



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

MATHEUS HENRIQUE DE SOUSA MACÊDO

BURACO NEGRO DE DYMNIKOVA EM N DIMENSÕES

**FORTALEZA
2025**

MATHEUS HENRIQUE DE SOUSA MACÊDO

BURACO NEGRO DE DYMNIKOVA EM N DIMENSÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.
Área de Concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

Coorientador: Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto.

FORTALEZA
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M122b Macedo, Matheus Henrique de Sousa.

Buraco Negro de Dymnikova em N Dimensoe / Matheus Henrique de Sousa Macedo. – 2025.
80 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação
em Física, Fortaleza, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

Coorientação: Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto.

1. Buraco negro regular. 2. Termodinâmica. 3. Relatividade Geral. 4. Dymnikova. I. Título.
CDD 530

MATHEUS HENRIQUE DE SOUSA MACÊDO

BURACO NEGRO DE DYMNIKOVA EM N DIMENSÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.
Área de Concentração: Física.

Aprovada em 25/02/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto (Coorientador)
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Wendel Macedo Mendes
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Raimundo Ivan de Oliveira Junior
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Aos Meus Pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu pai, Solon, e a minha mãe, Aldenira, por sempre me motivarem assim como pela minha educação e, principalmente, pela criação baseada em amor, afeto e respeito.

Agradeço à minha namorada, Alana Rocha, pelo apoio emocional e incentivo profissional.

Agradeço aos meus amigos, Gustavo, Eliezer, Anderson, Arthur e Talita pelos momentos de estudo e conversas.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho, e ao meu coorientador, Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto, pela paciência, disponibilidade e ajuda.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Neste estudo, investigamos o buraco negro regular de Dymnikova em N dimensões, analisando sua regularidade, propriedades termodinâmicas e estabilidade. Nosso objetivo é verificar a ausência de singularidades, avaliar as condições de energia e verificar a estabilidade do buraco negro. Utilizamos o invariante de curvatura e os tensores para testar a regularidade, além do método WKB para os modos quase normais. Os resultados mostram que a solução é regular, mas viola certas condições de energia em uma região próxima ao núcleo. Além disso, a análise termodinâmica indica que em certas regiões do espaço o buraco negro possui estabilidade térmica. Enquanto os modos quase normais revelam a estabilidade da solução contra perturbações escalares. Como a solução de Dymnikova é uma solução de vácuo que contém a solução de Schwarzschild-De Sitter, os resultados fornecem subsídios para futuras investigações em gravitação modificada e reforçam a viabilidade da solução.

Palavras-chave: buraco negro regular; termodinâmica; relatividade geral; Dymnikova.

ABSTRACT

In this study, we investigate the regular Dymnikova black hole in N dimensions, analyzing its regularity, thermodynamic properties, and stability. Our objective is to verify the absence of singularities, evaluate the energy conditions, and assess the stability of the black hole. We use the curvature invariant and tensors to test regularity, as well as the WKB method for quasi-normal modes. The results show that the solution is regular, but violates certain energy conditions in a region close to the core. Additionally, the thermodynamic analysis indicates that the black hole exhibits thermal stability in certain regions of space. Meanwhile, the quasi-normal modes reveal the stability of the solution against scalar perturbations. Since the Dymnikova solution is a vacuum solution that includes the Schwarzschild–de Sitter metric, our findings provide insights for future investigations in modified gravity and reinforce the viability of this solution.

Keywords: regular blackhole; thermodynamics; general relativity; Dymnikova.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gráfico da temperatura de Hawking (T_+) como função do raio do horizonte de eventos (r_+) para diferentes valores de r_0	59
Figura 2 – Gráfico da Capacidade Térmica (C) como função do raio do horizonte de eventos (r_+)	60
Figura 3 – Gráfico da temperatura de Hawking (T_+) como função do raio do horizonte de eventos (r_+)	67
Figura 4 – Gráfico da capacidade térmica (C) como função do raio do horizonte de eventos (r_+) para o buraco negro de Dymnikova para diferentes dimensões com r_0 fixo.	68
Figura 5 – Barreira de potencial efetivo para perturbações escalares por coordenada radial para os parâmetros mostrados nas legendas.	70
Figura 6 – ω_{Re} (esquerda) e ω_{Im} (direita) como funções da ordem WKB onde $n = 0, N = 5, r_g = 1, r_0^2 = 0, 2, \ell = 1$ (superior) and $\ell = 2$ (inferior).	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Modos Quasi-normais do campo escalar não massivo para diferentes dimensões e r_0^2 , $r_g = 1$ e $\ell = 1$, calculados usando a fórmula WKB de diversas ordens. . . 72

LISTA DE SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CAPES	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
TRG	Teoria da Relatividade Geral
BNR	Buracos negros regulares

LISTA DE SÍMBOLOS

$\eta_{\mu\nu}$	Tensor Métrico de Minkowski
$g_{\mu\nu}$	Tensor Métrico
$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$	Conexão Afim
$T^{\mu\nu}$	Tensor Energia-Momentum
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
$R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$	Tensor Curvatura de Riemann-Christoffel
$R_{\mu\kappa}$	Tensor de Ricci
R	Escalar de Curvatura
K	Escalar de Kretschmann
r_g	Raio de Schwarzschild
r_0	Raio de De Sitter
r_h	Raio do Horizonte de Eventos
g	Aceleração da Gravidade na Superfície da Terra
c	Velocidade da Luz
G	Constante Gravitacional
Λ	Constante Cosmológica
T_H	Temperatura de Hawking
C	Capacidade Térmica

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1	Tensores Essenciais da RG	16
2.1.1	<i>Tensor Métrico</i>	16
2.1.2	<i>Tensor de Riemann</i>	18
2.1.3	<i>Tensor Energia-Momento</i>	21
2.1.4	<i>Tensor de Einstein</i>	24
2.2	Termodinâmica de Buracos Negros	27
2.2.1	<i>Vetores de Killing</i>	28
2.2.2	<i>Lei Zero</i>	30
2.2.3	<i>Primeira, Segunda e Terceira Leis</i>	34
2.3	Soluções de Vácuo	38
2.3.1	<i>A Classificação Algébrica de Petrov</i>	38
2.3.2	<i>A Solução de Schwarzschild</i>	40
2.3.3	<i>A Solução de De Sitter</i>	42
3	BURACO NEGRO REGULAR DE DYMNIKOVA	45
3.1	Buracos Negros Regulares	45
3.1.1	<i>Termodinâmica de Buracos Negros Regulares</i>	46
3.1.2	<i>Condições de Energia para Buracos Negros Regulares</i>	48
3.1.3	<i>Exemplos de Buracos Negros Regulares</i>	49
3.2	A Solução de Dymnikova	50
3.2.1	<i>Efeito Schwinger e a Métrica de Dymnikova</i>	51
3.2.2	<i>Análise da Solução</i>	54
3.3	Termodinâmica	57
3.4	Equações Gerais do Movimento	60
4	BURACO NEGRO DE DYMNIKOVA GENERALIZADO	63
4.1	Termodinâmica	65
4.2	Modos Quasi-normais	68
5	CONCLUSÃO	73
	REFERÊNCIAS	74

1 INTRODUÇÃO

A ideia moderna de um buraco negro, isto é, uma região do espaço da qual nada pode escapar, remonta à publicação de Finkelstein [1], na qual ele afirma que o horizonte de eventos é uma membrana unidirecional através da qual os eventos causais só podem ocorrer em uma direção. Essa solução é de grande importância na Relatividade, pois pode determinar o tipo de geometria que surge quando um corpo, como uma estrela ou um aglomerado de estrelas, entra em colapso. Em 2019, a primeira imagem direta de um buraco negro foi capturada pelo Telescópio do Horizonte de Eventos [2]. Este feito representou um evento significativo na astrofísica, fornecendo evidências visuais concretas da existência de buracos negros, que há muito tempo eram teorizados, mas nunca observados diretamente.

No entanto, na Teoria da Relatividade Geral (TRG), todas as soluções exatas conhecidas para buracos negros apresentam singularidades, sendo algo inerente às soluções básicas das equações de Einstein, o que cria um sério problema a ser abordado [3]. A singularidade essencial na gravidade de Einstein pode ser evitada se a condição de energia forte for quebrada nas proximidades do centro de um buraco negro. Buracos negros sem singularidades essenciais, mas com singularidades de coordenadas, são chamados de buracos negros regulares (BNR) [4].

A investigação dos Buracos Negros Regulares tem suas origens nos trabalhos de Sakharov e Gliner [5, 6], que propuseram que singularidades essenciais poderiam ser contornadas substituindo o vácuo por um meio semelhante ao vácuo com uma métrica de de Sitter. Posteriormente, Bardeen [7] propôs um modelo de buraco negro regular promovendo a massa do buraco negro de Schwarzschild para uma função dependente da posição. Desde então, vários buracos negros regulares foram propostos na literatura em diferentes contextos, como buracos negros quase-topológicos [8], gravidade não local [9], BTZ bounce [10], gravidade cúbica de Einstein [11], entre outros. Tais soluções proporcionam insights sobre o processo de colapso gravitacional em seus estágios finais, algo que não é viável quando há uma singularidade na origem já que a curvatura do espaço-tempo se torna infinita e as leis da física não podem ser aplicadas. Além disso, surge uma questão intrigante: para que essas soluções sejam possíveis necessita-se de fontes exóticas, assim sendo não há fontes fisicamente plausíveis associadas a elas.

Bekenstein postulou que os buracos negros possuem uma entropia correlacionada com a área do horizonte de eventos e, além disso, que a energia está relacionada com a massa do buraco negro [12–14]. Hawking revelou que os buracos negros emitem radiação térmica, e a temperatura dessa radiação tem semelhança com a gravidade superficial do buraco negro [15].

Uma solução regular muito interessante para buracos negros foi proposta por Dymnikova [16] nas quatro dimensões usuais da teoria da relatividade geral. É assumida uma forma específica para o tensor de momento-energia e derivada a métrica do buraco negro não singular no vácuo; tal solução reduz-se à solução de de Sitter para valores pequenos de r e, para valores

grandes de r , comporta-se como a solução de Schwarzschild. A métrica possui um horizonte de Cauchy e um horizonte externo, mas ambos são removíveis e a solução é regular em $r = 0$. A solução de Dymnikova exibe regularidade em toda parte, como evidenciado pelo comportamento dos invariantes escalares e do invariante de Kretschmann. Esses invariantes mantêm um bom comportamento em todas as regiões, inclusive em $r = 0$. Consequentemente, o buraco negro não leva a uma singularidade.

Existem distinções notáveis entre buracos negros que exibem singularidades e aqueles considerados regulares [4]. Algumas dessas distinções surgem diretamente da ausência de singularidade, enquanto outras são intrínsecas ao próprio modelo. Tais discrepâncias têm repercuções que se manifestam de várias maneiras na observação, incluindo efeitos notáveis como ondas gravitacionais, sombras, propriedades termodinâmicas e outros.

Como é impossível observar diretamente o interior de um buraco negro, a pesquisa deve se concentrar nos eventos dinâmicos e termodinâmicos que ocorrem além dos horizontes de eventos. Especificamente, busca-se entender as variações desses fenômenos quando as singularidades estão presentes em comparação com quando não estão.

Nos últimos anos, vários estudos sobre buracos negros e objetos relacionados em dimensões superiores foram conduzidos, algumas teorias da gravidade, como a teoria de Randall-Sundrum e a de Kaluza-Klein, assumem a existência de dimensões maiores que 4 [17, 18]. Por esse motivo, é pertinente estudar a generalização N -dimensional dos buracos negros de Dymnikova, feita recentemente por Paul [19], e discutir suas propriedades termodinâmicas. O buraco negro de Dymnikova tem recebido atenção significativa no passado recente; por exemplo, a estabilidade do buraco negro de Dymnikova foi estudada por Nashed e Dymnikova [20, 21], o estudo dos modos quasinormais em buracos negros de Dymnikova foi discutido em [22] e quantidades termodinâmicas foram calculadas em [23]. Mais recentemente, a regularização semelhante à de Dymnikova foi estudada no contexto de buracos de minhoca atravessáveis [24] e do princípio da incerteza generalizado [25].

Os modos quasinormais são uma característica essencial dos buracos negros [26, 27], e esses modos são definidos por propriedades fundamentais dos buracos negros, em vez de perturbações externas. Eles são detectáveis por meio de interferômetros gravitacionais [28]. Nos últimos anos, o cálculo dos modos quasinormais (QNMs) para buracos negros em dimensões superiores tem recebido significativa atenção por várias razões convincentes. Por exemplo, o entendimento das propriedades da relatividade geral em N dimensões [29] e características termodinâmicas [30]. Até o momento, não existia nenhum trabalho na literatura que calculou as propriedades termodinâmicas e os modos quasinormais para o buraco negro de Dymnikova em N dimensões. Portanto, o intuito deste trabalho é fazer tais cálculos e discutir os resultados.

O trabalho está organizado em cinco capítulos. O capítulo inicial apresenta uma revisão básica da Teoria da Relatividade Geral (TRG), cobrindo os principais conceitos e equações matemáticas relacionadas a tensores, matéria, energia e termodinâmica, além de introduzir as

soluções de vácuo. Após essa exposição, no capítulo seguinte, são discutidos os principais conceitos de buracos negros regulares e suas diferenças em relação aos buracos negros singulares. Em seguida, apresentamos a solução de Dymnikova, cuja análise é realizada por meio do estudo da métrica, dos tensores e invariantes de curvatura, das condições de energia do sistema, da termodinâmica e das órbitas. Por fim, generalizamos a solução para dimensões mais altas e realizamos análises similares às feitas em quatro dimensões. Aqui será utilizada a assinatura positiva da métrica $(-, +, +, +)$, a notação de Einstein para a soma e as unidades naturais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Antes de introduzir o conceito de buracos negros regulares e a solução de Dymnikova para quatro e N dimensões, buscando os seus resultados matemáticos e analisando suas principais propriedades, é necessário fazer uma revisão dos principais conceitos de Relatividade Geral (RG) que serão úteis para essas análises.

Neste capítulo, serão revistos principalmente os conceitos fundamentais que proporcionarão uma compreensão de como a gravitação funciona e que estabelecerão os fundamentos matemáticos da Teoria da Relatividade Geral (TRG), como as definições do tensor métrico, Riemann, Ricci e Energia-Momento. Será feita uma discussão sobre as condições de energia, termodinâmica de buracos negros e equações de campo.

2.1 Tensores Essenciais da RG

A Teoria da Relatividade Geral se constrói sobre as fundações estabelecidas pela Relatividade Especial, incluindo a equivalência de referenciais iniciais e a constância da velocidade da luz. Além disso, a TRG repousa sobre dois princípios fundamentais equivalentes: o Princípio da Equivalência e o Princípio da Covariância Geral. Embora não detalhemos esses conceitos aqui, os interessados podem consultar [31]. Os principais tensores utilizados no estudo de buracos negros serão apresentados ao longo da seção.

2.1.1 Tensor Métrico

O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ define a estrutura geométrica do espaço-tempo, determinando a distância entre dois pontos e a forma como vetores se transformam ao longo dele [32]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1)$$

Note que o tensor de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ é um caso especial do tensor métrico, onde $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) = \eta_{\alpha\beta}$. Ademais, uma vez que a métrica ds^2 é um escalar, é fácil ver que o tensor métrico é simétrico, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

Na TRG, um dos tipos mais simples de soluções das equações de Einstein são as esfericamente simétricas. Tais soluções representam campos gravitacionais nos quais possuem a mesma forma em todas as direções espaciais a partir de um ponto central, o que funciona tanto para estrelas, planetas, onde nesse caso é procurado soluções externas a superfície dos mesmos, quanto para buracos negros.

Suponha um campo gravitacional esfericamente simétrico e que fora do corpo responsável pelo campo só exista vácuo. Devido a simetria esférica serão utilizadas coordenadas esféricas (ct, r, θ, φ) . Também é assumido que o espaço-tempo é estático, ou seja todas as componentes da métrica são independentes de t e a geometria é invariante por uma reversão

temporal, ou seja, uma gravação da situação iria ser a mesma quando vista de trás pra frente. Assim, a métrica deve ser simétrica sob as transformações $\theta \rightarrow -\theta$, $\phi \rightarrow -\phi$ e $t \rightarrow -t$. Consequentemente,

$$g_{00}dt^2 + g_{0i}dt dx^i + g_{i0}dx^i dt + g_{ij}dx^i dx^j = g_{00}d(-t)^2 + g_{0i}d(-t)dx^i + g_{i0}dx^i d(-t) + g_{ij}dx^i dx^j,$$

tal igualdade só será válida se $g_{i0} = g_{0i} = 0$. De forma análoga, ou seja utilizando o argumento da reversão da coordenada, encontra-se que $g_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$. Assim, a métrica possui a seguinte forma

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2.$$

Assim,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.2)$$

onde $r^2 d\Omega^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2$, pode-se também utilizar

$$\mu(r) = \ln f(r), \quad v(r) = \ln g(r) \quad (2.3)$$

de modo que

$$ds^2 = -e^\mu dt^2 + e^\nu dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.4)$$

Ademais, note que para uma métrica diagonal deve-se ter que

$$g^{\mu\nu} = \begin{cases} \frac{1}{g_{\mu\nu}}, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (2.5)$$

pois $g^{\alpha\beta} g_{\beta\lambda} = \delta_\lambda^\alpha$ implica que para $\alpha = 0$:

$$g^{0\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^0.$$

Mas $\delta_{\lambda=0}^0 = 1$ e $\delta_{\lambda \neq 0}^0 = 0$, então para $\lambda = 0$, temos que

$$g^{0\nu} g_{\nu 0} = 1 \Rightarrow g^{00} = \frac{1}{g_{00}}$$

e para $\lambda = i$

$$g^{0\nu} g_{\nu i} = 0 \Rightarrow g^{0j} g_{ji} = 0 \Rightarrow g^{0i} = 0$$

se fizermos $\alpha = i$, chegaremos ao resultado (2.5). Por fim, falarei sobre as três formas de classificação de um 4-vetor: Dado um 4-vetor arbitrário, A^μ , pode-se classificá-lo como:

- Um 4-vetor é do tipo-espaco se $g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu > 0$.
- Um 4-vetor é tipo-luz ou nulo se $g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = 0$.
- Um 4-vetor é tipo-tempo se $g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu < 0$.

Como já mencionado na introdução, a assinatura da métrica é do tipo $(-, +, +, +)$. Tal conceito será importante na definição das condições de energia.

2.1.2 Tensor de Riemann

Na relatividade especial, a ação de uma partícula livre relativística é

$$S = \int_A^B ds = \int_1^2 \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} d\sigma. \quad (2.6)$$

A equação de movimento resultante ao minimizar a ação com respeito a quadrivelocidade é igual a:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (2.7)$$

pois pela equação de Euler-Lagrange temos que

$$\frac{d}{d\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial \left(\frac{dx^\lambda}{d\sigma} \right)} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} \right] - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} = 0$$

o segundo termo é nulo, uma vez que $\eta_{\mu\nu}$ é constante, consequentemente,

$$\frac{d}{d\sigma} \left[\frac{1}{\sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}}} \left(\cancel{\eta_{\lambda\rho}} \frac{dx^\rho}{d\sigma} \right) \right] = 0.$$

Pode-se utilizar a relação $\frac{d}{d\sigma} = \frac{d\tau}{d\sigma} \frac{d}{d\tau} = \left(-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \right)^{1/2} \frac{d}{d\tau}$ e escrever a relação anterior como

$$\left(-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \right)^{1/2} \frac{d}{d\tau} \left(\eta_{\lambda\rho} \frac{dx^\rho}{d\tau} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0.$$

Em um referencial sob a ação de um campo gravitacional, tal equação irá ser alterada, já que agora as derivadas do tensor métrico não serão mais nulas, assim

$$S = \int_1^2 \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} d\sigma = \int_1^2 L d\sigma \quad (2.8)$$

segue que

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\rho}{d\sigma} \right)} &= \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{L} g_{\rho\nu} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \right) = L \frac{d}{d\tau} \left(g_{\rho\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \\ &= L \left[g_{\rho\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial x^\rho} = -\frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = -\frac{L}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

então, das equações de Euler-Lagrange segue que

$$-L \left[g_{\rho\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] + \frac{L}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

o que produz a conhecida equação da geodésica

$$\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.9)$$

Em que $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ é o símbolo de Christoffel de primeira espécie e que é definido como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right). \quad (2.10)$$

Observe que quando $\Gamma_{\mu\nu}^\rho \rightarrow 0$, a Eq.(2.9) tende a Eq.(2.7), ou seja se reduz as equações da relatividade especial. Note que o símbolo de Christoffel é simétrico nos índices inferiores (o que só é verdade em espaços-tempos livres de torção [33])

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\mu}^\rho &= \frac{1}{2}g^{\rho\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\rho. \end{aligned}$$

Em geral, diz-se que o símbolo de Christoffel nada mais é do que a pseudo força sentida por uma partícula livre, uma vez que o mesmo age como um termo corretivo que ajusta o movimento da partícula conforme ela experimenta a curvatura do espaço-tempo, semelhante ao que a aceleração faria em um referencial não inercial. Agora, pode-se introduzir a derivada covariante: quando a componente de um vetor é diferenciada parcialmente, encontra-se que a mesma se transforma como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V'^\lambda}{\partial x'^\mu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} V^\beta \right) \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} V^\beta \end{aligned} \quad (2.11)$$

Obviamente a derivada parcial da componente de um vetor não se transforma como um tensor, visto que existe a presença adicional do termo $\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} V^\beta$. Todavia, é possível construir um objeto que se reduza a derivada parcial na ausência de campos e que se transforma como um tensor, antes de mais nada é necessário saber como os símbolos de Christoffel se transformam. Com o uso da Eq.(2.10) encontra-se que

$$\Gamma'_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\beta\rho}^\alpha + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \quad (2.12)$$

ou,

$$\Gamma'_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\beta\rho}^\alpha - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \quad (2.13)$$

tal equação pode ser obtida ao se derivar a relação $\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}$ em relação a x'^α e reescrever o segundo termo do lado direito da Eq.(2.12). Assim, segue que

$$\begin{aligned}\Gamma'_{\mu\nu}^{\lambda} V'^\nu &= \left[\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right] \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} V^\gamma \\ \Rightarrow \Gamma'_{\mu\nu}^{\lambda} V'^\nu &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \Gamma_{\beta\rho}^\alpha V^\rho - \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} V^\alpha.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Somando a Eq.(2.11) com a Eq.(2.14) obtém-se

$$\frac{\partial V'^\lambda}{\partial x'^\mu} + \Gamma'_{\mu\nu}^{\lambda} V'^\nu = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\rho}^\alpha V^\rho \right). \quad (2.15)$$

Ou seja, o termo entre parênteses é um tensor misto de segunda ordem. Define-se este tensor como sendo a derivada covariante que atua em um vetor contravariante, sendo representada por ∇_μ e definido como sendo:

$$\nabla_\mu V^\lambda \equiv \partial_\mu V^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V^\nu. \quad (2.16)$$

Em que a notação $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ foi utilizada. Para o vetor covariante, temos que

$$\nabla_\mu V_\nu \equiv \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda. \quad (2.17)$$

de forma geral, para um tensor

$$\begin{aligned}\nabla_\mu T^{\nu\lambda} &\equiv \partial_\mu T^{\nu\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu T^{\sigma\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda T^{\nu\sigma} \\ \nabla_\mu T_{\nu\lambda} &= \partial_\mu T_{\nu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma T_{\sigma\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma T_{\sigma\nu} \\ \nabla_\mu T^\lambda_\nu &= \partial_\mu T^\lambda_\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda T^\sigma_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma T^\lambda_\sigma\end{aligned}\quad (2.18)$$

O comutador da derivada covariante atuando em um vetor contravariante é igual a:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\lambda = R^\lambda_{\sigma\mu\nu} V^\sigma. \quad (2.19)$$

Onde

$$R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \quad (2.20)$$

é o tensor de curvatura de Riemann. A demonstração da relação (2.19) segue de (2.16):

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \nabla_\nu V^\lambda &= \nabla_\mu (\partial_\nu V^\lambda + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda V^\sigma) \\ &= \nabla_\mu (\partial_\nu V^\lambda) + \nabla_\mu (\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda V^\sigma) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu V^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \partial_\nu V^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \partial_\sigma V^\lambda + \partial_\mu (\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda V^\sigma) + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\rho V^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda V^\sigma\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\lambda &= \partial_\mu \partial_\nu V^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \partial_\nu V^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \partial_\sigma V^\lambda + \partial_\mu (\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda V^\sigma) + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\rho V^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda V^\sigma \\
&\quad - \partial_\nu \partial_\mu V^\lambda - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \partial_\mu V^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \partial_\sigma V^\lambda - \partial_\nu (\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda V^\sigma) - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\rho V^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda V^\sigma \\
&= \underline{\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \partial_\nu V^\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \partial_\sigma V^\lambda + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda) V^\sigma + \underline{\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \partial_\mu V^\sigma} + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\rho V^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda V^\sigma \\
&\quad - \underline{\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \partial_\mu V^\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \partial_\sigma V^\lambda - (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) V^\sigma - \underline{\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \partial_\nu V^\sigma} - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\rho V^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda V^\sigma \\
&= (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\rho) V^\sigma.
\end{aligned}$$

Da definição do tensor de Riemann, encontra-se que

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} = -R_{\lambda\rho\nu\mu}, \quad R_{\lambda\rho\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda\rho} \quad (2.21)$$

e a identidade de Bianchi é dada por

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} + R_{\lambda\nu\rho\mu} + R_{\lambda\mu\nu\rho} = 0. \quad (2.22)$$

Note que $R_{\lambda\rho\mu\nu} = g_{\lambda\sigma} R^\sigma_{\rho\mu\nu}$. Uma contração de índices nos possibilita definir o tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &\equiv R^\rho_{\mu\rho\nu} \\
&= \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{\sigma\rho}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma
\end{aligned} \quad (2.23)$$

Repare que este tensor é simétrico, $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Também é possível construir um escalar, conhecido como escalar de Ricci, com a contração do tensor de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.24)$$

Outro escalar bastante importante é o escalar de Kretschmann

$$K = R^{\mu\nu\lambda\rho} R_{\mu\nu\lambda\rho}. \quad (2.25)$$

que será bastante importante no estudo de singularidades.

