

# Tunelamiento en aproximación semiclásica de la radiación Hawking para Black Shells

PITTER JAVIER CABEZAS CHACÓN



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
BOGOTÁ, D.C.  
JULIO DE 2020

# Tunelamiento en aproximación semiclásica de la radiación Hawking para Black Shells

PITTER JAVIER CABEZAS CHACÓN

TESIS O TRABAJO DE GRADO PRESENTADA(O) COMO REQUISITO  
PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE:  
MAGISTER EN CIENCIAS-FÍSICA

DIRECTOR:

PH.D., JOSÉ ROBEL ARENAS SALAZAR

OBSERVATORIO ASTRONÓMICO NACIONAL

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN:

TERMODINÁMICA DE AGUJEROS NEGROS



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
BOGOTÁ, D.C.  
JULIO DE 2020



*A Andrómeda,*

*la estrella más refulgente que apareciera un día, para  
iluminar mi camino y mi vida,*

*al enseñarme a no tener miedo a la libertad.*

*Andrómeda la llamo, porque la miro infinita,*

*como la galaxia, como aquélla hermosa,*

*encadenada a las rocas esperando la llegada de Perseo.*

*Aquélla musa cuyo hálito celestial, tiene la capacidad  
de transformar vidas...*



## AGRADECIMIENTOS

A todos los seres humanos que día a día han acompañado cada uno de mis logros y mis derrotas. A mi director el Doctor José Robel Arenas, quien con su infinita paciencia y con el don maravilloso de creer en las gentes, me animó a culminar este escrito, sobre todo en esas horas aciagas en las que los arrestos eran minúsculos. Además, por sus enseñanzas prístinas y blanquecinas mediante las cuales cualquier mortal puede acercarse a la divinidad del cosmos, máxime cuando sus temáticas se tornan áridas y abstrusas.

A Alexandra Elbakyan, la creadora de Sci-Hub, por poner a disposición de toda la humanidad, el conocimiento humano plasmado en revistas científicas. Conocimiento que han restringido las mafias académicas. A su esfuerzo y lucha diaria, a pesar de las persecuciones y hostigamientos de los que es víctima, aún persiste en solidarizar. Sin su apoyo este proyecto no hubiese avanzado, a menos que yo contara con una cantidad ingente de dinero para comprar los papers.

A Andrómeda por ser mi luz y mi sendero. A mi madre y mis tres hermanitas por acompañarme incondicionalmente toda la vida.

A mi amigo Andrés Castillo, científico nato y humanista empírico, del cual he aprendido conceptos sobre la ciencia y sobre la vida, dada su claridad y el fraterno cariño que me ha dispensado siempre, desde que lo conocí por allá en el primer semestre de la carrera de Física y que aún hoy día siguen presentes en mí.

A mi amigo Alexander Fuentes, por darme alientos todos los días para no desfallecer en este intento. A Ana Rubiela, a Bivi, a Helman, a Yazin, a Wilmar, a Ricardinho, a Luis y a Billie Holiday.

A los amigos ausentes...



Nota de aceptación

Trabajo de tesis

Jurado Jurado

Jurado

Director

PhD. José Robel Arenas Salazar

Bogotá, D.C., Julio de 2020

---



**Título en español**

Tunelamiento en aproximación semiclásica de la radiación Hawking para Black Shells

**Title in English**

Tunneling in semiclassical approximation to Hawking's Radiation for Black Shells

**Resumen:** El propósito de este trabajo es intentar determinar la existencia de tunelamiento cuántico en el proceso de radiación de Hawking para agujeros negros, considerando la búsqueda de un potencial proveniente de algún fenómeno de la física establecida, que proporcione una analogía al hipotético potencial que debería estar presente en el horizonte de eventos, a través de cual las partículas tunelarían. El decaimiento alfa nuclear podría ser un candidato ampliamente estudiado en las desintegraciones, así como su comprensión experimental y teórica. Otra opción se refiere al proceso de conversión de pares ante un campo electromagnético en el interior del núcleo con las correspondientes probabilidades de emisión electrón positrón, que se asemeja al caso de interés.

A partir del principio holográfico es posible establecer una zona en la cual los campos cuánticos están presentes en las vecindades de un agujero negro y por lo tanto las consideraciones termodinámicas sobre la entropía de Bekenstein-Hawking estarían restringidas a esta zona en particular representada por un cascarón negro (Black Shell) sin la necesidad de conocer el interior, pues investigar qué hay en el interior de un agujero negro es una pregunta que no es posible responder con la Relatividad General.

**Abstract:** The purpose of this work is trying to determinate the existence of quantum tunneling for the Hawking's radiation process for black holes, considering to find a potential coming from some established physics phenomena that provides an analogy with an hypothetical potential that should be on the event horizon, through which the particles would tunnel. Nuclear alpha decay could be a widely studied case on the desintegrations, for its experimental and theoretical understanding. Another option refers to the pairs conversion process onto an electromagnetical field in the interior of nuclei with its probabilities of emission of electrons and positrons that resembles to the interest framework.

Starting by holographic principle is possible to establish a particular zone what the quantum fields are present on the vicinity of a Black Hole and therefore, thermodynamical considerations through Bekenstein's-Hawking entropy will be restricted to this zone in particular represented by a Black Shell, without the necessity of recognize its interior, but investigate what's inside of a Black Hole is a question that is not possible to answer with General Relativity.

**Palabras claves:** Agujeros negros, radiación de Hawking, tunelamiento cuántico, conversión interna, principio holográfico, Black Shells.

---



# Tabla de Contenido

Índice de figuras	xiii
Lista de acrónimos y símbolos	xv
Introducción	xvii
1. Radiación de Hawking	1
1.1. Cuantización canónica y producción de partículas . . . . .	1
1.2. Efecto Hawking . . . . .	15
1.2.1. Radiación de Hawking como tunelamiento cuántico . . . . .	26
2. Tunelamiento nuclear	31
2.1. El decaimiento $\alpha$ . . . . .	31
2.2. Conversión interna . . . . .	39
3. El principio holográfico	45
3.1. Cotas a la entropía . . . . .	49
3.1.1. La cota de Bekenstein . . . . .	49
3.1.2. La cota de entropía esférica . . . . .	51
4. La dinámica de los Black Shells	57
Conclusiones	73

Trabajo futuro	75
Bibliografía	76
A. Apéndice A La aproximación WKB	81
B. Apéndice B Tunelamiento en pozos de potencial	89

---

# Índice de figuras

2.1. Dos barreras de potencial simétricas en el modelo de Gamow . . . . .	32
2.2. Barrera de potencial para el decaimiento $\alpha$ con un potencial más realista dado por la línea punteada . . . . .	33
3.1. Información de un bit por celda de Planck sobre el horizonte de un agujero negro . . . . .	49
4.1. Familias de hipersuperficies ortogonales a una congruencia de geodésicas como de tiempo . . . . .	58
4.2. Esquema de un espacio-tiempo unido por una frontera común . . . . .	60
4.3. El espacio-tiempo en el colapso gravitacional de Oppenheimer-Snyder . . . . .	62
A.1. Esquema de las regiones <i>I</i> , <i>II</i> y <i>III</i> del potencial donde la aproximación <i>WKB</i> es aplicable . . . . .	83
B.1. Pozo de potencial rectangular unidimensional. . . . .	90
B.2. El escape de partículas confinadas en un potencial de barrera finita y su decaimiento exponencial con el tiempo. . . . .	93



# Lista de acrónimos

## Acrónimos

Acrónimo	Significado
PCC	Coeficiente de conversión de pares
DPCC	Coeficiente diferencial de conversión de pares
SHF	Modelo autoconsistente de Skarmee-Hartree-Fock





# Introducción

El fenómeno de radiación Hawking postulado en [1]<sup>1</sup> plantea la posibilidad de la existencia de un fenómeno de tunelamiento a través del horizonte de eventos, que generará una barrera de potencial, a través de la cual las partículas como los electrones tunelarían. Esta perspectiva es abordada por [2], [3].

Desde la perspectiva de la aproximación semiclásica de *WKB*, desarrollada en el apéndice A, en la cual se establece la posibilidad de la existencia de la barrera, pero no su localización se quisiera pensar que ésta estuviese presente a una pequeña distancia  $h$  a partir de la frontera del horizonte de eventos, y podría calcularse según el principio holográfico<sup>2</sup>. Para tal fin es necesario esclarecer de qué naturaleza es dicho potencial, esto en primera medida puede ser pensado al reconocer que existen fenómenos en la naturaleza en los que se presenta tunelamiento, tales como los procesos de decaimiento  $\alpha$  en un núcleo radiactivo. En este sucede la emisión de partículas  $\alpha$  las cuales corresponden a núcleos de Helio, y la subsecuente formación de un núcleo hijo con los neutrones y protones restantes que no han sido expulsados.

La revisión de este mecanismo se ha realiza en el capítulo 2 y el apéndice B. En tal discusión se verifica la existencia de potenciales y probabilidades de tunelamiento, que pueden ser contrastadas con las expuestas en el mecanismo de Hawking, mediante la determinación del coeficiente de transmisión de partículas que atraviesan la barrera de potencial nuclear y contrastarlo con una hipotética barrera de potencial presente en el horizonte de eventos, con el fin de verificar si éste posee un potencial de naturaleza similar al presente en este fenómeno nuclear.

Según [3] la partícula tunelando al atravesar la barrera de potencial, para efectos de conservación de la energía, en el agujero negro hará que el horizonte se estreche ocasionando una contracción; durante el proceso de radiación, lo que llevaría a que el espectro de emisión no fuese estrictamente planckiano, como lo predice el espectro térmico de la Radiación de Hawking[4], [5].

La corrección al espectro hace necesario abordar el problema de preservación de unitariedad de la mecánica cuántica en el proceso y a su vez expresa el problema de la pérdida de información en los agujeros negros. Se espera que las fluctuaciones de vacío cuántico en la región próxima al horizonte, justo adentro de éste, causen que la partícula virtual de energía positiva creada, pueda tunelar y materializarse en una partícula real. En el caso de ser creada en las inmediaciones externas, una partícula virtual de energía negativa, tunelaría hacia adentro, decrementando la masa del agujero negro, mientras su compañera de energía positiva escaparía al infinito en forma de radiación de Hawking.

---

<sup>1</sup>Y que se encuentra descrito en el capítulo 1

<sup>2</sup>Este principio es discutido en el capítulo 3

Otro mecanismo de emisión sería similar al proceso nuclear de creación de un par electrón-positrón como el presente en el fenómeno de conversión interna, el cual se halla descrito en el capítulo 2. En el que se estudia el proceso de conversión de pares a partir de un campo electromagnético, determinándose el coeficiente de conversión de pares para encontrar la probabilidad de emisión nuclear.

En el capítulo 1 se describe el mecanismo de radiación Hawking, en el esquema por él desarrollado en [1]. Mediante el uso de una teoría cuántica de campos canónica en espacios curvos se obtiene la temperatura de Hawking como un proceso de tunelamiento.

En el capítulo 2 se discuten dos procesos de tunelamiento conocidos a nivel nuclear, la emisión de partículas  $\alpha$  a través de una barrera de potencial, con los subsecuentes desarrollos expresados en el apéndice B. Al considerar el modelo de Gamow y sus subsiguientes refinamientos en los denominados potenciales de Skarmee-Hartree-Fock, que se corresponden con modelos más realistas de potencial para el núcleo. Otro mecanismo plausible corresponde al fenómeno de conversión interna para la creación de pares electrón-positrón debido a transiciones electromagnéticas nucleares.

Los elementos conceptuales que rigen el Principio Holográfico son esbozados en el capítulo 3, al considerarse como una característica a ser cumplida por una teoría de gravedad cuántica que pueda ser construida en el futuro. Este principio expresa las cotas a la entropía de agujero negro y las posibles configuraciones de estados cuánticos de los modos proyectados en el horizonte de eventos y la estructura física del horizonte de eventos .

En el capítulo 4 se discute el modelo de Black Shell, como una hipersuperficie cerrada formada por materia sin presión, (un gas de fotones) contrayéndose hasta el radio de Schwarzschild de un agujero negro, en el cual las geodésicas seguidas por las partículas conformantes siguen trayectorias como de luz. Esta construcción evita el problema de formular la pregunta sobre qué estructura posee el interior de un agujero negro, pues basta solamente con analizar la frontera de dicho cascarón, en la cual se encuentran confinados los campos cuánticos de materia y radiación en su superficie y se asume un espacio del tipo Friedmann-Robertson-Walker en su interior.

---

# Chapter 1

## Radiación de Hawking

### 1.1. Cuantización canónica y producción de partículas

En la mecánica clásica un oscilador armónico de masa  $m$  y constante elástica  $k$  está descrito a través de su energía potencial, que depende de su desplazamiento desde la posición de equilibrio, y su energía cinética que depende de su momentum. De manera tal que la energía total es la suma de la energía cinética y la energía potencial, de acuerdo a

$$E = K + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega^2x^2,$$

donde se ha considerado que  $p = m\dot{x}$  y  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

En el caso de un oscilador armónico cuántico al reemplazar el momentum  $p$  por el operador  $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ , se obtiene una ecuación de onda denominada Ecuación de Schrödinger dada por

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\omega^2x^2\right)\psi = E\psi$$

cuyas soluciones corresponden a funciones de la forma

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} H_n(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$$

siendo  $H_n(\xi)$  los polinomios de Hermite y  $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}x$ .

La ecuación de Schrödinger es una ecuación de valores propios, los cuales corresponden a los valores discretos de la energía y además cumplen la condición

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

El oscilador armónico cuántico puede ser descrito por un hamiltoniano dado en términos de los operadores de posición  $\hat{x}$  y momentum  $\hat{p}$ <sup>1</sup> de acuerdo a

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2. \quad (1.1)$$

Si se considera una factorización del hamiltoniano<sup>2</sup> en la ecuación (1.1) es notable la aparición del término  $-\frac{1}{2}\hbar\omega$  que corresponde a la energía del punto cero. En dicha factorización es posible definir los operadores de creación  $\hat{a}^+$  y destrucción  $\hat{a}^-$  a partir de los operadores de posición y momentum y una constante multiplicativa función de la frecuencia, en la forma

$$\hat{a}^- = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p} \right) \quad (1.2)$$

$$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p} \right). \quad (1.3)$$

Los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$ , pueden ser escritos al invertir las expresiones (1.2) y (1.3) de manera que

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^- + \hat{a}^+) \quad (1.4)$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\hat{a}^- - \hat{a}^+) \quad (1.5)$$

entonces, se observa que el hamiltoniano se factoriza en

---

<sup>1</sup>Los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  no conmutan, esto es

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$$

<sup>2</sup>En donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\omega^2 \left( \hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p} \right) \left( \hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p} \right) &= \frac{1}{2}m\omega^2 \left( \hat{x}\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{x}\hat{p} - \frac{1}{m\omega}\hat{p}\hat{x} - \frac{i^2}{(m\omega)^2}\hat{p}\hat{p} \right) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 \left( \hat{x}^2 + \frac{i}{m\omega}\hat{x}\hat{p} - \frac{1}{m\omega}\hat{p}\hat{x} + \frac{1}{(m\omega)^2}\hat{p}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 \left( \hat{x}^2 + \frac{i}{m\omega}[\hat{x}, \hat{p}] + \frac{1}{(m\omega)^2}\hat{p}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 \left( \hat{x}^2 + \frac{i}{m\omega}(i\hbar) + \frac{1}{(m\omega)^2}\hat{p}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hat{p}^2}{2m} \\ &= \hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega \end{aligned}$$

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}^- \hat{a}^+ + \frac{1}{2} \right). \quad (1.6)$$

El operador  $\hat{N} = \hat{a}^- \hat{a}^+$  en (1.6) tiene un estado propio  $|n\rangle$  con valor propio  $n^3$  y por lo tanto el hamiltoniano posee este mismo autovalor y autoestado que el operador  $\hat{N}^4$ . De manera que  $|n\rangle$  es una notación equivalente a  $\psi_n(\xi)$  y cuyo conmutador corresponde a

$$\begin{aligned} [\hat{a}^-, \hat{a}^+] &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left( -\frac{i}{m\omega} [\hat{x}, \hat{p}] + \frac{i}{m\omega} [\hat{p}, \hat{x}] \right) \\ &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left( -\frac{i}{m\omega} (i\hbar) + \frac{i}{m\omega} (-i\hbar) \right) \\ &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left( \frac{\hbar}{m\omega} + \frac{\hbar}{m\omega} \right) \\ &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left( \frac{2\hbar}{m\omega} \right) \\ [\hat{a}^-, \hat{a}^+] &= 1. \end{aligned}$$

Un campo clásico en el espacio tridimensional puede expresarse como una función escalar de las tres coordenadas espaciales y del tiempo como  $\phi(x, t)$ . De acuerdo a [6], el campo escalar clásico puede ser considerado como un conjunto de osciladores armónicos desacoplados colocado cada uno de ellos en cada punto del espacio.

A partir de las relaciones de conmutación de la teoría cuántica, en la cual las variables canónicas clásicas  $x = q$  y  $p$  son ahora los operadores  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$ , que corresponden a

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar = i \quad (1.7)$$

si se consideran unidades naturales en las cuales  $\hbar = 1$  y además osciladores de masa unitaria, entonces los operadores de creación y destrucción para todo tiempo  $t$ , en las ecuaciones (1.2) y (1.3) quedan

$$a^-(t) \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left[ \hat{q}(t) + \frac{i}{\omega} \hat{p}(t) \right], \quad a^+(t) \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left[ \hat{q}(t) - \frac{i}{\omega} \hat{p}(t) \right] \quad (1.8)$$

y las correspondientes relaciones de conmutación

$$[a^-(t), a^+(t)] = 1 \quad (1.9)$$

Para construir el espacio de Hilbert de los estados cuánticos en un oscilador no perturbado externamente, a partir de un estado de vacío dado por un vector normalizado  $|0\rangle$ , y además debe satisfacerse la condición de que  $a^-|0\rangle = 0$ . Luego de estos es necesario determinar los estados excitados,  $|n\rangle$ , contruidos a partir de la aplicación sucesiva del operador  $a^+$  sobre este estado de vacío

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n |0\rangle,$$

<sup>3</sup>Denominado también número de ocupación.

<sup>4</sup> $\hat{N}$  es el denominado operador número de partículas tal que

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right) \\ \hat{H}|n\rangle &= \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega |n\rangle \end{aligned}$$

o bien, con lo cual es posible escribir todos los estados cuánticos del oscilador armónico como

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n |n\rangle, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n|^2 = 1.$$

Al considerar el campo cuántico como formado por un número infinito de osciladores armónicos, se tiene en cuenta que los modos normales de oscilación  $q_\alpha(t)$  estarán cuantizados y satisfarán las relaciones de conmutación (1.7)

$$[\hat{q}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\delta_{\alpha\beta}, \quad [\hat{q}_\alpha, \hat{q}_\beta] = [\hat{p}_\alpha, \hat{p}_\beta] = 0 \quad (1.10)$$

y los correspondientes operadores de creación y destrucción, junto con las relaciones de conmutación, serán

$$\begin{aligned} a_\alpha^-(t) &= \sqrt{\frac{\omega_\alpha}{2}} \left[ \hat{q}_\alpha(t) + \frac{i}{\omega_\alpha} \hat{p}_\alpha(t) \right] \\ a_\alpha^+(t) &= \sqrt{\frac{\omega_\alpha}{2}} \left[ \hat{q}_\alpha(t) - \frac{i}{\omega_\alpha} \hat{p}_\alpha(t) \right] \\ [\hat{a}_\alpha^-, \hat{a}_\beta^+] &= \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Así que en este caso el espacio de Hilbert estará determinado a partir de la acción de los operadores anteriores expresados en las ecuaciones (1.11) sobre el estado de vacío  $a_\alpha^- |0, 0, 0, \dots, 0\rangle = 0$ . Entonces, para un número de ocupación  $n_\alpha$ , los estados excitados serán

$$|n_1, n_2, \dots, n_N\rangle = \left[ \prod_{\alpha=1}^N \frac{(\hat{a}_\alpha^+)^{n_\alpha}}{\sqrt{n_\alpha!}} \right] |0, 0, \dots, 0\rangle \quad (1.12)$$

En el caso continuo, en el cual se consideraría que en cada punto del espacio  $x$  se colocase un oscilador para cada tiempo  $t$ , se requerían un conjunto infinito de ellos<sup>5</sup>. Las coordenadas asociadas a los operadores  $\hat{q}_\alpha(t)$  serán reemplazadas por una función escalar  $\phi(x, t) = \phi_x(t)$  que indique en ese punto e instante la intensidad del campo.

El más simple de los campos cuánticos corresponde a un campo escalar,[7] y [8]el cual se puede expresar como  $\phi(x, t)$ . Éste satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} + m^2 \phi \equiv \ddot{\phi} - \nabla^2 \phi + m^2 \phi. \quad (1.13)$$

Es necesario imponer condiciones iniciales sobre el campo  $\phi$  y su derivada temporal,  $\phi(x, t_0)$  y  $\dot{\phi}(x, t_0)$ , para todo  $t > t_0$ ; de manera tal que sea posible expresar a  $\phi(x, t)$  como un conjunto de osciladores armónicos desacoplados en un espacio finito de volumen  $V = L^3$  y al imponerse condiciones de frontera periódicas de la forma

$$\begin{aligned} \phi(x=0, y, z, t) &= \phi(x=L, y, z, t) \\ \phi(x, y=0, z, t) &= \phi(x, y=L, z, t) \\ \phi(x, y, z=0, t) &= \phi(x, y, z=L, t) \end{aligned}$$

<sup>5</sup>A esto se le denomina campo clásico, es decir a una función  $\phi(x, t)$ , que caracteriza la intensidad del campo en cada momento  $t$  y en cada punto  $x$  del espacio. Es posible interpretar un campo clásico, como un conjunto infinito de osciladores que anteriormente se habían denotado por la coordenada generalizada  $q_i(t)$ , ahora en este contexto, dado por  $\phi_x(t)$ .

hace que la descomposición de Fourier pueda expresarse como

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \phi_k(t) e^{ik \cdot x} \quad (1.14)$$

con

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}$$

Al sustituir en la ecuación de Klein-Gordon dada por (1.13) se tiene que ésta ahora corresponde a un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias desacopladas

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_k + (k^2 + m^2)\phi_k &= 0 \\ \ddot{\phi}_k + \omega_k^2 \phi_k &= 0, \end{aligned} \quad (1.15)$$

con una correspondiente frecuencia

$$\omega_k(t) = \sqrt{k^2 + m^2},$$

de manera que cada oscilador indexado con el índice  $k$  contribuye a la energía total del campo  $\phi$ , así que se cumple que

$$E = \sum_k \left( \frac{1}{2} |\dot{\phi}_k|^2 + \frac{1}{2} \omega_k^2 |\phi_k|^2 \right). \quad (1.16)$$

Al extender el volumen  $V$  al infinito en el índice  $k$  continuo, la ecuación (1.14) corresponde a

$$\phi(x, t) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{ik \cdot x} \phi_k. \quad (1.17)$$

El mecanismo de cuantización involucra el hecho de que el lagrangiano clásico, que determina la acción del sistema, puede ser obtenido a partir de una densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$ , según

$$\begin{aligned} L[\phi] &= \int \mathcal{L} d^3 x \\ &= \int \left( \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) d^3 x. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dado que esta densidad lagrangiana corresponde a la estructura matemática denominada un funcional, entonces, se hace necesario efectuar la derivada funcional del campo respecto a las velocidades generalizadas,  $\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$  para obtener los correspondientes momentos generalizados

$$\pi(x, t) = \frac{\delta L[\phi]}{\delta \dot{\phi}(x, t)} = \dot{\phi}(x, t). \quad (1.19)$$

A partir del lagrangiano es posible obtener el hamiltoniano clásico, el cual posee una expresión

$$\begin{aligned} H &= \int \pi(x, t) \dot{\phi}(x, t) d^3 x - L[\phi] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 x \left( \pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

El hamiltoniano de la ecuación (1.20) lleva a que las ecuaciones de movimiento de Hamilton, que involucran las derivadas funcionales del hamiltoniano, sean

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{\delta H}{\delta \pi(\mathbf{x}, t)} = \pi(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial \pi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\frac{\delta H}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} = \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) - m^2 \phi(\mathbf{x}, t).\end{aligned}\quad (1.21)$$

Cuando las variables  $\phi$  y  $\pi$  se consideran operadores, con sus respectivas relaciones de conmutación

$$\begin{aligned}[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{y}, t)] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ [\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{y}, t)] &= [\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{y}, t)] = 0,\end{aligned}\quad (1.22)$$

es posible expresarlos mediante la ecuación (1.17), como

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{\phi}_{\mathbf{k}}(t) \\ \hat{\pi}(\mathbf{y}, t) &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{y}} \hat{\pi}_{\mathbf{k}'}(t).\end{aligned}\quad (1.23)$$

Al sustituir las ecuaciones (1.23) en las relaciones de conmutación dadas en (1.22), entonces se tiene que

$$[\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(t), \hat{\pi}_{\mathbf{k}'}(t)] = i\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'),$$

lo que indica que la variable conjugada a  $\hat{\phi}_{\mathbf{k}}$  es  $\hat{\pi}_{-\mathbf{k}} = (\hat{\pi}_{\mathbf{k}})^\dagger$ .

Al reemplazar las ecuaciones (1.23) en las ecuaciones de Hamilton<sup>6</sup> dadas en (1.21), se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\phi}_{\mathbf{k}}}{dt} &= \hat{\pi}_{\mathbf{k}} \\ \frac{d\hat{\pi}_{\mathbf{k}}}{dt} &= -\omega^2 \hat{\phi}_{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>De acuerdo a las ecuaciones de movimiento de Heisenberg

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\phi}}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{\phi}, \hat{H}] \\ \frac{d\hat{\pi}}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{\pi}, \hat{H}]\end{aligned}$$


---



Al definir los operadores de creación y destrucción hermíticos en términos de  $\hat{\phi}$  y  $\hat{\pi}$  en la forma

$$\begin{aligned}\hat{a}_k^-(t) &= \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left( \hat{\phi}_k + \frac{i\hat{\pi}_k}{\omega_k} \right) \\ \hat{a}_k^+(t) &= \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left( \hat{\phi}_{-k} - \frac{i\hat{\pi}_{-k}}{\omega_k} \right),\end{aligned}\quad (1.24)$$

que satisfacen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned}[\hat{a}_k^-(t), \hat{a}_{k'}^+(t)] &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ [\hat{a}_k^-(t), \hat{a}_{k'}^-(t)] &= 0 \\ [\hat{a}_k^+(t), \hat{a}_{k'}^+(t)] &= 0.\end{aligned}\quad (1.25)$$

Los operadores  $\hat{a}_k^-$  y  $\hat{a}_k^+$  cumplen las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt} \left( \hat{a}_k^\pm(t) \right) = \pm i\omega_k \hat{a}_k^\pm(t) \quad (1.26)$$

cuyas soluciones son de la forma

$$\hat{a}_k^\pm(t) = \hat{a}_k^\pm e^{\pm i\omega_k t}. \quad (1.27)$$

Si se construye el espacio de Hilbert a partir del estado de vacío  $|0\rangle$ , sobre el que el operador de destrucción actúa, de manera que se cumpla  $\hat{a}_k^-|0\rangle = 0$  y además el estado con números de ocupación  $n_s$  en cada modo  $\mathbf{k}_s$ , generados a partir de la acción del operador creación sobre el mismo estado de vacío, en donde se tiene que  $n_1$  partículas poseen momentum  $\mathbf{k}_1$ ;  $n_2$  partículas tienen momentum  $\mathbf{k}_2$ , etc.

$$|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle = \left[ \prod_s \frac{(\hat{a}_{\mathbf{k}_s}^+)^{n_s}}{\sqrt{n_s!}} \right] |0\rangle. \quad (1.28)$$

A partir de (1.27) y teniendo en cuenta los operadores construcción y destrucción (1.24), el campo queda descrito por

$$\hat{\phi}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left( \hat{a}_k^- e^{-i\omega_k t} + \hat{a}_{-k}^+ e^{i\omega_k t} \right).$$

Se denomina expansión del operador de campo cuántico en modos, a la expresión resultante de insertar la función  $\hat{\phi}_k(t)$  anterior en la ecuación (1.23)

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left( e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{a}_k^- + e^{i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{a}_k^+ \right), \quad (1.29)$$

en donde se ha reemplazado  $-\mathbf{k}$  por  $\mathbf{k}$ , en el segundo término.

Si se tiene en cuenta que las funciones

$$v_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} e^{i\omega_k t}, \quad (1.30)$$

y

$$v_k^*(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} e^{-i\omega_k t}, \quad (1.31)$$

son los denominados modos de frecuencia negativa y positiva, que expresan las soluciones de energía negativa y positiva respectivamente; entonces, el operador de campo en la ecuación (1.29) queda descrito en la forma

$$\hat{\phi}(x, t) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( v_k^*(t) e^{ik \cdot x} \hat{a}_k^- + v_k(t) e^{-ik \cdot x} \hat{a}_k^+ \right) \quad (1.32)$$

con las usuales reglas de conmutación dadas en (1.25).

En el evento de realizar una descripción del campo involucrando los efectos de la gravedad sobre el espacio-tiempo, se hace necesario tener en cuenta que el campo escalar interactuará con el campo gravitacional clásico y por lo tanto para describir adecuadamente este fenómeno, se considerará una acción en el cuadriespacio, de la forma

$$S[\phi] = \int d^4 x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (1.33)$$

aquí, la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  depende de la intensidad del campo y de sus derivadas de orden superior; además que el campo gravitacional  $\phi_i = g_{\alpha\beta}(x^\gamma)$  depende fuertemente de la métrica.

Se considerará una función de valor real para la acción, con el fin de que la probabilidad se conserve en los respectivos campos cuánticos. Además, es importante especificar condiciones iniciales sobre el campo y sus primeras derivadas, para que su evolución esté bien definida, con lo que las ecuaciones de movimiento tendrán a lo sumo segundas derivadas de  $\phi$ .

Otra característica importante a tener en cuenta es que en un espacio-tiempo curvado la acción deberá ser invariante ante transformaciones generales de coordenadas; pues las propiedades físicas de los sistemas satisfarán el principio de covariancia y así serán independientes del sistema coordenado empleado. Esto lleva a que la acción ya no sea invariante ante el grupo de Poincaré y por lo tanto no se preserve la invarianza traslacional, así que la densidad lagrangiana ya no puede depender explícitamente de  $x$  ni de  $t$ .

El procedimiento de generalización del lagrangiano dado en la ecuación (1.18) a un espacio-tiempo curvo, involucra el hecho de que la métrica  $\eta_{\mu\nu}$  deberá ser reemplazada por  $g_{\mu\nu}$ , así como cambiar las derivadas parciales por derivadas covariantes y modificar el elemento de volumen  $d^3 x dt$  por su correspondiente versión covariante  $d^4 x \sqrt{-g}$ , siendo  $g$  el determinante de la métrica. En tal caso la acción tendrá la forma

$$S = \int d^4 x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \quad (1.34)$$

Dado que la acción depende explícitamente de la métrica, corresponde a un campo escalar débilmente acoplado a la gravedad.

Si se considera una métrica de la forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \delta_{ik} dx^i dx^k, \quad (1.35)$$

en la cual las superficies para cada tiempo constante son planas, pues corresponden a un universo plano de Friedmann.

