

## RESUMEN

Desde su descubrimiento en 1932, la simetría  $SU(2)$  de isospin en el sector de hadrones ha jugado un papel muy importante en la clasificación de estas partículas y de sus interacciones. La simetría de isospin sería exacta en el caso en que los quarks  $u$  y  $d$  tuvieran las mismas masas y en ausencia de las interacciones electromagnéticas, por lo que se trata de una simetría aproximada. La extracción de parámetros fundamentales del modelo estándar de partículas elementales como las entradas de la matriz de mezcla de quarks, o la predicción del momento magnético anómalo del muón, requieren tener un buen control en el cálculo de los efectos de rotura de la simetría de isospin, del orden de unas décimas de por ciento.

En esta tesis se estudian los efectos del rompimiento de la simetría de isospin inducidas por las interacciones electromagnéticas en varios procesos de interés en la producción de hadrones. Mas específicamente, en este trabajo de tesis calculamos las correcciones radiativas de largas distancias al orden  $\alpha$  en varios procesos que involucran la producción de dos mesones pseudoscalares. Entre nuestros resultados figuran: (a) el primer cálculo consistente de la diferencia de anchuras en el sistema de mesones  $\rho^\pm - \rho^0$ , (b) la estimación de los efectos de estructura electromagnética en la producción de kaones cargados y neutros y (c) el cálculo correcto de las correcciones radiativas en la producción de dos piones en el decaimiento del leptón  $\tau$ .



## Abstract

Since its discovery in 1932, the  $SU(2)$  isospin symmetry of strong interactions has played a very important role in the classification of hadrons and their interactions. It is well known that isospin symmetry is only an approximate symmetry which is broken by the mass difference of up and down quarks and by the effects of electromagnetic interactions. Isospin symmetry is very important also in phenomenological applications. For instance, the determination of fundamental parameters of the Standard Model of particle physics such as the mixing of quarks or the prediction of the muon anomalous magnetic moment, requires that isospin symmetry effects at the level of tenths of percent are under well control.

In this thesis work we study the isospin symmetry breaking effects produced by the electromagnetic interactions in the decays of some particles. More specifically, we calculate the long distance radiative corrections at  $\mathcal{O}(\alpha)$  in processes where the production of two pseudoscalars mesons is involved. Among our most important results we mention: a) the first calculation of the width difference between charged and neutral  $\rho(770)$  mesons, b) the calculation of radiative corrections to the dominant decays of  $\phi$  mesons which consider the electromagnetic structure of kaons and, c) the correct calculation of the long-distance radiative corrections in the production of two pions in  $\tau$  decays.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Corrección radiativa a <math>\rho \rightarrow \pi\pi</math></b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.1.1. Contribuciones a la diferencia de anchuras . . . . .	12
2.2. Decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ . . . . .	13
2.2.1. Correcciones de fotones virtuales a $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ . . . . .	13
2.2.2. Correcciones de fotones reales a $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ . . . . .	20
2.3. Decaimiento $\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ . . . . .	24
2.3.1. Correcciones de fotones virtuales a $\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ . . . . .	25
2.3.2. Correcciones de fotones reales a $\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ . . . . .	29
2.4. Rompimiento de isospin en el sistema $\rho^\pm - \rho^0$ . . . . .	32
2.5. Conclusiones . . . . .	39
<b>3. Corrección radiativa a <math>\phi \rightarrow K^+K^-</math></b>	<b>41</b>
3.1. Introducción . . . . .	41
3.1.1. El proceso $V \rightarrow P\bar{P}$ a nivel de árbol . . . . .	45
3.2. Correcciones radiativas en QED escalar . . . . .	46
3.2.1. Correcciones de fotones virtuales a $\phi \rightarrow K^+K^-$ . . . . .	46
3.2.2. Correcciones de fotones reales $\phi \rightarrow K^+K^-$ . . . . .	49
3.2.3. Predicción teórica $\mathcal{R}_\phi^t$ . . . . .	53
3.3. Correcciones virtuales para kaones no puntuales . . . . .	54
3.3.1. Correcciones virtuales en VMD para kaones cargados . . . . .	55
3.3.2. Correcciones virtuales en VDM para kaones neutros . . . . .	66
3.3.3. Región de validez del modelo de dominancia vectorial. . . . .	69
3.4. Resultado y Conclusiones . . . . .	73

