Étude des opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les algèbres ternaires de type Lie et Jordan

Atef Hajjaji

UNIVERSITÉ DE HAUTE ALSACE
INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE, MATHÉMATIQUES, AUTOMATIQUE ET SIGNAL

UNIVERSITÉ DE SFAX
FACULTÉ DES SCIENCES
ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité

MATHÉMATIQUES

Pour obtenir le grade de Docteur

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Étude des opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les algèbres ternaires de type Lie et Jordan

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Présentée par

ATEF HAJJAJI

Sous la direction de

PR. ABDENACER MAKHLOUF & PR. BOUJEMAA AGREBAOUI

Soutenue le 21 décembre 2024 devant le jury composé de :

Président :	Pr. Sofiane BOUARROUDJ,	*New-York University, Abu-Dhabi, (UAE)*
Rapporteur :	Pr. Vyacheslav FUTORNY,	*Southern University of Science and Technology, Shenzhen (China)*
Rapporteur :	Pr. Nizar BEN FRAJ,	*Université de Carthage, (Tunisie)*
Examinatrice :	Pr. Leila BEN ABDELGHANI,	*Université de Monastir, (Tunisie)*
Examinateur :	Pr. Mohamed ELHAMDADI,	*University of South Florida, Tampa (USA)*
Directeur de thèse :	Pr. Abdenacer MAKHLOUF,	*Université de Haute–Alsace, Mulhouse (France)*
Directeur de thèse :	Pr. Boujemaa AGREBAOUI,	*Université de Sfax, (Tunisie)*
Membre invité :	Dr. Sami MABROUK,	*Université de Gafsa, (Tunisie)*

-2023/2024-

Remerciements

C'est avec un immense plaisir que je consacre ces deux pages en signe de gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier vivement mes directeurs de thèses :

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et ma reconnaissance au Professeur **Abdenacer Makhlouf***, qui a dirigé ces travaux de recherche avec un engagement sans faille et un soutien scientifique précieux. Je salue également ses qualités humaines, sa compréhension, et le climat de confiance qui a marqué notre relation. Je lui suis profondément reconnaissant pour m'avoir initié à la recherche, pour sa bienveillance, ses conseils éclairés, ainsi que pour son aide et son soutien constant tout au long de ce travail.*

Mes remerciements vont également au Professeur **Boujemaa Agrebaoui** *pour son encadrement et ses précieux conseils, qui ont grandement contribué à l'avancement de ce travail. Sa patience et son honnêteté, parmi tant d'autres qualités, ont transformé ces trois dernières années en une véritable période d'échange et de découverte mathématique, toujours marquée par la joie et la bonne humeur.*

Il m'est particulièrement agréable de remercier l'ensemble des membres du jury de ma thèse : Professeur **Vyacheslav Futorny***, Professeur* **Nizar Ben Fraj***, et Professeur* **Sofiane Bouarroudj***, pour avoir accepté de juger ce travail malgré les déplacements contraignants qu'ils ont dû effectuer. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Professeur Futorny pour ses remarques et suggestions précieuses, qui m'ont permis d'améliorer la qualité de mon mémoire de thèse. Mes remerciements s'adressent également à* **Mohamed Elhamadadi** *et Professeur* **Leila Ben Abdelghani** *pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres de mon jury.*

Je tiens à exprimer ma gratitude envers mes collaborateurs et amis qui m'ont accompagné tout au long de cette thèse : **Sami Mabrouk***, Maître de conférences à l'Université de Gafsa et* **Taoufik Chtioui***, Maître assistant à l'Université de Gabes. Je les remercie sincèrement pour la confiance qu'ils m'ont témoignée dès le début de mon parcours en mastère de Mathématiques. Leur compétence, leur dynamisme et leur efficacité, dont j'ai bénéficié tout au long de ces années, resteront gravés dans ma mémoire.*

Je souhaite également adresser mes remerciements à toutes les personnes avec qui j'ai eu la chance de collaborer sur divers projets de recherche : **Karima Benali, Rahma Gharbi, Quentin Ehret et Walid Mhiri***. Leur contribution et leur engagement ont été d'une grande valeur pour l'aboutissement de ces travaux.*

Au cours de ce long parcours d'études doctorales, j'ai eu la chance d'être entourée d'amis extraordinaires : **Jaber, Sami, Ichrak, Mohamed Amin, Rahma, Douglas, Quentin, Armand, Walid et Jon***, qui ont toujours été présents pour me soutenir dans les moments difficiles. Je tiens également à remercier les membres du Département de Mathématiques de Mulhouse, rencontrés lors de mon séjour dans cette ville, et tout particulièrement* **Pierre***, membre de mon comité de suivi de thèse à l'Université de Haute-Alsace. Je n'oublie pas non plus* **Cornel, Amine, Zakaria, Augustin, Sylvia, Nicolas, Ahmed***, et surtout* **Viviane***, qui, malgré les exigences de son rôle de secrétaire du* *département, a toujours fait preuve d'une gentillesse, d'une bonne humeur et d'une efficacité remarquables.*

Je tiens également à remercier la **Fondation Pierre et Jean Spiegel** *de Mulhouse pour leur soutien financier tout au long de mon parcours doctoral et de mon séjour à Mulhouse. Leur générosité a été un soutien précieux qui m'a permis de mener à bien mes recherches et de profiter pleinement de cette expérience.*

Ces remerciements seraient incomplets sans adresser un immense merci à ma famille. Tout d'abord, à mes parents, qui ont toujours soutenu mes choix et m'ont permis d'arriver là où je suis aujourd'hui. À mes frères et sœurs, avec une pensée particulière pour ***Awatef****, dont le soutien indéfectible et les encouragements constants m'ont offert une force précieuse tout au long de ce parcours. Je tiens également à dédier une pensée émue à mon père, qui n'est malheureusement plus parmi nous. Sa sagesse, son amour et ses enseignements continuent de me guider chaque jour. Il a toujours cru en moi et m'a transmis les valeurs qui m'ont permis de progresser dans la vie et d'atteindre cet accomplissement.*

Table des matières

Summary in English : Study of relative Rota-Baxter operators on ternary algebras of Lie and Jordan type

Introduction

The goal of this thesis is to explore relative Rota-Baxter operators in the context of ternary algebras of both Lie and Jordan types. We mainly consider Lie triple systems, 3-Lie algebras and ternary Jordan algebras. The study covers their structure, cohomology, deformations, and their connection with the Yang-Baxter equations. The work is divided into three main parts.

The first part aims first to introduce and study a graded Lie algebra whose Maurer-Cartan elements are Lie triple systems. It turns out to be the controlling algebra of Lie triple systems deformations and fits with the adjoint cohomology theory of Lie triple systems introduced by Yamaguti. A Lie triple system is a special case of a Nambu algebra or a 3-Leibniz algebra, and the controlling algebra for Nambu algebras has already been described in [118]. This motivates us to solve the problem by identifying a subalgebra of the graded Lie algebra presented in [118]. We further support this approach by demonstrating that the coboundary operator of a Lie triple system with coefficients in itself can be characterized by this controlling algebra structure. In addition, we introduce the notion of relative Rota-Baxter operators on Lie triple systems and construct a Lie 3-algebra as a special case of L_∞-algebras, where the Maurer-Cartan elements correspond to relative Rota-Baxter operators. This enables us to define the Yamaguti cohomology of a relative Rota-Baxter operator. Furthermore, we explore the deformations of relative Rota-Baxter operators from a cohomological perspective by determining the obstruction class of an extensible deformation of order n, as well as connections between the cohomology of relative Rota-Baxter operators on Lie algebras and associated Lie triple systems.

In the second part, we introduce the concept of twisted relative Rota-Baxter operators on 3-Lie algebras and construct an L_∞-algebra, where the Maurer-Cartan elements are twisted relative Rota-Baxter operators. This allows us to define the Chevalley-Eilenberg cohomology of a twisted relative Rota-Baxter operator. We also consider the deformations of twisted relative Rota-Baxter operators from a cohomological point of view. Additionally, we introduce the Nijenhuis structure for 3-Lie algebras (or 3-NS-Lie algebras), which is closely related to the twisted relative Rota-Baxter operator.

In the last part, we deal with a representation theory of ternary Jordan algebras. In particular, we introduce and discuss the concept of coherent ternary Jordan algebras. We then define relative Rota-Baxter operators for ternary Jordan algebras and discuss solutions of the ternary Jordan Yang-Baxter equation involving relative Rota-Baxter operators. Moreover, we investigate ternary pre-Jordan algebras as the underlying algebraic structure of relative Rota-Baxter operators. Finally, the relationships between ternary Jordan algebras and ternary pre-Jordan algebras are established and illustrated with examples.

Ternary algebras. The n-ary algebraic structures and, in particular ternary algebraic structures appeared more or less naturally in various domains of theoretical and mathematical physics and data processing. Indeed, theoretical physics progress of quantum mechanics and the discovery of the Nambu mechanics (1973) [111], as well as a work of Okubo on Yang–Baxter equation gave impulse to a significant development in n-ary algebras [115]. The n-ary operations appeared first through cubic matrices which were introduced in the 19th century by Cayley and considered again and generalized by Kapranov, Gelfand, Zelevinskii and Sokolov. Another recent motivation to study n-ary operations comes from string theory and M-branes involving naturally an algebra with ternary operation called Bagger–Lambert algebra [25]. Hundreds of papers are dedicated to Bagger–Lambert algebra. For other applications in physics, like in connection with quarks, see Refs. [1], [29, 84, 85] and [122].

The first conceptual generalization of binary algebras was the ternary algebras introduced by Jacobson [76]. In connection with problems from Jordan theory and quantum mechanics, he defined the Lie triple systems. A Lie triple system consists of a space of linear operators on vector space L that is closed under the ternary bracket $[x,y,z]_T = [[x,y],z]$, where $[x,y] = xy - yx$. Equivalently, a Lie triple system may be viewed as a subspace of the Lie algebra closed with respect to the ternary product. A Lie triple system arose also in the study of symmetric spaces [38]. From an algebraic point of view, a Lie triple system is a vector space L with a triple product $[\cdot,\cdot,\cdot] : L \otimes L \otimes L \to L$ satisfying for all $x_i \in L, 1 \leq i \leq 5$:

$$\begin{aligned}
&[x,y,z] = -[y,x,z],\\
&[x,y,z] + [y,z,x] + [z,x,y] = 0,\\
&[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]] = [[x_1,x_2,x_3],x_4,x_5] + [x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5] + [x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]].
\end{aligned}$$

More generally, we distinguish two kinds of generalizations of binary Lie algebras. First, n-ary Lie algebras in which the Jacobi identity is generalized by considering a cyclic summation over S_{2n-1} instead of S_3 [71, 106], that is, the sum over $\mathbb{S}_{2n-1}(n \geq 2)$ of the nested square brackets is zero :

$$\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{2n-1}} sgn(\sigma)[x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n-1)}, [x_{\sigma(n)}, \cdots, x_{\sigma(2n-1)}]] = 0.$$

The second generalization are n-ary Nambu algebras in which the fundamental identity generalizes the fact that the adjoint maps are derivations. The fundamental identity related to Nambu mechanics [111] appeared in its algebraic formulation by Takhtajan [130]. An n-ary generalization of Hamiltonian dynamics is given by means of the n-ary 'Poisson bracket' :

$$\{f_1, \cdots, f_n\} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right) = P(df_1, \cdots, df_n),$$

where P is an n-vector (i.e., a completely skew-symmetric contravariant tensor) field, apparently he was looking for a simple model which explains the inseparability of quarks.

The abstract definition of n-ary Nambu algebras or n-Lie algebras (when the bracket is skew-symmetric) was given by Filippov in 1985 [63]. He proposed a generalization of the concept of a Lie algebra by replacing the binary operation by an n-ary one. He defined an n-ary Lie algebra structure on a vector space $\mathfrak{g}$ as an operation which associates to each n-tuple

$(x_1,\cdots,x_n)$ of elements in $\mathfrak{g}$ another element $[x_1,\cdots,x_n]$ which is n-linear, skew-symmetric, and satisfies the n-Jacobi identity, also called Fundamental identity or Filippov-Jacobi identity :

$$[x_1,\cdots,x_{n-1},[y_1,\cdots,y_n]]=\sum_{i=1}^{n}[y_1,\cdots,y_{i-1},[x_1,\cdots,x_{n-1},y_i],y_{i+1},\cdots,y_n].$$

Apparently Filippov was motivated by the fact that with this definition one can develop a meaningful structure theory, in accordance with the aim of Malcev's school : To look for algebraic structures that manifest good properties. In particular, For $n=3$, a 3-Lie algebra is a vector space $\mathfrak{g}$ with a triple product $[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}:\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ satisfying for all $x_i\in\mathfrak{g},1\leq i\leq 5$:

$$[x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}]=sgn(\sigma)[x_1,x_2,x_3],\quad \forall\sigma\in S_3$$
$$[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]]=[[x_1,x_2,x_3],x_4,x_5]+[x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5]+[x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]].$$

The notion of L_∞-algebras was introduced by Schlessinger and Stasheff [124,129], and has been found many applications in mathematical physics, see also [92,93] for more details. The notion of a Lie k-algebra was introduced in [71], see [52] for more applications. A Lie k-algebra is a special case of L_∞-algebra, in which only the k-ary bracket is nonzero. Even though both 3-Lie algebras and Lie 3-algebras are algebras with ternary bracket operations, they are not same.

The concept of a Jordan algebra was introduced in 1934 as the underlying algebraic structure for certain operators in quantum mechanics [77]. A Jordan algebra is defined as a commutative algebra $\mathcal{J}$ over a field $\mathbb{K}$ (char $(\mathbb{K})\neq 2$) that satisfies the Jordan identity :

$$(x^2\circ y)\circ x=x^2\circ(y\circ x),\quad \forall x,y\in\mathcal{J}.$$

Since then, the theory of Jordan algebras has been developed, not only in purely algebraic aspects, but also intertwined with other subjects and applications. A related issue has been the attempt to generalize the Jordan algebra structure to the case of algebras with n-ary multiplication, with an emphasis on the ternary case. Mostly, these generalizations include Jordan triple systems (as in [34] and [67]), but also other ternary versions (e.g, [35]). Recently, As a generalization of Jordan algebras, Kaygorodov, Pozhidaev and Saraiva gave the definition of n-ary Jordan algebras by following a different approach in [82] :

According to [116] and [127], a Lie triple algebra is a commutative, non-associative algebra $\mathcal{J}$ over a field $\mathbb{K}$ (char $(\mathbb{K})\neq 2$) satisfying :

$$(x,y^2,z)=2y\circ(x,y,z),$$

where $(\cdot,\cdot,\cdot)$ stands for the associator : $(x,y,z)=(x\circ y)\circ z-x\circ(y\circ z)$. This identity is equivalent to :

$$R_{(x,y,z)}=[R_y,[R_x,R_z]],\tag{1}$$

where $[\cdot,\cdot]$ stands for the commutator $[x,y]=x\circ y-y\circ x$ and R_x is a right multiplication operator, i.e : $y\mapsto R_x y=y\circ x$. It is simple to observe that every Jordan algebra is a Lie triple algebra, although the opposite is not necessarily true. Furthermore, on a commutative algebra, A, the identity (1) is equivalent to $[R_x,R_y]\in Der(A)$, where $Der(A)$ stands for the Lie algebra of derivations of A. Writing $D_{x,y}$ instead of $[R_x,R_y]$, this means that :

$$D_{x,y}(a\circ b)=D_{x,y}(a)\circ b+a\circ D_{x,y}(b).$$

Let $\mathcal{J}$ be an n-ary algebra with a multilinear multiplication $[[\cdot,\cdots,\cdot]]:\otimes^n\mathcal{J}\to\mathcal{J}$. They proposed the following definition : $\mathcal{J}$ is said to be an n-ary Jordan algebra if

$$[[x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)}]]=[[x_1,\cdots,x_n]],\quad \forall\sigma\in S_n,$$

$$[R_{(x_2,\cdots,x_n)}, R_{(y_2,\cdots,y_n)}] \in Der(\mathcal{J}),$$

where

$$Der(\mathcal{J}) = \{D \in End(\mathcal{J}) \mid D([[x_1,\cdots,x_n]]) = \sum_{i=1}^{n}[[x_1,\cdots,x_{i-1},D(x_i),x_{i+1},\cdots,x_n]]$$

is the set of all derivatives on $\mathcal{J}$, $[\cdot,\cdot]$ stands again for the commutator and $R_{(x_2,\cdots,x_n)}$, $R_{(y_2,\cdots,y_n)}$ are the right multiplication operators, defined in the usual way :

$$y \mapsto R_{(x_2,\cdots,x_n)}(y) = [[y,x_2,\cdots,x_n]].$$

Rota-Baxter operators and Yang-Baxter equations. The classical Yang–Baxter equation (CYBE) first emerged in the study of inverse scattering theory [59,60]. It is also a special case of the Schouten bracket in differential geometry, which was introduced in 1940 [125]. The CYBE can be viewed as the "classical limit" of the quantum Yang–Baxter equation [30]. This equation plays a fundamental role in various fields, including symplectic geometry, integrable systems, quantum groups, and quantum field theory (see [43] and references therein). Since the 1980s, the Yang–Baxter system has become a significant topic in both mathematics and mathematical physics.

The standard form of the CYBE in a Lie algebra is given in the tensor expression as follows. Let $\mathfrak{g}$ be a Lie algebra and $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Then r is called a solution of the CYBE in $\mathfrak{g}$ if :

$$[r_{12},r_{13}] + [r_{12},r_{23}] + [r_{13},r_{23}] = 0 \quad in\ U(\mathfrak{g}), \tag{2}$$

where $U(\mathfrak{g})$ is the universal enveloping algebra of $\mathfrak{g}$ and for $r = \sum_i a_i \otimes b_i$,

$$r_{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1, \quad r_{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i, \quad r_{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i,$$

r is also called a classical r-matrix due to the expression of r with respect to a basis of $\mathfrak{g}$. There are a lot of results on the CYBE when $\mathfrak{g}$ is semisimple (cf [31], etc). However, it is not easy to study equation (2) directly in a general case. A natural idea is to replace the tensor form by a linear operator. There are several approaches. In [126], Semonov–Tian–Shansky studied the CYBE systematically. In particular, an operator form of the CYBE is given as a linear map $R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ satisfying :

$$[R(x),R(y)] = R\big([R(x),y] + [x,R(y)]\big), \quad \forall x,y \in \mathfrak{g}. \tag{3}$$

It is equivalent to the tensor form (2) of the CYBE when the following two conditions are satisfied : (a) there exists a nondegenerate symmetric invariant bilinear form on $\mathfrak{g}$ and (b) r is skew-symmetric. However, the relation between the operator form (3) and the tensor form (2) in a general case is still not clear.

Later, Kupershmidt restudied the CYBE in [91]. When r is skew-symmetric, the tensor form (2) of the CYBE is equivalent to a linear map $r : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ satisfying :

$$[r(x),r(y)] = r\big(ad^*r(x)(y) - ad^*r(y)(x)\big), \quad \forall x,y \in \mathfrak{g}^*.$$

where $\mathfrak{g}^*$ is the dual space of $\mathfrak{g}$ and ad^* is a coadjoint representation of the Lie algebra $\mathfrak{g}$. Moreover, Kupershmidt generalized the above ad^* to be an arbitrary representation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ of $\mathfrak{g}$, that is, a linear map $T : V \to \mathfrak{g}$ satisfying :

$$[T(u),T(v)]_{\mathfrak{g}} = T\big(\rho(Tu)(v) - \rho(Tv)(u)\big), \quad \forall u,v \in V.$$

which was regarded as a natural generalization of the CYBE. Such an operator is called an $\mathcal{O}$-operator or a relative Rota-Baxter operator associated with ρ. Note that the operator form (1.26) of the CYBE given by Semonov–Tian–Shansky is just an $\mathcal{O}$-operator associated with the adjoint representation of $\mathfrak{g}$. However, there is no direct relation between the $\mathcal{O}$-operators and the tensor form (2) of the CYBE, either. Furthermore, there is an algebraic structure behind the above study. It is the left-symmetric algebra (or under other names like pre-Lie algebra, quasi-associative algebra, Vinberg algebra and so on). A systematic study on the relations between left-symmetric algebras and (CYBE) was given in [17].

In the case of Jordan algebras, the concept of a Jordan D-bialgebra was introduced by Zhelyabin in [148] as an analogue of a Lie bialgebra (see also [150, 151]). A particular class of Jordan D-bialgebras, known as the coboundary cases, arises from solutions to an algebraic equation within a Jordan algebra, which serves as an analogue to the classical Yang-Baxter equation (CYBE) in Lie algebras ([149, 151]). For simplicity, this equation is referred to as the Jordan Yang-Baxter equation (JYBE). Both the (CYBE) and (JYBE) were originally formulated in tensor form, making it natural to also consider their operator forms, which are linear transformations corresponding to elements in the tensor product spaces that satisfy these equations.

In order to understand the operator forms of the (JYBE) and the (JYBE) itself well, the authors in [54] introduced the notion of $\mathcal{O}$-operator of a Jordan algebra and they show that it plays a similar role of the $\mathcal{O}$-operator of a Lie algebra. Then it is natural to ask what algebraic structures behind the $\mathcal{O}$-operators of Jordan algebras and the related (JYBE) ? The answer is pre-Jordan algebras !

Another kind of $\mathcal{O}$-operators of Jordan algebras (associated to the regular modules) are Rota-Baxter operators. Rota-Baxter operators (on associative algebras) were introduced by G. Baxter [27] in 1960. The importance of these operators were realized by G.-C. Rota in Combinatorics [120]. Since then, many applications of Rota-Baxter operators have been discovered in various areas of mathematics and mathematical physics (see for instance [15, 56]). Obviously they are well-defined on any algebra. Recently, Rota-Baxter operators were found to provide an approach of constructing certain type of algebras with richer structures from a known type of algebras [57], such as a Rota-Baxter operator on an associative algebra is used to construct a dendriform algebra [7], a Rota-Baxter operator on a dendriform algebra or a pair of commuting Rota-Baxter operators on an associative algebra is used to construct a quadri-algebra [6]. As an independent topic, with the above approach and idea, the algebraic structure from a Rota-Baxter operator of a Jordan algebra is exactly a pre-Jordan algebra, although it is an immediate consequence from the relationship between pre-Jordan algebras and Jordan algebras in terms of $\mathcal{O}$-operators of Jordan algebras.

Cohomology and deformations. (Co)homological algebra is a fundamental tool in modern mathematics. Initially unpopular, its interest exploded with the work of Serre and Grothendieck in algebraic geometry and it has now become an essential travelling companion for anyone working in abstract algebra, geometry, topology, algebraic geometry, algebraic topology, category theory, etc [119]. Its applications are innumerable and range from the study of local rings, schemas and bundles (Grothendieck, Serre) to the classification of musical style [37] and the detection of anomalies in the human body [121].

Given an algebraic or topological object X, we want to construct a sequence of groups $H^n(X)$, $n \in \mathbb{Z}$, that are invariants for X, i.e. if X and Y are two isomorphic (or homeomorphic, or diffeomorphic, or ...) objects, then we have group isomorphisms $H^n(X) \cong H^n(Y)$, $n \in \mathbb{Z}$. These groups make it possible to retrieve a certain amount of information about the object under study. Depending on the context, there are several ways to define (co)homology groups, via simplicial complexes and triangulations, CW-complexes, differential forms or via methods derived from the theory of abelian categories. All these methods are presented in the excellent course [69] (for French speakers) or the classics [119, 142]. Generally, given an object X, we construct a sequence of objects of an abelian category related by morphisms δ^n verifying $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ as follows :

$$\cdots \longrightarrow C^{n-1}(X) \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n(X) \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1}(X) \xrightarrow{\delta^{n+1}} C^{n+2}(X) \xrightarrow{\delta^{n+2}} \cdots,$$

The cohomology groups can then be constructed by calculating :

$$H^n(C^\bullet) := Ker(\delta^n)/Im(\delta^{n-1}).$$

The elements of C^n are called the n-cochains, the elements of $Z^n := Ker(\delta^n)$ are called the n-cocycles and the elements of $B^n := Im(\delta^{n-1})$ are called the n-coboundaries. Since $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$, we have $Im(\delta^{n-1}) \subset Ker(\delta^n)$, that is, $B^n \subset Z^n$.

In general, there is another approach to give a cohomology theory of an algebraic structure, namely using the controlling algebra. A controlling algebra of an algebraic structure is a graded Lie algebra (sometimes, L_∞-algebra) whose Maurer-Cartan elements are the given algebraic structure. For example, the controlling algebra for Lie algebra structures on a vector space $\mathfrak{g}$ is given by the Nijenhuis-Richardson bracket $[\cdot,\cdot]_{NR}$ on the graded vector space $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Hom}(\wedge^{n+1}\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ [114], and the Chevalley-Eilenberg coboundary operator δ_{CE} of a Lie algebra $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ can be obtained by $\delta_{CE}(f) = (-1)^{k-1}[[\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, f]_{NR}$, for all $f \in \mathrm{Hom}(\wedge^{n+1}\mathfrak{g},\mathfrak{g})$.

The various cohomologies of particular interest to us are the cohomologies associated with Lie algebras and ternary algebras of Lie type. The Chevalley-Eilenberg cohomology associated with a Lie $\mathbb{K}$-algebra $\mathfrak{g}$, introduced in [40], is recalled in Subsection 1.2.2. The cohomology of Lie triple systems was studied by Yamaguti and Harris in [72, 144] and recalled in Subsection 2.2.2, and that of 3-Lie algebras was studied by Takhtajan in [131] and presented in Subsection 2.1.3. In the case of Lie algebras, If V is a Lie module for $\mathfrak{g}$, then in this case we have $C^n(\mathfrak{g}) = \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\wedge^n\mathfrak{g}, V)$ and the maps δ^n_{CE} are given by an explicit formula (see Equation (1.18)). We then talk about cohomology with coefficients in V. For example, if $V = \mathbb{K}$, the second cohomology group allows us to classify central extensions of $\mathfrak{g}$; if $V = \mathfrak{g}$, the first cohomology group corresponds to the derivations of $\mathfrak{g}$ and the second allows us to control infinitesimal formal deformations of $\mathfrak{g}$. These properties can also be extended for ternary algebras of Lie type. The interactions between algebraic objects and associated cohomology are at the heart of this thesis work.

The theory of deformations of algebraic structures was initiated by Gerstenhaber in the case of associative algebras [65], then extended to Lie algebras by Nijenhuis and Richardson [112–114]. The principle is, given a non-associative algebra (A,μ), to construct a new algebra multiplication μ_t on the formal space $A[[t]]$ by adding terms in powers of the formal parameter t to μ. The new multiplication μ_t will then be of the form :

$$\mu_t = \mu + \sum_{i \geq 1} \mu_i t^i,$$

where $\mu_i : A \otimes A \to A$ are bilinear maps. Depending on the structure we wish to have on $A[[t]]$, certain conditions are necessary on the maps μ_i. For example, if μ is an associative multiplication and if we want μ_t to be also associative, then it is necessary to choose μ_1 among the 2-cocycles of the Hochschild cohomology with adjoint coefficients (see [65]). In this context, it is natural to consider some graded algebras which will encode the properties of these deformations. These are the Gerstenhaber algebra in the associative case and the Nijenhuis-Richardson algebra for the case of Lie algebras. For the case of ternary algebras of Lie type, Formal deformations of Lie triple systems were developed in 2004 by Kubo and Taniguchi [90] inspired by Gerstenhaber's method and in connection with Yamaguti's cohomology and those of 3-Lie algebras were treated by Gautheron [64] in 1996 in connection with Takhtajan's cohomology.

Recently, deformations of certain operators, morphisms and relative Rota-Baxter operators have been extensively studied, see [11,48,61,103,132,134,136]. A cohomology is needed to control deformations and extension problems of a given algebraic structure. The cohomology of Rota-Baxter operators and $\mathcal{O}$-operators on Lie algebras and associative algebras has been developed in [48,132] respectively.

The aim of this thesis is to explore relative Rota-Baxter operators on ternary algebras of both Lie and Jordan types. The thesis consists of five chapters and is organized as follows :

Chapter 1. In the first chapter, we provide an overview of Lie algebras and Lie-admissible algebras, accompanied by illustrative examples. We start by introducing Lie algebras and their key properties, such as subalgebras, ideals, morphisms, derivations, representations, and the semi-direct product. Additionally, we cover the Chevalley-Eilenberg cohomology and deformation theory. Following this, we revisit the concept of Rota-Baxter operators and highlight their significant role in transforming Lie algebras into other algebraic structures through the process of dendrification.

Chapter 2. The second chapter focuses on reviewing the concept of ternary algebras of Lie type, which generalize ordinary Lie algebras to the ternary case. We concentrate on two types of ternary algebras of Lie type : 3-Lie algebras and Lie triple systems. In this context, we provide definitions, general concepts, and key examples, along with discussions on representations, cohomologies, and deformation theory. The chapter concludes by recalling the definition of an L_∞-algebra, with particular attention to the Lie 3-algebra, which will be instrumental in chapter four for characterizing relative Rota-Baxter operators on Lie triple systems via Maurer-Cartan elements. Finally, we introduce the Voronov construction through the theory of higher derived brackets, which is a very useful way to construct L_∞-algebras.

Chapter 3. The aim of the third chapter is to introduce a controlling algebra of Lie triple systems and apply it to Yamaguti's existing cohomology theory. It has been observed that a Lie triple system is a ternary Nambu algebra or a 3-Leibniz algebra, while the controlling algebra of Nambu algebras has already been given in [118]. This motivates us to solve this problem by identifying a subalgebra of the graded Lie algebra given in [118]. We justify it by showing that the coboundary operator of the cohomology of a Lie triple system with coefficients in itself can be characterized by this controlling algebra structure. Furthermore, we introduce the notion of relative Rota-Baxter operator on Lie triple systems and construct a 3-Lie algebra as a special case of L_∞-algebras whose Maurer-Cartan elements are relative Rota-Baxter operators. This allows us to define the Yamaguti cohomology of a relative Rota-Baxter operator. We then proceed to study the deformations of relative Rota-Baxter operators from a cohomological perspective, identifying the obstruction class of an extensible deformation of order n, and examining the connections between the cohomology of relative Rota-Baxter operators on Lie algebras and their associated Lie triple systems.

Chapter 4. In this chapter, we aim to introduce the concept of a twisted relative Rota-Baxter operator on a 3-Lie algebra and to investigate 3-NS-Lie algebras as the underlying structure for twisted relative Rota-Baxter operators. Furthermore, starting from a representation of a 3-Lie algebra and based on Voronov's approach, we construct an L_∞-algebra whose Maurer-Cartan elements are twisted relative Rota-Baxter operators on a 3-Lie algebra. Next, we define the cohomology of these operators on 3-Lie algebras to explore their deformations. It has been proved that if two formal deformations of a twisted relative Rota-Baxter operator on a 3-Lie algebra are equivalent, then their infinitesimals are in the same cohomology class in the first cohomology group, as well as, the extension from a deformation of order n to a deformation of order $n+1$ is provided by a cohomology class in the second cohomology group.

Chapter 5. The final chapter focuses on the concept of ternary Jordan algebras, which generalize Jordan algebras to the ternary case. We study representations of ternary Jordan algebras and introduce the notion of coherent ternary Jordan algebras. Then, we introduce relative Rota-Baxter operators for ternary Jordan algebras and discuss solutions to the ternary Jordan Yang-Baxter equation involving these operators. In addition, we study ternary pre-Jordan algebras as the algebraic structure underlying relative Rota-Baxter operators. Furthermore, we establish and illustrate the relationships between ternary Jordan algebras and ternary pre-Jordan algebras with examples.

Conclusion and Main Results

Due to the importance of relative Rota-Baxter operators, ternary algebras of Lie type and Jordan type, as well as cohomology and deformation theories, this thesis aims to study relative Rota-Baxter operators within the context of these various structures. The main results of this thesis are described below. However, before we present main ideas of this work, some definitions are needed. We recall the notions of L_∞-algebras, Lie 3-algebra (an L_∞-algebra that only contains the ternary bracket) and Voronov's higher derived bracket, which is a very useful way to construct L_∞-algebras.

A permutation $\sigma \in \mathbb{S}_n$ is called an $(i, n-i)$-shuffle if $\sigma(1) < \cdots < \sigma(i)$ and $\sigma(i+1) < \cdots < \sigma(n)$. If $i = 0$ or $i = n$, we assume that $\sigma = Id$. The set of $(i, n-i)$-shuffles is denoted by $\mathbb{S}_{(i,n-i)}$.

Definition 0.0.1. An L_∞-algebra is a $\mathbb{Z}$-graded vector space $\mathfrak{g} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^k$ equipped with a collection $(k \geq 1)$ of linear maps $l_k : \otimes^k\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ of degree 1 with the property that, for all homogeneous elements $x_1, \cdots, x_n \in \mathfrak{g}$, we have

(i) *(graded symmetry)* for every $\sigma \in \mathbb{S}_n$,

$$l_n(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n-1)}, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) l_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n),$$

(ii) *(generalized Jacobi Identity)* for all $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i,n-i)}} \varepsilon(\sigma) l_{n-i+1}(l_i(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(i)}), x_{\sigma(i+1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = 0.$$

The notion of a Lie k-algebra is a special case of L_∞-algebra, in which only the k-ary bracket is nonzero. Here we give the precise definition of a Lie 3-algebra.

Definition 0.0.2. A Lie 3-algebra is a $\mathbb{Z}$-graded vector space $\mathfrak{g} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^k$ equipped with a trilinear bracket $\{\cdot,\cdot,\cdot\}_\mathfrak{g} : \otimes^3\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ of degree 1, satisfying

(i) *(graded symmetry)* for all homogeneous elements $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{g}$,

$$\{x_1, x_2, x_3\}_\mathfrak{g} = (-1)^{x_1x_2}\{x_2, x_1, x_3\}_\mathfrak{g} = (-1)^{x_2x_3}\{x_1, x_3, x_2\}_\mathfrak{g},$$

(ii) *(generalized Jacobi Identity)* for all homogeneous elements $x_i \in \mathfrak{g}, 1 \leq i \leq 5$,

$$\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_5} \varepsilon(\sigma)\{\{x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}\}_\mathfrak{g}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}\}_\mathfrak{g} = 0.$$

Definition 0.0.3. 1. A Maurer-Cartan element of an L_∞-algebra $(\mathfrak{g} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^k, \{l_i\}_{i=1}^{+\infty})$ is an element $\alpha \in \mathfrak{g}^0$ satisfying the Maurer-Cartan equation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} l_n(\alpha, \cdots, \alpha) = 0. \tag{4}$$

2. A Maurer-Cartan element of a Lie 3-algebra $(\mathfrak{g}=\oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^k,\{\cdot,\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}})$ is an element $\alpha\in\mathfrak{g}^0$ satisfying the Maurer-Cartan equation

$$\frac{1}{3!}\{\alpha,\alpha,\alpha\}_{\mathfrak{g}}=0. \tag{5}$$

In [141], T. Voronov developed the theory of higher derived brackets, which is a useful tool to construct explicit L_∞-algebras. Voronov's work can be described as follows :

Definition 0.0.4. A V-data consists of a quadruple $(\mathfrak{g},F,\mathcal{P},\Delta)$, where

- $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ is a graded Lie algebra,
- F is an abelian graded Lie subalgebra of $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$,
- $\mathcal{P}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ is a projection, that is, $\mathcal{P}\circ\mathcal{P}=\mathcal{P}$, whose image is F and kernel is a graded Lie subalgebra of $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$,
- Δ is an element in $\ker(\mathcal{P})^1$ such that $[\Delta,\Delta]=0$.

Théorème 0.0.5. Let $(\mathfrak{g},F,\mathcal{P},\Delta)$ be a V-data. Then $(F,\{l_k\}_{k=1}^{+\infty})$ is an L_∞-algebra, where

$$l_k(a_1,\cdots,a_k)=\mathcal{P}\underbrace{[\cdots[}_{k}[\Delta,a_1],a_2],\cdots,a_k],\quad \text{for homogeneous } a_1,\cdots,a_k\in F. \tag{6}$$

We call $\{l_k\}_{k=1}^{+\infty}$ the higher derived brackets of the V-data $(\mathfrak{g},F,\mathcal{P},\Delta)$.

The first purpose of this thesis is devoted to study the controlling algebra of Lie triple systems, and apply it to the existing cohomology theory. In particular, the cohomology of Lie triple systems can be characterized by the controlling algebra.

Let L be a vector space. Consider the graded vector space $\mathfrak{C}^*(L,L)=\oplus_{n\geq 0}\mathfrak{C}^n(L,L)$, where $\mathfrak{C}^n(L,L)$ is the set of linear maps $P\in \mathrm{Hom}(\underbrace{(\otimes^2L)\otimes\cdots\otimes(\otimes^2L)}_{n\geq 0}\otimes L,L)$. The degree of elements in $\mathfrak{C}^n(L,L)$ is defined to be n. Define

$$[P,Q]_{L.t.s}=(-1)^{pq}i_P(Q)-i_Q(P),\quad \forall\, P\in\mathfrak{C}^p(L,L),Q\in\mathfrak{C}^q(L,L), \tag{7}$$

where $i_P(Q)\in\mathfrak{C}^{p+q}(L,L)$ is defined by

$$i_P(Q)=\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{(k-1)q}\sum_{\sigma\in Sh(k-1,q)}\epsilon(\sigma)P\circ_k^\sigma Q,$$

where σ is a permutation in $(k-1,q)$-shuffle and $P\circ_k^\sigma Q$ is defined for $k=p+1$ by

$$(P\circ_{p+1}^\sigma Q)(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{p+q},z)=P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p)},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(p+1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p+q)},z)),$$

and for $1\leq k\leq p$ by :

$$\begin{aligned}&(P\circ_k^\sigma Q)(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{p+q},z)\\ =&P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k-1)},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)},x_{k+q})\otimes y_{k+q},\mathfrak{X}_{k+q+1},\cdots,\mathfrak{X}_{p+q},z)\\ &+P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k-1)},x_{k+q}\otimes Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)},y_{k+q}),\mathfrak{X}_{k+q+1},\cdots,\mathfrak{X}_{p+q},z),\end{aligned}$$

where $\mathfrak{X}_i=x_i\otimes y_i\in\otimes^2L$, $i=1,2,\cdots,p+q$ and $z\in L$.

Motivated by the fact that Lie triple systems are a subclass of 3-Leibniz algebras, then we need to choose a graded Lie subalgebra of $(\mathfrak{C}^*(L,L),[\cdot,\cdot]_R)$, defined in [118], whose Maurer-Cartan elements are Lie triple systems. To do this, we consider the graded subspace $\mathfrak{C}^*_{Lts}(L,L)=$

$\oplus_{n\geq 0}\mathfrak{C}^n_{Lts}(L,L)$ of $\mathfrak{C}^*(L,L)$, where the space $\mathfrak{C}^n_{Lts}(L,L)$ is the vector space of linear maps that satisfies the following conditions :

$$P(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2,\cdots,\mathfrak{X}_{n-1},x,x,y)=0,$$
$$P(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2,\cdots,\mathfrak{X}_{n-1},x,y,z)+P(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2,\cdots,\mathfrak{X}_{n-1},y,z,x)+P(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2,\cdots,\mathfrak{X}_{n-1},z,x,y)=0,$$

for $\mathfrak{X}_i\in\otimes^2L$, $1\leq i\leq n-1$.

Théorème 0.0.6. *With the above notations, $(\mathfrak{C}^*_{Lts}(L,L),[\cdot,\cdot]_R)$ is a graded Lie subalgebra of the graded Lie algebra $(\mathfrak{C}^*(L,L),[\cdot,\cdot]_R)$. Moreover, its Maurer-Cartan elements are Lie triple systems on the vector space L.*

Also we've shown that the cohomology theory for Lie triple systems introduced by Yamaguti can be recovered from the controlling algebra given above. We assume that $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ is a Lie triple system and fix $\pi(x,y,z)=[x,y,z]$, for all $x,y,z\in L$. Consider the Yamaguti coboundary operator $\delta^{2n-1}:\mathcal{C}^{2n-1}_{Lts}(L,V)\to\mathcal{C}^{2n+1}_{Lts}(L,V)$ given by the equation (2.9) associated with the adjoint representation, then we have

Théorème 0.0.7. For all $f\in\mathcal{C}^{2n-1}_{Lts}(L,L)=\mathfrak{C}^{n-1}_{Lts}(L,L)$, we have

$$\delta^{2n-1}(f)=(-1)^{n-1}[\pi,f]_R,\quad\forall n=1,2,\cdots$$

Definition 0.0.8. Let $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ be a Lie triple system with a representation (V,θ). A linear map $T:V\to L$ is called an relative Rota-Baxter operator of L with respect to θ if it satisfies

$$[Tu,Tv,Tw]=T\Big(D(Tu,Tv)w+\theta(Tv,Tw)u-\theta(Tu,Tw)v\Big),\quad\forall u,v,w\in V.$$

Let (V,θ) be a representation of a Lie triple system $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$. For convenience, we use $\pi:\wedge^2L\otimes L\to L$ to indicate the Lie triple system structure $[\cdot,\cdot,\cdot]$. Then $\pi+\theta$ corresponds to the semi-direct product Lie triple system structure on $L\oplus V$ given by

$$[x+u,y+v,z+w]_{L\oplus V}=[x,y,z]+\theta(y,z)u-\theta(x,z)v+D(x,y)w,$$

for all $x,y,z\in L$ and $u,v,w\in V$. Therefore, we have

$$[\pi+\theta,\pi+\theta]_R=0.$$

Consider the graded vector space $\mathfrak{C}^*(V,L)=\oplus_{n\geq 0}\mathfrak{C}^n(V,L)$, where $\mathfrak{C}^n(V,L)$ is the set of linear maps $f\in\mathrm{Hom}(\underbrace{(\otimes^2V)\otimes\cdots\otimes(\otimes^2V)}_{n\geq 0}\otimes V,L)$, satisfying

$$f(\mathfrak{U}_1,\mathfrak{U}_2,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},u,u,v)=0,$$
$$f(\mathfrak{U}_1,\mathfrak{U}_2,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},u,v,w)+f(\mathfrak{U}_1,\mathfrak{U}_2,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},v,w,u)+f(\mathfrak{U}_1,\mathfrak{U}_2,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},w,u,v)=0$$

for all $\mathfrak{U}_i\in\otimes^2V$, $1\leq i\leq n-1$. The degree of elements in $\mathfrak{C}^n(V,L)$ is defined to be n. Define the ternary bracket

$$l_3:\mathfrak{C}^p(V,L)\times\mathfrak{C}^q(V,L)\times\mathfrak{C}^r(V,L)\to\mathfrak{C}^{m+n+p+1}(V,L),$$
$$l_3(\mathbb{P},\mathbb{Q},\mathbb{R})=[[[\pi+\theta,\mathbb{P}]_R,\mathbb{Q}]_R,\mathbb{R}]_R.$$

Given a representation of a Lie triple system, we construct a Lie 3-algebra whose Maurer-Cartan elements are relative Rota-Baxter operators on Lie triple systems. Then we obtain the Lie 3-algebra that controls deformations of relative Rota-Baxter operators on Lie triple systems. This fact can be viewed as certain justification of relative Rota-Baxter operators on Lie triple systems being interesting structures.

Théorème 0.0.9. Let $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ be a Lie triple system with a representation (V,θ). Then the graded vector space $(\mathfrak{C}^*(V,L),l_3)$ is a Lie 3-algebra. Moreover, its Maurer-Cartan elements are precisely relative Rota-Baxter operators on the Lie triple system $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ with respect to the representation (V,θ).

The above characterization of a relative Rota-Baxter operator T allows us to define a cohomology associated to T. More precisely, define the differential operator $d^n_T : \mathfrak{C}^{n-1}_{Lts}(V,L) \to \mathfrak{C}^n_{Lts}(V,L)$ for $n \geq 1$ by

$$d^n_T(f) = l^T_1(f) = \frac{1}{2}l_3(T,T,f), \quad f \in \mathfrak{C}^n_{Lts}(V,L).$$

The corresponding cohomology group is

$$H^\bullet_T(V,L) = \frac{Z^\bullet_T(V,L)}{B^\bullet_T(V,L)} = \frac{\{f \in \mathfrak{C}^n_{Lts}(V,L) | d^n_T(f) = 0\}}{\{d^n_T(g) | g \in \mathfrak{C}^{n-1}_{Lts}(V,L)\}}.$$

In the sequel, we define a cohomology of a relative Rota-Baxter operator T on a Lie triple system L as the Yamaguti cohomology of a certain Lie triple system with coefficients in a suitable representation on L. This cohomology will be used further, to study deformations of T. Let $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ be a Lie triple system with a representation (V,θ), there is a L.t.s structure on V given as follows.

Proposition 0.0.10. *Let $T : V \to L$ be a relative Rota-Baxter operator on a Lie triple system $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ with a representation (V,θ). Then $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ is a L.t.s, where*

$$[u,v,w]_T := D(Tu,Tv)w + \theta(Tv,Tw)u - \theta(Tu,Tw)v, \quad \forall u,v,w \in V. \tag{8}$$

Moreover, T is a homomorphism of Lie triple systems, that is $T([u,v,w]_T) = [Tu,Tv,Tw]$.

Furthermore, there is a representation of the above Lie triple system $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ on L.

Proposition 0.0.11. *Let T be a relative Rota-Baxter operator on a Lie triple system $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ with a representation (V,θ). Define $\theta_T : \otimes^2 V \to \mathfrak{gl}(L)$ by*

$$\theta_T(u,v)x = [x,Tu,Tv] + T\Big(\theta(x,Tv)u - D(x,Tu)v\Big), \ \forall x \in L, \ \forall u,v \in V. \tag{9}$$

Then (L,θ_T) is a representation of the Lie triple system $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ on L.

Consider the Lie triple system $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ with the representation (L,θ_T). For each $n \geqslant 1$, we denote by $C^{2n+1}(V,L)$ the vector space of $(2n+1)$-cochains of V with coefficients in L. Consider $\delta^{2n-1}_T : C^{2n-1}(V,L) \to C^{2n+1}(V,L)$ $(n \geqslant 1)$ to be the corresponding coboundary operator on the Lie triple system $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ with coefficients in the representation (L,θ_T). More precisely, $\delta^{2n-1}_T : C^{2n-1}(V,L) \to C^{2n+1}(V,L)$ is given by :

$$\begin{aligned}
&\delta^{2n-1}_T f(v_1,v_2,\cdots,v_{2n+1})\\
=&[f(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-1}),Tv_{2n},Tv_{2n+1}] + T\theta(f(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-1}),Tv_{2n+1})v_{2n}\\
&- TD(f(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-1}),Tv_{2n})v_{2n+1} - [f(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-2},v_{2n}),Tv_{2n-1},Tv_{2n+1}]\\
&- T\theta(f(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-2},v_{2n}),Tv_{2n+1})v_{2n-1} + TD(f(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-2},v_{2n}),Tv_{2n-1})v_{2n+1}\\
&+ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n}\Big([Tv_{2k-1},Tv_{2k},f(v_1,v_2,\cdots,\widehat{v}_{2k-1},\widehat{v}_{2k},\cdots,v_{2n+1})]\\
&- T\theta(Tv_{2k},f(v_1,\cdots,\widehat{v}_{2k-1},\widehat{v}_{2k},\cdots,v_{2n+1}))v_{2k-1}
\end{aligned}$$

$$+ T\theta(Tv_{2k-1}, f(v_1, \cdots, \widehat{v}_{2k-1}, \widehat{v}_{2k}, \cdots, v_{2n+1}))v_{2k}\Big)$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2k+1}^{2n+1}(-1)^{n+k+1}\Big(f(v_1, v_2, \cdots, \widehat{v}_{2k-1}, \widehat{v}_{2k}, \cdots, D(Tv_{2k-1}, Tv_{2k})v_j, \cdots, v_{2n+1})$$
$$+ f(v_1, v_2, \cdots, \widehat{v}_{2k-1}, \widehat{v}_{2k}, \cdots, \theta(Tv_{2k}, Tv_j)v_{2k-1}, \cdots, v_{2n+1})$$
$$- f(v_1, v_2, \cdots, \widehat{v}_{2k-1}, \widehat{v}_{2k}, \cdots, \theta(Tv_{2k-1}, Tv_j)v_{2k}, \cdots, v_{2n+1})\Big), \tag{10}$$

for all $f \in C^{2n-1}(V, L)$, $n \geqslant 1$, where $\widehat{v}$ means that element v is omitted.

With this coboundary operator the Yamaguti cochains form a complex

$$C^1(V, L) \xrightarrow{\delta_T^1} C^3(V, L) \xrightarrow{\delta_T^3} C^5(V, L) \longrightarrow \cdots,$$

and $\delta_T^{2n+1} \circ \delta_T^{2n-1} = 0 \; for \; n = 1, 2, \cdots$.

Now, we provide a comparison between the coboundary operators δ_T^{2n-1} and d_T^n defined by (4.20) using the Maurer-Cartan element T of the Lie 3-algebra $(\mathfrak{C}^*(V, L), l_3)$.

Théorème 0.0.12. Let T be an $\mathcal{O}$-operator on a L.t.s $(L, [\cdot, \cdot, \cdot])$ with respect to a representation (V, θ). Then we have

$$d_T^n = (-1)^{n-1}\delta_T^{2n-1}. \tag{11}$$

Next, we focus in the case of 3-Lie algebras and we introduce the concept of twisted relative Rota-Baxter operator as an operator analogue of twisted r-matrices.

Let $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$ be a 3-Lie algebra, (V, ρ) be a representation and $\mathcal{H} \in \mathfrak{C}^2_{3Lie}(\mathfrak{g}; V)$ be a 2-cocycle in the cohomology complex of a 3-Lie algebra $\mathfrak{g}$ with coefficients in V.

Definition 0.0.13. A linear map $T : V \to \mathfrak{g}$ is said to be a $\mathcal{H}$-twisted relative Rota-Baxter operator if T satisfies

$$[Tu, Tv, Tw]_{\mathfrak{g}} = T\big(\rho(Tu, Tv)w + \rho(Tv, Tw)u + \rho(Tw, Tu)v + \mathcal{H}(Tu, Tv, Tw)\big), \tag{12}$$

for all $u, v, w \in V$.

In the sequel, we recall the controlling algebra of 3-Lie algebras which is studied in [118]. Specifically, let $\mathfrak{g}$ be a vector space and let us consider the graded vector space

$$C^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \oplus_{n\geq 0} C^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \oplus_{n\geq 0}\mathrm{Hom}(\underbrace{\wedge^2\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \wedge^2\mathfrak{g}}_{n} \wedge \mathfrak{g}, \mathfrak{g}).$$

The degree of elements in $C^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ is defined to be n. Then the graded vector space $C^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ equipped with the graded commutator bracket

$$[P, Q]_{3Lie} = P \circ Q - (-1)^{pq} Q \circ P, \quad \forall\, P \in C^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), Q \in C^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), \tag{13}$$

is a graded Lie algebra, with $P \circ Q \in C^{p+q}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ defined by

$$(P \circ Q)(\mathfrak{X}_1, \cdots, \mathfrak{X}_{p+q}, x)$$
$$= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{(k-1)q}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}(k-1,q)}(-1)^{\sigma}P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathfrak{X}_{\sigma(k-1)}, Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)}, \cdots, \mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)}, x_{k+q}) \wedge y_{k+q}, \mathfrak{X}_{k+q+1}, \cdots, \mathfrak{X}_{p+q}, x)$$
$$+ \sum_{k=1}^{p}(-1)^{(k-1)q}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}(k-1,q)}(-1)^{\sigma}P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathfrak{X}_{\sigma(k-1)}, x_{k+q} \wedge Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)}, \cdots, \mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)}, y_{k+q}), \mathfrak{X}_{k+q+1}, \cdots, \mathfrak{X}_{p+q}, x)$$
$$+ \sum_{\sigma\in\mathcal{S}(p,q)}(-1)^{pq}(-1)^{\sigma}P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathfrak{X}_{\sigma(p)}, Q(\mathfrak{X}_{\sigma(p+1)}, \cdots, \mathfrak{X}_{\sigma(p+q-1)}, \mathfrak{X}_{\sigma(p+q)}, x)),$$

where $\mathfrak{X}_i = x_i \wedge y_i \in \wedge^2\mathfrak{g}$, $i = 1, 2, \cdots, p+q$ and $x \in \mathfrak{g}$.

Proposition 0.0.14. *Let $\mathfrak{g}$ be a vector space. Then $\pi \in C^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = \mathrm{Hom}(\wedge^3\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ defines a 3-Lie algebra structure on $\mathfrak{g}$ if and only if π is a Maurer-Cartan element of the graded Lie algebra $(C^*(\mathfrak{g},\mathfrak{g}),[\cdot,\cdot]_{3Lie})$, i.e. it satisfies the Maurer-Cartan equation $[\pi,\pi]_{3Lie} = 0$. Moreover, $(C^*(\mathfrak{g},\mathfrak{g}),[\cdot,\cdot]_{3Lie},d_\pi)$ is a differential graded Lie algebra, where d_π is defined by*

$$d_\pi := [\pi,\cdot]_{3Lie}. \tag{14}$$

In this thesis, we construct an L_∞-algebra whose Maurer-Cartan elements are $\mathcal{H}$-twisted relative Rota-Baxter operators on 3-Lie algebras. Such characterization of $\mathcal{H}$-twisted relative Rota-Baxter operator T allows us to introduce a cohomology of T. Next, we show that the cohomology of T is equivalently described by the Chevalley-Eilenberg cohomology of V with coefficients in a suitable representation on $\mathfrak{g}$.

Let (V,ρ) be a representation of a 3-Lie algebra $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ and let $\mathcal{H}$ be a 2-cocycle in the cohomology of $\mathfrak{g}$ with coefficients in V. For convenience, we use $\pi : \bigwedge^3\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ to indicate the 3-Lie bracket on $\mathfrak{g}$. Then $\pi + \rho + \mathcal{H}$ corresponds to the semi-direct product 3-Lie algebra structure on $\mathfrak{g} \oplus V$ given by

$$[x+u,y+v,z+w]_\mathcal{H} = [x,y,z]_\mathfrak{g} + \rho(x,y)w + \rho(z,x)v + \rho(y,z)u + \mathcal{H}(x,y,z). \tag{15}$$

Therefore, we have

$$[\pi+\rho+\mathcal{H},\pi+\rho+\mathcal{H}]_{3Lie} = 0.$$

Consider the graded vector space

$$C^*(V,\mathfrak{g}) = \oplus_{n\geq 0}C^n(V,\mathfrak{g}) = \oplus_{n\geq 0}\mathrm{Hom}(\underbrace{\wedge^2 V\otimes\cdots\otimes\wedge^2 V}_{n\geq 0}\wedge V,\mathfrak{g}).$$

Define

$$\begin{aligned}
&l_3 : C^m(V,\mathfrak{g}) \times C^n(V,\mathfrak{g}) \times C^p(V,\mathfrak{g}) \to C^{m+n+p+1}(V,\mathfrak{g}),\\
&l_4 : C^m(V,\mathfrak{g}) \times C^n(V,\mathfrak{g}) \times C^p(V,\mathfrak{g}) \times C^q(V,\mathfrak{g}) \to C^{m+n+p+q+1}(V,\mathfrak{g})
\end{aligned}$$

by

$$\begin{aligned}
l_3(P,Q,R) =& [[[\pi+\rho,P]_{3Lie},Q]_{3Lie},R]_{3Lie},\\
l_4(P,Q,R,S) =& [[[[\mathcal{H},P]_{3Lie},Q]_{3Lie},R]_{3Lie},S]_{3Lie}.
\end{aligned}$$

Théorème 0.0.15. Let (V,ρ) be a representation of a 3-Lie algebra $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ and $\mathcal{H}$ be a 2-cocycle in the cohomology of $\mathfrak{g}$ with coefficients in V. Then the graded vector space $C^*(V,\mathfrak{g})$ is an L_∞-algebra with

$$l_1 = l_2 = 0, \quad l_3(\cdot,\cdot,\cdot), \quad l_4(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot), \tag{16}$$

and higher brackets are trivial. A linear map $T : V \to \mathfrak{g}$ is a $\mathcal{H}$-twisted relative Rota-Baxter operator if and only if T is a solution of the Maurer-Cartan equation of the L_∞-algebra $(C^*(V,\mathfrak{g}),l_3,l_4)$, i.e.

$$\frac{1}{3!}l_3(T,T,T) + \frac{1}{4!}l_4(T,T,T,T) = 0.$$

The above characterization of a $\mathcal{H}$-twisted relative Rota-Baxter operator T allows us to define a cohomology associated to T. More precisely, we define
$C^n_T(V,\mathfrak{g}) = \mathrm{Hom}(\underbrace{\wedge^2 V\otimes\cdots\otimes\wedge^2 V}_{n\geq 0}\wedge V,\mathfrak{g})$, for $n \geq 0$ and the differential operator $d_T : C^n_T(V,\mathfrak{g}) \to C^{n+1}_T(V,\mathfrak{g})$ by

$$d_T(f) = \frac{1}{2}l_3(T,T,f) + \frac{1}{6}l_4(T,T,T,f), \quad f \in C^n_T(V,\mathfrak{g}). \tag{17}$$

The corresponding cohomology groups are

$$H^n_T(V,\mathfrak{g})=\frac{Z^n_T(V,\mathfrak{g})}{B^n_T(V,\mathfrak{g})}=\frac{\{f\in C^n_T(V,\mathfrak{g})|d_T(f)=0\}}{\{d_T(g)|g\in C^{n-1}_T(V,\mathfrak{g})\}}.$$

Now, we introduce a new algebraic structure called a 3-NS-Lie algebra which can be considered as the sub-adjacent algebraic structure of a $\mathcal{H}$-twisted relative Rota-Baxter on the 3-Lie algebra $\mathfrak{g}$.

Definition 0.0.16. A 3-NS-Lie algebra is a vector space A together with trilinear operations $\{\cdot,\cdot,\cdot\},[[\cdot,\cdot,\cdot]]:\otimes^3A\to A$ satisfying the following identities

$$\begin{aligned}
\{x_1,x_2,x_3\}&=-\{x_2,x_1,x_3\}, &(18)\\
[[x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}]]&=\epsilon(\sigma)[[x_1,x_2,x_3]],\ \forall\sigma\in S_3, &(19)\\
\{x_1,x_2,\{x_3,x_4,x_5\}\}-\{\{x_1,x_2,x_3\}^C,x_4,x_5\}&=\{[[x_1,x_2,x_3]],x_4,x_5\}+\{x_3,\{x_1,x_2,x_4\}^C,x_5\}\\
&\quad+\{x_3,[[x_1,x_2,x_4]],x_5\}+\{x_3,x_4,\{x_1,x_2,x_5\}\}, &(20)\\
\{\{x_1,x_2,x_3\}^C,x_4,x_5\}+\{[[x_1,x_2,x_3]],x_4,x_5\}&=\{x_1,x_2,\{x_3,x_4,x_5\}\}+\{x_2,x_3,\{x_1,x_4,x_5\}\}\\
&\quad+\{x_3,x_1,\{x_2,x_4,x_5\}\}, &(21)\\
[[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_*]]+\{x_1,x_2,[[x_3,x_4,x_5]]\}&=[[[x_1,x_2,x_3]_*,x_4,x_5]]+[[x_3,[x_1,x_2,x_4]_*,x_5]]\\
+[[x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_*]]+\{x_4,x_5,[[x_1,x_2,x_3]]\}&+\{x_5,x_3,[[x_1,x_2,x_4]]\}+\{x_3,x_4,[[x_1,x_2,x_5]]\}, &(22)
\end{aligned}$$

for all $x_i\in A$, $1\le i\le 5$.
Here $\{x_1,x_2,x_3\}^C=\{x_1,x_2,x_3\}+c.p.(x_1,x_2,x_3)$ and $[x_1,x_2,x_3]_*=\{x_1,x_2,x_3\}^C+[[x_1,x_2,x_3]]$.

Remark 0.0.17. If the trilinear operation $\{\cdot,\cdot,\cdot\}$ in the above definition is trivial, one gets that $(A,[[\cdot,\cdot,\cdot]])$ is a 3-Lie algebra. On the other hand, if $[[\cdot,\cdot,\cdot]]$ is trivial then $(A,\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ becomes a 3-pre-Lie algebra. Thus, 3-NS-Lie algebras are a generalization of both 3-Lie algebras and 3-pre-Lie algebras (For more details about 3-pre-Lie algebras, see [20]).

Théorème 0.0.18. Let $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ be a 3-Lie algebra, (V,ρ) be a representation and $\mathcal{H}\in\mathfrak{C}^2_{3Lie}(\mathfrak{g};V)$ be a 2-cocycle. Let $T:V\to\mathfrak{g}$ be a $\mathcal{H}$-twisted relative Rota-Baxter operator. Then there is a 3-NS-Lie algebra structure on V given by

$$\{u,v,w\}=\rho(Tu,Tv)w,\quad [[u,v,w]]=\mathcal{H}(Tu,Tv,Tw),\ \forall u,v,w\in V. \tag{23}$$

The last part of this thesis is devoted to the study of ternary Jordan algebras. We introduce a notion of Relative Rota-Baxter operators of a ternary Jordan algebra. An analogue of the Jordan Yang-Baxter equation (JYBE) in a ternary Jordan algebra and some bilinear forms on ternary Jordan algebras satisfying certain conditions are given as follows.

Let $r=\sum_i x_i\otimes y_i\in\mathcal{J}\otimes\mathcal{J}$ and $(\mathcal{J},[[\cdot,\cdot,\cdot]])$ be a ternary Jordan algebra. Set

$$\begin{aligned}
r_{12}&=\sum_i x_i\otimes y_i\otimes 1\otimes 1\in\mathcal{J}^{\otimes 4}, & r_{13}&=\sum_i x_i\otimes 1\otimes y_i\otimes 1\in\mathcal{J}^{\otimes 4}, & r_{14}&=\sum_i x_i\otimes 1\otimes 1\otimes y_i\in\mathcal{J}^{\otimes 4},\\
r_{23}&=\sum_i 1\otimes x_i\otimes y_i\otimes 1\in\mathcal{J}^{\otimes 4}, & r_{24}&=\sum_i 1\otimes x_i\otimes 1\otimes y_i\in\mathcal{J}^{\otimes 4}, & r_{34}&=\sum_i 1\otimes 1\otimes x_i\otimes y_i\in\mathcal{J}^{\otimes 4},
\end{aligned}$$

where 1 is a unit element if $(\mathcal{J},[[\cdot,\cdot,\cdot]])$ is unital or a symbol playing a similar role of the unit for the nonunital cases. The operation between three r_{ij} is in an obvious way. For example

$$\begin{aligned}
[[r_{12},r_{13},r_{14}]]&=\sum_{i,j,k}[[x_i,x_j,x_k]]\otimes y_i\otimes y_j\otimes y_k,\\
[[r_{12},r_{23},r_{24}]]&=\sum_{i,j,k}x_i\otimes[[y_i,x_j,x_k]]\otimes y_j\otimes y_k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[[r_{13},r_{23},r_{34}]] &= \sum_{i,j,k} x_i \otimes x_j \otimes [[y_i,y_j,x_k]] \otimes y_k, \\
[[r_{14},r_{24},r_{34}]] &= \sum_{i,j,k} x_i \otimes x_j \otimes x_k \otimes [[y_i,y_j,y_k]]. \qquad (24)
\end{aligned}$$

Note that Eq.(24) is independent of the existence of the unit.

In addition, we define an exchanging operator $\sigma_{12} : \mathcal{J} \otimes \mathcal{J} \to \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$ by

$$\sigma_{12}(x \otimes y) = y \otimes x,\ \forall x,y \in \mathcal{J}. \qquad (25)$$

A tensor $r \in \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$ is called symmetric (skew-symmetric respectively) if $r = \sigma_{12}(r)$ ($r = -\sigma_{12}(r)$ respectively).

Definition 0.0.19. Let $\mathcal{J}$ be a ternary Jordan algebra and $r \in \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$. The equation

$$[[r_{12},r_{13},r_{14}]] - [[r_{12},r_{23},r_{24}]] + [[r_{13},r_{23},r_{34}]] - [[r_{14},r_{24},r_{34}]] = 0 \qquad (26)$$

is called the standard form of the ternary Jordan Yang-Baxter equation (JYBE).

Let $\mathcal{J}$ be a vector space, any $r \in \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$ can be identified as a linear map from the dual space $\mathcal{J}^*$ to $\mathcal{J}$ in the following way :

$$\begin{aligned}
\langle \xi \otimes \eta, r\rangle &= \langle \xi \otimes \eta, \sum_i x_i \otimes y_i\rangle = \sum_i \langle \xi, x_i\rangle\langle \eta, y_i\rangle \\
&= \langle \xi, r(\eta)\rangle,\ \forall \xi,\eta \in \mathcal{J}^*, \qquad (27)
\end{aligned}$$

where $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{J}^* \times \mathcal{J} \to \mathbb{K}$ is the ordinary canonical pairing between the vector space $\mathcal{J}$ and the dual space $\mathcal{J}^*$, which allows us to identify $\mathcal{J}$ with $\mathcal{J}^*$ by the pairing

$$\xi(x) = \langle \xi, x\rangle = \langle x, \xi\rangle,\ \forall \xi \in \mathcal{J}^*, x \in \mathcal{J}.$$

The tensor $r \in \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$ is called non-degenerate if the above induced linear map given by Eq. (27) is invertible. Moreover, any invertible linear map $T : \mathcal{J}^* \to \mathcal{J}$ induces a nondegenerate bilinear form B on $\mathcal{J}$ by

$$B(x,y) = \langle T^{-1}(x), y\rangle,\ \forall x,y \in \mathcal{J}. \qquad (28)$$

Furthermore, T is called symmetric (resp. skew-symmetric) if the induced bilinear form B is symmetric (resp. skew-symmetric). Since T can be also regarded as an element in $\mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$ by Eq.(27), both the symmetries or skew-symmetries of T coincide obviously.

