporal do campo escalar é contemplada com um termo adicional $\Gamma\dot{\phi}^2$, representando a transferência contínua de energia do campo ϕ para o fluido de radiação. A justificativa para introduzir este termo vem do fato de que, o acoplamento entre o campo escalar e outros campos de matéria é tão finamente ajustado que o campo escalar evolui o tempo todo num regime amortecido gerando, assim, uma expansão isotérmica. Como uma consequência imediata, devido o contato térmico persistir durante todo o tempo, não há necessidade de gerar um mecanismo de reaquecimento no final da inflação [76, 75]. Em outras palavras, o decaimento contínuo do campo escalar em fótons é diluído pela expansão do universo.

A equação de evolução do campo escalar neste modelo de inflação é escrita como:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + 3\Gamma\dot{\phi} + V'\phi = 0, \quad (4.6)$$

ou equivalentemente, a nível da lei de conservação da energia

$$\dot{\rho} + 3\gamma H\rho = 3\Gamma\dot{\phi}^2, \quad (4.7)$$

onde ρ é a densidade de energia do campo e γ é o parâmetro da equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$.

As idéias discutidas acima significam que, devido a ausência de mecanismos de reaquecimento, as perturbações de densidade podem ser originadas por flutuações térmicas, com equação de evolução escrita como [75]

$$\frac{d\delta\phi}{dt} + \frac{H^2 + V''(\phi)}{3H + \Gamma_\phi}\delta\phi = \eta. \quad (4.8)$$

A força estocástica no lado direito da equação acima pode ser encontrada com o auxílio do teorema flutuação-dissipação [159, 161]. Para o caso onde a temperatura do banho térmico (fluido de radiação) é T_r , os valores esperados de η são

$$\langle \eta(t) \rangle = 0 \quad \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = A\delta(t - t'), \quad (4.9)$$

caracterizando o chamado ruído branco [126]. A função de correlação das flutuações do campo escalar obtida de (4.8) assume a forma

$$\langle \delta\phi(t)\delta\phi(t') \rangle = A \frac{3H + \Gamma_\phi}{2H^2} \exp\left\{-\frac{(t - t')}{3H + \Gamma_\phi} H^2\right\}, \quad (4.10)$$

onde $A = (3\pi/2)H^3T_r[3H + \Gamma_\phi]^{-1}$. Portanto, quando $t = t'$ a expressão acima se reduz para

$$\langle (\delta\phi)^2 \rangle = (3/4\pi)HT_r. \quad (4.11)$$

Esta expressão descreve o resultado central da análise de Berera, e dela conclui-se que as flutuações térmicas do campo escalar, quando acopladas ao banho térmico, podem ser maiores do que as flutuações quânticas

$$\langle (\delta\phi)^2 \rangle_{QM} \approx H^2/2\pi. \quad (4.12)$$

Na seção seguinte, mostraremos que os ingredientes discutidos acima quando aplicados a cenários de nova inflação, as flutuações do campo satisfazem a um regime de difusão anômala descrito pela expressão [169]

$$(\delta\phi)^2 \approx B_\epsilon t^{3-n}. \quad (4.13)$$

Fisicamente, a expressão acima indica que o parâmetro n delimita três regimes difusivos. Em particular, para $n = 2$ teremos uma difusão normal, enquanto que para $n \neq 2$, o campo experimenta regimes de difusão anômala¹.

4.3 Campo Inflaton: Formalismo de Langevin

Os estudos relacionados a campos escalares e sua subsequente evolução cósmica [24, 25, 26] são extremamente importantes para descrever cenários inflacionários [62, 63, 64, 65, 66] e mais recentemente tem sido aplicado em modelos de quintessência [32, 164].

No contexto da cosmologia inflacionária, especialmente no novo cenário inflacionário [165], por exemplo, o universo sofreu uma transição de fase conduzindo a um estágio de expansão acelerada. Conforme já mencionado extensivamente nesta tese, nos modelos do tipo Friedmann-Robertson-Walker a expansão do universo durante a fase inflação é dirigida por um campo escalar $\phi(t)$ satisfazendo a equação de movimento (4.1). Supondo que o fator de escala satisfaz a uma lei de potência do tipo $R(t) \sim t^n$ [166], teremos $H(t) = nt^{-1}$ e, portanto, o comportamento do campo escalar é semelhante ao de um sistema clássico caracterizado por um coeficiente de viscosidade $\beta(t) = 3nt^{-1}$. Um cenário mais geral é obtido se o fator de escala obedece a seguinte lei de potência [167, 168]:

$$R(t) = R_o \left[1 + \frac{3}{2} \gamma H_i t \right]^{\frac{2}{3\gamma}}, \quad (4.14)$$

onde H_i é uma constante e γ é um parâmetro adimensional da equação de estado do fluido cósmico. Note que para $H_i t \gg 1$, o universo evolui obedecendo a uma lei de potência, enquanto o caso limite $\gamma \rightarrow 0$ descreve o espaço-tempo de Sitter. Para a função de escala (4.14), o parâmetro de

¹Para uma revisão mais detalhada de sistemas exibindo comportamento anômalo, veja a referência [134] e referências lá citadas.

Hubble é definido como

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{H_i}{1 + \frac{3}{2}\gamma H_i t}, \quad (4.15)$$

e da equação (4.1) obtemos

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{3H_i}{1 + \frac{3}{2}\gamma H_i t} \frac{d\phi}{dt} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (4.16)$$

Como vemos, o campo escalar $\phi(t)$ se comporta como uma partícula clássica submetida a uma viscosidade $\beta_\gamma(t) = 3H_i/(1 + \frac{3}{2}\gamma H_i t)$, ou seja, um oscilador se o potencial $V(\phi)$ for quadrático. Em particular, para $\gamma \rightarrow 0$ (estágio de Sitter), a equação acima se reduz ao oscilador harmônico com viscosidade constante ($\beta_0 = 3H_i$).

A presença de um banho térmico durante a inflação implica que uma evolução estocástica do campo inflaton deve ser considerada, visto que a física relacionada deve ser relevante para a geração do espectro primordial das flutuações [75]. A analogia apresentada na seção anterior significa dizer que necessitamos considerar apenas o problema clássico equivalente ao de uma partícula clássica imersa num banho térmico (ou um fluido relativístico denso) sujeito ao potencial $V(\phi) = \frac{m}{2}\omega_0^2\phi^2$. De agora em diante, substituiremos a variável x pela variável ϕ . Neste caso, a equação de movimento para o campo escalar assume a forma [169]

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{\beta}{1 + (1 - q)\beta t} \frac{d\phi}{dt} + \omega_0^2\phi = \xi(t). \quad (4.17)$$

Para que o lado esquerdo da equação acima seja consistente com a equação (4.16) devemos notar que $\beta = 3H_i$ e $q = 1 - \gamma/2$, ou equivalentemente, $\beta_q(t) = \beta/[1 + (1 - q)\beta t]$. A quantidade $\xi(t)$ é a parte flutuante da força atuando sobre o campo $\phi(t)$, a qual é estocasticamente definida pelas seguintes propriedades [169, 141]

$$\langle \xi(t) \rangle = 0; \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{\Gamma}{[1 + (1 - q)\beta t]^n} \delta(t - t'), \quad (4.18)$$

onde n é um parâmetro arbitrário, $\delta(t - t')$ é a função Delta de Dirac e os sinais $\langle \rangle$ indicam a média sobre o ensemble. Note que para $n \neq 0$ a contribuição da radiação é semelhante ao ruído colorido [141] enquanto que para $n = 0$, o ruído branco do formalismo padrão de Langevin é recuperado [126]. Para esclarecer este ponto, mencionamos que lei de potências do tipo (4.18), ao invés de apenas uma função delta de Dirac, tem como característica principal, o surgimento de regimes anômalos devido a ausência de uma escala de tempo [134].

Seguindo o procedimento padrão e utilizando cálculos algébricos simples, pode ser mostrado que a solução geral da equação (4.17) para o caso $q < 1$ é escrita como

$$\begin{aligned} \phi(t) = & [e_q(\beta t)]^{-q} [AJ_\nu(\omega_0 t + \delta_q) + BY_\nu(\omega_0 t + \delta_q)] + \frac{C\pi}{2} [e_q(\beta t)]^{-q} \\ & \times \{Y_\nu(\omega_0 t + \delta_q) \int_0^t [e_q(\beta t')]^{-q} (\omega_0 t' + \delta_q) J_\nu(\omega_0 t' + \delta_q) \xi(t') dt' \\ & - J_\nu(\omega_0 t + \delta_q) \int_0^t [e_q(\beta t')]^{-q} (\omega_0 t' + \delta_q) Y_\nu(\omega_0 t' + \delta_q) \xi(t') dt'\}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

sendo a constante C dada por:

$$C = -\frac{\pi^2}{4} \left[\phi_0 Y_{\nu-1}(\delta_q) - \frac{\dot{\phi}_0}{\omega_0} Y_\nu(\delta_q) \right] \left[\phi_0 J_{\nu-1}(\delta_q) - \frac{\dot{\phi}_0}{\omega_0} J_\nu(\delta_q) \right], \quad (4.20)$$

onde J_ν e Y_ν são funções de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente, enquanto $\dot{\phi}_0$ significa diferenciação de ϕ_0 com respeito ao tempo. Note que na ausência do banho térmico, isto é, para o caso limite $\xi(t) \rightarrow 0$, as duas integrais na expressão (4.19) tendem a zero e o resultado se reduz à solução do q -oscilador discutido na seção prévia, veja por exemplo, a relação (3.10).

Para quantificar a variância ($(\Delta\phi)^2 = \langle \phi^2 \rangle - \langle \phi \rangle^2$) do campo é necessário calcular os valores médios de $\phi(t)$ e $\phi^2(t)$. Utilizando as duas condições em (4.18) obtemos o seguinte valor médio:

$$\langle \phi \rangle(t) = [e_q(\beta t)]^{-q} \{ AJ_\nu(\omega_0 t + \delta_q) + BY_\nu(\omega_0 t + \delta_q) \}, \quad (4.21)$$

e o deslocamento quadrático médio:

$$\begin{aligned} \langle \phi^2 \rangle &= [e_q(\beta t)]^{-2q} [AJ_\nu(\omega_0 t + \delta_q) + BY_\nu(\omega_0 t + \delta_q)]^2 + \Gamma C^2 [e_q(\beta t)]^{-2q} \times \\ &\{ F(t) \int_0^t [e_q(\beta t')]^{-2q+n(1-q)} (\omega_0 t' + \delta_q)^2 Y_\nu^2(\omega_0 t' + \delta_q) dt' - G(t) \times \\ &\int_0^t [e_q(\beta t')]^{-2q+n(1-q)} (\omega_0 t' + \delta_q)^2 J_\nu(\omega_0 t' + \delta_q) Y_\nu(\omega_0 t' + \delta_q) dt' \} \end{aligned} \quad (4.22)$$

As funções $F(t)$ e $G(t)$ são dadas respectivamente por

$$F(t) = J_\nu^2(\omega_0 t + \delta_q) + Y_\nu^2(\omega_0 t + \delta_q), \quad (4.23)$$

$$G(t) = 2J_\nu(\omega_0 t + \delta_q)Y_\nu(\omega_0 t + \delta_q). \quad (4.24)$$

Portanto, para o ruído colorido proposto em (4.18), a variância do campo escalar é dado por

$$\begin{aligned} (\Delta\phi)^2 &= \Gamma C^2 [e_q(\beta t)]^{-2q} \times \\ &\{ F(t) \int_0^t [e_q(\beta t')]^{-2q+n(1-q)} (\omega_0 t' + \delta_q)^2 Y_\nu^2(\omega_0 t' + \delta_q) dt' - G(t) \times \\ &\int_0^t [e_q(\beta t')]^{-2q+n(1-q)} (\omega_0 t' + \delta_q)^2 J_\nu(\omega_0 t' + \delta_q) Y_\nu(\omega_0 t' + \delta_q) dt' \} \end{aligned} \quad (4.25)$$

O resultado acima merece uma atenção especial a duas situação práticas.

(i) Em primeiro lugar, notemos que se $\omega_0 \ll H_i$, significa dizer que o

termo de potencial pode ser negligenciado e o comportamento do campo é semelhante ao de uma partícula clássica executando movimento browniano sob uma viscosidade dependente do tempo. (ii) Para tempos longos, ou mais precisamente, para escalas de tempo $t \gg H_i$, a dinâmica estocástica é exatamente a mesma de um oscilador harmônico simples submetido a um ruído colorido. Portanto, é fácil mostrar que se o termo de potencial é desprezado a variância do campo evolui como

$$(\Delta\phi)^2 \sim B_\gamma t^{3-n}, \quad (4.26)$$

onde B_γ é uma constante.

Portanto, com o auxílio do teorema flutuação-dissipação [159], vemos facilmente que o coeficiente de difusão do campo Inflaton evolui como $D_\gamma \sim B_\gamma t^{2-n}$. Fisicamente, isto significa que o parâmetro n delimita três regimes difusivos. Em particular, quando $n = 1$ (ruído colorido), o coeficiente de difusão aumenta linearmente com o tempo, caracterizando um regime de superdifusão. Por outro lado, se $n > 2$ (também ruído colorido), o comportamento do campo é caracterizado por um regime de subdifusão, pois como pode ser visto $D_\gamma \rightarrow 0$. Portanto, o campo só experimenta difusão normal ($D_\gamma \rightarrow 0$) para $n = 2$.

Capítulo 5

Influência de Um Termo Estocástico Sobre o Efeito Meszaros

5.1 Introdução

Estudos sobre a evolução das perturbações em modelos de universos dominado por uma componente de matéria não relativística mais partículas relativísticas são de fundamental importância para entender os processos de formação de estruturas [170, 171, 172, 173].

Nos últimos anos, foram desenvolvidos vários modelos nos quais as diferentes formas de matéria não bariônica (neutrinos massivos, axions, neutralinos, fotinos...etc) assumem um importante papel para teorias de formação de galáxias. Neste contexto, é fisicamente interessante estudar a evolução das perturbações de uma componente não relativística com densidade ρ_m em um universo cuja expansão é dirigida por um fluido relativístico de densidade ρ_r . Um resultado analítico notável neste campo foi obtido por Meszaros há mais de trinta anos [174]. Segundo Meszaros, o modo de crescimento da perturbação na componente de matéria escura permanece congelada até $z = z_{eq}$, o redshift para o qual as densidades de matéria e radiação são iguais. Hoje em dia, esta *estagnação* ou efeito sobre a evolução da perturbação de densidade para a matéria é usualmente

chamado de *Efeito Meszaros* (EM). Este efeito é muito importante para modelos nos quais, galáxias e aglomerados de galáxias são formados através do crescimento das flutuações primordiais num universo dominado por matéria escura fria.

Em princípio, o efeito discutido aqui deve ser considerado para algum cenário de formação de estrutura envolvendo uma componente de matéria escura fria mais uma fase inicial dominada por radiação.

Qualitativamente, tal efeito acontece porque o tempo característico da perturbação de densidade é quantificado pela escala de Jeans, $\tau_J \sim (G\rho_m)^{-1/2}$, enquanto que o tempo característico da expansão é medido pelo tempo de Hubble, isto é, $\tau_H \sim (G\rho_r)^{-1/2}$. Destas expressões, conclui-se que as perturbações na matéria deve crescer somente depois de z_{eq} , desde que antes disso as escalas de tempos satisfaçam uma relação do tipo $\tau_H < \tau_J$.

Nesta seção analizaremos a possível influência dos processos estocásticos sobre o EM. A idéia fundamental é que as partículas de matéria escura apresentam um acoplamento efetivo muito fraco com o banho térmico (radiação), semelhante a interação delas com a matéria bariônica. Além do mais, é assumido que o efeito do banho térmico é modificar a equação de evolução para o contraste de densidade tal como acontece em dinâmica estocástica, como por exemplo, sobre o formalismo desenvolvido por Langevin. Em outras palavras, as flutuações da matéria escura fria em um universo governado por um *mar de radiação* se comportam como partículas brownianas num banho térmico.

5.2 Teoria de Perturbação e a Evolução do Contraste de Densidade

Por razões que nos serão úteis na seção seguinte, dedicaremos esta seção ao estudo da evolução temporal do contraste de densidade no processo de

formação de estruturas.

Historicamente, os primeiros estudos realizados sobre esse tema foi proposto originalmente por James Jeans no começo do século XX [175]. Jeans propôs que o universo seria preenchido por um fluido perfeito não relativístico, cuja evolução temporal seria descrito pela equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (5.1)$$

equação de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \phi = 0 \quad (5.2)$$

e a equação para o campo gravitacional

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \quad (5.3)$$

Nestas equações, a quantidade ρ representa a densidade de matéria e p a sua pressão, enquanto que \mathbf{v} descreve a velocidade local do fluido e ϕ é o potencial gravitacional. Se os efeitos da gravitação forem ignorados, as soluções mais simples para esse conjunto de equações, obviamente são aquelas para as quais a matéria está em repouso e uniformemente distribuída (caso estático). Neste caso, as soluções não perturbadas correspondentes podem ser escritas como

$$\rho = cte, \quad p = cte \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = 0. \quad (5.4)$$

Por outro lado, se for adicionado uma pequena perturbação no fluido, as quantidades ρ , p , \mathbf{v} e ϕ devem ser expandidas para a forma

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad \text{e} \quad p = p_0 + p_1 \quad (5.5)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \quad (5.6)$$

$$\phi = \phi_0 + \phi_1. \quad (5.7)$$

Nestas expressões, o índice zero se refere às quantidades homogêneas (não perturbadas), enquanto que o índice 1 se refere às quantidades perturbadas. Além do mais, considerando a equação de estado $p_1 = v_s^2 \rho_1$, onde v_s^2 é a velocidade do som no fluido, é fácil mostrar que a versão perturbada¹ das equações (5.1) - (5.3) são escritas como

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_1) = 0, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \frac{v_s^2}{\rho_0} \nabla \rho_1 + \nabla \phi_1 \quad (5.9)$$

e

$$\nabla^2 \phi_1 = 4\pi G \rho_1. \quad (5.10)$$

Também é fácil mostrar que o conjunto acima pode ser combinado para formar uma equação diferencial de segunda ordem governando a evolução da densidade perturbada ρ_1

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 = 4\pi G \rho_0 \rho_1. \quad (5.11)$$

As soluções são da forma

$$\rho_1(\mathbf{r}, t) = A e^{(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)} \rho_0, \quad (5.12)$$

da qual, calculando-se a derivada temporal ($\partial \rho_1 / \partial t$) deduz-se facilmente a seguinte relação de dispersão

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0, \quad (5.13)$$

onde $k \equiv | \vec{k} |$ é o número de onda. O resultado acima tem um significado físico muito interessante. Diferentemente do que acontece em ondas de plamas², o sinal negativo que vem da natureza atrativa da

¹Por simplicidade, estamos considerando perturbações apenas de primeira ordem.

²No sistema de plasma, a relação de dispersão para as oscilações eletrostáticas tem uma estrutura similar à expressão (5.13) e é definida como $\omega^2 = v_s^2 k^2 + \frac{4\pi n_e e^2}{m_e}$, onde as quantidades e , m_e e n_e representam a carga, massa e a densidade de elétrons.

gravitação provoca naturalmente um comportamento instável na expressão (5.13). Fisicamente, a expressão acima nos diz que, se ω é real a perturbação apenas oscila tal como acontece em ondas sonoras. Por outro lado, se ω é imaginário as perturbações crescem exponencialmente. Este comportamento delimita algum valor crítico para k , o qual é chamado número de onda de Jeans

$$k_J = \left(\frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2} \right)^{1/2}. \quad (5.14)$$

A análise clássica de Jeans discutida aqui não pode ser aplicável diretamente a cosmologia, simplesmente pelo fato de que estas idéias têm um caráter puramente newtoniano e a taxa de expaão do universo foi desconsiderada como uma primeira aproximação. Portanto, para uma descrição mais realista do tema em questão devemos incorporar o efeito da expansão do universo, isto será discutido em detalhe nas equações seguintes.

Quando o universo é tratado como um fluido perfeito e a sua taxa de expansão é levado em conta, as soluções não perturbadas (ρ_0 , \mathbf{v}_0 e $\nabla\phi_0$) são dadas respectivamente por [48, 93]

$$\rho_0 = \rho_0(t_0)R^{-3}(t) \quad \mathbf{v}_0 = \frac{\dot{R}}{R}\mathbf{r} \quad \nabla\phi_0 = \frac{4\pi G \rho_0}{3}\mathbf{r}, \quad (5.15)$$

com as equações (5.8) - (5.10) sendo reescritas na forma:

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + 3\frac{\dot{R}}{R}\rho_1 + \frac{\dot{R}}{R}(\mathbf{r}\cdot\nabla)\rho_1 + \rho_0\nabla\cdot\mathbf{v}_1 = 0, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial t} + \frac{\dot{R}}{R}\mathbf{v}_1 + \frac{\dot{R}}{R}(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{v}_1 + \frac{vs^2}{\rho_0}\nabla\rho_1 + \nabla\phi_1 = 0 \quad (5.17)$$

e

$$\nabla^2\phi_1 = 4\pi G\rho_1. \quad (5.18)$$

Neste ponto, definindo o constraste de densidade $\delta = \rho_1/\rho_0$ e seguindo o procedimento das referências [48, 93], pode ser mostrado que a equação

fundamental descrevendo a evolução do contraste de densidade num universo em expansão é escrita como:

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{\delta}_k + \left(\frac{k^2 v_s^2}{R^2} - 4\pi G\rho_0\right)\delta_k = 0. \quad (5.19)$$

Note que o efeito da expansão provoca uma alteração na relação de dispersão de Jeans, a qual, neste caso é dada pelo coeficiente de δ

$$\omega^2 = \frac{k^2 v_s^2}{R^2} - 4\pi G\rho_0, \quad (5.20)$$

onde o número de onda k é extendido para uma quantidade física (k_{phys}) dado por $k_{phys} = k/R$. Neste caso, o número de onda de Jeans (5.14) também é alterado devido o efeito da expansão do universo

$$k_J = \left(\frac{4\pi G\rho_0 R^2}{v_s^2}\right)^{1/2}. \quad (5.21)$$

Note também que para R constante, a relação de Jeans (5.13) é recuperada. Além do mais, o comportamento qualitativo das soluções depende da diferença $\left(\frac{k^2 v_s^2}{R^2} - 4\pi G\rho_0\right)$, ou equivalentemente, depende do número de onda k_J . Em outras palavras, a solução exata da equação (5.19) depende da era cósmica, ou seja, se o universo é dominado por radiação ou matéria.