A partir de la definición de tiempo conforme  $\eta$ , en vez del tiempo físico  $t$

$$\eta(t) = \int^t \frac{dt}{a(t)}, \quad (1.36)$$

la ecuación (1.35) quedaría

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ d\eta^2 - \delta_{ik} dx^i dx^k \right] = a^2(\eta) \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.37)$$

Si se realizan la sustituciones  $g^{\mu\nu} = a^{-2}\eta^{\mu\nu}$  y  $\sqrt{-g} = a^4$  en (1.34), se tiene que la acción es

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x d\eta a^2 \left[ \phi'^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2 a^2 \phi^2 \right]. \quad (1.38)$$

Si se define un campo  $\chi$  dependiente de  $a(t)$  y del campo  $\phi$ , de acuerdo a

$$\chi = a(\eta)\phi,$$

y su correspondiente momento canónicamente conjugado  $\pi = \chi'$ , entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} m^2 \phi^2 &= m^2 a^2 \chi^2 \\ \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} &= a^2 \left( \phi'^2 - (\nabla\phi)^2 \right) \\ a^2 \phi'^2 &= \chi'^2 - 2\chi\chi' \left( \frac{a'}{a} \right) + \chi^2 \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \\ a^2 \phi'^2 &= \chi'^2 + \chi^2 \left( \frac{a''}{a} \right) - \left( \chi^2 \frac{a'}{a} \right)'. \end{aligned}$$

La acción (1.38) puede escribirse como

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x d\eta \left[ \chi'^2 - (\nabla\chi)^2 - \left( m^2 a^2 - \frac{a''}{a} \right) \chi^2 \right], \quad (1.39)$$

cuya variación lleva a la ecuación de movimiento

$$\chi'' - \nabla^2 \chi + \left( m^2 a^2 - \frac{a''}{a} \right) \chi = 0,$$

en donde se verifica la existencia de una masa efectiva dependiente del tiempo:

$$m_{\text{efectiva}}(\eta) = m^2 a^2 - \frac{a''}{a}.$$

La dependencia temporal de la masa efectiva corresponde a la interacción del campo escalar con el background gravitacional, pero ahora reduciendo el procedimiento de cuantización del espacio-tiempo de Friedmann al de Minkowski. Así entonces, dado que la masa efectiva es función explícita del tiempo, la energía del campo escalar  $\chi$  no se conserva. Lo que es equivalente a que deba existir creación de partículas a partir de la energía proporcionada por el campo gravitacional.

La expansión de  $\chi$  en modos de Fourier (1.17) quedaría

$$\chi(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \chi_{\mathbf{k}}(\eta). \quad (1.40)$$

Al sustituir (1.40) en la ecuación de movimiento, se tiene que los modos  $\chi_{\mathbf{k}}(\eta)$ , satisfacen el conjunto de ecuaciones diferenciales desacopladas

$$\chi''_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^2(\eta) \chi_{\mathbf{k}} = 0, \quad (1.41)$$

con una correspondiente frecuencia

$$\omega_{\mathbf{k}}^2(\eta) = k^2 + m_{\text{efectiva}}^2 = k^2 + m^2 a^2(\eta) - \frac{a''}{a}.$$

Debido a que  $\omega_{\mathbf{k}}^2$  sólo depende de  $k \equiv |\mathbf{k}|$ , la solución general a (1.41) puede ser escrita a partir de las funciones complejas conjugadas  $v_{\mathbf{k}}(\eta)$  y  $v_{\mathbf{k}}^*(\eta)$ , las cuales son dos soluciones linealmente independientes, denominadas modos del campo, en la forma

$$\chi_{\mathbf{k}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_{\mathbf{k}}^- v_{\mathbf{k}}^*(\eta) + a_{-\mathbf{k}}^+ v_{\mathbf{k}}(\eta)], \quad (1.42)$$

en donde se ha generado la combinación lineal de soluciones a partir de dos constantes de integración complejas  $a_{\mathbf{k}}^-$  y  $a_{-\mathbf{k}}^+$ , de tal manera que al ser  $\chi$  un campo escalar real, estas constantes satisfagan que  $a_{\mathbf{k}}^+ = (a_{\mathbf{k}}^-)^*$ .

Sustituyendo (1.42) en (1.40) se tiene que

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{x}, \eta) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}} [a_{\mathbf{k}}^- v_{\mathbf{k}}^*(\eta) + a_{-\mathbf{k}}^+ v_{\mathbf{k}}(\eta)] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}(\eta). \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [a_{\mathbf{k}}^- v_{\mathbf{k}}^*(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^+ v_{\mathbf{k}}(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Para cuantizar el campo  $\chi$  en la ecuación (1.43), se imponen las relaciones de conmutación, elevándolo a la categoría de operador  $\hat{\chi}$  y su momento canónicamente conjugado  $\hat{\pi} = \hat{\chi}'$ , de acuerdo a

$$\begin{aligned} [\hat{\chi}(\mathbf{x}, \eta), \hat{\pi}(\mathbf{x}, \eta)] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ [\hat{\chi}(\mathbf{x}, t), \hat{\chi}(\mathbf{x}, t)] &= [\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}, t)] = 0. \end{aligned} \quad (1.44)$$

El hamiltoniano del campo cuántico  $\hat{\chi}$  corresponde a

$$\hat{H}(\eta) = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} [\hat{\pi}^2 + (\nabla \hat{\chi})^2 + m_{\text{efectiva}}^2(\eta) \hat{\chi}^2].$$

La expansión en modos del operador de campo  $\hat{\chi}$  toma la forma

$$\hat{\chi}(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( v_k^*(\eta) e^{ik \cdot x} \hat{a}_k^- + v_k(\eta) e^{-ik \cdot x} \hat{a}_k^+ \right), \quad (1.45)$$

donde las funciones modo  $v_k(\eta)$  satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$v_k'' + \omega_k^2(\eta) v_k = 0, \quad (1.46)$$

siendo  $\omega_k(\eta) = \sqrt{k^2 + m_{\text{efectiva}}^2(\eta)}$ .

Al sustituir (1.45) en (1.44) se cumple que

$$\begin{aligned} [a_k^-, a_{k'}^+] &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ [a_k^-, a_{k'}^-] &= [a_k^+, a_{k'}^+] = 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Los operadores  $a_k^-$  y  $a_k^+$  pueden ser empleados para construir la base de estados del espacio de Hilbert, si se forman los modos a partir de las funciones  $v_k(\eta)$  las ecuaciones de movimiento no quedan completamente determinadas<sup>7</sup>, es así que se hace necesario establecer una combinación lineal de éstas, de manera que

$$u_k(\eta) = \alpha_k v_k(\eta) + \beta_k v_k^*(\eta), \quad (1.48)$$

en la que  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  son coeficientes complejos independientes del tiempo, que a su vez cumplen la condición de compatibilidad de que

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1. \quad (1.49)$$

Si se define un nuevo conjunto de operadores de creación y destrucción  $\hat{b}_k^\pm$ , que cumplan las mismas relaciones de conmutación dadas en (1.47) que actúen sobre el estado de vacío, de manera que igual que los  $\hat{a}_k^\pm$  puedan ser usados para construir una base ortonormal de estados en el espacio de Hilbert, entonces existirían dos estados diferentes de vacío, pues

$$\begin{aligned} \hat{a}_k^- |_{(a)} 0 \rangle &= 0 \\ \hat{b}_k^- |_{(b)} 0 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en términos de estas nuevas funciones los operadores de campo quedan

$$\hat{\chi}(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( u_k^*(\eta) e^{ik \cdot x} \hat{b}_k^- + u_k(\eta) e^{-ik \cdot x} \hat{b}_k^+ \right), \quad (1.50)$$

<sup>7</sup>Esto sucede pues el wronskiano de  $v_k$  es degenerado para todo tiempo  $t$

$$W[v_k, v_k^*] = v_k' v_k^* - v_k v_k^{*'} = 2i \text{Im}\{v' v^*\}$$

La expansión del campo  $\chi$  en términos de los dos conjuntos de operadores  $\hat{a}_k^\pm$  y  $\hat{b}_k^\pm$  dada en las ecuaciones (1.45) y (1.50) será equivalente, si se tiene que

$$e^{ik \cdot x} \left[ u_k^*(\eta) \hat{b}_k^- + u_k(\eta) \hat{b}_{-k}^+ \right] = e^{ik \cdot x} \left[ v_k^*(\eta) \hat{a}_k^- + v_k(\eta) \hat{a}_{-k}^+ \right]. \quad (1.51)$$

La ecuación (1.51) al ser sustituida en (1.48) lleva a que

$$\begin{aligned} \hat{a}_k^- &= \alpha_k^* \hat{b}_k^- + \beta_k \hat{b}_{-k}^+ \\ \hat{a}_k^+ &= \alpha_k \hat{b}_k^+ + \beta_k^* \hat{b}_{-k}^-. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Las expresiones (1.52) se denominan transformaciones de Bogoliubov y los correspondientes  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  son los coeficientes de Bogoliubov, las cuales al ser invertidas dan lugar a las transformaciones de Bogoliubov inversas

$$\begin{aligned} \hat{b}_k^- &= \alpha_k \hat{a}_k^- - \beta_k \hat{a}_{-k}^+ \\ \hat{b}_k^+ &= \alpha_k^* \hat{a}_k^+ - \beta_k^* \hat{a}_{-k}^- \end{aligned} \quad (1.53)$$

De manera tal que las funciones de modos, estén relacionadas de acuerdo a

$$\begin{aligned} u_k(\eta) &= \alpha_k v_k(\eta) + \beta_k v_k^*(\eta) \\ u_k'(\eta) &= \alpha_k v_k'(\eta) + \beta_k v_k'^*(\eta), \end{aligned} \quad (1.54)$$

estando los coeficientes  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  dados en términos del wronskiano

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{W(u_k, v_k^*)}{2i} \\ \beta_k &= \frac{W(v_k, u_k)}{2i}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Los conjuntos de estados excitados que describen las partículas de los tipos  $a$  y  $b$ , surgen de la aplicación de los operadores de construcción en los respectivos vacíos en la forma:

$$|_{(a)} m_{k_1}, n_{k_2}, \dots \rangle = \frac{1}{\sqrt{m!n! \dots}} \left[ \left( \hat{a}_{k_1}^+ \right)^m \left( \hat{a}_{k_2}^+ \right)^n \dots \right] |_{(a)} 0 \rangle, \quad (1.56)$$

y también

$$|_{(b)} m_{k_1}, n_{k_2}, \dots \rangle = \frac{1}{\sqrt{m!n! \dots}} \left[ \left( \hat{b}_{k_1}^+ \right)^m \left( \hat{b}_{k_2}^+ \right)^n \dots \right] |_{(b)} 0 \rangle. \quad (1.57)$$

Un estado cuántico arbitrario  $|\psi\rangle$  puede ser escrito como combinación lineal de estados excitados de manera que

$$|\psi\rangle = \sum_{m,n,\dots} C_{mn\dots}^{(a)} |m_{k_1}, n_{k_2}, \dots\rangle = \sum_{m,n,\dots} C_{mn\dots}^{(b)} |m_{k_1}, n_{k_2}, \dots\rangle,$$

luego la probabilidad de encontrar  $m$  partículas del tipo  $(a)$  en el modo  $\mathbf{k}_1$  es  $|C_{mn\dots}^{(a)}|^2$  y por lo tanto, probabilidad de encontrar  $m$  partículas del tipo  $(b)$  en el modo  $\mathbf{k}_1$  es  $|C_{mn\dots}^{(b)}|^2$ .

Los estados de partículas  $(a)$  y  $(b)$  son en general diferentes, pues corresponden a definiciones diferentes del vacío, si por ejemplo  $\beta_k \neq 0$ , entonces el vacío  $(b)$  contiene partículas  $(a)$  y viceversa. Esto puede verse al calcular el operador número de partículas del tipo  $(a)$  en el estado de vacío  $(b)$ , de acuerdo a

$$\begin{aligned} \langle_{(b)} 0 | \hat{N}_k^{(a)} |_{(b)} 0 \rangle &= \langle_{(b)} 0 | \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^- |_{(b)} 0 \rangle \\ &= \langle_{(b)} 0 | \left( \alpha_k \hat{b}_k^+ + \beta_k^* \hat{b}_{-k}^- \right) \left( \alpha_k^* \hat{b}_k^- + \beta_k \hat{b}_{-k}^+ \right) |_{(b)} 0 \rangle \\ &= \langle_{(b)} 0 | \left( \beta_k^* \hat{b}_{-k}^- \right) \left( \beta_k \hat{b}_{-k}^+ \right) |_{(b)} 0 \rangle \\ \langle_{(b)} 0 | \hat{N}_k^{(a)} |_{(b)} 0 \rangle &= |\beta_k|^2 \delta^{(3)}(0) \end{aligned} \quad (1.58)$$

La ecuación (1.58) muestra que para un volumen espacial infinito la densidad de partículas del tipo  $(a)$  en el modo  $k$  es

$$n_k = |\beta_k|^2,$$

y por lo tanto la densidad media total de todas las partículas

$$n = \int d^3k |\beta_k|^2,$$

será finita sólo si  $|\beta_k|^2$  decae más rápido que  $k^{-3}$  para  $k$  grande.

El vacío de  $(b)$  partículas puede expresarse como una superposición de estados excitados de partículas  $(a)$  al tener en cuenta un estado cuántico de un sólo modo  $\hat{\phi}_k$  y expandir el vacío de  $(b)$  partículas como una combinación lineal de la forma

$$|_{(b)} 0_{k,-k} \rangle = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} |_{(a)} m_k, n_{-k} \rangle \quad (1.59)$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} \frac{(\hat{a}_k^+)^m (\hat{a}_{-k}^+)^n}{\sqrt{m!n!}} |_{(a)} 0_{k,-k} \rangle. \quad (1.60)$$

A partir de las transformaciones de Bogoliubov inversas, dadas en (1.53) aplicadas al estado de vacío de  $(b)$  partículas

$$\hat{b}_k^- |_{(a)} 0_{k,-k} \rangle = (\alpha_k \hat{a}_k^- - \beta_k \hat{a}_{-k}^+) |_{(a)} 0_{k,-k} \rangle = 0, \quad (1.61)$$

y también

$$\hat{b}_{-k}^+ |_{(a)} 0_{k,-k} \rangle = (\alpha_k \hat{a}_{-k}^- - \beta_k \hat{a}_k^+) |_{(a)} 0_{k,-k} \rangle = 0. \quad (1.62)$$

Dado que el estado de vacío de  $(b)$  partículas es una combinación de operadores de creación en el vacío de  $(a)$  partículas, entonces esa combinación puede considerarse por una función  $\hat{f}(\hat{a}_k^+, \hat{a}_{-k}^+)$ , entonces se deben cumplir que el conmutador  $[\hat{a}_k^-, \hat{f}]$  es la derivada de  $\hat{f}$  respecto a  $\hat{a}_k^+$ <sup>8</sup>. Entonces la ecuación (1.61) expresa que

$$\left( \alpha_k \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{a}_k^+} - \beta_k \hat{a}_{-k}^+ \right) |_{(a)} 0_{k,-k} \rangle = 0. \quad (1.63)$$

Dado que  $\hat{f}$  contiene sólo operadores de creación, se debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\alpha_k \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{a}_k^+} - \beta_k \hat{a}_{-k}^+ = 0,$$

la cual tiene como solución

$$\hat{f}(\hat{a}_k^+, \hat{a}_{-k}^+) = C (\hat{a}_{-k}^+) \exp \left( \frac{\beta_k}{\alpha_k} \hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}^+ \right). \quad (1.64)$$

Análogamente, a partir de la ecuación (1.62) se determina la relación para  $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{a}_{-k}^+}$ , siendo  $C$  una constante de integración a determinar a partir de la normalización.

El  $(b)$  vacío puede ser expresado entonces como

$$\begin{aligned} |_{(a)} 0_{k,-k} \rangle &= C \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\beta_k}{\alpha_k} \right)^n |_{(a)} n_k, n_{-k} \rangle \\ \langle_{(a)} 0_{k,-k} |_{(a)} 0_{k,-k} \rangle &= \langle_{(a)} 0_{k,-k} | C \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\beta_k}{\alpha_k} \right)^n |_{(a)} n_k, n_{-k} \rangle = 1 \\ C &= \sqrt{1 - \frac{|\beta_k|^2}{|\alpha_k|^2}} \\ C &= \frac{1}{|\alpha_k|}. \end{aligned}$$

Entonces, el estado de  $(b)$  vacío

$$|_{(a)} 0_{k,-k} \rangle = \frac{1}{|\alpha_k|} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\beta_k}{\alpha_k} \right)^n |_{(a)} n_k, n_{-k} \rangle. \quad (1.65)$$

El estado de vacío  $|_{(b)} 0 \rangle$  es el producto tensorial de los estados de vacío  $|_{(a)} 0_{k,-k} \rangle$  en todos los modos y dado que cada par  $\hat{\phi}_k$  y  $\hat{\phi}_{-k}$  se han contado dos veces en el producto sobre todos los  $k$ , se

<sup>8</sup>Para operadores  $\hat{q}$  y  $\hat{f}(\hat{p}, \hat{q})$  se cumple que el conmutador

$$[\hat{q}, \hat{f}(\hat{p}, \hat{q})] = i\hbar \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{p}}(\hat{p}, \hat{q})$$



debe tomar la raíz cuadrada a la expresión (1.65)

$$\begin{aligned}
 |_{(b)}0\rangle &= \left[ \prod_k \frac{1}{|\alpha_k|} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\beta_k}{\alpha_k} \right)^n \frac{(\hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}^+)^n}{n!} \right]^{1/2} |_{(a)}0\rangle \\
 &= \prod_k \frac{1}{\sqrt{|\alpha_k|}} \exp \left( \frac{\beta_k}{2\alpha_k} \hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}^+ \right) |0\rangle \\
 &= \prod_k \frac{1}{|\alpha_k|^{1/2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\beta_k}{\alpha_k} \right)^n |_{(a)}n_k, n_{-k}\rangle \right). \tag{1.66}
 \end{aligned}$$

El  $(b)$  vacío quedó definido por una exponencial de combinaciones cuadráticas de operadores de creación, así que estos estados se denominan comprimidos. Entonces el estado de  $(b)$  vacío está comprimido por el estado del  $(a)$  vacío y viceversa.

## 1.2. Efecto Hawking

Si se considera la métrica para un espacio de Minkowski bidimensional

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \tag{1.67}$$

y si se tiene en cuenta el tiempo propio para parametrizar la trayectoria de un observador  $x^\alpha(\tau)$ , entonces su velocidad correspondería a

$$u^\alpha(\tau) = \frac{dx^\alpha(\tau)}{d\tau} = (\dot{t}(\tau), \dot{x}(\tau)),$$

la correspondiente aceleración sería

$$a^\alpha(\tau) = \dot{u}^\alpha(\tau).$$

La aceleración es ortogonal a la velocidad, de acuerdo a

$$\eta_{\alpha\beta} a^\alpha u^\beta = 0, \tag{1.68}$$

habiéndose empleado la condición de normalización

$$\eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = \eta_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha(\tau) \dot{x}^\beta(\tau) = 1. \tag{1.69}$$

En este espacio, la trayectoria seguida por un observador acelerado verificará que los modos de frecuencia positiva, que darían lugar a la existencia de partículas, deberían ser determinados respecto al tiempo propio del detector llevado consigo. Sin lugar a dudas, los correspondientes modos medidos por un observador inercial, deben ser obtenidos respecto al tiempo coordinado  $t$ . En definitiva, el número de partículas detectado por ambos observadores no es el mismo. Al tener en cuenta coordenadas como de luz inerciales en el espacio de Minkowski

$$\begin{aligned}
 u &= t - x \\
 v &= t + x.
 \end{aligned} \tag{1.70}$$

La métrica asociada a este fenómeno sería  $g_{\alpha\beta}$  en vez de  $\eta_{\alpha\beta}$ , con  $x^0 = u$  y  $x^1 = v$ , en (1.67), entonces el elemento de línea

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = du dv, \quad (1.71)$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Respecto al observador acelerado, su trayectoria en estas coordenadas como de luz, será

$$x^\alpha(\tau) = (u(\tau), v(\tau)), \quad (1.72)$$

entonces al sustituir la ecuación (1.72) en la condición de ortogonalidad (1.68) y de normalización (1.69) se obtiene

$$\dot{u}(\tau)\dot{v}(\tau) = 1 \quad (1.73)$$

$$\ddot{u}(\tau)\ddot{v}(\tau) = -a^2. \quad (1.74)$$

En virtud de que  $\dot{u}(\tau) = \frac{1}{\dot{v}(\tau)}$  en la ecuación (1.73) al sustituir en (1.74), se tienen las ecuaciones diferenciales del movimiento estarán dadas por

$$\left(\frac{\ddot{v}}{\dot{v}}\right)^2 = a^2. \quad (1.75)$$

Al integrar la expresión (1.75) se obtiene la trayectoria de un observador acelerado<sup>9</sup>

$$u(\tau) = -\frac{1}{a}e^{-a\tau} \quad (1.76)$$

$$v(\tau) = \frac{1}{a}e^{a\tau}. \quad (1.77)$$

Al sustituir en las coordenadas nulas en el espacio de Minkowski dadas en las ecuaciones (1.70)

$$\begin{aligned} t(\tau) &= \frac{v+u}{2} = \frac{1}{2}\sinh(a\tau) \\ x(\tau) &= \frac{v-u}{2} = \frac{1}{a}\cosh(a\tau). \end{aligned} \quad (1.78)$$

Así que para un observador acelerado la línea de mundo que describe, corresponde a una rama de hipérbola con ecuación

$$x^2 - t^2 = a^{-2},$$

en el plano  $x - y$ , que se aproxima asintóticamente a las líneas nulas para  $|t| \rightarrow \infty$ . Este observador se acerca a  $x \rightarrow \infty$ , desacelera y se detiene en  $x = \frac{1}{a}$ ; luego acelera y regresa hacia el infinito.

Si ahora, el observador establece un sistema coordenado comóvil  $(\tilde{\xi}^0, \tilde{\xi}^1) = (\tau, 0)$ , en el cual éste se encuentra en reposo respecto a su propio marco de referencia, entonces, el tiempo medido por él corresponderá al tiempo propio a lo largo de su trayectoria o línea de mundo.

Si se define la métrica conformalmente plana por

$$ds^2 = \Omega^2(\tilde{\xi}^0, \tilde{\xi}^1) \left[ (d\tilde{\xi}^0)^2 - (d\tilde{\xi}^1)^2 \right], \quad (1.79)$$

<sup>9</sup>Estas son las coordenadas del efecto Unruh

en la cual se pueda establecer la relación entre las coordenadas comóviles  $\xi^0, \xi^1$  y las del espacio de Minkowski  $t, x$  y facilite la cuantización de los campos.

Las coordenadas como de luz en este sistema poseen la estructura de (1.70) del espacio de Minkowski, para el observador acelerado, de acuerdo a

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \xi^0 - \xi^1 \\ \tilde{v} &= \xi^0 + \xi^1,\end{aligned}\tag{1.80}$$

por lo tanto la métrica (1.67) de acuerdo a (1.80) toma la forma

$$ds^2 = dudv = \Omega^2(\tilde{u}, \tilde{v}) d\tilde{u} d\tilde{v}.\tag{1.81}$$

En este tipo de coordenadas la línea de mundo de un observador acelerado corresponden a

$$\begin{aligned}\xi^0(\tau) &= \tau \\ \xi^1(\tau) &= 0,\end{aligned}\tag{1.82}$$

por lo tanto  $\tilde{v}(\tau) = \tilde{u}(\tau) = \tau$ .

Debido a que  $\xi^0(\tau) = \tau$  corresponde al tiempo propio en la ubicación del observador, entonces, el factor conforme  $\Omega^2(\tilde{u}, \tilde{v})$ , debe cumplir que

$$\Omega^2(\tilde{u} = \tau, \tilde{v} = \tau) = 1,$$

de manera que las ecuaciones (1.81) y (1.71) describen el mismo espacio de Minkowski en diferentes sistemas de coordenadas.

Si se permite que las funciones  $u$  y  $v$  solamente puedan depender de uno de los parámetros  $\tilde{u}$  y  $\tilde{v}$  respectivamente, con el fin de evitar términos cuadráticos en los diferenciales  $d\tilde{u}^2$  y  $d\tilde{v}^2$  en la métrica, entonces se escoge

$$\begin{aligned}u(\tilde{u}, \tilde{v}) &= u(\tilde{u}) \\ v(\tilde{u}, \tilde{v}) &= v(\tilde{v}).\end{aligned}$$

Al considerar coordenadas como de luz, la línea de mundo del observador, cumple que  $(\xi^0, \xi^1) = (\tau, 0)$  y por lo tanto en la ecuación (1.80)

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \tau - 0 = \tau \\ \tilde{v} &= \tau + 0 = \tau,\end{aligned}$$

y por la ecuación (1.76)

$$\begin{aligned}\frac{du(\tau)}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} \left( -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \right) = e^{-a\tau} = -au(\tau) \\ \frac{d\tilde{u}}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} (\tau) = 1.\end{aligned}\tag{1.83}$$

Teniendo en cuenta los dos sistemas coordenados para la trayectoria del observador y la regla de la cadena, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{du(\tau)}{d\tau} &= \frac{du(\tilde{u})}{d\tilde{u}} \frac{d\tilde{u}(\tau)}{d\tau} \\ -a\tilde{u}(\tau) &= \frac{du(\tilde{u})}{d\tilde{u}}(1).\end{aligned}\quad (1.84)$$

La ecuación (1.83) corresponde a una EDO de primer orden separable, cuya solución es

$$u(\tau) = C_1 e^{-a\tilde{u}}. \quad (1.85)$$

Para la coordenada  $v$  se efectúan los cálculos de la misma manera, con lo que se obtiene

$$v(\tau) = C_2 e^{a\tilde{v}}, \quad (1.86)$$

por lo tanto al comparar (1.85) y (1.86) con (1.76) se tiene que

$$u(\tau) = -\frac{1}{a} e^{-a\tilde{u}} \quad (1.87)$$

$$v(\tau) = \frac{1}{a} e^{a\tilde{v}}, \quad (1.88)$$

y al ser sustituidas en la métrica (1.81), llevan a que

$$\begin{aligned}ds^2 &= dudv \\ &= e^{-a\tilde{u}} e^{a\tilde{v}} d\tilde{u} d\tilde{v} \\ ds^2 &= e^{a(\tilde{v}-\tilde{u})} d\tilde{u} d\tilde{v}.\end{aligned}\quad (1.89)$$

Si se tiene en cuenta las ecuaciones de transformación dadas por (1.70) y (1.80) entre los sistemas inercial y acelerado, entonces es posible escribir las ecuaciones (1.87) y (1.88), en la forma

$$\begin{aligned}t &= t(\xi^0, \xi^1) = \frac{1}{a} e^{a\xi^1} \sinh(a\xi^0) \\ x &= x(\xi^0, \xi^1) = \frac{1}{a} e^{a\xi^1} \cosh(a\xi^0),\end{aligned}\quad (1.90)$$

de tal manera que la métrica en el sistema coordenado acelerado quede escrita como

$$ds^2 = e^{2a\xi^1} \left[ (d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2 \right], \quad (1.91)$$

y corresponde a un espacio con curvatura cero, localmente como el de Minkowski,<sup>10</sup> pero cuya descripción es incompleta, pues describe solamente un cuarto de aquél; es decir la respectiva región comprendida por  $x > |t|$ .<sup>11</sup>

Dado que el espacio-tiempo exterior a un agujero negro sin carga, no rotante en unidades naturales se encuentra descrito por la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

<sup>10</sup>Denominado espacio de Rindler.

<sup>11</sup>En algunas ocasiones denominada la cuña de Rindler.

y al asumir que la métrica de un agujero bidimensional posee la misma estructura de la de Schwarzschild, sin dependencia angular, entonces, ésta será

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad (1.92)$$

siendo el radio gravitacional  $r_g = 2M$ .<sup>12</sup>

Además al definir la coordenada tortuga  $r^*(r)$ , a partir de

$$dr^* = \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}},$$

entonces,

$$r^*(r) = r - r_g + r_g \ln\left(\frac{r}{r_g} - 1\right), \quad (1.93)$$

permite escribir la métrica (1.92), de modo que

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(r^*)}\right) \left[(dt)^2 - (dr^*)^2\right], \quad (1.94)$$

y por lo tanto las coordenadas (1.70) tortuga como de luz tendrán la forma

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= t - r^* \\ \tilde{v} &= t + r^*, \end{aligned} \quad (1.95)$$

que a su vez llevan a que la métrica (1.92) se exprese como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(\tilde{u}, \tilde{v})}\right) d\tilde{u}d\tilde{v}. \quad (1.96)$$

Las coordenadas tortuga  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  dadas en la ecuación (1.95) así como las de Schwarzschild (1.92) son singulares sobre el horizonte de eventos en  $r = r_g$ , como se observa en (1.96), pues la métrica está indefinida. Así que se hace necesario describir las coordenadas de Kruskal-Szekeres, de modo que la variedad espaciotemporal sea completa, para lo cual es posible aplicar la transformación

$$1 - \frac{r_g}{r} = e^{\left(1 - \frac{r}{r_g}\right)} e^{\left(\frac{\tilde{v} - \tilde{u}}{2r_g}\right)}.$$

Bajo este esquema la métrica (1.96) corresponde a

$$ds^2 = \frac{r_g}{r} e^{\left(1 - \frac{r}{r_g}\right)} e^{\left(-\frac{\tilde{u}}{2r_g}\right)} e^{\left(\frac{\tilde{v}}{2r_g}\right)} d\tilde{u}d\tilde{v}, \quad (1.97)$$

y por lo tanto en las coordenadas de Kruskal-Szekeres como de luz

$$\begin{aligned} u &= -2r_g e^{\left(-\frac{\tilde{u}}{2r_g}\right)} \\ v &= 2r_g e^{\left(\frac{\tilde{v}}{2r_g}\right)}, \end{aligned} \quad (1.98)$$

---

<sup>12</sup>Estrictamente sería  $r_g = \frac{2GM}{c^2} = 2M$ , si se usa  $G = c = 1$ .

la métrica queda escrita en la forma en la cual ya es regular sobre el horizonte

$$ds^2 = \frac{r_g}{r(u,v)} e^{\left(1 - \frac{r(u,v)}{r_g}\right)} du dv. \quad (1.99)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (1.98), (1.93) y (1.95), es posible relacionar las coordenadas de Kruskal-Szekeres  $(u, v)$  con las coordenadas de Schwarzschild  $(t, r)$  por

$$uv = -4r_g^2 e^{\left(\frac{r^*}{r_g}\right)} = -4r_g^2 \left(\frac{r}{r_g}\right) e^{\left(\frac{r}{r_g} - 1\right)} \quad (1.100)$$

y también

$$\frac{v}{u} = e^{\left(\frac{2t}{r_g}\right)}. \quad (1.101)$$

Definiendo las coordenadas como de tiempo y como de espacio  $T$  y  $R$  a partir de  $u$  y  $v$ , por

$$\begin{aligned} u &= T - R \\ v &= T + R, \end{aligned} \quad (1.102)$$

que llevan a que las hipersuperficies de nivel constante sean hipérbolas  $uv = T^2 - R^2 = cte$  y las geodésicas nulas  $u = cte$ ,  $v = cte$ , sean líneas rectas a  $45^\circ$ .

La cuantización de un campo escalar sin masa en este espacio-tiempo de dos dimensiones, a partir de la ecuación (1.34), es realizable si se define la acción

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}. \quad (1.103)$$

La acción (1.103) al ser escrita en términos de las coordenadas del cono de luz, se expresa como

$$S[\phi] = 2 \int \partial_u \phi \partial_v \phi du dv = 2 \int \partial_{\tilde{u}} \phi \partial_{\tilde{v}} \phi d\tilde{u} d\tilde{v},$$

de manera que las correspondientes ecuaciones de campo serán

$$\partial_u \phi \partial_v \phi = 0 \quad \partial_{\tilde{u}} \phi \partial_{\tilde{v}} \phi = 0. \quad (1.104)$$

Si se consideran funciones arbitrarias, suficientemente suaves  $A(u)$ ,  $\tilde{A}(\tilde{u})$ ,  $B(v)$ ,  $\tilde{B}(\tilde{v})$ , las ecuaciones de campo (1.104) presentan soluciones de la forma

$$\begin{aligned} \phi(u, v) &= A(u) + B(v) \\ \phi(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \tilde{A}(\tilde{u}) + \tilde{B}(\tilde{v}). \end{aligned} \quad (1.105)$$

El campo  $\phi$  dado por la ecuación (1.95), posee la forma

$$\phi \propto e^{-i\omega \tilde{u}} = e^{-i\omega(t-r^*)},$$

corresponde a un modo de frecuencia positiva moviéndose hacia la derecha alejándose del agujero negro, respecto a un observador asintóticamente lejano quien mide el tiempo  $t$ , pues en virtud de

las ecuaciones (1.67) y (1.95), el tiempo propio medido por este observador Minkowskiano y el tiempo global  $t$ , coinciden cuando  $r \rightarrow \infty$ .

