

IFT

Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.005/99

Teoria de Perturbação Causal para o Modelo de Thirring  
como uma Teoria de "Gauge"

Luiz Alberto Manzoni Vieira Jr.



Orientador

*Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar*

Co-orientador

*Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli*

23-4163

Julho de 1999

## Agradecimentos

- Ao Prof. Pimentel e ao Jeferson, pelo voto de confiança, pela orientação e pelo auxílio em alguns momentos particularmente difíceis. Não há meios de expressar minha gratidão para com eles.

- Ao Prof. Lauro Tomio, por me proporcionar as condições necessárias para permanecer no IFT durante parte do doutorado e pela disposição para ajudar.

- À Thelma e ao Tomaz, pela compreensão, pela paciência, pelo estímulo, pelo apoio nos momentos difíceis e pela felicidade que me proporcionaram durante estes anos.

- À minha mãe, Teresinha, pelo apoio e por me proporcionar as condições necessárias e o estímulo para desenvolver meus estudos iniciais.

- Ao Tadeu, o amigo com quem sempre pude contar nos momentos difíceis. A ele, à Luciana e ao Caio, pelos momentos alegres que passamos juntos.

- Ao Élcio e à Rô, pela convivência agradável e pela disposição para ajudar.

- Aos demais amigos que tornaram este período mais agradável.

- Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

## Resumo

Consideramos o modelo de Thirring como uma teoria de *gauge* em  $(2+1)$  dimensões (com um sabor fermiônico) e, usando o método causal de Bogoliubov, Epstein e Glaser, calculamos as correções radiativas de ordem mais baixa. Neste contexto, obtemos um valor não ambíguo para o coeficiente do termo induzido de Chern-Simons e mostramos que o bóson de *gauge* do modelo, que em nível árvore é um campo auxiliar, adquire dinâmica devido às inserções de polarização do vácuo. Adicionalmente, usando uma identidade de Ward, obtemos a função de vértice na camada de massa a partir da auto-energia do férmion. No caso da auto-energia e do vértice verificamos a presença de constantes indeterminadas (mas finitas) na solução final, como uma consequência da não-renormalizabilidade do modelo, e discutimos as vantagens de aplicar o método causal a teorias não renormalizáveis.

**Palavras Chaves:** modelo de Thirring; simetria de *gauge*; causalidade; distribuições; correções radiativas; Chern-Simons.

**Áreas do conhecimento:** 1050300-5

## Abstract

We consider the Thirring model as a gauge theory in  $(2+1)$  dimensions, with one fermion flavor, and calculate the lowest order radiative corrections by using the Bogoliubov, Epstein and Glaser causal approach. In this context, we obtain an unambiguous expression for the coefficient of the induced Chern-Simons term and show that the gauge boson, which at tree level is an auxiliary field, becomes dynamical due to the vacuum polarization insertions. In addition, we obtain the on mass shell vertex function from the fermion self-energy by using a Ward identity. We verify that, for the self-energy and vertex function, there remain arbitrary (but finite) constants in the final solution, as a consequence of the nonrenormalizability of the model, and discuss the advantages of applying the causal approach to nonrenormalizable theories.

# Índice

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 O Modelo de Thirring</b>	<b>4</b>
1.1 O Modelo de Thirring em (1+1) dimensões . . . . .	4
1.2 O Modelo de Thirring como uma Teoria de <i>Gauge</i> . . . . .	10
<b>2 O Método Causal de Bogoliubov, Epstein e Glaser</b>	<b>16</b>
2.1 A teoria de Bogoliubov, Epstein e Glaser . . . . .	17
2.1.1 Construção Indutiva . . . . .	17
2.1.2 Bipartição da Distribuição Causal . . . . .	21
2.2 Não-renormalizabilidade do MTG . . . . .	25
<b>3 O Vácuo Perturbativo e o Bóson Dinâmico</b>	<b>30</b>
3.1 Polarização do Vácuo . . . . .	30
3.2 O Bóson de <i>Gauge</i> Dinâmico . . . . .	37
3.3 Estabilidade do Vácuo . . . . .	41
<b>4 Auto-energia e o Operador de Corrente Corrigido</b>	<b>52</b>
4.1 Auto-energia do Férmion . . . . .	52
4.2 Correção de Vértice . . . . .	61
<b>Considerações Finais</b>	<b>67</b>
<b>A Notação</b>	<b>70</b>
A.1 (1+1) dimensões . . . . .	70
A.2 (2+1) dimensões . . . . .	71
<b>B Funções Singulares</b>	<b>72</b>
<b>C O Teorema de Coleman-Hill</b>	<b>76</b>
<b>Referências</b>	<b>79</b>

# Introdução

Recentemente, tem havido grande interesse no estudo da geração dinâmica de massa fermiônica em teorias envolvendo interações de quatro férmions (ver, por exemplo, [1]). O interesse se deve, parcialmente, à expectativa de uma melhor compreensão do grande valor da massa do quark top quando comparada à massa dos outros quarks.

Inicialmente, foram considerados modelos baseados no modelo de Nambu e Jona-Lasinio [2], de interações do tipo escalar/pseudo-escalar, combinado com interações de *gauge*. Mostrou-se que, quando a constante de acoplamento é maior do que um certo valor crítico, a interação induz a condensação do quark top. Assim, a simetria eletrofraca é quebrada e o quark top adquire uma grande massa [1]. Posteriormente, verificou-se que um comportamento similar ocorre para o modelo com interação de quatro férmions do tipo (corrente) $\otimes$ (corrente) em (2+1) dimensões, de modo que este modelo também tem sido considerado nesse mesmo contexto [3]-[5].

A teoria de um campo fermiônico sem massa com interação do tipo (corrente) $\otimes$ (corrente) foi inicialmente considerada por Thirring em (1+1) dimensões [6]. Neste trabalho, Thirring mostrou que o modelo é exatamente solúvel e construiu os auto-estados do Hamiltoniano. No entanto, as manipulações em [6] eram formais e levavam a contradições. A solução completa da teoria foi dada por Klaiber em [7]. Mais tarde, verificou-se que a versão massiva do modelo de Thirring (a qual não é explicitamente solúvel) é perturbativamente equivalente a teoria de sine-Gordon [8].

Em  $d > 2$  dimensões o modelo de Thirring não é perturbativamente renormalizável. Porém, Krasnikov e Kyatkin [9] mostraram que em (2+1) dimensões o modelo é renormalizável no contexto da expansão  $1/N$ . Desta forma, nas referências [3]-[5] o modelo de Thirring foi usado para averiguar a geração dinâmica de massa fermiônica, para  $2 < d < 4$  dimensões, no limite de  $N$  grande.

Em [3]-[5], os autores linearizam a interação introduzindo um campo vetorial auxiliar e, a despeito do fato que o modelo de Thirring original não possui simetria de *gauge* local, tratam este campo auxiliar como um campo de *gauge*. Isto é feito, sob a alegação de uma simetria de *gauge* restrita [3], com a intenção de eliminar ambigüidades relacionadas à regularização. Contudo, o resultado desses artigos é

contraditório.

Posteriormente, Itoh *et al.* [10] reformularam o modelo de Thirring como uma verdadeira teoria de *gauge*, introduzindo a simetria local escondida. Kondo [11] obteve, basicamente, a mesma reformulação usando o formalismo de Batalin e Fradkin para sistemas vinculados. Para a teoria abeliana estes formalismos são equivalentes ao procedimento de Stückelberg de decompor o campo vetorial em um novo campo vetorial e um campo escalar  $\theta$ , deste modo obtendo uma teoria de *gauge* (para uma revisão do procedimento de Stückelberg ver [12]). O modelo de Thirring original é, então, uma versão de *gauge* fixo do modelo obtido em [10] e [11]. O modelo de Thirring como uma teoria de *gauge* também foi usado para estudar a geração dinâmica de massa para o férmion no esquema da expansão  $1/N$  [10, 11, 13, 14].

Em (2+1) dimensões surge uma peculiaridade. A saber, para um número ímpar de férmions massivos de dois componentes (a massa pode estar presente na Lagrangiana original ou ter origem dinâmica), existe a possibilidade de indução de um termo de Chern-Simons. Este termo, ímpar sob paridade, encontra aplicações em vários campos, variando de física da matéria condensada à matemática pura. Em especial, o termo de Chern-Simons pode ser relevante para o efeito Hall quântico fracionário, no contexto da eletrodinâmica quântica em (2+1) dimensões (QED<sub>3</sub>).

Entretanto, o modelo de Thirring como uma teoria de *gauge* em (2+1) dimensões é uma teoria não renormalizável, a despeito de alguma semelhança formal com a QED<sub>3</sub>. Neste sentido, não é a teoria apropriada para estudar o efeito Hall. Ainda assim, muitas questões relacionadas ao termo de Chern-Simons podem ser tratadas neste modelo. Em particular, podemos considerar a questão da ambigüidade de regularização associada à massa topológica.

É um fato bem conhecido que, em modelos onde as correções radiativas contribuem para o termo de Chern-Simons, a correção de massa topológica é dependente do esquema de regularização usado para tornar a teoria finita [15]. Este tipo de situação não é incomum em física e, de fato, sua origem está na má definição dos produtos de operadores ordenados temporalmente que aparecem na expansão perturbativa usual da matriz  $S$  [16]. Como uma consequência desta má definição, os elementos da matriz  $S$  em ordem mais alta na teoria de perturbação podem apresentar divergências na região do ultravioleta.

Nos anos 70, Epstein e Glaser [17], seguindo o trabalho de Bogoliubov [16], propuseram um método indutivo de construção da matriz  $S$  em teoria de campos, no qual a causalidade exerce um papel crucial e todas as quantidades são matematicamente bem definidas. Neste método as divergências ultravioleta nunca se manifestam, como consequência de uma cuidadosa bipartição das distribuições presentes na série perturbativa. Assim, o método causal de Bogoliubov-Epstein-Glaser (BEG)

nos fornece a possibilidade de calcularmos o termo induzido de Chern-Simons sem qualquer ambigüidade, fornecendo o valor correto da massa topológica.

Ainda mais importante é o fato de que não é necessária a introdução de um *cut-off*, pois, como mencionamos, no método causal não aparecem divergências ultravioleta. Isto sugere um modo alternativo para tratar teorias não renormalizáveis, pois, usando o método causal de BEG, tais modelos não se tornam dependentes do esquema de regularização utilizado para torná-los finitos.

Tendo isto em vista, neste trabalho aplicaremos o método de BEG ao modelo de Thirring como uma teoria de *gauge* e calcularemos as correções radiativas de ordem mais baixa. Nosso principal interesse está no coeficiente do termo de Chern-Simons e na geração de dinâmica para o bóson de *gauge*, bem como em analisar de que forma a não-renormalizabilidade do modelo se reflete no método de BEG.

Este trabalho está organizado como segue: no capítulo 1 daremos uma breve introdução ao modelo de Thirring em  $(1+1)$  dimensões e, a seguir, partindo da Lagrangiana para o modelo de Thirring original em  $(2+1)$  dimensões introduziremos a simetria de *gauge*, seguindo o procedimento de Stückelberg. Na primeira seção do capítulo 2 faremos uma rápida revisão do método causal de BEG e, então, na segunda seção daremos uma prova da não-renormalizabilidade do modelo de Thirring como uma teoria de *gauge* pela aplicação deste método. No capítulo 3 calcularemos o tensor de polarização do vácuo e obteremos o valor da massa topológica; a seguir, verificaremos que o bóson de *gauge*, que em nível árvore é um campo auxiliar, adquire dinâmica devido às correções radiativas. Na última parte do capítulo 3 analisaremos a estrutura dos diagramas de vácuo, que não podem ser ignorados no método causal. Dando sequência ao cálculo das correções radiativas, no capítulo 4 calcularemos a auto-energia do férmion e, por meio de uma identidade de Ward, obteremos a função de vértice na camada de massa (para momento transferido nulo). Neste capítulo também discutiremos como a não-renormalizabilidade se manifesta no método causal. Nas considerações finais discutiremos as questões abordadas neste trabalho e perspectivas futuras.

Há, ainda, três apêndices onde apresentamos a notação, as funções singulares em  $(2+1)$  dimensões e discutimos o teorema de Coleman-Hill [18]

# Capítulo 1

## O Modelo de Thirring

Neste capítulo vamos introduzir a Lagrangiana do modelo de Thirring como uma teoria de *gauge*. Inicialmente, consideraremos a versão original do modelo, introduzido por Thirring em 1958 [6], e obteremos as funções de  $n$  pontos, seguindo de perto as referências [7] e [19]. O objetivo desta primeira seção é, basicamente, dar uma visão geral do modelo de Thirring tal como ele tem sido tratado historicamente. Na segunda seção abordamos o tema em que estamos realmente interessados, isto é, o modelo de Thirring como uma teoria de *gauge*, em (2+1) dimensões, proposto por Itoh *et al.* [10] e Kondo [11]. Nesta seção rederivamos a Lagrangiana obtida em [10, 11] usando o formalismo de Stückelberg.

### 1.1 O Modelo de Thirring em (1+1) dimensões

O modelo de Thirring foi proposto na década de 50 com o propósito de estudar a estrutura matemática de campos quânticos relativísticos. A Lagrangiana deste modelo é aquela de um férmion de Dirac sem massa com interação do tipo corrente-corrente [6]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{G}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) , \quad (1.1)$$

e a teoria resultante é exatamente solúvel.

De (1.1) temos a equação de movimento\*

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - G J_\mu(x) \gamma^\mu \psi(x) = 0 , \quad (1.2)$$

com a corrente conservada

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) ; \quad (1.3)$$

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 .$$

---

\*As convenções adotadas são dadas no apêndice A.

Desde que a Lagrangiana (1.1) não possui termo de massa, a corrente axial também é conservada:

$$J^{5\mu}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x) = \varepsilon^{\mu\nu}J_\nu(x) ;$$

$$\partial_\mu J^{5\mu}(x) = \partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu}J_\nu(x) = 0 ,$$
(1.4)

onde fizemos uso do fato que no espaço-tempo bidimensional temos  $\gamma^\mu\gamma^5 = \varepsilon^{\mu\nu}\gamma_\nu$ .

Uma vez que  $\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\mu J_\nu$  é o análogo bidimensional do rotacional de  $J_\mu$ , a conservação da corrente axial implica que  $J_\mu$  deve ser um gradiente. Isto, juntamente com a conservação da corrente vetorial, sugere que  $J_\mu$  deva ser o gradiente de um campo escalar sem massa  $\varphi(x)$ :

$$J_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_\mu\varphi(x) ;$$
(1.5)

$$\square \varphi(x) = 0 .$$

Esta mesma conclusão pode ser obtida partindo da expansão em componentes de Fourier para o campo  $\psi(x)$  e calculando a corrente formalmente [7, 19].

Entretanto, no espaço-tempo bidimensional não existe campo escalar sem massa satisfazendo os axiomas de Wightman. Isto se deve ao fato que, devido às divergências no infravermelho, em duas dimensões não existe distribuição que tenha suporte no cone de luz positivo,  $p^2 = 0$  e  $p^0 \geq 0$ , seja invariante de Lorentz e positiva definida (exceto pela  $\delta(p)$ ). Contudo, isto não exclui a existência de operadores bem definidos obtidos a partir do campo  $\varphi(x)$ . Em especial, o operador exponencial de  $\varphi(x)$  exerce um papel fundamental na representação de campos fermiônicos em termos de campos bosônicos [19].

Classicamente, a equação de movimento (1.2) pode ser resolvida assumindo a relação (1.5) e fazendo o *ansatz*

$$\psi(x) = e^{-i\frac{Q}{\sqrt{\pi}}\varphi(x)}\psi^{(0)}(x) ,$$
(1.6)

onde  $\psi^{(0)}(x)$  é uma solução da equação de Dirac livre. Esta solução não é única e podemos construir uma família de soluções a um parâmetro observando que

$$\psi'(x) = e^{ic\{\varphi(x)+\gamma^5\tilde{\varphi}(x)\}}\psi(x) ,$$
(1.7)

também é solução da equação de movimento. Nesta expressão  $c$  é um número real e  $\tilde{\varphi}$  é o campo dual a  $\varphi$ :

$$\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi = \partial^\mu\tilde{\varphi} ,$$
(1.8)

relação esta que somente pode ser estabelecida no caso sem massa.

Assim, usando (1.6), podemos escrever a solução geral para a equação de movimento clássica como (abandonando o sinal de apóstrofo)

$$\psi(x) = e^{i\{\alpha\varphi(x)+\beta\gamma^5\tilde{\varphi}(x)\}}\psi^{(0)}(x), \quad (1.9)$$

onde  $\alpha - \beta = -\frac{G}{\sqrt{\pi}}$ . Observe-se que a corrente do campo interagente é a mesma que para o campo livre.

Deste modo, para quantizar o modelo de Thirring devemos resolver a questão de como definir o campo bosônico sem massa. Isto pode ser feito assumindo que  $\varphi(x)$  e  $\tilde{\varphi}(x)$  são campos bosônicos de massa zero canonicamente normalizados e relacionados por (1.8). Então, considera-se um espaço de métrica indefinida onde as funções de dois pontos são definidas pela sua regularização (no sentido distribucional [20]) no infravermelho [7, 19]:

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \langle 0|\tilde{\varphi}(x)\tilde{\varphi}(y)|0\rangle \stackrel{\text{def}}{=} D^{(+)}(x-y); \quad (1.10)$$

$$\langle 0|\varphi(x)\tilde{\varphi}(y)|0\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{D}^{(+)}(x-y),$$

sendo

$$\begin{aligned} D^{(+)}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^1}{2p^0} (e^{-ip \cdot x} - \Theta(\kappa - p^0)) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \ln [(i\mu x^+ + \epsilon)(i\mu x^- + \epsilon)]; \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{(+)}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^1}{2p^0} \text{sgn}(p^1) (e^{-ip \cdot x} - \Theta(\kappa - p^0)) \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \left( \frac{ix^+ + \epsilon}{ix^- + \epsilon} \right), \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde  $x^{\pm} = x^0 \pm x^1$  e  $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \kappa e^{-\Gamma'(1)}$  é um *cut-off* infravermelho. Estas funções de dois pontos evidentemente não são distribuições positivas definidas, o que é uma consequência da subtração devido à regularização.

Por outro lado, a quantização pode ser feita assumindo que  $\psi^{(0)}(x)$  é um campo canônico (o que resulta numa solução mais geral do que aquela obtida considerando  $\psi(x)$  como campo canônico [7]). Então, para atribuímos um significado bem definido para o campo  $\psi$  devemos rearranjar a equação (1.9) no seguinte modo:

$$\psi(x) = e^{i\{\alpha\varphi^-(x)+\beta\gamma^5\tilde{\varphi}^-(x)\}}\psi^{(0)}(x)e^{i\{\alpha\varphi^+(x)+\beta\gamma^5\tilde{\varphi}^+(x)\}}, \quad (1.13)$$

e, analogamente,

$$\bar{\psi}(x) = e^{-i\{\alpha\varphi^-(x) - \beta\gamma^5\bar{\varphi}^-(x)\}} \psi^{(0)}(x) e^{-i\{\alpha\varphi^+(x) - \beta\gamma^5\bar{\varphi}^+(x)\}}, \quad (1.14)$$

onde  $\varphi^+$  ( $\varphi^-$ ) é a parte de frequência positiva (negativa) do campo  $\varphi$  (o mesmo vale para o campo dual  $\bar{\varphi}$ ).

Isto nos permite obter uma expressão geral para a função de  $n$  pontos do campo interagente em termos da correspondente função para campos livres. Desde que a função de  $n$  pontos é o valor esperado no vácuo de um produto de operadores  $\psi(x)$ , escolhendo dois fatores vizinhos temos

$$\begin{aligned} \psi(x_j)\psi(x_{j+1}) &= e^{i\{\alpha\varphi_{x_j}^- + \beta\gamma_{x_j}^5\bar{\varphi}_{x_j}^-\}} \psi_{x_j}^{(0)} e^{i\{\alpha\varphi_{x_j}^+ + \beta\gamma_{x_j}^5\bar{\varphi}_{x_j}^+\}} \\ &\times e^{i\{\alpha\varphi_{x_{j+1}}^- + \beta\gamma_{x_{j+1}}^5\bar{\varphi}_{x_{j+1}}^-\}} \psi_{x_{j+1}}^{(0)} e^{i\{\alpha\varphi_{x_{j+1}}^+ + \beta\gamma_{x_{j+1}}^5\bar{\varphi}_{x_{j+1}}^+\}}, \end{aligned}$$

onde os índices nas matrizes  $\gamma^5$  indicam que estas atuam sobre os espinores de mesmo rótulo. Então, o procedimento de cálculo é o usual: mover os operadores de aniquilação para a direita e os de criação para a esquerda, até que estes atuem no vácuo. Para comutar os operadores exponenciais usamos o fato que  $e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]}$ , sempre que  $[A, B]$  for um c-número. Isto nos deixa com fatores exponenciais das funções de dois pontos  $D^{(+)}$  e  $\tilde{D}^{(+)}$ .

Para comutar as exponenciais dos campos escalares com  $\psi^{(0)}$  devemos notar que um campo fermiônico livre (canônico) pode ser escrito em termos de campos bosônicos como [19]:

$$\psi^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} : e^{-i\{\varphi(x) + \gamma^5\bar{\varphi}(x)\}} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Com isto podemos derivar a relação

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(x_1) \cdots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_1) \cdots \bar{\psi}(y_n) | 0 \rangle &= e^{F(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \\ &\times \langle 0 | \psi^{(0)}(x_1) \cdots \psi^{(0)}(x_n) \bar{\psi}^{(0)}(y_1) \cdots \bar{\psi}^{(0)}(y_n) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (1.16)$$

sendo

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \left\{ [a + b\gamma_{x_i}^5 \gamma_{x_j}^5] D^{(+)}(x_i - x_j) + \lambda [\gamma_{x_i}^5 + \gamma_{x_j}^5] \tilde{D}^{(+)}(x_i - x_j) \right\} \\ &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \left\{ [a + b\gamma_{y_i}^5 \gamma_{y_j}^5] D^{(+)}(y_i - y_j) - \lambda [\gamma_{y_i}^5 + \gamma_{y_j}^5] \tilde{D}^{(+)}(y_i - y_j) \right\} \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \left\{ [a - b\gamma_{x_i}^5 \gamma_{y_j}^5] D^{(+)}(x_i - y_j) + \lambda [\gamma_{x_i}^5 - \gamma_{y_j}^5] \tilde{D}^{(+)}(x_i - y_j) \right\}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} a &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha^2 - 2\sqrt{\pi}\alpha ; \\ b &\stackrel{\text{def}}{=} \beta^2 - 2\sqrt{\pi}\beta ; \\ \lambda &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha\beta - \sqrt{\pi}\alpha - \sqrt{\pi}\beta . \end{aligned} \quad (1.18)$$

Adicionalmente, devemos notar que a função de  $n$ -pontos livre é uma soma de produtos de funções de dois pontos, as quais podem ser facilmente calculadas.

A solução (1.16) é claramente invariante por translações. Contudo, aparentemente, não é invariante sob transformações de Lorentz homogêneas. Isto porque sob transformações de Lorentz as funções  $D^{(+)}$  e  $\tilde{D}^{(+)}$  se transformam como

$$\begin{aligned} D^{(+)}(\Lambda x) &= D^{(+)}(x) ; \\ \tilde{D}^{(+)}(\Lambda x) &= \tilde{D}^{(+)}(x) + \frac{\chi}{2\pi} , \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde  $\sinh\chi = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$ , conforme podemos verificar diretamente de (1.11) e (1.12).

Desta forma, vemos que a aparente não invariância de Lorentz da função de  $n$  pontos vem dos termos  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  contendo  $\tilde{D}^{(+)}$ , o que poderia ser resolvido fazendo  $\lambda = 0$ . Porém, neste caso estaríamos perdendo importantes características do modelo. De fato,  $\lambda$  está relacionado ao *spin* do campo  $\psi(x)$ , o qual é dado por  $s = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi}$  e varia continuamente. Isto relete o fato que em (1+1) dimensões *spin* é uma questão de convenção (é definido como o rótulo das propriedades de transformações de Lorentz), pois não há rotação em uma dimensão espacial.

É interessante considerar o caso particular de (1.16) em que temos a função de dois pontos

$$\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(0) | 0 \rangle = e^{\{[a - b\gamma_x^5 \gamma_0^5] D^{(+)}(x) + \lambda[\gamma_x^5 - \gamma_0^5] \tilde{D}^{(+)}(x)\}} \langle 0 | \psi^{(0)}(x) \bar{\psi}^{(0)}(0) | 0 \rangle . \quad (1.20)$$

Para o caso de campos livres a função de dois pontos pode ser facilmente obtida usando a expansão em componentes de Fourier do campo de Dirac. Esta é dada por [7, 19]

$$\begin{aligned} S^{(+)}(x) &= \langle 0 | \psi^{(0)}(x) \bar{\psi}^{(0)}(0) | 0 \rangle \\ &= -\frac{i}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x^- - i\epsilon} \\ \frac{1}{x^+ - i\epsilon} & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (1.21)$$

Com isto, e usando  $(\gamma_x^5 + \gamma_y^5)S^{(+)}(x - y) = 0$ , obtemos

$$\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(0)|0\rangle = \frac{\mu}{2\pi i} e^{-i\frac{(a+b)}{4}} \quad (1.22)$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & [\mu(x^+ - i\epsilon)]^{-\delta_1} [\mu(x^- - i\epsilon)]^{-\delta_2-1} \\ [\mu(x^+ - i\epsilon)]^{-\delta_2-1} [\mu(x^- - i\epsilon)]^{-\delta_1} & 0 \end{pmatrix},$$

onde definimos

$$\delta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a + b - 2\lambda}{4\pi}; \quad (1.23)$$

$$\delta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a + b + 2\lambda}{4\pi}.$$

Podemos obter a representação de (1.22) no espaço dos momentos usando [20]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma e^{ip\cdot\sigma} (\sigma - i\epsilon)^l = e^{il\frac{\pi}{2}} \Theta(p) \frac{p^{l-1}}{\Gamma(l)}. \quad (1.24)$$

De onde temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int d^2x e^{ip\cdot x} \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(0)|0\rangle &= \frac{1}{2\mu} \frac{\Theta(p^+) \Theta(p^-)}{\Gamma(\delta_1) \Gamma(\delta_2 + 1)} \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{p^+}{2\mu}\right)^{\delta_2} \left(\frac{p^-}{2\mu}\right)^{\delta_1-1} \\ \left(\frac{p^+}{2\mu}\right)^{\delta_1-1} \left(\frac{p^-}{2\mu}\right)^{\delta_2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Desta expressão podemos observar que a função de dois pontos não apresenta pólos. Assim, o modelo de Thirring sem massa não possui estados de uma partícula, nem campos assintóticos.

