Integrability in Super Yang–Mills and Strings

慶應義塾大学経済学部　酒井一博
E-mail: sakai@phys-h.keio.ac.jp

$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論、およびそれに等価と考えられる $AdS_5\times S^5$ 背景の超弦理論の解析が、近年目覚しい勢いで進展している。その背景にあるのは4年ほど前から明らかになってきた可積分構造である。AdS/CFT 対応の理解、QCD への応用、曲がった背景での弦理論の量子化、物性物理との関連など、様々な方向性の発展が期待される本研究分野を、最近の進展を交えて紹介する。

1　はじめに

$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論は、強弱双対性をもつ理論として、また AdS/CFT 対応の舞台として、様々な場所に顔を出してきた。このような大きな超対称性を持つ理論では、量子補正の取り扱いが簡単なことから、もっぱら BPS 状態に関心が集まりがちである。しかしながら $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論の大きな対称性は、BPS スペクトラムを超えて一般の状態の量子補正をも統制する。これを最大限に利用することで、伝統的な摂動論の到達範囲を超えて、系統的な量子スペクトルの解析が可能になりつつある。その背景には、$\mathcal{N}=4$ 超対称性と結びついた可積分構造がある。

本稿では可積分構造がどのような形でゲージ理論に顔を出し、それを利用することで何が得られるかを、1ループ摂動の場合 (2節)、全次数摂動の場合 (3節) に分けて紹介する。また $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論は AdS/CFT 対応を通じて $AdS_5\times S^5$ 背景の超弦理論と等価であると考えられている。弦理論側でも独立に可積分構造の同定と応用の議論が整備されてきている。こちらも古典論の場合 (4節)、量子論の場合 (5節) に分けて紹介する。最後に6節で今後の展望について述べる。

2　$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論の1ループ摂動とスピンチェイン

よく知られているように、$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論は共形対称性を持つ理論である。共形対称性は局所演算子の相関関数の形を大きく制限する。その際、演算子間の距離に関する相関関数のスケーリング則は、個々の演算子のスケーリング次元に支配される。このように局所演算子のスケーリング次元は、共形場理論における基本的な量と言える。

本稿では $U(N)$ $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論のラージ N 極限を考える。ゲージ不変な複合演算子に着目すると、シングルトレース演算子が支配的となる。このクラスの局所複合演算子のスケーリング次元を考えよう。構成場の種類は、スカラー場、フェルミオン場、ゲージ場、およびそれらの微分を含めて任意とする。相互作用を無視した場合、スケーリング次元は古典的に質量次元そのもので与えられる。別の言い方をすれば、共形代数の中のディラテーション (スケール変換) 生成子は、演算子を構成する場ひとつひとつに自明に作用する。ところが構成場間の相互作用を加味すると、シングルトレース演算子はディラテーション生成子の作用によって、一般に別のシングルトレース演算子に移り変わる。すなわち個々のシングルトレース演算子は、ディラテーショ

ン生成子の固有状態ではなくなる。互いに移りあうシングルトレース演算子全体の張る空間において、ディラテーション生成子を対角化することで、量子論的なスケーリング次元の固有値が求まる。

$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論は共形対称性 $SO(4,2)$ と R 対称性 $SU(4)$ を大域的対称性として持つが、これらは超対称性と組み合わさって全体で $PSU(2,2|4)$ 対称性を形成する。複合演算子を構成するひとつひとつの場を、この $PSU(2,2|4)$ 対称性に関するスピンとみなすと、シングルトレースをとった複合演算子は、周期的に連なる一次元のスピンチェインと解釈できる。2002 年の Minahan–Zarembo の発見および 2003 年の Beisert–Staudacher による拡張によって、ディラテーション生成子の 1 ループ摂動補正は、$\mathfrak{su}(2,2|4)$ 量子 1 次元スピンチェインのハミルトニアンと同型であること

$$\Delta_{\text{1-loop}} = H_{\mathfrak{su}(2,2|4)} \tag{1}$$

が明らかとなった [1, 2]。このスピンチェインは $\mathfrak{su}(2)$ スピンから成る XXX Heisenberg スピンチェインの自然な拡張になっており、可解性をもち、ハミルトニアンは Bethe 仮設を用いて対角化することができる。より具体的には、ハミルトニアンの固有値問題は Bethe 仮設方程式と呼ばれる連立代数方程式に帰着される。エネルギー固有値は、この方程式の解である Bethe ルートを用いて表される。