Considerando la transformación de la métrica

$$ds^2 \rightarrow d\tilde{u}d\tilde{v} = dt^2 - (dr^*)^2$$

entonces, un observador asintótico en infinito define como partículas a los modos de frecuencia positiva  $\omega$  asociada a su tiempo coordenado  $t$ <sup>13</sup>. Respecto al tiempo propio de un observador en reposo fuera del agujero negro será  $\tau = \xi^0$  estos modos de frecuencia  $\Omega$  positiva<sup>14</sup> propagándose a la derecha serían

$$\phi \propto e^{-i\Omega\tilde{u}} = e^{-i\Omega(\xi^0 - \xi^1)}.$$

Así mismo, los modos de frecuencia positiva correspondientes, propagándose a la izquierda para ambos observadores serían

$$\begin{aligned}\phi &\propto e^{-i\omega\tilde{v}} = e^{-i\omega(t+r^*)} \\ \phi &\propto e^{-i\Omega\tilde{v}} = e^{-i\Omega(\xi^0 + \xi^1)}.\end{aligned}$$

Un observador estacionario observa partículas con modos de frecuencia positiva con respecto a  $t$  y la expansión del operador de campo en modos, de la ecuación (1.32) en el caso bidimensional, para el observador asintótico, está dado por<sup>15</sup>

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= (\text{modos moviéndose a la derecha}) + (\text{modos moviéndose a la izquierda}) \\ \hat{\phi} &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{(2\omega)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[ e^{-i\omega\tilde{u}} \hat{a}_\omega^- + e^{i\omega\tilde{u}} \hat{a}_\omega^+ \right] + \int_0^\infty \frac{d\omega}{(2\omega)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[ e^{-i\omega\tilde{v}} \hat{a}_\omega^- + e^{i\omega\tilde{v}} \hat{a}_\omega^+ \right],\end{aligned}\quad (1.106)$$

y la correspondiente expansión en modos para un observador frente al agujero

$$\hat{\phi} = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{(2\Omega)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \left[ e^{-i\Omega\tilde{u}} \hat{b}_\Omega^- + e^{i\Omega\tilde{u}} \hat{b}_\Omega^+ \right] + \int_0^\infty \frac{d\Omega}{(2\Omega)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \left[ e^{-i\Omega\tilde{v}} \hat{b}_\Omega^- + e^{i\Omega\tilde{v}} \hat{b}_\Omega^+ \right]. \quad (1.107)$$

En la cuña de Rindler  $x > |t|$ , en el espacio tiempo ambos sistemas coordenados se traslapan, de manera que las dos representaciones del campo coinciden, a frecuencias  $\omega$  y  $\Omega$ , en cuyo caso deben satisfacerse las relaciones de conmutación para los operadores  $\hat{a}_\omega^\pm$  y  $\hat{b}_\Omega^\pm$ , dadas por

$$\begin{aligned}[\hat{a}_\omega^-, \hat{a}_{\omega'}^+] &= \delta(\omega - \omega') \\ [\hat{b}_\Omega^-, \hat{b}_{\Omega'}^+] &= \delta(\Omega - \Omega') \\ [\hat{a}_\omega^-, \hat{a}_{\omega'}^-] &= [\hat{a}_\omega^+, \hat{a}_{\omega'}^+] = 0 \\ [\hat{b}_\Omega^-, \hat{b}_{\Omega'}^-] &= [\hat{b}_\Omega^+, \hat{b}_{\Omega'}^+] = 0.\end{aligned}\quad (1.108)$$

<sup>13</sup>Estos modos se alejan del agujero negro y corresponden a modos moviéndose a la derecha.

<sup>14</sup>El factor conforme  $\Omega$  deja invariante la métrica bajo transformaciones conformes

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta} = \Omega^2(x^\gamma) g_{\alpha\beta}$$

El determinante  $\sqrt{-g}$  y la métrica contravariante transforman como

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} &\rightarrow \sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^2 \sqrt{-g} \\ g^{\alpha\beta} &\rightarrow \tilde{g}^{\alpha\beta} = \Omega^{-2} g^{\alpha\beta},\end{aligned}$$

de manera que los factores  $\Omega^2$  y  $\Omega^{-2}$  se cancelan en la acción y el espacio se trabajaría como si fuera plano.

<sup>15</sup>Dado que se está considerando un espacio  $1+1$ , el factor de normalización corresponde a  $(2\pi)^{1/2}$ , en comparación con el caso tridimensional en el cual es  $(2\pi)^{3/2}$ .

Se denomina estado de vacío de Boulware a aquél que es definido por la acción de los operadores  $\hat{b}_{\Omega}^{-}$  de manera tal que  $\hat{b}_{\Omega}^{-}|0_B\rangle = 0$ . Este estado se considera que no contiene partículas desde el punto de vista del observador asintótico alejado hasta infinito. Este vacío es singular sobre el horizonte de eventos del agujero negro, por lo que no es físicamente aceptable y dado que el vacío de Minkowski si está físicamente bien definido, para preparar el vacío de Boulware se requeriría una energía infinita.[9] Esta divergencia en la energía sobre el horizonte cause fluctuaciones de la métrica.

Para evitar las divergencias del vacío sobre el horizonte de eventos se hace necesario invocar las coordenadas de Kruskal (1.102), que no son singulares y cubren toda el espacio-tiempo de Schwarzschild, lo que las hace unas coordenadas inerciales similares a las de Minkowski, con las cuales definir adecuadamente el vacío. Para definir el vacío de Kruskal  $|0_K\rangle$ , sobre el cual el campo es regular sobre el horizonte se considera el operador destrucción  $a_{\omega}^{-}$  que aniquila el vacío de Kruskal  $a_{\omega}^{-}|0_K\rangle = 0$ , en el mismo esquema como aniquilaría el vacío de Minkowski,  $a_{\omega}^{-}|0_M\rangle = 0$  y todo estaría bien definido para establecer la teoría de campos, de manera que el vacío de Kruskal es un candidato natural para un vacío físico verdadero en presencia de un agujero negro.[10]

En contraste con la ecuación (1.52) para las transformaciones de Bogoliubov que son diagonales, en el esquema de cuantización en variedades curvas, se hace necesario extender el concepto para que los modos no sean independientes, es decir, ahora todos los modos de frecuencia positiva y negativa con respecto al tiempo  $t$ , contribuyen a los modos de frecuencia positiva para el tiempo  $\tau$ .

Entonces de acuerdo a las relaciones de conmutación dadas en (1.108) los nuevos coeficientes de Bogoliubov en el vacío de Boulware

$$\begin{aligned}\delta(\Omega - \Omega') &= [\hat{b}_{\Omega}^{-}, \hat{b}_{\Omega'}^{+}] \\ &= \left[ \int d\omega (\alpha_{\omega\Omega} \hat{a}_{\omega}^{-} - \beta_{\omega\Omega} \hat{a}_{\omega}^{+}), \int d\omega' (\alpha_{\omega'\Omega'}^{*} \hat{a}_{\omega'}^{+} - \beta_{\omega'\Omega'}^{*} \hat{a}_{\omega'}^{-}) \right] \\ &= \int d\omega d\omega' (\alpha_{\omega\Omega} \alpha_{\omega'\Omega'}^{*} \delta(\omega - \omega') - \beta_{\omega\Omega} \beta_{\omega'\Omega'}^{*} \delta(\omega - \omega')), \\ \delta(\Omega - \Omega') &= \int d\omega (\alpha_{\omega\Omega} \alpha_{\omega\Omega}^{*} - \beta_{\omega\Omega} \beta_{\omega\Omega}^{*})\end{aligned}\tag{1.109}$$

que es la condición de compatibilidad equivalente a la presentada en la ecuación (1.49) para espacio-tiempo plano

$$\hat{b}_{\Omega}^{-} = \int_0^{\infty} d\omega [\alpha_{\Omega\omega} \hat{a}_{\omega}^{-} - \beta_{\Omega\omega} \hat{a}_{\omega}^{+}].\tag{1.110}$$

Al sustituir la condición (1.110) en la ecuación (1.107) de la descripción del operador de campo, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{-i\omega u} = \int_0^{\infty} \frac{d\Omega'}{\sqrt{\Omega'}} \left( \alpha_{\Omega'\omega} e^{-i\Omega' \tilde{u}} - \beta_{\Omega'\omega}^{*} e^{+i\Omega' \tilde{u}} \right),\tag{1.111}$$



al multiplicar por  $\exp(\pm i\Omega\tilde{u})$

$$\begin{aligned} e^{\pm i\Omega\tilde{u}} \frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{-i\omega u} &= \int_0^\infty \frac{d\Omega'}{\sqrt{\Omega'}} e^{\pm i\Omega\tilde{u}} \left( \alpha_{\Omega'\omega} e^{-i\Omega'\tilde{u}} - \beta_{\Omega'\omega}^* e^{+i\Omega'\tilde{u}} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{-i\omega u \pm i\Omega\tilde{u}} &= \int_0^\infty \frac{d\Omega'}{\sqrt{\Omega'}} \left( \alpha_{\Omega'\omega} e^{-i\Omega'\tilde{u} \pm i\Omega\tilde{u}} - \beta_{\Omega'\omega}^* e^{+i\Omega'\tilde{u} \pm i\Omega\tilde{u}} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{-i\omega u \pm i\Omega\tilde{u}} &= \int_0^\infty \frac{d\Omega'}{\sqrt{\Omega'}} \left( \alpha_{\Omega'\omega} e^{-i(\Omega' \pm \Omega)\tilde{u}} - \beta_{\Omega'\omega}^* e^{+i(\Omega' \pm \Omega)\tilde{u}} \right). \end{aligned} \quad (1.112)$$

A través de la transformada de Fourier de una exponencial<sup>16</sup>, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\Omega - \Omega')\tilde{u}} d\tilde{u} = 2\pi\delta(\Omega - \Omega').$$

Si se define la función auxiliar que facilita la integración sobre la variable  $\tilde{u}$

$$F(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} e^{i\Omega u - i\omega\tilde{u}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \exp \left\{ i\Omega u + i\frac{\omega}{a} e^{au} \right\},$$

y bajo el cambio de variable  $x = e^{-au}$ , se transforma en una función  $\Gamma$  de Euler<sup>17</sup>, de manera que

$$\begin{aligned} F(\omega, \Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \exp \left\{ i\Omega u + i\frac{\omega}{a} e^{au} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^\infty dx x^{-\frac{i\Omega}{a} - 1} e^{\frac{i\omega}{a} x}. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Si se realizan las sustituciones  $b = -\frac{i\omega}{a}$  y  $s = -\frac{i\Omega}{a}$  y dado que en la ecuación (1.113),  $\text{Re}\{s\} = 0$  y la integral diverge para  $x = 0$ , entonces

$$\ln b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \left( -\frac{i\omega}{a} + \varepsilon \right) = \ln \left| \frac{\omega}{a} \right| - i\frac{\pi}{2} \text{sign} \left( \frac{\omega}{a} \right),$$

<sup>16</sup>La transformada de Fourier de la exponencial imaginaria pura  $f(t) = e^{i\omega't}$ , corresponde a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} (f(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} (e^{i\omega' t}) dt \\ &= 2\pi\delta(\omega - \omega') \end{aligned}$$

<sup>17</sup>La función  $\Gamma$  de Euler está dada por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

la cual converge para todo número real  $x > 0$  y para todo  $x$  complejo tal que  $\text{Re}\{x\} > 0$ . Algunas integrales trascendentes de tipo exponencial pueden ser abordadas por transformación a la función  $\Gamma$ , como por ejemplo:

$$\int_0^\infty x^{s-1} e^{-bx} dx = \frac{1}{b^s} \Gamma(s).$$

entonces la solución de (1.113) está dada por

$$F(\omega, \Omega) = \frac{1}{2\pi a} \exp \left( i \frac{\Omega}{a} \ln \left| \frac{\omega}{a} \right| + \frac{\pi \Omega}{2a} \text{sign} \left( \frac{\omega}{a} \right) \right) \Gamma \left( -\frac{i\Omega}{a} \right). \quad (1.114)$$

Las expresiones para los coeficientes de Bogoliubov, quedan

$$\begin{aligned} \alpha_{\Omega\omega} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega u + i\Omega \tilde{u}} d\tilde{u} = +\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^0 (-au)^{-\frac{i\Omega}{a}-1} e^{-i\omega u} du \\ &= +\frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} e^{+\frac{\pi\Omega}{2a}} e^{\frac{i\Omega}{a} \ln \left[ \frac{\omega}{a} \right]} \Gamma \left( -\frac{i\Omega}{a} \right) \\ \beta_{\Omega\omega} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i\omega u + i\Omega \tilde{u}} d\tilde{u} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^0 (-au)^{-\frac{i\Omega}{a}-1} e^{+i\omega u} du \\ &= -\frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} e^{-\frac{\pi\Omega}{2a}} e^{\frac{i\Omega}{a} \ln \left[ \frac{\omega}{a} \right]} \Gamma \left( -\frac{i\Omega}{a} \right). \end{aligned} \quad (1.115)$$

Al tomar la norma cuadrada en cada uno de los coeficientes

$$\begin{aligned} |\alpha_{\Omega\omega}|^2 &= \left( +\frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} e^{+\frac{\pi\Omega}{2a}} e^{\frac{i\Omega}{a} \ln \left[ \frac{\omega}{a} \right]} \Gamma \left( -\frac{i\Omega}{a} \right) \right) \left( +\frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} e^{+\frac{\pi\Omega}{2a}} e^{\frac{-i\Omega}{a} \ln \left[ \frac{\omega}{a} \right]} \Gamma \left( \frac{i\Omega}{a} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 a^2} \frac{\Omega}{\omega} e^{+\frac{\pi\Omega}{a}} \left| \Gamma \left( \frac{i\Omega}{a} \right) \right|^2 \end{aligned} \quad (1.116)$$

$$\begin{aligned} |\beta_{\Omega\omega}|^2 &= \left( -\frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} e^{-\frac{\pi\Omega}{2a}} e^{\frac{i\Omega}{a} \ln \left[ \frac{\omega}{a} \right]} \Gamma \left( -\frac{i\Omega}{a} \right) \right) \left( -\frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} e^{-\frac{\pi\Omega}{2a}} e^{\frac{-i\Omega}{a} \ln \left[ \frac{\omega}{a} \right]} \Gamma \left( \frac{i\Omega}{a} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 a^2} \frac{\Omega}{\omega} e^{+\frac{\pi\Omega}{a}} \left| \Gamma \left( \frac{i\Omega}{a} \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (1.117)$$

Y además entonces a partir de la identidad para el producto de funciones Gamma  $\Gamma(ix)\Gamma(-ix) = |\Gamma(ix)|^2$ , de las ecuaciones (1.116) y (1.117) se concluye que

$$|\alpha_{\Omega\omega}|^2 = e^{+\frac{2\pi\Omega}{a}} |\beta_{\Omega\omega}|^2 \quad (1.118)$$

Desde el punto de vista de un observador lejano el vacío de Kruskal  $|0_K\rangle$  contiene partículas y para determinar su densidad se emplearán los operadores de creación y destrucción de los respectivos vacíos, los  $a_\omega^\pm$  para el vacío de Kruskal y los  $\hat{b}_\Omega^\pm$  con el fin de operar sobre el vacío de Boulware. Entonces según lo establecido en la sección anterior sobre la cuantización canónica, el vacío de Kruskal correspondería a un vacío de  $(a)$  partículas y el de Boulware a un vacío de  $(b)$  partículas. Se requiere calcular el número de  $(b)$  partículas en el estado de  $(a)$  vacío. El valor esperado del operador número de  $(b)$  partículas  $\hat{N}_\Omega = \hat{b}_\Omega^+ \hat{b}_\Omega^-$  en el vacío de Kruskal  $|0_K\rangle$  correspondería a

$$\begin{aligned}
\langle \hat{N}_\Omega \rangle &\equiv \langle 0_K | \hat{b}_\Omega^+ \hat{b}_\Omega^- | 0_K \rangle \\
&= \langle 0_K | \left( \int d\omega [\alpha_{\omega\Omega}^* \hat{a}_\omega^+ - \beta_{\omega\Omega}^* \hat{a}_\omega^-] \right) \left( \int_0^\infty d\omega' [\alpha_{\omega'\Omega} \hat{a}_{\omega'}^- - \beta_{\omega'\Omega} \hat{a}_{\omega'}^+] \right) | 0_K \rangle \\
\langle \hat{N}_\Omega \rangle &= \int_0^\infty d\omega |\beta_{\omega\Omega}|^2,
\end{aligned} \tag{1.119}$$

que expresa el número de partículas con frecuencia  $\Omega$  detectadas por un observador en las interacciones exteriores del agujero negro.

En la condición de normalización de los coeficientes de Bogoliubov dada en la ecuación (1.109) si  $\Omega' = \Omega$ , entonces

$$\begin{aligned}
\int d\omega (\alpha_{\omega\Omega} \alpha_{\omega\Omega}^* - \beta_{\omega\Omega} \beta_{\omega\Omega}^*) &= \delta(\Omega - \Omega') \\
\int d\omega (\alpha_{\omega\Omega} \alpha_{\omega\Omega}^* - \beta_{\omega\Omega} \beta_{\omega\Omega}^*) &= \delta(\Omega - \Omega) \\
\int d\omega (|\alpha_{\omega\Omega}|^2 - |\beta_{\omega\Omega}|^2) &= \delta(0) \\
d\omega (|\alpha_{\omega\Omega}|^2 - |\beta_{\omega\Omega}|^2) &= 1
\end{aligned} \tag{1.120}$$

entonces, al sustituir (1.118) en la ecuación (1.120), se tiene que

$$\begin{aligned}
|\alpha_{\omega\Omega}|^2 - |\beta_{\omega\Omega}|^2 &= 1 \\
e^{+\frac{2\pi\Omega}{a}} |\beta_{\omega\Omega}|^2 - |\beta_{\omega\Omega}|^2 &= 1 \\
\left( e^{+\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1 \right) |\beta_{\omega\Omega}|^2 &= 1 \\
|\beta_{\omega\Omega}|^2 &= \frac{1}{\left( e^{+\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1 \right)}
\end{aligned}$$

De manera tal que si se identifica la constante  $a$  con la gravedad superficial  $\kappa$  del agujero negro<sup>18</sup>, entonces, el número de partículas corresponde a

$$\langle \hat{N}_\omega \rangle = \int_0^\infty d\omega |\beta_{\omega\Omega}|^2 = \left[ e^{\frac{2\pi\Omega}{\kappa}} - 1 \right]^{-1}, \tag{1.121}$$

que corresponde a una distribución planckiana de cuerpo negro, a una temperatura<sup>19</sup>

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi}, \tag{1.122}$$

denominada Temperatura de Hawking.

<sup>18</sup>En el caso del efecto Unruh, la constante  $a$  corresponde a la aceleración mantenida por el observador acelerado.

<sup>19</sup>La expresión de la temperatura de Hawking se obtiene al recuperar las constantes  $c$ ,  $G$ ,  $k_B$  y  $\hbar$  en la ecuación (1.122) de acuerdo a ([11]) la gravedad superficial de un agujero negro de Schwarzschild está dada por

$$\kappa = \frac{c^4}{4MG}.$$

### 1.2.1. Radiación de Hawking como tunelamiento cuántico

Dados los efectos cuánticos de fluctuaciones del vacío es posible, con alta probabilidad, la creación de pares partícula-antipartícula en las inmediaciones del interior del horizonte de eventos.

Bajo la discusión realizada de los modos entrantes y salientes, se asocia al modo entrante la antipartícula del par que ingresa al agujero negro, con energía negativa y su correspondiente partícula, dotada de energía positiva, se asocia con el modo saliente que emigraría hacia la región externa del agujero negro. Este fenómeno es prohibido clásicamente por la Relatividad General, la que establece que el horizonte de eventos es el límite último desde el cual cualquier señal puede escapar de la fuerte atracción gravitacional ejercida por un cuerpo, luego de haber ocurrido un colapso gravitacional.

En realidad, si se incorpora el esquema de tunelamiento cuántico, la partícula escaparía con una probabilidad distinta de cero hacia el exterior. Este efecto sucede en virtud de que la acción clásica para ésta se hace compleja y su amplitud está generalmente influenciada por su parte imaginaria<sup>20</sup> y es un fenómeno netamente radial.<sup>21</sup>

La derivación desarrollada en la sección (1.2) de la radiación Hawking que involucraba un background gravitacional fijo en el cual los campos cuánticos libres se propagasen [12], poseía una dificultad inherente al hecho de que hay varias maneras no todas equivalentes de definir las escogencias de tiempo dado. El carácter covariante de las leyes físicas exige que hay que escoger un sistema coordinado suficientemente regular en el horizonte que permita definir un vacío dependiente del observador y por lo tanto efectuar una definición rigurosa del significado de partícula.

El tunelamiento cuántico sucede cuando partículas a las que clásicamente se les haría imposible sobrepasar una barrera de potencial, desde una perspectiva cuántica presenten probabilidad diferente de cero de hacerlo.

Al considerar la métrica de Schwarzschild sin sus componentes angulares (1.92) y teniendo en cuenta la necesidad de cubrir la región cercana al radio gravitacional  $r \sim r_g$  mediante coordenadas regulares denominadas coordenadas de Painlevé-Gullstrand<sup>22</sup>, para observadores cayendo

Y al considerar la frecuencia de los modos dada por

$$\Omega = \frac{\kappa}{2\pi c},$$

entonces a partir de reconocer que la energía de los modos del campo depende de su frecuencia y de su temperatura, de acuerdo a

$$\begin{aligned} k_B T &= E = \hbar \Omega \\ k_B T &= \hbar \left( \frac{\kappa}{2\pi c} \right) \\ k_B T &= \hbar \left( \frac{\frac{c^4}{4MG}}{2\pi c} \right) \\ T &= \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} \end{aligned}$$

<sup>20</sup>Debido a que la tasa de emisión del agujero negro posee una parte imaginaria, la acción para una partícula cuyo movimiento es prohibido clásicamente se hace compleja.

<sup>21</sup>Dado que cerca al horizonte las componentes angulares de la solución, denominada de onda  $s$ , para la ecuación de onda pueden ser despreciadas y éstas serían las asociadas a un número cuántico angular  $l = 0$ .

<sup>22</sup>Correspondientes a  $(t_p, r, \theta, \phi)$ .

libremente, cuyas geodésicas son descritas por  $\frac{dr}{d\tau} < 0$ . Siendo  $\tau$  el tiempo propio y  $E$  la energía conservada por unidad de masa de los mismos, entonces

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= \frac{\frac{E}{m}}{1 - \frac{r_g}{r}} \\ \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) &= \left(\frac{E}{m}\right)^2. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Esta energía  $E$  está relacionada con la velocidad física de los observadores a través del vector de Killing  $\xi_{(t)}^\mu$  generador de la simetría temporal, de acuerdo a

$$\frac{E}{m} = -u_\mu \xi_{(t)}^\mu = -u_0,$$

en el caso en que posean una velocidad inicial cero en el infinito y una energía por unidad de masa igual a 1, entonces, para dichos observadores, existe un tiempo  $t_p$ <sup>23</sup> tal que  $\nabla_\mu t_p = -u_\mu$ . Además de acuerdo a las ecuaciones (1.123) queda expresado por

$$\begin{aligned} t_p &= t + \int^r dr' \sqrt{\frac{r_g}{r'}} \left(1 - \frac{r_g}{r'}\right)^{-1} \\ t_p &= t + 2\sqrt{r_g r} \ln\left(\frac{\sqrt{r} - \sqrt{r_g}}{\sqrt{r} + \sqrt{r_g}}\right). \end{aligned} \quad (1.124)$$

Al sustituir en la ecuación (1.92) para la métrica, se tiene que

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt_p^2 + 2\sqrt{\frac{r_g}{r}} dt_p dr + dr^2, \quad (1.125)$$

la cual es no-singular en el horizonte, y queda asociada a  $t_p$  con el cual los observadores en caída libre alcanzan la singularidad  $r = 0$  en un tiempo finito y a partir de la cual las geodésicas entrantes y salientes, para una onda  $s$  nula corresponden a

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt_p} = \pm 1 - \sqrt{\frac{r_g}{r}}. \quad (1.126)$$

La ecuación (1.126) de acuerdo a [2] describiría el movimiento de un cascarón de energía  $\omega$ , delgado, nulo y radial emitido por tunelamiento desde el interior del agujero negro de masa  $M$  para  $\dot{r} > 0$  y uno entrante de energía negativa para  $\dot{r} < 0$ .

En un campo cuántico de tipo exponencial en acople débil a la gravedad, que satisface las ecuaciones de movimiento de Hamilton dadas por (1.20) y (1.21), luego de ser recuperada la constante  $\hbar$  con el fin de efectuar una aproximación semiclásica<sup>24</sup>, es decir, al considerarlo separable en su parte real  $T(x)$ , correspondiente con la amplitud y su parte imaginaria  $T(x)$ , con su fase y expandirlas en términos de series de potencias de  $\hbar$ , a

$$\phi(x) = e^{T(x) + iS(x)}.$$

<sup>23</sup>Denominado tiempo de Painlevé.

<sup>24</sup>Denominada también aproximación WKB, discutida con más detalle en el Apéndice A.

A partir de lo obtenido en el Apéndice (A) se tiene que

$$\begin{aligned}
 \hbar^2 \nabla^2 \phi &= -m^2 \phi \\
 \nabla^2 \left( e^{T+iS} \right) &= -\frac{m^2}{\hbar^2} e^{T+iS} \\
 \nabla^2 (T+iS) + (\nabla T + i\nabla S)^2 &= -\frac{m^2}{\hbar^2} \\
 \nabla^2 T + (\nabla T)^2 - (\nabla S)^2 &= -\frac{m^2}{\hbar^2} \\
 \nabla^2 S + 2(\nabla S \cdot \nabla T) &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.127}$$

Y teniendo en cuenta la expansión citada, la amplitud y la fase del campo cuando  $\hbar$  tiende a cero estarían dados por

$$\begin{aligned}
 T(x) &= \hbar^{-1} (T_0(x) + \hbar T_1(x) + \hbar^2 T_2(x) + \hbar^3 T_3(x) + \dots) \\
 S(x) &= \hbar^{-1} (S_0(x) + \hbar S_1(x) + \hbar^2 S_2(x) + \hbar^3 S_3(x) + \dots),
 \end{aligned} \tag{1.128}$$

llevan a que la ecuación (1.127) a primer orden para  $T_0$  y  $S_0$ <sup>25</sup> se reduzca a

$$\begin{aligned}
 (\nabla T_0)^2 - (\nabla S_0)^2 &= -m^2 \\
 \nabla T_0 \cdot \nabla S_0 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.129}$$

Si se asume que la amplitud del campo  $T_0$  varía suficientemente lento respecto a la fase  $S_0$ , entonces, la primera ecuación en (1.129) se reduce a

$$(\nabla S_0)^2 = -m^2. \tag{1.130}$$

Si se considera un campo cuántico escalar sin masa, entonces su métrica estará dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & \sqrt{\frac{2M}{r}} \\ \sqrt{\frac{2M}{r}} & 1 \end{bmatrix},$$

o en componentes contravariantes

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{\frac{2M}{r}} \\ \sqrt{\frac{2M}{r}} & \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \end{bmatrix}.$$

Al sustituir en la métrica la ecuación (1.130) entonces

$$\begin{aligned}
 0 &= \left( \frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{\partial S_0}{\partial t} - \sqrt{\frac{2M}{r}} \frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 \\
 0 &= \frac{\partial S_0}{\partial t} + \left( \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}} \right) \frac{\partial S_0}{\partial r} \\
 0 &= \frac{\partial S_0}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial S_0}{\partial r} \\
 S_0 &= \pm \omega \left( t - \int^r \frac{dr}{r} \right),
 \end{aligned} \tag{1.131}$$

<sup>25</sup>Los términos de orden superior se corresponden con las correcciones cuánticas sobre el valor semiclásico  $S_0$ .

en donde fue necesario emplear la ecuación (1.126) para las geodésicas nulas radiales, de tal manera que el coeficiente de transmisión para esta acción corresponda a

$$\Gamma = e^{-\frac{2}{\hbar} \text{Im}\{S\} \Big|_{x_1}^{x_2}}. \quad (1.132)$$

Dado que el interés estará centrado en la parte imaginaria de la acción respecto a la región clásicamente prohibida<sup>26</sup>, la cual corresponde a

$$\begin{aligned} \text{Im}\{S\} &= \text{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} dr p \\ &= \text{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} dr \int_0^p dp' \\ &= \text{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} dr \int_M^{M-\omega} dH \frac{1}{\dot{r}} \\ \text{Im}\{S\} &= \text{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} dr \int_0^\omega (-d\omega') \frac{1}{\dot{r}}. \end{aligned} \quad (1.133)$$

En la ecuación (1.133) se han usado las ecuaciones de Hamilton  $\dot{r} = \frac{dH}{dp}$  y que  $H = M - \omega$  será la energía perdida por el agujero luego de que el proceso de tunelamiento se ha efectuado para el canal partícula del sistema.

En la ecuación (1.126) si se tiene en cuenta que el cascarón de energía autogravita, las geodésicas para la onda s nula saliente, son

$$\dot{r} = +1 - \sqrt{\frac{2(M - \omega')}{r}}, \quad (1.134)$$

con  $r_{in} = 2M - \epsilon$  y  $r_{out} = 2M + \epsilon$ . Por lo tanto, al sustituir en la ecuación (1.133)

$$\begin{aligned} \text{Im}\{S\} &= -\text{Im} \int_{2M}^{2(M-\omega)} dr \int_0^\omega d\omega' \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{r}}} \\ &= \pi \int_0^\omega d\omega' \left[ 4(M - \omega') \right] \\ \text{Im}\{S\} &= 4\pi\omega \left( M - \frac{\omega}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.135)$$

Un cálculo similar se aplicaría al proceso de tunelamiento por producción de pares en una localidad externa al horizonte de eventos en el cual la antipartícula ingresase a éste, lo cual implicaría que el proceso se efectuaría hacia atrás en el tiempo.<sup>27</sup> Y causaría que el valor para la parte imaginaria de

<sup>26</sup>Por ejemplo cuando se considera un vacío cuántico presente en el interior del agujero negro en el que sucediera la creación de un par partícula-antipartícula y que por tunelamiento escapara una de ellas atravesando el horizonte de eventos, venciendo una barrera de potencial clásicamente prohibida.