2.1.3 Tensor Energia-Momento

Até o presente momento objetos essenciais para o estudo das propriedades geométricas do espaço-tempo foram definidos, contudo, por motivos que ficarão claros posteriormente, é necessário procurar uma ferramenta que permita quantificar quanta matéria existe em um volume, tal ferramenta é o tensor energia-momento.

Suponha que um fluxo de partículas percorre o espaço-tempo. Cada partícula percorre o espaço-tempo em sua própria linha de mundo carregando o seu 4-vetor momentum consigo, tais partículas quando vistas espalhadas produzem um fluxo contínuo, um fluxo de 4-momentum. A forma de se quantificar esse fluxo é através do tensor energia-momento [34].

O tensor energia-momento é definido em termos de suas componentes, em algum

referencial arbitrário, como [35]:

$$T_{\alpha\beta} := \left\{ \begin{array}{l} \text{fluxo da } \alpha\text{-ésima componente do 4-momentum} \\ \text{através de uma superfície } x^\beta \text{ constante.} \end{array} \right\} \quad (2.26)$$

A partir desta definição pode-se derivar as componentes do tensor energia-momento. Observe que T_{00} é o fluxo da componente zero do 4-vetor momentum ou seja, a energia através da superfície $x^0 = t$ constante. Analogamente, T_{0i} é o fluxo de energia através de uma superfície x^i constante. Similarmente, T_{i0} é o fluxo do i -ésimo momentum através da superfície t constante: a densidade do i -ésimo momentum. Por fim, T_{ij} é o j -ésimo fluxo do i -ésimo momentum. Em resumo:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \text{densidade de energia;} \\ T_{0i} &= \text{fluxo de energia através da superfície } x^i \text{ constante;} \\ T_{i0} &= \text{densidade do } i\text{-ésimo momentum;} \\ T_{ij} &= \text{fluxo do } i\text{-ésimo momentum através da superfície } x^j \text{ constante.} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ou seja,

$$T_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} \rho & S_j \\ S_i & \pi_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

em que ρ é a densidade de massa energia do sistema, S_i é o fluxo de energia e π_{ij} são os termos de tensão. No caso de um fluido perfeito, reescreve-se o tensor Energia-Momento como:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (2.29)$$

onde p é a pressão do fluido no seu referencial e U_μ a sua 4-velocidade. No referencial local do fluido de matéria, temos que $U_{\bar{\mu}} = (-1, \mathbf{0})$ uma vez que a matéria está em repouso. O índice com “barra” indica que as componentes do tensor estão escritas no referencial local. Portanto,

$$T_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = (\rho + p)U_{\bar{\mu}}U_{\bar{\nu}} + p\eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}. \quad (2.30)$$

De modo que

$$T_{\bar{0}\bar{0}} = \rho, \quad T_{\bar{0}\bar{i}} = 0, \quad T_{\bar{i}\bar{j}} = p\delta_{\bar{i}\bar{j}}. \quad (2.31)$$

Assim sendo, pode-se escrever o tensor energia-momento como $T_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$. Uma importante lei de conservação para esse tensor pode ser obtida com o uso do Teorema de Noether. Todavia devido ao escopo do trabalho, não faz sentido fazer tal demonstração. Através das translações espaço-temporais que mantém a densidade Lagrangiana do sistema invariante, obtém-se a Lei de conservação a seguir:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

A demonstração de tal teorema pode ser consultada em [36]. Embora tal resultado só tenha validade na teoria da relatividade restrita, sabemos que pelo teorema da covariância geral que existe

uma equação na relatividade geral que deve se reduzir a essa para campos fracos, para obter tal equação um caminho simples é apenas substituir a derivada parcial pela derivada covariante:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.32)$$

É fácil ver que tal equação produz a conservação da energia e do 4-momentum do sistema [37].

Alguns caminhos da relatividade geral envolvem buscar soluções das equações de campo de Einstein, que serão apresentadas em breve, mesmo sem ter conhecimento prévio sobre a matéria envolvida no sistema em questão. O que nesse caso produz uma situação bastante peculiar, na qual os componentes do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ podem assumir uma ampla gama de valores, dependendo da escolha da métrica para o sistema, que por sua vez pode ser bastante variada.

Normalmente, quando se lida com fontes conhecidas, como as de um campo elétrico, não há muito com o que se preocupar. Todavia, é igualmente importante explorar as características das equações de Einstein para fontes mais gerais. Assim, torna-se necessário estabelecer certas condições de energia para o tensor $T_{\mu\nu}$, com isso espera-se reduzir a incerteza dessa escolha. Isso porque precisamos de fontes “realistas”, que correspondam aos fenômenos encontrados na natureza. As condições de energia para o tensor Energia-Momento são:

- Condição fraca: para qualquer vetor tipo-tempo de componentes V^μ , a seguinte desigualdade deve ser satisfeita:

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0. \quad (2.33)$$

Essa condição implica que a densidade de energia medida por qualquer observador em movimento ao longo de uma trajetória permitida (isto é, uma trajetória que não viola as restrições causais) deve ser sempre não negativa. Assim, no caso do fluido perfeito, $\rho + p_i \geq 0$.

- Condição nula: para qualquer vetor tipo-luz (ou nulo) de componentes k^μ , a seguinte desigualdade deve ser satisfeita:

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0. \quad (2.34)$$

Tal condição induz menos restrições que a condição fraca, já que nenhuma condição é imposta a densidade de energia. Analogamente, $\rho + p_i \geq 0$.

- Condição forte: a seguinte restrição deve ser satisfeita:

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq \frac{1}{2}T_\alpha{}^\alpha V^\beta V_\beta \quad (2.35)$$

isso produz que

$$\rho + p_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \rho + \sum_{i=1}^3 p_i \geq 0. \quad (2.36)$$

Observa-se que esta condição é mais restritiva do que a condição nula, implicando que, se esta for válida, então a condição nula também será. Assim, soluções que violam essas condições não

estão em conformidade com a física atual e podem ser consideradas não realistas ou pertencer a alguma classe de matéria ainda não descoberta.

2.1.4 Tensor de Einstein

Uma forma de se derivar as equações de campo de Einstein é através da ação de Einstein-Hilbert [36, 38]. Como espaço-tempo generalizados serão abordados ao longo deste trabalho, faz sentido explicitar alguns argumentos aqui. É esperado que todas as propriedades dinâmicas do espaço-tempo possam ser obtidas através do tensor métrico. Tal hipótese se baseia no fato de que o tensor métrico é uma entidade matemática que captura as propriedades geométricas do espaço-tempo, como a distância entre pontos e a estrutura causal. No entanto, tal afirmação só pode ser feita desde que exista um Lagrangiano escalar construído com o tensor métrico e suas derivadas:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \partial_\sigma g_{\mu\nu}, \partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu}, \dots). \quad (2.37)$$

Para assegurar a covariância geral da teoria, é necessário criar uma integral de ação invariante. Assim, a afirmação $\delta S[g] = 0$ será geralmente covariante, e também o será a dinâmica derivada dessa afirmação. Note contudo que $\int d^4x \mathcal{L}(x)$ não será invariante se $\mathcal{L}(x)$ for uma quantidade escalar, visto que

$$\int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4\bar{x} \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right) \mathcal{L}(\bar{x}) \neq \int d^4\bar{x} \mathcal{L}(\bar{x})$$

onde é assumido que o Jacobiano $\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \neq 1$. Assim é necessário uma quantidade $a(x)$ tal que

$$\int d^4x a(x) \mathcal{L}(x) = \int d^4\bar{x} \bar{a}(\bar{x}) \mathcal{L}(\bar{x})$$

de modo que

$$\bar{a}(\bar{x}) = \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} a(x). \quad (2.38)$$

Do tensor métrico é claro que

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\alpha\beta}$$

consequentemente, o determinante será igual a:

$$\bar{g} = \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right)^2 g. \quad (2.39)$$

devido a assinatura utilizada ser $(-, +, +, +)$, teremos que $g = \det(g_{\mu\nu}) < 0$, assim faz sentido dizer que

$$\sqrt{-\bar{g}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \sqrt{-g}. \quad (2.40)$$

a forma dessa equação permite concluir que $a(x)$ na Eq.(2.38) deve ser igual a $\sqrt{-g}$, de modo que a ação invariante pode ser escrita como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(x). \quad (2.41)$$

Pelo princípio da covariância geral temos que

$$\eta_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha\beta}, \quad \partial_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha. \quad (2.42)$$

Segue então que $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ pois no referencial local tal equação se reduz para $\partial_\alpha \eta_{\mu\nu} = 0$. A derivada covariante atuando no tensor métrico é escrita como

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma g_{\sigma\mu} \quad (2.43)$$

Como quase todas as equações diferenciais da física são de segunda ordem, faz sentido assumir que o tensor métrico satisfaz uma equação diferencial parcial de segunda ordem. O tensor mais simples que pode ser construído a partir do tensor métrico e suas derivadas é o tensor de Riemann [36]. Logo, faz sentido tomar a densidade Lagrangiana como sendo igual ao escalar de Ricci [39]

$$\mathcal{L} = \frac{R}{16\pi} \quad (2.44)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} S_{EH} &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x R \sqrt{-g} \\ &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Antes de mais nada note que

$$\delta(g^{\alpha\sigma} g_{\sigma\kappa}) = \delta(\delta^\alpha_\kappa) = 0. \quad (2.46)$$

aplicando a regra do produto no lado esquerdo, podemos reescrever a equação anterior como

$$g_{\sigma\kappa} \delta g^{\alpha\sigma} = -g^{\alpha\sigma} \delta(g_{\sigma\kappa}) \Rightarrow g_{\sigma\kappa} g^{\kappa\beta} \delta g^{\alpha\sigma} = -g^{\alpha\sigma} g^{\kappa\beta} \delta(g_{\sigma\kappa})$$

isto é,

$$\delta g^{\alpha\kappa} = -g^{\alpha\sigma} g^{\beta\kappa} \delta(g_{\sigma\beta}). \quad (2.47)$$

Pela fórmula de Jacobi, para uma matriz M invertível é válido que $\delta(\det M) = (\det M) \text{tr}(M^{-1} \delta M)$, para derivar tal fórmula basta ver que

$$\begin{aligned} \delta(\det M) &= \det(M + \delta M) - \det(M) \\ &= \det[M(I + M^{-1} \delta M)] - \det(M) \\ \Rightarrow \delta(\det M) &= \det(M) \det(I + M^{-1} \delta M) - \det(M) \\ &= \det(M)[1 + \text{tr}(M^{-1} \delta M) + \dots] - \det M \\ &= \det(M) \text{tr}(M^{-1} \delta M) \end{aligned} \quad (2.48)$$

desde que δM se torne infinitesimalmente pequeno. Logo, para $M = \text{tensor métrico}$:

$$\delta g = g(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) \Rightarrow \delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (2.49)$$

pois,

$$\begin{aligned} g(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) &= \delta g \\ &= \delta(\sqrt{-g} \sqrt{-g}) \\ &= 2\sqrt{-g} \delta \sqrt{-g} \Rightarrow \delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Por fim,

$$\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_{\alpha} \delta g_{\beta\nu} + \partial_{\beta} \delta g_{\alpha\nu} - \partial_{\nu} g_{\alpha\beta}) - g^{\mu\rho} \delta g_{\rho\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}$$

mas pela Eq.(2.43)

$$\partial_{\alpha} \delta g_{\mu\nu} = \nabla_{\alpha} \delta g_{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} \delta g_{\beta\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} \delta g_{\mu\beta}$$

de modo que

$$\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_{\alpha} g_{\beta\nu} + \nabla_{\beta} g_{\alpha\nu} - \nabla_{\nu} g_{\alpha\beta}). \quad (2.50)$$

Portanto, a variação do tensor de Riemann

$$\delta R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} = \partial_{\nu} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \partial_{\beta} \delta \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} + (\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}) \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} - \delta \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu}$$

mas

$$\begin{aligned} \partial_{\nu} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} &= \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu} + \Gamma_{\nu\beta}^{\sigma} \delta \Gamma_{\alpha\sigma}^{\mu} \\ &\Rightarrow \delta R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} = \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \nabla_{\beta} \delta \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} \end{aligned}$$

contraindo o índice μ com ν , encontra-se que

$$\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_{\mu} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \nabla_{\beta} \delta \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu}. \quad (2.51)$$

Portanto, a variação do escalar de curvatura é igual a:

$$\begin{aligned} \delta R &= \delta(g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) \\ &= -R^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} (\nabla_{\mu} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \nabla_{\beta} \delta \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu}) \\ &= -R^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\mu} \delta g_{\beta\nu} - \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \delta g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (2.52)$$

A variação da ação,

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x [\delta \sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \delta R] \\ &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left[\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R \delta g_{\mu\nu} - \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\mu} \delta g_{\beta\nu} - \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \delta g_{\mu\nu}) \right] \\ &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left[-\sqrt{-g} G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \nabla_{\alpha} (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (\nabla_{\mu} \delta g_{\beta\nu} - \nabla_{\beta} \delta g_{\mu\nu})) \right] \\ &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \text{termos de superfície} \end{aligned}$$

onde $G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R$ é o tensor de Einstein. Podemos descartar tais termos e obter que

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.53)$$

a ação total contém a parte responsável pela fonte:

$$S_M = \int L \sqrt{-g} d^4x \quad (2.54)$$

sua variação em relação a métrica resulta em

$$\delta S_M = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}Lg_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}$$

definindo

$$T_{\mu\nu} = -2 \left[\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}Lg_{\mu\nu} \right] = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L)}{\delta g^{\mu\nu}}$$

então,

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \delta d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.55)$$

combinando com

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} d^4x (G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.56)$$

O que produz a conhecida equação de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.57)$$

Um resultado bastante famoso é o caso específico em que não há a presença de $T_{\mu\nu}$, ou seja o vácuo. Assim sendo,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (2.58)$$

Multiplicando esta equação por $g^{\rho\mu}$:

$$R^\rho{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\rho{}_\nu R = 0$$

contraindo ρ com ν :

$$R = \frac{1}{2}(4)R \Rightarrow R = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.59)$$

Este resultado será bastante importante na derivação da métrica de Schwarzschild.

2.2 Termodinâmica de Buracos Negros

Aparentemente, não deveria fazer sentido falar sobre termodinâmica quando o assunto é buracos negros, de acordo com os princípios fundamentais da termodinâmica, corpos com temperatura emitem um espectro térmico de radiação que reflete sua temperatura. No entanto, pela própria natureza dos buracos negros, nada pode escapar de seu interior, tornando a

atribuição de uma temperatura física significativa uma tarefa impossível. Em outras palavras, a temperatura de um buraco negro é teoricamente zero logo do ponto de vista clássico não faz sentido aplicar os conceitos tradicionais da termodinâmica a esses objetos cósmicos [40].

Por outro lado, ao examinar o comportamento dos buracos negros através da lente da relatividade geral, é notório que as leis que regem esses corpos possuem uma estrutura similar à termodinâmica. As quatro leis derivadas nesse contexto apresentam uma similaridade tão marcante com os princípios termodinâmicos que foram denominadas como sendo as “quatro leis da termodinâmica de buracos negros”. Assim, ao invés de serem excluídos do domínio da termodinâmica, os buracos negros emergem como objetos de estudo fundamentais para a compreensão das leis universais que regem o comportamento da matéria e da energia em escalas extremas.

Nesta seção, apresentaremos uma introdução aos vetores de Killing, preparando o contexto para a exposição das leis da mecânica dos buracos negros.

2.2.1 *Vetores de Killing*

Considere um espaço-tempo $(M, g_{\mu\nu})$, onde M é uma variedade, queremos saber quais transformações do espaço-tempo preservam a forma da métrica, isto é, produzem simetrias. Os vetores de Killing surgem justamente da necessidade de se descrever simetrias em espaços-tempos, assim se há uma quantidade conservada associada à métrica do espaço-tempo, como energia, momento linear ou momento angular, então também há um vetor de Killing associado.

A métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$, não depende das coordenadas x, y, z e t , o que implica na invariância da métrica sob translações no espaço-tempo. Outra simetria é associada com as transformações de Lorentz, $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ que também não alteram o tensor métrico. Assim, de forma geral, suponha que as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ são tais que $\partial_{\sigma_*} g_{\mu\nu} = 0$, então $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$, onde a^μ é um escalar, é uma simetria.

O campo vetorial

$$K \equiv \partial_{\sigma_*} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma_*}} \quad (2.60)$$

é um vetor de Killing. Em termos de componentes, temos que

$$K = K^\mu \partial_\mu \Rightarrow \partial_{\sigma_*} = K^\mu \partial_\mu \Rightarrow K^\mu = \delta^\mu_{\sigma_*}. \quad (2.61)$$

Pela equação da geodésica, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \\ &= \frac{d}{d\tau} \left(m \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \left(m \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) \frac{dx^\beta}{d\tau} \\ &= \frac{dP^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} P^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
0 &= m \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial P^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha \left(m \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) \\
&= P^\alpha \frac{\partial P^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta \\
&= P^\alpha \left(\frac{\partial P^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\beta \right)
\end{aligned}$$

de forma que

$$P^\alpha \nabla_\alpha P^\mu = 0. \quad (2.62)$$

Similarmente, temos que $P_\mu = g_{\mu\nu} P^\nu$, assim

$$\begin{aligned}
\frac{dP_\mu}{d\tau} &= m \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \right) \\
&= m \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \partial_\alpha g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right)
\end{aligned}$$

multiplicando ambos os lados por m e utilizando a expressão para $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$ em termos do tensor métrico, obtém-se que

$$\begin{aligned}
m \frac{dP_\mu}{d\tau} &= P^\nu P^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} - P^\alpha P^\beta g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\nu\lambda} (\partial_\alpha g_{\lambda\beta} + \partial_\beta g_{\lambda\alpha} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}) \right] \\
&= P^\beta P^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\beta} - \frac{1}{2} P^\alpha P^\beta \partial_\alpha g_{\mu\beta} - \frac{1}{2} P^\alpha P^\beta \partial_\beta g_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} P^\alpha P^\beta \partial_\mu g_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

podemos trocar os índices α e β no terceiro termo do lado direito, de modo que

$$m \frac{dP_\mu}{d\tau} = P^\beta P^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\beta} - \frac{1}{2} P^\alpha P^\beta \partial_\alpha g_{\mu\beta} - \frac{1}{2} P^\alpha P^\beta \partial_\beta g_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} P^\alpha P^\beta \partial_\mu g_{\alpha\beta}$$

os três primeiros termos do lado direito se anulam, o que por sua vez produz o seguinte resultado:

$$m \frac{dP_\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} P^\alpha P^\beta \partial_\mu g_{\alpha\beta} \quad (2.63)$$

assim, se o tensor métrico não depende de uma dada coordenada $\mu = \sigma_*$, então $\partial_{\sigma_*} g_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \frac{dP_{\sigma_*}}{d\tau} = 0$, ou seja P_{σ_*} é uma quantidade conservada ao longo da geodésica. Podemos obter uma expressão para os vetores de Killing através dessa informação, note que

$$P_{\sigma_*} = \delta^\mu_{\sigma_*} P_\mu = K^\mu P_\mu.$$

Pela Eq.(2.62) temos então

$$\begin{aligned}
0 &= P^\mu \nabla_\mu (P_{\sigma_*}) = P^\mu \nabla_\mu (K_\nu P^\nu) \\
&= P^\mu P^\nu \nabla_\mu K_\nu + K_\nu \cancel{P^\mu \nabla_\mu P^\nu}^0 \\
&= P^\mu P^\nu \nabla_\mu K_\nu.
\end{aligned}$$

Vamos dividir o tensor $\nabla_\mu K_\nu$ em sua parte simétrica e antissimétrica:

$$\nabla_\mu K_\nu = S_{\mu\nu} + A_{\mu\nu}$$

onde $S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu)$ e $A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\nabla_\mu K_\nu - \nabla_\nu K_\mu)$. Substituindo na expressão obtida anteriormente, acha-se que

$$0 = P^\mu P^\nu S_{\mu\nu} + P^\mu P_\nu A_{\mu\nu}$$

tendo em vista que $P^\mu P^\nu A_{\mu\nu} = -P^\mu P^\nu A_{\nu\mu} = -P^\nu P^\mu A_{\mu\nu} \Rightarrow P^\mu P^\nu A_{\mu\nu} = 0$, onde a troca de índices mudos foi utilizada. Assim, podemos concluir que

$$0 = P^\mu P^\nu S_{\mu\nu}.$$

Essa expressão deve ser válida para qualquer P^μ . A única maneira de isso acontecer é se a parte simétrica $S_{\mu\nu}$ for identicamente nula, ou seja se $\frac{1}{2}(\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu) = 0$. Portanto, dado um vetor K^α em um espaço-tempo de métrica $g_{\mu\nu}$, ele é chamado de vetor de Killing se satisfizer

$$\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0 \quad (2.64)$$

chamada de equação de Killing.