Em particular, a solução correspondente a era dominada por matéria será exibida para os modelos espacialmente planos de FRW. No caso de universo dominado por matéria, ou seja, um fluido perfeito com pressão nula, a equação (5.19) deve ser reescrita na forma:

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{\delta}_k - 4\pi G\rho_0\delta_k = 0, \quad (5.22)$$

já que o termo $\frac{k^2 v_s^2}{R^2} = 0$ está ligado a equação de estado $p = v_s^2\rho$, ou equivalentemente, $v_s^2 = (\partial p / \partial \rho)$. Considerando que o fator de escala satisfaz a uma lei de potência $R(t) \propto t^{2/3}$, teremos $\dot{R}/R = 2/3t$ e $\rho_0 = 1/3\pi Gt^2$, com a equação acima se reduzindo para

$$\ddot{\delta}_k + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_k - \frac{2}{3t^2}\delta_k = 0. \quad (5.23)$$

A solução geral desta equação é composta de duas soluções independentes, um modo de crescimento designado por δ_+ e um modo de decaimento descrito por δ_- , cuja dependência temporal é dada por [48, 93]

$$\delta_k(t) = A\delta_+ + B\delta_- = At^{2/3} + Bt^{-1}, \quad (5.24)$$

onde A e B são duas constantes.

Na seção seguinte, essas idéias serão rediscutidas sob a ótica do efeito Meszaros.

5.3 Efeito Meszaros: O Tratamento Analítico

Para compreender qualitativamente o EM, vamos considerar um universo descrito por uma mistura de dois fluidos, a saber, radiação e matéria escura. Como é amplamente conhecido, a equação de movimento descrevendo a evolução do contraste de densidade da matéria δ é escrita como [170, 171, 172]

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\rho_m\delta = 0, \quad (5.25)$$

onde $H = \dot{R}/R$ é o parâmetro de Hubble e $R(t)$ é o fator de escala cósmica, G é a constante gravitacional e ρ_m representa a densidade de matéria. Por outro lado, para uma mistura de matéria e radiação, as equações de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) podem ser escritas na forma

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}R^2(\rho_m + \rho_r) = \frac{8\pi G}{3}R^2\rho_r(1 + y), \quad (5.26)$$

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}R(\rho + 3p) = -\frac{4\pi G}{3}R\rho_r(2 + y) \quad (5.27)$$

onde ρ_m e ρ_r são, respectivamente, as densidades de energia da matéria e radiação. A quantidade y nestas equações quantifica a razão entre as densidades de energia da matéria e radiação, ou seja:

$$y \equiv \frac{\rho_m}{\rho_r} = \frac{R}{R_{eq}} = \frac{1 + z_{eq}}{1 + z}. \quad (5.28)$$

É interessante mencionar que o conjunto de equações acima (5.25)-(5.28) também pode ser derivado no contexto de um formalismo neo-newtoniano, tal como proposto por Lima *et al.* em [176].

Neste ponto, para resolver a equação (5.25) é mais conveniente reescrevê-la em termos da quantidade adimensional y . Combinando as equações acima, é fácil mostrar que a equação de evolução para o contraste de densidade da matéria assume a seguinte forma [174]:

$$\delta'' + \frac{2+3y}{2y(1+y)}\delta' - \frac{3}{2y(1+y)}\delta = 0, \quad (5.29)$$

onde $(')$ significa diferenciação com respeito a variável y .

Para ser consistente com o efeito originalmente estudado por Meszaros, a solução geral da equação acima é obtida para o caso $\delta'' = 0$ e contém dois termos

$$\delta(y) = c_1\delta_+ + c_2\delta_-, \quad (5.30)$$

sendo δ_+ o fator de crescimento da perturbação, δ_- o fator de atenuação e c_1 e c_2 são constantes. É fácil mostrar que a solução para o fator de crescimento no intervalo $[\infty, z_{eq}]$ é dada por:

$$\delta_+ \propto y + 2/3. \quad (5.31)$$

Também é possível derivar o modo de atenuação. Isto se torna mais simples para a fase dominada por radiação, uma vez que $y \ll 1$. Neste caso teremos $\delta_- \propto (\ln y)^{-1}$.

Claramente, a solução (5.31) acima nos mostra que o fator de crescimento total no intervalo acima considerado é escrito como

$$\frac{\delta_+(y=1, z=z_{eq})}{\delta_+(y=0, z=\infty)} = \frac{5}{2}. \quad (5.32)$$

Por razões que será útil mais adiante, pode ser facilmente mostrado que o crescimento quadrático médio total é:

$$\frac{\langle \delta_+^2(y=1, z=z_{eq}) \rangle}{\langle \delta_+^2(y=0, z=\infty) \rangle} = 6.25. \quad (5.33)$$

O significado físico deste resultado é muito claro: antes de z_{eq} ($y < 1$), a energia dominante da radiação dirige a expansão do universo de forma tão rápida que a instabilidade gravitacional na densidade de matéria é desprezível, e, como tal, o contraste de densidade δ_+ , para todas as propostas práticas, é mantido a um valor constante. Entretanto, logo após z_{eq} ($y > 1$) o universo desenvolve a fase dominada por matéria e o contraste de densidade aumenta suavemente à fase de Einstein-de Sitter, ou seja, $\delta_+ \propto R(t) \propto t^{2/3}$.

5.4 Áxions como WIMPs

Conforme amplamente conhecido na literatura, *WIMPs* (*Weakly Interacting Massive Particles*), sigla em inglês para designar partículas materiais que se acoplam fracamente a matéria ordinária e sua origem remonta a fase dominada por radiação, quando o universo ainda era muito jovem [93, 177]. Atualmente, um forte debate na literatura aponta os áxions e neutralinos como dois dos candidatos mais prováveis, embora outros como neutrinos sem massa e fotinos possam também ser considerados como possíveis candidatos.

Os mecanismos responsáveis pela geração dos áxions no começo do universo é baseado em alguns processos de transição de fase [178]. Entretanto, do ponto de vista teórico ainda existe um outro mecanismo de criação fundamentado no decaimento de cordas cósmica [179].

Para justificar o estudo que será feito na seção seguinte, será suposto que as partículas de matéria escura (áxions e neutralinos) se acoplam pelo menos fracamente com o background de radiação. Esta suposição é uma condição essencial para uma descrição do EM baseado no tratamento de movimento browniano, tal como investigado antes para o caso de uma partícula massiva imersa num banho térmico. Em outras palavras, o

acoplamento da matéria escura com a radiação contribui com um termo de natureza estocástica aparecendo na equação de movimento para o contraste de densidade. Isto será o objeto de nosso estudo na seção seguinte.

5.5 A Influência do Termo Estocástico

De agora por diante, assumiremos que o acoplamento da matéria escura com o banho térmico contribui com um termo de natureza estocástica (ruído) na equação de movimento para o contraste de densidade. Portanto, tal como acontece no formalismo de Langevin para o movimento browniano, reescrevemos a equação de movimento (5.29) como uma equação forçada para o contraste [180]

$$\delta'' + \frac{2+3y}{2y(1+y)}\delta' - \frac{3}{2y(1+y)}\delta = \xi(y), \quad (5.34)$$

onde $\xi(y)$ é a força estocástica (ruído) definida pelas propriedades

$$\langle \xi(y) \rangle = 0, \quad \langle \xi(y)\xi(y') \rangle = \frac{\Gamma}{[1+\alpha y]^n} \delta(y-y') \quad (5.35)$$

sendo Γ , n e α constantes. Esta espécie de ruído foi aplicado recentemente no contexto da dinâmica do campo escalar em modelos inflacionários [169], mais precisamente, para o então chamado cenários de inflação morna [75, 76, 181, 182]. Neste caso, sempre que o potencial do campo escalar for nulo, foi mostrado que o sistema descreve um regime de difusão anômala. Note que para $n \neq 0$ teremos sempre um ruído colorido, enquanto $n = 0$ ele se reduz ao ruído branco do formalismo de Langevin [126].

Seguindo o procedimento padrão, pode ser visto facilmente que para um ruído branco ($n = 0$), a solução geral para o fator de crescimento é dada por³

$$\delta_+(y) = \left(y + \frac{2}{3}\right) + \left(y + \frac{2}{3}\right) \int \frac{2y(1+y)}{3(y + \frac{2}{3})^2} \xi(y) dy. \quad (5.36)$$

³Para ser consistente com o tratamento analítico do Efeito Meszaros discutido anteriormente, procuramos soluções com a condição $\delta'' = 0$.

Claramente, a expressão acima nos mostra que para $\xi(y) = 0$ ela se reduz ao resultado em (5.31), como deveríamos esperar. Neste ponto, é interessante calcular algumas quantidades fisicamente relevantes, tais como a média $\langle \delta \rangle$, o deslocamento quadrático médio $\langle \delta^2 \rangle$ e a variância das flutuações $\sigma^2 = \langle \delta_+^2 \rangle - \langle \delta \rangle^2$ para que possamos comparar com o caso padrão.

Inicialmente, notamos que a primeira condição de Langevin, $\langle \xi(y) \rangle = 0$, combinada com a expressão acima implica que:

$$\delta_+(y) = y + \frac{2}{3}, \quad (5.37)$$

que é precisamente o resultado (5.31), obtido para o caso usual sem acoplamento entre radiação e matéria escura. Em adição, considerando a segunda condição de Langevin em (5.35) e depois de alguma álgebra, pode ser mostrado que o deslocamento quadrático médio da perturbação é dado por [180]:

$$\begin{aligned} \langle \delta_+^2 \rangle &= \left(y + \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{4}{9} \Gamma \left[y \left(y + \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{13}{3} \left(y + \frac{2}{3} \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{4}{243 \left(y + \frac{2}{3} \right)} + \frac{8}{3} \left(y + \frac{2}{3} \right)^2 \ln \left(y + \frac{2}{3} \right) - \frac{20}{27} \right], \end{aligned} \quad (5.38)$$

com a seguinte variância

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{4}{9} \Gamma \left[y \left(y + \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{13}{3} \left(y + \frac{2}{3} \right) - \frac{4}{243 \left(y + \frac{2}{3} \right)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{3} \left(y + \frac{2}{3} \right)^2 \ln \left(y + \frac{2}{3} \right) - \frac{20}{27} \right]. \end{aligned} \quad (5.39)$$

A expressão (5.38) acima implica que o fator de crescimento total para o contraste de densidade da matéria escura no intervalo $[\infty, z_{eq}]$ é dado por

$$\frac{\langle \delta_+^2(y=1, z=z_{eq}) \rangle}{\langle \delta_+^2(y=0, z=\infty) \rangle} \simeq \frac{\frac{25}{9} + 5.79\Gamma}{\frac{4}{9} + 0.70\Gamma}. \quad (5.40)$$

Fisicamente, isto significa que as possíveis correções estocásticas sobre o EM, para uma contribuição de ruído branco de Langevin, é controlado pelos valores do coeficiente Γ . Em particular, para o caso em que $\Gamma \sim 1$ teremos

$$\frac{\langle \delta_+^2(y=1, z=z_{eq}) \rangle}{\langle \delta_+^2(y=0, z=\infty) \rangle} \sim 7.45, \quad (5.41)$$

enquanto que a variância total no intervalo $[\infty, z_{eq}]$ é

$$\frac{\sigma(z=z_{eq})}{\sigma(z=\infty)} = 2.7. \quad (5.42)$$

Portanto, comparando o resultado (5.41) com (5.33) vemos que o fator de crescimento total no intervalo acima considerado é modificado somente por um pequeno fator. Note também que tal resultado é pouco modificado se o coeficiente $\Gamma \gg 1$. Neste caso, por exemplo, o deslocamento total é simplesmente

$$\frac{\langle \delta_+^2(y=1, z=z_{eq}) \rangle}{\langle \delta_+^2(y=0, z=\infty) \rangle} \sim 8.27. \quad (5.43)$$

O resultado acima quando comparado com (5.33), revela que a influência de correções estocásticas para o caso de ruído branco, praticamente não altera a dinâmica do EM original. Estas considerações físicas nos mostram que na expressão acima a máxima correção é equivalente a 1.77 vezes o caso padrão. Em outras palavras, o efeito é extremamente robusto sobre essa classe particular de ruídos.

5.5.1 O Efeito do Ruído Colorido

Uma análise detalhada do EM para o caso de ruído colorido requer um tratamento mais eficaz, o qual deve ser baseado num método numérico. Um estudo dessa natureza é de extrema importância para explorar as propriedades físicas das equações básicas e comparar com os resultados discutido aqui. Isto será feito futuramente. Por ora, apresentaremos nesta

tese apenas as expressões formais, a saber, o deslocamento quadrático médio e variância.

Utilizando a condição (5.35) para o ruído colorido, podemos mostrar que o deslocamento quadrático médio para o fator de crescimento δ_+^2 satisfaz uma relação do tipo

$$\langle \delta_+^2 \rangle = \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{9}\Gamma \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 \int \frac{y^2(1+y)^2 dy}{(y + \frac{2}{3})^4(1+\alpha y)^n}, \quad (5.44)$$

enquanto a variância assume a forma

$$\sigma^2 = \frac{4}{9}\Gamma \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 \int \frac{y^2(1+y)^2}{(y + \frac{2}{3})^4(1+\alpha y)^n} dy. \quad (5.45)$$

Nas duas equações acima, pode ser facilmente mostrado que quando $n = 0$ elas se reduzem às expressões (5.38) e (5.39) obtidas para o caso de ruído branco.

Em suma, neste capítulo obtemos as expressões analíticas e formais, descrevendo a influência estocástica de um banho térmico (componente de radiação) sobre o EM. As correções são controladas por um parâmetro Γ assumindo valores reais. Particularmente, para o caso de ruído branco, as correções no fator de crescimento entre o intervalo $[0, t_e]$, é no máximo, 1.77 vezes o resultado padrão. Isto sugere que o EM é robusto com respeito a uma possível existência de correções estocásticas. Além do mais, a análise discutida nesta tese não inclui o efeito da derivada de segunda ordem em δ . Um estudo mais eficaz das equações básicas, baseado num tratamento numérico para o termo de derivada segunda e ruído colorido, será feito em detalhe num futuro próximo.

Capítulo 6

Formulação Estocástica dos Modelos Friedmann

6.1 Introdução

O modelo mais simples de Universo, o então chamado modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) ou, mais comumente, o modelo do Big Bang, é baseado na hipótese de que o conteúdo de matéria total do universo é distribuído de forma homogênea e isotrópica, tal como discutido no início do capítulo I. A grosso modo, esses dois conceitos significam que diferentes observadores que estejam participando da expansão cosmológica, devem ter a mesma interpretação física das propriedades do Universo.

De um ponto de vista físico, o modelo cosmológico padrão sugere fortemente que os efeitos quânticos, bem como os efeitos da gravidade quântica, devem ser significativamente importantes durante o universo primordial ou, mais precisamente, no início da evolução cósmica, de modo que a era de Planck deve começar com condições iniciais não determinísticas. Entretanto, na ausência de uma formulação verdadeiramente quântica para a gravitação, e consequentemente para a era de Planck, essa dificuldade pode ser contornada com a introdução de uma formulação puramente estocástica na evolução do Universo. De fato,

o crescente interesse na aplicação de métodos estocásticos para estudar modelos cosmológicos tem crescido consideravelmente e colecionado uma série de trabalhos na literatura, veja por exemplo, as referências [37, 38, 39, 35, 40]. Outras mais tratam de modelos estocásticos clássicos para a cosmologia, justificando que a evolução temporal dos parâmetros cosmológicos¹ seguem um caráter não determinístico [41, 42].

Como é conhecido, um dos problemas mais interessantes e desafiadores da cosmologia contemporânea, é a tarefa de incorporar os efeitos das flutuações quânticas na evolução global do universo. Este problema assumiu uma importância especial desde a sugestão de que um campo escalar deve dirigir o universo num estágio de expansão exponencial, chamado de inflação e, simultaneamente, gerar as perturbações de densidades necessárias para produzir as galáxias e as estruturas de grande escala observadas atualmente.

O interesse na aplicação de métodos estocásticos em Cosmologia não se resume apenas a modelos inflacionários. De fato, vários autores usaram técnicas estocásticas para estudar o possível comportamento do universo quando as flutuações quânticas desempenham um papel fundamental na sua evolução. Em geral, o formalismo estocástico é introduzindo através da equação de estado de um fluido perfeito, já que esta é a possibilidade mais viável imposta pelas equações de Friedmann. Um formalismo desse tipo foi introduzido nas referências [37, 39] e desenvolvido com mais detalhe por Burd e Coles em [40].

No presente capítulo, desenvolveremos um modelo que generaliza a formulação estocástica dos modelos de FRW proposto por M. Novello [35].

¹Na referência [41] os autores mostraram que o parâmetro da equação de estado de um fluido perfeito (ω), bem como a densidade de energia da matéria ρ_m , seguem um comportamento puramente aleatório. Para este caso, foi mostrado também que a probabilidade para ρ_m mudar de um valor ρ_m a um valor final ρ'_m durante o tempo $(t - t')$, é dado pela expressão $P(\rho_m, t \mid \rho'_m, t') = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t')}} \exp \left\{ -\frac{[(\sqrt{\rho'_m} - \sqrt{\rho_m}) - \sqrt{6\pi G\rho_m\rho'_m}(t-t')]^2}{24\pi G\rho_m\rho'_m D(t-t')} \right\}$.

Inicialmente, mostraremos que usando uma transformação de coordenada adequada as equações de Friedmann podem ser reduzidas à equação de um oscilador harmônico simples [183, 184]. Em seguida, trataremos o problema quântico do oscilador seguindo uma abordagem chamada “Fluido de Madelung” [185]. Como veremos, o formalismo estocástico discutido aqui quando aplicado aos modelos do FRW com equação de estado $p = \omega\rho$, é essencial para compreender a dinâmica e a evolução do universo.

6.2 A Dinâmica do Universo: Um Formalismo Determinístico

Nos modelos cosmológicos do tipo FRW o elemento de linha é descrito pela expressão:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right), \quad (6.1)$$

onde $R(t)$ é o fator de escala e $K = (\pm 1, 0)$ é o parâmetro de curvatura espacial. Em tais modelos, as equações de campo de Einstein para um fluido relativístico simples são escritas como [184, 186, 187, 188, 189]:

$$8\pi G\rho = 3\frac{\dot{R}^2}{R^2} + 3\frac{K}{R^2} \quad (6.2)$$

$$8\pi Gp = -2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{K}{R^2}, \quad (6.3)$$

onde $\rho(t)$ e $p(t)$ são as densidades de energia e pressão respectivamente. Note que neste sistema existem três quantidades desconhecidas, a saber, $R(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$, enquanto existe apenas duas equações independentes. Neste caso, para especificar a solução geral é necessário um vínculo adicional. No contexto cosmológico, como é usualmente assumido, o conteúdo de matéria obedece a uma equação de estado da forma:

$$p = \omega\rho. \quad (6.4)$$

A dinâmica cósmica é determinada por uma combinação elementar do conjunto de equações (6.2) - (6.4). Neste caso, utilizando cálculos algébricos simples, pode ser mostrado facilmente que a evolução temporal do fator de escala cósmica obedece a uma equação diferencial de segunda ordem do tipo [184, 186]:

$$R\ddot{R} + \Delta\dot{R}^2 + \Delta K = 0, \quad (6.5)$$

sendo Δ uma função do parâmetro ω , a saber; $\Delta = (1 + 3\omega)/2$.

Em princípio, o correspondente comportamento dinâmico deve ser fortemente dependente da escolha do par de parâmetros: (i) o parâmetro de curvatura K , e (ii) o parâmetro da equação de estado ω .

A integral primeira da equação (6.5) pode ser representada por

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{R_0}{R}\right)^{2\Delta} - K, \quad (6.6)$$

que para $K = 0$ (modelos planos), tem como solução particular a lei de potência:

$$R(t) = R_0 [1 + (1 + \Delta)(t - t_0)/R_0]^{\frac{1}{1+\Delta}}, \quad (6.7)$$

ou equivalentemente,

$$R(t) = R_0 \left[1 + \frac{3}{2}(1 + \omega)(t - t_0)/R_0\right]^{\frac{2}{3(1+\omega)}}. \quad (6.8)$$

Na lei de potência acima, t_0 representa uma escala de tempo arbitrária e $R_0 = R(t = 0)$ é o valor atual do fator de escala.

A partir deste ponto, focalizaremos nossa atenção na obtenção da solução geral da equação (6.5), considerando valores arbitrários do par de parâmetros (ω, K) . Para tal, é necessário fazer uma mudança de variável na escala de tempo. Ao invés do tempo físico (ou cosmológico), usaremos o *tempo conforme* obedecendo a relação $d\eta = R^{-1}(\eta)dt$. Neste caso, a equação diferencial (6.5) assume a forma [183, 186]:

$$RR'' + (\Delta - 1)R'^2 + \Delta KR^2 = 0, \quad (6.9)$$

onde a linha $(')$ denota derivadas com respeito ao tempo conforme e $R = R(\eta)$.