<sup>27</sup>Este caso se denomina tunelamiento por medio del canal antipartícula, y causa un encogimiento del agujero negro y las geodésicas entrantes dadas por la ecuación (1.134), corresponden a

$$\dot{r} = -1 + \sqrt{\frac{2(m + \omega')}{r}}.$$

la acción fuera idénticamente igual al obtenido para la ecuación (1.135). Según [2] la contribución de ambos canales aplicadas a la ecuación (1.132) lleva a un factor de Boltzmann de

$$\begin{aligned}
 \Gamma &\propto e^{-2\text{Im}\{S_{\text{Total}}\}} \\
 &\propto e^{-8\pi\omega\left(M-\frac{\omega}{2}\right)} \\
 &\propto e^{-8\pi M\omega+4\pi M\omega^2} \\
 \Gamma &\propto e^{-8\pi M\omega} \approx e^{-\beta E},
 \end{aligned} \tag{1.136}$$

en el caso que  $\omega$  sea pequeño y se desprecie el término cuadrático.<sup>28</sup>

Es así que si  $\beta = \frac{1}{T}$  corresponde al inverso de la temperatura, entonces la temperatura está dada por

$$\begin{aligned}
 \beta &= 8\pi M \\
 \frac{1}{T} &= 8\pi M \\
 T_H &= \frac{1}{8\pi M} = \frac{\kappa}{2\pi},
 \end{aligned} \tag{1.137}$$

que es la temperatura Hawking obtenida en (1.122).

---

<sup>28</sup>Considerar términos de orden superior en la aproximación semiclásica de WKB, que expresan dependencias de orden superior en  $\omega$  son tratados en [13].



## Capítulo 2

# Tunelamiento nuclear

### 2.1. El decaimiento $\alpha$

De acuerdo a [14], la teoría de Gamow[15] predice la existencia de tunelamiento cuántico a través de un pozo de potencial en el cual sucede el confinamiento de los hadrones dentro del núcleo atómico.

Considerar la ecuación de Schrödinger para resolver el problema nuclear, respecto al caso atómico lleva a la necesidad de verificar varias diferencias entre estas dos situaciones, dado que en el primero no existe una estructura central que proporcione el potencial de enlace; sino es el efecto colectivo de varios nucleones moviéndose en algún potencial efectivo medio dentro de éste. Para tal fin es conveniente uno de naturaleza central en una primera aproximación, para el cual la ecuación de movimiento corresponde a

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) \psi(\mathbf{r}) &= E\psi(\mathbf{r}) \\ \left( \nabla^2 + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) \right) \psi(\mathbf{r}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

siendo  $E$  el valor propio de la energía, los cuales también son autoestados del operador momentum angular, que se conserva, en el caso de simetría esférica; de tal manera que se tiene invarianza rotacional. Dado que los autoestados de éste son los armónicos esféricos  $Y_{l,m_l}(\theta, \phi)$ <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>El laplaciano en coordenadas cartesianas es un operador diferencial espacial de segundo orden dado por:

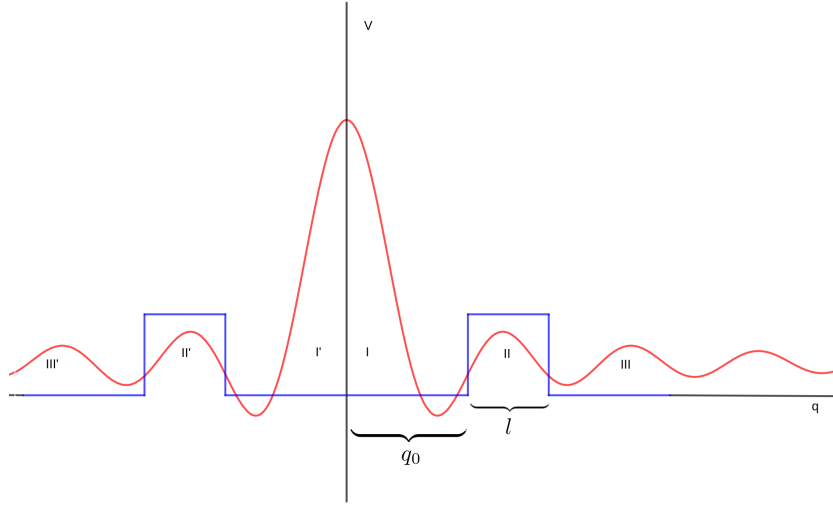
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

y en coordenadas esféricas tiene la estructura:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\hbar^2 r^2} L^2,$$

de tal manera que:

$$\begin{aligned} L^2 Y_{l,m_l}(\theta, \phi) &= -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] \\ L_z Y_{l,m_l}(\theta, \phi) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} Y_{l,m_l}(\theta, \phi) = \hbar m_l Y_{l,m_l}(\theta, \phi). \end{aligned}$$



**Figura 2.1:** Dos barreras de potencial simétricas en el modelo de Gamow. Tomado de [15].

Al asumir una función de onda separable en su parte radial y angular, respectivamente en la forma

$$\psi_{nlm_l}(\mathbf{r}) = \frac{u_{nl}(r)}{r} Y_{l,m_l}(\theta, \phi), \quad (2.2)$$

Con lo que la ecuación (2.1) adquiere la forma radial

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E_{nl} - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right) \right) u_{nl} = 0. \quad (2.3)$$

Se hace necesario asumir una forma particular del potencial  $V(r)$  para inferir acerca de los niveles de energía. Dos expresiones de potencial que llevan a soluciones cerradas o exactas, corresponden al pozo de potencial cuadrado infinito y el de oscilador armónico, pero no brindan información acerca del proceso de tunelamiento a través de la barrera.

El primer caso es el potencial

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r \geq R, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases}$$

siendo  $R$  el radio nuclear. Entonces la ecuación (2.3). toma la forma

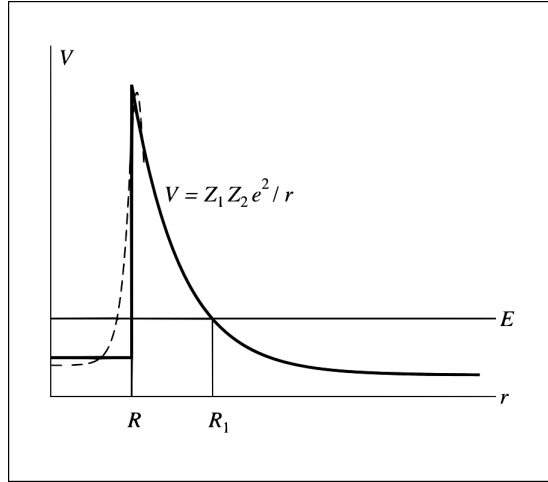
$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E_{nl} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right) \right) u_{nl} = 0,$$

cuyas soluciones regulares en el origen, corresponden a las funciones de Bessel esféricas oscilatorias

$$u_{nl}(r) = j_l(k_{nl}r) = 0, \quad n \geq 1,$$

pues los nucleones no pueden escapar ante la presencia del pozo de potencial infinito y por lo tanto las funciones de onda radial se anulan en la frontera. Siendo

$$k_{nl} = \sqrt{\frac{2mE_{nl}}{\hbar^2}}.$$



**Figura 2.2:** Barrera de potencial para el decaimiento  $\alpha$  con un potencial más realista dado por la línea punteada. Tomado de [16].

El siguiente potencial teórico a considerar es el de oscilador armónico tridimensional dado por:

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2,$$

de manera que la ecuación de Schrödinger radial es

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E_{nl} - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right) \right) u_{nl} = 0,$$

cuya solución son los polinomios asociados de Laguerre, tal que la función de onda es de la forma:

$$u_{nl} \approx e^{-\frac{m\omega^2 r^2}{2\hbar}} r^{l+1} L_{\frac{n+l-1}{2}}^{\frac{l+1}{2}} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} r \right),$$

con valores propios de la energía para los estados ligados correspondientes con

$$E_{nl} = \hbar\omega \left( 2n + l - \frac{1}{2} \right), \quad n \geq 1.$$

Siguiendo a [16] el decaimiento  $\alpha$  nuclear corresponde a la emisión de partículas  $\alpha^2$  ante la acción de un potencial como el mostrado en la figura (2.2), en donde  $R$  es el radio del núcleo hijo cuando  $r > R$  corresponde a un proceso de repulsión y cuando  $r < R$  ésta es atraída por un potencial considerado de pozo rectangular por facilidad, cuya profundidad está dada por (B.10).

De manera que el coeficiente de transmisión está dado por

$$T = \exp \left( -\frac{2\sqrt{2M}}{\hbar} \int_R^{R_1} \sqrt{V-E} dr \right), \quad (2.4)$$

<sup>2</sup>Estas partículas corresponden a núcleos de Helio con carga eléctrica  $Z_1 = 2$ , cuya energía es del orden de los MeV, las cuales son apreciablemente menores que las correspondientes a la repulsión coulombiana entre ésta y el núcleo hijo con carga  $Z_2 = Z - 2$  y siendo  $Z$  la carga del núcleo que se desintegra.

para un potencial

$$V = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad R < r < R_1,$$

$$V = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_1} = E$$

siendo  $R_1$  el punto de retorno clásico, en el cual se cumple la condición  $V(R_1) = E$  para  $E$  correspondiente con la energía de expulsión. De acuerdo a la sustitución

$$\frac{r}{R_1} = \text{sen}^2(\varphi), \quad \frac{R}{R_1} = \text{sen}^2(\varphi_0),$$

el coeficiente de transmisión queda

$$T = \exp\left(-\frac{2\sqrt{2M}}{\hbar} \int_R^{R_1} \sqrt{V-E} dr\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{2\sqrt{2M}}{\hbar} \int_R^{R_1} \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_1} - E} dr\right)$$

$$= \exp\left[-\frac{2\sqrt{2M}}{\hbar} \sqrt{E} \frac{1}{2} R_1 (\pi - 2\varphi_0 - \text{sen}(2\varphi_0))\right]$$

$$T = \exp\left[-\frac{2\sqrt{2M}}{\hbar} \sqrt{E} R_1 \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{R_1}}\right)\right]$$

$$\ln(T) = \ln\left(\exp\left[-\frac{2\sqrt{2M}}{\hbar} \sqrt{E} R_1 \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{R_1}}\right)\right]\right)$$

$$\ln(T) = -\frac{2\sqrt{2M}}{\hbar} \sqrt{E} R_1 \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{R_1}}\right)$$

$$\ln(T) = -\frac{2\pi e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2M}{E}} Z_2 + \frac{8e}{\hbar} \sqrt{Z_2 M R}$$

$$\ln(T) = c - \frac{a}{\sqrt{E}},$$

de manera que los parámetros  $a$  y  $c$ , están dados por

$$a = \frac{2\pi e^2}{\hbar} \sqrt{2M} Z_2$$

$$c = \frac{8e\pi}{\hbar} \sqrt{Z_2 M R}$$

Si se considera que  $v$  es la velocidad de impacto de la partícula  $\alpha$  sobre la pared interna de la barrera, que puede ser estimada a partir de la relación energía cinética clásica  $v = \sqrt{2E/M}$  a la cual ésta escaparía.

Si se asume que la partícula está confinada en una caja de ancho  $R$  y ésta tiene la mínima energía, de manera que se acomode solamente media longitud de onda de De Broglie, tal que

$$R \sim \lambda_B = \frac{h}{p} \sim \frac{h}{Mv} \implies R \sim \frac{h}{MR}.$$

Así que la constante de decaimiento  $\lambda$ <sup>3</sup> está dada por

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{v}{2R} T = \frac{\hbar/MR}{2R} T \\
 \lambda &\approx \frac{\hbar}{MR^2} T \\
 \ln(\lambda) &= \ln\left(\frac{\hbar}{MR^2} T\right) \\
 \ln(\lambda) &= \ln\left(\frac{\hbar}{MR^2}\right) + \ln(T) \\
 -\ln(\lambda) &= -\ln\left(\frac{\hbar}{MR^2}\right) - \ln(T) \\
 \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= -\ln\left(\frac{\hbar}{MR^2}\right) - \ln(T) \\
 \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= -\ln\left(\frac{\hbar}{MR^2}\right) - \left(c - \frac{a}{\sqrt{E}}\right) \\
 \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= -\ln\left(\frac{\hbar}{MR^2}\right) - c + \frac{a}{\sqrt{E}} \\
 \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= -b + \frac{a}{\sqrt{E}},
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

con

$$b = c + \ln\left(\frac{\hbar}{MR^2}\right) = \frac{8e}{\hbar} \sqrt{Z_2 MR} + \ln\left(\frac{\hbar}{MR^2}\right).$$

Esto muestra que en el decaimiento  $\alpha$  la constante  $b$  varía muy lentamente con el número atómico  $Z_2$  y puede considerarse una constante, mientras que varía con éste linealmente, es decir en una gráfica del logaritmo de la vida media

$$T_{1/2} \equiv \frac{\ln(2)}{\lambda} = -c_1 + \frac{c_2}{\sqrt{E}} Z_2$$

Por ejemplo, para el átomo de Polonio 210, se predice una vida media de desintegración del orden de 138,76 días [17]. En tal esquema para dicho átomo los valores involucrados en la ecuación para el coeficiente de transmisión  $T$ , en el que se considera la atracción coulombiana entre el núcleo hijo  $Z_2 = 84 - 2 = 82$ , una partícula alfa  $Z_1 = 2$  y un núcleo padre  $Z = 84$ ; para un potencial

$$V = k_e \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r},$$

calculado en el punto de retorno clásico  $R_1$ , en el cual la energía  $E = 5,304 \text{ MeV}$ , se corresponde con el valor del potencial

$$V_C(R_1) = E = \frac{k_e Z_1 Z_2 e^2}{R_1} = 5,304 \text{ MeV},$$

<sup>3</sup>Esta expresión se obtiene en la ecuación (B.25) del apéndice B

entonces, el valor de  $R_1$ , se corresponderá con

$$\begin{aligned}
 V_C(R_1) = E &\implies R_1 = \frac{k_e Z_1 Z_2 e^2}{E} = \frac{k_e Z_1 Z_2 e^2}{E} \\
 &= \frac{k_e Z_1 Z_2 e^2}{5,304 \text{ MeV}} \\
 &= \frac{9 \times 10^9 Z_1 Z_2 e^2}{5,304 \text{ MeV}} \\
 &= \frac{9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{c^2} (2 \times 82) (1,602 \times 10^{-19})^2 c^2}{5,304 \times 10^6 (1,602 \times 10^{-19} Nm)} \\
 &= \frac{9 \times 2 \times 82 \times 1,602}{5,304} \times 10^{-6} \times 10^{-10} m \\
 R_1 &= 4,4580503 \times 10^{-14} m.
 \end{aligned}$$

Al considerar la distancia de confinamiento del pozo de potencial  $R$  al radio nuclear de acuerdo a la fórmula empírica

$$\begin{aligned}
 R &= r_0 A^{1/3} \\
 &= 1,2 \times 10^{-15} m \times 210^{1/3} \\
 R &= 7,13 \times 10^{-15} m.
 \end{aligned}$$

La energía del proceso, según [17] corresponde a

$$\begin{aligned}
 E &= 5,304 \text{ MeV} = 5,304 \times 10^6 eV \\
 &= 5,304 \times 10^6 (1,602 \times 10^{-19} J) \\
 &= 5,304 \times 1,602 \times 10^{-13} J = 8,497008 \times 10^{-13} J \\
 E &= 0,8497008 \times 10^{-12} J,
 \end{aligned}$$

y el término que acompaña la integral

$$\begin{aligned}
 \frac{2\sqrt{2M}}{\hbar} &= \frac{2\sqrt{2 \times 4 \times (1,673) 10^{-27} kg}}{1,0546 \times 10^{-34} J \cdot s} \\
 &= \frac{2\sqrt{2 \times 4 \times (1,673) 10^{-27} kg^{1/2}}}{1,0546 \times 10^{-34} J \cdot s} \\
 &= \frac{2\sqrt{2 \times 4 \times (1,673) 10^{-27} kg^{1/2}}}{1,0546 \times 10^{-34} J \cdot s} \\
 \frac{2\sqrt{2M}}{\hbar} &\approx 2,19 \times 10^{21} \frac{kg^{1/2}}{J \cdot s},
 \end{aligned}$$

Al calcular entre  $R$  y  $R_1$  esta integral numéricamente, entonces, la tasa de transmisión en el modelo de Gamow (2.4) corresponde a

$$T_{1/2} \approx 71,4 \text{ días}$$

cuyo orden de magnitud está en perfecto acuerdo con las medidas experimentales.

De acuerdo a [18], el potencial entre un proyectil y un objetivo para la  $l$ -ésima onda parcial es

$$V_l(r) = V_N(r) + V_C(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} = V_0(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}, \quad (2.6)$$

en donde  $V_N(r)$  y  $V_C(r)$  son los potenciales nuclear y de Coulomb, respectivamente, siendo la barrera de Coulomb el caso  $l = 0$ .

Teniendo en cuenta a [19], al emplear la aproximación WKB, la probabilidad de transmisión, está dada por

$$T_l(E) = \left(1 + e^{2S_l(E)}\right)^{-1}. \quad (2.7)$$

La integral de acción asociada a la penetración de la barrera de potencial está dada por

$$\begin{aligned} S_l(E) &= \int_{r_{1l}}^{r_{2l}} p \, dr \\ &= \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}} \int_{r_{1l}}^{r_{2l}} \left[ V_0(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} - E \right]^{1/2} dr, \end{aligned} \quad (2.8)$$

en donde  $r_{1l}$  y  $r_{2l}$  corresponden a los puntos clásicos de retorno para la  $l$ -ésima onda parcial de la barrera de potencial.

En el caso en el cual se considere una barrera de potencial de estructura parabólica

$$V_0(r) = V_{B0} - \frac{1}{2}\mu^2\Omega^2(r - r_0)^2, \quad (2.9)$$

en donde  $V_{B0} = V_l(r_0)$  es la altura de la barrera de potencial para la onda  $s$  y  $\Omega$  sea su curvatura. Por lo tanto la probabilidad de transmisión, está dada por la fórmula de Hill-Wheeler<sup>4</sup>, presentada en [20]

$$T_0(E) = \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E - V_{B0})}\right]^{-1}. \quad (2.10)$$

Para verificar cómo es la distribución de las barreras, dada por la expresión  $E\sigma$ , y sus segundas derivadas. La determinación de las probabilidades de penetración para las diferentes ondas parciales, en el caso de un sistema unidimensional.<sup>5</sup>

La dependencia de la probabilidad de transmisión con  $l$  a una energía dada, está dada por

$$T_l \simeq T_0 \left[ E - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R^2(E)} \right], \quad (2.11)$$

<sup>4</sup>En el caso de considerarse energías por debajo de la barrera de potencial parabólica existen desviaciones significativas, con lo cual la fórmula de Hill-Wheeler no se cumple.

<sup>5</sup>Esto significa que no se consideran acoples a un sistema interno, por lo tanto son despreciados, lo cual favorece la utilización de este modelo en la barrera de potencial supuestamente presente en el horizonte de eventos. En el caso de asumirse un núcleo con estructura interna y asociar a ésta grados de libertad internos intrínsecos sobre la sección transversal eficaz de fusión, es necesario resolver ecuaciones para varios canales acoplados, que determinan las funciones de onda del movimiento relativo, como se expresa en [18].

en donde  $\mu R^2(E)$ , corresponde al momento de inercia efectivo y  $R^2(E)$ , es una función suave de la energía.<sup>6</sup> Dado que en el estudio de reacciones nucleares por debajo de la barrera de Coulomb, uno de los observables experimentales es

$$\sigma(E) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l(E),$$

denominada la sección eficaz; cuando muchos valores de  $l$  son importantes en el fenómeno, esta suma se aproxima a una integral, de manera que

$$E\sigma(E) = \pi R^2(E) \int_{-\infty}^E T_0(E') dE'. \quad (2.12)$$

Esta expresión aproxima a un nivel bastante preciso los datos experimentales para la sección transversal de fusión total, lo cual se evidencia en [21], [22] y [23]. Al derivar dos veces la ecuación (2.12), se tiene que la derivada respecto de la energía de la probabilidad de transmisión de la onda  $s$  es más o menos proporcional a la segunda derivada de  $E\sigma$  respecto a la energía, o lo que es equivalente a que

$$\frac{dT_0(E)}{dE} \sim \frac{1}{\pi R^2(E)} \frac{d^2}{dE^2} (E\sigma(E)) + \mathcal{O}\left(\frac{dR}{dE}\right). \quad (2.13)$$

La ecuación (2.13) puede ser empleada para aproximar la primera derivada de la probabilidad de tunelamiento para la onda  $s$ . En un sistema netamente clásico  $T_0$  es igual a la unidad por encima de la barrera de potencial y cero por debajo de ésta; así que dicha cantidad corresponde a una distribución delta cuyo pico aparece para un valor de la energía que es igual a la altura de la barrera. Al combinar las ecuaciones (2.11) y (2.12) y al hacer la asociación  $R(E) \rightarrow r_0$ , es posible obtener una conexión directa entre la sección transversal de fusión y la distribución de momentum angular

$$T_l(E) = \frac{1}{\pi r_0^2} \left( \frac{d(E'\sigma(E'))}{dE'} \right), \quad (2.14)$$

en donde

$$E' = E - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r_0^2}.$$

Para los casos en los cuales la energía está por encima de la barrera de potencial, se puede emplear un potencial parabólico como el presentado en la ecuación (2.9), además al realizar la asignación  $R(E) \rightarrow r_0$  y sustituir (2.10) en (2.12). Se obtiene la expresión para la sección transversal

$$\sigma(E) = \frac{\hbar^2 \Omega r_0^2}{2E} \ln \left[ 1 + e^{\left[ \frac{2\pi}{\hbar \Omega} (E - V_{B0}) \right]} \right], \quad (2.15)$$

la cual en el límite clásico, cuando la curvatura del potencial es casi nula,  $\Omega \rightarrow 0$ , o equivalentemente,  $E \geq V_{B0}$ , la ecuación (2.15) se reduce a

$$\sigma(E) = \pi r_0^2 \left( 1 - \frac{V_{B0}}{E} \right). \quad (2.16)$$

Un potencial que más se ajusta al nuclear, corresponde al potencial efectivo para el decaimiento en clúster en el modelo autoconsistente de Skyrme-Hartree-Fock (SHF) [24]. Usado particularmente

---

<sup>6</sup>Para aplicaciones en física nuclear  $R(E)$ , se reemplaza por la posición de la barrera de onda  $s$ , a una distancia  $r_0$ .



en el cálculo del decaimiento  $\alpha$  y determinación de espectros de vida media, así como a la investigación de los anchos de decaimiento de estados moleculares en isótopos de Berilio y Carbono.<sup>7</sup> En tal esquema un núcleo padre está compuesto por una partícula  $\alpha$  y un núcleo hijo, interactuando a través de un potencial

$$V(r) = V_N(r) + V_C(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \left( l + \frac{1}{2} \right)^2,$$

que tiene una estructura funcional similar al modelo de Gamow, siendo  $V_N(r)$  el potencial nuclear,  $V_C(r)$  el potencial de Coulomb y la barrera centrífuga modificada por el denominado potencial centrífugo modificado de Langer, en el cual  $l$  y  $\mu$  son respectivamente, el momentum angular del clúster y la masa reducida del sistema clúster-núcleo.

## 2.2. Conversión interna

Otro fenómeno nuclear de importancia en el cual se analiza la conversión de pares electrón-positrón, a partir de la emisión de un fotón por medio de una transición nuclear, conociendo sólo sus funciones de onda para una distribución de carga nuclear y es independiente de la función de onda del núcleo, es el proceso de conversión interna. Éste está fuertemente conectado con la conversión de estados electrónicos ligados, dado que la energía de excitación de un núcleo es transferida a un estado ligado de un electrón, así que es excitado a un continuo de energía positiva.<sup>[25]</sup> Para ejemplificar esta situación se seguirá la perspectiva de <sup>[26]</sup>, en la que se considera las probabilidades de transición  $P_{e^+e^-}$  electrón-positrón y del fotón  $P_\gamma$ . Los cuales se encuentran relacionados por el coeficiente de conversión de pares (PCC), dado por

$$\beta = \frac{P_{e^+e^-}}{P_\gamma}, \quad (2.17)$$

que corresponde a la razón de las probabilidades de producción de pares respecto a la de emisión de un fotón para una transición nuclear con energía  $\omega$ . Dado que la energía del electrón y el positrón toma valores continuos, entonces,  $\beta$  se puede expresar como una integral del espectro del positrón  $\frac{d\beta}{dE}$ <sup>8</sup> con respecto a la energía del positrón  $E$

$$\beta(\omega) = \int_1^{\omega-1} \frac{d\beta(E)}{dE} dE. \quad (2.18)$$

Esta teoría se halla fuertemente vinculada con la conversión de electrones estados ligados, en la cual la energía de excitación de un núcleo excitado es transferida a un electrón de estado ligado y a su vez éste es excitado a un continuo de energía, de manera que la razón de probabilidades de una vacante en el cascarón interno electrónico y la subsecuente emisión de un fotón, es el coeficiente de conversión  $\alpha$

$$\alpha = \frac{P_{e^-}}{P_\gamma}. \quad (2.19)$$

Dicho electrón creado puede ocupar un estado ligado con energía  $E_b$ , de manera que positrones monoenergéticos cuya energía cinética es  $E_{e^+}^{kin} = \omega + E_b - 2$ . Para tal fin se hace necesario un

<sup>7</sup>El cual es una modificación del potencial nuclear de Woods-Saxon

<sup>8</sup>Denominado coeficiente diferencial de conversión de pares (DPCC).

hamiltoniano no perturbado  $\hat{H}_0$  que describe electrones moviéndose en un campo externo  $V(r)$  correspondiente con el generado por el núcleo y los fotones libres, mientras que la interacción entre los nucleones y los electrones moviéndose en el campo del fotón está representado por el operador  $\hat{H}^{int}(t) = \int d^3x \hat{U}(x)$ ; de manera tal que la ecuación de movimiento para un vector de estado  $|\phi\rangle$  tiene la forma

$$i \frac{d}{dt} |\phi\rangle = \hat{H}^{int}(t) |\phi(t)\rangle \quad (2.20)$$

La matriz  $\hat{S}$  hace referencia a aquel operador que transforma el sistema desde un estado inicial  $|\phi(t = -\infty)\rangle$  a un estado final  $|\phi(t = +\infty)\rangle$ , los cuales son vectores propios del hamiltoniano sin perturbar  $\hat{H}^0$ , de manera que

$$|\phi(t = +\infty)\rangle = \hat{S} |\phi(t = -\infty)\rangle, \quad (2.21)$$

en donde la matriz  $\hat{S}^9$  tiene la forma

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}^n \\ \hat{S} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \cdots \int d^4x_n \hat{T}[\hat{U}(x_1) \hat{U}(x_2) \cdots \hat{U}(x_n)], \end{aligned} \quad (2.22)$$

en la imagen de interacción el operador  $\hat{U}(x)$  se obtiene a partir de los operadores de corriente  $\hat{j}(x)$  y el de campo electromagnético  $\hat{A}(x)$ , de acuerdo a

$$\hat{U}(x) = e \hat{j}(x) \hat{A}(x), \quad (2.23)$$

entonces para los estados inicial  $|i\rangle$  y final  $|f\rangle$ ,

$$S_{if}^{(n)} = \langle f | \hat{S}^{(n)} | i \rangle, \quad (2.24)$$

permiten calcular las probabilidades de transición.

En el caso de la emisión de un fotón, al considerar expansión perturbativa a primer orden en la matriz  $\hat{S}$  dada en (2.22)

$$\begin{aligned} \hat{S}^{(1)} &= -ie \int d^4x \hat{j}(x) \cdot \hat{A}(x) \\ &= -ie \int d^4x \left( \hat{\phi}(x) \gamma \hat{\phi}(x) \cdot \hat{A}(x) \right) \\ &= -ie \int d^4x \left( \hat{\phi}_\nu(x) \gamma \hat{\phi}_\nu(x) \hat{A}^\mu(x) \right) \\ &= -ie \int d^4x \left( \hat{\phi}_\nu(x) \gamma \hat{\phi}_\nu(x) \sum_s [\hat{c}_s A_s^\mu(x) + \hat{c}_s^\dagger (A_s^\mu(x))^*] \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

<sup>9</sup>En este contexto se hace uso del operador ordenamiento temporal dado por:

$$\hat{T}[\hat{U}(t_1, x_1), \hat{U}(t_2, x_2)] = \begin{cases} \hat{U}(x_1) \hat{U}(x_2), & \text{para } t_1 > t_2 \\ \hat{U}(x_2) \hat{U}(x_1), & \text{para } t_1 < t_2. \end{cases}$$

en donde se ha considerado un operador de campo electromagnético descrito en términos de los operadores de creación  $\hat{c}_s^\dagger$  y destrucción  $\hat{c}_s$  del campo electromagnético,  $A_s^\mu$  sus funciones propias y siendo  $\gamma$  las matrices de Dirac.

Al invocar el gauge de Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , para funciones de onda transversas con paridad  $(-1)^L$  son denominadas potenciales vectoriales magnéticos y los que  $(-1)^{L+1}$  son los eléctricos. El índice  $s$  hace referencia a la energía  $\omega$ , el momentum angular  $L$ , el número cuántico magnético  $M$  y la paridad  $\tau$ , ya sea eléctrica o magnética. Las funciones de onda normalizadas sobre la esfera de radio nuclear  $\omega R_N \gg 1$ , son respectivamente

$$A_L^{M \text{ mag}}(x) = \sqrt{\frac{\omega}{R_N}} A_L^{M(m)}(\omega x) e^{-i\omega t} \quad (2.26)$$

$$A_L^{M \text{ elec}}(x) = \sqrt{\frac{\omega}{R_N}} A_L^{M(e)}(\omega x) e^{-i\omega t} \quad (2.27)$$

$$A^0 \text{ mag}(\omega x) = A^0 \text{ mag}(\omega x) = 0. \quad (2.28)$$

Estos potenciales están normalizados de acuerdo a la escala de energía del fenómeno, en escala discreta  $\omega = (\frac{\pi}{R_N})n$ .