2.2.2 Lei Zero

Um buraco negro em processo de formação emite ondas gravitacionais, que carregam consigo energia e momento angular o que faz o sistema perder gradualmente essas quantidades, até atingir o limite estacionário. Assim, o buraco negro tende a um estado estacionário, no qual as flutuações dinâmicas cessam e o sistema alcança um equilíbrio. Tal processo é bastante semelhante ao de termalização em sistemas termodinâmicos, no qual o equilíbrio é atingido quando não há mais trocas líquidas de energia com o ambiente.

No horizonte de eventos (superfície nula) existe um 4-vetor χ^μ normal ao horizonte tal que $\chi^\mu \chi_\mu = 0$. De forma que $\nabla^\nu(\chi^\mu \chi_\mu)$ é normal ao horizonte de eventos. Assim, no horizonte de eventos é válido a seguinte equação:

$$\nabla^\nu(\chi^\mu \chi_\mu) = -2\kappa \chi^\nu \quad (2.65)$$

onde κ é chamado de gravidade superficial e conforme veremos representa a força realizada por um observador no infinito para manter um corpo de massa unitária estático no horizonte de eventos, que equivale à aceleração gravitacional gerada na superfície do buraco negro [41]. Desenvolvendo essa expressão

$$\chi_\mu \nabla^\nu \chi^\mu + \chi^\mu \nabla^\nu \chi_\mu = -2\kappa \chi^\nu.$$

Pela Eq.(2.64) temos que

$$-\chi_\mu \nabla^\mu \chi^\nu + g^{\mu\rho} \chi_\rho \nabla^\nu (g_{\mu\lambda} \chi^\lambda) = -2\kappa \chi^\nu$$

como $\nabla^\nu g_{\mu\lambda} = 0$, segue que

$$-\chi_\mu \nabla^\mu \chi^\nu + g^{\rho\mu} g_{\mu\lambda} \chi_\rho \nabla^\nu \chi^\lambda = -2\kappa \chi^\nu$$

utilizando novamente a equação de Killing, encontramos finalmente que

$$-\chi_\mu \nabla^\mu \chi^\nu - \chi_\mu \nabla^\mu \chi^\nu = -2\kappa \chi^\nu$$

ou seja,

$$\chi_\mu \nabla^\mu \chi^\nu = \kappa \chi^\nu. \quad (2.66)$$

Dado a importância de κ no horizonte de eventos, é fundamental compreender como o mesmo varia no horizonte. A métrica no horizonte é degenerada, ou seja não possui inversibilidade, o que por sua vez impede a aplicação direta do operador projetado $b^{\mu\nu} \nabla_\nu$, onde $b_{\mu\nu}$ é a métrica no horizonte. Para descrever variações ao longo do horizonte de eventos, precisamos de uma estrutura matemática que seja tangente ao horizonte (isto é, não introduza componentes fora da superfície) e que não seja degenerada. A solução é usar o tensor de volume $\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$, que é totalmente antissimétrico. Quando contraído com o vetor gerador do horizonte χ^μ produz-se o tensor $\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \chi^\lambda$, que é tangente ao horizonte de eventos pois $T_{\mu\nu\rho} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \chi^\lambda$ é tal que $\chi^\mu T_{\mu\nu\rho} = \chi^\mu \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \chi^\lambda = 0$ devido a antissimetria. Assim, o tensor não possui componentes normais ao horizonte, ou seja, ele vive inteiramente dentro do subespaço tridimensional do horizonte. Por argumentos análogos, para um dado vetor arbitrário v^ν , temos que $T_{\mu\nu\rho} v^\nu \neq 0$.

Desse modo, podemos construir qualquer vetor tangente ao horizonte. Como estamos interessados na variação de κ ao longo do horizonte calculemos $\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \chi^\lambda \nabla^\rho \kappa$. Uma notação bastante utilizada para antissimetrização é definida a seguir, dado dois vetores χ_μ e ξ_ν , então

$$\chi_{[\mu} \xi_{\nu]} = \frac{1}{2} (\chi_\mu \xi_\nu - \chi_\nu \xi_\mu).$$

Da equação (2.66) segue que

$$\chi_{[\rho} \nabla_{\lambda]} (\kappa \chi_{\nu]} = \chi_{[\rho} \nabla_{\lambda]} (\chi^\mu \nabla_\mu \chi_{\nu]})$$

onde o operador antissimétrico foi utilizado devido ao fato de que apenas variações intrínsecas ao horizonte de eventos devem ser levadas em consideração. Desenvolvendo ambos os lados da relação, acha-se que

$$\kappa \chi_{[\rho} \nabla_{\lambda]} \chi_{\nu]} + \chi_{\nu]} \chi_{[\rho} \nabla_{\lambda]} \kappa = \nabla_\mu \chi_{\nu]} \chi_{[\rho} \nabla_{\lambda]} \chi^\mu + \chi^\mu \chi_{[\rho} \nabla_{\lambda]} \nabla_\mu \chi_{\nu]}$$

isolando o segundo termo do lado esquerdo

$$\chi_v \chi_{[\rho} \nabla_{\lambda]} \kappa = \nabla_\mu \chi_v \chi_{[\rho} \nabla_{\lambda]} \chi^\mu - \kappa \chi_{[\rho} \nabla_{\lambda]} \chi_v + \chi^\mu \chi_{[\rho} \nabla_{\lambda]} \nabla_\mu \chi_v. \quad (2.67)$$

Agora será necessário apresentar um teorema[41] que irá simplificar mais ainda a relação anterior,

Teorema 2.2.1. (Teorema de Frobenius): *Um vetor ζ^μ é ortogonal a uma dada superfície se, e somente se, satisfaz a condição $\zeta_{[\mu} \nabla_v \zeta_{\rho]} = 0$ na superfície.*

Assim, no horizonte de eventos tal relação, em conjunto com a equação de Killing $\nabla_v \chi_\lambda = -\nabla_\lambda \chi_v$, se reduz no horizonte para:

$$\chi_\lambda \nabla_\rho \chi_v = -2 \chi_{[\rho} \nabla_{\lambda]} \chi_\lambda. \quad (2.68)$$

Aplicando a Eq.(2.68) no primeiro e segundo termo do lado direito da Eq.(2.67), acha-se que

$$\chi_v \chi_{[\rho} \nabla_{\lambda]} \kappa = -\frac{1}{2} \underbrace{(\nabla_\mu \chi_v) \chi^\mu}_{\kappa \chi_v} \nabla_\rho \chi_\lambda + \frac{\kappa}{2} \chi_v \nabla_\rho \chi_\lambda + \frac{\chi^\mu \chi_\rho \nabla_\lambda \nabla_\mu \chi_v - \chi^\mu \chi_\lambda \nabla_\rho \nabla_\mu \chi_v}{2}$$

os dois primeiros termos do lado direito se anulam. Assim,

$$\chi_v \chi_{[\rho} \nabla_{\lambda]} \kappa = \frac{\chi^\mu \chi_\rho \nabla_\lambda \nabla_\mu \chi_v - \chi^\mu \chi_\lambda \nabla_\rho \nabla_\mu \chi_v}{2}. \quad (2.69)$$

Observe que pela definição do tensor de Riemann, temos que

$$\nabla_\lambda \nabla_\mu \chi_v - \nabla_\mu \nabla_\lambda \chi_v = R^\zeta_{\lambda \mu \nu} \chi_\zeta \quad (2.70)$$

que pela equação de Killing pode ser reescrita como

$$\nabla_\lambda \nabla_\mu \chi_v + \nabla_\mu \nabla_\lambda \chi_v = R^\zeta_{\lambda \mu \nu} \chi_\zeta. \quad (2.71)$$

Analogamente, as permutações de tal equação produzem

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \chi_\lambda + \nabla_\nu \nabla_\lambda \chi_\mu = R^\zeta_{\mu \nu \lambda} \chi_\zeta, \quad (2.72)$$

$$\nabla_\nu \nabla_\lambda \chi_\mu + \nabla_\lambda \nabla_\mu \chi_\nu = R^\zeta_{\nu \lambda \mu} \chi_\zeta. \quad (2.73)$$

Adicionando as Eqs.(2.71) e (2.72) e subtraindo a Eq.(2.73) do resultado, acha-se que

$$\nabla_\lambda \nabla_\mu \chi_v + 2 \nabla_\mu \nabla_\nu \chi_\lambda + \nabla_\nu \nabla_\lambda \chi_\mu - \nabla_\nu \nabla_\lambda \chi_\mu - \nabla_\lambda \nabla_\mu \chi_v = (R^\zeta_{\lambda \mu \nu} + R^\zeta_{\mu \nu \lambda} - R^\zeta_{\nu \lambda \mu}) \chi_\zeta$$

simplificando os termos semelhantes e utilizando a propriedade $R^\zeta_{[\lambda \mu \nu]} = 0$, encontra-se

$$2 \nabla_\mu \nabla_\nu \chi_\lambda = -2 R^\zeta_{\nu \lambda \mu} \chi_\zeta$$

ou seja, para qualquer vetor de Killing, obtém-se que

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \chi_\lambda = -R^\zeta_{\nu\lambda\mu} \chi_\zeta. \quad (2.74)$$

Substituindo tal relação no lado direito da Eq.(2.69)

$$\chi_\nu \chi_{[\rho} \nabla_{\lambda]} \kappa = \frac{\chi^\mu (-\chi_\rho R^\zeta_{\mu\nu\lambda} \chi_\zeta + \chi_\lambda R^\zeta_{\mu\nu\rho} \chi_\zeta)}{2}$$

ou seja,

$$\chi_\nu \chi_{[\rho} \nabla_{\lambda]} \kappa = -\chi^\mu R^\zeta_{\mu\nu[\lambda} \chi_{\rho]} \chi_\zeta. \quad (2.75)$$

Pela equação (2.68) temos que

$$\begin{aligned} \chi_{[\lambda} \nabla_{\rho]} (\chi_\lambda \nabla_\mu \chi_\nu) &= \chi_{[\lambda} \nabla_{\rho]} (-2\chi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \chi_{\lambda)}) \\ &= \chi_{[\lambda} \nabla_{\rho]} (\chi_\nu \nabla_\mu \chi_\lambda - \chi_\mu \nabla_\nu \chi_\lambda), \end{aligned}$$

expandindo o lado esquerdo,

$$\begin{aligned} \chi_\lambda \chi_{[\lambda} \nabla_{\rho]} \nabla_\mu \chi_\nu + \nabla_\mu \chi_\nu \chi_{[\lambda} \nabla_{\rho]} \chi_\lambda &= \chi_\nu \chi_{[\lambda} \nabla_{\rho]} \nabla_\mu \chi_\lambda + \nabla_\mu \chi_\lambda \chi_{[\lambda} \nabla_{\rho]} \chi_\nu \\ &\quad - \chi_\mu \chi_{[\lambda} \nabla_{\rho]} \nabla_\nu \chi_\lambda - \nabla_\nu \chi_\lambda \chi_{[\lambda} \nabla_{\rho]} \chi_\mu. \end{aligned}$$

Pela equação (2.68) e expandindo os termos antissimétricos, acha-se que:

$$\begin{aligned} -\nabla_\mu \chi_\nu \chi_\lambda \nabla_\rho \chi_\sigma + \chi_\lambda \chi_\rho \nabla_\sigma \nabla_\mu \chi_\nu - \chi_\lambda \chi_\sigma \nabla_\rho \nabla_\mu \chi_\nu &= \nabla_\nu \chi_\lambda \chi_\mu \nabla_\rho \chi_\sigma - \chi_\mu \chi_\rho \nabla_\sigma \nabla_\nu \chi_\lambda \\ &\quad + \chi_\mu \chi_\sigma \nabla_\rho \nabla_\nu \chi_\lambda + \chi_\nu \chi_\rho \nabla_\sigma \nabla_\mu \chi_\lambda \\ &\quad - \chi_\nu \chi_\sigma \nabla_\rho \nabla_\mu \chi_\lambda - \nabla_\mu \chi_\lambda \chi_\nu \nabla_\rho \chi_\sigma, \end{aligned}$$

rearranjando termos $\nabla_\rho \chi_\sigma$, obtém-se que

$$\begin{aligned} -\nabla_\rho \chi_\sigma (\chi_\lambda \nabla_\mu \chi_\nu + \chi_\mu \nabla_\nu \chi_\lambda - \chi_\nu \nabla_\mu \chi_\lambda) &= -\chi_\lambda \chi_\rho \nabla_\sigma \nabla_\mu \chi_\nu + \chi_\lambda \chi_\sigma \nabla_\rho \nabla_\mu \chi_\nu \\ &\quad - \chi_\mu \chi_\rho \nabla_\sigma \nabla_\nu \chi_\lambda + \chi_\mu \chi_\sigma \nabla_\rho \nabla_\nu \chi_\lambda \\ &\quad + \chi_\nu \chi_\rho \nabla_\sigma \nabla_\mu \chi_\lambda - \chi_\nu \chi_\sigma \nabla_\rho \nabla_\mu \chi_\lambda, \end{aligned}$$

o termo do lado esquerdo é nulo devido ao teorema de Frobenius. Aplicando a Eq.(2.74) na relação anterior, encontramos que

$$\begin{aligned} 0 &= (\chi_\lambda \chi_\rho R^\zeta_{\mu\nu\sigma} \chi_\zeta - \chi_\lambda \chi_\sigma R^\zeta_{\mu\nu\rho} \chi_\zeta + \chi_\mu \chi_\rho R^\zeta_{\nu\lambda\sigma} \chi_\zeta - \chi_\mu \chi_\sigma R^\zeta_{\nu\lambda\rho} \chi_\zeta \\ &\quad - \chi_\nu \chi_\rho R^\zeta_{\mu\lambda\sigma} \chi_\zeta + \chi_\nu \chi_\sigma R^\zeta_{\mu\lambda\rho} \chi_\zeta), \\ (\chi_\lambda \chi_\rho R^\zeta_{\mu\nu\sigma} - \chi_\lambda \chi_\sigma R^\zeta_{\mu\nu\rho}) \chi_\zeta &= (-\chi_\mu \chi_\rho R^\zeta_{\nu\lambda\sigma} + \chi_\mu \chi_\sigma R^\zeta_{\nu\lambda\rho} + \chi_\nu \chi_\rho R^\zeta_{\mu\lambda\sigma} - \chi_\nu \chi_\sigma R^\zeta_{\mu\lambda\rho}) \chi_\zeta. \quad (2.76) \\ 2\chi_\lambda R^\zeta_{\mu\nu[\sigma} \chi_{\rho]} \chi_\zeta &= 2\chi_\mu R^\zeta_{\nu\lambda[\rho} \chi_{\sigma]} \chi_\zeta - 2\chi_\nu R^\zeta_{\mu\lambda[\rho} \chi_{\sigma]} \chi_\zeta \end{aligned}$$

ou,

$$\chi_\lambda R^\zeta_{\mu\nu[\sigma} \chi_{\rho]} \chi_\zeta = 2 \chi_{[\mu} R^\zeta_{\nu]\lambda[\rho} \chi_{\sigma]} \chi_\zeta \quad (2.77)$$

multiplicando ambos os lados por $g^{\lambda\rho}$, acha-se que

$$\begin{aligned} 2 \chi_{[\mu} R^\zeta_{\nu]\lambda[\rho} \chi_{\sigma]} g^{\lambda\rho} \chi_\zeta &= g^{\lambda\rho} \chi_\lambda R^\zeta_{\mu\nu\sigma} \chi_\rho \chi_\zeta - \chi_\lambda g^{\lambda\rho} R^\zeta_{\mu\nu\rho} \chi_\sigma \chi_\zeta \\ &= \chi^\lambda R^\zeta_{\mu\nu\sigma} \chi_\lambda \chi_\zeta - \chi^\lambda R^\zeta_{\mu\nu\lambda} \chi_\sigma \chi_\zeta \\ &= (\cancel{\chi^\lambda \chi_\lambda})^0 R^\zeta_{\mu\nu\sigma} \chi_\zeta - \cancel{\chi^\lambda \chi^\zeta} R^\zeta_{\mu\nu\lambda} \chi_\sigma^0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \chi_{[\mu} R^\zeta_{\nu]\lambda[\rho} \chi_{\sigma]} g^{\lambda\rho} \chi_\zeta \\ &= \chi_{[\mu} R^\zeta_{\nu]\lambda\rho} g^{\lambda\rho} \chi_\sigma \chi_\zeta - \chi_{[\mu} R^\zeta_{\nu]\lambda\sigma} g^{\lambda\rho} \chi_\rho \chi_\zeta \\ &= \chi_{[\mu} R^\zeta_{\nu]\lambda} \chi_\sigma \chi_\zeta - \chi_{[\mu} R^\zeta_{\nu]\lambda\sigma} \chi^\lambda \chi_\zeta, \end{aligned}$$

isolando os termos de χ_ζ e tendo em vista que $R_{\nu\lambda}^{\lambda\zeta} = -R_{\nu}^{\lambda\zeta}$, segue que

$$\begin{aligned} \chi_{[\nu} R^\zeta_{\mu]} \chi_\sigma &= -\chi_{[\nu} R^\zeta_{\mu]\lambda\sigma} \chi^\lambda \\ &= R_{\lambda\sigma[\mu} \chi_{\nu]}^\zeta \chi^\lambda. \end{aligned}$$

O que pela equação (2.75) implica em

$$\chi_{[\nu} \nabla_{\mu]} \kappa = -\chi_{[\nu} R^\zeta_{\mu]} \chi_\zeta. \quad (2.78)$$

Utilizando a equação de Einstein produz-se:

$$\chi_{[\nu} \nabla_{\mu]} \kappa = -8\pi \chi_{[\nu} T_{\mu]}^\zeta \chi_\zeta \quad (2.79)$$

a condição de energia dominante produzem então que, no horizonte de evento, temos a seguinte relação:

$$\chi_{[\nu} \nabla_{\mu]} \kappa = 0.$$

Ou seja, a gravidade superficial de um buraco negro estacionário é uniforme por todo o horizonte de eventos, desde que o espaço-tempo seja estacionário e que a matéria obedeça a condição de energia dominante. Esta é a lei zero da termodinâmica de buracos negros.

2.2.3 Primeira, Segunda e Terceira Leis

A Eq.(2.74) $\nabla_\mu \nabla_\nu \chi_\lambda = -R_{\nu\lambda\mu}^\zeta \chi_\zeta$ pode ser simplificada ao se contrair o índice ν com μ :

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \chi^\nu = -R^\nu_\mu \chi^\mu \quad (2.80)$$

tal equação possui uma similaridade com as equações de Maxwell $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu$, em que $F^{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético e J^ν é a densidade de corrente. Note que para um tensor antissimétrico $K^{\mu\nu}$ é válido que

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \nabla_\nu K^{\nu\mu} &= -\nabla_\mu \nabla_\nu K^{\mu\nu} \\ &= -\nabla_\nu \nabla_\mu K^{\nu\mu}.\end{aligned}$$

O que implica

$$\begin{aligned}2\nabla_\nu \nabla_\mu K^{\mu\nu} &= (\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu) K^{\mu\nu} \\ &= -R_{\nu\mu\rho}^\mu K^{\rho\nu} - R_{\nu\mu\rho}^\nu K^{\mu\rho} \\ &= -R_{\nu\mu\rho}^\mu K^{\rho\nu} - R_{\rho\mu\nu}^\nu K^{\mu\rho} \\ &= 0\end{aligned}$$

ou seja, $\nabla_\nu (\nabla_\mu K^{\mu\nu}) = 0$, pode-se então definir uma corrente dada por

$$\nabla_\mu K^{\mu\nu} = -J^\nu$$

tal que

$$\nabla_\mu J^\mu = 0 \quad (2.81)$$

que é a equação da continuidade, logo existe uma quantidade q conservada igual a:

$$q = \alpha \int_{\mathcal{O}} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} J^\rho \quad (2.82)$$

onde α é uma constante, $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ é a forma do volume e \mathcal{O} é a região no espaço-tempo (do tipo espaço) no qual é feita a integração. A equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$q = \alpha \int_{\mathcal{O}} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \nabla_\sigma K^{\sigma\rho}. \quad (2.83)$$

Pelo teorema de Stokes:

$$q = \alpha \int_{\partial\mathcal{O}} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} K^{\lambda\rho} \quad (2.84)$$

mas como $K^{\lambda\rho} = \nabla^\lambda \chi^\rho$, pode-se afirmar que os vetores de Killing produzem quantidades conservadas iguais a:

$$q = \alpha \int_{\partial\mathcal{O}} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \nabla^\lambda K^\rho. \quad (2.85)$$

Na mecânica usual, a conservação da energia é uma consequência da simetria sob translação temporal. Na relatividade geral, devido a equivalência entre a massa e a energia, existe um vetor de Killing $\xi^\alpha = (\partial_t)^\alpha$ associado a conservação da massa M . De acordo com a Eq.(2.85), temos que

$$M = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{O}} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \nabla^\lambda \xi^\rho \quad (2.86)$$

é a massa conservada. Similarmente, existe uma quantidade conservada associada a simetria de rotações, ou seja existe um vetor de Killing $\Psi^\alpha = (\partial\phi)^\alpha$ que implica na conservação do

momento angular:

$$J = \frac{1}{16\pi} \int_{\partial\mathcal{O}} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \nabla^\lambda \Psi^\rho. \quad (2.87)$$

O mesmo acontece para a conservação da carga:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{O}} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \nabla^\lambda A^\rho. \quad (2.88)$$

Para unir tais quantidades conservadas, basta utilizar o vetor de Killing χ^α formado pelos vetores de Killing $\xi^\alpha, \Psi^\alpha, A^\alpha$. A primeira lei dos buracos negros descreve como um buraco negro interage em termos de trocas de energia com a matéria circundante. Para ilustrar esse conceito, consideremos dois buracos negros estacionários muito semelhantes: o buraco negro A e o buraco negro B . A distinção entre eles é que o buraco negro B é o resultado da absorção de uma partícula com massa, momento angular e carga pelo buraco negro A . Uma vez que o buraco negro é descrito por apenas três parâmetros, a sua massa M , a carga Q e o momento angular J [42], a diferença entre os buracos negros será dada pela diferença de tais parâmetros. Portanto, a diferença de massa é dada por [43]:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q, \quad (2.89)$$

em que κ é a gravidade superficial, A é a área de superfície do horizonte de eventos, Ω é a frequência de rotação e Φ é o potencial elétrico, todos esses parâmetros são calculados no horizonte de eventos do buraco negro A . Logo, se algo cair no buraco negro, a área do mesmo será alterada de acordo com a primeira lei.