A solução geral da equação acima é mais facilmente obtida utilizando o fator de escala auxiliar

$$Z(\eta) = R^\Delta, \quad \text{se } \Delta \neq 0 \quad (6.10)$$

e

$$Z(\eta) = \ln R, \quad \text{se } \Delta = 0. \quad (6.11)$$

Neste caso, usando a transformação (6.10) vemos que (6.9) pode ser reescrita numa forma mais conveniente:

$$Z''(\eta) + \Delta^2 K Z(\eta) = 0 \quad \text{se } \Delta \neq 0, \quad (6.12)$$

ou

$$Z''(\eta) = 0 \quad \text{se } \Delta = 0. \quad (6.13)$$

Note que a equação (6.12) depende fortemente dos parâmetros K e ω tendo um significado físico muito claro: O movimento descrito por ela é equivalente ao movimento classical de uma partícula sujeita a uma força linear, a qual pode ser restauradora ou repulsiva, dependendo apenas do sinal do parâmetro de curvatura. Em particular, para modelos fechados ($K = 1$), a dinâmica cósmica neste caso é semelhante ao movimento de um oscilador harmônico simples. Também é interessante notar que para valores positivos de Δ , este movimento oscilatório entre as singularidades *bang-bang* e *big-crunch* reforça, consideravelmente, a conexão com a idéia de um universo pulsante. Por outro lado, Para o caso de universos espacialmente planos ($K = 0$), o sistema descrito pela equação (6.12) se comporta como uma partícula livre e o mesmo acontece se $\Delta = 0$. Finalmente, para universos do tipo hiperbólicos ($K = -1$), o sistema se comporta como um anti-oscilador, ou seja, o comportamento é semelhante ao de uma partícula livre sujeita a uma força repulsiva proporcional a distância.

Neste ponto, considerando a relevância das identidades matemáticas $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} = x$ e $\sin(ix) = i \sinh x$, pode ser facilmente mostrado que a solução unificada da equação (6.12) é dado por [183, 186]:

$$Z(\eta) = \frac{Z_0}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K} [|\Delta| (\eta - \delta)] \quad (6.14)$$

onde $Z_0 = R_0^\Delta$ e δ são constantes de integração.

Escolhendo a constante $\delta = 0$, vemos que a solução geral relacionando o fator de escala e o tempo cosmológico é

$$R(\eta) = R_0 \left[\frac{\sin \sqrt{K} |\Delta| \eta}{\sqrt{K}} \right]^{1/\Delta} \quad (6.15)$$

$$t(\eta) = R_0 \int \left[\frac{\sin \sqrt{K} |\Delta| \eta}{\sqrt{K}} \right]^{1/\Delta} d\eta + Cte. \quad (6.16)$$

Para o caso de modelos elíptico ($K = 1$), estas soluções podem ser reescritas como

$$R(\eta) = R_0 [\sin |\Delta| \eta]^{1/\Delta} \quad (6.17)$$

$$t(\eta) = R_0 \int [\sin |\Delta| \eta]^{1/\Delta} d\eta + Cte, \quad (6.18)$$

e para modelos hiperbólicos ($K = -1$)

$$R(\eta) = R_0 [\sinh |\Delta| \eta]^{1/\Delta} \quad (6.19)$$

$$t(\eta) = R_0 \int [\sinh |\Delta| \eta]^{1/\Delta} d\eta + Cte. \quad (6.20)$$

As integrais presentes em (6.18) e (6.20) devem ser representadas em termos de funções gaussianas hipergeométricas.

Por razões que será útil mais adiante, na seção seguinte será feita uma descrição do formalismo estocástico que será aplicado na equação de movimento 6.12.

6.3 O Fluido de Madelung

Antes de introduzir a formulação estocástica da equação (6.12), é conveniente fazer um breve resumo do formalismo geral que é baseado na chamada *descrição Madelung* [185]. Este sistema hidrodinâmico quântico, foi proposto originalmente por Madelung em 1926. Convencionalmente, tal sistema não consiste de um modelo de partículas com trajetórias bem definidas, mas sim de um modelo hidrodinâmico descrito pela equação de Schrödinger, onde a densidade do fluido é associada, por analogia, a densidade de probabilidade da teoria quântica. Para um entendimento mais geral do sistema discutido aqui, veremos em mais detalhes, a discussão seguinte.

Consideremos um sistema mecânico simples, o qual, no espaço das configurações e dos momentos (p, q) , pode ser descrito pela hamiltoniana

$$H = p^2/2m + V(q). \quad (6.21)$$

A equação de Schrödinger relacionada com a hamiltoniana acima assume a forma:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi, \quad (6.22)$$

onde \hbar é a constante de Planck e $\psi = \psi(x, t)$ é a função de onda. Para todas as regiões onde a função de onda é diferente de zero, a equação acima admite uma classe de soluções escritas na forma [191, 192, 193]

$$\psi(x, t) = \exp \left\{ F(x, t) + \frac{i}{\hbar} S(x, t) \right\}, \quad (6.23)$$

onde $F(x, t)$ e $S(x, t)$ são funções reais.

Substituindo a equação acima em (6.22) e considerando somente a parte imaginária, obteremos como resultado a relação matemática:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\nabla^2 S + 2\nabla F \cdot \nabla S) = 0. \quad (6.24)$$

Definindo o campo de velocidade do fluido de Madelung

$$v(x, t) = \frac{1}{m} \nabla S(x, t) \quad (6.25)$$

e a sua densidade

$$\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = \exp\{2F(x, t)\}, \quad (6.26)$$

podemos identificar claramente (6.24) como a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0. \quad (6.27)$$

Por outro lado, substituindo (6.23) em (6.22) e considerando somente a parte real, obteremos:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla^2 F + \nabla F \cdot \nabla F - \frac{(\nabla S)^2}{\hbar^2} \right] - V(x). \quad (6.28)$$

Considerando que $\nabla e^F = (\nabla F)e^F$ e $\nabla^2 e^F = [(\nabla^2 F) + (\nabla F)^2]e^F$, então a equação acima pode ser equivalente a

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\nabla^2 e^F}{e^F} \right] = 0. \quad (6.29)$$

Portanto, denominamos *Fluido de Madelung*, um sistema hidrodinâmico descrito pelo conjunto de equações (6.25), (6.27) e (6.29). Note que, no limite semi-clássico ($\hbar \rightarrow 0$), o sistema descrito acima recupera a estrutura padrão do *Fluido de Hamilton-Jacobi* em mecânica clássica.

Como vemos, a dinâmica do sistema é determinada basicamente pela equação acima, a qual pode ser reescrita numa forma mais conveniente

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_M = 0, \quad (6.30)$$

onde H_M é a hamiltoniana total do sistema. Comparando as expressões (6.29) e 6.30), vemos facilmente que H_M contém dois termos: uma contribuição clássica (H_{cl}) e outra difusiva (H_{dif}) oriunda da teoria quântica, de tal modo que

$$H_{cl} = \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (6.31)$$

e

$$H_{dif} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\nabla^2 \exp(F)}{\exp(F)} \right]. \quad (6.32)$$

Na seção seguinte, faremos um tratamento unificado das idéias discutidas aqui e o tratamento estocástico das equações de Fridmann reduzidas a forma simples de um oscilador harmônico, equação (6.12).

6.4 Modelos de FRW na formulação de Madelung

A partir deste ponto, introduziremos um formalismo estocástico unificado entre as idéias discutidas na seção anterior e a equação do oscilador (6.12).

Inicialmente notemos que, no espaço das configurações (p, q) a hamiltoniana do sistema (6.12) é escrita como

$$H(p_c, q_c) = \frac{p_c^2}{2m} + V(q_c) = \frac{p_c^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Delta^2 K q_c^2, \quad (6.33)$$

com as equações canônicas de movimento dadas por

$$\dot{q}_c = \frac{p_c}{m}, \quad \dot{p}_c = -\omega_0^2 q_c, \quad (6.34)$$

onde p_c e q_c significam quantidades clássicas e $\omega_0 = \Delta^2 K$. As soluções gerais das equações acima podem ser escritas como

$$p_c(t) = p_0 \cos \omega_0 t - m\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t, \quad (6.35)$$

$$q_c(t) = q_0 \cos \omega_0 t + \frac{p_0}{m\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad (6.36)$$

onde as quantidades p_0 e q_0 são obtidas da condição inicial $t = 0$.

A equação de Schrödinger para a função de onda $\psi(Z, t)$ associada a estrutura clássica do oscilador harmônico (6.12) é escrita de forma usual

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(Z, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(Z, t)}{\partial Z^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 Z^2 \Psi(Z, t). \quad (6.37)$$

Uma equação deste tipo admite uma classe especial de soluções dadas em termos dos estados coerentes, onde a cada um deles se associa uma solução $\{p_c(t), q_c(t)\}$ [190].

Seguindo o procedimento das referências [191, 192, 193] e para ser consistente com o formalismo geral da seção anterior, escrevemos a solução geral da equação (6.37) na forma:

$$\Psi(Z, t) = (2\pi\sigma)^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma}(Z - q_c)^2 - \frac{i}{\hbar} Z p_c + \frac{i}{\hbar} p_c q_c - i \frac{\omega_0}{2} t \right\}, \quad (6.38)$$

onde a função $F(Z, t)$ e a fase $S(Z, t)$ são escritas como

$$F(Z, t) = -\frac{1}{4\sigma}(Z - q_c)^2, \quad (6.39)$$

$$S(Z, t) = Z p_c - \frac{1}{2} p_c q_c - \frac{1}{2} \hbar \omega_0 t. \quad (6.40)$$

A quantidade σ é a variância calculada da forma usual, $\sigma^2 = \hbar/2m\omega_0$.

Neste ponto, introduziremos a densidade de probabilidade $\rho(Z, t)$, tal como é usualmente definida na teoria quântica

$$\rho(Z, t) = |\Psi(Z, t)|^2. \quad (6.41)$$

Note que, usando a solução geral para $\psi(Z, t)$ dado em (6.38) e o complexo conjugado $\psi^*(Z, t)$, teremos

$$\rho(Z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{2F(Z, t)\} \quad (6.42)$$

ou equivalentemente, usando a expressão (6.39),

$$\rho(Z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma}(Z - q_c)^2 \right\}, \quad (6.43)$$

onde q_c é dado pela solução clássica (6.36). Como vemos, devido ao caráter estocástico (flutuante), a densidade do fluido é descrita por uma distribuição de probabilidade gaussiana.

Comparando a expressão acima com a distribuição gaussiana

$$P(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(Z - \langle Z \rangle)^2 \right\}, \quad (6.44)$$

vemos facilmente que o valor médio $\langle Z \rangle$ e a variância $\sigma^2 = \langle Z^2 \rangle - \langle Z \rangle^2$ são dados respectivamente por $\langle Z \rangle = q_c$ e $\sigma^2 = \hbar/2m\omega_0$. Os mesmos resultados também podem ser obtidos por meio de cálculos direto utilizando a função distribuição (6.43), a saber:

$$\langle Z \rangle = \int \rho(Z, t) Z dZ = q_c \quad (6.45)$$

e

$$\langle Z^2 \rangle = \int \rho(Z, t) Z^2 dZ = \sigma^2 + q_c^2, \quad (6.46)$$

o que significa

$$\sigma^2 = \langle Z^2 \rangle - \langle Z \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}. \quad (6.47)$$

Utilizando a função densidade (6.43) podemos calcular a velocidade osmótica do fluido δv definida como

$$\delta v = \nu \nabla \rho / \rho, \quad (6.48)$$

onde $\nu = \hbar/2m$ é o coeficiente de difusão. Como pode ser facilmente visto, o lado direito da equação acima é reescrito como

$$\nu \nabla \rho / \rho = -\frac{\hbar}{2m} \frac{(Z - \langle Z \rangle)}{\sigma^2}, \quad (6.49)$$

e usando a definição de σ^2 , obtemos

$$\delta v = -\omega_0(Z - \langle Z \rangle). \quad (6.50)$$

Seguindo o procedimento das referências [35, 191, 192], obtemos as velocidades

$$v_{(+)} = v + \delta v = \frac{p_c}{m} - \omega_0[Z - \langle Z \rangle] \quad (6.51)$$

e

$$v_{(-)} = v - \delta v = \frac{p_c}{m} + \omega_0[Z - \langle Z \rangle]. \quad (6.52)$$

Neste ponto, mostraremos que as idéias discutidas até aqui nos permite assumir que $q(t)$ satisfaz a uma equação diferencial estocástica do tipo Langevin

$$dq(t) = v_{(+)}(q(t), t) dt + dw(t), \quad (6.53)$$

onde $dw(t)$ é um processo de Winer [126] tal que

$$E[dw^i(t)] = 0 \quad E[dw^i(t)dw^j(t)] = 2\nu\delta^{ij}, \quad (6.54)$$

sendo que a notação $E[]$ significa um procedimento de médias sobre um ensemble. Sendo assim, para o caso de universo de Sitter, obteremos

$$dZ = [\dot{Z}_c - \omega_0(Z - < Z >)] dt + dw(t), \quad (6.55)$$

onde $\dot{Z}_c = p_c/m$ e $< Z > = q_c$ conforme mostrado na equação (6.45).

Portanto, vemos que a natureza gaussiana do problema tal como descrito em (6.43), implica que

$$E[Z(\eta)] = \frac{Z_0}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}[\Delta | (\eta - \delta)] \quad (6.56)$$

$$E[Z^2(\eta)] = \frac{Z_0^2}{K} \sin^2 \sqrt{K}[\Delta | (\eta - \delta)] + \sigma^2, \quad (6.57)$$

ou equivalentemente, utilizando a transformação $Z = R^\Delta$ como definida na equação (6.10):

$$E[R(\eta)] = \frac{R_0}{(K)^{1/2\Delta}} \sin^{\frac{1}{\Delta}} \sqrt{K}[\Delta | (\eta - \delta)], \quad (6.58)$$

$$E[R^2(\eta)] = \frac{R_0^2}{(K)^{1/\Delta}} \sin^{\frac{2}{\Delta}} \sqrt{K}[\Delta | (\eta - \delta)] + \sigma^2. \quad (6.59)$$

Note que as duas expressões acima são generalizações das equações (28a) e (28b) obtidas na referência [35]. Note também que os resultados acima são válidos para qualquer valor do par de parâmetros (K, ω) . Fisicamente, estas equações significam que o efeito líquido do meio é evitar o colapso do modelo, ou seja, a singularidade cosmológica (não estocástica) desaparece devido a contribuição dos efeitos quânticos.

Capítulo 7

Potencial Escalar e Cenários de Quintessência

7.1 Introdução

Conforme discutido no capítulo I, um número cada vez maior de observações astronômicas sugerem fortemente que a razão entre a densidade de matéria (bariônica mais matéria escura) e a densidade crítica é significativamente menor que a unidade [10, 11, 79, 80, 81]. Naturalmente, este fato está em desacordo com alguns argumentos teóricos derivados da cosmologia inflacionária, que prever um universo espacialmente plano [196]. Logo, para que tenhamos um parâmetro de densidade da matéria de ordem unitário ($\Omega_{total} = 1$), o universo deve ser preenchido por uma forma desconhecida de energia em adição à contribuição da matéria escura ordinária. Conforme já mencionamos, esta conclusão é reforçada pelas medidas recentes da relação redshift-luminosidade [10] de uma ampla classe de supernovas do tipo Ia, sugerindo indiretamente que essa forma de energia possui uma pressão negativa. Em virtude de um efeito relativístico geral, uma pressão negativa corresponde a um estado gravitacional repulsivo (veja discussão no capítulo I), cujo resultado principal é acelerar a expansão do universo, como indicado pelos experimentos envolvendo supernovas Ia

[197].

Tradicionalmente, um candidato mais provável para esta componente desconhecida, atualmente chamada de energia escura, é a densidade de energia do vácuo ou constante cosmológica (Λ), que é equivalente a um fluido perfeito obedecendo a uma equação de estado do tipo $p = -\rho$ [10, 11]. Uma outra possibilidade mais genérica corresponde a um campo escalar dependente do tempo $\phi(t)$ evoluindo em direção ao valor mínimo do seu potencial, o qual é também conhecido como energia escura ou quintessência [198]. Esta última pode ser caracterizada por uma equação de estado efetiva, contendo um parâmetro dependente do tempo $\omega(t)$ que quantifica a razão entre as densidades de energia e pressão. Dependendo da forma do potencial $V(\phi)$, o parâmetro ω pode ser constante, monotonicamente crescente (decrescente) ou sempre oscilatório [198, 199]. Se ω é constante e satisfaz a $\omega \geq -1$, o cenário de quintessência é usualmente chamado *matéria-X* [204], que também inclui o modelo de constante cosmológica (ΛCDM) como o caso limite $\omega = -1$. Atualmente, os exemplos mais comuns de potenciais de quintessência são funções exponenciais ordinárias $V(\phi) = V_0 \exp(-\lambda\phi)$ [24, 26, 200], leis de potências simples $V(\phi) = V_0\phi^{-n}$ [201, 202], combinações de funções exponenciais e senos $V(\phi) = V_0 \exp(-\lambda\phi)[1 + A \sin(-\nu\phi)]$ [203] entre outros.

Para este modelo de *matéria-X*, vículos obtidos dos testes de estruturas de grandes escalas (cuja sigla em inglês é LSS) e das anisotropias do fundo de microondas cósmica (sigla em inglês CMB) complementadas pelos dados de SN Ia, indicam que $0,6 \leq \Omega_x \leq 0,7$ e $\omega < -0,6$ com 95% de confiança estatística para um universo plano [199, 204], enquanto que para universos com curvatura espacial arbitrária o limite é $\omega < -0,4$ [204].

Neste capítulo, focalizaremos nossa atenção sobre esta espécie de cosmologias com quintessência ou matéria-X. Conforme amplamente conhecido, potenciais de campo escalar para modelos de quintessência

são inspirados em alguns exemplos específicos, originalmente propostos em modelos de teorias quântica de campos. Entretanto, nós estamos interessados num formalismo um pouco diferente. Nossa objetivo principal é determinar a forma analítica geral do potencial de campo escalar que é simultaneamente compatível com a *matéria-X* e as simetrias do elemento de linha de FRW. Apesar deste problema já ter sido abordado na literatura, apenas soluções especiais foram derivadas até o momento [205, 206, 207]. Como veremos, se a *matéria-X* interage apenas gravitacionalmente, ou seja, se não existe transferência de energia ou a presença de processos de decaimento, apenas uma classe muito restrita de potenciais pode ser matematicamente permitida. O espectro completo das soluções (para o caso plano) será determinado por um novo método aqui proposto [106]. Em particular, para valores específicos dos parâmetros livres, as soluções são ligeiramente diferentes de algumas expressões recentemente obtidas na literatura. Para o caso de modelos de universo aberto ou fechado, as soluções analíticas são obtidas apenas para valores particulares do par de parâmetros livres (γ e ω).

7.2 As Equações Básicas

Nesta seção focalizaremos nossa análise em cosmologias homogênia e isotrópica descritas pelo elemento de linha de FRW [48]

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (7.1)$$

onde $R(t)$ é o fator de escala e $k = 0, \pm 1$ é o parâmetro de curvatura.

Agora vamos considerar um universo preenchido por um fluido perfeito mais um campo escalar $\phi(t)$. Na métrica de FRW (7.1), as equações de campo de Einstein podem ser escritas como:

$$\frac{8\pi}{m_{pl}^2} (\rho_\gamma + \rho_\phi) = 3 \frac{\dot{R}^2}{R^2} + 3 \frac{k}{R^2} \quad (7.2)$$

$$\frac{8\pi}{m_{pl}^2} (p_\gamma + p_\phi) = -2 \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{k}{R^2} \quad (7.3)$$

onde \dot{R} significa diferenciação com respeito ao tempo e $m_{pl}^2 = 1/G$ é a massa de Planck. As quantidades ρ_γ , ρ_ϕ , p_γ e p_ϕ são as densidades de energia e pressão do fluido perfeito e do campo escalar, respectivamente.

Neste ponto, será assumido que o fluido perfeito obedece a uma equação de estado do tipo *lei gama*

$$p_\gamma = (\gamma - 1) \rho_\gamma, \quad (7.4)$$

onde o parâmetro constante γ pertence ao intervalo $(0,2)$. Similarmente, definimos uma equação de estado efetiva para o campo escalar $\phi(t)$

$$w(t) = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}, \quad (7.5)$$

sendo $V(\phi)$ o potencial associado com o campo ϕ . Em particular, se o campo é representado por uma *matéria-X* conforme considerado aqui, o parâmetro ω é constante e assume os valores pertencente ao intervalo $[0,-1]$ [31].

As equações de conservação da energia para cada uma das componentes satisfaz as relações

$$\dot{\rho}_\gamma + 3\gamma H\rho_\gamma = 0 \quad (7.6)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3(1+w)H\rho_\phi = 0, \quad (7.7)$$

onde $H = \dot{R}/R$ é o parâmetro de Hubble. Estas equações podem ser resolvidas explicitamente, e suas soluções analíticas assumem a forma:

$$\rho_\gamma = \rho_{\gamma 0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3\gamma} \quad \text{e} \quad \rho_\phi = \rho_{\phi 0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3(1+w)}, \quad (7.8)$$

sendo $\rho_{\gamma 0}$, $\rho_{\phi 0}$ e R_0 os valores destes parâmetros no tempo $t = t_0$. Naturalmente, é a segunda solução acima é válida somente para valores constantes de ω . Seguindo o procedimento usual, inserindo as expressões

de ρ_ϕ e p_ϕ na lei de conservação para o campo escalar, obtemos a equação de movimento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (7.9)$$

Se $V(\phi)$ é dado a priori, devemos seguir o formalismo padrão para integrar diretamente a equação acima. Para uma classe restrita de potenciais, isto é equivalente a vincular o parâmetro $\omega(t)$ tal como definido em (7.5). Isto será o tema central de nosso interesse, que será estudado em detalhes na sessão seguinte para o caso da *matéria-X*.

7.3 Potencial do Campo Escalar e Matéria-X

Para encontrar o potencial escalar correspondente a uma *matéria-X* genérica preenchendo todo o universo, vamos combinar as equações para p_ϕ e ρ_ϕ definidas em (7.5), de onde seguem as relações

$$V(\phi) = \frac{(1-w)}{2(1+w)} \dot{\phi}^2 \quad \text{e} \quad \rho_\phi = \frac{1}{(1+w)} \dot{\phi}^2, \quad (7.10)$$

mostrando que $V(\phi)$ e ρ_ϕ deve ser facilmente determinado se $\dot{\phi}^2$ é conhecido como uma função de ϕ .