まとめると、可積分性を利用することで、任意のシングルトレース演算子の 1 ループ異常次元の計算は、形式的には Bethe 仮設方程式を解く代数計算に帰着する。Bethe 仮設方程式の解は物性物理において長い研究の歴史がある。ただし AdS/CFT 対応の観点からは、新種の熱力学的極限 (連続極限) における解が特に重要である。これらのクラスの解はごく最近になって着目され、我々はその一般解を分類している [10]。

3　$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論の高次摂動と可解粒子模型

シングルトレース演算子に作用するディラテーション生成子の 1 ループ摂動部分の可積分性が示されたのに引き続き、高次摂動においても可積分性が保たれる可能性が強く示唆されている。高次摂動まで含めたディラテーション生成子が、やはり既知の可解模型のハミルトニアンと同一視できるのではとの期待が当初あったが、問題はそう簡単ではなかった。その主な理由を二つ挙げると、摂動の次数が上がる毎により離れたスピン同士の相互作用が生じること、1 ループ摂動を超えるとスカラー場 3 つがフェルミオン 2 つに遷移する相互作用が加わりその結果スピンチェインの長さが変わること、がある。遠距離相互作用をもつスピンチェインは物性理論でもほとんど研究されておらず、長さの変化するスピンチェインについては知られている例がない。

しかしながらスピンチェインの長さを無限大にとる極限では、摂動の全次数を含めてディラテーション生成子の固有値問題を可解模型として定式化できることが分かった。単一の複素スカラー場 (Z とする) のみからなるシングルトレース演算子は、スピンチェインの描像では強磁性真空に対応する。無限に連なる Z の間に別種の場 $X_1, X_2, \ldots$ を一個一個十分な距離を保って入れた状態は、マグノン粒子 $X_1, X_2 \ldots$ からなる漸近状態と解釈できる [4]。このようにして粒子模型を定義するとき、マグノン

粒子の分散関係式、二体散乱行列(S行列)を計算することができる。これらを元に組み上げげた可解模型が Beisert により提唱された [5]。

もう少し具体的に見てみよう。無限個の Z からなる強磁性真空は、大域的対称性を $PSU(2,2|4)$ から $SU(2|2)\times SU(2|2)$ に破る。従って、この真空のまわりでのマグノン励起は、二組の $SU(2|2)$ スピンを担う粒子として振る舞う。基本粒子としてはそれぞれの $SU(2|2)$ について 2+2 次元表現を考えればよい。二つの 2+2 次元表現のテンソル積からボソン 8 個とフェルミオン 8 個の基本励起状態の組が得られる。マグノン粒子はスピンチェインに沿って運動量を持つことができるが、運動量を持った粒子状態は、$\mathfrak{su}(2|2)$ 対称性を中心拡大した $\mathfrak{psu}(2|2)\ltimes\mathbb{R}^3$ 代数の表現として振る舞う。この代数のもとでの変換性の考察から、マグノン一粒子のエネルギー E と運動量 p に関する分散関係式

$$E=\sqrt{1+f(\lambda)\sin^2\left(\frac{p}{2}\right)}-1 \tag{2}$$

が導かれる。't Hooft 結合定数 λ に関する依存性は、既知の摂動計算との比較 ($\lambda\ll 1$) 及び BMN エネルギー公式との比較 ($\lambda\gg 1$) から、$f(\lambda)=\lambda/\pi^2$ となると考えられている。また、マグノンの二体散乱の S 行列は

$$\mathcal{S}_{\text{total}}=S_0\left[\mathcal{S}_{\mathfrak{su}(2|2)}\otimes\mathcal{S}_{\mathfrak{su}(2|2)}\right] \tag{3}$$

の形をとるが、各 $\mathcal{S}_{\mathfrak{su}(2|2)}$ 部分の形は表現論から完全に定まる。$\mathcal{S}_{\mathfrak{su}(2|2)}$ は、ユニタリ性および Yang-Baxter 関係式を満たすことが確かめられ、マグノンの多体散乱が全て二体散乱に分解できることが分かる。これを元に模型の可積分な定式化が可能となる [6]。さらに、$\mathcal{S}_{\mathfrak{su}(2|2)}$ は 1 次元 Hubbard 模型の可積分構造を記述する Shastry の R 行列に一致するとの観察があり [6]、4 次元の $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論と 1 次元強相関電子系の研究の間の予想外のつながりが示唆されている。一方、S 行列全体にかかるスカラー係数 $S_0(p_1,p_2;\lambda)$ は表現論からは決まらず、これを決定する試みが現在も進行中である。これについては 5 節で再び触れる。