Now, Eq. (26) gives the tensor form of ternary (JYBE), what we will do next is to replace the tensor form by a linear operator satisfying some conditions.

Théorème 0.0.20. Let $(\mathcal{J}, [[\cdot,\cdot,\cdot]])$ be a coherent ternary Jordan algebra and $r \in \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$ be skew-symmetric. Then r is a solution of the ternary (JYBE) if and only if r satisfies

$$[[r(\xi),r(\eta),r(\gamma)]] = r\Big(ad^*_{r(\xi),r(\eta)}(\gamma) + ad^*_{r(\eta),r(\gamma)}(\xi) + ad^*_{r(\gamma),r(\xi)}(\eta)\Big),\ \forall \xi,\eta,\gamma \in \mathcal{J}^*. \qquad (29)$$

Now, we introduce the notion of a relative Rota-Baxter operator on a ternary Jordan algebra.

Definition 0.0.21. Let $(\mathcal{J}, [[\cdot,\cdot,\cdot]])$ be a ternary Jordan algebra and (V,ρ) a representation. A linear operator $T : V \to \mathcal{J}$ is called a relative Rota-Baxter operator associated to (V,ρ) if it satisfies

$$[[Tu,Tv,Tw]] = T\Big(\rho(Tu,Tv)w + \rho(Tv,Tw)u + \rho(Tu,Tw)v\Big), \quad \forall u,v,w \in V. \qquad (30)$$

We further give the following interpretation of the invertible skew-symmetric solutions of the ternary (JYBE).

Théorème 0.0.22. Let $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ be a coherent ternary Jordan algebra. Let (V,ρ) be a representation of $\mathcal{J}$ and (V^*,ρ^*) its dual representation. Then T is a relative Rota-Baxter operator of $\mathcal{J}$ associated to (V,ρ) if and only if

$$r = T - \sigma_{12}(T)$$

is a skew-symmetric solution of the ternary (JYBE) in the coherent semi-direct product ternary Jordan algebra $\mathcal{J} \ltimes_{\rho^*} V^*$.

List of Publications and Preprints :

1. **T. Chtioui, A. Hajjaji, S. Mabrouk, A. Makhlouf**, *Cohomology and deformations of twisted relative Rota-Baxter operators on* 3*-Lie algebras*. Filomat, 37(21) (2023), 6977-6994.
2. **T. Chtioui, A. Hajjaji, S. Mabrouk and A. Makhlouf**, *Cohomologies and deformations of relative Rota-Baxter operators on Lie triple systems.* Journal of Mathematical Physics, 64(8) (2023), 081701.
3. **T. Chtioui, A. Hajjaji and S. Mabrouk**, *Relative Rota-Baxter operators of ternary Jordan algebras and ternary Jordan Yang–Baxter equations*, Asian-European Journal of Mathematics, 16(02) (2023), 2350026.
4. **A. Hajjaji**, *Maurer-Cartan characterizations and cohomologies of crossed homomorphisms on Lie triple systems*, Communications in Algebra, 52(2), (2023), 825-844. (The results of this paper are not included in the thesis).
5. **K. Benali, T. Chtioui, A. Hajjaji and S. Mabrouk**, *Bialgebras, the Yang-Baxter equation and Manin triples for mock-Lie algebras*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math. 27 (2023), 211-233. (The results of this paper are not included in the thesis).
6. **B. Agrebaoui, M. Haddar, A. Hajjaji, W. Mhiri and A. Makhlouf,** *The q-solenoidal(-Virasoro) algebras*. Preprint (2024). (The results of this paper are not included in the thesis).
7. **T. Chtioui, A. Hajjaji and S. Mabrouk,** *Relative Rota-Baxter operators on a Jordan algebra with a representation and related structures*. To appear in Quasigroups and Related Systems (2024). (The results of this paper are not included in the thesis).

Introduction

L'objectif de cette thèse est d'étudier les opérateurs de Rota-Baxter relatifs dans le cadre des algèbres ternaires de type Lie et de type Jordan, en se concentrant sur trois structures principales : les algèbres 3-Lie, les systèmes triples de Lie, et les algèbres de Jordan ternaires. L'étude porte sur leurs structure, cohomologie, déformations, ainsi que sur leur lien avec les équations de Yang-Baxter.

Algèbres ternaires. Les structures algébriques n-aires, et en particulier les structures algébriques ternaires, sont apparues naturellement dans divers domaines de la physique théorique, des mathématiques et du traitement des données. En effet, les progrès en physique théorique, notamment en mécanique quantique, et la découverte de la mécanique de Nambu [111], ainsi que les travaux d'Okubo sur l'équation de Yang-Baxter, ont donné une impulsion significative au développement des algèbres n-aires [115]. Les opérations n-aires ont d'abord fait leur apparition à travers les matrices cubiques introduites au XIXe siècle par Cayley, puis réétudiées et généralisées par Kapranov, Gelfand, Zelevinsky et Sokolov. Une autre motivation récente pour l'étude des opérations n-aires provient de la théorie des cordes et des M-branes, impliquant naturellement une algèbre à opération ternaire appelée algèbre de Bagger-Lambert [25]. Des centaines d'articles sont consacrés à l'algèbre de Bagger-Lambert. Pour d'autres applications physiques, voir les Références [1, 29, 84, 85] et [122].

Les systèmes triples de Lie sont issus de la recherche sur les espaces symétriques [38] et sont considérés comme la première généralisation conceptuelle des algèbres binaires. Jacobson a été le premier à étudier ce système de manière algébrique et l'a nommé système triple de Lie [76]. Lister a construit une théorie de structure des systèmes triples de Lie dans [98]. La théorie des représentations des systèmes triples de Lie a été donnée dans [74]. Les systèmes triples de Lie sont des structures algébriques très importantes et ont des liens étroits avec de nombreuses autres structures algébriques, telles que les algèbres de Nambu [47], les algèbres de Leibniz, les algèbres de Jordan [32] et les algèbres de Lie [128]. D'une part, un système triple de Lie est une algèbre de Nambu spéciale. D'autre part, il existe une structure d'algèbre de Leibniz sur l'espace des objets fondamentaux. Les systèmes triples de Lie jouent également un rôle important dans l'analyse numérique des équations différentielles [107]. Voir [147] pour l'étude des sous-systèmes des systèmes triples de Lie nilpotents et résolubles.

La notion d'algèbre de Jordan est apparue en 1934 comme la structure algébrique sous-jacente pour certains opérateurs en mécanique quantique [77]. Depuis lors, la théorie des algèbres de Jordan a été développée, non seulement dans des aspects purement algébriques, mais aussi en lien avec d'autres sujets et applications. Une question connexe a été la tentative de généraliser la structure des algèbres de Jordan au cas des algèbres à multiplication n-aire, avec un accent particulier sur le cas ternaire. Principalement, ces généralisations incluent les systèmes triples de Jordan (comme dans [34] et [67]), mais aussi d'autres versions ternaires (par exemple, [35]). Récemment, en tant que généralisation des algèbres de Jordan, Kaygorodov, Pozhidaev et Saraiva ont donné la définition des algèbres de Jordan n-aires en suivant une approche différente dans [82].

Opérateurs de Rota-Baxter et équations de Yang-Baxter. L'équation classique de Yang-Baxter (CYBE) est apparue pour la première fois dans l'étude de la théorie de la diffusion inverse [59, 60]. Elle est également un cas particulier du crochet de Schouten en géométrie différentielle, introduit en 1940 [125]. Elle peut être considérée comme une "limite classique" de l'équation quantique de Yang-Baxter [30]. Elle joue un rôle crucial dans de nombreux domaines tels que la géométrie symplectique, les systèmes intégrables, les groupes quantiques, la théorie quantique des champs, etc. (voir [43] et les références qui y sont citées). Le système de Yang-Baxter est devenu un sujet important en mathématiques et en physique mathématique depuis les années 1980.

Les opérateurs de Rota-Baxter sur les algèbres de Lie ont été découverts indépendamment comme la forme opérateur de l'équation classique de Yang-Baxter (CYBE), nommée d'après les physiciens. La (CYBE) est issue de l'étude de la théorie de la diffusion inverse dans les années 1980 et a été reconnue comme la "limite semi-classique" de l'équation quantique de Yang-Baxter [28, 143]. L'étude de la (CYBE) est également liée aux systèmes intégrables classiques et aux groupes quantiques [43].

Une approche importante dans l'étude de la (CYBE) a été l'interprétation de sa forme tensorielle originale sous diverses formes opératoires qui, avec la méthode bien connue de Belavin et Drinfeld [31], s'est avérée efficace pour fournir des solutions de la (CYBE). Semonov-Tian-Shansky [126] a montré pour la première fois que, s'il existe une forme bilinéaire symétrique invariante non dégénérée sur une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors une solution antisymétrique r de la CYBE peut, de manière équivalente, être exprimée comme un opérateur linéaire $R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ satisfaisant l'identité :

$$[R(x), R(y)]_{\mathfrak{g}} = R\big([R(x), y]_{\mathfrak{g}} + [x, R(y)]_{\mathfrak{g}}\big), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g},$$

qui est ensuite considérée comme une forme opératoire de la (CYBE). Cette approche a été élargie de manière plus générale par Kupershmidt [91] en généralisant la notion d'opérateurs de Rota-Baxter aux $\mathcal{O}$-opérateurs, plus tard également appelés opérateurs de Rota-Baxter relatifs et opérateurs de Rota-Baxter généralisés [117, 138].

Afin d'étudier les solutions de l'équation classique de Yang-Baxter des algèbres 3-Lie, la notion d'un opérateur de Rota-Baxter relatif (également appelé $\mathcal{O}$-opérateur) sur une algèbre 3-Lie par rapport à une représentation a été introduite dans [20]. Un opérateur de Rota-Baxter relatif sur une algèbre 3-Lie par rapport à la représentation adjointe est exactement l'opérateur de Rota-Baxter sur une algèbre 3-Lie introduit dans [19]. Veuillez consulter [24] ainsi que le livre [70] pour plus de détails et d'applications sur les opérateurs de Rota-Baxter.

Cohomologie et déformations. L'étude des déformations d'une structure algébrique a commencé avec les travaux de Gerstenhaber [65] pour les algèbres associatives. Nijenhuis et Richardson ont étendu cette étude aux algèbres de Lie [112]. Les déformations des algèbres 3-Lie mentionnées précédemment ont été étudiées dans [62], et celles des systèmes triples de Lie ont été développées en 2004 par Kubo et Taniguchi [90]. Récemment, les déformations de certains opérateurs, des morphismes et des opérateurs de Rota-Baxter ($\mathcal{O}$-opérateurs) ont été profondément étudiées [10, 48, 61, 103, 132, 145].

La cohomologie est un outil utile pour associer des invariants à une structure mathématique. En particulier, la cohomologie contrôle les problèmes de déformations et d'extensions des structures algébriques correspondantes. La cohomologie de diverses structures algébriques, telles que les algèbres associatives, les algèbres de Lie, les algèbres de Leibniz, les algèbres pre-Lie, les algèbres n-Lie, sont bien connues. Récemment, la cohomologies des opérateurs de Rota-Baxter ($\mathcal{O}$-opérateurs) sur une algèbres de Lie et une algèbre associative a été développée dans [48, 132] respectivement.

Organisation de la thèse. Dans ce travail de thèse qui est divisé en cinq chapitres, on distingue deux grandes classes d'algèbres ternaires, les algèbres ternaires de type Lie (algèbres 3-Lie et systèmes triples de Lie, ...) et les algèbres ternaires de type Jordan.

Dans ce premier chapitre, on présente des généralités sur les algèbres de Lie et les algèbres Lie-admissibles illustrées par des exemples. On débute par une introduction aux algèbres de Lie, en abordant leurs principales propriétés telles que les sous-algèbres, les idéaux, les morphismes, les dérivations, les représentations et le produit semi-direct. La cohomologie de Chevalley-Eilenberg ainsi que la théorie des déformations y sont également traitées. Enfin, on aborde la notion d'opérateurs de Rota-Baxter et leur rôle important dans la dendrification des algèbres de Lie en d'autres structures algébriques.

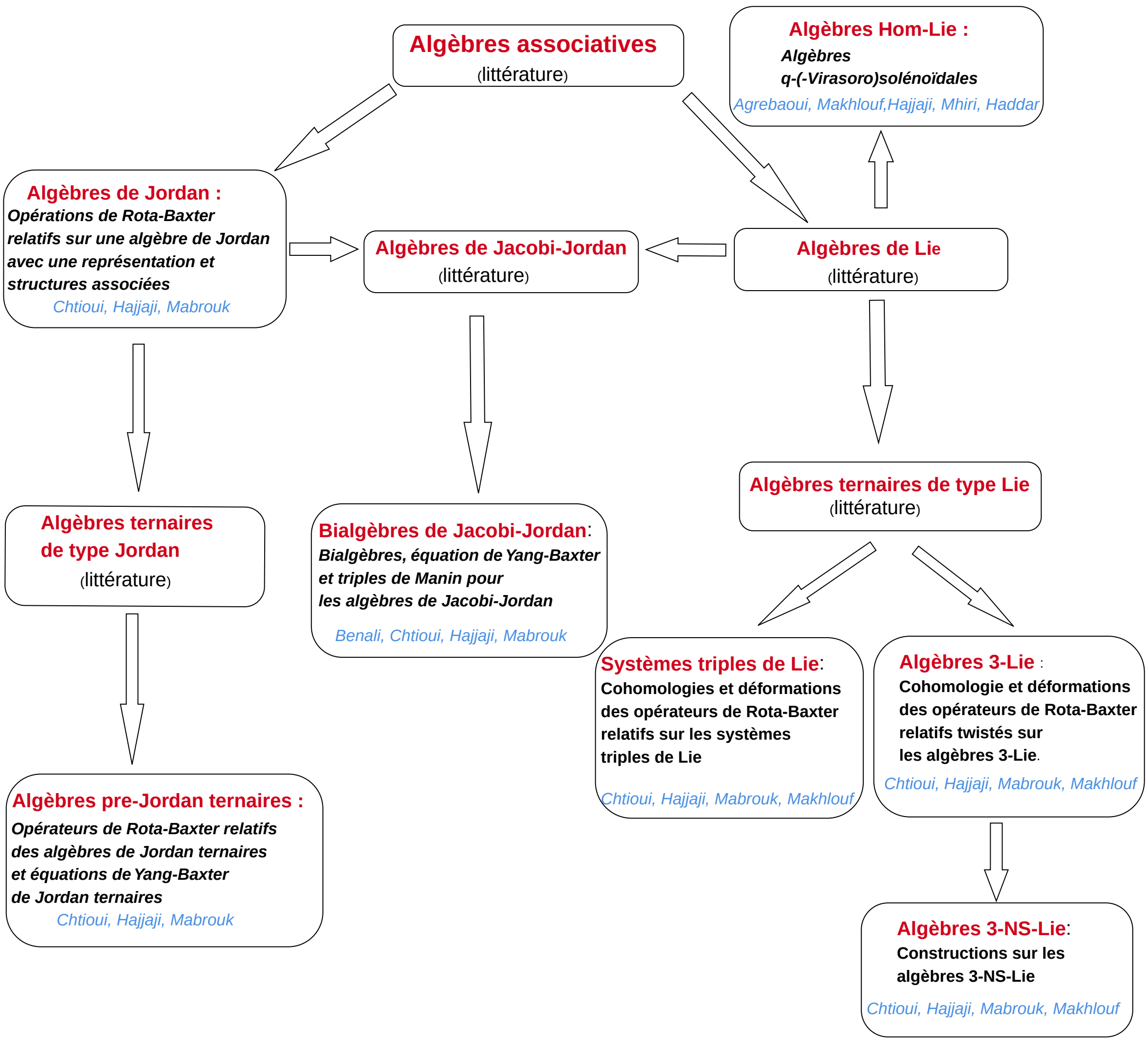
Le deuxième chapitre est dédié à l'introduction des algèbres ternaires de type Lie, qui sont une généralisation des algèbres de Lie ordinaires au cadre ternaire. Il se concentre principalement sur deux types d'algèbres ternaires de type Lie : les algèbres 3-Lie et les systèmes triples de Lie. On y présente des notions générales, accompagnées de quelques exemples fondamentaux, ainsi que la cohomologie de Takhtajan pour les algèbres 3-Lie, la cohomologie de Yamaguti pour les systèmes triples de Lie, et la théorie des déformations. Ensuite, on rappelle la définition des L_∞-algèbres, en particulier celle des 3-algèbres de Lie, qui sera utile dans le quatrième chapitre pour caractériser, à l'aide des éléments de Maurer-Cartan, les opérateurs de Rota-Baxter relatifs aux systèmes triples de Lie. Enfin, on aborde la construction de Voronov à travers la théorie des crochets dérivés supérieurs, qui est un outil précieux pour construire des L_∞-algèbres.

Le troisième chapitre a pour objectif d'introduire une algèbre de contrôle pour les systèmes triples de Lie et de l'appliquer à la théorie de la cohomologie existante de Yamaguti. Il est observé qu'un système triple de Lie peut être considéré comme une algèbre de Nambu ternaire ou une algèbre 3-Leibniz, tandis que l'algèbre de contrôle des algèbres de Nambu a déjà été établie dans [118]. Cela nous a motivé à résoudre ce problème en identifiant une sous-algèbre de l'algèbre de Lie graduée décrite dans [118]. On valide cette approche en démontrant que l'opérateur cobord de la cohomologie d'un système triple de Lie avec coefficients en lui-même peut être décrit à travers cette structure d'algèbre de contrôle. Par ailleurs, on introduit la notion d'opérateur de Rota-Baxter relatif sur les systèmes triples de Lie et on construit une 3-algèbre de Lie, qui constitue un cas particulier des L_∞-algèbres, dans lequel les éléments de Maurer-Cartan sont des opérateurs de Rota-Baxter relatifs. Cette construction nous permet de définir la cohomologie de Yamaguti pour un opérateur de Rota-Baxter relatif. Ensuite, on étudie les déformations des opérateurs de Rota-Baxter relatifs d'un point de vue cohomologique, en déterminant la classe d'obstruction à une déformation extensible d'ordre n, ainsi que les liens entre la cohomologie des opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les algèbres de Lie et les systèmes triples de Lie associés.

Dans le quatrième chapitre, on introduit la notion d'opérateur de Rota-Baxter relatif twisté sur les algèbres 3-Lie et on construit une L_∞-algèbre, dont les éléments de Maurer-Cartan sont des opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés. Cela nous permet de définir la cohomologie de Chevalley-Eilenberg d'un opérateur de Rota-Baxter relatif. Ensuite, on étudie les déformations des opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés en termes de cohomologie. Le chapitre se conclut par l'introduction de la structure de Nijenhuis dans les algèbres 3-Lie (également appelées algèbres 3-NS-Lie), qui constitue la structure sous-jacente des opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés.

Dans le dernier chapitre, on porte notre interêt sur le concept des algèbres ternaires de Jordan, qui représentent une généralisation des algèbres de Jordan au cadre ternaire. On étudie la représentation des algèbres de Jordan ternaires, ce qui nous permet d'introduire la notion d'algèbres de Jordan ternaires cohérentes. Puis, les opérateurs de Rota-Baxter relatifs des algèbres de Jordan ternaires sont introduits et les solutions de l'équation de Yang-Baxter de Jordan ternaire sont discutées en impliquant des opérateurs de Rota-Baxter relatifs. Par ailleurs, les algèbres pre-Jordan ternaires sont étudiées comme la structure algébrique derrière les opérateurs de Rota-Baxter relatifs. Enfin, les relations entre les algèbres de Jordan ternaires et les algèbres de pre-Jordan ternaires sont établies et illustrées par des exemples.

Panorama des travaux menés pendant la thèse.



Publications et pré-publications :

1. **T. Chtioui, A. Hajjaji, S. Mabrouk, A. Makhlouf**, *Cohomology and deformations of twisted relative Rota-Baxter operators on 3-Lie algebras*. Filomat, 37(21) (2023), 6977-6994.
2. **T. Chtioui, A. Hajjaji, S. Mabrouk and A. Makhlouf**, *Cohomologies and deformations of relative Rota-Baxter operators on Lie triple systems.* Journal of Mathematical Physics, 64(8) (2023), 081701.
3. **T. Chtioui, A. Hajjaji and S. Mabrouk**, *Relative Rota-Baxter operators of ternary Jordan algebras and ternary Jordan Yang–Baxter equations*, Asian-European Journal of Mathematics, 16(02) (2023), 2350026.
4. **A. Hajjaji**, *Maurer-Cartan characterizations and cohomologies of crossed homomorphisms on Lie triple systems*, Communications in Algebra, 52(2), (2023), 825-844. (les résultats relatifs à ce projet ne sont pas présentés dans ce mémoire).

5. **K. Benali, T. Chtioui, A. Hajjaji and S. Mabrouk**, *Bialgebras, the Yang-Baxter equation and Manin triples for mock-Lie algebras*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math. 27 (2023), 211-233. (les résultats relatifs à ce projet ne sont pas présentés dans ce mémoire).
6. **B. Agrebaoui, M. Haddar, A. Hajjaji, W. Mhiri and A. Makhlouf,** *The q-solenoidal(-Virasoro) algebras*. Preprint (2024). (les résultats relatifs à ce projet ne sont pas présentés dans ce mémoire).
7. **T. Chtioui, A. Hajjaji and S. Mabrouk,** *Relative Rota-Baxter operators on a Jordan algebra with a representation and related structures*. To appear in Quasigroups and Related Systems (2024). (les résultats relatifs à ce projet ne sont pas présentés dans ce mémoire).

Chapitre 1

Généralités sur les algèbres non-associatives

Dans ce premier chapitre, on présente les définitions et les résultats principaux concernant les algèbres de Lie ainsi que les structures non-associatives qui leur sont associées. On commence par définir une algèbre de Lie, en illustrant cette définition par des exemples fondamentaux et des constructions classiques (telles que les sous-algèbres, les idéaux, les morphismes, les dérivations, les représentations et le produit semi-direct). On aborde ensuite la classification des algèbres Lie-admissibles ainsi que les concepts essentiels relatifs aux espaces et aux algèbres gradués. Par la suite, on rappelle la cohomologie de Chevalley-Eilenberg et la théorie des déformations formelles des algèbres de Lie, en établissant le lien entre ces deux notions. On termine ce chapitre par un rappel des opérateurs de Rota-Baxter, en exposant certaines de leurs propriétés et leurs applications, notamment dans la dendrification des algèbres de Lie en d'autres structures algébriques.
Dans toute cette thèse, on designe par $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique zéro.

1.1 Algèbres de Lie : Généralités et notions de base

Dans cette première section, on présente des généralités sur les algèbres de Lie ainsi que sur les structures algébriques non associatives qui leur sont associées, en fournissant des exemples fondamentaux et une description des algèbres Lie-admissibles. On aborde ensuite les algèbres graduées, qui seront essentielles tout au long de cette thèse. Pour des informations plus détaillées, on se réfère aux ouvrages classiques sur la théorie des algèbres de Lie et les structures associées [73, 79].

1.1.1 Définitions et quelques exemples

Définition 1.1.1. Une algèbre non-associative est un couple (A, μ) constitué d'un espace vectoriel A et d'une application bilinéaire $\mu : A \otimes A \to A$.

On dit que (A, μ) est une algèbre associative si :

$$\mu(\mu(x,y),z) = \mu(x,\mu(y,z)), \quad \forall x,y,z \in A. \tag{1.1}$$

Définition 1.1.2. Une algèbre de Lie est un couple $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ constitué d'un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ et d'une application bilinéaire antisymétrique $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} : \wedge^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ satisfaisant :

$$[x,[y,z]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}} + [y,[z,x]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}} + [z,[x,y]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}} = 0, \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g} \text{ (identité de Jacobi).} \tag{1.2}$$

Remarque 1.1.3. On dit que $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ est une algèbre de Lie de dimension n si $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel de dimension finie n, sinon on dira que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est de dimension infinie.

Exemples 1.1.4.
1. Toute algèbre associative (A,μ) induit une algèbre de Lie avec le commutateur :
$$[x,y]=\mu(x,y)-\mu(y,x),\ \forall x,y\in A.$$
2. Soit $\mathfrak{g}$ un espace vectoriel. Si $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}=0$, alors le couple $(\mathfrak{g},0)$ est une algèbre de Lie appelée algèbre de Lie abélienne.
3. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ orienté par sa structure euclidienne canonique, et muni du crochet $[x,y]=x\wedge y$ pour $x,y\in\mathbb{R}^3$, où $x\wedge y$ est le produit vectoriel, est une algèbre de Lie.
4. Soit $\mathfrak{g}$ une espace vectoriel de dimension 2. Alors, pour toute application bilinéaire antisymétrique $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$, le couple $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ est une algèbre de Lie. En effet la condition de Jacobi est toujours, dans ce cas, satisfaite.
5. Soit $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices d'ordre 2 de trace nulle. Le produit
$$[A,B]=AB-BA$$
est bien défini sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ car $tr(AB-BA)=0$ dès que $A,B\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Comme cette multiplication vérifie l'identité de Jacobi, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie complexe de dimension 3.
6. On considère l'algèbre de Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ de dimension 3 dont les crochets non nuls relativement à la base $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ sont donnés comme suit :
$$[e_1,e_2]_{\mathfrak{g}}=e_2,\quad [e_3,e_4]_{\mathfrak{g}}=e_4.$$

Définition 1.1.5. Une algèbre de Leibniz (gauche) est un couple $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ constitué d'un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ et d'une application bilinéaire $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}:\otimes^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ satisfaisant :
$$[[x,y]_{\mathfrak{g}},z]_{\mathfrak{g}}=[x,[y,z]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}+[[x,z]_{\mathfrak{g}},y]_{\mathfrak{g}}=0,\quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}\text{ (identité de Leibniz).}\tag{1.3}$$

Remarque 1.1.6. Une algèbre de Lie est une algèbre de Leibniz.

Définition 1.1.7. Une algèbre de Jordan est un couple $(\mathcal{J},\circ)$ constitué d'un espace vectoriel $\mathcal{J}$ et d'une application bilinèaire $\circ:\otimes^2\mathcal{J}\to\mathcal{J}$ satisfaisant :
$$x\circ y=y\circ x,\tag{1.4}$$
$$(x^2\circ y)\circ x=x^2\circ(y\circ x),\quad \forall x,y\in\mathcal{J}.\tag{1.5}$$

Remarque 1.1.8. Les algèbres associatives, les algèbres de Jordan et les algèbres de Lie sont étroitement liées. En effet, toute algèbre associative (A,μ) munie du commutateur $[x,y]=\mu(x,y)-\mu(y,x)$ constitue une algèbre de Lie. En outre, si l'on munit A de l'anti-commutateur $x\circ y=\frac{1}{2}(\mu(x,y)+\mu(y,x))$, alors $(A,\circ)$ devient une algèbre de Jordan. D'autre part, selon les travaux de I. Kantor, M. Koecher et J. Tits, il est possible de construire une algèbre de Lie à partir de toute algèbre de Jordan grâce à la construction KKT [80,87,137].

1.1.2 Sous-algèbres de Lie, morphismes et dérivations

Définition 1.1.9.
1. Une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ qui est stable par le crochet $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$, c'est à dire, si pour tout $x,y\in\mathfrak{h}$, on a $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}}\subset\mathfrak{h}$. Bien évidemment, une sous-algèbre de Lie est une algèbre de Lie.

2. Un idéal de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tel que :
$$\forall x \in \mathfrak{g},\ \forall y \in \mathfrak{h}, \quad [x,y]_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{h}.$$
En particulier, les idéaux sont des sous-algèbres de Lie.

Exemple 1.1.10. Muni du crochet défini par le commutateur $[A,B] = AB - BA$, l'espace $M_n(\mathbb{C})$ des matrices est une algèbre de Lie, notée $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. En effet, le crochet est bien bilinéaire, antisymétrique et vérifie l'identité de Jacobi. Alors l'espace $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid trA = 0\}$ est un idéal de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. En effet, la trace d'un commutateur est nulle.

Définition 1.1.11. Soient $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ et $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}})$ deux algèbres de Lie. Une applicatin linèaire $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est dite morphisme d'algèbre de Lie si elle vérifie :
$$f([x,y]_{\mathfrak{g}}) = [f(x),f(y)]_{\mathfrak{h}}, \quad \forall x,y \in \mathfrak{g}. \tag{1.6}$$
Si de plus f est bijective, on dira que c'est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Dans la suite, on donne un exemple de morphisme.

Exemple 1.1.12. Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie. On note $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathfrak{g}$ (noté $End(\mathfrak{g})$) qu'on munit d'une structure d'algèbre de Lie par le crochet défini par la relation :
$$[f,g]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} = f \circ g - g \circ f, \quad \forall f,g \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}).$$
L'application adjointe $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $x \mapsto ad_x$ qui est définie par :
$$ad_x(y) = [x,y]_{\mathfrak{g}}, \quad \forall y \in \mathfrak{g}. \tag{1.7}$$
est un morphisme d'algèbres de Lie. En effet, elle est linéaire. Il reste à montrer qu'elle préserve les crochets, c'est-à-dire que,
$$ad_{[x,y]_{\mathfrak{g}}} = [ad_x,ad_y]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}, \quad \forall x,y \in \mathfrak{g}.$$
Pour tout $x,y,z \in \mathfrak{g}$, l'identité de Jacobi et le caractère d'antisymétrie donnent
$$\begin{aligned}
ad_{[x,y]_{\mathfrak{g}}}(z) &= [[x,y]_{\mathfrak{g}},z]_{\mathfrak{g}}\\
&= -[[y,z]_{\mathfrak{g}},x]_{\mathfrak{g}} - [[z,x]_{\mathfrak{g}},y]_{\mathfrak{g}}\\
&= [x,[y,z]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}} - [y,[x,z]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}\\
&= ad_x(ad_y(z)) - ad_y(ad_x(z))\\
&= \Big(ad_x \circ ad_y - ad_y \circ ad_x\Big)(z)\\
&= [ad_x,ad_y]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}(z).
\end{aligned}$$

Remarque 1.1.13. L'identité de Jacobi (1.3) peut être écrite à l'aide de l'application adjointe comme suit :
$$ad_x[y,z]_{\mathfrak{g}} = [ad_x y,z]_{\mathfrak{g}} + [y,ad_x z]_{\mathfrak{g}}.$$

Définition 1.1.14. Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie. Une dérivation de $\mathfrak{g}$ est un élément $D \in End(\mathfrak{g})$ vérifiant :
$$D([x,y]_{\mathfrak{g}}) = [D(x),y]_{\mathfrak{g}} + [x,D(y)]_{\mathfrak{g}}, \quad \forall x,y \in \mathfrak{g}.$$

Remarque 1.1.15. L'ensemble $Der(\mathfrak{g})$ des dérivations de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $End(\mathfrak{g})$. La composée $D \circ D'$ de deux dérivations D,D' n'est pas une dérivation en général (autrement dit, $Der(\mathfrak{g})$ n'est pas une sous-algèbre de l'algèbre associative $End(\mathfrak{g})$), mais $[D,D']_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} = D \circ D' - D' \circ D$ est encore une dérivation de $\mathfrak{g}$. Ainsi, $Der(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Exemple 1.1.16. Par la Remarque 1.1.13, l'application adjointe $ad_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $y \mapsto ad_x(y)$ est une dérivation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

1.1.3 Algèbres Lie-admissibles

Les algèbres Lie-admissibles ont été introduites par A. A. Albert en 1948 [8]. Depuis, les physiciens ont tenté d'adopter cette structure en remplacement des algèbres de Lie. Par exemple, l'importance des algèbres Lie-admissibles dans le cadre des particules libres est bien établie, tout comme leur rôle en mécanique quantique classique (voir [109, 110]). Pour davantage de détails sur les algèbres G-associatives, se référer à [68].

Définition 1.1.17. Une algèbre Lie-admissible est une algèbre (non-associative) (A, μ) dont le produit défini par :

$$[x,y] = \mu(x,y) - \mu(y,x), \quad \forall x,y \in A, \tag{1.8}$$

est un produit d'algèbre de Lie. Ceci est équivalent à dire que $[\cdot,\cdot]$ vérifie le caractère d'antisymétrie et l'identité de Jacobi. Les algèbres associatives et de Lie sont Lie-admissibles.

Dans ce qui suit, on explore d'autres algèbres Lie-Admissibles. Tout d'abord, on fixe la notation suivante : Soit a_μ une application 3-linéaire sur A associée à μ définie par :

$$a_\mu(x,y,z) = \mu(x,\mu(y,z)) - \mu(\mu(x,y),z), \quad \forall x,y,z \in A.$$

On appelle a_μ l'associateur de μ. Ensuite, on définit

$$S(x,y,z) := a_\mu(x,y,z) + a_\mu(y,z,x) + a_\mu(z,x,y).$$

Alors

$$S(x,y,z) = [\mu(x,y),z] + [\mu(y,z),x] + [\mu(z,x),y].$$

Proposition 1.1.18. *Une algèbre non-associative (A, μ) est Lie-admissible si et seulement si*

$$S(x,y,z) = S(x,z,y), \quad \forall x,y,z \in A. \tag{1.9}$$

Soit G un sous-groupe du groupe des permutations S_3, une algèbre binaire (A, μ) est appelée G-associative si :

$$\sum_{\sigma \in G} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \mu(x_{\sigma(1)}, \mu(x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})) - \mu(\mu(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}), x_{\sigma(3)}) = 0, \tag{1.10}$$

où $x_i \in A$ et $(-1)^{\epsilon(\sigma)}$ est la signature du permutation σ. La condition (1.10) peut être écrite comme suit :

$$\sum_{\sigma \in G} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_\mu \circ \sigma = 0, \tag{1.11}$$

où $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$. Si μ est la multiplication d'une algèbre Lie-admissible, alors La condition (1.10) est équivalente au fait que le crochet défini par :

$$[x,y] = \mu(x,y) - \mu(y,x) \tag{1.12}$$

satisfait la condition de Jacobi qui est équivalente à

$$\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \mu(x_{\sigma(1)}, \mu(x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})) - \mu(\mu(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}), x_{\sigma(3)}) = 0.$$

Proposition 1.1.19. *Soit G un sous-groupe du groupe des permutations S_3. Alors toute algèbre G-associative est une algèbre Lie-admissible.*

Les sous-groupes de S_3 sont $G_1 = \{Id\}$, $G_2 = \{Id,\tau_{12}\}$, $G_3 = \{Id,\tau_{23}\}$, $G_4 = \{Id,\tau_{13}\}$, $G_5 = \{A_3\}$ et $G_6 = \{S_3\}$, où A_3 est le groupe alternatif et τ_{ij} est la transposition entre i et j. Alors, on obtient les types suivants d'algèbres Lie-admissibles :

1. Les algèbres G_1-associatives sont les algèbres associatives.
2. Les algèbres G_2-associatives sont les algèbres symétriques gauche, c'est à dire vérifiant la condition suivante :
$$\mu(\mu(x,y),z) - \mu(x,\mu(y,z)) = \mu(\mu(y,x),z) - \mu(y,\mu(x,z)), \quad \forall x,y,z \in A. \tag{1.13}$$
Les algèbres symétriques gauche sont des exemples intéressants, pour diverses raisons, d'algèbres Lie-admissibles. Elles sont étudiées par exemple, dans la recherche des connexions affines invariantes à gauche sur un groupe de Lie sans courbure ni torsion. En effet, si un groupe de Lie H admet une telle connexion, son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ provient d'une algèbre symétrique gauche.
3. Les algèbres G_3-associatives sont les algèbres symétriques droite, encore appelées algèbres pre-Lie, c'est à dire vérifiant la condition suivante :
$$\mu(\mu(x,y),z) - \mu(x,\mu(y,z)) = \mu(\mu(x,z),y) - \mu(x,\mu(z,y)), \quad \forall x,y,z \in A. \tag{1.14}$$
Ces types d'algèbres jouent un rôle important dans l'étude des algèbres de Gerstenhaber, de la cohomologie de Hochschild ou même dans l'étude des algèbres de Rota-Baxter.
4. Les algèbres G_4-associatives sont les algèbres vérifiant la condition suivante :
$$\mu(\mu(x,y),z) - \mu(x,\mu(y,z)) = \mu(\mu(z,y),x) - \mu(z,\mu(y,x)), \quad \forall x,y,z \in A. \tag{1.15}$$
5. Les algèbres G_5-associatives sont les algèbres vérifiant la condition suivante :
$$\begin{aligned}&\mu(\mu(x,y),z) + \mu(\mu(y,z),x) + \mu(\mu(z,x),y)\\ &= \mu(x,\mu(y,z)) + \mu(y,\mu(z,x)) + \mu(z,\mu(x,y)), \quad \forall x,y,z \in A.\end{aligned} \tag{1.16}$$
Si la multiplication μ est antisymétrique, alors la condition précédente est exactement l'identité de Jacobi.
6. Les algèbres G_6-associatives sont les algèbres Lie-admissibles.

Exemple 1.1.20. On considère l'algèbre symétrique gauche $(A,\circ)$ de dimension 3 dont les crochets non nuls relativement à la base $\{e_1,e_2,e_3\}$ sont donnés comme suit :
$$e_3 \circ e_2 = e_2, \quad e_3 \circ e_3 = -e_3.$$
Alors l'algèbre de Lie induite par le crochet commutateur est définie relativement à la base (e_1,e_2,e_3) par :
$$[e_2,e_3] = -e_2.$$

1.1.4 Espaces et algèbres gradués

Une graduation sur un espace permet d'exposer de manière concise des propriétés valides en chaque degré. Les calculs sont aussi facilités en travaillant avec des éléments homogènes sur chaque composante. On considère la catégorie des espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués : les objets sont les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués $V = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V^i$, somme directe de sous-espaces V^i. Un élément x de V appartenant à l'un des V^i est dit homogène, et l'on notera par $i := |x| \in \mathbb{Z}$ son degré.

Pour deux espaces vectoriels gradués V et W, une application linéaire $\varphi : V \to W$ est dite homogène de degré j si pour tout entier i, on a $\varphi(V^i) \subset W^{i+j}$. Dans le cas gradué, on écrira $Hom(V,W)^j$ pour l'espace vectoriel de toute les applications linéaires homogènes de degré j, et $Hom(V,W)$ pour la somme directe de tous les $Hom(V,W)^j$. Ainsi, $Hom(V,W)$ est un espace vectoriel gradué.

De la même manière, le produit tensoriel $V \bigotimes W$ est gradué en posant : $(V \bigotimes W)^i = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V^k \bigotimes W^{i-k}$, voir [102]. Le produit tensoriel de deux morphismes $\varphi : V \to W$ et $\psi : V' \to W'$ est défini à l'aide de la règle des signes de Koszul : pour tous éléments homogènes $x \in V$ et $y \in V'$

$$(\varphi \otimes \psi)(x \otimes y) := (-1)^{|\psi||x|}\varphi(x) \otimes \psi(y),$$

avec ψ de degré $|\psi|$. On définit encore la transposition graduée. On définit encore la transposition graduée $\tau : V \otimes W \to W \otimes V$ par :

$$\tau(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|}(y \otimes x).$$

Définition 1.1.21. Une algèbre (associative) graduée (A,μ) est un espace vectoriel gradué A muni d'un morphisme d'espaces gradués $\mu : A \otimes A \to A$ de degré zéro, i.e. vérifiant $A^i A^j \subset A^{i+j}$.

Définition 1.1.22. Une algèbre $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ est une algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée si :

— $\mathfrak{g}$ est une algèbre graduée, c'est à dire, est une somme directe des sous-espaces vectoriels, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ telle que $[\mathfrak{g}_p,\mathfrak{g}_q] \subset \mathfrak{g}_{p+q}$,

— le crochet $[\cdot,\cdot]$ dans $\mathfrak{g}$ est antisymétrique graduée, c'est à dire,

$$[x,y] = -(-)^{pq}[y,x], \quad \forall x \in \mathfrak{g}_p,\ y \in \mathfrak{g}_q,$$

— l'identité de Jacobi graduée est vérifiée :

$$[[x,y],z] = [x,[y,z]] - (-1)^{pq}[y,[x,z]], \quad \forall x \in \mathfrak{g}_p,\ y \in \mathfrak{g}_q,\ z \in \mathfrak{g}_r.$$

1.2 Algèbres de Lie : Cohomologie et déformations

Historiquement, la cohomologie de Chevalley-Eilenberg a été introduite dès 1929 dans les travaux de Cartan, qui portaient sur la topologie des groupes de Lie et des espaces homogènes, s'inspirant des méthodes de Rham [39]. Chevalley et Eilenberg ont ensuite généralisé ce concept à la cohomologie à valeurs dans un module quelconque [40]. En 1964, Gerstenhaber a introduit les déformations formelles d'anneaux et d'algèbres [65], fournissant un outil pour déformer les structures algébriques, basé sur les séries formelles. Les déformations d'algèbres de Lie, quant à elles, trouvent leurs origines dans les travaux de Nijenhuis et Richardson [113, 114], qui démontrent que les résultats obtenus par Gerstenhaber pour les algèbres associatives ont des analogues pour les algèbres de Lie, en utilisant la cohomologie de Chevalley-Eilenberg. L'intérêt pour les déformations a augmenté avec le développement des groupes quantiques, liés à la mécanique quantique [26]. Des exemples de groupes quantiques peuvent être obtenus par déformation de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie.

1.2.1 Représentations et Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

Cette partie offre un rappel concis de la notion de représentation, ainsi que la théorie de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg pour les algèbres de Lie (voir [40, 73]).

Définition 1.2.1. Une représentation d'une algèbre de Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ est un couple (V,ρ), où V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et une application linéaire $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ telle que :

$$\rho([x,y]_{\mathfrak{g}})=\rho(x)\rho(y)-\rho(y)\rho(x),\quad \forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

Autrement dit, ρ est un morphisme d'algèbres de Lie. Dans ce cas, on dit aussi que V est un $\mathfrak{g}$-module.

Remarques 1.2.2.
1. Si $Ker(\rho)=0$, on dit que ρ est fidèle.
2. Si $dim(E)<\infty$, on dit que ρ est de dimension finie.
3. La représentation triviale de $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ dans un espace vectoriel V est la représentation ρ définie par $\rho(x)=0$, $\forall x\in\mathfrak{g}$.
4. La représentation adjointe d'une algèbre de Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ est la représentation $(\mathfrak{g},ad)$ définie par : $ad:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})\,;\,x\mapsto ad_x$ tel que $\forall x\in\mathfrak{g}$, $ad_x: y\in\mathfrak{g}\mapsto[x,y]_{\mathfrak{g}}\in\mathfrak{g}$.

Proposition 1.2.3. *Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie. Alors (V,ρ) est une représentation de $\mathfrak{g}$ si et seulement si $(\mathfrak{g}\oplus V,[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}\oplus V})$ est une algèbre de Lie, où le crochet binaire $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}\oplus V}:\wedge^2(\mathfrak{g}\oplus V)\to\mathfrak{g}\oplus V$ est donné par :*

$$[x+u,y+v]_{\mathfrak{g}\oplus V}=[x,y]_{\mathfrak{g}}+\rho(x)v-\rho(y)u,\quad \forall x,y\in\mathfrak{g},\ u,v\in V. \tag{1.17}$$

Définition 1.2.4. Un morphisme entre deux représentations (V,ρ) et (V',ρ') d'une même algèbre de Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ est la donnée d'une application linéaire $\varphi:V\to V'$ qui vérifie :

$$\varphi\circ\rho(x)=\rho'(x)\circ\varphi,\quad \forall x\in\mathfrak{g}.$$

Lorsque φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on dit que les deux représentations sont isomorphes.

Soient $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie et (V,ρ) une représentation. La cohomologie de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans V est donnée par la cohomologie du complexe de cochaînes $(\{C^n_{Lie}(\mathfrak{g},V)\}_{n\geq 0},\delta^n)$, où $C^n_{Lie}(\mathfrak{g},V)=\mathrm{Hom}(\wedge^n\mathfrak{g},V)$, pour $n\geq 0$ et l'opérateur différentiel $\delta^n:C^n_{Lie}(\mathfrak{g},V)\to C^{n+1}_{Lie}(\mathfrak{g},V)$ défini par :

$$\begin{aligned}(\delta^n_{CE}f)(x_1,\ldots,x_{n+1})=&\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\,\rho(x_i)f(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{n+1})\\&+\sum_{1\leq i<j\leq n+1}(-1)^{i+j}f([x_i,x_j]_{\mathfrak{g}},x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{n+1}),\end{aligned} \tag{1.18}$$

où le chapeau $(\widehat{\ })$ indique que l'on omet le terme.

Proposition 1.2.5. *Cet opérateur différentiel vérifie $\delta^{n+1}_{CE}\circ\delta^n_{CE}=0$, pour $n\geq 0$.*

Ainsi, grâce à la proposition précédente, on obtient le n-ième groupe de cohomologie de Chevalley-Eilenberg à valeurs dans V :

$$\mathcal{H}^n_{Lie}(\mathfrak{g},V)=\mathcal{Z}^n_{Lie}(\mathfrak{g},V)/\mathcal{B}^n_{Lie}(\mathfrak{g},V),\ n\geq 0,$$

avec $\mathcal{Z}^n_{Lie}(\mathfrak{g},V):=\{f\in C^n_{Lie}(\mathfrak{g},V),\ \delta^n_{CE}(f)=0\}=Ker(\delta^n_{CE})$ est l'espace des n-cocycles et $\mathcal{B}^n_{Lie}(\mathfrak{g},V):=\{f\in C^n_{Lie}(\mathfrak{g},V),\ \exists g\in C^{n-1}_{Lie}(\mathfrak{g},V),\ \delta^{n-1}_{CE}(g)=f\}=Im(\delta^{n-1}_{CE})$ est l'espace des n-cobords.

En particulier :

— $\phi \in C^1_{Lie}(\mathfrak{g}, V)$ est un 1-cocycle par rapport à la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ à coefficients dans V, cela signifie que $\phi : \mathfrak{g} \to V$ est une application linéaire satisfaisant :

$$\rho(x)\phi(y) - \rho(y)\phi(x) - \phi([x,y]_{\mathfrak{g}}) = 0, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}. \tag{1.19}$$

— $\phi \in C^2_{Lie}(\mathfrak{g}, V)$ est un 2-cocycle par rapport à la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ à coefficients dans V, cela signifie que $\phi : \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \to V$ est une application bilinéaire satisfaisant :

$$\rho(x)\phi(y,z) + \rho(y)\phi(z,x) + \rho(z)\phi(x,y) + \phi(x,[y,z]_{\mathfrak{g}}) + \phi(y,[z,x]_{\mathfrak{g}}) + \phi(z,[x,y]_{\mathfrak{g}}) = 0, \tag{1.20}$$

pour tout $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Remarque 1.2.6. Si $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ est une algèbre de Lie et $(\mathfrak{g}, ad)$ est la repésentation adjointe, alors le crochet $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ est un élément de $C^2_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ étant vue comme un module sur elle-même et dans ce cas la cohomologie obtenue est appelée la cohomolgie adjointe.

Une autre approche pour introduire l'opérateur différentiel repose sur l'utilisation du crochet de Nijenhuis-Richardson [114], ce point de vue permet d'avoir des formules plus condensées et s'avère fécond en pratique. Soient $\phi \in \mathrm{Hom}(\wedge^n \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ et $\psi \in \mathrm{Hom}(\wedge^m \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, on définit $\phi \circ \psi \in \mathrm{Hom}(\wedge^{n+m-1}\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ par :

$$\phi \circ \psi(x_1, \cdots, x_{n+m-1}) = \sum_{Sh(n,m)} \phi(\psi(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(m)}), x_{\sigma(m+1)}, \cdots, x_{\sigma(n+m-1)}),$$

avec

$$Sh(n,m) = \{\sigma \in S_{n+m-1},\, \sigma(1) < \cdots < \sigma(m) \; et \; \sigma(m+1) < \cdots < \sigma(n+m-1)\}.$$

On peut alors définir le crochet de Nijenhuis-Richardson par :

$$[\phi, \psi]_{NR} = \phi \circ \psi - (-1)^{(n-1)(m-1)} \psi \circ \phi. \tag{1.21}$$

Avec ce dernier, $(\mathrm{Hom}(\wedge^n \mathfrak{g}, \mathfrak{g}))_{n \geq 0}$ devient une algèbre de Lie graduée.

Proposition 1.2.7. *Soit* $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ *une algèbre de Lie. Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\delta^n_{CE}\phi = [[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}, \phi]_{NR}.$$

1.2.2 Déformations formelles des algèbres de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathbb{K}[[t]]$ l'anneau des séries formelles en une variable t à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathfrak{g}[[t]]$ l'espace formel en t à coefficients dans $\mathfrak{g}$, ($\mathfrak{g}[[t]]$ est obtenu en étendant le domaine des coefficients de $\mathfrak{g}$ de $\mathbb{K}$ à $\mathbb{K}[[t]]$). Alors $\mathfrak{g}[[t]]$ est un $\mathbb{K}[[t]]$-module. Lorsque $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, on a $\mathfrak{g}[[t]] = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[[t]]$. De plus $\mathfrak{g}$ est un sous-module de $\mathfrak{g}[[t]]$. Étant donné une application $\mathbb{K}$-bilinéaire $f : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, elle admet naturellement une extension à une application $\mathbb{K}[[t]]$-bilinéaire $f : \mathfrak{g}[[t]] \times \mathfrak{g}[[t]] \to \mathfrak{g}[[t]]$, c'est à dire que si $x = \sum_{i \geq 0} a_i t^i$ et $y = \sum_{j \geq 0} b_j t^j$, alors $f(x,y) = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} t^{i+j} f(a_i, b_j)$.

Définition 1.2.8. Soit $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie. Une déformation formelle de $\mathfrak{g}$ est donnée par l'application $\mathbb{K}[[t]]$-bilinéaire $[\cdot,\cdot]_t : \mathfrak{g}[[t]] \times \mathfrak{g}[[t]] \to \mathfrak{g}[[t]]$ de la forme

$$[\cdot,\cdot]_t = \sum_{i \geq 0} t^i [\cdot,\cdot]_i,$$

où chaque $[\cdot,\cdot]_i$ est une application bilinéaire $[\cdot,\cdot]_i : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (étendue pour être $\mathbb{K}[[t]]$-bilinéaire), $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} = [\cdot,\cdot]_0$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$[x,y]_t = -[y,x]_t, \qquad \textit{(antisymétrie)} \tag{1.22}$$
$$\circlearrowleft_{x,y,z} [x,[y,z]_t]_t = 0, \qquad \textit{(identité de Jacobi).} \tag{1.23}$$

La déformation est dite d'ordre k si $[\cdot,\cdot]_t = \sum_{i\geq 0}^{k} t^i [\cdot,\cdot]_i$.

Remarque 1.2.9. L'antisymétrie de $[\cdot,\cdot]_t$ est équivalente à l'antisymétrie de tous les $[\cdot,\cdot]_i$, pour $i \geq 0$.

Équation de déformation. L'équation (1.23) est appelée équation de déformation de l'algèbre de Lie et est équivalente à :

$$\circlearrowleft_{x,y,z} \sum_{i\geq 0, j\geq 0} t^{i+j} [x,[y,z]_i]_j = 0,$$

c'est à dire,

$$\sum_{s\geq 0} t^s \circlearrowleft_{x,y,z} \sum_{i\geq 0} [x,[y,z]_i]_{s-i} = 0,$$

ce qui est équivalent au système infini suivant obtenu en identifiant les coefficients de t

$$\circlearrowleft_{x,y,z} \sum_{i\geq 0} [x,[y,z]_i]_{s-i} = 0, \quad \textit{pour } s = 0,1,2,\cdots \tag{1.24}$$

En particulier, pour $s = 0$, on a $\circlearrowleft_{x,y,z} [x,[y,z]_0]_0 = 0$, qui est l'identité de Jacobi de $\mathfrak{g}$.

Théorème 1.2.10. *Soit $[\cdot,\cdot]_t$ une déformation formelle d'une algèbre de Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$. Alors, l'élément infinitésimal de la déformation $[\cdot,\cdot]_1$ est un 2-cocycle de la cohomologie de déformation.*

Pour $s \geq 2$, l'équation (1.24) est équivalente à :

$$\begin{aligned}\delta^n_{CE}([\cdot,\cdot]_s)(x,y,z) &= -\sum_{n+m=s} \circlearrowleft_{x,y,z} [x,[y,z]_m]_n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n+m=s, n>0, m>0} [[\cdot,\cdot]_n,[\cdot,\cdot]_m]_{NR}(x,y,z), \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g},\end{aligned}$$

où $[\cdot,\cdot]_{NR}$ est défini par l'équation (1.21).

Déformations équivalentes et triviales. Soient $[\cdot,\cdot]_t$ et $[\cdot,\cdot]'_t$ deux déformations formelles d'une algèbre de Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$, où $[\cdot,\cdot]_t = \sum_{i\geq 0} t^i [\cdot,\cdot]_i$ et $[\cdot,\cdot]'_t = \sum_{i\geq 0} t^i [\cdot,\cdot]'_i$ avec $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} = [\cdot,\cdot]_0 = [\cdot,\cdot]'_0$.

Définition 1.2.11. On dit que $[\cdot,\cdot]_t$ et $[\cdot,\cdot]'_t$ sont équivalentes s'il existe un automorphisme formel φ_t de $\mathfrak{g}[[t]]$, s'écrivant $\varphi_t = id + \sum_{i\geq 1} t^i \varphi_i$, avec $\varphi_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ des applications $\mathbb{K}[[t]]$-linéaires, tel que

$$\varphi_t \circ [x,y]'_t = [\varphi_t(x),\varphi_t(y)]_t, \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}.$$

Une déformation $[\cdot,\cdot]_t$ est dite triviale si elle est équivalente à la déformation $[\cdot,\cdot]^0_t = \sum_{i\geq 0} t^i [\cdot,\cdot]^0_i$, avec $[\cdot,\cdot]^0_0 = [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ et $[\cdot,\cdot]^0_i = 0$ pour $i \geq 1$.

Définition 1.2.12. Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie et $[\cdot,\cdot]_1$ un élément de $\mathcal{Z}^2_{Lie}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, le 2-cocycle $[\cdot,\cdot]_1$ est dit intégrable s'il existe une famille $([\cdot,\cdot]_t)_{t\geq 0}$ telle que $[\cdot,\cdot]_t = \sum_{i\geq 0} t^i [\cdot,\cdot]_i$ définit une déformation formelle de $\mathfrak{g}$.

Définition 1.2.13. Une algèbre de Lie est dite rigide si toute déformation est équivalente à la déformation triviale.

Théorème 1.2.14. *Toute déformation non-triviale de $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ est équivalente à une déformation dont l'élément infinitésimal n'est pas un cobord.*

D'où, si $\mathcal{H}^2_{Lie}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = 0$ alors toute déformation est équivalente à la déformation triviale.

Obstructions. Soit $[\cdot,\cdot]_t$ une déformation de $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ d'ordre k, c'est à dire, $[\cdot,\cdot]_t = \sum_{i\geq 0}^{k} t^i[\cdot,\cdot]_i$. L'objectif est d'étendre cette déformation d'ordre k en une déformation d'ordre $k+1$, c'est à dire de trouver $[\cdot,\cdot]_{k+1} : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ tel que $[\cdot,\cdot]'_t = [\cdot,\cdot]_t + t^{k+1}[\cdot,\cdot]_{k+1}$ soit une déformation de $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$.

Définition 1.2.15. Pour $x,y,z\in\mathfrak{g}$, on pose :

$$Ob^3(x,y,z) = \sum_{n+m=k,n,m\geq 0} \circlearrowleft_{x,y,z} [x,[y,z]_m]_n. \tag{1.25}$$

Il est clair que $Ob^3 \in C^3_{Lie}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$. L'application Ob^3 est appelée cochaine d'obstruction à l'extension de la déformation $[\cdot,\cdot]_t$.

En utilisant le crochet de Nijenhuis-Richardson, l'équation (1.25) est équivalente à :

$$Ob^3([\cdot,\cdot]_1,\cdots,[\cdot,\cdot]_k)(x,y,z) = \frac{1}{2}\sum_{n+m=k,n,m\geq 0}[[\cdot,\cdot]_n,[\cdot,\cdot]_m]_{NR}(x,y,z), \quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}.$$

Il est clair que l'application Ob^3 est un 3-cocycle.

Théorème 1.2.16. *Soit $[\cdot,\cdot]_t$ une déformation d'ordre k de $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$. Alors, $[\cdot,\cdot]_t$ s'étend en une déformation d'ordre $k+1$ si et seulement si Ob^3 est un 3-cobord.*

Corollaire 1.2.17. *Si $\mathcal{H}^3_{Lie}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = 0$, toute déformation d'ordre k s'étend en une déformation d'ordre $k+1$.*

1.3 Algèbres de Lie : Opérateurs de Rota-Baxter et structures associées

Les opérateurs de Rota-Baxter sur les algèbres de Lie ont été introduits pour la première fois dans un article de B. A. Kupershmidt [91], où ils sont présentés comme des opérateurs analogues aux r-matrices classiques et aux structures de Poisson. Cependant, ces opérateurs avaient également été mentionnés dans les travaux de G.-C. Rota [120] et de G. Baxter [27] dans le contexte de la théorie des fluctuations des probabilités et de la combinatoire. Ils jouent un rôle important dans les aspects algébriques de la renormalisation en théorie quantique des champs [42]. De plus, les opérateurs de Rota-Baxter sur les algèbres de Lie (ou les algèbres associatives) sont également liés à la séparation ou à la dendrification des structures algébriques, notamment dans le cas des algèbres symétriques gauche (ou des algèbres dendriformes) [17,58]

1.3.1 Généralités sur les opérateurs de Rota-Baxter

Dans cette partie, on présente la définition d'un opérateur de Rota-Baxter de poids λ sur une algèbre non-associative quelconque, tout en fournissant des exemples classiques issus de l'algèbre des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, qui est associative mais pas nécessairement commutative.

Définition 1.3.1. Soit (A, μ) une algèbre non-associative et $\lambda \in \mathbb{K}$. Une application linéaire $R : A \to A$ est appelée opérateur de Rota-Baxter de poids λ si elle vérifie :

$$\mu(R(x), R(y)) = R\big(\mu(R(x), y) + \mu(x, R(y)) + \lambda\mu(x, y)\big), \quad \forall x, y \in A. \tag{1.26}$$

L'identité (1.26) est appelée identité de Rota-Baxter et $(A, \cdot, R)$ désigne une algèbre de Rota-Baxter.

Définition 1.3.2. Soit $(A, \cdot)$ une algèbre non-associative et $\lambda \in \mathbb{K}$. Une application linéaire $D : A \to A$ est appelée dérivation de poids λ sur A si elle vérifie :

$$D(\mu(x, y)) = \mu(D(x), y) + \mu(x, D(y)) + \lambda\mu(D(x), D(y)), \quad \forall x, y \in A. \tag{1.27}$$

Remarques 1.3.3. — On suupose que $\lambda \in \mathbb{K}$ est un scalaire non nul et (A, μ) une algèbre non-associative. Alors R est un opérateur de Rota-Baxter de poids λ si et seulement si $\lambda^{-1}R$ est un opérateur de Rota-Baxter de poids 1.

— Soient (A, μ) une algèbre non-associative, $R : A \to A$ une application linéaire inversible et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors R est un opérateur de Rota-Baxter de poids λ sur A si et seulement si R^{-1} est une dérivation de poids λ.

— Le cas où $\lambda = 0$, on appelle R opérateur de Rota-Baxter de poids zéro ou simplement opérateur de Rota-Baxter.

Exemples classiques :

1. **Intégration par parties :** L'un des premiers résultats que l'on aborde lors de l'enseignement ou de l'apprentissage du calcul différentiel et intégral est la formule de dérivation de Leibniz, accompagnée de ses différentes variantes. En parallèle, on rencontre également la formule d'intégration par parties au niveau intégral :

$$\int_0^t f(x)dx \int_0^t g(x)dx = \int_0^t \Big(\int_0^y f(x)dxg(y) + f(y) \int_0^y g(x)dx \Big) dy. \tag{1.28}$$

On définit l'opérateur d'intégration suivant : $R : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $f \mapsto R(f)(t) = \int_0^t f(x)dx$, la formule précédente se réécrit :

$$R(f)R(g) = R\Big(R(f)g + fR(g)\Big). \tag{1.29}$$

Ainsi, en vertu de cette identité, l'opérateur intégral peut être considéré comme un opérateur de Rota-Baxter de poids zéro. Par conséquent, l'algèbre des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (qui est associative mais pas nécessairement commutative) constitue également une algèbre de Rota-Baxter, toujours de poids zéro.

2. **Sommation de Riemann :** On onsidére maintenant les sommes de Riemann associées à un paramètre λ :

$$R_\lambda(f)(x) = \sum_{n=0}^{[x/\lambda]-1} \lambda f(n\lambda). \tag{1.30}$$

L'opérateur R_λ vérifie la relation :

$$R_\lambda(f)R_\lambda(g) = R_\lambda\Big(R_\lambda(f)g + fR_\lambda(g) + \lambda fg\Big), \tag{1.31}$$

analogue de la formule d'intégration par partie (1.29) sur l'algèbre associative des fonctions continues de $\mathbb{R}$, avec toutefois un terme correctif $\lambda R_\lambda(fg)$ qui correspond aux termes diagonaux $(f(n\lambda) \cdot g(n\lambda))$ du produit $R_\lambda(f)R_\lambda(g)$ et disparaît, au moins lorsqu'on travaille avec des fonctions suffisamment régulières, dans la limite $\lambda \to 0$. Dans ce cas, on dit que R_λ est de Rota-Baxter de poids λ.

1.3.2 Dendrification des algèbres de Lie

Cette section est dédiée à la dendrification des algèbres de Lie en diverses structures algébriques, telles que les algèbres symétriques gauche, les algèbres post-Lie et les algèbres NS-Lie, en recourant à différents types d'opérateurs de Rota-Baxter sur les algèbres de Lie. Parmi les références classiques concernant la théorie de la dendrification des algèbres de Lie, on trouve les ouvrages de Kupershmidt [91], Bai [17], Sheng [133] et Das [49].

Dans [91], Kupershmidt a introduit le concept d'opérateur de Rota-Baxter relatif associé à une représentation quelconque (V,ρ). Il s'agit d'une application linéaire $T : V \to \mathfrak{g}$ vérifiant :

$$[T(u),T(v)]_{\mathfrak{g}} = T\big(\rho(Tu)(v) - \rho(Tv)(u)\big), \quad \forall u,v \in V. \tag{1.32}$$

En particulier , un opérateur de Rota-Baxter relatif sur $\mathfrak{g}$ associé à la représentation adjointe $(\mathfrak{g},ad)$ est un opérateur de Rota-Baxter de poids zéro sur $\mathfrak{g}$.

De plus, Bai [17] a proposé une construction d'algèbre symétrique gauche sur V, considérée comme la structure algébrique sous-jacente d'un opérateur de Rota-Baxter relatif sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Cette construction repose sur la multiplication bilinéaire suivante :

$$u \circ v = \rho(Tu)(v), \quad \forall u,v \in V. \tag{1.33}$$

Par conséquent, il existe une structure d'algèbre de Lie sur V donnée par :

$$[u,v]_T = \rho(Tu)v - \rho(Tv)u, \quad \forall u,v \in V. \tag{1.34}$$

Définition 1.3.4. Soient $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ et $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}})$ deux algèbres de Lie et $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$ une application linéaire. On dit que ρ est une action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}$ si $(\mathfrak{h},\rho)$ est une représentation de $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ telle que :

$$\rho(x)[u,v]_{\mathfrak{h}} = [\rho(x)u,v]_{\mathfrak{h}} + [u,\rho(x)v]_{\mathfrak{h}}, \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ u,v \in \mathfrak{h}. \tag{1.35}$$

En particulier : si $(\mathfrak{g},ad)$ est la représentation adjointe de $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$, alors ad est une action de $\mathfrak{g}$ sur lui-même.

Récemment, la notion d'opérateur de Rota-Baxter relatif de poids $\lambda \in \mathbb{K}$ associé à une action ρ a été introduite dans [133] comme une généralisation de l'opérateur de Rota-Baxter relatif classique présenté par Kupershmidt. Cet opérateur est défini comme une application linéaire $T : V \to \mathfrak{g}$ vérifiant :

$$[Tu,Tv]_{\mathfrak{g}} = T\big(\rho(Tu)v - \rho(Tv)u + \lambda[u,v]_{\mathfrak{h}}\big), \quad \forall u,v \in \mathfrak{h}. \tag{1.36}$$

Exemple 1.3.5. Un opérateur de Rota-Baxter realatif de poids $\lambda \in \mathbb{K}$ associé à l'action adjointe ad est juste un opérateur de Rota-Baxter sur $\mathfrak{g}$ de même poids.