Substituindo a derivada de $V(\phi)$ com respeito a ϕ na equação (7.9), obteremos a seguinte equação diferencial [32]

$$\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} + \frac{3(1+w)}{2} \frac{\dot{R}}{R} = 0, \quad (7.11)$$

cuja primeira integral é dada por:

$$\dot{\phi} = \sqrt{(1+w)\rho_{\phi_0}} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-\frac{3(1+w)}{2}} = \sqrt{(1+w)\rho_{\phi_0}} x^{-\frac{3(1+w)}{2}}, \quad (7.12)$$

onde a variável $x = R/R_0$ foi introduzida na segunda igualdade. Note que o caso limite $\omega = -1$ (constante cosmológica) implica em $\dot{\phi} = 0$. Como vemos na expressão acima, a solução para o nosso problema será possível somente se o fator de escala for determinado como uma função de ϕ .

Para contornar essa dificuldade, será necessário derivar uma equação diferencial generalizada para o fator de escalar $R(\phi)$ obtida a partir das equações básicas. Para tal, note que uma combinação elementar do conjunto de equações (7.2)-(7.4) e (7.8) implica na seguinte equação diferencial [32]

$$R\ddot{R} + \Delta\dot{R}^2 + \Delta k + \frac{3}{2}H_0^2(1-\gamma+w)\Omega_{\phi_0}R_0^{3(1+w)}R^{-(1+3w)} = 0 \quad (7.13)$$

onde $\Delta \equiv \frac{3\gamma-2}{2}$. Este tipo de equação de FRW governa o comportamento do fator de escala R na presença de um fluido perfeito γ mais *matéria-X*. A primeira integral desta equação é escrita como

$$\dot{R}^2 = \frac{A}{R^{3\gamma-2}} - k + H_0^2\Omega_{\phi_0}R_0^{3(1+w)}R^{-(1+3w)}, \quad (7.14)$$

sendo $A = H_0^2\Omega_{\phi_0}R_0^{3\gamma}$ uma constante de integração positiva. Por outro lado, de (7.2) pode ser mostrado facilmente que o parâmetro de curvatura k satisfaz uma relação do tipo

$$\Omega_{\gamma 0} + \Omega_{\phi 0} - 1 = \frac{k}{H_0^2 R_0^2}. \quad (7.15)$$

Da mesma forma, inserindo os valores de A e k na equação (7.14) e introduzindo a variável $x = R/R_0$ segue que

$$\frac{dt}{dx} = \frac{H_0^{-1}}{\sqrt{1 - \Omega_{\gamma 0} - \Omega_{\phi 0} + \Omega_{\gamma 0}x^{-(3\gamma-2)} + \Omega_{\phi 0}x^{-(1+3w)}}}, \quad (7.16)$$

onde H_0 é o parâmetro de Hubble no tempo atual ($t = t_0$), $\Omega_{\gamma 0}$ e $\Omega_{\phi 0}$ são, respectivamente, os parâmetros de densidades do fluido e da componente de energia escura. Finalmente, introduzindo a equação acima em (7.12), obteremos [32]

$$d\phi = H_0^{-1}\sqrt{(1+w)\rho_{\phi 0}} \frac{x^{-\frac{3}{2}(1+w)} dx}{\sqrt{1 - \Omega_{\gamma 0} - \Omega_{\phi 0} + \Omega_{\gamma 0}x^{-(3\gamma-2)} + \Omega_{\phi 0}x^{-(1+3w)}}}. \quad (7.17)$$

Portanto, a integração da equação acima e sua consequente inversão conduz a uma expressão analítica para o fator de escala $R(\phi)$. Entretanto, ela não pode ser resolvida analiticamente para valores arbitrários do parâmetro de curvatura. Como discutiremos a seguir, uma solução analítica geral só é possível para o caso plano ($k = 0$). Os casos com $k = \pm 1$ só são possíveis para valores específicos do par de parâmetros (γ, ω) .

7.3.1 Solução Geral para o Caso Plano ($k = 0$)

Para $k = 0$ vemos de (7.15) que $\Omega_{\gamma 0} + \Omega_{\phi 0} = 1$ e, inserindo este resultado em (7.16), a equação assume a forma:

$$d\phi = H_0^{-1} \sqrt{(1+w)\rho_{\phi 0}} \frac{x^{-\frac{3}{2}(1+w)} dx}{\sqrt{\Omega_{\gamma 0}x^{-(3\gamma-2)} + \Omega_{\phi 0}x^{-(1+3w)}}}. \quad (7.18)$$

A integração da expressão acima é mais facilmente obtida introduzindo-se uma coordenada auxiliar θ definida por

$$\frac{\Omega_{\phi 0}}{\Omega_{\gamma 0}} x^{3(\gamma-w-1)} = \sinh^2 \theta. \quad (7.19)$$

Com esta escolha, a integração de (7.18) é facilmente computada cujo resultado é [32]

$$R(\phi) = R_0 \left(\frac{\Omega_{\gamma 0}}{\Omega_{\phi 0}} \right)^{\frac{1}{3(\gamma-w-1)}} \sinh^{\frac{2}{3(\gamma-w-1)}} \left[\frac{3(\gamma-w-1)\sqrt{8\pi}}{2\sqrt{3(1+w)}} \frac{\phi}{m_{pl}} \right], \quad (7.20)$$

ou equivalentemente,

$$\frac{\phi(R)}{m_{pl}} = \frac{2\sqrt{3(1+w)}}{3(\gamma-w-1)\sqrt{8\pi}} \operatorname{arcsinh} \left[\sqrt{\frac{\Omega_{\phi 0}}{\Omega_{\gamma 0}}} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\frac{3(\gamma-w-1)}{2}} \right], \quad (7.21)$$

onde a constante de integração foi fixada a zero sem nenhuma perda de generalidade. Neste ponto, para derivar o potencial do campo escalar, é necessário apenas inserir a expressão (7.20) em (7.12); utilizando a relação (7.10) obtemos

$$V(\phi) = \frac{(1-w)}{2} \rho_{\phi_0} \left(\frac{\Omega_{\phi_0}}{\Omega_{\gamma_0}} \right)^{\frac{(1+w)}{(\gamma-w-1)}} \sinh^{-\frac{2(1+w)}{(\gamma-w-1)}} \left[\frac{3(\gamma-w-1)\sqrt{8\pi}}{2\sqrt{3(1+w)}} \frac{\phi}{m_{pl}} \right]. \quad (7.22)$$

As correspondentes densidades de energia para o fluido perfeito γ e campo escalar ϕ são dadas por [32]

$$\rho_\gamma(\phi) = \rho_{\gamma_0} \left(\frac{\Omega_{\gamma_0}}{\Omega_{\phi_0}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-w-1}} \sinh^{-\frac{2\gamma}{(\gamma-w-1)}} \left[\frac{3(\gamma-w-1)\sqrt{8\pi}}{2\sqrt{3(1+w)}} \frac{\phi}{m_{pl}} \right], \quad (7.23)$$

$$\rho_\phi(\phi) = \rho_{\phi_0} \left(\frac{\Omega_{\phi_0}}{\Omega_{\gamma_0}} \right)^{\frac{(1+w)}{(\gamma-w-1)}} \sinh^{-\frac{2(1+w)}{(\gamma-w-1)}} \left[\frac{3(\gamma-w-1)\sqrt{8\pi}}{2\sqrt{3(1+w)}} \frac{\phi}{m_{pl}} \right]. \quad (7.24)$$

As relações (7.20) - (7.24) representam as soluções gerais e unificadas descrevendo as principais quantidades físicas para um universo plano preenchido por um fluido perfeito mais uma componente de *matéria-X* caracterizadas pelo par (γ, ω) . Portanto, todas as soluções conhecidas são casos peculiares dela através de uma escolha apropriada dos parâmetros correspondentes. Em particular, o par (γ, ω) permite-nos calcular o valor das expressões em diferentes épocas. Por exemplo, para modelos de poeira ($\gamma = 1$) e radiação ($\gamma = 4/3$), teremos respectivamente,

$$V(\phi) = \frac{(1-w)}{2} \rho_{\phi_0} \left(\frac{\Omega_{M_0}}{\Omega_{\phi_0}} \right)^{\frac{(1+w)}{w}} \sinh^{\frac{2(1+w)}{w}} \left[\frac{-3w\sqrt{8\pi}}{2\sqrt{3(1+w)}} \frac{\phi}{m_{pl}} \right], \quad (7.25)$$

$$V(\phi) = \frac{(1-w)}{2} \rho_{\phi_0} \left(\frac{\Omega_{\phi_0}}{\Omega_{r_0}} \right)^{\frac{3(1+w)}{(1-3w)}} \sinh^{-\frac{6(1+w)}{(1-3w)}} \left[\frac{(1-3w)\sqrt{8\pi}}{2\sqrt{3(1+w)}} \frac{\phi}{m_{pl}} \right]. \quad (7.26)$$

A solução (7.25) foi proposta independentemente por Ureña-Lopes *et al.* [206] e Di Pietro *et al.* [208] usando métodos diferentes. Entretanto, nossa solução geral (7.22) revela analiticamente a influência de diferentes

regimes sobre o comportamento do potencial $V(\phi)$, como pode ser visto das expressões acima para a fase de radiação e poeira. Mais informação também pode ser obtida da expressão (7.22) no tempo $t \ll t_0$. Neste caso, quando $R \ll R_0$, o campo escalar satisfaz a condição $\left| \frac{3(\gamma-w-1)\sqrt{8\pi}}{2\sqrt{3(1+w)}} \frac{\phi}{m_{pl}} \right| \ll 1$, e de (7.22) obtemos

$$V(\phi) \sim \frac{(1-w)}{2} \rho_{\phi_0} \left(\frac{\Omega_{\phi_0}}{\Omega_{\gamma_0}} \right)^{\frac{(1+w)}{(\gamma-w-1)}} \left\{ \frac{3(\gamma-w-1)\sqrt{8\pi}}{2\sqrt{3(1+w)}} \frac{\phi}{m_{pl}} \right\}^{-\frac{2(1+w)}{(\gamma-1-w)}}. \quad (7.27)$$

Particularmente, para $\gamma = 1$ e $\gamma = 4/3$, as expressões descrevendo esses modelos de potenciais se reduzem às seguintes formas:

$$V(\phi) \sim \left\{ \frac{-3w\sqrt{8\pi}\Omega_{M0}}{2\sqrt{3(1+w)}\Omega_{\phi_0}} \frac{\phi}{m_{pl}} \right\}^{\frac{2(1+w)}{w}} \quad (7.28)$$

e

$$V(\phi) \sim \left\{ \frac{(1-3w)\sqrt{8\pi}\Omega_{r0}}{2\sqrt{3(1+w)}\Omega_{\phi_0}} \frac{\phi}{m_{pl}} \right\}^{-\frac{6(1+w)}{(1-3w)}}, \quad (7.29)$$

que devem ser obtidas diretamente das equações (7.25) e (7.26). Este caso limite para radiação (expressão acima) não foi obtido na literatura, enquanto a expressão (7.28) foi proposto por Ureña-Lopes *et al.* na referência [206].

É interessante notar que a expressão (7.25) também pode ser expressa em termos de funções exponenciais, a saber:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{(1-\omega)}{2} \rho_{\phi_0} \left(\frac{\Omega_{M0}}{\Omega_{\phi_0}} \right)^{\frac{2(1+\omega)}{\omega}} \left\{ \frac{1 - \exp \left(\frac{3\omega\sqrt{8\pi}}{\sqrt{3(1+\omega)}} \frac{\phi}{m_{pl}} \right)}{2} \right\}^{\frac{2(1+\omega)}{\omega}} \\ &\times \exp \left[-\sqrt{24\pi(1+\omega)} \frac{\phi}{m_{pl}} \right]. \end{aligned} \quad (7.30)$$

A expressão acima nos mostra que a condição $(\frac{3w\sqrt{8\pi}}{\sqrt{3(1+w)}} \frac{\phi}{m_{pl}}) \gg 1$ ($w < 0$)

implica que o potencial evolui como

$$V(\phi) \sim \exp\left(-\sqrt{24\pi(1+w)}\frac{\phi}{m_{pl}}\right), \quad (7.31)$$

conforme encontrado na literatura¹ [205].

7.3.2 Solução para $k \neq 0$

No caso presente, lembramos que a equação geral (7.17) não possui uma solução geral analítica. Entretanto, soluções especiais podem ser derivadas para valores particulares do par de parâmetros (γ, ω) .

- **Caso I: γ arbitrário e $\omega = -1/3$**

Neste caso, substituindo o valor particular de $\omega = -1/3$ na expressão (7.17) ela se reduz a

$$d\phi = H_0^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}\rho_{\phi_0}} \frac{x^{-1} dx}{\sqrt{1 - \Omega_{\gamma_0} + \Omega_{\gamma_0} x^{-(3\gamma-2)}}}, \quad (7.32)$$

onde, redefinindo $\left(\frac{1-\Omega_{\gamma_0}}{\Omega_{\gamma_0}}\right)x^{(3\gamma-2)} = \sinh^2 \theta$, obtemos

$$R(\phi) = R_0 \left\{ \frac{\Omega_{\gamma_0}}{1 - \Omega_{\gamma_0}} \right\}^{\frac{1}{3\gamma-2}} \sinh^{\frac{2}{3\gamma-2}} \left[(3\gamma - 2)\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{1 - \Omega_{\gamma_0}}{\Omega_{\phi_0}}} \frac{\phi}{m_{pl}} \right] \quad (7.33)$$

ou equivalentemente,

$$\frac{\phi(R)}{m_{pl}} = \frac{1}{(3\gamma - 2)\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\Omega_{\phi_0}}{1 - \Omega_{\gamma_0}}} \operatorname{arcsinh} \left[\sqrt{\frac{1 - \Omega_{\gamma_0}}{\Omega_{\gamma_0}}} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\frac{3\gamma-2}{2}} \right]. \quad (7.34)$$

Por outro lado, as expressões descrevendo as densidades de energia das duas componentes (radiação e campo escalar) são escritas como

$$\rho_\gamma = \rho_{\gamma_0} \left\{ \frac{1 - \Omega_{\gamma_0}}{\Omega_{\gamma_0}} \right\}^{\frac{3\gamma}{3\gamma-2}} \sinh^{-\frac{6\gamma}{3\gamma-2}} \left[(3\gamma - 2)\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{1 - \Omega_{\gamma_0}}{\Omega_{\phi_0}}} \frac{\phi}{m_{pl}} \right], \quad (7.35)$$

¹Neste modelo o universo é completamente dominado pela densidade de energia do campo escalar.

$$\rho_\phi = \rho_{\phi_0} \left\{ \frac{1 - \Omega_{\gamma 0}}{\Omega_{\gamma 0}} \right\}^{\frac{2}{3\gamma-2}} \sinh^{-\frac{4}{3\gamma-2}} \left[(3\gamma - 2) \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{1 - \Omega_{\gamma 0}}{\Omega_{\phi_0}}} \frac{\phi}{m_{pl}} \right]. \quad (7.36)$$

Finalmente, o potencial $V(\phi)$ é obtido substituindo-se a expressão acima nas em (7.10)

$$V(\phi) = \frac{2}{3} \rho_{\phi_0} \left\{ \frac{1 - \Omega_{\gamma 0}}{\Omega_{\gamma 0}} \right\}^{\frac{2}{3\gamma-2}} \sinh^{-\frac{4}{3\gamma-2}} \left[(3\gamma - 2) \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{1 - \Omega_{\gamma 0}}{\Omega_{\phi_0}}} \frac{\phi}{m_{pl}} \right]. \quad (7.37)$$

Naturalmente, o comportamento para diferentes épocas deve ser obtido a partir de uma escolha apropriada do parâmetro γ . Em particular, para $\gamma = 1$, vemos que o potencial $V(\phi)$ na expressão acima se reduz ao resultado encontrado por Di Pietro *et al.* [208].

• Caso II: γ arbitrário e $\omega = -2/3$

Aplicando o mesmo método utilizado acima, obtemos

$$V(\phi) = \frac{5}{6} \rho_{\phi_0} \left\{ \frac{\Omega_{\gamma 0}}{2\Omega_{\phi_0}} \sinh \left(\sqrt{8\pi} \frac{\phi}{m_{pl}} \right) + \frac{(\Omega_{\gamma 0} + \Omega_{\phi_0} - 1)}{4\Omega_{\phi_0}} \times \right. \quad (7.38)$$

$$\left. \left[\frac{\Omega_{\gamma 0} + \Omega_{\phi_0} - 1}{\Omega_{\gamma 0}} e^{-\sqrt{8\pi} \frac{\phi}{m_{pl}}} + 2 \right] + \left(\frac{\Omega_{\gamma 0} - 4\Omega_{\phi_0}}{4\Omega_{\phi_0}} \right) e^{-\sqrt{8\pi} \frac{\phi}{m_{pl}}} \right\}^{-1}. \quad (7.39)$$

Este potencial foi obtido na literatura por Di Pietro *et al.* [208] a menos do termo $\left(\frac{\Omega_{\gamma 0} - 4\Omega_{\phi_0}}{4\Omega_{\phi_0}} \right) e^{-\sqrt{8\pi} \frac{\phi}{m_{pl}}}$.

• Caso III: γ arbitrário e $\omega = -1/6$

Neste caso, o potencial $V(\phi)$ é obtido em termos de funções elípticas conforme mencionado na referência [207]. A solução geral para $V(\phi)$ é dada por:

$$V(\phi) = \frac{7}{12} \rho_{\phi_0} \zeta^5 \text{sc}^{-10} \left(\xi \frac{\phi}{m_{pl}}, m \right), \quad (7.40)$$

onde as constantes ζ e ξ são escritas como

$$\zeta = \frac{2(1 - \Omega_{\gamma_0} + \Omega_{\phi_0})}{(\Omega_{\phi_0} - \sqrt{(\Omega_{\phi_0} + 2\Omega_{\gamma_0})^2 - 4\Omega_{\gamma_0}})},$$

$$\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{(\Omega_{\phi_0} + 2\Omega_{\gamma_0})^2 - 4\Omega_{\gamma_0}}}{\Omega_{\phi_0}}},$$

e m , dado por

$$m = \frac{2\sqrt{(\Omega_{\phi_0} + 2\Omega_{\gamma_0})^2 - 4\Omega_{\gamma_0}}}{\Omega_{\phi_0} + \sqrt{(\Omega_{\phi_0} + 2\Omega_{\gamma_0})^2 - 4\Omega_{\gamma_0}}},$$

representa o parâmetro da função elíptica correspondente [209].

7.4 Cálculo do Redshift de Transição

Na presente seção, calcularemos o redshift de transição z_t no qual o universo passa do regime desacelerado para o acelerado, ou equivalentemente, o redshift no qual o parâmetro de desaceleração q_0 é nulo.

Como é amplamente conhecido, o parâmetro de desaceleração é definido pela relação $q(R) = -R\ddot{R}/R$, ou equivalentemente, $-R\ddot{R} = 0$. Por outro lado, a equação de evolução (7.13), descrevendo o comportamento do fator de escalar $R(t)$, nos fornece

$$\Delta\dot{R}^2 + \Delta k + \frac{3}{2}H_0^2(1 - \gamma + w)\Omega_{\phi_0}R_0^{3(1+w)}R^{-(1+3w)} = 0, \quad (7.41)$$

onde, com sua primeira integral definida por (7.14), obtemos

$$R = R_0 \left[\frac{3}{2\Delta}(\gamma - \omega - 1) - 1 \right]^{\frac{1}{3(1+\omega-\gamma)}} \left(\frac{\Omega_{\phi_0}}{\Omega_{\gamma_0}} \right)^{\frac{1}{3(1+\omega-\gamma)}}. \quad (7.42)$$

Se considerarmos que $R = R_t$, o raio no qual o universo passa do regime desacelerado para o acelerado, teremos

$$R_t = \frac{R_0}{1 + z_t}. \quad (7.43)$$

Portanto, o redshift de transição z_t é dado por:

$$z_t = \left\{ \left[\frac{3}{2\Delta}(\gamma - \omega - 1) - 1 \right] \left(\frac{\Omega_{\phi_0}}{\Omega_{\gamma_0}} \right) \right\}^{-\frac{1}{3(1+\omega-\gamma)}} - 1. \quad (7.44)$$

Para checar a validade desta expressão, é interessante calcular o valor do parâmetro de desaceleração para casos particulares das quantidades γ , ω , Ω_{γ_0} e Ω_{ϕ_0} . Em particular, para um modelo de universo dominado por uma componente de matéria ($\gamma = 1$) e constante cosmológica ($\omega = -1$), obtemos $z_t \sim 0,66$, em perfeito acordo com os dados observacionais.

Resumindo, nesta seção estudamos cosmologias do tipo FRW com uma componente de matéria e energia escura. Quando a componente de quintessência é representada por uma *matéria-X* com equação de estado $p_\phi = \omega\rho_\phi$, as equações de campo de Einstein determinam univocamente a forma do potencial escalar. Em outras palavras, não podemos postular simultaneamente uma forma arbitrária para o potencial e a *matéria-X*. A solução geral para $V(\phi)$ foi obtida para valores arbitrários do par de parâmetros (γ, ω) . Neste caso, a solução geral fornece o comportamento do potencial em diferentes épocas. Naturalmente, o modelo cosmológico discutido nesta seção é útil para universos preenchidos apenas por duas componentes.

Capítulo 8

Aceleração cósmica em modelos de gás Chapligyn simplificado

8.1 Introdução

Conforme já menionamos antes, os experimentos envolvendo as observações de supernovas sugerem fortemente que o universo possui uma componente extra usualmente chamada de energia escura ou quintessência que seria a responsável pela expansão acelerada do universo [10, 79, 211, 80, 92]. Alguns dos possíveis candidatos a esta componente são velhos conhecidos, sendo a constante cosmológica o candidato mais antigo.