4 AdS 背景の古典弦理論

$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論は AdS/CFT 対応を通じて $AdS_5\times S^5$ 背景の IIB 型超弦理論と等価であると考えられている。ゲージ理論の共形対称性 $SO(4,2)$ と R 対称性 $SO(6)$ は、それぞれ AdS_5 と S^5 の等張変換群として現れる。特にディラテーションは AdS^5 内の大域的時間方向の並進に対応する。ラージ N 極限は弦相互作用のない自由弦の極限に対応し、シングルトレース演算子は一本の閉弦に対応する。よってシングルトレース演算子のスケーリング次元は、弦理論側では一本の閉弦のエネルギーとして現れる。

また 't Hooft 結合定数 λ は、弦のテンション α'、AdS_5 及び S^5 の半径 R に対して、

$$4\pi\lambda=\frac{R^4}{\alpha'^2} \tag{4}$$

の関係で対応する。すなわちゲージ理論側で相互作用が強くなるほど、弦理論側では半古典的なシグマ模型としての記述の精度がよくなる。従って、ゲージ理論の摂動論では捉えにくい領域が、弦シグマ模型の古典論を解くことで調べられることになる。

$AdS_5 \times S^5$ 上の超弦理論は、Green–Schwarz 形式を用いると、超コセット空間 $PSU(2,2|4)/\big(SO(4,2)\times SO(6)\big)$ 上のシグマ模型 (に Virasoro 拘束を課したもの) として記述できる [7]。シグマ模型の運動方程式は一般に非線形二階微分方程式であるが、これを線形の一階微分作用素の対 (Lax 対) を用いて書き換えられる場合、無限個の保存チャージの組を系統的に構成できる。すなわち Lax 対、別の言葉では 1 パラメータファミリーをなす平坦保存カレントが存在すれば、シグマ模型は古典的に可積分である。2003 年 Bena–Roiban–Polchinski は上述の超コセットシグマ模型における 1 パラメータ平坦保存カレントを構成し、$AdS_5 \times S^5$ 上の超弦理論が古典的に可積分であることを示した [8]。

可積分な古典シグマ模型の解に関してもう少し詳しく見てみよう。今は相互作用しない一本の閉弦に着目しているので、シグマ模型の世界面としては円筒を考える。運動方程式の解がひとつ与えられたとして、1 パラメータ平坦保存カレントを閉弦に沿って一周積分することで Wilson 線が得られる。これは Lax 微分方程式の解についてのモノドロミ行列を表している。モノドロミ行列は、相似変換の自由度を除いて、世界面上の積分路の取り方に依らない。すなわちモノドロミ行列の固有値は保存量をなす。これらの固有値を、平坦カレントをパラメトライズしていたスペクトラルパラメータの複素関数としてみたとき、その関数の Riemann 面として代数曲線がひとつ定まる。これは元の運動方程式の解に対するスペクトラル曲線と呼ばれる。

運動方程式の解それぞれに対してひとつのスペクトラル曲線が対応することを見たが、逆にスペクトラル曲線を土台に運動方程式の解を構成することが可能である。従って、可能なスペクトラル曲線の形を全て調べ尽くすことで、運動方程式の一般解の分類が達成される。この方法は有限ギャップ解の理論として 20 年以上前から知られている。最近シグマ模型の場合にも応用され [9, 10]、我々はこれを発展させ $AdS_5 \times S^5$ 背景の古典超弦理論の一般解を分類した [11]。スペクトラル曲線を通じて、これらの一般解と 2 節の最後で触れた 1 ループ摂動ゲージ理論の連続一般解 [3] との精密な AdS/CFT 対応も確立できている。

5　AdS 背景の量子弦理論

現時点では $AdS_5 \times S^5$ 背景の弦理論の量子化には誰も成功していない。Green–Schwarz 形式やピュアスピナー形式での作用の形は知られているので、おそらく多くの人にとっては、共形ゲージをとって 2 次元 CFT の言葉で定式化できれば満足がゆくと思われるが、現状では様々な障害がある。一方で共形ゲージとは別に、光錐ゲージやユニフォームゲージなど別のゲージ固定に基づき、CFT でなく粒子模型として弦理論を量子化しようという試みが近年盛んに行われている [12]。特に BMN 極限の近くから AdS/CFT 対応を調べるという観点からは、これらのゲージによる定式化の方がゲージ理論との対応が見やすいと考えられる。

ユニフォーム光錐ゲージをとり、無限に伸びた弦の世界面を考えると、光錐ハミ

ルトニアンが保つ対称性は、ゲージ理論の場合と同じく $\mathfrak{su}(2|2) \oplus \mathfrak{su}(2|2)$ の中心拡大となる [13]。真空からの基本励起もゲージ理論の場合と同じくそれぞれの $\mathfrak{su}(2|2)$ に対して 2+2 表現をなすと考えられる。これらの対称性の表現論からの制限により、基本粒子の分散関係式および二体散乱行列は、それぞれゲージ理論の場合と同じ (2) および (3) の形をとるはずである。