En la ecuación (2.25) se permite construir los elementos de matriz entre los estados inicial y final del núcleo con estados de energía  $\epsilon_i$  y  $\epsilon_f$  respectivamente. El núcleo se halla descrito en términos de funciones propias del momentum angular y la paridad, cuyos valores propios son  $(J_i, M_i)$ ,  $(J_f, M_f)$ ,  $\pi_{n_i}$  y  $\pi_{n_f}$ . El único cambio de paridad de importancia es  $\pi_n = \pi_{n_i} \pi_{n_f}$ . En el estado final hay un sólo fotón presente con números cuánticos  $L$ ,  $M$ ,  $\tau_e$  o  $\tau_m$  de manera que la ecuación (2.25), en virtud de la ecuación (2.23)

$$\begin{aligned} S_{if}^{(1)} &= -ie \sqrt{\frac{\omega}{R_N}} \int d^4x \mathbf{j}_n(x) \cdot \mathbf{A}_L^{M^*(\tau)}(\omega x) e^{-i(\epsilon_i - \epsilon_f)t} e^{i\omega t} \\ &= -i \int d^4x \mathbf{j}_n(x) e^{-i(\epsilon_i - \epsilon_f)t} e \sqrt{\frac{\omega}{R_N}} \cdot \mathbf{A}_L^{M^*(\tau)}(\omega x) e^{i\omega t} \\ &= -i \int d^4x e \sqrt{\frac{\omega}{R_N}} \langle f | \hat{j}_n | i \rangle \cdot \mathbf{A}_L^{M^*(\tau)}(\omega x) e^{i\omega t} \\ &= -i \int_0^\infty dt \int d\mathbf{r} e \sqrt{\frac{\omega}{R_N}} \langle f | \hat{j}_n | i \rangle \cdot \mathbf{A}_L^{M^*(\tau)}(\omega x) e^{i\omega t} \\ &= - \int dt e \sqrt{\frac{\omega}{R_N}} e^{i\omega t} e^{-i(\epsilon_i - \epsilon_f)t} \int_0^\infty d\tau_n \mathbf{j}(\mathbf{r}_n) \cdot \mathbf{A}_L^{M(\tau)}(\omega \mathbf{r}_n) \\ S_{if}^{(1)} &= -2\pi i U_{if}^{(1)} \delta(\epsilon_i - \epsilon_f - \omega), \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde se ha considerado que si el integrando de (2.29) es una función impar, la integral se hace cero; de manera que sólo las transiciones

$$\pi_n = (-1)^{L+1-\lambda}, \quad (2.30)$$

con:

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{para } \tau = m \\ 1, & \text{para } \tau = e, \end{cases} \quad (2.31)$$

pueden contribuir a la transición. La ecuación (2.31) es una regla de selección que implica que para un momentum angular  $L$  dado, sólo una de dos clases de fotones puede ser emitido. El símbolo  $\int_a^b d\tau_n$  indica una integración sobre un shell esférico de radio  $a$  y  $b$ . La probabilidad de emisión por unidad de tiempo corresponde a la norma de la ecuación (2.29) y está dada por

$$w_\gamma = 2\pi |U_{if}|^2 \delta(\epsilon_i - \epsilon_f - \omega). \quad (2.32)$$

El cálculo de  $P_\gamma$  involucra una suma sobre todos los estados del fotón y de todos los substratos magnéticos nucleares finales. La suma sobre la energía del fotón es reemplazada por una integral

$$\sum_\omega \rightarrow \int dn = \frac{R_N}{\pi} \int d\omega, \quad (2.33)$$

con lo que

$$P_\gamma = \frac{8\pi\alpha\omega}{2J_i + 1} \sum_{M_i=-J_i}^{+J_i} \sum_{M_f=-J_f}^{+J_f} \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} \sum_{\tau=e,m} |V_\gamma^{(\tau)}|^2, \quad (2.34)$$

con una energía de transición de

$$\omega = \epsilon_i - \epsilon_f \quad (2.35)$$

En la determinación de coeficiente de conversión de pares, en el numerador de la ecuación (2.19), se considera que no hay fotones presentes en los estados inicial ni final y por lo tanto la contribución es a segundo orden, en la expansión (2.22), así que

$$\hat{S}^2 = -\frac{1}{2}e^2 \iint d^4x d^4y \hat{T} [\hat{j}_\mu(x) \hat{A}^\mu(x) \hat{j}_\nu(y) \hat{A}^\nu(y)], \quad (2.36)$$

en donde la corriente<sup>10</sup> consiste de una parte electrónica y una parte nuclear, de acuerdo a

$$\hat{j}(x) = \hat{j}_n(x) - \hat{j}_e(x). \quad (2.37)$$

Si se expresa la corriente electrónica como

$$\hat{j}_{e\mu} = \hat{\Psi}^* \gamma_\mu \hat{\Psi}, \quad (2.38)$$

entonces los operadores de campo serán

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_t \hat{a}_t \Psi_t(x), \quad \hat{\bar{\Psi}}(x) = \sum_t \hat{a}_t^\dagger \bar{\Psi}_t(x), \quad (2.39)$$

en donde  $\Psi_t$  es la función de onda de Dirac del electrón en el campo externo y  $\hat{a}_t^\dagger$  y  $\hat{a}_t$  son los operadores de creación y destrucción, respectivamente<sup>11</sup>. En tal caso los elementos matriciales serán

$$S_{if}^{(2)} = \langle f_n f_e f_A | \hat{S}^{(2)} | i_n i_e i_A \rangle, \quad (2.40)$$

<sup>10</sup>El signo menos entre las dos corrientes corresponde a la diferencia de signo de la carga entre el núcleo y los electrones.

<sup>11</sup>Estas relaciones de anticonmutación fermiónicas están dadas por

$$\{\hat{a}_p^r, \hat{a}_q^{s\dagger}\} = \{\hat{b}_p^r, \hat{b}_q^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs}$$

siendo  $i_n$  y  $f_n$  los estados inicial y final del núcleo y los correspondientes  $i_e$  y  $f_e$  para el electrón cuyas energías son  $-E$  y  $E'$ , el número cuántico  $k$  y  $k'$ , y la proyección del momentum angular en la dirección  $z$ ,  $\mu$  y  $\mu'$ . Aquí se considera  $+E$  como la energía del positrón emitido,  $i_A$  e  $f_A$  representan los estados de vacío del fotón. El propagador del fotón, está dado por

$$\langle f_A = 0 | \hat{T}[\hat{A}^\mu(x) \hat{A}^\nu(y)] | i_A = 0 \rangle = i g^{\mu\nu} D(x-y), \quad (2.41)$$

con el propagador del fotón

$$D(x) = -\frac{1}{(2\pi^4)} \int d^4k \frac{e^{-k \cdot x}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + i0} \quad (2.42)$$

De manera que

$$\begin{aligned} \langle f_n f_e | \hat{T}[\hat{j}_\mu(\mathbf{x}) \hat{j}^\mu(\mathbf{y})] | i_n i_e \rangle &= \\ &= \langle f_n f_e | \hat{j}_\mu(\mathbf{x}) \hat{j}^\mu(\mathbf{y}) | i_n i_e \rangle \\ &= -[\mathbf{j}_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{j}_e(\mathbf{y}) e^{-i\omega t_x} e^{+i(E+E')t_y} + \mathbf{j}_n(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{j}_e(\mathbf{x}) e^{-i\omega t_y} e^{+i(E+E')t_x}], \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde se ha usado la definición de la corriente de transición nuclear, dada por

$$\mathbf{j}_n(\mathbf{x}) e^{-i(\epsilon_i - \epsilon_f)t} = \langle f | \hat{j}_n | i \rangle,$$

y  $\omega$ , dada por (2.35), de manera que la corriente electrónica, sea

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_e(\mathbf{x}) e^{i(E+E')t} &= \langle f_e | \hat{j}_e(\mathbf{x}) | i_e \rangle \\ &= \bar{\Psi}_f(\mathbf{x}) \gamma \Psi_i(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Entonces, la ecuación (2.40) toma la forma

$$\begin{aligned} S_{if}^{(2)} &= \langle f_n f_e f_A | \hat{S}^{(2)} | i_n i_e i_A \rangle \\ &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\tau_n \int_{-\infty}^{\infty} d^3\tau_e \mathbf{j}_n(\mathbf{r}_n) \cdot \mathbf{j}_e(\mathbf{r}_e) \int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_e)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{1}{k^2 - k_0^2 - i0} \int_{-\infty}^{\infty} dt_e e^{i(E+E'+k_0)t_e} \int_{-\infty}^{\infty} dt_n e^{-i(\omega+k_0)t_n} \\ &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\tau_n \int_{-\infty}^{\infty} d^3\tau_e \mathbf{j}_n(\mathbf{r}_n) \cdot \mathbf{j}_e(\mathbf{r}_e) \int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_e)} \times \\ &\times (2\pi) \delta(k^2 - \omega^2 - i0) \frac{1}{k^2 - k_0^2 - i0} (2\pi) \delta(E + E' - \omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt_n e^{-i(\omega+k_0)t_n} \\ &= \frac{ie^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\tau_n \int_{-\infty}^{\infty} d^3\tau_e \mathbf{j}_n(\mathbf{r}_n) \cdot \mathbf{j}_e(\mathbf{r}_e) \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_e)}}{k^2 - \omega^2 - i0} \delta(E + E' - \omega) \\ &= \frac{ie^2}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} d\tau_n \int_0^{\infty} d\tau_e \mathbf{j}_n(\mathbf{r}_n) \cdot \mathbf{j}_e(\mathbf{r}_e) (2i\pi) \frac{e^{i\omega|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_e|}}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_e|} \delta(E + E' - \omega) \\ &= -\frac{ie^2}{(2\pi)^2} \underbrace{\int_0^{\infty} d\tau_n \int_0^{\infty} d\tau_e \mathbf{j}_n(\mathbf{r}_n) \cdot \mathbf{j}_e(\mathbf{r}_e) (2i\pi) \frac{e^{i\omega|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_e|}}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_e|}}_{U_{if}^{(2)}} \delta(E + E' - \omega) \\ S_{if}^{(2)} &= -2\pi i U_{if}^{(2)} \delta(E + E' - \omega). \end{aligned} \quad (2.45)$$

La norma de la ecuación (2.45) corresponde a la densidad de probabilidad de emisión de un par positrón, electrón, por unidad de tiempo

$$w_{e^+,e^-} = 2\pi |U_{if}^{(2)}|^2 \delta(E + E' - \omega). \quad (2.46)$$

La probabilidad de producción de pares corresponde a la suma y el promedio sobre todos los subestados del núcleo y sobre todos los estados electrónicos iniciales y finales. Nuevamente de acuerdo a los reemplazos,

$$\sum_{\omega} \rightarrow \int dn = \frac{R_N}{\pi} \int d\omega,$$

se llega a que

$$P_{e^+,e^-} = \frac{2\pi}{2J_i + 1} \sum_{M_i=-J_i}^{+J_i} \sum_{M_f=-J_f}^{+J_f} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu=-j}^{+j} \sum_{\mu'=-j'}^{+j'} w_{e^+,e^-}, \quad (2.47)$$

en donde se ha tenido en cuenta que

$$w_{e^+,e^-} = \int_1^{\omega-1} |U_{if}^{(2)}|^2 dE, \quad (2.48)$$

para

$$E' = \omega - E. \quad (2.49)$$

## Capítulo 3

# El principio holográfico

Siguiendo a Bousso [27], se dice que un principio de la Física es una clave reconocible para establecer una ley subyacente aún no manifestada, pero que brinda pistas cercanas de la estructura que ésta debe tener. En la segunda ley generalizada de la termodinámica, el Principio Holográfico se encuentra en esta dirección, al pretender establecer un patrón aún no explicado acerca del contenido de información que es posible contener en ciertas regiones del espaciotiempo. Así que se espera que una teoría que involucre este principio debe unificar materia, gravedad y Mecánica Cuántica, en un esquema que trascienda a la Relatividad General y a la Teoría Cuántica de Campos. Esto tiene que ver con que aquéllas teorías son locales y así que al proponer la existencia de grados de libertad en cada punto del espacio, pareciera que el contenido de información en una región espacial determinada crecería con el volumen. En su contraparte, el Principio Holográfico establece que éstos están más bien relacionados con el área de las superficies en el espaciotiempo y a su vez llama la atención sobre la noción de localidad, tan importante en la unitariedad de la Mecánica Cuántica.

Por lo tanto, los acercamientos más sustanciales en esa dirección se espera lo posean como una de sus características, es decir, éste sea un elemento que puede ayudar a esclarecer los pormenores que una eventual teoría cuántica de la gravedad debería tener, pues exhibe una correspondencia entre las áreas y la información.

Asumir esta relación, con el fin de definir un análogo con la segunda ley, debe llevar a la consideración de una segunda ley generalizada de la termodinámica a partir de que el establecimiento de la entropía de un sistema, dependiente de sus  $N$  grados de libertad.<sup>1</sup> Dicha noción de entropía asociada a un agujero negro, se debe primordialmente a Bekenstein [28], quien determinó una cota sobre los sistemas de materia, al asumir una simetría esférica y gravedad débil; base sobre la cual 't Hooft y Susskind formulan el Principio Holográfico.

Es necesario realizar varias reformulaciones a esta cota y otras que se desprenden de suyo,<sup>2</sup> con el fin de acercarse a la cota más general sobre la entropía maximal de los sistemas de materia, pues el razonamiento de que el área de las superficies acota la entropía encerrada en volúmenes espaciales no es siempre cierta; dado que las teorías actuales no imponen una cota inferior fundamental

---

<sup>1</sup>Que resultará correspondiente con el logaritmo de la dimensión de su espacio de Hilbert  $\mathcal{N}$  y que además se corresponde con el número de bits de información, multiplicado por  $\ln 2$ .

<sup>2</sup>Por ejemplo la cota de entropía como de espacio de Susskind y la cota de entropía covariante de Bousso.

sobre ésta. Se espera que la cota de entropía covariante sea la clave necesaria, ya que daría al principio holográfico un carácter de universalidad independiente de suposiciones a priori sobre la estructura de la gravedad cuántica<sup>3</sup> o el requerimiento de la unitariedad, relacionada con la pérdida de información en agujeros negros; pues su validez puede ser probada empleando Teoría Cuántica de Campos y Relatividad General.[29], [30] Esta consideración de las cotas de entropía, por ejemplo el empleo de la cota de entropía esférica aplicada a un sistema de materia ordinaria, en vez de agujeros negros, lleva a una saturación de esta<sup>4</sup>, por ejemplo al analizar un sistema correspondiente con un gas de radiación a temperatura  $T$  y energía  $E$ , en un recipiente esférico de radio  $R \geq 2E$ ; con el fin de que el sistema no se transforme en un agujero negro, para el cual se desprecian los efectos de autogravitación. En condiciones semiclásicas y al considerar la ley de Stefan Boltzmann<sup>5</sup> para una esfera de energía, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{E}{V} &= \sigma T^4 \\ E &\approx ZVT^4 \\ E &\approx ZR^3T^4,\end{aligned}\tag{3.1}$$

siendo  $Z$  la constante de proporcionalidad correspondiéndose con el número de especies de partículas en el gas<sup>6</sup>, además

$$\begin{aligned}T^4 &\approx \frac{E}{ZR^3} \\ T &\approx \sqrt[4]{\frac{E}{ZR^3}} \\ T &\approx E^{\frac{1}{4}}Z^{-\frac{1}{4}}R^{-\frac{3}{4}},\end{aligned}\tag{3.2}$$

luego la entropía asociada es

$$\begin{aligned}S &\approx ZR^3T^3 \\ &\approx ZR^3\left(E^{\frac{1}{4}}Z^{-\frac{1}{4}}R^{-\frac{3}{4}}\right)^3 \\ &\approx ZZ^{-\frac{3}{4}}R^3R^{-\frac{9}{4}}E^{\frac{3}{4}} \\ &\approx Z^{\frac{1}{4}}R^{\frac{3}{4}}E^{\frac{3}{4}} \\ S &\approx Z^{\frac{1}{4}}(RE)^{\frac{3}{4}}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

<sup>3</sup>Como sí se requiere en la Teoría de Cuerdas.

<sup>4</sup>Esta saturación es asociada al denominado problema de las especies.

<sup>5</sup>La cual establece la proporcionalidad entre la potencia de emisión y la temperatura de la superficie emisora,  $E = \sigma T^4$ .

<sup>6</sup>En el contexto de una teoría holográfica, la dualidad AdS/CFT, ( $AdS(5) \otimes S(5)$ ) en diez dimensiones[31], Susskind[32] muestra que dichos agujeros poseen un radio de Schwarzschild por lo menos mayor o del tamaño del radio de curvatura  $R$ , éstos son estables y al decaer no se evaporan. En este contexto las ecuaciones de campo de Einstein 5—dimensionales con constante cosmológica negativa y una constante  $G$  de Newton gravitacional 10—dimensional; obtiene una ley de Stefan-Boltzmann en una teoría de Yang-Mills supersimétrica:

$$E_{sym} = c \frac{R^8}{G} T_{sym}^4 = c N^2 T_{sym}^4,$$

en donde la constante de proporcionalidad se correspondería con  $\sim N^2$  campos cuánticos en la teoría gauge  $U(N)$ , asociados a un gas térmico de cuerpo negro con  $N^2$  especies de cuantos propagándose en la frontera de un holograma.[33]



Y de acuerdo a la condición de estabilidad

$$R \geq 2E \Rightarrow E \leq \frac{R}{2} \Rightarrow E^{\frac{3}{4}} \leq \frac{R^{\frac{3}{4}}}{(2)^{\frac{3}{4}}}, \Rightarrow E^{\frac{3}{4}} \lesssim R^{\frac{3}{4}},$$

por lo tanto de la ecuación (3.4)

$$S \lesssim Z^{\frac{1}{4}} A^{\frac{3}{4}}, \quad (3.4)$$

y al considerar que el tamaño del sistema debe ser mucho mayor que la escala de Planck,  $A \gg 1$ . Lo cual puede fallar si  $Z \gtrsim A$ .<sup>7</sup>

Bajo la suposición adicional de autogravitación muy pequeña ( $E \lesssim R$ ), los argumentos de la cota de Bekenstein serían aplicables a la cota esférica, y dado que en aquella la constante de Newton aparece implícitamente, en cambio en la cota esférica no hay un equivalente cuando la gravedad "se apaga",<sup>8</sup> Además a menos que se asuma (3.19), la cota esférica no hace referencia a la energía contenida dentro de la región, lo que hace difícil definir energía en espaciotiempo curvo, sin afectar dicha cota. Sobre todo cuando su existencia es necesaria para la validez de la segunda ley generalizada de la termodinámica<sup>9</sup>.

Entonces, la cuestión radica en conocer cuántos grados de libertad existen en la naturaleza a nivel fundamental<sup>10</sup>, así que siguiendo a Susskind [37] y 't Hooft [38], [39], [40]; se requiere de un mundo tridimensional para combinar la Mecánica Cuántica y la gravedad, así que éste sea una imagen de información almacenada en una proyección bidimensional. En dicha perspectiva sólo se precisa de un grado de libertad discreto por área de Planck.

Que el número de partículas crezca con relación al momentum, se corresponde con el despliegue de información cerca de horizontes de agujeros negros.<sup>11</sup> Si se supone que el mundo es una red tridimensional de grados de libertad como de spin, con un parámetro de red  $a$  del orden de la longitud de Planck, para la cual en cada sitio de red existe un spin con uno de dos estados posibles y con un número de estados ortogonales distintos  $N = N(V)$  en una región  $V$  del espacio dado por

$$N = 2^n, \quad (3.5)$$

<sup>7</sup>En el caso de un protón, se necesitarían  $Z \gtrsim 10^{40}$  para violar la cota esférica [34]. Para el caso de la cota de Bekenstein se espera que la cota falle con un número de especies  $N \sim 10^9$  [35], [36].

<sup>8</sup>Es decir para espaciotiempo plano.

<sup>9</sup>Pues por ejemplo si se asume un sistema esféricamente simétrico distinto a un agujero negro ( $R > 2E$ ) viola la cota esférica pues  $S > \frac{A}{4} = \pi R^2$ . Al colapsar un shell esférico de masa  $M = \frac{R}{2} - E$  dentro del sistema con lo que debería resultar un agujero negro de Schwarzschild de radio  $R$ , pero la entropía de éste sería  $\frac{A}{4}$ , con lo que se tendría que la entropía generalizada decrecería, pero eso no es tan importante pues, el agujero se haría catastróficamente inestable dado que su tiempo de evaporación sería más pequeño que el tiempo de colapso.

<sup>10</sup>Por ejemplo, si se define el número de grados de libertad de un sistema mecanocuántico  $N$  correspondiente con el logaritmo de la dimensión de su espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , es decir:

$$N = \ln(\dim(\mathcal{H})).$$

<sup>11</sup>Esta aseveración surge en el contexto de la teoría de cuerdas.[41]

en donde  $n$  es cada uno de los sitios en  $V$ . Por lo que

$$\begin{aligned}\ln(N) &= \ln(2^n) \\ &= n \ln 2 \\ &= \frac{V}{a^3} \ln 2 \\ \ln(N) &= \frac{V}{l_p^3} \ln 2,\end{aligned}\tag{3.6}$$

Si se piensa una teoría de campo en el continuo, formada por osciladores armónicos, claramente, el número de estados cuánticos es divergente, lo que obliga a limitarlos a partir de cierta cota en la densidad de energía  $\rho_{max}$ , que lleva a que la densidad de entropía termodinámica<sup>12</sup>  $s$  como función de  $\rho$ :

$$S = s(\rho)V,\tag{3.7}$$

con lo que el número total de estados es

$$N_{estados} \sim e^S = e^{s(\rho_{max})V},\tag{3.8}$$

así que

$$\ln(N_{estados}) \sim \ln(e^S) = S \ln(e) = S,\tag{3.9}$$

entonces, al comparar (3.6) y (3.9), se tiene que la entropía máxima es

$$S_{max} = \frac{V}{l_p^3} \ln 2 = n \ln 2,\tag{3.10}$$

la cual es proporcional al volumen, o mejor decir proporcional al número de grados de libertad simple que describen el sistema. Si se supone que el sistema considera la gravedad y se piensa contenido en una región  $\Gamma$  con frontera  $\partial\Gamma$  cuya área es  $A$ . Este sistema termodinámico no puede exceder la masa del agujero negro de la misma área  $A$ , pues sino sería más grande que la región. Ahora, si se colapsa un shell esféricamente simétrico de materia con justo la cantidad de energía que junto con la masa original forman un agujero negro que llena la región  $\Gamma$ . [42] El resultado de dicho proceso es un sistema de entropía conocida  $S = \frac{A}{4G}$ . Pero que al emplear la segunda ley generalizada de la termodinámica, se asegura que la entropía original dentro de  $\Gamma$  es menor o igual que  $\frac{A}{4G}$ . De modo que el número de grados de libertad con un bit de información en cada celda, (ver figura 3.1) de acuerdo a la ecuación (3.10), serán

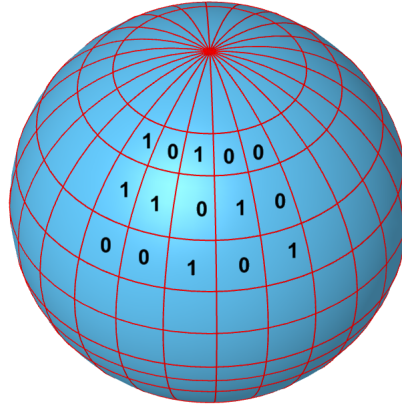
$$n = \frac{S_{max}}{\ln 2} = \frac{\frac{A}{4}}{\ln 2} = \frac{A}{4 \ln 2}.\tag{3.11}$$

En otras palabras la entropía máxima de una región del espacio es proporcional a su área medida en unidades de Planck, tales cotas son llamadas holográficas.

Esto muestra la sospecha de que no hay más grados de libertad de los cuales hablar, más que los que se pueden dibujar en la superficie. La situación puede ser comparada con un holograma de una imagen tridimensional proyectado sobre una superficie bidimensional.

---

<sup>12</sup>El conteo de estados involucra la entropía que es a su vez el logaritmo del número de estados accesibles del sistema.



**Figura 3.1:** Información de un bit por celda de Planck sobre el horizonte de un agujero negro. Tomado de [38].

Dado que la entropía de un agujero negro también se refiere a todos los campos físicos fuera del horizonte, los mismos grados de libertad determinan lo que ocurre en ese lado. De hecho, esto debería tenerse para cualquier superficie bidimensional que se extienda hasta el infinito.<sup>13</sup>

## 3.1. Cotas a la entropía

### 3.1.1. La cota de Bekenstein

Para considerar la entropía [43], [28], [44] de un agujero negro es importante hacer referencia al hecho de que el área del horizonte de eventos de un agujero negro nunca decrece con el tiempo,<sup>14</sup> además si éste es estacionario estará caracterizado solamente por su masa, momentum angular y carga, de manera que después de un proceso de colapso el estado final es único.<sup>15</sup> Esto permite establecer que la suma de la entropía común de los alrededores en las vecindades de un agujero negro y la de éste nunca decrece. Por lo tanto la entropía de Bekenstein-Hawking debe ser del orden de

$$S_{BH} \approx \eta k_B l_P^{-2} A, \quad (3.12)$$

<sup>13</sup>Esto sugiere que los grados de libertad en el espacio tridimensional no son independientes sino que si son considerados a una escala planckiana, éstos deben estar infinitamente correlacionados.

<sup>14</sup>Es decir  $dA \geq 0$ , es el denominado Teorema del área de [45]

<sup>15</sup>Es el teorema de no pelo de Carter [46]

siendo  $l_P$ <sup>16</sup> la longitud de Planck,  $k_B$  la constante de Boltzmann y  $A$  el área del agujero negro, constantes adicionadas por consideraciones dimensionales, pues si se considera que la entropía debe ser una función monótona no decreciente del área; la elección más simple es  $S_{BH} = \eta A$ <sup>17</sup>.

Para un agujero negro de Kerr, se tienen los parámetros masa  $M$ , carga  $Q$  y momentum angular  $J$  relacionados de acuerdo a

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{4\pi(r_+c^2 - GM)}{A} \\ \Omega &= \frac{4\pi J}{MA} \\ \Phi &= \frac{4\pi Qr_+}{A}\end{aligned}\tag{3.13}$$

donde

$$r_+ = c^{-2} \left[ GM + (G^2 M^2 - J^2 M^{-2} c^2 - GQ^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

y

$$A = 4\pi G c^{-4} \left[ 2GM^2 - Q^2 + 2(G^2 M^4 - J^2 c^2 - GM^2 Q^2)^{\frac{1}{2}} \right],$$

así que la conexión entre la diferencia en energía de dos estados de equilibrio de agujero negro, las diferencias de áreas de los horizontes de eventos, así como el momentum angular y la carga, serán

$$d(Mc^2) = \frac{\kappa c^2}{8\pi G} dA + \Omega dJ + \Phi dQ.\tag{3.14}$$

Del mismo modo como en la segunda ley de la termodinámica se relacionan el volumen la entropía y la energía

$$dU = TdS - pdV,\tag{3.15}$$

(A.3) y (A.5), además de la expresión para la temperatura de Hawking dada en (1.122) o en (1.135); entonces

$$\begin{aligned}\frac{\kappa c^2}{8\pi G} dA &= TdS \\ \frac{\kappa c^2}{8\pi G} dA &= \frac{\kappa}{2\pi} dS \\ \frac{c^2}{4G} A &= S_{BH}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

<sup>16</sup> $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,6 \times 10^{-33} \text{ cm}$ . Es decir que en unidades naturales,  $l_P^{-2} = \hbar$

<sup>17</sup>Para lo que Bekenstein establece  $\eta = \frac{\ln 2}{8\pi}$

La anterior relación es equivalentemente a<sup>18</sup>

$$S_{BH} = \frac{1}{4}A, \quad (3.17)$$

cuando  $G = c = 1$ . Esto muestra que el valor de  $\eta = 1/4$  difiere del inicialmente establecido por Bekenstein. La segunda ley generalizada establecería que al incrementar  $S_{BH}$  en una cantidad de entropía común de materia y radiación cayendo al agujero  $S_c$ , esta suma no decrece con el tiempo<sup>19</sup>. Además si se considera un rayo estrecho de radiación de cuerpo negro a temperatura  $T$ , el cual se dirige hacia un agujero negro de masa  $M$  y asumiéndose que la óptica geométrica es aplicable, pues las longitudes de onda características de la radiación deben ser más pequeña que  $M$ , entonces  $T \gg \frac{\hbar}{k_B M}$ , luego  $\frac{1}{T} \ll \frac{k_B M}{\hbar}$  y para una energía dada la entropía es  $S = \frac{E}{T}$ ; entonces la entropía será

$$S = \frac{1}{T}E \ll \frac{k_B M E}{\hbar} \quad (3.18)$$

De modo que para un sistema termodinámicamente estable de radio  $R$  gravitando débilmente circunscrito a la esfera más pequeña que lo contiene, se tiene que

$$S_{mat} \leq 2\pi E R, \quad (3.19)$$

que es la cota de Bekenstein.

### 3.1.2. La cota de entropía esférica

Otra manera de encontrar una cota adecuada a la entropía es dejar caer el sistema de materia en el agujero negro<sup>20</sup>, para posteriormente convertirlo en el agujero negro mismo, suponiendo que la estructura asintótica de la variedad espacio-tiempo  $\mathcal{M}$  lo permita. Y si  $A$  corresponde al área de la esfera que circunscribe el sistema, el cual debe poseer una masa  $M$ , mucho menor que la del agujero negro asociado a la misma área, de manera que dicho sistema sea gravitacionalmente estable.<sup>21</sup>

Se espera que dicho agujero sea formado al colapsar un shell de masa  $M - E$  sin esperar que radíe o eyecte masa, se deja que inicialmente esté bastante separado del sistema. Dado que su entropía  $S_{shell}$  no es negativa, entonces, la entropía inicial del sistema termodinámico es

$$S_{ini-total} = S_{mat} + S_{shell}, \quad (3.20)$$

así como el estado final

$$S_{fin-total} = S_{BH} = \frac{A}{4}. \quad (3.21)$$

<sup>18</sup>En este procedimiento de integración se ha asumido que la constante de integración es cero si se asume que la entropía tiende a cero cuando la masa tiende a cero

<sup>19</sup>O equivalentemente  $\Delta S_{BH} + \Delta S_c = \Delta(S_{BH} + S_c) > 0$

<sup>20</sup>Es el proceso de Geroch.

<sup>21</sup>Es el proceso de Susskind.

Por la segunda ley generalizada de la termodinámica tiene que cumplirse que la entropía de la ecuación (3.20) no debe exceder la entropía final, entonces  $S_{shell}$  no puede ser negativa.[36] Del hecho de asumir que el sistema gravitacionalmente estable, se tiene que  $2M \leq R$ ,<sup>22</sup> entonces de acuerdo a la ecuación 3.19 para la cota de Bekenstein

$$S \leq 2\pi MR \leq 2\pi \left(\frac{R}{2}\right) R = \pi R^2 = \frac{A}{4}, \quad (3.22)$$

de manera que se muestra que la cota de entropía esférica es más débil que la cota de Bekenstein.<sup>23</sup>

Ahora, siguiendo a 't Hooft [47], si se consideran un campos cuánticos escalares en coordenadas esféricas cuatridimensionales  $\Phi_i(r, \theta, \phi, t)$  en un punto fijo  $r_1$  en las vecindades de un horizonte de eventos y tal que  $r_1 = r_+ + h$ , para una distancia  $h > 0$ ; los cuales interactúan con un campo gravitacional; sometidos a las condiciones de frontera

$$\Phi_i(r, \theta, \phi, t) = 0, \quad r \leq r_1, \quad i = 1, 2 \dots N, \quad (3.23)$$

Se supone que estos campos se encuentran a una temperatura de Hawking  $T_H$  asociada a una entropía de Bekenstein-Hawking  $S_{BH}$ , para una densidad de estados cuánticos con un corte a una distancia  $h$  a determinar, en una caja de radio  $L$ , y la condición

$$\Phi_i(r, \theta, \phi, t) = 0, \quad r \geq L, \quad i = 1, 2 \dots N, \quad (3.24)$$

En este sistema en particular, para partículas bosónicas, la densidad lagrangiana en la métrica de Schwarzschild es

$$\mathcal{L}(x, t) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_t \Phi_i^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \partial_r \Phi_i^2 - r^{-2} \partial_\Omega \Phi_i^2. \quad (3.25)$$

El lagrangiano está dado por

$$\int_{r_1}^L \int d\Omega r^2 \mathcal{L}(r, \Omega, t), \quad (3.26)$$

de manera tal que la ecuación de movimiento para los modos del campo con energía  $E(n, l, l_3)$ , tiene la forma

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 \Phi^2 + \frac{1}{r^2} \partial_r r (r - 2M) \partial_r \Phi - \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2\right) \Phi = 0. \quad (3.27)$$

En la condición  $r = 2M$ , se suaviza la singularidad en el término del medio en la ecuación (3.27), para la cual  $r - 2M = e^\sigma$ , entonces

$$\left[ r E^2 + \frac{1}{r^2} \partial_\sigma r \partial_\sigma - e^\sigma \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right) \right] \Phi = 0, \quad r = 2M + e^\sigma. \quad (3.28)$$

La solución para el campo  $\Phi$  en (3.28) en términos de la coordenada  $\sigma$  posee un comportamiento oscilatorio, el cual puede ser aproximado por

$$e^{\pm i \int k(\sigma) d\sigma} = e^{\pm i \int k(r) dr}, \quad (3.29)$$

<sup>22</sup>Pues su radio de Schwarzschild  $r_s = R = \frac{2GM}{c^2} = 2M = 2E$ , en unidades naturales.

<sup>23</sup>Sin embargo aunque ésta se encuentra más cercanamente relacionada al principio holográfico, puede ser moldeada en una forma más general y covariante, al considerar la cota de entropía covariante de Bousso.

siendo  $k(\sigma)$  determinada por

$$rE^2 - \frac{1}{r}k(\sigma)^2 - e^\sigma \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right) = 0, \quad (3.30)$$

de modo que

$$k(r)^2 = e^{-2\sigma} k(\sigma)^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} E^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right). \quad (3.31)$$

Si se toma  $k(r)^2 = 0$  en la ecuación (3.31), entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} E^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right) \\ \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} E^2 &= \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right) \\ E^2 &= \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right) \\ E(n, l, l_3) &= \pm \sqrt{\left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Así que en (3.28) el espectro de energía, estará dado por

$$\pi n = \int_{r_1}^L dr k(r, l, E), \quad (3.33)$$

en la cual  $n > 0$ ,  $l$  y  $l_3$  son enteros.