Définition 1.3.6. Une algèbre post-Lie est un triplet $(A,[\cdot,\cdot],\triangleright)$ constitué d'une algèbre de Lie $(A,[\cdot,\cdot])$ et d'une application bilinéaire $\triangleright : \otimes^2 A \to A$ satisfaisant :

$$x \triangleright [y,z] = [x \triangleright y,z] + [y,x \triangleright z], \tag{1.37}$$
$$[x,y] \triangleright z = as_{\triangleright}(x,y,z) - as_{\triangleright}(y,x,z), \tag{1.38}$$

où $as_{\triangleright}(x,y,z) = x \triangleright (y \triangleright z) - (x \triangleright y) \triangleright z$, pour tout $x,y,z \in A$.

Remarque 1.3.7. Il est clair qu'une algèbre post-Lie avec une structure d'algèbre de Lie abélienne se réduit à une algèbre symétrique gauche. Si on définit $L_{\triangleright} : A \to \mathfrak{gl}(A)$ par $L_{\triangleright}(x)(y) = x \triangleright y$, alors d'après l'équation (1.37), $L_{\triangleright}(x)$ est une dérivation sur $(A,[\cdot,\cdot])$.

Proposition 1.3.8. *Soit* $(A,[\cdot,\cdot],\triangleright)$ *une algèbre post-Lie. Alors le crochet*

$$[[x,y]] = x \triangleright y - y \triangleright x + [x,y] \tag{1.39}$$

définit une structure d'algèbre de Lie sur A.

Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie, ρ une action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}$, et $T:\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ un opérateur de Rota-Baxter relatif de poids $\lambda\in\mathbb{K}$. Dans ce contexte, l'algèbre post-Lie sur $\mathfrak{h}$ est considérée comme la structure algébrique sous-jacente d'un opérateur de Rota-Baxter relatif de poids $\lambda\in\mathbb{K}$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, défini par les deux opérations bilinéaires suivantes :

$$[u,v] = \lambda[u,v]_{\mathfrak{h}}, \quad u \triangleright v = \rho(Tu)v, \quad \forall u,v \in \mathfrak{h}. \tag{1.40}$$

Par conséquent, une structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{h}$ est définie par :

$$[u,v]_T = \rho(Tu)v - \rho(Tv)u + \lambda[u,v]_{\mathfrak{h}}, \quad \forall u,v \in \mathfrak{h}. \tag{1.41}$$

Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie, (V,ρ) une représentation, et $\mathcal{H}\in\mathcal{Z}^2_{Lie}(\mathfrak{g},V)$ un 2-cocycle dans la cohomologie de Chevalley-Eilenberg. Dans [49], Das a introduit la notion d'opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté, défini comme une application linéaire $T:V\to\mathfrak{g}$ qui satisfait à la condition suivante :

$$[T(u),T(v)]_{\mathfrak{g}} = T(\rho(Tu)v - \rho(Tv)u + \mathcal{H}(Tu,Tv)), \quad \forall u,v \in V. \tag{1.42}$$

Dans ce qui suit, on rappelle la définition d'une algèbre NS-Lie, qui peut être considérée comme la structure algébrique sous-jacente d'un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Définition 1.3.9. Une algèbre NS-Lie est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni de deux multiplications bilinéaires $\{\cdot,\cdot\},[[\cdot,\cdot]]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, telle que $[[\cdot,\cdot]]$ est antisymétrique, et satisfaisant les deux identités suivantes :

$$\{\{x,y\},z\} - \{x,\{y,z\}\} - \{\{y,x\},z\} + \{y,\{x,z\}\} + \{[[x,y]],z\} = 0, \tag{1.43}$$

$$[[x,[y,z]_*]] + [[y,[z,x]_*]] + [[z,[x,y]_*]] + \{x,[[y,z]]\} + \{y,[[z,x]]\} + \{z,[[x,y]]\} = 0, \tag{1.44}$$

où $[x,y]_* = \{x,y\} - \{y,x\} + [[x,y]]$, pour tout $x,y,z\in\mathfrak{g}$.

Remarque 1.3.10. Si la multiplication bilinéaire $\{\cdot,\cdot\}$ définie précédemment est triviale, alors $(\mathfrak{g},[[\cdot,\cdot]])$ devient une algèbre de Lie. Inversement, si $[[\cdot,\cdot]]$ est trivial, alors $(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot\})$ se transforme en une algèbre symétrique gauche. Par conséquent, les algèbres de NS-Lie constituent une généralisation des algèbres de Lie ainsi que des algèbres symétriques gauche. De plus, si $(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot\},[[\cdot,\cdot]])$ est une algèbre NS-Lie, alors une structure d'algèbre de Lie est donnée par le crochet $[\cdot,\cdot]_*$.

Proposition 1.3.11. *[49] Soit* $\mathcal{H}\in C^2(\mathfrak{g},V)$ *un* 2*-cocycle dans la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de* $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ *à coefficients dans* (V,ρ). *Si* $T:V\to\mathfrak{g}$ *est un opérateur de Rota-Baxter relatif* $\mathcal{H}$*-twisté, alors les opérations bilinéaires :*

$$\{u,v\} = \rho(Tu)v \qquad et \qquad [[u,v]] = \mathcal{H}(Tu,Tv), \forall u,v \in V, \tag{1.45}$$

permettent de définir une algèbre NS-Lie sur V.

Chapitre 2

Algèbres non-associatives ternaires de type Lie

Les algèbres n-aires de type Lie, en particulier les algèbres ternaires de type Lie, représentent une généralisation des algèbres de Lie au cadre n-aire. Deux interprétations de l'identité de Jacobi donnent lieu aux deux principales généralisations :
– Les algèbres n-Lie où l'identité de Jacobi généralisée est vue comme le fait que les applications adjointes (multiplications à gauche) soient des dérivations :

$$[x_1,\cdots,x_{n-1},[y_1,\cdots,y_n]]=\sum_{i=1}^{n}[y_1,\cdots,y_{i-1},[x_1,\cdots,x_{n-1},y_i],y_{i+1},\cdots,y_n].$$

Il existe également d'autres types d'algèbres n-aires associées aux algèbres de Lie , suivant le même principe de généralisation, notamment les algèbres n-Leibniz, qui représentent la version non antisymétrique des algèbres n-Lie, ainsi que les systèmes triples de Lie, qui sont partiellement antisymétriques.
– Les algèbres de Lie généralisées, où l'identité de Jacobi est vue comme le fait que la somme sur $\mathbb{S}_{2n-1}$ des crochets imbriqués soit nulle :

$$\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{2n-1}} sgn(\sigma)[x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n-1)},[x_{\sigma(n)},\cdots,x_{\sigma(2n-1)}]]=0.$$

Dans ce chapitre, on présente des notions générales et certaines propriétés fondamentales de ces algèbres. Dans la première section, on se concentre sur les systèmes triples de Lie, en abordant la théorie des représentations, le produit semi-direct, la cohomologie de Yamaguti et les déformations formelles. Dans la deuxième section, on débute par introduire les algèbres 3-Lie, en exposant leurs propriétés, leurs représentations et la cohomologie de Takhtajan, qui sont des outils essentiels pour l'étude de ces algèbres. Par la suite, on présente les constructions principales en relation avec les algèbres de Lie en utilisant la fonction trace. On conclue ce chapitre en introduisant les L_∞-algèbres, en mettant particulièrement l'accent sur les 3-algèbres de Lie et leurs éléments de Maurer-Cartan. Enfin, on rappelle l'approche de Voronov pour la construction de ce type d'algèbres.

2.1 Systèmes triples de Lie : Définitions et cohomologie de Yamaguti

Dans cette section, on rappelle les définitions essentielles et les concepts fondamentaux liés aux systèmes triples de Lie, en présentant quelques résultats intéressants concernant leur lien avec les algèbres de Lie, voir [75, 98, 99, 144, 146].

2.1.1 Définitions et notations

Définition 2.1.1. Un système triple de Lie est un couple $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ constitué d'un espace vectoriel L et d'une application 3-linèaire $[\cdot,\cdot,\cdot] : (\wedge^2 L)\otimes L \to L$ satisfaisant :

$$[x,y,z]+[y,z,x]+[z,x,y]=0, \tag{2.1}$$
$$[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]]=[[x_1,x_2,x_3],x_4,x_5]+[x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5]+[x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]], \tag{2.2}$$

pour tout $x_i\in L, 1\leq i\leq 4$. On définit la multiplication à gauche $\mathcal{L}(x_1,x_2)\in\mathfrak{gl}(L)$ par :

$$\mathcal{L}(x_1,x_2)x=[x_1,x_2,x], \tag{2.3}$$

pour tout $x_1,x_2,x\in L$. Alors la dernière identité (2.2) peut être écrite à l'aide de la multiplication à gauche comme suit :

$$\mathcal{L}(x_1,x_2)[x_3,x_4,x_5]=[\mathcal{L}(x_1,x_2)x_3,x_4,x_4]+[x_3,\mathcal{L}(x_1,x_2)x_4,x_5]+[x_3,x_4,\mathcal{L}(x_1,x_2)x_5].$$

Un morphisme $\phi:(L,[\cdot,\cdot,\cdot])\to(L',[\cdot,\cdot,\cdot]')$ de systèmes triples de Lie est une application linéaire satisfaisant :

$$\phi([x,y,z])=[\phi(x),\phi(y),\phi(z)]' \quad \forall x,y,z\in L.$$

Un isomorphisme est un morphisme bijective.

Remarque 2.1.2. Les systèmes triples de Lie partagent l'identité fondamentale de Filippov avec les algèbres 3-Lie, mais leurs structures et leurs propriétés sont profondément différentes. Ils ne satisfaitent pas la condition d'antisymétrie mais une sommation cyclique (2.1). Par conséquent, les catégories des algèbres 3-Lie et les systèmes triples de Lie sont différents.

Exemple 2.1.3. Si L est l'espace $\mathbb{K}_n$ des vecteurs colonnes sur $\mathbb{K}$, alors en considérant le produit triple sur L défini par :

$$[x,y,z]=y^txz-x^tyz, \quad \forall x,y\in L.$$

Alors $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ est un système triple de Lie.

Exemple 2.1.4. On considère le systèmes triple de Lie $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ de dimension 2 dont les crochets non nuls relativement à la base $\{e_1,e_2\}$ sont donnés comme suit :

$$[e_1,e_2,e_2]=e_1.$$

Exemple 2.1.5. On considère les systèmes triples de Lie $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ de dimension 4 dont les crochets non nuls relativement à la base $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ sont donnés comme suit :

$$[e_1,e_2,e_1]=e_4.$$

Lemme 2.1.6. *Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie. On définit le crochet ternaire $[\cdot,\cdot,\cdot]:(\wedge^2\mathfrak{g})\otimes\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ par :*

$$[x,y,z]=[[x,y]_{\mathfrak{g}},z]_{\mathfrak{g}}, \tag{2.4}$$

pour tout $x,y,z\in\mathfrak{g}$. Alors $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot])$ est un système triple de Lie

Lemme 2.1.7. *Soient L un système triple de Lie et U un sous-espace vectoriel de L. Alors, U est un idéal de L, si et seulement si, $[U,L,L]\subseteq U$.*

Remarque 2.1.8. Un système triple de Lie peut-être considéré comme une version infinitésimale d'un espace symétrique [99]. D'après le troisième théorème de Lie, à tout système triple de Lie correspond un espace symétrique polynômial, plus généralement, tout morphisme de systèmes triples de Lie provient d'un morphisme des espaces symétriques polynômiaux associés.

Dans [98], Lister a approfondi l'étude des systèmes triples de Lie en dimension finie. Beaucoup de résultats ont été transmis aux systèmes triples de Lie à travers les algèbres de Lie, notamment en ce qui concerne les systèmes triples de Lie résolubles, nilpotents et semi-simples [75,98].

Lemme 2.1.9. *Soit L un système triple de Lie. On pose U le sous-espace vectoriel de $End(L)$ engendré par l'ensemble $\{\mathcal{L}(x,y),\ x,y \in L\}$. Alors, U est un idéal de $Der(L)$.*

Théorème 2.1.10. ***(Construction d'une algèbre de Lie à partir d'un système triple de Lie)***
Soit L un système triple de Lie. $\mathfrak{g}$ une sous algèbre de $Der(L)$ qui contient $U = \{\mathcal{L}(x,y),\ x,y \in L\}$ et $\mathscr{L}(\mathfrak{g},L) = \mathfrak{g} \bigoplus L$. Alors

- *$\mathscr{L}(\mathfrak{g},L)$ est une algèbre de Lie où le crochet de Lie est donné par :*
$$[X,Y] = [f,g] + \mathcal{L}(x,y) \oplus fx - gy,$$
pour tout $X = f + x$, $Y = g + y$, $f,g \in \mathfrak{g}$, $x,y \in L$.
- *$\alpha : f \oplus x \mapsto f \oplus -x$ est une involution sur $\mathscr{L}(\mathfrak{g},L)$ appelée l'involution principale de $\mathscr{L}(\mathfrak{g},L)$.*
- *$\mathscr{L}(U,L) = U \bigoplus L$ est un idéal de $\mathscr{L}(\mathfrak{g},L)$. De plus l'algèbre de Lie $\mathscr{L}(U,L)$ est dite le plongement standard de L.*
- *$\forall x,y,z \in L, \quad [x,y,z] = [[x,y],z]$.*
- *$L = \{X \in \mathscr{L}(\mathfrak{g},L), \quad \alpha X = -X\}$*

Remarque 2.1.11. Le théorème précédent montre que tout système triple de Lie L peut se voir comme le sous espace propre d'une involution α d'une algèbre de Lie involutive $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ stable par le produit $[[\cdot,\cdot],\cdot]$. Il est bien connu que ces algèbres de Lie peuvent être munies d'une $\mathbb{Z}_2$- graduation. Ce qui leur donne une grande importance dans l'étude des espaces symétriques [46].

Exemple 2.1.12. Si L est l'espace $\mathbb{K}_n$ des vecteurs colones sur $\mathbb{K}$, alors en considérant le produit triple sur L défini par $[x,y,z] = y^txz - x^tyz$, on peut identifier la multiplication à gauche $\mathcal{L}(x,y)$ avec la matrice anti-symétrique $y^txz - x^tyz$ de taille $n \times n$. Par conséquent, le plongement standard $\mathscr{L}(U,L)$ de L est isomorphe à l'algèbre de Lie des matrices anti-symétriques de taille $(n+1) \times (n+1)$ sur $\mathbb{K}$ par l'application $f \oplus x \mapsto \begin{pmatrix} f & x \\ -^tx & 0 \end{pmatrix}$.

En général, si $L = M_{(p,q)}(\mathbb{K})$ et le produit triple sur L est défini par :
$$[A,B,C] = B^tAC - A^tBC + C^tAB,$$
pour tous $A,B,C \in L$, alors le plongement standard de L est isomorphe à l'algèbre de Lie des matrices anti-symétriques de taille $(p+q) \times (p+q)$ sur $\mathbb{K}$.

2.1.2 Représentations et cohomologie de Yamaguti

Dans [144], Yamaguti a introduit la notion de représentation ainsi que la théorie de la cohomologie des systèmes triples de Lie. Par la suite, les auteurs dans [72,74,90] ont étudié la théorie de la cohomologie de système triple de Lie de point de vue différent. Le point de vue de Yamaguti est présenté comme suit :

Notations 2.1.13. Soient $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ un système triple de Lie et $(x,y) \in L \otimes L$, on définit sur L deux applications linéaires $\mathcal{R}(x,y)$ *et* $D(x,y)$ par $\mathcal{R}(x,y)z = [z,x,y]$ et $D(x,y)z = [x,y,z]$. Alors les identités (2.1) et (2.2) peut être récrites respectivement sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned}
&D(x,y) = \mathcal{R}(y,x) - \mathcal{R}(x,y),\\
&D(x,y)[z_1,z_2,z_3] = [D(x,y)z_1,z_2,z_3] + [z_1,D(x,y)z_2,z_3] + [z_1,z_2,D(x,y)z_3].
\end{aligned}$$

Cette dernière signifie que $D(x,y)$ est une dérivation.

Définition 2.1.14. Une représentation d'un système triple de Lie L sur un espace vectoriel V est une application bilinéaire $\theta : \otimes^2 L \to End(V)$ qui satisfait les conditions suivantes ;

$$\theta(z,t)\theta(x,y) - \theta(y,t)\theta(x,z) - \theta(x,[y,z,t]) + D(y,z)\theta(x,t) = 0, \tag{2.5}$$
$$\theta(z,t)D(x,y) - D(x,y)\theta(z,t) + \theta([x,y,z],t) + \theta(z,[x,y,t]) = 0, \quad \forall x,y,z,t \in L, \tag{2.6}$$

où $D(x,y) = \theta(y,x) - \theta(x,y)$. On note alors une telle représentation par (V,θ).

Remarques 2.1.15.

— On peut conclure de (2.6) que

$$D(z,t)D(x,y) - D(x,y)D(z,t) + D([x,y,z],t) + D(z,[x,y,t]) = 0. \tag{2.7}$$

— Si $V = L$ alors $\mathcal{R}$ est une représentation de L sur lui-même, qui s'appelle la représentation adjointe.

Proposition 2.1.16. *Soit $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ un système triple de Lie. Alors (V,θ) est une représentation de L si et seulement si $(L \oplus V,[\cdot,\cdot,\cdot]_{L\oplus V}$ est un système triple de Lie, où le crochet ternaire $[\cdot,\cdot,\cdot]_{L\oplus V}$: $\wedge^2(L \oplus V) \otimes (L \oplus V) \to L \oplus V$ est donné par :*

$$[x+u,y+v,z+w]_{L\oplus V} = [x,y,z] + \theta(y,z)u - \theta(x,z)v + D(x,y)w, \tag{2.8}$$

pour tout $x,y,z \in L$ et $u,v,w \in V$. Ce système triple de Lie est appelé produit semi-direct et noté par $L \ltimes_\theta V$.

Soient $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ un système triple de Lie et (V,θ) une représentation. Pour chaque $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{C}^{2n-1}_{Lts}(L,V)$ l'ensemble de $(2n-1)$-cochaines de L à coefficients dans V : $\psi \in \mathcal{C}^{2n-1}_{Lts}(L,V)$ est une application multilinéaire $\psi : \times^{2n-1}L \to V$ vérifiant :

$$\begin{aligned}
&\psi(x_1,x_2,\cdots,x_{2n-2},x,x,y) = 0,\\
&\psi(x_1,x_2,\cdots,x_{2n-2},x,y,z) + \psi(x_1,x_2,\cdots,x_{2n-2},y,z,x) + \psi(x_1,x_2,\cdots,x_{2n-2},z,x,y) = 0.
\end{aligned}$$

L'opérateur cobord de Yamaguti $\delta^{2n-1} : \mathcal{C}^{2n-1}_{Lts}(L,V) \to \mathcal{C}^{2n+1}_{Lts}(L,V)$ est défini par :

$$\begin{aligned}
&\delta^{2n-1}\psi(x_1,x_2,\cdots,x_{2n+1})\\
=&\theta(x_{2n},x_{2n+1})\psi(x_1,x_2,\cdots,x_{2n-1}) - \theta(x_{2n-1},x_{2n+1})\psi(x_1,x_2,\cdots,x_{2n-2},x_{2n})\\
&+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}D(x_{2k-1},x_{2k})\psi(x_1,x_2,\cdots,\widehat{x}_{2k-1},\widehat{x}_{2k},\cdots,x_{2n+1})\\
&+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2k+1}^{2n+1}(-1)^{n+k+1}\psi(x_1,x_2,\cdots,\widehat{x}_{2k-1},\widehat{x}_{2k},\cdots,[x_{2k-1},x_{2k},x_j],\cdots,x_{2n+1}),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

où $\widehat{}$ signifie une omission. On a $\delta^{2n+1} \circ \delta^{2n-1} = 0$, alors l'espace des cochaines forme un complexe avec cet opérateur cobord comme suit :

$$\mathcal{C}^1_{Lts}(L,V) \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{C}^3_{Lts}(L,V) \xrightarrow{\delta^3} \mathcal{C}^5_{Lts}(L,V) \longrightarrow \cdots.$$

Par conséquent, on obtient le groupe de cohomologie de Yamaguti

$$\mathcal{H}^\bullet_{Lts}(L,V) = \mathcal{Z}^\bullet_{Lts}(L,V)/\mathcal{B}^\bullet_{Lts}(L,V),$$

avec $\mathcal{Z}^\bullet_{Lts}(L,V)$ est l'espace des cocycles et $\mathcal{B}^\bullet_{Lts}(L,V)$ est l'espace des cobords. Voir [144, 146] pour plus de détails.

Remarque 2.1.17. En termes d'objets fondamentaux, l'opérateur cobord de Yamaguti peut être considéré comme l'opérateur $\delta^n : \mathfrak{C}^{n-1}(L,V) \to \mathfrak{C}^n(L,V)$, où $\mathfrak{C}^n(L,V) = \mathcal{C}^{2n+1}_{Lts}(L,V)$ et

$$\begin{aligned}
&\delta^n(f)(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_n,z)\\
=&\theta(y_n,z)f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{n-1},x_n) - \theta(x_n,z)f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{n-1},y_n)\\
&+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}(-1)^{i-1}D(\mathfrak{X}_i)f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{X}_i},\cdots,\mathfrak{X}_n,z)\\
&+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{n+i+1}f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{X}_i},\cdots,\mathfrak{X}_k,[\mathfrak{X}_i,x_{k+1}],y_{k+1},\mathfrak{X}_{k+2},\cdots,\mathfrak{X}_n,z)\\
&+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{n+i+1}f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{X}_i},\cdots,\mathfrak{X}_k,x_{k+1},[\mathfrak{X}_i,y_{k+1}],\mathfrak{X}_{k+2},\cdots,\mathfrak{X}_n,z)\\
&+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i+1}f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{X}_i},\cdots,\mathfrak{X}_n,[\mathfrak{X}_i,z]),
\end{aligned}$$

pour tout $\mathfrak{X}_i = x_i \otimes y_i \in L \otimes L$, pour $i = 1,\ldots,n$ et $z \in L$.

Définition 2.1.18. Une 1-cochaine $\varphi \in \mathcal{C}^1_{Lts}(L,M)$ est un 1-cocycle si elle vérifie :

$$D(x_1,x_2)\varphi(x_3) - \theta(x_1,x_3)\varphi(x_2) + \theta(x_2,x_3)\varphi(x_1) - \varphi([x_1,x_2,x_3]) = 0. \tag{2.10}$$

Une 3-cochaine $\omega \in \mathcal{C}^3_{Lts}(L,M)$ est un 3-cobord s'il exist $\varphi \in \mathcal{C}^1_{Lts}(L,M)$ tel que $\omega = \delta^1\varphi$. Un 3-cobord est un 3-cocycle si elle vérifie pour tout $x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3 \in L$:

$$\omega(x_1,x_1,x_2) = 0, \tag{2.11}$$
$$\omega(x_1,x_2,x_3) + \omega(x_2,x_3,x_1) + \omega(x_3,x_1,x_2) = 0, \tag{2.12}$$
$$\begin{aligned}
&\omega(x_1,x_2,[y_1,y_2,y_3]) + D(x_1,x_2)\omega(y_1,y_2,y_3) - \omega([x_1,x_2,y_1],y_2,y_3) - \omega(y_1,[x_1,x_2,y_2],y_3)\\
=&\omega(y_1,y_2,[x_1,x_2,y_3]) + \theta(y_2,y_3)\omega(x_1,x_2,y_1) - \theta(y_1,y_3)\omega(x_1,x_2,y_2) + D(y_1,y_2)\omega(x_1,x_2,y_3).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

2.2 Algèbres 3-Lie : Définitions et propriétés de base

Dans cette section, on rappelle la définition des algèbres 3-Lie introduites par Filippov (voir [63]) en fournissant des exemples fondamentaux. On explore ensuite la théorie des représentations associées aux algèbres 3-Lie, ainsi que la généralisation de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg pour ces algèbres, proposée par Takhtajan [131]. Enfin, on présente plusieurs constructions basées sur l'utilisation de la fonction trace. Pour plus de détails, voir [12].

2.2.1 Définitions et exemples

Définition 2.2.1. Une algèbre 3-Lie est un couple $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ constitué d'un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ et d'une application 3-linèaire antisymétrique $[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}:\wedge^3\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ satisfaisant l'identité de Filippov (parfois est appelée identité de Nambu ternaire) suivante :

$$[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}=[[x_1,x_2,x_3]_{\mathfrak{g}},x_4,x_5]_{\mathfrak{g}}+[x_3,[x_1,x_2,x_4]_{\mathfrak{g}},x_5]_{\mathfrak{g}}+[x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}},\quad (2.14)$$

pour tout $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in\mathfrak{g}$. On définit l'application adjointe ad : $\wedge^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $(x_1,x_2)\mapsto \mathrm{ad}_{(x_1,x_2)}\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ par :

$$ad_{(x_1,x_2)}x=[x_1,x_2,x]_{\mathfrak{g}},\quad (2.15)$$

pour tout $x_1,x_2,x\in\mathfrak{g}$. Alors l'identité de Filippov (2.14) peut être écrite à l'aide de l'application adjointe comme suit :

$$ad_{(x_1,x_2)}[x_3,x_4,x_5]_{\mathfrak{g}}=[ad_{(x_1,x_2)}x_3,x_4,x_4]_{\mathfrak{g}}+[x_3,ad_{(x_1,x_2)}x_4,x_5]_{\mathfrak{g}}+[x_3,x_4,ad_{(x_1,x_2)}x_5]_{\mathfrak{g}}.$$

Les éléments de $\wedge^2\mathfrak{g}$ sont appelés objets fondamentaux de l'algèbre 3-Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$. Il existe une opération bilinéaire $[\cdot,\cdot]_F$ sur $\wedge^2\mathfrak{g}$, qui est donnée par :

$$[\mathfrak{X},\mathfrak{Y}]_F=[x_1,x_2,y_1]_{\mathfrak{g}}\wedge y_2+y_1\wedge[x_1,x_2,y_2]_{\mathfrak{g}},\quad \forall\mathfrak{X}=x_1\wedge x_2,\ \mathfrak{Y}=y_1\wedge y_2.$$

Il est bien connu que $(\wedge^2\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_F)$ est une algèbre de Leibniz, qui joue un rôle important dans la théorie des algèbres 3-Lie.

Définition 2.2.2. Un morphisme $f:(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})\to(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}})$ d'algèbres 3-Lie est une application linéaire satisfaisant :

$$f([x,y,z]_{\mathfrak{g}})=[f(x),f(y),f(z)]_{\mathfrak{h}}\quad\forall x,y,z\in\mathfrak{g}.$$

Un isomorphisme est un morphisme bijective.

Définition 2.2.3. Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre 3-Lie. Une application linéaire $D:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ est appelée dérivation sur $\mathfrak{g}$ si elle satisfaite :

$$D([x,y,z]_{\mathfrak{g}})=[D(x),y,z]_{\mathfrak{g}}+[x,D(y),z]_{\mathfrak{g}}+[x,y,D(z)]_{\mathfrak{g}},\quad\forall x,y,z\in\mathfrak{g}.\quad (2.16)$$

Exemples fondamentaux :

— Soit A un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{K}$, avec une base $\{e_1,\cdots,e_4\}$. Le produit suivant :

$$\{e_1,\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_4\}=(-1)^ie_i,\quad (2.17)$$

pour $i=1,2,3,4$, définit une structure d'algèbre 3-Lie sur A. Cet exemple a été donné par Filippov.

— Soit $A=C^\infty(\mathbb{R}^3)$, l'algèbre des fonctions différentiables à trois variables. On considère sur A le crochet ternaire défini par le Jacobien fonctionnel $J(f)=(\frac{\partial f_i}{\partial x_i})$, où $f=(f_1,f_2,f_3)$ sont des fonctions différentiables de $\mathbb{R}^3$

$$[f_1,f_2,f_3]=J(f_1,f_2,f_3)=det\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}&\frac{\partial f_1}{\partial x_2}&\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}&\frac{\partial f_2}{\partial x_2}&\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}&\frac{\partial f_3}{\partial x_2}&\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}.$$

Ce crochet ternaire est une généralisation du déterminant jacobien, reliant les fonctions différentiables à leurs dérivées partielles. Il définit une structure d'algèbre 3-Lie sur A.

— Soit $A = \mathbb{R}^4$, un espace euclidien orienté de dimension 4, et le crochet de trois vecteurs $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ égal au déterminant suivant :

$$[x,y,z] = \vec{x} \times \vec{y} \times \vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & e_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & e_4 \end{vmatrix},$$

où $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ est la base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ et $\vec{x} = \sum_{i=1}^4 X_i\vec{e_i}$, $\vec{y} = \sum_{i=1}^4 y_i\vec{e_i}$ et $\vec{z} = \sum_{i=1}^4 z_i\vec{e_i}$. Alors $(A,[\cdot,\cdot,\cdot])$ est une algèbre 3-Lie.

Dans la suite, on rappelle la construction d'une algèbre 3-Lie à partir d'une algèbre de Lie et d'une forme bilinéaire satisfaisant une propriété spécifique, appelée fonction trace (voir [13]). Cette construction repose sur l'interaction entre l'algèbre de Lie et la forme bilinéaire, qui doit vérifier certaines conditions pour garantir la cohérence de la structure d'algèbre 3-Lie obtenue.

Définition 2.2.4. Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ une algèbre de Lie. Une forme linéaire $\tau : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ est appelée une fonction trace si $\tau([x,y]_\mathfrak{g}) = 0$, pour tout $x,y \in \mathfrak{g}$.

Lemme 2.2.5. *Soient $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ une algèbre de Lie et $\tau : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ une application trace sur $\mathfrak{g}$. On définit le crochet ternaire $[\cdot,\cdot,\cdot]_\tau : \wedge^3\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ par :*

$$[x_1,x_2,x_3]_\tau = \tau(x_1)[x_2,x_3]_\mathfrak{g} + \tau(x_2)[x_3,x_1]_\mathfrak{g} + \tau(x_3)[x_1,x_2]_\mathfrak{g}, \tag{2.18}$$

pour tout $x_1,x_2,x_3 \in \mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{g}_\tau := (\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\tau)$ est une algèbre de 3-Lie, qui est appelée algèbre 3-Lie induite par l'algèbre de Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$.

Exemple 2.2.6. Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ une algèbre de Lie de dimension 4 donnée par l'exemple 6. On définit une fonction trace sur la base (e_1,e_2,e_3,e_4) comme suit :

$$\tau(e_1) = a, \quad \tau(e_2) = 0, \quad \tau(e_3) = b, \quad \tau(e_4) = 0,$$

pour tout $a,b \in \mathbb{K}$. Alors, selon le Lemme 2.2.5, on obtient une algèbre 3-Lie de dimension 4 dont les crochets non nuls relativement à la base $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ sont donnés comme suit :

$$[e_1,e_2,e_3]_\tau = be_2, \quad [e_1,e_3,e_4]_\tau = ae_4.$$

Inversement, si on part d'une algèbre 3-Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ et en fixant un élément a dans $\mathfrak{g}$, on peut construire une algèbre de Lie par le crochet binaire suivant :

$$[\cdot,\cdot]_a = [a,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}.$$

2.2.2 Représentations et cohomologie de Takhtajan

Dans cette partie, on étudie dans le cas général, la théorie des représentations des algèbres 3-Lie et leur caractérisation en utilisant le produit semi-direct (voir [81]). Ensuite, on présente l'essentiel des résultats liés à la généralisation du complexe de Chevalley-Eilenberg dans le cas des algèbres 3-Lie traitée par Takhtajan [131] en 1995.

Définition 2.2.7. Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ une algèbre de 3-Lie, V un espace vectoriel et $\rho : \wedge^2\mathfrak{g} \to gl(V)$ une application linéaire. Le couple (V,ρ) est appelé une représentation de $\mathfrak{g}$ (ou V est un $\mathfrak{g}$-module) si ρ satisfait, pour tout $x,y,z \in \mathfrak{g}$

$$\rho(x_1,x_2)\rho(x_3,x_4) = \rho([x_1,x_2,x_3]_\mathfrak{g},x_4) + \rho(x_3,[x_1,x_2,x_4]_\mathfrak{g}) + \rho(x_3,x_4)\rho(x_1,x_2), \tag{2.19}$$

$$\rho([x_1,x_2,x_3]_\mathfrak{g},x_4) = \rho(x_1,x_2)\rho(x_3,x_4) + \rho(x_2,x_3)\rho(x_1,x_4) + \rho(x_3,x_1)\rho(x_2,x_4). \tag{2.20}$$

Proposition 2.2.8. *Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre 3-Lie. Alors (V,ρ) est une représentation de $\mathfrak{g}$ si et seulement si $(\mathfrak{g}\oplus V,[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}\oplus V})$ est une algèbre 3-Lie, où le crochet ternaire $[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}\oplus V}:\wedge^3(\mathfrak{g}\oplus V)\to\mathfrak{g}\oplus V$ est donné par :*

$$[x+u,y+v,z+w]_{\mathfrak{g}\oplus V}=[x,y,z]\mathfrak{g}+\rho(y,z)u+\rho(z,x)v+\rho(x,y)w, \tag{2.21}$$

pour tout $x,y,z\in\mathfrak{g}$ et $u,v,w\in V$.

Exemple 2.2.9. Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre 3-Lie. L'application linéaire $ad:\wedge^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ définit une représentation de $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ sur lui-même, appelée représentation adjointe et notée $(\mathfrak{g},ad)$.

Définition 2.2.10. Un morphisme entre deux représentations (V,ρ) et (V',ρ') d'une même algèbre 3-Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ est la donnée d'une application linéaire $\varphi:V\to V'$ qui vérifie :

$$\varphi\circ\rho(x,y)=\rho'(x,y)\circ\varphi,\quad \forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

Lorsque φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on dit que les deux représentations sont isomorphes.

Proposition 2.2.11. *Soient (V,ρ) une représentation d'une algèbre de Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ et τ une fonction trace sur $\mathfrak{g}$. Alors (V,ρ_τ) est une représentation de l'algèbre 3-Lie induite $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\tau)$, où $\rho_\tau:\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ est définie par :*

$$\rho_\tau(x,y)=\tau(x)\rho(y)-\tau(y)\rho(x),\ \forall x,y\in\mathfrak{g}. \tag{2.22}$$

Lemme 2.2.12. *Soient (V,ρ) une représentation d'une algèbre 3-Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ et a un élément fixe dans $\mathfrak{g}$. Alors (V,ρ_a) est une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_a$, où $\rho_a:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ est définie par $\rho_a(x)=\rho(a,x)$, pour tout $x\in\mathfrak{g}$.*

Remarque 2.2.13. Dans l'article [97], Liu, Makhlouf et Sheng ont proposé une nouvelle approche de la théorie des représentations des algèbres 3-Lie afin d'étudier l'extension abélienne scindée de ces dernières. Ils ont défini des représentations généralisées d'une algèbre 3-Lie $\mathfrak{g}$ sur un espace vectoriel V via des structures canoniques dans l'algèbre de Lie différentielle graduée associée à $\mathfrak{g}\oplus V$. Une représentation généralisée conduit également à une nouvelle algèbre 3-Lie, qu'on appelle un produit semi-direct généralisé. Ils ont également développé la théorie de la cohomologie correspondante. Dans cette thèse, on se consacre aux représentations non généralisées introduites par Kasymov.

Soient $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre 3-Lie et (V,ρ) une représentation. On note par $\mathfrak{C}^n_{3Lie}(\mathfrak{g};V)=\mathrm{Hom}(\underbrace{\wedge^2\mathfrak{g}\otimes\cdots\otimes\wedge^2\mathfrak{g}}_{n-1}\wedge\mathfrak{g},V)$, $(n\geq 1)$ l'espace des n-cochaines tel que l'opérateur différentiel $\partial:\mathfrak{C}^n_{3Lie}(\mathfrak{g};V)\to\mathfrak{C}^{n+1}_{3Lie}(\mathfrak{g};V)$ est défini par :

$$\begin{aligned}
&(\partial f)(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_n,x_{n+1})\\
&=\sum_{1\leq j<k\leq n}(-1)^j f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{X}_j},\cdots,\mathfrak{X}_{k-1},[x_j,y_j,x_k]_{\mathfrak{g}}\wedge y_k+x_k\wedge[x_j,y_j,y_k]_{\mathfrak{g}},\mathfrak{X}_{k+1},\cdots,\mathfrak{X}_n,x_{n+1})\\
&\quad+\sum_{j=1}^n(-1)^j f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{X}_j},\cdots,\mathfrak{X}_n,[x_j,y_j,x_{n+1}]_{\mathfrak{g}})+\sum_{j=1}^n(-1)^{j+1}\rho(x_j,y_j)f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{X}_j},\cdots,\mathfrak{X}_n,x_{n+1})\\
&\quad+(-1)^{n+1}\Big(\rho(y_n,x_{n+1})f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{n-1},x_n)+\rho(x_{n+1},x_n)f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{n-1},y_n)\Big),
\end{aligned} \tag{2.23}$$

pour tout $\mathfrak{X}_i=x_i\wedge y_i\in\wedge^2\mathfrak{g}$, $i=1,2,\cdots,n$ et $x_{n+1}\in\mathfrak{g}$ telle que $\partial\circ\partial=0$, pour $n\geq 1$.
Ainsi $(\oplus_{n=1}^{+\infty}\mathfrak{C}^n_{3Lie}(\mathfrak{g};V),\partial)$ est un complexe de cochaînes qui est appelé complexe de cochaînes de Chevalley-Eilenberg des algèbres 3-Lie. L'espace quotient

$$H^n_{3Lie}(\mathfrak{g};V)=Z^n_{3Lie}(\mathfrak{g};V)/B^n_{3Lie}(\mathfrak{g};V)\ (n\geq 1),$$

où $Z^n_{3Lie}(\mathfrak{g};V) = \{f \in \mathfrak{C}^n_{3Lie}(\mathfrak{g};V) \mid \partial f = 0\}$ est l'espace des n-coycles et $B^n_{3Lie}(\mathfrak{g};V) = \{f = \partial g \mid g \in \mathfrak{C}^{n-1}_{3Lie}(\mathfrak{g};V)\}$ est l'espace des n-cobords, est appelé le nième groupe de cohomologie de l'algèbre 3-Lie $\mathfrak{g}$ à coefficients dans V.

En particulier :

— $\mathcal{H} \in \mathfrak{C}^1_{3Lie}(\mathfrak{g};V)$ est un 1-cocycle par rapport à la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre 3-Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ à coefficients dans V signifie que $\mathcal{H} : \mathfrak{g} \to V$ est une application linéaire satisfaisant, pour tout $x_1,x_2,x_3 \in \mathfrak{g}$,

$$\rho(x_1,x_2)\mathcal{H}(x_3) + \rho(x_2,x_3)\mathcal{H}(x_1) + \rho(x_3,x_1)\mathcal{H}(x_2) - \mathcal{H}([x_1,x_2,x_3]_{\mathfrak{g}}) = 0. \tag{2.24}$$

— $\mathcal{H} \in \mathfrak{C}^2_{3Lie}(\mathfrak{g};V)$ est un 2-cocycle par rapport à la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre 3-Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ à coefficients dans V signifie que $\mathcal{H} : \wedge^3\mathfrak{g} \to V$ est une application 3-linéaire satisfaisant, pour tout $x_1,x_2,y_1,y_2,y_3 \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}(x_1,x_2,[y_1,y_2,y_3]_{\mathfrak{g}}) + \rho(x_1,x_2)\mathcal{H}(y_1,y_2,y_3) - \mathcal{H}([x_1,x_2,y_1]_{\mathfrak{g}},y_2,y_3)\\ &-\mathcal{H}(y_1,[x_1,x_2,y_2]_{\mathfrak{g}},y_3) - \mathcal{H}(y_1,y_2,[x_1,x_2,y_3]_{\mathfrak{g}}) - \rho(y_2,y_3)\mathcal{H}(x_1,x_2,y_1)\\ &-\rho(y_3,y_1)\mathcal{H}(x_1,x_2,y_2) - \rho(y_1,y_2)\mathcal{H}(x_1,x_2,y_3) = 0.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Lemme 2.2.14. *Soient (V,ρ) une représentation d'une algèbre 3-Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ et a un élément fixe dans $\mathfrak{g}$. Alors (V,ρ_a) est une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_a$, où $\rho_a : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ est définie par $\rho_a(x) = \rho(a,x)$, pour tout $x \in \mathfrak{g}$.*

2.3 Déformations formelles des algèbres ternaires de type Lie

Cette section est consacrée à l'étude des déformations formelles des algèbres ternaires de type Lie, telles que les déformations des systèmes triples et celles des algèbres 3-Lie. Flato et son équipe ont lancé un programme de quantification par déformations en 1978, marquant ainsi l'importance de la théorie des déformations en physique théorique. En se basant sur cette théorie, la mécanique quantique est vue comme une déformation de la mécanique classique, tandis que la mécanique relativiste est vue comme une déformation de la mécanique newtonienne. L'étude des déformations des algèbres ternaires se ramène à l'étude de la cohomologie de ces algèbres à valeurs dans l'algèbre ternaire lui même. On définit la notion de déformations équivalentes et de déformations triviales ainsi que le concept d'obstruction pour ces algèbres ternaires. Ensuite, on étudie les propriétés liées à la rigidité de ces algèbres. On peut constater que les résultats obtenus sont similaires à ceux du cas bilinéaire.

Notaions. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathbb{K}[[t]]$ l'anneau des séries formelles en une variable t à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $E[[t]]$ l'espace formel en t à coefficients dans E, ($E[[t]]$ est obtenu en étendant le domaine des coefficients de E de $\mathbb{K}$ à $\mathbb{K}[[t]]$). Alors $E[[t]]$ est un $\mathbb{K}[[t]]$-module. Lorsque E est de dimension finie, on a $E[[t]] = E \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[[t]]$. De plus E est un sous-module de $E[[t]]$. Étant donné une application $\mathbb{K}$-trilinéaire $f : E \times E \times E \to E$, elle admet naturellement une extension à une application $\mathbb{K}[[t]]$-trilinéaire $f : E[[t]] \times E[[t]] \times E[[t]] \to E[[t]]$, c'est-à-dire, si $x = \sum_{i\geq 0} a_i t^i$, $y = \sum_{j\geq 0} b_j t^j$ et $z = \sum_{k\geq 0} c_k t^k$, alors $f(x,y,z) = \sum_{i\geq 0, j\geq 0, k\geq 0} t^{i+j+k} f(a_i,b_j,c_k)$.

2.3.1 Déformations des systèmes triples de Lie

Les déformations formelles des systèmes triples de Lie ont été developpées en 2004 par Kubo et Taniguchi [90] en s'inspirant de la méthode de Gerstenhaber et en liaison avec la cohomologie de Yamaguti.

Définition 2.3.1. Soit $(L, [\cdot,\cdot,\cdot])$ un système triple de Lie. Une déformation formelle de L est donnée par l'application $\mathbb{K}[[t]]$-trilinéaire $[\cdot,\cdot,\cdot]_t : L[[t]] \times L[[t]] \times L[[t]] \to L[[t]]$ de la forme

$$[\cdot,\cdot,\cdot]_t = \sum_{i\geq 0} t^i [\cdot,\cdot,\cdot]_i,$$

où chaque $[\cdot,\cdot,\cdot]_i$ est une application trilinéaire $[\cdot,\cdot,\cdot]_i : L \times L \times L \to L$ (étendue pour être $\mathbb{K}[[t]]$-trilinéaire), $[\cdot,\cdot,\cdot] = [\cdot,\cdot,\cdot]_0$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$[x,y,z]_t = -[y,x,z]_t, \qquad \text{antisymétrie aux deux premiers entrés} \tag{2.26}$$

$$[x,y,z]_t + [y,z,x]_t + [z,x,y]_t = 0, \qquad \text{sommation cyclique} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_t]_t &= [[x_1,x_2,x_3]_t,x_4,x_5]_t + [x_3,[x_1,x_2,x_4]_t,x_5]_t \\ &\quad + [x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_t]_t, \quad \text{identité de Filippov.}\end{aligned} \tag{2.28}$$

La déformation est dite d'ordre k si $[\cdot,\cdot,\cdot]_t = \sum_{i\geq 0}^{k} t^i [\cdot,\cdot,\cdot]_i$.

Remarque 2.3.2. L'antisymétrie aux deux premiers entrés et la sommation cyclique nulle de $[\cdot,\cdot,\cdot]_t$ est équivalente à l'antisymétrie aux deux premiers entrés et la sommation cyclique nulle de tous les $[\cdot,\cdot,\cdot]_i$, pour $i \geq 0$.

Équation de déformation. L'équation (2.31) est appelée équation de déformation du système triple de Lie et est équivalente à :

$$\sum_{i\geq 0, j\geq 0} t^{i+j}\Big([[x_1,x_2,x_3]_i,x_4,x_5]_j + [x_3,[x_1,x_2,x_4]_i,x_5]_j + [x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_i]_j - [x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_i]_j\Big) = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}&\sum_{s\geq 0} t^s \sum_{i\geq 0}\Big([[x_1,x_2,x_3]_i,x_4,x_5]_{s-i} + [x_3,[x_1,x_2,x_4]_i,x_5]_{s-i} \\ &\quad + [x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_i]_{s-i} - [x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_i]_{s-i}\Big) = 0,\end{aligned}$$

ce qui est équivalente au système infini suivant obtenu en identifiant les coefficients de t

$$\begin{aligned}&\sum_{i\geq 0}\Big([[x_1,x_2,x_3]_i,x_4,x_5]_{s-i} + [x_3,[x_1,x_2,x_4]_i,x_5]_{s-i} \\ &\quad + [x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_i]_{s-i} - [x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_i]_{s-i}\Big) = 0, \quad \textit{pour } s = 0,1,2,\cdots\end{aligned} \tag{2.29}$$

En particulier, pour $s = 0$, on a

$$[[x_1,x_2,x_3]_0,x_4,x_5]_0 + [x_3,[x_1,x_2,x_4]_0,x_5]_0 + [x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_0]_0 - [x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_0]_0 = 0,$$

qui est l'identité de Filippov de L. De plus, pour $s = 1$, on a

$$\begin{aligned}&[[x_1,x_2,x_3]_0,x_4,x_5]_1 + [x_3,[x_1,x_2,x_4]_0,x_5]_1 + [x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_0]_1 - [x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_0]_1 \\ &+ [[x_1,x_2,x_3]_1,x_4,x_5]_0 + [x_3,[x_1,x_2,x_4]_1,x_5]_0 + [x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_1]_0 - [x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_1]_0 = 0.\end{aligned}$$

Théorème 2.3.3. *Soit $[\cdot,\cdot,\cdot]_t$ une déformation formelle du système triple de Lie $(L, [\cdot,\cdot,\cdot])$. Alors, l'élément infinitésimal de la déformation $[\cdot,\cdot,\cdot]_1$ est un 3-cocycle de la cohomologie de déformation de Yamaguti.*

Déformations équivalentes et triviales. Soient $[\cdot,\cdot,\cdot]_t$ et $[\cdot,\cdot,\cdot]'_t$ deux déformations formelles d'un système triple de Lie $(L, [\cdot,\cdot,\cdot])$, où $[\cdot,\cdot,\cdot]_t = \sum_{i\geq 0} t^i [\cdot,\cdot,\cdot]_i$ et $[\cdot,\cdot]'_t = \sum_{i\geq 0} t^i [\cdot,\cdot,\cdot]'_i$ avec $[\cdot,\cdot,\cdot] = [\cdot,\cdot,\cdot]_0 = [\cdot,\cdot,\cdot]'_0$.

Définition 2.3.4. On dit que $[\cdot,\cdot,\cdot]_t$ et $[\cdot,\cdot,\cdot]'_t$ sont équivalentes s'il existe un automorphisme formel φ_t de $L[[t]]$, s'écrivant $\varphi_t = id + \sum_{i\geq 1} t^i \varphi_i$, avec $\varphi_i : L \to L$ des applications $\mathbb{K}[[t]]$-linéaires, tel que

$$\varphi_t \circ [x,y,z]'_t = [\varphi_t(x), \varphi_t(y), \varphi_t(z)]_t, \quad \forall x,y,z \in L.$$

Une déformation $[\cdot,\cdot,\cdot]_t$ est dite triviale si elle est équivalente à la déformation $[\cdot,\cdot,\cdot]^0_t = \sum_{i\geq 0} t^i [\cdot,\cdot,\cdot]^0_i$, avec $[\cdot,\cdot,\cdot]^0_0 = [\cdot,\cdot,\cdot]$ et $[\cdot,\cdot,\cdot]^0_i = 0$ pour $i \geq 1$. Par un calcul direct, on obtient que

$$[\cdot,\cdot,\cdot]'_1 = [\cdot,\cdot,\cdot]_1 + \delta^1 \varphi_1$$

Théorème 2.3.5. *Soient $[\cdot,\cdot,\cdot]_t$ et $[\cdot,\cdot,\cdot]'_t$ deux déformations équivalentes d'un système triple de Lie $(L, [\cdot,\cdot,\cdot])$, alors leurs infinitesimals appartiennent à la même classe de cohomologie dans le troisième groupe de cohomologie de Yamaguti $\mathcal{H}^3_{Lts}(L, L)$.*

Définition 2.3.6. Soit $(L, [\cdot,\cdot,\cdot])$ un système triple de Lie et $[\cdot,\cdot,\cdot]_1$ un élément de $\mathcal{Z}^3_{Lts}(L, L)$, le 3-cocycle $[\cdot,\cdot,\cdot]_1$ est dit intégrable s'il existe une famille $([\cdot,\cdot,\cdot]_t)_{t\geq 0}$ telle que $[\cdot,\cdot,\cdot]_t = \sum_{i\geq 0} t^i [\cdot,\cdot,\cdot]_i$ définit une déformation formelle de L.

Définition 2.3.7. Un système triple de Lie est dite rigide si toute déformation est équivalente à la déformation triviale.

Théorème 2.3.8. *Toute déformation non-triviale de $[\cdot,\cdot,\cdot]$ est équivalente à une déformation dont l'élément infinitésimal n'est pas un cobord.*

D'où, si $\mathcal{H}^3_{Lts}(L, L) = 0$ alors toute déformation est équivalente à la déformation triviale.

Obstructions. Soit $[\cdot,\cdot,\cdot]_t$ une déformation de $[\cdot,\cdot,\cdot]$ d'ordre k, c'est-à-dire, $[\cdot,\cdot,\cdot]_t = \sum^k_{i\geq 0} t^i [\cdot,\cdot,\cdot]_i$. L'objectif est d'étendre cette déformation d'ordre k en une déformation d'ordre $k+1$, c'est-à-dire de trouver $[\cdot,\cdot,\cdot]_{k+1} : L \times L \times L \to L$ tel que $[\cdot,\cdot,\cdot]'_t = [\cdot,\cdot,\cdot]_t + t^{k+1}[\cdot,\cdot,\cdot]_{k+1}$ soit une déformation de $[\cdot,\cdot,\cdot]$.

Définition 2.3.9. Pour $x, y, z \in L$, on pose :

$$\begin{aligned} Ob^5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = & \sum_{n+m=k, n,m\geq 0} [[x_1, x_2, x_3]_m, x_4, x_5]_n + [x_3, [x_1, x_2, x_4]_m, x_5]_n \\ & + [x_3, x_4, [x_1, x_2, x_5]_m]_n - [x_1, x_2, [x_3, x_4, x_5]_m]_n. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Il est clair que $Ob^5 \in C^5_{Lts}(L, L)$. L'application Ob^5 est appelée cochaine d'obstruction à l'extension de la déformation $[\cdot,\cdot,\cdot]_t$.

Par un calcul direct, l'application Ob^5 est un 3-cocycle.

Théorème 2.3.10. *Soit $[\cdot,\cdot,\cdot]_t$ une déformation d'ordre k de $[\cdot,\cdot,\cdot]$. Alors, $[\cdot,\cdot,\cdot]_t$ s'étend en une déformation d'ordre $k+1$ si et seulement si Ob^5 est un 5-cobord.*

Corollaire 2.3.11. *Si $\mathcal{H}^5_{Lts}(L, L) = 0$, toute déformation d'ordre k s'étend en une déformation d'ordre $k+1$.*

2.3.2 Déformations des algèbres 3-Lie

Ce paragraphe est dédié aux déformations formelles des algèbres 3-Lie traitées par Gautheron [64] en 1996.

Définition 2.3.12. Soit $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ une algèbre 3-Lie. Une déformation formelle de $\mathfrak{g}$ est donnée par l'application $\mathbb{K}[[t]]$-trilinéaire antisymétrique $[\cdot,\cdot,\cdot]_t : L[[t]] \times L[[t]] \times L[[t]] \to L[[t]]$ de la forme

$$[\cdot,\cdot,\cdot]_t = \sum_{i\geq 0} t^i [\cdot,\cdot,\cdot]_i,$$

où chaque $[\cdot,\cdot,\cdot]_i$ est une application trilinéaire antisymétrique $[\cdot,\cdot,\cdot]_i : L \times L \times L \to L$ (étendue pour être $\mathbb{K}[[t]]$-trilinéaire), $[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g} = [\cdot,\cdot,\cdot]_0$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, [x_3, x_4, x_5]_t]_t = & [[x_1, x_2, x_3]_t, x_4, x_5]_t + [x_3, [x_1, x_2, x_4]_t, x_5]_t \\ & + [x_3, x_4, [x_1, x_2, x_5]_t]_t, \quad \textit{identité de Filippov} \end{aligned} \tag{2.31}$$

La déformation est dite d'ordre k si $[\cdot,\cdot,\cdot]_t = \sum^k_{i\geq 0} t^i [\cdot,\cdot,\cdot]_i$.

Équation de déformation. L'équation (2.31) est appelée équation de déformation d'une algèbre 3-Lie et est équivalente à :

$$\sum_{i\geq 0, j\geq 0} t^{i+j}\Big([[x_1,x_2,x_3]_i,x_4,x_5]_j+[x_3,[x_1,x_2,x_4]_i,x_5]_j+[x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_i]_j-[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_i]_j\Big)=0,$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{s\geq 0} t^s \sum_{i\geq 0}\Big([[x_1,x_2,x_3]_i,x_4,x_5]_{s-i}+[x_3,[x_1,x_2,x_4]_i,x_5]_{s-i}$$
$$+[x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_i]_{s-i}-[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_i]_{s-i}\Big)=0,$$

ce qui est équivalente au système infini suivant obtenu en identifiant les coefficients de t

$$\sum_{i\geq 0}\Big([[x_1,x_2,x_3]_i,x_4,x_5]_{s-i}+[x_3,[x_1,x_2,x_4]_i,x_5]_{s-i}$$
$$+[x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_i]_{s-i}-[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_i]_{s-i}\Big)=0,\quad pour\ s=0,1,2,\cdots \tag{2.32}$$

En particulier, pour $s=0$, on a

$$[[x_1,x_2,x_3]_0,x_4,x_5]_0+[x_3,[x_1,x_2,x_4]_0,x_5]_0+[x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_0]_0-[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_0]_0=0,$$

qui est l'identité de Filippov de L. De plus, pour $s=1$, on a

$$[[x_1,x_2,x_3]_0,x_4,x_5]_1+[x_3,[x_1,x_2,x_4]_0,x_5]_1+[x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_0]_1-[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_0]_1$$
$$+[[x_1,x_2,x_3]_1,x_4,x_5]_0+[x_3,[x_1,x_2,x_4]_1,x_5]_0+[x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_1]_0-[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_1]_0=0$$

Théorème 2.3.13. *Soit $[\cdot,\cdot,\cdot]_t$ une déformation formelle d'une algèbre 3-Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$. Alors, l'élément infinitésimal de la déformation $[\cdot,\cdot,\cdot]_1$ est un 2-cocycle de la cohomologie de déformation de Chevalley-Eilenberg.*

Déformations équivalentes et triviales. Soient $[\cdot,\cdot,\cdot]_t$ et $[\cdot,\cdot,\cdot]'_t$ deux déformations formelles d'une algèbre 3-Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$, où $[\cdot,\cdot,\cdot]_t=\sum_{i\geq 0} t^i[\cdot,\cdot,\cdot]_i$ et $[\cdot,\cdot]'_t=\sum_{i\geq 0} t^i[\cdot,\cdot,\cdot]'_i$ avec $[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}=[\cdot,\cdot,\cdot]_0=[\cdot,\cdot,\cdot]'_0$.

Définition 2.3.14. On dit que $[\cdot,\cdot,\cdot]_t$ et $[\cdot,\cdot,\cdot]'_t$ sont équivalentes s'il existe un automorphisme formel φ_t de $\mathfrak{g}[[t]]$, s'écrivant $\varphi_t=id+\sum_{i\geq 1} t^i\varphi_i$, avec $\varphi_i:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ des applications $\mathbb{K}[[t]]$-linéaires, tel que

$$\varphi_t\circ[x,y,z]'_t=[\varphi_t(x),\varphi_t(y),\varphi_t(z)]_t,\quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}.$$

Une déformation $[\cdot,\cdot,\cdot]_t$ est dite triviale si elle est équivalente à la déformation $[\cdot,\cdot,\cdot]^0_t=\sum_{i\geq 0} t^i[\cdot,\cdot,\cdot]^0_i$, avec $[\cdot,\cdot,\cdot]^0_0=[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ et $[\cdot,\cdot,\cdot]^0_i=0$ pour $i\geq 1$. Par un calcul direct, on obtient que

$$[\cdot,\cdot,\cdot]'_1=[\cdot,\cdot,\cdot]_1+\partial\varphi_1$$

Théorème 2.3.15. *Soient $[\cdot,\cdot,\cdot]_t$ et $[\cdot,\cdot,\cdot]'_t$ deux déformations équivalentes d'une algèbre 3-Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$, alors leurs infinitesimals appartiennent à la même classe de cohomologie dans le deuxième groupe de cohomologie de Chevalley-Eilenberg $H^2_{3Lie}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$.*

Définition 2.3.16. Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre 3-Lie et $[\cdot,\cdot,\cdot]_1$ un élément de $Z^2_{3Lie}(L,L)$, le 2-cocycle $[\cdot,\cdot,\cdot]_1$ est dit intégrable s'il existe une famille $([\cdot,\cdot,\cdot]_t)_{t\geq 0}$ telle que $[\cdot,\cdot,\cdot]_t=\sum_{i\geq 0} t^i[\cdot,\cdot,\cdot]_i$ définit une déformation formelle de $\mathfrak{g}$.

Définition 2.3.17. Une algèbre 3-Lie est dite rigide si toute déformation est équivalente à la déformation triviale.

Théorème 2.3.18. *Toute déformation non-triviale de $[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ est équivalente à une déformation dont l'élément infinitésimal n'est pas un cobord.*

D'où, si $H^2_{3Lie}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=0$ alors toute déformation est équivalente à la déformation triviale.

2.4 L_∞-algèbres et éléments de Maurer-Cartan

Dans cette section, on rappelle la définition d'une L_∞-algèbre qui a été introduite par Schlessinger et Stasheff (voir [124]) et en particulier on présente celle d'une 3-algèbre de Lie qui sera utile dans le troisième chapitre pour donner une caractérisation par les éléments de Maurer-Cartan des opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les systèmes triples de Lie. Ensuite, on rappelle la construction de Voronov par la théorie des crochets dérivés supérieurs, qui est un moyen très utile pour construire des L_∞-algèbres.

Une permutation $\sigma \in \mathbb{S}_n$ est appelée $(i, n-i)$-shuffle si $\sigma(1) < \cdots < \sigma(i)$ et $\sigma(i+1) < \cdots < \sigma(n)$. Si $i = 0$ ou $i = n$, on suppose que $\sigma = Id$. L'ensemble des $(i, n-i)$-shuffles sera noté $\mathbb{S}_{(i,n-i)}$.

Définition 2.4.1. Une L_∞-algèbre est un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué ($\mathfrak{g} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} g^k$) muni d'une famille des applications linéaires de degré 1 ; $l_k : \otimes^k \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ($k \geq 1$) qui satisfont pour tout élément homogène $x_1, \cdots, x_n \in \mathfrak{g}$:

(i) La symétrie graduée :

$$l_n(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n-1)}, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) l_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \quad \forall\, \sigma \in \mathbb{S}_n.$$

(ii) L'identité de Jacobi généralisée :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i,n-i)}} \varepsilon(\sigma) l_{n-i+1}(l_i(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(i)}), x_{\sigma(i+1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = 0 \quad \forall\, n \geq 1.$$

La notion de k-algèbre de Lie a été introduite dans [71], voir [52] pour plus d'applications. Il s'avère qu'une k-algèbre de Lie est une L_∞-algèbre spéciale, dans laquelle seule le crochet k-aire est non nul. On donne ici la définition précise d'une 3-algèbre de Lie.

Définition 2.4.2. Une 3-algèbre de Lie est un espace vectoriel gradué $\mathfrak{g} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ muni d'une application 3-linéaire $\{\cdot,\cdot,\cdot\}_\mathfrak{g} : \otimes^3 \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ de degré 1, satisfaisant

(i) La symétrie graduée :

$$\{x_1, x_2, x_3\}_\mathfrak{g} = (-1)^{x_1 x_2}\{x_2, x_1, x_3\}_\mathfrak{g} = (-1)^{x_2 x_3}\{x_1, x_3, x_2\}_\mathfrak{g},\ \forall x_1, x_2, x_3 \in H(\mathfrak{g}), \tag{2.33}$$

(ii) identité de Jacobi généralisée :

$$\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_5} \varepsilon(\sigma)\{\{x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}), x_{\sigma(3)}\}_\mathfrak{g}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}\}_\mathfrak{g} = 0,\ \forall x_i \in H(\mathfrak{g}), 1 \leq i \leq 5. \tag{2.34}$$

Remarque 2.4.3. Les 3-algèbres de Lie et les algèbres 3-Lie sont des généralisations naturelles des algèbres de Lie. Mais elles ne sont pas identiques. Dans une algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$, l'identité de Jacobi se lit comme suit :

$$[[x_1, x_2]_\mathfrak{g}, x_3]_\mathfrak{g} + [[x_2, x_3]_\mathfrak{g}, x_1]_\mathfrak{g} + [[x_3, x_1]_\mathfrak{g}, x_2]_\mathfrak{g} = 0. \tag{2.35}$$

Une manière de comprendre l'identité de Jacobi est de dire que $ad(x_1)$ est une dérivation. En généralisant ainsi, on obtient une algèbre 3-Lie, ou plus généralement une algèbre n-Lie [63]. On peut aussi reformuler l'identité de Jacobi comme suit :

$$\sum_{\sigma\in\mathbb{S}(2,1)} (-1)^\sigma [[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]_\mathfrak{g}, x_{\sigma(3)}]_\mathfrak{g} = 0. \tag{2.36}$$

En généralisant de ce point de vue, on obtient une 3-algèbre de Lie, ou plus généralement une k-algèbre de Lie. Dans le chapitre 3, Il est très surprenant de constater que c'est une 3-algèbre de Lie qui caractérise les opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur un système triple de Lie en tant qu'éléments de Maurer-Cartan.

Définition 2.4.4. Un élément de Maurer-Cartan d'une L_∞-algèbre $(\mathfrak{g} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k, \{l_i\}_{i=1}^{+\infty})$ est un élément $\pi \in \mathfrak{g}^0$ qui vérifie l'équation de Maurer-Cartan suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} l_n(\pi, \cdots, \pi) = 0. \tag{2.37}$$

Soit π un élément de Maurer-Cartan d'une L_∞-algèbre $(\mathfrak{g}, \{l_i\}_{i=1}^{+\infty})$. On définit une série d'applications linéaires $l_k^\pi : \otimes^k \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ de degré 1 par :

$$l_k^\pi(x_1, \cdots, x_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} l_{n+k}\{\underbrace{\pi, \cdots, \pi}_{n}, x_1, \cdots, x_k\}, \qquad \forall\, x_1, \cdots, x_n \in \mathfrak{g} \text{ et } k \geq 1. \tag{2.38}$$

Définition 2.4.5. Un élément de Maurer-Cartan d'une 3-algèbre de Lie $(\mathfrak{g} = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_\mathfrak{g})$ est un élément $\pi \in \mathfrak{g}^0$ qui vérifie l'équation de Maurer-Cartan suivante :

$$\frac{1}{3!}\{\pi, \pi, \pi\}_\mathfrak{g} = 0. \tag{2.39}$$

Soit π un élément de Maurer-Cartan d'une 3-algèbre de Lie $(\mathfrak{g} = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_\mathfrak{g})$. On définit une série d'applications linéaires $l_k^\pi : \otimes^k \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ de degré 1 par :

$$l_1^\pi(x_1) = \frac{1}{2}\{\pi, \pi, x_1\}_\mathfrak{g}, \tag{2.40}$$

$$l_2^\pi(x_1, x_2) = \{\pi, x_1, x_2\}_\mathfrak{g}, \tag{2.41}$$

$$l_3^\pi(x_1, x_2, x_3) = \{x_1, x_2, x_3\}_\mathfrak{g}, \tag{2.42}$$

$$l_k^\pi = 0,\ k \geq 4. \tag{2.43}$$

Théorème 2.4.6. *[66] Avec les notations ci-dessus, $(\mathfrak{g}, \{l_i^\pi\}_{i=1}^{+\infty})$ est une L_∞-algèbre, qui est obtenue en twistant avec un élément de Maurer-Cartan π de L_∞-algèbre $(\mathfrak{g}, \{l_i\}_{i=1}^{+\infty})$. En outre, $\pi + \pi'$ un élément de Maurer-Cartan de $(\mathfrak{g}, \{l_i\}_{i=1}^{+\infty})$ si et seulement si π' est un élément de Maurer-Cartan de L_∞-algèbre twistée $(\mathfrak{g}, \{l_i^\pi\}_{i=1}^{+\infty})$.*

Dans [141], Th. Voronov a développé la théorie des crochets dérivés supérieurs, qui est un outil utile pour construire des L_∞-algèbres explicites.