A segunda lei afirma que a área da superfície de um buraco negro, medida no horizonte de eventos, nunca diminui com o tempo, $\delta A \geq 0$. A demonstração dessa afirmação foi feita por Hawking em [44], ela basicamente se baseia nos trabalhos de Penrose sobre a conjectura da censura cósmica fraca e na estrutura causal do espaço-tempo [45]. A demonstração está fora do escopo deste trabalho e, portanto, não será apresentada.

Bekenstein fez a hipótese de que buracos negros devem ter entropia [12], representada por S , e que esta é proporcional à área do horizonte de eventos. Uma boa ideia que sugere isto é que pela primeira lei da termodinâmica, temos que

$$dE = TdS - pdV + \mu dN, \quad (2.90)$$

e a primeira lei da mecânica de buracos negros afirma que $\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q$. Aqui, $\Omega \delta J$ representa o trabalho feito ao adicionar ou remover momento angular do buraco negro, similar ao trabalho $-p dV$ na termodinâmica clássica. Analogamente, $\Phi \delta Q$ corresponde ao trabalho realizado ao adicionar ou remover a carga elétrica, semelhante ao termo μdN . Assim, é natural supor, devido a analogia direta entre a primeira lei da termodinâmica e a primeira lei

da mecânica dos buracos negros, que

$$TdS = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A, \quad (2.91)$$

outra semelhança provém da segunda lei: a segunda lei da termodinâmica afirma que a entropia de um sistema é sempre maior ou igual a zero. Similarmente, a segunda lei da mecânica de buracos negros diz que a área de superfície de um buraco negro nunca diminui. Logo, faz sentido afirmar que a entropia de um buraco negro dependa da área do horizonte de eventos.

É bastante viável explorar campos quânticos livres em espaços-tempo curvos [46], revelando insights sobre o comportamento desses campos na presença de gravidade. Note que uma vez que não existe uma coordenada temporal que seja preferível, a noção de partículas se torna imprecisa. De forma que, de acordo com Unruh [47], dois observadores, um acelerado e outro em repouso, devem discordar sobre o estado de um campo quântico. O observador em repouso irá afirmar que o campo quântico está em seu estado de vácuo, ou seja com ausência de quanta, o outro observador, acelerado, irá afirmar que o campo possui um espectro de quanta análogo ao de um corpo negro, onde a temperatura da radiação está diretamente relacionada à aceleração do observador.

Em 1975, Hawking examinou um campo escalar quântico não massivo em um espaço-tempo resultante do colapso de uma estrela esférica. O mesmo visava determinar o estado final desse campo escalar, partindo do pressuposto de que o estado inicial era o vácuo, ou seja, sem quanta. Hawking concluiu que, em estágios muito avançados do tempo, o estado final do campo escalar correspondia a um espectro de quanta que era análogo ao de um corpo negro, com uma temperatura T_H dada por:

$$T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B}, \quad (2.92)$$

onde κ é a gravidade superficial, \hbar é a constante de Planck e k_B a constante de Boltzmann. Este foi um dos primeiros resultados que juntava a gravidade com a mecânica quântica e que demonstrava que buracos negros são corpos que emitem radiação, a radiação Hawking. Inserindo a expressão para T_H acima na Eq.(2.91), acha-se que

$$\frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B} dS = \frac{\kappa}{8\pi} dA \Rightarrow dS = \frac{k_B}{4\hbar} dA$$

integrando ambos os lados obtém-se que

$$S = \frac{k_B A}{4\hbar}. \quad (2.93)$$

Assim, a medida que o buraco negro emite radiação Hawking, o mesmo perde energia ou massa, logo o buraco negro evapora com o tempo e perde tamanho, consequentemente todo buraco negro é instável. Vale lembrar que o buraco negro deve estar em equilíbrio com a radiação de corpo negro de Hawking.

Por fim, a terceira lei afirma que mesmo que um buraco negro esteja evaporando devido a radiação Hawking, a sua gravidade superficial nunca será nula em um dado tempo posterior, afinal caso isso acontecesse a energia que define o mesmo seria também nula, violando assim um princípio fundamental da física.

2.3 Soluções de Vácuo

O tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ é a ferramenta responsável por descrever as propriedades da matéria e sua influência sobre a métrica do espaço-tempo. Todavia, a forma específica que tal tensor deve assumir para diferentes formas de matéria não é determinada pela TRG, mas sim por outros ramos da física. Conforme constatado por Einstein [48], esse aspecto faz com que a teoria da relatividade geral seja uma teoria aberta, de forma que a formulação completa da teoria requer a definição do tensor energia-momento para cada tipo de matéria ou campo estudado.

Petrov amenizou essa lacuna teórica com a sua classificação algébrica [49], que organiza as diferentes formas de matéria associadas ao tensor energia-momento. Nesta seção, a noção de vácuo e as suas duas principais soluções esfericamente simétricas: a descoberta por Schwarzschild em 1916 [50] e a descoberta por De Sitter em 1917 [51], serão apresentadas.

2.3.1 A Classificação Algébrica de Petrov

O vácuo é definido como um tipo de matéria que não permite nenhum referencial preferencial associado a ele. Em outras palavras, não há nada dentro do vácuo para servir como ponto de referência absoluto. Assim, qualquer referencial em movimento é igualmente válido em relação ao vácuo, pois não há nada dentro dele que possa fornecer um ponto de referência preferencial. Isso significa que não há um “repouso absoluto” em relação ao vácuo, pois não há nada dentro dele para estar em repouso em relação a ele. Portanto, qualquer referencial está em movimento conjunto com o vácuo, pois não há nada dentro dele que possa ser usado para distinguir entre diferentes referenciais de movimento. Quando há matéria presente, há pontos de referência que podem ser utilizados para definir um referencial preferencial. Por exemplo, se houver um objeto ou um conjunto de partículas presentes em um sistema, é possível usar esse objeto como um ponto de referência para medir o movimento de outras coisas em relação a ele. No entanto, quando estamos lidando com o vácuo, não há matéria presente para servir como ponto de referência. Não há nada dentro do vácuo que possa ser usado como um referencial preferencial para definir movimento. Essa propriedade se mantém não apenas para o vácuo padrão $T_{\mu\nu} = 0$, mas também para outras possibilidades.

Conforme demonstrado em [6], a relação entre os referenciais comóveis (ou próprios), aqueles nos quais a matéria ou o sistema físico está em repouso, e a estrutura do tensor energia-momento são fundamentalmente relacionadas. A unicidade de tal referencial, segundo a teoria clássica, implica em uma direção privilegiada que pode ser identificada como a velocidade do

meio em relação a um observador externo e caracteriza a existência de um meio material.

No caso de um campo eletromagnético livre, não há um único referencial onde todo o campo possa ser considerado em repouso, que é a definição clássica de vácuo, todavia a exigência de um único referencial comóvel não é necessária para definir um meio físico para certos tipos de sistemas, o que contrasta com a matéria ordinária. Portanto, três casos são possíveis: o sistema físico não possui nenhum referencial próprio (vácuo clássico), o sistema físico possui um único referencial comóvel (matéria clássica), e o sistema físico possui múltiplos referenciais comóveis (um tipo de matéria que apresenta propriedades de vácuo, mas não é vazio).

Uma das estruturas possíveis para o tensor T_μ^ν é ter dois pares de autovalores iguais, que será representado por $[(11)(11)]$, ou seja $T_0^0 = T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$, enquanto que $[1(111)]$ indica que três autovalores são iguais (espaciais) e um é distinto (temporal). Essa notação oferece uma maneira compacta de classificar o tipo de simetria do tensor, facilitando a interpretação das propriedades físicas associadas [6].

Se nenhum dos autovalores associados às componentes temporais e espaciais forem iguais, então o sistema de referência comóvel é único. Assim, as classificações $[1111]$, $[11(11)]$ e $[1(111)]$ correspondem a formas de matéria que possuem um único referencial próprio, enquanto que $[(11)11]$, $[(11)(11)]$, $[(111)1]$ e $[(1111)]$ representam formas de matéria que não possuem a unicidade.

Para sistemas físicos formados por partículas sem massas (como no caso de um campo eletromagnético livre do tipo $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0, \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = 0)$), não existe um sistema de referência comóvel bem definido, assim não há um meio físico tradicional que se move com uma velocidade definida inferior à da luz. O comportamento do campo eletromagnético em um vácuo ideal é independente de qualquer sistema de referência comóvel, tornando desnecessário e impossível, de acordo com a teoria da relatividade especial, definir um sistema com essas propriedades.

Se todos os autovalores do tensor energia-momentum são iguais, i.e. $[(1111)]$. Então, qualquer referencial inercial pode ser considerado comóvel com a matéria descrita por esse tensor, porque não existe uma direção espacial preferida - o sistema é isotrópico. Isso cria um cenário onde o meio físico se comporta como se fosse um “vácuo”, no sentido de que não há uma direção espacial específica associada ao movimento da matéria. A propriedade do vácuo mencionada aqui refere-se à isotropia e homogeneidade do espaço vazio: o vácuo não tem uma direção preferencial, e as propriedades físicas são as mesmas em qualquer direção.

Do ponto de vista macroscópico, essa matéria com tais características pode ser considerada como um “meio tipo vácuo” porque suas interações com outras partículas não dependem da velocidade relativa. Em qualquer referencial, as interações seriam as mesmas, o que reflete a propriedade de isotropia e a ausência de direção espacial preferida.

Existe a possibilidade de um “meio termo” que são os tensores energia-momento com as características $[(11)11]$, $[(11)(11)]$. Tais estados de matéria são caracterizados por uma

direção de vácuo, pois ao longo de uma dada direção as interações desse tipo de matéria com a ordinária não dependem da componente da velocidade. Assim, o vácuo não é unicamente caracterizado pelo tensor energia-momentum do tipo $T_{\mu\nu} = 0$, mas também conforme veremos por soluções do tipo $T_0^0 = T_1^1, T_2^2 = T_3^3$.

Para os tensores energia-momentum que caracterizam o vácuo clássico, $T_{\mu\nu} = 0$, duas soluções esfericamente simétricas se destacam devido à sua relevância tanto em cenários astrofísicos quanto cosmológicos. A primeira foi a descoberta por Schwarzschild em 1916 [50] e representa o campo gravitacional externo a um corpo esfericamente simétrico e estático no vácuo, sendo uma das primeiras soluções exatas das equações de Einstein.

Enquanto que a outra solução de bastante interesse foi a proposta por Willem De Sitter em 1917 [51]. Tal solução representa um universo em expansão com constante cosmológica e esfericamente simétrico. Essa métrica é fundamental no entendimento do universo em grandes escalas, essencialmente no caso de um universo em expansão acelerada.

2.3.2 A Solução de Schwarzschild

A solução esfericamente simétrica mais conhecida das equações de campo de Einstein é a métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - (r_g/r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.94)$$

onde $r_g = 2M$ e M é a massa da fonte medida por um observador distante. A geometria de Schwarzschild descreve o campo gravitacional gerado por uma massa esférica no espaço vazio fora da massa. Nessa situação, o tensor energia-momento que influencia a geometria é nulo em todas as regiões, exceto em um ponto singular em $r = 0$, onde a densidade de energia é infinita.

Para obter a métrica (2.94), considere a métrica esfericamente simétrica da Eq.(2.2), as componentes não nulas do símbolo de Christoffel, Eq.(2.10), são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{g'}{2g}, & \Gamma_{tt}^r &= \frac{f'}{2g}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{g}, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{r\sin^2\theta}{g}, \\ \Gamma_{\theta r}^\theta &= \Gamma_{\pi r}^\phi = \frac{1}{r}, & \Gamma_{tr}^t &= \frac{f'}{2f}, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin\theta\cos\theta, & \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \cot\theta. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Aqui a linha indica uma derivada em relação a r . Com as componentes do símbolo de Christoffel obtidas, facilmente se calcula as componentes não nulas do tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{f''}{2g} - \frac{f'}{4g}\left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right) + \frac{f'}{rg}, \\ R_{rr} &= -\frac{f''}{2f} + \frac{f'}{4f}\left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right) + \frac{g'}{rg}, \\ R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{1}{g} - \frac{r}{2g}\left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right), \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta R_{\theta\theta}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Como $T_{\mu\nu} = 0$, então pela equação (2.59) segue que $R_{\mu\nu} = 0$, assim

$$R_{tt} = \frac{1}{g} \left[\frac{f''}{2} - \frac{f'}{4} \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) + \frac{f'}{r} \right] = 0 \quad (2.97)$$

$$R_{rr} = \frac{1}{f} \left[-\frac{f''}{2} + \frac{f'}{4} \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) + \frac{fg'}{rg} \right] = 0 \quad (2.98)$$

como $f, g \neq 0$, segue que

$$\begin{aligned} 0 = gR_{tt} + fR_{rr} &= \frac{fg'}{rg} + \frac{f'}{r} \\ &= \frac{1}{rg} (fg' + f'g) \\ &= \frac{1}{rg} \frac{d}{dr} (fg) \end{aligned} \quad (2.99)$$

ou seja, o produto fg é constante em todo o espaço-tempo. Como o espaço-tempo é Minkowskiano no infinito, então $f \rightarrow 1$ e $g \rightarrow 1$ quando $r \rightarrow \infty$. Logo, a constante fg é unitária. Consequentemente,

$$g(r) = \frac{1}{f(r)}. \quad (2.100)$$

Para se obter a forma explícita de tais funções basta usar a equação $R_{\theta\theta} = 0$ com $g = 1/f$, obtendo assim

$$0 = 1 - f(r) - rf' \Rightarrow f(r) = 1 + \frac{C}{r}. \quad (2.101)$$

Longe da fonte é esperado que no limite clássico a gravitação seja Newtoniana. De fato, para campos fracos temos que $g_{00} \simeq -(1 + 2\phi)$ (Para uma discussão acerca desse tópico em detalhes, consulte a seção 3.4 de [36]). O potencial Newtoniano ϕ é igual a $-M/r$, de modo que $C = -2M$. Portanto, a métrica do buraco negro de Schwarzschild é igual a:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - (2M/r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Tal solução tem dois problemas aparentes: em $r = 0$, a métrica é indefinida e em $r = 2M$ a parte radial cresce indefinidamente enquanto a parte temporal desaparece. Essas são as singularidades da métrica, todavia a singularidade em $r = 2M$ (horizonte de eventos) pode ser removida por uma transformação de coordenada e portanto trata-se de uma singularidade aparente [32]. Por outro lado, a singularidade em $r = 0$ trata-se de uma singularidade real, uma vez que o escalar de Kretschmann é igual a:

$$K = R_{\mu\nu\sigma\rho} R^{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{12r_g^2}{r^6} = \frac{48M^2}{r^6} \quad (2.102)$$

e diverge para $r = 0$ (singularidade). As condições de energia são obviamente satisfeitas uma vez que $T_{\mu\nu} = 0$ e a temperatura de Hawking é igual a:

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_g}. \quad (2.103)$$

Conforme será mostrado ao longo deste trabalho, a solução de Dymnikova para o vácuo esfericamente simétrico retira a singularidade em $r = 0$ e portanto oferece uma descrição alternativa dos buracos negros, especialmente em contextos onde o comportamento quântico e a ausência de singularidades assumem um papel fundamental.

2.3.3 A Solução de De Sitter

Em 1922, o físico Alexander Friedmann ao considerar o universo como sendo homogêneo e isotrópico, o que é uma afirmação razoável em grandes escalas, encontrou uma solução para as equações de Einstein que mostravam que o fator de escala do universo, uma função que descreve o tamanho relativo do universo ao longo do tempo, deveria variar com o tempo [52]. Assim, contrariando a visão científica da época o universo deveria ser dinâmico ao invés de estático.

Em uma tentativa de resolver essa questão, Einstein introduziu uma constante a suas equações em uma tentativa não muito frutífera de contrabalancear a tendência do universo de expandir ou contrair [53]. Posteriormente, tal constante adquiriu um novo significado, sendo responsável pela expansão acelerada do universo e fundamentada em observações de supernovas [54]. Assim, as equações de Einstein podem ser reescritas como:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.104)$$

Se novamente assumirmos uma solução de vácuo para a métrica esfericamente simétrica da Eq.(2.2) acha-se as mesmas componentes não nulas do tensor de Ricci dadas pela Eq.(2.96), porém agora $T_{\mu\nu} = 0$ implica que

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^\Lambda. \quad (2.105)$$

onde agora $T_{\mu\nu}^\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi} g_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momentum do vácuo. A constante deve ser tal que só adquira um significado importante em escalas cosmológicas, por isso a mesma é denominada de constante cosmológica. Para resolver a equação (2.105) note que

$$R_{\mu\nu} = (R/2 - \Lambda)g_{\mu\nu} \Rightarrow R^\rho_\nu = (R/2 - \Lambda)\delta^\rho_\nu$$

contraindo ρ com ν

$$R = \left(\frac{R}{2} - \Lambda \right) (4) \Rightarrow R = 4\Lambda$$

assim, a Eq.(2.105) pode ser reescrita como

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.106)$$

as componentes não nulas do tensor de Ricci foram calculadas na Eq.(2.96), desse modo

$$R_{tt} = \frac{1}{g} \left[\frac{f''}{2} - \frac{f'}{4} \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) + \frac{f'}{r} \right] = -\Lambda f$$

$$R_{rr} = \frac{1}{f} \left[-\frac{f''}{2} + \frac{f'}{4} \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) + \frac{fg'}{rg} \right] = \Lambda g$$

de modo que

$$gR_{tt} + fR_{rr} = 0$$

ou seja,

$$\frac{f'}{r} + \frac{fg'}{rg} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (fg) = 0 \Rightarrow fg = \text{constante}$$

pelos mesmos argumentos dados no caso de Schwarzschild, obtemos novamente que $g(r) = 1/f(r)$. Para se obter a forma explícita de tais funções basta usar a equação $R_{\theta\theta} = \Lambda g_{\theta\theta} = \Lambda r^2$, ou seja

$$\Lambda r^2 = 1 - f - rf' \Rightarrow \Lambda r^2 = 1 - \frac{d}{dr} (fr)$$

integrando,

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda r^3}{3} &= r - fr + C \Rightarrow \frac{\Lambda r^2}{3} = 1 - f + \frac{C}{r} \\ f(r) &= 1 + \frac{C}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \end{aligned}$$

novamente, para campos fracos temos que $g_{00} \simeq -(1 + 2\phi)$ e $\Lambda \rightarrow 0$, assim $C = -2M$ e finalmente, temos que

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{r^2}{r_0^2} \quad (2.107)$$

onde $r_0^2 = 3/\Lambda$ é o raio de De Sitter. Portanto, a métrica de De Sitter é igual a:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_g}{r} - \frac{r^2}{r_0^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - (r_g/r) - (r^2/r_0^2)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.108)$$

para o caso $r_g = 0$ (espaço-tempo vazio) temos que

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.109)$$

A solução de De Sitter descreve um universo com uma curvatura positiva constante, $R = 4\Lambda$, e um vácuo com uma energia escura dominante. A solução de Schwarzschild é recuperada para $\Lambda = 0$ e as diferenças entre as soluções só se tornam evidentes para valores radiais maiores [55], uma vez que para valores de r próximos de zero o termo r^2/r_0^2 da solução é insignificante perante r_g/r . Todavia, à medida que r cresce tal termo passa a contribuir significativamente. Contudo, a métrica não é assintoticamente plana no infinito devido a divergência de r^2/r_0^2 . O escalar de Kretschmann da solução é igual a:

$$K = R_{\mu\nu\sigma\rho} R^{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{24}{r_0^4}$$

e diverge para $r_0 = 0$. Por fim, a temperatura de Hawking é igual a:

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \frac{df}{dr} \Big|_{r=r_0} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2r}{r_0^2} \right) \Big|_{r=r_0} = -\frac{1}{2\pi r_0}. \quad (2.110)$$

O horizonte cosmológico no espaço de De Sitter age como uma barreira para os observadores internos, e a gravidade superficial pode ser definida com um sinal oposto ao usual, sendo esse o motivo do sinal negativo. Em um buraco negro, para um observador externo, qualquer partícula que cruzar o horizonte nunca mais poderá sair. Já para o caso de De Sitter um objeto que se afasta de um observador localizado em uma região central pode cruzar o horizonte cosmológico, e depois disso, a luz que ele emite nunca mais conseguirá alcançar o observador. Assim, o horizonte cosmológico não atrai objetos para um centro, mas sim define uma região além da qual um observador não pode receber informações.

No próximo capítulo veremos que a temperatura de Hawking do buraco negro de Dymnikova tende para a temperatura acima em algumas condições.

3 BURACO NEGRO REGULAR DE DYMNIKOVA

Antes de investigar a extensão para dimensões superiores do buraco negro de Dymnikova e explorar suas aplicações correspondentes, faz-se necessário compreender previamente o conceito de um buraco negro regular e a solução de Dymnikova para quatro dimensões.

Para explorar um buraco negro regular, é essencial primeiro compreender o conceito de um buraco negro e suas propriedades fundamentais. Em seguida, abordaremos a questão da regularidade, que está intimamente ligada à presença de singularidades na curvatura do espaço-tempo. Após essa contextualização inicial, nos concentraremos na solução proposta por Dymnikova, examinando sua formulação matemática. Isso envolverá a determinação das grandezas de curvatura, análise do tensor momento-energia, resolução das equações de Einstein, estudo de geodésicas e discussão das condições de energia.

3.1 Buracos Negros Regulares

Buracos negros regulares são uma classe de buracos negros caracterizados por terem singularidades nas coordenadas (horizontes), mas não possuem singularidades essenciais em todo o espaço-tempo. Em diversos trabalhos [3, 56–58], a identificação de um buraco negro regular frequentemente envolve considerar um espaço-tempo onde os invariantes de curvatura permanecem finitos em todos os pontos, especialmente no centro do buraco negro. Isso está ligado à conjectura de restrição de curvatura de Markov, que postula que os invariantes de curvatura devem ser uniformemente limitados por um valor universal específico.

A conjectura de restrição de curvatura de Markov [59–61], postula que os invariantes de curvatura devem ser uniformemente limitados por um valor universal específico. Todavia, tal abordagem não é bem sucedida no buraco negro de Taub-NUT [58], tendo em vista que as geodésicas tipo-tempo e nula são incompletas no horizonte. Uma alternativa seria utilizar a completude da geodésica para determinar a regularidade do espaço-tempo, onde um espaço-tempo seria regular caso as geodésicas do tipo-tempo ou nula fossem completas [41], contudo até mesmo esse caminho sofre de complicações [62], em que encontra-se geodésicas completas porém os seus invariantes de curvatura divergem, o que por sua vez contraria a conjectura de Markov. Tal discussão sugere que tais estratégias devem ser utilizadas em conjunto na análise da regularidade de um buraco negro.