Si se considera el número total  $\nu$  de soluciones de onda con energía que no excede  $E$

$$\begin{aligned} g(E) &= \nu \pi \int \pi n(2l+1) dl \\ &= \int_{r_1}^L dr \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \int (2l+1) dl \sqrt{\left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right)}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

La energía libre de Helmholtz, está dada por

$$\begin{aligned}
 e^{-\beta F} &= \sum e^{-\beta E} = \prod_{i=1}^N \prod_{n,l,l_3} \frac{1}{1 - e^{-\beta E(n,l,l_3)}} \\
 \ln(e^{-\beta F}) &= \ln\left(\prod_{i=1}^N \prod_{n,l,l_3} \frac{1}{1 - e^{-\beta E}}\right) \\
 -\beta F &= \ln\left(\underbrace{\prod_{n,l,l_3} \frac{1}{1 - e^{-\beta E}} \prod_{n,l,l_3} \frac{1}{1 - e^{-\beta E}} \cdots \prod_{n,l,l_3} \frac{1}{1 - e^{-\beta E}}}_{N \text{ veces}}\right) \\
 \beta F &= -\ln\left[\left(\prod_{n,l,l_3} \frac{1}{1 - e^{-\beta E}}\right)^N\right] \\
 \beta F &= N \ln\left[\left(\prod_{n,l,l_3} \frac{1}{1 - e^{-\beta E}}\right)^{-1}\right] \\
 \beta F &= N \ln\left[\left(\prod_{n,l,l_3} 1 - e^{-\beta E}\right)\right] \\
 \beta F &= N \sum_v \ln\left(1 - e^{-\beta E}\right), \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

y en virtud de la ecuación (3.34), se tiene que en función del número de estados

$$\begin{aligned}
 \pi \beta F &= N \int dg(E) \ln(1 - e^{-\beta E}) \\
 \pi \beta F &= -N \int_0^\infty dE \frac{\beta g(E)}{e^{\beta E} - 1} \\
 \pi \beta F &= -\beta N \int_0^\infty dE \int_{r_1}^L dr \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \times \\
 &\quad \times \int dl (2l+1) (e^{\beta E} - 1)^{-1} \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2\right)}, \quad r_1 = 2M + h. \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la aproximación

$$m^2 \ll \frac{2M}{\beta^2 h}, \quad L \gg 2M, \tag{3.37}$$

entonces las principales contribuciones a (3.36), para la energía libre de Helmholtz, llevan a que

$$F \approx -\frac{2\pi^3 N}{45h} \left(\frac{2M}{\beta}\right)^4 - \frac{2}{9\pi} L^3 N \int_m^\infty \frac{dE (E^2 - m^2)^{\frac{3}{2}}}{e^{\beta E} - 1}, \tag{3.38}$$

Dado que se quiere poner en manifiesto la contribución del horizonte a la energía libre de Helmholtz, entonces, el segundo término en (3.38) se despreciará, pues hace referencia a la contribución del vacío circundante al agujero negro a grandes distancias,  $m \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, queda

$$F \approx -\frac{2\pi^3 N}{45h} \left(\frac{2M}{\beta}\right)^4, \tag{3.39}$$



así que las propiedades termodinámicas energía total  $U$  y entropía  $S$ , pueden determinarse de acuerdo a

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left( -\frac{2\pi^3}{45h} \left( \frac{2M}{\beta} \right)^4 N \beta \right) \\
 &= -\frac{2\pi^3}{45h} (2M)^4 N \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta^{-3}) \\
 &= -\frac{2\pi^3}{45h} (2M)^4 N (-3\beta^{-4}) \\
 U &= \frac{2\pi^3}{15h} \left( \frac{2M}{\beta} \right)^4 N, \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

luego la entropía queda

$$\begin{aligned}
 S &= \beta(U - F) \\
 &= \beta \left\{ \frac{2\pi^3}{15h} \left( \frac{2M}{\beta} \right)^4 N - \left[ -\frac{2\pi^3 N}{45h} \left( \frac{2M}{\beta} \right)^4 \right] \right\} \\
 &= \beta \left\{ \frac{2\pi^3}{h} \left( \frac{2M}{\beta} \right)^4 N \left[ \frac{1}{15} + \frac{1}{45} \right] \right\} \\
 &= \beta \left\{ \frac{2\pi^3}{h} \left( \frac{2M}{\beta} \right)^4 N \left[ \frac{4}{45} \right] \right\} \\
 S &= \frac{8\pi^3}{45h} (2M) \left( \frac{2M}{\beta} \right)^3 N. \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, según la ecuación (1.122) para la temperatura Hawking, se tiene que al comparar con las ecuaciones de la termodinámica de agujeros negros (3.4), el parámetro de corte está dado por

$$h = \frac{NG}{720\pi M} \tag{3.42}$$



## Capítulo 4

# La dinámica de los Black Shells

Para realizar la discusión del Black Shell se seguirá el enfoque proporcionado por Israel [48] y Poisson [11], en los cuales se lo considera como una hipersuperficie que modela el colapso de Snyder-Oppenheimer, a partir del enlace de dos campos frontera, interno y externo, en el colapso gravitacional de una estrella respecto al campo exterior vacío de Schwarzschild. Este proceso puede asemejarse a una nube de polvo que se contrae desde infinito hasta su radio gravitacional, presenta una métrica regular y sus líneas de flujo son geodésicas.

Se dice que una hipersuperficie será ortogonal si toda congruencia<sup>1</sup> de geodésicas es ortogonal, en todo punto a una familia de hipersuperficies como de espacio, esto es, según se aprecia en la figura (4.1).

Además si el cuadvivector  $u^\alpha$  es proporcional a la normal  $n^\alpha$ , exterior a la hipersuperficie dirigida hacia el futuro; entonces, ésta se supone queda dada por un conjunto de ecuaciones de la forma

$$\Phi(x^\alpha) = c, \quad (4.1)$$

en donde  $c$ , es una constante que especifica cada una de las correspondientes hipersuperficies y a su vez indica la proporcionalidad entre la normal y la derivada covariante de éstas, es decir

$$u^\alpha = -\mu \nabla_\alpha \Phi, \quad (4.2)$$

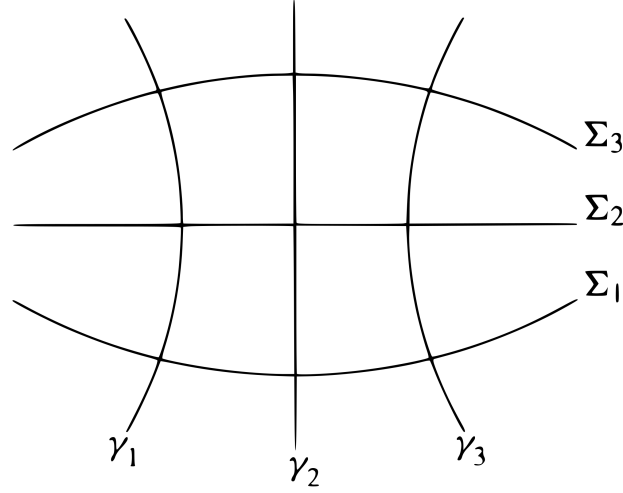
así como la condición de normalización  $u^\alpha u_\alpha = -1$ , cuando la hipersuperficie es como de espacio.

El campo vectorial  $\zeta^\mu$  será normal a la hipersuperficie  $\Sigma$  si es ortogonal a todos sus vectores en su espacio tangente  $T_p \Sigma$ , el cual es un subespacio del espacio tangente de una variedad diferenciable  $M$ , esto es

---

<sup>1</sup>Se denomina congruencia geodésica a un sistema de geodésicas que no interactúan, cuya ecuación de evolución se denomina ecuación de Raychaudhuri que involucra los tensores de cortante  $\sigma^{\alpha\beta}$ , de rotación  $\omega^{\alpha\beta}$  y de Ricci  $R_{\alpha\beta}$  y está dada por:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + \omega^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$$



**Figura 4.1:** Familias de hipersuperficies ortogonales a una congruencia de geodésicas como de tiempo. Tomado de [11]

$$\zeta^\mu = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi. \quad (4.3)$$

En el caso en el cual  $\zeta^\mu$  sea un vector como de tiempo, su hipersuperficie asociada se denomina como de espacio y viceversa. Si el vector es nulo, ésta también lo es. De manera tal que el vector normal unitario exterior viene dado por

$$n_\mu = + \frac{\zeta_\mu}{|\zeta_\mu \zeta^\mu|^{1/2}} = \frac{\varepsilon \nabla_\mu \Phi}{|g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi|^{1/2}}, \quad (4.4)$$

en donde se cumple que

$$\varepsilon = n^\alpha n_\alpha = \begin{cases} -1, & \text{Si } \Sigma \text{ es como de espacio,} \\ +1, & \text{Si } \Sigma \text{ es como de tiempo.} \end{cases} \quad (4.5)$$

La obtención de la métrica intrínseca a una hipersuperficie  $\Sigma$ , surge a través de determinar desplazamientos en ésta, los cuales quedan determinados en función de las ecuaciones paramétricas  $x^\alpha = x^\alpha(y^a)$  y los correspondientes vectores tangentes  $e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}$  a las curvas contenidas allí y por lo tanto son ortogonales a sus vectores normales. Dicho desplazamientos están dados por

$$\begin{aligned} ds^2|_\Sigma &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= g_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} dy^a \right) \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} dy^b \right) \\ &= \left( g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} \right) dy^a dy^b \\ ds^2|_\Sigma &= h_{ab} dy^a dy^b, \end{aligned} \quad (4.6)$$

siendo  $h_{ab}$  la métrica inducida o primera forma fundamental.

Con el propósito de extender el cálculo vectorial a variedades e hipersuperficies se describe el elemento de superficie a partir del determinante  $h = \text{Det}|h_{ab}|$ , el cual es un elemento de volumen invariante<sup>2</sup> sobre  $\Sigma$ , que está dado por

$$d\Sigma = |h|^{1/2} d^3y. \quad (4.7)$$

Ahora, al considerar un campo tensorial y la derivada covariante, respecto a la conexión compatible con la métrica  $g_{\alpha\beta}$  y a la métrica inducida, de manera que, por ejemplo para un campo vectorial  $A_\alpha$ , se tendría

$$\begin{aligned} A_{a|b} &= \nabla_\beta A^\alpha e_a^\alpha e_b^\beta \\ &= \nabla_\beta (A_\alpha e_a^\alpha) - A_\alpha \nabla_\beta (e_a^\alpha) e_b^\beta \\ &= \nabla_\beta A_\alpha e_b^\beta - \nabla_\beta e_{a\gamma} A^\gamma e_b^\beta \\ &= \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} - e_c^\gamma \nabla_\beta e_{a\gamma} e_b^\beta A^c \\ A_{a|b} &= A_{a,b} - \Gamma_{cab} A^c \end{aligned} \quad (4.8)$$

siendo  $\Gamma^3$  la conexión métrica compatible con la métrica inducida<sup>4</sup> y corresponde a las componentes tangenciales del vector  $\nabla_\beta A^\alpha e_b^\beta$ . Además al subir el índice covariante, empleando el tensor métrico mixto, se tiene que la componente normal de éste es

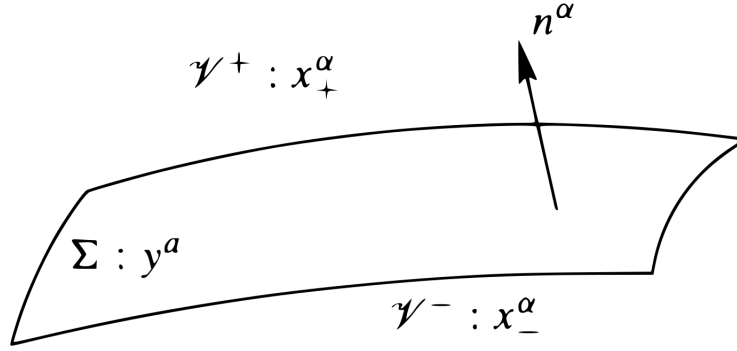
$$\begin{aligned} \nabla_\beta A^\alpha e_b^\beta &= g_\mu^\alpha \nabla_\beta A^\mu e_a^\alpha e_b^\beta \\ &= (\varepsilon n^\alpha n_\mu + h^{am} e_a^\alpha e_{m\mu}) \nabla_\beta A^\mu e_b^\beta \\ &= \varepsilon (n_\mu \nabla_\beta A^\mu e_b^\beta) n^\alpha + h^{am} (\nabla_\beta A_\mu e_m^\mu e_b^\beta) e_a^\alpha \\ &= -\varepsilon (n_\mu \nabla_\beta A^\mu e_b^\beta) n^\alpha + h^{am} A_{m|b} e_a^\alpha \\ &= A^a_{|b} e_a^\alpha - \varepsilon A^a (\nabla_\beta n_\mu e_a^\mu e_b^\beta) n^\alpha \\ \nabla_\beta A^\alpha e_b^\beta &= A^a_{|b} e_a^\alpha - \varepsilon A^a K_{ab} n^\alpha, \end{aligned} \quad (4.9)$$

<sup>2</sup>Al combinarlo con la normal exterior se genera el vector  $d\Sigma_\alpha = \varepsilon n_\alpha d\Sigma$  dirigido en la dirección de máximo incremento del campo  $\Phi$ .

<sup>3</sup> $\Gamma_{cab} = \frac{1}{2} (\nabla_b h_{ca} + \nabla_a h_{cb} - \nabla_c h_{ab})$

<sup>4</sup>La descomposición de la métrica inversa  $g^{\alpha\beta}$  en sus componentes tangencial y normal, en términos de la métrica inducida  $h^{ab}$  tiene la forma:

$$g^{\alpha\beta} = \varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta$$



**Figura 4.2:** Esquema de un espacio-tiempo unido por una frontera común. Tomado de [11]

en donde el término  $K_{ab} = \nabla_\beta n_\alpha e_a^\alpha e_b^\beta$ , se denomina curvatura extrínseca o segunda forma fundamental y corresponde a un tensor de segundo rango simétrico. Además si el vector  $A^\alpha$  es reemplazado en la ecuación (4.9) por  $e_a^\alpha$ , entonces

$$\nabla_\beta (e_a^\alpha) e_b^\beta = \Gamma_{ab}^c e_c^\alpha - \epsilon K_{ab} n^\alpha, \quad (4.10)$$

se denominan ecuaciones de Gauss-Weingarten y dan cuenta de los aspectos intrínsecos y extrínsecos de la hipersuperficie  $\Sigma$ .

Si se asume una hipersuperficie  $\Sigma$  que divide el espacio-tiempo en dos regiones  $\mathcal{V}^+$  y  $\mathcal{V}^-$ , como se muestra en la figura (4.2), de manera que las métricas  $g_{\alpha\beta}^\pm$  están dadas en términos de los sistemas coordenados  $x_\pm^\alpha$ , es necesario obtener las condiciones para las cuales éstas dos regiones se junten suavemente en  $\Sigma$  y a su vez dichas métricas sean válidas en las ecuaciones de campo de Einstein.

Esta situación lleva a las dos condiciones de juntura, que hacen referencia a que la métrica inducida a ambos lados de la hipersuperficie debe ser la misma, y la segunda, establece que la curvatura extrínseca lo debe ser también en ambos lados. Esto presupone la idea de que siempre es posible dotar a los dos lados de la hipersuperficie del mismo sistema coordenado  $y^a$  y unas normales exteriores  $n^\pm$  desde los  $\mathcal{V}^\pm$ . También es importante señalar que la discontinuidad entre las cantidades tensoriales que yacen en  $\Sigma$ , son el reflejo de su salto a través de ésta. Así que se requiere un enfoque en el sentido distribucional de aquéllas y la notación

$$[A] \equiv A(\mathcal{V}^+) \big|_\Sigma - A(\mathcal{V}^-) \big|_\Sigma. \quad (4.11)$$

Es así que por ejemplo la métrica distribucional estará dada por

$$g_{\alpha\beta} = \Theta(l) g_{\alpha\beta}^+ + \Theta(-l) g_{\alpha\beta}^-, \quad (4.12)$$

en donde se ha hecho uso de la distribución paso unitario de Heaviside<sup>5</sup> para tener en cuenta la discontinuidad. Así que al tomar la derivada de (4.12) e imponer la condición de que la métrica

<sup>5</sup>Esta distribución está dada por:

$$\Theta(l) = \begin{cases} +1, & \text{Si } l > 0, \\ 0, & \text{Si } l < 0 \end{cases}$$

y posee las propiedades:

$$\Theta^2(l) = \Theta(l), \quad \Theta(l)\Theta(-l) = 0, \quad \frac{d}{dl}(\Theta(l)) = \delta(l)$$

además se está considerando  $l$  la distancia propia o el tiempo propio a lo largo de una geodésica.

es continua a través de  $\Sigma$

$$0 = [g_{\alpha\beta}] = [g_{\alpha\beta}]e_a^\alpha e_b^\beta = [g_{\alpha\beta}]e_a^\alpha e_b^\beta = [h_{ab}]$$

se tiene que:<sup>6</sup>

$$\nabla_\gamma (g_{\alpha\beta}) = \Theta(l)\nabla_\gamma (g_{\alpha\beta}^+) + \Theta(-l)\nabla_\gamma (g_{\alpha\beta}^-) + \varepsilon\delta(l)[g_{\alpha\beta}]n_\gamma. \quad (4.13)$$

Lo que muestra que la condición necesaria es que la métrica inducida sea igual en  $\mathcal{V}^\pm$ , es decir

$$[h_{ab}] = h_{ab}^+|_\Sigma - h_{ab}^-|_\Sigma = 0, \quad (4.14)$$

que es la primera condición de juntura en el formalismo de Darmois-Israel.

Para la segunda condición de juntura<sup>7</sup> se hace necesario obtener los símbolos de Christoffel y el tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci, como derivadas de la métrica y su sentido distribucional, así como las correspondientes ecuaciones de Einstein, y por lo tanto el tensor esfuerzo energía  $T_{\alpha\beta}$  que presenta una discontinuidad en la superficie; la cual está asociada a una capa delgada de materia correspondiente al black shell, pues aquél es obtenido a partir del tensor de energía superficial,<sup>8</sup> el cual es simétrico. De manera tal que

$$S_{ab} = -\frac{\varepsilon}{8\pi} \left( [K_{ab}] - [K]h_{ab} \right). \quad (4.15)$$

Para que exista suavidad a través de  $\Sigma$ , se requiere que la curvatura extrínseca sea la misma a ambos lados y a su vez depende de que el tensor de Riemann no sea singular en esta, de modo que

$$T^{\alpha\beta}|_\Sigma = \delta(l)S^{ab}e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (4.16)$$

A partir de consideraciones que involucran el colapso gravitacional de una estrella, asumiéndola como una esfera de materia sin presión, Oppenheimer y Snyder resolvieron satisfactoriamente las ecuaciones de campo de Einstein para las regiones interna y externa, correspondientes con las métricas de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) en  $\mathcal{V}^-$  y Schwarzschild  $\mathcal{V}^+$  en respectivamente, como puede verse en la figura (4.3), además aplicando las condiciones de juntura antedichas en la superficie de la estrella.

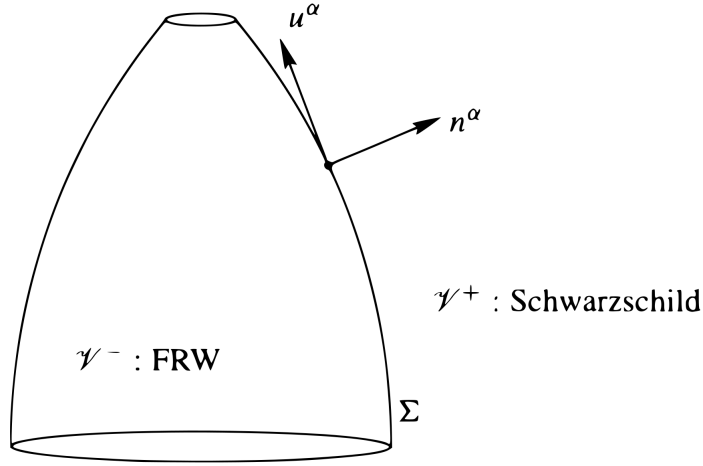
<sup>6</sup>El último término debe anularse dado que  $g_{\alpha\beta}$  es proporcional a  $\theta(l)$  en la interfaz y dado que  $\delta(l)\Theta(l)$  no está definido, este término presentaría una singularidad en  $\Sigma$

<sup>7</sup>Esta condición pretende evitar una posible singularidad de curvatura en  $\Sigma$ .

<sup>8</sup>Cuya expresión es:

$$S^{ab} = \sigma u^a u^b,$$

y siendo  $\sigma$  la densidad superficial.



**Figura 4.3:** El espacio-tiempo en el colapso gravitacional de Oppenheimer-Snyder. Tomado de [11]

De acuerdo a [49], esta solución considera un espacio  $\mathbb{R} \times \Sigma$  asociado a una (3) variedad maximalmente simétrica cuya métrica espacio-temporal con  $t$  es una coordenada como de tiempo,  $R(t)$  un factor de escala y  $d\sigma^2$  la métrica sobre  $\Sigma$ , entonces dicha métrica está dada por

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + R^2(t)d\sigma^2 \\ &= -dt^2 + R^2(t)\gamma_{ij}(u)du^i du^j \end{aligned} \quad (4.17)$$

con las  $u_i$  siendo coordenadas comóviles, para las cuales el tri-tensor<sup>9</sup> de Riemann está dado por

$$R_{ijkl}|_{(3)} = k \left( \gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk} \right) \quad (4.18)$$

en donde  $k = \frac{1}{6}R|_{(3)}$ , depende del escalar de Ricci  $R|_{(3)}$  de manera que el tri-tensor de Ricci en este esquema sería

$$R_{jl} = 2k\gamma_{jl} \quad (4.19)$$

de manera tal que para un espacio esféricamente simétrico, la métrica espacial a partir de (4.17), posee la estructura

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + R^2(t)\gamma_{ij}(u)du^i du^j \\ &= -dt^2 + R(t)(e^{2\beta(\bar{r})}d\bar{r}^2 + \bar{r}d\Omega^2) \\ ds^2 &= -dt^2 + R(t)(e^{2\beta(\bar{r})}d\bar{r}^2 + d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \end{aligned} \quad (4.20)$$

De manera tal que las componentes del tri-tensor de Ricci serían entonces

<sup>9</sup>Esto hace referencia al tensor de Riemann de la variedad tridimensional y no del espacio-tiempo.



$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{2}{\bar{r}} \partial_1 \beta \\
R_{22} &= e^{-2\beta} (\bar{r} \partial_1 \beta - 1) + 1 \\
R_{33} &= \left[ e^{-2\beta} (\bar{r} \partial_1 \beta - 1) + 1 \right] \sin^2(\theta),
\end{aligned} \tag{4.21}$$

de manera que por la ecuación (4.19), se tiene que

$$\beta = -\frac{1}{2} \ln(1 - k\bar{r}^2). \tag{4.22}$$

La métrica de la tri-superficie  $\Sigma$  será

$$d\sigma^2 = \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2. \tag{4.23}$$

Dado que se piensa en un espacio cerrado, la curvatura escalar  $k = +1$ .<sup>10</sup> Y al realizar la sustitución por una nueva coordenada radial  $\chi$

$$d\chi = \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - k\bar{r}^2}}, \tag{4.24}$$

se tiene que

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \sin^2(\chi) d\Omega^2, \tag{4.25}$$

de manera que la métrica de (FRW) (4.20) posee la forma

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -dt^2 + R^2(t) \left[ \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right] \\
&= -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right] \\
ds^2 &= -d\tau^2 + a^2(\tau) \left( d\chi^2 + \sin^2(\chi) d\Omega^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

---

<sup>10</sup>En virtud de la curvatura  $k$ , puede ser integrada la ecuación

$$d\chi = \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - k\bar{r}^2}},$$

llevando a las soluciones:

$$\bar{r} = \begin{cases} \sin(\chi), & \text{Si } k = +1 \text{ espacio cerrado,} \\ \chi, & \text{Si } k = 0 \text{ espacio plano,} \\ \sinh(\chi), & \text{Si } k = -1 \text{ espacio abierto,} \end{cases}$$

en donde se han hecho las convenciones  $a(t) = R(t)/R_0$ ,  $r = R_0\bar{r}$  y  $\kappa = k/R_0^2$  y se emplea el tiempo propio  $\tau$ . A partir de la métrica (FRW), los símbolos de Christoffel que no se hacen cero están dados por

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1 - \kappa r^2} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{\kappa r}{1 - \kappa r^2} \\
 \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2 & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2(\theta) \\
 \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 & \Gamma_{03}^3 &= \frac{\dot{a}}{a} \\
 \Gamma_{22}^1 &= -r(1 - \kappa r^2) & \Gamma_{33}^1 &= -r(1 - \kappa r^2) \sin^2(\theta) \\
 \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{33}^2 &= -\sin(\theta) \cos(\theta) & \Gamma_{23}^3 &= \cot(\theta).
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Desde luego que las componentes del tensor de Ricci distintas de cero son

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\
 R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa}{1 - \kappa r^2} \\
 R_{22} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \\
 R_{33} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \sin^2(\theta),
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

y el escalar de Ricci, queda dado por

$$R = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} \right]. \tag{4.29}$$

A partir de las ecuaciones de campo de Einstein sin constante cosmológica  $\Lambda = 0$ , y con unidades naturales  $G = c = 1$ , y el escalar de Ricci  $R = -(8\pi G)T$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \\
 R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \\
 R_{\mu\nu} &= 8\pi T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \\
 R_{\mu\nu} &= 8\pi T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \\
 R_{\mu\nu} &= 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right)
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Respecto al tensor momento energía para un fluido perfecto, el cual es isotrópico y se considera en reposo en coordenada comóviles, de manera que su cuadrivelocidad

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (4.31)$$

y su tensor momento energía está dado por

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \\ T^\mu_\nu &= \text{diag}(-\rho, p, p, p), \end{aligned} \quad (4.32)$$

y su traza

$$T = T^\mu_\mu = -\rho + 3p. \quad (4.33)$$

A partir de las ecuaciones (4.28), (4.32) y (4.33) al sustituir en la ecuación (4.30), se tiene que para la componente 00

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \\ R_{00} &= 8\pi \left( T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right) \\ -3\frac{\ddot{a}}{a} &= 4\pi(\rho + 3p). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Y las ecuaciones para  $\mu\nu = ij$ , se tiene que

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\kappa}{a^2} = 4\pi(\rho - p). \quad (4.35)$$

Sustituyendo (4.34) en (4.35) y dado que debido a la isotropía del espacio, solamente hay una ecuación distinta para  $\mu\nu = ij$ ; entonces, se tiene que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (4.36)$$

y también

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) \quad (4.37)$$

que son la primera y segunda ecuaciones de Friedmann-Robertson-Walker, dadas por (4.36) y (4.37), respectivamente.

Bajo la condición de espacio cerrado  $\kappa = 1$ , entonces la ecuación (4.36) corresponde a

$$\begin{aligned}\frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{1}{a^2} \\ \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} &= \frac{8\pi}{3}\rho \\ \frac{\dot{a}^2 + 1}{a^2} &= \frac{8\pi}{3}\rho \\ \dot{a}^2 + 1 &= \frac{8\pi}{3}a^2.\end{aligned}\tag{4.38}$$

En ausencia de presión, la densidad de masa del shell corresponde a

$$\rho a^3 = \text{cte} = \frac{3}{8\pi}a_{\text{máx}}.\tag{4.39}$$

Entonces, las ecuaciones paramétricas<sup>11</sup> de la solución de la ecuación (4.38) tienen la forma

$$\begin{aligned}a(\eta) &= \frac{1}{2}a_{\text{máx}}(1 + \cos(\eta)) \\ \tau(\eta) &= \frac{1}{2}a_{\text{máx}}(\eta + \text{sen}(\eta)).\end{aligned}\tag{4.40}$$

Para un observador co-móvil a la superficie de la estrella colapsante, la cual se encuentra en  $\chi = \chi_0$ . Las coordenadas son  $r = R(\tau)$  y  $t = T(\tau)$  y al escoger las nuevas coordenadas  $y^a = (\tau, \theta, \phi)$  sobre ésta y en virtud de la métrica obtenida en (4.26), entonces la métrica inducida sobre  $\Sigma$ , vista desde  $\mathcal{V}^-$ , corresponde a un espacio plano de Minkowski

$$ds_{\Sigma_-}^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) \text{sen}^2(\chi_0) d\Omega^2.\tag{4.41}$$

Si se hace la identificación

$$F = 1 - \frac{2M}{R},$$

la métrica vista desde  $\mathcal{V}^+$ , la cual es la métrica de Schwarzschild, está dada por

$$ds_{\Sigma_+}^2 = -(F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2)d\tau^2 + R^2(\tau)d\Omega^2.\tag{4.42}$$

Debido a que por las condiciones de juntura las métricas inducidas a ambos lados de la hipersuperficie son iguales, entonces al comparar los coeficientes de

<sup>11</sup>Estas expresiones muestran el hecho de que el colapso inicia cuando  $\eta = 0$  y termina cuando  $\eta = \pi$ .