Définition 2.4.7. Une **Vor**-data consiste en un quadruple $(\mathfrak{g}, F, \mathcal{P}, \Delta)$, où

- $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ est une algèbre de Lie graduée, F est une sous-algèbre de Lie graduée abélienne de $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$,
- $\mathcal{P} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une projection, c'est à dire, $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}$, dont l'image est F et le noyau est une sous-algèbre de Lie graduée de $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$,
- Δ est un élément de $\ker(\mathcal{P})^1$ tel que $[\Delta, \Delta] = 0$.

Théorème 2.4.8. *Soit $(\mathfrak{g}, F, \mathcal{P}, \Delta)$ une **Vor**-data. Alors $(F, \{l_k\}_{k=1}^{+\infty})$ est une L_∞-algèbre, où*

$$l_k(a_1, \cdots, a_k) = \mathcal{P}\underbrace{[\cdots[[}_{k}\Delta, a_1], a_2], \cdots, a_k], \quad \text{pour } a_1, \cdots, a_k \in F. \tag{2.44}$$

*Nous appelons $\{l_k\}_{k=1}^{+\infty}$ les crochets dérivés supérieurs de **Vor**-data $(\mathfrak{g}, F, \mathcal{P}, \Delta)$.*

Chapitre 3

Équation de Maurer-Cartan, cohomologies et déformations des opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les systèmes triples de Lie

Le but de ce chapitre est d'étudier la notion d'opérateur de Rota-Baxter relatif sur un système triple de Lie muni d'une représentation, et d'introduire une algèbre de Lie graduée dont les éléments de Maurer-Cartan correspondent à des systèmes triples de Lie. En parallèle, on construit une L_∞-algèbre dont les éléments de Maurer-Cartan sont des opérateurs de Rota-Baxter relatifs. Cela permet de définir la cohomologie d'un opérateur de Rota-Baxter relatif. De plus, cette cohomologie peut être vue comme celle de Yamaguti pour un certain système triple de Lie, avec des coefficients dans une représentation spécifique. Par ailleurs, on étudie les déformations des opérateurs de Rota-Baxter relatifs du point de vue cohomologique en déterminant la classe d'obstruction liée à l'extension d'une déformation d'ordre n. Enfin, des liens entre la cohomologie des opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les algèbres de Lie et sur les systèmes triples de Lie associés sont établis.

3.1 Opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les systèmes triples de Lie

Dans cette section, on introduit la notion d'opérateur de Rota-Baxter relatif sur un système triple de Lie. Ensuite, on présente quelques exemples et une caractérisation de cet opérateur à l'aide de son graphe.

Définition 3.1.1. Un opérateur de Rota-Baxter de poids zéro sur un système triple de Lie $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ est une application linéaire $R : L \to L$ qui vérifie :

$$[R(x),R(y),R(z)] = R\Big([R(x),R(y),z] + [R(x),y,R(z)] + [x,R(y),R(z)]\Big),\ \forall x,y,z \in L.$$

Définition 3.1.2. Soient $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ un système triple de Lie et (V,θ) une représentation. Une application linéaire $T : V \to L$ est appelée un opérateur de Rota-Baxter relatif si elle vérifie :

$$[Tu,Tv,Tw] = T\Big(D(Tu,Tv)w + \theta(Tv,Tw)u - \theta(Tu,Tw)v\Big), \quad \forall u,v,w \in V. \tag{3.1}$$

Si $V = L$, alors T est un opérateur de Rota-Baxter de poids zéro sur L associé à la représentation adjointe.Ainsi, les opérateurs de Rota-Baxter relatifs constituent une généralisation des opérateurs de Rota-Baxter de poids zéro.

Dans la suite, on caractérise les opérateurs de Rota-Baxter relatifs en termes de graphes.

Proposition 3.1.3. *Soient $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ un système triple de Lie et (V,θ) une représentation. Une application linéaire $T : V \to L$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif si et seulement si son graphe $Gr(T) = \{(Tu,u)| \in V\}$ est une sous-algèbre du produit semi-direct $L \ltimes_\theta V$.*

Preuve 3.1.4. Soit $T : V \to L$ une application linéaire. Pour tout $u,v,w \in V$, on a :

$$\begin{aligned}&[Tu+u,Tv+v,Tw+w]L\oplus V\\ =&\Big([Tu,Tv,Tw],\ D(Tu,Tv)w+\theta(Tv,Tw)u-\theta(Tu,Tw)v\Big).\end{aligned}$$

Cela implique que le graphe $Gr(T)$ est un sous algèbre du produit semi-direct $L \ltimes_\theta V$ si et seulement si T satisfait :

$$[Tu,Tv,Tw] = T\Big(D(Tu,Tv)w+\theta(Tv,Tw)u-\theta(Tu,Tw)v\Big).$$

Cela signifie que T est un opérateur de Rota-Baxter relatif.

Étant donné que V et $Gr(T)$ sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.1.5. *Soit $T : V \to L$ un opérateur de Rota-Baxter relatif. Alors, il existe une structure de système triple de Lie sur V définie par :*

$$[u,v,w]_T = D(Tu,Tv)w+\theta(Tv,Tw)u-\theta(Tu,Tw)v \quad \forall\, u,v,w \in V. \tag{3.2}$$

De plus, T est un morphisme de systèmes triples de Lie.

Dans la proposition suivante, on montre qu'un opérateur de Rota-Baxter relatif peut être transformé en un opérateur de Rota-Baxter de poids zéro.

Proposition 3.1.6. *Soient $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ un système triple de Lie, (V,θ) une représentation et $T : V \to L$ un opérateur de Rota-Baxter relatif. On définit $\widehat{T} \in End(L\oplus V)$ par $\widehat{T}(x,u) = (T(u),0)$. Alors T est un opérateur de Rota-Baxter relatif si et seulement $\widehat{T}$ est un opérateur de Rota-Baxter de poids zéro sur $L\oplus V$.*

Preuve 3.1.7. Pour tout $x,y,z \in L$ et $u,v,w \in V$, on a

$$\begin{aligned}&[\widehat{T}(x,u),\widehat{T}(y,v),\widehat{T}(z,w)]_{L\oplus V}\\ &-\widehat{T}\Big([\widehat{T}(x,u),\widehat{T}(y,v),(z,w)]_{L\oplus V}+[\widehat{T}(x,u),(y,v),\widehat{T}(z,w)]_{L\oplus V}+[(x,u),\widehat{T}(y,v),\widehat{T}(z,w)]_{L\oplus V}\\ =&[(Tu,0),(Tv,0),(Tw,0)]_{L\oplus V}\\ &-\widehat{T}\Big([(Tu,0),(Tv,0),(z,w)]_{L\oplus V}+[(Tu,0),(y,v),(Tw,0)]_{L\oplus V}+[(x,u),(Tv,0),(Tw,0)]_{L\oplus V}\\ =&\Big([Tu,Tv,Tw],0\Big)-\Big(T(D(Tu,Tv)w+\theta(Tv,Tw)u-\theta(Tu,Tw)v),0\Big)\\ =&\Big([Tu,Tv,Tw]-T(D(Tu,Tv)w+\theta(Tv,Tw)u-\theta(Tu,Tw)v),0\Big).\end{aligned}$$

Alors T est un opérateur de Rota-Baxter relatif si et seulement $\widehat{T}$ est un opérateur de Rota-Baxter de poids zéro sur $L\oplus V$.

Exemple 3.1.8. On considère le système triple de Lie L donné par l'exemple 2.1.4. Alors L'opérateur défini par : $T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ est un opérateur de Rota-Baxter de poids zéro sur L.

Exemple 3.1.9. On considère le système triple de Lie L donné par l'exemple 2.1.5. Alors L'opérateur défini par :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & d & e \\ f & g & h & k \end{pmatrix}$$

est un opérateur de Rota-Baxter de poids zéro sur L.

Une autre caractérisation d'opérateurs de Rota-Baxter relatifs peut être formulée en termes d'opérateurs de Nijenhuis sur les systèmes triples de Lie. Tout d'abord, on présente la définition suivante d'un opérateur de Nijenhuis sur un système triple de Lie.

Définition 3.1.10. Soit $(L, [\cdot,\cdot,\cdot])$ un système triple de Lie Une application linéaire $T : L \to L$ est appelée un opérateur de Nijenhuis si elle vérifie :

$$\begin{aligned}[][Nx,Ny,Nz] =& N\Big([Nx,Ny,z] + [x,Ny,Nz] + [Nx,y,Nz] \\ & - N\Big([Nx,y,z] + [x,Ny,z] + [x,y,Nz] - N[x,y,z]\Big)\Big).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Lemme 3.1.11. *Soit $(L, [\cdot,\cdot,\cdot])$ un système triple de Lie et N un opérateur de Nijenhuis sur L. On définit le crochet :*

$$\begin{aligned}[][x,y,z]_N =& [Nx,Ny,z] + [x,Ny,Nz] + [Nx,y,Nz] \\ & - N\Big([Nx,y,z] + [x,Ny,z] + [x,y,Nz] - N[x,y,z]\Big).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Alors $(L, [\cdot,\cdot,\cdot]_N)$ est un système triple de Lie et N est un morphisme de $(L, [\cdot,\cdot,\cdot]_N)$ vers $(L, [\cdot,\cdot,\cdot])$.

Proposition 3.1.12. *Soient $(L, [\cdot,\cdot,\cdot])$ un système triple de Lie et (V, θ) une représentation. L'opérateur $T : V \to L$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif si et seulement si*

$$\overline{T} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : L \oplus V \to L \oplus V$$

est un opérateur de Nijenhuis sur le produit semi-direct $L \oplus V$.

Preuve 3.1.13. Pour tout $x, y, z \in L$ et $u, v, w \in V$, on a

$$[\overline{T}(x+u), \overline{T}(y+v), \overline{T}(z+w)]_{L\oplus V} = [Tu, Tv, Tw].$$

Puisque $\overline{T}^2 = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}&\overline{T}\Big([\overline{T}(x+u), \overline{T}(y+v), z+w]_{L\oplus V} + [\overline{T}(x+u), y+v, \overline{T}(z+w)]_{L\oplus V} \\ &+ [x+u, \overline{T}(y+v), \overline{T}(z+w)]_{L\oplus V}\Big) - \overline{T}^2\Big([\overline{T}(x+u), y+v, z+w]_{L\oplus V} + [x+u, \overline{T}(y+v), z+w]_{L\oplus V} \\ &+ [x+u, y+v, \overline{T}(z+w)]_{L\oplus V}\Big) + \overline{T}^3\Big([x+u, y+v, z+w]_{L\oplus V}\Big) \\ &= T\Big(D(Tu,Tv)w + \theta(Tv,Tw)u - \theta(Tu,Tw)v\Big),\end{aligned}$$

cela implique que $\overline{T}$ est un opérateur de Nijenhuis sur le produit semi-direct $L \oplus V$ si et seulement si l'équation (3.1) est satisfaite.

Définition 3.1.14. Soit T un opérateur de Rota-Baxter relatif sur un système triples de Lie $(L, [\cdot,\cdot,\cdot])$ avec une représentation (V, θ). On suppose que $(L', [\cdot,\cdot,\cdot]')$ soit un autre système triple de Lie avec une représentation (V', θ') et que $T' : V' \to L'$ soit un opérateur de Rota-Baxter relatif sur L'. Un morphisme d'opérateurs de Rota-Baxter relatifs T et T' consiste en une paire (ϕ, ψ) d'un morphisme de système triple de Lie $\phi : L \to L'$ et d'une application linéaire $\psi : V \to V'$ satisfaisant :

$$\phi \circ T = T' \circ \psi, \tag{3.5}$$
$$\psi\theta(x,y) = \theta(\phi(x), \phi(y))\psi, \quad \forall x, y \in L. \tag{3.6}$$

En particulier, si ϕ et ψ sont tous deux bijectifs, alors (ϕ, ψ) est appelé un isomorphisme.

Proposition 3.1.15. *Soient $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ et $(L^{'},[\cdot,\cdot,\cdot]^{'})$ deux systèmes triples de Lie avec deux représentations (V,θ) et (V',θ') respectivement. Soit T et $T^{'}$ deux opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur L et L' respectivement. Une paire d'applications linéaires $(\phi : L \to L^{'}, \psi : V \to V^{'})$ est un morphisme d'opérateurs de Rota-Baxter relatifs T et $T^{'}$ si et seulement si*

$$Gr((\phi,\psi)) = \Big\{ \Big((x,u),(\phi(x),\psi(u)\Big) \mid x \in L, u \in V \Big\} \subset (L \oplus V) \oplus (L^{'} \oplus V^{'}), \tag{3.7}$$

est une sous-algèbre, où $L \oplus V$ et $L^{'} \oplus V^{'}$ sont munis de structures de produits semi-directs de système triple de Lie et $(L \oplus V) \oplus (L^{'} \oplus V^{'})$ est muni du crochet suivant :

$$[\cdot,\cdot,\cdot]_{(L\oplus V)\oplus(L'\oplus V')} = [\cdot,\cdot,\cdot]_{L\oplus V} + [\cdot,\cdot,\cdot]_{L'\oplus V'}.$$

3.2 Algèbre de Lie graduée associée aux systèmes triples de Lie

Dans cette section, on introduit une algèbre de contrôle des systèmes triples de Lie, autrement dit, c'est une algèbre de Lie graduée dont les éléments de Maurer-Cartan correspondent à des systèmes triples de Lie. De plus, on montre que la théorie de la cohomologie pour les systèmes triples de Lie, introduite par Yamaguti, peut être récupérée à partir de cette algèbre de contrôle.

Définition 3.2.1. [47] Une algèbre 3-Leibniz est un couple $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ constitué d'un espace vectoriel L et d'une application 3-linèaire $[\cdot,\cdot,\cdot] : \otimes^3 L \to L$ satisfaisant suivante :

$$[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]] = [[x_1,x_2,x_3],x_4,x_5] + [x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5] + [x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]], \tag{3.8}$$

pour tout $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \in L$.

Une permutation $\sigma \in \mathbb{S}_n$ est appelée $(i,n-i)$-shuffle si $\sigma(1) < \cdots < \sigma(i)$ et $\sigma(i+1) < \cdots < \sigma(n)$. Si $i = 0$ ou $i = n$, on suppose que $\sigma = Id$. L'ensemble des $(i,n-i)$-shuffles sera noté $\mathbb{S}_{(i,n-i)}$. Soit L un espace vectoriel. On considère l'espace vectoriel gradué $\mathfrak{C}^*(L,L) = \oplus_{n\geq 0}\mathfrak{C}^n(L,L)$, où $\mathfrak{C}^n(L,L)$ est l'ensemble des applications linéaires $P \in \mathrm{Hom}(\underbrace{(\otimes^2 L)\cdots\otimes(\otimes^2 L)}_{n\geq 0}\otimes L, L)$. Le degré d'un élément dans $\mathfrak{C}^*(L,L)$ est défini comme étant n. On définit

$$[P,Q]_R = (-1)^{pq} i_P(Q) - i_Q(P), \quad \forall\, P \in \mathfrak{C}^p(L,L), Q \in \mathfrak{C}^q(L,L). \tag{3.9}$$

Où $i_P(Q) \in \mathfrak{C}^{p+q}(L,L)$ est donné par :

$$i_P(Q) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{(k-1)q} \sum_{\sigma\in Sh(k-1,q)} \epsilon(\sigma) P \circ_k^{\sigma} Q,$$

où σ est une permutation dans $(k-1,q)$-shuffle et $P \circ_k^{\sigma} Q$ est défini pour $k = p+1$ par :

$$(P \circ_{p+1}^{\sigma} Q)(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{p+q},z) = P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p)},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(p+1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p+q)},z)),$$

et pour $1 \leq k \leq p$ par :

$$\begin{aligned}
&(P \circ_k^{\sigma} Q)(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{p+q},z)\\
=&P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k-1)},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)},x_{k+q})\otimes y_{k+q},\mathfrak{X}_{k+q+1},\cdots,\mathfrak{X}_{p+q},z)\\
&+ P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k-1)},x_{k+q}\otimes Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)},y_{k+q}),\mathfrak{X}_{k+q+1},\cdots,\mathfrak{X}_{p+q},z),
\end{aligned}$$

où $\mathfrak{X}_i = x_i \otimes y_i \in \otimes^2 L$, $i = 1,2,\cdots,p+q$ et $z \in L$.

Théorème 3.2.2. *[118] L'espace vectoriel gradué $\mathfrak{C}^*(L,L)$ muni du crochet gradué défini par* (3.9) *est une algèbre de Lie graduée et ses éléments de Maurer-Cartan sont les structures de l'algèbre* 3-Leibniz *sur l'espace vectoriel L.*

Voir ([47,64,118]) pour plus de détails sur la relation entre les algèbres de Leibniz et les algèbres 3-Leibniz, ainsi que leurs applications. Motivés par le fait que les systèmes triples de Lie constituent une sous-classe des algèbres de 3-Leibniz, il convient de choisir une sous-algèbre de Lie graduée de $(\mathfrak{C}^*(L,L),[\cdot,\cdot]_R)$, définie précédemment, dont les éléments de Maurer-Cartan correspondent à des systèmes triples de Lie. Pour cela, on considère le sous-espace gradué $\mathfrak{C}^*_{Lts}(L,L)=\oplus_{n\geq 0}\mathfrak{C}^n_{Lts}(L,L)$ de $\mathfrak{C}^*(L,L)$, où $\mathfrak{C}^n_{Lts}(L,L)$ est l'espace vectoriel des applications linéaires qui satisfont les conditions suivantes :

$$P(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2,\cdots,\mathfrak{X}_{n-1},x,x,y)=0, \tag{3.10}$$

$$P(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2,\cdots,\mathfrak{X}_{n-1},x,y,z)+P(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2,\cdots,\mathfrak{X}_{n-1},y,z,x)+P(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2,\cdots,\mathfrak{X}_{n-1},z,x,y)=0, \tag{3.11}$$

pour $\mathfrak{X}_i\in\otimes^2 L$, $1\leq i\leq n-1$, $x,y,z\in L$.

Théorème 3.2.3. *Avec les notations ci-dessus, $(\mathfrak{C}^*_{Lts}(L,L),[\cdot,\cdot]_R)$ est une sous-algèbre de Lie graduée de l'algèbre de Lie graduée $(\mathfrak{C}^*(L,L),[\cdot,\cdot]_R)$. De plus, ses éléments de Maurer-Cartan correspondent aux systèmes triples de Lie sur l'espace vectoriel L.*

Preuve 3.2.4. Pour la première partie, il suffit de prouver les conditions (3.10) et (3.11). Soit $P\in\mathfrak{C}^p_{Lts}(L,L)$ et $Q\in\mathfrak{C}^q_{Lts}(L,L)$. On a alors

$$\begin{aligned}
& i_P(Q)(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{p+q-1},x,x,z)\\
=& \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{(k-1)q}\sum_{\sigma\in Sh(k-1,q)}\epsilon(\sigma)P\circ_k^\sigma Q(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{p+q-1},x,x,z)\\
=& \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{(k-1)q}\sum_{\sigma\in Sh(k-1,q)}\epsilon(\sigma)\times\\
& \Big(P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k-1)},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)},x_{k+q}),y_{k+q},\mathfrak{X}_{k+q+1},\cdots,\mathfrak{X}_{p+q-1},x,x,z)\\
& +P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k-1)},x_{k+q},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)},y_{k+q}),\mathfrak{X}_{k+q+1},\cdots,\mathfrak{X}_{p+q-1},x,x,z)\Big)\\
=& \sum_{k=1,k\neq p}^{p+1}(-1)^{(k-1)q}\sum_{\sigma\in Sh(k-1,q)}\epsilon(\sigma)\times\\
& \Big(P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k-1)},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)},x_{k+q}),y_{k+q},\mathfrak{X}_{k+q+1},\cdots,\mathfrak{X}_{p+q-1},x,x,z)\\
& +P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k-1)},x_{k+q},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)},y_{k+q}),\mathfrak{X}_{k+q+1},\cdots,\mathfrak{X}_{p+q-1},x,x,z)\Big)\\
& +\sum_{\sigma\in Sh(p-1,q)}(-1)^{(p-1)q}\epsilon(\sigma)\Big(P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p-1)},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(p)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p+q-1)},x),x,z)\\
& +P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p-1)},x,Q(\mathfrak{X}_{\sigma(p)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p+q-1)},x),z)\Big)\\
\overset{(3.11)}{=}& 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
& \circlearrowleft_{x,y,z} i_P(Q)(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{p+q-1},x,y,z)\\
=& \circlearrowleft_{x,y,z}\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{(k-1)q}\sum_{\sigma\in Sh(k-1,q)}\epsilon(\sigma)P\circ_k^\sigma Q(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{p+q-1},x,y,z)\\
=& \circlearrowleft_{x,y,z}\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{(k-1)q}\sum_{\sigma\in Sh(k-1,q)}\epsilon(\sigma)\times\\
& \Big(P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k-1)},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)},x_{k+q}),y_{k+q},\mathfrak{X}_{k+q+1},\cdots,\mathfrak{X}_{p+q-1},x,y,z)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k-1)},x_{k+q},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)},y_{k+q}),\mathfrak{X}_{k+q+1},\cdots,\mathfrak{X}_{p+q-1},x,y,z)\Big)\\
=&\circlearrowleft_{x,y,z}\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{(k-1)q}\sum_{\sigma\in Sh(k-1,q)}\epsilon(\sigma)\times\\
&\Big(P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k-1)},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)},x_{k+q}),y_{k+q},\mathfrak{X}_{k+q+1},\cdots,\mathfrak{X}_{p+q-1},x,y,z)\\
&+ P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k-1)},x_{k+q},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)},y_{k+q}),\mathfrak{X}_{k+q+1},\cdots,\mathfrak{X}_{p+q-1},x,y,z)\Big)\\
&+\circlearrowleft_{x,y,z}\sum_{\sigma\in Sh(p-1,q)}(-1)^{(p-1)q}\epsilon(\sigma)\Big(P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p-1)},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(p)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p+q-1)},x),y,z)\\
&+ P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p-1)},y,Q(\mathfrak{X}_{\sigma(p)},\cdots y,\mathfrak{X}_{\sigma(p+q-1)},x),z)\Big)\\
&+\circlearrowleft_{x,y,z}\sum_{\sigma\in Sh(p,q)}(-1)^{pq}\epsilon(\sigma)\Big(P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p)},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(p+1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p+q)},z))\Big)\\
=&\circlearrowleft_{x,y,z}\sum_{\sigma\in Sh(p-1,q)}(-1)^{(p-1)q}\epsilon(\sigma)\Big(P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p-1)},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(p)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p+q-1)},x),y,z)\\
&+ P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p-1)},x,Q(\mathfrak{X}_{\sigma(p)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p+q-1)},y),z)\Big)\\
&+\circlearrowleft_{x,y,z}\sum_{\sigma\in Sh(p-1,q)}(-1)^{pq}\epsilon(\sigma)\Big(P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p)},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(p+1)},\cdots,x,y,z))\Big)\\
&+\circlearrowleft_{x,y,z}\sum_{\sigma\in Sh(p-1,q)}(-1)^{pq}(-1)^{q}\epsilon(\sigma)\Big(P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p)},x,y,Q(\mathfrak{X}_{\sigma(p+1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p+q-1)},z))\Big)\\
\overset{(3.10)}{=}&0.
\end{aligned}
$$

On en déduit donc que $i_P(Q)\in\mathfrak{C}^{p+q}_{Lts}(L,L)$. Par conséquent, l'espace vectoriel gradué $\mathfrak{C}^{*}_{Lts}(L,L)$ est stable sous le crochet $[\cdot,\cdot]_R$ c'est-à-dire que $[P,Q]_R\in\mathfrak{C}^{*}_{Lts}(L,L)$ pour tout $P,Q\in\mathfrak{C}^{*}_{Lts}(L,L)$. Ainsi, $(\mathfrak{C}^{*}_{Lts}(L,L),[\cdot,\cdot]_R)$ est une sous-algèbre de Lie graduée de $(\mathfrak{C}^{*}(L,L),[\cdot,\cdot]_R)$.

Pour la seconde partie, pour $\pi\in\mathfrak{C}^{1}_{Lts}(L,L)$ et $x,y,z\in L$, on a

$$\pi(x,x,y)=0,\quad \pi(x,y,z)+\pi(y,z,x)+\pi(z,x,y)=0.$$

De plus, pour $\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_1\in\otimes^2L$ et $z\in L$, on obtient

$$
\begin{aligned}
[\pi,\pi]_R(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_1,z)&=-2i_\pi(\pi)(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_1,z)\\
&=-2\big(-\pi(\pi(x_1,y_1,x_2),y_2,z)-\pi(x_2,\pi(x_1,y_1,y_2),z)\big)\\
&\quad-2\big(\pi(x_1,y_1,\pi(x_2,y_2,z))-\pi(x_2,y_2,\pi(x_1,y_1,z))\big),
\end{aligned}
$$

cela signifie que π définit une structure de système triple de Lie sur l'espace vectoriel L si et seulement si $[\pi,\pi]_R=0$.

À la fin de cette section, on démontre que la théorie de la cohomologie pour les systèmes triples de Lie, introduite par Yamaguti, peut être récupérée à partir de l'algèbre de contrôle donnée ci-dessus. Supposons que $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ est un système triple de Lie et on fixons $\pi(x,y,z)=[x,y,z]$ pour tout $x,y,z\in L$. On considère l'opérateur cobord de Yamaguti $\delta^{2n-1}:\mathcal{C}^{2n-1}_{Lts}(L,V)\to\mathcal{C}^{2n+1}_{Lts}(L,V)$, donné par l'équation (2.9), associé à la représentation adjointe, alors on a

Théorème 3.2.5. *Pour tout $f\in\mathcal{C}^{2n-1}_{Lts}(L,L)=\mathfrak{C}^{n-1}_{Lts}(L,L)$, on a*

$$\delta^{2n-1}(f)=(-1)^{n-1}[\pi,f]_R,\quad\forall n=1,2,\cdots\tag{3.12}$$

Preuve 3.2.6. Pour tout $\mathfrak{X}_i=x_i\otimes y_i\in\otimes^2L$, $i=1,2,\cdots,n$ et $z\in L$, on a

$$[\pi,f]_R(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_n,z)=((-1)^{n-1}\pi\circ f-f\circ\pi)(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_n,z)$$

$$
\begin{aligned}
=&(-1)^{n-1}\Big(\pi(f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{n-1},x_n),y_n,z)+\pi(x_n,f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{n-1},y_n),z)\Big)\\
&+(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}(-1)^{i-1}\pi(\mathfrak{X}_i,f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{X}_i},\cdots,\mathfrak{X}_n,z))\\
&-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{X}_i},\cdots,\mathfrak{X}_k,\pi(\mathfrak{X}_i,x_{k+1}),y_{k+1},\mathfrak{X}_{k+2},\cdots,\mathfrak{X}_n,z)\\
&-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{X}_i},\cdots,\mathfrak{X}_k,x_{k+1},\pi(\mathfrak{X}_i,y_{k+1}),\mathfrak{X}_{k+2},\cdots,\mathfrak{X}_n,z)\\
&-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{X}_i},\cdots,\mathfrak{X}_n,\pi(\mathfrak{X}_i,z))\\
=&(-1)^{n-1}\Big(\mathcal{R}(y_n,z)f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{n-1},x_n)-\mathcal{R}(x_n,z)f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{n-1},y_n)\\
&+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}(-1)^{i-1}(\mathcal{R}(y_i,x_i)-\mathcal{R}(x_i,y_i))f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{X}_i},\cdots,\mathfrak{X}_n,z))\\
&-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+n}f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{X}_i},\cdots,\mathfrak{X}_k,[\mathfrak{X}_i,x_{k+1}]\otimes y_{k+1}+x_{k+1}\otimes[\mathfrak{X}_i,y_{k+1}],\mathfrak{X}_{k+2},\cdots,\mathfrak{X}_n,z)\\
&-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}f(\mathfrak{X}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{X}_i},\cdots,\mathfrak{X}_n,[\mathfrak{X}_i,z])\Big)\\
=&(-1)^{n-1}\delta^{2n-1}(f)(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_n,z),
\end{aligned}
$$

ce qui implique le résultat.

3.3 Cohomologies des opérateurs de Rota-Baxter relatifs

Dans cette partie, on construit une L_∞-algèbre dont les éléments de Maurer-Cartan correspondent aux opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les systèmes triples de Lie. Cette caractérisation nous permet de définir la cohomologie des opérateurs de Rota-Baxter relatifs. Par la suite, nous interprétons cette cohomologie comme étant celle de Yamaguti pour le système triple de Lie induit, avec des coefficients dans une représentation appropriée.

3.3.1 Caractérisation de Maurer-Cartan et cohomologie

Soient $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ un système triple de Lie et (V,θ) une représentation de L. On note simplement $\pi:\wedge^2L\otimes L\to L$ pour désigner la structure du système triple de Lie $[\cdot,\cdot,\cdot]$. Ainsi, $\pi+\theta$ représente le produit semi-direct du système triple de Lie sur $L\oplus V$, défini pour tout $x,y,z\in L$ et $u,v,w\in V$ par :

$$[x+u,y+v,z+w]_{L\oplus V}=\Big([x,y,z],\ \theta(y,z)u-\theta(x,z)v+D(x,y)w\Big). \tag{3.13}$$

On a donc la relation suivante :

$$[\pi+\theta,\ \pi+\theta]_R=0.$$

On considère ensuite l'espace vectoriel gradué $\mathfrak{C}^*(V,L)=\oplus_{n\geq 0}\mathfrak{C}^n(V,L)$, où $\mathfrak{C}^n(V,L)$ est l'ensemble des applications linéaires $f\in\mathrm{Hom}(\underbrace{(\otimes^2V)\otimes\cdots\otimes(\otimes^2V)}_{n\geq 0}\otimes V,L)$ satisfaisant :

$$f(\mathfrak{U}_1,\mathfrak{U}_2,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},u,u,v)=0, \tag{3.14}$$
$$f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},u,v,w)+f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},v,w,u)+f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},w,u,v)=0, \tag{3.15}$$

pour $\mathfrak{U}_i\in\otimes^2V$, $1\leq i\leq n-1$. Le degré d'un élément dans $\mathfrak{C}^n(V,L)$ est défini comme étant n. Ensuite, on définit le crochet ternaire

$$l_3:\mathfrak{C}^p(V,L)\times\mathfrak{C}^q(V,L)\times\mathfrak{C}^r(V,L)\to\mathfrak{C}^{p+q+r+1}(V,L)$$

par :

$$l_3(\mathbb{P},\mathbb{Q},\mathbb{R})=[[[\pi+\theta,\mathbb{P}]_R,\mathbb{Q}]_R,\mathbb{R}]_R. \tag{3.16}$$

On présente maintenant la caractérisation de Maurer-Cartan pour les opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les systèmes triples de Lie, en s'appuyant sur la construction de Voronov exposée dans le deuxième chapitre.

Proposition 3.3.1. *Avec les notations ci-dessus, $(\mathfrak{C}^*(V,L),l_3)$ est une 3-algèbre de Lie.*

Preuve 3.3.2. Soit (V,θ) une représentation du système triple de Lie (L,π). Alors le quadruple suivant forme une Vor-donnée de Voronov :

— l'algèbre de Lie graduée $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ est donnée par $\Big(\mathfrak{C}^*_{Lts}(L\oplus V,L\oplus V),[\cdot,\cdot]_R\Big)$;

— la sous-algèbre de Lie abélienne graduée $\mathfrak{h}$ est donnée par :

$$\mathfrak{h}=\mathfrak{C}^*(V,L)=\oplus_{n\geq 0}\mathrm{Hom}(\underbrace{(\otimes^2 V)\otimes\cdots\otimes(\otimes^2 V)}_{n\geq 0}\otimes V,L);$$

— $P:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ est la projection sur le sous-espace $\mathfrak{h}$;

— $\Delta=\pi+\theta$.

En appliquant le théorème 2.4.8, $(\mathfrak{h},\{l_k\}_{k=1}^{+\infty})$ est une L_∞-algèbre, où l_k est donné par l'équation (2.44). On note que

$$\begin{aligned}&[\pi+\theta,\mathbb{P}]_R\in Ker(P),\\ &[[\pi+\theta,\mathbb{P}]_R,\mathbb{Q}]_R\in Ker(P),\\ &[[[\pi+\theta,\mathbb{P}]_R,\mathbb{Q}]_R,\mathbb{R}]_R\in\mathfrak{h},\end{aligned}$$

pour tour $\mathbb{P}\in\mathfrak{C}^p(V,L)$, $\mathbb{Q}\in\mathfrak{C}^q(V,L)$ et $\mathbb{R}\in\mathfrak{C}^r(V,L)$. Ainsi, on déduit que $l_k=0$ pour tout $k\geq 1$, $k\neq 3$ et $l_3=[[[\pi+\theta,\mathbb{P}]_R,\mathbb{Q}]_R,\mathbb{R}]_R$. Alors $(\mathfrak{C}^*(V,L),l_3)$ est une 3-algèbre de Lie.

Théorème 3.3.3. *Une application linéaire $T:V\to L$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif si et seulement T est un élément de Maurer-Cartan dans la 3-algèbre de Lie $(\mathfrak{C}^*(V,L),l_3)$. En d'autres termes, cela signifie que T doit satisfaire l'équation de Maurer-Cartan suivante :*

$$\frac{1}{3!}l_3(T,T,T)=0.$$

Preuve 3.3.4. On a pour tout $T\in\mathfrak{C}^0(V,L)=\mathrm{Hom}(V,L)$

$$\begin{aligned}&l_3(T,T,T)(u,v,w)\\ =&[[[\pi+\theta,T]_R,T]_R,T]_R(u,v,w)\\ =&[[\pi+\theta,T]_R,T]_R(Tu,v,w)+[[\pi+\theta,T]_R,T]_R(u,Tv,w)\\ &+[[\pi+\theta,T]_R,T]_R(u,v,Tw)-T[[\pi+\theta,T]_R,T]_R(u,v,w)\\ =&[\pi+\theta,T]_R(Tu,Tv,w)+[\pi+\theta,T]_R(Tu,v,Tw)-T[\pi+\theta,T]_R(Tu,v,w)\\ &+[\pi+\theta,T]_R(Tu,Tv,w)+[\pi+\theta,T]_R(u,Tv,Tw)-T[\pi+\theta,T]_R(u,Tv,w)\\ &+[\pi+\theta,T]_R(Tu,v,Tw)+[\pi+\theta,T]_R(u,Tv,Tw)-T[\pi+\theta,T]_R(u,v,Tw)\\ &-T[\pi+\theta,T]_R(Tu,v,w)-T[\pi+\theta,T]_R(u,Tv,w)-T[\pi+\theta,T]_R(u,v,Tw)\\ =&6\Big([Tu,Tv,Tw]-T\big(D(Tu,Tv)w+\theta(Tv,Tw)u-\theta(Tu,Tw)v\big)\Big).\end{aligned}$$

Par conséquent, $T\in\mathfrak{C}^0(V,L)$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif si et seulement si T est un élément de Maurer-Cartan dans la 3-algèbre de Lie $(\mathfrak{C}^*(V,L),l_3)$.

Proposition 3.3.5. *Soit (V,θ) une représentation d'un système triple de $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$. Alors on a une structure de L_∞-algèbre twistée sur $\mathfrak{C}^*(V,L)$ donnée par :*

$$l_1^T(\mathbb{P})=\frac{1}{2}l_3(T,T,\mathbb{P}),\tag{3.17}$$

$$l_2^T(\mathbb{P},\mathbb{Q})=l_3(T,\mathbb{P},\mathbb{Q})),\tag{3.18}$$

$$l_3^T(\mathbb{P},\mathbb{Q},\mathbb{R}) = l_3(\mathbb{P},\mathbb{Q},\mathbb{R}), \tag{3.19}$$
$$l_k^T = 0, \quad k \geq 4, \tag{3.20}$$

où $\mathbb{P} \in \mathfrak{C}^p(V,L)$, $\mathbb{Q} \in \mathfrak{C}^q(V,L)$ et $\mathbb{R} \in \mathfrak{C}^r(V,L)$. De plus, pour toute application linéaire $T' : V \to L$, la somme $T + T'$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif si et seulement si T' est un élément de Maurer-Cartan de L_∞-algèbre twistée $(\mathfrak{C}^*(V,L), l_1^T, l_2^T, l_3^T)$, c'est à dire que, T' satisfait

$$l_1^T(T') + \frac{1}{2!}l_2^T(T',T') + \frac{1}{3!}l_3^T(T',T',T') = 0.$$

Preuve 3.3.6. Pour la première partie, étant donné que T est un élément de Maurer-Cartan dans la 3-algèbre de Lie $(\mathfrak{C}^*(V,L), l_3)$, par le Théorème 2.4.6, on obtient une structure de L_∞-algèbre twistée sur $\mathfrak{C}^*(V,L)$. Pour la seconde partie, $T + T'$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif si et seulement si

$$\frac{1}{3!}l_3(T+T', T+T', T+T') = 0. \tag{3.21}$$

En appliquant $\frac{1}{3!}l_3(T,T,T)$, la condition ci-dessus est équivalente à

$$\frac{1}{3!}\Big(3l_3(T,T,T') + 3l_3(T,T',T') + l_3(T',T',T')\Big) = 0.$$

cela donne que , $l_1^T(T') + \frac{1}{2!}l_2^T(T',T') + \frac{1}{3!}l_3^T(T',T',T') = 0$, cela implique que T' est un élément de Maurer-Cartan de L_∞-algèbre twistée $(\mathfrak{C}^*(V,L), l_1^T, l_2^T, l_3^T)$.

La caractérisation d'un opérateur de Rota-Baxter relatif T présentée ci-dessus nous permet de définir une cohomologie associée à T. Plus précisément, on définit l'espace des n-cochaînes $\mathfrak{C}_T^n(V,L) = \mathrm{Hom}(\underbrace{(\otimes^2 V) \otimes \cdots \otimes (\otimes^2 V)}_{n \geq 0} \otimes V, L)$, pour $n \geq 0$, où les cochaînes doivent satisfaire aux conditions (3.14) et (3.15). De plus, on définit l'opérateur différentiel $d_T : \mathfrak{C}_T^{n-1}(V,L) \to \mathfrak{C}_T^n(V,L)$ $(n \geq 1)$ par :

$$d_T(f) = \frac{1}{2}l_3(T,T,f), \quad f \in \mathfrak{C}_T^{n-1}(V,L),\ n \geq 1. \tag{3.22}$$

Les groupes cohomologiques correspondants sont définis comme suit :

$$H_T^n(V,L) = \frac{Z_T^n(V,L)}{B_T^n(V,L)} = \frac{\{f \in \mathfrak{C}_T^n(V,L) | d_T(f) = 0\}}{\{d_T(g) | g \in \mathfrak{C}_T^{n-1}(V,L)\}},\ n \geq 0.$$

3.3.2 Cohomologie de Yamaguti

Dans cette sous-section, on construit une représentation du système triple de Lie $(V, [\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ présenté dans le Corollaire 3.1.5 sur l'espace vectoriel L, en utilisant un opérateur de Rota-Baxter relatif $T : V \to L$. On définit ensuite la cohomologie de Yamaguti des opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les systèmes triples de Lie. Cette cohomologie sera un outil précieux pour étudier les déformations formelles de T.

Proposition 3.3.7. *Soient $(L, [\cdot,\cdot,\cdot])$ un système triple de Lie, (V, θ) une représentation de L et $T : V \to L$ un opérateur de Rota-Baxter relatif. On définit une application linéaire $\theta_T : \otimes^2 V \to \mathfrak{gl}(L)$ par :*

$$\theta_T(u,v)x = [x, Tu, Tv] + T\Big(\theta(x,Tv)u - D(x,Tu)v\Big),\ \forall x \in L,\ \forall u,v \in V. \tag{3.23}$$

Alors (L, θ_T) est une représentation du système triple de Lie $(V, [\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ sur L.

Preuve 3.3.8. On peut démontrer le résultat par un calcul direct. Cependant, on adopte ici une approche différente en utilisant les opérateurs de Nijenhuis sur les systèmes triples de Lie. Soit T un opérateur de Rota-Baxter relatif. On définit $\overline{T} : L \oplus V \to L \oplus V$ par :

$$\overline{T}(x+u) = T(u), \quad \forall x \in L,\ u \in V.$$

Alors $\overline{T}$ est un opérateur de Nijenhuis sur le produit semi-direct $L \ltimes_\theta V$ et on a $\overline{T} \circ \overline{T} = 0$. D'après l'équation (3.4), il existe une structure de système triple de Lie $[\cdot,\cdot,\cdot]_{\overline{T}}$ sur l'espace vectoriel $L \oplus V$ définie par :

$$\begin{aligned}
&[x+u,y+v,z+v]_{\overline{T}}\\
=&[\overline{T}(x+u),\overline{T}(y+v),z+w]_{L\oplus V}+[\overline{T}(x+u),y+v,\overline{T}(z+w)]_{L\oplus V}+[x+u,\overline{T}(y+v),\overline{T}(z+w)]_{L\oplus V}\\
&-\overline{T}\Big([\overline{T}(x+u),y+v,z+w]_{L\oplus V}+[x+u,\overline{T}(y+v),z+w]_{L\oplus V}+[x+u,y+v,\overline{T}(z+w)]_{L\oplus V}\Big)\\
=&[Tu,Tv,z+w]_{L\oplus V}+[Tu,y+v,Tw]_{L\oplus V}+[x+u,Tv,Tw]_{L\oplus V}\\
&-\overline{T}\Big([Tu,y+v,z+w]_{L\oplus V}+[x+u,Tv,z+w]_{L\oplus V}+[x+u,y+v,Tw]_{L\oplus V}\Big)\\
=&[Tu,Tv,z]+D(Tu,Tv)w+[Tu,y,Tw]-\theta(Tu,Tw)v+[x,Tv,Tw]+\theta(Tv,Tw)u\\
&-\overline{T}\Big([Tu,y,z]-\theta(Tu,z)v+D(Tu,y)w+[x,Tv,z]+\theta(Tv,z)u+D(x,Tv)w\\
&+[x,y,Tw]+\theta(y,Tw)u-\theta(x,Tw)v\Big)\\
=&[Tu,Tv,z]+D(Tu,Tv)w+[Tu,y,Tw]-\theta(Tu,Tw)v+[x,Tv,Tw]+\theta(Tv,Tw)u\\
&-T\Big(-\theta(Tu,z)v+D(Tu,y)w+\theta(Tv,z)u+D(x,Tv)w+\theta(y,Tw)u-\theta(x,Tw)v\Big).
\end{aligned}$$

De plus, d'après l'équation (2.1), on a

$$[Tu,Tv,z]=-[Tv,z,Tu]-[z,Tu,Tv]=[z,Tv,Tu]-[z,Tu,Tv].$$

Alors on obtient que

$$\begin{aligned}
D_T(u,v)z&=\theta_T(v,u)z-\theta_T(u,v)z\\
&=[z,Tv,Tu]+T\Big(\theta(z,Tu)v-D(z,Tv)u\Big)\\
&-[z,Tu,Tv]-T\Big(\theta(z,Tv)u-D(z,Tu)v\Big)\\
&=[Tu,Tv,z]+T\Big(\theta(z,Tu)v-(\theta(Tv,z)u-\theta(z,Tv)u)\Big)\\
&-T\Big(\theta(z,Tv)u-(\theta(Tu,z)v-\theta(z,Tu)v)\Big)\\
&=[Tu,Tv,z]-T\Big(-\theta(Tu,z)v+\theta(Tv,z)u\Big).
\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$[x+u,y+v,z+v]_{\overline{T}}=[u,v,w]_T+\theta_T(v,w)x-\theta_T(u,w)y+D_T(u,v)z.$$

Puisqu'un produit semi-direct d'un système triple de Lie est équivalent à dire qu'on a une représentation du ce dernier, on en déduit que (L,θ_T) est une représentation du système triple de Lie $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$.

On est maintenant en mesure de considérer la cohomologie de Yamaguti pour le système triple de Lie $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ à coefficients dans la représentation (L,θ_T). Plus précisément, pour chaque $n \geqslant 0$, on désigne par $\mathcal{C}^{2n+1}_{Lts}(V,L)$ l'ensemble des $(2n+1)$-cochaînes de Yamaguti de V à coefficients dans L. Une $(2n+1)$-cochaîne $\psi \in \mathcal{C}^{2n+1}_{Lts}(V,L)$ est une application multilinéaire de V dans L qui satisfait :

$$\begin{aligned}
&\psi(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-2},v,v,u)=0,\\
&\psi(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-2},u,v,w)+\psi(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-2},v,w,u)+\psi(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-2},w,u,v)=0.
\end{aligned}$$

L'opérateur différentiel correspondant $\delta^{2n-1}_T : \mathcal{C}^{2n-1}_{Lts}(V,L) \to \mathcal{C}^{2n+1}_{Lts}(V,L)$ est défini comme suit :

$$\begin{aligned}
&\delta^{2n-1}_T\psi(v_1,v_2,\cdots,v_{2n+1})\\
=&\theta_T(v_{2n},v_{2n+1})\psi(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-1})-\theta_T(v_{2n-1},v_{2n+1})\psi(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-2},v_{2n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n}D_T(v_{2k-1},v_{2k})\psi(v_1,v_2,\cdots,\widehat{v}_{2k-1},\widehat{v}_{2k},\cdots,v_{2n+1})\\
&+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2k+1}^{2n+1}(-1)^{n+k+1}\psi(v_1,v_2,\cdots,\widehat{v}_{2k-1},\widehat{v}_{2k},\cdots,[v_{2k-1},v_{2k},v_j]_T,\cdots,v_{2n+1})\\
=&[\psi(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-1}),Tv_{2n},Tv_{2n+1}]+T\theta(\psi(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-1}),Tv_{2n+1})v_{2n}\\
&-TD(\psi(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-1}),Tv_{2n})v_{2n+1}-[\psi(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-2},v_{2n}),Tv_{2n-1},Tv_{2n+1}]\\
&-T\theta(\psi(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-2},v_{2n}),Tv_{2n+1})v_{2n-1}+TD(\psi(v_1,v_2,\cdots,v_{2n-2},v_{2n}),Tv_{2n-1})v_{2n+1}\\
&+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n}\Big([Tv_{2k-1},Tv_{2k},\psi(v_1,v_2,\cdots,\widehat{v}_{2k-1},\widehat{v}_{2k},\cdots,v_{2n+1})]\\
&-T\theta(Tv_{2k},\psi(v_1,\cdots,\widehat{v}_{2k-1},\widehat{v}_{2k},\cdots,v_{2n+1}))v_{2k-1}\\
&+T\theta(Tv_{2k-1},\psi(v_1,\cdots,\widehat{v}_{2k-1},\widehat{v}_{2k},\cdots,v_{2n+1}))v_{2k}\Big)\\
&+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2k+1}^{2n+1}(-1)^{n+k+1}\Big(\psi(v_1,v_2,\cdots,\widehat{v}_{2k-1},\widehat{v}_{2k},\cdots,D(Tv_{2k-1},Tv_{2k})v_j,\cdots,v_{2n+1})\\
&+\psi(v_1,v_2,\cdots,\widehat{v}_{2k-1},\widehat{v}_{2k},\cdots,\theta(Tv_{2k},Tv_j)v_{2k-1},\cdots,v_{2n+1})\\
&-\psi(v_1,v_2,\cdots,\widehat{v}_{2k-1},\widehat{v}_{2k},\cdots,\theta(Tv_{2k-1},Tv_j)v_{2k},\cdots,v_{2n+1})\Big),
\end{aligned}\tag{3.24}$$

pour tout $\psi\in\mathcal{C}^{2n-1}_{Lts}(V,L),n\geq 1$, où $\widehat{v}$ signifie que l'élément v est ommité. Avec cet opérateur, les cochaînes de Yamaguti forment un complexe

$$\mathcal{C}^{1}_{Lts}(V,L)\xrightarrow{\delta^1_T}\mathcal{C}^{3}_{Lts}(V,L)\xrightarrow{\delta^3_T}\mathcal{C}^{5}_{Lts}(V,L)\longrightarrow\cdots,$$

tel que $\delta^{2n+1}_T\circ\delta^{2n-1}_T=0$, pour tout $n\geq 1$. En particulier, une 1-cochaîne $\psi\in\mathcal{C}^{1}_{Lts}(V,L)$ est un 1-cocycle si

$$\begin{aligned}
&D_T(v_1,v_2)\psi(v_3)-\theta_T(v_1,v_3)f(v_2)+\theta_T(v_2,v_3)\psi(v_1)-\psi([v_1,v_2,v_3]_T)\\
=&[Tv_1,Tv_2,\psi(v_3)]+[Tv_1,\psi(v_2),Tv_3]+[\psi(v_1),Tv_2,Tv_3]\\
&-T\Big(-D(\psi(v_2),Tv_1)v_3+D(\psi(v_1),Tv_2)v_3+\theta(Tv_2,\psi(v_3))v_1+\theta(\psi(v_2),Tv_3)v_1\\
&-\theta(Tv_1,\psi(v_3))v_2-\theta(\psi(v_1),Tv_3)v_2\Big)-\psi\Big(D(Tv_1,Tv_2)v_3+\theta(Tv_2,Tv_3)v_1-\theta(Tv_1,Tv_3)v_2\Big).
\end{aligned}\tag{3.25}$$

Dans la suite, on considère une aplication linéaire $\partial_T(\mathfrak{X}):V\to L$ définie par :

$$\partial_T(\mathfrak{X})v=TD(\mathfrak{X})v-[\mathfrak{X},Tv],$$

pour tout $\mathfrak{X}\in L\wedge L$ and $v\in V$, et on cherche à prouver que $\delta^1_T\circ\partial_T(\mathfrak{X})=0$, c'est-à-dire que l'on a un complexe :

$$L\wedge L\xrightarrow{\partial_T}\mathcal{C}^{1}_{Lts}(V,L)\xrightarrow{\delta^1_T}\mathcal{C}^{3}_{Lts}(V,L)\xrightarrow{\delta^3_T}\mathcal{C}^{5}_{Lts}(V,L)\longrightarrow\cdots,$$

qui vérifie $\delta^1_T\circ\partial_T(\mathfrak{X})=0$ and $\delta^{2n+1}_T\circ\delta^{2n-1}_T=0$, pour tout $n\geq 1$. Ce complexe sera utile pour définir la cohomologie de Yamaguti des opérateurs de Rota-Baxter relatifs.

Proposition 3.3.9. *Soient $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ un système triple de Lie, (V,θ) une représentation de L et $T:V\to L$ un opérateur de Rota-Baxter relatif. Alors $\partial_T(\mathfrak{X})$ est un 1-cocycle dans la cohomologie de Yamaguti de $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ à coefficients dans (L,θ_T).*

Preuve 3.3.10. Pour tout $u_1,u_2,u_3\in M$, on a :

$$\begin{aligned}
&(\delta^1_T\circ\partial_T(\mathfrak{X}))(v_1,v_2,v_3)\\
=&[Tv_1,Tv_2,TD(\mathfrak{X})v_3-[\mathfrak{X},Tv_3]]+[Tv_1,TD(\mathfrak{X})v_2-[\mathfrak{X},Tv_2],Tv_3]\\
&+[TD(\mathfrak{X})v_1-[\mathfrak{X},Tv_1],Tv_2,Tv_3]-TD(\mathfrak{X})(D(Tv_1,Tv_2)v_3+\theta(Tv_2,Tv_3)v_1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \theta(Tv_1, Tv_3)v_2) + [\mathfrak{X}, T(D(Tv_1, Tv_2)v_3 + \theta(Tv_2, Tv_3)v_1 - \theta(Tv_1, Tv_3)v_2)] \\
&- T\Big(D(TD(\mathfrak{X})v_1 - [\mathfrak{X}, Tv_1], Tv_2)v_3 - D(TD(\mathfrak{X})v_2 - [\mathfrak{X}, Tv_2], Tv_1)v_3\Big) \\
&- T\Big(\theta(Tv_2, TD(\mathfrak{X})v_3 - [\mathfrak{X}, Tv_3])v_1 + \theta(TD(\mathfrak{X})v_2 - [\mathfrak{X}, Tv_2], Tv_3)v_1\Big) \\
&- T\Big(-\theta(Tv_1, TD(\mathfrak{X})v_3 - [\mathfrak{X}, Tv_3])v_2 - \theta(TD(\mathfrak{X})v_1 - [\mathfrak{X}, Tv_1], Tv_3)v_2\Big) \\
\overset{(3.1)}{=}& - [[\mathfrak{X}, Tv_1], Tv_2, Tv_3] - [Tv_1, [\mathfrak{X}, Tv2], Tv_3] - [Tv_1, Tv_2, [\mathfrak{X}, Tv_3]] \\
&+ [TD(\mathfrak{X})v_1, Tv_2, Tv_3] + [Tv_1, TD(\mathfrak{X})v_2, Tv_3] + [Tv_1, Tv_2, TD(\mathfrak{X})v_3] \\
&- TD(\mathfrak{X})(D(Tv_1, Tv_2)v_3 + \theta(Tv_2, Tv_3)v_1 - \theta(Tv_1, Tv_3)v_2) + [\mathfrak{X}, [Tv_1, Tv_2, Tv_3]] \\
&- T\Big(D(TD(\mathfrak{X})v_1 - [\mathfrak{X}, Tv_1], Tv_2)v_3 - D(TD(\mathfrak{X})v_2 - [\mathfrak{X}, Tv_2], Tv_1)v_3\Big) \\
&- T\Big(\theta(Tv_2, TD(\mathfrak{X})v_3 - [\mathfrak{X}, Tv_3])v_1 + \theta(TD(\mathfrak{X})v_2 - [\mathfrak{X}, Tv_2], Tv_3)v_1\Big) \\
&- T\Big(-\theta(Tv_1, TD(\mathfrak{X})v_3 - [\mathfrak{X}, Tv_3])v_2 - \theta(TD(\mathfrak{X})v_1 - [\mathfrak{X}, Tv_1], Tv_3)v_2\Big) \\
\overset{(2.2)}{=}&[TD(\mathfrak{X})v_1, Tv_2, Tv_3] + [Tv_1, TD(\mathfrak{X})v_2, Tv_3] + [Tv_1, Tv_2, TD(\mathfrak{X})v_3] \\
&- TD(\mathfrak{X})(D(Tv_1, Tv_2)v_3 + \theta(Tv_2, Tv_3)v_1 - \theta(Tv_1, Tv_3)v_2) \\
&- T\Big(D(TD(\mathfrak{X})v_1, Tv_2)v_3 - D([\mathfrak{X}, Tv_1], Tv_1)v_3 - D(TD(\mathfrak{X})v_2, Tv_1)v_3 + D([\mathfrak{X}, Tv_2], Tv_1)v_3\Big) \\
&- T\Big(\theta(Tv_2, TD(\mathfrak{X})v_3)v_1 - \theta(Tv_2, [\mathfrak{X}, Tv_3])v_1 + \theta(TD(\mathfrak{X})v_2, Tv_3)v_1 - \theta([\mathfrak{X}, Tv_2], Tv_3)v_1\Big) \\
&- T\Big(-\theta(Tv_1, TD(\mathfrak{X})v_3)v_2 + \theta(Tv_1, [\mathfrak{X}, Tv_3])v_2 - \theta(TD(\mathfrak{X})v_1, Tv_3)v_2 + \theta([\mathfrak{X}, Tv_1], Tv_3)v_2\Big) \\
\overset{(3.1)}{=}&T\Big(D(Tv_1, Tv_2)D(\mathfrak{X})v_3 + \theta(Tv_2, TD(\mathfrak{X})v_3)v_1 - \theta(Tv_1, TD(\mathfrak{X})v_3)v_2\Big) \\
&+ T\Big(D(TD(\mathfrak{X})v_1, Tv_2)v_3 + \theta(Tv_2, Tv_3)D(\mathfrak{X})v_1 - \theta(TD(\mathfrak{X})v_1, Tv_3)v_2\Big) \\
&+ T\Big(D(Tv_1, TD(\mathfrak{X})v_2)v_3 + \theta(TD(\mathfrak{X})v_2, Tv_3)v_1 - \theta(Tv_1, Tv_3)D(\mathfrak{X})v_2\Big) \\
&- TD(\mathfrak{X})(D(Tv_1, Tv_2)v_3 + \theta(Tv_2, Tv_3)v_1 - \theta(Tv_1, Tv_3)v_2) \\
&- T\Big(D(TD(\mathfrak{X})v_1, Tv_2)v_3 - D([\mathfrak{X}, Tv_1], Tv_1)v_3 - D(TD(\mathfrak{X})v_2, Tv_1)v_3 + D([\mathfrak{X}, Tv_2], Tv_1)v_3\Big) \\
&- T\Big(\theta(Tv_2, TD(\mathfrak{X})v_3)v_1 - \theta(Tv_2, [\mathfrak{X}, Tv_3])v_1 + \theta(TD(\mathfrak{X})v_2, Tv_3)v_1 - \theta([\mathfrak{X}, Tv_2], Tv_3)v_1\Big) \\
&- T\Big(-\theta(Tv_1, TD(\mathfrak{X})v_3)v_2 + \theta(Tv_1, [\mathfrak{X}, Tv_3])v_2 - \theta(TD(\mathfrak{X})v_1, Tv_3)v_2 + \theta([\mathfrak{X}, Tv_1], Tv_3)v_2\Big) \\
=&T\Big(D(Tv_1, Tv_2)D(\mathfrak{X})v_3 + \theta(Tv_2, Tv_3)D(\mathfrak{X})v_1 - \theta(Tv_1, Tv_3)D(\mathfrak{X})v_2\Big) - TD(\mathfrak{X})(D(Tv_1, Tv_2)v_3 \\
&+ \theta(Tv_2, Tv_3)v_1 - \theta(Tv_1, Tv_3)v_2) - T\Big(D([\mathfrak{X}, Tv_2], Tv_1)v_3 - D([\mathfrak{X}, Tv_1], Tv_2)v_3\Big) \\
&+ T\Big(\theta(Tv_2, [\mathfrak{X}, Tv_3])v_1 + \theta([\mathfrak{X}, Tv_2], Tv_3)v_1\Big) - T\Big(\theta(Tv_1, [\mathfrak{X}, Tv_3])v_2 + \theta([\mathfrak{X}, Tv_1], Tv_3)v_2\Big) \\
=&T\Big(\theta(Tv_2, Tv_1)D(\mathfrak{X})v_3 - \theta(Tv_1, Tv_2)D(\mathfrak{X})v_3 + \theta(Tv_2, Tv_3)D(\mathfrak{X})v_1 - \theta(Tv_1, Tv_3)D(\mathfrak{X})v_2\Big) \\
&- TD(\mathfrak{X})\theta(Tv_2, Tv_1)v_3 + TD(\mathfrak{X})\theta(Tv_1, Tv_2)v_3 - TD(\mathfrak{X})\theta(Tv_2, Tv_3)v_1 + TD(\mathfrak{X})\theta(Tv_1, Tv_3)v_2 \\
&- T\Big(\theta(Tv_1, [\mathfrak{X}, Tv_2])v_3 - \theta([\mathfrak{X}, Tv_2], Tv_1)v_3 - \theta(Tv_2, [\mathfrak{X}, Tv_1])v_3 + \theta([\mathfrak{X}, Tv_1], Tv_2)v_3\Big) \\
&+ T\Big(\theta(Tv_2, [\mathfrak{X}, Tv_3])v_1 + \theta([\mathfrak{X}, Tv_2], Tv_3)v_1\Big) - T\Big(\theta(Tv_1, [\mathfrak{X}, Tv_3])v_2 + \theta([\mathfrak{X}, Tv_1], Tv_3)v_2\Big) \\
\overset{(2.6)}{=}&T\Big(\theta([\mathfrak{X}, Tv_1], Tv_2)v_3 + \theta(Tv_1, [\mathfrak{X}, Tv_2])v_3\Big) - T\Big(\theta([\mathfrak{X}, Tv_2], Tv_1)v_3 + \theta(Tv_2, [\mathfrak{X}, Tv_1])v_3\Big) \\
&- T\Big(\theta([\mathfrak{X}, Tv_2], Tv_3)v_1 + \theta(Tv_2, [\mathfrak{X}, Tv_3])v_1\Big) + T\Big(\theta([\mathfrak{X}, Tv_1], Tv_3)v_2 + \theta(Tv_1, [\mathfrak{X}, Tv_3])v_2\Big)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&-T\Big(\theta(Tv_1,[\mathfrak{X},Tv_2])v_3-\theta([\mathfrak{X},Tv_2],Tv_1)v_3-\theta(Tv_2,[\mathfrak{X},Tv_1])v_3+\theta([\mathfrak{X},Tv_1],Tv_2)v_3\Big)\\
&+T\Big(\theta(Tv_2,[\mathfrak{X},Tv_3])v_1+\theta([\mathfrak{X},Tv_2],Tv_3)v_1\Big)-T\Big(\theta(Tv_1,[\mathfrak{X},Tv_3])v_2+\theta([\mathfrak{X},Tv_1],Tv_3)v_2\Big)\\
=&0.
\end{aligned}$$

Cela implique que $\partial_T(\mathfrak{X})$ est un 1-cocycle.

On désigne l'espace des $(2n-1)$-cochaînes par :

$$\mathcal{C}_T^{2n-1}(V,L)=\begin{cases}\mathcal{C}_{Lts}^{2n-1}(V,L), & n\geq 1,\\ L\wedge L, & n=0,\end{cases} \tag{3.26}$$

et l'opérateur différentiel $\Delta_T:\mathcal{C}_T^{2n-1}(V,L)\to\mathcal{C}_T^{2n+1}(V,L)$ est défini par :

$$\Delta_T=\begin{cases}\delta_T^{2n-1}, & n\geq 1,\\ \partial_T, & n=0.\end{cases} \tag{3.27}$$

Cela nous permet donc de définir un complexe de cochaînes et, par conséquent, la cohomologie de Yamaguti, qu'on utilisera dans le paragraphe suivant pour contrôler les déformations formelles des opérateurs de Rota-Baxter relatifs.

Définition 3.3.11. Soient $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ un système triple de Lie, (V,θ) une représentation de L et $T:V\to L$ un opérateur de Rota-Baxter relatif. On note l'espace des cocycles par $\mathcal{Z}_T^{\bullet}(V,L)$ et l'espace des cobords par $\mathcal{B}_T^{\bullet}(V,L)$. Les groupes de cohomologie sont alors définis par :

$$\mathcal{H}_T^{\bullet}(V,L)=\mathcal{Z}_T^{\bullet}(V,L)/\mathcal{B}_T^{\bullet}(V,L).$$

Ces groupes de cohomologie correspondent á l'opérateur de Rota-Baxter relatif T.

Dans la suite, on établit une comparaison entre l'opérateur différentiel Δ_T et l'opérateur différentiel d_T défini par l'équation (4.20), en utilisant l'élément de Maurer-Cartan T de la 3-algèbre de Lie $(\mathfrak{C}^*(V,L),l_3)$. On a constaté que les deux opérateurs coïncident à un signe près.