Historicamente, as primeiras evidências teóricas justificando a aceleração cósmica em termos de um fluido do tipo gás de Chapligyn, foram discutidas originalmente por Kamenshchik *et al.* [94], e posteriormente desenvolvidas por Bilić *et al.* [95], Bento *et al.* [27] e Benaoum [28]. Recentemente, alguns desenvolvimentos nesta linha e generalizações do modelo original foram propostos por Cunha *et al.* [29, 30, 96] e Lima *et al.* [97].

A seguir, usaremos um modelo de gás de Chapligyn para deduzir o redshift de transição e utilizá-lo como um discriminador cosmológico para vincular alguns parâmetros cosmológicos, bem como calcular o parâmetro de desaceleração para o qual o universo evolui de um regime desacelerado

para um outro acelerado.

A componente de fluido exótico discutida nesta tese pode ser caracterizada macroscopicamente pela seguinte equação de estado [224]

$$p_c = -A/\rho_{ch}^\alpha, \quad (8.1)$$

onde A é um parâmetro positivo e α um número puro. A equação de estado originalmente proposta na referência [94] é recuperada para o caso $\alpha = 1$, enquanto que para $\alpha = 0$, o modelo descreve um cenário de matéria escura (modelo CDM) mais uma constante cosmológica (modelo Λ CDM).

A possibilidade de justificar a expansão cósmica por meio de um gás de Chapligyn com equação de estado (8.1), recentemente tem provocado um intenso debate na literatura. Os argumentos favoráveis a esta visão se baseiam nos diversos tipos de conexões que a componente descrita por (8.1) pode desenvolver. Em particular, conexões entre a equação de estado do gás de Chapligyn e teoria das cordas têm sido discutidas intensamente por vários autores [212, 213, 214]. Outra conexão se relaciona com o fato de que em altos redshifts o gás de Chapligyn torna-se um fluido sem pressão, possibilitando um esquema de unificação para o setor escuro cosmológico, uma idéia interessante que tem sido aplicada em vários contextos [215, 216]. Finalmente, uma conexão com *fluido taquônico* também pode ser possível, veja como exemplo a referência [217].

Neste capítulo, estudaremos em detalhe, as implicações físicas para o redshift de transição z_t sobre uma nova classe de cosmologias aceleradas denominadas de *gás de Chapligyn simplificado* [224]. Em particular, calcularemos explicitamente o parâmetro de desaceleração $q(z)$ para o qual o universo emerge de um estágio desacelerado para um regime acelerado. Estes modelos são caracterizados por um parâmetro α que torna-os mais interessantes e de mais fácil análise. Mostraremos também que, nos cenários onde o gás de Chapligyn simplificado exerce o papel de quintessência, o melhor ajuste para o parâmetro de densidade da

matéria escura é $\Omega_{dm} \leq 0,42$, o parâmetro α assume valores $\geq 0,7$ e o $z_t = 0,46 \pm 0,13$. Como veremos, esses resultados estão em bom acordo com os estudos recentes de Supernovas Ia e as estruturas de grande escala [30, 96].

8.2 Equações Básicas do Modelo

Nesta seção, concentraremos nossa atenção sobre uma classe de modelos cosmológicos com uma equação de estado descrita pela expressão (8.1) [224, 27, 29]

Num artigo recente, Lima *et al.* [97] mostraram que utilizando argumentos sobre velocidade do som adiabática é possível estabelecer uma relação entre os parâmetros α e A_s , onde $A_s = A\rho_c^{-(1+\alpha)}$ e A é uma constante. Foi mostrado que a escolha mais simples é $A_s = \alpha$, com a equação de estado assumindo a forma

$$p_{ch} = -\alpha\rho_{cho} \left(\frac{\rho_{cho}}{\rho_c} \right)^\alpha, \quad (8.2)$$

de modo que uma pressão negativa capaz de acelerar o universo só é obtida para valores positivos de α . Este argumento naturalmente estabelece um vínculo sobre este parâmetro, que deve assumir os valores $0 < \alpha < 1$.

Considerando modelos de cosmologias do tipo FRW, é fácil mostrar que inserindo a expressão (8.1) na lei de conservação $u_\mu T_{;\nu}^{\mu\nu}$, obtemos a seguinte expressão para a densidade de energia

$$\rho_{ch} = \left[A + B \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(1+\alpha)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (8.3)$$

ou equivalentemente

$$\rho_{ch} = \rho_{cho} \left[A_s + (1 - A_s) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(1+\alpha)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (8.4)$$

onde ρ_{ch_0} é a densidade de energia atual e $R(t)$ é o fator de escala cósmica. Na expressão acima, utilizamos a condição inicial $R(t_0) = R_0$ para encontrar o valor da constante $B = \rho_{ch_0}^{1+\alpha} - A$.

As equações de Fridmann para esses modelos são dadas por:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H_0^2 \left\{ \Omega_m \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + (1 - \Omega_m) \left[A_s + (1 - A_s) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(1+\alpha)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \right\}, \quad (8.5)$$

onde $H_0 = 100 h km/s/Mpc$ é o valor presente do parâmetro de Hubble e $\Omega_m = \Omega_{dm} + \Omega_b$ é o parâmetro de densidade da matéria, composto por matéria escura (Ω_{dm}) e bariônica (Ω_b).

Para estudar o fenômeno de aceleração nestes cenários, obteremos o parâmetro de desaceleração da maneira usual

$$q(z) = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}, \quad (8.6)$$

onde as derivadas \ddot{R} e \dot{R}^2 são dadas pelas equações de Friedmann

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho_{ch} + \rho_m + 3p_{ch})R \quad (8.7)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8}{3}\pi G(\rho_{ch} + \rho_m)R^2. \quad (8.8)$$

Substituindo as duas equações acima em (8.6) obteremos como resultado

$$q(z) = \frac{1}{2} \frac{\rho_{ch} + \rho_m + 3p_{ch}}{\rho_c + \rho_m}, \quad (8.9)$$

sendo p_{ch} a densidade de pressão do gás de Chapligyn e ρ_m é a densidade de matéria dada por

$$\rho_m = \rho_{m_0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^3. \quad (8.10)$$

Neste ponto, substituindo as expressões (8.1) e (8.3) na equação (8.9), é fácil mostrar que a solução descrevendo o parâmetro de desaceleração assume a forma geral [224]

$$q(z) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{3A_s(1 - \Omega_{m_0})[f(z)]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\Omega_{m_0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{m_0})[f(z)]^{\frac{1}{1+\alpha}}} \right\}, \quad (8.11)$$

onde utilizamos a relação $(R_0/R) = (1+z)^{-1}$, e $f(z)$ é a função definida como

$$f(z) = [A_s + (1 - A_s)(1 + z)^{3(1+\alpha)}]. \quad (8.12)$$

8.2.1 Quintessência

Os modelos de quintessência podem ser obtidos para uma escolha particular do parâmetro A_s na expressão (8.11). A escolha mais adequada para garantir a estabilidade destes modelos cosmológicos é descrita pelo valor $A_s = \alpha$, com a expressão (8.11) sendo representada por

$$q(z) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{3A_s(1 - \Omega_{m_0})[f(z)]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\Omega_{m_0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{m_0})[f(z)]^{\frac{1}{1+\alpha}}} \right\}, \quad (8.13)$$

e $f(z)$ sendo redefinida por

$$f(z) = [\alpha + (1 - \alpha)(1 + z)^{3(1+\alpha)}]. \quad (8.14)$$

Note que, se a condição $\alpha = 1$ for satisfeita, este modelo de gás de Chapligyn simplificado tem sua evolução cosmológica análoga aos modelos com constante cosmológica (Λ CDM). Por outro lado, se a condição $\alpha = 1$ for satisfeita, é fácil mostrar que a expressão (8.13) se reduz a $q = 1/2$, consistente com o modelo padrão (SCDM).

A fig. 8.1 mostra o comportamento do parâmetro de desaceleração $q(z)$ como uma função do redshift para modelos de universo descritos por um gás de Chapligyn simplificado mais matéria escura (CDM). Note que para altos valores de z o universo é desacelerado, conforme esperado para um fluido sem pressão. Entretanto, devido ao comportamento de matéria- x em baixos redshifts, o universo acelera sua expansão e tem sua evolução semelhante ao de uma constante cosmológica (Λ CDM).

Uma visão mais detalhada do modelo de gás de Chapligyn discutido aqui pode ser observada nas figuras 8.2 e 8.3. Nossa análise é baseada no

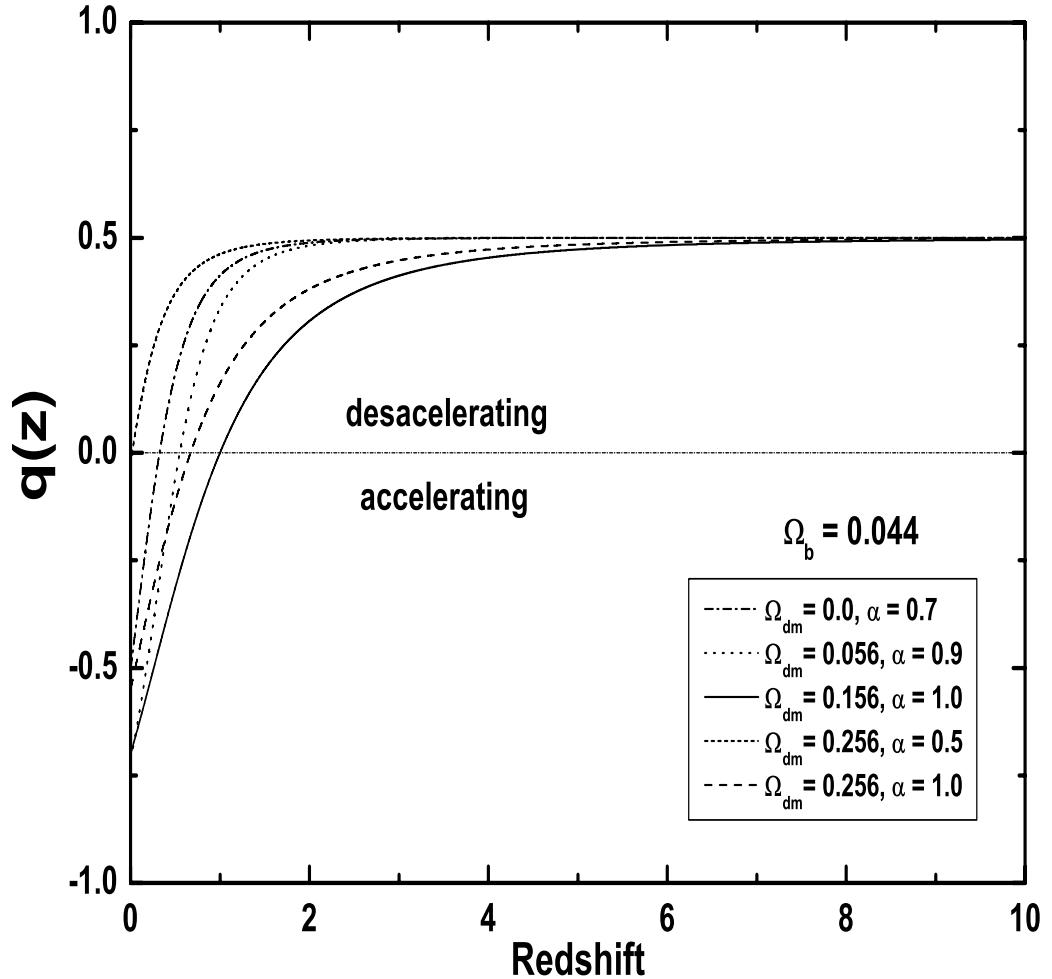


Figura 8.1: Parâmetro de desaceleração versus diagrama de redshift. As curvas correspondem a vários valores dos parâmetros Ω_{dm} e α para cosmologias do tipo quintessência como indicado acima e considerando $\Omega_b = 0,044$.

redshift de transição z_t obtido da equação (8.13) para Ω_{dm} , α e $\Omega_b = 0,044$ em comparação com o redshift de transição $z_t = 0,46 \pm 0,13$ das medidas de SN Ia [79].

Inicialmente, vemos que altos valores do parâmetro α são compatíveis

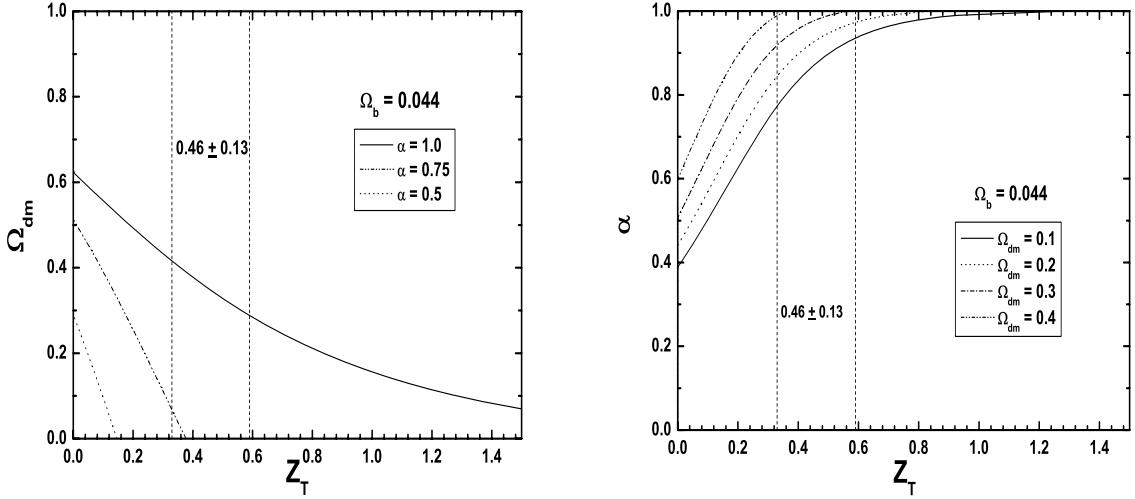


Figura 8.2: a) Plano Ω_{dm} - z_t para valores do redshift de transição no intervalo $0,33 \leq z_t \leq 0,59$, de acordo com Ries *et al.* [79]. As curvas correspondem a vários valores selecionados para α . b) Plano α - z_t com a região estimada do redshift de transição z_t para alguns valores escolhidos de Ω_{dm} . Note que apenas altos valores do parâmetro α são permitidos.

somente com a região observada. Isto pode ser entendido considerando que em nosso formalismo, os modelos com $\alpha = 1$ são semelhantes ao modelo com constante cosmológica (Λ CDM). Por outro lado, para pequenos valores do parâmetro α , o modelo é equivalente ao modelo de poeira (SCDM). Outro fato extremamente importante é que o aumento do conteúdo material diminui as possibilidades para o redshift de transição. Em particular, para $\Omega_{dm} \sim 0,7$ não existe z_t , enquanto que para $\Omega_{dm} \sim 0,2$ existe uma ampla possibilidade para z_t . Estas considerações estão muito claras nas figuras 8.2a e 8.2b.

Para $\alpha = 1$, a região permitida é $0,288 \leq \Omega_{dm} \leq 0,415$. Sendo assim, para $\Omega_{dm} = 0,347$ e redshift de transição $z_t = 0,46$, encontramos $q_0 = -0,41$. Em particular, utilizando o melhor best fit (ajuste) para

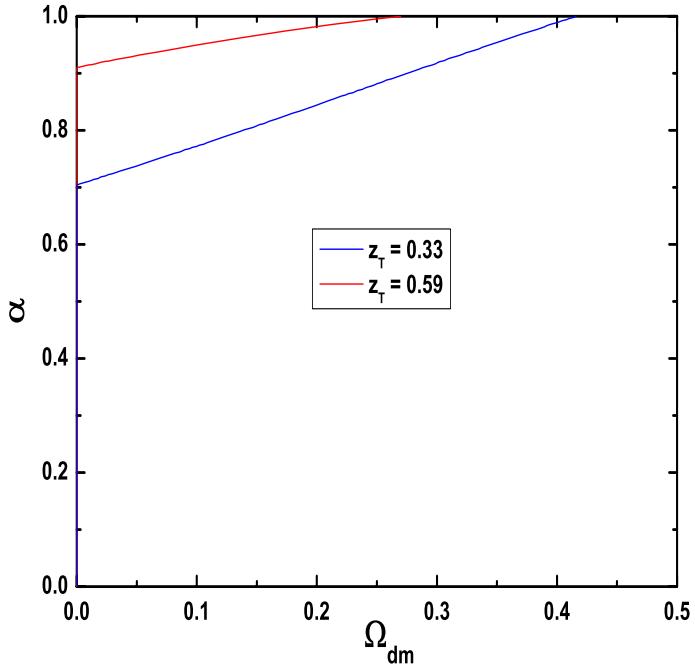


Figura 8.3: Plano α - Ω_{dm} com $z_t = 0,46 \pm 0,13$ conforme medidas de SN Ia. Vemos que valores de $\alpha \geq 0,7$ são compatíveis com a região observada.

$\Omega_M = 0,27$ e $\alpha = 1$, obtido de BAO¹ + SNLS² [97], encontramos $z_t = 0,71$ e $q_0 = -0,59$.

Na figura 8.3 vemos que os valores permitidos para o par de parâmetros Ω_M e α são razoavelmente restritos em comparação com o modelo padrão de gás de Chapligyn [29]. Em particular, se Ω_M é maior que 0,43, ou ainda, se $\alpha < 0,7$ os modelos estão fora da região amparada pelos valores observacionais para a fase de transição. Portanto, a região desta figura está em acordo com aquela obtida por Lima e colaboradores em estudos utilizando dados de supernovas (SN Ia) e estruturas de grandes escalas

¹Sigla inglesa para *Oscilações acústicas nos bárions*.

²Sigla em inglês para o projeto Supernovae Legacy Survey

(LSS) [97].

8.2.2 Quartessênciam

Os modelos de gás de Chapligyn descrevendo o papel de quartessênciam são baseados nas equações

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H_0^2 \left\{ \Omega_b \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + (1 - \Omega_b) \left[A_s + (1 - A_s) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(1+\alpha)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \right\} \quad (8.15)$$

e

$$q(z) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{3\alpha(1 - \Omega_{b_0})[f(z)]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\Omega_{b_0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{b_0})[f(z)]^{\frac{1}{1+\alpha}}} \right\}, \quad (8.16)$$

sendo $f(z)$ dado pela relação (8.12) e Ω_{b_0} o parâmetro de densidade dos bárions. Note que, se a condição $\alpha = 1$ for satisfeita, a dinâmica exercida por esta componente é semelhante aos modelos de constante cosmológica mais bárions.

O modelo de quartessênciam descrito pelas duas equações acima pode ser caracterizado completamente apenas pelos valores do parâmetro α . Sendo assim, para cosmologias do tipo planas, de acordo com medidas do CMB [218] e assumindo $\Omega_b = 0,044$, nossa análise pode ser enriquecida construindo um plano da forma $\alpha - z_t$.

8.2.3 Lei de Evolução da Temperatura

A seguir, deduziremos a lei de evolução da temperatura para o modelo de gás de Chapligyn discutido nesta tese.

Começaremos nossa análise relembrando que o estado termodinâmico de um fluido relativístico simples é caracterizado por um tensor de energia momento $T^{\alpha\beta}$, uma corrente de partícula N^α e uma corrente de entropia

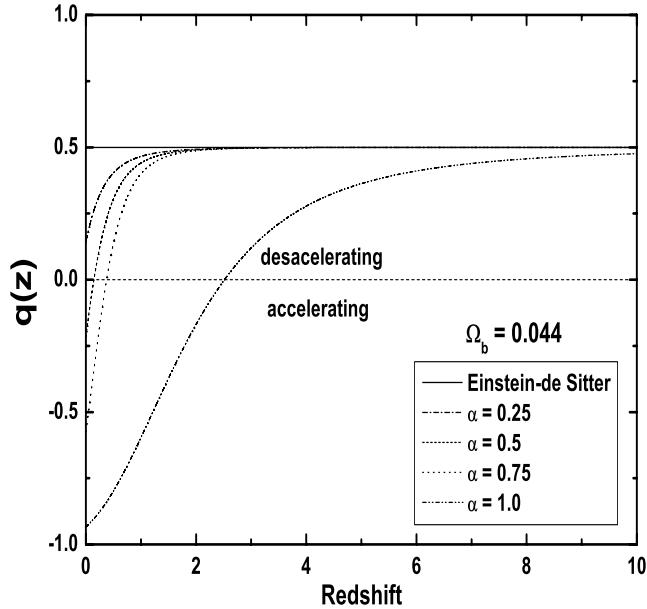


Figura 8.4: Parâmetro de desaceleração versus diagrama redshift para modelos de quartessência. As curvas correspondem a vários valores do parâmetro α com Ω_b fixo em 0,044.