$d\tau^2$  y  $d\Omega^2$  en las ecuaciones (4.41) y (4.42), se deben tener las condiciones

$$\begin{aligned} R(\tau) &= a(\tau) \operatorname{sen}(\chi_0) \\ 1 &= F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2. \end{aligned} \quad (4.43)$$

A partir de la la segunda ecuación en (4.43), se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2 \\ F\dot{T}^2 &= 1 + F^{-1}\dot{R}^2 \\ F\dot{T}^2 &= 1 + \frac{\dot{R}^2}{F} \\ F^2\dot{T}^2 &= F + \dot{R}^2 \\ F\dot{T} &= \sqrt{\dot{R}^2 + F} \equiv \beta(R, \dot{R}). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Teniendo en cuenta la relación de ortogonalidad  $n_\alpha u^\alpha = 0$  y de normalización  $n_\alpha n^\alpha = -1$  para la cuadrivelocidad, en términos de las coordenadas  $x^\alpha$  de la variedad; entonces la solución interior del shell, la cual corresponde a un espacio-tiempo plano, expresa que

$$\begin{aligned} x_-^\alpha &= (T(\tau), R(\tau), \theta, \phi) \\ u_-^\alpha &= e_\tau^\alpha = \frac{\partial}{\partial \tau}(x_-^\alpha) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ (T(\tau), R(\tau), 0, 0) \right] \\ u_-^\alpha &= (\dot{T}(\tau), \dot{R}(\tau), 0, 0) \\ n_\alpha^- &= (-\dot{R}(\tau), \dot{T}(\tau), 0, 0). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Similarmente para la solución externa al shell, que corresponde a un espacio-tiempo de Schwarzschild, se tiene que

$$\begin{aligned} x_+^\alpha &= (T(\tau), R(\tau), \theta, \phi) \\ u_+^\alpha &= e_\tau^\alpha = \frac{\partial}{\partial \tau}(x_+^\alpha) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ (T(\tau), R(\tau), \theta, \phi) \right] \\ u_+^\alpha &= (\dot{T}(\tau), \dot{R}(\tau), 0, 0) \\ n_\alpha^+ &= (-\dot{R}(\tau), \dot{T}(\tau), 0, 0). \end{aligned} \quad (4.46)$$

En la regiones  $\mathcal{V}^-$  y  $\mathcal{V}^+$ , se tiene que la curvatura extrínseca, o segunda forma fundamental, de acuerdo  $K_{ab} = \nabla_\beta n_\alpha e_a^\alpha e_b^\beta$  y la ecuación (4.44) puede ser obtenida a partir de los vectores normales obtenidos en (4.45) y (4.46), de manera que en  $\mathcal{V}^-$

$$\begin{aligned} K_{\theta\theta}^- &= \nabla_\theta n_\theta e_\theta^\alpha e_\theta^\beta = \dot{T}R & K_{\phi\phi}^- &= \nabla_\phi n_\phi e_\phi^\alpha e_\phi^\beta = \dot{T}R \operatorname{sen}^2(\theta) \\ g^{\theta\theta} K_{\theta\theta}^- &= K_\theta^- = \frac{\beta_-}{R} & g^{\phi\phi} K_{\phi\phi}^- &= K_\phi^- = \frac{\beta_-}{R} \\ K_{\tau\tau}^- &= \nabla_\tau n_\tau e_\tau^\alpha e_\tau^\beta = 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

De la misma forma para la región  $\mathcal{V}^+$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 K_{\theta\theta}^+ &= \nabla_\theta n_\theta e_\theta^\alpha e_\theta^\beta = \dot{T} R F & K_{\phi\phi}^+ &= \nabla_\phi n_\phi e_\phi^\alpha e_\phi^\beta = \dot{T} R F \sin^2(\theta) \\
 g^{\theta\theta} K_{\theta\theta}^+ &= K_\theta^{+\theta} = \frac{\beta_+}{F} & g^{\phi\phi} K_{\phi\phi}^+ &= K_\phi^{+\phi} = \frac{\beta_+}{R} \\
 K_{\tau\tau}^+ &= \nabla_\tau n_\tau e_\tau^\alpha e_\tau^\beta = -F' \dot{T} \\
 g^{\tau\tau} K_{\tau\tau}^+ &= \frac{\dot{\beta}_+}{F}
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Los coeficientes de la métrica inducida  $h_a^a = 1$ , para la curvatura extrínseca inducida y el escalar de Ricci inducido está dado por

$$\begin{aligned}
 [K] &= h^{ab} K_{ab} = \nabla_\alpha n_\alpha \\
 &= (K^+ - K_-) h_\tau^\tau \\
 &= (K_\tau^{+\tau} - K_\tau^{-\tau}) + (K_\theta^{+\theta} - K_\theta^{-\theta}) + (K_\phi^{+\phi} - K_\phi^{-\phi}) \\
 [K] &= [K_\tau^\tau] + [K_\theta^\theta] + [K_\phi^\phi].
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Por lo tanto la ecuación (4.15)

$$\begin{aligned}
 S_{ab} &= -\frac{\epsilon}{8\pi} \left( [K_{ab}] - [K] h_{ab} \right) \\
 &= g_b^a S_{ab} = -\frac{\epsilon}{8\pi} \left( [g_b^a K_{ab}] - [K] g_b^a h_{ab} \right) \\
 S_{ab} &= -\frac{\epsilon}{8\pi} \left( [K_b^a] - [K] h_b^a \right).
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

De acuerdo a (4.49) y los valores para las respectivas curvaturas extrínsecas, dados por (4.47) y (4.48)

$$\begin{aligned}
 S_\tau^\tau &= -\frac{\epsilon}{8\pi} \left( [K_\tau^\tau] - [K_\tau^\tau] + [K_\theta^\theta] + [K_\phi^\phi] \right) \\
 &= -\frac{\epsilon}{8\pi} (-2) \left( K_\theta^{+\theta} - K_\phi^{-\phi} \right) \\
 S_\tau^\tau &= \frac{\epsilon}{4\pi} \left( \frac{\beta_+}{R} - \frac{\beta_-}{R} \right),
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

y a partir del tensor esfuerzo-energía para un shell de materia sin presión y de la condición de normalización de cuadvectores,

$$S^{ab} = \sigma u^a u^b = \sigma g_b^a u^a u^b = S_b^a = -\sigma,$$

entonces, la ecuación (4.51) toma la forma

$$\frac{\epsilon}{4\pi} \left( \frac{\beta_+}{R} - \frac{\beta_-}{R} \right) = -\sigma. \quad (4.52)$$

Similarmente a partir de la (4.49)

$$\begin{aligned} [K] &= h^{ab} K_{ab} = \nabla_\alpha n_\alpha \\ &= (K^+ - K_-) h_\theta^\theta \end{aligned} \quad (4.53)$$

y de la ecuación (4.50), el tensor esfuerzo-energía para la componente angular y dada la condición de ortogonalidad, que  $n_\theta u^\theta = 0$  de la métrica

$$\begin{aligned} S_\theta^\theta &= -\frac{\epsilon}{8\pi} \left( [K_\theta^\theta] - [K_\theta^\theta] + [K_\theta^\theta] + [K_\phi^\phi] \right) \\ &= -\frac{\epsilon}{8\pi} \left( K_\theta^{+\theta} - K_\phi^{-\phi} \right) \\ S_\theta^\theta &= -\frac{\epsilon}{8\pi} \left( -\frac{\dot{\beta}_+}{\dot{R}} - \frac{\beta_+}{R} + \frac{\beta_-}{R} \right) = \sigma n^\theta u_\theta = \sigma(0) = 0 \\ -\frac{\dot{\beta}_+}{\dot{R}} - \frac{\beta_+}{R} + \frac{\beta_-}{R} &= 0 \\ R\dot{\beta}_+ &= (\beta_- - \beta_+)\dot{R}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Si se consideran las ecuaciones (4.47) y (4.48) y asumiendo que  $K_\theta^{-\theta} = 0$ , de manera que  $\dot{\beta}_- = 0$ ; entonces,

$$\dot{\beta}_+ = \frac{d}{d\tau} (-\beta_- + \beta_+), \quad (4.55)$$

de manera que la ecuación (4.54), queda

$$\begin{aligned} R\dot{\beta}_+ &= (\beta_- - \beta_+)\dot{R} \\ R \frac{d}{d\tau} (-\beta_- + \beta_+) &= (\beta_+ - \beta_-) \frac{dR}{d\tau} \\ -Rd(\beta_+ - \beta_-) &= (\beta_+ - \beta_-)dR. \end{aligned} \quad (4.56)$$

La ecuación (4.56) es una EDO separable, por lo tanto

$$\begin{aligned} -\int \frac{d[(\beta_+ - \beta_-)]}{d(\beta_+ - \beta_-)} &= \int \frac{dR}{R} \\ \ln(\beta_+ - \beta_-) &= -\ln R + \ln C \\ \ln(\beta_+ - \beta_-) &= \ln\left(\frac{C}{R}\right) \\ e^{\ln(\beta_+ - \beta_-)} &= e^{\left(\ln \frac{C}{R}\right)} \\ R(\beta_+ - \beta_-) &= C \end{aligned} \quad (4.57)$$

A partir de la ecuación (4.52) con  $\epsilon = 1$  y siendo  $\sigma$  la densidad superficial del shell esférico, se tiene que

$$C = R(\beta_- - \beta_+) = 4\pi\sigma$$

por lo tanto la masa  $\mu = C$  de éste estará dada por

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\mu}{4\pi R^2} \\ \mu &= 4\pi\sigma R^2 \\ \mu &= R(\beta_- - \beta_+) \\ \beta_+ &= \beta_- - \frac{\mu}{R} \\ (\beta_+)^2 &= \left(\beta_- - \frac{\mu}{R}\right)^2 \\ (\beta_+)^2 &= (\beta_-)^2 - 2(\beta_-)\left(\frac{\mu}{R}\right) + \left(\frac{\mu}{R}\right)^2.\end{aligned}\tag{4.58}$$

Ahora, teniendo en cuenta las ecuaciones (4.47) y (4.48), la ecuación (4.58), lleva a que

$$\begin{aligned}(\beta_+)^2 &= (\beta_-)^2 - 2\frac{\mu}{R}\beta_- + \frac{\mu^2}{R^2} \\ \dot{R}^2 + F &= (1 + \dot{R}^2) - \frac{2\mu}{R}(1 + \dot{R}^2)^{1/2} + \frac{\mu^2}{R^2} \\ 1 - F &= \frac{2\mu}{R}(1 + \dot{R}^2)^{1/2} - \frac{\mu^2}{R^2} \\ \frac{2M}{R} &= \frac{2\mu}{R}(1 + \dot{R}^2)^{1/2} + \frac{\mu^2}{R^2} \\ 2MR + \mu &= 2\mu R(1 + \dot{R}^2)^{1/2} \\ (1 + \dot{R}^2)^{1/2} &= \frac{2MR + \mu^2}{2\mu R} \\ \frac{dR}{d\tau} = \dot{R} &= \sqrt{\left(\frac{M}{R} + \frac{\mu}{2R}\right)^2 - 1} \\ \frac{dR}{d\tau} &= \sqrt{\left(a + \frac{M}{2aR}\right)^2 - 1},\end{aligned}\tag{4.59}$$

en donde el parámetro  $a = \frac{M}{\mu}$  se corresponde con la energías potencial gravitacional y cinética del shell. Bajo la condición de que la ecuación (4.59) posea raíces reales, se considera que la cantidad bajo la raíz debe ser positiva. Esto lleva a que para  $\mu = M$ , cuando  $R = R_{\text{máx}}$



$$\begin{aligned}
\left(a + \frac{\mu}{2aR}\right)^2 &\geq 1 \\
\frac{2a^2R + \mu}{2aR} &\geq 1 \\
2a^2R - 2aR &\geq -\mu \\
R &= \frac{\mu}{2a(1-a)} \\
R_{\text{máx}} &= \frac{M}{2a(1-a)}
\end{aligned} \tag{4.60}$$

La ecuación (4.60) al ser sustituida en (1.133) lleva a que

$$\begin{aligned}
\text{Im}\{S\} &= \text{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} dr \int_0^\omega (-d\omega') \frac{1}{\dot{r}} \\
&= -\text{Im} \int_{2M}^{2(M-\omega)} dr \int_0^\omega d\omega' \frac{1}{\sqrt{\left(a + \frac{M}{2aR}\right)^2 - 1}}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Y a partir de lo que se obtiene una tasa de emisión del orden de  $10^{30}$  años.



# Conclusiones

A pesar que históricamente la controversia sobre la existencia de tunelamiento cuántico en el fenómeno de radiación Hawking se ha centrado en la búsqueda de evidencias teóricas que soporten la suposición de la existencia de un potencial, el cual no se especifica en el modelo. Intentos de vislumbrar este esquema se cuentan entre otros a [50], y [3]. En sus análisis se considera la existencia de una acción cuya parte imaginaria es la responsable de la anulación de la parte imaginaria asociada a la variable temporal en el tiempo imaginario [2]. Esto llevaría a que el efecto túnel, en el cual existe una fuerte dependencia de la componente imaginaria de la acción, como se mostró en la ecuación (A.18) y por lo tanto según la aproximación *WKB*, como se muestra en el capítulo 2 la requiere. Por lo tanto se hace necesario ubicar la barrera de potencial que se encargue de definir la zona de tunelamiento clásicamente prohibida para un potencial prefijado, requeriría a su vez establecer la naturaleza física de éste.

Intentos mediante la aplicación del potencial de tunelamiento nuclear de Gamow, para el decaimiento  $\alpha$  que corresponde a la superposición de potenciales de pozo cuadrado y coulombiano, llevó a una ecuación para el coeficiente de transmisión a través de la barrera de potencial que indicaban tiempos de decaimiento del orden de  $10^{30}$  años, lo cual es mayor que la edad del universo. Cuestiones de índole similar surgieron al refinar el potencial con el dado en la corrección de barrera parabólica cuyo coeficiente de transmisión dado en la ecuación (2.10) y (2.11); en los que se hacen además correcciones por momento angular del potencial o en el caso de la ecuación (2.15) en la que se considera la curvatura de la barrera y se intentó correlacionar con la curvatura de agujero negro  $\kappa$  dada por la temperatura de Hawking en la ecuación (1.121) para un agujero negro de Schwarzschild de  $M = 1,44M_{\odot}$ , según establece el límite de Chandrasekhar.

Otra posibilidad explorada de encontrar un espectro planckiano para la radiación de Hawking correspondió a asumir el vacío en las inmediaciones de un agujero negro como formado por la presencia de un campo electromagnético débilmente acoplado a la gravedad, bajo la premisa de mediante el fenómeno de conversión interna de estructura nuclear, evidenciar la tasa de emisión de partículas  $\alpha$  como se expresó en la ecuación (2.34), bajo la suposición de los antedichos potenciales. En este esquema se encontraron divergencias infinitas en la probabilidad de emisión que comprueban que este mecanismo tampoco es el apropiado para dirimir la discusión acerca de la existencia de tunelamiento similar a los de índole nuclear. Esto no resta interés a la eventual búsqueda, quizá en potenciales de tipo atómico.

La situación además pone de manifiesto la necesidad de evidenciar en un proceso de formación de agujero negro cómo a partir de un shell desprendido de la estrella colapsante, cuya ecuación de movimiento quedó expresada en (4.59) y en aras de definir el fenómeno de tunelamiento fue comparada con la ecuación para las geodésicas de onda saliente dadas en (1.126) y que fue

contrastada con en el instante de formación del horizonte de eventos el contenido de materia que lo cruza puede estar a una distancia finita antes de la singularidad o correlacionado con los modos cuánticos del vacío en el horizonte. Para este fin se intentó vincular el parámetro de corte de los campos cuánticos para evitar las divergencias infrarojas asumiendo que el parámetro  $h$ , dado por la ecuación (3.42) con alguna dimensión física de las barreras de potencial de índole nuclear, pero esto llevó a divergencias mayores que violarían las cotas entrópicas dadas en la sección (3.1).

Para tal fin se evidencia la estrategia de reconocer que los campos cuánticos se hallen restringidos a una zona particular en las vecindades del agujero negro, según predice el principio holográfico, no sólo evita la necesidad de buscar un "bulk" de agujero negro, sino solamente la atención debe ser dispuesta al análisis de las correlaciones cuánticas entre la radiación remanente y los campos de materia presentes. Esto aunque lleva a fuertes divergencias en la energía, permite definir una teoría cuántica de campos a temperatura finita, generalmente muy alta, que hace que los métodos semiclásicos de cuantización no aporten un panorama general acerca de la localización y carácter cuántico de los modos allí presentes, según se presenta en el capítulo 3. Para tal fin se hace necesario visualizar una posible estructura matemática que libere el formalismo de las divergencias por cortes ultravioletas en los campos. En esa dirección la expresión del principio holográfico como un requerimiento de análisis del espacio a distancias muy cercanas a la escala de Planck, permitiría hacer uso de las cotas holográficas sobre la entropía, con el fin de advertir las localización de los modos y su configuración termodinámica, así como las características de los múltiples vacíos presentes en las vecindades del agujero negro.

En este sentido este principio puede ser un candidato a mostrar las necesidades en la teoría que especifiquen la posibilidad de eliminar las divergencias, en la energía. Una posibilidad de esta naturaleza podría ser el modelo de plasma de quarks y gluones que posee características holográficas y permite considerar las vecindades de agujero negro como un fluido viscoso de alta temperatura, sin la obligatoriedad de que el horizonte de eventos funja como una barrera de potencial a ser tunelada por las partículas.

---

# Trabajo futuro

- Implementar el proceso de tunelamiento cuántico a través de horizontes de eventos considerando potenciales diferentes a los de decaimiento alfa y conversión interna, buscando primordialmente en fenómenos de tunelamiento atómico.
- Aplicar una modelización de la región cercana al horizonte de eventos como un plasma de quarks y gluones, como una hipótesis surgida del principio holográfico en este esquema se consideraría el Black Shell como el objeto cosmológico restringido sólo a su superficie sin necesidad de considerar el interior. Esta determinación no implicaría necesariamente asumir una estructura en el bulk de agujero negro, como si lo asume la constitución nuclear, en la que los nucleones se encuentran confinados en un volumen finito interactuante con una estructura interdependiente con los alrededores mediante la existencia de un potencial.



# Bibliografía

- [1] S. W. Hawking, "Particle creation by black holes," *Communications in mathematical physics*, vol. 43, no. 3, pp. 199–220, 1975.
- [2] M. K. Parikh and F. Wilczek, "Hawking radiation as tunneling," *Physical Review Letters*, vol. 85, no. 24, p. 5042, 2000.
- [3] M. Parikh, "A secret tunnel through the horizon," *General Relativity and Gravitation*, vol. 36, no. 11, pp. 2419–2422, 2004.
- [4] B. D. Chowdhury, "Problems with tunneling of thin shells from black holes," *Pramana*, vol. 70, no. 1, pp. 3–26, 2008.
- [5] B. D. Chowdhury, "Black holes versus firewalls and thermo-field dynamics," *International Journal of Modern Physics D*, vol. 22, no. 12, p. 1342011, 2013.
- [6] J. D. Bjorken, S. D. Drell, and J. E. Mansfield, "Relativistic quantum mechanics," *Physics Today*, vol. 18, pp. 81–82, mar 1965.
- [7] V. Mukhanov and S. Winitzki, *Introduction to quantum effects in gravity*. Cambridge University Press, 2007.
- [8] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, 1982.
- [9] S. Mukohyama and W. Israel, "Black holes, brick walls, and the Boulware state," *Physical Review D*, vol. 58, no. 10, p. 104005, 1998.
- [10] V. Rubakov, *Classical theory of gauge fields*. Princeton University Press, 2009.
- [11] E. Poisson, *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press, 2004.
- [12] A. Fabbri and J. Navarro-Salas, *Modeling black hole evaporation*. World Scientific, 2005.
- [13] R. Banerjee and B. R. Majhi, "Quantum tunneling beyond semiclassical approximation," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2008, no. 06, p. 095, 2008.
- [14] A. Das, T. Ferbel, and N. Gauthier, "Introduction to nuclear and particle physics," *American Journal of Physics*, vol. 62, pp. 477–478, 1994.
- [15] G. Gamow, *The Quantum Theory of the Atomic Nucleus*. US Atomic Energy Commission, Division of Technical Information Extension, 1963.

- [16] L. De La Peña, *Introducción a la mecánica cuántica*. Fondo de Cultura económica, 2014.
  - [17] F. Kondev, "Nuclear data sheets for  $a=206$ ," *Nuclear Data Sheets*, vol. 109, no. 6, pp. 1527–1654, 2008.
  - [18] A. Balantekin and N. Takigawa, "Quantum tunneling in nuclear fusion," *Reviews of Modern Physics*, vol. 70, no. 1, p. 77, 1998.
  - [19] D. Brink and U. Smilansky, "Multiple reflections in the path-integral approach to barrier penetration," *Nuclear physics A*, vol. 405, no. 2, pp. 301–312, 1983.
  - [20] D. L. Hill and J. A. Wheeler, "Nuclear constitution and the interpretation of fission phenomena," *Physical Review*, vol. 89, no. 5, p. 1102, 1953.
  - [21] A. B. Balantekin, S. E. Koonin, and J. W. Negele, "Inversion formula for the internucleus potential using sub-barrier fusion cross sections," *Physical Review C*, vol. 28, no. 4, p. 1565, 1983.
  - [22] A. Balantekin, A. DeWeerd, and S. Kuyucak, "Relations between fusion cross sections and average angular momenta," *Physical Review C*, vol. 54, no. 4, p. 1853, 1996.
  - [23] A. Balantekin and P. Reimer, "Determination of an effective radius from the gamma-ray multiplicities in fusion reactions," *Physical Review C*, vol. 33, no. 1, p. 379, 1986.
  - [24] J. Pei, F. Xu, Z. Lin, and E. Zhao, " $\alpha$ -decay calculations of heavy and superheavy nuclei using effective mean-field potentials," *Physical Review C*, vol. 76, no. 4, p. 044326, 2007.
  - [25] H. M. Taylor and N. F. Mott, "A theory of the internal conversion of  $\gamma$ -rays," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 138, no. 836, pp. 665–695, 1932.
  - [26] P. Schlüter, G. Soff, and W. Greiner, "Pair creation by internal conversion," *Physics Reports*, vol. 75, no. 6, pp. 327–392, 1981.
  - [27] R. Bousso, "The holographic principle," *Reviews of Modern Physics*, vol. 74, no. 3, p. 825, 2002.
  - [28] J. D. Bekenstein, "Black holes and the second law," *Lettere Al Nuovo Cimento (1971–1985)*, vol. 4, no. 15, pp. 737–740, 1972.
  - [29] D. Marolf, "Unitarity and holography in gravitational physics," *Physical Review D*, vol. 79, no. 4, p. 044010, 2009.
  - [30] S. D. Mathur, "The information paradox: a pedagogical introduction," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 26, no. 22, p. 224001, 2009.
  - [31] L. Susskind and J. Lindesay, *An Introduction to Black Holes, Information and the String Theory Revolution*. WORLD SCIENTIFIC, 2004.
  - [32] D. Bigatti and L. Susskind, "TASI lectures on the holographic principle," in *Strings, branes and gravity. Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute, TASI'99, Boulder, USA, May 31-June 25, 1999*, pp. 883–933, 1999.
-



- 
- [33] A. V. Ramallo, "Introduction to the ads/cft correspondence," in *Lectures on Particle Physics, Astrophysics and Cosmology*, pp. 411–474, Springer, 2015.
  - [34] R. M. Wald, "The thermodynamics of black holes," *Living reviews in relativity*, vol. 4, no. 1, p. 6, 2001.
  - [35] J. D. Bekenstein, "Entropy bounds and the second law for black holes," *Physical Review D*, vol. 27, no. 10, p. 2262, 1983.
  - [36] M. Pelath and R. M. Wald, "Comment on entropy bounds and the generalized second law," *Physical Review D*, vol. 60, no. 10, p. 104009, 1999.
  - [37] L. Susskind, "The world as a hologram," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 36, no. 11, pp. 6377–6396, 1995.
  - [38] G. Hooft, "The holographic principle," in *Basics and Highlights in Fundamental Physics*, pp. 72–100, World Scientific, 2001.
  - [39] G. Hooft, "On the quantum structure of a black hole," *Nuclear Physics B*, vol. 256, pp. 727–745, 1985.
  - [40] G. 't Hooft, "Dimensional reduction in quantum gravity," *Conf. Proc.*, vol. C930308, pp. 284–296, 1993.
  - [41] L. Susskind, "Strings, black holes, and lorentz contraction," *Physical Review D*, vol. 49, no. 12, p. 6606, 1994.
  - [42] R. Tavakol and G. Ellis, "Holography and cosmology," *Physics Letters B*, vol. 469, no. 1-4, pp. 37–45, 1999.
  - [43] J. D. Bekenstein, "Black holes and entropy," *Phys. Rev. D*, vol. 7, pp. 2333–2346, Apr 1973.
  - [44] S. W. Hawking, "Black holes and thermodynamics," *Phys. Rev. D*, vol. 13, pp. 191–197, Jan 1976.
  - [45] S. W. Hawking, "Gravitational radiation from colliding black holes," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 26, pp. 1344–1346, May 1971.
  - [46] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, vol. 1. Cambridge university press, 1973.
  - [47] G. Hooft, "The scattering matrix approach for the quantum black hole: An overview," *International Journal of Modern Physics A*, vol. 11, no. 26, pp. 4623–4688, 1996.
  - [48] W. Israel, "Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity," *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*, vol. 44, no. 1, pp. 1–14, 1966.
  - [49] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. 2004.
  - [50] R. Di Criscienzo, *Semi-classical aspect of black hole physics*. PhD thesis, University of Trento, 2011.
-



## Appendix A

# Apéndice A La aproximación WKB

El método *WKB*<sup>1</sup> surge de la necesidad de estudiar la mecánica cuántica de problemas reales en los cuales el potencial  $V$  tiene una estructura que hace que no sea posible determinar la solución exacta de la ecuación de Schrödinger desde una perspectiva analítica sino que se hace necesario buscar una solución aproximada.

Al considerar la ecuación de Schrödinger estacionaria para la amplitud  $\psi$  sin tener en cuenta el factor temporal  $e^{-i\omega t}$

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi, \quad (\text{A.1})$$

al suponer una solución de la estructura eikonal de la forma

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar}S}, \quad (\text{A.2})$$

asumiendo que la función  $S(\mathbf{x})$  posee dimensiones de acción. Y al aplicar el operador laplaciano a la función de onda <sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Es una solución de la ecuación de onda clásica estacionaria de la forma  $e^{iS(\mathbf{x})}$ , donde  $S$  es el denominado eikonal. El método fue desarrollado en 1926 por G. Wentzel, H. A. Kramers y L. Brillouin.

<sup>2</sup>Que para un campo escalar  $f$  definición en coordenadas cartesianas corresponde a la divergencia del gradiente

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f),$$

además de la identidad vectorial para la divergencia del producto de un campo escalar  $f$  y un campo vectorial  $\mathbf{A}$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \psi &= \nabla \cdot \left[ \nabla (e^{\frac{i}{\hbar} S}) \right] \\
&= \nabla \cdot \left[ \frac{i}{\hbar} (e^{\frac{i}{\hbar} S}) \nabla S \right] \\
&= \frac{i}{\hbar} \nabla \cdot [\psi \nabla S] \\
&= \frac{i}{\hbar} \left[ (\nabla \psi) \cdot (\nabla S) + \psi (\nabla \cdot (\nabla S)) \right] \\
&= \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{i}{\hbar} (\psi \nabla S) \cdot (\nabla S) + \psi \nabla^2 S \right] \tag{A.3}
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 \psi = -\frac{1}{\hbar^2} (\nabla S)^2 \psi + \frac{i}{\hbar} (\nabla^2 S) \psi \tag{A.4}$$

al sustituir (A.4) en (A.1), se tiene que

$$\begin{aligned}
&-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi + V \psi = E \psi \\
&-\frac{\hbar^2}{2M} \left[ -\frac{1}{\hbar^2} (\nabla S)^2 \psi + \frac{i}{\hbar} (\nabla^2 S) \psi \right] + V \psi = E \psi \\
&\frac{1}{2M} (\nabla S)^2 - \frac{i\hbar}{2M} (\nabla^2 S) + V = E, \tag{A.5}
\end{aligned}$$

se requiere asumir que el sistema se encuentre en un estado en el que se cumpla la condición

$$\hbar |\nabla^2 S|^2 \ll (\nabla S)^2, \tag{A.6}$$

por lo tanto la ecuación (A.5) queda

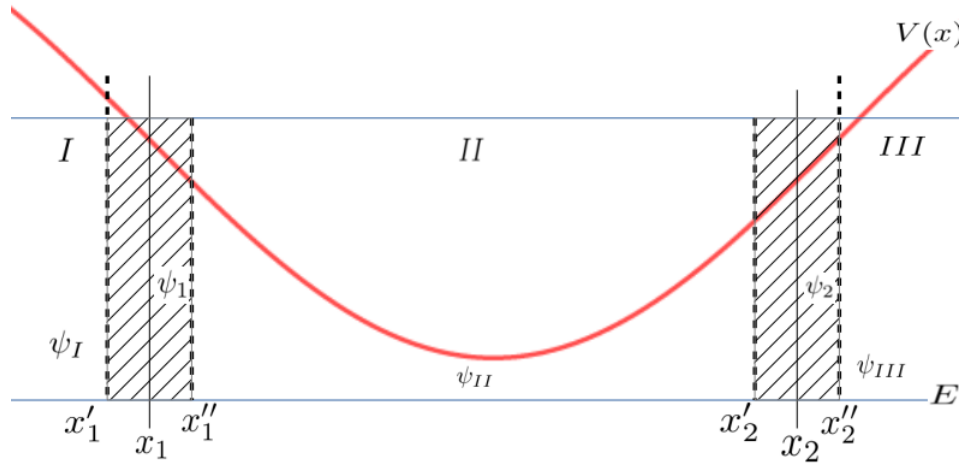
$$\frac{1}{2M} (\nabla S)^2 + V = E. \tag{A.7}$$

La expresión (A.7) es una ecuación de Hamilton-Jacobi para la acción  $S(\mathbf{x})$ , en la cual  $\nabla S$  corresponde al momento clásico de la partícula.<sup>3</sup>

De manera que la aproximación semiclásica consiste en que de cumplirse la condición (A.6), los problemas cuánticos son susceptibles de ser abordados encontrando correcciones cuánticas a la acción clásica y emplear esta acción corregida para obtener la función de onda.

---

<sup>3</sup>Dado que la corriente de partículas está dada por



**Figura A.1:** Esquema de las regiones I, II y III del potencial donde la aproximación WKB es aplicable. Tomado de [16]

$$\begin{aligned}\rho \mathbf{v} &= \mathbf{j} \\ \psi \psi^* \mathbf{v} &= \frac{i\hbar}{2M} \left( \psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi \right) \\ \mathbf{v} &= \frac{i\hbar}{2M} \left( \frac{\nabla \psi^*}{\psi^*} - \frac{\nabla \psi}{\psi} \right)\end{aligned}$$

y si se considera una función de onda de la forma  $\psi = R e^{iS}$ , siendo  $R$  y  $S$  dos funciones de valor real, entonces se cumple que la densidad de partículas  $\rho = \psi \psi^* = (R e^{iS})(R e^{-iS}) = R^2$ , de manera que la magnitud de la función de onda será  $R = \sqrt{\rho}$  de manera que su gradiente

$$\begin{aligned}\nabla \psi &= \nabla (R e^{iS}) \\ &= (\nabla R) e^{iS} + R \nabla (e^{iS}) \\ &= (\nabla R) e^{iS} + i R e^{iS} (\nabla S) \\ \nabla \psi &= \left( \frac{(\nabla R)}{R} + i (\nabla S) \right) \psi\end{aligned}$$

por lo tanto la velocidad tiene la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{i\hbar}{2M} \left( \frac{\nabla \psi^*}{\psi^*} - \frac{\nabla \psi}{\psi} \right) \\ &= \frac{i\hbar}{2M} \left[ \frac{\left( \frac{(\nabla R)}{R} - i (\nabla S) \right) \psi^*}{\psi^*} - \frac{\left( \frac{(\nabla R)}{R} + i (\nabla S) \right) \psi}{\psi} \right] \\ &= \frac{i\hbar}{2M} \left[ \frac{(\nabla R)}{R} - i \nabla S - \frac{(\nabla R)}{R} - i (\nabla S) \right] \\ &= \frac{i\hbar}{2M} [-2i (\nabla S)] \\ \mathbf{v} &= \frac{\hbar}{M} \nabla S,\end{aligned}$$

Al efectuar una expansión en series de potencias de  $\hbar$  para  $S$  en la ecuación (A.5)

$$\begin{aligned}
 S(i\hbar) &= \sum_{k=0}^{\infty} S_k(i\hbar)^k = S_0 + S_1(i\hbar) + S_2(i\hbar)^2 + S_3(i\hbar)^3 + \dots, \\
 &= S_0 + i\hbar S_1 - \hbar^2 S_2 - i\hbar^3 S_3 + \dots \\
 S(i\hbar) &= S_0 + i\hbar S_1 - \hbar^2 S_2 - i\hbar^3 S_3 + \dots
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

en cuyo caso se supone que las funciones  $S_k$  no dependen de  $\hbar$ .