Théorème 3.3.12. *Soit T un opérateur de Rota-Baxter relatif sur L. Alors*

$$d_T^n(f)=(-1)^{n-1}\delta_T^{2n-1}(f),\quad \forall f\in\mathcal{C}_T^{2n-1}(V,L),n\geq 1. \tag{3.28}$$

Preuve 3.3.13. Pour tout $x,y,z\in L$ et $u,v,w\in V$, on a

$$\begin{aligned}
&[[\pi+\theta,T]_R,T]_R(x+u,y+v,z+w)\\
=&[\pi+\theta,T]_R(T(x+u),y+v,z+w)+[\pi+\theta,T]_R(x+u,T(y+v),z+w)\\
&+[\pi+\theta,T]_R(x+u,y+v,T(z+w))-T[\pi+\theta,T]_R(x+u,y+v,z+w)\\
=&(\pi+\theta)(T(x+u),T(y+v),z+w)+(\pi+\theta)(T(x+u),y+v,T(z+w))\\
&-T(\pi+\theta)(T(x+u),y+v,z+w)+(\pi+\theta)(T(x+u),T(y+v),z+w)\\
&+(\pi+\theta)(x+u,T(y+v),T(z+w))-T(\pi+\theta)(x+u,T(y+v),z+w)\\
&+(\pi+\theta)(T(x+u),y+v,T(z+w))+(\pi+\theta)(x+u,T(y+v),T(z+w))\\
&-T(\pi+\theta)(x+u,y+v,T(z+w))-T(\pi+\theta)(T(x+u),y+v,z+w)\\
&-T(\pi+\theta)(x+u,T(y+v),z+w)-T(\pi+\theta)(x+u,y+v,T(z+w))\\
=&2\Big([Tu,Tv,z]+D(Tu,Tv)w+[Tu,y,Tw]-\theta(Tu,Tw)v+[x,Tv,Tw]\\
&+\theta(Tv,Tw)u\Big)-2T\Big(D(Tu,y)w-\theta(Tu,z)v+D(x,Tv)w+\theta(Tv,z)u\\
&+\theta(y,Tw)u-\theta(x,Tw)v\Big).
\end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\begin{cases} [[\pi+\theta,T]_R,T]_R(u,v,w) = 2[u,v,w]_T, \\ [[\pi+\theta,T]_R,T]_R(x,v,w) = 2\theta_T(v,w)x, \\ [[\pi+\theta,T]_R,T]_R(u,y,w) = -2\theta_T(u,w)y, \\ [[\pi+\theta,T]_R,T]_R(u,v,z) \;= 2D_T(u,v)z. \end{cases} \tag{3.29}$$

De plus, pour tout $f \in \mathcal{C}_T^{2n-1}(V,L)$, $\mathfrak{V}i = u_i \otimes v_i \in \otimes^2 V$, $i = 1,2,\cdots,n$ et $u_{n+1} \in V$, on a

$$\begin{aligned}
& d_T^n(f)(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1}) = \frac{1}{2}l_3(T,T,f)(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1}) \\
=& [[[\pi+\theta,T]_R,T]_R,f]_R(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1}) \\
=& (-1)^{n-1}[[\pi+\theta,T]_R,T]_R\Big(f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},u_n),v_n,u_{n+1}\Big) \\
& + (-1)^{n-1}[[\pi+\theta,T]_R,T]_R\Big(u_n,f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},v_n),u_{n+1}\Big) \\
& + (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}(-1)^{i-1}[[\pi+\theta,T]_R,T]_R\Big(\mathfrak{U}_i,f(\mathfrak{U}_1\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_i},\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1})\Big) \\
& - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\times \\
& f\Big(\mathfrak{U}_1\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_i},\cdots,\mathfrak{U}_k,[[\pi+\theta,T]_R,T]_R(\mathfrak{U}_i,u_{k+1}),v_{k+1},\mathfrak{U}_{k+2},\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1}\Big) \\
& - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\times \\
& f\Big(\mathfrak{U}_1\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_i},\cdots,\mathfrak{U}_k,u_{k+1},[[\pi+\theta,T]_R,T]_R(\mathfrak{U}_i,v_{k+1}),\mathfrak{U}_{k+2},\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1}\Big) \\
& - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f\Big(\mathfrak{U}_1\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_i},\cdots,\mathfrak{U}_n,[[\pi+\theta,T]_R,T]_R(\mathfrak{U}_i,u_{n+1})\Big) \\
\overset{(3.29)}{=}& (-1)^{n-1}\delta_T^{2n-1}(f).
\end{aligned}$$

D'où les deux opérateurs différentiels coïncident à un signe moins près.

La théorie de la cohomologie pour les opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les systèmes triples de Lie présente une certaine propriété fonctorielle. Cette propriété permet de préserver les structures de cohomologie lorsqu'on considère des morphismes de systèmes triples de Lie et des transformations de représentations, facilitant ainsi l'étude des relations entre différentes structures algébriques.

Proposition 3.3.14. *Soient T et T' deux opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ et (ϕ,ψ) un morphisme entre T et T'. Alors*

- *ψ est un morphisme de systèmes triples de Lie entre $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ et $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_{T'})$.*
- *Le diagramme suivant commute pour tout $u,v \in V$,*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\theta_T(u,v)"'] & L \arrow[d, "\theta_{T'}(\psi(u),\psi(v))"] \\ L \arrow[r, "\phi"'] & L \end{tikzcd}$$

où (L,θ_T) et $(L,\theta_{T'})$ sont les représentations induites de systèmes triples de Lie $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ et $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]'_T)$ respectivement.

Preuve 3.3.15. En utlisant les équations (3.5) et (3.6), on a

$$\psi([u,v,w]_T) = \psi\Big(D(T(u),T(v))w - \theta(T(u),T(w))v + \theta(T(v),T(w))u\Big)$$

$$\begin{aligned}
&= D(\phi T(u),\phi T(v))\psi(w) - \theta(\phi T(u),\phi T(w))\psi(v) + \theta(\phi T(v),\phi T(w))\psi(u)\\
&= D(T^{'}\psi(u),T^{'}\psi(v))\psi(w) - \theta(T^{'}\psi(u),T^{'}\psi(w))\psi(v) + \theta(T^{'}\psi(v),T^{'}\psi(w))\psi(u)\\
&= [\psi(u),\psi(v),\psi(w)]_{T'}.
\end{aligned}$$

Maintenant, d'après (3.5), (3.6) et (3.23), pour tout $u,v \in V$, $x \in L$, on a

$$\begin{aligned}
\phi(\theta_T(u,v)x) &= \phi([x,T(u),T(v)]) + \phi(T(\theta(x,T(v))u)) - \phi(T(D(x,T(u))v))\\
&= [\phi(x),\phi(T(u)),\phi(T(v))] + T^{'}(\psi(\theta(x,T(v))u)) - T^{'}(\psi(D(x,T(u))v))\\
&= [\phi(x),T^{'}(\psi(u)),T^{'}(\psi(v))] + T^{'}\Big(\theta(\phi(x),T^{'}(\psi(v)))\psi(u) - D(\phi(x),T^{'}(\psi(u)))\psi(v)\Big)\\
&= \theta_{T'}(\psi(u),\psi(v))\phi(x).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Soient T et $T^{'}$ deux opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$, et (ϕ,ψ) un morphisme entre T et $T^{'}$ tel que ψ soit bijective. On note par $\mathcal{C}_T^{2n-1}(V,L)$ l'espace des $(2n-1)$-cochaînes du système triple de Lie $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ à coefficients dans la représentation (L,θ_T). On définit alors

$$\begin{cases}\gamma : \mathcal{C}_T^{2n-1}(V_T,L) \to \mathcal{C}_{T'}^{2n-1}(V_{T'},L), & n \geq 1,\\ \gamma : L\wedge L \to L \wedge L, & n=0.\end{cases}$$

par :

$$\begin{cases}\gamma(f)(u_1,\cdots,u_{2n-1}) = \phi(f(\psi^{-1}(u_1),\cdots,\psi^{-1}(u_{2n-1}))),\ \forall u_i \in V, & n\geq 1,\\ \gamma(\mathfrak{X}) = \phi(\mathfrak{X}) = (\phi(x_1),\phi(x_2)), \quad \forall \mathfrak{X} = (x_1,x_2) \in L\wedge L, & n=0.\end{cases}$$

Théorème 3.3.16. *Avec les notations ci-dessus, γ est une cochaîne du complexe $(\mathcal{C}_T^{\bullet}(V,L),\Delta_T)$ au complexe $(\mathcal{C}_{T'}^{\bullet}(V,L),\Delta_{T'})$. Par conséquent, elle induit un morphisme $\overline{\gamma}$ de groupes de cohomologie du $\mathcal{H}_T^{\bullet}(V,L)$ au $\mathcal{H}_{T'}^{\bullet}(V,L)$.*

Preuve 3.3.17. Pour $n=0$, soient $\mathfrak{X} \in L\wedge L$ et (ϕ,ψ) un morphisme entre T et $T^{'}$ tel que ψ soit bijective. Alors on a :

$$\begin{aligned}
(\partial_{T'}\gamma(\mathfrak{X}))(v) &= T^{'}(D(\gamma(\mathfrak{X}))v) - [\gamma(\mathfrak{X}),T^{'}v]\\
&= T^{'}(D(\phi(\mathfrak{X}))\psi\circ\psi^{-1}(v)) - [\phi(\mathfrak{X}),T^{'}\psi\circ\psi^{-1}(v)]\\
&\overset{(3.5)+(3.6)}{=} T^{'}\psi(D(\mathfrak{X})\psi^{-1}(v)) - [\phi(\mathfrak{X}),\phi(T\psi^{-1}(v))]\\
&\overset{(3.5)}{=} \phi T(D(\mathfrak{X})\psi^{-1}(v)) - \phi([\mathfrak{X},T\psi^{-1}(v)])\\
&= \phi(\partial_T(\mathfrak{X}))(\psi^{-1}(v))\\
&= \gamma(\partial_T(\mathfrak{X})(v)).
\end{aligned}$$

Pour $n\geq 1$, soit $f \in \mathcal{C}_T^{2n-1}(V,L)$ et en utilisant la proposition 3.3.14 on a :

$$\begin{aligned}
&(\delta_{T'}\gamma(f))(u_1,u_2,\cdots,u_{2n+1})\\
=&\theta_{T'}(u_{2n},u_{2n+1})\gamma(f)(u_1,u_2,\cdots,u_{2n-1}) - \theta_{T'}(u_{2n-1},u_{2n+1})\gamma(f)(u_1,u_2,\cdots,u_{2n-2},u_{2n})\\
&+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}D_{T'}(u_{2k-1},u_{2k})\gamma(f)(u_1,u_2,\cdots,\widehat{u}_{2k-1},\widehat{u}_{2k},\cdots,u_{2n+1})\\
&+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2k+1}^{2n+1}(-1)^{n+k+1}\gamma(f)(u_1,u_2,\cdots,\widehat{u}_{2k-1},\widehat{u}_{2k},\cdots,[u_{2k-1},u_{2k},u_j]_{T'},\cdots,u_{2n+1})\\
=&\theta_{T'}(u_{2n},u_{2n+1})\phi f\Big(\psi^{-1}(u_1),\psi^{-1}(u_2),\cdots,\psi^{-1}(u_{2n-1})\Big)\\
&-\theta_{T'}(u_{2n-1},u_{2n+1})\phi f\Big(\psi^{-1}(u_1),\psi^{-1}(u_2),\cdots,\psi^{-1}(u_{2n-2}),\psi^{-1}(u_{2n})\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}D_{T'}(u_{2k-1},u_{2k})\phi f\Big(\psi^{-1}(u_1),\psi^{-1}(u_2),\cdots,\widehat{\psi^{-1}(u_{2k-1})},\widehat{\psi^{-1}(u_{2k})},\cdots,\psi^{-1}(u_{2n+1})\Big)\\
&+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2k+1}^{2n+1}(-1)^{n+k+1}\phi f\Big(\psi^{-1}(u_1),\psi^{-1}(u_2),\cdots,\widehat{\psi^{-1}(u_{2k-1})},\widehat{\psi^{-1}(u_{2k})},\\
&\cdots,[\psi^{-1}(u_{2k-1}),\psi^{-1}(u_{2k}),\psi^{-1}(u_j)]_T,\cdots,\psi^{-1}(u_{2n+1})\Big)\\
=&\theta_{T'}(\psi\circ\psi^{-1}(u_{2n}),\psi\circ\psi^{-1}(u_{2n+1}))\phi f\Big(\psi^{-1}(u_1),\psi^{-1}(u_2),\cdots,\psi^{-1}(u_{2n-1})\Big)\\
&-\theta_{T'}(\psi\circ\psi^{-1}(u_{2n-1}),\psi\circ\psi^{-1}(u_{2n+1}))\phi f\Big(\psi^{-1}(u_1),\psi^{-1}(u_2),\cdots,\psi^{-1}(u_{2n-2}),\psi^{-1}(u_{2n})\Big)\\
&+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}D_{T'}(\psi\circ\psi^{-1}(u_{2k-1}),\psi\circ\psi^{-1}(u_{2k}))\phi f\Big(\psi^{-1}(u_1),\psi^{-1}(u_2),\cdots,\widehat{\psi^{-1}(u_{2k-1})},\widehat{\psi^{-1}(u_{2k})},\\
&\cdots,\psi^{-1}(u_{2n+1})\Big)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2k+1}^{2n+1}(-1)^{n+k+1}\phi f\Big(\psi^{-1}(u_1),\psi^{-1}(u_2),\cdots,\widehat{\psi^{-1}(u_{2k-1})},\widehat{\psi^{-1}(u_{2k})},\\
&\cdots,[\psi^{-1}(u_{2k-1}),\psi^{-1}(u_{2k}),\psi^{-1}(u_j)]_T,\cdots,\psi^{-1}(u_{2n+1})\Big)\\
=&\phi\Big(\theta_T(\psi^{-1}(u_{2n}),\psi^{-1}(u_{2n+1}))f\Big(\psi^{-1}(u_1),\psi^{-1}(u_2),\cdots,\psi^{-1}(u_{2n-1})\Big)\\
&-\theta_T(\psi^{-1}(u_{2n-1}),\psi^{-1}(u_{2n+1}))f\Big(\psi^{-1}(u_1),\psi^{-1}(u_2),\cdots,\psi^{-1}(u_{2n-2}),\psi^{-1}(u_{2n})\Big)\\
&+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}D_T(\psi^{-1}(u_{2k-1}),\psi^{-1}(u_{2k}))f\Big(\psi^{-1}(u_1),\psi^{-1}(u_2),\cdots,\widehat{\psi^{-1}(u_{2k-1})},\widehat{\psi^{-1}(u_{2k})},\\
&\cdots,\psi^{-1}(u_{2n+1})\Big)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2k+1}^{2n+1}(-1)^{n+k+1}f\Big(\psi^{-1}(u_1),\psi^{-1}(u_2),\cdots,\widehat{\psi^{-1}(u_{2k-1})},\widehat{\psi^{-1}(u_{2k})},\\
&\cdots,[\psi^{-1}(u_{2k-1}),\psi^{-1}(u_{2k}),\psi^{-1}(u_j)]_T,\cdots,\psi^{-1}(u_{2n+1})\Big)\Big)\\
=&\phi\Big(\delta_T(f)(\psi^{-1}(u_1),\cdots,\psi^{-1}(u_{2n+1}))\Big)=\gamma(\delta_T(f))(u_1,\cdots,u_{2n+1}).
\end{aligned}
$$

Ainsi γ est une cochaîne du complexe $\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{C}_T^{2n-1}(V,L),\Delta_T)$ vers le complexe $\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{C}_{T'}^{2n-1}(V,L),\Delta_{T'})$. Par conséquent, elle induit un morphisme $\overline{\gamma}$ de groupes de cohomologie $\mathcal{H}_T^{\bullet}(V,L)$ vers $\mathcal{H}_{T'}^{\bullet}(V,L)$, pour tout $n\geq 0$.

3.4 Déformations des opérateurs de Rota-Baxter relatifs

Dans cette section, on étudie les déformations formelles ainsi que l'extensibilité des déformations d'ordre n aux déformations d'ordre $n+1$, en utilisant la théorie de la cohomologie établie dans la section précédente.

3.4.1 Déformations formelles

Soit $\mathbb{K}[[t]]$ l'anneau des séries formelles à une variable t et à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour tout espace vectoriel L, on note par $L[[t]]$ l'espace vectoriel des séries formelles à une variable t et à coefficients dans L. De plus, s'il existe une structure de système triple de Lie $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$ sur $\mathbb{K}$, alors on peut étendre cette structure sur l'anneau $\mathbb{K}[[t]]$ dans $L[[t]]$. Cette extension est donnée par la règle suivante :

$$\Big[\sum_{i=0}^{+\infty}t^ix_i,\sum_{j=0}^{+\infty}t^jy_j,\sum_{k=0}^{+\infty}t^kz_k\Big]=\sum_{s=0}^{+\infty}\sum_{i+j+k=s}t^s[x_i,y_j,z_k],\ \forall x_i,y_j,z_k\in L. \tag{3.30}$$

Pour toute représentation (V,θ) de $(L,[\cdot,\cdot,\cdot])$, il existe une représentation naturelle du système triple de Lie $L[[t]]$ sur le $\mathbb{K}[[t]]$-module $V[[t]]$, définie par :

$$\theta\Big(\sum_{i=0}^{+\infty} t^i x_i, \sum_{j=0}^{+\infty} t^j y_j\Big)\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k m_k\Big) = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{i+j+k=s} t^s \theta(x_i, y_j) m_k \; \forall x_i, y_j \in L,\, v_k \in M. \tag{3.31}$$

On considére maintenant la série formelle suivante :

$$T_t = \sum_{i=0}^{+\infty} t^i T_i \quad T_i \in \mathcal{C}_T^1(V, L), \tag{3.32}$$

il s'agit d'une application linéaire $T_t \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V; L)[[t]] = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V; L[[t]])$. Cette série formelle peut être étendue pour agir comme un $\mathbb{K}[[t]]$-module de $V[[t]]$ sur $L[[t]]$ et on continuera à noter cette application par T_t.

Définition 3.4.1. Soient $(L, [\cdot,\cdot,\cdot])$ un système triple de Lie, (V, θ) une représentation de L et $T : V \to L$ un opérateur de Rota-Baxter relatif. Si la série formelle $T_t = \sum_{i=0}^{+\infty} T_i t^i$ où $T_0 = T$ satisfait l'équation suivante :

$$[T_t u, T_t v, T_t w] = T_t\Big(D(T_t u, T_t v)w + \theta(T_t v, T_t w)u - \theta(T_t u, T_t w)v\Big).$$

On dit que T_t est une déformation formelle de l'opérateur de Rota-Baxter relatif T.

Remarque 3.4.2. Si $T_t = T + tT_1$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif. On dit que T_1 engendre une déformation infinitésimale de T.

On rappelle qu'une déformation formelle d'un système triple de Lie $(L, [\cdot,\cdot,\cdot])$ est une série formelle $\omega_t = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k t^k$ où $\omega_k \in \mathrm{Hom}((\wedge^2 L) \otimes L, L)$, tel que $\omega_0(x, y, z) = [x, y, z]$ pour tout $x, y, z \in L$. De plus, ω_t doit définir une structure de système triple de Lie sur l'anneau $\mathbb{K}[[t]]$ dans $L[[t]]$.

Proposition 3.4.3. *Soit $T_t = \sum_{i=0}^{+\infty} t^i T_i$ une déformation formelle d'un opérateur de Rota-Baxter relatif T. Alors $[\cdot,\cdot,\cdot]_{T_t}$ défini pour tout $u, v, w \in V$, par :*

$$[u, v, w]_{T_t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} t^k \Big(D(T_i u, T_j v)w + \theta(T_i v, T_j w)u - \theta(T_i u, T_j w)v\Big),$$

est une déformation formelle du système triple de Lie $(V, [\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ donné dans le Corollaire 3.1.5.

En appliquant les équations (4.33)-(4.35) pour développer l'équation (4.36) et en collectant les coefficients de t^s, on obtient que l'équation (4.36) est équivalente au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i+j+k=s \\ i,j,k \geq 0}} [T_i(u), T_j(v), T_k(w)] \\ &= \sum_{\substack{i+j+k=s \\ i,j,k \geq 0}} T_i\Big(D(T_j(u), T_k(v))w + \theta(T_j(v), T_k(w))u - \theta(T_j(u), T_k(w))v\Big), \end{aligned} \tag{3.33}$$

pour tout $u, v, w \in V$ et $s \geq 0$.

Proposition 3.4.4. *Soit $T_t = \sum_{i=0}^{+\infty} T_i t^i$ une déformation formelle de T. Alors T_1 est un 1-cocycle dans la cohomologie de l'opérateur de Rota-Baxter relatif T, c'est à dire, $\delta_T^1(T_1) = 0$.*

Preuve 3.4.5. L'équation (4.37) est valable pour $s = 0$ car $T_0 = T$ est l'opérateur de Rota-Baxter relatif. Pour $s = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&[Tu, Tv, T_1(w)] + [Tu, T_1(v), Tw] + [T_1(u), Tv, Tw] \\
&= T\Big(D(Tu, T_1(v))w + D(T_1(u), Tv)w + \theta(Tv, T_1(w))u + \theta(T_1(v), Tw)u \\
&- \theta(Tu, T_1(w))v - \theta(T_1(u), Tw)v\Big) + T_1\Big(D(Tu, Tv)w + \theta(Tv, Tw)u - \theta(Tu, Tw)v\Big),
\end{aligned}$$

pour tout $u, v, w \in V$, ce qui implique que $\delta^1_T(T_1)(u, v, w) = 0$. Par conséquent, l'opérateur linéaire T_1 est un 1-cocycle dans la cohomologie de T.

Définition 3.4.6. Soient $T_t = \sum_{i=0}^{+\infty} t^i T_i$ et $T'_t = \sum_{i=0}^{+\infty} t^i T'_i$ deux déformations formelles d'un opérateur de Rota-Baxter relatif. On dit qu'elles sont équivalentes s'il existe un élément $\mathfrak{X} \in L \wedge L$, $\phi_i \in \mathfrak{gl}(L)$ et $\psi_i \in \mathfrak{gl}(V)$ ($i \geq 2$) tel que le couple

$$\Big(\phi_t = Id_L + t[\mathfrak{X}, -] + \sum_{i=2}^{+\infty} t^i \phi_i, \quad \psi_t = Id_V + tD(\mathfrak{X})(-) + \sum_{i=2}^{+\infty} t^i \psi_i\Big) \tag{3.34}$$

soit un morphisme des opérateurs de Rota-Baxter relatifs T_t et T'_t. En particulier, une déformation T_t est dite triviale s'il existe un élément $\mathfrak{X} \in L \wedge L$, $\phi_i \in \mathfrak{gl}(L)$ et $\psi_i \in \mathfrak{gl}(V)$ ($i \geq 2$) de sorte que (ϕ_t, ψ_t) défini par l'équation (4.38) donne une équivalence entre T_t et T.

Théorème 3.4.7. *Si deux déformations formelles d'un opérateur de Rota-Baxter relatif sont équivalentes, alors leurs déformations infinitésimaux sont dans la même classe de cohomologie $\mathcal{H}^1_T(V, L)$.*

Preuve 3.4.8. Soit (ϕ_t, ψ_t) les deux applications définies par l'équation (4.38) qui donnent une équivalence entre les deux déformations $T_t = \sum_{i=0}^{+\infty} T_i t^i$ et $T'_t = \sum_{i=0}^{+\infty} T'_i t^i$ d'un opérateur de Rota-Baxter relatif T. Par $(\phi_t \circ T_t)(u) = (T'_t \circ \psi_t)(u)$, on a

$$\begin{aligned}
T_1(u) &= T'_1(u) + TD(\mathfrak{X})u - [\mathfrak{X}, Tu] \\
&= T'_1(u) + \partial_T(\mathfrak{X})(u), \ \forall u \in V,
\end{aligned}$$

cela implique que T_1 et T'_1 sont dans la même classe de cohomologie.

3.4.2 Déformations d'ordre n et classe d'obstruction

Dans ce paragraphe, on introduit une classe de cohomologie spéciale associée à une déformation d'ordre n. On démontre qu'une déformation d'ordre n est extensible si et seulement si cette classe de cohomologie dans le troisième groupe de cohomologie est triviale. Ainsi, on appelle cette classe de cohomologie comme la classe d'obstruction d'une déformation d'ordre nn étant extensible.

Définition 3.4.9. Soit T un opérateur de Rota-Baxter relatif. Si $T_t = \sum_{i=0}^{n} t^i T_i$ définit un $\mathbb{K}[[t]]/(t^{n+1})$-module de $V[[t]]/(t^{n+1})$ sur le système triple de Lie $L[[t]]/(t^{n+1})$ satisfaisant :

$$[T_t u, T_t v, T_t w] = T_t\Big(D(T_t u, T_t v)w + \theta(T_t v, T_t w)u - \theta(T_t u, T_t w)v\Big).$$

On dit que T_t est une déformation d'ordre n de l'opérateur de Rota-Bxater relatif T.

Définition 3.4.10. Soit $T_t = \sum_{i=0}^{n} t^i T_i$ une déformation d'ordre n d'un opérateur de Rota-Baxter relatif T. S'il existe une 1-cochaine $T_{n+1} \in \mathcal{C}^1_T(V, L)$ tel que $\widetilde{T}_t = T_t + t^{n+1} T_{n+1}$ soit une déformation d'ordre $(n+1)$ de T, alors on dit que T_t est extensible.

soit $T_\lambda = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i T_i$ une déformation d'ordre n d'un opérateur de Rota-Baxter relatif T. On définit $Obs^T \in \mathcal{C}^3_T(V,L)$ par :

$$Obs^T(u,v,w) = \sum_{\substack{i+j+k=n+1\\ 0\leq i,j,k\leq n}} [T_iu,T_jv,T_kw] - T_i\big(D(T_ju,T_kv)w + \theta(T_jv,T_kw)u - \theta(T_ju,T_kw)v\big). \tag{3.35}$$

En utilsant la structure de la 3-algèbre de Lie donnée dans la Proposition 3.3.1, on peut démontrer que Obs^T est un 3-cocycle dans la cohomlogie de T.

Proposition 3.4.11. *La 3-cochaîne $Obs^T \in \mathcal{C}^3_T(V,L)$ est un 3-cocyle, c'est à dire que $\delta^3_T(Obs^T) = 0$.*

Preuve 3.4.12. Pour tout $T_i, T_j, T_k \in \mathfrak{C}^0(V,L) = Hom(V,L)$, et en se basant le crochet ternaire défini par l'équation (3.16), on obtient :

$$\begin{aligned}
& l_3(T_i,T_j,T_k)(u,v,w)\\
=&[[[\pi+\theta,T_i]_R,T_j]_R,T_k]_R(u,v,w)\\
=&[[\pi+\theta,T_i]_R,T_j]_R(T_ku,v,w) + [[\pi+\theta,T_i]_R,T_j]_R(u,T_kv,w)\\
&+[[\pi+\theta,T_i]_R,T_j]_R(u,v,T_kw) - T_k[[\pi+\theta,T_i]_R,T_j]_R(u,v,w)\\
=&[\pi+\theta,T_i]_R(T_ku,T_jv,w) + [\pi+\theta,T_i]_R(T_ku,v,T_jw) - T_j[\pi+\theta,T_i]_R(T_ku,v,w)\\
&+[\pi+\theta,T_i]_R(T_ju,T_kv,w) + [\pi+\theta,T_i]_R(u,T_kv,T_jw) - T_j[\pi+\theta,T_i]_R(u,T_kv,w)\\
&+[\pi+\theta,T_i]_R(T_ju,v,T_kw) + [\pi+\theta,T_i]_R(u,T_jv,T_kw) - T_j[\pi+\theta,T_i]_R(u,v,T_kw)\\
&-T_k[\pi+\theta,T_i]_R(T_ju,v,w) - T_k[\pi+\theta,T_i]_R(u,T_jv,w) - T_k[\pi+\theta,T_i]_R(u,v,T_jw)\\
=&[T_ku,T_jv,T_iw] - T_iD(T_ku,T_jv)w + [T_ku,T_iv,T_jw] + T_i\theta(T_ku,T_jw)v - T_jD(T_ku,T_iv)w\\
&+T_j\theta(T_ku,T_iw)v + [T_ju,T_kv,T_iw] - T_iD(T_ju,T_kv)w + [T_iu,T_kv,T_jw] - T_i\theta(T_kv,T_jw)u\\
&-T_jD(T_iu,T_kv)w - T_j\theta(T_kv,T_iw)u + [T_ju,T_iv,T_kw] + T_i\theta(T_ju,T_kw)v + [T_iu,T_jv,T_kw]\\
&-T_i\theta(T_jv,T_kw)u - T_j\theta(T_iv,T_kw)u + T_j\theta(T_iu,T_kw)v - T_kD(T_ju,T_iv)w + T_k\theta(T_ju,T_iw)v\\
&-T_kD(T_iu,T_jv)w - T_k\theta(T_jv,T_iw)u - T_k\theta(T_iv,T_jw)u + T_k\theta(T_iu,T_jw)v.
\end{aligned}$$

Ainsi, on déduit que

$$Obs^T = \frac{1}{6}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\ 0\leq i,j,k\leq n}} l_3(T_i,T_j,T_k) = \frac{1}{6}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\ 1\leq i,j,k\leq n}} l_3(T_i,T_j,T_k) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i+j=n+1\\ 1\leq i,j\leq n}} l_3(T,T_i,T_j). \tag{3.36}$$

Puisque T_t est une déformation d'ordre n de l'opérateur de Rota-Baxter relatif T, alors pour tout $0 \leq s \leq n$, $u,v,w \in V$, on a

$$\sum_{\substack{i+j+k=s\\ 0\leq i,j,k\leq s}} [T_iu,T_jv,T_kw] - T_i\big(D(T_ju,T_kv)w + \theta(T_jv,T_kw)u - \theta(T_ju,T_kw)v\big) = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}l_3(T,T,T_s) &= \frac{1}{6}\sum_{\substack{i+j+k=s\\ 0\leq i,j,k\leq s-1}} l_3(T_i,T_j,T_k) \\
&= \frac{1}{6}\sum_{\substack{i+j+k=s\\ 1\leq i,j,k\leq s-1}} l_3(T_i,T_j,T_k) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i+j=s\\ 1\leq i,j\leq s-1}} l_3(T,T_i,T_j), \quad 0\leq s\leq n.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

D'après le Théorème 3.3.12 et (3.18), on a

$$\delta^3_T(Obs^T) \ = -\frac{1}{2}l_3(T,T,Obs^T)$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(3.36)}{=} -\frac{1}{12}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\1\le i,j,k\le n}} l_3(T,T,l_3(T_i,T_j,T_k)) - \frac{1}{4}\sum_{\substack{i+j=n+1\\1\le i,j\le n}} l_3(T,T,(l_3(T,T_i,T_j))\\
&\overset{(2.33)}{=} -\frac{1}{12}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\1\le i,j,k\le n}} l_3(l_3(T_i,T_j,T_k),T,T) - \frac{1}{4}\sum_{\substack{i+j=n+1\\1\le i,j\le n}} l_3((l_3(T,T_i,T_j),T,T)\\
&\overset{(2.34)}{=} \frac{1}{6}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\1\le i,j,k\le n}} \Big(l_3(l_3(T_i,T_j,T),T_k,T) + l_3(l_3(T_i,T_k,T),T_j,T) + l_3(l_3(T_j,T_k,T),T_i,T)\Big)\\
&= \frac{1}{12}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\1\le i,j,k\le n}} \Big(l_3(l_3(T_i,T,T),T_j,T_k) + l_3(l_3(T_j,T,T),T_i,T_k) + l_3(l_3(T_k,T,T),T_i,T_j)\Big)\\
&+ \frac{1}{4}\sum_{\substack{i+j=n+1\\1\le i,j\le n}} \Big(l_3(l_3(T,T,T_i),T_j,T) + l_3(l_3(T,T,T_j),T_i,T)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\1\le i,j,k\le n}} l_3(l_3(T_i,T_j,T),T_k,T) + \frac{1}{4}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\1\le i,j,k\le n}} l_3(l_3(T_i,T,T),T_j,T_k) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i+j=n+1\\1\le i,j\le n}} l_3(l_3(T,T,T_i),T_j,T)\\
&\overset{(3.37)}{=} \frac{1}{2}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\1\le i,j,k\le n}} l_3(l_3(T_i,T_j,T),T_k,T) - \frac{1}{12}\sum_{\substack{i'+i''+i'''+j+k=n+1\\1\le i',i'',i''',j,k\le n}} l_3(l_3(T_{i'},T_{i''},T_{i'''}),T_j,T_k)\\
&- \frac{1}{4}\sum_{\substack{i'+i''+j+k=n+1\\1\le i',i'',j,k\le n}} l_3(l_3(T,T_{i'},T_{i''}),T_j,T_k) - \frac{1}{6}\sum_{\substack{i'+i''+i'''+j=n+1\\1\le i',i'',i''',j\le n}} l_3(l_3(T_{i'},T_{i''},T_{i'''}),T_j,T)\\
&- \frac{1}{2}\sum_{\substack{i'+i''+j=n+1\\1\le i',i'',j\le n}} l_3(l_3(T,T_{i'},T_{i''}),T_j,T)\\
&= -\frac{1}{12}\sum_{\substack{i'+i''+i'''+j+k=n+1\\1\le i',i'',i''',j,k\le n}} l_3(l_3(T_{i'},T_{i''},T_{i'''}),T_j,T_k) - \frac{1}{4}\sum_{\substack{i'+i''+j+k=n+1\\1\le i',i'',j,k\le n}} l_3(l_3(T,T_{i'},T_{i''}),T_j,T_k)\\
&- \frac{1}{6}\sum_{\substack{i'+i''+i'''+j=n+1\\1\le i',i'',i''',j\le n}} l_3(l_3(T_{i'},T_{i''},T_{i'''}),T_j,T)\\
&\overset{(2.34)}{=} -\frac{1}{4}\sum_{\substack{i'+i''+j+k=n+1\\1\le i',i'',j,k\le n}} l_3(l_3(T,T_{i'},T_{i''}),T_j,T_k) - \frac{1}{6}\sum_{\substack{i'+i''+i'''+j=n+1\\1\le i',i'',i''',j\le n}} l_3(l_3(T_{i'},T_{i''},T_{i'''}),T_j,T)\\
&\overset{(2.33)}{=} -\frac{1}{12}\sum_{\substack{i'+i''+j+k=n+1\\1\le i',i'',j,k\le n}} \Big(l_3(l_3(T,T_{i'},T_{i''}),T_j,T_k) + l_3(l_3(T_{i'},T,T_{i''}),T_j,T_k) + l_3(l_3(T_{i'},T_{i''},T),T_j,T_k)\Big)\\
&- \frac{1}{12}\sum_{\substack{i'+i''+i'''+j=n+1\\1\le i',i'',i''',j\le n}} \Big(l_3(l_3(T_{i'},T_{i''},T_{i'''}),T_j,T) + l_3(l_3(T_{i'},T_{i''},T_{i'''}),T,T_j)\Big)\\
&\overset{(2.34)}{=} 0.
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi que la 3-cochaîne Obs^T est un 3-cocycle.

Définition 3.4.13. Soit $T_t = \sum_{i=0}^{n} t^i T_i$ une déformation d'ordre n de T. Alors la classe de cohomologie $[Obs^T] \in \mathcal{H}^3_T(V,L)$ est appelée la classe d'obstruction de T_t étant extensible.

Théorème 3.4.14. *Soit $T_t = \sum_{i=0}^{n} t^i T_i$ une déformation d'ordre n de T. Alors T_t est extensible si et seulement si la classe d'obstruction $[Obs^T]$ est triviale.*

Preuve 3.4.15. Supposons qu'une déformation d'ordre n T_t de l'opérateur de Rota-Baxter relatif T s'étende à une déformation d'ordre $n+1$. Alors l'équation (3.37) est valable pour $s = n+1$ et on a donc $Obs^T = -\delta^1_T(T_{n+1})$, ce qui implique que la classe d'obstruction $[Obs^T]$ est triviale.

Inversement, si la classe d'obstruction $[Obs^T]$ est triviale, supposons que $Obs^T = -\delta^1_T(T_{n+1})$ pour une 1-cochaîne $T_{n+1} \in \mathrm{Hom}(V,L)$. Fixons $\widetilde{T}_t = T_t + T_{n+1}t^{n+1}$. Alors $\widetilde{T}_t$ satisfait l'équation (3.37) pour $0 \leq s \leq n+1$. Donc $\widetilde{T}_t$ est une déformation d'ordre $n+1$, ce qui signifie que T_t est extensible.

Corollaire 3.4.16. *Si $\mathcal{H}^3_T(V,L) = 0$, alors tout 1-cocycle dans $\mathcal{Z}^1_T(V,L)$ est l'infinitésimal d'une déformation formelle de T.*

3.5 Cohomologie des opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les algèbres de Lie et cohomologie des systèmes triples de Lie associés

Inspiré par la construction d'un système triple de Lie à partir d'une algèbre de Lie, ce paragraphe explore les connexions entre la cohomologie des opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les algèbres de Lie et celle sur les systèmes triples de Lie associés.

Soinet $(L,[\cdot,\cdot])$ une algèbre de Lie, (V,ρ) une représentation et $T : V \to L$ un opérateur de Rota-Baxter relatif. Alors il y a une structure d'algèbre de Lie sur $(V,[\cdot,\cdot]_T)$, où le crochet $[\cdot,\cdot]_T : \wedge^2 V \to V$ est donné par :

$$[u,v]_T = \rho(Tu)v - \rho(Tv)u, \ \forall u,v \in V. \tag{3.38}$$

Il existe une représentation de l'algèbre de Lie $(V,[\cdot,\cdot]_T)$, $\rho_T : V \to \mathfrak{gl}(L)$, définie par :

$$\rho_T(u)x = [Tu,x] + T\rho(x)u, \ \forall u \in V, x \in L.$$

Ensuite, on considère l'ensemble des p-cochaînes $C^p_T(V,L) = \mathrm{Hom}(\wedge^p V,L)$. Soit $\widetilde{d}_T : C^p_T(V,L) \to C^{p+1}_T(V,L)(p \geq 0)$ l'opérateur cobord correspondant de l'algèbre de Lie $(V,[\cdot,\cdot]_T)$ à coefficients dans la représentation (L,ρ_T), définie pour tout $f \in C^p_T(V,L)$ et $u_1,\cdots,u_{p+1} \in V$ par :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{d}_T(f)(u_1,\cdots,u_{p+1})\\
&= \sum_{1\leq i<j\leq p+1} (-1)^{i+j} f(\rho(Tu_i)u_j - \rho(Tu_j)u_i, u_1,\cdots,\widehat{u_i},\cdots,\widehat{u_j},\cdots,u_{p+1})\\
&+ \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1}\Big([Tu_i, f(u_1,\cdots,\widehat{u_i},\cdots,u_{p+1})] + T\rho(f(u_1,\cdots,\widehat{u_i},\cdots,u_{p+1}))(u_i)\Big).
\end{aligned}$$

Le complexe de cochaînes $(C^p_T(V,L),\widetilde{d}_T)$ est alors appelé complexe de cochaînes de l'opérateur de Rota-Baxter relatif T et on désigne par $H^p_T(V,L) = Z^p_T(V,L)/B^p_T(V,L)$, le $p^{ième}$ groupe de cohomologie de T.

Proposition 3.5.1. *Soient $(L,[\cdot,\cdot])$ une algèbre de Lie et (V,ρ) sa représentation. Alors (V,θ_ρ) est une représentation du système triple de Lie $(L,[\cdot,\cdot,\cdot] = [\cdot,\cdot] \circ ([\cdot,\cdot] \otimes Id_L))$ donné par le Lemme 2.1.6, où :*

$$\theta_\rho(x,y) = \rho(y)\rho(x), \quad \forall x,y \in L. \tag{3.39}$$

Preuve 3.5.2. Soient $(L,[\cdot,\cdot])$ une algèbre de Lie et (V,ρ) sa représentation. D'après ce qui précéde, on a une structure d'un système triple de Lie sur L par le crochet $[\cdot,\cdot,\cdot] = [[\cdot,\cdot],\cdot]$. Maintenant, pour tout $x,y,z \in L$ et $u,v,w \in V$, on a

$$\begin{aligned}
[x+u,y+v,z+w]_{L\oplus V} &= [[x+u,y+v]_{L\oplus V}, z+w]_{L\oplus V}\\
&= [[x,y] + \rho(x)(v) - \rho(y)(u), z+w]_{L\oplus V}\\
&= [[x,y],z] + \rho([x,y])(w) - \rho(z)\rho(x)(v) + \rho(z)\rho(y(u)\\
&= [x,y,z] + \big(\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)\big)(w) - \rho(z)\rho(x)(v) + \rho(z)\rho(y(u)\\
&= [x,y,z] + \big(\theta_\rho(y,x) - \theta_\rho(x,y)\big)(w) - \theta_\rho(x,z)(v) + \theta_\rho(y,z)(u)\\
&= [x,y,z] + D_\rho(x,y)(w) - \theta_\rho(x,z)(v) + \theta_\rho(y,z)(u).
\end{aligned}$$

Alors d'après l'équation (2.8), (V,θ_ρ) est une représentation de $(L,[\cdot,\cdot,\cdot] = [\cdot,\cdot] \circ ([\cdot,\cdot] \otimes Id_L))$.

Théorème 3.5.3. *Soinet $(L, [\cdot,\cdot])$ une algèbre de Lie, (V, ρ) une représentation et $T : V \to L$ un opérateur de Rota-Baxter relatif. Alors T est aussi un opérateur de Rota-Baxter relatif sur le système triple de Lie $(L, [\cdot,\cdot,\cdot] = [\cdot,\cdot] \circ ([\cdot,\cdot] \otimes Id_L))$ associé à la représentation (V, θ_ρ).*

Preuve 3.5.4. Pour tout $u, v, w \in V$, on a

$$\begin{aligned}
[Tu, Tv, Tw] &= [[Tu, Tv], Tw] \\
&= [T(\rho(Tu)v - \rho(Tv)u), Tw] \\
&= [T\rho(Tu)v, Tw] - [T\rho(Tv)u, Tw] \\
&= T\big(\rho(T\rho(Tu)v)w - \rho(Tw)\rho(Tu)v\big) - T\big(\rho(T\rho(Tv)u)w - \rho(Tw)\rho(Tv)u\big) \\
&= T\big(\rho([Tu, Tv])w - \rho(Tw)\rho(Tu)v + \rho(Tw)\rho(Tv)u\big) \\
&= T\big(D_\rho(Tu, Tv)w + \theta_\rho(Tv, Tw)u - \theta_\rho(Tu, Tw)v\big).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Il s'avère qu'il existe deux méthodes pour construire une structure du système triple de Lie sur V à partir d'une algèbre de Lie $(L, [\cdot,\cdot])$ et une représentation (V, ρ). D'une part, on considère la structure du système triple de Lie $(V, [\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ fournie par l'opérateur de Rota-Baxter relatif T sur le système triple de Lie correspondant $(L, [\cdot,\cdot,\cdot] = [\cdot,\cdot] \circ ([\cdot,\cdot] \otimes Id_L))$ et associé à la représentation (V, θ_ρ), où

$$[u, v, w]_T = D_\rho(Tu, Tv)w + \theta_\rho(Tv, Tw)u - \theta_\rho(Tu, Tw)v. \tag{3.40}$$

D'autre part, on construit d'abord l'algèbre de Lie $(V, [\cdot,\cdot]_T)$ fournie par l'opérateur de Rota-Baxter relatif T sur l'algèbre de Lie $(L, [\cdot,\cdot])$ et associé à la représentation (V, ρ), puis on considère la structure du système triple de Lie associé à l'algèbre de Lie $(V, [\cdot,\cdot]_T)$ par le crochet ternaire $[\cdot,\cdot,\cdot]_T = [\cdot,\cdot]_T \circ ([\cdot,\cdot]_T \otimes Id_V)$. Ces deux constructions donnent la même structure du système triple de Lie sur V.

Comme dans le cas de la Proposition 3.5.1, on constate que

$$\theta_T(u, v) = \rho_T(v)\rho_T(u), \quad \forall u, v \in V, \tag{3.41}$$

est une représentation du système triple de Lie associé $(V, [\cdot,\cdot,\cdot]_T)$.

Théorème 3.5.5. *Soit $(V, [\cdot,\cdot]_T)$ une algèbre de Lie et (L, ρ_T) sa représentation. Tout 1-cocycle pour la cohomologie de l'algèbre de Lie $(V, [\cdot,\cdot]_T)$ à coefficients dans la représentation (L, ρ_T) est un 1-cocycle pour la cohomologie du système triple de Lie associé $(V, [\cdot,\cdot,\cdot]_T = [\cdot,\cdot]_T \circ ([\cdot,\cdot]_T \otimes Id_V))$ à coefficients dans la représentation (L, θ_T).*

Preuve 3.5.6. Soit φ un 1-cocycle pour la cohomologie de l'algèbre de Lie $(V, [\cdot,\cdot]_T)$ à coefficients dans la représentation (L, ρ_T). Alors, pour tout $u, v \in V$, on a

$$\widetilde{d}_T(\varphi)(u, v) = \rho_T(u)\varphi(v) - \rho_T(v)\varphi(u) - \varphi([u, v]_T) = 0.$$

D'autre part, pour tout $u, v, w \in V$, on a

$$\begin{aligned}
\delta_T^1(\varphi)(u, v, w) =& D_T(u, v)\varphi(w) - \theta_T(u, w)\varphi(v) + \theta_T(v, w)\varphi(u) - \varphi([u, v, w]_T) \\
=& \rho_T([u, v]_T)\varphi(w) - \rho_T(w)\rho_T(u)\varphi(v) + \rho_T(w)\rho_T(v)\varphi(u) - \varphi([[u, v]_T, w]_T) \\
=& \rho_T([u, v]_T)\varphi(w) - \rho_T(w)\rho_T(u)\varphi(v) + \rho_T(w)\rho_T(v)\varphi(u) - \rho_T([u, v]_T)\varphi(w) \\
&+ \rho_T(w)\varphi([u, v]_T) \\
=& \rho_T([u, v]_T)\varphi(w) - \rho_T(w)\rho_T(u)\varphi(v) + \rho_T(w)\rho_T(v)\varphi(u) - \rho_T([u, v]_T)\varphi(w) \\
&+ \rho_T(w)\rho_T(u)\varphi(v) - \rho_T(w)\rho_T(v)\varphi(u) \\
=& 0,
\end{aligned}$$

ce qui signifie que φ est un 1-cocycle pour la cohomologie du système triple de Lie associé $(V, [\cdot,\cdot,\cdot]_T = [\cdot,\cdot]_T \circ ([\cdot,\cdot]_T \otimes Id_V)$ à coefficients dans la représentation (L, θ_T).

Théorème 3.5.7. *Soit $\varphi \in Z_T^2(V, L)$ un 2-cocycle pour la cohomologie de $(V, [\cdot,\cdot]_T)$ à coefficients dans la représentation (L, ρ_T). Alors l'application $\omega(u, v, w) = \varphi([u, v]_T, w) - \rho_T(w)\varphi(u, v)$ est un 3-cocycle pour la cohomologie du système triple de Lie associé $(V, [\cdot,\cdot,\cdot]_T = [\cdot,\cdot]_T \circ ([\cdot,\cdot]_T \otimes Id_V))$ à coefficients dans la représentation (L, θ_T).*

Preuve 3.5.8. Soit $\varphi \in Z^2_T(V,L)$. Pour tout $u,v,w \in V$, on a

$$\begin{aligned}\omega(u,v,w) &= \varphi([u,v]_T,w) - \rho_T(w)\varphi(u,v)\\ &= -\big(\varphi([v,u],w) - \rho_T(w)\varphi(v,w)\big)\\ &= -\omega(v,u,w),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\omega(u,v,w) + \omega(v,w,u) + \omega(w,u,v)\\ =&\varphi([u,v]_T,w) - \rho_T(w)\varphi(u,v) + \varphi([v,w]_T,u) - \rho_T(u)\varphi(v,w) + \varphi([w,u],v) - \rho_T(v)\varphi(w,u)\\ =&\widetilde{d}_T(\varphi)(u,v,w) = 0,\end{aligned}$$

ce qui implique que ω est une 3-cochaîne selon la Définition 2.1.18. Pour tout $u,v,w,t,e \in V$, on a aussi

$$\begin{aligned}&\delta^3_T(\omega)(u,v,w,t,e)\\
=&\omega(u,v,[w,t,e]_T) + D_T(u,v)\omega(w,t,e) - \omega([u,v,w]_T,t,e) - \omega(w,[u,v,t]_T,e)\\
&- \omega(w,t,[u,v,e]_T) - \theta_T(t,e)\omega(u,v,w) + \theta_T(w,e)\omega(u,v,t) - D_T(w,t)\omega(u,v,e)\\
=&\varphi([u,v]_T,[[w,t]_T,e]_T) - \rho_T([[w,t]_T,e]_T)\varphi(u,v) + \rho_T([u,v]_T)\varphi([w,t]_T,e) - \rho_T([u,v]_T)\rho(e)\varphi(w,t)\\
&- \varphi([[[u,v]_T,w]_T,t]_T,e) + \rho_T(e)\varphi([[u,v]_T,w]_T,t) - \varphi([w,[[u,v]_T,t]_T]_T,e) + \rho_T(e)\varphi(w,[[u,v]_T,t]_T)\\
&- \varphi([w,t]_T,[[u,v]_T,e]_T) + \rho_T([[u,v]_T,e]_T)\varphi(w,t) - \rho_T(e)\rho_T(t)\varphi([u,v]_T,w) + \rho_T(e)\rho_T(w)\varphi([u,v]_T,t)\\
&+ \rho_T(e)\rho_T([t,w]_T)\varphi(u,v) - \rho_T([w,t]_T)\varphi([u,v]_T,e) + \rho_T([w,t]_T)\rho_T(e)\varphi(u,v)\\
=&\varphi([u,v]_T,[[w,t]_T,e]_T) - \varphi([w,t]_T,[[u,v]_T,e]_T) + \varphi([[u,v]_T,[t,w]_T]_T,e) + \rho_T([u,v]_T)\varphi([w,t]_T,e)\\
&- \rho_T([w,t]_T)\varphi([u,v]_T,e) + \rho_T(e)\varphi([[u,v]_T,w]_T,t) + \rho_T(e)\varphi(w,[[u,v]_T,t]_T) - \rho_T(e)\rho_T(t)\varphi([u,v]_T,w)\\
&+ \rho_T(e)\rho_T(w)\varphi([u,v]_T,t) - \rho_T(e)\rho_T([u,v]_T)\varphi(w,t)\\
=&\varphi([u,v]_T,[[w,t]_T,e]_T) - \varphi([w,t]_T,[[u,v]_T,e]_T) + \varphi([[u,v]_T,[t,w]_T]_T,e) + \rho_T([u,v]_T)\varphi([w,t]_T,e)\\
&- \rho_T([w,t]_T)\varphi([u,v]_T,e) + \rho_T(e)\varphi([u,v]_T,[w,t]_T)\\
&= \widetilde{d}_T(\varphi)([u,v]_T,[w,t]_T,e) = 0,\end{aligned}$$

ce qui donne que ω est un 3-cocycle pour la cohomologie du système triple de Lie associé $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T = [\cdot,\cdot]_T \circ ([\cdot,\cdot]_T \otimes Id_V))$ à coefficients dans la représentation (L,θ_T).

Lemme 3.5.9. *Soit $\alpha \in C^1_T(V,L)$. Alors*

$$\delta^1_T(\alpha)(u,v,w) = \widetilde{d}_T(\alpha)([u,v]_T,w) - \rho_T(w)\widetilde{d}_T(\alpha)(u,v). \tag{3.42}$$

Preuve 3.5.10. Pour tout $u,v,w \in V$, on a

$$\begin{aligned}&\delta^1_T(\alpha)(u,v,w)\\
=&D_T(u,v)\alpha(w) - \theta_T(u,w)\alpha(v) + \theta_T(v,w)\alpha(u) - \alpha([u,v,w]_T)\\
=&\rho_T([u,v]_T)\alpha(w) - \rho_T(w)\rho(u)\alpha(v) + \rho_T(w)\rho_T(v)\alpha(u) - \alpha([[u,v]_T,w]_T)\\
=&\rho_T([u,v]_T)\alpha(w) - \rho_T(w)\alpha([u,v]_T) - \alpha([[u,v]_T,w]_T)\\
&- \rho_T(w)\big(\rho_T(u)\alpha(v) - \rho_T(v)\alpha(u) - \alpha([u,v]_T)\big)\\
=&\widetilde{d}_T(\alpha)([u,v]_T,w) - \rho_T(w)\widetilde{d}_T(\alpha)(u,v).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Proposition 3.5.11. *Soient $\varphi_1,\varphi_2 \in Z^2_T(V,L)$. Si φ_1,φ_2 sont dans la même classe de cohomologie, alors ω_1,ω_2 définis par :*

$$\omega_i(u,v,w) = \varphi_i([u,v]_T,w) - \rho_T(w)\varphi_i(u,v),\ i = 1,2 \tag{3.43}$$

sont dans la même classe de cohomologie du système triple de Lie associé $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T = [\cdot,\cdot]_T \circ ([\cdot,\cdot]_T \otimes Id_V))$.

Preuve 3.5.12. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in Z_T^2(V,L)$ sont deux cocycles dans la même classe de cohomologie, c'est-à-dire,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \widetilde{d}_T(\alpha),\ \alpha \in C_T^1(V,L).$$

D'après le Lemme 3.5.9, on a

$$\begin{aligned}\omega_2(u,v,w) - \omega_1(u,v,w) &= (\varphi_2 - \varphi_1)([u,v]_T, w) - \rho_T(w)(\varphi_2 - \varphi_1)(u,v)\\ &= \widetilde{d}_T(\alpha)([u,v]_T, w) - \rho_T(w)\widetilde{d}_T(u,v)\\ &= \delta_T^1(\alpha)(u,v,w),\ \alpha \in C_T^1(V,L),\end{aligned}$$

ce qui signifie que ω_1 et ω_2 sont dans la même classe de cohomologie.

Chapitre 4

Cohomolgies et déformations des opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés sur les algèbres 3-Lie

Notre objectif dans ce chapitre est d'introduire la notion d'opérateur de Rota-Baxter relatif twisté sur une algèbre 3-Lie et d'étudier les algèbres 3-NS-Lie en tant que structures sous-jacentes à ce type d'opérateurs. De plus, en partant d'une représentation d'une algèbre 3-Lie et en s'appuyant sur l'approche de Voronov, on construit une L_∞-algèbre dont les éléments de Maurer-Cartan sont des opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés sur une algèbre 3-Lie. On définit ensuite la cohomologie de ces opérateurs sur les algèbres 3-Lie afin d'explorer leurs déformations. On démontre que si deux déformations formelles d'un opérateur de Rota-Baxter relatif sur une algèbre 3-Lie sont équivalentes, alors leurs infinitésimaux sont dans la même classe cohomologique dans le premier groupe de cohomologie. Par ailleurs, l'extension d'une déformation d'ordre n à une déformation d'ordre $n+1$ est donnée par une classe de cohomologie dans le second groupe de cohomologie.

4.1 Opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés sur les algèbres 3-Lie

Dans cette section, on introduit le concept d'opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés sur les algèbres 3-Lie, qui constituent une généralisation au cas ternaire des opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés sur les algèbres de Lie étudiés par A. Das dans [49]. De plus, on présente quelques propriétés ainsi que des résultats de caractérisation. Par la suite, on va considérer que tous les opérateurs de Rota-Baxter sont de poids $\lambda = 0$.

Soient $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ une algèbre 3-Lie et (V, ρ) une représentation. Pour tout 2-cocycle $\mathcal{H} \in \mathfrak{C}^2_{3Lie}(\mathfrak{g}; V)$, on a une structure d'algèbre 3-Lie sur la somme direct $\mathfrak{g} \oplus V$ donnée par :

$$[(x,u),(y,v),(z,w)]_\mathcal{H} = \Big([x,y,z]_\mathfrak{g}, \rho(x,y)w + \rho(z,x)v + \rho(y,z)u + \mathcal{H}(x,y,z)\Big), \tag{4.1}$$

que l'on appelle le produit semi-direct $\mathcal{H}$-twisté et noté par $\mathfrak{g} \ltimes^\mathcal{H}_\rho V$. Désormais, $\mathcal{H}$ désignera toujours un 2-cocycle.

Définition 4.1.1. Soient $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ une algèbre 3-Lie et (V, ρ) une représentation. Une application linéaire $T : V \to \mathfrak{g}$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté si elle vérifie :

$$[Tu, Tv, Tw]_\mathfrak{g} = T\big(\rho(Tu,Tv)w + \rho(Tv,Tw)u + \rho(Tw,Tu)v + \mathcal{H}(Tu,Tv,Tw)\big), \quad \forall u,v,w \in V. \tag{4.2}$$

Exemple 4.1.2. Tout opérateur de Rota-Baxter de poids zéro sur une algèbre 3-Lie est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté où la représentation est la représentation adjointe et le 2-cocycle $\mathcal{H}$ est trivial.

Exemple 4.1.3. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre 3-Lie et V un $\mathfrak{g}$-module. On Suppose que $\phi : \mathfrak{g} \to V$ soit une 1-cochaîne inversible dans le complexe de Chevalley-Eilenberg des cochaînes de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans V. Alors $T = \phi^{-1} : V \to \mathfrak{g}$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté avec $\mathcal{H} = -\partial\phi$. La preuve découle du fait que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(Tu,Tv,Tw) &= -(\partial\phi)(Tu,Tv,Tw)\\ &= -\rho(Tu,Tv)\phi(Tw) - \rho(Tv,Tw)\phi(Tu) - \rho(Tw,Tu)\phi(Tv) + \phi([Tu,Tv,Tw]_{\mathfrak{g}}).\end{aligned} \tag{4.3}$$

En appliquant T aux deux côtés de (4.3), on obtient l'identité (4.2).

Exemple 4.1.4. Soit $N : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ un opérateur de Nijenhuis sur une algèbre 3-Lie $\mathfrak{g}$, c'est à dire, que N satisfait l'identité :

$$\begin{aligned}[Nx,Ny,Nz]_{\mathfrak{g}} = N\Big(&[Nx,Ny,z]_{\mathfrak{g}} + [Nx,y,Nz]_{\mathfrak{g}} + [x,Ny,Nz]_{\mathfrak{g}}\\ &- N([Nx,y,z]_{\mathfrak{g}} + [x,Ny,z]_{\mathfrak{g}} + [x,y,Nz]_{\mathfrak{g}}) + N^2[x,y,z]_{\mathfrak{g}}\Big), \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Dans ce cas, il y a une nouvelle structure d'algèbre 3-Lie sur $\mathfrak{g}$ notée par $\mathfrak{g}_N$ et donnée par le crochet suivant :

$$\begin{aligned}[x,y,z]_N =&[Nx,Ny,z]_{\mathfrak{g}} + [Nx,y,Nz]_{\mathfrak{g}} + [x,Ny,Nz]_{\mathfrak{g}} - N([Nx,y,z]_{\mathfrak{g}}\\ &+ [x,Ny,z]_{\mathfrak{g}} + [x,y,Nz]_{\mathfrak{g}} - N[x,y,z]_{\mathfrak{g}}).\end{aligned}$$

De plus, l'algèbre 3-Lie $\mathfrak{g}_N$ possède une représentation sur $\mathfrak{g}$ donnée par $\rho(x,y)z = [Nx,Ny,z]_{\mathfrak{g}}$, pour tout $x,y,z \in \mathfrak{g}$. Avec cette représentation, l'application $\mathcal{H} : \wedge^3\mathfrak{g}_N \to \mathfrak{g}$ définie par :

$$\mathcal{H}(x,y,z) = -N([Nx,y,z]_{\mathfrak{g}} + [x,Ny,z]_{\mathfrak{g}} + [x,y,Nz]_{\mathfrak{g}} - N[x,y,z]_{\mathfrak{g}})$$

est un 2-cocycle dans la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}_N$ à coefficients dans $\mathfrak{g}$. Il est alors facile d'observer que l'application d'identité $Id : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_N$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté. Cet exemple sera reconsidéré dans un contexte plus général dans la section suivante où nous introduirons les algèbres 3-NS-Lie et un foncteur de la catégorie des algèbres 3-NS-Lie à la catégorie des opérateurs de Rota-Baxter relatifs $\mathcal{H}$-twistés.

En utilisant le produit semi-direct $\mathcal{H}$-twisté, on peut caractériser les opérateurs de Rota-Baxter relatifs $\mathcal{H}$-twistés par leurs graphes.

Proposition 4.1.5. *Une application linéaire $T : V \to \mathfrak{g}$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté si et seulement si son graphe $Gr(T) = \{(Tu,u) | u \in V\}$ est une sous-algèbre du produit semi-direct $\mathcal{H}$-twisté $\mathfrak{g} \ltimes_{\rho}^{\mathcal{H}} V$.*

Preuve 4.1.6. Soient (Tu,u), (Tv,v) et $(Tw,w) \in Gr(T)$. Pour tout $u,v,w \in V$, on a :

$$\begin{aligned}&[(Tu,u),(Tv,v),(Tw,w)]_{\mathcal{H}}\\ =& \Big([Tu,Tv,Tw]_{\mathfrak{g}}, \rho(Tu,Tv)w + \rho(Tw,Tu)v + \rho(Tv,Tw)u + \mathcal{H}(Tu,Tv,Tw)\Big).\end{aligned}$$

On Suppose que $Gr(T)$ est une sous-algèbre du produit semi-direct $\mathcal{H}$-twisté $\mathfrak{g} \ltimes_{\rho}^{\mathcal{H}} V$. Alors, on a

$$[Tu,Tv,Tw]_{\mathfrak{g}} = T\Big(\rho(Tu,Tv)w + \rho(Tw,Tu)v + \rho(Tv,Tw)u + \mathcal{H}(Tu,Tv,Tw)\Big).$$

D'autre part, si T est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté, alors

$$\begin{aligned}&[(Tu,u),(Tv,v),(Tw,w)]\\ =& \Big(T\big(\rho(Tu,Tv)w + \rho(Tw,Tu)v + \rho(Tv,Tw)u + \mathcal{H}(Tu,Tv,Tw)\big),\\ &\quad \rho(Tu,Tv)w + \rho(Tw,Tu)v + \rho(Tv,Tw)u + \mathcal{H}(Tu,Tv,Tw)\Big) \in Gr(T).\end{aligned}$$

Ce qui implique que le graphe $Gr(T)$ est un sous algèbre du produit semi-direct $\mathcal{H}$-twisté $L \ltimes_{\rho}^{\mathcal{H}} V$.

Puisque l'ensemble $Gr(T)$ est isomorphe à V en tant qu'espace vectoriel par l'identification $(Tu,u) \cong u$, on obtient alors le corollaire suivant.

Corollaire 4.1.7. *Soit $T : V \to \mathfrak{g}$ un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté. Alors il y a une structure d'algèbre 3-Lie sur V, où le crochet ternaire est donné par :*

$$[u,v,w]_T = \rho(Tu,Tv)w + \rho(Tv,Tw)u + \rho(Tw,Tu)v + \mathcal{H}(Tu,Tv,Tw). \tag{4.5}$$

De plus, T est un morphisme de l'algèbre 3-Lie, c'est à dire, $T([u,v,w]_T) = [Tu,Tv,Tw]_{\mathfrak{g}}$.

Définition 4.1.8. Soient $T : V \to \mathfrak{g}$ un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté et $T' : V' \to \mathfrak{g}'$ un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}'$-twisté. Un morphisme d'opérateurs de Rota-Baxter relatifs de T à T' consiste en une paire (ψ,γ) d'un morphisme d'algèbre 3-Lie $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ et d'une application linéaire $\gamma : V \to V'$ satisfaisant :

$$\gamma(\rho(x,y)u) = \rho'(\psi(x),\psi(y))\gamma(u),\ \forall x,y \in g,\ u \in V, \tag{4.6}$$

$$\gamma \circ \mathcal{H} = \mathcal{H}' \circ (\psi \otimes \psi \otimes \psi), \tag{4.7}$$

$$\psi \circ T = T' \circ \gamma. \tag{4.8}$$

Etant donné un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté T et une 1-cochaîne ϕ, on peut construire un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H} + \partial\phi$)-twisté sous certaines conditions. Tout d'abord, on donne l'observation suivante.

Proposition 4.1.9. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre 3-Lie et V un $\mathfrak{g}$-module. Pour tout 2-cocycle $\mathcal{H} \in \mathfrak{C}^2_{3Lie}(\mathfrak{g};V)$ et une 1-cochaîne $\phi \in \mathfrak{C}^1_{3Lie}(\mathfrak{g};V)$, on a un isomorphisme d'algèbre 3-Lie*

$$\mathfrak{g} \ltimes^{\mathcal{H}}_{\rho} V \cong \mathfrak{g} \ltimes^{\mathcal{H}+\partial\phi}_{\rho} V.$$

Preuve 4.1.10. On définit $\kappa_\phi : \mathfrak{g} \ltimes^{\mathcal{H}}_{\rho} V \to \mathfrak{g} \ltimes^{\mathcal{H}+\partial\phi}_{\rho} V$ par $\kappa_\phi(x,u) = (x, u - \phi(x))$, pour tout $(x,u) \in \mathfrak{g} \oplus V$.

$$\begin{aligned}
\kappa_\phi([(x,u),(y,v),(z,w)]_{\mathcal{H}}) &= \Big([x,y,z]_{\mathfrak{g}}, \rho(x,y)w + \rho(z,x)v + \rho(y,z)u + \mathcal{H}(x,y,z) - \phi([x,y,z]_{\mathfrak{g}})\Big)\\
&= \Big([x,y,z]_{\mathfrak{g}}, \rho(x,y)w + \rho(z,x)v + \rho(y,z)u + \mathcal{H}(x,y,z)\\
&\quad - \rho(x,y)\phi(z) - \rho(z,x)\phi(y) - \rho(y,z)\phi(x) + (\partial\phi)(x,y,z)\Big)\\
&= [(x,u-\phi(x)),(y,v-\phi(y)),(z,w-\phi(z))]_{\mathcal{H}+\partial\phi},
\end{aligned}$$

pour tout $(x,u),(y,v),(z,w) \in \mathfrak{g} \oplus V$. Ce qui prouve le résultat.

Proposition 4.1.11. *Soit $T : V \to \mathfrak{g}$ un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté. Pour toute une 1-cochaîne $\phi \in \mathfrak{C}^1_{3Lie}(\mathfrak{g};V)$, si l'application linèaire $(Id_V - \phi \circ T) : V \to V$ est inversible, alors l'application linéaire $T \circ (Id_V - \phi \circ T)^{-1} : V \to \mathfrak{g}$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $(\mathcal{H} + \partial\phi)$-twisté.*

Preuve 4.1.12. On considère la sous-algèbre $Gr(T) \subset \mathfrak{g} \ltimes^{\mathcal{H}}_{\rho} V$. Ainsi, par la proposition 4.1.9, on obtient que

$$\kappa_\phi(Gr(T)) = \{(Tu, u - (\phi \circ T)(u) |\ u \in V\} \subset \mathfrak{g} \ltimes^{\mathcal{H}+\partial\phi}_{\rho} V$$

est une sous-algèbre. Puisque l'application $(Id_V - \phi \circ T) : V \to V$ est inversible, alors $\kappa_\phi(Gr(T))$ est le graphe de l'application linéaire $T \circ (Id_V - \phi \circ T)^{-1}$. Dans ce cas, il découle de la Proposition 4.1.5 que $T \circ (Id_V - \phi \circ T)^{-1}$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $(\mathcal{H} + \partial\phi)$-twisté.

