ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦЕВОГО ПУЧКА В БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБКЕ С ПРОВОДЯЩИМИ СТЕНКАМИ*

И. Л. КОРЕНЕВ, Л. А. ЮДИН

Радиотехнический институт АН СССР

Из всех методов коллективного ускорения в настоящее время наиболее интенсивно изучается возможность ускорения электронных колец. Одна из возникающих при этом проблем—устойчивость колец к различного рода возмущениям. Так в работе [1] показано, что наличие проводящего экрана уменьшает инкременты неустойчивости типа отрицательной массы. В работе [2] рассмотрены поперечные колебания кольца и показано, что наличие экрана полностью стабилизирует эти колебания. В обеих работах в качестве модели принят бесконечно тонкий цилиндрический слой электронов, окруженный идеально-проводящим цилиндрическим экраном. С другой стороны для ускорителей подробно изучен вопрос о поперечных неустойчивостях пучка, связанных с конечной проводимостью стенок камеры. Используя метод, развитый в связи с этим в работах [3—5], можно рассмотреть влияние конечной пповодимости стенок на поперечную устойчивость кольцевого пучка в цилиндрической трубе. Однако нахождение полей возмущения в такой геометрии наталкивается на большие математические трудности. Поэтому в данной работе рассматривается «выпрямленный» пучок вблизи плоской стенки. Такая модель справедлива, если $\frac{a}{R}\ln\frac{8R}{a} \ll 1$ и $\frac{b}{R} \ll 1$, где R—радиус кольца, a—радиус сечения кольца, R+в—радиус трубы. Таким образом, мы пренебрегаем всеми эффектами, связанными с кривизной оси кольца, замкнутость которого учитывается в том, что все величины периодически зависят от z с периодом $2\pi R$. Кроме того, будем считать выполненным условие $\lambda e^2/m \cdot \gamma^3 a^2 \ll \omega_0^2$, где λe— заряд на единицу длины

---

* Доклад не зачитывался.

пучка, e и m_0 — заряд и масса покоя электрона, $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$, $\beta=\frac{v}{c}$ — продольная скорость частиц, ω_0 — частота поперечных колебаний частиц в пучке, обусловленная внешними полями.

Рассмотрим равномерно заряженный пучок радиуса a, находящийся на расстоянии b от бесконечной проводящей плоскости. Ось z направим вдоль оси пучка, ось x — перепендикулярно плоскости, r и φ — полярные координаты, $\vec{r}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y$ — радиус-вектор в плоскости xy. Тогда плотность заряда в пучке

$$\rho_0=(\lambda e/\pi a^2)H(a-r), \tag{1}$$

где $H(x)=1$ при $x>0$ и $H(x)=0$ при $x<0$. Будем считать, что пучок движется с постоянной скоростью v вдоль оси z, так что плотность тока $\vec{j}_0=\rho_0\vec{v}$. Кроме того предполагается, что произвольное малое возмущение формы сечения пучка может быть описано возмущением плотности заряда на его поверхности:

$$\rho=\rho_0+\rho_1=\rho_0+(\lambda e/\pi a^2)\delta(a-r)\xi(z,\varphi,t), \tag{2}$$

где $\rho_1\ll\rho_0$, $\xi\ll a$. Такая модель, вообще говоря, неверно описывает собственное поле возмущенного пучка вблизи его границы. Что же касается отраженных полей, которые интересуют нас в первую очередь, то их значения могут быть найдены с точностью до $(\xi/a)^2$.

Разложим ξ в ряд фурье по φ*, полагая $\xi\sim e^{i(\varkappa z-\omega t)}$:

$$\rho_1(r,\varphi,z,t)=(\lambda e/\pi a^2)\delta(r-a)e^{i(\varkappa z-\omega t)}\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\cos(n\varphi+\alpha_n). \tag{3}$$

Вектор плотности тока имеет компоненты $j_z=\rho v$ и j_φ, последняя из которых определяется из уравнения непрерывности.