Al calcular el gradiente de  $S$ , al ser un operador lineal, se obtiene<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}
 (\nabla S)^2 &= \left( \nabla S_0 + i\hbar \nabla S_1 - \hbar^2 \nabla S_2 - i\hbar^3 \nabla S_3 + \dots \right)^2 \\
 &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} (i\hbar)^k \nabla S_k \right)^2 \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (i\hbar)^k (\nabla S_k)^2 + 2 \sum_{j < k} \left( (i\hbar)^k \nabla S_k \right) \cdot \left( (i\hbar)^j \nabla S_j \right) \\
 &= (\nabla S_0)^2 + (i\hbar)^2 (\nabla S_1)^2 + (i\hbar) (\nabla S_2)^2 + \dots \\
 &\quad + 2(i\hbar)^1 \nabla S_1 \cdot \nabla S_0 + 2(i\hbar) + 2(i\hbar)^2 \nabla S_2 \cdot \nabla S_0 + \dots \\
 &\quad + 2(i\hbar)^2 \nabla S_2 \cdot (i\hbar) \nabla S_1 + 2(i\hbar)^3 \nabla S_3 \cdot (i\hbar) \nabla S_1 + \dots \\
 &\quad + 2(i\hbar)^3 \nabla S_3 \cdot (i\hbar)^2 \nabla S_2 + 2(i\hbar)^4 \nabla S_4 \cdot (i\hbar)^2 \nabla S_2 + \dots \\
 (\nabla S)^2 &= (\nabla S_0)^2 + 2i\hbar \nabla S_0 \cdot \nabla S_1 - 2\hbar^2 \nabla S_0 \cdot \nabla S_2 - \hbar^2 (\nabla S_1)^2.
 \end{aligned}$$

El laplaciano de  $S$  corresponde a

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 S &= \sum_{k=0}^{\infty} (i\hbar)^k \nabla^2 S_k \\
 &= \nabla^2 S_0 + i\hbar \nabla^2 S_1 - \hbar^2 \nabla^2 S_2 + \dots
 \end{aligned}$$

Al sustituir las expresiones para el gradiente y el laplaciano de  $S$  en la ecuación (A.5) queda

es decir que

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v} = M \frac{\hbar}{M} \nabla S = \hbar \nabla S.$$

Es de notar que al sustituir la expresión para el momento en la ecuación (A.7) se retoma nuevamente la expresión clásica para la energía de un sistema conservativo.

<sup>4</sup>Donde se ha hecho empleo identidad

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k)^2 + 2 \sum_{j < i} a_i a_j$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2M}(\nabla S)^2 - \frac{i\hbar}{2M}(\nabla^2 S) + V = E \\
& \frac{1}{2M} \left[ (\nabla S_0)^2 + 2i\hbar \nabla S_0 \cdot \nabla S_1 - 2\hbar^2 \nabla S_0 \cdot \nabla S_2 - \hbar^2 (\nabla S_1)^2 + \dots \right] \\
& - \frac{i\hbar}{2M} \left[ \nabla^2 S_0 + i\hbar \nabla^2 S_1 - \hbar^2 \nabla^2 S_2 + \dots \right] + V - E = 0,
\end{aligned} \tag{A.9}$$

de modo tal que al comparar los coeficientes de cada potencia de  $\hbar$ , se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales para cada una de las  $S_k$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\nabla S_0)^2}{2M} + V = E \\
& \nabla S_0 \cdot \nabla S_1 - \frac{1}{2} \nabla^2 S_0 = 0 \\
& 2\nabla S_0 \cdot \nabla S_2 - (\nabla S_1)^2 + \nabla^2 S_1 = 0,
\end{aligned} \tag{A.10}$$

al comparar la primera de las ecuaciones en (A.10) con la ecuación de Hamilton-Jacobi dada en (A.7), se verifica que

$$\mathbf{p} = \nabla S_0. \tag{A.11}$$

Al sustituir (A.10) en la segunda ecuación del sistema (A.9) se obtiene la expresión para  $S_1$ . Con estas expresiones es posible determinar  $S_2$  a partir de la tercera ecuación. Así iterativamente en consecuencia es posible determinar los demás términos  $S_3$ ,  $S_4$ , etcétera. Para las aplicaciones convencionales es suficiente resolver las dos primeras ecuaciones del sistema. Si se tiene en cuenta la expresión para el momento clásico de la partícula

$$p = \sqrt{2M(E - V)},$$

entonces, esta aproximación semiclásica funcionaría si se cumple

$$\frac{\hbar^2}{p^2} |\nabla \cdot \mathbf{p}| \ll 1. \tag{A.12}$$

Al estudiar el caso unidimensional para la expresión del momento, respecto a su derivada espacial

$$\frac{dp}{dx} = -\sqrt{\frac{m}{2(E - V)}} \frac{dV}{dx} = \frac{mF}{dx},$$

lo cual al sustituir en la ecuación (A.12), se tiene que

$$\left| \frac{\hbar m F}{p^3} \right| \ll 1, \quad (\text{A.13})$$

dicha expresión sólo se cumple en las regiones en que la fuerza clásica  $F$  es pequeña y el momento  $p$  es grande, de manera que los efectos cuánticos son apreciables en las regiones en que el potencial  $V$  varía abruptamente, o en las zonas cercanas a los puntos clásicos de retorno, en los que se da el caso de que  $V = E$ , en los cuales las partículas clásicas se detienen y no pueden pasar a regiones en las que  $V > E$ , en las que no es válida la aproximación semiclásica.

Continuando con el caso unidimensional a lo largo del eje  $x$ , entonces las dos primeras ecuaciones de la aproximación *WKB* dadas por (A.10) quedan al emplear (A.11) en la forma

$$\begin{aligned} \frac{(\nabla S_0)^2}{2M} + V &= E \\ \left( \frac{d}{dx} S_0 \right)^2 &= 2M(E - V) = p^2 \\ d(S_0) &= \pm p dx \\ S_0 &= \pm \int^x p dx \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

y también

$$\nabla S_0 \cdot \nabla S_1 - \frac{1}{2} \nabla^2 S_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla S_0 \cdot \nabla S_1 - \frac{1}{2} \nabla^2 S_0 &= 0 \\ \left( \frac{d}{dx} (S_0) \right) \left( \frac{d}{dx} (S_1) \right) &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} ((S_0)) \\ \left( \frac{d}{dx} (S_1) \right) &= \frac{\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} ((S_0))}{\left( \frac{d}{dx} (S_0) \right)} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\int \left( \frac{d}{dx} (S_1) \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{d^2}{dx^2} ((S_0))}{\left( \frac{d}{dx} (S_0) \right)} dx \quad (\text{A.16})$$

La resolución de  $S_1$  en términos de  $S_0$  se efectúa de acuerdo a las sustituciones

$$u = \frac{d(S_0(x))}{dx}, \quad du = \frac{d^2(S_0(x))}{dx^2} dx$$



por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \left( \frac{d}{dx}(S_1) \right) dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{d^2}{dx^2}((S_0))}{\left( \frac{d}{dx}(S_0) \right)} dx \\ S_1 &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \\ S_1 &= \frac{1}{2} \ln |u| + C \\ S_1 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{d}{dx}(S_0) \right| + C.\end{aligned}$$

En el caso en el cual el momentum de la partícula corresponda a  $p_x$ , entonces, por la ecuación (A.11)

$$\mathbf{p} = \nabla S_0 = \frac{d}{dx}(S_0) = p_x$$

luego

$$S_1 = \ln |\sqrt{p}| = -\ln \left| \frac{1}{\sqrt{p}} \right|.$$

De manera que al tomar los términos lineales en  $\hbar$  y de primer orden, que corresponden a la solución clásica más la primera corrección cuántica en la aproximación semiclásica, la función de onda está dada por

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar}(S_0 + i\hbar S_1)} = e^{\frac{i}{\hbar}S_0 - S_1} = e^{\left[ \pm \frac{i}{\hbar} \int^x p \, dx + \ln \left( \frac{1}{\sqrt{p}} \right) \right]}, \quad (\text{A.17})$$

es decir

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int^x p \, dx} \quad (\text{A.18})$$



## Appendix B

# Apéndice B Tunelamiento en pozos de potencial

De acuerdo a [16], en el caso estacionario, si se considera a partir de la ecuación de onda<sup>1</sup> para la amplitud de probabilidad  $\psi$  que describa el comportamiento de un ensamble de partículas cuánticas en la forma de una onda estacionaria monocromática de frecuencia angular  $\omega$ , puede escribirse como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \varphi(\mathbf{r}), \quad (\text{B.1})$$

que al sustituir en la ecuación de onda lleva a que

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi + \frac{\omega^2}{v^2} \varphi &= 0 \\ \nabla^2 \varphi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Si se aplica la condición de cuantización de de Broglie  $\lambda = \frac{h}{|\mathbf{p}|} = \frac{2\pi\hbar}{p}$ , entonces la ecuación (B.2) toma la forma

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\mathbf{p}^2}{\hbar^2} \varphi = 0. \quad (\text{B.3})$$

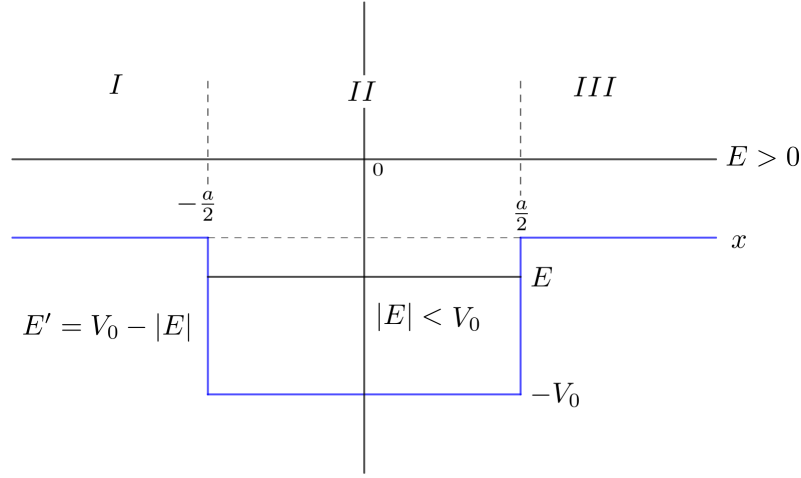
Dado que se ha considerado la condición idealizada de monocromaticidad, se considera que el ensamble de electrones posee la misma energía  $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + V(\mathbf{r})\hbar\omega$ , entonces el momento clásico,

---

<sup>1</sup>La ecuación de onda es una ecuación diferencial, del tipo hiperbólico, en derivadas parciales, lineal de segundo orden que describe la propagación de una variedad de ondas como las ondas de sonido, las ondas de luz y tiene la forma:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \psi = 0,$$

en donde  $v$  corresponde a la velocidad de propagación de la onda en el medio y satisface la relación de dispersión  $v = \lambda\nu = \frac{\lambda\omega}{2\pi}$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda y  $\nu$  la frecuencia.



**Figure B.1:** Pozo de potencial rectangular unidimensional. Tomado de [16].

será  $\mathbf{p}^2 = 2m(E - V)$ , luego la ecuación estacionaria<sup>2</sup> de Schrödinger queda

$$\nabla^2 \varphi + \frac{2M}{\hbar^2} (E - V) \varphi = 0. \quad (\text{B.4})$$

Si se considera el caso de un pozo de potencial unidimensional, como el mostrado en la figura (B.1) en el cual los electrones descritos por la función de onda estacionaria<sup>3</sup>  $\varphi$  se encuentran atrapados en un potencial  $V$  tal que  $-V_0 < E < 0$ , de manera que

$$V = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in (-\infty, a/2) \cup (a/2, \infty) \\ -V_0, & \text{si } x \in (-a/2, a/2) \end{cases},$$

así que la ecuación de Schrödinger unidimensional toma la forma

$$\psi'' + \frac{2M}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0,$$

y al definir los parámetros

$$k^2 = -\frac{2M}{\hbar^2} E = \frac{2M}{\hbar^2} |E|, \quad q^2 = \frac{2M}{\hbar^2} (V_0 - |E|) = \frac{2M}{\hbar^2} E' \quad (\text{B.5})$$

<sup>2</sup>En el caso no estacionario, en el cual se considera el factor temporal en la función de onda, la ecuación de Schrödinger tiene la forma:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi + V \psi$$

<sup>3</sup>Para que la solución sea una solución físicamente admisible para la ecuación estacionaria de Schrödinger debe cumplir que:

- i.  $\psi$  y sus derivadas espaciales deben ser funciones continuas.
- ii.  $\psi$  debe ser una función univaluada en todo punto.
- iii.  $\psi$  debe ser finita y de cuadrado integrable en todo punto.
- iv.  $\psi$  debe satisfacer las condiciones de frontera propias del problema.

entonces es posible dividir la ecuación de Schrödinger en las tres regiones mostradas en la figura (B.1) posee las soluciones

Región I. ( $x \leq -a/2$ )

$$\psi_I'' - q^2 \psi_I = 0; \quad \psi_I = A_1 e^{kx} + B_1 e^{-kx}$$

Región II. ( $-a/2 < x < a/2$ )

$$\psi_{II}'' + k^2 \psi_{II} = 0; \quad \psi_{II} = A_2 \sin(qx) + B_2 \cos(qx) \quad (\text{B.6})$$

Región III. ( $x \geq a/2$ )

$$\psi_{III}'' - q^2 \psi_{III} = 0; \quad \psi_{III} = A_3 e^{kx} + B_3 e^{-kx}.$$

Para que se satisfagan las condiciones necesarias para que  $\psi^4$  sea solución acotada en las regiones I y III se debe cumplir que  $B_1 = A_3 = 0$ , además de las condiciones de continuidad de la función de onda y su derivada<sup>5</sup>,

$$\begin{aligned} \psi_I(-a/2) &= \psi_{II}(-a/2) & \psi_{II}(a/2) &= \psi_{III}(a/2) \\ \psi_I'(-a/2) &= \psi_{II}'(-a/2) & \psi_{II}'(a/2) &= \psi_{III}'(a/2), \end{aligned}$$

entonces, las expresiones (B.6) llevan al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A_1 e^{-\frac{a}{2}k} &= B_2 \cos\left(\frac{a}{2}q\right) - A_2 \sin\left(\frac{a}{2}q\right) \\ B_3 e^{-\frac{a}{2}k} &= B_2 \cos\left(\frac{a}{2}q\right) + A_2 \sin\left(\frac{a}{2}q\right) \\ k A_1 e^{-\frac{a}{2}k} &= q \left[ A_2 \cos\left(\frac{a}{2}q\right) + B_2 \sin\left(\frac{a}{2}q\right) \right] \\ -k B_3 e^{-\frac{a}{2}k} &= q \left[ A_2 \cos\left(\frac{a}{2}q\right) - B_2 \sin\left(\frac{a}{2}q\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

<sup>4</sup>Si se interpreta  $\psi$  como una amplitud de probabilidad debe cumplirse que:

$$\rho = |\psi|^2 = \psi^* \psi = \varphi^* \varphi = |\varphi|^2$$

<sup>5</sup>Que a su vez son las condiciones de continuidad sobre la densidad de partículas  $\rho$  y la corriente de partículas  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ . Estas dos cantidades se hallan relacionadas de acuerdo a la ecuación de continuidad  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}$ , entonces, se cumple que al hacer uso de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \\ &= \psi^* \left( \frac{i\hbar}{2M} \nabla^2 \psi + \frac{V}{i\hbar} \psi \right) + \psi \left( \frac{-i\hbar}{2M} \nabla^2 \psi^* - \frac{V}{i\hbar} \psi^* \right) \\ &= \frac{i\hbar}{2M} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) \\ &= -\frac{i\hbar}{2M} \nabla \cdot (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) \\ &= -\nabla \cdot \left[ \frac{i\hbar}{2M} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) \right] = -\nabla \cdot \mathbf{j} \end{aligned}$$

De la primera y tercera ecuaciones en (B.7) se tiene que

$$q \left[ A_2 \cos\left(\frac{a}{2}q\right) + B_2 \sin\left(\frac{a}{2}q\right) \right] = k \left[ B_2 \cos\left(\frac{a}{2}q\right) - A_2 \sin\left(\frac{a}{2}q\right) \right],$$

y a partir de la segunda y cuarta ecuaciones se obtiene

$$q \left[ A_2 \cos\left(\frac{a}{2}q\right) - B_2 \sin\left(\frac{a}{2}q\right) \right] = k \left[ -B_2 \cos\left(\frac{a}{2}q\right) - A_2 \sin\left(\frac{a}{2}q\right) \right].$$

Este sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas lleva a que al multiplicarse los términos se obtenga  $A_2 B_2 = 0$ . Si se asume que  $A_2 = 0$ , entonces al sustituir en el sistema de ecuaciones (B.6), se obtiene  $\psi_{II} = B_2 \cos\left(\frac{a}{2}q\right)$  y si se toma  $B_2 = 0$ , entonces,  $\psi_{II} = A_2 \sin(qx)$ . Además para el primer caso, si se considera que la constante de normalización es  $B_2$ , entonces se llega a la condición de cuantización

$$q \sin\left(\frac{a}{2}q\right) = k \cos\left(\frac{a}{2}q\right), \quad (\text{B.8})$$

lo que lleva a la ecuación trascendente<sup>6</sup>

$$y \tan(y) = \sqrt{y_0^2 - y^2} \quad (\text{B.9})$$

en donde se ha hecho uso de las sustituciones

$$\frac{a}{2}k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2Ma^2(V_0 + |E| - V_0)}{\hbar^2}}, \quad y = \frac{a}{2}q, \quad y_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2Ma^2 V_0}{\hbar^2}}.$$

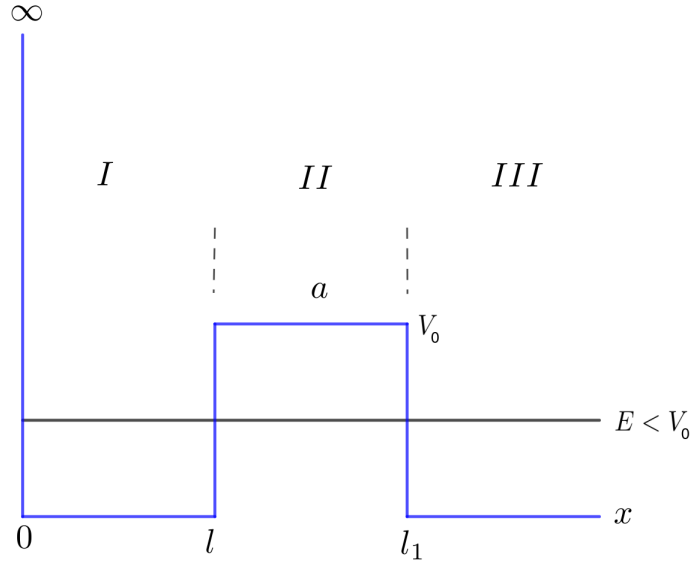
En el caso en el cual se tenga un pozo muy ancho y profundo, en cuyo caso se cumpla que  $y_0 \gg 1$ , entonces, se tiene que los valores propios de la energía en virtud de la condición para  $q$  dada por la ecuación (B.5), corresponden a

$$\begin{aligned} y = \frac{a}{2}q &= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2M}{\hbar^2} E'_n} = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \\ \frac{a^2}{4} \left( \frac{2M E'_n}{\hbar^2} \right) &= \pi^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \\ E'_n &= \frac{4\pi^2 \hbar^2}{2Ma^2} \left( \frac{2n+1}{4} \right)^2 \\ E'_n &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2Ma^2} (2n+1)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

con  $E'_n = V_0 - |E|$ , correspondiéndose con la energía medida desde la base del pozo.

Si se realiza una modificación al potencial considerando que en las regiones *I* y *III* existiese una barrera de potencial finita, como puede verse en la figura (B.2) de manera que las ondas presentes en el pozo en la región *II* son transmitidas a la región *III*, pero no a la región *I*. En tal situación

<sup>6</sup>La ecuación (B.9) es soluble por aproximación computacional o al verificar las intersecciones de las gráficas que surgen en múltiplos impares de  $\pm \frac{\pi}{2}$ , así por pequeño que sea el valor de  $y_0$ , existe al menos una solución. Esto expresa el hecho de que los niveles de energía discretos dentro del pozo y por lo tanto estados ligados, sin importar el ancho o la profundidad, siempre y cuando el potencial se anule asintóticamente en infinito.



**Figure B.2:** El escape de partículas confinadas en un potencial de barrera finita y su decaimiento exponencial con el tiempo. [16].

existirán, en la interfaz entre ellas ondas reflejadas y transmitidas que no satisfarán las relaciones clásicas  $R + T = 1$ <sup>7</sup> entre los coeficientes de reflexión  $R$  y de transmisión  $T$ <sup>8</sup>, dado que en ésta se tiene que  $E < V_0$  la reflexión será total, pues  $R = 1$  y por lo tanto  $T = 0$ ; cuando  $E \gg V_0$  la reflexión es parcial, entonces, algunas partículas pueden transmitirse, pues  $R \rightarrow 0$  así que  $T \rightarrow 1$ . Esto difiere del resultado clásico.

Si se considera el caso en el cual  $E < V_0$  y un haz de partículas incidiendo contra la barrera entre  $(0, a)$  presentada en la figura (B.2), entonces se presentará tunelamiento de una fracción apreciable de ellas a través de ésta, si se considera que a la izquierda existe una pared infinitamente rígida que impide la transmisión hacia la izquierda hacia  $x < 0$ . Teniendo en cuenta esto, la ecuación de Schrödinger para esta situación tiene como soluciones

$$\begin{aligned}\psi_I &= A_1 \sin(kx) \\ \psi_{II} &= A_2 e^{-q(x-l)} + B_2 e^{q(x-l)} \\ \psi_{III} &= A_3 e^{ik(x-l_1)} + B_3 e^{-ik(x-l_1)},\end{aligned}\tag{B.11}$$

en donde

$$k^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}, \quad q^2 = \frac{2M(V_0 - E)}{\hbar^2}.$$

<sup>7</sup>Clásicamente las partículas al llegar a un escalón de potencial se desaceleran y todas se transmiten si  $E < V_0$ , pues se tiene que  $T = 0$  y  $R = 1$  y si  $E > V_0$ , entonces,  $T = 1$  y  $R = 0$ .

<sup>8</sup>Estos coeficientes surgen de la relación entre las corrientes reflejadas y transmitidas respecto a la incidente en la barrera, respectivamente:

$$R = \frac{|j_{ref}|}{|j_{inc}|}, \quad T = \frac{|j_{trans}|}{|j_{inc}|}.$$

Por continuidad de la función de onda y su derivada en las interfaces  $x = l$  y  $x = l_1$

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2}A_1 \left( \text{sen}(kl) - \frac{k}{q} \cos(kl) \right) \\ B_2 &= \frac{1}{2}A_1 \left( \text{sen}(kl) + \frac{k}{q} \cos(kl) \right) \\ A_3 &= \frac{1}{2}e^{-qa} \left( 1 + \frac{iq}{k} \right) A_2 + \frac{1}{2}e^{qa} \left( 1 - \frac{iq}{k} \right) B_2 \\ B_3 &= \frac{1}{2}e^{-qa} \left( 1 - \frac{iq}{k} \right) A_2 + \frac{1}{2}e^{qa} \left( 1 + \frac{iq}{k} \right) B_2. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Dado que estos coeficientes son combinación de funciones continuas, por corresponder a funciones exponenciales y trigonométricas, que son continuas en todos los números reales, se tiene que el espectro de energía es continuo. Bajo la condición de que las partículas escapan del pozo de potencial de la región *II* a la *III*, se requiere que  $B_3 = 0$ , en la última de las ecuaciones (B.12), entonces

$$\left( \tan(kl) + \frac{k}{q} \right) \left[ 1 + \frac{k - iq}{k + iq} e^{-2qa} \right] = \frac{2k}{q} \frac{k - iq}{k + iq} e^{-2qa}, \quad (\text{B.13})$$

que es una ecuación de variable compleja con soluciones complejas para la región *I*, es decir, dentro del pozo, así que debe ser de la forma

$$\psi = \psi_I e^{-\frac{i}{\hbar} Et},$$

de tal manera que la densidad de partículas adentro corresponda a

$$\begin{aligned} \rho_I &= \psi \psi^* \\ &= \left( \psi_I e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \right) \left( \psi_I^* e^{+\frac{i}{\hbar} E^* t} \right) \\ &= \psi_I \psi_I^* e^{-\frac{i}{\hbar} Et} e^{+\frac{i}{\hbar} E^* t} \\ &= |\psi_I|^2 e^{-\frac{i}{\hbar} (E - E^*) t} \\ &= |\psi_I|^2 e^{-\frac{2\text{Im}(E)}{\hbar} t} \\ \rho_I &= |\psi_I|^2 e^{-\lambda t}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

en donde se ha definido el parámetro  $\lambda$ , dado por

$$\lambda = -\frac{2}{\hbar} \text{Im}(E). \quad (\text{B.15})$$

Las ecuaciones (B.14) y (B.15) evidencian que dentro del pozo la población decrece exponencialmente con el tiempo si  $\lambda \neq 0$ , o lo que es equivalente, si la energía es compleja. Esto es, correspondiente con el hecho de que, la fracción de la población que decae es independiente del tamaño de la población. Con lo que se tiene una ecuación diferencial similar a la decaimiento radiactivo

$$\frac{dn}{n} = -\lambda dt, \quad (\text{B.16})$$

cuya solución es una exponencial de la forma dada por la ecuación (B.16). Esto se da en virtud de que la parte real de la ecuación (B.13) cuando el pozo es rectangular, es decir,  $a \rightarrow \infty$ , se



presenta un corrimiento de los niveles de energía de éste y la parte imaginaria de la corrección hace referencia a que los estados ya no son estacionarios y se produce el decaimiento; que bien pueden ser electrones o núcleos de Helio en el caso del decaimiento  $\alpha$ . La constante  $\lambda$  se corresponde con la tasa de fuga de partículas, que a su vez está relacionada con el coeficiente de transmisión  $T$ . La solución aproximada de la ecuación puede darse si se asume la aproximación  $a \rightarrow \infty$ , entonces  $e^{-2qa} \rightarrow 0$ , con lo que la ecuación (B.13) se reduce a

$$\left( \tan(kl) + \frac{k}{q} \right) \left[ 1 + \frac{k - iq}{k + iq} e^{-2qa} \right] = \frac{2k}{q} \frac{k - iq}{k + iq} e^{-2qa}$$

$$\tan(kl) + \frac{k}{q} = 0. \quad (\text{B.17})$$

Ahora, dado que se busca una corrección a la energía, entonces, denominando  $\delta E$  la corrección compleja a la energía y  $\delta k$ , de manera que  $E = E_0 + \delta E$  y  $k = k_0 + \delta k$ , entonces, la aproximación a primer orden

$$k^2 = \frac{2M}{\hbar^2} E$$

$$(k_0 + \delta k)^2 = \frac{2M}{\hbar^2} (E_0 + \delta E)$$

$$(k_0)^2 + 2(k_0)(\delta k) + (\delta k)^2 = \frac{2M}{\hbar^2} E_0 + \frac{2M}{\hbar^2} \delta E$$

$$2(k_0)(\delta k) \approx \frac{2M}{\hbar^2} \delta E$$

$$\delta k \approx \frac{M}{\hbar^2 k_0} \delta E, \quad (\text{B.18})$$

por lo tanto la aproximación en serie de Taylor alrededor de  $E_0$  y  $k_0$ , lleva a que

$$k = k_0 + \delta k \approx k_0 + \frac{m}{\hbar^2 k_0} \delta E, \quad (\text{B.19})$$

además reorganizando y al derivar la ecuación (B.13) respecto a  $k$ , y evaluar a primer orden, se tiene que

$$\left( \tan(kl) + \frac{k}{q} \right) \left[ 1 + \frac{k - iq}{k + iq} e^{-2qa} \right] = \frac{2k}{q} \frac{k - iq}{k + iq} e^{-2qa}$$

$$\left( \frac{q \tan(kl) + k}{q} \right) \left[ \frac{k + iq + (k - iq)e^{-2qa}}{k + iq} \right] = \frac{2k}{q} \frac{k - iq}{k + iq} e^{-2qa}$$

$$(q \tan(kl) + k) \left[ (k + iq) + (k - iq)e^{-2qa} \right] = (2k)(k - iq)e^{-2qa}$$

$$\left( ql \sec^2(kl) + 1 \right) \delta k = 2k \left( \frac{k - iq}{k + iq} \right) e^{-2qa}, \quad (\text{B.20})$$

y al evaluar en  $k = k_0$ , entonces  $\delta k$ , queda

$$\delta k = \frac{2k_0(k_0 - iq)}{(k_0 + iq) \left( 1 + ql \sec^2(k_0 l) \right)} e^{-2qa}, \quad (\text{B.21})$$

al considerar la aproximación<sup>9</sup>  $k_0 l \ll 1$ , entonces,  $\sec(k_0 l) \approx 1$ . Además si el potencial es bastante grande, de manera que  $ql \gg 1$ , la ecuación (B.21) queda

$$\begin{aligned}
 \delta k &= \frac{2k_0(k_0 - iq)}{(k_0 + iq) \left(1 + ql \sec^2(k_0 l)\right)} e^{-2qa} \\
 &= \frac{2k_0(k_0 - iq)}{(k_0 + iq)(ql)} e^{-2qa} \\
 &= \frac{2k_0(k_0 - iq)}{(k_0 + iq)(ql)} \frac{(k_0 - iq)}{(k_0 - iq)} e^{-2qa} \\
 &= \frac{2k_0}{ql} \frac{k_0^2 - 2ik_0q + q^2}{k_0^2 + q^2} e^{-2qa} \\
 &= \frac{2k_0}{ql} \left(1 - \frac{2k_0q}{k_0^2 + q^2} i\right) e^{-2qa} \\
 \delta k &= \frac{2k_0}{ql} e^{-2qa} - \frac{4k_0^2 e^{-2qa}}{l(k_0^2 + q^2)} i.
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (B.18) y (B.22) el corrimiento de la energía  $E = E_0 + \delta E$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \delta E &= \frac{\hbar^2 k_0}{M} \delta k \\
 &= \frac{\hbar^2 k_0}{M} \left( \frac{2k_0}{ql} e^{-2qa} - \frac{4k_0^2 e^{-2qa}}{l(k_0^2 + q^2)} i \right) \\
 \delta E &= \frac{2\hbar^2 k_0^2}{Mql} e^{-2qa} - i \frac{4\hbar^2 k_0}{Ml} \frac{k_0^2}{k_0^2 + q^2} e^{-2qa},
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
 E &= E_0 + \delta E \\
 E &= \frac{\hbar^2 k_0^2}{2M} + \frac{2\hbar^2 k_0^2}{Mql} e^{-2qa} - i \frac{4\hbar^2 k_0}{Ml} \frac{k_0^2}{k_0^2 + q^2} e^{-2qa} \\
 \Im m(E) &= \Im m \left[ \frac{\hbar^2 k_0^2}{2M} + \frac{2\hbar^2 k_0^2}{Mql} e^{-2qa} - i \frac{4\hbar^2 k_0}{Ml} \frac{k_0^2}{k_0^2 + q^2} e^{-2qa} \right] \\
 \Im m(E) &= \frac{4\hbar^2 k_0}{Ml} \frac{k_0^2}{k_0^2 + q^2} e^{-2qa}.
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

Así que la constante de decaimiento dada por (B.15) será

$$\begin{aligned}
 \lambda &= -\frac{2}{\hbar} \Im m(E) \\
 &= -\frac{2}{\hbar} \left( -\frac{4\hbar^2 k_0}{Ml} \frac{k_0^2}{k_0^2 + q^2} e^{-2qa} \right) \\
 \lambda &= \frac{8v}{l} \frac{k_0^2}{k_0^2 + q^2} e^{-2qa} \\
 \lambda &= \frac{v}{2l} T
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

<sup>9</sup>Esta aproximación corresponde a bajas energías y pozo angosto.

en donde se tuvo en cuenta la expresión para la velocidad de las partículas en el pozo  $v = \frac{p}{M} = \frac{\hbar k_0}{M}$  y si se asume la aproximación

$$\frac{q^2}{k_0^2 + q^2} \approx 1,$$

entonces, se obtiene la expresión para el coeficiente de transmisión a través de la barrera y la vida media de las partículas, si se considera que  $\frac{v}{2l}$  es el número promedio de veces que la partícula choca contra la barrera por unidad de tiempo. Si este valor se multiplica por la probabilidad  $T$  de que la partícula escape en cada intento, se obtiene la probabilidad total de escape por unidad de tiempo.