Ensuite, on donne une construction d'un nouvel opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté à partir d'un ancien et d'un 1-cocycle approprié.

Définition 4.1.13. Soit $T : V \to \mathfrak{g}$ un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté. L'application $\phi \in Z^1_{3Lie}(\mathfrak{g};V)$ est dite T-admissible si l'endomorphisme $(Id + \phi \circ T) : V \to V$ est bijectif.

Proposition 4.1.14. *Soit $\phi \in \mathfrak{C}^1_{3Lie}(\mathfrak{g}; V)$ un T-admissible* 1*-cocycle. Alors $T \circ (Id_V + \phi \circ T)^{-1} : V \to \mathfrak{g}$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté.*

Preuve 4.1.15. On considère le sous-espace déformé

$$\tau_\phi(Gr(T)) = \{(Tu, u + (\phi \circ T)(u)) \mid u \in V\} \subset \mathfrak{g} \ltimes^{\mathcal{H}}_{\rho} V.$$

Puisque ϕ est un 1-cocycle, $\tau_\phi(Gr(T)) \subset \mathfrak{g} \ltimes_{\mathcal{H}} V$ s'avère être une sous-algèbre. De plus, puisque l'application $(Id_V + \phi \circ T)$ est inversible, alors $\tau_\phi(Gr(T))$ est le graphe de l'application $T \circ (Id_V + \phi \circ T)^{-1}$. Le résultat découle donc de la Proposition 4.1.5.

L'opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté dans la proposition précédente est appelé la transformation de jauge de T associée à ϕ. On note cet opérateur simplement par T_ϕ.

Proposition 4.1.16. *Soit T un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté et ϕ un T-admissible* 1*-cocycle. Alors les structures d'algèbre* 3*-Lie sur V induites par les opérateurs T et T_ϕ sont isomorphes.*

Preuve 4.1.17. On considère l'isomorphisme linéaire $(Id_V + \phi \circ T) : V \to V$. Pour tout $u, v, w \in V$, on a

$$\begin{aligned}
&[(Id_V + \phi \circ T)(u), (Id_V + \phi \circ T)(v), (Id_V + \phi \circ T)(w)]_{T_\phi} \\
&= \rho(Tv, Tw)(Id_V + \phi \circ T)(u) + \rho(Tw, Tu)(Id_V + \phi \circ T)(v) \\
&\quad + \rho(Tu, Tv)(Id_V + \phi \circ T) + \mathcal{H}(Tu, Tv, Tw) \\
&= \rho(Tv, Tw)u + \rho(Tw, Tu)v + \rho(Tu, Tv)w + \mathcal{H}(Tu, Tv, Tw) \\
&\quad + \rho(Tv, Tw)(\phi \circ T)(u) + \rho(Tw, Tu)(\phi \circ T)(v) + \rho(Tu, Tv)(\phi \circ T)(w) \\
&= [u, v, w]_T + \phi([Tu, Tv, Tw]_{\mathfrak{g}}) \\
&= [u, v, w]_T + \phi \circ T([u, v, w]_T) = (Id_V + \phi \circ T)([u, v, w]_T).
\end{aligned}$$

Ceci montre que $(Id_V + \phi \circ T) : (V, [\cdot,\cdot,\cdot]_T) \to (V, [\cdot,\cdot,\cdot]_{T_\phi})$ est un isomorphisme d'algèbre 3-Lie.

4.2 Cohomologies des opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés

Dans cette section, on construit une L_∞-algèbre dont les éléments de Maurer-Cartan sont des opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés sur les algèbres 3-Lie. Cette caractérisation nous permet d'introduire une cohomologie associée à T. Ensuite, on démontre que la cohomologie de T peut également être décrite par la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de V à coefficients dans une représentation spécifiquement déterminée sur $\mathfrak{g}$. De plus, on établit que les deux opérateurs différentiels de chaque cohomologie coïncident à un signe près.

4.2.1 Caractérisation de Maurer-Cartan et cohomologie

Une permutation $\sigma \in \mathbb{S}_n$ est appelée $(i, n-i)$-shuffle si $\sigma(1) < \cdots < \sigma(i)$ et $\sigma(i+1) < \cdots < \sigma(n)$. Si $i = 0$ ou $i = n$, on suppose que $\sigma = Id$. L'ensemble des $(i, n-i)$-shuffles sera noté $\mathbb{S}_{(i,n-i)}$.

Soit $\mathfrak{g}$ un espace vectoriel. On considère l'espace vectoriel gradué

$$C^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \oplus_{n \geq 0} C^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \oplus_{n \geq 0} \mathrm{Hom}(\underbrace{\wedge^2 \mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \wedge^2 \mathfrak{g}}_{n} \wedge \mathfrak{g}, \mathfrak{g}).$$

Le degré d'un élément dans $C^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ est défini comme étant n. Alors l'espace vectoriel gradué $C^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ muni du crochet de Rotkiewicz gradué

$$[P, Q]_R = P \circ Q - (-1)^{pq} Q \circ P, \quad \forall\, P \in C^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), Q \in C^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), \tag{4.9}$$

est une algèbre de Lie graduée, avec $P \circ Q \in C^{p+q}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ définie par :

$$\begin{aligned}
&(P\circ Q)(\mathfrak{X}_1,\cdots,\mathfrak{X}_{p+q},x)\\
=&\sum_{k=1}^{p}(-1)^{(k-1)q}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}(k-1,q)}(-1)^{\sigma}P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k-1)},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)},x_{k+q})\wedge y_{k+q},\mathfrak{X}_{k+q+1},\cdots,\mathfrak{X}_{p+q},x)\\
&+\sum_{k=1}^{p}(-1)^{(k-1)q}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}(k-1,q)}(-1)^{\sigma}P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k-1)},x_{k+q}\wedge Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)},y_{k+q}),\mathfrak{X}_{k+q+1},\cdots,\mathfrak{X}_{p+q},x)\\
&+\sum_{\sigma\in\mathbb{S}(p,q)}(-1)^{pq}(-1)^{\sigma}P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p)},Q(\mathfrak{X}_{\sigma(p+1)},\cdots,\mathfrak{X}_{\sigma(p+q-1)},\mathfrak{X}_{\sigma(p+q)},x)),
\end{aligned}$$

où, $\mathfrak{X}_i = x_i \wedge y_i \in \wedge^2\mathfrak{g}$, $i = 1,2,\cdots,p+q$ et $x \in \mathfrak{g}$.

On peut utiliser la structure de l'algèbre de Lie graduée $(C^*(\mathfrak{g},\mathfrak{g}),[\cdot,\cdot]_R)$ pour décrire les structures de l'algèbre 3-Lie ainsi que les opérateurs cobords. Pour plus de détails, voir [118].

Lemme 4.2.1. *[118] L'application $\pi : \wedge^3\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ définit un crochet 3-Lie si et seulement si $[\pi,\pi]_R = 0$, c'est-à-dire que π est une structure canonique.*

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre 3-Lie et $(\mathfrak{g}, ad)$ est la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ sur lui-même. L'opérateur cobord associé à cette représentation est noté par ∂_{ad}.

Lemme 4.2.2. *[118] Si $\pi : \wedge^3\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ définit un crochet 3-Lie, alors on a*

$$[\pi, f]_R = \partial_{ad}(f), \quad \forall f \in C^n(\mathfrak{g},\mathfrak{g}),\ n \geq 0.$$

Soit (V,ρ) une représentation d'une algèbre 3-Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ et que $\mathcal{H}$ soit un 2-cocycle dans la cohomologie de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans V. On choisit $\pi : \wedge^3\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ pour indiquer le crochet 3-Lie sur $\mathfrak{g}$. Alors $\pi + \rho + \mathcal{H}$ correspond au produit semi-direct de la structure de l'algèbre 3-Lie $\mathfrak{g} \oplus V$ donné par

$$[x+u,y+v,z+w]_{\mathcal{H}} = [x,y,z]_{\mathfrak{g}} + \rho(x,y)w + \rho(z,x)v + \rho(y,z)u + \mathcal{H}(x,y,z). \tag{4.10}$$

Par conséquent, on a

$$[\pi+\rho+\mathcal{H}, \pi+\rho+\mathcal{H}]_R = 0.$$

On considère l'espace vectoriel gradué

$$C^*(V,\mathfrak{g}) = \oplus_{n\geq 0} C^n(V,\mathfrak{g}) = \oplus_{n\geq 0}\mathrm{Hom}(\underbrace{\wedge^2 V \otimes \cdots \otimes \wedge^2 V}_{n\geq 0} \wedge V, \mathfrak{g}).$$

On définit

$$\begin{aligned}
&l_3 : C^m(V,\mathfrak{g}) \times C^n(V,\mathfrak{g}) \times C^p(V,\mathfrak{g}) \to C^{m+n+p+1}(V,\mathfrak{g}),\\
&l_4 : C^m(V,\mathfrak{g}) \times C^n(V,\mathfrak{g}) \times C^p(V,\mathfrak{g}) \times C^q(V,\mathfrak{g}) \to C^{m+n+p+q+1}(V,\mathfrak{g})
\end{aligned}$$

par :

$$\begin{aligned}
l_3(\mathbb{P},\mathbb{Q},\mathbb{R}) =& [[[\pi+\rho,\mathbb{P}]_R,\mathbb{Q}]_R,\mathbb{R}]_R,\\
l_4(\mathbb{P},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{S}) =& [[[[\mathcal{H},\mathbb{P}]_R,\mathbb{Q}]_R,\mathbb{R}]_R,\mathbb{S}]_R.
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant la méthode de Voronov, le crochet l_3 et le crochet l_4 sont compatibles au sens de L_∞-algèbre, puisque $\mathcal{H}$ est un 2-cocycle. En résumé, on a le résultat suivant.

Proposition 4.2.3. *Soit (V,ρ) une représentation d'une algèbre 3-Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ et $\mathcal{H}$ un 2-cocycle. Alors l'espace vectoriel gradué $C^*(V,\mathfrak{g})$ est une L_∞-algèbre avec*

$$l_1 = l_2 = 0, \quad l_3(\cdot,\cdot,\cdot), \quad l_4(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot), \tag{4.11}$$

et les crochets supérieurs sont trivials.

On est maintenant capable de donner le résultat principal de cette section, qui caractérise les opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés sur les algèbres 3-Lie à travers les éléments de Maurer-Cartan.

Théorème 4.2.4. *Une application linéaire $T : V \to \mathfrak{g}$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté si et seulement si T est une solution de l'équation de Maurer-Cartan de L_∞-algèbre $(C^*(V,\mathfrak{g}), l_3, l_4)$, c'est à dire,*

$$\frac{1}{3!}l_3(T,T,T) + \frac{1}{4!}l_4(T,T,T,T) = 0.$$

Preuve 4.2.5. Pour tout $T \in Hom(V,\mathfrak{g})$, on a

$$l_4(T,T,T,T)(u,v,w) = -24T(\mathcal{H}(Tu,Tv,Tw)). \tag{4.12}$$

Ensuite, d'aprés la preuve du [134, Théorème 3.4], on a

$$l_3(T,T,T)(u,v,w) = 6\Big([Tu,Tv,Tw]_\mathfrak{g} - T\big(\rho(Tu,Tv)w + \rho(Tv,Tw)u + \rho(Tw,Tu)v\big)\Big). \tag{4.13}$$

Alors d'après les Eqs. (4.12) et (4.13), on obtient

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{3!}l_3(T,T,T) + \frac{1}{4!}l_4(T,T,T,T)\Big)(u,v,w)\\ =&[Tu,Tv,Tw]_\mathfrak{g} - T\big(\rho(Tu,Tv)w + \rho(Tv,Tw)u + \rho(Tw,Tu)v\big) - T(\mathcal{H}(Tu,Tv,Tw)).\end{aligned}$$

Ainsi, une application linéaire $T \in \mathrm{Hom}(V,\mathfrak{g})$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté d'une algèbre 3-Lie $\mathfrak{g}$ si et seulement si T est un élément de Maurer-Cartan de L_∞-algèbre $(C^*(V,\mathfrak{g}), l_3, l_4)$.

Proposition 4.2.6. *Soit (V,ρ) une représentation d'une algèbre 3-Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ et $\mathcal{H}$ un 2-cocycle. Alors on a une structure de L_∞-algèbre twistée sur $C^*(V,\mathfrak{g})$ donnée par :*

$$l_1^T(\mathbb{P}) = \frac{1}{2}l_3(T,T,\mathbb{P}) + \frac{1}{6}l_4(T,T,T,\mathbb{P}), \tag{4.14}$$

$$l_2^T(\mathbb{P},\mathbb{Q}) = l_3(T,\mathbb{P},\mathbb{Q}) + \frac{1}{2}l_4(T,T,\mathbb{P},\mathbb{Q}), \tag{4.15}$$

$$l_3^T(\mathbb{P},\mathbb{Q},\mathbb{R}) = l_3(\mathbb{P},\mathbb{Q},\mathbb{R}) + l_4(T,\mathbb{P},\mathbb{Q},\mathbb{R}), \tag{4.16}$$

$$l_4^T(\mathbb{P},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{S}) = l_4(\mathbb{P},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{S}), \tag{4.17}$$

$$l_k^T = 0, \quad k \geq 5, \tag{4.18}$$

où $\mathbb{P} \in C^p(V,\mathfrak{g}), \mathbb{Q} \in C^q(V,\mathfrak{g}), \mathbb{R} \in C^r(V,\mathfrak{g})$ et $\mathbb{S} \in C^s(V,\mathfrak{g})$. De plus, pour toute application linéaire $T' : V \to \mathfrak{g}$, la somme $T + T'$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté si et seulement si T' est un élément de Maurer-Cartan de L_∞-algèbre twistée $(C^*(V,\mathfrak{g}), l_1^T, l_2^T, l_3^T, l_4^T)$, c'est à dire que T' satisfait

$$l_1^T(T') + \frac{1}{2!}l_2^T(T',T') + \frac{1}{3!}l_3^T(T',T',T') + \frac{1}{4!}l_4^T(T',T',T',T') = 0.$$

Preuve 4.2.7. Pour la première partie, puisque T est un élément de Maurer-Cartan de L_∞-algèbre $(C^*(V,\mathfrak{g}), l_3, l_4)$, par le Théorème 2.4.6, alors on a une structure de L_∞-algèbre twistée sur $C^*(V,\mathfrak{g})$. Pour la seconde partie, $T + T'$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté si et seulement si

$$\frac{1}{3!}l_3(T+T',T+T',T+T') + \frac{1}{4!}l_4(T+T',T+T',T+T',T+T') = 0. \tag{4.19}$$

En appliquant $\frac{1}{3!}l_3(T,T,T) + \frac{1}{4!}l_4(T,T,T,T) = 0$, la condition ci-dessus est équivalente à

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3!}\Big(3l_3(T,T,T') + 3l_3(T,T',T') + l_3(T',T',T')\Big)\\ &+ \frac{1}{4!}\Big(4l_4(T,T,T,T') + 6l_4(T,T,T',T') + 4l_4(T,T',T',T') + l_4(T',T',T',T')\Big) = 0.\end{aligned}$$

ce qui donne que , $l_1^T(T') + \frac{1}{2!}l_2^T(T',T') + \frac{1}{3!}l_3^T(T',T',T') + \frac{1}{4!}l_4^T(T',T',T',T') = 0$, ce qui implique que T' est un élément de Maurer-Cartan de L_∞-algèbre twistée $(C^*(V,\mathfrak{g}), l_1^T, l_2^T, l_3^T, l_4^T)$.

La caractérisation ci-dessus d'un opérateur de Rota-Baxter relatif twisté T nous permet de définir une cohomologie associée à T. Plus précisément, on définit $C^n_T(V,\mathfrak{g}) = \mathrm{Hom}(\underbrace{\wedge^2 V \otimes \cdots \otimes \wedge^2 V}_{n\geq 0} \wedge V,\mathfrak{g})$, pour $n \geq 0$ et l'opérateur différentiel $d_T : C^n_T(V,\mathfrak{g}) \to C^{n+1}_T(V,\mathfrak{g})$ par :

$$d_T(f) = \frac{1}{2} l_3(T,T,f) + \frac{1}{6} l_4(T,T,T,f), \quad f \in C^n_T(V,\mathfrak{g}). \tag{4.20}$$

Les groupes cohomologiques correspondants sont :

$$H^n_T(V,\mathfrak{g}) = \frac{Z^n_T(V,\mathfrak{g})}{B^n_T(V,\mathfrak{g})} = \frac{\{f \in C^n_T(V,\mathfrak{g}) | d_T(f) = 0\}}{\{d_T(g) | g \in C^{n-1}_T(V,\mathfrak{g})\}}.$$

4.2.2 Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

Dans cette section, on introduit la cohomologie d'un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté comme étant la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre 3-Lie $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$, définie par l'équation (4.5), à coefficients dans une représentation spécifiquement déterminée sur $\mathfrak{g}$. Cette cohomologie sera utilisée dans la section suivante pour étudier les déformations de T.

Proposition 4.2.8. *Soient T un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté et (V,ρ) une représentation. On définit l'application linèaire $\rho_{\mathcal{H}} : \wedge^2 V \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ par :*

$$\rho_{\mathcal{H}}(u,v)x = [Tu,Tv,x]_{\mathfrak{g}} - T\big(\rho(Tv,x)u + \rho(x,Tu)v + \mathcal{H}(x,Tu,Tv)\big), \forall u,v \in V, x \in \mathfrak{g}. \tag{4.21}$$

Alors $(\mathfrak{g},\rho_{\mathcal{H}})$ est une représentation de l'algèbre $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ à coefficients dans $\mathfrak{g}$.

Preuve 4.2.9. Par un calcul direct et en utilisant la définition de $\rho_{\mathcal{H}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\rho_{\mathcal{H}}(u_1,u_2)\rho_{\mathcal{H}}(u_3,u_4)x - \rho_{\mathcal{H}}([u_1,u_2,u_3]_T,u_4)x \\
&- \rho_{\mathcal{H}}(u_3,[u_1,u_2,u_4]_T)x - \rho_{\mathcal{H}}(u_3,u_4)\rho_{\mathcal{H}}(u_1,u_2)x \\
&= \quad [Tu_1,Tu_2,[Tu_3,Tu_4,x]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}} + [Tu_1,Tu_2,T\rho(Tu_3,x)u_4]_{\mathfrak{g}} - [Tu_1,Tu_2,T\rho(Tu_4,x)u_3]_{\mathfrak{g}} \\
&- [Tu_1,Tu_2,T\mathcal{H}(x,Tu_3,Tu_4)]_{\mathfrak{g}} + T\rho(Tu_1,[Tu_3,Tu_4,x]_{\mathfrak{g}})u_2 + T\rho(Tu_1,T\rho(Tu_3,x)u_4)u_2 \\
&- T\rho(Tu_1,T\rho(Tu_4,x)u_3)u_2 - T\rho(Tu_1,T\mathcal{H}(x,Tu_3,Tu_4))u_2 - T\rho(Tu_2,[Tu_3,Tu_4,x]_{\mathfrak{g}})u_1 \\
&- T\rho(Tu_2,T\rho(Tu_3,x)u_4)u_1 + T\rho(Tu_2,T\rho(Tu_4,x)u_3)u_1 + T\rho(Tu_2,T\mathcal{H}(x,Tu_3,Tu_4))u_1 \\
&- T\mathcal{H}(T\rho(Tu_3,x)u_4,Tu_1,Tu_2) + T\mathcal{H}(T\rho(Tu_4,x)u_3,Tu_1,Tu_2) \\
&+ T\mathcal{H}(T\mathcal{H}(x,Tu_3,T_4),Tu_1,Tu_2) - T\mathcal{H}([Tu_3,Tu_4,x]_{\mathfrak{g}},Tu_1,Tu_2) \\
&- [[Tu_1,Tu_2,Tu_3]_{\mathfrak{g}},Tu_4,x]_{\mathfrak{g}} - T(\rho([Tu_1,Tu_2,Tu_3]_{\mathfrak{g}},x)u_4 + T\rho(Tu_4,x)\rho(Tu_1,Tu_2)u_3 \\
&+ T\rho(Tu_4,x)\rho(Tu_2,Tu_3)u_1 + T\rho(Tu_4,x)\rho(Tu_3,Tu_1)u_2 + T\rho(Tu_4,x)\mathcal{H}(Tu_1,Tu_2,Tu_3) \\
&+ T\Theta(x,[Tu_1,Tu_2,Tu_3]_{\mathfrak{g}},Tu_4) - [Tu_3,[Tu_1,Tu_2,Tu_4]_{\mathfrak{g}},x]_{\mathfrak{g}} - T\rho(Tu_3,x)\rho(Tu_1,Tu_2)u_4 \\
&- T\rho(Tu_3,x)\rho(Tu_2,Tu_4)u_1 - T\rho(Tu_3,x)\rho(Tu_4,Tu_1)u_2 - T\rho(Tu_3,x)\mathcal{H}(Tu_1,Tu_2,Tu_4) \\
&+ T(\rho([Tu_1,Tu_2,Tu_4]_{\mathfrak{g}},x)u_3 + T\mathcal{H}(x,Tu_3,[Tu_1,Tu_2,Tu_4]_{\mathfrak{g}}) \\
&- [Tu_3,Tu_4,[Tu_1,Tu_2,x]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}} - [Tu_3,Tu_4,T\rho(Tu_1,x)u_2]_{\mathfrak{g}} + [Tu_3,Tu_4,T\rho(Tu_2,x)u_1]_{\mathfrak{g}} \\
&+ [Tu_3,Tu_4,T\mathcal{H}(x,Tu_1,Tu_2)]_{\mathfrak{g}} - T\rho(Tu_3,[Tu_1,Tu_2,x]_{\mathfrak{g}})u_4 - T\rho(Tu_3,T\rho(Tu_1,x)u_2)u_4 \\
&+ T\rho(Tu_3,T\rho(Tu_2,x)u_1)u_4 + T\rho(Tu_3,T\mathcal{H}(x,Tu_1,Tu_2))u_4 + T\rho(Tu_4,[Tu_1,Tu_2,x]_{\mathfrak{g}})u_3 \\
&+ T\rho(Tu_4,T\rho(Tu_1,x)u_2)u_3 - T\rho(Tu_4,T\rho(Tu_2,x)u_1)u_3 - T\rho(Tu_4,T\mathcal{H}(x,Tu_1,Tu_2))u_3 \\
&+ T\mathcal{H}(T\rho(Tu_1,x)u_2,Tu_3,Tu_4) - T\mathcal{H}(T\rho(Tu_2,x)u_1,Tu_3,Tu_4) \\
&- T\mathcal{H}(T\mathcal{H}(x,Tu_1,Tu_2),Tu_3,Tu_4) + T\mathcal{H}([Tu_1,Tu_2,x]_{\mathfrak{g}},Tu_3,Tu_4) \\
&\overset{(2.14)+(2.19)+(4.2)}{=} -T\big(\mathcal{H}(Tu_1,Tu_2,[Tu_3,Tu_4,x]_{\mathfrak{g}}) + \rho(Tu_1,Tu_2)\mathcal{H}(Tu_3,Tu_4,x) \\
&- \rho(Tu_4,x)\mathcal{H}(Tu_1,Tu_2,Tu_3) - \mathcal{H}([Tu_1,Tu_2,Tu_3]_{\mathfrak{g}},Tu_4,x) \\
&- \rho(x,Tu_3)\mathcal{H}(Tu_1,Tu_2,Tu_4) - \mathcal{H}(Tu_3,[Tu_1,Tu_2,Tu_4]_{\mathfrak{g}},x) \\
&- \rho(Tu_3,Tu_4)\mathcal{H}(Tu_1,Tu_2,x) - \mathcal{H}(Tu_3,Tu_4,[Tu_1,Tu_2,x]_{\mathfrak{g}})\big)
\end{aligned}$$

$$\overset{(2.25)}{=} -T\big((\partial\mathcal{H})(Tu_1,Tu_2,Tu_3,Tu_4,x)\big) = 0.$$

De la même manière, on a

$$\begin{aligned}&\rho_{\mathcal{H}}([u_1,u_2,u_3]_T,u_4)x - \rho_{\mathcal{H}}(u_1,u_2)\rho_{\mathcal{H}}(u_3,u_4)x\\ &- \rho_{\mathcal{H}}(u_2,u_3)\rho_{\mathcal{H}}(u_1,u_4)x - \rho_{\mathcal{H}}(u_3,u_1)\rho_{\mathcal{H}}(u_2,u_4)x = 0,\end{aligned}$$

d'ou le résultat.

Soit $\partial_{\mathcal{H}} : \mathfrak{C}^n_{3Lie}(V;\mathfrak{g}) \to \mathfrak{C}^{n+1}_{3Lie}(V;\mathfrak{g})$, $(n \geq 1)$ l'opérateur cobord correspondant de l'algèbre 3-Lie $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ à coefficients dans la représentation $(\mathfrak{g},\rho_{\mathcal{H}})$. Plus précisément, $\partial_{\mathcal{H}}$ est donné par :

$$\begin{aligned}&(\partial_{\mathcal{H}}f)(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1})\\ =&\sum_{1\leq j<k\leq n}(-1)^j f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_j},\cdots,\mathfrak{U}_{k-1},[u_j,v_j,u_k]_T\wedge v_k + u_k\wedge[u_j,v_j,v_k]_T,\mathfrak{U}_{k+1},\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1})\\ &+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_j},\cdots,\mathfrak{U}_n,[u_j,v_j,u_{n+1}]_T) + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\rho_{\mathcal{H}}(u_j,v_j)f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_j},\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1})\\ &+(-1)^{n+1}\Big(\rho_{\mathcal{H}}(v_n,u_{n+1})f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},u_n) + \rho_{\mathcal{H}}(u_{n+1},u_n)f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},v_n)\Big),\end{aligned}\tag{4.22}$$

pour tout $\mathfrak{U}_i = u_i\wedge v_i \in \wedge^2 V$, $i = 1,2,\cdots,n$ et $u_{n+1}\in V$. $f\in\mathfrak{C}^1_{3Lie}(V;\mathfrak{g})$ est un 1-cocycle si et seulement si

$$\begin{aligned}&[Tu,Tv,f(w)]_{\mathfrak{g}} + [f(u),Tv,Tw]_{\mathfrak{g}} + [Tu,f(v),Tw]_{\mathfrak{g}}\\ &- f\Big(\rho(Tu,Tv)w + \rho(Tv,Tw)u + \rho(Tw,Tu)v + \mathcal{H}(Tu,Tv,Tw)\Big)\\ &- T\Big(\rho(Tv,f(w))u + \rho(f(w),Tu)v + \mathcal{H}(f(w),Tu,Tv)\Big)\\ &- T\Big(\rho(Tw,f(u))v + \rho(f(u),Tv)w + \mathcal{H}(f(u),Tv,Tw)\Big)\\ &- T\Big(\rho(Tu,f(v))w + \rho(f(v),Tw)u + \mathcal{H}(f(v),Tw,Tu)\Big) = 0.\end{aligned}$$

Proposition 4.2.10. *Soient T un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté et (V,ρ) une représentation. Pour tout $\mathfrak{X}\in\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$, On définit $\delta(\mathfrak{X}) : V\to\mathfrak{g}$ par :*

$$\delta(\mathfrak{X})v = T\big(\rho(\mathfrak{X})v + \mathcal{H}(\mathfrak{X},Tv)\big) - [\mathfrak{X},Tv]_{\mathfrak{g}},\ \forall v\in V.\tag{4.23}$$

Alors $\delta(\mathfrak{X})$ est un 1-cocycle dans la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre 3-Lie $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ à coefficients dans $(\mathfrak{g},\rho_{\mathcal{H}})$.

Preuve 4.2.11. Pour tout $u,v,w\in V$, on a

$$\begin{aligned}&(\partial_{\mathcal{H}}\delta(\mathfrak{X}))(u,v,w)\\ =&[Tu,Tv,\delta(\mathfrak{X})(w)]_{\mathfrak{g}} + [\delta(\mathfrak{X})(u),Tv,Tw]_{\mathfrak{g}} + [Tu,\delta(\mathfrak{X})(v),Tw]_{\mathfrak{g}}\\ &-\delta(\mathfrak{X})\big(\rho(Tu,Tv)w + \rho(Tv,Tw)u + \rho(Tw,Tu)v + \mathcal{H}(Tu,Tv,Tw)\big)\\ &-T\big(\rho(Tv,\delta(\mathfrak{X})(w))u + \rho(\delta(\mathfrak{X})(w),Tu)v + \mathcal{H}(\delta(\mathfrak{X})(w),Tu,Tv)\big)\\ &-T\big(\rho(Tw,\delta(\mathfrak{X})(u))v + \rho(\delta(\mathfrak{X})(u),Tv)w + \mathcal{H}(\delta(\mathfrak{X})(u),Tv,Tw)\big)\\ &-T\big(\rho(Tu,\delta(\mathfrak{X})(v))w + \rho(\delta(\mathfrak{X})(v),Tw)u + \mathcal{H}(\delta(\mathfrak{X})(v),Tw,Tu)\big)\\ =&[Tu,Tv,T\rho(\mathfrak{X})w]_{\mathfrak{g}} + [Tu,Tv,T\mathcal{H}(\mathfrak{X},w)]_{\mathfrak{g}} - [Tu,Tv,[\mathfrak{X},Tw]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}\\ &+[T\rho(\mathfrak{X})u,Tv,Tw]_{\mathfrak{g}} + [T\mathcal{H}(\mathfrak{X},Tu),Tv,Tw]_{\mathfrak{g}} - [[\mathfrak{X},Tu]_{\mathfrak{g}},Tv,Tw]_{\mathfrak{g}}\\ &+[Tu,T\rho(\mathfrak{X})v,Tw]_{\mathfrak{g}} + [Tu,T\mathcal{H}(\mathfrak{X},Tv),Tw]_{\mathfrak{g}} - [Tu,[\mathfrak{X},Tv]_{\mathfrak{g}},Tw]_{\mathfrak{g}}\\ &-T\rho(\mathfrak{X})\big(\rho(Tu,Tv)w + \rho(Tv,Tw)u + \rho(Tw,Tu)v + \mathcal{H}(Tu,Tv,Tw)\big)\\ &-T\mathcal{H}(\mathfrak{X},[Tu,Tv,Tw]_{\mathfrak{g}}) + [\mathfrak{X},[Tu,Tv,Tw]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& - T\big(\rho(Tv, T\rho(\mathfrak{X})w)u + \rho(Tv, T\mathcal{H}(\mathfrak{X}, Tw))u - \rho(Tv, [\mathfrak{X}, Tw]_{\mathfrak{g}})u \\
& + \rho(T\rho(\mathfrak{X})w, Tu)v + \rho(T\mathcal{H}(\mathfrak{X}, Tw), Tu)v - \rho([\mathfrak{X}, Tw]_{\mathfrak{g}}, Tu)v \\
& + \mathcal{H}(T\rho(\mathfrak{X})w, Tu, Tv) + \mathcal{H}(T\mathcal{H}(\mathfrak{X}, Tw), Tu, Tv) - \mathcal{H}([\mathfrak{X}, Tw]_{\mathfrak{g}}, Tu, Tv)\big) \\
& - T\big(\rho(Tw, T\rho(\mathfrak{X})u)v + \rho(Tw, T\mathcal{H}(\mathfrak{X}, Tu))v - \rho(Tw, [\mathfrak{X}, Tu]_{\mathfrak{g}})v \\
& + \rho(T\rho(\mathfrak{X})u, Tv)w + \rho(T\mathcal{H}(\mathfrak{X}, Tu), Tv)w - \rho([\mathfrak{X}, Tu]_{\mathfrak{g}}, Tv)w \\
& + \mathcal{H}(T\rho(\mathfrak{X})u, Tv, Tw) + \mathcal{H}(T\mathcal{H}(\mathfrak{X}, Tu), Tv, Tw) - \mathcal{H}([\mathfrak{X}, Tu]_{\mathfrak{g}}, Tv, Tw)\big) \\
& - T\big(\rho(Tu, T\rho(\mathfrak{X})v)w + \rho(Tu, T\mathcal{H}(\mathfrak{X}, Tv))w - \rho(Tu, [\mathfrak{X}, Tv]_{\mathfrak{g}})w \\
& + \rho(T\rho(\mathfrak{X})v, Tw)u + \rho(T\mathcal{H}(\mathfrak{X}, Tv), Tw)u - \rho([\mathfrak{X}, Tv]_{\mathfrak{g}}, Tw)u \\
& + \mathcal{H}(T\rho(\mathfrak{X})v, Tw, Tu) + \mathcal{H}(T\mathcal{H}(\mathfrak{X}, Tv), Tw, Tu) - \mathcal{H}([\mathfrak{X}, Tv]_{\mathfrak{g}}, Tw, Tu)\big) \\
\overset{(4.2)+(2.14)+(2.19)}{=} & -T\big(\mathcal{H}(\mathfrak{X}, [Tu, Tv, Tw]_{\mathfrak{g}}) + T\rho(\mathfrak{X})\mathcal{H}(Tu, Tv, Tw) \\
& - T\rho(Tu, Tv)\mathcal{H}(\mathfrak{X}, Tw) - T\rho(Tv, Tw)\mathcal{H}(\mathfrak{X}, Tu) - T\rho(Tw, Tu)\mathcal{H}(\mathfrak{X}, Tv) \\
& - T\mathcal{H}([\mathfrak{X}, Tw]_{\mathfrak{g}}, Tu, Tv) - T\mathcal{H}([\mathfrak{X}, Tu]_{\mathfrak{g}}, Tv, Tw) - T\mathcal{H}([\mathfrak{X}, Tv]_{\mathfrak{g}}, Tw, Tu)\big) \\
= & -T\big((\partial\mathcal{H})(\mathfrak{X}, Tu, Tv, Tw)\big) = 0.
\end{aligned}
$$

On en déduit donc que $\partial_{\mathcal{H}}\delta(\mathfrak{X}) = 0$.

On présente maintenant la cohomologie des opérateurs de Rota-Baxter relatifs $\mathcal{H}$-twistés sur les algèbres 3-Lie.

Définition 4.2.12. Soient T un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté et (V,ρ) une représentation. On définit l'ensemble des n-cochaines par :

$$
\mathfrak{C}^n_{\mathcal{H}}(V;\mathfrak{g}) = \begin{cases} \mathfrak{C}^n_{3Lie}(V;\mathfrak{g}), \ n \geq 1, \\ \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}, \qquad\quad n = 0, \end{cases} \tag{4.24}
$$

et l'opérateur cobord $D_{\mathcal{H}} : \mathfrak{C}^n_{\mathcal{H}}(V;\mathfrak{g}) \to \mathfrak{C}^{n+1}_{\mathcal{H}}(V;\mathfrak{g})$ par :

$$
D_{\mathcal{H}} = \begin{cases} \partial_{\mathcal{H}}, \ n \geq 1, \\ \delta, \quad n = 0. \end{cases} \tag{4.25}
$$

On note par $\mathcal{Z}^n_{\mathcal{H}}(V;\mathfrak{g})$ l'espace des n-cocycles et par $\mathcal{B}^n_{\mathcal{H}}(V;\mathfrak{g})$ l'espace des n-cobords. Par conséquent, on définit le $n^{ème}$ groupe de cohomologie des opérateurs de Rota-Baxter relatifs $\mathcal{H}$-twistés par le quotient suivant :

$$
H^n_{\mathcal{H}}(V;\mathfrak{g}) = Z^n_{\mathcal{H}}(V;\mathfrak{g})/B^n_{\mathcal{H}}(V;\mathfrak{g}), \ n \geq 0.
$$

L'opérateur cobord $D_{\mathcal{H}}$ coïncide à un signe moins près avec la différentielle d_T définie par (4.20) en utilisant l'élément de Maurer-Cartan T de L_∞-algèbre $(C^*(V,\mathfrak{g}), l_3, l_4)$.

Théorème 4.2.13. *Soient T un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté et (V,ρ) une représentation. On a alors*

$$
d_T(f) = (-1)^{n-1} D_{\mathcal{H}}(f), \quad \forall f \in \mathrm{Hom}(\underbrace{\wedge^2 V \otimes \cdots \otimes \wedge^2 V}_{n-1} \wedge V, \mathfrak{g}), \ n = 1, 2, \cdots. \tag{4.26}
$$

Preuve 4.2.14. D'après la preuve du [134, Théorème 4.5], on a

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2} l_3(T, T, f)(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_n, u_{n+1}) \\
= & (-1)^{n-1} \Big\{ (-1)^{n+1} \Big([Tv_n, Tu_{n+1}, f(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_{n-1}, u_n)]_{\mathfrak{g}} - T\rho(Tu_{n+1}, f(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_{n-1}, u_n))v_n \\
& - T\rho(f(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_{n-1}, u_n), Tv_n)u_{n+1} \Big) \\
& + (-1)^{n+1} \Big([Tu_{n+1}, f(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_{n-1}, v_n)]_{\mathfrak{g}} - T\rho(Tu_n, f(\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_{n-1}, v_n))u_{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- T\rho(f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},v_n),Tu_{n+1})u_n\Big) + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\Big([Tu_j,Tv_j,f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_j},\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1})]_{\mathfrak{g}}\\
&- T\rho(Tv_j,f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_j},\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1}))u_j - T\rho(f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_j},\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1}),Tu_j)v_j\Big)\\
&+ \sum_{1\leq j<k\leq n}(-1)^j f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_j},\cdots,\mathfrak{U}_{k-1},\Big(\rho(Tu_j,Tv_j)u_k + \rho(Tv_j,Tu_k)u_j + \rho(Tu_k,Tu_j)v_j\Big)\wedge v_k\\
&+ u_k\wedge\Big(\rho(Tu_j,Tv_j)v_k + \rho(Tv_j,Tv_k)u_j + \rho(Tv_k,Tu_j)v_j\Big),\mathfrak{U}_{k+1},\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1})\\
&+ \sum_{j=1}^{n}(-1)^j f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_j},\cdots,\mathfrak{U}_n,\rho(Tu_j,Tv_j)u_{n+1} + \rho(Tv_j,Tu_{n+1})u_j + \rho(Tu_{n+1},Tu_j)v_j)\Big\}.
\end{aligned}
$$

D'autre part :

$$
\begin{aligned}
&l_4(T,T,T,f)(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1})\\
=&[[[[\mathcal{H},T]_R,T]_R,T]_R,f]_R(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1})\\
=&[[[\mathcal{H},T]_R,T]_R,T]_R(f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},u_n)\wedge v_n,u_{n+1})\\
&+ [[[\mathcal{H},T]_R,T]_R,T]_R(u_n\wedge f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},v_n),u_{n+1})\\
&+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}(-1)^{i-1}[[[\mathcal{H},T]_R,T]_R,T]_R\Big(\mathfrak{U}_i,f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_i},\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1})\Big)\\
&- (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\\
&f\Big(\mathfrak{U}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_i},\cdots,\mathfrak{U}_k,[[[\mathcal{H},T]_R,T]_R,T]_R(\mathfrak{U}_i,u_{k+1})\wedge v_{k+1},\mathfrak{U}_{k+2},\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1}\Big)\\
&- (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\\
&f\Big(\mathfrak{U}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_i},\cdots,\mathfrak{U}_k,u_{k+1}\wedge[[[\mathcal{H},T]_R,T]_R,T]_R(\mathfrak{U}_i,v_{k+1}),\mathfrak{U}_{k+2},\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1}\Big)\\
&- (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f\Big(\mathfrak{U}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_i},\cdots,\mathfrak{U}_n,[[[\mathcal{H},T]_R,T]_R,T]_R(\mathfrak{U}_i,u_{n+1})\Big)\\
=&(-1)^{n-1}6\Big\{(-1)^{n+1}\Big(-T\mathcal{H}(f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},u_n),Tv_n,Tu_{n+1}) - T\mathcal{H}(f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\mathfrak{U}_{n-1},v_n),Tu_{n+1},Tu_n)\Big)\\
&- \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}T\mathcal{H}(f(\mathfrak{U}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_j},\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1}),Tu_j,T_j)\\
&+ \sum_{j=1}^{n}(-1)^j f\Big(\mathfrak{U}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_j},\cdots,\mathfrak{U}_n,\mathcal{H}(Tu_j,Tv_j,Tu_{n+1})\Big)\\
&+ \sum_{1\leq j<k\leq n}(-1)^j\\
&f\Big(\mathfrak{U}_1,\cdots,\widehat{\mathfrak{U}_j},\cdots,\mathfrak{U}_{k-1},\mathcal{H}(Tu_j,Tv_j,Tu_k)\wedge v_k + u_k\wedge\mathcal{H}(Tu_j,Tv_j,Tv_k),\mathfrak{U}_{k+1},\cdots,\mathfrak{U}_n,u_{n+1}\Big)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Alors $d_T(f) = \frac{1}{2}l_3(T,T,f) + \frac{1}{6}l_4(T,T,T,f) = (-1)^{n-1}D_{\mathcal{H}}(f)$.

4.3 Déformations des opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés

Dans cette section, on exploite la théorie de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg présentée dans la section précédente, afin de d'étudier les déformations des opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés sur les algèbres 3-Lie.

4.3.1 Déformations infinitésimales

Soient $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre 3-Lie, (V,ρ) une représentation et T un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté.

Définition 4.3.1. Une déformation infinitésimale de T consiste en une somme paramétrée $T_t = T + tT_1$, pour un certain $T_1 \in Hom(V,\mathfrak{g})$ telle que T_t est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté pour toutes les valeurs de t. Dans ce cas, on dit que T_1 génère une déformation infinitésimale de T.

On Suppose que T_1 génère une déformation infinitésimale de T. On a alors

$$\begin{aligned}
&[T_t u, T_t v, T_t w]_{\mathfrak{g}}\\
&= T_t\Big(\rho(T_t u, T_t v)w + \rho(T_t v, T_t w)u + \rho(T_t w, T_t u)v + \mathcal{H}(T_t u, T_t v, T_t w)\Big),
\end{aligned}$$

pour tout $u,v,w \in V$. Ceci est équivalent aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
&[Tu,Tv,T_1w]_{\mathfrak{g}} + [Tu,T_1v,Tw]_{\mathfrak{g}} + [T_1u,Tv,Tw]_{\mathfrak{g}}\\
&= T\Big(\rho(Tu,T_1v)w + \rho(T_1u,Tv)w + \rho(Tv,T_1w)u + \rho(T_1v,Tw)u\\
&+ \rho(Tw,T_1u)v + \rho(T_1w,Tu)v + \mathcal{H}(Tu,Tv,T_1w) + \mathcal{H}(Tu,T_1v,Tw)\\
&+ \mathcal{H}(T_1u,Tv,Tw)\Big)\\
&+ T_1\Big(\rho(Tu,Tv)w + \rho(Tv,Tw)u + \rho(Tw,Tu)v + \mathcal{H}(Tu,Tv,Tw)\Big),
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
&[Tu,T_1v,T_1w]_{\mathfrak{g}} + [T_1u,Tv,T_1w]_{\mathfrak{g}} + [T_1u,T_1v,Tw]_{\mathfrak{g}}\\
&= T\Big(\rho(T_1u,T_1v)w + \rho(T_1v,T_1w)u + \rho(T_1w,T_1u)v\\
&+ \mathcal{H}(Tu,T_1v,T_1w) + \mathcal{H}(T_1u,Tv,T_1w) + \mathcal{H}(T_1u,T_1v,Tw)\Big)\\
&+ T_1\Big(\rho(Tu,T_1v)w + \rho(T_1u,Tv)w + \rho(Tv,T_1w)u + \rho(T_1v,Tw)u\\
&+ \rho(Tw,T_1u)v + \rho(T_1w,Tu)v + \mathcal{H}(Tu,Tv,T_1w) + \mathcal{H}(Tu,T_1v,Tw)\\
&+ \mathcal{H}(T_1u,Tv,Tw)\Big),
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
&[T_1u,T_1v,T_1w]_{\mathfrak{g}} = T\Big(\mathcal{H}(T_1u,T_1v,T_1w)\Big)\\
&+ T_1\Big(\rho(T_1u,T_1v)w + \rho(T_1v,T_1w)u + \rho(T_1w,T_1u)v\\
&+ \mathcal{H}(Tu,T_1v,T_1w) + \mathcal{H}(T_1u,Tv,T_1w) + \mathcal{H}(T_1u,T_1v,Tw)\Big),
\end{aligned} \tag{4.29}$$

ainsi

$$T_1\Big(\mathcal{H}(T_1u,T_1v,T_1w)\Big) = 0. \tag{4.30}$$

L'identité (4.27) implique que T_1 est un 1-cocycle par rapport à la cohomologie de T. Par conséquent, T_1 définit une classe de cohomologie dans $H^1_{\mathcal{H}}(V;\mathfrak{g})$.

Définition 4.3.2. Deux déformations infinitésimales $T_t = T + tT_1$ et $T^{'}_t = T + tT^{'}_1$ d'un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté sont dites équivalentes s'il existe un élément $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ tel que le couple

$$\Big(\phi_t = Id_{\mathfrak{g}} + t[\mathfrak{X},-]_{\mathfrak{g}},\ \psi_t = Id_V + t\big(\rho(\mathfrak{X})(-) + \mathcal{H}(\mathfrak{X},T)\big)\Big), \tag{4.31}$$

où $\mathcal{H}(\mathfrak{X},T) : V \to V$ est défini par $\mathcal{H}(\mathfrak{X},T)(u) = \mathcal{H}(\mathfrak{X},Tu)$, définit un morphisme des opérateurs de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twistés de T_t à $T^{'}_t$. Une déformation infinitésimale $T_t = T + tT_1$ d'un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté est dite triviale si T_t est équivalent à $T^{'}_t = T$.

Soit $\Big(\phi_t = Id_{\mathfrak{g}} + t[\mathfrak{X}, -]_{\mathfrak{g}},\ \psi_t = Id_V + t\big(\rho(\mathfrak{X})(-) + \mathcal{H}(\mathfrak{X}, T)\big)\Big)$ un morphisme des opérateurs de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twistés de T_t à $T_t^{'}$. Par l'équation (4.8), on obtient

$$(Id_{\mathfrak{g}} + t[\mathfrak{X}, -]_{\mathfrak{g}})(T + tT_1)(u) = (T + tT_1^{'})(Id_V + t(\rho(\mathfrak{X})(-) + \mathcal{H}(\mathfrak{X}, T)))(u),$$

ce qui implique

$$\begin{cases} T_1u + [\mathfrak{X}, Tu]_{\mathfrak{g}} = T\big(\rho(\mathfrak{X})u + \mathcal{H}(\mathfrak{X}, Tu)\big) + T_1^{'}u, \\ [\mathfrak{X}, T_1u]_{\mathfrak{g}} = T_1^{'}\big(\rho(\mathfrak{X})u + \mathcal{H}(\mathfrak{X}, Tu)\big). \end{cases} \tag{4.32}$$

Théorème 4.3.3. *Soient $T_t = T + tT_1$ et $T_t^{'} = T + tT_1^{'}$ deux déformations infinitésimales équivalentes d'un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté. Alors T_1 et $T_1^{'}$ définissent la même classe de cohomologie dans $H^1_{\mathcal{H}}(V; \mathfrak{g})$.*

Preuve 4.3.4. C'est évident de prouver à partir de la première condition de (4.32) que

$$T_1u - T_1^{'}u = T\big(\rho(\mathfrak{X})u + \mathcal{H}(\mathfrak{X}, Tu)\big) - [\mathfrak{X}, Tu]_{\mathfrak{g}} = D_{\mathcal{H}}(\mathfrak{X})(u), \forall u \in V,$$

ce qui implique que T_1 et $T_1^{'}$ sont dans la même classe de cohomologie.

4.3.2 Déformations formelles

On considère maintenant une situation plus générale en utilisant des séries formelles. Soit $\mathbb{K}[[t]]$ l'anneau des séries formelles à une variable t et à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour tout espace $\mathbb{K}$-linéaire V, on désigne par $V[[t]]$ l'espace vectoriel des séries formelles à une variable t et à coefficients dans V. Si $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$ est une algèbre 3-Lie sur $\mathbb{K}$, alors il existe une structure d'algèbre 3-Lie sur l'anneau $\mathbb{K}[[t]]$ dans $\mathfrak{g}[[t]]$ donnée par :

$$\Big[\sum_{i=0}^{+\infty} x_i t^i, \sum_{j=0}^{+\infty} y_j t^j, \sum_{k=0}^{+\infty} z_k t^k\Big]_{\mathfrak{g}} = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{i+j+k=s} [x_i, y_j, z_k]_{\mathfrak{g}} t^s,\ \forall x_i, y_j, z_k \in \mathfrak{g}. \tag{4.33}$$

Pour toute représentation (V, ρ) de $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$, il existe une représentation naturelle de l'algèbre 3-Lie $\mathfrak{g}[[t]]$ sur le $\mathbb{K}[[t]]$-module $V[[t]]$, qui est donnée par :

$$\rho\Big(\sum_{i=0}^{+\infty} x_i t^i, \sum_{j=0}^{+\infty} y_j t^j\Big)\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k t^k\Big) = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{i+j+k=s} \rho(x_i, y_j) v_k t^s,\ \forall x_i, y_j \in \mathfrak{g},\ v_k \in V. \tag{4.34}$$

De même, le 2-cocycle $\mathcal{H}$ peut être étendu à un 2-cocycle (dénoté aussi par $\mathcal{H}$) sur l'algèbre 3-Lie $\mathfrak{g}[[t]]$à coefficients dans $V[[t]]$. On considère la série formelle suivante :

$$T_t = \sum_{i=0}^{+\infty} T_i t^i,\ T_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V; \mathfrak{g}), \tag{4.35}$$

c'est-à-dire, $T_t \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V; \mathfrak{g})[[t]] = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V; \mathfrak{g}[[t]])$. On peut la étendre pour qu'elle soit une application de $V[[t]]$ vers $\mathfrak{g}[[t]]$ que l'on note encore par T_t.

Définition 4.3.5. Si $T_t = \sum_{i=0}^{+\infty} T_i t^i$ avec $T_0 = T$ satisfait

$$\begin{aligned} &[T_tu, T_tv, T_tw]_{\mathfrak{g}} \\ &= T_t\Big(\rho(T_tu, T_tv)w + \rho(T_tv, T_tw)u + \rho(T_tw, T_tu)v + \mathcal{H}(T_tu, T_tv, T_tw)\Big), \end{aligned} \tag{4.36}$$

on dit que T_t est une déformation formelle de l'opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté T.

On rappelle qu'une déformation formelle d'une algèbre 3-Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$ est une série formelle $\omega_t = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k t^k$, où $\omega_k \in \mathrm{Hom}(\wedge^3 \mathfrak{g}; \mathfrak{g})$ tel que $\omega_0(x, y, z) = [x, y, z]_{\mathfrak{g}}$, pour tout $x, y, z \in \mathfrak{g}$, et ω_t définit une structure d'algèbre 3-Lie sur l'anneau $\mathbb{K}[[t]]$ dans $\mathfrak{g}[[t]]$.

Proposition 4.3.6. *Soit* $T_t = \sum_{i=0}^{+\infty} T_i t^i$ *une déformation formelle d'un opérateur de Rota-Baxter relatif* $\mathcal{H}$*-twisté* T. *Alors* $[\cdot,\cdot,\cdot]_{T_t}$ *défini par :*

$$\begin{aligned}[u,v,w]_{T_t} = &\sum_{s=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i+j=s}\Big(\rho(T_iu,T_jv)w+\rho(T_iv,T_jw)u+\rho(T_iw,T_ju)v\Big)\\ &+\sum_{i+j+k=s}\mathcal{H}(T_iu,T_jv,T_kw)\Big)t^s\end{aligned}$$

pour tous $u,v,w \in V$, *est une déformation formelle de l'algèbre* 3-Lie $(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ *définie dans* (4.5).

En appliquant les équations (4.33)-(4.35) pour développer l'équation (4.36) et en rassemblant les coefficients de t^s, on voit que l'équation (4.36) est équivalente au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}&\sum_{i+j+k=s}[T_iu,T_jv,T_kw]_{\mathfrak{g}}\\ &=\sum_{i+j+k=s}T_i\Big(\rho(T_ju,T_kv)w+\rho(T_jv,T_kw)u+\rho(T_jw,T_ku)v\Big)\\ &+\sum_{i+j+k+m=s}T_i\Big(\mathcal{H}(T_ju,T_kv,T_mw)\Big).\end{aligned}\tag{4.37}$$

On note que (4.37) est valable pour $s=0$ puisque $T_0=T$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté. Pour $s=1$, on obtient

$$\begin{aligned}&[Tu,Tv,T_1w]_{\mathfrak{g}}+[Tu,T_1v,Tw]_{\mathfrak{g}}+[T_1u,Tv,Tw]_{\mathfrak{g}}\\ &=T\Big(\rho(Tu,T_1v)w+\rho(T_1u,Tv)w+\rho(Tv,T_1w)u+\rho(T_1v,Tw)u\\ &+\rho(Tw,T_1u)v+\rho(T_1w,Tu)v+\mathcal{H}(Tu,Tv,T_1w)+\mathcal{H}(Tu,T_1v,Tw)\\ &+\mathcal{H}(T_1u,Tv,Tw)\Big)\\ &+T_1\Big(\rho(Tu,Tv)w+\rho(Tv,Tw)u+\rho(Tw,Tu)v+\mathcal{H}(Tu,Tv,Tw)\Big),\end{aligned}$$

ce qui correspond exactement à l'équation (4.27). Cela implique que $(D_{\mathcal{H}}(T_1))(u,v,w)=0$. Par conséquent, le terme linéaire T_1 est un 1-cocycle par rapport à la cohomologie de T. On l'appelle l'infinitésimal de la déformation T_t.

Dans la suite, on discute les déformations formelles équivalentes.

Définition 4.3.7. Soient $T_t = \sum_{i=0}^{+\infty} T_i t^i$ et $T'_t = \sum_{i=0}^{+\infty} {T'}_i t^i$ deux déformations formelles d'un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté $T=T_0=T'_0$ sur une algèbre 3-Lie $\mathfrak{g}$. On dit qu'ils sont équivalents s'il existe un élément $\mathfrak{X}\in\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$, $\phi_i\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ et $\psi_i\in\mathfrak{gl}(V)$, $i\geq 2$, tel que le couple

$$\Big(\phi_t = Id_{\mathfrak{g}}+t[\mathfrak{X},-]_{\mathfrak{g}}+\sum_{i=2}^{+\infty}\phi_it^i,\ \psi_t=Id_V+t\big(\rho(\mathfrak{X})(-)+\mathcal{H}(\mathfrak{X},T-)\big)+\sum_{i=2}^{+\infty}\psi_it^i\Big),\tag{4.38}$$

est un morphisme d'opérateurs de Rota-Baxter relatifs $\mathcal{H}$-twistés de T_t à T'_t.

Théorème 4.3.8. *Si deux déformations formelles d'un opérateur de Rota-Baxter relatif* $\mathcal{H}$*-twisté* T *sont équivalentes, alors leurs infinitésimales sont dans la même classe de cohomologie.*

Preuve 4.3.9. Soit (ϕ_t,ψ_t) les deux applications définies par Eq.(4.38) qui donne une équivalence entre les deux déformations $T_t=\sum_{i=0}^{+\infty}T_it^i$ et $T'_t=\sum_{i=0}^{+\infty}{T'}_it^i$ d'un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté T. Par $\phi_t\circ T_t = T'_t\circ\psi_t$, on a

$$\begin{aligned}T_1u &= T'_1u+T(\rho(\mathfrak{X})u+\mathcal{H}(\mathfrak{X},Tu))-[\mathfrak{X},Tu]_{\mathfrak{g}}\\ &=T'_1u+(D_{\mathcal{H}}(\mathfrak{X}))(u),\forall u\in V,\end{aligned}$$

ce qui implique que T_1 et T'_1 sont dans la même classe de cohomologie.

4.4 Algèbres 3-NS-Lie

On présente dans cette section une nouvelle structure algébrique, appelée structure de Nijenhuis, qui généralise les algèbres 3-Lie ainsi que les algèbres 3-pre-Lie. Cette structure admet un lien avec les opérateurs de Nijenhuis et avec les opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés. En outre, on établit une relation entre la structure de Nijenhuis des algèbres 3-Lie et celle des algèbres de Lie en utilisant une application trace.

4.4.1 Définition et Constructions

Dans ce paragraphe, on introduit la notion de structure de Nijenhuis d'une algèbre 3-Lie, où simplement dit une algèbre 3-NS-Lie. On montre que cette derniere donne lieu à une algèbre 3-Lie et une représentation sur elle-même. De même, on établit un lien entre les opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés sur les algèbres 3-Lie et les algèbres 3-NS-Lie. Donc, les algèbres 3-NS-Lie peuvent être considérées comme des structures algébriques sous-jacentes des opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés.

Définition 4.4.1. Une algèbre 3-NS-Lie est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ accompagné de deux multiplications ternaires $\{\cdot,\cdot,\cdot\},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!] : \otimes^3\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dans laquelle $[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]$ est antisymétrique et satisfait aux identités suivantes :

$$\{x_1,x_2,x_3\} = -\{x_2,x_1,x_3\}, \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}\{x_1,x_2,\{x_3,x_4,x_5\}\} - \{\{x_1,x_2,x_3\}^C,x_4,x_5\} &= \{[\![x_1,x_2,x_3]\!],x_4,x_5\} + \{x_3,\{x_1,x_2,x_4\}^C,x_5\}\\ &\quad + \{x_3,[\![x_1,x_2,x_4]\!],x_5\} + \{x_3,x_4,\{x_1,x_2,x_5\}\},\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}\{\{x_1,x_2,x_3\}^C,x_4,x_5\} + \{[\![x_1,x_2,x_3]\!],x_4,x_5\} &= \{x_1,x_2,\{x_3,x_4,x_5\}\} + \{x_2,x_3,\{x_1,x_4,x_5\}\}\\ &\quad + \{x_3,x_1,\{x_2,x_4,x_5\}\},\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}[\![x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]_*]\!] + \{x_1,x_2,[\![x_3,x_4,x_5]\!]\} &= [\![[x_1,x_2,x_3]_*,x_4,x_5]\!] + [\![x_3,[x_1,x_2,x_4]_*,x_5]\!]\\ +[\![x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]_*]\!] + \{x_4,x_5,[\![x_1,x_2,x_3]\!]\} &+ \{x_5,x_3,[\![x_1,x_2,x_4]\!]\} + \{x_3,x_4,[\![x_1,x_2,x_5]\!]\},\end{aligned} \tag{4.42}$$

où $\{x_1,x_2,x_3\}^C = \{x_1,x_2,x_3\} + c.p.(x_1,x_2,x_3)$ et $[x_1,x_2,x_3]_* = \{x_1,x_2,x_3\}^C + [\![x_1,x_2,x_3]\!]$, pour tout $x_i \in \mathfrak{g}$, $1 \le i \le 5$.

Remarque 4.4.2. Si la multiplication trilinéaire $\{\cdot,\cdot,\cdot\}$ dans la définition ci-dessus est triviale, on obtient que $(\mathfrak{g},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ est une algèbre 3-Lie. En revanche, si $[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]$ est triviale, alors $(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ devient une algèbre 3-pre-Lie [20]. Ainsi, les algèbres 3-NS-Lie sont une généralisation des algèbres 3-Lie et des algèbres 3-pre-Lie.

Par un calcul direct, on obtient la proposition suivante.

Proposition 4.4.3. *Soit $(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot,\cdot\},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ une algèbre 3-NS-Lie. Alors $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_*)$ est une algèbre 3-Lie.*

Remarque 4.4.4. L'algèbre 3-Lie $(A,[\cdot,\cdot,\cdot]_*)$ de la proposition précédente est appelée l'algèbre 3-Lie sous-jacente de $(A,\{\cdot,\cdot,\cdot\},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ et $(A,\{\cdot,\cdot,\cdot\},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ est appelée une algèbre 3-NS-Lie compatible à $(A,[\cdot,\cdot,\cdot]_*)$.

Proposition 4.4.5. *Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ une algèbre 3-Lie et $N : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ un opérateur de Nijenhuis. Alors les deux multiplications ternaires*

$$\{x,y,z\} = [Nx,Ny,z]_\mathfrak{g}, \tag{4.43}$$

$$[\![x,y,z]\!] = -N\big([Nx,y,z]_\mathfrak{g} + [x,Ny,z]_\mathfrak{g} + [x,y,Nz]_\mathfrak{g} - N[x,y,z]_\mathfrak{g}\big), \tag{4.44}$$

définissent une algèbre 3-NS-Lie sur $\mathfrak{g}$.

Preuve 4.4.6. Pour tout $x,y,z \in \mathfrak{g}$. Il est évident que

$$\{x,y,z\} = [Nx,Ny,z]_\mathfrak{g} = -[Ny,Nx,z]_\mathfrak{g} = -\{y,x,z\},$$

et

$$\begin{aligned}
&[\![x,y,z]\!] = -N\big([Nx,y,z]_{\mathfrak{g}} + [x,Ny,z]_{\mathfrak{g}} + [x,y,Nz]_{\mathfrak{g}} - N[x,y,z]_{\mathfrak{g}}\big)\\
&-\big(-N\big([Ny,x,z]_{\mathfrak{g}} + [y,Nx,z]_{\mathfrak{g}} + [y,x,Nz]_{\mathfrak{g}} - N[y,x,z]_{\mathfrak{g}}\big)\big) = -[\![y,x,z]\!].
\end{aligned}$$

De même, on obtient que $[\![x,y,z]\!] = -[\![x,z,y]\!]$. Pour tout $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \in \mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned}
&\{x_1,x_2,\{x_3,x_4,x_5\}\} - \{\{x_1,x_2,x_3\}^C,x_4,x_5\} - \{[\![x_1,x_2,x_3]\!],x_4,x_5\}\\
&-\{x_3,\{x_1,x_2,x_4\}^C,x_5\} - \{x_3,[\![x_1,x_2,x_4]\!],x_5\} - \{x_3,x_4,\{x_1,x_2,x_5\}\}\\
&= [Nx_1,Nx_2,[Nx_3,Nx_4,x_5]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}\\
&-[N[Nx_1,Nx_2,x_3]_{\mathfrak{g}} + N[Nx_2,Nx_3,x_1]_{\mathfrak{g}} + N[Nx_3,Nx_1,x_2]_{\mathfrak{g}},Nx_4,x_5]_{\mathfrak{g}}\\
&-[N\big(-N\big([Nx_1,x_2,x_3]_{\mathfrak{g}} + [x_1,Nx_2,x_3]_{\mathfrak{g}} + [x_1,x_2,Nx_3]_{\mathfrak{g}} - N[x_1,x_2,x_3]_{\mathfrak{g}}\big)\big),Nx_4,x_5]_{\mathfrak{g}}\\
&-[Nx_3,N[Nx_1,Nx_2,x_4]_{\mathfrak{g}} + N[Nx_2,Nx_4,x_1]_{\mathfrak{g}} + N[Nx_4,Nx_1,x_2]_{\mathfrak{g}},x_5]_{\mathfrak{g}}\\
&-[Nx_3,N\big(-N\big([Nx_1,x_2,x_4]_{\mathfrak{g}} + [x_1,Nx_2,x_4]_{\mathfrak{g}} + [x_1,x_2,Nx_4]_{\mathfrak{g}} - N[x_1,x_2,x_4]_{\mathfrak{g}}\big)\big),x_5]_{\mathfrak{g}}\\
&-[Nx_3,Nx_4,[Nx_1,Nx_2,x_5]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}\\
&\overset{(4.4)}{=} [Nx_1,Nx_2,[Nx_3,Nx_4,x_5]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}} - [[Nx_1,Nx_2,Nx_3]_{\mathfrak{g}},Nx_4,x_5]_{\mathfrak{g}}\\
&-[Nx_3,[Nx_1,Nx_2,Nx_4]_{\mathfrak{g}},x_5]_{\mathfrak{g}} - [Nx_3,Nx_4,[Nx_1,Nx_2,x_5]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}\\
&\overset{(2.14)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Alors l'équation (4.40) est vérifiée. On peut prouver de la même manière les équations (4.41) et (4.42). Ceci complète la preuve.