Outras propriedades do modelo de Thirring em (1+1) dimensões podem ser demonstradas [7]. Contudo, isto está fora do escopo desta pequena introdução, cujo objetivo é dar uma breve visão do contexto em que o modelo tem sido tratado, isto é, como um laboratório de teoria quântica de campos [6].

O trabalho de Klaiber [7] também lançou as bases para a teoria de bosonização, contexto em que se demonstrou a equivalência entre o modelo de Thirring massivo e a teoria de sine-Gordon [8] (ver também [21]). Porém, só recentemente este modelo tem despertado interesse em  $d > 2$  dimensões, onde se tem revelado uma teoria bastante rica (apesar de perturbativamente não renormalizável). Neste trabalho estamos especialmente interessados na versão do modelo de Thirring, em (2+1) dimensões, introduzida por Itoh *et al.* [10] e Kondo [11], a qual consideramos na próxima seção.

## 1.2 O Modelo de Thirring como uma Teoria de *Gauge*

Nesta seção, consideraremos o modelo de Thirring como uma teoria de *gauge* em  $(2 + 1)$  dimensões. Partiremos da Lagrangiana para o modelo de Thirring massivo com um sabor fermiônico

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi - \frac{G}{2} (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi), \quad (1.26)$$

onde  $\Psi$  é um campo fermiônico de 2 componentes e assumiremos, sem perda de generalidade, que a massa  $m$  é positiva. A constante de acoplamento  $G$  tem dimensão de  $(\text{massa})^{-1}$  e será redefinida como  $G = \frac{e^2}{M^2}$ , onde  $e$  é um parâmetro adimensional [14]. Desde que  $G$  tem dimensão de inverso de massa, podemos notar que em  $(2 + 1)$  dimensões o modelo de Thirring não é renormalizável perturbativamente.

Esta Lagrangiana é invariante sob transformações  $U(1)$  globais, de modo que temos a corrente conservada

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 ,$$

$$j^\mu(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) . \quad (1.27)$$

No entanto, (1.26) não é invariante por transformações  $U(1)$  locais, ou seja, o modelo original de Thirring não é uma teoria de *gauge*.

Outra transformação de simetria importante a ser considerada é a de paridade ( $\mathcal{P}$ ). Em duas dimensões espaciais a transformação de paridade não é dada pela reflexão usual  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ , pois esta transformação corresponde a uma rotação (seu determinante é  $\det(\Lambda) = +1$ ). Neste caso, a transformação imprópria de paridade deve ser considerada como a reflexão em apenas um dos eixos espaciais:

$$\begin{aligned} x^1 &\rightarrow x'^1 = -x^1 , \\ x^2 &\rightarrow x'^2 = x^2 . \end{aligned}$$

Verifica-se, então, que o campo fermiônico transforma-se como

$$\Psi(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} \Psi'(x') = e^{i\delta} \gamma^1 \Psi(x) , \quad (1.28)$$

onde  $\delta$  é uma fase arbitrária, que pode ser omitida. Esta propriedade de transformação de  $\Psi$ , por sua vez, implica que o termo de massa fermiônica é ímpar sob transformação de paridade

$$\bar{\Psi} \Psi \xrightarrow{\mathcal{P}} -\bar{\Psi}' \Psi' . \quad (1.29)$$

Assim, podemos notar que a presença de um termo de massa na Lagrangiana (1.26) quebra a simetria de paridade. Isto possibilita o surgimento de um termo de Chern-Simons (o qual também é ímpar sob paridade) devido às correções radiativas.

Introduzindo um campo vetorial auxiliar  $\tilde{A}_\mu$ , podemos linearizar a interação e reescrever a Lagrangiana (1.26) na seguinte forma

$$\mathcal{L}' = \bar{\Psi} i \gamma^\mu \tilde{D}_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi + \frac{M^2}{2} \tilde{A}^\mu \tilde{A}_\mu, \quad (1.30)$$

com

$$\tilde{D}_\mu = \partial_\mu - ie \tilde{A}_\mu,$$

devemos notar que  $\tilde{D}_\mu$  não é uma derivada covariante, a despeito da semelhança formal, pois, conforme já foi dito,  $\mathcal{L}'$  não possui simetria  $U(1)$  local e o campo  $\tilde{A}_\mu$  não é um campo de *gauge*. De fato, as equações de Euler-Lagrange para o 3-vetor  $\tilde{A}_\mu$  resultam

$$\tilde{A}_\mu(x) \equiv -\frac{e}{M^2} \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x), \quad (1.31)$$

de modo que  $\tilde{A}_\mu$  é apenas uma representação apropriada para a corrente.

No entanto, considerando a Lagrangiana linearizada (1.30) como ponto de partida, podemos introduzir uma simetria de *gauge* local através do formalismo de Stückelberg [12]. A saber, decompos o campo  $\tilde{A}_\mu$  segundo

$$\tilde{A}_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x), \quad (1.32)$$

ao mesmo tempo que transformamos os campos fermiônicos segundo

$$\Psi(x) \rightarrow e^{-ie\theta(x)} \psi(x), \quad (1.33)$$

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{ie\theta(x)},$$

onde  $A_\mu$  é um campo vetorial e o campo de Stückelberg  $\theta$  é um campo escalar neutro. Efetuando estas transformações na Lagrangiana  $\mathcal{L}'$ , equação (1.30), obtemos

$$\mathcal{L}'' = \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + \frac{M^2}{2} (A_\mu - \partial_\mu \theta)^2, \quad (1.34)$$

onde

$$D_\mu = \partial_\mu - ie A_\mu,$$

é, de fato, uma derivada covariante, pois a Lagrangiana (1.34) é invariante sob a transformação de *gauge*

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \phi, \\ \theta &\rightarrow \theta' = \theta + \phi, \\ \psi &\rightarrow \psi' = e^{ie\phi} \psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-ie\phi}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

de modo que  $A_\mu$  é realmente um campo de *gauge*.

De (1.35) podemos notar que efetuando uma transformação de *gauge* para o *gauge* unitário  $\theta' = 0$  ( $\phi = -\theta$ ), temos

$$\psi'(x) = e^{-ie\theta(x)}\psi \equiv \Psi(x),$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x) \equiv \tilde{A}_\mu(x),$$

e, então, a Lagrangiana (1.34) coincide precisamente com a Lagrangiana linearizada  $\mathcal{L}'$ . Logo, o modelo original de Thirring é apenas uma versão de *gauge* fixo de (1.34).

A introdução da simetria  $U(1)$  local no tratamento do modelo de Thirring tem várias vantagens. Em primeiro lugar, cálculos de *loop* são geralmente muito difíceis no *gauge* unitário [10], ou seja, no modelo de Thirring original. Contudo, a existência da simetria de *gauge* nos permite escolher o *gauge* apropriado aos nossos propósitos, pois a matriz  $S$  é independente de *gauge* (ainda que as funções de Green fora da camada de massa sejam dependentes de *gauge*).

Além disto, ao calcularmos correções radiativas ao propagador do bóson vetorial, surge a possibilidade da indução de um termo de Chern-Simons. Sem a simetria de *gauge* qualquer regularização pode ser usada no tratamento das integrais divergentes, o que leva a resultados contraditórios quanto a se o termo de Chern-Simons é ou não induzido. A presença de uma simetria de *gauge* local pode ser usada na tentativa de resolver esta ambigüidade, uma vez que somente são permitidas regularizações que preservem tal simetria como, por exemplo, Pauli-Villars e regularização dimensional.

Adicionalmente, desde que (1.34) tem simetria de *gauge* local, podemos introduzir um termo  $\mathcal{L}_{GF+FP}$ , dado pela soma do termo de fixação de *gauge* e do termo contendo os campos fantasmas de Faddeev-Popov, de modo a obter uma Lagrangiana invariante sob transformações BRST:

$$\mathcal{L}_{Th,G} = \mathcal{L}'' + \mathcal{L}_{GF+FP}. \quad (1.36)$$

O termo  $\mathcal{L}_{GF+FP}$  pode ser escolhido na forma [11]

$$\mathcal{L}_{GF+FP} = -i\delta_{\mathbf{B}} \left[ \bar{c} \left( F[A, \theta] + \frac{\xi}{2} B \right) \right], \quad (1.37)$$

sendo  $\delta_{\mathbf{B}}$  a variação BRST. Nesta expressão,  $c(x)$  e  $\bar{c}(x)$  são os campos fantasmas de Faddeev-Popov,  $F[A, \theta]$  é o funcional de fixação de *gauge* e  $B(x)$  é um campo auxiliar, conhecido como campo de Nakanishi-Lautrup.

A variação BRST para um operador arbitrário  $\mathcal{O}$  pode ser definida como  $\delta\mathcal{O} = \frac{\delta\mathcal{O}}{\delta\eta}\delta\eta \stackrel{\text{def}}{=} (\delta_{\mathbf{B}}\mathcal{O})\delta\eta$ , onde  $\delta\eta$  é uma variável de Grassmann independente de  $x$ .

Então, verifica-se que a Lagrangiana completa,  $\mathcal{L}_{Th,G}$ , é invariante sob o conjunto de transformações BRST

$$\begin{aligned}
\delta_B A_\mu(x) &= \partial_\mu c(x) ; \\
\delta_B \theta(x) &= c(x) ; \\
\delta_B c(x) &= 0 ; \\
\delta_B \bar{c}(x) &= iB(x) ; \\
\delta_B B(x) &= 0 ; \\
\delta_B \psi(x) &= ie\psi(x)c(x) ; \\
\delta_B \bar{\psi}(x) &= -ie\bar{\psi}(x)c(x) .
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Na verificação da invariância de  $\mathcal{L}_{Th,G}$  sob as transformações acima, é importante notar que a transformação BRST é nilpotente, isto é, para qualquer funcional  $F$  dos campos  $A_\mu$ ,  $\theta$ ,  $c$  ( $\bar{c}$ ),  $B$  e  $\psi$  ( $\bar{\psi}$ ) temos  $\delta_B^2 F = 0$  [22]. Esta propriedade é constatada observando que os campos fantasmas de Faddeev-Popov são campos de Grassmann.

Então, a invariância de  $\mathcal{L}_{GF+FP}$  segue diretamente da propriedade de nilpotência da variação BRST e da definição de  $\mathcal{L}_{GF+FP}$ , equação (1.37). A invariância de  $\mathcal{L}''$  segue de sua invariância de *gauge* e do fato que para qualquer funcional dos campos de  $\psi$  ( $\bar{\psi}$ ),  $A_\mu$  e  $\theta$ , a variação BRST é apenas uma transformação de *gauge* com parâmetro de *gauge* infinitesimal  $\phi(x) = c(x)\delta\eta$ .

Fazendo uso da forma explícita destas transformações, a equação (1.37) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}_{GF+FP} = BF[A, \theta] + \frac{\xi}{2} B^2 - i\bar{c} \left\{ \left( \frac{\delta}{\delta A_\mu} F[A, \theta] \right) \partial_\mu + \left( \frac{\delta}{\delta \theta} F[A, \theta] \right) \right\} c ,$$

de onde podemos ver que, escolhendo o funcional de fixação de *gauge*  $F[A, \theta]$  separadamente linear em  $A$  e  $\theta$ , os campos fantasmas de Faddeev-Popov desacoplam-se totalmente do sistema.

Após integrar o campo  $B(x)$ , o termo de fixação de *gauge* é dado por  $\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(F[A, \theta])^2$  e podemos notar que no *gauge* covariante, dado por  $F[A] = \partial_\mu A^\mu$ , o campo de Stückelberg interage com o campo  $\tilde{A}_\mu$  (exceto no *gauge* de Landau  $\xi = 0$ ).

Assim, aqui vamos considerar o *gauge*  $R_\xi$ :

$$F[A, \theta] = \partial_\mu A^\mu + \xi M^2 \theta, \tag{1.39}$$

que, além de permitir o desacoplamento dos campos fantasmas, tem a vantagem de desacoplar também o campo de Stückelberg dos campos de matéria (independentemente de  $\xi$ ).

Nas referências [10] e [11] este *gauge* foi usado em sua versão não local e local, respectivamente. Em [10] os autores consideraram uma forma não local do *gauge*  $R_\xi$ , permitindo que o parâmetro fixando o *gauge*  $\xi$  fosse dependente do momento (derivada), com o propósito de analisar a geração de massa fermiônica através da equação de Schwinger-Dyson. Este *gauge* não local é o único que permite o uso da aproximação *ladder* (vértice nú) para a equação de Schwinger-Dyson de forma consistente com a identidade de Ward-Takahashi para a conservação da corrente.

Contudo, tais *gauges* não locais são difíceis de tratar e a correspondente expansão perturbativa exhibe problemas técnicos não triviais (ver referência [23]). Assim, para evitar tais problemas, seguiremos aqui a referência [11] e consideraremos a versão local do *gauge*  $R_\xi$ , isto é,  $\xi = \text{constante}$ .

Logo, a Lagrangiana (1.37) pode ser escrita, no *gauge*  $R_\xi$  local, na forma

$$\mathcal{L}_{Th,G} = \mathcal{L}_{A,\psi} + \mathcal{L}_\theta + \mathcal{L}_{gh}, \quad (1.40)$$

com

$$\mathcal{L}_{A,\psi} = \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + \frac{M^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (1.41)$$

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{1}{2} (\partial_\mu \theta)^2 - \frac{\xi M^2}{2} \theta^2, \quad (1.42)$$

$$\mathcal{L}_{gh} = i \left[ (\partial_\mu \bar{c}) (\partial^\mu c) - \xi M^2 \bar{c} c \right], \quad (1.43)$$

onde desprezamos uma divergência total, que não afeta as equações de movimento, e reescalamos o campo de Stückelberg segundo  $M\theta \rightarrow \theta$ . A Lagrangiana  $\mathcal{L}_{Th,G}$  será daqui por diante referida como a Lagrangiana do modelo de Thirring como uma teoria de *gauge* (por brevidade, MTG).

De (1.40) podemos inferir algumas características deste modelo. Em primeiro lugar, a equação de movimento para o campo fermiônico é, formalmente, idêntica àquela para a QED<sub>3</sub>. Esta semelhança, contudo, é meramente formal, pois o MTG é uma teoria não renormalizável enquanto a QED<sub>3</sub> é super-renormalizável.

Além disso, as equações de Euler-Lagrange para o bóson de *gauge* são dadas por

$$\frac{1}{\xi} \partial^\mu (\partial^\nu A_\nu) + M^2 A^\mu = -j^\mu, \quad (1.44)$$

e não são equações de onda. Assim, o bóson de *gauge*  $A_\mu$  não se propaga e não é um campo dinâmico em nível árvore. Este fato pode ser constatado simplesmente observando que não há um termo cinético associado a  $A_\mu$  em (1.41). Ainda assim, vamos mostrar que o bóson de *gauge* adquire dinâmica devido às correções radiativas.

Outro ponto que deve ser notado é que o modelo de Thirring original é recuperado da Lagrangiana (1.41) no limite  $\xi \rightarrow \infty$ , que corresponde ao *gauge* unitário [9]. Conforme podemos observar de (1.40), o parâmetro perturbativo no MTG é a constante de acoplamento adimensional  $e$ . Quando consideramos o limite para o *gauge* unitário, o parâmetro de expansão perturbativa volta a ser a constante de acoplamento do modelo de Thirring original  $G$ . No entanto, como uma consequência do processo de linearização, gráficos de mesma ordem em  $G$  são obtidos como o limite de gráficos de diferentes ordens em  $e$  (devemos notar que quando  $\xi \rightarrow \infty$  recuperamos o vínculo (1.31)). Por exemplo, tanto a correção de vértice ( $\mathcal{O}(e^3)$ ) quanto o diagrama de caixa ( $\mathcal{O}(e^4)$ ) são de mesma ordem  $\mathcal{O}(G^2)$  no limite de *gauge* unitário.

É interessante observar que nas referências [3] e [4] a Lagrangiana (1.41) foi obtida apenas adicionando um termo de fixação de *gauge* covariante à Lagrangiana (1.30), ainda que não exista nenhuma simetria de *gauge* em tal modelo. O mérito da construção acima está em introduzir, de fato, uma simetria de *gauge*. Mas é somente a Lagrangiana completa (1.40) que possui tal simetria e justifica o uso de (1.41). Em especial, os campos fantasmas de Faddeev-Popov, apesar de livres, desempenham um papel importante na derivação de identidades de Ward-Takahashi para a obtenção da correção de vértice (ver cap. 4).

Finalmente, devemos observar que a existência da simetria de *gauge* restringe a escolha dos esquemas de regularização a serem usados, quando do cálculo de correções radiativas, àqueles que preservem esta simetria. Contudo, isto não é suficiente para remover a ambigüidade de regularização no coeficiente do termo induzido de Chern-Simons, quando calculamos a correção de *loop* fermiônico. Neste sentido, o método causal tem provado ser útil [24, 25], pois não sofre das dificuldades associadas às divergências ultravioleta, resultando em um valor não ambíguo para o coeficiente do termo induzido de Chern-Simons.

## Capítulo 2

### O Método Causal de Bogoliubov, Epstein e Glaser

Neste capítulo consideraremos uma breve introdução ao método causal de Bogoliubov, Epstein e Glaser (BEG). A idéia de construir a matriz de espalhamento usando certas condições físicas explicitamente formuladas, entre as quais a causalidade é a principal, remonta a Stückelberg. Posteriormente, Bogoliubov e colaboradores levaram o programa adiante e obtiveram uma formulação mais clara da condição de causalidade a partir da introdução da matriz  $S(g)$ , onde  $g$  é uma função teste. No entanto, estes autores obtiveram a expressão usual para a matriz  $S$  em termos de uma série exponencial ordenada temporalmente. Como é bem conhecido, esta expressão para a matriz  $S$  não é bem definida, apresentando sérios problemas relacionados às divergências ultravioleta.

Epstein e Glaser [17], partindo das condições de invariância translacional e causalidade formuladas por Bogoliubov, procederam de forma mais cuidadosa e derivaram um método para a construção indutiva da matriz  $S(g)$  onde em todos os passos trata-se com distribuições bem definidas e, portanto, foram capazes de evitar as dificuldades devido às divergências ultravioleta. Na referência [17] este método foi aplicado a campos escalares, posteriormente o método foi aplicado à QED<sub>4</sub> [24], QED<sub>3</sub> [25] e a teorias de gauge não abelianas [26].

Este capítulo está organizado como segue. Na primeira seção enunciaremos os princípios físicos fundamentais que nos permitem construir a matriz  $S(g)$  perturbativamente no método causal. A seguir, descreveremos, de forma resumida, o processo de construção indutiva da matriz  $S(g)$ . Veremos que o ponto crucial para evitarmos as divergências ultravioleta da teoria de perturbação usual é efetuarmos uma correta bipartição das distribuições envolvidas e descreveremos o processo de bipartição. Nesta seção seguiremos de perto as referências [16, 17, 24, 27]. Na segunda seção, iniciaremos o programa de aplicar o método de BEG ao MTG, demonstrando a não-renormalizabilidade deste modelo através da aplicação do método causal [28].

## 2.1 A teoria de Bogoliubov, Epstein e Glaser

### 2.1.1 Construção Indutiva

No método causal de BEG a matriz  $S$  é construída sem qualquer referência ao formalismo Hamiltoniano. Em lugar disto, sua forma explícita é obtida fazendo uso de certas condições físicas, sendo que causalidade exerce um papel crucial. Neste método a matriz  $S$  é vista como uma distribuição de operadores, expressa pela série perturbativa

$$S(g) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^3x_1 \dots d^3x_n T_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n), \quad (2.1)$$

onde  $g(x)$  é uma função teste c-número pertencente ao espaço de Schwartz,  $g(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$ . Desde que decaem rapidamente no infinito, as funções teste  $g(x)$  realizam o papel de ligar e desligar adiabaticamente a interação. Assim, o limite adiabático  $g \rightarrow 1$  deve ser considerado no final dos cálculos.

A série (2.1) é puramente formal e nenhuma afirmação pode ser feita acerca de sua convergência. As distribuições de  $n$  pontos  $T_n(x)$ , que são expressas em termos dos operadores de campo livres da teoria, são os objetos básicos a serem determinados.

As condições físicas necessárias para determinar a matriz  $S$  são:

- *Causalidade* - para formular a condição de causalidade vamos considerar o caso em que a função teste  $g(x)$  pode ser expressa como a soma de duas funções teste  $g_1$  e  $g_2$  que possuem suportes disjuntos no tempo:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x), \quad (2.2)$$

com

$$\begin{aligned} \text{supp } g_1 &\subset \{x \in \mathbf{M} \mid x^0 \in (-\infty, s)\}, \\ \text{supp } g_2 &\subset \{x \in \mathbf{M} \mid x^0 \in (s, \infty)\}, \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{M}$  indica o espaço de Minkowski. Se as funções teste  $g_1$  e  $g_2$  satisfazem as condições acima, dizemos que o suporte de  $g_1$  é anterior ao suporte de  $g_2$  ( $\text{supp } g_1 < \text{supp } g_2$ ).

Então, a condição de causalidade é dada por

$$S(g_1 + g_2) = S(g_2)S(g_1), \quad (2.3)$$

que expressa causalidade no sentido que qualquer evento ocorrendo no sistema para tempos  $t < s$  não é influenciado pelo comportamento do sistema para tempos  $t > s$ .

A condição (2.3) pode ser escrita em termos das distribuições  $T_n$  como

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = T_m(x_1, \dots, x_m) T_{n-m}(x_{m+1}, \dots, x_n), \quad (2.4)$$

se  $\{x_1, \dots, x_m\} > \{x_{m+1}, \dots, x_n\}$ ;

- *Invariância de translação* - sendo  $U(a, \Lambda)$  a representação usual do grupo de Poincaré  $\mathcal{P}_+^\uparrow$  no espaço de Fock, exige-se

$$U(a, 1)S(g)U(a, 1)^{-1} = S(g_a), \quad (2.5)$$

onde

$$g_a(x) = g(x - a).$$

Em termos das distribuições de  $n$  pontos, a condição de invariância de translação é dada por

$$U(a, 1)T_n(x_1, \dots, x_n)U(a, 1)^{-1} = T_n(x_1 + a, \dots, x_n + a). \quad (2.6)$$

Em teoria de perturbação causal não é necessário exigir a invariância de Lorentz;

- *Interação* - a matriz  $S$  é completamente determinada a partir da estrutura causal uma vez conhecido o acoplamento, isto é, a primeira ordem na teoria de perturbação  $T_1(x)$ . Para o MTG temos

$$T_1(x) = -ie : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A_\mu(x), \quad (2.7)$$

conforme pode ser visto de (1.41). É interessante notar que (2.7) é formalmente semelhante ao acoplamento da QED, ainda que os operadores de campo tenham diferentes interpretações nos dois casos.

A condição de causalidade (2.4) mostra que os objetos básicos a serem construídos,  $T_n$ , são produtos ordenados no tempo. Na formulação usual de teoria de campos, os  $T_n$  são dados simplesmente pelo ordenamento temporal obtido via multiplicação por funções degrau [16]

$$\begin{aligned} T_n(x_1, \dots, x_n) &= T\{T_1(x_1), \dots, T_1(x_n)\} \\ &\equiv \sum_{\Pi} \Theta(x_{\Pi_1}^0 - x_{\Pi_2}^0) \dots \Theta(x_{\Pi_{n-1}}^0 - x_{\Pi_n}^0) T_1(x_{\Pi_1}) \dots T_1(x_{\Pi_n}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde o somatório inclui todas as  $n!$  permutações possíveis. No entanto, esta formulação padece das dificuldades associadas às divergências ultravioleta, pois (2.8) não corresponde a distribuições bem definidas. No método de BEG, ao contrário, os  $T_n$  são obtidos através de uma análise cuidadosa, resultando em distribuições bem definidas.

Para construir a matriz  $S$  é necessário introduzir uma série formal para a matriz  $S$  inversa

$$S(g)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^3x_1 \dots d^3x_n \tilde{T}_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n), \quad (2.9)$$

sendo que as distribuições  $\tilde{T}_n(x)$  são obtidas por inversão formal de (2.1),

$$\tilde{T}_n(X) = \sum_{r=1}^n (-)^r \sum_{P_r} T_{n_1}(X_1) \dots T_{n_r}(X_r), \quad (2.10)$$

onde, uma vez que as distribuições  $T_n$  e  $\tilde{T}_n$  são simétricas em seus argumentos, adotamos a notação  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Na expressão acima,  $P_r$  indica todas as partições de  $X$  em  $r$  subconjuntos disjuntos

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_r, \quad X_j \neq \emptyset, \quad |X_j| = n_j. \quad (2.11)$$

Então, o passo indutivo é como segue: se conhecemos todas  $T_m(X)$  com  $m \leq n-1$ , podemos definir as distribuições

$$A'_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{P_2} \tilde{T}_{n_1}(X) T_{n-n_1}(Y, x_n), \quad (2.12)$$

$$R'_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{P_2} T_{n-n_1}(Y, x_n) \tilde{T}_{n_1}(X),$$

onde as somas percorrem todas as partições

$$P_2 : \{x_1, \dots, x_{n-1}\} = X \cup Y, \quad X \neq \emptyset, \quad (2.13)$$

em subconjuntos disjuntos, com  $|X| = n_1$  e  $|Y| \leq n-2$ . Se os somatórios acima são estendidos de modo a incluir o conjunto vazio  $X = \emptyset$  obtemos as distribuições

$$\begin{aligned} A_n(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{P_2^0} \tilde{T}_{n_1}(X) T_{n-n_1}(Y, x_n) \\ &= A'_n(x_1, \dots, x_n) + T_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} R_n(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{P_2^0} T_{n-n_1}(Y, x_n) \tilde{T}_{n_1}(X) \\ &= R'_n(x_1, \dots, x_n) + T_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

sendo que  $P_2^0$  refere-se a todas as partições

$$P_2^0 : \{x_1, \dots, x_{n-1}\} = X \cup Y . \quad (2.15)$$

Observando as eqs. (2.14) vemos que as distribuições  $A_n$  and  $R_n$  não são conhecidas pela hipótese de indução, pois contêm a incógnita  $T_n$ . No entanto, a diferença

$$D_n(x_1, \dots, x_n) = R'_n - A'_n = R_n - A_n, \quad (2.16)$$

é conhecida. Então, analisando as propriedades de suporte das distribuições (2.13)-(2.16), podemos determinar  $T_n$ .