Sakharov e Gliner [5, 6] foram alguns dos primeiros a afirmar que singularidades essenciais poderiam ser eliminadas, desde que o vácuo fosse substituído por um meio semelhante ao vácuo imbuído com uma métrica de De Sitter. Os trabalhos de Dymnikova, Gurevich e Straubinsky avançaram tal ideia [63–65] e o primeiro modelo de buraco negro regular foi desenvolvido por Bardeen [7], onde o mesmo substituiu a massa do buraco negro de Schwarzschild por uma função radial, isto por sua vez faz com que a singularidade essencial do escalar de

Kretschmann seja removida e a curvatura de Ricci seja positiva nas vizinhanças do centro do buraco negro.

A primeira interpretação do buraco negro de Bardeen foi apresentada 32 anos após sua descoberta [66]. Eles propuseram uma fonte, se baseando em um monopolo magnético no contexto da eletrodinâmica não linear, que produz a solução de Bardeen. Esta abordagem difere do método usual de encontrar soluções para buracos negros resolvendo as equações de campo de Einstein. Neste método, começa-se por especificar as soluções desejadas para buracos negros regulares e monopolo magnético, logo após obtém-se a ação correspondente da eletrodinâmica não-linear.

Existem duas formas de se construir um buraco negro regular: uma bastante usual é a de resolver as equações de Einstein que são obtidas com certos tipos de fontes especiais, enquanto que a outra abordagem é assumir que os buracos negros regulares são correções quânticas dos buracos negros clássicos com singularidades [67, 68], assim os buracos negros regulares serviriam para se estudar o limite clássico de buracos negros quânticos.

As pesquisas mais recentes nesse campo visam demonstrar as diferenças entre os buracos negros regulares e os singulares, o que por sua vez pode orientar futuras investigações em gravidade quântica. O estudo vai além de questões relativas a singularidades e pode ser estendido para a termodinâmica, modos quasi-normais, shadows, etc. Nessa seção, será feita uma breve discussão sobre a termodinâmica, as condições de energia e alguns exemplos de buracos negros regulares serão apresentados.

3.1.1 Termodinâmica de Buracos Negros Regulares

A termodinâmica dos buracos negros regulares é difícil de ser definida devido a termos adicionais na primeira lei da termodinâmica, o que por sua vez produz certas complicações no estabelecimento de correspondências entre quantidades mecânicas e termodinâmicas [69]. Especificamente, aparecem termos adicionais nas leis dos buracos negros regulares, em que o número de termos adicionais é relacionado com o número de parâmetros da Lagrangiana da matéria. Além disso, alguns buracos negros regulares não obedecem a lei da área, isto é, $S \neq A/4$. Por exemplo, o buraco negro de Hayward [70] com

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \frac{r^3}{r^3 + 2M\ell^2} \quad (3.1)$$

onde ℓ é um parâmetro de regularização. A condição de horizonte $f(r_h) = 0$ fornece a massa do buraco negro em termos do raio do horizonte de eventos:

$$M = \frac{r_h^3}{2(r_h^2 - \ell^2)} \quad (3.2)$$

a expressão para a temperatura de Hawking é dada por:

$$\begin{aligned} T_H &= \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + 2M\ell^2} \right) \Big|_{r=r_h} \\ &= \frac{1}{4\pi r_h} - \frac{3\ell^2}{4\pi r_h^3} \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde após a derivada o valor obtido para M na Eq.(3.2) é substituído. O que produz a seguinte entropia de acordo com a primeira lei da termodinâmica,

$$S = \int_{r_-}^{r_+} \frac{dM}{T} = S_{BH} + \Delta S \quad (3.4)$$

onde S_{BH} é a entropia de Bekenstein-Hawking

$$S_{BH} = \pi(r_+^2 - r_-^2) \quad (3.5)$$

e

$$\Delta S = \frac{\pi\ell^4(r_+^2 - r_-^2)}{(r_-^2 - \ell^2)(r_+^2 - \ell^2)} + 2\pi\ell^2 \ln \left(\frac{r_+^2 - \ell^2}{r_-^2 - \ell^2} \right) > 0 \quad (3.6)$$

pois $r_+ > r_- > \ell$. Ou seja, se utilizarmos $dS = dM/T$ a lei da área não será mais válida. Agora, um exemplo contrário, a lei da área é obedecida pelo buraco negro regular, mas $dS \neq dM/T$. A Lagrangiana do buraco negro de Bardeen contém dois parâmetros, a massa M e carga magnética q [66]. Consequentemente, a primeira lei se escreve como [69]:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Psi_H dq + K_M dM + K_q dq \quad (3.7)$$

em que κ e Ψ_H são a gravidade superficial e o potencial magnético, respectivamente. Os parâmetros extras dificultam a construção de possíveis relações entre variáveis termodinâmicas e mecânicas. Visando corrigir isso, Fan and Wang adicionaram um parâmetro α na ação, o que por sua vez produz a seguinte lei:

$$dE = TdS + \Psi_H dQ_m + \Pi d\alpha \quad (3.8)$$

em que as variáveis $E = M$, $Q_m = \sqrt{Mq/2}$ e $\alpha = q^3/M$ não são independentes. As demais correspondências entre variáveis termodinâmicas e mecânicas são: $T \rightarrow \kappa/2\pi$ e $S \rightarrow A/4$, todavia

$$\frac{A}{4} = S \neq \int \frac{dM}{T} \quad (3.9)$$

pois se $dQ_m = 0 = d\alpha$, então M é uma constante, logo $\int dM/T = 0$, lembre-se que a integral acima deve ser calculada sob as condições de Q e α serem constantes. Se somente um parâmetro fosse fixado, como $dQ_m = 0$, então

$$\frac{A}{4} = \int \frac{dM}{T} \left(1 + \frac{32Q_m^6\Pi}{M^5} \right) \neq \int \frac{dM}{T} \quad (3.10)$$

a quebra de tal relação fez com que vários físicos abandonassem a lei da área-entropia [71, 72],

$$S = \int \frac{dE}{T} \neq \frac{A}{4}. \quad (3.11)$$

Em estudos relacionados aos buracos negros regulares dentro do contexto da gravidade de Einstein, é importante que a lei da área continue sendo válida, isto é, $S = A/4$. Também é essencial que cada variável termodinâmica seja independente da primeira lei termodinâmica, o que significa que a mesma deve ser determinada independentemente dela, contudo a fórmula termodinâmica $S = \int dE/T$ deve ser válida. Uma excelente discussão sobre esse tópico é feita em [4].

3.1.2 Condições de Energia para Buracos Negros Regulares

As condições de energia desempenham um papel fundamental no estudo dos buracos negros regulares, uma vez que tanto podem ser utilizadas como um parâmetro para determinar se um buraco negro regular é realístico, quanto estão intimamente ligadas à formação deles. Acreditava-se que os buracos negros regulares poderiam ser formados com a substituição da singularidade em seus centros por um núcleo de De Sitter, contudo isso produz uma violação da condição forte de energia.

A condição de energia forte [73] nos diz que

$$R_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta \geq 0 \quad (3.12)$$

ou,

$$\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta} \right) v^\alpha v^\beta \geq 0 \Rightarrow T_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta \geq -\frac{1}{2}T$$

em que v^α é a 4-velocidade. Para colocarmos a condição de energia em uma forma mais concreta, assumamos que o tensor energia-momentum possa ser decomposto como

$$T^{\alpha\beta} = \rho \hat{e}_0^\alpha \hat{e}_0^\beta + p_1 \hat{e}_1^\alpha \hat{e}_1^\beta + p_2 \hat{e}_2^\alpha \hat{e}_2^\beta + p_3 \hat{e}_3^\alpha \hat{e}_3^\beta \quad (3.13)$$

pois $g^{\alpha\beta} = \eta^{\mu\nu} \hat{e}_\mu^\alpha \hat{e}_\nu^\beta$, em que $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. De forma similar, o 4-vetor velocidade pode ser escrito como

$$v^\alpha = \gamma(\hat{e}_0^\alpha + a\hat{e}_1^\alpha + b\hat{e}_2^\alpha + c\hat{e}_3^\alpha), \quad \gamma = (1 - a^2 - b^2 - c^2)^{-1/2} \quad (3.14)$$

em que a, b, c são funções das coordenadas tais que $a^2 + b^2 + c^2 < 1$. Consequentemente,

$$T_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta \geq -\frac{1}{2}T \Rightarrow \gamma^2(\rho + a^2p_1 + b^2p_2 + c^2p_3) \geq \frac{1}{2}(\rho - p_1 - p_2 - p_3) \quad (3.15)$$

para $a = b = c = 0$, obtém-se $\gamma = 1$, e a relação acima se reduz para

$$\rho + \sum_{i=1}^3 p_i \geq 0. \quad (3.16)$$

Qual seria a interpretação física da equação acima? Lembre-se que da equação de Raychaudhuri [74]

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = -R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \quad (3.17)$$

onde τ é o tempo próprio e Θ representa a expansão da congruência geodésica. Aqui, termos de ordem maior associados com expansão podem ser ignorados, rotação e cisalhamento, uma vez que estamos interessados apenas no papel da curvatura e das condições de energia e os demais termos, em geral, são pequenos em métricas esfericamente simétricas. Fazendo novamente $v^\mu = (1, 0, 0, 0)$, encontra-se que

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\tau} &= -R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = -8\pi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta} \right) v^\alpha v^\beta \\ &\Rightarrow -R_{00} = -4\pi \left(\rho + \sum_{i=1}^3 p_i \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

A violação da condição forte de energia, $\rho + \sum_{i=1}^3 p_i < 0$, significa que Θ aumenta com o tempo próprio, ou seja, a interação é repulsiva.

3.1.3 Exemplos de Buracos Negros Regulares

A solução de Bardeen para um buraco negro regular é reconhecida como a primeira solução regular desenvolvida, tornando-se crucial para esse campo de estudo. Tal solução é caracterizada por uma métrica esfericamente simétrica com uma massa variável, recentemente essa métrica foi interpretada como sendo uma solução exata das equações de Einstein acopladas a eletrodinâmica não linear [75] e é dada conforme expresso a seguir:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2), \quad (3.19)$$

onde

$$m(r) = \frac{Mr^3}{(r^2 + b^2)^{3/2}}; \quad (3.20)$$

em que b é um parâmetro de comprimento e M é a massa do sistema. Aqui $G = c = 1$. Observe que quando $b \rightarrow 0$ temos que $m(r) \rightarrow M$ e a solução se reduz a de Schwarzschild. Para a análise de regularidade, calculemos os seus invariantes de curvatura

$$R = \frac{6Mb^2(4b^2 - r^2)}{(r^2 + b^2)^{7/2}}, \quad (3.21)$$

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{18M^2b^4(8b^4 - 4b^2r^2 + 13r^4)}{(r^2 + b^2)^7}, \quad (3.22)$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{12M^2(8b^8 - 4b^6r^2 + 47b^4r^4 - 12b^2r^6 + 4r^8)}{(r^2 + b^2)^7}. \quad (3.23)$$

Observe que para $r \rightarrow 0$, temos que

$$R = \frac{24M}{b^3}, \quad R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{144M^2}{b^6}, \quad R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{96M^2}{b^6} \quad (3.24)$$

que são regulares desde que $b \neq 0$. Todavia, as condições de energia não são respeitadas para essa solução, pois pelas equações de Einstein, temos que as componentes não nulas do tensor de Einstein são iguais a:

$$G^0_0 = -\frac{6Mb^2}{(r^2 + b^2)^{5/2}} = G^1_1 \quad (3.25)$$

$$G^2_2 = \frac{3Mb^2(3r^2 - 2b^2)}{(r^2 + b^2)^{7/2}} = G^3_3 \quad (3.26)$$

assim, para o tensor energia-momentum $T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho, p_r, p_\ell, p_\ell)$, as equações de Einstein implicam que

$$\rho = \frac{3Mb^2}{4\pi(r^2 + b^2)^{5/2}} = -p_r, \quad \text{e} \quad p_\ell = \frac{3Mb^2(3r^2 - 2b^2)}{8\pi(r^2 + b^2)^{7/2}}. \quad (3.27)$$

Consequentemente,

$$\rho + p_r + p_\ell + p_\ell = \frac{6Mb^2(3r^2 - 2b^2)}{8\pi(r^2 + b^2)^{7/2}} \quad (3.28)$$

note que todos os termos com exceção de $(3r^2 - 2b^2)$ são definidamente positivos, porém se $r < \frac{\sqrt{6}}{3}b$, então tal soma será negativa, pois nesse caso $3r^2 - 2b^2 < 0$. Analogamente, a condição de energia nula também é violada:

$$\rho + p_\ell = \frac{Mb^2(9r^2 - 4b^2)}{8\pi(r^2 + b^2)^{7/2}} \quad (3.29)$$

se $r < \frac{2b}{3}$, então $\rho + p_\ell < 0$, o que viola a condição de energia nula. A existência do núcleo De Sitter resulta na quebra das condições de energia.

3.2 A Solução de Dymnikova

A solução de Dymnikova [16] adota uma distribuição de energia esfericamente simétrica que decai de maneira suave em direção ao centro do buraco negro, evitando a singularidade e proporcionando um núcleo central com uma densidade finita. Isso é alcançado ao considerar uma métrica do tipo De Sitter no centro, que é combinada com uma métrica de Schwarzschild na região externa. A vantagem de tal solução é que ao contrário daquela apresentada por Bardeen [7], a mesma se trata de uma solução de vácuo esfericamente simétrica.

Iniciaremos nossa abordagem ao definir a métrica proposta por Dymnikova [16]. A partir dessa formulação, examinaremos suas propriedades, realizando uma análise da geometria por meio dos tensores e invariantes de curvatura para verificar sua regularidade e se a mesma satisfaz as condições de energia. Além disso, conduziremos aplicações que incluem a

avaliação de grandezas termodinâmicas, tais como a temperatura de Hawking e a capacidade térmica. Adicionalmente, empreenderemos uma análise das órbitas de partículas próximas ao buraco negro, proporcionando uma visão abrangente e aprofundada do modelo proposto por Dymnikova.

3.2.1 Efeito *Schwinger* e a Métrica de Dymnikova

Muitos efeitos quânticos surgem do fato do vácuo apresentar flutuações, como o efeito Casimir [76], que é um efeito perturbativo onde as interações são fracas o suficiente para serem consideradas como pequenas perturbações da solução base, e o efeito *Schwinger* [77], que é um efeito não perturbativo em que a taxa de criação de pares não pode ser descrita por uma expansão em série de potências da constante de acoplamento, ao invés disso, ela é exponencialmente suprimida para campos fracos e torna-se significativa apenas para campos muito intensos, seguindo uma forma como $\exp\left(-\frac{\pi\hbar m_e^2 c^3}{eE}\right)$.

O efeito *Schwinger* é caracterizado pela aplicação de um campo elétrico E intenso, da ordem de 10^{18} V/m, que extrai pares de elétrons e pósitrons diretamente do vácuo. O correspondente gravitacional é derivado de maneira heurística [25] ao relacionar o campo elétrico com a tensão gravitacional, que é caracterizada por um termo de curvatura, dado por

$$E \sim r^{-3}, \quad \frac{E_c}{E} = \frac{r^3}{r_0^2 r_g} \quad (3.30)$$

onde $E_c = \pi\hbar m_e^2/e$ é o campo elétrico crítico necessário para a produção abundante do par, $r_g = 2M$ é o raio de Schwarzschild e r_0 é relacionado a curvatura do núcleo de De Sitter. Em quatro dimensões, o perfil de densidade de Dymnikova pode ser visto como um análogo gravitacional do efeito *Schwinger* [78]:

$$\rho(r) = \rho_0 \exp\left(-\frac{r^3}{r_g r_0^2}\right). \quad (3.31)$$

No caso esfericamente simétrico, temos

$$T_2^2 = T_3^3 \quad \text{e} \quad T_0^0 = T_1^1 \quad (3.32)$$

com as demais componentes sendo nulas. De acordo com a classificação algébrica de Petrov este tensor energia-momentum possui um conjunto infinito de referenciais co-móveis. Portanto, pode ser interpretado como sendo o tensor energia-momentum que descreve o vácuo esfericamente simétrico. Em geral este vácuo é anisotrópico. A seguir será mostrado que o vácuo esfericamente simétrico pode gerar uma solução de buraco negro que é regular em $r = 0$ e em qualquer outro lugar.

A métrica esfericamente simétrica mais geral possui a seguinte forma

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.33)$$

onde $v(r)$ e $\lambda(r)$ são funções radiais. Tal métrica produz as seguintes componentes não nulas do tensor de Einstein

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{e^{-\lambda+v}(-1+e^\lambda+r\lambda')}{r^2} \\ G_{11} &= \frac{1-e^\lambda+r\nu'}{r^2} \\ G_{22} &= \frac{1}{4}e^{-\lambda}r(2\nu'+r\nu'^2-\lambda'(2+r\nu')+2r\nu'') \\ G_{33} &= G_{22}\sin^2\theta. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Pelas equações de Einstein segue que

$$T_{\mu\nu} = \frac{G_{\mu\nu}}{8\pi} \quad (3.35)$$

devido a (3.32) é necessário calcular o tensor misto, logo basta usar o fato de que $T_\mu{}^\nu = T_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \frac{G_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}}{8\pi}$, assim

$$T_0{}^0 = \frac{G_{0\alpha}g^{\alpha 0}}{8\pi} = \frac{G_{00}g^{00}}{8\pi} = \left(\frac{1}{8\pi}\right) \left[e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} \right] \quad (3.36)$$

e

$$T_1{}^1 = \frac{G_{1\alpha}g^{\alpha 1}}{8\pi} = \frac{G_{11}g^{11}}{8\pi} = \left(\frac{1}{8\pi}\right) \left[e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} \right]. \quad (3.37)$$

Uma vez que $T_0{}^0 = T_1{}^1$, obtém-se

$$\cancel{\left(\frac{1}{8\pi}\right)} \left[e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} \right] = \cancel{\left(\frac{1}{8\pi}\right)} \left[e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} \right]$$

i.e.

$$\lambda' + \nu' = 0 \Rightarrow \lambda + \nu = \text{constante} \quad (3.38)$$

sem perca de generalidade, pode-se fazer $\lambda + \nu = 0 \Rightarrow \lambda = -\nu$. Devido a (3.31) podemos fazer a seguinte hipótese

$$\rho(r) = -T_0{}^0 = \rho_0 \exp\left(-\frac{r^3}{r_0^2 r_g}\right) \quad (3.39)$$

onde r_0 é conectado com ρ_0 através da relação de De Sitter:

$$r_0^2 = \frac{3}{8\pi\rho_0}. \quad (3.40)$$

Por (3.36) segue que (3.39) pode ser escrita como:

$$-\rho_0 \exp\left(-\frac{r^3}{r_0^2 r_g}\right) = \left(\frac{1}{8\pi}\right) \left[e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} \right]$$

multiplicando ambos os lados por $8\pi r^2$ e integrando tal equação em relação a r , acha-se que:

$$-\Lambda \int_0^r \exp\left(-\frac{r'^3}{r_0^2 r_g}\right) r'^2 dr' = \int_0^r e^{-\lambda} dr' - \int_0^r r' e^{-\lambda} \lambda' dr' - \int_0^r dr'$$

na integral a esquerda $r'^3/r_0^2 r_g = u \Rightarrow r'^2 dr = (r_0^2 r_g/3) du$ e que para a terceira integral na direita $e^{-\lambda} - \frac{d}{dr'}(r' e^{-\lambda}) = r' e^{-\lambda} \lambda'$, assim

$$-\left(\frac{\Lambda r_0^2}{3}\right) r_g \int_0^{r^3/r_*^3} e^{-u} du = \int_0^r e^{-\lambda} dr' - \int_0^r e^{-\lambda} dr' + r e^{-\lambda} - r$$

a primeira integral a direita se cancela com a terceira, de modo que

$$-\left(\frac{\Lambda r_0^2}{3}\right) r_g \left[1 - e^{-r^3/r_*^3}\right] = -r(1 - e^{-\lambda})$$

dividindo ambos os lados por $-r$ e notando que $\frac{r_0 \Lambda}{3} = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{8\pi}{\Lambda} \cdot \frac{\Lambda}{3} = 1$, encontramos que

$$\frac{r_g \left[1 - e^{-r^3/r_*^3}\right]}{r} = 1 - e^{-\lambda}$$

resolvendo para e^λ :

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_g \left[1 - e^{-r^3/r_*^3}\right]}{r} \Rightarrow e^\lambda = \frac{1}{1 - \frac{r_g \left[1 - e^{-r^3/r_*^3}\right]}{r}} = e^{-\nu}. \quad (3.41)$$

Consequentemente, a métrica (3.33) se torna

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_g(r)}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - (R_g(r)/r)} + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\varphi^2), \quad (3.42)$$

onde

$$R_g(r) = r_g \left[1 - \exp\left(-\frac{r^3}{r_*^3}\right)\right], \quad (3.43)$$

em que

$$r_*^3 = r_0^2 r_g. \quad (3.44)$$

Observe que (3.42) praticamente coincide com a solução de Schwarzschild para $r \gg r_*$, pois $\exp\left(-\frac{r^3}{r_*^3}\right) \rightarrow 0$, e para $r \ll r_*$ a solução esfericamente simétrica se comporta como uma solução de De Sitter, uma vez que

$$\exp\left(-\frac{r^3}{r_*^3}\right) = 1 - \frac{r^3}{r_*^3} + \dots \simeq 1 - \frac{r^3}{r_*^3} \Rightarrow R_g(r) \simeq r_g \left[1 - 1 + \frac{r^3}{r_*^3}\right] = \frac{r_g r^3}{r_*^3} = \frac{r^3}{r_0^2}$$

Consequentemente, a métrica se reduz para:

$$ds^2 \simeq -\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r^2/r_0^2} + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\varphi^2)$$

que é a solução de De Sitter. Ademais, quando $r \rightarrow \infty$ a métrica se reduz para a de Minkowski. Obtemos que as componentes não nulas do tensor de Einstein para a métrica dada em (3.42) são iguais a:

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{[r - R_g(r)]R'_g(r)}{r^3} \\ G_{11} &= -\frac{R'_g(r)}{r[r - R_g(r)]} \\ G_{22} &= -\frac{1}{2}rR''_g(r) \\ G_{33} &= -\frac{1}{2}r\sin^2\theta R''_g(r). \end{aligned} \tag{3.45}$$

Portanto,

$$T_1^1 = \frac{G_1^1}{8\pi} = \frac{G_{1\alpha}g^{\alpha 1}}{8\pi} = -\rho_0 \exp\left(-\frac{r^3}{r_*^3}\right) = T_0^0 \tag{3.46}$$

$$T_2^2 = \frac{G_2^2}{8\pi} = \frac{G_{2\alpha}g^{\alpha 2}}{8\pi} = -\rho_0 \left(1 - \frac{3r^3}{2r_*^3}\right) \exp\left(-\frac{r^3}{r_*^3}\right);$$

pois por (3.44) sabemos que $r_g/r_*^3 = 1/r_0^2 = 8\pi\rho_0/3$. Similarmente,

$$T_3^3 = \frac{G_3^3}{8\pi} = \frac{G_{3\alpha}g^{\alpha 3}}{8\pi} = -\frac{1}{8\pi} \frac{3r_g}{r_*^3} \left(1 - \frac{3r^3}{2r_*^3}\right) \exp\left(-\frac{r^3}{r_*^3}\right)$$

que é justamente T_2^2 . Assim,

$$T_2^2 = T_3^3 = -\rho_0 \left(1 - \frac{3r^3}{2r_*^3}\right) \exp\left(-\frac{r^3}{r_*^3}\right) \tag{3.47}$$

conforme esperado.