Exemple 4.4.7. Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre 3-Lie de dimension 3 dont les crochets non nuls relativement à la base $\{e_1,e_2,e_3\}$ sont donnés comme suit :

$$[e_1,e_2,e_3]_{\mathfrak{g}} = e_2.$$

Soit $N : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ une application linéaire donnée sur la base par :

$$N = \begin{pmatrix} d & 0 & 0\\ 0 & c & f\\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

où $d,\ c,\ f$ sont des paramètres tels que $dc \neq 0$. On a alors

$$[Ne_1,Ne_2,Ne_3]_{\mathfrak{g}} = dc^2e_2.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&[Ne_1,Ne_2,e_3]_{\mathfrak{g}} = dce_2, \quad [Ne_1,e_2,e_3]_{\mathfrak{g}} = de_2,\\
&[Ne_1,e_2,Ne_3]_{\mathfrak{g}} = dce_2, \quad [e_1,Ne_2,e_3]_{\mathfrak{g}} = ce_2,\\
&[e_1,Ne_2,Ne_3]_{\mathfrak{g}} = c^2e_2, \quad [e_1,e_2,Ne_3]_{\mathfrak{g}} = ce_2.
\end{aligned}$$

Il est facile de déduire que

$$\begin{aligned}
&[Ne_1,Ne_2,Ne_3]_{\mathfrak{g}} = N\Big([Ne_1,Ne_2,e_3]_{\mathfrak{g}} + [Ne_1,e_2,Ne_3]_{\mathfrak{g}} + [e_1,Ne_2,Ne_3]_{\mathfrak{g}}\\
&-N([Ne_1,e_2,e_3]_{\mathfrak{g}} + [e_1,Ne_2,e_3]_{\mathfrak{g}} + [e_1,e_2,Ne_3]_{\mathfrak{g}}) + N^2[e_1,e_2,e_3]_{\mathfrak{g}}\Big).
\end{aligned}$$

Ainsi, N est un opérateur de Nijenhuis sur $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$. Par la proposition 4.4.5, on obtient que $(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot,\cdot\},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ est une algèbre 3-NS-Lie de dimension 3 dont les crochets non nuls relativement à la base $\{e_1,e_2,e_3\}$ sont donnés comme suit :

$$\{e_1,e_2,e_3\} = dce_2, \quad [\![e_1,e_2,e_3]\!] = -(dc+c^2)e_2.$$

Le résultat suivant illustre que les algèbres 3-NS-Lie peuvent être considérées comme des structures algébriques sous-jacentes des opérateurs de Rota-Baxter relatifs twistés sur les algèbres 3-Lie.

Théorème 4.4.8. *Soit $T : V \to \mathfrak{g}$ un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté sur $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$. Il existe alors une structure d'algèbre 3-NS-Lie sur V donnée par :*

$$\{u,v,w\} = \rho(Tu,Tv)w, \quad [[u,v,w]] = \mathcal{H}(Tu,Tv,Tw),\ \forall u,v,w \in V. \tag{4.45}$$

Preuve 4.4.9. Soit $u,v,w \in V$. Il est clair que

$$\{u,v,w\} = \rho(Tu,Tv)w = -\rho(Tv,Tu)w = -\{v,u,w\},$$

et $[[u,v,w]]$ est antisymétrique puisque $\mathcal{H}$ est un 2-cocycle. De plus, on a

$$[u,v,w]_* = \rho(Tu,Tv)w + \rho(Tv,Tw)u + \rho(Tw,Tu)v + \Theta(Tu,Tv,Tw).$$

Puisque T est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté, on obtient

$$T[u,v,w]_* = [Tu,Tv,Tw]_{\mathfrak{g}}.$$

Pour tout $u_i \in V$, $1 \leq i \leq 5$, on a

$$\begin{aligned}
&\{[u_1,u_2,u_3]_*,u_4,u_5\} = \rho([Tu_1,Tu_2,Tu_3]_*,Tu_4)u_5\\
&= \rho(Tu_1,Tu_2)\rho(Tu_3,Tu_4)u_5 + \rho(Tu_1,Tu_3)\rho(Tu_1,Tu_4)u_5 + \rho(Tu_3,Tu_1)\rho(Tu_2,Tu_4)u_5\\
&= \{[u_1,u_2,u_3]_*,u_4,u_5\} + \{u_3,[u_1,u_2,u_4]_*,u_5\} + \{u_3,u_4,\{u_1,u_2,u_5\}\}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
&\{u_1,u_2,\{u_3,u_4,u_5\}\} = \rho(Tu_1,Tu_2)\rho(Tu_3,Tu_4)u_5\\
&= \rho([Tu_1,Tu_2,Tu_3]_*,Tu_4)u_5 + \rho(Tu_3,[Tu_1,Tu_2,Tu_4]_*)u_5 + \rho(Tu_3,Tu_4)\rho(Tu_1,Tu_2)u_5\\
&= \{u_1,u_2,\{u_3,u_4,u_5\}\} + \{u_2,u_3,\{u_1,u_4,u_5\}\} + \{u_3,u_1,\{u_2,u_4,u_5\}\}.
\end{aligned}$$

Puisque (V,ρ) est une représentation de $\mathfrak{g}$, les équations (4.40) et (4.41) sont vérifiées. De même, l'équation (4.42) est vérifiée puisque $\mathcal{H}$ est un 2-cocycle. D'où, $(V, \{\cdot,\cdot,\cdot\}, [[\cdot,\cdot,\cdot]])$ est une algèbre 3-NS-Lie.

Remarque 4.4.10. Il existe une paire de foncteurs adjoints entre la catégorie des algèbres 3-NS-Lie et la catégorie des algèbres 3-Lie avec les opérateurs de Rota-Baxter relatifs $\mathcal{H}$-twistés.

Dans la suite, on donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une structure d'algèbre 3-NS-Lie compatible avec une algèbre 3-Lie.

Proposition 4.4.11. *Soit $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre 3-Lie. Il existe alors une structure d'algèbre 3-NS-Lie compatible sur $\mathfrak{g}$ si et seulement s'il existe un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté $T : V \to \mathfrak{g}$ inversible sur $\mathfrak{g}$. De plus, la structure d'algèbre 3-NS-Lie compatible sur $\mathfrak{g}$ est donnée par :*

$$\{x,y,z\} = T(\rho(x,y)T^{-1}(z)),\ [[x,y,z]] = T(\mathcal{H}(x,y,z)), \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}. \tag{4.46}$$

Preuve 4.4.12. Soit $T : V \to \mathfrak{g}$ un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté inversible. D'après la Proposition 4.4.8, il existe une structure d'algèbre 3-NS-Lie sur V donnée par :

$$\{u,v,w\} = \rho(Tu,Tv)w, \quad [[u,v,w]] = \mathcal{H}(Tu,Tv,Tw),\ \forall u,v,w \in V.$$

Puisque T est inversible, les multiplications ternaires

$$\begin{aligned}
\{x,y,z\} &= T\{T^{-1}(x),T^{-1}(y),T^{-1}(z)\} = T(\rho(x,y)T^{-1}(z)),\\
[[x,y,z]] &= T[[T^{-1}(x),T^{-1}(y),T^{-1}(z)]] = T(\mathcal{H}(x,y,z)), \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g},
\end{aligned}$$

définissent une algèbre 3-NS-Lie sur $\mathfrak{g}$. De plus, on a

$$\{x,y,z\} + \{y,z,x\} + \{z,x,y\} + [[x,y,z]]$$

$$
\begin{aligned}
&= T\big(\rho(x,y)T^{-1}(z) + \rho(y,z)T^{-1}(x) + \rho(z,x)T^{-1}(y) + \mathcal{H}(x,y,z)\big)\\
&= T\big(\rho(T\circ T^{-1}(x), T\circ T^{-1}(y))T^{-1}(z) + \rho(T\circ T^{-1}(y), T\circ T^{-1}(z))T^{-1}(x)\\
&+ \rho(T\circ T^{-1}(z), T\circ T^{-1}(x))T^{-1}(y) + \mathcal{H}(T\circ T^{-1}(x), T\circ T^{-1}(y), T\circ T^{-1}(z))\big)\\
&= [T\circ T^{-1}(x), T\circ T^{-1}(y), T\circ T^{-1}(z)]_{\mathfrak{g}} = [x,y,z]_{\mathfrak{g}}.
\end{aligned}
$$

Inversement, l'identité $Id : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté sur $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ associé à la représentation $(\mathfrak{g}, L)$.

4.4.2 Algèbres 3-NS-Lie induite par algèbres NS-Lie

Maintenant, en partant d'une fonction trace et une algèbre NS-Lie, on peut construire une algèbre 3-NS-Lie. Soient $(\mathfrak{g}, \{\cdot,\cdot\}, [\![\cdot,\cdot]\!])$ une algèbre NS-Lie et $\tau : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ une application trace, c'est à dire que τ vérifie :

$$\tau(\{x,y\}) = \tau([\![x,y]\!]) = 0, \quad \forall x,y \in \mathfrak{g}.$$

Théorème 4.4.13. *Soient $(\mathfrak{g}, \{\cdot,\cdot\}, [\![\cdot,\cdot]\!])$ une algèbre NS-Lie et $\tau : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ une application trace. On définit les multiplications ternaires $\{\cdot,\cdot,\cdot\}_\tau : (\wedge^2\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ et $[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\tau : \wedge^3\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ respectivement par*

$$\{x_1,x_2,x_3\}_\tau = \tau(x_1)\{x_2,x_3\} - \tau(x_2)\{x_1,x_3\}, \tag{4.47}$$

$$[\![x_1,x_2,x_3]\!]_\tau = \tau(x_1)[\![x_2,x_3]\!] + c.p.(x_1,x_2,x_3), \quad \forall x_1,x_2,x_3 \in \mathfrak{g}. \tag{4.48}$$

Alors $(\mathfrak{g}, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_\tau, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\tau)$ est une algèbre 3-NS-Lie, qui est appelée algèbre 3-NS-Lie induite par l'algèbre NS-Lie $(\mathfrak{g}, \{\cdot,\cdot\}, [\![\cdot,\cdot]\!])$.

Preuve 4.4.14. Pour tout $x,y,z \in \mathfrak{g}$, on a

$$\{x,y,z\}_\tau = \tau(x)\{y,z\} - \tau(y)\{x,z\} = -\big(\tau(y)\{x,z\} - \tau(x)\{y,z\}\big) = -\{y,x,z\}_\tau,$$

puisque le crochet $[\![\cdot,\cdot]\!]$ est anti-symmétrique, alors

$$
\begin{aligned}
[\![x,y,z]\!]_\tau &= \tau(x)[\![y,z]\!] + \tau(y)[\![z,x]\!] + \tau(z)[\![x,y]\!]\\
&= -\Big(\tau(y)[\![x,z]\!] + \tau(x)[\![z,y]\!] + \tau(z)[\![y,x]\!]\Big) = -[\![y,x,z]\!]_\tau.
\end{aligned}
$$

De la même manière, on trouve que $[\![x,y,z]\!]_\tau = -[\![x,z,y]\!]_\tau$, alors $[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\tau$ est anti-symmétrique. Pour tout $x_i \in A$, $1 \le i \le 5$, on a

$$
\begin{aligned}
&\{\{x_1,x_2,x_3\}^C_\tau, x_4, x_5\}_\tau + \{[\![x_1,x_2,x_3]\!]_\tau, x_4, x_5\}_\tau - \{x_1,x_2,\{x_3,x_4,x_5\}_\tau\}_\tau\\
&- \{x_2,x_3,\{x_1,x_4,x_5\}_\tau\}_\tau - \{x_3,x_1,\{x_2,x_4,x_5\}_\tau\}_\tau\\
\overset{(4.47)+(4.48)}{=}\ & \tau(x_1)\cancel{\tau(\{x_2,x_3\})\{x_4,x_5\}} - \tau(x_1)\tau(x_4)\{\{x_2,x_3\},x_5\} - \tau(x_2)\cancel{\tau(\{x_1,x_3\})\{x_4,x_5\}}\\
&- \tau(x_2)\tau(x_4)\{\{x_1,x_3\},x_5\} + \tau(x_2)\cancel{\tau(\{x_3,x_1\})\{x_4,x_5\}} - \tau(x_2)\tau(x_4)\{\{x_3,x_1\},x_5\}\\
&- \tau(x_3)\cancel{\tau(\{x_2,x_1\})\{x_4,x_5\}} - \tau(x_3)\tau(x_4)\{\{x_2,x_1\},x_5\} + \tau(x_3)\cancel{\tau(\{x_1,x_2\})\{x_4,x_5\}}\\
&- \tau(x_3)\tau(x_4)\{\{x_1,x_2\},x_5\} - \tau(x_1)\cancel{\tau(\{x_3,x_2\})\{x_4,x_5\}} - \tau(x_1)\tau(x_4)\{\{x_3,x_2\},x_5\}\\
&+ \tau(x_1)\cancel{\tau([\![x_2,x_3]\!])\{x_4,x_5\}} - \tau(x_1)\tau(x_4)\{[\![x_2,x_3]\!],x_5\} + \tau(x_2)\cancel{\tau([\![x_3,x_1]\!])\{x_4,x_5\}}\\
&- \tau(x_2)\tau(x_4)\{[\![x_3,x_1]\!],x_5\} + \tau(x_3)\cancel{\tau([\![x_1,x_2]\!])\{x_4,x_5\}} - \tau(x_3)\tau(x_4)\{[\![x_1,x_2]\!],x_5\}\\
&- \cancel{\tau(x_3)\tau(x_1)\{x_2,\{x_4,x_5\}\}} + \cancel{\tau(x_3)\tau(x_2)\{x_1,\{x_4,x_5\}\}} + \tau(x_4)\tau(x_1)\{x_2,\{x_3,x_5\}\}\\
&- \tau(x_4)\tau(x_2)\{x_1,\{x_3,x_5\}\} - \cancel{\tau(x_1)\tau(x_2)\{x_3,\{x_4,x_5\}\}} + \cancel{\tau(x_1)\tau(x_3)\{x_2,\{x_4,x_5\}\}}\\
&+ \tau(x_4)\tau(x_2)\{x_3,\{x_1,x_5\}\} - \tau(x_4)\tau(x_3)\{x_2,\{x_1,x_5\}\} - \cancel{\tau(x_2)\tau(x_3)\{x_1,\{x_4,x_5\}\}}\\
&+ \cancel{\tau(x_2)\tau(x_1)\{x_3,\{x_4,x_5\}\}} + \tau(x_4)\tau(x_3)\{x_1,\{x_2,x_5\}\} - \tau(x_4)\tau(x_1)\{x_3,\{x_2,x_5\}\}\\
=\ & -\tau(x_1)\tau(x_4)\Big(\{\{x_2,x_3\},x_5\} - \{x_2,\{x_3,x_5\}\} - \{\{x_3,x_2\},x_5\} + \{x_3,\{x_2,x_5\}\} + \{[\![x_2,x_3]\!],x_5\}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \tau(x_2)\tau(x_4)\Big(\{\{x_3,x_1\},x_5\} - \{x_3,\{x_1,x_5\}\} - \{\{x_1,x_3\},x_5\} + \{x_1,\{x_3,x_5\}\} + \{[\![x_3,x_1]\!],x_5\}\Big)\\
&- \tau(x_3)\tau(x_4)\Big(\{\{x_1,x_2\},x_5\} - \{x_1,\{x_2,x_5\}\} - \{\{x_2,x_1\},x_5\} + \{x_2,\{x_1,x_5\}\} + \{[\![x_1,x_2]\!],x_5\}\Big)\\
\overset{(1.43)}{=}\ & 0.
\end{aligned}
$$

Alors l'équation (4.41) est satisfaite. De la même manière, les équations (4.40) et (4.42) sont satisfaites en utilisant les équations (1.43) et (1.44).

Proposition 4.4.15. *Soient $(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot,\cdot\},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ une algèbre 3-NS-Lie et a un élément fixe dans $\mathfrak{g}$ tel que $\{x,y,a\}=0$, pour tout $x,y\in\mathfrak{g}$. Alors $(\mathfrak{g},\{x,y\}_a=\{a,x,y\},[\![x,y]\!]_a=[\![a,x,y]\!])$ est une algèbre NS-Lie.*

Proposition 4.4.16. *Soient $\phi\in\mathcal{Z}^2_{Lie}(\mathfrak{g},V)$ et τ une application trace sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors $\phi_\tau(x,y,z)=\tau(x)\phi(y,z)+c.p.(x,y,z)$ est un 2-cocycle dans la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre 3-Lie induite $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\tau)$ à coefficients dans la représentation induite (V,ρ_τ).*

Preuve 4.4.17. Soient $\phi\in\mathcal{Z}^2_{Lie}(\mathfrak{g},V)$, τ une application trace sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et (V,ρ_τ) une representation de l'algèbre 3-Lie induite $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\tau)$. Alors on a

$$
\begin{aligned}
&\phi_\tau(x_1,x_2,[y_1,y_2,y_3]_\tau)+\rho_\tau(x_1,x_2)\phi_\tau(y_1,y_2,y_3)-\phi_\tau([x_1,x_2,y_1]_\tau,y_2,y_3)\\
&-\phi_\tau(y_1,[x_1,x_2,y_2]_\tau,y_3)-\phi_\tau(y_1,y_2,[x_1,x_2,y_3]_\tau)-\rho_\tau(y_2,y_3)\phi_\tau(x_1,x_2,y_1)\\
&-\rho_\tau(y_3,y_1)\phi_\tau(x_1,x_2,y_2)-\rho_\tau(y_1,y_2)\phi_\tau(x_1,x_2,y_3)\\
\overset{(2.18)+(2.22)}{=}\ &\tau(x_1)\tau(y_1)\phi(x_2,[y_2,y_3]_\mathfrak{g})+\tau(x_1)\tau(y_2)\phi(x_2,[y_3,y_1]_\mathfrak{g})+\tau(x_1)\tau(y_3)\phi(x_2,[y_1,y_2]_\mathfrak{g})\\
&+\tau(x_2)\tau(y_1)\phi([y_2,y_3]_\mathfrak{g},x_1)+\tau(x_2)\tau(y_2)\phi([y_3,y_1]_\mathfrak{g},x_1)+\tau(x_2)\tau(y_3)\phi([y_1,y_2]_\mathfrak{g},x_1)\\
&+\tau(x_1)\tau(y_1)\rho(x_2)\phi(y_2,y_3)+\tau(x_1)\tau(y_2)\rho(x_2)\phi(y_3,y_1)+\tau(x_1)\tau(y_3)\rho(x_2)\phi(y_1,y_2)\\
&-\tau(x_2)\tau(y_1)\rho(x_1)\phi(y_2,y_3)-\tau(x_2)\tau(y_2)\rho(x_1)\phi(y_3,y_1)-\tau(x_2)\tau(y_3)\rho(x_1)\phi(y_1,y_2)\\
&-\tau(y_2)\tau(x_1)\phi(y_3,[x_2,y_1]_\mathfrak{g})-\tau(y_2)\tau(x_2)\phi(y_3,[y_1,x_1]_\mathfrak{g})-\tau(y_2)\tau(y_1)\phi(y_3,[x_1,x_2]_\mathfrak{g})\\
&-\tau(y_3)\tau(x_1)\phi([x_2,y_1]_\mathfrak{g},y_2)-\tau(y_3)\tau(x_2)\phi([y_1,x_1]_\mathfrak{g},y_2)-\tau(y_3)\tau(y_1)\phi([x_1,x_2]_\mathfrak{g},y_2)\\
&-\tau(y_1)\tau(x_1)\phi([x_2,y_2]_\mathfrak{g},y_3)-\tau(y_1)\tau(x_2)\phi([y_2,x_1]_\mathfrak{g},y_3)-\tau(y_1)\tau(y_2)\phi([x_1,x_2]_\mathfrak{g},y_3)\\
&-\tau(y_3)\tau(x_1)\phi(y_1,[x_2,y_2]_\mathfrak{g})-\tau(y_3)\tau(x_2)\phi(y_1,[y_2,x_1]_\mathfrak{g})-\tau(y_3)\tau(y_2)\phi(y_1,[x_1,x_2]_\mathfrak{g})\\
&-\tau(y_1)\tau(x_1)\phi(y_2,[x_2,y_3]_\mathfrak{g})-\tau(y_1)\tau(x_2)\phi(y_2,[y_3,x_1]_\mathfrak{g})-\tau(y_1)\tau(y_3)\phi(y_2,[x_1,x_2]_\mathfrak{g})\\
&-\tau(y_2)\tau(x_1)\phi([x_2,y_3]_\mathfrak{g},y_1)-\tau(y_2)\tau(x_2)\phi([y_3,x_1]_\mathfrak{g},y_2)-\tau(y_2)\tau(y_3)\phi([x_1,x_2]_\mathfrak{g},y_2)\\
&-\tau(y_2)\tau(x_1)\rho(y_3)\phi(x_2,y_1)-\tau(y_2)\tau(x_2)\rho(y_3)\phi(y_1,x_1)-\tau(y_2)\tau(y_1)\rho(y_3)\phi(x_1,x_2)\\
&+\tau(y_3)\tau(x_1)\rho(y_2)\phi(x_2,y_1)+\tau(y_3)\tau(x_2)\rho(y_2)\phi(y_1,x_1)+\tau(y_3)\tau(y_1)\rho(y_2)\phi(x_1,x_2)\\
&-\tau(y_3)\tau(x_1)\rho(y_1)\phi(x_2,y_2)-\tau(y_3)\tau(x_2)\rho(y_1)\phi(y_2,x_1)-\tau(y_3)\tau(y_2)\rho(y_1)\phi(x_1,x_2)\\
&+\tau(y_1)\tau(x_1)\rho(y_3)\phi(x_2,y_2)+\tau(y_1)\tau(x_2)\rho(y_3)\phi(y_2,x_1)+\tau(y_1)\tau(y_2)\rho(y_3)\phi(x_1,x_2)\\
&-\tau(y_1)\tau(x_1)\rho(y_2)\phi(x_2,y_3)-\tau(y_1)\tau(x_2)\rho(y_2)\phi(y_3,x_1)-\tau(y_1)\tau(y_3)\rho(y_2)\phi(x_1,x_2)\\
&+\tau(y_2)\tau(x_1)\rho(y_1)\phi(x_2,y_3)+\tau(y_2)\tau(x_2)\rho(y_1)\phi(y_3,x_1)+\tau(y_2)\tau(y_3)\rho(y_1)\phi(x_1,x_2)\\
\overset{(1.20)}{=}\ &0.
\end{aligned}
$$

Lemme 4.4.18. *Soient (V,ρ) une représentation d'une algèbre 3-Lie $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$, $\mathcal{H}\in Z^2_{3Lie}(\mathfrak{g};V)$ et a un élément fixe dans $\mathfrak{g}$. Alors $\mathcal{H}_a(x,y)=\mathcal{H}(a,x,y)$, pour tout $x,y\in\mathfrak{g}$, est un 2-cocycle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_a$ à coefficients dans la représentation (V,ρ_a).*

Théorème 4.4.19. *Soient $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ une algèbre de Lie, (V,ρ) une représentation et $\tau:\mathfrak{g}\to\mathbb{K}$ est une application trace. Si $T:V\to\mathfrak{g}$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors $T:V\to\mathfrak{g}$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}_\tau$-twisté sur l'algèbre 3-Lie induite $\mathfrak{g}_\tau$ par rapport à (V,ρ_τ).*

Preuve 4.4.20. Pour tout $u,v,w\in V$, on a

$$[Tu,Tv,Tw]_\tau \overset{(2.18)}{=} (\tau\circ T)(u)[Tu,Tw]_\mathfrak{g}+(\tau\circ T)(v)[Tw,Tu]_\mathfrak{g}+(\tau\circ T)(w)[Tu,Tv]_\mathfrak{g}.$$

D'autre part, on obtient

$$T\Big(\rho_\tau(Tu,Tv)w+\rho_\tau(Tv,Tw)u+\rho_\tau(Tw,Tu)v+\Theta_\tau(Tu,Tv,Tw)\Big)$$

$$\begin{aligned}&= T\Big((\tau\circ T)(u)\rho(Tv)w - (\tau\circ T)(v)\rho(Tu)w + (\tau\circ T)(v)\rho(Tw)u\\ &- (\tau\circ T)(w)\rho(Tv)u + (\tau\circ T)(w)\rho(Tu)v - (\tau\circ T)(u)\rho(Tw)v\\ &+ (\tau\circ T)(u)\Theta(Tv,Tw) + (\tau\circ T)(v)\Theta(Tw,Tu) + (\tau\circ T)(w)\Theta(Tu,Tv)\Big).\end{aligned}$$

Ainsi, d'après l'équation (1.42), on a

$$[Tu,Tv,Tw]_\tau = T\Big(\rho_\tau(Tu,Tv)w + \rho_\tau(Tv,Tw)u + \rho_\tau(Tw,Tu)v + \mathcal{H}_\tau(Tu,Tv,Tw)\Big).$$

Par conséquent, T définit un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}_\tau$-twisté sur l'algèbre 3-Lie induite.

Soient $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ une algèbre de Lie et (V,ρ) une représentation. On dit qu'on a une paire Lie-Rep et on la note par le tuple $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],V,\rho)$. On utilise une notation similaire pour une algèbre 3-Lie avec une représentation. La proposition suivante donne deux manières différentes de construire la même structure d'algèbre 3-NS-Lie sur V à l'aide d'une application trace ou d'un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}$-twisté. En particulier, on obtient une algèbre 3-NS-Lie sur $\mathfrak{g}$ en utilisant la représentation adjointe.

Proposition 4.4.21. *On a le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} \textit{Lie-Rep pair } (A,[\cdot,\cdot],V,\rho) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, shift right, "\textit{opérateur de R-B } \mathcal{H}\textit{-twisté}"'] & \textit{3-Lie-Rep pair } (A,[\cdot,\cdot,\cdot]_\tau,V,\rho_\tau) \arrow[d, shift right, "\textit{opérateur de R-B } \mathcal{H}_\tau\textit{-twisté}"'] \\ \textit{algèbre NS-Lie } (V,\{\cdot,\cdot\},[[\cdot,\cdot]]) \arrow[r, "\tau\circ T"] \arrow[u, shift right, "{[\cdot,\cdot]_*}"'] & \textit{algèbre 3-NS-Lie } (V,\{\cdot,\cdot,\cdot\}_\tau,[[\cdot,\cdot,\cdot]]_\tau) \arrow[u, shift right, "{[\cdot,\cdot,\cdot]_*}"'] \end{tikzcd}$$

Preuve 4.4.22. Soient $\tau : A \to \mathbb{K}$ une application trace sur $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$, (V,ρ) une représentation et $\mathcal{H} \in \mathfrak{C}^2_{CE}(\mathfrak{g},V)$ un 2-cocycle. Alors $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\tau)$ est une algèbre 3-Lie induite, (V,ρ_τ) est une représentation de l'algèbre 3-Lie induite, par la Proposition 4.4.16, $\mathcal{H}_\tau$ est un 2-cocycle de l'algèbre 3-Lie induite. Soit $T : V \to A$ un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}_\tau$-twisté sur $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\tau)$ par rapport à (V,ρ_τ). Alors, pour tout $u,v,w \in V$ et d'après le Theorème 4.4.8, l'accolade et le crochet suivants :

$$\{u,v,w\}_1 = \rho_\tau(Tu,Tv)w, \qquad \text{and} \qquad [[u,v,w]]_1 = \mathcal{H}_\tau(Tu,Tv,Tw),$$

définissent une algèbre 3-NS-Lie sur V. On peut aussi construire une algèbre 3-NS-Lie sur V par une autre méthode. Par la Proposition 1.3.11, on définit une algèbre NS-Lie sur V. En vertu du théorème 4.4.13, on suppose que $\tau' : V \to \mathbb{K}$ soit une forme linéaire telle que $\tau'([u,v]_*) = 0$, $\forall u,v \in V$. Alors

$$\{u,v,w\}_2 = \tau'(u)\{v,w\} - \tau'(v)\{u,w\} = \tau'(u)\rho(Tv)w - \tau'(v)\rho(Tu)w, \ \forall u,v,w \in V,$$

et

$$[[u,v,w]]_2 = \circlearrowleft_{u,v,w} \tau'(u)[[v,w]] = \circlearrowleft_{u,v,w} \tau'(u)\mathcal{H}(Tv,Tw), \ \forall u,v,w \in V,$$

définissent une algèbre 3-NS-Lie sur V. Par un calcul direct, on obtient

$$\begin{aligned}&\{u,v,w\}_2 - \{u,v,w\}_1 = \tau'(u)\rho(Tv)w - \tau'(v)\rho(Tu)w - \Big((\tau\circ T)(u)\rho(Tv)w - (\tau\circ T)(v)\rho(Tu)w\Big)\\ &= \Big(\tau'(u) - (\tau\circ T)(u)\Big)\rho(Tv)w - \Big(\tau'(v) - (\tau\circ T)(v)\Big)\rho(Tu)w, \ \forall u,v,w \in V,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&[[u,v,w]]_2 - [[u,v,w]]_1 = \circlearrowleft_{u,v,w} \tau'(u)\mathcal{H}(Tv,Tw) - \circlearrowleft_{u,v,w} (\tau\circ T)(u)\mathcal{H}(Tv,Tw)\\ &= \circlearrowleft_{u,v,w} \Big(\tau'(u) - (\tau\circ T)(u)\Big)\mathcal{H}(Tv,Tw), \ \forall u,v,w \in V.\end{aligned}$$

Si on prent $\tau' = \tau\circ T$, on obtient la même structure d'algèbre 3-NS-Lie sur V.

En particulier, on suppose que $(V,\rho) = (A,ad)$ est la représentation adjointe de $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$, et on considère $ad_\tau : \wedge^2\mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$ défini par :

$$ad_\tau(x,y)z = \tau(x)ad(y)z - \tau(y)ad(x)z = \tau(x)[y,z] - \tau(y)[x,z], \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}.$$

Ensuite, on peut suivre les calculs précédents pour obtenir une structure d'algèbre 3-NS-Lie sur $\mathfrak{g}$ en utilisant deux méthodes différentes.

Soient $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre 3-Lie, (V,ρ) une représentation et on fixe $x_0 \in \mathfrak{g}$. On considère $\mathcal{H} \in \mathfrak{C}^2_{3Lie}(\mathfrak{g};V)$ un 2-cocycle dans le complexe de cochaînes de Chevalley-Eilenberg. Par un calcul simple, $\mathcal{H}_{x_0}$ est un 2-cocycle sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{x_0}$ à coefficients dans le $\mathfrak{g}_{x_0}$-module (V,ρ_{x_0}), où

$$\mathcal{H}_{x_0}(x,y) = \mathcal{H}(x_0,x,y), \quad \forall x,y \in \mathfrak{g}.$$

Proposition 4.4.23. *Avec les notations ci-dessus, si $T : V \to \mathfrak{g}$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}_\tau$-twisté sur l'algèbre 3-Lie $\mathfrak{g}$ et $x_0 \in Im(T)$ tel que $T^{-1}(x_0) \in Ker(\rho)$, alors $T : V \to \mathfrak{g}$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}_{x_0}$-twisté sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{x_0}$ associé à (V,ρ_{x_0}).*

Preuve 4.4.24. Pour tout $u,v \in V$, on a

$$\begin{aligned}
&[T(u),T(v)]_{x_0} - T(\rho_{x_0}(Tu)v - \rho_{x_0}(Tv)u + \mathcal{H}_{x_0}(Tu,Tv))\\
=&[x_0,T(u),T(v)] - T(\rho(x_0,Tu)v - \rho(x_0,Tv)u + \mathcal{H}(x_0,Tu,Tv))\\
=&[T(T^{-1}x_0),T(u),T(v)]\\
&- T\Big(\rho(T(T^{-1}x_0),Tu)v - \rho(T(T^{-1}x_0),Tv)u + \rho(Tu,Tv)T^{-1}(x_0) + \mathcal{H}(T(T^{-1}x_0),Tu,Tv)\Big)\\
=&0,
\end{aligned}$$

ce qui implique que T est un opérateur de Rota-Baxter relatif $\mathcal{H}_{x_0}$-twisté sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{x_0}$.

En utilisant la Proposition 4.4.23 et la Proposition 4.4.8, on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.4.25. *Soit $(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot,\cdot\},[[\cdot,\cdot,\cdot]])$ une algèbre 3-NS-Lie et $x_0 \in \mathfrak{g}$ telle que $\{x,y,x_0\} = 0$ pour tout $x,y \in \mathfrak{g}$. Alors $(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot\}_{x_0},[[\cdot,\cdot]]_{x_0})$ est une algèbre NS-Lie, où*

$$\{x,y\}_{x_0} = \{x_0,x,y\}, \quad [[x,y]]_{x_0} = [[x_0,x,y]],$$

pour tout $x,y \in \mathfrak{g}$.

Chapitre 5

Équation de Yang-Baxter et opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les algèbres ternaires de type Jordan

Ce chapitre a pour objectif d'introduire la notion d'équation de Yang-Baxter sur les algèbres ternaires de type Jordan et d'analyser ses solutions en s'appuyant sur les opérateurs de Rota-Baxter relatifs. En parallèle, on étudie les opérateurs de Rota-Baxter relatifs dans le cadre des algèbres de Jordan ternaires en introduisant la notion d'algèbres pre-Jordan ternaires, considérées comme les structures algébriques sous-jacentes des algèbres de Jordan ternaires.

5.1 Algèbres de Jordan ternaires

Dans le cadre de la généralisation des algèbres de Jordan, Kaygorodov, Pozhidaev et Saraiva ont introduit la définition des algèbres n-aires de type Jordan. Ils ont également proposé plusieurs exemples d'algèbres de Jordan ternaires, notamment par la constructions à partir des algèbres matricielles et des algèbres de Cayley-Dickson. En outre, ils ont défini une classe d'algèbres de Jordan ternaires par la construction TKK, bien connue dans la théorie classique des algèbres de Jordan. Cette section passe en revue les notions relatives à cette généralisation, qui seront utiles pour notre étude des algèbres de Jordan ternaires. Pour plus de détails, voir [82].

Définition 5.1.1. Une algèbre de Lie triple est une algèbre commutative, non associative $(A,\circ)$ satisfaisant :

$$(x,y^2,z) = 2y\circ(x,y,z), \tag{5.1}$$

pour tout $x,y,z\in A$, où $(\cdot,\cdot,\cdot)$ représente l'associateur

$$(x,y,z) = (x\circ y)\circ z - x\circ(y\circ z).$$

Soit R_x l'opérateur de multiplication à droite défini par :

$$y\mapsto R_x y = y\circ x.$$

Alors l'identité (5.1) est équivalente à

$$R_{(x,y,z)} = [R_y,[R_x,R_z]], \tag{5.2}$$

où $[\cdot,\cdot]$ est le commutateur standard

$$[x,y] = x\circ y - y\circ x.$$

Il est simple d'observer que toute algèbre de Jordan est une algèbre de Lie triple, bien que l'inverse ne soit pas nécessairement vrai. De plus, si l'algèbre A est commutative, l'identité (5.2) est équivalente à

$$[R_x, R_y] \in Der(A)$$

où $Der(A)$ représente l'algèbre de Lie des dérivations de A. En écrivant $D_{x,y}$ au lieu de $[Rx, Ry]$, cela signifie que

$$D_{x,y}(a \circ b) = D_{x,y}(a) \circ b + a \circ D_{x,y}(b).$$

Maintenant on rappelle la définition de l'algèbre n-aire de type Jordan qui est une généralisation au cas n-aire de l'algèbre de Jordan ordinaire.

Définition 5.1.2. Une algèbre n-aire de type Jordan est un couple $(\mathcal{J}, [\![\cdot, \cdots, \cdot]\!])$ constitué d'un espace vectoriel $\mathcal{J}$ et d'une application n-linèaire $[\![\cdot, \cdots, \cdot]\!] : \otimes^n \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ satisfaisant :

$$[\![x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}]\!] = [\![x_1, \cdots, x_n]\!], \quad \forall \sigma \in S_n, \tag{5.3}$$
$$[R_{(x_2,\cdots,x_n)}, R_{(y_2,\cdots,y_n)}] \in Der(\mathcal{J}), \tag{5.4}$$

où

$$Der(\mathcal{J}) = \{D \in End(\mathcal{J}) \mid D([\![x_1, \cdots, x_n]\!]) = \sum_{i=1}^{n} [\![x_1, \cdots, x_{i-1}, D(x_i), x_{i+1}, \cdots, x_n]\!]\}$$

est l'ensemble de toutes les dérivations sur $\mathcal{J}$ et $R_{(x_2,\cdots,x_n)}$, $R_{(y_2,\cdots,y_n)}$ sont les opérateurs de multiplication à droite définis par :

$$y \mapsto R_{(x_2,\cdots,x_n)}(y) = [\![y, x_2, \cdots, x_n]\!].$$

Remarque 5.1.3. En particulier, pour $n = 3$, si on définit l'application linéaire $ad_{x,y} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$, pour tout $x, y \in \mathcal{J}$, par $ad_{x,y}(z) = [\![x, y, z]\!]$. Alors, l'identité (5.6) est équivalente à

$$\begin{aligned}[ad_{x_1,x_2}, ad_{x_3,x_4}]([\![x_5, x_6, x_7]\!]) =& [\![[ad_{x_1,x_2}, ad_{x_3,x_4}](x_5), x_6, x_7]\!] + [\![x_5, [ad_{x_1,x_2}, ad_{x_3,x_4}](x_6), x_7]\!] \\ &+ [\![x_5, x_6, [ad_{x_1,x_2}, ad_{x_3,x_4}](x_7)]\!],\end{aligned}$$

ce qui implique que $[ad_{x_1,x_2}, ad_{x_3,x_4}] = ad_{x_1,x_2}ad_{x_3,x_4} - ad_{x_3,x_4}ad_{x_1,x_2}$ est une dérivation sur $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$.

Définition 5.1.4. Une algèbre de Jordan ternaire est un couple $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ constitué d'un espace vectoriel $\mathcal{J}$ et d'une application 3-linèaire $[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!] : \otimes^3 \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ satisfaisant :

$$[\![x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]\!] = [\![x_1, x_2, x_3]\!], \quad \forall \sigma \in S_3, \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}&[\![x_1, x_2, [\![x_3, x_4, [\![x_5, x_6, x_7]\!]]\!]]\!] - [\![x_3, x_4, [\![x_1, x_2, [\![x_5, x_6, x_7]\!]]\!]]\!] \\ =& [\![[\![x_1, x_2, [\![x_3, x_4, x_5]\!]]\!], x_6, x_7]\!] - [\![[\![x_3, x_4, [\![x_1, x_2, x_5]\!]]\!], x_6, x_7]\!] + [\![x_5, [\![x_1, x_2, [\![x_3, x_4, x_6]\!]]\!], x_7]\!] \\ &- [\![x_5, [\![x_3, x_4, [\![x_1, x_2, x_6]\!]]\!], x_7]\!] + [\![x_5, x_6, [\![x_1, x_2, [\![x_3, x_4, x_7]\!]]\!]]\!] - [\![x_5, x_6, [\![x_3, x_4, [\![x_1, x_2, x_7]\!]]\!]]\!].\end{aligned} \tag{5.6}$$

Définition 5.1.5. Un morphisme $f : (\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathcal{J}}) \to (\mathcal{J}', [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathcal{J}'})$ d'algèbres de Jordan ternaire est une application linéaire satisfaisant :

$$f([\![x, y, z]\!]_{\mathcal{J}}) = [\![f(x), f(y), f(z)]\!]_{\mathcal{J}'}, \forall x, y, z \in \mathcal{J}.$$

Dans ce qui suit, on présente quelques notions fondamentales concernant les formes bilinéaires associées à une algèbre de Jordan ternaire.

Définition 5.1.6. Soit $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ une algèbre de Jordan ternaire. Une forme bilinéaire $B : \mathcal{J} \otimes \mathcal{J} \to \mathbb{K}$ est dite

1. symétrique si $B(x, y) = B(y, x)$,
2. antisymétrique si $B(x, y) = -B(y, x)$,
3. non-dégénérée si $x \in \mathcal{J}$ satisfie $B(x, y) = 0$ pour tout $y \in \mathcal{J}$, alors $x = 0$,
4. invariante si

$$B([\![x, y, z]\!], w) = B(z, [\![x, y, w]\!]), \ \forall x, y, z, w \in \mathcal{J},$$

5. symplectique si B est une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée satisfaisant :

$$B([\![x,y,z]\!],w) - B(z,[\![x,y,w]\!]) - B(y,[\![z,x,w]\!]) - B(x,[\![y,z,w]\!]) = 0,\ \forall x,y,z,w \in \mathcal{J}. \tag{5.7}$$

Exemple 5.1.7. Soient $\mathcal{J}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et B une forme bilinéaire, symétrique et non-dégénérée. Etant donné une base $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de $\mathcal{J}$, cette forme est définie sur E par :

$$B(e_i, e_j) = \delta_{i,j},$$

où $\delta_{i,j}$ est le delta de Kronecker. De plus, on considère la multiplication ternaire suivante définie sur $\mathcal{J}$ par :

$$[\![x,y,z]\!] = B(y,z)x + B(x,z)y + B(x,y)z.$$

Dans [82], les auteurs ont prouvé que $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ est une algèbre de Jordan ternaire. Soient $\mathcal{J}$ un espace vectoriel de dimension 4 généré par $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ et $[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!] : \otimes^3\mathcal{J} \to \mathcal{J}$ le crochet ternaire donné par :

$$\begin{cases} [\![e_1,e_1,e_1]\!] = 3e_1,\ [\![e_2,e_2,e_2]\!] = 3e_2,\ [\![e_3,e_3,e_3]\!] = 3e_3,\ [\![e_4,e_4,e_4]\!] = 3e_4, \\ [\![e_2,e_2,e_1]\!] = [\![e_3,e_3,e_1]\!] = [\![e_4,e_4,e_1]\!] = e_1, \\ [\![e_1,e_1,e_2]\!] = [\![e_3,e_3,e_2]\!] = [\![e_4,e_4,e_2]\!] = e_2, \\ [\![e_1,e_1,e_3]\!] = [\![e_2,e_2,e_3]\!] = [\![e_4,e_4,e_3]\!] = e_3, \\ [\![e_1,e_1,e_4]\!] = [\![e_2,e_2,e_4]\!] = [\![e_3,e_3,e_4]\!] = e_4, \end{cases}$$

et tous les autres crochets sont nuls. Alors $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ est une algèbre de Jordan ternaire de dimension 4.

5.2 Algèbres de Jordan ternaires cohérentes

Dans cette partie, on introduit la notion de représentation d'une algèbre de Jordan ternaire et on montre que la duale d'une représentation de l'algèbre de Jordan ternaire $\mathcal{J}$ n'est une représentation valide que si $\mathcal{J}$ est une algèbre Jordan ternaire cohérente.

Définition 5.2.1. Une représentation d'une algèbre de Jordan ternaire $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ sur un espace vectoriel V est une application linéaire symétrique $\rho : \otimes^2\mathcal{J} \to \mathfrak{gl}(V)$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} &\bullet\ \rho(x_1,x_2)\rho(x_3,x_4)\rho(x_5,x_6) - \rho(x_3,x_4)\rho(x_1,x_2)\rho(x_5,x_6) \\ &= \rho([ad_{x_1,x_2}, ad_{x_3,x_4}](x_5),x_6) + \rho(x_5,[ad_{x_1,x_2}, ad_{x_3,x_4}](x_6)) \\ &+ \rho(x_5,x_6)\rho(x_1,x_2)\rho(x_3,x_4) - \rho(x_5,x_6)\rho(x_3,x_4)\rho(x_1,x_2), \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} &\bullet\ \rho(x_1, ad_{x_2,x_3}ad_{x_4,x_5}(x_6)) - \rho(x_2,x_3)\rho(x_1, ad_{x_4,x_5}(x_6)) \\ &= \circlearrowleft_{4,5,6} \Big(\rho(x_4,x_5)\rho(x_1, ad_{x_2,x_3}(x_6)) - \rho(x_4,x_5)\rho(x_2,x_3)\rho(x_1,x_6)\Big). \end{aligned} \tag{5.9}$$

pour tout $x_i \in \mathcal{J}, 1 \leq i \leq 6$.

Proposition 5.2.2. *Soit $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ une algèbre de Jordan ternaire. Alors (V,ρ) est une représentation de $\mathcal{J}$ si et seulement si $(\mathcal{J} \oplus V, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathcal{J}\oplus V}$ est une algèbre de Jordan ternaire, où le crochet ternaire $[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathcal{J}\oplus V}$: $\otimes^3(\mathcal{J} \oplus V) \to \mathcal{J} \oplus V$ est donné par :*

$$[\![x_1+v_1, x_2+v_2, x_3+v_3]\!]_{\mathcal{J}\oplus V} = [\![x_1,x_2,x_3]\!] + \rho(x_1,x_2)v_3 + \rho(x_3,x_1)v_2 + \rho(x_2,x_3)v_1 \tag{5.10}$$

pour tout $x_i \in \mathcal{J}, v_i \in V, 1 \leq i \leq 3$. Cette algèbre de Jordan ternaire est appelée produit semi-direct et noté par $\mathcal{J} \ltimes_\rho V$.

Exemple 5.2.3. On définit l'application adjointe $ad : \otimes^2\mathcal{J} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{J}),\ (x,y) \mapsto ad_{x,y} \in \mathfrak{gl}(\mathcal{J})$ par $ad_{x,y}(z) = [\![x,y,z]\!]$, pour tout $x,y,z \in \mathcal{J}$. Alors le couple $(\mathcal{J}, ad)$ est une représentation de $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ sur lui-même, appelée représentation adjointe.

Remarque 5.2.4. Il est bien connu que, dans le cas des algèbres de Jordan $(\mathcal{J}, \circ)$, la représentation duale reste une représentation de $\mathcal{J}$ sans aucune condition []. Ce résultat est faux dans le cas des algèbres de Jordan ternaires.

Soient $\mathcal{J}$ un espace vectoriel et V^* l'espace dual de V. Pour une application linéaire $\rho : \otimes^2\mathcal{J} \to \mathfrak{gl}(V)$, on définit l'application linéaire $\rho^* : \otimes^2\mathcal{J} \to \mathfrak{gl}(V^*)$ par :

$$\langle \rho^*(x,y)\alpha, v\rangle = \langle \alpha, \rho(x,y)v\rangle,\ \forall \alpha \in V^*,\ x,y \in \mathcal{J}, v \in V. \tag{5.11}$$

Proposition 5.2.5. *Soit $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ une algèbre de Jordan ternaire. Si le couple (V,ρ) satisfait* (5.8) *et la nouvelle condition :*

$$\begin{aligned}&\rho(x_1, ad_{x_2,x_3}ad_{x_4,x_5}(x_6)) - \rho(x_1, ad_{x_4,x_5}(x_6))\rho(x_2,x_3)\\ =&\circlearrowleft_{4,5,6}\Big(\rho(x_1, ad_{x_2,x_3}(x_4))\rho(x_5,x_6) - \rho(x_1,x_4)\rho(x_2,x_3)\rho(x_5,x_6)\Big),\end{aligned} \tag{5.12}$$

pour tout $x_i \in \mathcal{J}, 1 \le i \le 6$. Alors (V^*, ρ^*) est une représentation de $\mathcal{J}$ appelée représentation duale.

Preuve 5.2.6. Soient $\alpha \in V^*$ et $v \in V$, on a

$$\begin{aligned}&\langle\Big(\rho^*(x_1,x_2)\rho^*(x_3,x_4)\rho^*(x_5,x_6) - \rho^*(x_3,x_4)\rho^*(x_1,x_2)\rho^*(x_5,x_6) - \rho^*([ad_{x_1,x_2}, ad_{x_3,x_4}](x_5), x_6)\\ &- \rho^*(x_5, [ad_{x_1,x_2}, ad_{x_3,x_4}](x_6)) - \rho^*(x_5,x_6)\rho^*(x_1,x_2)\rho^*(x_3,x_4) + \rho^*(x_5,x_6)\rho^*(x_3,x_4)\rho^*(x_1,x_2)\Big)\alpha, v\rangle\\ =&\langle \alpha, \Big(\rho(x_5,x_6)\rho(x_3,x_4)\rho(x_1,x_2) - \rho(x_5,x_6)\rho(x_1,x_2)\rho(x_3,x_4) - \rho([ad_{x_1,x_2}, ad_{x_3,x_4}](x_5), x_6)\\ &- \rho(x_5, [ad_{x_1,x_2}, ad_{x_3,x_4}](x_6)) - \rho(x_3,x_4)\rho(x_1,x_2)\rho(x_5,x_6) + \rho(x_1,x_2)\rho(x_3,x_4)\rho(x_5,x_6)\Big)v\rangle,\end{aligned}$$

de plus, on a

$$\begin{aligned}&\langle\Big(\rho^*(x_1, ad_{x_2,x_3}ad_{x_4,x_5}(x_6)) - \rho^*(x_2,x_3)\rho^*(x_1, ad_{x_4,x_5}(x_6)) - \rho^*(x_4,x_5)\rho^*(x_1, ad_{x_2,x_3}(x_6))\\ &+ \rho^*(x_4,x_5)\rho^*(x_2,x_3)\rho^*(x_1,x_6) - \rho^*(x_5,x_6)\rho^*(x_1, ad_{x_2,x_3}(x_4)) + \rho^*(x_5,x_6)\rho^*(x_2,x_3)\rho^*(x_1,x_4)\\ &- \rho^*(x_6,x_4)\rho^*(x_1, ad_{x_2,x_3}(x_5)) + \rho^*(x_6,x_4)\rho^*(x_2,x_3)\rho^*(x_1,x_5)\Big)\alpha, v\rangle\\ =&\langle \alpha, \Big(\rho(x_1, ad_{x_2,x_3}ad_{x_4,x_5}(x_6)) - \rho(x_1, ad_{x_4,x_5}(x_6))\rho(x_2,x_3) - \rho(x_1, ad_{x_2,x_3}(x_6))\rho(x_4,x_5)\\ &+ \rho(x_1,x_6)\rho(x_2,x_3)\rho(x_4,x_5) - \rho(x_1, ad_{x_2,x_3}(x_4))\rho(x_5,x_6) + \rho(x_1,x_4)\rho(x_2,x_3)\rho(x_5,x_6)\\ &- \rho(x_1, ad_{x_2,x_3}(x_5))\rho(x_5,x_4) + \rho(x_1,x_5)\rho(x_2,x_3)\rho(x_6,x_4)\Big)v\rangle\\ =&\langle \alpha, \Big(\rho(x_1, ad_{x_2,x_3}ad_{x_4,x_5}(x_6)) - \rho(x_1, ad_{x_4,x_5}(x_6))\rho(x_2,x_3)\\ &- \Big(\circlearrowleft_{4,5,6}\rho(x_1, ad_{x_2,x_3}(x_4))\rho(x_5,x_6) - \rho(x_1,x_4)\rho(x_2,x_3)\rho(x_5,x_6)\Big)\Big)v\rangle.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Soient $\mathcal{J}$ un espace vectoriel et $\mathcal{J}^*$ son espace dual. On définit l'application linéaire $ad^* : \otimes^2\mathcal{J} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{J}^*)$ par :

$$\langle ad^*_{x,y}\xi, z\rangle = \langle \xi, ad_{x,y}z\rangle = \langle \xi, [\![x,y,z]\!]\rangle,\ \forall \xi \in \mathcal{J}^*,\ x,y,z \in \mathcal{J}. \tag{5.13}$$

Exemple 5.2.7. Soient $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ une algèbre de Jordan ternaire et $(\mathcal{J}, ad)$ une représentation adjointe. De plus, si l'algèbre de Jordan ternaire $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ satisfait également la relation suivante :

$$\begin{aligned}&[\![x_1, [\![x_2,x_3,[\![x_4,x_5,x_6]\!]]\!], x_7]\!] - [\![x_1, [\![x_4,x_5,x_6]\!], [\![x_2,x_3,x_7]\!]]\!]\\ =&\circlearrowleft_{4,5,6}\Big([\![x_1, [\![x_2,x_3,x_4]\!], [\![x_5,x_6,x_7]\!]]\!] - [\![x_1,x_4,[\![x_2,x_3,[\![x_5,x_6,x_7]\!]]\!]]\!]\Big).\end{aligned} \tag{5.14}$$

Alors $(\mathcal{J}^*, ad^*)$ est une représentation de $\mathcal{J}$ appelée représentation co-adjointe.

Définition 5.2.8. Une algèbre de Jordan ternaire cohérente est une algèbre de Jordan ternaire telle que la condition (5.14) est satisfaite.

Proposition 5.2.9. *Soit $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ une algèbre de Jordan ternaire. Supposons qu'il existe une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée B telle que B soit invariante. Alors $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ est une algèbre de Jordan ternaire cohérente.*

Preuve 5.2.10. Par l'invariance de B, on a

$$\begin{aligned}B([\![x_1,[\![x_2,x_3,x_4]\!],[\![x_5,x_6,x_7]\!]]\!],w) &= B([\![x_5,x_6,x_7]\!],[\![x_1,[\![x_2,x_3,x_4]\!],w]\!])\\ &= B(x_7,[\![x_5,x_6,[\![x_1,w,[\![x_2,x_3,x_4]\!]]\!]]\!]),\ \forall x_1,\cdots,x_7,w \in \mathcal{J}.\end{aligned}$$

En utilisant la relation précédente, on obtient que

$$\begin{aligned}&B\Big([\![x_1,x_7,[\![x_2,x_3,[\![x_4,x_5,x_6]\!]]\!]]\!] - [\![x_1,[\![x_4,x_5,x_6]\!],[\![x_2,x_3,x_7]\!]]\!]\\ &- \Big(\circlearrowleft_{4,5,6}\Big([\![x_1,[\![x_2,x_3,x_4]\!],[\![x_5,x_6,x_7]\!]]\!] - [\![x_1,x_4,[\![x_2,x_3,[\![x_5,x_6,x_7]\!]]\!]]\!]\Big)\Big),w\Big)\\ =&B\Big(x_7,[\![x_1,w,[\![x_2,x_3,[\![x_4,x_5,x_6]\!]]\!]]\!] - [\![x_2,x_3,[\![x_1,w,[\![x_4,x_5,x_6]\!]]\!]]\!] - [\![[\![x_1,w,[\![x_2,x_3,x_4]\!]]\!],x_5,x_6]\!]\\ &+ [\![[\![x_2,x_3,[\![x_1,w,x_4]\!]]\!],x_5,x_6]\!] - [\![x_4,[\![x_1,w,[\![x_2,x_3,x_5]\!]]\!],x_6]\!] + [\![x_4,[\![x_2,x_3,[\![x_1,w,x_5]\!]]\!],x_6]\!]\\ &- [\![x_4,x_5,[\![x_1,w,[\![x_2,x_3,x_6]\!]]\!]]\!] + [\![x_4,x_5,[\![x_2,x_3,[\![x_1,w,x_6]\!]]\!]]\!]\Big).\end{aligned}$$

Par le fait que $\mathcal{J}$ est une algèbre de Jordan ternaire et que B est non-dégénéré, on déduit que la condition (5.14) est vérifiée. Ainsi $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ est une algèbre de Jordan ternaire cohérente.

5.3 Équation de Yang-Baxter de Jordan ternaire : Définition et solutions

Dans cette section, on introduit la notion d'équation de Yang-Baxter pour une algèbre de Jordan ternaire, qui peut être considérée comme une généralisation naturelle de l'équation Yang-Baxter de Jordan binaire introduite dans [54]. Par la suite, on étudie le concept d'opérateur de Rota-Baxter relatif sur une algèbre de Jordan ternaire, qui fournit une solution antisymétrique à l'équation de Yang-Baxter dans un produit semi-direct d'une algèbre de Jordan ternaire cohérente (Théorème 5.3.13).

5.3.1 Équation de Yang-Baxter de Jordan ternaire (EYBJ)

Soient $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ une algèbre de Jordan ternaire et $r = \sum_i x_i \otimes y_i \in \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$. On définit

$$\begin{aligned}r_{12} &= \sum_i x_i \otimes y_i \otimes 1 \otimes 1 \in \mathcal{J}^{\otimes 4}, \quad r_{13} = \sum_i x_i \otimes 1 \otimes y_i \otimes 1 \in \mathcal{J}^{\otimes 4}, \quad r_{14} = \sum_i x_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes y_i \in \mathcal{J}^{\otimes 4},\\ r_{23} &= \sum_i 1 \otimes x_i \otimes y_i \otimes 1 \in \mathcal{J}^{\otimes 4}, \quad r_{24} = \sum_i 1 \otimes x_i \otimes 1 \otimes y_i \in \mathcal{J}^{\otimes 4}, \quad r_{34} = \sum_i 1 \otimes 1 \otimes x_i \otimes y_i \in \mathcal{J}^{\otimes 4},\end{aligned}$$

où 1 est un élément unitaire si $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ est une algèbre unitale ou un symbole jouant un rôle similaire à l'unité pour les cas non-unitaires. L'opération entre trois r_{ij} se fait de la manière suivante :

$$\begin{aligned}[\![r_{12},r_{13},r_{14}]\!] &= \sum_{i,j,k} [\![x_i,x_j,x_k]\!] \otimes y_i \otimes y_j \otimes y_k,\\ [\![r_{12},r_{23},r_{24}]\!] &= \sum_{i,j,k} x_i \otimes [\![y_i,x_j,x_k]\!] \otimes y_j \otimes y_k,\\ [\![r_{13},r_{23},r_{34}]\!] &= \sum_{i,j,k} x_i \otimes x_j \otimes [\![y_i,y_j,x_k]\!] \otimes y_k,\\ [\![r_{14},r_{24},r_{34}]\!] &= \sum_{i,j,k} x_i \otimes x_j \otimes x_k \otimes [\![y_i,y_j,y_k]\!]. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Notons que l'équation (5.15) est indépendante de l'existence de l'unité. En outre, on définit un opérateur d'échange $\sigma_{12} : \mathcal{J} \otimes \mathcal{J} \to \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$ par :

$$\sigma_{12}(x \otimes y) = y \otimes x,\ \forall x,y \in \mathcal{J}. \tag{5.16}$$

Définition 5.3.1. Soit $\mathcal{J}$ une algèbre de Jordan ternaire et $r \in \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$. L'équation

$$[[r_{12}, r_{13}, r_{14}]] - [[r_{12}, r_{23}, r_{24}]] + [[r_{13}, r_{23}, r_{34}]] - [[r_{14}, r_{24}, r_{34}]] = 0 \tag{5.17}$$

est appelée la forme standard de l'équation de Yang-Baxter de Jordan ternaire (EYBJ).

Remarque 5.3.2. Cette équation peut être considérée comme une généralisation naturelle de l'équation Yang-Baxter de Jordan binaire :

$$r_{12} \circ r_{13} + r_{13} \circ r_{23} - r_{12} \circ r_{23} = 0$$

au contexte de l'algèbre de Jordan ternaire. Voir [54] pour plus de détails.

Soit $\mathcal{J}$ un espace vectoriel, tout élément $r \in \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$ peut être identifié comme une application linéaire de l'espace dual $\mathcal{J}^*$ vers $\mathcal{J}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \langle \xi \otimes \eta, r \rangle &= \langle \xi \otimes \eta, \sum_i x_i \otimes y_i \rangle \\ &= \sum_i \langle \xi, x_i \rangle \langle \eta, y_i \rangle = \langle \xi, r(\eta) \rangle, \ \forall \xi, \eta \in \mathcal{J}^*, \end{aligned} \tag{5.18}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{J}^* \times \mathcal{J} \to \mathbb{K}$ est le crochet dual ordinaire entre l'espace vectoriel $\mathcal{J}$ et l'espace dual $\mathcal{J}^*$, ce qui nous permet d'identifier $\mathcal{J}$ avec $\mathcal{J}^*$ par la relation suivante :

$$\xi(x) = \langle \xi, x \rangle = \langle x, \xi \rangle, \ \forall \xi \in \mathcal{J}^*, x \in \mathcal{J}.$$

Le tenseur $r \in \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$ est dit non-dégénéré si l'application linéaire induite donnée par l'équation (5.18) est inversible. De plus, toute application linéaire inversible $T : \mathcal{J}^* \to \mathcal{J}$ induit une forme bilinéaire non-dégénérée B sur $\mathcal{J}$ par :

$$B(x, y) = \langle T^{-1}(x), y \rangle, \ \forall x, y \in \mathcal{J}. \tag{5.19}$$

De plus, T est appelé symétrique (respectivement anti-symétrique) si la forme bilinéaire induite B est symétrique (respectivement anti-symétrique). Puisque T peut aussi être considéré comme un élément de $\mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$ par l'équation (5.18), alors les propriétés de symétrie ou d'anti-symétrie de T coïncident évidemment.

Proposition 5.3.3. *Soit $(\mathcal{J}, [[\cdot, \cdot, \cdot]])$ une algèbre de Jordan ternaire cohérente et $r \in \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$ soit anti-symétrique. Alors r est une solution de l'EYBJ ternaire si et seulement si r satisfait*

$$[[r(\xi), r(\eta), r(\gamma)]] = r\Big(ad^*_{r(\xi), r(\eta)}(\gamma) + ad^*_{r(\eta), r(\gamma)}(\xi) + ad^*_{r(\gamma), r(\xi)}(\eta)\Big), \ \forall \xi, \eta, \gamma \in \mathcal{J}^*. \tag{5.20}$$

Preuve 5.3.4. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de $\mathcal{J}$ et $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ sa base duale. Puisque r est anti-symétrique, on peut définir

$$r = \sum_{ij} a_{ij} e_i \otimes e_j, \quad where \quad a_{ij} = -a_{ji}.$$

ainsi

$$[[e_i, e_j, e_k]] = \sum_{m=1}^{n} C_{ijk}^m e_m,$$

Où C_{ijk}^m sont les coefficients de structure de l'algèbre de Jordan ternaire $\mathcal{J}$ sur la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} [[r_{12}, r_{13}, r_{14}]] &= \Big[\Big[\sum_{i,j} a_{ij} e_i \otimes e_j \otimes 1 \otimes 1, \sum_{p,q} a_{pq} e_p \otimes 1 \otimes e_q \otimes 1, \sum_{s,t} a_{st} e_s \otimes 1 \otimes 1 \otimes e_t\Big]\Big] \\ &= \sum_{i,j,p,q,s,t} C_{ips}^m a_{ij} a_{pq} a_{st} e_m \otimes e_j \otimes e_q \otimes e_t, \\ [[r_{12}, r_{23}, r_{24}]] &= \Big[\Big[\sum_{i,j} a_{ij} e_i \otimes e_j \otimes 1 \otimes 1, \sum_{p,q} a_{pq} 1 \otimes e_p \otimes e_q \otimes 1, \sum_{s,t} a_{st} 1 \otimes e_s \otimes 1 \otimes e_t\Big]\Big] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j,p,q,s,t} C_{jps}^{m} a_{ij} a_{pq} a_{st} e_i \otimes e_m \otimes e_q \otimes e_t,\\
[[r_{13}, r_{23}, r_{34}]] &= \Big[\Big[\sum_{i,j} a_{ij} e_i \otimes 1 \otimes e_j \otimes 1, \sum_{p,q} a_{pq} 1 \otimes e_p \otimes e_q \otimes 1, \sum_{s,t} a_{st} 1 \otimes 1 \otimes e_s \otimes e_t \Big]\Big]\\
&= \sum_{i,j,p,q,s,t} C_{jqs}^{m} a_{ij} a_{pq} a_{st} e_i \otimes e_p \otimes e_m \otimes e_t,\\
[[r_{14}, r_{24}, r_{34}]] &= \Big[\Big[\sum_{i,j} a_{ij} e_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes e_j, \sum_{p,q} a_{pq} 1 \otimes e_p \otimes 1 \otimes e_q, \sum_{s,t} a_{st} 1 \otimes 1 \otimes e_s \otimes e_t \Big]\Big]\\
&= \sum_{i,j,p,q,s,t} C_{jqt}^{m} a_{ij} a_{pq} a_{st} e_i \otimes e_p \otimes e_s \otimes e_m.
\end{aligned}
$$

Alors r est une solution de l'EYBJ ternaire si et seulement si

$$
\sum_{i,p,s} \Big(C_{ips}^{m} a_{ij} a_{pq} a_{st} - C_{ips}^{j} a_{mi} a_{pq} a_{st} + C_{pis}^{q} a_{mp} a_{ji} a_{st} - C_{sip}^{t} a_{ms} a_{ji} a_{qp} \Big) e_m \otimes e_j \otimes e_q \otimes e_t = 0, \ (1 \leq m \leq n).
$$

En revanche, par l'équation (5.18), on obtient

$$
r(e_j^*) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i = - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} e_i, \quad 1 \leq j \leq n.
$$

Alors r est une solution de l'EYBJ ternaire si et seulement si (pour tout m, j, q, t) et pour $\xi = e_j^*$, $\eta = e_q^*$, $\gamma = e_t^*$

$$
\sum_{i,p,s} \Big(C_{ips}^{m} a_{ij} a_{pq} a_{st} - C_{ips}^{j} a_{mi} a_{pq} a_{st} + C_{pis}^{q} a_{mp} a_{ji} a_{st} - C_{sip}^{t} a_{ms} a_{ji} a_{qp} \Big) = 0.
$$

La partie gauche de l'équation ci-dessus est simplement le coefficient de e_m dans l'expression suivante

$$
-r\Big(ad^*_{r(\xi), r(\eta)}(\gamma) + ad^*_{r(\eta), r(\gamma)}(\xi) + ad^*_{r(\gamma), r(\xi)}(\eta) \Big) + [[r(\xi), r(\eta), r(\gamma)]].
$$

D'où le résultat.

5.3.2 EYBJ ternaire et opérateurs de Rota-Baxter relatifs

Dans cette partie, on étudie les opérateurs de Rota-Baxter relatifs appliqués aux algèbres de Jordan ternaires, dans le but de formuler des solutions à l'équation de Yang-Baxter de Jordan ternaire.

Définition 5.3.5. Soit $(\mathcal{J}, [[\cdot,\cdot,\cdot]])$ une algèbre de Jordan ternaire. Un opérateur de Rota-Baxter sur $\mathcal{J}$ (de poids zéro) est une application linéaire $R : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ satisfaisant

$$
[[R(x), R(y), R(z)]] = R\Big([[R(x), R(y), z]] + [[R(x), y, R(z)]] + [[x, R(y), R(z)]] \Big),
$$

pour tout $x, y, z \in \mathcal{J}$.