É importante notar que no procedimento resumido acima nunca temos um produto de distribuições no mesmo ponto. Assim, como o produto de distribuições definidas em subconjuntos disjuntos é o produto direto das distribuições, em todos os passos temos distribuições bem definidas.

Vamos indicar os cones de luz avançado e retardado de  $x$  por

$$\bar{V}^\pm(x) = \{y \mid (y - x)^2 \geq 0, \pm(y^0 - x^0) \geq 0\} , \quad (2.17)$$

e a generalização para  $n$  pontos é dada por

$$\Gamma_n^\pm(x) \equiv \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_j \in \bar{V}^\pm(x), \forall j = 1, \dots, n\}, \quad (2.18)$$

Com base na estrutura causal, demonstra-se que  $R_n$  ( $A_n$ ) tem suporte retardado (avançado) e  $D_n$  tem suporte causal [17, 24], isto é,

$$\text{supp } R_n(X) \subseteq \Gamma_{n-1}^+(x_n), \quad \text{supp } A_n(X) \subseteq \Gamma_{n-1}^-(x_n), \quad (2.19)$$

e

$$\text{supp } D_n(X) \subseteq \Gamma_{n-1}^+(x_n) \cup \Gamma_{n-1}^-(x_n) . \quad (2.20)$$

Assim, decompondo a distribuição causal  $D_n$  em suas partes retardada  $R_n$  e avançada  $A_n$ , obtemos a distribuição de  $n$  pontos  $T_n$  usando (2.14):

$$\begin{aligned} T_n &= R_n - R'_n \\ &= A_n - A'_n . \end{aligned} \quad (2.21)$$

O único passo não trivial deste procedimento é efetuar a bipartição da distribuição causal.

### 2.1.2 Bipartição da Distribuição Causal

As distribuições causais que consideraremos são dadas, em termos dos operadores de campo assintóticos livres, por expressões do tipo

$$D_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_k : \prod_j \bar{\psi}(x_j) d_n^k(x_1, \dots, x_n) \prod_l \psi(x_l) \prod_m A(x_m) : , \quad (2.22)$$

onde  $\psi, \bar{\psi}$  são campos fermiônicos e  $A$  indica os campos dos bósons de *gauge*. Nesta expressão,  $d_n^k$  são distribuições numéricas temperadas,  $d_n^k \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{3n})$ , com suporte causal.

Para determinarmos a matriz  $S$ , é necessário decompor  $d_n^k$  em suas partes retardada ( $r$ ) e avançada ( $a$ ) segundo

$$d_n^k(X) = r_n(X) - a_n(X) , \quad (2.23)$$

$$\text{supp } r_n(X) \subseteq \Gamma_{n-1}^+(x_n) , \quad \text{supp } a_n(X) \subseteq \Gamma_{n-1}^-(x_n) . \quad (2.24)$$

Devido à invariância por translações, é suficiente colocar  $x_n = 0$  e considerar

$$d(x) \stackrel{\text{def}}{=} d_n^k(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m), \quad m = 3n - 3 . \quad (2.25)$$

Além disso, sendo  $\Gamma^+(0) \cap \Gamma^-(0) = \{0\}$ , podemos notar que o comportamento de  $d(x)$  na origem é crucial no problema de bipartição. Portanto, é necessário classificar as distribuições singulares neste ponto. Com este objetivo introduzimos as definições [24]:

**Definição 2.1** A distribuição  $d(x) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$  tem uma quasi-assintótica  $d_0(x)$  em  $x = 0$  com respeito a uma função contínua positiva  $\rho(\delta)$ ,  $\delta > 0$ , se o limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) \delta^m d(\delta x) = d_0(x) \neq 0, \quad (2.26)$$

existe em  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$ .

A definição equivalente no espaço dos momentos é

**Definição 2.2** A distribuição  $\hat{d}(p) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$  tem uma quasi-assintótica  $\hat{d}_0(p)$  em  $p = \infty$  se o limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) \langle \hat{d}(\frac{p}{\delta}), \check{\varphi}(p) \rangle = \langle \hat{d}_0, \check{\varphi} \rangle, \quad (2.27)$$

existe para toda  $\check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ .

Em (2.27)  $\hat{d}$  indica a transformada de Fourier distribucional de  $d$  e  $\check{\varphi}$  a transformada de Fourier inversa de  $\varphi$ . A função  $\rho(\delta)$  é chamada de função de contagem de potências.

**Definição 2.3** A distribuição  $d \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$  é dita singular de ordem  $\omega$  se ela possui uma quasi-assintótica  $d_0(x)$  em  $x = 0$ , ou sua transformada de Fourier tem uma quasi-assintótica  $\hat{d}_0(p)$  em  $p = \infty$ , com função de contagem de potências  $\rho(\delta)$  satisfazendo

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\rho(c\delta)}{\rho(\delta)} = c^\omega, \quad \forall c > 0. \quad (2.28)$$

A função  $\rho(\delta)$  satisfaz a seguinte estimativa [24]: para um número arbitrariamente pequeno  $\varepsilon > 0$ , existem constantes  $C$  e  $C'$  tais que

$$C\delta^{\omega-\varepsilon} \geq \rho(\delta) \geq C'\delta^{\omega+\varepsilon}. \quad (2.29)$$

A partir das definições acima podemos distinguir, dependendo do valor de  $\omega$ , dois casos:  $\omega < 0$  e  $\omega \geq 0$ . Vamos considerar cada um destes casos separadamente.

(i)  $\omega < 0$  - Neste caso podemos ver de (2.29) que

$$\rho(\delta) \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad \delta \rightarrow 0,$$

de modo que

$$\langle d(x), \varphi\left(\frac{x}{\delta}\right) \rangle \rightarrow \frac{\langle d_0, \varphi \rangle}{\rho(\delta)} \rightarrow 0.$$

O processo de bipartição pode, então, ser feito introduzindo uma função monótona  $C^\infty$  sobre  $\mathbf{R}^1$  tal que

$$\chi_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ < 1 & \text{para } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{para } t \geq 1. \end{cases} \quad (2.30)$$

Adicionalmente, introduzindo um vetor  $v = (v_1, \dots, v_{n-1}) \in \Gamma^+$  (ou seja, todos os vetores estão dentro do cone de luz frontal) pode-se mostrar [24] que o limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \chi_0\left(\frac{v \cdot x}{\delta}\right) d(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Theta(v \cdot x) d(x) = r(x), \quad (2.31)$$

existe e define a multiplicação de  $d(x)$  por uma função degrau  $\Theta$ . Assim, obtemos a distribuição retardada  $r$  e, como  $a = r - d$ , também a distribuição avançada  $a$ . Então, usando (2.21) obtemos  $T_n$ .

No espaço dos momentos (2.31) pode ser escrita como a relação de dispersão [27]

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{d}(tp)}{1 - t + i0}, \quad p \in \Gamma^+. \quad (2.32)$$

Neste caso, a solução do problema de bipartição é única.

(ii)  $\omega \geq 0$  - Neste caso temos

$$\frac{\rho(\delta)}{\delta^{\omega+1}} \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad \delta \rightarrow 0 ,$$

e não podemos fazer a decomposição de  $d(x)$  pela simples multiplicação por uma função degrau  $\Theta$  como no caso anterior. Para isto, é necessário escolher uma função teste satisfazendo

$$D^a \varphi(0) = 0 \quad \forall |a| \leq \omega , \quad (2.33)$$

onde

$$D^a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{a_1+\dots+a_m}}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_m^{a_m}} , \quad |a| = a_1 + \dots + a_m . \quad (2.34)$$

Para tanto, introduz-se uma função auxiliar  $w(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$  tal que

$$w(0) = 1 , \quad D^a w(0) = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq |a| \leq \omega , \quad (2.35)$$

e define-se

$$(W\varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x) - w(x) \sum_{|a|=0}^{\omega} \frac{x^a}{a!} (D^a \varphi)(0) , \quad (2.36)$$

de modo que a decomposição segundo (i) é possível. Temos

$$\langle r(x), \varphi(x) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle d, \Theta(v \cdot x) W\varphi \rangle . \quad (2.37)$$

No espaço dos momentos a solução retardada é dada pela fórmula de dispersão [24]\*

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{d}(tp)}{(t - i0p_0)^{\omega+1} (1 - t + i0p_0)} , \quad (2.38)$$

onde  $p \in \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ . Esta fórmula é chamada de solução central, devido ao fato de ser normalizada na origem dos momentos:

$$D_p^b \hat{r}(p)|_{p=0} = 0 \quad \forall |b| \leq \omega . \quad (2.39)$$

A solução central, equação (2.38), tem a vantagem de não introduzir uma nova escala de massa na teoria (se em (2.39) o ponto de normalização fosse em  $p \neq 0$ , então,  $|p^2| = M^2$  é uma nova escala). Além disto, esta solução preserva muitas das simetrias da distribuição causal, em especial covariância de Lorentz e invariância de *gauge*.

---

\*Esta expressão difere ligeiramente daquela considerada na referência [24], pois lá a solução central foi escrita somente para  $p \in \Gamma^+$ .

No entanto, ao contrário do caso em que  $\omega \leq 0$ , quando  $\omega \geq 0$  a solução do problema de bipartição não é única. Se  $\tilde{r}(x)$  é a parte retardada de uma outra decomposição, então  $\tilde{r}(x) - r(x)$  é uma distribuição com suporte em  $\{0\}$ . Logo, a solução geral  $\tilde{r}$  para a distribuição retardada é dada por [20]

$$\tilde{r}(x) = r(x) + \sum_{|a|=0}^{\omega} C'_a D^a \delta(x), \quad (2.40)$$

com  $r(x)$  definida em (2.37). Nesta expressão fez-se uso da condição de *bipartição mínima*, que nada mais é do que a exigência que o processo de bipartição preserve a ordem singular da distribuição, isto é,

$$\begin{aligned} \omega_r &\leq \omega_d, \\ \omega_a &\leq \omega_d, \end{aligned}$$

onde  $\omega_r$  ( $\omega_r$ ) é a ordem singular da distribuição retardada (avançada) e  $\omega_d$  é a ordem singular da distribuição causal. Esta condição exerce um papel muito importante em QED<sub>4</sub> [24] e QED<sub>3</sub> [25], e também será útil aqui. No espaço dos momentos temos

$$\tilde{r}(p) = \hat{r}(p) + \sum_{|a|=0}^{\omega} C_a p^a, \quad (2.41)$$

onde  $\hat{r}(p)$  é dada por (2.38). Assim, vemos que a distribuição retardada (e, portanto, também  $T_n$ ) é determinada a menos de um polinômio nos momentos, sendo que os coeficientes constantes  $C_a$  não são fixados pela estrutura causal; condições físicas adicionais são necessárias para fixá-los.

Finalmente, é importante observar que uma correta determinação da ordem singular da distribuição causal é crucial, pois o uso de um valor subestimado de  $\omega$  em (2.38) tem profundas conseqüências físicas, podendo inclusive nos remeter às divergências ultravioleta da teoria de perturbação usual. Esta questão foi recentemente considerada no caso da eletrodinâmica quântica em (1+1) dimensões [29] (modelo de Schwinger). É um fato bem conhecido que neste modelo o fóton adquire massa como uma conseqüência imediata da anomalia axial (ver [30] e referências lá citadas). No entanto, em [29] Aste *et al.* mostraram que, usando o valor de  $\omega$  obtido por contagem de potências, o fóton permanece sem massa (a teoria não é anômala) e somente determinando  $\omega$  segundo os critérios considerados acima o valor correto para a massa do fóton é obtido. Assim, vemos que a determinação de  $\omega$  usando as definições 2.1-2.3 não é, de modo algum, equivalente à simples contagem de potências (ainda que em alguns casos ambos deem o mesmo resultado).

## 2.2 Não-renormalizabilidade do MTG

A Lagrangiana  $\mathcal{L}_{A,\psi}$ , equação (1.41), é nosso ponto de partida para o tratamento causal do MTG. Conforme vimos,  $\mathcal{L}_{A,\psi}$  implica em que o termo de primeira ordem na expansão perturbativa causal da matriz  $S$  é

$$T_1(x) = -ie : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A_\mu(x) = -\tilde{T}_1(x) , \quad (2.42)$$

sendo que a última igualdade segue da equação (2.10). Desta expressssão vemos que o parâmetro adimensional  $e$  exerce o papel de parâmetro de expansão no MTG, análogo à carga elétrica em QED. No entanto, no limite  $\xi \rightarrow \infty$ , quando recuperamos a relação entre  $\tilde{A}_\mu$  e a corrente fermiônica no modelo de Thirring original, temos que o verdadeiro parâmetro de expansão é  $G$ .

Para ir de  $n = 1$  para  $n = 2$  na teoria de perturbação temos que formar a distribuição causal, que conforme descrito na seção anterior é dada por:

$$D_2(x_1, x_2) = [T_1(x_1), T_1(x_2)] . \quad (2.43)$$

Então, ordenando normalmente os produtos de operadores pelo teorema de Wick, obtemos as contribuições em  $D_2$  aos vários processos em que estamos interessados (polarização do vácuo, auto-energia do férmion, etc.). Neste processo necessitaremos das seguintes contrações entre os campos livres:

$$|\psi_a(x_1) \bar{\psi}_b|(x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{i} S_{ab}^{(+)}(x_1 - x_2) , \quad (2.44)$$

$$|\bar{\psi}_a(x_1) \psi_b|(x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{i} S_{ba}^{(-)}(x_2 - x_1) , \quad (2.45)$$

$$|A_\mu(x_1) A_\nu|(x_2) \stackrel{\text{def}}{=} i D_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2) , \quad (2.46)$$

sendo que as expressões explícitas para as funções singulares  $S^{(\pm)}$  e  $D_{\mu\nu}^{(\pm)}$  são consideradas no apêndice B.

Contudo, antes de iniciarmos os cálculos em teoria de perturbação, é útil derivar uma expressão geral para a ordem singular máxima  $\omega$  de gráficos arbitrários no MTG.

**Proposição 2.1** *Para o modelo de Thirring como uma teoria de “gauge” a ordem singular é*

$$\omega = 3 - f - \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}n, \quad (2.47)$$

onde  $f$  ( $b$ ) é o número de férmions (bósons) externos e  $n$  é a ordem da teoria de perturbação.

*Prova.* A prova é por indução [24, 28]. Inicialmente, verificamos (2.47) para os diagramas de ordem mais baixa (o termo de primeira ordem (2.7) tem  $\omega = 0$ , por definição).

Então, para verificar que esta relação é preservada ao passar de  $n - 1$  para  $n$  em teoria de perturbação, devemos considerar o produto tensorial de dois subgráficos com ordem singular  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , respectivamente. Por hipótese de indução  $\omega_1$  e  $\omega_2$  satisfazem (2.47). Este produto tensorial está ordenado normalmente, dando surgimento a contrações fermiônicas e bosônicas. Inicialmente, vamos considerar o caso em que  $l_b$  contrações bosônicas surgem neste processo. Então, a distribuição numérica da expressão contraída é da forma

$$t_1^{[\mu]}(x_1 - x_r, \dots, x_{r-1} - x_r) \prod_{j=1}^{l_b} D_{\mu_j \nu_j}^{(+)}(x_{r_j} - y_{v_j}) t_2^{[\nu]}(y_1 - y_v, \dots, y_{v-1} - y_v) \\ \stackrel{\text{def}}{=} t(\zeta_1, \dots, \zeta_{r-1}, \eta_1, \dots, \eta_{v-1}, \eta), \quad (2.48)$$

onde  $\{x_{r_j}\}$  é um subconjunto de  $\{x_1, \dots, x_r\}$  e  $\{y_{v_j}\}$  é um subconjunto de  $\{y_1, \dots, y_v\}$ . Em (2.48) levamos em consideração a invariância de translação e introduzimos as coordenadas relativas

$$\zeta_j = x_j - x_r, \quad \eta_j = y_j - y_v, \quad \eta = x_r - y_v. \quad (2.49)$$

Os símbolos  $[\mu]$  and  $[\nu]$  indicam a coleção de índices  $\{\mu_1, \dots, \mu_l\}$  e  $\{\nu_1, \dots, \nu_l\}$ , respectivamente.

Tomando a transformada de Fourier de  $t(\zeta, \eta)$

$$\hat{t}(p_1, \dots, p_{r-1}, q_1, \dots, q_{v-1}, q) \propto \int d^{3r-3} \zeta d^{3v} \eta t(\zeta, \eta) e^{ip \cdot \zeta + iq \cdot \eta}, \quad (2.50)$$

(o sinal de proporcionalidade indica que estamos omitindo potências de  $2\pi$ ) e levando em consideração que os produtos tornam-se convoluções, temos

$$\hat{t}(p_1, \dots, p_{r-1}, q_1, \dots, q_{v-1}, q) \propto \int \left( \prod_{j=1}^{l_b} d^3 k_j \right) \delta^{(3)}(q - \sum_{j=1}^{l_b} k_j) \\ \times \hat{t}_1^{[\mu]}(\dots, p_i - k_{r(i)}, \dots) \prod_{j=1}^{l_b} \hat{D}_{\mu_j \nu_j}^{(+)}(k_j) \hat{t}_2^{[\nu]}(\dots, q_s + k_{v(s)}, \dots), \quad (2.51)$$

onde  $r(i) = v(s)$  se, e somente se,  $x_i$  e  $y_s$  estão unidos por uma contração. Para coordenadas  $x_j$  e  $y_m$  que não estão unidas por uma contração temos apenas  $p_j$  e  $q_m$  como argumentos, respectivamente. Nesta expressão,  $\hat{D}_{\mu\nu}^{(+)}(k)$  é a transformada de Fourier de  $D_{\mu\nu}^{(+)}(x)$ , que é dada por

$$\hat{D}_{\mu\nu}^{(+)}(k) = \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \delta^{(1)}(k^2 - \xi M^2) \theta(k_0). \quad (2.52)$$

Aplicando  $\hat{t}(p_1, \dots, q)$  sobre uma função teste  $\check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3(r+v-1)})$ , obtemos

$$\langle \hat{t}, \check{\varphi} \rangle \propto \int d^{3r-1} p' d^{3v} q' \hat{t}_1^{[\mu]}(p') \hat{t}_2^{[\nu]}(q') \psi_{[\mu\nu]}(p', q'), \quad (2.53)$$

onde  $\psi_{[\mu\nu]}(p', q')$  é definida como

$$\begin{aligned} \psi_{[\mu\nu]}(p', q') &= \int \left( \prod_{j=1}^{l_b} d^3 k_j \right) d^3 q' \delta^{(3)}(q' - \sum_{j=1}^{l_b} k_j) \prod_{j=1}^{l_b} \hat{D}_{\mu_j \nu_j}^{(+)}(k_j) \\ &\times \check{\varphi}(\dots, p'_i + k_{r(i)}, \dots, q'_s - k_{v(s)}, \dots, q'). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Para determinar a ordem singular de  $\hat{t}$ , segundo a definição 2.2, temos que considerar a distribuição escalonada  $\hat{t}(\frac{p_1}{\delta}, \dots, \frac{q}{\delta})$ . Logo, temos

$$\begin{aligned} \langle \hat{t}(\frac{p_1}{\delta}, \dots, \frac{q}{\delta}), \check{\varphi} \rangle &= \delta^m \langle \hat{t}(p_1, \dots, q), \check{\varphi}(\delta p_1, \dots, \delta q) \rangle \\ &\propto \delta^m \int d^{3r-3} p' d^{3v-3} q' \hat{t}_1^{[\mu]}(p') \hat{t}_2^{[\nu]}(q') \psi_{\delta[\mu\nu]}(p', q'), \end{aligned} \quad (2.55)$$

com  $m = 3(r + v - 1)$  e

$$\begin{aligned} \psi_{\delta[\mu\nu]}(p', q') &= \int \left( \prod_{j=1}^{l_b} d^3 k_j \right) d^3 q' \delta^{(3)}(q' - \sum_{j=1}^{l_b} k_j) \prod_{j=1}^{l_b} \hat{D}_{\mu_j \nu_j}^{(+)}(k_j) \\ &\times \check{\varphi}(\dots, \delta(p'_i + k_{r(i)}), \dots, \delta(q'_s - k_{v(s)}), \dots, \delta q'). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Introduzindo as variáveis  $\tilde{k}_j = \delta k_j$  e  $\tilde{q} = \delta q$ , e observando que<sup>†</sup>

$$\begin{aligned} \hat{D}_{\mu\nu}^{(+)}(\frac{\tilde{k}}{\delta}) &= \frac{\tilde{k}_\mu \tilde{k}_\nu}{\delta^2 M^2} \delta^{(1)}(\frac{\tilde{k}^2}{\delta^2} - \xi M^2) \theta(\frac{\tilde{k}_0}{\delta}) \\ &= \frac{\tilde{k}_\mu \tilde{k}_\nu}{M^2} \delta^{(1)}(\tilde{k}^2) \theta(k_0) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{D}_{0\mu\nu}^{(+)}(\tilde{k}), \end{aligned} \quad (2.57)$$

obtemos

$$\psi_{\delta[\mu\nu]}(p, q) = \frac{1}{\delta^{3l_b}} \psi_{[\mu\nu]}^0(\delta p, \delta q), \quad (2.58)$$

onde o sobrescrito 0 indica que  $\hat{D}_{\mu\nu}^{(+)}$  é substituído por  $\hat{D}_{0\mu\nu}^{(+)}$  em (2.54). Então, substituindo (2.58) em (2.55) e fazendo a mudança de variáveis  $\delta p = \tilde{p}$ ,  $\delta q = \tilde{q}$ , encontramos

$$\langle \hat{t}(\frac{p_1}{\delta}, \dots, \frac{q}{\delta}), \check{\varphi} \rangle \propto \delta^{3-3l_b} \int d^{3r-3} \tilde{p} d^{3v-3} \tilde{q} \hat{t}_1^{[\mu]}(\frac{\tilde{p}}{\delta}) \hat{t}_2^{[\nu]}(\frac{\tilde{q}}{\delta}) \psi_{[\mu\nu]}^0(\tilde{p}, \tilde{q}). \quad (2.59)$$

---

<sup>†</sup>Ver a equação (B.22).

Mas, por hipótese de indução, as distribuições  $\hat{t}_1^{[\mu]}$  e  $\hat{t}_2^{[\nu]}$  têm ordem singular  $\omega_1$  e  $\omega_2$  com funções de contagem de potências  $\rho_1(\delta)$  e  $\rho_2(\delta)$ , respectivamente. Assim, verificamos que o limite considerado na definição 2.2 existe, para a distribuição  $\hat{t}$ , com função de contagem de potências dada por

$$\rho(\delta) = \delta^{3l_b-3} \rho_1(\delta) \rho_2(\delta), \quad (2.60)$$

cuja ordem singular é

$$\omega = 3l_b - 3 + \omega_1 + \omega_2. \quad (2.61)$$

Logo, substituindo

$$\omega_i = 3 - f_i - \frac{3}{2}b_i + \frac{1}{2}n_i, \quad (2.62)$$

para  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , resulta

$$\omega = 3 - (f_1 + f_2) - \frac{3}{2}(b_1 + b_2 - 2l_b) + \frac{1}{2}(n_1 + n_2), \quad (2.63)$$

o que prova a proposição acima para  $l_b$  contrações bosônicas.

Para o caso de  $l_f$  contrações fermiônicas o procedimento é o mesmo descrito acima, sendo que devemos substituir  $\hat{D}_{\mu\nu}^{(+)}$  pela função de anticomutação fermiônica  $S^{(+)}$ . De acordo com (B.3), no espaço dos momentos  $S^{(+)}$  é dada por

$$\hat{S}^{(+)}(k) = (\not{k} + m) \delta^{(1)}(k^2 - m^2) \Theta(k^0), \quad (2.64)$$

de modo que no lugar de (2.57) temos

$$\begin{aligned} \hat{S}^{(+)}\left(\frac{\tilde{k}}{\delta}\right) &= \left(\frac{\tilde{k}}{\delta} + m\right) \delta^{(1)}\left(\frac{\tilde{k}^2}{\delta^2} - m^2\right) \Theta\left(\frac{\tilde{k}^0}{\delta}\right) \\ &\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \delta \tilde{k} \delta^{(1)}(\tilde{k}^2) \Theta(\tilde{k}^0) \stackrel{\text{def}}{=} \delta \hat{S}_0^{(+)}(\tilde{k}), \end{aligned} \quad (2.65)$$

onde o índice 0 em  $S^{(+)}$  indica que trata-se da distribuição com massa nula.

Então, seguindo os passos anteriores, a única diferença, no que se refere a ordem singular, é que no lugar de (2.58) teríamos

$$\psi_\delta(p, q) = \frac{1}{\delta^{2l_f}} \psi^0(\delta p, \delta q), \quad (2.66)$$

o que nos leva a função de contagem de potências

$$\rho(\delta) = \delta^{2l_f-3} \rho_1(\delta) \rho_2(\delta), \quad (2.67)$$

com ordem singular

$$\omega = 2l_f - 3 + \omega_1 + \omega_2. \quad (2.68)$$

Logo, substituindo (2.62) para  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , obtemos

$$\omega = 3 - (f_1 + f_2 - 2l_f) - \frac{3}{2}(b_1 + b_2) + \frac{1}{2}(n_1 + n_2), \quad (2.69)$$

o que prova a proposição acima para  $l_f$  contrações fermiônicas.

Da equação (2.47) podemos obter a ordem singular para as correções de um *loop* do MTG. Para a polarização do vácuo ( $n = 2, f = 0, b = 2$ ) temos  $\omega_{pv} = 1$ , para a auto-energia do férmion ( $n = 2, f = 2, b = 0$ ) temos  $\omega_{ae} = 2$  e para a correção de vértice ( $n = 3, f = 2, b = 1$ ) temos  $\omega_v = 1$ . Estas correções radiativas serão consideradas nos próximos capítulos [28, 31].