S^α . Assumindo que o gás de Chapligyn é um fluido relativístico simples, tais quantidades são definidas pelas seguintes relações [223, 221]

$$T^{\alpha\beta} = (p_{ch} + \rho_{ch})u^\alpha u^\beta - p_{ch}g^{\alpha\beta}, \quad T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0 \quad (8.17)$$

$$N^\alpha = n u^\alpha, \quad N_{;\alpha}^\alpha = 0 \quad (8.18)$$

$$S^\alpha = n\sigma u^\alpha, \quad S_{;\alpha}^\alpha = 0 \quad (8.19)$$

onde (\cdot) significa a derivada covariante, n é a densidade de partícula, σ é a entropia específica (por partícula) ρ_{ch} e p_{ch} são as densidades de energia e pressão, representadas pelas relações (8.1) e (8.4), respectivamente. As

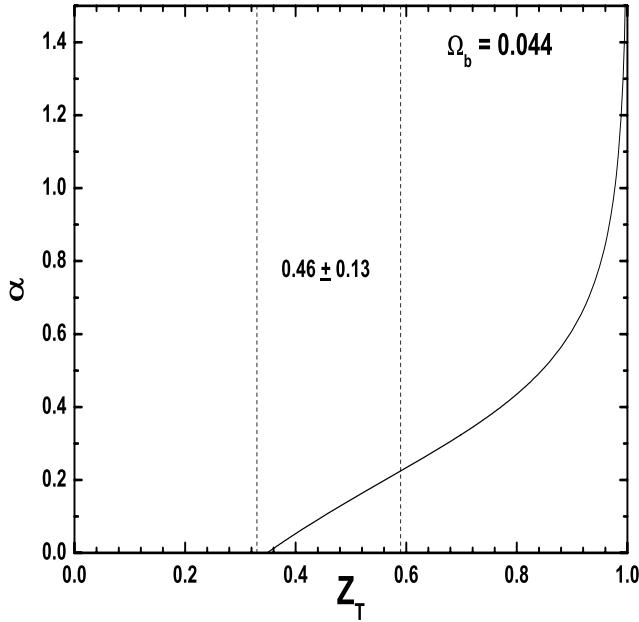


Figura 8.5: Plano α - z_t com valor estimado do redshift de transição. Neste gráfico, a linha sólida restringe os valores permitidos do parâmetro α , além do mais, delimita a existência de um limite superior/inferior deste parâmetro.

quantidades ρ_{ch} , p_{ch} , n e σ estão relacionadas com a temperatura T pela lei de Gibbs

$$nTd\sigma = dp_{ch} - \frac{\rho_{ch} + p_{ch}}{n}dn. \quad (8.20)$$

Considerando T e n como variáveis termodinâmicas independentes e usando o fato de que $d\sigma$ é uma diferencial exata, obtemos facilmente

$$\frac{\dot{T}}{T} = \left(\frac{\partial p_{ch}}{\partial \rho_{ch}} \right)_n \frac{\dot{n}}{n}, \quad (8.21)$$

que representa a taxa de variação da temperatura de um fluido simples (perfeito) no limite adiabático [219, 220].

O caso onde a energia escura é descrita por um fluido simples do tipo

matéria-x, um formalismo termodinâmico similar foi obtido por Lima e Alcaniz (para mais detalhes veja a referência [223]). Para os casos onde os fluidos são imperfeitos, a análise matemática é mais sofisticada. Em particular, um estudo sobre esse tema foi abordado por Silva *et al.* na referência [221].

No nosso caso, onde a dinâmica da energia escura é descrita pelo gás de Chapligyn simplificado, mais precisamente pelas relações (8.1) e (8.4), é fácil mostrar que a equação acima pode ser reescrita na forma [222]

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{3\alpha A_s \rho_{ch_o}^{-(1+\alpha)}}{A_s + (1 - A_s) \left(\frac{R_o}{R}\right)^{3(1+\alpha)}} \frac{\dot{R}}{R} \quad (8.22)$$

ou, equivalentemente,

$$\ln \frac{T}{T_o} = 3\alpha A_s \rho_{ch_o}^{-(1+\alpha)} \int_1^u \frac{du}{u[A_s + (1 - A_s)u^{3(1+\alpha)}]}, \quad (8.23)$$

onde $u = R/R_o$ é uma variável de integração conveniente. A integração da equação acima nos fornece uma relação para a evolução da temperatura $T = T(R)$. Para tanto, a integral acima pode ser reescrita na forma

$$I = \int_1^{R/R_o} \frac{du}{u + au^{1-b}} = \ln \left[\frac{u^b + a}{1 + a} \right]^{1/b}, \quad (8.24)$$

sendo $a = (1 - A_s)/A_s$ e $b = 3(1 + \alpha)$. Retornando a variável R/R_o , é fácil mostrar que a temperatura é uma função do fator de escala R , e evolui de acordo com a lei de potência [222]

$$T(R) = T_0 \left[1 - A_s + A_s \left(\frac{R}{R_o} \right)^{3(1+\alpha)} \right]^{\frac{1}{3(1+\alpha)}}. \quad (8.25)$$

A expressão acima nos mostra que a evolução da temperatura do fluido é controlada pelo par de parâmetros (A_s, α) . Em particular, escolhendo a condição $A_s = 1$, teremos $T(R) \propto R^3 \propto V$. Por outro lado, escolhendo a condição $A_s = \alpha$, ou equivalentemente, para o caso de um gás de Chapligyn

simplificado, é direto mostrar que a lei de evolução é dada por [222]:

$$T = T_o \left[1 - \alpha + \alpha \left(\frac{R}{R_o} \right)^{3(1+\alpha)} \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \quad (8.26)$$

Note que no caso limite $\alpha = 0$ teremos $T(R) = T_0$, enquanto que para $\alpha = 1$ a lei de evolução é $T = T_o(R/R_o)^3 \propto V$. Fisicamente, isto significa que a temperatura do fluido aumenta se ele expande adiabaticamente. Em outras palavras, este resultado nos mostra que o universo torna-se mais quente se ele sofre uma expansão adiabática, descrição semelhante ao da *phantom energy* investigada recentemente por Lima e Alcaniz [224].

Capítulo 9

Conclusões e Perspectivas

O desenvolvimento desta tese envolveu duas linhas de investigação complementares: dinâmica estocástica e cosmologia.

No capítulo I revisamos o status atual da cosmologia moderna dando ênfase aos possíveis candidatos que possam explicar a expansão acelerada do universo. No capítulo II nós rediscutimos as diversas abordagens que podem ser adotadas na chamada teoria padrão do movimento browniano, a saber: (i) o tratamento de Einstein, cuja base é a equação de difusão; (ii) o tratamento de Langevin, baseado numa equação diferencial estocástica; (iii) o tratamento via caminhadas aleatórias tal como proposto originalmente por Kac e, finalmente, (iv) a abordagem via equação de Fokker-Planck. Para tempos longos as abordagens acima coincidem e reproduzem os mesmos resultados. Por outro lado, para tempos curtos a descrição de partícula deve ser estendida para um formalismo ondulatório.

No capítulo III aplicamos o formalismo de Langevin para uma classe especial de lagrangiana dependente do tempo, aqui denominada de q -lagrangiana. Inicialmente consideramos o caso com potencial $V(x) = 0$. Essa categoria de lagrangiana representa uma generalização natural da bem conhecida formulação lagrangiana de Batman e foi proposta recentemente no escopo da mecânica estatística não extensiva. A q -lagrangiana é descrita por um parâmetro livre (q) assumindo valores no intervalo

(0,1). Nesse contexto, estendemos o formalismo de forças flutuantes (ruído) de Langevin para estudar uma ampla variedade de sistemas físicos caracterizados por uma viscosidade variável. Em linhas gerais, as expressões descrevendo as quantidades de interesse físico foram modificadas consideravelmente, mostrando que os resultados da teoria padrão são recuperados como um caso particular quando o limite $q \rightarrow 1$ é tomado. Nossos estudos também revelaram um comportamento superdifusivo para o deslocamento quadrático médio.

No capítulo IV estendemos a formulação estocástica proposta no capítulo III para potenciais quadráticos e dirigimos nossa análise para o domínio da cosmologia, especialmente no novo cenário inflacionário. Em particular, estudamos a influência do banho térmico descrita pelo fluido de radiação, assumindo que ele é responsável pela evolução estocástica do campo inflaton. Assumindo que as flutuações dinâmicas do campo são descritas por uma equação de movimento do tipo Langevin, nós derivamos um conjunto de soluções analíticas incluindo os ruídos branco e colorido. Dependendo da escolha do parâmetro livre n , interpolando entre os ruídos branco e colorido, nossos estudos mostraram que o campo delimita três regimes difusivos, a saber; superdifusivo, difusão normal e subdifusivo.

No capítulo V, rediscutimos o efeito Meszaros do ponto de vista da dinâmica estocástica. Aplicando o formalismo estendido de forças flutuantes, nós analizamos o comportamento da componente de matéria não relativística quando o fluido de radiação é considerado como uma perturbação estocástica. As soluções analíticas e formais descrevendo o contraste de densidade da matéria (δ_m) foram derivadas e as correções estocásticas são controladas por uma constante Γ . Particularmente, para o caso de ruído branco, se Γ é unitário, o crescimento do contraste δ_m no intervalo $(0, t_e)$ é apenas 1,2 vezes o resultado padrão, indicando que o efeito é extremamente robusto com respeito a possível existência de processos

estocásticos.

No capítulo VI, fizemos uma extensão do formalismo estocástico proposto por M. Novello [35]. Neste caso, as equações de Fridmann-Robertson-Walker para um fluido relativístico foram reduzidas à forma simples de um oscilador harmônico, a partir do qual, a dinâmica estocástica é formulada através de uma perspectiva quântica, usualmente denominada de *fluido de Madelung*. O conjunto completo das soluções foram determinadas analiticamente e a correção estocástica tem como objetivo exclusivo, evitar o colapso dos modelos. As soluções obtidas do nosso estudo são mais interessantes pelo fato de contemplar os modelos com parâmetro de curvatura (K) arbitrário, o mesmo acontecendo com o parâmetro da equação de estado (ω).

No capítulo VII, estudamos as implicações físicas para o redshift de transição sobre os modelos de cosmologias descritas pelo gás de Chapligyn simplificado. Tais modelos são controlados por um parâmetro α tornando-os mais interessante e de mais fácil estudo. Para os casos onde o gás de Chapligyn exerce o papel de quintessência ou quatessência, derivamos as expressões analíticas descrevendo o parâmetro de desaceleração $q(z)$ para modelos planos. Mostramos também que os cenários de quintessência limitam o parâmetro de densidade da matéria escura ao valor $\Omega_{ME} \leq 0,42$ e $\alpha \geq 0,7$, enquanto que os modelos de quartessência o parâmetro α varia no intervalo $0,7 \leq \alpha \leq 0,89$. Alguns aspectos termodinâmicos também foram estudados, em especial, derivamos a lei de evolução da temperatura e concluímos que seu comportamento é semelhante aos modelos de energia fantasma (*phantom energy*). Finalmente, no capítulo VIII propomos um método analítico para determinar o potencial escalar $V(\phi)$ para uma mistura de fluido perfeito mais quintessência em modelos do tipo FRW. Este formalismo é uma consequência imediata das equações de Einstein e contempla valores arbitrários do parâmetro de curvatura (K) e dos

parâmetros (γ , ω) das equações de estado do fluido e quintessência. Determinamos as soluções analíticas gerais descrevendo a evolução do potencial escalar ($V(\phi)$) bem como o valor do campo (ϕ). Derivamos também as densidades de energia do fluido perfeito γ e campo escalar ϕ , além da lei descrevendo o fator de escala $R(\phi)$. Mostramos que os resultados encontrados são válidos para valores arbitrários dos parâmetros (γ , ω).

As perspectivas para trabalhos futuros envolvendo dinâmica estocástica abordam diversos problemas cosmológicos e astrofísicos. Em particular, o problema envolvendo movimento browniano com uma barreira de potencial (absorvedora ou refletora) é de importância fundamental para esse domínio e será um dos principais objetos de investigação futura. Para este caso em especial, a barreira de potencial absorvedora é equivalente ao horizonte de evento de um buraco negro e seu movimento aleatório é determinado pelas interações gravitacionais do meio interestelar. Outra aplicação relevante da dinâmica estocástica será o estudo da viscosidade variável e forças flutuantes estendidas para os cenários de inflação morna. Esse estudo é considerado de extrema importância, pois possibilitará obter informações a respeito das flutuações térmicas e sua subsequente evolução temporal.

Apêndice A

Campo de Força Conservativa na Estatística de Kaniadakis

No presente apêndice, utilizaremos o formalismo da mecânica estatística de Kaniadakis [225, 226, 227, 228] para deduzir a função κ -distribuição para um gás na presença de um campo de força externa possuindo um potencial $U(\mathbf{r})$. Como veremos, para o caso de um gás diluído, mostraremos que uma função distribuição do tipo lei de potência, incluindo o fator de energia potencial pode ser rigorosamente deduzida baseado em argumentos puramente teóricos (Equação de Vlasov).

Conforme amplamente conhecido, um gás clássico sob condições estáveis e imerso em um campo de força conservativa, $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$, é descrito por uma função distribuição que difere da distribuição de velocidades maxwelliana apenas por um fator exponencial extra envolvendo a energia potencial. Neste caso, a função distribuição total no equilíbrio é escrita como

$$f(\mathbf{r}, v) = n_o \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\frac{1}{2}mv^2 + U(\mathbf{r})}{k_B T} \right), \quad (\text{A.1})$$

onde m é a massa das partículas, T é a temperatura e n_o é o número de partículas na ausência do campo de força externa. Em adição, desde que a distribuição acima seja normalizada, é fácil mostrar que a densidade de

partículas é dada por

$$n(\mathbf{r}) = n_o \exp \left[-\frac{U(\mathbf{r})}{k_B T} \right], \quad (\text{A.2})$$

onde o fator $\exp[-U(\mathbf{r})/k_B T]$, que é responsável pela inhomogeneidade da função $f(\mathbf{r}, v)$, é usualmente chamado de *fator de Boltzmann*. A expressão (A.1) segue naturalmente de uma integração da equação de Boltzmann sem o termo colisional, a saber,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Adotando a condição estacionária ($\partial f / \partial t = 0$), a função pode ser fatorada na forma

$$f(\mathbf{r}, v) = f_0(v)\chi(\mathbf{r}), \quad (\text{A.4})$$

onde $f_0(v)$ representa a função distribuição de equilíbrio (maxwelliana) e $\chi(\mathbf{r})$ é uma função escalar de \mathbf{r} .

Depois de uma simples normalização, pode ser facilmente mostrado que a expressão resultante para $\chi(\mathbf{r})$ é exatamente o fator de Boltzmann para a energia potencial do campo de força externa

$$\chi(\mathbf{r}) = \exp \left[-\frac{U(\mathbf{r})}{k_B T} \right], \quad (\text{A.5})$$

e combinando esta com a equação (A.4), vemos que a distribuição estacionária de Boltzmann (A.1) é facilmente obtida.

Por outro lado, recentes enfoques sobre as bases cinéticas (clássica e relativística) da κ -estatística proposta recentemente por Kaniadakis [225, 226, 227] substitui as funções distribuições da forma (A.1) por uma função distribuição do tipo lei de potência [229].

Do ponto de vista matemático, o κ -formalismo é baseado nas funções κ -exponencial e κ -logarítmico, as quais são definidas por

$$\exp_\kappa(f) = [\sqrt{1 + \kappa^2 f^2} + \kappa f]^{1/\kappa}, \quad (\text{A.6})$$

e

$$\ln_\kappa(f) = [f^\kappa - f^{-\kappa}]/2\kappa. \quad (\text{A.7})$$

Note que no limite $\kappa \rightarrow 0$ as identidades acima reproduzem as propriedades usuais das funções exponencial e logarítmico.

Recentemente, foi mostrado que a função distribuição de velocidades no equilíbrio (A.1) utilizando o κ -formalismo pode ser escrita como [225, 226, 227, 230]

$$f_0(v) = \frac{1}{z} \left[\sqrt{1 + \kappa^2 \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right)^2} + \kappa \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) \right]^{\frac{1}{\kappa}}. \quad (\text{A.8})$$

Nesta expressão o parâmetro κ está associado a entropia do gás, cujo principal efeito a nível da função distribuição é substituir a forma gaussiana padrão por uma lei de potência e a quantidade z é a constante de normalização. Como pode ser visto, a expressão acima se reduz a maxwelliana no limite $\kappa = 0$.

Agora, vamos considerar um gás diluído e espacialmente inhomogêneo suposto em equilíbrio na temperatura T . Suponha também que o gás em questão está imerso num campo de força externa, de maneira que $f(r, v)d^3v d^3r$ representa o número de partículas com velocidade \mathbf{v} dentro do elemento de volume d^3v e posição \mathbf{r} no volume d^3r . Neste caso, vemos de (A.3) que a equação de Boltzmann estacionária pode ser reescrita como

$$\mathbf{v} \cdot \nabla_r f - \frac{1}{m} \nabla_r U \cdot \nabla_v f = 0. \quad (\text{A.9})$$

Neste ponto, para introduzir os efeitos da κ -estatística, primeiramente devemos notar que a condição de fatorabilidade é modificada neste formalismo estendido. Isto significa que a suposição inicial de fatorização, isto é, a expressão (A.4) deve ser estendida. No espírito do κ -formalismo, uma generalização consistente de (A.4) pode ser representada

pela expressão [229]

$$f(\mathbf{r}, v) = \frac{1}{z} \exp_{\kappa} [\ln_{\kappa} (zf_0) + \ln_{\kappa} \chi(\mathbf{r})], \quad (\text{A.10})$$

onde z é uma constante de normalização introduzida por conveniência matemática, e as funções $\exp_{\kappa}(f)$ e $\ln_{\kappa}(f)$ são definidas pelas expressões (A.6) and (A.7). Por razões que serão úteis mais adiante, as propriedades de diferenciação das funções κ -exponencial e κ -logarítmico [225]

$$\frac{d \ln_{\kappa} f}{dx} = \left(\frac{f^{\kappa-1} + f^{-(\kappa+1)}}{2} \right) \frac{df}{dx}, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{d \exp_{\kappa}(f)}{dx} = \frac{\exp_{\kappa}(f)}{\sqrt{1 + \kappa^2 f^2}} \frac{df}{dx}, \quad (\text{A.12})$$

será intensamente usada. Assim, para obter a solução geral da equação (A.9), basta calcular os gradientes $\nabla_{\mathbf{r}} f$ e $\nabla_v f$. Neste caso, pode ser mostrado que tais quantidades podem ser escritas como [229]

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} f(r, v) &= \frac{\exp_{\kappa}[\ln_{\kappa} f_0(v) + \ln_{\kappa} \chi(r)]}{\exp_{\kappa}^{\kappa}[\ln_{\kappa} f_0(v) + \ln_{\kappa} \chi(r)]} \nabla_r \ln_{\kappa} \chi(r) \times \\ &\quad \left\{ 1 + \frac{\kappa \left(\ln_{\kappa} \chi(r) - \frac{mv^2}{2k_B T} \right)}{[1 + \kappa^2(\ln_{\kappa} f_0(v) + \ln_{\kappa} \chi(r))^2]^{1/2}} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_v f(r, v) &= \frac{\exp_{\kappa}[\ln_{\kappa} f_0(v) + \ln_{\kappa} \chi(r)]}{\exp_{\kappa}^{\kappa}[\ln_{\kappa} f_0(v) + \ln_{\kappa} \chi(r)]} \left(-\frac{mv}{k_B T} \right) \times \\ &\quad \left\{ 1 + \frac{\kappa \left(\ln_{\kappa} \chi(r) - \frac{mv^2}{2k_B T} \right)}{[1 + \kappa^2(\ln_{\kappa} f_0(v) + \ln_{\kappa} \chi(r))^2]^{1/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Substituindo os dois resultados acima na equação de Boltzmann estacionária (A.9), e simplificando os termos comuns, obtemos a equação

$$\nabla_{\mathbf{r}} \ln \chi \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{k_B T} \nabla U(r) \cdot d\mathbf{r}, \quad (\text{A.15})$$

a qual, tem como solução

$$\chi(\mathbf{r}) = \exp_{\kappa} \left(-\frac{U(\mathbf{r})}{k_B T} + C \right), \quad (\text{A.16})$$

onde C é uma constante arbitrária.

Inserindo (A.16) na expressão (A.10) e integrando o resultado no espaço das velocidade, segue que

$$\int z^{-1} \exp_{\kappa} \left[\ln_{\kappa} (z f_0) - \frac{U}{k_B T} + C \right] d^3 v = n(\mathbf{r}). \quad (\text{A.17})$$

Agora, substituindo a expressão de $f_0(v)$ dado por (A.8) e considerando a região onde $U(\mathbf{r}) = 0$, encontramos

$$z^{-1} \int \exp_{\kappa} \left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2k_B T} + C \right) d^3 v = n_0, \quad (\text{A.18})$$

e da condição de normalização, $n_0 = \int f_0(v) d^3 v$, segue que o único valor permitido para a constante de integração é $C = 0$. Consequentemente, (A.18) torna-se

$$\chi(\mathbf{r}) = \exp_{\kappa} \left[-\frac{U(\mathbf{r})}{k_B T} \right], \quad (\text{A.19})$$

que é a generalização do fator de Boltzmann no formalismo da mecânica estatística de Kaniadakis.

Finalmente, inserindo este resultado em (A.10), obteremos a κ -distribuição completa na presença de um campo de força externa [229]

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, v) &= z^{-1} \left[\sqrt{1 + \kappa^2 \left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2k_B T} - \frac{U(\mathbf{r})}{k_B T} \right)^2} + \kappa \left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2k_B T} - \frac{U(\mathbf{r})}{k_B T} \right) \right]^{1/\kappa} \\ &\equiv z^{-1} \exp_{\kappa}(-E/k_B T), \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

onde a quantidade E representa a energia total das partículas. Portanto, segue que o fator κ -exp generalizado para a termoestatística de Kaniadakis pode ser deduzido exatamente se o formalismo padrão for ligeiramente modificado. Note que, no limite $\kappa \rightarrow 0$ a expressão (A.1) é consistentemente recuperada.