Уравнение поперечного движения частиц с учетом возмущения имеет вид:

$$\ddot{\vec{r}}+\omega_0^2\vec{r}=-\omega_0^2\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\vec{K}_n(x,y), \tag{4}$$

где величины $\vec{K}_n(x,y)$ определяются электромагнитными полями $\vec{E}_n$ и $\vec{B}_n$, связанными с n-й гармоникой возмущения:

$$\xi_n m_0\gamma\omega_0^2\vec{K}_n=e\vec{E}_n+\frac{e}{c}\left[\vec{V}\times\vec{B}_n\right]. \tag{5}$$

Решая уравнения Максвелла в квазистационарном приближении с граничним условием Леонтовича на стенке при $x=b$, найдем

---

* Мы не включаем в сумму член ξ_0 (так называемое монопольное возмущение). Как показано в работе [4], соответствующие этому члену инкременты неустойчивостей весьма малы, в чем нетрудно убедиться и здесь.

$$\omega_0^2\vec{k}_{ц}=\frac{2\nu}{\gamma^3}\left(\frac{c}{a}\right)^2 e^{i(\varkappa z-\omega t)}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left[\delta_{nk}-F_{nk}(\omega)\right]\left(\frac{r}{a}\right)^{\kappa-1}\left[-\vec{e}_x\cos(k\varphi+\alpha_k)+\vec{e}_y\sin(k\varphi+\alpha_\kappa)\right], \quad (6)$$

где

$$F_{nk}(\omega)=\left(\frac{a}{2b}\right)^{n+\kappa}\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}\left[1-(n+k)(1+i)(\beta\gamma)^2\frac{c}{2b}\left(2\pi\sigma\omega\right)^{-1/2}\right],$$

σ— проводимость стенки, $\nu=\lambda e^2/m_0c^2$.

Линеаризуя кинетическое уравнение для функции распределения частиц в пучке

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+v\frac{\partial\psi}{\partial z}+\dot{\vec{r}}\frac{\partial\psi}{\partial\vec{r}}+\omega_0^2\left(-\vec{r}-\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\vec{K}_n\right)\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\vec{r}}}=0, \quad (7)$$

получим

$$\psi=\psi_0+\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\psi_n e^{i(\varkappa z-\omega t)}, \quad (8)$$

где

$$\psi_0=\frac{\lambda e}{(\pi a)^2}f(w)\delta\left[\dot{\vec{r}}^2+\omega_0^2(r^2-a^2)\right]\text{ —}$$

невозмущенная функция распределения, $f(w)$— распределение частиц по продольной энергии с условием нормировки $\int_{-\infty}^{\infty}f(w)dw=1$ ($w=0$ соответствует скорости v). Подставляя найденные ψ_n в условие согласования

$$\rho_1(\vec{r},z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n e^{i(\varkappa z-\omega t)}\iiint\psi_n(\vec{r},\dot{\vec{r}},w)d\dot{x}d\dot{y}dw, \quad (9)$$

приходим к бесконечной системе линейных однородных алгебраических уравнений для коэффициентов ξ_n. Равенство нулю определителя этой системы дает дисперсионное уравнение

$$\mathrm{Det}\|\delta_{nk}+[\delta_{nk}-F_{nk}(\omega)]D_k(\omega)\|=0, \quad (10)$$

где

$$D_k(\omega)=\frac{2\nu}{\omega_0^2\gamma^3}\left(\frac{c}{a}\right)^2\sum_{l=0}^{k}\frac{(k-2l)k-1)!}{2^k l!(k-l)!}\int\frac{f(w)dw}{m\Omega-(k-2l)\omega_0-\omega}, \quad (11)$$

Ω— частота обращения частиц. При выводе (10) использовано условие периодичности по z: $\varkappa=\frac{m\Omega}{v}$ (m—целые положительные числа), а слабо зависящие от w величины вывесееы из-под интеграла.