Finalmente, é importante observar que devido à não-renormalizabilidade do MTG, conforme segue da proposição 1, o número de coeficientes no polinômio em  $p$ , equação (2.41), aumenta indefinidamente quando consideramos ordens mais altas em teoria de perturbação. Isto significa que não conseguiremos determinar todos estes coeficientes por considerações de simetria, de modo que a teoria permanecerá com parâmetros indeterminados. Ainda assim, conforme iremos mostrar, para a polarização do vácuo, em segunda ordem na teoria de perturbação, conseguiremos determinar todas as constantes que aparecem, obtendo um valor não ambíguo para a massa topológica [28].

## Capítulo 3

### O Vácuo Perturbativo e o Bóson Dinâmico

No capítulo anterior introduzimos o método causal de BEG e demos início ao programa de aplicá-lo ao MTG, tendo demonstrado a não-renormalizabilidade deste modelo. Neste capítulo daremos prosseguimento a este programa através do cálculo de correções radiativas em segunda ordem na teoria de perturbação. Assim, na primeira seção calcularemos o tensor de polarização do vácuo. Em seguida, verificaremos que as inserções de polarização do vácuo geram dinâmica para o bóson de *gauge* (o qual, conforme vimos no capítulo 1, é um campo auxiliar em nível árvore). Finalmente, na última seção consideraremos a questão da estabilidade do vácuo.

#### 3.1 Polarização do Vácuo

Nesta seção calcularemos o tensor de polarização do vácuo para o MTG usando o método causal. Conforme vimos no capítulo anterior, o tensor de polarização do vácuo tem ordem singular  $\omega_{pv} = 1$  e, assim, o processo de bipartição é não trivial e deve ser efetuado por meio da solução central, equação (2.38). Devido a não unicidade deste processo de bipartição de distribuições, surgirão constantes não determinadas pela causalidade. Contudo, verificaremos que todas estas constantes podem ser determinadas por considerações de simetria, resultando num valor não ambíguo para a massa topológica.

No capítulo 2 obtivemos a distribuição causal em segunda ordem na teoria de perturbação, equação (2.43). Para obter a contribuição em  $D_2(x_1, x_2)$  para os diversos processos possíveis, devemos ordenar normalmente os produtos de operadores usando o teorema de Wick. Assim, tendo feito este ordenamento de Wick, obtemos que a contribuição para o tensor de polarização em  $D_2(x_1, x_2)$  é dada por [24]

$$\begin{aligned} D_2(x_1, x_2)|_{pv} &= -e^2 \text{Tr} \left[ \gamma^\mu S^{(-)}(y) \gamma^\nu S^{(+)}(-y) - \gamma^\mu S^{(+)}(y) \gamma^\nu S^{(-)}(-y) \right] \\ &\times : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) :, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $y \equiv x_1 - x_2$  e  $S^{(\pm)}$  são as funções de comutação fermiônicas, descritas no apêndice B.

Usando a propriedade cíclica do traço, podemos escrever a distribuição numérica  $d^{\mu\nu}$  associada com  $D_2(x_1, x_2)|_{\text{pv}}$  na forma

$$d^{\mu\nu}(x_1, x_2) = P^{\mu\nu}(y) - P^{\nu\mu}(-y), \quad (3.2)$$

onde definimos

$$P^{\mu\nu}(y) \stackrel{\text{def}}{=} e^2 \text{Tr} [\gamma^\mu S^{(+)}(y) \gamma^\nu S^{(-)}(-y)]. \quad (3.3)$$

Em segunda ordem na teoria de perturbação é necessário verificar explicitamente se a distribuição  $d^{\mu\nu}$  possui suporte causal [24]. Isto pode ser feito notando que  $d^{\mu\nu}$  pode ser reescrita como

$$d^{\mu\nu}(y) = -e^2 \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu S(y) \gamma^\nu S^{(+)}(-y) - \gamma^\mu S^{(+)}(y) \gamma^\nu S(-y) \right\},$$

onde  $S(y) = S^{(+)}(y) + S^{(-)}(y)$ . Desde que  $S(y)$  tem suporte em  $\bar{V}^+(0) \cup \bar{V}^-(0)$  (ver apêndice B) e ambos os termos na expressão acima contém  $S(y)$ , verifica-se que o suporte de  $d^{\mu\nu}(y)$  é causal. Assim, podemos efetuar a bipartição de  $d^{\mu\nu}(y)$  segundo o procedimento anteriormente explicado.

Uma vez que os cálculos são mais fáceis no espaço dos momentos, vamos considerar a transformada de Fourier de  $P^{\mu\nu}(k)$

$$\hat{P}^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3y P^{\mu\nu}(y) e^{ik \cdot y}, \quad (3.4)$$

a qual, substituindo a expressão (B.3) para as funções de anticomutação fermiônicas, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \hat{P}^{\mu\nu}(k) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \int d^3p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \\ &\times \Theta(k_0 - p_0) \delta[(k - p)^2 - m^2] j^{\mu\nu}(k, p), \end{aligned} \quad (3.5)$$

com

$$\begin{aligned} j^{\mu\nu}(k, p) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k} - \not{p} - m)] \\ &= -2[(m^2 - p^2) g^{\mu\nu} + 2p^\mu p^\nu - (p^\mu k^\nu + k^\mu p^\nu) \\ &+ g^{\mu\nu} p \cdot k + im \varepsilon^{\mu\nu\delta} k_\delta]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Usando as equações (3.5) e (3.6) podemos mostrar que  $P^{\mu\nu}$  é invariante de *gauge*, ou seja,

$$k_\mu \hat{P}^{\mu\nu}(k) = 0. \quad (3.7)$$

Isto, juntamente com a exigência de invariância de Lorentz, nos permite atribuir a  $P^{\mu\nu}$  a seguinte estrutura tensorial

$$\hat{P}^{\mu\nu}(k) = \hat{P}_s^{\mu\nu}(k) + \hat{P}_a^{\mu\nu}(k), \quad (3.8)$$

onde  $\hat{P}_s^{\mu\nu}$  e  $\hat{P}_a^{\mu\nu}$  indicam, respectivamente, as partes simétrica e anti-simétrica pela troca dos índices  $\mu$  e  $\nu$ , sendo dados explicitamente por

$$\hat{P}_s^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \tilde{B}_1(k^2), \quad (3.9)$$

$$\hat{P}_a^{\mu\nu}(k) = im \varepsilon^{\mu\nu\delta} k_\delta \tilde{B}_2(k^2). \quad (3.10)$$

Projetando  $\tilde{B}_1(k^2)$  e  $\tilde{B}_2(k^2)$  de  $\hat{P}^{\mu\nu}(k)$ , obtemos

$$\tilde{B}_1(k^2) = -\frac{1}{2k^2} g_{\mu\nu} \hat{P}^{\mu\nu}(k), \quad (3.11)$$

$$\tilde{B}_2(k^2) = -\frac{i}{2m} \varepsilon_{\mu\nu\delta} \frac{k^\delta}{k^2} \hat{P}^{\mu\nu}(k). \quad (3.12)$$

Consideremos, inicialmente,  $\tilde{B}_1(k^2)$ . De (3.5) e (3.11) temos

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1(k^2) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^{\frac{5}{2}} k^2} \int d^3p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \Theta(k_0 - p_0) \\ &\times \delta[(k-p)^2 - m^2] [p \cdot k - p^2 + 3m^2], \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde já efetuamos o traço. Definindo  $q \stackrel{\text{def}}{=} k - p$ , podemos observar que as distribuições  $\delta$  nesta expressão implicam  $p^2 = q^2 = m^2$ , ou seja, os 3-vetores  $p$  e  $q$  são do tipo tempo, pois  $m^2 > 0$ . Isto, por sua vez, implica que o vetor  $k$  também é do tipo tempo. Logo, sem perda de generalidade, podemos escolher um referencial em que  $k = (k_0, 0, 0)$ . Neste referencial, após integrar em  $p_0$ , temos

$$\tilde{B}_1(k_0^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \frac{k_0^2 + 4m^2}{2k_0^2} \int \frac{d^2p}{2E} \Theta(k_0 - E) \delta(k_0^2 - 2k_0 E), \quad (3.14)$$

onde  $E = (|\vec{p}|^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$ . A distribuição  $\delta$  no argumento desta integral exige que  $|\vec{p}| = \sqrt{\frac{k_0^2}{4} - m^2}$ , o que implica em

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1(k_0^2) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \frac{k_0^2 + 4m^2}{2k_0^2} \Theta(k_0^2 - 4m^2) \int \frac{d^2p}{2E} \Theta(k_0 - E) \frac{1}{2|k_0|} \delta\left(\frac{k_0}{2} - E\right) \\ &= -\frac{e^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{k_0^2 + 4m^2}{2k_0^2} \Theta(k_0^2 - 4m^2) \frac{1}{4\sqrt{k_0^2}} \Theta(k_0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Esta expressão nos dá o resultado de  $\tilde{B}_1$  no referencial especial em que  $k = (k_0, 0, 0)$ . O resultado em um sistema de Lorentz arbitrário é obtido fazendo  $k_0^2 \rightarrow k^2$ . Portanto, temos

$$\tilde{B}_1(k^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{8\sqrt{k^2}} \left(1 + \frac{4m^2}{k^2}\right) \Theta(k_0) \Theta(k^2 - 4m^2). \quad (3.16)$$

Consideremos agora  $\tilde{B}_2(k^2)$ , que das equações (3.5) e (3.12) é

$$\tilde{B}_2(k^2) = \frac{2e^2}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \int d^3p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \Theta(k_0 - p_0) \delta[(k - p)^2 - m^2]. \quad (3.17)$$

Seguindo o mesmo procedimento usado no cálculo de  $\tilde{B}_1(k^2)$ , obtemos

$$\tilde{B}_2(k^2) = \frac{e^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2\sqrt{k^2}} \Theta(k_0) \Theta(k^2 - 4m^2). \quad (3.18)$$

Desde que a transformada de Fourier de  $P^{\mu\nu}(-y)$  é dada por  $\hat{P}^{\mu\nu}(-k)$ , da equação (3.2) temos que a distribuição causal  $\hat{d}^{\mu\nu}(k)$  também pode ser separada em parte simétrica e anti-simétrica pela troca de  $\mu$  e  $\nu$

$$\begin{aligned} \hat{d}^{\mu\nu}(k) &= \hat{P}^{\mu\nu}(k) - \hat{P}^{\nu\mu}(-k) \\ &= \hat{d}_s^{\mu\nu}(k) + \hat{d}_a^{\mu\nu}(k), \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde

$$\hat{d}_s^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) B_1(k^2), \quad (3.20)$$

$$\hat{d}_a^{\mu\nu}(k) = im\epsilon^{\mu\nu\delta} k_\delta B_2(k^2), \quad (3.21)$$

com as distribuições  $B_1(k^2)$  e  $B_2(k^2)$  dadas por

$$B_1(k^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{8\sqrt{k^2}} \left(1 + \frac{4m^2}{k^2}\right) \text{sgn}(k_0) \Theta(k^2 - 4m^2), \quad (3.22)$$

$$B_2(k^2) = \frac{e^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2\sqrt{k^2}} \text{sgn}(k_0) \Theta(k^2 - 4m^2). \quad (3.23)$$

Com o auxílio das equações (3.20) e (3.21) podemos encontrar a ordem singular de  $\hat{d}_s^{\mu\nu}(k)$  e  $\hat{d}_a^{\mu\nu}(k)$ , usando as definições 2.2 e 2.3 dadas no capítulo anterior. Fazendo uso destas definições encontramos  $\omega_s = 1$  para a ordem singular da parte simétrica e  $\omega_a = 0$  para a ordem singular da parte anti-simétrica de  $\hat{d}^{\mu\nu}(k)$ . Uma vez que

$\omega_{s(a)} \geq 0$ , o processo de bipartição da distribuição causal em suas partes retardada e avançada é não trivial, e se faz necessário o uso da solução central, equação (2.38).

Desde que  $\hat{d}_s^{\mu\nu}(k)$  e  $\hat{d}_a^{\mu\nu}(k)$  são independentes devido à estrutura tensorial, o processo de bipartição deve ser considerado em separado. Vamos considerar primeiro a parte simétrica, cuja solução retardada é dada por

$$\hat{r}_s^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{2\pi} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \text{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{t^2 B_1(t^2 k^2)}{(t - i0k_0)^2 (1 - t + i0k_0)}, \quad (3.24)$$

substituindo a expressão explícita para  $B_1(k^2)$  temos

$$\begin{aligned} \hat{r}_s^{\mu\nu}(k) &= -\frac{ie^2}{8(2\pi)^{\frac{5}{2}}} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \text{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{1}{(1 - t + i0k_0)} \\ &\times \left( 1 + \frac{4m^2}{t^2 k^2} \right) \Theta(t^2 k^2 - 4m^2) \frac{\text{sgn}(tk_0)}{|t| \sqrt{k^2}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A função  $\Theta$  no integrando desta expressão limita o intervalo de integração, de modo que esta equação pode ser escrita como

$$\hat{r}_s^{\mu\nu}(k) = -\frac{ie^2}{8(2\pi)^{\frac{5}{2}}} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \frac{1}{\sqrt{k^2}} \left( I_1(4m^2, k^2) + \frac{4m^2}{k^2} I_2(4m^2, k^2) \right), \quad (3.26)$$

onde as integrais  $I_1(4m^2, k^2)$  e  $I_2(4m^2, k^2)$  são dadas por

$$\begin{aligned} I_1(4m^2, k^2) &\stackrel{\text{def}}{=} -2 \int_{\sqrt{\frac{4m^2}{k^2}}}^{\infty} dt \frac{1}{t^2 - 1 - i0k_0} \\ &= \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}} \right| - i\pi \text{sgn}(k_0) \Theta(k^2 - 4m^2), \end{aligned} \quad (3.27)$$

e

$$\begin{aligned} I_2(4m^2, k^2) &\stackrel{\text{def}}{=} -2 \int_{\sqrt{\frac{4m^2}{k^2}}}^{\infty} dt \frac{1}{t^2 (t^2 - 1 - i0k_0)} \\ &= I_1 + 2\sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Assim, substituindo o resultado de  $I_1$  e  $I_2$  em (3.26), obtemos a expressão final para a distribuição retardada associada a parte simétrica:

$$\hat{r}_s^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \bar{\Pi}^{(1)}(k^2), \quad (3.29)$$

sendo

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}^{(1)}(k^2) &= \frac{e^2}{16\pi} k^2 \left[ \frac{4m}{k^2} + \frac{1}{\sqrt{k^2}} \left( 1 + \frac{4m^2}{k^2} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left( \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}} \right| - i\pi \operatorname{sgn}(k_0) \Theta(k^2 - 4m^2) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

No entanto, desde que a ordem singular de  $\hat{d}_s^{\mu\nu}$  é maior que zero ( $\omega_s = 1$ ), a solução do problema de bipartição não é única. Assim, de (2.41) temos que a solução geral do problema de bipartição para a parte simétrica é dada por

$$\tilde{r}_s^{\mu\nu}(k) = \hat{r}_s^{\mu\nu}(k) + C_0 g^{\mu\nu} + C'_\delta \varepsilon^{\mu\nu\delta} + C_1^\mu k^\nu + C_2^\nu k^\mu, \quad (3.31)$$

onde  $C_0$ ,  $C'_\delta$ ,  $C_1^\mu$  e  $C_2^\nu$  são constantes que não são determinadas pela estrutura causal. Contudo, estas constantes devem ser determinadas de modo a preservar o máximo de simetrias presentes na Lagrangiana original. Assim, devemos impor que  $C'_\delta = 0$  para preservar a estrutura simétrica da distribuição. A estrutura de Lorentz e o fato que  $C_1^\mu$  e  $C_2^\nu$  são  $c$ -números nos levam a impor  $C_1^\mu = C_2^\nu = 0$ . Finalmente, para preservar a simetria de *gauge*,  $k_\mu \tilde{r}_s^{\mu\nu}(k) = 0$ , a constante  $C_0$  deve ser nula. Portanto, a solução geral do problema de bipartição para a parte simétrica da distribuição associada a polarização do vácuo é simplesmente a solução central, equação (3.29).

Vamos, agora, considerar a bipartição da parte anti-simétrica de  $\hat{d}^{\mu\nu}$ . Neste caso, devemos fazer uso de (2.38) com  $\omega = 0$ . Logo, a correspondente parte retardada é dada por

$$\begin{aligned} \hat{r}_a^{\mu\nu}(k) &= -\frac{m}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu\delta} k_\delta \operatorname{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{t B_2(t^2 k^2)}{(t - i0k_0)(1 - t + i0k_0)} \\ &= -\frac{me^2}{2(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \varepsilon^{\mu\nu\delta} k_\delta \operatorname{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{1}{(1 - t + i0k_0)} \\ &\quad \times \Theta(t^2 k^2 - 4m^2) \frac{\operatorname{sgn}(tk_0)}{\sqrt{t^2 k^2}}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Do mesmo modo que para a parte simétrica, podemos escrever a integral acima em termos de  $I_1$ :

$$\hat{r}_a^{\mu\nu}(k) = -\frac{me^2}{2(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \varepsilon^{\mu\nu\delta} k_\delta \frac{1}{\sqrt{k^2}} I_1(4m^2, k^2). \quad (3.33)$$

Então, usando (3.27) temos

$$\hat{r}_a^{\mu\nu}(k) = -\frac{m}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \varepsilon^{\mu\nu\delta} k_\delta \bar{\Pi}^{(2)}(k^2), \quad (3.34)$$

onde

$$\bar{\Pi}^{(2)}(k^2) = \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2}} \left[ \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}} \right| - i\pi \text{sgn}(k_0) \Theta(k^2 - 4m^2) \right]. \quad (3.35)$$

No entanto, esta solução também não é única. A solução geral é dada por

$$\tilde{r}_a^{\mu\nu}(k) = \hat{r}_a^{\mu\nu}(k) + C_0 g^{\mu\nu} + C_{1\delta} \varepsilon^{\mu\nu\delta}. \quad (3.36)$$

Mas, a constante  $C_0$  deve se anular para preservar a estrutura anti-simétrica e  $C_{1\delta}$  também deve ser nula para preservar a invariância de *gauge*. Assim, também para a parte anti-simétrica do tensor de polarização a solução geral do problema de bipartição é dada simplesmente pela solução central, equação (3.34).

Tendo efetuado a bipartição da distribuição causal, estamos aptos a proceder o último passo no processo indutivo da teoria de BEG para obter a distribuição numérica  $t_2(x_1, x_2)|_{\text{pv}}$  associada a distribuição de operadores  $T_2(x_1, x_2)|_{\text{pv}}$ . A equação (2.21), escrita no espaço dos momentos e em termos das correspondentes distribuições numéricas, é

$$t_{2\mu\nu}(k)|_{\text{pv}} = \hat{r}_{\mu\nu}(k) - \hat{r}'_{\mu\nu}(k), \quad (3.37)$$

onde  $\hat{r}'_{\mu\nu}(k)$  é a transformada de Fourier da distribuição numérica associada com a parte de  $R'_2(x_1, x_2)$ , definida em (2.13), que contribui para a polarização do vácuo. Usando (2.13) temos que

$$R'_2(x_1, x_2)|_{\text{pv}} = : A_\mu(x_1) \left\{ -e^2 \text{Tr} \left[ S^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_2) \gamma^\nu \right] \right\} A_\nu(x_2) :. \quad (3.38)$$

Comparando esta expressão com (3.3) verificamos que  $r'_{\mu\nu}(y) = -P_{\nu\mu}(-y)$ . Portanto, sua transformada de Fourier é  $\hat{r}'_{\mu\nu}(k) = -\hat{P}_{\nu\mu}(-k)$ , com  $\hat{P}_{\mu\nu}(k)$  dado nas equações (3.8), (3.16) e (3.18).

O tensor de polarização do vácuo é, então, definido como

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = -i(2\pi)^{\frac{3}{2}} t_{2\mu\nu}(k)|_{\text{pv}}, \quad (3.39)$$

e, usando (3.16), (3.18), (3.29) e (3.34), pode ser escrito na forma:

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \Pi^{(1)}(k^2) + im \varepsilon^{\mu\nu\delta} k_\delta \Pi^{(2)}(k^2), \quad (3.40)$$

onde

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)}(k^2) &= \frac{e^2}{16\pi} k^2 \left[ \frac{4m}{k^2} + \frac{1}{\sqrt{k^2}} \left( 1 + \frac{4m^2}{k^2} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left( \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}} \right| - i\pi \Theta(k^2 - 4m^2) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.41)$$

e

$$\Pi^{(2)}(k^2) = \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2}} \left[ \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}} \right| - i\pi \Theta(k^2 - 4m^2) \right]. \quad (3.42)$$

Destas expressões podemos notar que o efeito de subtrair  $\hat{r}'$  é transformar  $\text{sgn}(k_0)$  em um fator 1. Em  $k^2 = 0$  temos

$$\Pi^{(1)}(0) = 0, \quad (3.43)$$

$$\Pi^{(2)}(0) = -\frac{e^2}{4\pi m}. \quad (3.44)$$

É um fato bem conhecido na literatura que o coeficiente do termo induzido de Chern-Simons é dependente de como as divergências ultravioleta são regularizadas (ver, por exemplo, as refs. [11] e [15]). A regularização de Pauli-Villars usual, por exemplo, tem como resultado  $\Pi^{(2)}(0) = 0$  [15]. No entanto, pode-se implementar Pauli-Villars de forma a obter o resultado acima [32]. Já as regularizações dimensional [15] e analítica [33] induzem um termo de Chern-Simons com  $\Pi^{(2)}(0)$  dado por (3.44). A vantagem do método causal é que, devido ao fato que em todos os passos estamos tratando com distribuições bem definidas, em nenhum momento surgem divergências ultravioleta e, portanto, o resultado obtido é livre de ambiguidades.

Neste ponto é interessante notar que, a despeito do fato que o MTG é uma teoria não renormalizável, fomos capazes de determinar todas as constantes  $C_a$  aparecendo na solução geral para o tensor de polarização através da exigência que algumas simetrias formais fossem preservadas. De fato, isto não é surpreendente se notarmos que o tensor de polarização do vácuo é, formalmente, o mesmo para o MTG e para a QED<sub>3</sub>, esta última uma teoria super-renormalizável.

## 3.2 O Bóson de *Gauge* Dinâmico

Nesta seção, calcularemos o propagador do bóson de *gauge* corrigido pelas inserções de polarização do vácuo, na aproximação de um *loop*. Verificaremos que há a geração de um pólo no propagador corrigido, indicando que o bóson de *gauge* adquire dinâmica devido às correções radiativas.

O propagador do bóson de *gauge* corrigido pelas inserções de polarização do vácuo pode ser representado graficamente conforme a figura 3.2.1.

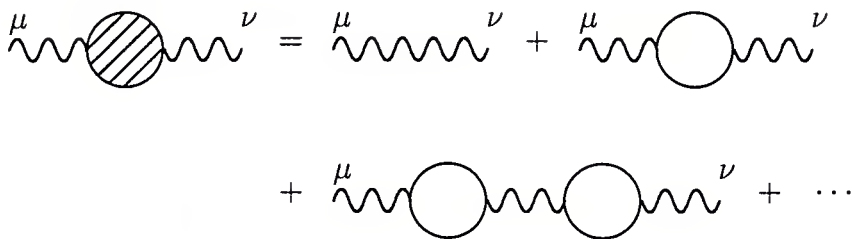


Fig. 3.2.1 - Inserções de polarização do vácuo.

Nesta figura, a bolha hachurada representa o propagador corrigido, que indicaremos por  $\mathcal{D}$ , e as bolhas simples representam as inserções de polarização do vácuo em um *loop*. Isto pode ser escrito em termos da série

$$\begin{aligned} i\mathcal{D} &= iD_F + iD_F i\Pi iD_F + iD_F i\Pi iD_F i\Pi iD_F + \dots \\ &= iD_F + iD_F i\Pi i\mathcal{D}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde  $\Pi$  representa as inserções de polarização do vácuo e  $D_F$  é o propagador do bóson de *gauge* livre. Desta equação temos

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1} = (D_{\mu\nu}^F)^{-1} + \Pi_{\mu\nu}. \quad (3.46)$$

É importante notar que esta aproximação para o propagador do bóson de *gauge* dá a contribuição exata para o termo de massa topológica, pois devido ao teorema de Coleman-Hill [18] as correções radiativas de ordem mais alta não contribuem para este termo.

Em particular, devido ao fato que o MTG não é renormalizável, o número de coeficientes indeterminados nos polinômios em  $k$  aumenta indefinidamente quando consideramos correções de ordem mais alta. Portanto, em princípio, podemos ter termos do tipo  $C\varepsilon_{\mu\nu\delta}k^\delta$  surgindo na solução geral da parte anti-simétrica. No entanto, o teorema de Coleman-Hill tem como consequência que o coeficiente de tais termos deve ser determinado como sendo zero ordem a ordem na teoria de perturbação. Na derivação deste teorema (ver apêndice C) a invariância de *gauge* exerce um papel central, de modo que podemos, novamente, perceber a relevância da construção considerada no capítulo 1.