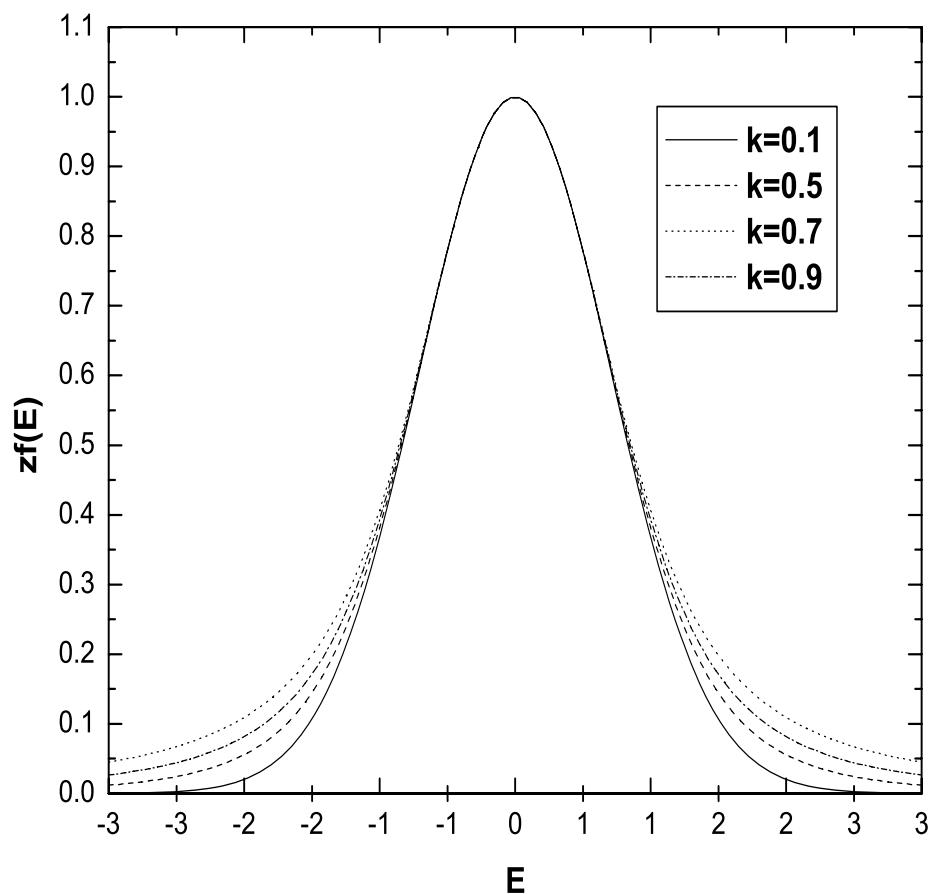


Figura A.1: A figura acima representa a função distribuição (A.20) para os valores $\kappa = 0, 1, \kappa = 0, 5, \kappa = 0, 7$ e $\kappa = 0, 9$.

Apêndice B

Movimento Browniano de Sistemas Interagindo Gravitacionalmente

Historicamente, os primeiros estudos nesse campo foram realizados por Chandrashekhar na década de quarenta [116, 232] e nos últimos anos tem reproduzido uma extensa literatura.

Atualmente, um exemplo interessante de processos estocásticos aplicado ao campo da astrofísica é a descrição de um buraco negro (BN) no centro de um sistema estelar denso [43]. Fisicamente, quando a massa de tal objeto é muito maior que a massa das estrelas da vizinhança, este adquire um movimento aleatório semelhante ao movimento browniano (MB) de uma partícula imersa num líquido ou gás. Em sistemas estelares densos, como aglomerados globulares e núcleos de galáxias, o análogo do gás molecular é representado pela distribuição de estrelas, enquanto que a partícula executando o MB corresponde a um BN. Fisicamente, a causa principal desse fenômeno em aglomerados globulares e em núcleos de galáxias, deve-se principalmente, ao surgimento de três forças: (i) A primeira tem origem na distribuição média de matéria do sistema estelar e varia lentamente com a posição e o tempo. Esta força, geralmente é proporcional à velocidade, denominada força dissipativa, fricção dinâmica ou força viscosa, cujo efeito é desacelerar o movimento do BN [233]. (ii) Em segundo lugar, existe outra

força devido às interações gravitacionais do BN com cada uma das estrelas na sua vizinhança e é chamada de força estocástica ou aleatória. Esta, por sua vez, flutua muito rapidamente. (iii) Finalmente, o BN experimenta uma terceira força, denominada de força restauradora $F = -m\nabla\Phi(r)$, devido o potencial da distribuição de matéria.

Recentemente, o MB de BN em aglomerados globulares e núcleos de galáxias tem sido investigado por vários autores [43, 235, 234, 236]. Para o caso unidimensional, a equação de movimento governando esse fenômeno é escrita como

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = F_x(t). \quad (\text{B.1})$$

Classicamente, esta equação representa o movimento de uma partícula harmonicamente ligada a um potencial $U(x)$. Na equação acima m denota a massa do BN, β é a viscosidade em devido a distribuição de estrelas, k é uma constante que se origina da força restauradora e $F_x(t)$ caracteriza um ruído branco, o qual satisfaz as propriedades de Langevin [110, 126]

$$\langle F_x(t) \rangle = 0 \quad \langle F_x(t)F_x(t') \rangle = C\delta(t - t'), \quad (\text{B.2})$$

sendo C uma constante.

As equações (B.1) e (B.2) podem ser combinadas com a equação de Fokker-Planck [46] para derivar uma distribuição de probabilidade para a posição e velocidade do BN. Estas funções de distribuição podem ser escritas como [43]

$$W(x) = \sqrt{2\gamma/\pi C} \exp\{-(2\gamma/C)\omega^2 m^2 x^2\} \quad (\text{B.3})$$

$$W(v_x) = \sqrt{2\gamma/\pi C} \exp\{-(2\gamma C)m^2 x^2\}, \quad (\text{B.4})$$

onde $\gamma = \beta/2m$, $\omega = \sqrt{k/m}$ e a constante $C = 4\gamma mm_\star \int_0^\infty f(r, u)/f(r, 0)$. Neste caso, m é a massa do BN e m_\star é a massa individual de cada estrela do background.

Para modelos politrópicos de distribuição estelar [237], a densidade e o potencial das estrelas são dados respectivamente por

$$\rho(r) = \frac{3Ma^2}{4\pi} \frac{1}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \quad (\text{B.5})$$

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{4\pi} \frac{1}{(r^2 + a^2)^{5/2}}, \quad (\text{B.6})$$

onde M é a massa total do sistema de estrela, G é a constante gravitacional e a é um parâmetro de comprimento. Para este modelo estelar a constante C presente nas duas últimas equações acima é dada por $C = (8GM/9a)\gamma mm_*$, e as quantidades de interesse ficam, a saber, o deslocamento quadrático médio do BN movendo-se no background estelar e sua respectiva velocidade quadrática média são dados por

$$\langle x^2 \rangle = 2a^2m_*/9m \quad (\text{B.7})$$

$$\langle v_x^2 \rangle = 2GMm_*/9am \quad (\text{B.8})$$

O significado físico destas relações é muito claro: elas nos mostram que quanto maior for a massa do BN (m), mais lentamente será sua velocidade, comportamento semelhante ao de uma partícula clássica imersa num fluido ou gás tal como previsto pelo formalismo padrão de Langevin.

Bibliografia

- [1] L. S. Bridle *et al.*, “*Precision Cosmology? Not Just Yet . . .*” , *Science* **229**, 1532 (2003).
- [2] R. R. Caldwell, R. Dave and P. J. Steinhardt , “*Cosmological imprint of a energy component with general equation of state*” , *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582 (1998).
- [3] O leitor interessado pode consultar a página deste projeto na web:
<http://supernova.LBL.gov>.
- [4] A página deste projeto na web pode ser encontrado acessando o site:
<http://cfa-www.harvard.edu/supernova>.
- [5] A página deste projeto é encontrado no site: <http://www.sdss.org>.
- [6] C. L. Bennet *et al.*, “*First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results*” , *Astrophys. J. Supl.* **148**, 1 (2003).
- [7] G. Hinshaw *et al.*, “*First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Angular Power Spactrum*” , *Astrophys. J. Supl.* **148**, 135 (2003).
- [8] A. Kogut *et al.*, “*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) First Year Observations: TE polarization*” , *Astrophys. J. Supl.* **148**, 161 (2003).

- [9] D. N. Spergel *et al.*, “*First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters*” , *Astrophys. J. Supl.* **148**, 175 (2003).
- [10] S. Perlmutter *et al.*, “*Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae*” , *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999); S. Perlmutter *et al.*, “*Discovery of a supernova explosion at half the age of the Universe*” , *Nature* **391**, 51 (1998).
- [11] A. G. Riess *et al.*, “*Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*” *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [12] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, “*Dynamics of Dark Energy*” *IJMPD* **15**, 1753 (2006).
- [13] V. Sahni and A. A. Starobinski, “*Reconstructing Dark Energy*” *IJMPD* **15**, 2105 (2006).
- [14] V. Sahni and A. A. Starobinski, “*The Case for a Positive Cosmological Lambda-term*” *IJMPD* **9**, 373 (2000).
- [15] R. G. Vishwakarma, “*The Pressure Term in General Relativity*” ([gr-qc/07050825](#)).
- [16] P. J. E. Peebles and B. Ratra, “*The cosmological constant and dark energy*”, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003).
- [17] J. A. S. Lima, “*Alternative dark energy models: an overview*”, *Braz. J. Phys.* **34**, 194 (2004).
- [18] J. A. S. Lima, “*Energia escura: Modelos alternativos e seus limites observacionais*”, *Tese de livre docência-São Paulo*, Setembro de 2004.

- [19] J. V. Cunha, “*Energia escura: Origem, candidatos e vínculos observacionais*”, *Tese de doutorado*-Natal, Fevereiro de 2006.
- [20] U. Alam, T. D. Saini and A. A. Starobinsky, “*Is there supernova evidence for dark energy metamorphosis?*” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **354**, 275 (2004).
- [21] R. R. Caldwell, “*A phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state*”, *Phys. Lett. B* **545**, 23 (2002).
- [22] J. S. Alcaniz, J. V. Cunha and J. A. S. Lima, “*Constraining the dark energy with galaxy cluster x-ray data*”, *Phys. Rev. D* **68**, 023510 (2003).
- [23] F. Cannata, A. Y. Kamenshchik and D. Regoli, “*Scalar Field Cosmological Models with Finite Scalar Factor Singularities*”, ([gr-qc/08012348](#), submetido ao Phys. Lett. B).
- [24] B. Ratra and P. J. E. Peebles, “*Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field*” *Phys. Rev. D* **37**, 3406 (1988).
- [25] P. G. Ferreira and M. Joyce, “*Structure Formation with a Self-Turning Scalar Field*” *Phys. Rev. Lett.* **79**(24), 4740 (1997).
- [26] P. G. Ferreira, “*Cosmology with a primordial scaling field*” *Phys. Rev. D* **58**, 023503 (1998).
- [27] M. C. Bento, O. Bertolami and A. A. Sen, “*Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification*”, *Phys. Rev. D* **66**, 043507 (2002).
- [28] H. B. Benaoum, “*Accelerated Universe from modified Chapligyn gas and tachyonic fluid*”, [hep-th/0205140](#).

- [29] J. V. Cunha, J. S. Alcaniz and J. A. S. Lima, “*Cosmological constraints on Chapligyn gas dark energy from galaxy cluster x-ray and supernova data*”, *Phys. Rev. D* **69**, 083501 (2004).
- [30] J. A. S. Lima, J. V. Cunha and J. S. Alcaniz, “*The simplest Chaplygin-type accelerated cosmology*”, *Submetido.*
- [31] M. S. Turner and S. White, “*CMB models with a smooth component*”, *Phys. Rev. D* **56**, 4439 (1997).
- [32] J. A. S. Carrillo, J. A. S. Lima and J. M. Silva, “*On the quintessence Scalar Field Potential*” (*A ser submetido.*).
- [33] A. Hewit and G. Burbridge, “*New optical catalog of quasi-stellar objects*”, *Astrophys. J. Supp.* **63**, 1 (1987).
- [34] A. K. Kembavi and J. V. Narlinkar, “*Quasars and Active Galactic Nuclei - An Introduction* ”, (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [35] M. Novello and L. A. R. Oliveira, “*Stochastic Behaviour of de Sitter Universe*”, *Phys. Lett. A* **109**, 454 (1985).
- [36] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, “*An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*” (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [37] J. Gruszcak, M. Heller and M. Szydlowski, “*The Universo as a Stochastic process*”, *Phys. Lett. A* **100**, 82 (1984).
- [38] C. B. Brizollo, C. E. Budde, M. O. Cáceres and P. W. Lamberti, “*Stability of a Robert-Walker Universe agaisnt Stochastic Perturbations*”, *Phys. Lett. A* **129**, 363 (1988).

- [39] M. O. Cáceres, M. C. Diaz and J. A. Pullin, “*Stochastic Process in Cosmology*”, *Phys. Lett. A* **123**, 329 (1987).
- [40] A. B. Burd and P. Coles, “*A Stochastic Cosmological Model*”, *Phys. Lett. A* **144**, 65 (1990).
- [41] C. Sivakumar, M. V. John and K. B. Joseph, “*Stochastic evolution of Cosmological Parameters in the Early Universe*”, *PRAMANA* **56**(04), 477 (2001).
- [42] M. V. John, C. Sivakumar and K. B. Joseph, “*Classical Stochastic Approach to Comology Revisited*”, *PRAMANA* **60**(1), 1-10 (2003).
- [43] P. Chatterjee, L. Hernquist and A. Loeb, “*Brownian Motion in Gravitationally-Interacting Systems*” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 121103 (2002).
- [44] A. Einstein, “*Über die von der molekularkinetischen theorie der Wärme geforderte Bevergung von in ruhenden Flüssigkeiten Teilchen*”, *Ann. d. Phys.* **17**, 549 (1905).
- [45] T. Tomé e M. J. Oliveira, “*Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*”, (Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001).
- [46] H. Risken, “*The Fokker-Planck equation: Methods of Solutions and Applications*”, (Springer, Nova York, 1996), Series in Synergetics, vol. 18.
- [47] M. Kac, “*Random Walk and the Theory of Brownian Motion*” *Am. Math. Month.* **54**, 369 (1947).
- [48] S. Weinberg, “*Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*”, John Wiley and Sons, New York, 1972.

- [49] A. A. Friedmann, “*On the curvature os space*” (1922), p. 49 do livro *The Cosmological Constants*, J. Bernstein and G. Feinberg (Eds.), Columbia University Press, New York, 1986; “*On the Possibility of a World with Constant Negative Curvature*” (1924), **Idem** , p. 59.
- [50] E. P. Hubble, “*A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*” , *Proc. Nat. Acad. Sc. (USA)***15**, 168 (1929).
- [51] G. Gamov, “*Expanding Universe and the Origin of Elements*” , *Phys. Rev.* **70**, 572 (1940).
- [52] A. Penzias and R. W. Wilson, “*A measurement of excess antenna temperature ant 4080 Mc/s*” , *Astrophys. J.* **142**, 419 (1965); R. A. Dicke, P. J. E. Peebles, P. J. Roll and T. D. Wilkinson, “*Cosmic black-bady radiation*” , *Astrophys. J.* **142**, 414-419 (1965).
- [53] R. Adler, M. Bazin and M Schiffer, “*Introduction to general relativity*” McGraw-Hill Kogakusha, 1975.
- [54] N. Jackson, “*The Hubble Constant*”, *astro-ph/07093924*.
- [55] Ya. B. Zeldovich and I. D. Novikov, “*Stars and relativity*” , Dover Publications, 1971.
- [56] A. Linde, “*Is the cosmological constant really a constant*” *JETP Lett.* , **19**, 183 (1974).
- [57] K. Sato, “*Cosmological baryon-number domain structure and the first order phase transition of a vacuum*” , *Phys. Lett. B* **99**, 66 (1981).
- [58] K. Sato, “” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **195**, 467 (1981).
- [59] A. Linde, “*Chaotic inflation*” , *Phys. Lett. B* **129**, 177 (1983).

- [60] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, “*Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking*”, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).
- [61] M. S. Turner, “*Coherent scalar-field oscillations in an expanding universe*”, *Phys. Rev. D* **28**, 1243 (1983).
- [62] A. H. Guth, “*Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problem*”, *Phys. Rev. D* **23**(2), 347 (1981).
- [63] A. H. Guth and S. Y. Pi, “*Fluctuations in the New Inflationary Universe*”, *Phys. Rev. Lett.* **49**(15), 1110 (1982).
- [64] A. D. Linde, “*A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*”, *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1982).
- [65] L. F. Abbott, E. Farhi and M. B. Wise “*Particle Production in the New Inflationary Cosmology*”, *Phys. Lett. B* **117**, 29 (1982).
- [66] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt and M. S. Turner “*Spontaneous Creation of almost Scale-Free Density Perturbations in an Inflationary Universe*”, *Phys. Rev. D* **28**(4), 679 (1983).
- [67] K. Freese, “*Natural inflation with pseudo Nambu-Goldstone bosons*”, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3233 (1990).
- [68] A. D. Linde, “*Hybrid inflation*”, *Phys. Rev. D* **49**, 748 (1994).
- [69] P. J. E. Peebles and A. Vilenkin, “*Quintessential inflation*”, *Phys. Rev. D* **59**, 063505 (1999).
- [70] F. R. Graziani and K. A. Olive, “*Stochastic inflation and superstring models*”, *Phys. Rev. D* **38**, 2386 (1988).

- [71] S. Habib, “*Stochastic inflation: Quantum phase-space approach*” , *Phys. Rev. D* **46**, 2408 (1992).
- [72] M. Bellini *et al*, “*Stochastic approach to inflation: classicality conditions*” , *Phys. Rev. D* **54**, 7172 (1996).
- [73] Y. Nambu and M. Sasaki, “*Stochastic approach to chaotic inflation and the distribution of universe*” , *Phys. Lett. B* **219**, 240 (1989).
- [74] J. Martin and M. Musso, “*Solving stochastic inflation for arbitrary potentials*” , *Phys. Rev. D* **73**, 043516 (2006).
- [75] A. Berera and L. Z. Fang, “*Thermally induced density perturbations in the inflation era*” , *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1912 (1995).
- [76] A. Berera, “*Warm Inflation*” , *Phys. Rev. Lett.* **75**(18), 3218 (1995).
- [77] A. Linde, “*Inflationary Cosmology*” , *Lect. Notes Phys.* **738**, 1-54 (2007).
- [78] C. P. Burgess, “*Lectures on cosmic inflation and its potential stringy realizations*” , [hep-th/0708.2865](#).
- [79] A. G. Riess *et al*, “*Type Ia Supernova Discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution*”, *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004).
- [80] P. Astier *et al*, “*The Supernova Legacy Survey: measurement of Ω_M , Ω_Λ and ω from the first year* ”, *Astron. and Astrophys.* **447**, 31 (2006).
- [81] A. G. Riess *et al*, “*New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at $z \geq 1$: Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy* ”, [astro-ph/0611572](#).

- [82] W. M. Wood-Vasey *et al*, “*Observational Constraints on the Nature of the Dark Energy: First Cosmological Results from the ESSENCE Supernova Survey*”, **astro-ph/0701041**.
- [83] P. de Bernardis *et al.*, “*A flat universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation*” , *Nature* **404**, 955 (2000); L. Knox and L. Page, “*Characterizing the Peak in the Cosmic Microwave Background Angular Power Spectrum*” , *Phys. Rev. Lett* **85**, 1366 (2000); A. H. Jaffe *et al.*, “*Cosmology from MAXIMA-1, BOOMERANG, and COBE DMR Cosmic Microwave Background Observations*” *Phys. Rev. Lett*, **86**, 3475 (2001)
- [84] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, editado por A. Dekel and J. P. Ostriker, Cambridge University Press, Cambridge (1999); R. G. Carlberg *et al.*, “*Redshift evolution of galaxy cluster densities*” , *Astrop. J.* **462**, 32 (1996).
- [85] J. S. Alcaniz and J. A. S. Lima, “*New Limits on Ω_Λ and Ω_M from Old Galaxies at High Redshift*” , *Astrop. J. Lett.* **521**, 87 (1999).
- [86] G. Steihman, N. Hata and J. E. Felten, “*Nonnucleosynthetic Constraints on the Baryon Density and Other Cosmological Parameters*” , *Astrop. J.* **510**, 564 (1999).
- [87] A. Einstein, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin Sitzber* 142 (1917); “*Impresso em português pela fundação Calouste Gulberkian*” , *Coleção de textos especiais da física moderna* **1**, 234 (1980).
- [88] M. Bordag, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko, “*New developments in the Casimir effect*” , *Phys. Rep.* **355**, 1 (2001)
- [89] Ya. B. Zeldovich, “*Vacuum theory: a possible solution to the singularity problem of cosmology*” *Sov. Phys. Usp.* **24**, 216 (1981)

- [90] S. Weinberg, “*The cosmological constant problem*”, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
- [91] Ya. B. Zeldovich, “*The cosmological constant and the theory of elementary particles*”, *Sov. Phys. Usp.* **11**, 381 (1968)
- [92] T. Padmanabham, “*Cosmological constantthe weight of the vacuum*”, *Phys. Rep.* **380**, 235 (2003).
- [93] E. W. Kolb and M. S. Turner, “*The Early Universe*”, (Addison-Wesley), p. 271,(1990).
- [94] A. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier, “*An alternative to quintessence*”, *Phys. Lett. B* **511**, 265-268 (2001).
- [95] N. Bilić, G. B. Tupper and R. D Viollier, “*Unification of dark matter and dark energy: the inhomogeneous Chaplygin* ”, *Phys. Lett. B* **535**, 17 (2002).
- [96] J. A. S. Lima, J. V. Cunha and J. S. Alcaniz, “*Simplified Quartessence Cosmology*”, *Astro-ph/06011007*.
- [97] J. V. Cunha and J. S. Alcaniz, “*A simplified approach for Chaplygin-type cosmologies*”, *astro-ph/0608469*.
- [98] J. M. Silva, J. A. S. Lima ad J. V. Cunha, “*Cosmic acceleration in the simplest Chaplygin gas*”, *Em preparação*.
- [99] J. C. Fabris, S. V. B. Goncalves and P. E. Souza “*Fitting the Supernova Type Ia Data with the Chaplygin Gas* ”, *astro-ph/0207430*.
- [100] P. P. Avelino *et al.*, “*Alternatives to quintessence model building* ”, *Phys. Rev. D* **67**, 023511 (2003).