<b>4. Correcciones radiativas a <math>\tau \rightarrow \pi\pi\nu</math></b>	<b>75</b>
4.1. Introducción . . . . .	75
4.2. Correcciones virtuales al decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau$ . . . . .	77
4.3. Correcciones de fotones reales a $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau$ . . . . .	90
4.4. Conclusiones . . . . .	96
<b>5. Conclusiones Generales y Perspectivas</b>	<b>97</b>
<b>A. Autoenergías de kaones</b>	<b>101</b>
<b>B. El proceso radiativo <math>V \rightarrow P^+P^-\gamma</math></b>	<b>107</b>
B.1. Emisión de fotones reales suaves . . . . .	107
B.2. Contribuciones finitas al decaimiento $\phi \rightarrow K^+K^-\gamma$ . . . . .	113
B.3. Contribuciones dependientes del modelo en $\phi \rightarrow K^+K^-\gamma$ . . . . .	114
<b>C. Correcciones radiativas de convección en <math>\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-</math></b>	<b>117</b>
<b>D. Contribución de los términos regulares en <math>\rho \rightarrow \pi\pi\gamma</math></b>	<b>123</b>
<b>E. Matrices de Dirac</b>	<b>125</b>
<b>F. Funciones de Passarino-Veltman.</b>	<b>127</b>
<b>G. Función dilogaritmo</b>	<b>129</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La simetría de isospin o spin isotópico fue postulada en 1932 por W. Heisenberg[1] poco después del descubrimiento del neutrón por J. Chadwick [2]. La propuesta de Heisenberg se basó en la observación de que el neutrón y el protón tienen masas muy similares y por lo tanto se les podía ver como dos estados degenerados de un isodoblete (doblete de isospin  $(p, n)$ ), que se distinguen por el número cuántico de isospin  $I_3$ , análogo al spin (de ahí el nombre de isospin). Desde entonces, la simetría de isospin ha jugado un papel muy importante en la física nuclear y en la física de partículas elementales tanto en la clasificación de los núcleos y de los hadrones, como en las interacciones fundamentales que ocurren entre estos. Algunos ejemplos de la clasificación de hadrones en multipletos de isospin se muestran en el Cuadro (1.1) [3] donde también se indica el contenido de quarks de dichas partículas, así como la diferencia de masas  $\Delta M_H$  al interior de cada isomultiplete.

Como puede verificarse del Cuadro (1.1), la simetría de isospin no es exacta ya que los hadrones al interior de un isomultiplete no tienen la misma masa ( $\Delta M_H \neq 0$ ). Visto en términos de interacciones, la contribución dominante a las masas de los hadrones se debe a las interacciones fuertes, es decir a las interacciones entre los quarks y los gluones que los componen. Por lo tanto, se puede postular que las interacciones fuertes respetan la simetría de isospin y que la rotura de la misma es un efecto de las demás interacciones fundamentales. Es decir, si  $H_F$ ,  $H_{weak}$  y  $H_{em}$  denotan los hamiltonianos de las interacciones

$J^P$	Partícula	$I$	quarks	Masa (MeV)	$\Delta M_H$ (MeV)
0 <sup>-</sup>	$\pi^\pm$	1	$du, \bar{u}d$	139.570	
	$\pi^0$	1	$\bar{d}d, \bar{u}u$	134.976	+4.594
	$K^0$	$\frac{1}{2}$	$d\bar{s}$	497.648	
	$K^+$		$u\bar{s}$	493.677	-3.971
	$D^-$	$\frac{1}{2}$	$d\bar{c}$	1869.4	
	$\bar{D}^0$		$u\bar{c}$	1864.6	+4.8
	$B^0$	$\frac{1}{2}$	$d\bar{b}$	5279.4	
	$B^+$		$u\bar{b}$	5279.0	-0.4
	$\rho^\pm$	1	$du, \bar{u}d$	777.4	
	$\rho^0$	1	$\bar{d}d, \bar{u}u$	775.0	2.4
1 <sup>-</sup>	$K^{*0}$	$\frac{1}{2}$	$d\bar{s}$	896.10	
	$K^{*+}$		$u\bar{s}$	891.66	-4.44
	$D^{*-}$	$\frac{1}{2}$	$d\bar{c}$	2010.0	
	$\bar{D}^{*0}$		$u\bar{c}$	2006.7	+3.3
$(1/2)^+$	$n$	$\frac{1}{2}$	$udd$	939.565	
	$p$		$uud$	938.272	-1.293
	$\Sigma^-$	1	$dds$	1197.449	
	$\Sigma^0$		$uds$	1192.642	+4.807
	$\Sigma^+$		$uus$	1189.37	-3.272