Vamos, agora, proceder a inversão da equação (3.46). Para este fim, é útil introduzir o conjunto ortonormal de projetores

$$\begin{aligned} P_{(1)}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} + i\varepsilon^{\mu\nu\delta} \frac{k_\delta}{\sqrt{k^2}} \right), \\ P_{(2)}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - i\varepsilon^{\mu\nu\delta} \frac{k_\delta}{\sqrt{k^2}} \right), \\ P_{(3)}^{\mu\nu} &= \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

que satisfazem as relações de ortonormalidade

$$P_{(j)}^{\mu\alpha} P_{\alpha}^{(j)\nu} = P_{(j)}^{\mu\nu}; \quad (3.48)$$

$$P_{(j)}^{\mu\alpha} P_{\alpha}^{(k)\nu} = 0, \quad \text{para } j \neq k,$$

e a relação de completeza

$$\sum_{i=1}^3 P_{(i)}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}. \quad (3.49)$$

Em termos destes projetores o propagador do bóson de *gauge* livre

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{M^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi M^2} \right),$$

pode ser escrito como a seguinte combinação linear

$$D_F^{\mu\nu} = \frac{1}{M^2} \left( P_{(1)}^{\mu\nu} + P_{(2)}^{\mu\nu} - \frac{\xi M^2}{k^2 - \xi M^2} P_{(3)}^{\mu\nu} \right), \quad (3.50)$$

Usando a ortonormalidade dos projetores  $P_{(i)}^{\mu\nu}$  é uma tarefa trivial inverter esta equação: basta considerarmos a combinação linear dos projetores com os coeficientes dados pelos inversos dos correspondentes coeficientes na equação acima. Logo,

$$(D_F^{\mu\nu})^{-1} = M^2 \left( P_{(1)}^{\mu\nu} + P_{(2)}^{\mu\nu} - \frac{k^2 - \xi M^2}{\xi M^2} P_{(3)}^{\mu\nu} \right). \quad (3.51)$$

Do mesmo modo, podemos escrever o tensor de polarização do vácuo como

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = (P_{(1)}^{\mu\nu} + P_{(2)}^{\mu\nu})\Pi^{(1)}(k^2) + m\sqrt{k^2}(P_{(1)}^{\mu\nu} - P_{(2)}^{\mu\nu})\Pi^{(2)}(k^2). \quad (3.52)$$

Introduzindo estas expressões em (3.46), obtemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}^{\mu\nu})^{-1} &= \left\{ M^2 + \Pi^{(1)}(k^2) + m\sqrt{k^2}\Pi^{(2)}(k^2) \right\} P_{(1)}^{\mu\nu} \\ &+ \left\{ M^2 + \Pi^{(1)}(k^2) - m\sqrt{k^2}\Pi^{(2)}(k^2) \right\} P_{(2)}^{\mu\nu} - \frac{(k^2 - \xi M^2)}{\xi} P_{(3)}^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Então, invertendo esta expressão pelo procedimento descrito acima e reorganizando os termos, temos que o propagador corrigido é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mu\nu}(k) &= -\frac{1}{k^2 - \tilde{\Pi}(k^2)} \left[ \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \frac{M^2 + \Pi^{(1)}(k^2)}{[m\Pi^{(2)}(k^2)]^2} - i\varepsilon^{\mu\nu\delta} \frac{k_\delta}{m\Pi^{(2)}(k^2)} \right] \\ &- \xi \frac{k^\mu k^\nu}{k^2(k^2 - \xi M^2)}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde

$$\tilde{\Pi}(k^2) = \frac{(M^2 + \Pi^{(1)}(k^2))^2}{[m\Pi^{(2)}(k^2)]^2}. \quad (3.54)$$

A forma deste propagador corrigido indica que um pólo é gerado pelas inserções de *loop* de férmions. Isto significa que o bóson de *gauge*, que em nível árvore é apenas um campo auxiliar, adquire dinâmica através das correções radiativas.

Indicando a massa do bóson de *gauge* por  $M_{gb}$ , temos que o pólo do propagador está localizado em

$$M_{gb}^2 = \tilde{\Pi}(M_{gb}^2), \quad \text{para } 0 \leq M_{gb} < 2m, \quad (3.55)$$

e, usando a forma explícita para  $\tilde{\Pi}(k^2)$ , vemos que  $M_{gb}$  é dada pela solução da equação transcendental

$$(mM_{gb}\Pi^{(2)}(M_{gb}^2))^2 = (M^2 + \Pi^{(1)}(M_{gb}^2))^2, \quad \text{para } 0 \leq M_{gb} < 2m. \quad (3.56)$$

Vamos considerar a solução desta equação nos limites de acoplamento muito fraco ( $G \rightarrow 0$ ) e muito forte ( $G \rightarrow \infty$ ). Contudo, deve-se notar que o limite de acoplamento muito forte (que deve ser tomado com  $e$  fixo e, portanto,  $M \rightarrow 0$ ) somente pode ser considerado em um *gauge* geral  $\xi$ , pois no *gauge* unitário este limite é mal definido devido à dependência de  $\frac{1}{M^2}$  no último termo de (3.53). Isto é, o modelo de Thirring original, que corresponde ao *gauge* unitário do MTG, é mal definido na região de acoplamento forte.

Assim, no limite  $G \rightarrow \infty$  ( $M^2 \rightarrow 0$ ) temos que

$$\tilde{\Pi}(k^2)_{M^2=0} = \frac{(\Pi^{(1)}(k^2))^2}{[m\Pi^{(2)}(k^2)]^2}, \quad (3.57)$$

e das equações (3.43) e (3.44) temos que  $\tilde{\Pi}(0)_{M^2=0} = 0$ , de modo que  $M_{gb} = 0$  é, de fato, uma solução. Notando que o bóson de *gauge* pode ser interpretado como um par ligado de férmion e anti-férmion, este resultado reflete o fato que no limite de acoplamento forte a massa deste estado ligado deve ser zero.

Por outro lado, para obter a solução no limite de acoplamento fraco, devemos retornar a equação (3.56) e considerar

$$-mM_{gb}\Pi^{(2)}(M_{gb}^2) = M^2 + \Pi^{(1)}(M_{gb}^2),$$

o que, usando (3.41) e (3.42), pode ser escrita como

$$\left(1 + \frac{m}{M_{bg}} + \frac{M_{gb}}{4m}\right) \ln \left(\frac{1 + \frac{M_{bg}}{2m}}{1 - \frac{M_{gb}}{2m}}\right) = 1 + \frac{4\pi}{mG}.$$

Esta equação é consistente com a solução  $M_{gb} = 0$  para  $G \rightarrow \infty$  e, adicionalmente, implica que para acoplamento muito fraco  $G \rightarrow 0_+$  temos

$$\frac{M_{gb}}{2m} = 1 - \alpha \exp\left(-\frac{2\pi}{mG}\right), \quad (3.58)$$

onde  $\alpha = 2e^{-\frac{1}{2}}$ . Ou seja, no limite de acoplamento fraco a massa do canal vetorial tende a  $2m$ , conforme seria de se esperar.

Finalmente, devemos observar que a expressão para o propagador corrigido, eq. (3.53), tem um limite bem definido quando  $m \rightarrow 0$ , mas neste caso não há pólo para momento do tipo tempo.

### 3.3 Estabilidade do Vácuo

É um fato bem conhecido que ao considerarmos a expansão perturbativa para a matriz  $S$  nos deparamos com contribuições devido aos diagramas de vácuo. No formalismo convencional de teoria quântica de campos estes diagramas apresentam divergências ultravioleta severas e são usualmente omitidos. No método de BEG, no entanto, estes diagramas também devem ser considerados.

A razão pela qual os diagramas de vácuo podem ser omitidos no formalismo ordinário de TQC é que eles contribuem apenas com um fator constante multiplicativo, de valor absoluto um, para a matriz  $S$ . Isto é, a matriz  $S$  pode ser escrita como [34]

$$S = CS',$$

onde  $C$  é um fator numérico dado pela soma de todos os termos associados com diagramas de vácuo e  $S'$  é a matriz  $S$  construída com a omissão destes diagramas. Então, usando a unitariedade da matriz  $S$ , pode-se mostrar que  $|C|^2 = 1$ . Portanto,  $C$  deve representar um fator de fase (infinito). Assim, desde que efeitos observáveis são expressos em termos de valores absolutos de elementos da matriz  $S$ , os diagramas de vácuo não levam a qualquer efeito observável e podem ser totalmente omitidos.

No método causal de BEG os diagramas de vácuo não “exponenciam” e, portanto, não podem ser omitidos [24, 35]. Neste caso, não há problemas relacionados à divergências ultravioleta, pois em todos os passos na construção da matriz  $S$  manipulamos distribuições bem definidas, e também os diagramas de vácuo são finitos. Contudo, ao tomarmos o limite adiabático  $g \rightarrow 1$  na matriz  $S$ , equação (2.1), os

diagramas de vácuo podem apresentar sérios problemas na região do infravermelho. Para ver isto, vamos considerar a contribuição de um diagrama de vácuo, em segunda ordem na teoria de perturbação ( $T_2^{\text{vac}}$ ), para a amplitude de transição vácuo-vácuo:

$$\lim_{g \rightarrow 1} \langle 0 | S_2(g) | 0 \rangle = \lim_{g \rightarrow 1} \frac{1}{2} \int d^3 x_1 d^3 x_2 T_2^{\text{vac}}(x_1, x_2) g(x_1) g(x_2) . \quad (3.59)$$

Tomando a transformada de Fourier desta expressão, temos

$$\lim_{g \rightarrow 1} \langle 0 | S_2(g) | 0 \rangle = \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{2} \lim_{g \rightarrow 1} \int d^3 p \hat{T}_2^{\text{vac}}(p) \hat{g}(p) \hat{g}(-p) . \quad (3.60)$$

O limite adiabático será efetuado escolhendo uma função teste fixa  $g_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  com  $g_0(0) = 1$  e fazendo o limite escalonado

$$g(x) = g_0(\epsilon x) \quad \text{onde } \epsilon \rightarrow 0 . \quad (3.61)$$

Então, a transformada de fourier da função teste  $g(x)$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \hat{g}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 x g_0(\epsilon x) e^{-ip \cdot x} \\ &= \frac{1}{\epsilon^3} \hat{g}_0\left(\frac{p}{\epsilon}\right) . \end{aligned} \quad (3.62)$$

Logo, a contribuição do diagrama de vácuo, em segunda ordem na teoria de perturbação, é

$$\begin{aligned} \lim_{g \rightarrow 1} \langle 0 | S_2(g) | 0 \rangle &= \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^6} \int d^3 p \hat{T}_2^{\text{vac}}(p) \hat{g}_0\left(\frac{p}{\epsilon}\right) \hat{g}_0\left(-\frac{p}{\epsilon}\right) \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^3} \int d^3 p \hat{T}_2^{\text{vac}}(\epsilon p) \hat{g}_0(p) \hat{g}_0(-p) , \end{aligned} \quad (3.63)$$

e este limite existe somente se  $T_2^{\text{vac}}$  vai a zero com, pelo menos,  $p^3$  quando  $p \rightarrow 0$ .

No entanto, para que a teoria sob consideração seja fisicamente relevante, o vácuo deve ser estável. Isto é, a matriz  $S$  deve satisfazer a exigência que

$$\lim_{g \rightarrow 1} \langle 0 | S(g) | 0 \rangle = 1 , \quad (3.64)$$

o que, dito de outro modo, significa que o vácuo não deve ser modificado pela interação.

Em termos de teoria de perturbação a exigência (3.64) implica que devemos ter

$$\lim_{g \rightarrow 1} \langle 0 | S_n(g) | 0 \rangle = 0 \quad \forall n \geq 1 , \quad (3.65)$$

de modo que o limite considerado em (3.64) deve se anular.

Assim, por consistência, devemos mostrar que o vácuo do MTG é estável até a ordem em que estamos considerando (i.e., segunda ordem) e que o limite (3.64) satisfaz a exigência acima para este modelo. Caso isto não fosse assim não faria sentido considerar as demais correções radiativas para este modelo.

Vamos, então, calcular as contribuições para o diagrama de vácuo em segunda ordem na distribuição causal para o MTG. Estas são dadas por [24]

$$\begin{aligned} D_2^{\text{vac}}(x_1, x_2) &= -ie^2 \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu S^{(-)}(y) \gamma^\nu S^{(+)}(-y) \right\} D_{\mu\nu}^{(+)}(-y) \\ &+ ie^2 \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu S^{(+)}(y) \gamma^\nu S^{(-)}(-y) \right\} D_{\mu\nu}^{(+)}(y), \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde  $y \stackrel{\text{def}}{=} x_1 - x_2$ . Nesta expressão, o primeiro termo corresponde a distribuição  $R'_2(x_1, x_2)$  que foi definida em (2.13) e é necessária para determinarmos  $T_2^{\text{vac}}(x_1, x_2)$ . Assim, temos

$$R'_2(x_1, x_2)_{\text{vac}} = -ie^2 d(y), \quad (3.67)$$

onde introduzimos a definição

$$d(y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu S^{(-)}(y) \gamma^\nu S^{(+)}(-y) \right\} D_{\mu\nu}^{(+)}(-y). \quad (3.68)$$

Em termos desta distribuição  $d(y)$ , a distribuição causal  $D_2^{\text{vac}}(x_1, x_2)$  pode ser reescrita como

$$D_2^{\text{vac}}(x_1, x_2) = -ie^2 [d(y) - d(-y)]. \quad (3.69)$$

Desde que os cálculos são efetuados mais facilmente no espaço dos momentos, vamos considerar a distribuição transformada de Fourier de  $d(y)$ :

$$\hat{d}(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q_1 d^3 q_2 \text{Tr} \left\{ \gamma^\nu \hat{S}^{(+)}(q_1) \gamma^\mu \hat{S}^{(-)}(q_2) \right\} \hat{D}_{\mu\nu}^{(+)}(q_2 - q_1 - p). \quad (3.70)$$

Substituindo as expressões explícitas para  $\hat{S}^{(\pm)}$  e  $\hat{D}_{\mu\nu}^{(+)}$ , que no espaço dos momentos são dadas por (ver apêndice B):

$$\hat{S}^{(\pm)}(q) = \pm \frac{i}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} (\not{q} + m) \delta(q^2 - m^2) \Theta(\pm q^0);$$

$$\hat{D}_{\mu\nu}^{(+)}(q) = \frac{i}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{q_\mu q_\nu}{M^2} \delta(q^2 - \xi M^2) \Theta(q^0),$$

temos que

$$\hat{d}(p) = \frac{i}{M^2 (2\pi)^{\frac{9}{2}}} \int d^3 q_1 d^3 q_2 \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{q}_1 + m) \gamma^\nu (\not{q}_2 + m) \right\} \delta(q_1^2 - m^2) \Theta(q_1^0)$$

$$\begin{aligned}
& \times \delta(q_2^2 - m^2) \Theta(-q_2^0) (q_2 - q_1 - p)_\mu (q_2 - q_1 - p)_\nu \\
& \times \delta \left[ (q_2 - q_1 - p)^2 - \xi M^2 \right] \Theta(q_2^0 - q_1^0 - p^0) .
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Esta expressão pode ser simplificada introduzindo a identidade

$$1 = \int d^3 k \delta^{(3)}(q_1 - q_2 - k) , \tag{3.72}$$

que nos permite reescrever  $\hat{d}(p)$  como

$$\begin{aligned}
\hat{d}(p) &= \frac{i}{M^2 (2\pi)^{\frac{9}{2}}} \int d^3 k (k + p)_\mu (k + p)_\nu \delta \left[ (k + p)^2 - \xi M^2 \right] \Theta(-k^0 - p^0) \\
&\times \left\{ \int d^3 q_1 d^3 q_2 \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{q}_1 + m) \gamma^\nu (\not{q}_2 + m)] \delta(q_1^2 - m^2) \Theta(q_1^0) \right. \\
&\times \left. \delta(q_2^2 - m^2) \Theta(-q_2^0) \delta^{(3)}(q_1 - q_2 - k) \right\} .
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Mas, integrando em  $q_2$  e comparando com (3.5), notamos que o termo entre chaves na integral acima pode ser identificado com  $e^{-2} (2\pi)^{\frac{5}{2}} \hat{P}^{\mu\nu}(k)$ , onde  $\hat{P}^{\mu\nu}$  é a função de polarização do vácuo definida em (3.3). Logo, podemos fazer uso dos resultados da seção 3.1 e escrever

$$\begin{aligned}
\hat{d}(p) &= \frac{ie^{-2}}{M^2 (2\pi)^2} \int d^3 k \delta \left[ (k + p)^2 - \xi M^2 \right] \\
&\times \Theta(-k^0 - p^0) (k + p)_\mu (k + p)_\nu \hat{P}^{\mu\nu}(k) ,
\end{aligned} \tag{3.74}$$

com  $\hat{P}^{\mu\nu}$  dado nas equações (3.8)-(3.10), (3.16) e (3.18).

Uma vez que  $\hat{P}^{\mu\nu}$  está contraído com um termo simétrico em  $\mu$  e  $\nu$ , temos que o termo anti-simétrico  $\hat{P}_a^{\mu\nu}$  não contribui, e ficamos com

$$\begin{aligned}
\hat{d}(p) &= \frac{ie^{-2}}{M^2 (2\pi)^2} \int d^3 k \delta \left[ (k + p)^2 - \xi M^2 \right] \\
&\times \Theta(-k^0 - p^0) \left\{ (p \cdot k)^2 - p^2 k^2 \right\} \tilde{B}_1(k^2) .
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Então, substituindo a expressão explícita para  $\tilde{B}_1$ , equação (3.16), temos

$$\begin{aligned}
\hat{d}(p) &= -\frac{i}{8M^2 (2\pi)^{\frac{7}{2}}} \int d^3 k \delta \left[ (k + p)^2 - \xi M^2 \right] \Theta(-k^0 - p^0) \\
&\times \Theta(k^2 - 4m^2) \Theta(k^0) \left\{ (p \cdot k)^2 - p^2 k^2 \right\} \frac{1}{\sqrt{k^2}} \left( 1 + \frac{4m^2}{k^2} \right) .
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Analisando o argumento das funções  $\Theta$  e  $\delta$  na expressão acima, temos que o 3-vetor  $p$  é tipo tempo (estamos assumindo  $\xi M^2 > 0$ ). Portanto, podemos escolher um referencial onde  $p = (p_0, \vec{0})$  para efetuar os cálculos. Assim, neste referencial, após integrarmos na variável angular e em  $|\vec{k}|$ , temos

$$\begin{aligned} \hat{d}(p_0) &= -\frac{ip_0^2}{16M^2(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \Theta(k_0) \Theta[k_0^2 - (k_0 + p_0)^2 + \xi M^2 - 4m^2] \\ &\times \Theta(-k_0 - p_0) \left\{ (p_0 + k_0)^2 - \xi M^2 \right\} \frac{1}{\sqrt{k_0^2 - (p_0 + k_0)^2 + \xi M^2}} \\ &\times \left( 1 + \frac{4m^2}{k_0^2 - (p_0 + k_0)^2 + \xi M^2} \right). \end{aligned} \quad (3.77)$$

De fato, das propriedades de suporte das funções  $\Theta$  e  $\delta$  presentes no integrando de (3.76) verificamos que  $p_0 < 0$  e  $p_0^2 > (2m + \sqrt{\xi}M)^2$ . Assim, introduzindo uma nova variável de integração  $s$  dada por

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k_0^2 - (p_0 + k_0)^2 + \xi M^2},$$

ficamos com

$$\begin{aligned} \hat{d}(p_0) &= \frac{i}{64M^2(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \frac{\Theta(-p_0)}{p_0} \Theta[p_0^2 - (2m + \sqrt{\xi}M)^2] \\ &\times \int_{2m}^{\sqrt{p_0^2 + \xi M^2}} ds \left( 1 + \frac{4m^2}{s^2} \right) \left\{ s^4 - 2s^2(p_0^2 + \xi M^2) + (p_0^2 - \xi M^2)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Efetuando a integração indicada na expressão acima e fazendo a continuação para um sistema de Lorentz arbitrário, temos que

$$\begin{aligned} \hat{d}(p) &= -\frac{i}{64M^2(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \frac{\Theta(-p_0)}{\sqrt{p^2}} \Theta[p^2 - (2m + \sqrt{\xi}M)^2] \left\{ -\frac{7}{15}(p^2 + \xi M^2)^{\frac{5}{2}} \right. \\ &- \frac{20m^2}{3}(p^2 + \xi M^2)^{\frac{3}{2}} + (p^2 - \xi M^2)^2(p^2 + \xi M^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\left. + \frac{64}{3}m^3(p^2 + \xi M^2) - 4m^2 \frac{(p^2 - \xi M^2)^2}{(p^2 + \xi M^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2^8}{15}m^5 \right\}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Conforme vimos na equação (3.67), isto nos dá a distribuição  $\hat{R}'_2(p)_{\text{vac}} = -ie^2 \hat{d}(p)$ . Então, para obtermos a distribuição causal para o diagrama de vácuo no MTG é necessário subtrair da expressão acima a distribuição  $d(-p)$  e multiplicar por  $-ie^2$ . Assim, a distribuição causal no espaço dos momentos,  $\hat{D}_2^{\text{vac}}(p)$ , é obtida de (3.79) simplesmente multiplicando tudo por  $ie^2$  e substituindo  $\Theta(-p_0)$  por  $\text{sgn}(p_0)$ .

Analisando a equação acima segundo as definições dadas no capítulo 2, verificamos que a distribuição causal para o vácuo tem ordem singular  $\omega_{\text{vac}} = 4$  e, assim, para obtermos a distribuição retardada temos que usar a solução central, equação (2.38). Logo,

$$\hat{r}_{\text{vac}}(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{D_2^{\text{vac}}(tp)}{(t - i0p_0)^5 (1 - t + i0p_0)}, \quad (3.80)$$

e substituindo (3.79) podemos escrever

$$\hat{r}_{\text{vac}}(p) = \frac{i}{2\pi} \frac{e^2 \text{sgn}(p_0)}{64M^2(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\text{sgn}(tp) \Theta(t^2 p^2 - a^2)}{(t - i0p_0)^5 (1 - t + i0p_0)} f(t^2 p^2), \quad (3.81)$$

onde introduzimos as definições

$$a^2 \stackrel{\text{def}}{=} (2m + \sqrt{\xi}M)^2, \quad (3.82)$$

e

$$\begin{aligned} f(p^2) \stackrel{\text{def}}{=} & \frac{1}{\sqrt{p^2}} \left\{ -\frac{7}{15} (p^2 + \xi M^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{20m^2}{3} (p^2 + \xi M^2)^{\frac{3}{2}} \right. \\ & + (p^2 - \xi M^2)^2 (p^2 + \xi M^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{64}{3} m^3 (p^2 + \xi M^2) \\ & \left. - 4m^2 \frac{(p^2 - \xi M^2)^2}{(p^2 + \xi M^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2^8}{15} m^5 \right\}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Considerando as propriedades de suporte das funções  $\Theta$  e  $\text{sgn}$ , podemos reescrever a expressão (3.81) como

$$\hat{r}_{\text{vac}}(p) = \frac{ie^2}{64M^2(2\pi)^{\frac{7}{2}}} 2 \int_{\sqrt{\frac{a^2}{p^2}}}^{\infty} dt \frac{f(t^2 p^2)}{t^5 (1 - t^2 + i0p_0)}, \quad (3.84)$$

ou

$$\begin{aligned} \hat{r}_{\text{vac}}(p) = & \frac{ie^2}{64M^2(2\pi)^{\frac{7}{2}}} \left\{ -\frac{7}{15} p^4 J_1 - \frac{20}{3} m^2 p^2 J_2 + p^4 J_3 \right. \\ & \left. + \frac{64m^3}{3\sqrt{p^2}} [p^2 J_4 + \xi M^2 J_5] - 4m^2 p^2 J_6 - \frac{2^8 m^5}{15\sqrt{p^2}} J_5 \right\}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

onde utilizamos as integrais  $J_1$ - $J_6$  definidas abaixo. Para expressar o resultado destas integrais de forma mais compacta, é útil introduzirmos as definições

$$z^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\xi M^2}{p^2}, \quad (3.86)$$

e

$$b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\xi M^2}{(2m + \sqrt{\xi} M)^2}, \quad (3.87)$$

em termos das quais as integrais  $J_i$  são dadas por

$$\begin{aligned} J_1 &\stackrel{\text{def}}{=} -2 \int_{\sqrt{\frac{a^2}{p^2}}}^{\infty} dt \frac{1}{t(t^2 - 1 - i0p_0)} \left(1 + \frac{z^2}{t^2}\right)^{\frac{5}{2}} \\ &= (1 + z^2)^2 J_7 - \frac{2}{3} z^2 - \frac{16}{15} + \left(\frac{2}{3} z^2 + \frac{16}{15} + \frac{2}{5} b\right) (1 + b)^{\frac{3}{2}}; \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} J_2 &\stackrel{\text{def}}{=} -2 \int_{\sqrt{\frac{a^2}{p^2}}}^{\infty} dt \frac{1}{t^3(t^2 - 1 - i0p_0)} \left(1 + \frac{z^2}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= (1 + z^2) J_7 - \frac{2}{5z^2} - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} z^2 + \frac{2}{5} b\right) \frac{(1 + b)^{\frac{3}{2}}}{z^2}; \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} J_3 &\stackrel{\text{def}}{=} -2 \int_{\sqrt{\frac{a^2}{p^2}}}^{\infty} dt \frac{1}{t(t^2 - 1 - i0p_0)} \left(1 + \frac{z^2}{t^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{z^2}{t^2}\right)^2 \\ &= (1 - z^2)^2 J_7 - \frac{2}{3} z^2 + \frac{8}{5} + \left(\frac{2}{3} z^2 - \frac{8}{5} + \frac{2}{5} b\right) (1 + b)^{\frac{3}{2}}; \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} J_4 &\stackrel{\text{def}}{=} -2 \int_{\sqrt{\frac{a^2}{p^2}}}^{\infty} dt \frac{1}{t^4(t^2 - 1 - i0p_0)} \\ &= \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{p^2}{a^2}}}{1 + \sqrt{\frac{p^2}{a^2}}} \right| - i\pi \text{sgn}(p_0) \Theta(p^2 - a^2) + 2\sqrt{\frac{p^2}{a^2}} + \frac{2}{3} \left(\frac{p^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}; \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} J_5 &\stackrel{\text{def}}{=} -2 \int_{\sqrt{\frac{a^2}{p^2}}}^{\infty} dt \frac{1}{t^6(t^2 - 1 - i0p_0)} \\ &= J_4 + \frac{2}{5} \left(\frac{p^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{2}}; \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned}
J_6 &\stackrel{\text{def}}{=} -2 \int_{\sqrt{\frac{a^2}{p^2}}}^{\infty} dt \frac{1}{t^3(t^2 - 1 - i0p_0)} \left(1 + \frac{z^2}{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{z^2}{t^2}\right)^2 \\
&= (1 - z^2)^2 J_8 + \frac{2}{5z^2} (1 + b)^{\frac{5}{2}} + (z^2 - 4) \frac{2(1 + b)^{\frac{3}{2}}}{3z^2} \\
&\quad + \frac{2(1 + b)^{\frac{1}{2}}}{z^2} (4 - 3z^2 + z^4) + \frac{1}{z^2} \left(-\frac{86}{15} + \frac{16}{3}z^2 - 2z^4\right),
\end{aligned} \tag{3.93}$$

onde introduzimos duas novas integrais  $J_7$  e  $J_8$ , dadas por

$$\begin{aligned}
J_7 &\stackrel{\text{def}}{=} -2 \int_{\sqrt{\frac{a^2}{p^2}}}^{\infty} dt \frac{1}{t(t^2 - 1 - i0p_0)} \left(1 + \frac{z^2}{t^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= -2 + 2\sqrt{1 + b} - \sqrt{1 + z^2} \ln \left[ \frac{\sqrt{1 + z^2} - 1}{\sqrt{1 + z^2} + 1} \right] \\
&\quad + \sqrt{1 + z^2} \ln \left| \frac{\sqrt{1 + z^2} - \sqrt{1 + b}}{\sqrt{1 + z^2} + \sqrt{1 + b}} \right| - i\pi \text{sgn}(p_0) \Theta(p^2 - a^2) \sqrt{1 + z^2},
\end{aligned} \tag{3.94}$$

e

$$\begin{aligned}
J_8 &\stackrel{\text{def}}{=} -2 \int_{\sqrt{\frac{a^2}{p^2}}}^{\infty} dt \frac{1}{t(t^2 - 1 - i0p_0)} \left(1 + \frac{z^2}{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1 + z^2} - \sqrt{1 + b}}{\sqrt{1 + z^2} + \sqrt{1 + b}} \right| \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} \ln \left[ \frac{\sqrt{1 + z^2} - 1}{\sqrt{1 + z^2} + 1} \right] - i\pi \text{sgn}(p_0) \Theta(p^2 - a^2) \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Finalmente, substituindo os resultados (3.88)-(3.95) para as integrais  $J_i$  em (3.85) obtemos a expressão exata, em segunda ordem, para a distribuição retardada associada com o diagrama de vácuo. Contudo, desde que desejamos apenas estabelecer a existência do limite adiabático, estamos interessados na expressão para  $\hat{r}_{\text{vac}}(p)$  no limite  $p \rightarrow 0$  (com  $\xi$  mantido finito). Assim, vamos considerar as integrais  $J_i$  neste limite.