3.2.2 Análise da Solução

Vale apenas discutir as principais propriedades da métrica (3.85). Primeiro, irei analisar as curvas radiais nulas nessa métrica, ou seja, curvas realizadas pela luz $ds^2 = 0$ onde $d\phi = d\theta = 0$. Assim, da Eq.(3.42) segue que

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left[1 - \frac{r_g(1 - e^{-r^3/r_*^3})}{r}\right] \tag{3.48}$$

para $r \rightarrow \infty$, essa expressão se reduz em $dr/dt = \pm 1$, conforme esperado, uma vez que a métrica (3.42) é assintoticamente plana. Assim, pode-se afirmar que

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left[1 - \frac{r_g(1 - e^{-r^3/r_*^3})}{r} \right]^{-1}. \quad (3.49)$$

Se $r \rightarrow \infty$, então $dt/dr \rightarrow \pm 1$. Similarmente, quando $r \rightarrow 0$, encontramos que $dt/dr \rightarrow \pm 1$, enquanto que para $\frac{r_g(1 - e^{-r^3/r_*^3})}{r} \rightarrow 1$, dt/dr diverge que é a assinatura de um horizonte de eventos. Note também que quanto mais $\frac{r_g(1 - e^{-r^3/r_*^3})}{r}$ se aproxima de 1, menor será o termo entre colchetes e maior será dt/dr . Por fim, dentro do horizonte de eventos note que o termo entre colchetes aumenta e dt/dr diminui, contudo agora dt/dr irá trocar de sinal e o cone de luz tende a se fechar ao redor da origem. A diferença entre $R_g(r_g)$ e r_g é

$$R_g(r_g) = r_g \left[1 - \exp \left(\frac{r_g^3}{r_0^2 r_g} \right) \right] \Rightarrow R_g(r_g) - r_g = \exp \left(\frac{r_g^2}{r_0^2} \right). \quad (3.50)$$

Observe também que

$$\frac{M - m(r)}{M} = \frac{M - \left(\frac{r_g c^2}{2G} \right)^M}{M} \left[1 - \exp \left(-\frac{r^3}{r_0^2 r_g} \right) \right],$$

de modo que a diferença entre $m(r)$ e a massa de Schwarzschild M é

$$\frac{M - m(r)}{M} = \exp \left(-\frac{r^3}{r_0^2 r_g} \right). \quad (3.51)$$

A métrica (3.42) possui dois horizontes de eventos, quando $r_g \gg r_0$, localizados aproximadamente em

$$r_+ \approx r_g \left[1 - O(\exp(-r_g^2/r_0^2)) \right] \quad r_- \approx r_0 [1 - O(r_0/4r_g)]. \quad (3.52)$$

Aqui r_+ é o horizonte de eventos externo e r_- é o horizonte de eventos interno, tais singularidades podem ser removidas através de uma transformação do tipo

$$\begin{aligned} d\tau &= dt + \sqrt{\frac{R_g}{r}} \left(1 - \frac{R_g}{r} \right)^{-1} dr \\ d\rho &= dt + \sqrt{\frac{r}{R_g}} \left(1 - \frac{R_g}{r} \right)^{-1} dr \end{aligned} \quad (3.53)$$

pois

$$-d\tau^2 + \frac{R_g}{r} d\rho^2 = - \left(1 - \frac{R_g}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_g}{r} \right)^{-1} dr^2 \quad (3.54)$$

e (3.42) pode ser reescrita como

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{R_g(r)}{r} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\varphi^2). \quad (3.55)$$

Note que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R_g(r)}{r} = 0 \quad (3.56)$$

a forma de Lemaitre da Eq.(3.55) é regular tanto em r_+ quanto r_- , assim como em $r \rightarrow 0$, mas não é completa. Para encontrar a sua extensão analítica máxima introduz-se as coordenadas isotropicas de Eddington-Finkelstein, o que produz

$$ds^2 = \left|1 - \frac{R_g(r)}{r}\right| du dv - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.57)$$

O escalar de curvatura e o escalar de Kretschmann dessa solução são, respectivamente, iguais a:

$$R = \frac{3r_g e^{-r^3/r_*^3} (4r_*^3 - 3r^3)}{r_*^6} \quad (3.58)$$

$$K = R^{\mu\nu\lambda\rho} R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{4R_g^2(r)}{r^6} + 4 \left(\frac{3}{r_0^2} e^{-r^3/r_*^3} - \frac{R_g(r)}{r^3} \right)^2 + \left(\frac{2R_g(r)}{r^3} - \frac{9r^3}{r_0^4 r_g} e^{-r^3/r_*^3} \right)^2. \quad (3.59)$$

Para $r \rightarrow 0$, note que

$$R = \frac{12}{r_0^2}, \quad K = \frac{24}{r_0^4}. \quad (3.60)$$

Logo, essas quantidades são finitas uma vez que $r_0 \neq 0$. Para $r \rightarrow \infty$, temos $R = 0$ e $K = 0$ e portanto a solução é regular. Para uma análise completa, é necessário verificar se as condições de energia são infringidas por esta solução. O tensor energia-momentum é dado por $T_\mu^\nu = \text{diag}(-\rho, p_r, p_t, p_t)$. Por (3.32), (3.39) e (3.47), segue que a condição forte da energia produz

$$\rho + \sum_{i=1}^3 p_i = -2\rho_0 \left(1 - \frac{3r^3}{2r_*^3}\right) \exp\left(-\frac{r^3}{r_*^3}\right) \quad (3.61)$$

que é menor que zero para $r < \sqrt[3]{\frac{2}{3}}r_*$, ou seja existe uma região onde as condições de energia forte são violadas. Similarmente, o mesmo ocorre para a condição nula de energia:

$$\rho + p_\ell = -2\rho_0 \left(1 - \frac{3r^3}{4r_*^3}\right) \exp\left(-\frac{r^3}{r_*^3}\right) \quad (3.62)$$

o que implica que para $r < \sqrt[3]{\frac{4}{3}}r_*$ a condição nula de energia é violada. A regularidade geométrica de um buraco negro significa que sua curvatura permanece finita em toda a sua extensão, evitando singularidades. No entanto, isso pode ocorrer as custas da violação das condições de energia, fazendo com que a matéria envolvida seja considerada exótica.

3.3 Termodinâmica

Agora iremos calcular as quantidades termodinâmicas associadas com o buraco negro regular de Dymnikova. A massa M do buraco negro pode ser escrita em termos do raio do horizonte de eventos r_+ ao se resolver a equação $g_{tt} = 0$:

$$r_+ = r_g \left(1 - e^{-\frac{r_+^3}{r_*^3}} \right). \quad (3.63)$$

Multiplicando ambos os lados por r_+^2/r_*^3 para obter:

$$\frac{r_+^3}{r_0^2 r_g} = \frac{r_+^2}{r_0^2} - \frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-\frac{r_+^3}{r_0^2 r_g}}$$

introduzindo a variável $y = \frac{r_+^3}{r_0^2 r_g}$, o que permite reescrever a relação anterior como

$$y - \frac{r_+^2}{r_0^2} = -\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-y}$$

multiplicando ambos os lados por $e^{y-r_+^2/r_0^2}$, acha-se que:

$$\left(y - \frac{r_+^2}{r_0^2} \right) e^{y-r_+^2/r_0^2} = -\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2}. \quad (3.64)$$

Tal equação pode ser resolvida para y com o uso da função de Lambert, representada por W [79]. O logaritmo natural responde a pergunta: qual potência de e produz o número u ? ou seja, o logaritmo é a solução da equação: $e^{\ln u} = u$. Analogamente, a função de Lambert responde a pergunta: qual potência de e , multiplicada por si mesma, produz o número u ? isto é, a função de Lambert é a solução da equação $e^{W(u)}W(u) = u$. Para resolver equações com a função de Lambert basta prosseguir de maneira similar ao que é feito com a função logarítmica, em que se uma equação é escrita como $e^u = v$, logo por definição temos que $u = \ln v$. Igualmente, se uma equação é colocada na forma $ue^u = v$, então a definição da função de Lambert permite escrever $W(v) = u$, desde que $x \geq e^{-1}$. Assim sendo, a equação (3.64) possui como solução:

$$y - \frac{r_+^2}{r_0^2} = W \left(-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2} \right) \quad (3.65)$$

desde que

$$-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2} \geq -e^{-1}.$$

Consequentemente, temos que

$$\frac{r_+^3}{r_0^2 r_g} = \frac{r_+^2}{r_0^2} + W \left(-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{r_g} = \frac{1 + \frac{r_+^2}{r_0^2} W \left(-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2} \right)}{r_+}$$

resolvendo para r_g :

$$r_g = \frac{r_+}{1 + \frac{r_0^2}{r_+^2} W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2}\right)}. \quad (3.66)$$

o que nos leva para a seguinte massa do buraco negro

$$M = \left(\frac{r_+}{2}\right) \left[1 + \frac{r_0^2}{r_+^2} W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2}\right)\right]^{-1}. \quad (3.67)$$

O buraco negro possui uma temperatura de Hawking, que por sua vez pode ser derivada através da gravidade superficial:

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{-g^{rr} g_{tt}}}{\partial r} \Big|_{r=r_h}. \quad (3.68)$$

Portanto, a temperatura de Hawking do buraco negro de Dymnikova é igual a

$$T_+ = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{r_g}{4\pi} \left(\frac{1 - e^{-r_+^3/r_g r_0^2}}{r_+^2} - \frac{3r_+ e^{-r_+^3/r_g r_0^2}}{r_0^2} \right)$$

contudo, por (3.64) temos que

$$\frac{r_+^3}{r_0^2 r_g} - \frac{r_+^2}{r_0^2} = -\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^3/r_g r_0^2} \Rightarrow -e^{-r_+^3/r_g r_0^2} = \frac{r_+}{r_g} - 1$$

assim obtém-se a temperatura encontrada em [78]:

$$T_+ = \frac{1}{4\pi r_0} \left[\frac{r_0}{r_+} - \frac{3r_+}{r_0} \left(1 - \frac{r_+}{r_g}\right) \right]. \quad (3.69)$$

Todavia, pela equação (3.66) obtém-se que

$$T_+ = \frac{1}{4\pi r_+} \left[1 + 3W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-\frac{r_+^2}{r_0^2}}\right) \right]. \quad (3.70)$$

A temperatura de Hawking do buraco negro de Dymnikova para diferentes valores de r_0 é representada na Figura 1:

O gráfico indica que existe um valor crítico de r onde a temperatura atinge seu máximo e que um r_0 maior suprime a temperatura máxima do buraco negro e desloca o pico para valores cada vez maiores de r . A existência de uma temperatura máxima e sua posterior queda sugere um resfriamento natural que pode estar relacionado com a possibilidade de remanescentes para os buracos negros.

A “possibilidade de remanescente” refere-se ao cenário em que a temperatura de Hawking se anula impedindo a evaporação completa, ou seja a emissão de radiação de Hawking cessa antes que a massa do buraco negro evapore completamente. O remanescente do buraco negro poderia servir como um candidato potencial à matéria escura, pois seria compacto, não interagiria significativamente com a luz e não desaparece do universo com o tempo [80–

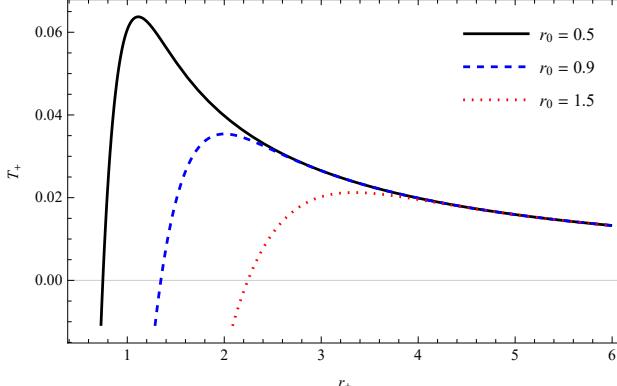


Figura 1: Gráfico da temperatura de Hawking (T_+) como função do raio do horizonte de eventos (r_+) para diferentes valores de r_0 .

82]. Matematicamente, isso ocorre quando o raio do horizonte satisfaz a condição para uma temperatura de Hawking nula, $T_+ = 0$, e é determinado por

$$W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2}e^{-\frac{r_+^2}{r_0^2}}\right) = -\frac{1}{3} \quad (3.71)$$

inserindo esse resultado na Eq.(3.67) encontra-se a massa remanescente:

$$M = \frac{3r_+^3}{2(3r_+^2 - r_0^2)}. \quad (3.72)$$

A determinação das transições de fase no buraco negro depende do critério para uma mudança no sinal da capacidade térmica. Uma capacidade térmica positiva ($C > 0$) é um sinal de estabilidade local contra flutuações térmicas, enquanto uma capacidade térmica negativa ($C < 0$) indica instabilidade local [83]. A expressão para a capacidade térmica é a seguinte:

$$C = \left(\frac{dM}{dr_h}\right) \left(\frac{dr_h}{dT_H}\right). \quad (3.73)$$

Pela Eq.(3.67) e sabendo que a derivada da função de Lambert W é igual a:

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))} \Rightarrow W'\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2}e^{-r_+^2/r_0^2}\right) = \frac{2\left(1-\frac{r_+^2}{r_0^2}\right)W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2}e^{-r_+^2/r_0^2}\right)}{r_+ \left[1+W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2}e^{-r_+^2/r_0^2}\right)\right]} \quad (3.74)$$

encontra-se que a capacidade térmica é igual a:

$$C = \frac{4\pi r_+^2 \left[1 + \frac{2W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2}e^{-r_+^2/r_0^2}\right)}{1+W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2}e^{-r_+^2/r_0^2}\right)}\right]}{4 \left[1 + \frac{r_0^2}{r_+^2}W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2}e^{-r_+^2/r_0^2}\right)\right] \left\{ -1 - 3W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2}e^{-r_+^2/r_0^2}\right) \left[1 - \frac{2\left(1-\frac{r_+^2}{r_0^2}\right)}{1+W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2}e^{-r_+^2/r_0^2}\right)}\right] \right\}}. \quad (3.75)$$

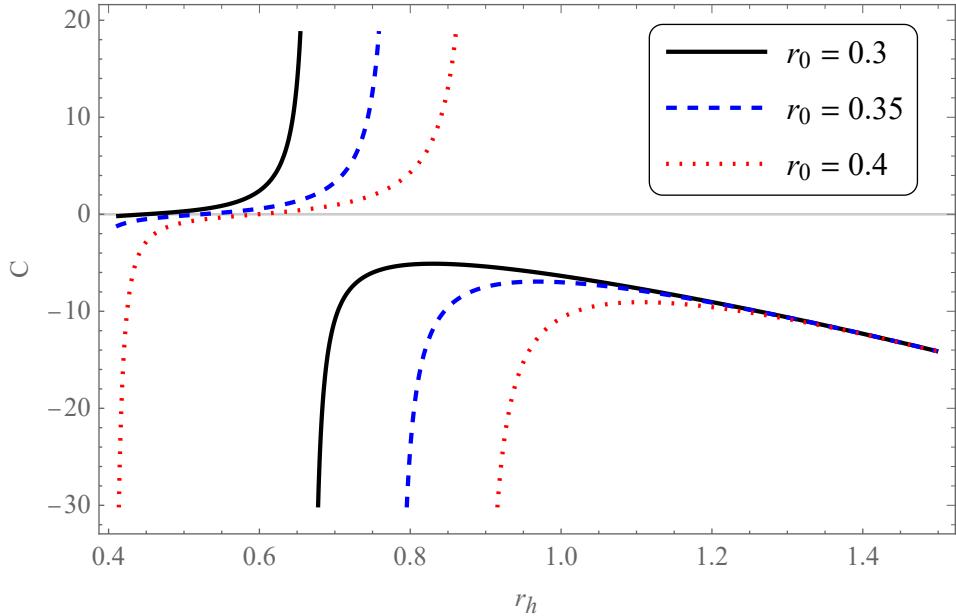


Figura 2: Gráfico da Capacidade Térmica (C) como função do raio do horizonte de eventos (r_+).

A Figura 2 exibe gráficos da capacidade térmica (3.75) para diferentes valores de r_0 . A capacidade térmica possui um ponto de Davies [84], sendo esse ponto relacionado ao máximo da temperatura de Hawking. Portanto, o ponto de Davies define o valor de r_h no qual o buraco negro de Dymnikova exibe uma transição de fase, e como podemos ver, o ponto de Davies depende de r_0 .

3.4 Equações Gerais do Movimento

Um resultado significativo que podemos derivar é o potencial dessa solução. O procedimento padrão adotado nesse caso se baseia no cálculo das geodésicas de uma partícula em movimento próximo ao buraco negro. Uma vez que as equações não podem ser resolvidas analiticamente, não serão calculadas as órbitas circulares para uma partícula em torno do buraco negro. A métrica de Dymnikova possui a seguinte forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.76)$$

onde

$$f(r) = 1 - \frac{r_g(1 - e^{-r^3/r_*^3})}{r}. \quad (3.77)$$

A equação da geodésica nos diz que

$$\frac{d^2x^\lambda}{dp^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = 0, \quad (3.78)$$

onde p é um parâmetro afim para geodésicas nulas e é o tempo próprio para geodésicas tipo-tempo. Assim, a forma mais direta de encontrar a equação do movimento de uma partícula é

através da resolução da equação geodésica, sendo uma abordagem bastante adotada [41]. As componentes não nulas dos símbolos de Christoffel são:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{f'(r)}{2f(r)} \\
 \Gamma_{tt}^r &= \frac{f(r)f'(r)}{2}; \quad \Gamma_{rr}^r = -\frac{f'(r)}{2f(r)} \\
 \Gamma_{\theta\theta}^r &= -rf(r); \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = \sin^2 \theta \Gamma_{\theta\theta}^r \\
 \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} = \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi \\
 \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\cos \theta \sin \theta; \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

que produz as seguintes equações ao serem substituídas na geodésica:

$$\frac{d^2t}{dp^2} + \frac{f'(r)}{f(r)} \frac{dt}{dp} \frac{dr}{dp} = 0 \tag{3.80}$$

$$\frac{d^2r}{dp^2} + \frac{f'(r)}{2} \left[f(r) \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 - \frac{1}{f(r)} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 \right] - rf(r) \left[\left(\frac{d\theta}{dp} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 \right] = 0 \tag{3.81}$$

$$\frac{d^2\theta}{dp^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{dp} \right) \left(\frac{d\theta}{dp} \right) - \cos \theta \sin \theta \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 = 0 \tag{3.82}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dp} \frac{d\varphi}{dp} + 2 \cot \theta \left(\frac{d\theta}{dp} \right) \left(\frac{d\varphi}{dp} \right) = 0. \tag{3.83}$$

Devido a simetria esférica, vamos confinar a órbita da nossa partícula ao plano equatorial, ou seja,

$$\theta = \frac{\pi}{2} \tag{3.84}$$

que automaticamente satisfaz (3.82). Dividindo (3.80) e (3.83) por dt/dp e $d\varphi/dp$, respectivamente, encontramos que

$$\frac{1}{\frac{dt}{dp}} \frac{d}{dp} \left(\frac{dt}{dp} \right) + \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} \frac{dr}{dp} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dp} \left[\ln \frac{dt}{dp} + \ln f(r) \right] = 0 \tag{3.85}$$

$$\frac{1}{\frac{d\varphi}{dp}} \frac{d}{dp} \left(\frac{d\varphi}{dp} \right) + \frac{2}{r} \frac{dr}{dp} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dp} \left[\ln \frac{d\varphi}{dp} + \ln r^2 \right] = 0 \tag{3.86}$$

o que produz duas constantes de movimento. Uma delas é a energia por unidade de massa

$$f(r) \frac{dt}{dp} = E. \tag{3.87}$$

Enquanto a outra constante do movimento é derivada de (3.86), atuando como o momento angular por unidade de massa:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dp} = J. \tag{3.88}$$

Inserindo (3.84), (3.87) e (3.88) em (3.81) obtemos outra equação do movimento:

$$0 = \frac{d^2r}{dp^2} + \frac{f'(r)}{2f(r)} \left[E^2 - \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 \right] - \frac{J^2 f(r)}{r^3},$$

multiplicando essa equação por $\frac{2}{f(r)} \frac{dr}{dp}$, encontra-se que

$$0 = \frac{d}{dp} \left\{ \frac{1}{f(r)} \left[\left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - E^2 \right] + \frac{J^2}{r^2} \right\}. \quad (3.89)$$

Portanto, a constante de movimento restante é

$$\frac{1}{f(r)} \left[\left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - E^2 \right] + \frac{J^2}{r^2} = \varepsilon = \text{constante} \quad (3.90)$$

resolvendo para $(dr/dp)^2$ encontra-se que

$$\left(\frac{dr}{dp} \right)^2 = E^2 + f(r) \left(\varepsilon - \frac{J^2}{r^2} \right). \quad (3.91)$$

Inserindo as Eqs.(3.84), (3.87), (3.88) e (3.91) na Eq.(3.76)

$$ds^2 = \left[-f(r) \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 + \frac{1}{f(r)} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 \right] dp^2 = \varepsilon dp^2.$$

Para partículas massivas é válido que $ds^2 = -d\tau^2$, consequentemente

$$d\tau^2 = -\varepsilon dp^2. \quad (3.92)$$

De modo que $\varepsilon = -1$ para partículas com massa, uma vez que o parâmetro afim nesse caso é o próprio tempo próprio. Já para a luz, $\varepsilon = 0$, pois $ds^2 = 0$. A Eq.(3.91) pode ser reescrita como

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = E^2 - V_{eff}(r) \quad (3.93)$$

onde

$$V_{eff}(r) = \left[1 - \frac{r_g(1 - e^{-r^3/r_*^3})}{r} \right] \left(\frac{J^2}{r^2} - \varepsilon \right) \quad (3.94)$$

é o potencial efetivo.