Soit $r \in \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$ anti-symétrique. Supposons qu'il existe une forme bilinéaire invariante non-dégénérée B sur $\mathcal{J}$ et on définit l'application linéaire $\phi : \mathcal{J} \to \mathcal{J}^*$ par :

$$
\langle \phi(x), y \rangle = B(x, y), \ \forall x, y \in \mathcal{J}.
$$

Proposition 5.3.6. *Soit $(\mathcal{J}, [[\cdot,\cdot,\cdot]])$ une algèbre de Jordan ternaire cohérente. Alors r est une solution de l'EYBJ ternaire si et seulement si $r\phi$ est un opérateur de Rota-Baxter (de poids zéro) sur $\mathcal{J}$.*

Preuve 5.3.7. En fait, $\phi(ad_{x,y}(z)) = ad^*_{x,y}(\phi(z))$, pour tout $x, y, z \in \mathcal{J}$, puisque

$$
\begin{aligned}
\langle \phi(ad_{x,y}(z)), w \rangle &= B([[x, y, z]], w) = B(z, [[x, y, w]])\\
&= \langle \phi(z), ad_{x,y}(w) \rangle = \langle ad^*_{x,y}(\phi(z)), w \rangle, \ \forall x, y, z, w \in \mathcal{J}.
\end{aligned}
$$

Autrement dit, les représentations $(ad,\mathcal{J})$ et $(ad^*,\mathcal{J}^*)$ sont isomorphes. Soit $\xi=\phi(x)$, $\eta=\phi(y)$, $\gamma=\phi(z)$, alors d'après la Proposition 5.3.3, r est une solution de l'EYBJ ternaire si et seulement si

$$\begin{aligned}
[\![r\phi(x),r\phi(y),r\phi(z)]\!] &= [\![r(\xi),r(\eta),r(\gamma)]\!]\\
&= r\Big(ad^*_{r(\xi),r(\eta)}(\gamma)+ad^*_{r(\eta),r(\gamma)}(\xi)+ad^*_{r(\gamma),r(\xi)}(\eta)\Big)\\
&= r\phi\Big([\![r\phi(x),r\phi(y),z]\!]+[\![r\phi(x),y,r\phi(z)]\!]+[\![x,r\phi(y),r\phi(z)]\!]\Big),
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

Dans la suite, on donne une interprétation des solutions anti-symétriques inversibles de l'EYBJ ternaire.

Proposition 5.3.8. *Soit $(\mathcal{J},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ une algèbre de Jordan ternaire cohérente et $r\in\mathcal{J}\otimes\mathcal{J}$. Supposons que r soit anti-symétrique et non-dégénérée. Alors r est une solution de l'EYBJ ternaire si et seulement si la forme bilinéaire anti-symétrique non-dégénérée B sur $\mathcal{J}$ définie par :*

$$B(x,y)=\langle r^{-1}(x),y\rangle,\ \forall x,y\in\mathcal{J},$$

vérifie

$$B([\![x,y,z]\!],w)-B(z,[\![x,y,w]\!])-B(y,[\![z,x,w]\!])-B(x,[\![y,z,w]\!])=0,\ \forall x,y,z,w\in\mathcal{J}. \tag{5.21}$$

Preuve 5.3.9. Pour tout $x,y,z,w\in\mathcal{J}$. Puisque r est non-dégénéré, il existe $\xi,\eta,\gamma,\beta\in\mathcal{J}^*$ tel que $r(\xi)=x$, $r(\eta)=y$, $r(\gamma)=z$, $r(\beta)=w$. Par l'équation (5.20), on a

$$\begin{aligned}
B([\![x,y,z]\!],w) &= \langle r^{-1}[\![r(\xi),r(\eta),r(\gamma)]\!],w\rangle\\
&= \langle ad^*_{r(\xi),r(\eta)}(\gamma)+ad^*_{r(\eta),r(\gamma)}(\xi)+ad^*_{r(\gamma),r(xi)}(\eta),w\rangle\\
&= \langle\gamma,[\![x,y,w]\!]\rangle+\langle\xi,[\![y,z,w]\!]\rangle+\langle\eta,[\![z,x,w]\!]\rangle\\
&= B(z,[\![x,y,w]\!])+B(x,[\![y,z,w]\!])+B(y,[\![z,x,w]\!]).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

On introduit maintenant la notion d'opérateur de Rota-Baxter relatif pour une algèbre de Jordan ternaire.

Définition 5.3.10. Soit $(\mathcal{J},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ une algèbre de Jordan ternaire et (V,ρ) une représentation. Un opérateur linéaire $T:V\to\mathcal{J}$ est appelé opérateur de Rora-Baxter relatif associé à (V,ρ) s'il satisfait

$$[\![Tu,Tv,Tw]\!]=T\big(\rho(Tu,Tv)w+\rho(Tv,Tw)u+\rho(Tu,Tw)v\big),\quad \forall u,v,w\in V. \tag{5.22}$$

Exemple 5.3.11. Soit $\mathcal{J}$ une algèbre de Jordan ternaire cohérente et $r\in\mathcal{J}\otimes\mathcal{J}$. Supposons que r est anti-symétrique. Alors r est une solution de l'EYBJ ternaire si et seulement si r est un opérateur de Rota-Baxter relatif de $\mathcal{J}$ associé à la représentation co-adjointe $(\mathcal{J}^*,ad^*)$.

Exemple 5.3.12. Soit $\mathcal{J}$ une algèbre de Jordan ternaire. Un opérateur de Rota-Baxter relatif de $\mathcal{J}$ associé à la représentation adjointe $(\mathcal{J},ad)$ est appelé opérateur de Rota-Baxter de poids zéro.

Théorème 5.3.13. *Soit $(\mathcal{J},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ une algèbre de Jordan ternaire cohérente. Soient (V,ρ) une représentation de $\mathcal{J}$ et (V^*,ρ^*) sa représentation duale. Alors T est un opérateur de Rota-Baxter relatif de $\mathcal{J}$ associé à (V,ρ) si et seulement si*

$$r=T-\sigma_{12}(T)$$

est une solution anti-symétrique d l'EYBJ ternaire associée au produit semi-direct $\mathcal{J}\ltimes_{\rho^*}V^*$ qui a une structure d'algèbre de Jordan ternaire cohérente.

Preuve 5.3.14. Soient $\{e_1,\cdots,e_n\}$ une base de $\mathcal{J}$, $\{v_1,\cdots,v_p\}$ une base de V et $\{v_1^*,\cdots,v_p^*\}$ sa base duale. On pose

$$T(v_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j,\quad i=1,\cdots,p.$$

Puisque $Hom(V,\mathcal{J})\cong\mathcal{J}\otimes V^*$, on peut identifier un élément $T\in Hom(V;\mathcal{J})$ avec l'élément

$$T=\sum_{i=1}^{p}T(v_i)\otimes v_i^*=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j\otimes v_i^*\in\mathcal{J}\otimes V^*\subset(\mathcal{J}\ltimes_{\rho^*}V^*)\otimes(\mathcal{J}\ltimes_{\rho^*}V^*). \tag{5.23}$$

Par conséquent, on a

$$r=T-\sigma_{12}(T)=\sum_{i=1}^{p}T(v_i)\otimes v_i^*-\sum_{i=1}^{p}v_i^*\otimes T(v_i).$$

Ensuite, on définit les opérations entre les r_{ij} par :

$$\begin{cases}r_{12}=\sum_{i=1}^{p}T(v_i)\otimes v_i^*\otimes 1\otimes 1-\sum_{i=1}^{p}v_i^*\otimes T(v_i)\otimes 1\otimes 1\\ r_{13}=\sum_{i=1}^{p}T(v_i)\otimes 1\otimes v_i^*\otimes 1-\sum_{i=1}^{p}v_i^*\otimes 1\otimes T(v_i)\otimes 1\\ r_{14}=\sum_{i=1}^{p}T(v_i)\otimes 1\otimes 1\otimes v_i^*-\sum_{i=1}^{p}v_i^*\otimes 1\otimes 1\otimes T(v_i)\\ r_{23}=\sum_{i=1}^{p}1\otimes T(v_i)\otimes v_i^*\otimes 1-\sum_{i=1}^{p}1\otimes v_i^*\otimes T(v_i)\otimes 1\\ r_{24}=\sum_{i=1}^{p}1\otimes T(v_i)\otimes 1\otimes v_i^*-\sum_{i=1}^{p}1\otimes v_i^*\otimes 1\otimes T(v_i)\\ r_{34}=\sum_{i=1}^{p}1\otimes 1\otimes T(v_i)\otimes v_i^*-\sum_{i=1}^{p}1\otimes 1\otimes v_i^*\otimes T(v_i)\end{cases}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}[[r_{12},r_{13},r_{14}]]=\sum_{i,j,k}\Big(&[[Tv_i,Tv_j,Tv_k]]\otimes v_i^*\otimes v_j^*\otimes v_k^*-\rho^*(Tv_i,Tv_k)v_j^*\otimes v_i^*\otimes T(v_j)\otimes v_k^*\\&-\rho^*(Tv_i,Tv_j)v_k^*\otimes v_i^*\otimes v_j^*\otimes T(v_k)-\rho^*(Tv_j,Tv_k)v_i^*\otimes T(v_i)\otimes v_j^*\otimes v_k^*\Big),\\ [[r_{12},r_{23},r_{24}]]=\sum_{i,j,k}\Big(&-v_i^*\otimes[[Tv_i,Tv_j,Tv_k]]\otimes v_j^*\otimes v_k^*+T(v_i)\otimes\rho^*(Tv_j,Tv_k)v_i^*\otimes v_j^*\otimes v_k^*\\&+v_i^*\otimes\rho^*(Tv_i,Tv_j)v_k^*\otimes v_j^*\otimes T(v_k)+v_i^*\otimes\rho^*(Tv_i,Tv_k)v_j^*\otimes T(v_j)\otimes v_k^*\Big),\\ [[r_{13},r_{23},r_{34}]]=\sum_{i,j,k}\Big(&v_i^*\otimes v_j^*\otimes[[Tv_i,Tv_j,Tv_k]]\otimes v_k^*-T(v_i)\otimes v_j^*\otimes\rho^*(Tv_j,Tv_k)v_i^*\otimes v_k^*\\&-v_i^*\otimes T(v_j)\otimes\rho^*(Tv_i,Tv_k)v_j^*\otimes v_k^*-v_i^*\otimes v_j^*\otimes\rho^*(Tv_i,Tv_j)v_k^*\otimes T(v_k)\Big),\\ [[r_{14},r_{24},r_{34}]]=\sum_{i,j,k}\Big(&T(v_i)\otimes v_j^*\otimes v_k^*\otimes\rho^*(Tv_j,Tv_k)v_i^*-v_i^*\otimes v_j^*\otimes v_k^*\otimes[[Tv_i,Tv_j,Tv_k]]\\&+v_i^*\otimes T(v_j)\otimes v_k^*\otimes\rho^*(Tv_i,Tv_k)v_j^*+v_i^*\otimes v_j^*\otimes T(v_k)\otimes\rho^*(Tv_i,Tv_j)v_k^*\Big).\end{aligned}$$

On pose

$$F(u,v,w)=[[Tu,Tv,Tw]]-T\Big(\rho(Tu,Tv)w+\rho(Tv,Tw)u+\rho(Tw,Tu)v\Big),\ \forall u,v,w\in V.$$

Par la définition de la représentation duale, on sait que

$$\rho^*(Tv_j,Tv_k)v_i^*=\sum_m\langle\rho^*(Tv_j,Tv_k)v_i^*,v_m\rangle v_m^*=\sum_m\langle v_i^*,\rho(Tv_j,Tv_k)v_m\rangle v_m^*.$$

Donc

$$\sum_{i,j,k}T(v_i)\otimes\rho^*(Tv_j,Tv_k)v_i^*\otimes v_j^*\otimes v_k^*=\sum_{i,j,k}T(v_i)\otimes\sum_m\langle\rho(Tv_j,Tv_k)v_m,v_i^*\rangle v_m^*\otimes v_j^*\otimes v_k^*$$

$$= \sum_{m,j,k} T(\rho(Tv_j, Tv_k)v_m) \otimes v_m^* \otimes v_j^* \otimes v_k^*.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
&[[r_{12}, r_{13}, r_{14}]] - [[r_{12}, r_{23}, r_{24}]] + [[r_{13}, r_{23}, r_{34}]] - [[r_{14}, r_{24}, r_{34}]] \\
&= \sum_{i,j,k} \Big(F(v_i, v_j, v_k) \otimes v_i^* \otimes v_j^* \otimes v_k^* + v_i^* \otimes F(v_i, v_j, v_k) \otimes v_j^* \otimes v_k^* \\
&+ v_i^* \otimes v_j^* \otimes F(v_i, v_j, v_k) \otimes v_k^* + v_i^* \otimes v_j^* \otimes v_k^* \otimes F(v_i, v_j, v_k) \Big).
\end{aligned}$$

Par conséquent, r satisfait l'EYBJ ternaire, c'est-à-dire,

$$[[r_{12}, r_{13}, r_{14}]] - [[r_{12}, r_{23}, r_{24}]] + [[r_{13}, r_{23}, r_{34}]] - [[r_{14}, r_{24}, r_{34}]] = 0$$

si et seulement si $F(v_i, v_j, v_k) = 0$ pour tout i, j, k, c'est-à-dire, que T est un opérateur de Rota-Baxter relatif.

En combinant la Proposition 5.3.3 et le Théorème 5.3.13, on obtient la conclusion suivante.

Corollaire 5.3.15. *Soit $(\mathcal{J}, [[\cdot,\cdot,\cdot]])$ une algèbre de Jordan ternaire cohérente. Soient $\widehat{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \ltimes_{\rho^*} V^*$ et $T : V \to \mathcal{J}$ une application linéaire. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est un opérateur de Rota-Baxter relatif associé à la représentation (V, ρ).*
2. *$T - \sigma_{12}(T)$ est une solution anti-symétrique de l'EYBJ ternaire dans l'algèbre de Jordan ternaire cohérente $\widehat{\mathcal{J}}$.*
3. *$T - \sigma_{12}(T)$ est un opérateur de Rota-Baxter relatif de l'algèbre de Jordan ternaire cohérente $\widehat{\mathcal{J}}$ associé à la représentation $(\widehat{\mathcal{J}}^*, ad^*_{\widehat{\mathcal{J}}})$.*

5.4 Algèbres pre-Jordan ternaires

Dans ce paragraphe, on introduit la notion d'algèbre pre-Jordan ternaire, qui constitue la version ternaire de l'algèbre pre-Jordan présentée dans [54]. On propose ensuite quelques constructions basées sur un opérateur de Rota-Baxter relatif et une forme symplectique. En particulier, on décrit une méthode de construction de solutions de l'équation de Yang-Baxter ternaire dans certaines algèbres de Jordan ternaires spéciales, obtenues à partir d'algèbres pre-Jordan ternaires.

5.4.1 Définition et propriétés

Définition 5.4.1. Une algèbre pre-Jordan ternaire est un couple $(\mathcal{J}, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ constitué d'un espace vectoriel $\mathcal{J}$ et d'une application 3-linèaire $\{\cdot,\cdot,\cdot\} : \otimes^3 \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ satisfaisant les trois identités suivantes :

$$\{x, y, z\} = \{y, x, z\}, \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
&\{x_1, x_2, \{x_3, x_4, \{x_5, x_6, x_7\}\}\} - \{x_3, x_4, \{x_1, x_2, \{x_5, x_6, x_7\}\}\} \\
&= \{[[x_1, x_2, [[x_3, x_4, x_5]]^C]]^C, x_6, x_7\} - \{[[x_3, x_4, [[x_1, x_2, x_5]]^C]]^C, x_6, x_7\} + \{[[x_1, x_2, [[x_3, x_4, x_6]]^C]]^C, x_5, x_7\} \\
&- \{[[x_3, x_4, [[x_1, x_2, x_6]]^C]]^C, x_5, x_7\} + \{x_5, x_6, \{x_1, x_2, \{x_3, x_4, x_7\}\}\} - \{x_5, x_6, \{x_3, x_4, \{x_1, x_2, x_7\}\}\},
\end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
&\{x_1, [[x_2, x_3, [[x_4, x_5, x_6]]^C]]^C, x_7\} - \{x_2, x_3, \{x_1, [[x_4, x_5, x_6]]^C, x_7\}\} \\
&= \{x_5, x_6, \{x_1, [[x_2, x_3, x_4]]^C, x_7\}\} - \{x_5, x_6, \{x_2, x_3, \{x_1, x_4, x_7\}\}\} + \{x_4, x_6, \{x_1, [[x_2, x_3, x_5]]^C, x_7\}\} \\
&- \{x_4, x_6, \{x_2, x_3, \{x_1, x_5, x_7\}\}\} + \{x_4, x_5, \{x_1, [[x_2, x_3, x_6]]^C, x_7\}\} - \{x_4, x_5, \{x_2, x_3, \{x_1, x_6, x_7\}\}\},
\end{aligned} \tag{5.26}$$

où $x, y, z, x_i \in \mathcal{J}, 1 \leq i \leq 7$ et $[[\cdot,\cdot,\cdot]]^C$ est défini par :

$$[[x, y, z]]^C = \{x, y, z\} + \{y, z, x\} + \{z, x, y\}, \quad \forall x, y, z \in \mathcal{J}. \tag{5.27}$$

Proposition 5.4.2. *Soit $(\mathcal{J},\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ une algèbre pre-Jordan ternaire. Alors le commutateur donné par l'équation* (5.27) *définit une structure d'algèbre de Jordan ternaire sur $\mathcal{J}$.*

Preuve 5.4.3. Par l'équation (5.24), il est simple de vérifier que $\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket^C$ est commutative. De plus, pour tout $x_i \in \mathcal{J}, 1 \leq i \leq 7$ et en utilisant les deux équations (5.24)-(5.26), on a

$$\begin{aligned}
&\llbracket x_1,x_2,\llbracket x_3,x_4,\llbracket x_5,x_6,x_7\rrbracket^C\rrbracket^C\rrbracket^C - \llbracket x_3,x_4,\llbracket x_1,x_2,\llbracket x_5,x_6,x_7\rrbracket^C\rrbracket^C\rrbracket^C - \llbracket\llbracket x_1,x_2,\llbracket x_3,x_4,x_5\rrbracket^C\rrbracket^C,x_6,x_7\rrbracket^C\\
&+\llbracket\llbracket x_3,x_4,\llbracket x_1,x_2,x_5\rrbracket^C\rrbracket^C,x_6,x_7\rrbracket^C - \llbracket x_5,\llbracket x_1,x_2,\llbracket x_3,x_4,x_6\rrbracket^C\rrbracket^C,x_7\rrbracket^C + \llbracket x_5,\llbracket x_3,x_4,\llbracket x_1,x_2,x_6\rrbracket^C\rrbracket^C,x_7\rrbracket^C\\
&-\llbracket x_5,x_6,\llbracket x_1,x_2,\llbracket x_3,x_4,x_7\rrbracket^C\rrbracket^C\rrbracket^C + \llbracket x_5,x_6,\llbracket x_3,x_4,\llbracket x_1,x_2,x_7\rrbracket^C\rrbracket^C\rrbracket^C\\
=&\{x_1,x_2,\{x_3,x_4,\{x_5,x_6,x_7\}\}\} + \{x_1,x_2,\{x_3,x_4,\{x_6,x_7,x_5\}\}\} + \{x_1,x_2,\{x_3,x_4,\{x_7,x_5,x_6\}\}\}\\
&+\{x_1,x_2,\{x_4,\llbracket x_5,x_6,x_7\rrbracket^C,x_3\}\} + \{x_1,x_2,\{\llbracket x_5,x_6,x_7\rrbracket^C,x_3,x_4\}\} + \{x_2,\llbracket x_3,x_4,\llbracket x_5,x_6,x_7\rrbracket^C\rrbracket^C,x_1\}\\
&+\{\llbracket x_3,x_4,\llbracket x_5,x_6,x_7\rrbracket^C\rrbracket^C,x_1,x_2\} - \{x_3,x_4,\{x_1,x_2,\{x_5,x_6,x_7\}\}\} - \{x_3,x_4,\{x_1,x_2,\{x_6,x_7,x_5\}\}\}\\
&-\{x_3,x_4,\{x_1,x_2,\{x_7,x_5,x_6\}\}\} - \{x_3,x_4,\{x_2,\llbracket x_5,x_6,x_7\rrbracket^C,x_1\}\} - \{x_3,x_4,\{\llbracket x_5,x_6,x_7\rrbracket^C,x_1,x_2\}\}\\
&-\{x_4,\llbracket x_1,x_2,\llbracket x_5,x_6,x_7\rrbracket^C\rrbracket^C,x_3\} - \{\llbracket x_1,x_2,\llbracket x_5,x_6,x_7\rrbracket^C\rrbracket^C,x_3,x_4\} - \{x_6,x_7,\{x_1,x_2\{x_3,x_4,x_5\}\}\}\\
&-\{\llbracket x_1,x_2,\llbracket x_3,x_4,x_5\rrbracket^C\rrbracket^C,x_6,x_7\} - \{x_6,x_7,\{x_1,x_2,\{x_4,x_5,x_3\}\}\} - \{x_6,x_7,\{x_1,x_2,\{x_5,x_3,x_4\}\}\}\\
&-\{x_6,x_7,\{x_2,\llbracket x_3,x_4,x_5\rrbracket^C,x_1\}\} - \{x_6,x_7,\{\llbracket x_3,x_4,x_5\rrbracket^C,x_1,x_2\}\} - \{x_7,\llbracket x_1,x_2,\llbracket x_3,x_4,x_5\rrbracket^C\rrbracket^C,x_6\}\\
&+\{\llbracket x_3,x_4,\llbracket x_1,x_2,x_5\rrbracket^C\rrbracket^C,x_6,x_7\} + \{x_6,x_7,\{x_3,x_4,\{x_1,x_2,x_5\}\}\} + \{x_6,x_7,\{x_3,x_4,\{x_2,x_5,x_1\}\}\}\\
&+\{x_6,x_7,\{x_3,x_4,\{x_5,x_1,x_2\}\}\} + \{x_6,x_7,\{x_4,\llbracket x_1,x_2,x_5\rrbracket^C,x_3\}\} + \{x_6,x_7,\{\llbracket x_1,x_2,x_5\rrbracket^C,x_3,x_4\}\}\\
&+\{x_7,\llbracket x_3,x_4,\llbracket x_1,x_2,x_5\rrbracket^C\rrbracket^C,x_6\} - \{x_5,\llbracket x_1,x_2,\llbracket x_3,x_4,x_6\rrbracket^C\rrbracket^C,x_7\} - \{\llbracket x_1,x_2,\llbracket x_3,x_4,x_6\rrbracket^C\rrbracket^C,x_7,x_5\}\\
&-\{x_7,x_5,\{x_1,x_2,\{x_3,x_4,x_6\}\}\} - \{x_7,x_5,\{x_1,x_2,\{x_4,x_6,x_3\}\}\} - \{x_7,x_5,\{x_1,x_2,\{x_6,x_3,x_4\}\}\}\\
&-\{x_7,x_5\{x_2,\llbracket x_3,x_4,x_6\rrbracket^C,x_1\}\} - \{x_7,x_5\{\llbracket x_3,x_4,x_6\rrbracket^C,x_1,x_2\}\} + \{x_5,\llbracket x_3,x_4,\llbracket x_1,x_2,x_6\rrbracket^C\rrbracket^C,x_7\}\\
&+\{\llbracket x_3,x_4,\llbracket x_1,x_2,x_6\rrbracket^C\rrbracket^C,x_7,x_5\} + \{x_7,x_5,\{x_3,x_4,\{x_1,x_2,x_6\}\}\} + \{x_7,x_5,\{x_3,x_4,\{x_2,x_6,x_1\}\}\}\\
&+\{x_7,x_5,\{x_3,x_4,\{x_6,x_1,x_2\}\}\} + \{x_7,x_5,\{x_4,\llbracket x_1,x_2,x_6\rrbracket^C,x_3\}\} + \{x_7,x_5,\{\llbracket x_1,x_2,x_6\rrbracket^C,x_3,x_4\}\}\\
&-\{x_5,x_6,\{x_1,x_2,\{x_3,x_4,x_7\}\}\} - \{x_5,x_6,\{x_1,x_2,\{x_4,x_7,x_3\}\}\} - \{x_5,x_6,\{x_1,x_2,\{x_7,x_3,x_4\}\}\}\\
&-\{x_5,x_6,\{x_2,\llbracket x_3,x_4,x_7\rrbracket^C,x_1\}\} - \{x_5,x_6,\{\llbracket x_3,x_4,x_7\rrbracket^C,x_1,x_2\}\} - \{x_6,\llbracket x_1,x_2,\llbracket x_3,x_4,x_7\rrbracket^C\rrbracket^C,x_5\}\\
&-\{\llbracket x_1,x_2,\llbracket x_3,x_4,x_7\rrbracket^C\rrbracket^C,x_5\},x_5,x_6\} + \{x_5,x_6,\{x_3,x_4,\{x_1,x_2,x_7\}\}\} + \{x_5,x_6,\{x_3,x_4,\{x_2,x_7,x_1\}\}\}\\
&+\{x_5,x_6,\{x_3,x_4,\{x_7,x_1,x_2\}\}\} + \{x_5,x_6,\{x_4,\llbracket x_1,x_2,x_7\rrbracket^C,x_3\}\} + \{x_5,x_6,\{\llbracket x_1,x_2,x_7\rrbracket^C,x_3,x_4\}\}\\
&+\{x_6,\llbracket x_3,x_4,\llbracket x_1,x_2,x_7\rrbracket^C\rrbracket^C,x_5\} + \{\llbracket x_3,x_4,\llbracket x_1,x_2,x_7\rrbracket^C\rrbracket^C,x_5,x_6\}\\
=&0.
\end{aligned}$$

Alors $(\mathcal{J},\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket^C)$ est une algèbre de Jordan ternaire.

Définition 5.4.4. Soit $(\mathcal{J},\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ une algèbre pre-Jordan ternaire. L'algèbre de Jordan ternaire $(\mathcal{J},\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket^C)$ est appelée l'algèbre de Jordan ternaire sous-jacente de $(\mathcal{J},\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ et $(\mathcal{J},\cdot,\cdot,\cdot\})$ est appelée une algèbre pre-Jordan ternaire compatible avec l'algèbre de Jordan ternaire $(\mathcal{J},\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket^C)$.

Soit $(\mathcal{J},\cdot,\cdot,\cdot\})$ une algèbre pre-jordan ternaire. On définit une application linéaire symétrique $\mathfrak{L}:\otimes^2\mathcal{J}\to\mathfrak{gl}(\mathcal{J})$ par :

$$\mathfrak{L}(x,y)z=\{x,y,z\},\quad \forall x,y,z\in\mathcal{J}. \tag{5.28}$$

En se basant sur les définitions d'une algèbre ternaire pre-Jordan et d'une représentation d'une algèbre de Jordan ternaire, on obtient immédiatement le résultat suivant :

Proposition 5.4.5. *Avec les notations ci-dessus, $(\mathcal{J},\mathfrak{L})$ est une représentation de l'algèbre de Jordan ternaire $(\mathcal{J},\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket^C)$. D'autre part, si $\mathcal{J}$ est un espace vectoriel avec une application linéaire $\{\cdot,\cdot,\cdot\}:\otimes^3\mathcal{J}\to\mathcal{J}$ satisfaisant l'équation* (5.24)*. Alors $(\mathcal{J},\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ est une algèbre pre-Jordan ternaire si $\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket^C$ définie par l'équation* (5.27) *est une algèbre de Jordan ternaire et la multiplication à gauche $\mathfrak{L}$ définie par l'équation* (5.28) *donne une représentation sur cette algèbre de Jordan ternaire.*

Proposition 5.4.6. *Soit $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ une algèbre de Jordan ternaire et $R : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ un opérateur de Rota-Baxter de poids zéro associé à la représentation adjointe $(\mathcal{J}, ad)$. Il existe alors une structure d'algèbre pre-Jordan ternaire compatible sur $\mathcal{J}$ donnée par :*

$$\{x_1, x_2, x_3\} = [\![R(x_1), R(x_2), x_3]\!], \tag{5.29}$$

pour tout $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{J}$.

Exemple 5.4.7. On considère l'algèbre de Jordan ternaire de dimension 4 donnée dans l'Exemple 5.1.7. Il est bien connu que si D est une dérivation inversible sur une algèbre de Jordan ternaire, alors D^{-1} est un opérateur de Rota-Baxter de poids zéro. On définit $D : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ par :

$$D(e_1) = -e_2, \quad D(e_2) = e_1, \quad D(e_3) = e_4, \quad D(e_4) = -e_3.$$

Par un calcul direct, on peut vérifier que D est une dérivation sur $\mathcal{J}$. Par la suite, on peut définir $R = D^{-1} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ par :

$$R(e_1) = e_2, \quad R(e_2) = -e_1, \quad R(e_3) = -e_4, \quad R(e_4) = e_3,$$

comme un opérateur de Rota-Baxter de poids zéro sur $\mathcal{J}$. En utilisant le Corollaire 5.4.6, il existe une algèbre pre-Jordan ternaire de dimension 4 sur $\mathcal{J}$ donnée par :

$$\begin{cases} \{e_1,e_1,e_2\} = 3e_2,\ \{e_2,e_2,e_1\} = 3e_1,\ \{e_3,e_3,e_4\} = 3e_4,\ \{e_4,e_4,e_3\} = 3e_3, \\ \{e_1,e_1,e_1\} = -\{e_1,e_2,e_1\} = -\{e_2,e_1,e_2\} = \{e_3,e_3,e_1\} = \{e_4,e_4,e_1\} = e_1, \\ \{e_2,e_2,e_2\} = \{e_3,e_3,e_2\} = \{e_4,e_4,e_2\} = e_2, \\ \{e_3,e_3,e_3\} = \{e_1,e_1,e_3\} = \{e_2,e_2,e_3\} = -\{e_4,e_3,e_4\} = e_3, \\ \{e_4,e_4,e_4\} = \{e_1,e_1,e_4\} = \{e_2,e_2,e_4\} = -\{e_3,e_4,e_3\} = e_4, \end{cases}$$

et tous les autres crochets sont nuls.

5.4.2 Algèbres pre-Jordan ternaires et opérateurs de Rota-Baxter relatifs

Dans ce paragraphe, on démontre qu'un opérateur de Rota-Baxter relatif sur une algèbre de Jordan ternaire induit une algèbre pre-Jordan ternaire. Par conséquent, les algèbres pre-Jordan ternaires peuvent être considérées comme les structures algébriques sous-jacentes des opérateurs de Rota-Baxter relatifs.

Proposition 5.4.8. *Soient $(\mathcal{J}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ une algèbre de Jordan ternaire, (V, ρ) une représentation et $T : V \to \mathcal{J}$ un opérateur de Rota-Baxter relatif associé à (V, ρ). Alors il existe une structure d'algèbre pre-Jordan ternaire sur V donnée par :*

$$\{u, v, w\} = \rho(Tu, Tv)w, \quad \forall\, u, v, w \in V. \tag{5.30}$$

Preuve 5.4.9. Pour tout $u, v, w \in V$, ona

$$\{u, v, w\} = \rho(Tu, Tv)w = \rho(Tv, Tu)w = \{v, u, w\}.$$

De plus, si on prend

$$[\![u, v, w]\!]^C = \{u, v, w\} + \{v, w, u\} + \{w, u, v\} = \rho(Tu, Tv)w + \rho(Tv, Tw)u + \rho(Tw, Tu)v,$$

et comme T est un opérateur de Rota-Baxter relatif, on a

$$T([\![u, v, w]\!]^C) = [\![Tu, Tv, Tw]\!].$$

Maintenant, pour tout $v_i \in V$, $1 \le i \le 7$, on obtient

$$\begin{aligned} \{v_1, v_2, \{v_3, v_4, \{v_5, v_6, v_7\}\}\} &= \rho(Tv_1, Tv_2)\rho(Tv_3, Tv_4)\rho(Tv_5, Tv_6)v_7, \\ \{v_3, v_4, \{v_1, v_2, \{v_5, v_6, v_7\}\}\} &= \rho(Tv_3, Tv_4)\rho(Tv_1, Tv_2)\rho(Tv_5, Tv_6)v_7, \\ \{[\![v_1, v_2, [\![v_3, v_4, v_5]\!]^C]\!]^C, v_6, v_7\} &= \rho\Big(T([\![v_1, v_2, [\![v_3, v_4, v_5]\!]^C]\!]^C), Tv_6\Big)v_7 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho\Big([[Tv_1, Tv_2, T([[v_3, v_4, v_5]]^C)]], Tv_6 \Big) v_7 \\
&= \rho\Big([[Tv_1, Tv_2, [[Tv_3, Tv_4, Tv_5]]]], Tv_6 \Big) v_7, \\
\{[[v_3, v_4, [[v_1, v_2, v_5]]^C]]^C, v_6, v_7\} &= \rho\Big([[Tv_3, Tv_4, [[Tv_1, Tv_2, Tv_5]]]], Tv_6 \Big) v_7, \\
\{[[v_1, v_2, [[v_3, v_4, v_6]]^C]]^C, v_5, v_7\} &= \rho\Big([[Tv_1, Tv_2, [[Tv_3, Tv_4, Tv_6]]]], Tv_5 \Big) v_7, \\
\{[[v_3, v_4, [[v_1, v_2, v_6]]^C]]^C, v_5, v_7\} &= \rho\Big([[Tv_3, Tv_4, [[Tv_1, Tv_2, Tv_6]]]], Tv_5 \Big) v_7, \\
\{v_5, v_6, \{v_1, v_2, \{v_3, v_4, v_7\}\}\} &= \rho(Tv_5, Tv_6)\rho(Tv_1, Tv_2)\rho(Tv_3, Tv_4) v_7, \\
\{v_5, v_6, \{v_3, v_4, \{v_1, v_2, v_7\}\}\} &= \rho(Tv_5, Tv_6)\rho(Tv_3, Tv_4)\rho(Tv_1, Tv_2) v_7.
\end{aligned}
$$

Puisque (V, ρ) est une représentation de $\mathcal{J}$ et en utilisant l'équation (5.8), alors l'équation (5.25) est vérifié. De même, on peut vérifier l'équation (5.26) en utilisant l'équation (5.9). D'où le résultat.

Corollaire 5.4.10. *Avec les notations ci-dessus, $(V, [[\cdot,\cdot,\cdot]]^C)$ est une algèbre de Jordan ternaire en tant qu'algèbre de Jordan ternaire sous-jacente à l'algèbre de pre-Jordan ternaire donnée dans la proposition 5.4.8, et T est un morphisme d'algèbres de Jordan ternaires de $(V, [[\cdot,\cdot,\cdot]]^C)$ à $(\mathcal{J}, [[\cdot,\cdot,\cdot]])$. De plus, $T(V) = \{Tv \mid v \in V\} \subset \mathcal{J}$ est une sous-algèbre ternaire de $\mathcal{J}$ et il existe une structure d'algèbre pre-Jordan ternaire induite $\{\cdot,\cdot,\cdot\}_{T(V)}$ sur $T(V)$ donnée par :*

$$
\{Tu, Tv, Tw\}_{T(V)} := T\{u, v, w\}, \quad \forall u, v, w \in V. \tag{5.31}
$$

Proposition 5.4.11. *Soit $(\mathcal{J}, [[\cdot,\cdot,\cdot]])$ une algèbre de Jordan ternaire. Il existe alors une algèbre de pre-Jordan ternaire compatible si et seulement s'il existe un opérateur de Rota-Baxter relatif inversible sur $\mathcal{J}$ associé à une représentation (V, ρ). De plus, la structure pre-Jordan ternaire compatible sur $\mathcal{J}$ est donnée par :*

$$
\{x, y, z\}_{\mathcal{J}} = T(\rho(x, y)T^{-1}(z)), \ \forall x, y, z \in \mathcal{J}.
$$

Preuve 5.4.12. Soit T un opérateur de Rota-Baxter relatif inversible. Alors il existe existe une structure d'algèbre pre-Jordan ternaire sur V définie par :

$$
\{u, v, w\} = \rho(Tu, Tv)w, \quad \forall\, u, v, w \in V.
$$

De plus, il existe une structure d'algèbre pre-Jordan ternaire induite $\{\cdot,\cdot,\cdot\}_{\mathcal{J}}$ sur $\mathcal{J} = T(V)$ donnée par :

$$
\{x, y, z\}_{\mathcal{J}} = T(\{T^{-1}(x), T^{-1}(y), T^{-1}(z)\}) = T(\rho(x, y)T^{-1}(z)), \ \forall x, y, z \in \mathcal{J}.
$$

Puisque T est un opérateur de Rota-Baxter relatif, on a

$$
\begin{aligned}
[[x, y, z]] &= T\Big(\rho(x, y)T^{-1}(z) + \rho(y, z)T^{-1}(x) + \rho(z, x)T^{-1}(y) \Big) \\
&= \{x, y, z\}_{\mathcal{J}} + \{y, z, x\}_{\mathcal{J}} + \{z, x, y\}_{\mathcal{J}}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, $(\mathcal{J}, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_{\mathcal{J}})$ est une algèbre pre-Jordan ternaire compatible. Réciproquement, l'application d'identité Id est un opérateur de Rota-Baxter relatif de l'algèbre de Jordan ternaire sous-jacente associé à la représentation $(\mathcal{J}, \mathfrak{L})$.

Le résultat suivant révèle la relation entre les algèbres pre-Jordan ternaires et les algèbres de Jordan ternaires cohérentes avec une forme symplectique non-dégénérée :

Théorème 5.4.13. *Soit $(\mathcal{J}, [[\cdot,\cdot,\cdot]])$ une algèbre de Jordan ternaire cohérente avec une forme symplectique B. Alors il existe une structure d'algèbre pre-Jordan ternaire compatible sur $\mathcal{J}$ donnée par :*

$$
B(\{x, y, z\}, w) = B(z, [[x, y, w]]), \ \forall x, y, z, w \in \mathcal{J}. \tag{5.32}
$$

Preuve 5.4.14. On définit l'application linéaire $T : \mathcal{J}^* \to \mathcal{J}$ par $\langle T^{-1}(x), y \rangle = B(x, y)$. Par l'équation (5.21), on obtient que T est un opérateur de Rota-Baxter relatif inversible associé à la représentation duale $(\mathcal{J}^*, ad^*)$. En utilisant la Proposition 5.4.11, il existe une structure d'algèbre pre-Jordan ternaire compatible donnée par :$\{x, y, z\}_{\mathcal{J}} = T(ad^*_{x,y}T^{-1}(z))$. De plus, pour tout $x, y, z, w \in \mathcal{J}$, on a

$$
B(\{x, y, z\}_{\mathcal{J}}, w) = B(T(ad^*_{x,y}T^{-1}(z)), w) = \langle ad^*_{x,y}T^{-1}(z), w \rangle
$$

$$= \langle T^{-1}(z), [[x,y,w]] \rangle = B(z, [[x,y,w]]).$$

D'où le résultat.

Ensuite, on fournit une construction de solutions de l'EYBJ ternaire dans certaines algèbres de Jordan ternaires cohérentes à partir d'algèbres pre-Jordan ternaires cohérentes.

Théorème 5.4.15. *Soit* $(\mathcal{J}, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ *une algèbre pre-Jordan ternaire. Soit* $\{e_1, \cdots, e_n\}$ *une base de* $\mathcal{J}$ *et* $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ *sa base duale. Dans ce cas*

$$\sum_i (e_i \otimes e_i^* - e_i^* \otimes e_i) \tag{5.33}$$

est une solution anti-symétrique de l'EYBJ ternaire dans l'algèbre de Jordan ternaire cohérente $\mathcal{J} \ltimes_{\mathfrak{L}^*} \mathcal{J}^*$.

Preuve 5.4.16. Cela découle du Théorème 5.3.13 et le fait que l'application d'identité Id est un opérateur de Rota-Baxter relatif de l'algèbre de Jordan ternaire sous-jacente associé à la représentation $(\mathcal{J}, \mathfrak{L})$.

Conclusion et perspectives

Les travaux présentés dans cette thèse s'inscrivent dans le cadre des recherches consacrées à l'étude des opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les structures des algèbres ternaires de type Lie et de type Jordan. L'objectif principal est d'introduire les opérateurs de Rota-Baxter relatifs dans le contexte des algèbres ternaires, de développer une théorie des déformations formelles pour ces structures, ainsi que des théories cohomologiques adaptées aux déformations. Une caractérisation de ces opérateurs est également proposée à l'aide des éléments de Maurer-Cartan associés aux L_∞-algèbres. Les algèbres ternaires et leurs propriétés ont été largement étudiées depuis que Jacobson a formalisé, en 1949, les travaux d'Élie Cartan sur les espaces symétriques en utilisant les systèmes triples de Lie. Cette théorie a particulièrement intéressé la communauté des physiciens théoriciens, surtout depuis que Nambu a présenté, en 1973, une généralisation de la mécanique hamiltonienne. Notre recherche bibliographique a mis en évidence les points suivants : identifier certaines structures d'algèbres ternaires, établir les liens existants entre ces structures, et recenser les travaux déjà réalisés dans ce domaine. Le domaine des algèbres ternaires reste un vaste domaine à explorer, offrant de nombreuses pistes intéressantes pour prolonger ce travail de recherche, approfondir la connaissance des propriétés de ces opérateurs, en établissant les relations entre certaines catégories des opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les algèbres ternaires de type Lie. La généralisation des systèmes triples de Lie en systèmes triples conformes de Lie pourrait également constituer un projet intéressant. Un système triple conforme de Lie est une extension d'un système triple de Lie, au sein d'une catégorie différente de pseudo-tenseurs. Ainsi, on pourrait considérer les questions suivantes :

1. Existe-t-il une algèbre de Lie graduée appropriée dont les éléments de Maurer-Cartan correspondent aux structures de systèmes triples conformes de Lie ?
2. Existe-t-il une théorie de cohomologie analogue à la théorie de cohomologie de Yamaguti sur les systèmes triples conformes de Lie, qui pourrait être appliquée à la classification de certaines déformations ?

Par ailleurs, on pourrait également envisager la notion de bisystèmes triples de Lie à double construction, en introduisant celle de triple de Manin ainsi que celle de Matched-paire des systèmes triples de Lie, et en établissant la correspondance entre un triple de Manin et une Matched-paire.

Bibliographie

[1] V. Abramov, B. Le Roy, and R. Kerner, Hypersymmetry : A $\mathbb{Z}_3$-graded generalization of supersymmetry. J. Math.Phys., 38 (1997), 1650.

[2] V. Abramov, Super 3-Lie algebras induced by super Lie algebras. Adv. Appl. Clifford Algebras, 27 (1) (2017), 9–16.

[3] V. Abramov, Weil algebra, 3-Lie algebra and B.R.S. algebra. In : Silvestrov, S., Malyarenko, A., Rancic, M. (Eds.), Algebraic Structures and Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol 317, Springer, Ch 1 (2020), 1–12.

[4] V. Abramov and P. Lätt, Classification of low dimensional 3-Lie superalgebras. In : Silvestrov S., Rancic M. (eds), Engineering Mathematics II, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol 179, Springer, 1–12.

[5] V. Abramov and P. Lätt, Induced 3-Lie algebras, superalgebras and induced representations. Proc. Est. Acad. Sci.,, 69 (2) (2020), 116–133.

[6] M. Aguiar, J.-L. Loday, Quadri-algebras, J. Pure Appl. Algebra, 191 (2004), 205–221.

[7] M. Aguiar, Pre-Poisson algebras. Lett. Math. Phys., 54(4) (2000), 263–277.

[8] A. A. Albert, A structure theory for Jordan algebras. Ann. of Math., 48(3) (1947), 546–567.

[9] A.A Albert, Power associative rings, Trans. Amer. math. Soc., 64 (1948), 552–597.

[10] A. Arfa, A. Ben Hassine, and S. Mabrouk, Ternary Hom-Jordan algebras induced by Hom-Jordan algebras. Linear and Multilinear Algebra, 70(19) (2022), 3944–3968.

[11] A. Arfa, N. Ben Fraj and A. Makhlouf, Cohomology and deformations of n-Lie algebra morphisms. J. Geom. Phys., 132 (2018), 64–74.

[12] J. Arnlind, A. Kitouni, A. Makhlouf and S. Silvestrov, Structure and cohomology of 3-Lie algebras induced by Lie algebras. In Algebra, Geometry and Mathematical Physics (2014) (pp. 123–144). Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 85, Springer, Berlin, Heidelberg.

[13] J. Arnlind, A. Makhlouf and S. Silvestrov, Ternary Hom-Nambu-Lie algebras induced by Hom-Lie algebras. J. Math. Phys., 51(4) (2010), 043515.

[14] J. Arnlind, A. Makhlouf and S. Silvestrov, Construction of n-Lie algebras and n-ary Hom-Nambu-Lie algebras. J. Math. Phys., 52 (2011), no. 12, 123502.

[15] F. V. Atkinson, Some aspects of Baxter's functional equation, J. Math. Anal. Appl., 7 (1963), 1–30.

[16] H. Awata, M. Li, D. Minic and T. Yoneya, On the quantization of Nambu brackets. J. High Energy Phys., 2 (2001), 13.

[17] C. Bai, A unified algebraic approach to the classical Yang–Baxter equation. Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical, 40(36) (2007), 11073.

[18] R. Bai, C. Bai and J. Wang, Realizations of 3-Lie algebras. J. Math. Phys., 51 (2010), 063505.

[19] R. Bai, L. Guo, J. Li and Y. Wu, Rota-Baxter 3-Lie algebras. J. Math. Phys., 54 (2013), 064504.

[20] C. Bai, L. Guo and Y. Sheng, Bialgebras, the classical Yang-Baxter equation and Manin tripless for 3-Lie algebras. Adv. Theor. Math. Phys., 23 (2019), 27–74.

[21] R. Bai, G. Song and Y. Zhang, On classification of n-Lie algebras. Front. Math. China, 6(4) (2011), 581–606.

[22] C.M. Bai, X. Ni, Pre-alternative algebras and pre-alternative bialgebras. Pacific J. Math, 248(2) (2010), 355-390.

[23] C. Bai, L. Guo, and Y. Sheng, Bialgebras, the classical Yang-Baxter equation and Manin triples for 3-Lie algebras. arXiv preprint arXiv :1604.05996 (2016).

[24] C. Bai, O. Bellier, L. Guo, X. Ni, Spliting of operations, Manin products and Rota-Baxter operators, Int. Math. Res. Not., 3 (2013) 485–524.

[25] J. Bagger and N. Lambert, Gauge symmetry and supersymmetry of multiple M2-branes. Phys. Rev. D, 77(6) (2008), 065008.

[26] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer, Deformation theory and quantization I/ II. Annals of Physics, 111(1) (1978),61–110.

[27] G. Baxter, An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity.Pac. J. Math., 10 (1960), 731–742.

[28] R. J. Baxter, Partition function of the eight-vertex lattice model, Ann. Phys., 70 (1972), 193–228.

[29] N. Bazunova, A. Borowiec, and R. Kerner, Universal differential calculus on ternary algebras. Lett. Math. Phys., 67 (2004), 195.

[30] A.A. Belavin, Dynamical symmetry of integrable quantum systems, Nucl. Phys. B, 180 (1981), 189–200.

[31] A.A. Belavin, V.G. Drinfel'd, Solutions of classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras, Funct. Anal. Appl., 16 (1982), 159–180.

[32] P. Benito, C. Draper and A. Elduque, On some algebras related to simple Lie triple systems. J. Algebra, 219(1999), 234–254.

[33] D. Burde, Left-symmetric algebras, or pre-Lie algebras in geometry and physics. Cent. Eur. J. Math., 4(3) (2006), 323–357.

[34] M. Bremner , I. Hentzel, Identities for generalized Lie and Jordan products on totally associative triple systems. Journal of Algebra, 231(1) (2000), 387–405.

[35] M. Bremner, New ternary versions of Jordan algebras. Algebra Colloquium, 8(1) (2001), 11–24.

[36] J. M. Casas, J. L. Loday and T. Pirashvili, Leibniz n-algebras. Forum Math., 214 (2002), 189–207.

[37] V. Callet, Persistent Homology on Musical Bars. Mathematics and computation in music, 349-355. Lecture Notes in Comput. Sci., 13267. Lecture Notes in Artificial Intelligence. Springer, Cham (2022).

[38] E. Cartan, Oeuvres completes. Part 1, vol. 2, nos. 101, 138, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[39] E. Cartan, Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, 8 (1929), 181–225.

[40] C. Chevalley, S. Eilenberg, Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 63 (1948), 84–124.

[41] T. Chtioui, A. Hajjaji, S. Mabrouk, A. Makhlouf, Cohomology and deformations of twisted O-operators on 3-Lie algebras. Filomat, 37(21) (2023), 6977–6994.

[42] A. Connes and D. Kreimer, Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem, Comm. Math. Phys., 210 (2000), 249–273.

[43] V. Chari, A. Pressley, A guide to quantum groups, Cambridge University Press, Cambridge (1994).

[44] T. Chtioui, S. Mabrouk, and A. Makhlouf, Cohomology and deformations of $\mathcal{O}$-operators on Hom-associative algebras. J. Algebra, 604 (2022), 727–759.

[45] T. Chtioui, and S. Mabrouk, 3-L-dendriform algebras and generalized derivations. Filomat, 35(6) (2021), 1949–1961.

[46] J. Chenal, Generalized flag geometries and manifolds associated to short Z-graded Lie algebras in arbitrary dimension. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 347 (2009), 21–25.

[47] Y. Daletskii, and L. Takhtajan, Leibniz and Lie algebra structures for Nambu algebra. Lett. Math. Phys., 39 (1997), 127–141.

[48] A. Das, Deformations of associative Rota-Baxter operators. J. Algebra, 560 (2020), 144–180.

[49] A. Das, Twisted Rota-Baxter operators and Reynolds operators on Lie algebras and NS-Lie algebras. J. Math. Phys., 62(9) (2021), 091701.

[50] A. Das, Cohomology and deformations of twisted Rota-Baxter operators and NS-algebras. J. Homotopy Relat. Struct., 17(2) (2022), 233–262.

[51] A. Das and S. Guo, Twisted relative Rota-Baxter operators on Leibniz algebras and NS-Leibniz algebras. e-Print arXiv : 2102.09752 (2021).

[52] J.A De Azcarraga and J. C Pérez Bueno, Higher-order simple Lie algebras. Comm. Math. Phys., 184(3) (1997), 669–681.

[53] H. Dongping and C. Bai, J-dendriform algebras. Frontiers of Mathematics in China, 7(1) (2012), 29–49.

[54] H. Dongping, X. Ni and C. Bai, Pre-Jordan algebras, Mathematica Scandinavica, (2013), 19–48.

[55] V. Drinfel'd, Hamiltonian structure on the Lie groups, Lie bialgebras and the geometric sense of the classical Yang-Baxter equations, Soviet Math. Dokl., 27 (1983), 68–71.

[56] K. Ebrahimi-Fard, Loday-type algebras and the Rota-Baxter relation, Lett. Math. Phys., 61 (2002), 139–147.

[57] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, and F. Patras, New identities in dendriform algebras, J. Algebra, 320 (2008), 708-727.

[58] K. Ebrahimi-Fard, L. Guo, Rota–Baxter algebras and dendriform algebras. J. Pure Appl. Alg., 212(2) (2008), 320–339.

[59] L.D. Faddeev, L. Takhtajan, The quantum inverse scattering method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model, Russ. Math. Surv., 34 (1979), 11–68.

[60] L.D. Faddeev, L. Takhtajan, Hamiltonian methods in the theory of solitons, Springer, Berlin (1987).

[61] Y. Frégier, A new cohomology theory associated to deformations of Lie algebra morphisms. Lett. Math. Phys., 70 (2004), 97–107.

[62] J. Figueroa-O'Farrill, Deformations of 3-algebras. J. Math. Phys. 50(11), (2009) 113514.

[63] V. T. Filippov, n-Lie algebras. Sibirsk. Mat. Zh., 26 (1985), 126–140.

[64] P . Gautheron, Some remarks concerning Nambu mechanics. Lett. Math. Phys., 37 (1996), 103–116.

[65] M. Gerstenhaber, On the deformation of rings and algebras. Ann. Math., (2) 79 (1964), 59–103.

[66] E. Getzler, Lie theory for nilpotent L_∞-algebras. Ann. Math., (2) 170 (2009), 271–301.

[67] AV. Gnedbaye, M. Wambst, Jordan triples and operads. Journal of Algebra, 231(2) (2000), 744-757.

[68] M. Goze, E. Remm, Lie-admissible algebras and operads. J. Algebra, 273 (2004), 129–152.

[69] P. Guillot, Lecons sur l'homologie et le groupe fondamental. Cours Spéc., 29 Société Mathématique de France, Paris, [2022], ©2022. xiv+314 pp. ISBN : 978-2-85629-965-4.

[70] L. Guo, An Introduction to Rota-Baxter Algebra, Surveys of Modern Mathematics, vol. 4, International Press/Higher Education Press, Somerville, MA/Beijing, 2012, xii+226 pp.

[71] Ph. Hanlon, and M. Wachs, On Lie k-algebras. Adv. Math., 113 (1995), 206–236.

[72] B. Harris, Cohomology of Lie triples systems and Lie algebras with involution.Trans. Amer. Math. Soc., 98 (1961), 148–162.

[73] J. Humphreys, Introduction to Lie algebras and Representation Theory, Second printing, revised Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978. xii+171 pp. ISBN : 0-387-90053-5.

[74] T. Hodge, and B. Parshall, On the representation theory of Lie triples systems. Trans. Amer. Math. Soc., 354(11) (2002), 4359–4391.

[75] N. C. Hopkins, Nilpotent ideals in Lie and anti-Lie triple systems. J. Algebra, 178(2) (1995), 480–492.

[76] N. Jacobson, Lie and Jordan triples systems, Amer. J. Math., 71 (1949), 149–170.

[77] P. Jordan, J. Von Neumann, E. Wigner, On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. Ann Math Princeton, 35(1) (1934), 29–64.

[78] N. Jacobson, General representation theory of Jordan algebras. Trans. Amer. Math. Soc, 70(3) (1951), 509–530.

[79] N. Jacobson, Lie algebras, Republication of the 1962 original Dover Publications, Inc., New York, 1979. ix+331 pp. ISBN : 0-486-63832-4.

[80] I. L. Kantor, Classification of irreducible transitive differential groups. Doklady Akademii Nauk SSSR, 158 (1964), 1271–1274.

[81] Sh. M. Kasymov, On a theory of n-Lie algebras. Algebra Logika, 26 (1987), 277–297.

[82] I. Kaygorodov, A. Pozhidaev, P. Saraiva, On a ternary generalization of Jordan algebras. Linear and Multilinear Algebra, 67(6) (2019), 1074–1102.

[83] I. Kaygorodov, and P. Zusmanovich, On anticommutative algebras for which $[Ra, Rb]$ is a derivation. Journal of Geometry and Physics, 163 (2021), 104113.

[84] R. Kerner, The cubic chessboard : Geometry and physics. Class. Quantum Grav., 14 (1997), A203.

[85] R. Kerner, Ternary algebraic structures and their applications in physics. Proceedings Conference ICGTMP "Group 23", Dubna, Russia, edited by G. Pogosyan, L. Mardoyan, and A. Sisakyan, Publication OIAI 2002, preprint archive : ArXiv :math-ph/0011023.

[86] A. Kitouni, On $(n+1)$-Lie induced by n-Lie algebras. PhD Thesis University of Haute Alsace, Mulhouse, 2015.

[87] M. Koecher, Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras. American Journal of Mathematics, 89(3) (1967), 787–816.

[88] C. Klimeik and T. Strobl, WZW-Poisson manifolds. J. Geom. Phys., 43 (2002), 341– 344.

[89] N. Kemmer, The algebra of meson matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc., 39 (1943), 189–196.

[90] F. Kubo, and Y. Taniguchi, A controlling cohomology of the deformation theory of Lie triples systems. J. Algebra, 278 (2004), 242–250.

[91] B. A. Kupershmidt, What a classical r-matrix really is ? J. Nonlinear Math. Phys., 6 (1999), 448–488.

[92] T. Lada and J. Stasheff, Introduction to sh Lie algebras for physicists. Internat. J. Theoret. Phys., 32 (1993), 1087–1103.

[93] T. Lada and M. Markl, Strongly homotopy Lie algebras. Comm. Algebra, 23 (1995), 2147–2161.

[94] A. Lazarev, Y. Sheng and R. Tang, Deformations and homotopy theory of relative Rota-Baxter Lie algebras. Comm. Math. Phys., 383 (2021), 595–631.

[95] J. Liu, Y. Sheng, Y. Zhou and C. Bai, Nijenhuis Operators on n-Lie Algebras. Commun. Theor. Phys., 65(6) (2016), 659.

[96] J. Lin, Y. Wang and S. Deng, T^*-extension of Lie triples systems. Linear Algebra Appl., 431 (2009), 2071–2083.

[97] J. Liu, A. Makhlouf, and Y. Sheng, A new approach to representations of 3-Lie algebras and abelian extensions. Algebras and Representation Theory, 20 (2017), 1415-1431.

[98] W. G. Lister, A structure theory of Lie triples systems. Trans. Amer. Math. Soc., 72 (1952), 217–242.

[99] O. Loos, Assoziative tripelsysteme. (German.English summary) Manuscripta Math., 7 (1972), 103–112.

[100] J.L. Loday, Dialgebras, in Dialgebras and related operads, Lecture Notes in Math., 1763, Springer, Berlin (2001), 7–66.

[101] P. Leroux, Construction of Nijenhuis operators and dendriform trialgebras. Int. J. Math. Math. Sci., 49 (2004), 2595–2615.

[102] S. Mac Lane, Homology. Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[103] A. Mandal, Deformation of Leibniz algebra morphisms. Homology Homotopy Appl., 9 (2007), 439–450.

[104] A. Makhlouf and A. Naolekar, On n-Hom-Leibniz algebras and cohomology, Georgian Math. J., 28(5) (2021), 765–786.

[105] S. Mabrouk, Pre-Lie triples system structures and generalized derivations, Preprint. (2021).

[106] P. W. Michor, and A. M. Vinogradov, n-ary Lie and assciative algebras. Rend. Semin. Mat., Torino 54 (1996), 373.

[107] H. Z. Munthe-Kaas, G. R. W. Quispel and A. Zanna, Symmetric spaces and Lie triple systems in numericalanalysis of differential equations., BIT 54 (2014), 257–282.

[108] H. C. Myung, Lie-admissible algebras. Hadronic J., 1 (1978), 169–193.

[109] H. C. Myung, Lie algebras and Flexible Lie-admissible algebras, Hadronic Press INC, Hadronic Press Monographs in Mathematics, 1, Massachusetts, (1982).

[110] H. C. Myung, S. Okubo, R. M. Santilli, Applications of Lieadmissible algebras in physics Vol I and II, Hadronic Press INC, Nonantum, Mass. (1978).

[111] Y. Nambu, Generalized Hamiltonian dynamics. Phys. Rev. D, 7 (1973), 2405–2412.

[112] A. Nijenhuis and R. Richardson, Commutative algebra cohomology and deformations of Lie and associative algebras. J. Algebra, 9 (1968), 42–105.

[113] A. Nijenhuis, R. Richardson, Deformations of Lie algebra structures, J. Math. Mech., 17 (1967), 89–105.

[114] A. Nijenhuis, and R. Richardson, Cohomology and deformations in graded Lie algebras. Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), 1–29.

[115] S. Okubo, Triple products and Yang-Baxter equation (I) : Octonionic and quaternionic triple systems. J. Math. Phys., 34 (1993), 3273.

[116] J.M. Osborn, Lie triple algebras with one generator, Math. Z., 110 (1969), 52–74.

[117] J. Pei, C. Bai and L. Guo, Splitting of operads and Rota-Baxter operators on operads, Appl. Cate. Stru., 25 (2017), 505–538.

[118] M. Rotkiewicz, Cohomology ring of n-Lie algebras. Extracta Math., 20 (2005), 219–232.

[119] J. J. Rotman, An Introduction to Homological Algebra,Second edition Universitext Springer, New York, 2009. arxiv+709 pp. ISBN : 978-0-387-24527-0.

[120] G.-C. Rota, Baxter algebras and combinatorial identities I, II, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 330–334.

[121] S. de Rose, P. Meyer, F. Bertrand, Human Body Shapes Anomaly Detection and Classification Using Persistent Homology., Algorithms 16 (2023).

[122] M. Rausch de Traubenberg, Ternary algebras and groups. J. Phys. : Conf. Ser., 128 (2008), 012060.

[123] P. Severa and A. Weinstein, Poisson geometry with a 3-form back ? ground. Progr. Theoret. Phys. Suppl., 144 (2001) 145–154.

[124] M. Schlessinger and J. Stasheff, The Lie algebra structure of tangent cohomology and deformation theory. J. Pure Appl. Algebra, 38 (1985), 313–322.

[125] J.A. Schouten, Über differentialkomitanten zweier kontravarianter Grössen, Nede. Akad. Wete. Proc., A 43 (1940), 449–452.

[126] M.A. Semonov-Tian-Shansky, What is a classical R-matrix ? Funct. Anal. Appl., 17 (1983), 259–272.

[127] A.V. Sidorov, Lie triple algebras, Algebra and Logic, 87 (1981), 72–78.

[128] O. N. Smirnov, Imbedding of Lie triple systems into Lie algebras. J. Algebra, 341 (2011), 1–12.

[129] J. Stasheff, Differential graded Lie algebras, quasi-Hopf algebras and higher homotopy algebras, Quantum groups (Leningrad, 1990), 120–137, Lecture Notes in Math., (1510), Springer, Berlin, (1992).

[130] L. Takhtajan, On foundation of the generalized Nambu mechanics, Commun. Math. Phys. 160, 295 (1994).

[131] L. Takhtajan, Higher order analog of Chevalley-Eilenberg complex and deformation theory of n-algebras. St. Petersburg Math. J., 6 (1995), 429–438.

[132] R. Tang, C. Bai, L. Guo and Y. Sheng, Deformations and their controlling cohomologies of $\mathcal{O}$-operators. Comm. Math. Phys., 368 (2) (2019), 665–700.

[133] R. Tang, C. Bai, L. Guo, and Y. Sheng, Homotopy Rota–Baxter operators and post-Lie algebras. Journal of noncommutative geometry, 17(1) (2023), 1–35.

[134] R. Tang., S. Hou and Y. Sheng, Lie 3-algebras and deformations of relative Rota-Baxter operators on 3-Lie algebras. J. Algebra, 567 (2021), 37–62.

[135] R. Tang and Y. Sheng, Leibniz bialgebras, relative Rota–Baxter operators, and the classical Leibniz Yang–Baxter equation. Journal of Noncommutative Geometry, 16(4) (2022), 1179–1211.

[136] R. Tang, Y. Sheng, and Y. Zhou, Deformations of relative Rota-Baxter operators on Leibniz algebras. Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 17(12) (2020) : 2050174–1606.

[137] J. Tits, Une classe d'algèbres de Lie en relation avec les algèbres de Jordan. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 65 = Indagationes Mathematicae, 24 (1962), 530–535.

[138] K. Uchino, Quantum analogy of Poisson geometry, related dendriform algebras and Rota-Baxter operators. Lett. Math. Phys., 85 (2-3) (2008), 91–109.

[139] K. Uchino, Twisting on associative algebras and Rota-Baxter type operators. J. Noncommut. Geom., 4 (2010), 349–379.

[140] B. Vallette, Manin products, Koszul duality, Loday algebras and Deligne conjecture. J. Reine Angew. Math., 620 (2008), 105–164.

[141] Th. Voronov, Higher derived brackets and homotopy algebras. J. Pure Appl. Algebra, 202 (2005), 133–153.

[142] C. A. Weibel, An Introduction to Homological Algebra ,Cambridge Stud. Adv. Math., 38 Cambridge University Press, Cambridge, 1994. xiv+450 pp. ISBN : 0-521-43500-5 ISBN : 0-521-55987-1.

[143] C. N. Yang, Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive deltafunction interaction, Phys. Rev. Lett., 19 (1967), 1312–1314.

[144] K. Yamaguti, On the cohomology space of Lie triples systems,Kumamoto J. Sci. A., 5 (1960),44–52.

[145] D. Yau, Deformations of coalgebra morphisms, J. Algebra, 307 (2007), 106–115.

[146] T. Zhang, Notes on Cohomologies of Lie triples Systems, J. Lie Theory, 24(4) (2014), 909–929.

[147] Z. Zhang, L. Chen, W. Liu and X. Bai, The Frattini subsystem of a Lie triple system, Comm. Algebra, 37(10) (2009), 3750–3759.

[148] V N. Zhelyabin, Jordan bialgebras and their relation to Lie bialgebras. Algebra Logic, 36(1) (1997), 1–15.

[149] Zhelyabin, V. N., Jordan D-bialgebras defined on semisimple Jordan algebras, Preprint 35, Novosibirsk. Gos. Univ, Novosibirsk 1998.

[150] V N. Zhelyabin, On a class of Jordan D-bialgebras. St Petersburg Math. J., 11(4) (2000), 589–610.

[151] V. N. Zhelyabin, Jordan D-bialgebras and symplectic forms on Jordan algebras, Siberian Adv. Math., 10(2) (2000), 142–150.

[152] G.W. Zinbiel, Encyclopedia of Types of Algebras. Operads and universal algebra, 9 (2012), 217–297.