Notando que quando  $p \rightarrow 0$  as funções  $\Theta$  não contribuem, temos que o limite das integrais  $J_4$ ,  $J_7$  e  $J_8$  é dado por

$$J_4(p)|_{p \rightarrow 0} = -\frac{2}{5} \left(\frac{p^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7} \left(\frac{p^2}{a^2}\right)^{\frac{7}{2}} + \dots; \tag{3.96}$$

$$\begin{aligned}
J_7(p)|_{p \rightarrow 0} &= \frac{2}{3} \left( 1 - (1+b)^{\frac{3}{2}} \right) \left( \frac{p^2}{\xi M^2} \right) - \left[ \frac{4}{15} - \left( \frac{4}{15} - \frac{2}{5}b \right) (1+b)^{\frac{3}{2}} \right] \left( \frac{p^2}{\xi M^2} \right)^2 \\
&+ \left[ \frac{16}{105} + \left( -\frac{16}{105} + \frac{14}{15}b + \frac{4}{5}b^2 \right) \sqrt{1+b} \right] \left( \frac{p^2}{\xi M^2} \right)^3 + \dots,
\end{aligned} \tag{3.97}$$

e

$$\begin{aligned}
J_8(p)|_{p \rightarrow 0} &= 2 \left( 1 - \sqrt{1+b} \right) \left( \frac{p^2}{\xi M^2} \right) - \left[ \frac{4}{3} - \left( \frac{4}{3} - \frac{2}{3}b \right) \sqrt{1+b} \right] \left( \frac{p^2}{\xi M^2} \right)^2 \\
&+ \left[ \frac{16}{15} + \left( -\frac{16}{15} + \frac{8}{15}b - \frac{2}{5}b^2 \right) \sqrt{1+b} \right] \left( \frac{p^2}{\xi M^2} \right)^3 + \dots.
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Todas as demais  $J_i$  podem ser escritas em termos destas três, conforme as equações (3.88)-(3.93).

Substituindo (3.88)-(3.93) e (3.96)-(3.98) em (3.85), temos

$$\begin{aligned}
\hat{r}_{\text{vac}}(p)|_{p \rightarrow 0} &= \frac{ie^2}{64M^2(2\pi)^{\frac{7}{2}}} p^6 \left\{ \frac{\sqrt{1+b}}{\xi M^2} \left[ -\frac{128}{105} + \frac{8}{15}b + \frac{8}{5}b^2 \right. \right. \\
&- \left. \frac{m^2}{\xi M^2} \left( \frac{221}{14} + \frac{32}{3}b^2 \right) \right] - \frac{128m^3}{3a^5} \left[ \frac{1}{5} + \frac{1}{7a^2} \left( \xi M^2 - \frac{4}{5}m^2 \right) \right] \\
&+ \left. \frac{1}{\xi M^2} \left( \frac{128}{105} + \frac{221}{14} \frac{m^2}{\xi M^2} \right) \right\} + \dots.
\end{aligned} \tag{3.99}$$

No entanto,  $\hat{r}_{\text{vac}}(p)$  é uma solução particular para o problema de bipartição da distribuição causal. A solução geral é obtida notando que a ordem singular de  $\hat{D}_{\text{vac}}$  é  $\omega_{\text{vac}} = 4$ . Logo, temos

$$\tilde{r}_{\text{vac}}(p) = \hat{r}_{\text{vac}}(p) + C_0 + C_2 p^2 + C_4 p^4, \tag{3.100}$$

como solução geral. Nesta expressão está implícito que algumas constantes permitidas por (2.41) são assumidas serem nulas, de modo que a estrutura escalar de Lorentz da distribuição seja preservada. As constantes  $C_0$ ,  $C_2$  e  $C_4$  são finitas porém indeterminadas.

Então, a distribuição  $\hat{T}_2^{\text{vac}}(p)$  é dada por

$$\hat{T}_2^{\text{vac}}(p) \doteq \tilde{r}_{\text{vac}}(p) - \hat{R}'_{\text{vac}}(p), \tag{3.101}$$

com  $\hat{R}'_{\text{vac}}(p)$  dada em (3.67). Contudo, no limite  $p \rightarrow 0$  a distribuição  $\hat{R}'_{\text{vac}}(p)$  não contribui, conforme podemos constatar de sua forma explícita, equações (3.67) e (3.74). Assim, temos que

$$\hat{T}_2^{\text{vac}}(p)|_{p \rightarrow 0} = \hat{r}_{\text{vac}}(p)|_{p \rightarrow 0} + C_0 + C_2 p^2 + C_4 p^4. \tag{3.102}$$

Com isto podemos retomar a análise da contribuição de  $\hat{T}_2^{\text{vac}}(p)$  para a amplitude de transição vácuo-vácuo e, de acordo com as equações (3.64) e (3.102), temos

$$\begin{aligned} \lim_{g \rightarrow 1} \langle 0 | S_2(g) | 0 \rangle &= \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^3} \int d^3p \, \hat{g}_0(p) \hat{g}_0(-p) \\ &\times \left\{ \hat{r}_{\text{vac}}(\epsilon p) + C_0 + C_2 \epsilon^2 p^2 + C_4 \epsilon^4 p^4 \right\} . \end{aligned} \quad (3.103)$$

Analizando esta expressão, vemos imediatamente que o limite do quarto termo entre chaves é zero e, desde que  $\hat{r}_{\text{vac}}(p)$  comporta-se como  $\mathcal{O}(p^6)$  quando  $p \rightarrow 0$ , também o limite do primeiro termo se anula. No entanto, o limite dos demais termos não existe a menos que as constantes  $C_0$  e  $C_2$  se anulem. Assim, devemos impor

$$C_0 = C_2 = 0.$$

Deste modo temos que a exigência  $\lim_{g \rightarrow 1} \langle 0 | S_2(g) | 0 \rangle = 0$  é satisfeita e o vácuo do MTG é estável.

No limite do *gauge* unitário ( $\xi \rightarrow \infty$ ) verifica-se que

$$\hat{r}_{\text{vac}}(p)|_{\xi \rightarrow \infty} = 0 . \quad (3.104)$$

De modo que, para o modelo de Thirring original, o diagrama de vácuo corresponde a distribuição

$$\hat{T}_2^{\text{vac}}(p)|_{\xi \rightarrow \infty} = C_4 p^4 , \quad (3.105)$$

onde a constante  $C_4$  permanece indeterminada. O fato desta constante não ser determinada não tem qualquer consequência, pois os diagramas de vácuo somente têm relevância para a estrutura do método de BEG e (obviamente) não levam a qualquer efeito observável. Na verdade, esta impossibilidade de determinar todas as constantes que aparecem na solução geral do problema de bipartição é uma consequência do fato que o modelo tratado é não renormalizável (em QED<sub>3</sub>, uma teoria super-renormalizável, todas as constantes que aparecem na distribuição do vácuo são determinadas pela exigência de estabilidade).

É interessante notar que a distribuição (3.105) corresponde ao diagrama de Feynman



o qual, quando calculado pelos métodos usuais de teoria quântica de campos, é quadraticamente divergente. Recentemente, Jackiw [36] propôs que seja atribuído a parte divergente de um diagrama de Feynman um valor finito mas indeterminado, sendo

que esta indeterminação somente pode ser eliminada recorrendo a propriedades formais do modelo (por exemplo, simetrias). Do resultado acima podemos ver que o método de BEG fornece uma base formal para tal procedimento.

## Capítulo 4

### Auto-energia e o Operador de Corrente Corrigido

Neste capítulo calcularemos as demais correções radiativas de ordem mais baixa para o MTG. Assim, na primeira seção, consideraremos a auto-energia do férmion. Na segunda seção derivaremos uma identidade de Ward relacionando a função de vértice, para momento transferido nulo, à auto-energia do férmion. Então, obteremos a função de vértice na camada de massa, ou operador de corrente. Nesta seção também discutiremos de que modo a não-renormalizabilidade do modelo se manifesta no método de BEG.

#### 4.1 Auto-energia do Férmion

O cálculo da auto-energia do férmion é importante em tratamentos usuais de teorias efetivas envolvendo a interação de quatro férmions, tal como o modelo de Nambu e Jona-Lasinio [2], para a obtenção da equação de auto-consistência (a equação de *gap*). Em tais tratamentos, a auto-energia é divergente e se faz necessário a introdução de um *cut-off* ultravioleta  $\Lambda$  para regularizá-la. Então, a equação de auto-consistência proporciona uma relação entre a massa dinamicamente gerada para o férmion, a constante de acoplamento do modelo e  $\Lambda$ , sendo que estes parâmetros devem ser ajustados de modo a reproduzir dados experimentais.

Não é nossa intenção discutir a equação de auto-consistência, e suas consequências, para o modelo de Thirring ( $\xi \rightarrow \infty$ ). Mas, ainda assim, é importante calcular a auto-energia pelo método de BEG para enfatizar as diferenças entre este método e os usuais no cálculo de *loops* em teorias não renormalizáveis. Este tipo de cálculo é relevante também no contexto do tratamento moderno de teorias de campo efetivas (ver o capítulo 19 de [22] e as referências lá citadas).

Vamos, então, obter a distribuição de auto-energia do férmion. A contribuição de  $R'_2(x_1, x_2)$  é dada por [24]

$$R'_2(x_1, x_2)|_{ae} = : \bar{\psi}(x_1) \left\{ -e^2 \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_2) \gamma^\nu D_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) \right\} \psi(x_2) : , \quad (4.1)$$

e a contribuição de  $A'_2(x_1, x_2)$  é

$$A'_2(x_1, x_2)|_{ae} = : \bar{\psi}(x_1) \{ e^2 \gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_2) \gamma^\nu D_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2) \} \psi(x_2) : . \quad (4.2)$$

Estas distribuições a valor de operador nos permitem escrever a parte da distribuição causal,  $D_2 = R'_2 - A'_2$ , correspondendo a auto-energia como

$$D_2(x_1, x_2)|_{ae} = : \bar{\psi}(x_1) d_{ae}(y) \psi(x_2) : , \quad (4.3)$$

onde  $y \stackrel{\text{def}}{=} x_1 - x_2$  e a distribuição numérica  $d_{ae}$  é dada por

$$d_{ae}(y) = -e^2 \gamma^\mu \left[ S^{(-)}(y) D_{\mu\nu}^{(+)}(-y) + S^{(+)}(y) D_{\mu\nu}^{(+)}(y) \right] \gamma^\nu . \quad (4.4)$$

Além desta contribuição há outra que difere somente pela troca de  $x_1$  por  $x_2$ , de modo a obter  $T_2(x_1, x_2)$  simétrico.

O primeiro passo é investigar as propriedades de suporte da distribuição  $d_{ae}(y)$ . Para tanto, notamos que  $d_{ae}(y)$  pode ser reescrita como

$$d_{ae}(y) = -e^2 \gamma^\mu \left[ S(y) D_{\mu\nu}^{(+)}(-y) + S^{(+)}(y) D_{\mu\nu}(y) \right] \gamma^\nu , \quad (4.5)$$

e tanto  $S(y)$  quanto  $D(y)$  podem ser expressas em termos da distribuição de Pauli-Jordan\*, a qual tem suporte causal. Assim,  $d_{ae}(y)$  também tem suporte causal, isto é, desaparece para  $y$  do tipo espaço.

Desde que  $d_{ae}$  tem as propriedades de suporte desejadas, podemos separá-la em partes retardada e avançada. Contudo, este procedimento é feito mais facilmente no espaço dos momentos, de modo que devemos considerar a transformada de Fourier da distribuição causal. Para isto, é conveniente separar  $d_{ae}(y)$  segundo

$$d_{ae}(y) = -e^2 \gamma^\mu \left\{ d_{\mu\nu}^{(-)}(y) + d_{\mu\nu}^{(+)}(y) \right\} \gamma^\nu , \quad (4.6)$$

onde definimos

$$d_{\mu\nu}^{(-)}(y) \stackrel{\text{def}}{=} S^{(-)}(y) D_{\mu\nu}^{(+)}(-y) = -S^{(-)}(y) D_{\mu\nu}^{(-)}(y) ; \quad (4.7)$$

$$d_{\mu\nu}^{(+)}(y) \stackrel{\text{def}}{=} S^{(+)}(y) D_{\mu\nu}^{(+)}(y) .$$

Vamos, inicialmente, considerar a transformada de Fourier de  $d_{\mu\nu}^{(-)}(y)$ , que é dada pela convolução

$$\begin{aligned} \hat{d}_{\mu\nu}^{(-)}(p) &= -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3q \hat{S}^{(-)}(q) \hat{D}_{\mu\nu}^{(-)}(p - q) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3q (\not{q} + m) \hat{D}^{(-)}(q) \hat{D}_{\mu\nu}^{(-)}(p - q) . \end{aligned} \quad (4.8)$$

---

\*Ver apêndice B.

Substituindo as expressões explícitas para as funções singulares no espaço dos momentos (ver apêndice B):

$$\begin{aligned}\hat{D}^{(-)}(q) &= -\frac{i}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\delta(q^2 - m^2)\Theta(-q_0); \\ \hat{D}_{\mu\nu}^{(-)}(q) &= -\frac{i}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{q_\mu q_\nu}{M^2}\delta(q^2 - \xi M^2)\Theta(-q_0),\end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}\hat{d}_{\mu\nu}^{(-)}(p) &= \frac{1}{M^2(2\pi)^{\frac{5}{2}}}\int d^3q (\not{q} + m)\delta(q^2 - m^2)\Theta(-q_0)(p - q)_\mu(p - q)_\nu \\ &\times \delta\left[(p - q)^2 - \xi M^2\right]\Theta(-p_0 + q_0),\end{aligned}\quad (4.9)$$

ou

$$\begin{aligned}\hat{d}_{\mu\nu}^{(-)}(p) &= \frac{1}{M^2(2\pi)^{\frac{5}{2}}}\{p_\mu p_\nu (\gamma^\alpha I_\alpha + mI) - p_\mu (\gamma^\alpha I_{\nu\alpha} + mI_\nu) \\ &- p_\nu (\gamma^\alpha I_{\mu\alpha} + mI_\mu) + \gamma^\alpha I_{\mu\nu\alpha} + mI_{\mu\nu}\},\end{aligned}\quad (4.10)$$

onde introduzimos as integrais

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3q \delta(q^2 - m^2)\Theta(-q_0)\delta\left[(p - q)^2 - \xi M^2\right]\Theta(-p_0 + q_0); \quad (4.11)$$

$$I_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3q q_\mu \delta(q^2 - m^2)\Theta(-q_0)\delta\left[(p - q)^2 - \xi M^2\right]\Theta(-p_0 + q_0); \quad (4.12)$$

$$I_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3q q_\mu q_\nu \delta(q^2 - m^2)\Theta(-q_0)\delta\left[(p - q)^2 - \xi M^2\right]\Theta(-p_0 + q_0); \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}I_{\mu\nu\alpha} &\stackrel{\text{def}}{=} \int d^3q q_\mu q_\nu q_\alpha \delta(q^2 - m^2)\Theta(-q_0)\Theta(-p_0 + q_0) \\ &\times \delta\left[(p - q)^2 - \xi M^2\right].\end{aligned}\quad (4.14)$$

Em todas as integrais acima verificamos que  $p$  é do tipo tempo, como uma consequência das  $\delta$  e  $\Theta$  (desde que  $M^2 > 0$ ). Assim, podemos considerar um referencial especial em que  $p = (p_0, 0, 0)$  para efetuarmos os cálculos. Neste referencial, após integrarmos em  $q_0$ , temos

$$I = \int \frac{d^2q}{2E_q} \delta(p_0^2 + 2p_0 E_q + m^2 - \xi M^2)\Theta(-p_0 - E_q). \quad (4.15)$$

A delta no integrando implica em

$$|\vec{q}| = \frac{1}{2|p_0|} \sqrt{p_0^2 - (m - \sqrt{\xi}M)^2} \sqrt{p_0^2 - (m + \sqrt{\xi}M)^2}, \quad (4.16)$$

e, desde que  $|\vec{q}| > 0$ , devemos ter  $p_0^2 > (m + \sqrt{\xi}M)^2$ . Adicionalmente, a função  $\Theta$  no integrando em (4.15) exige que  $p_0 < 0$ . Portanto, o resultado da integral, neste referencial especial, é

$$I = \pi \frac{\Theta(-p_0)}{2\sqrt{p_0^2}} \Theta \left[ p_0^2 - (m + \sqrt{\xi}M)^2 \right].$$

Retornando a um referencial arbitrário, temos

$$I = \pi \frac{\Theta(-p_0)}{2\sqrt{p^2}} \Theta \left[ p^2 - (m + \sqrt{\xi}M)^2 \right]. \quad (4.17)$$

Consideremos agora  $I_\mu$ , que no referencial em que  $p = (p_0, 0, 0)$  é dada por

$$I_\mu = \int d^3q \, q_\mu \delta(q^2 - m^2) \Theta(-q_0) \delta \left[ p_0^2 - 2p_0q_0 + m^2 - \xi M^2 \right] \Theta(-p_0 + q_0), \quad (4.18)$$

desta expressão podemos ver que se  $\mu \neq 0$  a integral se anula por simetria. Assim, procedendo do mesmo modo que no cálculo de  $I$ , temos

$$I_\mu = \delta_\mu^0 2\pi \Theta(-p_0) \Theta \left[ p_0^2 - (m + \sqrt{\xi}M)^2 \right] \frac{(p_0^2 + m^2 - \xi M^2)}{p_0^2} \frac{p_0}{8\sqrt{p_0^2}}, \quad (4.19)$$

o que nos leva a

$$I_\mu = 2\pi \Theta(-p_0) \Theta \left[ p^2 - (m + \sqrt{\xi}M)^2 \right] \left( 1 + \frac{m^2 - \xi M^2}{p^2} \right) \frac{p_\mu}{8\sqrt{p^2}}, \quad (4.20)$$

em um referencial arbitrário.

As integrais  $I_{\mu\nu}$  e  $I_{\mu\nu\alpha}$  podem ser calculadas do mesmo modo que as integrais acima e o resultado é

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu} &= \frac{\pi}{4\sqrt{p^2}} \Theta(-p_0) \Theta \left[ p^2 - (m + \sqrt{\xi}M)^2 \right] \left\{ g_{\mu\nu} \left( m^2 - \frac{(p^2 + m^2 - \xi M^2)^2}{4p^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left( \frac{3(p^2 + m^2 - \xi M^2)^2}{4p^2} - m^2 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

e

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu\alpha} &= \frac{\pi}{8\sqrt{p^2}} \Theta(-p_0) \Theta \left[ p^2 - (m + \sqrt{\xi}M)^2 \right] \left( 1 + \frac{m^2 - \xi M^2}{p^2} \right) \\ &\quad \times \left\{ (g_{\mu\nu} p_\alpha + g_{\mu\alpha} p_\nu + g_{\nu\alpha} p_\mu) \left[ m^2 - \frac{(p^2 + m^2 - \xi M^2)^2}{4p^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_\mu p_\nu p_\alpha}{p^2} \left( \frac{5(p^2 + m^2 - \xi M^2)^2}{4p^2} - 3m^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Substituindo o resultado das integrais  $I-I_{\mu\nu\alpha}$  em (4.10) obtemos  $\hat{d}_{\mu\nu}^{(-)}(p)$ . No entanto, para obtermos uma expressão mais manuseável, é conveniente notar que a distribuição causal pode ser escrita como

$$\hat{d}_{ae}(p) = -e^2 \left( \hat{d}^{(-)}(p) + \hat{d}^{(+)}(p) \right), \quad (4.23)$$

onde

$$\hat{d}^{(\pm)}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^\mu \hat{d}_{\mu\nu}^{(\pm)}(p) \gamma^\nu. \quad (4.24)$$

Então, usando as propriedades das matrizes  $\gamma$  em (2+1) dimensões<sup>†</sup>, temos que  $\hat{d}^{(-)}(p)$  é dada por

$$\begin{aligned} \hat{d}^{(-)}(p) &= \frac{1}{M^2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{8\sqrt{p^2}} \Theta(-p_0) \Theta \left[ p^2 - (m + \sqrt{\xi}M)^2 \right] \\ &\times \left\{ 2m\xi M^2 + \not{p} \left[ (p^2 + m^2) \left( 1 + \frac{m^2 - \xi M^2}{p^2} \right) - 4m^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Vamos agora considerar o cálculo de  $\hat{d}_{\mu\nu}^{(+)}(p)$  na equação (4.7). Do mesmo modo que no caso anterior, a transformada de Fourier de  $d_{\mu\nu}^{(+)}(y)$  é dada por uma convolução:

$$\begin{aligned} d_{\mu\nu}^{(+)}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3q \hat{S}^{(+)}(q) \hat{D}_{\mu\nu}^{(+)}(p - q) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3q (\not{q} + m) \hat{D}^{(+)}(q) \hat{D}_{\mu\nu}^{(+)}(p - q), \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{D}^{(+)}(q) &= \frac{i}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \delta(q^2 - m^2) \Theta(q_0); \\ \hat{D}_{\mu\nu}^{(-)}(q) &= \frac{i}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{q_\mu q_\nu}{M^2} \delta(q^2 - \xi M^2) \Theta(q_0), \end{aligned}$$

de acordo com as expressões (B.5) e (B.22) do apêndice B. Portanto, temos

$$\begin{aligned} \hat{d}_{\mu\nu}^{(+)}(p) &= -\frac{1}{M^2(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \int d^3q (\not{q} + m) \delta(q^2 - m^2) \Theta(q_0) (p - q)_\mu (p - q)_\nu \\ &\times \delta \left[ (p - q)^2 - \xi M^2 \right] \Theta(p_0 - q_0), \end{aligned} \quad (4.27)$$

---

<sup>†</sup>Ver apêndice A.

Comparando a expressão acima para  $\hat{d}_{\mu\nu}^{(+)}(p)$  com a expressão (4.9) para  $\hat{d}_{\mu\nu}^{(-)}(p)$ , podemos notar que as únicas diferenças são um sinal global e os sinais dos argumentos das funções  $\Theta$ . Assim, o cálculo de  $\hat{d}_{\mu\nu}^{(+)}(p)$  procede exatamente do modo descrito acima e o resultado final pode ser obtido daquele para  $\hat{d}^{(-)}(p)$  fazendo  $\Theta(-p_0) \rightarrow -\Theta(p_0)$ .