4 BURACO NEGRO DE DYMNIKOVA GENERALIZADO

De forma similar ao que foi feito para quatro dimensões, considere a ação gravitacional generalizada

$$S = -\frac{1}{16\pi} \int d^N x \sqrt{-g} R + S_M \quad (4.1)$$

em que R é o escalar de Ricci, N é o número de dimensões do espaço-tempo e S_M representa a ação da matéria. As equações de campo de Einstein N dimensionais são então dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1, \dots, N-1$. A constante gravitacional de Newton N dimensional é tal que $G_N = c = 1$ e $T^\mu_\nu = (-\rho, P_r, P_t, \dots)$, sendo ρ a densidade de energia, P_r a pressão radial e P_t a pressão transversal. Nossa objetivo é estudar as soluções que representam buracos negros, assim procuramos soluções esfericamente simétricas, de forma que faz sentido fazermos o seguinte Ansatz:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{N-2}^2 \quad (4.3)$$

em que $f(r)$ é uma função radial determinada pela solução e

$$d\Omega_{N-2}^2 = d\theta_1^2 + \sum_{i=2}^{N-2} \left[\prod_{j=2}^i \sin^2 \theta_{j-1} \right] d\theta_i^2 \quad (4.4)$$

é o elemento de linha de uma esfera unitária $(N-2)$ dimensional [83]. Note que Ω_{N-2} é igual a [85]:

$$\Omega_{N-2} = \frac{2\pi^{N-1}}{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)} \quad (4.5)$$

Utilizando a métrica dada por (4.3), encontra-se que

$$T_0^0 = T_r^r = \frac{N-2}{2} \left[f(r) \left(\frac{N-3}{r^2} + \frac{f'}{rf(r)} \right) - \frac{N-3}{r^2} \right], \quad (4.6)$$

$$T^{\theta_1}_{\theta_1} = \frac{f(r)}{2} \left[\frac{f''}{f} + \frac{2(N-3)f'}{rf(r)} + \frac{(N-3)(N-4)}{r^2} \right] - \frac{(N-3)(N-4)}{2r^2}, \quad (4.7)$$

$$T^{\theta_1}_{\theta_1} = T^{\theta_2}_{\theta_2} = \dots = T^{\theta_{N-2}}_{\theta_{N-2}}. \quad (4.8)$$

De forma similar ao que foi feito em (3.39), podemos tomar a seguinte densidade:

$$\rho(r) = -T_0^0 = \rho_0 e^{-\frac{r^{N-1}}{r_*^{N-1}}}. \quad (4.9)$$

Aqui r_* é uma constante dimensional. Utilizando a expressão de T_0^0 da Eq.(4.6) na Eq.(4.9), obtém-se que

$$-\frac{2\rho_0}{(N-2)}e^{-\frac{r^{N-1}}{r_*^{N-1}}} = (N-3)\frac{f(r)}{r^2} + \frac{f'}{r} - \frac{(N-3)}{r^2}.$$

Por fim, basta multiplicar ambos os lados por r^{N-2}

$$\begin{aligned} -\frac{2\rho_0 r^{N-2}}{(N-2)}e^{-\frac{r^{N-1}}{r_*^{N-1}}} &= (N-3)r^{N-4}f(r) + f'r^{N-3} - (N-3)r^{N-4} \\ &= \frac{d}{dr}(r^{N-3}f(r) - r^{N-3}), \end{aligned}$$

e integrar ambos os lados da equação para determinar o potencial métrico:

$$f(r) = 1 - \frac{r_g^{N-3}}{r^{N-3}} \left(1 - e^{-\frac{r^{N-1}}{r_*^{N-1}}} \right) \quad (4.10)$$

em que

$$r_g^{N-3} = \frac{2\rho_0}{(N-1)(N-2)}r_*^{N-1} \quad (4.11)$$

é o raio de dimensões maiores. Portanto, a métrica de Dymnikova para dimensões maiores é igual a:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s(r)}{r^{N-3}}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_s(r)}{r^{N-3}}\right)} + r^2d\Omega_{N-2}^2. \quad (4.12)$$

Onde alguns termos foram acoplados de tal modo que

$$R_s(r) = r_g^{N-3} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^{N-1}}{r_*^{N-1}}\right) \right]. \quad (4.13)$$

Por uma questão de analogia, temos que

$$r_0^2 = \frac{(N-1)(N-2)}{2\rho_0} \quad \text{e} \quad r_*^{N-1} = r_0^2 r_g^{N-3}. \quad (4.14)$$

Essa solução exata esfericamente simétrica das equações de campo de Einstein produz a solução de De Sitter para $r \ll r_*$ e a solução de Schwarzschild para $r \gg r_*$. Os componentes do tensor energia-momentum são $T_0^0 = T_1^1 = -\rho_0 e^{-\frac{r^{N-1}}{r_*^{N-1}}}$ e

$$T_{\theta_2}^{\theta_2} = \left[\frac{N-1}{N-2} \left(\frac{r}{r_*} \right)^{N-1} - 1 \right] \rho_0 e^{-\frac{r^{N-1}}{r_*^{N-1}}} \quad (4.15)$$

a pressão transversal é nula ($P_t = 0$) quando $r = \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{1/N-1} r_*$ e a densidade se torna $\rho = \rho_0 e^{-\frac{N-2}{N-1}}$, note contudo que no centro do buraco negro temos que $P_t = -\rho_0$ e $P_r = -\rho_0 = -\rho$, o que implica em uma violação da condição forte de energia, todavia a partir de $r = \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{1/N-1} r_*$ a condição é respeitada. Os resultados anteriores se reduzem aos já encontrados no capítulo anterior quando é feito $N = 4$. Os horizontes de eventos da métrica são os zeros de $g_{tt} = 0$.

Temos então dois horizontes distintos, um horizonte de Cauchy r_- e um horizonte de eventos externo r_+ , localizados em [19]

$$r_- = r_0 \left[1 - O \left(\exp \left(-\frac{r_0}{r_g} \right) \right) \right], \quad r_+ = r_g \left[1 - O \left(\exp \left(-\frac{r_g^2}{r_0^2} \right) \right) \right]. \quad (4.16)$$

Eles podem ser eliminados através de uma transformação apropriada de coordenadas. Em coordenadas conectadas com partículas livres em queda a métrica toma uma forma do tipo Lemaitre:

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{R_s(r)}{r^{N-3}} dr^2 + r^2 d\Omega_{N-2}. \quad (4.17)$$

Uma vez que $(\lim_{r \rightarrow 0} (R_s(r)/r^{N-3}) = 0)$, a métrica é regular tanto em r_+ quanto r_- , todavia não é completa. Para encontrar sua extensão analítica máxima introduz-se as coordenadas isotrópicas de Eddington-Finkelstein, nas quais produzem:

$$ds^2 = - \left| 1 - \frac{R_s(r)}{r^{N-3}} \right| du \, dv + r^2 d\Omega_{N-2}, \quad (4.18)$$

de forma que a solução apresentada é regular em todo o espaço.

4.1 Termodinâmica

Ao longo da seção, algumas quantidades termodinâmicas como a temperatura e capacidade térmica serão obtidas, além disso será determinado qual é a condição analítica para que a solução de Dymnikova possua um remanescente, i.e., $T_+ = 0$. Este último é bastante importante, uma vez que na presença de um remanescente, o buraco negro nunca evaporaria completamente. A massa do buraco negro pode ser determinada através do raio do horizonte de eventos r_+ , para isso basta resolver a equação $f(r_+) = 0$, de forma análoga ao caso de quatro dimensões, temos que

$$f(r) = 1 - \frac{r_g^{N-3} (1 - e^{-\frac{r_g^{N-1}}{r_*^{N-1}}})}{r^{N-3}} \quad (4.19)$$

fazendo $f(r_+) = 0$, acha-se

$$r_+^{N-3} = r_g^{N-3} \left(1 - e^{-\frac{r_+^{N-1}}{r_*^{N-1}}} \right),$$

multiplicando ambos os lados por $\frac{r_+^2}{r_g^{N-3} r_0^2}$, reescrevendo r_* com o uso da relação (4.14) e introduzindo a variável $y = \frac{r_+^{N-1}}{r_0^2 r_g^{N-3}}$, obtém-se que

$$y - \frac{r_+^2}{r_0^2} = -\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-y}$$

multiplicando ambos os lados por $e^{y-r_+^2/r_0^2}$, encontra-se que

$$\left(y - \frac{r_+^2}{r_0^2}\right) e^{y-r_+^2/r_0^2} = -\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2}$$

esta equação pode ser resolvida para y com o uso da função W de Lambert:

$$y - \frac{r_+^2}{r_0^2} = W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2}\right), \quad (4.20)$$

desde que $-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2} \geq -e^{-1}$. Portanto,

$$r_g^{N-3} = \frac{r_+^{N-3}}{1 + \frac{r_0^2}{r_+^2} W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2}\right)},$$

e a massa do buraco negro é então dada por

$$M = \frac{(N-2)\Omega_{N-2}r_+^{N-3}}{16\pi \left[1 + \frac{r_0^2}{r_+^2} W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2}\right)\right]}. \quad (4.21)$$

Onde

$$r_g^{N-3} = \frac{16\pi M}{(N-2)\Omega_{N-2}}. \quad (4.22)$$

Os passos para se obter tais equações são análogos aos feitos na demonstração da Eq.(3.67) e Ω_{N-2} é dado pela Eq.(4.5). O buraco negro possui uma temperatura de Hawking que pode ser obtida através da sua gravidade superficial dada por

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{df(r)}{dr} \Big|_{r=r_+}. \quad (4.23)$$

Ao passo que a temperatura de Hawking é dada por

$$T_+ = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (4.24)$$

Para o buraco negro de Dymnikova temos então [86]:

$$T_+ = \frac{1}{4\pi r_0} \left[\frac{(N-3)r_0}{r_+} - \frac{(N-1)r_+}{r_0} \left(1 - \frac{r_+^{N-3}}{r_g^{N-3}}\right) \right] \quad (4.25)$$

ou,

$$T_+ = \frac{1}{4\pi r_+} \left[(N-3) + (N-1)W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-\frac{r_+^2}{r_0^2}}\right) \right]. \quad (4.26)$$

Quando $r_+ \gg r_0$, obtém-se a temperatura de Hawking do buraco negro esfericamente simétrico em N dimensões [87]. Para $N = 4$, a expressão acima se reduz para aquela encontrada na

Eq.(3.67). Abaixo, o gráfico para o comportamento da temperatura de Hawking para o buraco negro de N dimensões foi desenhado. O gráfico da esquerda indica que, para cada dimensão, existe um valor crítico de r onde a temperatura atinge seu máximo e em dimensões mais altas, o buraco negro pode atingir temperaturas maiores antes de começar a esfriar. O gráfico da direita sugere que um r_0 maior suprime a temperatura máxima do buraco negro e desloca o pico para valores cada vez maiores de r . Portanto, massas de remanescentes surgem como resultado.

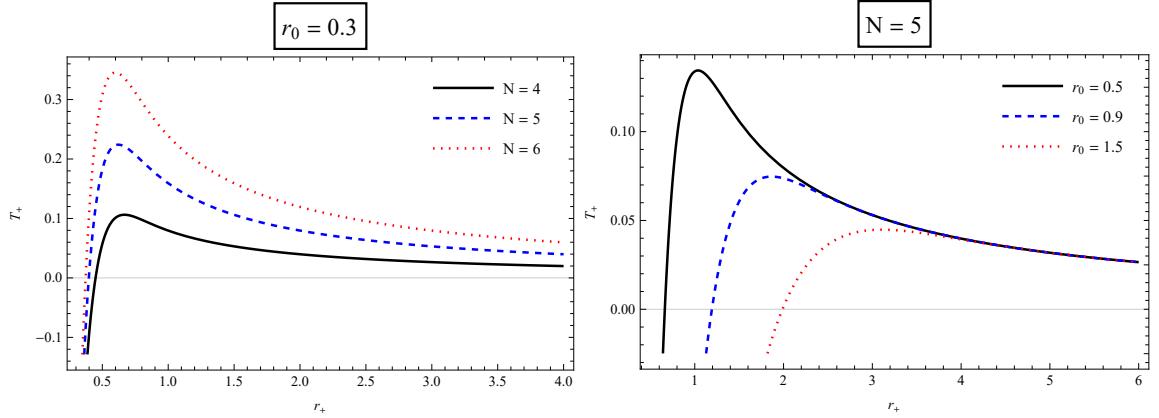


Figura 3: Gráfico da temperatura de Hawking (T_+) como função do raio do horizonte de eventos (r_+).

A determinação das possíveis transições de fase no buraco negro depende do critério para uma mudança no sinal da capacidade térmica. Uma capacidade térmica positiva ($C > 0$) é um sinal de estabilidade local contra flutuações térmicas, enquanto uma capacidade térmica negativa ($C < 0$) indica instabilidade local. A expressão para a capacidade térmica é a seguinte:

$$C = \frac{\left(\frac{N-2}{4}\right) \Omega_{N-2} r_+^{N-2} \left[(N-3) + \frac{2W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2}\right)}{1+W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2}\right)} \right]}{\left[1 + \frac{r_0^2}{r_+^2} W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2}\right) \right] \left\{ -(N-3) - (N-1)W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2}\right) \left[1 - \frac{2\left(1-\frac{r_+^2}{r_0^2}\right)}{1+W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2} e^{-r_+^2/r_0^2}\right)} \right] \right\}} \quad (4.27)$$

A Figura 4 exibe o gráfico da capacidade térmica (4.27) para um valor fixo de r_0 em diferentes dimensões. A capacidade térmica possui um ponto de Davies [84], sendo tal ponto relacionado ao máximo da temperatura de Hawking. Portanto, o ponto de Davies estabelece o valor de r_+ no qual o buraco negro de Dymnikova com N dimensões exibe uma transição de fase, e como podemos ver, o ponto de Davies depende da dimensão. À medida que aumentamos o valor da dimensão, a posição do ponto de Davies é deslocada para a esquerda, de modo que a transição de fase ocorre para valores menores de r_+ .

Por fim, observe que um remanescente ocorre para valores nos quais $T_H = 0$, o que

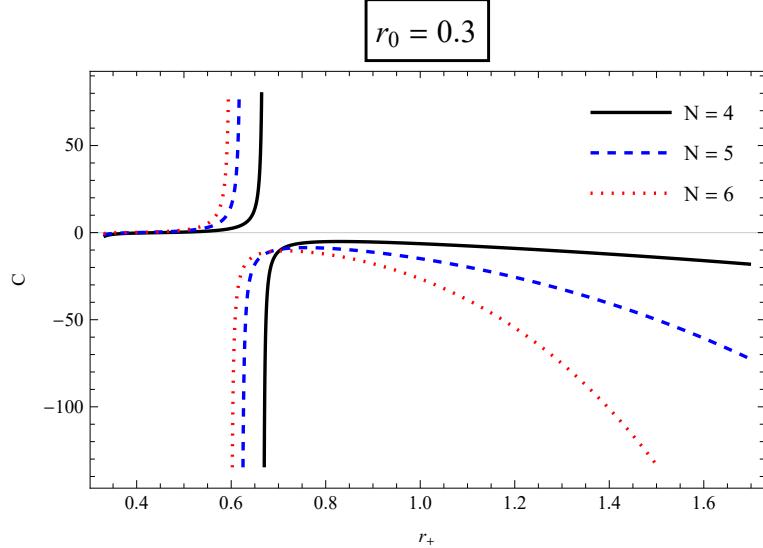


Figura 4: Gráfico da capacidade térmica (C) como função do raio do horizonte de eventos (r_+) para o buraco negro de Dymnikova para diferentes dimensões com r_0 fixo.

pela Eq.(4.26) implica em

$$W\left(-\frac{r_+^2}{r_0^2}e^{-\frac{r_+^2}{r_0^2}}\right) = -\frac{(N-3)}{(N-1)}. \quad (4.28)$$

Inserindo este resultado na Eq.(4.21) encontra-se a massa remanescente como sendo igual a:

$$M = \frac{(N-2)(D-1)\Omega_{N-2}r_+^{N-1}}{16\pi [(N-1)r_+^2 - (N-3)r_0^2]}. \quad (4.29)$$

Note que todas as quantidades encontradas nesta seção se reduzem às do capítulo anterior quando $N = 4$.

4.2 Modos Quasi-normais

Inicialmente, será feita uma breve introdução das ferramentas necessárias para o cálculo dos modos quase-normais para perturbações escalares. Suponha a existência de um campo escalar real, eletricamente neutro e massivo, Φ , que está acoplado de forma canônica à gravidade. Agora, considere sua propagação em um background gravitacional fixo. A equação de Klein-Gordon é expressa da seguinte forma:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(-\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)\Phi = m^2\Phi, \quad (4.30)$$

em que m é a massa do campo escalar. Introduzindo uma separação de variáveis para $\Phi = \Phi(t, r, \theta_1, \dots, \theta_{D-2})$, pode-se escrever o mesmo como:

$$\Phi(t, r, \theta_1, \dots, \theta_{N-2}) = e^{-i\omega t} \frac{\psi(r)}{r^{(N-2)/2}} \tilde{Y}_l(\Omega) \quad (4.31)$$

em que ω é a frequência e \tilde{Y}_l é a generalização dos harmônicos esféricos [88]. Assim, as equações em (4.30) assumem a forma do tipo onda de Schrödinger [89]:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x, \omega)\psi = 0, \quad (4.32)$$

onde $U(x, \omega)$ é o potencial efetivo que dependa da frequência da onda e da “coordenada de tortoise” denotada por x e definida como:

$$dx \equiv \frac{dr}{1 - \frac{R_s(r)}{r^{N-3}}} \quad (4.33)$$

quando x se aproxima de $-\infty$, temos a presença do horizonte de eventos, enquanto o limite de quando x se aproxima de $+\infty$ corresponde ao infinito espacial. Por definição, a onda é “ingoing” quando

$$\psi_{in}(x \rightarrow \pm\infty) \propto \begin{cases} e^{-ik_{\pm}z}, & \omega > 0; \\ e^{ik_{\pm}x}, & \omega < 0; \end{cases} \quad (4.34)$$

e “outgoing” quando

$$\psi_{out}(x \rightarrow \pm\infty) \propto \begin{cases} e^{ik_{\pm}z}, & \omega > 0; \\ e^{-ik_{\pm}x}, & \omega < 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

O número de onda $k_{\pm}(\omega)$, que é maior que zero, satisfaz as relações de dispersão. Tipicamente, o potencial efetivo assume a forma

$$U(x, \omega) = V(x) - \omega^2. \quad (4.36)$$

O potencial $V(x)$ para a equação de Klein-Gordon possui a forma [90]:

$$V(r) = \left(1 - \frac{R_s(r)}{r^{N-3}}\right) \left[m^2 + \frac{\ell(\ell+N-3)}{r^2} - \frac{N-2}{2r} \frac{d}{dr} \left(\frac{R_s(r)}{r^{N-3}} \right) + \frac{(N-2)(N-4)}{4r^2} \left(1 - \frac{R_s(r)}{r^{N-3}}\right) \right] \quad (4.37)$$

onde $\ell \geq 0$ é o momento angular orbital. A barreira de potencial para diferentes dimensões foi desenhada na Figura 5.

Para $\{r_g, r_0, \ell\}$ fixos e diferentes valores da dimensão N (gráfico superior esquerdo), é evidente que o aumento na dimensão N implica em um aumento no máximo do potencial. Para $\{N, r_g, r_0\}$ fixos e diferentes valores do momento angular orbital ℓ (gráfico superior direito), é evidente que um aumento em ℓ também implica em um aumento no máximo do potencial, contudo agora o gráfico se move consistentemente para a direita. Para $\{N, r_g, \ell\}$ fixos e diferentes valores de r_0 (gráfico inferior esquerdo), um aumento em r_0 não interfere no máximo do potencial. Por fim, para $\{N, r_0, \ell\}$ fixos e diferentes valores do raio de Schwarzschild (gráfico inferior direito), é notório que um aumento em r_g produz uma diminuição no máximo do potencial e que este se move para a direita.

Quando ondas puramente outgoing e ingoing são impostas em ambos os infinitos espaciais na equação fundamental de ondas, isso dá origem aos modos quase-normais denotados

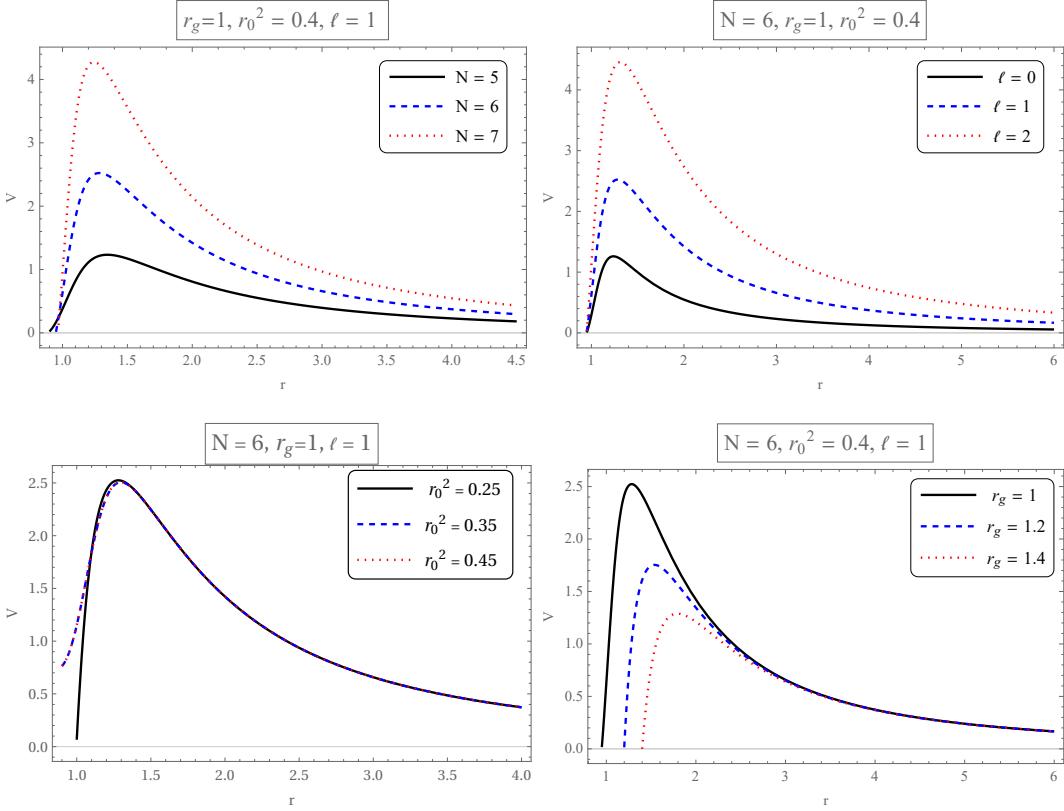


Figura 5: Barreira de potencial efetivo para perturbações escalares por coordenada radial para os parâmetros mostrados nas legendas.

por ω em buracos negros assintoticamente planos. A fórmula WKB fornece uma forma fechada para os modos quase-normais, como:

$$\begin{aligned} \omega^2 = V_0 + A_2(\mathcal{K}^2) + A_4(\mathcal{K}^2) + A_6(\mathcal{K}^2) + \dots \\ - i\mathcal{K}\sqrt{-2V_0''}(1 + A_3(\mathcal{K}^2) + A_5(\mathcal{K}^2) + A_7(\mathcal{K}^2) + \dots) \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde $A_k(\mathcal{K}^2)$ são polinômios das derivadas U'', U''', \dots que podem ser encontrados em [91] e \mathcal{K} é para os modos QN (quasi-normais) iguais a

$$\mathcal{K} = \begin{cases} +n + \frac{1}{2}, & \text{Re}(\omega) > 0; \\ -n - \frac{1}{2}, & \text{Re}(\omega) < 0; \end{cases} \quad (4.39)$$

em que $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, e $V_0, V_0'', V_0''', \dots$ são, respectivamente, o valor e as derivadas de ordem mais alta do potencial $V(x)$ no seu ponto máximo.