- [101] M. C. Bento, O. Bertolami and A. A. Sen, “*Generalized Chaplygin gas and cosmic microwave background radiation constraints*”, *Phys. Rev. D* **67**, 063003 (2003).
- [102] M. C. Bento, O. Bertolami and A. A. Sen, “*Generalized Chaplygin gas model: Dark energy - dark matter unification and CMBR constraints*”, *Gen. Rel. Grav.* **35**, 2063-2069 (2003); “*WMAP constraints on the generalized Chaplygin gas model*”, *Phys. Lett. B* **575**, 172-180 (2003).
- [103] Z. K. Guo and N. Ohta, “*Probing the coupling between dark components of the universe*”, *Phys. Rev. D* **76**, 023508 (2007).
- [104] E. O. Kahya and V. K. Onemli, “*Quantum stability of a $w < -1$ phase of cosmic acceleration*”, *Phys. Rev. D* **76**, 043512 (2007).
- [105] T. D. Saini, S. Raychoudhury, V. Sahni and A. A. Starobinski, “*Reconstructing the Cosmic Equation of State from Supernova Distances*”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1162 (2002); J. K Erickson *et al*, “*Measuring the Speed of Sound of Quintessence*”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 121301 (2002).
- [106] J. A. E. Carrillo, J. A. S. Lima and J. M. Silva, “*On the Quintessence Scalar Field Potential*” , *A ser submetido*.
- [107] R. Brown, *Phil. Mag.* **4**, 161 (1828).
- [108] J. Perrin, *Ann. Chem. Phys.* **18**, 1 (1909); veja também *Les Atomes*, (Librairie Alcan, Paris, (1914) 4^a ed. e *Atoms*, (Van Nostrand, Nova York 1916).
- [109] M. V. Smoluchowski, **ADP** 21, 756 (1906); *Phys. Zeits* **17**, 557 (1916).
- [110] P. Langevin, *Compt. Rend.* **146**, 530 (1908).

- [111] A. Fokker, “*Tese de doutorado, Leiden*” (1913).
- [112] H. C. Burger, *Versl. Acad. Amst.* **25**, 1482 (1917).
- [113] R. Fürther, *Ann. d. Physik* **53**, 177 (1917).
- [114] L. S. Ornstein, *Versl. Acad. Amst.* **26**, 1005 (1917).
- [115] M. Planck, *Berl. Ber.* , 324 (1927).
- [116] S. Chandrasekhar, “*Stochastic Problems in Physics and Astronomy*” , *Rev. Mod. Phys.* **15**, 1 (1943).
- [117] Veja, por exemplo, J. Zhang and L. Hui, “*On Random Walks with a General Moving Barrier*”, [astro-ph/0508384](#) e referências citadas.
- [118] R. Morgado, F. A. Oliveira, G. G. Batrouni and A. Hansen, “*Relation between anomalous and normal diffusion in systems with memory*” , *Phys. Rev. Lett.* **89(10)**, 100601 (2002).
- [119] J. M. Silva e J. A. S. Lima, “*Quatro abordagens para o movimento browniano*”, *Rev. Bras. Ens. Fs.* **29**, 25-35 (2007).
- [120] J. Mathews and R. Walker, “*Mathematical Methods of Physics*” , (Addison Wesley, Nova York, 1973), 2^a ed.
- [121] F. Reif, “*Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*” (McGraw-Hill, Nova York, 1965).
- [122] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, “*Fluid Mechanics*” (Pergamon Press, Nova York, 1959).
- [123] A. Pais, “*Subtil é o Senhor: Vida e pensamento de Albert Einstein*” (Editora Gradiva, 1^a Ed., Lisboa, 1993).
- [124] J. Stachel, “*O ano miraculoso de Einstein: Cinco artigos que mudaram a face da Física*” (Editora UFRJ, Rio de Janeiro, 2001).

- [125] Y. B. Zel'dovich, A. A. Ruzmaikin and D. D. Sokoloff, “*The Almighty Chance*” (World Scientific, Singapore, 1990).
- [126] N. G. V. Kamper, “*Stochastic Process in Physics and Chemistry*”, (North-Holland, Amsterdam, 1992).
- [127] G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein, “*On The Theory of the Brownian Motion I*” *Phys. Rev.* **36**, 823 (1930).
- [128] S. R. A. Salinas, “*Introdução à Física Estatística*”, (Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999).
- [129] H. D. Weymann, “*Finite Speed of Propagation in Heat Conduction, Diffusion and Viscous Shear Motion*”, *Am. J. Phys.* **35**, 488 (1965).
- [130] J. M. Silva, M. P. M. A. Baroni, R. R. Rosa and J. A. S. Lima, “*The Problem of Short Times for Brownian Motion Using the Diffusion Equation*”, **em preparação**.
- [131] F. Lillo and R. Mantegna, “*Drift-controlled anomalous diffusion: a solvable Gaussian model*”, *Phys. Rev. E* **61**, R4675 (2000).
- [132] C. Tsallis and D. J. Bukman, “*Anomalous diffusion in the presence of external forces: exact time-dependent solutions and their thermostatistical basis*”, *Phys. Rev. E* **54**, R2197 (1996).
- [133] T. Bhor and A. Pikovski, “*Anomalous diffusion in the Kuramoto-Sivanshinsky equation*”, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2892 (1993).
- [134] J. P. Bouchaud and A. Georges, “*Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models ad physical applications*”, *Phys. Rep.* **195**, 127 (1990).
- [135] K. G. Wang, “*Long-time-correlation effects and biased anomalous diffusion*”, *Phys. Rev. A* **45**(2), 833 (1992).

- [136] J. Masoliver and K. G. Wang, “*Free inertial processes driven by Gaussian noise: Probability distributions, anomalous diffusion, and fractal behavior*”, *Phys. Rev. E* **51**(4), 2987-2995 (1995).
- [137] J. M. Porrà, K. Wang and J. Masoliver, “*Generalized Langevin equations: Anomalous diffusion and probability distributions*”, *Phys. Rev. E* **53**(6), 5872 (1996).
- [138] S. Havlin and D. Ben-Avraham, “*Invited Review Article: Diffusion in Disordered Media.*”, *Adv. Phys.* **36**, 695-798 (1987).
- [139] T. Srokowski, “*Nonstationarity Induced by Long-Time Noise Correlations in the Langevin Equation*”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2232 (2000).
- [140] T. Srokowski e M. Ploszajczac, “*Solving the generalized Langevin equation with the algebraically correlated noise*”, *Phys. Rev. E* **57**, 3829 (1998).
- [141] J. A. S. Lima and J. M. Silva, “*Brownian motion with a time-dependent viscosity*”, (Em preparação).
- [142] P. C. Assis Jr *et al*, “*Nonlinear diffusion equation, Tsallis formalism and exact solution*”, *J. Math. Phys.* **46**, 123303 (2005).
- [143] P. C. Assis Jr *et al*, “*Nonlinear diffusion equation and nonlinear external force: exact solution*” *J. Math. Phys.* **47**, 103302 (2006).
- [144] P. C. Assis Jr *et al*, “*Non-Markovian Fokker-Planck equation: Solution and first passage time distribution*”, *Phys. Rev. E* **73**, 032101 (2006).
- [145] P. C. da Silva *et al*, “*Anomalous diffusion and anisotropic nonlinear Fokker-Planck equation*”, *Phys. A* **342**, 16-21 (2004).

- [146] L. Borland, “*Microscopic dynamics of the nonlinear Fokker-Planck equation: A phenomenological model*”, *Phys. Rev. E* **57**, 6634 (1998).
- [147] L. Borland *et al*, “*The nonlinear Fokker-Planck equation with state-dependent diffusion - a nonextensive maximum entropy approach*”, *Eur. Phys. J. B* **21**, 285-297 (1999).
- [148] J. Masoliver, “*Second-order processes driven by dichotomous noise*” *Phys. Rev. A* **45(2)**, 706-713 (1992).
- [149] J. Masoliver, “*Second-order dichotomous processes: Damped free motion, critical behavior, and anomalous diffusion*”, *Phys. Rev. E* **48(1)**, 121-135 (1993).
- [150] H. Bateman, “*On dissipative systems and related variational principles*” *Phys. Rev.* **38**, 815 (1931).
- [151] J. A. S. Lima e J. Santos, “*The q-Oscillator: A Langrangian description for variable damping*”, *Phys. Lett. A* **267**, 213 (2000).
- [152] C. Tsallis, “*Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics*”, *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).
- [153] E. P. Borges, “*On a q-Generalization of Circular and Hyperbolic Functions*”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31**, 5281 (1998).
- [154] E. P. Borges, “*A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatistic*”, *Phys. A* **340**, 95-101 (2004).
- [155] H. Nyquist, “*Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors*”, *Phys. Rev.* **32**, 110 (1928).
- [156] H. B. Callen e T. A. Welton, “*Irreversibility and Generalised Noise*” *Phys. Rev.* **83(1)**, 34 (1951).

- [157] W. Bernard e H. B. Callen, “*Irreversible termodynamics of nonlinear processes and noise in driven systems*”, *Rev. Mod. Phys.* **31**(4), 1017 (1959).
- [158] A. Widom, “*Velocity fluctuations of a hard-core brownian particle*”, *Phys. Rev. A* **3**(4), 1394 (1971).
- [159] R. Kubo, “*The Fluctuation-Dissipation Theorem*” *Rep. Prog. Phys.* **29**, 255 (1966).
- [160] H. Morri, “*Transport, Collective Motion, and Brownian Motion*”, *Prog. Theor. Phys.* **33**(3), 423 (1965).
- [161] P. C Hohenberg e B. I. Halperin, “*Theory of dynamic critical phenomena*”, *Rev. Mod. Phys.* **49**(3), 435 (1977).
- [162] M. Abramowitz and I. A. Stegun, “*Handbook of Mathematical Functions*”, (Dover Publications, 1972).
- [163] H. Gzyl, “*Quantization of the damped harmonic oscillator*”, *Phys. Rev. A* **27**, 2297 (1983).
- [164] S. A. Pavluchenko “*Generality of inflation in closed cosmological models with some quintessence potentials*”, *Phys. Rev. D* **67**, 103518 (2003).
- [165] A. Albrecht, P. J. Steinhardt, M. S. Turner and F. Wilczek “*Reheating an Inflationary Universe*”, *Phys. Rev. Lett.* **48**(20), 1437 (1982).
- [166] F. Lucchin and S. Matarrese, “*Power-law Inflation*” *Phys. Rev. D* **32**, 1316 (1985). “*Reheating an Inflationary Universe*”, *Phys. Rev. Lett.* **48**(20), 1437 (1982).

- [167] M. J. D. Assad and J. A. S. Lima, “*General and Unified Solution for Perfect Fluid Homogeneous and Isotropic Cosmological Models*”, *Gen. Rel. Grav.* **20**, 527 (1988).
- [168] J. A. S. Lima, “*Note on Solving for the Dynamics of the Universe*”, *Am. J. Phys.* **69**, 1245 (2001).
- [169] J. M. Silva and J. A. S. Lima, “*On the Stochastic Evolution of the Inflaton Field*”, *Int. J. Mod. Phys. D* **13**(7), 1315 (2004).
- [170] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, 1993.
- [171] M. S. Longair, *Galaxy formation*, Springer-Verlag, 1993.
- [172] P. Coles and F. Lucchin, *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, John Wiley & Sons, 1995.
- [173] J. A. Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge Univerty Press, 1999.
- [174] P. Meszaros, “*The behavior of point masses in an expanding cosmological substratum*”, *Atron. & Astrophys.* **37**, 225 (1974).
- [175] J. Jeans, *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **199**, 49 (1902); *Astronomy and Cosmology* (2a ed., primeiro publicado por Cambridge University Press em 1928, reimpresso por Dover Publications, New York, 1961) pág. 345-350.
- [176] J. A. S. Lima, V. T. Zanchin and R. H. Brandenberger, “*On the Newtonian cosmology equations with pressure*”, *MNRAS* **291**, L1-L4 (1997).
- [177] M. S. Turner, “*Early-Universe Phermal Production of Not-So-Invisible Axions*”, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2489 (1987).

- [178] R. D. Pecei and H. R. Quin , “*CP conservation in the presence of pseudoparticles*”, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1440 (1977).
- [179] R. L. Davis, “*Cosmic axions from cosmic strings*”, *Phys. Lett.* **B180**, 225 (1986).
- [180] J. M. Silva, “*Influence of a Stochastic term on the Meszaros Effect*”, *Int. J. Mod. Phys. D*, **16**(2&3), 439-444 (2007).
- [181] A. Berera and R. O. Ramos, “*Construction of a robust warm inflation mechanism*”, *Phys. Lett.* **B567**, 294 (2003).
- [182] J. M. F. Maia and J. A. S. Lima, “*Extended warm inflation*” , *Phys. Rev.* **D60**, 101301 (1999); **Idem**, “*Scalar field description of decaying- Λ cosmologies*” ,*Phys. Rev.* **D65**, 083513 (2002); J. A. S. Lima and J. A. Espichan Carrillo, “*Thermodynamic approach to warm inflation*” , [astro-ph/0201168](#); J. P. Mimoso, A. Nunes and Diego Pavon, “*Asymptotic behavior of the warm inflation scenario with viscous pressure*” , [gr-qc/0512057](#).
- [183] J. A. S. Lima, “*Note on solving for the dynamics of the Universe*” , *Am. J. Phys.* **69**(12), 1245 (2001).
- [184] V. Faraoni, “*Solving for the dynamics of the Universe*” , *Am. J. Phys.* **67**(8), 732 (1999).
- [185] E. Madelung, “*Quantentheorie in hydrodynamischer Form*” , *Z. Phys.* **40**, 322-326 (1927).
- [186] M. J. D. Assad and J. A. S. Lima, “*General and Unified solution for perfect fluid homogeneous and isotropic cosmological models*” , *Gen. Rel. Grav.* **20**, 527 (1988).
- [187] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, “*The Classical Theory of Fields*” (Pergamon, Oxford, 1989) pp. 363-367.

- [188] R. D’Inverno, “*Introducing Einstein’s Relativity*” (Clarendon, Oxford, 1992) pp. 334-344.
- [189] H. Stephani, “*General Relativity*” (Cambridge University Press, Cambridge, 1990) pp. 265-271.
- [190] S. Howard and S. K. Roy, “*Coherent States of a Harmonic Oscillator*”, *Am. J. Phys.* **55**(12), 1109-1117 (1987).
- [191] E. Nelson, “*Dynamical Theories of Brownian Motion*” (Princeton University Press, Princeton, 1967) pp. 129-135.
- [192] F. Guerra, “*Structural Aspect of Stochastics Mechanics and Stochastic Field Theory*”, *Phys. Rep.* **77**(3), 263-312 (1981).
- [193] F. Guerra and L. M. Morato, “*Quantization of dynamical systems and stochastic control theory*”, *Phys. Rev. D* **27**(8), 1774-1786 (1983).
- [194] F. Guerra and R. Marra, “*Origin of the quantum observable operator algebra in the frame of stochastic mechanics*”, *Phys. Rev. D* **28**(8), 1916-1921 (1983).
- [195] P. Garbaczewski, “*Stochastic mechanics and the Kepler problem*”, *Phys. Rev. D* **33**(10), 2916-2921 (1986).
- [196] J. P. Ostriker and P. J. Steinhardt, “*The observational case for a low-density Universe with a non-zero cosmological constant*”, *Nature* **377**, 600 (1995) e referências lá citadas.
- [197] R. R. Caldwell and P. J. Steinhardt, in *The Non-Sleeping Universe*, eds. A. Blanchard and M. Lago (World Scientific: Singapore, 1998).
- [198] M. S. Turner and M. White, “*CDM models with a smooth component*”, *Phys. Rev. D* **56**, R4439 (1997); T. Chiba, N. Sugiyama and T. Nakamura, “*Cosmology with x matter*”, *MNRAS*, **289**, L5-L9 (1997).

- [199] S. Perlmutter, M. S. Turner and M. White, “*Constraining Dark Energy with Type Ia Supernovae and Large-Scale Structure*”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 670 (1999).
- [200] C. Wetterich, “*An asymptotically vanishing time-dependent cosmological constant*”, *Astron. and Astrophys.* **301**, 321 (1995).
- [201] P. J. E. Peebles and B. Ratra, “*Cosmology with a time-variable cosmological constant*”, *Astrophys. J. Lett.* **325**, 17 (1988).
- [202] I. Zlatev, L. Wang and P. J. Steinhardt, “*Quintessence, Cosmic coincidence, and the cosmological constant*”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 896 (1999).
- [203] S. Dodelson *et al*, “*Solving the Coincidence Problem: Tracking Oscillating Energy*”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5276 (2000).
- [204] G. Efstathiou, “*Constraining the equation of state of the Universe from distant Type Ia supernovae and cosmic microwave background anisotropies*”, *MNRAS* **310**(3), 842-850 (1999).
- [205] T. Matos, F. S. Guzmán and L. A. Ureña-López, “*Scalar field as dark matter in the universe*”, *Class. Quantum Grav.* **17**, 1707 (2000).
- [206] L. A. Ureña-López and T. Matos, “*New cosmological tracker solution for quintessence*”, *Phys. Rev. D* **62**, 081302 (2000).
- [207] P. F. González Díaz, “*Cosmological models from quintessence*”, *Phys. Rev. D* **62**, 023513 (2000).
- [208] E. Di Pietro and J. Demaret, “*A constant equation of state for quintessence*”, *Int. J. Mod. Phys. D* **10**, 231-237 (2001).
- [209] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, Publications, INC. New York 1972).

- [210] V. H. Cardenas and S. del Campo, “*Scalar field potentials for cosmology*”, *Phys. Rev.* **D69**, 083508-1 (2004).
- [211] C. L. Bennet *et al*, “*First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results*”, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 1 (2003).
- [212] M. Bordemann and J. Hoppe, “*The dynamics of relativistic membranes Reduction to 2-dimensional fluid dynamics*”, *Phys. Lett. B* **317**, 315 (1993).
- [213] J. Hoppe, “*Supermembranes in 4 Dimensions*”, *het-th/9311059*.
- [214] R. Jackiw, “*A Particle Field Theorist’s*”, *Lectures on Fluid Mechanics*, *physics/0010042*.
- [215] T. Matos and L. A. Urea-Lopes, “*Quintessence and scalar dark matter in the Universe*”, *Class. Quantum Grav.* **17**, L75-L81 (2000); **Idem**, “*Further analysis of a cosmological model with quintessence and scalar dark matter*”, *Phys. Rev. D* **63**, 063506 (2001); A Davidson, D Carasik and Y. Lederer, “*Cold dark Matter from dark energy*”, *gr-qc/0111107*; L. M G. Bea, P. P. Avelino, J. P. M. de Carvalho and C. J. A. P. Martins, “*Role of baryons in unified dark matter models*”, *Phys. Rev. D* **67**, 101301(R) (2003); J. S. Alcaniz and J. A. S. Lima, “*Measuring the Chaplygin Gas Equation of State from Angular and Luminosity Distances*”, *Astrophys. J.* **618**, 16 (2005).
- [216] T. Padmanabham and T. R. Choudhury, “*Can the clustered dark matter and the smooth dark energy arise from the same scalar field?*”, *Phys. Rev. D* **66**, 081301 (2002).
- [217] H. B. Benaoum, “*Accelerated Universe from Modified Chaplygin Gas and Tachyonic Fluid*”, *hep-th/0205140*.

- [218] D. N. Spergel *et al.*, “*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three years results: Implications for Cosmology*”, **astro-ph/0603449**, (submetido ao APJ).
- [219] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York (1972).
- [220] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Fluid Mechanis*, Pergamon, New York (1975).
- [221] R. Silva, J. A. S. Lima and M. O. Calvão, “*Temperature evolution law of imperfect relativistic fluids*”, *GRG* **34**(6), 865 (2002).
- [222] J. A. S. Lima and J. M. Silva, “*Thermodinamic Aspects of the Chapligyn Gas*”, (em preparação).
- [223] J. A. S. Lima and J. S. Alcaniz, “*Thermodynamics, spectral distribution and the nature of dark energy*”, *Phys. Lett. B* **600**, 191-196 (2002).
- [224] J. M. Silva, J. A. S. Lima and J. V. Cunha, “*Cosmic acceleration in the simplest chapligyn gas*”, em preparação.
- [225] G. Kaniadakis, “*Non-linear Kinetics Underlying Generalized Statistics*” *Physica A* **296**, 405 (2001).
- [226] G. Kaniadakis, “*Statistical Mechanics in the Context fo Special Relativity I*” *Phys. Rev. E* **66**, 056125 (2002).
- [227] G. Kaniadakis, “*Statistical Mechanics in the Context fo Special Relativity II*” *Phys. Rev. E* **72**, 036108 (2005).
- [228] G. Kaniadakis, “*H-theorem and generalized entropies within the framework of nonlinear kinetics*” *Phys. Lett. A* **288**, 283 (2001).
- [229] R. Silva, J. M. Silva and J. A. S. Lima, “*Conservative force fields in Kaniadakis statistics*”, A ser submetido.

- [230] R. Silva, “*The H-theorem in κ -statistics: influence on the molecular chaos hypothesis* ” , *Phys. Lett. A* **352**, 17 (2006); “*The relativistic statistical theory and Kaniadakis entrpy: an approach through a molecular chaos hypothesis* ” , *Eur. Phys. J. B* **54**, 499 (2006);
- [231] G. Kaniadakis, “*Statistical Mechanics in the Context fo Special Relativity II*” *Phys. Rev. E* **72**, 036108 (2005).
- [232] S. Chandrasekhar, “*Dynamical Friction I, General Considerations: The Coefficient of Dynamical Friction* ” , *Astrophys. J.* **97**, 255 (1943); “*Dynamical Friction II: The Rate of Escape of Stars from Clusters and the Evidence for the Operation of Dynamical Friction* ” , *Astrophys. J.* **97**, 263 (1943).
- [233] J. Bekenstein and E. Maoz, “*Dynamical friction from fluctuations in stellar dynamical systems*”, *Astrophys. J.* **390**, 79-87 (1992).
- [234] D. Merrit, “*A note on gravitational brownian motion*” *Astrophys. J.* **628**, 673 (2005).
- [235] L. Frederik and D. Merrit, “*Brownian Motion of Black Holes in Dense Nuclei*” , *Astron. J.* **133**, 533 (2007).
- [236] E. Bertschinger, “*Brownian motion of stars, dust, and invisible matter*” , *AIP Conf. Proc.* **861**, 97-105 (2006).
- [237] J. Binney and S. Tremaine, “*Galactic Dynamics*” (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987).