Исследуем дисперсионное уравнение для моноэнергетического пучка: $f(w)=\delta(w)$. Корни его будем искать в виде:

$$\omega = m\Omega - p\omega_0 + \frac{2\nu}{\gamma^3}\left(\frac{c}{\omega_0 a}\right)^2 \omega_0 \varepsilon_p, \tag{12}$$

где $p=\pm 1$, ± 2, ± 3 и т. д. Ограничиваясь членами первого порядка малости по параметру ν, получим уравнение для ε_p:

$$\mathrm{Det}\|g_{ss'} + (b_s - \varepsilon_p)\delta_{ss'}\| = 0, \tag{13}$$

где

$$b_s = \frac{p(n-1)!}{s!(n-s)!} 2^{-n}, g_{ss'} = b_s F_{nk}(m\Omega - p\omega_0),\ n = |p| + 2s,\ k = |p| + 2s!.$$

Считая $(a/2b)^2 \ll 1$, при решении уравнения (13) можно воспользоваться методами теории возмущений (см. например, [6]). В первом приближении

$$\varepsilon_p^{(s)} = b_s + g_{ss}, \tag{14}$$

если при дачном p величины b_s невырождены. В случае вырождения выражения для ε_p усложняются. Так для двукратного вырождения $b_s = b_t$ (например, при $p=4$ $b_0 = b_1$)·

$$\varepsilon_p^{(s)} = b_s + g_{ss} - \frac{g_{st} g_{ts}}{g_{tt}} \tag{14a}$$

для $s<t$. Для $s<t$ ε_p определяется формулой (14). Координатная зависимость моды с данными s и $n=|p|+2s$ имеет вид:

$$\delta(r-a)\left\{\cos(n\varphi + \alpha_n) + O\left[\left(\frac{a}{2b}\right)^2\right]\tau(\varphi)\right\} e^{i\left(\frac{mz}{R} - \omega_n^{(s)} t\right)}$$

Колебания неустойчивы, если $I_m \varepsilon_p > 0$, что имеет место при одновременном выполнении неравенств $p>0$ и $m\Omega - p\omega_0 > 0$. В отсутствие вырождения инкремент неустойчивости моды

$$\mathrm{Im}\,\omega_n^{(s)} = \frac{4\nu\beta^2}{\gamma\omega_0}\left(\frac{c}{a}\right)^3 \left[2\pi\sigma(m\Omega - p\omega_0)\right]^{-1/2} \left(\frac{a}{2b}\right)^{2n+1} \frac{2^{-n} p(2n-1)!}{n!(n-1)!(n-s)!}. \tag{15}$$

Вырождение несколько уменьшает величину инкремента. Наибольший инкремент имеет мода с $n=1$ и $s=0$. Для электронного кольца с $N=10^{13}$, $R=20$см, $b=1$см, $\gamma=9$ при наличии фокусировки магнитным полем с показателем $\sim 0{,}5$ и проводимости стенки $\tau = 10^{17}(\text{сек})^{-1}$ получим $(\mathrm{Im}\,\omega_1^{(0)})^{-1} \simeq 3 \cdot 10^{-7}$сек.

Если пучок не моноэнергетический, существенную роль играет затухание Ландау. Формулы (14), (13) останутся справедливыми, если в них формально заменить ε_p на $\left[\int \frac{f(w)dw}{\varepsilon_p - S_p'(o)w}\right]^{-1}$, где

$$\frac{2\nu}{\gamma^3 \omega_0}\left(\frac{c}{a}\right)^2 S_p(w) = m\Omega(w) - p\omega_0(w). \tag{16}$$

Получающееся при этом уравнение для ε_p подобно тем, которые рассматривались в работах [3—5]. В данном случае необходимое условие устойчивости состоит в том, чтобы разброс частиц по энергии при любых p и s удовлетворял неравенству

$$\Delta w > |b_s/S'_p(o)|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **И. Н. Иванов**, препринт ОИЯИ, Р9-3476-2, 1967.
2. **И. Н. Иванов, В. Г .Маханьков**, препринт ОИЯИ, Р9-3475-2, 1967.
3. **L. I. Lasslett, V K Neil, A. M. Sesler,** Rev. Sci. Instr., 36, 436, 1965.
4. **M I. Lee, P. L Morton, F. E Mills**, IEEE Trans., NS—14, 602, 1967.
5. **И. Л. Коренев, Л. А. Рогинский, Л. А. Юдин,** Всесоюзное совещание по ускорителям, Москва, октябрь 1968 (в печати).
6. **Л. Шифф,** Квантовая механика, ИЛ, М., 1957.