Aumentar a ordem do método WKB não necessariamente resulta em uma aproximação mais precisa da frequência. Tipicamente, o erro da aproximação da fórmula WKB é avaliado comparando duas ordens consecutivas. Para estimar o erro para ω_k obtido através da fórmula

WKB de ordem k , empregamos a quantidade

$$\Delta_k = \frac{|\omega_{k+1} - \omega_{k-1}|}{2}. \quad (4.40)$$

Para aumentar a precisão da fórmula WKB, basta seguir o procedimento de Matyjasek e Opala [92]. Além disso, será utilizado o uso dos aproximadores de Padé. Formulações analíticas precisas para o espectro quase-normal de buracos negros são alcançáveis apenas em casos especiais, como quando a equação diferencial correspondente à componente radial da função de onda pode ser transformada na função hipergeométrica de Gauss e em casos de potenciais com formato Pöschl-Teller. Para o buraco negro de Dymnikova, devido às características não triviais da equação (4.30), torna-se imperativo recorrer a métodos numéricos para calcular os modos QN correspondentes. Devido a forma do potencial, que se assemelha ao gráfico do efeito de tunelamento, será utilizado o método WKB.

Em geral, a fórmula WKB tende a ser mais precisa quando ℓ aumenta e tanto n quanto N são menores. Na Figura 6, podemos observar que, para encontrar o modo fundamental com precisão suficientemente alta, o mais alto nível de precisão é alcançado ao empregar altas ordens de WKB em conjunto com a aproximação de Padé.

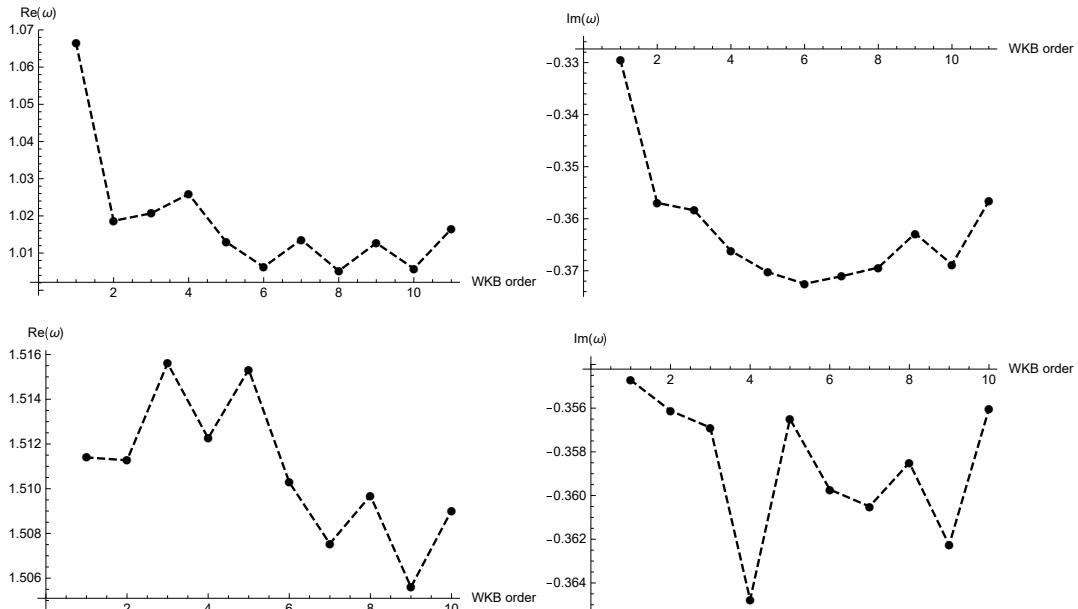


Figura 6: ω_{Re} (esquerda) e ω_{Im} (direita) como funções da ordem WKB onde $n = 0, N = 5, r_g = 1, r_0^2 = 0, 2, \ell = 1$ (superior) and $\ell = 2$ (inferior).

Na Tabela 1, é mostrado a precisão da fórmula WKB para $\ell = 1, n = 0$ em diferentes dimensões. Observa-se que o erro pode ser muito bem estimado ao comparar as frequências com o menor erro em conjunto com a de sexta ordem. Assim, dentro da faixa de parâmetros considerada, o buraco negro permanece estável contra perturbações escalares com base nos cálculos dos modos quase-normais. Isso se mantém verdadeiro devido a $\text{Im}(\omega)$ negativo, pois a perturbação desaparece com o tempo, ou seja $e^{-i\omega t} = e^{-i\omega_R t} e^{\omega_I t}$ desaparece. Buracos negros instáveis possuem $\omega_I > 0$, em outras palavras a perturbação cresce exponencialmente. O sinal

da parte real é uma mera questão de convenção para se definir a direção da propagação da onda.

r_0^2	ω	Sixth order WKB
$\ell = 1, n = 0, D = 4$		
0.20	0.583422 - 0.195365i	0.579949 - 0.201839i
0.25	0.580694 - 0.193959i	0.574068 - 0.190187i
0.30	0.575456 - 0.194747i	0.571264 - 0.195078i
0.35	0.566952 - 0.191897i	0.555443 - 0.200196i
0.40	0.562671 - 0.179931i	0.547077 - 0.184825i
0.45	0.547112 - 0.176065i	0.555613 - 0.180324i
$\ell = 1, n = 0, D = 5$		
0.20	1.01299 - 0.370259i	1.00626 - 0.372503i
0.25	1.00921 - 0.366918i	1.01385 - 0.367913i
0.30	1.00237 - 0.358466i	1.00814 - 0.368051i
0.35	1.00033 - 0.350568i	1.00719 - 0.363288i
0.40	0.981471 - 0.356504i	0.980692 - 0.366012i
0.45	0.982178 - 0.33442i	0.964823 - 0.362666i
$\ell = 1, n = 0, D = 6$		
0.20	1.44322 - 0.517553i	1.44063 - 0.525754i
0.25	1.43482 - 0.505017i	1.4427 - 0.52096i
0.30	1.42936 - 0.510123i	1.44053 - 0.520656i
0.35	1.41782 - 0.480749i	1.42884 - 0.5221i
0.40	1.4067 - 0.50002i	1.42285 - 0.520919i
0.45	1.39392 - 0.48167i	1.38135 - 0.519523i

Tabela 1: Modos Quasi-normais do campo escalar não massivo para diferentes dimensões e r_0^2 , $r_g = 1$ e $\ell = 1$, calculados usando a fórmula WKB de diversas ordens.

5 CONCLUSÃO

Explorar a relatividade geral em dimensões superiores promete insights valiosos sobre a natureza da teoria, especialmente no contexto dos buracos negros. Neste trabalho, apresentamos um buraco negro Dymnikova estático e esfericamente simétrico exato que é regular dentro de um espaço-tempo N-dimensional arbitrário. Analisamos a solução, identificando horizontes potenciais. Além disso, verificamos a estrutura regular do espaço-tempo e conduzimos uma análise termodinâmica. Investigamos o comportamento da temperatura de Hawking variando as dimensões. Todas as dimensões exibem uma transição de fase de ordem zero na qual a temperatura se anula e a evaporação do buraco negro se interrompe em raios de horizonte finitos. Portanto, massas de remanescente aparecem como resultado dessas transições de fase.

Podemos observar que, ao aumentar a dimensão, o valor de r_+ no qual a temperatura de Hawking se anula torna-se menor. Portanto, a massa de remanescente é afetada pela dimensão. Também estudamos a capacidade térmica, já que a determinação das potenciais transições de fase no buraco negro depende do critério para uma mudança no sinal da capacidade térmica. Uma capacidade térmica positiva ($C > 0$) é um sinal de estabilidade local contra flutuações térmicas, enquanto uma capacidade térmica negativa ($C < 0$) indica instabilidade local. Mostramos que a capacidade térmica possui um ponto de Davies, sendo tal ponto relacionado ao máximo da temperatura de Hawking. Portanto, o ponto de Davies estabelece o valor de r_+ no qual o buraco negro Dymnikova N-dimensional exibe uma transição de fase, e também demonstramos que o ponto de Davies depende da dimensão. À medida que aumentamos o valor da dimensão, a posição do ponto de Davies é deslocada para a esquerda, de modo que a transição de fase ocorra para valores menores de r_+ .

O estudo dos modos quase-normais de um buraco negro de Dymnikova oferece uma janela única para suas propriedades fundamentais e comportamento gravitacional. Neste trabalho, ilustramos representações gráficas da barreira de potencial efetivo em relação à coordenada radial, r , variando individualmente o conjunto de parâmetros N, r_g, r_0, ℓ . Em seguida, calculamos numericamente os modos quase-normais usando o método WKB. Nossas descobertas indicam que, dentro da faixa de parâmetros considerada, o buraco negro permanece estável contra perturbações escalares com base nos cálculos dos modos quase-normais. Isso se mantém verdadeiro devido a $\text{Im}(\omega)$ negativo. Os resultados apresentados neste trabalho ampliam o buraco negro de Dymnikova, implicando relevância potencial dentro do contexto da teoria das cordas.

REFERÊNCIAS

- [1] FINKELSTEIN, D. Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle. *Phys. Rev.*, [s. l.], v. 110, p. 965–967, may 1958.
- [2] AKIYAMA, K. *et al.* First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *Astrophys. J. Lett.*, [s. l.], v. 875, p. L1, 2019.
- [3] AYON-BEATO, E.; GARCIA, A. Regular black hole in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, [s. l.], v. 80, p. 5056–5059, 1998.
- [4] LAN, C. *et al.* Regular Black Holes: a short topic review. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 62, n. 9, p. 202, 2023.
- [5] SAKHAROV, A. D. The Initial Stage of an Expanding Universe and the Appearance of a Nonuniform Distribution of Matter. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, [s. l.], v. 22, p. 241, jan. 1966.
- [6] GLINER, E. B. Algebraic Properties of the Energy-momentum Tensor and Vacuum-like States of Matter. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, [s. l.], v. 22, p. 378, fev. 1966.
- [7] BARDEEN, J. M. Non-singular general relativistic gravitational collapse. In: Proceedings of the 5th International Conference on Gravitation and the Theory of Relativity. [S. l.], set. 1968.
- [8] BUENO, P.; CANO, P. A.; HENNIGAR, R. A. Regular Black Holes From Pure Gravity. arXiv:2403.04827, mar. 2024.
- [9] CHRISTIANSEN, H. R. *et al.* New regular 2+1 black hole solutions in bilocal gravity. *Int. J. Mod. Phys. D*, [s. l.], v. 32, n. 07, p. 2350041, 2023.
- [10] FURTADO, J.; ALENCAR, G. BTZ Black-Bounce to Traversable Wormhole. *Universe*, v. 8, n. 12, p. 625, 2022.
- [11] LESSA, L. A.; SILVA, J. E. G. Regular black holes in Einstein cubic gravity. arXiv:2305.18254, may 2023.
- [12] BEKENSTEIN, J. D. Black holes and the second law. *Lett. Nuovo Cim.*, v. 4, p. 737–740, 1972.
- [13] BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 7, p. 2333–2346, apr 1973.
- [14] BEKENSTEIN, J. D. Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, [s. l.], v. 9, p. 3292–3300, jun. 1974.

- [15] HAWKING, S. W. Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, [s. l.], v. 43, p. 199–220, 1975. [Erratum: Commun.Math.Phys. 46, 206 (1976)].
- [16] DYMNIKOVA, I. Vacuum nonsingular black hole. *Gen. Rel. Grav.*, [s. l.], v. 24, p. 235–242, 1992.
- [17] KALUZA, T. Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, [s. l.], v. 1921, p. 966–972, 1921.
- [18] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An Alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, [s. l.], v. 83, p. 4690–4693, 1999.
- [19] PAUL, B. C. Dymnikova black hole in higher dimensions. *Eur. Phys. J. Plus*, [s. l.], v. 138, n. 7, p. 633, 2023.
- [20] NASHED, G. G. L. Stability of the vacuum nonsingular black hole. *Chaos Solitons Fractals*, [s. l.], v. 15, p. 841, 2003.
- [21] DYMNIKOVA, I.; GALAKTIONOV, E. Stability of a vacuum nonsingular black hole. *Class. Quant. Grav.*, [s. l.], v. 22, p. 2331–2358, 2005.
- [22] KONOPLYA, R. A. *et al.* Quasinormal modes of renormalization group improved Dymnikova regular black holes. *Phys. Rev. D*, [s. l.], v. 107, n. 10, p. 104050, 2023.
- [23] SHARIF, M.; KHAN, A. Thermodynamics of regular black hole with de Sitter core. *Mod. Phys. Lett. A*, [s. l.], v. 37, n. 08, p. 2250049, 2022.
- [24] ESTRADA, M.; MUNIZ, C. R. Dymnikova-Schwinger traversable wormholes. *JCAP*, [s. l.], v. 03, p. 055, 2023.
- [25] ALENCAR, G. *et al.* Dymnikova GUP-corrected black holes. *JCAP*, [s. l.], v. 11, p. 100, 2023.
- [26] KONOPLYA, R. A.; ZHIDENKO, A. Quasinormal modes of black holes: from astrophysics to string theory. *Rev. Mod. Phys.*, [s. l.], v. 83, p. 793–836, 2011.
- [27] KOKKOTAS, K. D.; SCHMIDT, B. G. Quasinormal modes of stars and black holes. *Living Rev. Rel.*, [s. l.], v. 2, p. 2, 1999.
- [28] ABBOTT, B. P. *et al.* Binary black hole mergers in the first advanced ligo observing run. *Phys. Rev. X*, [s. l.], v. 6, p. 041015, oct 2016.
- [29] BIZON, P.; CHMAJ, T.; SCHMIDT, B. G. Critical behavior in vacuum gravitational collapse in 4+1 dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, [s. l.], v. 95, p. 071102, 2005.
- [30] KUNSTATTER, G. d-dimensional black hole entropy spectrum from quasinormal modes. *Phys. Rev. Lett.*, [s. l.], v. 90, p. 161301, 2003.

- [31] D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's relativity*. [S.l.: s.n.], 1992. ISBN 978-0-19-859686-8.
- [32] PADMANABHAN, T. *Gravitation: Foundations and frontiers*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014. ISBN 978-7-301-22787-9.
- [33] NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. [S.l.]: CRC Press, 2003.
- [34] SCHUTZ, B. F. *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1980.
- [35] RINDLER, W. *Relativity: special, general, and cosmological*. [S.l.]: Oxford University Press, 2006.
- [36] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*: principles and applications of the General Theory of Relativity. New York: John Wiley and Sons, 1972. ISBN 978-0-471-92567-5, 978-0-471-92567-5.
- [37] MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973. ISBN 978-0-7167-0344-0, 978-0-691-17779-3.
- [38] LANDAU, L. D.; LIFSHITS, E. M. *The Classical Theory of Fields*. Oxford: Pergamon Press, 1975. Volume 2. (Course of Theoretical Physics, Volume 2). ISBN 978-0-08-018176-9.
- [39] HILBERT, D. Die Grundlagen der Physik. *Mathematische Annalen*, v. 92, p. 1, 1924.
- [40] WALD, R. M. The thermodynamics of black holes. *Living Rev. Rel.*, v. 4, p. 6, 2001.
- [41] WALD, R. M. *General Relativity*. [S.l.]: Chicago Univ. Pr., 1984.
- [42] CARTER, B. Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom. *Phys. Rev. Lett.*, v. 26, p. 331–333, 1971.
- [43] BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W. The Four laws of black hole mechanics. *Commun. Math. Phys.*, v. 31, p. 161–170, 1973.
- [44] HAWKING, S. W. Black holes in general relativity. *Commun. Math. Phys.*, v. 25, p. 152–166, 1972.
- [45] PENROSE, R. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Riv. Nuovo Cim.*, v. 1, p. 252–276, 1969.
- [46] WALD, R. M. *Quantum Field Theory in Curved Space-Time and Black Hole Thermodynamics*. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1995. (Chicago Lectures in Physics). ISBN 978-0-226-87027-4.

- [47] UNRUH, W. G. Notes on black-hole evaporation. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 14, p. 870–892, Aug 1976.
- [48] EINSTEIN, A. *The Meaning of Relativity*. [S.l.]: Springer Dordrecht, 1922. ISBN 978-0-412-20560-6.
- [49] PETROV, A. Z.; RINDLER, W. Einstein Spaces. *Physics Today*, v. 24, n. 1, p. 75–77, 01 1971. ISSN 0031-9228.
- [50] SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1916, p. 189–196, 1916.
- [51] SITTER, W. de. On Einstein's Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 78, p. 3–28, 1917.
- [52] FRIEDMAN, A. Über die krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, v. 10, p. 377–386, January 1922.
- [53] EINSTEIN, A. Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1917, p. 142–152, 1917.
- [54] SOLA, J. Cosmological constant and vacuum energy: old and new ideas. *J. Phys. Conf. Ser.*, v. 453, p. 012015, 2013.
- [55] STUCHLIK, Z.; HLEDIK, S. Some properties of the Schwarzschild-de Sitter and Schwarzschild - anti-de Sitter space-times. *Phys. Rev. D*, v. 60, p. 044006, 1999.
- [56] CHIBA, T.; KIMURA, M. A note on geodesics in the Hayward metric. *PTEP*, v. 2017, n. 4, p. 043E01, 2017.
- [57] BRONNIKOV, K. A. Regular magnetic black holes and monopoles from nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 63, p. 044005, 2001.
- [58] KAGRAMANOVA, V. *et al.* Analytic treatment of complete and incomplete geodesics in Taub-NUT space-times. *Phys. Rev. D*, v. 81, p. 124044, 2010.
- [59] CHAMSEDDINE, A. H.; MUKHANOV, V. Nonsingular Black Hole. *Eur. Phys. J. C*, v. 77, n. 3, p. 183, 2017.
- [60] FROLOV, V. P. Notes on nonsingular models of black holes. *Phys. Rev. D*, v. 94, n. 10, p. 104056, 2016.
- [61] MARKOV, M. A. Limiting density of matter as a universal law of nature. *ZhETF Pisma Redaktsiiu*, v. 36, p. 214–216, 1982.

- [62] GEROCH, R. What is a singularity in general relativity? *Annals of Physics*, v. 48, n. 3, p. 526–540, jul. 1968.
- [63] GLINER, É. B.; DYMNIKOVA, I. G. A nonsingular Friedmann cosmology. *Pisma v Astronomicheskii Zhurnal*, v. 1, p. 7, jan. 1975.
- [64] GUREVICH, L. E. On the Origin of the Metagalaxy. *Astrophysics and Space Science*, 38, p. 67, nov 1975.
- [65] STAROBINSKY, A. A. Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe. *JETP Lett.*, v. 30, p. 682–685, 1979.
- [66] AYON-BEATO, E.; GARCIA, A. The Bardeen model as a nonlinear magnetic monopole. *Phys. Lett. B*, v. 493, p. 149–152, 2000.
- [67] BRAHMA, S.; CHEN, C.-Y.; YEOM, D.-h. Testing Loop Quantum Gravity from Observational Consequences of Nonsingular Rotating Black Holes. *Phys. Rev. Lett.*, v. 126, n. 18, p. 181301, 2021.
- [68] PEREZ, A. Black Holes in Loop Quantum Gravity. *Rept. Prog. Phys.*, v. 80, n. 12, p. 126901, 2017.
- [69] ZHANG, Y.; GAO, S. First law and Smarr formula of black hole mechanics in nonlinear gauge theories. *Class. Quant. Grav.*, v. 35, n. 14, p. 145007, 2018.
- [70] HAYWARD, S. A. Formation and evaporation of regular black holes. *Phys. Rev. Lett.*, v. 96, p. 031103, 2006.
- [71] MIAO, Y.-G.; XU, Z.-M. Thermodynamics of noncommutative high-dimensional AdS black holes with non-Gaussian smeared matter distributions. *Eur. Phys. J. C*, v. 76, n. 4, p. 217, 2016.
- [72] NAM, C. H. Thermodynamics and phase transitions of non-linear charged black hole in AdS spacetime. *European Physical Journal C*, v. 78, n. 7, p. 581, jul. 2018.
- [73] POISSON, E. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- [74] CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. [S.l.]: Benjamin Cummings, 2003.
- [75] FERNANDO, S. Bardeen–de Sitter black holes. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 26, n. 07, p. 1750071, 2017.

- [76] MOSTEPANENKO, V. M.; TRUNOV, N. N. *The Casimir effect and its applications*. Oxford, New York: Clarendon Press, 1997. ISBN 978-0-19-853998-8, 978-0-19-853998-8, 978-5-283-03922-0.
- [77] SCHWINGER, J. S. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys. Rev.*, v. 82, p. 664–679, 1951.
- [78] DYMNIKOVA, I. De Sitter-Schwarzschild Black Hole: its Particlelike Core and Thermodynamical Properties. *International Journal of Modern Physics D*, v. 5, n. 5, p. 529–540, 1996.
- [79] CORLESS, R. *et al.* On the lambert w function,. *Advances in Computational Mathematics*, v. 5, p. 329–359, 1996.
- [80] CHEN, P.; ADLER, R. J. Black hole remnants and dark matter. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, v. 124, p. 103–106, 2003.
- [81] DYMNIKOVA, I.; KORPUSIK, M. Regular black hole remnants in de sitter space. *Phys. Lett. B*, v. 685, p. 12–18, 2010.
- [82] ADLER, R. J.; CHEN, P.; SANTIAGO, D. I. The Generalized uncertainty principle and black hole remnants. *Gen. Rel. Grav.*, v. 33, p. 2101–2108, 2001.
- [83] ALI, M. S.; GHOSH, S. G. Exact d -dimensional Bardeen-de Sitter black holes and thermodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 98, n. 8, p. 084025, 2018.
- [84] DAVIES, P. C. W. Thermodynamics of black holes. *Rept. Prog. Phys.*, v. 41, p. 1313–1355, 1978.
- [85] HUBER, G. Gamma function derivation of n-sphere volumes. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 89, n. 5, p. 301–302, 1982.
- [86] MACÊDO, M. *et al.* Thermodynamics and quasinormal modes of the dymnikova black hole in higher dimensions. *Annals of Physics*, v. 471, p. 169833, 2024. ISSN 0003-4916.
- [87] HARRIS, C. M.; KANTI, P. Hawking radiation from a (4+n)-dimensional black hole: Exact results for the Schwarzschild phase. *JHEP*, v. 10, p. 014, 2003.
- [88] FRYE, C. R.; EFTHIMIOU, C. J. *Spherical Harmonics in P Dimensions*. [S.l.]: World Scientific, 2014. ISBN 978-9814596695.
- [89] PANOTOPOULOS, G. Quasinormal modes of charged black holes in higher-dimensional Einstein-power-Maxwell theory. *Axioms*, v. 9, n. 1, p. 33, 2020.
- [90] HARMARK, T.; NATARIO, J.; SCHIAPPA, R. Greybody Factors for d-Dimensional Black Holes. *Adv. Theor. Math. Phys.*, v. 14, n. 3, p. 727–794, 2010.

- [91] KONOPLYA, R. A.; ZHIDENKO, A.; ZINHAILO, A. F. Higher order WKB formula for quasinormal modes and grey-body factors: recipes for quick and accurate calculations. *Class. Quant. Grav.*, [s. l.], v. 36, p. 155002, 2019.
- [92] MATYJASEK, J.; OPALA, M. Quasinormal modes of black holes: the improved semianalytic approach. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, [s. l.], v. 96, p. 024011, jul 2017.