一方で 3 節でも述べたように S 行列のスカラー係数 $S_0(p_1, p_2; \lambda)$ の形は対称性の考察だけからは定まらない。しかしながら、粒子と荷電共役粒子の入れ替えに関する交差対称性が成り立つという自然な要請をおくことで、S_0 の満たすべき関係式が得られる [14]。また、古典弦のエネルギースペクトラムおよびその量子補正を正しく再現するように、S_0 を $\alpha' \propto \lambda^{-1/2}$ による展開の形

$$S_0 = \exp\left(2i\sqrt{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n(p_1,p_2)\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^n\right) \tag{5}$$

で定めてゆく試みがなされている。古典論と弦の 1 ループ補正から決められるのは θ_0, θ_1 までだが、全次数での θ_n の形の予想もなされている [15]。

一方ゲージ理論においては、通常の場の理論の摂動計算の結果と比較することができる。現時点では’t Hooft 結合定数についての正巾の展開が

$$S_0 = 1 + \mathcal{O}(\lambda^3) \tag{6}$$

となることが分かっている。弦理論側でのゲージ固定が適切であれば、AdS/CFT 対応により (5) と (6) は同一の関数を記述していると期待される。S_0 は複雑な特異点構造を持つため、現状ではこれらが一致するかどうか定かではない。さらなる研究の進展が期待されるところである。

6 展望

4 年ほど前から急速に成長を続けてきたこの分野は、今年に入っても日進月歩の発展を続けている。様々な興味深い問題が残っているが、現時点での分野全体としての主な目標をひとつ挙げるならば、5 節で紹介した S 行列のスカラー係数 S_0 の決定であると思われる。’t Hooft 結合定数に関する正巾展開と負巾展開の双方を矛盾なくつなげる S 行列が決定されるならば、真に量子論的なレベルでの AdS/CFT 対応が初めて明らかになる。ゲージ理論、弦理論双方の量子スペクトルについても多くの知見が得られるだろう。

$\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論は対称性が非常に高いことから、現実の物理から乖離した理論と見なされるきらいがあるが、実際には超対称性のない QCD とも直接的なかかわりがある。例えば基本的なソフト異常次元の摂動展開において、超越度の最も高い (maximally trancendental) 部分はあらゆる QCD において共通し、これは $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論のソフト異常次元そのもので与えられることが知られている。摂動の次数が増すにつれ複雑さを極める QCD ループ計算の結果が、一部といえども可積分性を利用

することではるかに簡単に計算できるならば、QCD 研究にも大きな波及効果があるだろう。

また 3 節の最後でも一例を挙げたが、全摂動ゲージ理論の可積分性の背後には Hubbard 模型の構造が存在する。Hubbard 模型は可解模型の中でも特殊なクラスに属しており、その可解性が代数的な見地から完全に理解されているとはまだ言えない。$\mathfrak{psu}(2|2) \ltimes \mathbb{R}^3$ 代数の表現論に基づく Hubbard 模型の可解構造の定式化など、可解模型分野への技術の還元も今後楽しみである。

References

[1] J. A. Minahan and K. Zarembo, JHEP **0303** (2003) 013.

[2] N. Beisert and M. Staudacher, Nucl. Phys. B **670** (2003) 439.

[3] N. Beisert, V. A. Kazakov, K. Sakai and K. Zarembo, JHEP **0507** (2005) 030.

[4] M. Staudacher, JHEP **0505** (2005) 054.

[5] N. Beisert, arXiv:hep-th/0511082.

[6] N. Beisert, arXiv:nlin.si/0610017.

[7] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, Nucl. Phys. B **533** (1998) 109.

[8] I. Bena, J. Polchinski and R. Roiban, Phys. Rev. D **69** (2004) 046002.

[9] I. M. Krichever, Func. An & Apps. **28** (1994) No 1, 26.

[10] V. A. Kazakov, A. Marshakov, J. A. Minahan and K. Zarembo, JHEP **0405** (2004) 024.

[11] N. Beisert, V. A. Kazakov, K. Sakai and K. Zarembo, Commun. Math. Phys. **263** (2006) 659.

[12] *See, for example,* T. Klose, T. McLoughlin, R. Roiban and K. Zarembo, arXiv:hep-th/0611169 *and references therein.*

[13] G. Arutyunov, S. Frolov, J. Plefka and M. Zamaklar, arXiv:hep-th/0609157.

[14] R. A. Janik, Phys. Rev. D **73** (2006) 086006.

[15] N. Beisert, R. Hernandez and E. Lopez, arXiv:hep-th/0609044.