Finalmente, usando a equação (4.23), obtemos a distribuição causal para a auto-energia do férmion no espaço dos momentos

$$\hat{d}_{ae}(p) = A_d(p^2)\not{p} + B_d(p^2) , \quad (4.28)$$

com

$$\begin{aligned} A_d(p^2) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^2}{8\sqrt{p^2}M^2} \text{sgn}(p_0) \Theta[p^2 - a^2] \\ &\times \left[ (p^2 + m^2) \left( 1 + \frac{m^2 - \xi M^2}{p^2} \right) - 4m^2 \right] , \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$B_d(p^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^2 m \xi}{4\sqrt{p^2}} \text{sgn}(p_0) \Theta[p^2 - a^2] , \quad (4.30)$$

onde introduzimos a definição

$$a^2 \stackrel{\text{def}}{=} (m + \sqrt{\xi}M)^2 . \quad (4.31)$$

Tendo obtido a distribuição causal no espaço dos momentos, podemos determinar sua ordem singular usando as definições consideradas no capítulo 2. Verifica-se, então, que a auto-energia tem ordem singular  $\omega_{ae} = 2$ , de acordo com a equação (2.47), e a bipartição deve ser efetuada por meio da solução central

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{d}(tp)}{(t - i0p_0)^3 (1 - t + i0p_0)} . \quad (4.32)$$

Substituindo (4.28)-(4.30) na expressão acima, temos

$$\begin{aligned} \hat{r}(p) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\text{sgn}(p_0)}{8M^2\sqrt{p^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\text{sgn}(tp_0)}{|t|(t - i0p_0)^3 (1 - t + i0p_0)} \Theta(t^2 p^2 - a^2) \\ &\times \left\{ t\not{p} \left[ (t^2 p^2 + m^2) \left( 1 + \frac{m^2 - \xi M^2}{t^2 p^2} \right) - 4m^2 \right] + 2m\xi M^2 \right\} . \end{aligned} \quad (4.33)$$

Então, usando as propriedades das funções  $\Theta$  e rearranjando os termos, esta expressão pode ser escrita como

$$\hat{r}(p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{8M^2\sqrt{p^2}} \left\{ 2m\xi M^2 I_3(a^2, p^2) + \not{p} [p^2 I_1(a^2, p^2) \right.$$

(4.34)

$$- (2m^2 + \xi M^2)I_2(a^2, p^2) + m^2 p^{-2}(m^2 - \xi M^2)I_3(a^2, p^2) \Big] \Big\} ,$$

sendo que as integrais  $I_1$  e  $I_2$  já foram obtidas quando do cálculo do tensor de polarização do vácuo e são dadas nas equações (3.27) e (3.28), respectivamente. A integral  $I_3(a^2, p^2)$  é definida por

$$\begin{aligned} I_3(a^2, p^2) &\stackrel{\text{def}}{=} -2 \int_{\sqrt{\frac{a^2}{p^2}}}^{\infty} \frac{1}{t^4(t^2 - 1 - i0p_0)} \\ &= I_1(a^2, p^2) + 2\sqrt{\frac{p^2}{a^2}} + \frac{2}{3} \left(\frac{p^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} . \end{aligned} \quad (4.35)$$

Então, substituindo o resultado das integrais  $I_1 - I_3$  na expressão (4.34), verificamos que a distribuição retardada, associada à auto-energia do férmion, tem a seguinte estrutura

$$\hat{r}(p) = \tilde{A}(p^2)\not{p} + \tilde{B}(p^2) , \quad (4.36)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{A}(p^2) &= \frac{i}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \frac{e^2}{8\sqrt{p^2}M^2} \left[ \left( (p^2 + m^2) \left( 1 + \frac{m^2 - \xi M^2}{p^2} \right) - 4m^2 \right) \right. \\ &\times \left( \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{p^2}{a^2}}}{1 + \sqrt{\frac{p^2}{a^2}}} \right| - i\pi \text{sgn}(p_0) \Theta[p^2 - a^2] \right) - 2(2m^2 + \xi M^2) \sqrt{\frac{p^2}{a^2}} \\ &\left. + \frac{2m^2}{p^2} (m^2 - \xi M^2) \left( \sqrt{\frac{p^2}{a^2}} + \frac{1}{3} \left( \frac{p^2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right] , \end{aligned} \quad (4.37)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{B}(p^2) &= \frac{i}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \frac{e^2 m \xi}{4\sqrt{p^2}} \left[ \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{p^2}{a^2}}}{1 + \sqrt{\frac{p^2}{a^2}}} \right| - i\pi \text{sgn}(p_0) \Theta[p^2 - a^2] \right. \\ &\left. + 2\sqrt{\frac{p^2}{a^2}} + \frac{2}{3} \left( \frac{p^2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] . \end{aligned} \quad (4.38)$$

Contudo, conforme vimos no capítulo 2, para  $\omega > 0$  a solução do problema de bipartição não é única. Logo, neste caso, a solução geral contém um polinômio de grau dois em  $p$  (pois  $\omega_{ae} = 2$ ):

$$\tilde{r}(p) = \hat{r}(p) + C_0 + C_1 \not{p} + C_2 p^2 , \quad (4.39)$$

onde as constantes  $C_i$ 's não são determinadas pela causalidade, de modo que condições físicas adicionais são necessárias para fixá-las.

Para obtermos a distribuição de 2 pontos associada à auto-energia do férmion,  $\hat{T}_2^{\text{ae}}(p)$ , é necessário subtrair  $\hat{r}'_{\text{ae}}(p)$  de (4.39), onde  $\hat{r}'_{\text{ae}}(p) = -e^2 d^{(-)}(p)$  é a transformada de Fourier da distribuição numérica associada à  $R'_2(x_1, x_2)|_{\text{ae}}$ . Então, definimos a auto-energia do férmion  $\hat{\Sigma}(p)$  como

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}(p) &= -i(2\pi)^{\frac{3}{2}} T_2^{\text{ae}}(p) \\ &= -i(2\pi)^{\frac{3}{2}} (\tilde{r}(p) - \hat{r}'(p)) .\end{aligned}\tag{4.40}$$

Logo, substituindo (4.39) e (4.25), podemos escrever

$$\hat{\Sigma}(p) = A(p^2)\not{p} + B(p^2) + C_0 + C_1\not{p} + C_2p^2 ,\tag{4.41}$$

onde redefinimos as constantes de modo a incluir o fator  $-i(2\pi)^{\frac{3}{2}}$ . Nesta expressão temos

$$\begin{aligned}A(p^2) &= \frac{i}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \frac{e^2}{8\sqrt{p^2}M^2} \left[ \left( (p^2 + m^2) \left( 1 + \frac{m^2 - \xi M^2}{p^2} \right) - 4m^2 \right) \right. \\ &\times \left( \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{p^2}{a^2}}}{1 + \sqrt{\frac{p^2}{a^2}}} \right| - i\pi\Theta[p^2 - a^2] \right) - 2(2m^2 + \xi M^2)\sqrt{\frac{p^2}{a^2}} \\ &\left. + \frac{2m^2}{p^2}(m^2 - \xi M^2) \left( \sqrt{\frac{p^2}{a^2}} + \frac{1}{3} \left( \frac{p^2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right] ,\end{aligned}\tag{4.42}$$

e

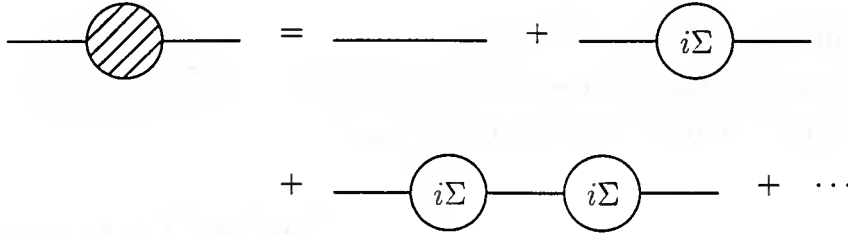
$$\begin{aligned}B(p^2) &= \frac{i}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \frac{e^2 m \xi}{4\sqrt{p^2}} \left[ \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{p^2}{a^2}}}{1 + \sqrt{\frac{p^2}{a^2}}} \right| - i\pi\Theta[p^2 - a^2] \right. \\ &\left. + 2\sqrt{\frac{p^2}{a^2}} + \frac{2}{3} \left( \frac{p^2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] .\end{aligned}\tag{4.43}$$

e, a exemplo do que aconteceu no cálculo do tensor de polarização do vácuo, o efeito de subtrair  $\hat{r}'_{\text{ae}}(p)$  é trocar  $\text{sgn}(p_0)$  por 1.

Vamos agora considerar o propagador fermiônico corrigido pelas inserções próprias de auto-energia

$$iS'_F = iS_F + iS_F i\Sigma iS_F + iS_F i\Sigma iS_F i\Sigma iS_F + \dots ,\tag{4.44}$$

onde  $S'_F$  indica o propagador de Feynman corrigido,  $S_F$  é o propagador de Feynman livre para o férmion e  $\Sigma$  indica as inserções próprias de auto-energia (que aqui estamos considerando somente até segunda ordem em teoria de perturbação). Esta série é representada graficamente na figura abaixo.



**Fig. 4.1.1** - Representação gráfica da série (4.44).

A série geométrica (4.44) pode ser somada notando que, no espaço dos momentos, o propagador fermiônico livre é dado por

$$i\hat{S}_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i0} , \quad (4.45)$$

e usando a bem conhecida identidade

$$\frac{1}{A - B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots , \quad (4.46)$$

onde  $A$  e  $B$  são quaisquer dois operadores. Deste modo, o propagador fermiônico corrigido pelas inserções de auto-energia, em segunda ordem, é dado por

$$i\hat{S}'_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m + \hat{\Sigma}(p) + i0} , \quad (4.47)$$

com  $\hat{\Sigma}$  dado em (4.41).

Tendo obtido o propagador corrigido, podemos impor que o pólo de  $\hat{S}'_F$  continue sendo na massa presente na Lagrangiana, isto é, em  $m$ . Esta condição, equivalente a impor a condição de normalização

$$\hat{\Sigma}(p)|_{\not{p}=m} = 0 , \quad (4.48)$$

pode ser satisfeita escolhendo  $C_0$  como

$$C_0 = \frac{e^2 m^2}{12\pi M^2} \left( 1 + \frac{m\sqrt{\xi}M}{a^2} \right) \sqrt{\frac{m^2}{a^2}} - mC_1 - m^2 C_2, \quad (4.49)$$

de modo que

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}(p) = & A(p^2)\not{p} + B(p^2) + \frac{e^2 m^2}{12\pi M^2} \left(1 + \frac{m\sqrt{\xi}M}{a^2}\right) \sqrt{\frac{m^2}{a^2}} \\ & + C_1(\not{p} - m) + C_2(p^2 - m^2) .\end{aligned}\tag{4.50}$$

Então, podemos notar que este procedimento nos deixa com duas constantes indeterminadas na auto-energia do férmion. Vamos postergar a discussão a respeito da determinação destas constantes para depois que discutirmos a função de vértice.

## 4.2 Correção de Vértice

Nesta seção vamos considerar a correção de vértice para o MTG. Mas, ao invés de construir a função de vértice considerando a correspondente distribuição causal em terceira ordem na teoria de perturbação e fazendo a subsequente bipartição em distribuições avançada e retardada, vamos tirar proveito do fato que o MTG é invariante BRST para obtê-la através de uma identidade de Ward.

A razão para não aplicarmos diretamente o método de BEG é que, desde que o MTG é não renormalizável, a ordem singular das distribuições associadas com um dado processo em ordem mais alta na teoria de perturbação é, em geral, positiva (em especial, para o vértice temos  $\omega_v = 1$ ). Isto, por sua vez, torna difícil encontrar uma solução analítica para a solução central.

Vamos, então, derivar a identidade de Ward que nos permite obter a função de vértice a partir da auto-energia do férmion. Para este fim, devemos considerar variações sob transformações BRST de funções de Green da forma  $\langle 0|T\{O(y)\bar{c}(x)\}|0\rangle$ , onde  $O(y)$  é uma notação abreviada para um produto arbitrário dos campos  $A_\mu$ ,  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  (que devem ser tratados como campos independentes) tomados nos pontos  $y_1, y_2, \dots \stackrel{\text{def}}{=} y$ . Desde que o modelo considerado é invariante sob transformações BRST, segue que as funções de Green também são invariantes sob estas transformações (ver, por exemplo, a referência [37]), ou seja

$$\delta_{\mathbf{B}}\langle 0|T\{O(y)\bar{c}(x)\}|0\rangle = 0 ,\tag{4.51}$$

ou

$$\langle 0|T\{O(y)\delta_{\mathbf{B}}\bar{c}(x)\}|0\rangle = \langle 0|T\{(\delta_{\mathbf{B}}O(y))\bar{c}(x)\}|0\rangle .\tag{4.52}$$

Neste ponto, é útil considerarmos a forma assumida pelas transformações BRST após termos integrado o campo auxiliar de Nakanishi-Lautrup. Então, temos

$$\delta_{\mathbf{B}}A_\mu(x) = \partial_\mu c(x) ;\tag{4.53}$$

$$\delta_{\mathbf{B}}\theta(x) = Mc(x) ; \quad (4.54)$$

$$\delta_{\mathbf{B}}c(x) = 0 ; \quad (4.55)$$

$$\delta_{\mathbf{B}}\bar{c}(x) = -\frac{i}{\xi}F[A, \theta] ; \quad (4.56)$$

$$\delta_{\mathbf{B}}\psi(x) = ie\psi(x)c(x) , \quad (4.57)$$

onde a função de fixação de *gauge* é dada pelo *gauge*  $R_\xi^\dagger$

$$F[A, \theta] = \partial^\mu A_\mu + \xi M\theta .$$

Logo, substituindo  $\delta_{\mathbf{B}}\bar{c}$  em (4.52), ficamos com

$$\langle 0|T\{O(y)F[A, \theta](x)\}|0\rangle = i\xi\langle 0|T\{(\delta_{\mathbf{B}}O(y))\bar{c}(x)\}|0\rangle, \quad (4.58)$$

e, substituindo a expressão explícita para  $F[A, \theta]$ , obtemos

$$\partial_\mu^x\langle 0|T\{O(y)A^\mu(x)\}|0\rangle = i\xi\langle 0|T\{(\delta_{\mathbf{B}}O(y))\bar{c}(x)\}|0\rangle , \quad (4.59)$$

onde já descartamos o termo contendo o campo de Stückelberg, pois como  $\theta(x)$  é um campo livre e  $O(y)$  não possui nenhum operador de campo  $\theta$  temos que  $\langle 0|T\{O(y)\theta(x)\}|0\rangle = 0$ .

A expressão (4.59) nos permite obter a identidade de Ward que desejamos, bastando escolher  $O(y)$  de forma apropriada. Inicialmente, vamos escolher  $O(y) = A_\nu(y)$ , de modo que a equação (4.59) assume a forma

$$\partial_x^\mu\langle 0|T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\}|0\rangle = i\xi\partial_\nu^y\langle 0|T\{c(y)\bar{c}(x)\}|0\rangle , \quad (4.60)$$

ou, equivalentemente

$$\partial_\mu^x\mathcal{D}^{\mu\nu}(x-y) = i\xi\partial_\nu^y\Delta_{gh}^F(y-x) , \quad (4.61)$$

onde  $\mathcal{D}_{\mu\nu}$  e  $\Delta_{gh}^F$  são os propagadores de Feynman completos para o bóson de *gauge* e os campos fantasmas de Faddeev-Popov, respectivamente. No entanto, uma vez que os campos fantasmas são campos livres, temos que  $\Delta_{gh}^F$  vem a ser um propagador livre, que no espaço dos momentos é dado por

$$\Delta_{gh}^F(k) = -\frac{i}{k^2 - \xi M^2 + i0} . \quad (4.62)$$

Assim, a identidade de Ward (4.61) pode ser reescrita, no espaço dos momentos, como

$$k_\mu\mathcal{D}^{\mu\nu}(k) = -\xi\frac{k^\nu}{k^2 - \xi M^2} . \quad (4.63)$$

---

<sup>†</sup>Comparando as transformações BRST e  $F[A, \theta]$  dados aqui com aqueles dados no capítulo 1 percebemos que há uma diferença com relação a potências de  $M$ . Isto se deve ao reescalonamento que fizemos no campo de Stückelberg (ver comentários após (1.40)).

Nosso objetivo ao derivar esta identidade de Ward é que ela será útil na derivação da identidade de Ward para a função de vértice. Por consistência, devemos notar que a expressão que obtivemos para o propagador bosônico corrigido pelas inserções de polarização do vácuo em segunda ordem, equação (3.53), está de acordo com a identidade de Ward (4.63).

Vamos agora considerar  $O(y) = \psi(y)\bar{\psi}(z)$  em (4.59), de modo a obter a identidade de Ward para o vértice. Então, notando que a variação BRST de  $O(y)$  é dada, neste caso, por

$$\delta_B (\bar{\psi}(y)\psi(z)) = -ie\psi(y)c(y)\psi(z) - ie\psi(y)\psi(z)c(z) ,$$

temos

$$\begin{aligned} \partial_x^\mu \langle 0|T\{A_\mu(x)\psi(y)\bar{\psi}(z)\}|0\rangle &= -e\xi \left\{ \langle 0|T\{\psi(y)\bar{\psi}(z)c(y)\bar{c}(x)\}|0\rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle 0|T\{\psi(y)\bar{\psi}(z)c(z)\bar{c}(x)\}|0\rangle \right\} , \end{aligned} \quad (4.64)$$

e, sendo

$$\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}|0\rangle = iS'_F(x-y) ; \quad (4.65)$$

$$\langle 0|T\{A^\mu(x)\psi(y)\bar{\psi}(z)\}|0\rangle = V^\mu(x,y,z) ,$$

onde  $S'_F$  indica o propagador fermiônico completo e  $V^\mu(x,y,z)$  é a função de Green para o vértice, temos

$$\partial_\mu^x V^\mu(x,y,z) = e\xi S'_F(y-z) \left[ \Delta_{gh}^F(y-x) - \Delta_{gh}^F(z-x) \right] . \quad (4.66)$$

Esta expressão pode ser reescrita no espaço dos momentos tomando a transformada de Fourier e usando a convenção

$$(2\pi)^3 \delta^{(3)} \left( \sum_{i=1}^N p_i \right) G^{(N)}(p_1, \dots, p_N) = \int d^3x_1 \dots d^3x_N e^{-i \sum_j p_j \cdot x_j} G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) . \quad (4.67)$$

Com isto, a identidade de Ward (4.66) pode ser escrita no espaço dos momentos da seguinte forma:

$$iq^\mu V_\mu(q, p', p) = e\xi \Delta_{gh}^F(q) \{S'_F(p' - q) - S'_F(p + q)\} . \quad (4.68)$$

onde  $p' = p + q$ . Então, usando (4.62) a equação acima pode ser reescrita como

$$q^\mu V_\mu(q, p', p) = -\frac{e\xi}{q^2 - \xi M^2} \{S'_F(p' - q) - S'_F(p + q)\} . \quad (4.69)$$

Para obter a identidade de Ward acima numa forma mais útil, é conveniente introduzir a função de Green amputada para o vértice,  $\Gamma_\mu$ , a qual esta relacionada à  $V_\mu(q, p', p)$  através da expressão

$$V^\mu(k, p', p) = e\mathcal{D}^{\mu\nu}(k)S'_F(p')\Gamma_\nu(p', p)S'_F(p) . \quad (4.70)$$

Então, substituindo (4.70) em (4.69) e usando a identidade de Ward (4.63), temos

$$q_\mu\Gamma^\mu(p', p) = S'_F(p+q)^{-1} - S'_F(p)^{-1} . \quad (4.71)$$

Mas, a função de Green amputada pode ser escrita como  $\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu + \Lambda^\mu(p', p)$ , onde a função de vértice  $\Lambda_\mu$  representa as correções radiativas. Logo, usando a expressão explícita para o propagador fermiônico completo, temos

$$q_\mu\hat{\Lambda}^\mu(p', p) = \hat{\Sigma}(p+q) - \hat{\Sigma}(p) , \quad (4.72)$$

e, no limite de momento transferido nulo ( $q_\mu \rightarrow 0$ ), obtemos a relação

$$\hat{\Lambda}^\mu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} \hat{\Sigma}(p) . \quad (4.73)$$

Ao derivarmos a identidade de Ward acima notamos a vantagem do *gauge*  $R_\xi$ , pois é crucial neste procedimento que os campos fantasmas tenham a mesma massa que  $A_\mu$  e  $\theta$ . A razão para isto, do mesmo modo que em QED massiva [38], é que a soma dos termos de massa destes três campos é invariante BRST (a menos de um termo de superfície).

Usando (4.73) e a expressão explícita para a auto-energia do férmion, equação (4.50), obtemos a função de vértice para o MTG no limite de momento transferido nulo:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}^\mu(p, p) = & C_1\gamma^\mu + 2C_2p^\mu + \frac{e^2M^{-2}}{16\pi\sqrt{p^2}} \left\{ \gamma^\mu \left[ \left( (p^2 + m^2) \left( 1 + \frac{m^2 - \xi M^2}{p^2} \right) - 4m^2 \right) \right. \right. \\ & \times \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{p^2}{a^2}}}{1 + \sqrt{\frac{p^2}{a^2}}} \right| - 2(2m^2 + \xi M^2) \sqrt{\frac{p^2}{a^2}} + 2m^2 \frac{(m^2 - \xi M^2)}{\sqrt{p^2 a^2}} \left( 1 + \frac{p^2}{3a^2} \right) \Big] \\ & + p^\mu \left[ p \left( \left( 1 + \frac{3m^2}{p^2} \right) \left( 1 - \frac{m^2 - \xi M^2}{p^2} \right) \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{p^2}{a^2}}}{1 + \sqrt{\frac{p^2}{a^2}}} \right| + \frac{2}{p^2 - a^2} \sqrt{\frac{a^2}{p^2}} \right. \right. \\ & \times \left. \left( (p^2 + m^2) \left( 1 + \frac{m^2 - \xi M^2}{p^2} \right) - 4m^2 \right) - \frac{4m^2}{\sqrt{a^2 p^2}} \frac{(m^2 - \xi M^2)}{p^2} \right) \\ & \left. \left. + \frac{2m\xi M^2}{\sqrt{a^2 p^2}} \left( \frac{4p^2}{3a^2} + \frac{2a^2}{p^2 - a^2} - \sqrt{\frac{a^2}{p^2}} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{p^2}{a^2}}}{1 + \sqrt{\frac{p^2}{a^2}}} \right| \right) \right] \right\} \quad (4.74) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{e^2 M^{-2}}{16\pi\sqrt{p^2}} i\pi\Theta(p^2 - a^2) \left\{ \gamma_\mu \left[ (p^2 + m^2) \left( 1 + \frac{m^2 - \xi M^2}{p^2} \right) - 4m^2 \right] \right. \\
& + p_\mu \left[ -\frac{2m\xi M^2}{p^2} + \not{p} \left( 1 + \frac{3m^2}{p^2} \right) \left( 1 - \frac{m^2 - \xi M^2}{p^2} \right) \right] \left. \right\} \\
& - \frac{ie^2}{4M^2\sqrt{p^2}} p_\mu \Theta(-p_0)\delta(p^2 - a^2) \\
& \times \left\{ 2m\xi M^2 + \not{p} \left[ (p^2 + m^2) \left( 1 + \frac{m^2 - \xi M^2}{p^2} \right) - 4m^2 \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Esta expressão pode ser simplificada notando que ela aparece entre os espinores de Dirac  $\bar{u}(\vec{p})$  e  $u(\vec{p})$ , que satisfazem as equações

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\vec{p})(\not{p} - m) &= 0 ; \\
(\not{p} - m)u(\vec{p}) &= 0 .
\end{aligned}$$

Então, podemos obter a função de vértice na camada de massa. Para isto, é importante que consideremos um *gauge* geral  $\xi \neq 0$ , de modo que a auto-energia (e, conseqüentemente, a expressão (4.74)) não tenha divergências no infravermelho. Deste modo, os dois últimos termos em (4.74) não contribuem e obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{\Lambda}^\mu(p, p)|_{p^2=m^2} &= C_1\gamma^\mu + 2C_2p^\mu + \frac{e^2}{8\pi m M^2} \left[ \gamma^\mu \left( -\xi M^2 \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{m^2}{a^2}}}{1 + \sqrt{\frac{m^2}{a^2}}} \right| \right. \right. \\
& - (2m^2 + \xi M^2)\sqrt{\frac{m^2}{a^2}} + (m^2 - \xi M^2) \left( 1 + \frac{m^2}{3a^2} \right) \sqrt{\frac{m^2}{a^2}} \left. \right) \\
& + p^\mu \left( \frac{\xi M^2}{m} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{m^2}{a^2}}}{1 + \sqrt{\frac{m^2}{a^2}}} \right| + \frac{4m^2\xi M^2}{3a^3} - \frac{2(m^2 - \xi M^2)}{a} \right) \left. \right] . \quad (4.75)
\end{aligned}$$

De fato, neste *gauge* geral  $\xi \neq 0$  a função de vértice não sofre de dificuldades no infravermelho porque o bóson de *gauge* é massivo, o que também assegura a existência do limite adiabático para o correspondente elemento de matriz  $S$ .

Neste ponto, podemos retomar a questão das constantes indeterminadas que aparecem na solução para as distribuições de auto-energia e vértice. Ainda que tenhamos obtido a função de vértice pela identidade de Ward, é fácil notar que se a tivéssemos construído pelo procedimento usual de BEG teríamos obtido como solução geral

$$\tilde{\Lambda}^\mu(p, p) = \hat{\Lambda}^\mu(p, p) + C\gamma^\mu + C'p^\mu \quad (4.76)$$

onde  $\hat{\Lambda}^\mu$  indica a solução obtida usando a solução central para efetuar a bipartição. As constantes finitas  $C$  e  $C'$  são uma consequência da ordem singular  $\omega_v = 1$  do vértice, de acordo com (2.47). Então, devido a identidade de Ward, temos

$$C = C_1, \quad C' = 2C_2. \quad (4.77)$$

Deste modo, as mesmas constantes estariam presentes na solução final.

Aqui, ao contrário do que ocorre no cálculo do tensor de polarização do vácuo, não temos como lançar mão de considerações de simetria para eliminar as constantes indeterminadas  $C_1$  e  $C_2$ . No entanto, pode-se impor uma condição de normalização sobre a função de vértice. Por exemplo, poderíamos impor uma condição preservando a solução central em  $p = 0$ , isto é,  $\hat{\Lambda}^\mu(0, 0) = 0$ . Devido a identidade de Ward (4.73), esta condição é equivalente a

$$\left. \frac{\partial}{\partial p_\mu} \hat{\Sigma}(p) \right|_{p=0} = 0, \quad (4.78)$$

e fixa  $C_1 = 0$ , mas a constante  $C_2$  permanece indeterminada.

O fato importante aqui é que a impossibilidade de determinar todas as constantes, usando condições físicas outras que causalidade, é uma consequência da não renormalizabilidade do modelo. Assim, a constante indeterminada  $C_2$  deve ser considerada como um parâmetro livre do modelo efetivo.

Para finalizar, vamos considerar o limite  $\xi \rightarrow \infty$ , para fazer a conexão com o modelo de Thirring original. Este limite deve ser feito com  $M$  finito, isto é, tomamos  $m^2 \ll \xi M^2$  e  $p^2 \ll \xi M^2$ . Então, temos

$$\Sigma(p)|_{\xi \rightarrow \infty} \longrightarrow C_2(p^2 - m^2), \quad (4.79)$$

$$\Lambda^\mu(p, p)|_{\xi \rightarrow \infty} \longrightarrow -\frac{2C_2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} p^\mu. \quad (4.80)$$

Devemos notar que, no limite do *gauge* unitário, o gráfico de auto-energia do férmion corresponde ao gráfico “girino” e a correção de vértice corresponde ao diagrama “peixe” com momento entrando  $q = 0$ . Nos tratamentos usuais de teorias de campos estes diagramas são dados por constantes divergentes. Então, desde que no método causal nunca temos divergências, é razoável esperar que o resultado deste limite dependa somente das constantes indeterminadas.

## Considerações Finais

Neste trabalho investigamos a estrutura perturbativa do modelo de Thirring como uma teoria de *gauge* (MTG), em (2+1) dimensões, até segunda ordem. Isto foi feito usando o método causal de Bogoliubov, Epstein e Glaser (BEG) para a construção da matriz  $S$  de forma indutiva. A razão para empregarmos este método no tratamento do MTG é que ele permite o cálculo de todas as quantidades de modo não ambíguo, pois nunca surgem divergências ultravioleta, proporcionando um método alternativo para o tratamento de teorias não renormalizáveis.

Assim, usando o método causal, demonstramos a não-renormalizabilidade do MTG e obtivemos uma expressão explícita para a ordem singular máxima  $\omega$  de cada diagrama do modelo, equação (2.47). Uma vez que a ordem singular está relacionada com o grau do polinômio nos momentos que surge na solução geral de um diagrama (para  $\omega \geq 0$ ), a expressão obtida nos permitiu inferir que o número de constantes indeterminadas aumenta indefinidamente com a ordem na teoria de perturbação para um modelo não renormalizável.

Posteriormente, calculamos o tensor de polarização do vácuo e verificamos que, apesar da não-renormalizabilidade do modelo, foi possível determinar todas as constantes arbitrárias aparecendo em sua solução geral. Isto não é surpreendente se notarmos que o tensor de polarização tem a mesma forma para o MTG e para a QED<sub>3</sub>, esta última uma teoria super-renormalizável.

Ao calcularmos o tensor de polarização do vácuo para o MTG verificamos que ocorre a indução de um termo de Chern-Simons. Em tratamentos usuais de teorias de campos o coeficiente do termo de Chern-Simons é, geralmente, dependente do esquema de regularização usado para tornar a teoria finita. A vantagem de utilizarmos o método causal é que sempre lidamos com distribuições bem definidas, de modo que tais ambigüidades não existem. O caráter singular do tensor de polarização somente se reflete nas constantes arbitrárias aparecendo na solução final e que não podem ser determinadas por causalidade, mas que são determinadas de modo a preservar as simetrias do modelo. Assim, o método causal nos permite determinar univocamente a massa topológica, dada por (3.44). Na seqüência vimos que este é o valor exato da massa topológica, de acordo com o teorema de Coleman-Hill,.

Consideramos, também, o propagador do bóson de *gauge* do MTG corrigido pelas inserções próprias de polarização do vácuo e verificamos que estas inserções geraram um pólo no propagador. Este fato indica que o bóson de *gauge*, que em nível árvore é um campo auxiliar, torna-se dinâmico devido às correções radiativas. Interpretando este bóson como um estado ligado de férmion e anti-férmion, obtivemos a massa deste estado ligado nos casos extremos de acoplamento muito fraco e muito forte, os valores obtidos ( $M_{gb} = 2m$  e  $M_{gb} = 0$ , respectivamente) estando de acordo com o esperado.

Uma característica do método causal de BEG é que os diagramas de vácuo não podem ser omitidos e, geralmente, apresentam as divergências mais severas na região do infravermelho. Assim, é importante verificar se a teoria sob consideração possui limite adiabático bem definido, pois caso contrário o vácuo é instável e a teoria não faz sentido. No capítulo 3 demonstramos que para o MTG o limite adiabático é bem definido.

Adicionalmente, calculamos a auto-energia do férmion e derivamos uma identidade de Ward relacionando a auto-energia à função de vértice. Então, verificamos que, em um *gauge* geral  $\xi \neq 0$ , é possível obter a função de vértice na camada de massa (para momento transferido nulo). Aqui, vimos que não foi possível determinar todas as constantes aparecendo na solução geral da auto-energia e do vértice.

As constantes que surgem no método causal, e que não são determinadas por considerações de simetria, devem ser incorporadas como parâmetros livres do modelo efetivo analisado. Uma possibilidade é reparametrizar tais constantes usando uma escala de massa  $\Lambda$  característica da teoria (por exemplo, uma constante adimensional poderia ser parametrizada por  $c = \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}$ , onde  $m$  é uma massa da teoria). Temos, então, uma situação parecida com a usual. As diferenças importantes são: *i*) no método causal a introdução de tal escala  $\Lambda$  não acarreta as dificuldades usuais; *ii*) o significado é diferente, isto é,  $\Lambda$  é uma escala que caracteriza a teoria e não um *cut-off*.

O tratamento usual de modelos efetivos como o considerado aqui possui o inconveniente de ser, em geral, fortemente dependente do esquema de regularização usado e até mesmo do estágio em que a regularização é aplicada (ver referências [1, 2] para o modelo de Nambu e Jona-Lasinio). Esta é uma situação claramente insatisfatória, pois com um mesmo modelo podemos ter resultados contraditórios ou ainda resultados não físicos (por exemplo, limiares complexos não físicos associados ao *cut-off*). Conforme vimos, o método causal fornece uma alternativa ao tratamento usual que não sofre das dificuldades acima. Neste sentido, seria interessante considerar a aplicação deste método a um modelo com fenomenologia associada, tal como o modelo de Nambu e Jona-Lasinio.

Um problema importante, dando continuidade a este trabalho, é considerar a extensão do método causal para temperatura finita, onde persistem problemas relacionados à regularização e, além disto, ainda há muito a ser considerado à respeito de modelos que induzem termos de Chern-Simons [39]. Outra possibilidade é a adaptação do método causal ao contexto da expansão  $1/N$ , onde se sabe que o modelo de Thirring é renormalizável [9].

## Apêndice A

### Notação

#### A.1 (1+1) dimensões

Em (1+1) dimensões adotamos a métrica

$$g^{00} = -g^{11} = 1 . \quad (\text{A.1})$$

A representação adotada para as matrizes  $\gamma$  é dada por

$$\gamma^0 = \sigma_1 ; \quad \gamma^1 = -i\sigma^2 ; \quad \gamma^5 = \gamma_5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma^3 , \quad (\text{A.2})$$

onde  $\sigma^i$  indica as matrizes de Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.3})$$

A álgebra satisfeita pelas matrizes  $\gamma$  é

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} ; \\ [\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= -2\varepsilon^{\mu\nu}\gamma^5 ; \\ \gamma^\mu\gamma^5 &= \varepsilon^{\mu\nu}\gamma_\nu , \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde  $\varepsilon^{\mu\nu}$  é o tensor anti-simétrico de Levi-Civita

$$\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu} ; \quad \varepsilon_{01} = -\varepsilon^{01} = 1 , \quad (\text{A.5})$$

que satisfaz as relações

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\beta} &= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} ; \\ \varepsilon_{\mu\alpha}\varepsilon^{\alpha\nu} &= g_\mu^\nu . \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

## A.2 (2+1) dimensões

A álgebra para as matrizes  $\gamma$  em (2+1) dimensões é realizada usando as matrizes de Pauli

$$\gamma^0 = \sigma^3, \quad \gamma^1 = i\sigma^1, \quad \gamma^2 = i\sigma^2. \quad (\text{A.7})$$

As matrizes  $\gamma$  satisfazem a seguinte álgebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\varepsilon^{\mu\nu\delta} \gamma_\delta, \quad (\text{A.8})$$

onde o tensor métrico é dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

e  $\varepsilon^{\mu\nu\delta}$  é o tensor totalmente anti-simétrico de Levi-Civita, satisfazendo

$$\begin{aligned} \varepsilon^{012} &= 1; \\ \varepsilon_{\mu\nu\alpha} \varepsilon^{\gamma\delta\alpha} &= g_\mu^\gamma g_\nu^\delta - g_\mu^\delta g_\nu^\gamma; \\ \varepsilon_{\mu\nu\alpha} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} &= 3!. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Algumas identidades de traço úteis são:

$$\begin{aligned} \text{Tr } \gamma^\mu &= 0; \\ \text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu &= 2g^{\mu\nu}; \\ \text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\delta &= -2i\varepsilon^{\mu\nu\delta}; \\ \text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma &= 2(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

## Apêndice B

### Funções Singulares

Na construção das distribuições causais  $D_n$ , equação (2.16), é necessário usar as funções singulares  $S^{(\pm)}(x)$  e  $D_{\mu\nu}^{(\pm)}(x)$ . Neste apêndice vamos considerar a forma explícita destas distribuições em  $(2+1)$  dimensões e algumas de suas propriedades.

As funções  $S^{(\pm)}$  são as funções de anticomutação fermiônicas em instantes diferentes:

$$\frac{1}{i}S_{ab}^{(+)}(x_1 - x_2) = \{\psi_a^{(-)}(x_1), \bar{\psi}_b^{(+)}(x_2)\}, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{1}{i}S_{ba}^{(-)}(x_2 - x_1) = \{\bar{\psi}_a^{(-)}(x_1), \psi_b^{(+)}(x_2)\}. \quad (\text{B.2})$$

Expandindo o campo fermiônico em componentes de Fourier e calculando os anticomutadores acima obtemos a expressão explícita para  $S^{(\pm)}(x)$ , dada pela transformada de Fourier distribucional [25, 40]

$$S^{(\pm)}(x) = \pm \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3k (\not{k} + m) \Theta(\pm k_0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ik \cdot x}, \quad (\text{B.3})$$

e que pode ser escrita como

$$S^{(\pm)}(x) = (i\not{\partial} + m)D^{(\pm)}(x), \quad (\text{B.4})$$

onde  $D^{(\pm)}(x)$  indica as distribuições escalares

$$D^{(\pm)}(x) = \pm \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3k \Theta(\pm k_0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ik \cdot x}. \quad (\text{B.5})$$

Além de  $S^{(\pm)}(x)$ , outra distribuição que desempenha um papel importante no método causal é o anticomutador total do campo de Dirac  $S(x)$ , dado pela soma de  $S^{(+)}(x)$  e  $S^{(-)}(x)$ :

$$\begin{aligned} S(x) &\stackrel{\text{def}}{=} S^{(+)}(x) + S^{(-)}(x) \\ &= (i\not{\partial} + m)D(x), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

onde  $D(x)$  é a distribuição de Pauli-Jordan 3-dimensional (com massa  $m$ )

$$\begin{aligned} D(x) &\stackrel{\text{def}}{=} D^{(+)}(x) + D^{(-)}(x) \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3k \operatorname{sgn}(k_0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ik \cdot x} . \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

A distribuição de Pauli-Jordan tem suporte causal

$$\operatorname{Supp} D = \{x \in \mathbb{M} \mid x^2 \geq 0\} , \quad (\text{B.8})$$

isto é,  $D(x)$  se anula para  $x$  do tipo espaço. Desde que  $S(x)$  pode ser escrita em termos da distribuição de Pauli-Jordan, de acordo com (B.6), temos que  $S(x)$  também tem suporte causal.

Devido às suas propriedades de suporte, a distribuição de Pauli-Jordan pode ser decomposta em distribuições retardada e avançada segundo [24]

$$D(x) = D^{\text{ret}}(x) - D^{\text{av}}(x) , \quad (\text{B.9})$$

onde [40]

$$D^{\text{ret}}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik \cdot x}}{m^2 - k^2 - ik_0 0} ; \quad (\text{B.10})$$

$$D^{\text{av}}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik \cdot x}}{m^2 - k^2 + ik_0 0} . \quad (\text{B.11})$$

Do mesmo modo, temos as distribuições retardada e avançada para o campo espinorial

$$S^{\text{ret}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (i\cancel{\partial} + m) D^{\text{ret}}(x) ; \quad (\text{B.12})$$

$$S^{\text{av}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (i\cancel{\partial} + m) D^{\text{av}}(x) .$$

Os propagadores de Feynman para o campo escalar e espinorial podem ser escritos em termos das distribuições consideradas acima como

$$D_F(x) \stackrel{\text{def}}{=} D^{\text{ret}}(x) - D^{(-)}(x) = D^{\text{av}}(x) + D^{(+)}(x) ; \quad (\text{B.13})$$

$$S_F(x) \stackrel{\text{def}}{=} S^{(-)}(x) - S^{\text{ret}}(x) = -S^{\text{av}}(x) - S^{(+)}(x) ,$$

onde o sinal global na expressão para  $S_F$ , em comparação com  $D_F$ , é para estar de acordo com as convenções geralmente adotadas. A forma explícita dos propagadores

de Feynman é

$$D_F(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m^2 - k^2 - i0} e^{-ik \cdot x}; \quad (\text{B.14})$$

$$S_F(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i0} e^{-ik \cdot x}. \quad (\text{B.15})$$

A determinação das funções singulares  $D_{\mu\nu}^{(\pm)}$ , associadas ao bóson de *gauge* do MTG, não pode ser feita diretamente calculando os comutadores, pois os campos  $A_\mu$  são campos compostos. Assim, o procedimento que seguiremos aqui é o inverso daquele descrito acima, isto é, partiremos das funções  $D_{\mu\nu}^F$ ,  $D_{\mu\nu}^{\text{ret}}$  e  $D_{\mu\nu}^{\text{av}}$  e, usando as equações análogas a (B.13), obteremos  $D_{\mu\nu}^{(\pm)}$ .

Rigorosamente, não podemos falar de propagador do campo  $A_\mu$ , pois este não satisfaz uma equação de onda. No entanto, podemos atribuir um “propagador” formal ao campo  $A_\mu$  pela inversão do correspondente termo quadrático na Lagrangiana. Assim, da Lagrangiana do MTG, equação (1.40), temos que o inverso do termo quadrático em  $A_\mu$  é dado por

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \tilde{D}_{\mu\nu}(k) e^{-ik \cdot x},$$

com

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{M^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi M^2} \right).$$

Contudo, deve-se notar que  $\tilde{D}_{\mu\nu}(x)$  não está definida enquanto não determinarmos o contorno que consideramos para tratar os pólos do segundo termo na expressão acima. Aqui, vamos considerar três possíveis modos de contornar estes pólos, correspondentes aos propagadores de Feynman, retardado e avançado usuais:

$$D_{\mu\nu}^F(k) = \frac{1}{M^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi M^2 + i0} \right), \quad (\text{B.16})$$

e

$$D_{\mu\nu}^{\text{ret}}(k) = \frac{1}{M^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi M^2 + i0k_0} \right); \quad (\text{B.17})$$

$$D_{\mu\nu}^{\text{av}}(k) = \frac{1}{M^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi M^2 - i0k_0} \right). \quad (\text{B.18})$$

Então, podemos obter a distribuição

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} D_{\mu\nu}^{\text{ret}}(x) - D_{\mu\nu}^{\text{av}}(x) \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3k \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \delta(k^2 - \xi M^2) \text{sgn}(k_0) e^{-ik \cdot x}, \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

que tem suporte causal, pois pode ser escrita em termos da função de Pauli-Jordan em (2+1) dimensões:

$$D_{\mu\nu} = -\frac{\partial_\mu \partial_\nu}{M^2} D_{\sqrt{\xi}M}(x) , \quad (\text{B.20})$$

onde o índice  $\sqrt{\xi}M$  em  $D(x)$  indica a massa associada a esta distribuição.

Tendo as distribuições (B.16)-(B.18), podemos usar as definições análogas à (B.13) para obter  $D^{(\pm)}(x)$ :

$$D_{\mu\nu}^{(+)}(x) = D_{\mu\nu}^F(x) - D_{\mu\nu}^{\text{av}}(x) ; \quad (\text{B.21})$$

$$D_{\mu\nu}^{(-)}(x) = D_{\mu\nu}^{\text{ret}}(x) - D_{\mu\nu}^F(x) ,$$

de onde temos que as funções singulares  $D_{\mu\nu}^{(\pm)}$  para o bóson de *gauge* do MTG são dadas por

$$D_{\mu\nu}^{(\pm)}(x) = \pm \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3k \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \delta(k^2 - \xi M^2) \theta(\pm k_0) e^{-ik \cdot x} . \quad (\text{B.22})$$

## Apêndice C

### O Teorema de Coleman-Hill

O teorema de Coleman-Hill [18] diz que a correção de um *loop* fermiônico ao propagador do bóson de *gauge* dá a contribuição exata para o termo de massa topológica. Tendo em vista a importância deste teorema para o problema que estamos tratando, neste apêndice vamos reproduzir o argumento de Coleman-Hill no contexto da teoria de distribuições.

Conforme vimos, em duas dimensões espaciais considerações de invariância de Lorentz e invariância de *gauge* admitem dois fatores de forma para o tensor de polarização do vácuo

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = (g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu) \Pi^{(1)}(k^2) + i\varepsilon^{\mu\nu\delta} k_\delta \Pi^{(2)}(k^2), \quad (\text{C.1})$$

onde redefinimos a expressão para o  $\Pi^{\mu\nu}(k)$  de forma ligeiramente diferente daquela usada no texto.

A massa topológica é dada por  $\Pi^{(2)}(0)$ , o coeficiente do termo de ordem  $k$  na expansão em série de potências do tensor de polarização. Assim, para demonstrar que as correções radiativas de ordem superior em teoria de perturbação não contribuem para a massa topológica basta demonstrar que estas correções são de ordem  $\mathcal{O}(k^2)$ .

Seguindo [18], vamos considerar um “vértice efetivo” de  $n$  bósons de *gauge*, dado pela soma de todos os gráficos consistindo de um único *loop* fermiônico com  $n$  bósons externos afixados. Associado a este vértice temos uma distribuição numérica regular  $\hat{t}_{\mu_1 \dots \mu_n}(k_1, \dots, k_n)$ , uma função generalizada dos  $n-1$  momentos independentes. Por convenção, vamos considerar os primeiros  $n-1$  momentos como independentes e  $k_n$  fixo pela conservação de momento. Iremos considerar a distribuição  $\hat{t}_{\mu_1 \dots \mu_n}$  no espaço Euclidiano, onde ela é uma função generalizada analítica dos momentos. Assim, a invariância de *gauge* exige

$$k_1^{\mu_1} \hat{t}_{\mu_1 \dots \mu_n}(k_1, \dots, k_n) = 0. \quad (\text{C.2})$$

Diferenciando com respeito a  $k_1^\nu$  e tomando  $k_1^\nu = 0$ , obtemos

$$\hat{t}_{\mu_1 \dots \mu_n}(0, k_2, \dots, k_n) = 0, \quad (\text{C.3})$$

ou, expandindo em série de Taylor (lembre que  $\hat{t}_{\mu_1 \dots \mu_n}$  é uma distribuição regular)

$$\hat{t}_{\mu_1 \dots \mu_n}(k_1, \dots, k_n) = \mathcal{O}(k_1). \quad (\text{C.4})$$

Do mesmo modo,  $\hat{t}_{\mu_1 \dots \mu_n}$  é também  $\mathcal{O}(k_2)$ . Logo, desde que para  $n > 2$  os momentos  $k_1$  e  $k_2$  são variáveis independentes, temos que

$$\hat{t}_{\mu_1 \dots \mu_n}(k_1, \dots, k_n) = \mathcal{O}(k_1 k_2), \quad n > 2. \quad (\text{C.5})$$

Isto mostra que  $\hat{t}_{\mu_1 \dots \mu_n}$  deve ser, pelo menos,  $\mathcal{O}(k_1 \dots k_{n-1})$ . Contudo, fazendo uso da estrutura de Lorentz, verifica-se que  $\hat{t}_{\mu_1 \dots \mu_n}$  é de ordem  $\mathcal{O}(k_1 \dots k_n)$  para  $n > 2$  (ver o apêndice da ref. [18]).

Então, a partir dos “vértices efetivos” de  $n$  bósons, podemos construir um gráfico de auto-energia do bóson simplesmente contraindo linhas bosônicas (isto implica em contrair as distribuições  $\hat{t}_{\mu_1 \dots \mu_n}$  com a função singular  $D_{\mu\nu}^{(+)}(k)$ , equação (B.22)). Devemos contrair todas as linhas bosônicas dos “vértices efetivos” exceto duas, que são as linhas externas do gráfico de auto-energia e carregam os momentos  $k$  e  $-k$ . Com este procedimento temos as seguintes possibilidades:

- i) as duas linhas externas estão afixadas a *loops* distintos;
- ii) as duas linhas externas estão afixadas ao mesmo *loop*, mas este tem mais que duas linhas bosônicas;
- iii) as duas linhas externas estão afixadas ao mesmo *loop* e este tem somente duas linhas bosônicas;

No entanto, no caso (i) o gráfico total é  $\mathcal{O}(k^2)$  devido à (C.4) e, portanto, não pode contribuir para a massa topológica, pois esta é dada pelo coeficiente de um termo de ordem  $k$ . Do mesmo modo, no caso (ii) o gráfico é  $\mathcal{O}(k^2)$  devido à (C.5) e também não pode contribuir para  $\Pi(0)$ . Somente no caso (iii) podemos ter uma contribuição não nula de ordem  $k$ , mas esta é justamente a contribuição de um *loop* fermiônico em segunda ordem na teoria de perturbação. Assim, as correções radiativas de ordem mais alta em teoria de perturbação não contribuem para a massa topológica.

Uma condição para que o teorema de Coleman-Hill seja satisfeito é que não existam partículas de massa nula na teoria, pois caso contrário as divergências no infravermelho invalidam a prova do teorema [41]. Devemos observar que, em um *gauge* arbitrário  $\xi \neq 0$ , o bóson *gauge* do MTG é massivo e o modelo não padece de dificuldades devido às divergências no infravermelho. Deste modo, o teorema de Coleman-Hill se aplica ao MTG em um *gauge* geral.

Como observação final, devemos notar que a invariância de *gauge* exerce um papel central na derivação deste teorema e, novamente, podemos perceber a importância da construção considerada no capítulo 1, que permite considerar o modelo de Thirring como sendo uma teoria de *gauge*.

## Referências

- [1] N. A. Bardeen, C. T. Hill e M. Lindner, Phys. Rev. D **41**, 1647 (1990);  
C. T. Hill, Phys. Lett. B **266**, 419 (1991).
- [2] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961);  
Para uma revisão, ver S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64**, 649 (1992).
- [3] M. Gomes, R. S. Mendes, R. F. Ribeiro e A. J. da Silva, Phys. Rev. D **43**, 3516 (1991).
- [4] D. K. Hong e S. H. Park, Phys. Rev. D **49**, 5507 (1994).
- [5] S. Hands, Phys. Rev. D **51**, 5816 (1995).
- [6] W. E. Thirring, Ann. Phys. **3**, 91 (1958).
- [7] B. Klaiber, em *Lectures in Theoretical Physics*, eds. A. Barut e W. Brittin (Gordon and Breach, New York, 1968).
- [8] S. Coleman, Phys. Rev. D **11**, 2088 (1975).
- [9] N. V Krasnikov e B. Kyatkin, Mod. Phys. Lett. A **6**, 1315 (1991).
- [10] T. Itoh, Y. Kim, M. Sugiura e K. Yamawaki, Prog. Theor. Phys. **93**, 417 (1995).
- [11] K.-I. Kondo, Nucl. Phys. B **450**, 251 (1995).
- [12] Y. Fujii, Prog. Theor. Phys. **21**, 232 (1959).
- [13] M. Sugiura, Prog. Theor. Phys. **97**, 311 (1997).
- [14] K.-I. Kondo, preprint hep-th/9603151.
- [15] S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, Ann. Phys. **140**, 372 (1982).

- [16] N. N. Bogoliubov e D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (Interscience, New York, 1959).
- [17] H. Epstein e V. Glaser, *Ann. Inst. H. Poincaré A* **19**, 211 (1973).
- [18] S. Coleman e B. Hill, *Phys. Lett. B* **159**, 184 (1985).
- [19] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla e K. D. Rothe, *Non-perturbative Methods in 2 Dimensional Quantum Field Theory* (World Scientific, 1991).
- [20] I. M. Gel'fand e G. E. Shilov, *Generalized Functions*, Vol. 1 (Academic Press, New York, 1964).
- [21] S. Mandelstam, *Phys. Rev. D* **11**, 3026 (1975);  
C. M. Naón, *Phys. Rev. D* **31**, 2035 (1985).
- [22] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. II (Cambridge University Press, 1996).
- [23] F. Strocchi, *General Properties of Quantum Field Theory - Lecture Notes in Physics*, vol. 51 (World Scientific, Singapore, 1993).
- [24] G. Scharf, *Finite Quantum Electrodynamics: the Causal Approach*, 2nd ed. (Springer, Berlin, 1995).
- [25] G. Scharf, W. F. Wreszinski, B. M. Pimentel e J. L. Tomazelli, *Ann. Phys.* **231**, 185 (1994).
- [26] M. Dütsch, T. Hurth, F. Krahe e G. Scharf, *Nuovo Cimento A* **106**, 1029 (1993); **107**, 375 (1994); **108**, 679 e 737 (1995).
- [27] A. Aste, *Ann. Phys.* **257**, 158 (1997).
- [28] L. A. Manzoni, B. M. Pimentel e J. L. Tomazelli, *Eur. Phys. J. C* **8**, 353 (1999).
- [29] A. Aste, G. Scharf e U. Walther, *Nuovo Cimento A* **111**, 323 (1998).
- [30] L. A. Manzoni, B. M. Pimentel e J. L. Tomazelli, *Mod. Phys. Lett. A* **14**, 177 (1999).
- [31] L. A. Manzoni, B. M. Pimentel e J. L. Tomazelli, submetido para publicação.
- [32] B. M. Pimentel e J. L. Tomazelli, *Prog. Theor. Phys.* **95**, 1217 (1996).

- [33] B. M. Pimentel, A. T. Suzuki e J. L. Tomazelli, *Int. J. Mod. Phys. A* **7**, 5307 (1992);
- [34] J. M. Jauch e F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*, 2<sup>a</sup> ed. (Springer, Berlin, 1980).
- [35] G. Scharf, *Nuovo Cimento A* **109**, 1605 (1996).
- [36] R. Jackiw, hep-th/9903044.
- [37] T.-P. Cheng e L.-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* (Oxford University Press, New York, 1984).
- [38] P. Ramond, *Field Theory: a Modern Primer*, 2nd ed. (Addison Wesley, 1990).
- [39] G. V. Dunne, hep-th/9902115.
- [40] J. L. Tomazelli, Tese de Doutorado, IFT-UNESP (1996).
- [41] G. W. Semenoff, P. Sodano, e Y. S. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 715 (1988);  
W. Chen, *Phys. Lett. B* **251**, 415 (1991);  
V. P. Spiridonov e F. V. Tkachov, *Phys. Lett. B* **260**, 109 (1991).