Cuadro 1.1: Multipletes de isospin en algunos hadrones.  $I$  denota el número cuántico de isospin,  $J$  el spin, y  $\Delta M_H = m_{H^\pm} - m_{H^0}$  es la diferencia de masa entre estados con y sin carga.

fuerte, débil y electromagnética, se tiene que:

$$[H_F, I_i] = 0 , \quad (1.1)$$

$$[H_{em,weak}, I_i] \neq 0 \quad , \quad (1.2)$$

donde  $I_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) denotan los operadores de isospin.

A nivel de las interacciones fundamentales la simetría de isospin se rompe debido a

(i) que los quarks  $u$  y  $d$  tienen masas diferentes, (ii) la presencia de las interacciones electromagnéticas. Para verificar los enunciados anteriores, consideremos únicamente el caso de dos sabores de los quarks ( $u$  y  $d$ ), los cuales forman un doblete de isospin:

$$Q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

En términos de este doblete de isospin, el hamiltoniano para las masas de los quarks y de las interacciones electromagnéticas se pueden escribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} H_m &= m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d = \frac{m_u + m_d}{2} \bar{Q}Q + \frac{m_u - m_d}{2} \bar{Q}\tau_3 Q, \\ H_{em} &= eA_\mu \left( \frac{2}{3} \bar{u}\gamma_\mu u - \frac{1}{3} \bar{d}\gamma_\mu d \right) = eA_\mu \left( \frac{1}{6} \bar{Q}\gamma_\mu Q + \frac{1}{2} \bar{Q}\tau_3 \gamma_\mu Q \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde  $\tau_i$  son las matrices de Pauli,  $e$  la carga eléctrica del positrón y  $A_\mu$  el cuadrivector electromagnético. Debido a que  $[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\tau_k$ , el término que contiene  $\tau_3$  no commuta con los operados de isospin  $\tau_{1,2}$  y por lo tanto rompe la simetría de isospin. Como consecuencia de la rotura de la simetría de isospin, las partículas al interior de un isomultiplete adquieren diferentes masas.

Mas allá de las relaciones entre las masas de hadrones, la simetría de isospin permite relacionar las amplitudes de probabilidad de diferentes procesos físicos, en los cuales participan los miembros de un isomultiplete. Una vez que los efectos de rotura de la simetría de isospin se incorporan en los cálculos de estas amplitudes, se puede hacer una comparación con la información experimental correspondiente. En muchos de los procesos estudiados con anterioridad, se ha encontrado que la simetría de isospin, y los efectos de su rotura generados por la diferencia de masas de los quarks  $u-d$  y las interacciones electromagnéticas, dan una buena descripción del mundo real.

En el presente trabajo de tesis estudiaremos varios procesos de gran interés actual en la física de partículas elementales en donde se requiere calcular de forma cuidadosa los efectos de la rotura de la simetría de isospin:

- En el capítulo 2, estudiaremos el rompimiento de la simetría de isospin en la diferencia de las anchuras de los mesones  $\rho^\pm - \rho^0$ . La contribución principal de esta tesis tiene que ver con el cálculo de las correcciones radiativas electromagnéticas a los decaimientos  $\rho^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0$ ,  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$  y el cálculo de los correspondientes modos radiativos de estos procesos. Este efecto de rotura del isospin, el cual no ha sido medido en la actualidad con la certeza requerida, es de gran relevancia en la evaluación del momento magnético anómalo del muón  $a_\mu$  obtenido a partir de los datos[4][5][6] del espectro hadrónico en decaimientos del leptón  $\tau$  (ver descripción mas adelante).
- En el capítulo 3, estudiaremos los efectos del rompimiento de la simetría de isospin en la producción relativa de decaimientos  $\phi(1020) \rightarrow K^+ K^- / K_L K_S$ . Esta razón es un dato muy importante para evaluar la tasa de producción de estas partículas en los colisionadores electrón-positrón y realizar estudios posteriores sobre los decaimientos de kaones [7][8][9][10]. Desde hace varios años se ha observado [11][12] que el cálculo de los efectos de rotura de la simetría en estos procesos excede en varias desviaciones estándar a las mediciones experimentales [3]. Dado que esos cálculos teóricos se han efectuado usando la electrodinámica cuántica (QED) escalar (es decir, considerando que los kaones son puntuales), en el presente trabajo de tesis recalculamos las correcciones radiativas tomando en cuenta la estructura electromagnética de los kaones.
- En el capítulo 4, revisaremos el cálculo de las correcciones radiativas al decaimiento  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ . Estas correcciones radiativas son de gran importancia en la remoción de efectos de rotura de isospin de los datos del espectro de dos piones para la evaluación de la contribución hadrónica principal en el momento magnético anómalo del muón [13][14][15][16]. El cálculo de estas correcciones radiativas se realizó recientemente en las referencias [17][18] y más recientemente se llevó a cabo un cálculo mas detallado de las correcciones de fotones reales en el contexto de un modelo de

dominancia de mesones [19][20]. En este trabajo de tesis reavivamos el cálculo de las correcciones virtuales y recalculamos las correcciones de fotones reales teniendo en cuenta la suma correcta de la probabilidad de transición sobre los grados de polarización del fotón real.

- Finalmente, en el capítulo 5 mostraremos nuestras conclusiones generales y dedicaremos unos apéndices para mostrar algunos detalles técnicos de nuestros cálculos.

Dado que los cálculos que realizamos en los Capítulos 2 y 4 revisten una gran importancia para la predicción del momento magnético anómalo del muón (convencionalmente denotado como  $a_\mu$ ) en el contexto del modelo estándar de partículas elementales, a continuación daremos una breve descripción de este problema.

El momento dipolar magnético de una partícula elemental de masa  $m$ , carga  $e$  y spin  $\vec{S}$  se define como  $\vec{M} = g \frac{e}{2m} \vec{S}$ , donde  $g$  denota el factor giromagnético. Al orden más bajo en la teoría de perturbaciones la teoría cuántica relativista predice un momento magnético *normal* con  $g = 2$ . Las correcciones cuánticas generan una desviación de este valor estándar, es decir  $a \equiv (g - 2)/2 \neq 0$ , valor conocido como momento magnético *anómalo*. En el caso del muón, este valor ha sido medido recientemente con una alta precisión [21][22]. El valor promedio obtenido de medidas en muones positivos y negativos es [21]:

$$a_\mu^{\text{exp}} = 11659208.0(5.4)(3.3) \times 10^{-10} , \quad (1.5)$$

donde los cifras entre paréntesis denotan respectivamente los errores estadísticos y sistemáticos del experimento.

Este resultado puede compararse con las predicciones teóricas obtenidas en el marco del modelo estándar (MS) de partículas elementales. En realidad, actualmente existen dos predicciones teóricas las cuales se obtienen usando como datos de entrada la producción de hadrones en la aniquilación electrón-positrón ( $e^+e^-$ ) y en decaimientos del leptón  $\tau$ . Estas

son respectivamente [16][23]

$$a_\mu^{\text{MS}}(e^+e^-) = 11659180.5(4.4)(3.5)(0.2) \times 10^{-10} \quad (1.6)$$

$$a_\mu^{\text{MS}}(\tau) = 11659198.6(5.8)(3.5)(0.2) \times 10^{-10}, \quad (1.7)$$

donde las cifras entre paréntesis denotan diferentes incertidumbres relacionadas con parámetros y datos usados para obtener dichas predicciones.

Una comparación entre las ecuaciones (1.5), (1.6) y (1.7) permite extraer las siguientes conclusiones: (i) la medición experimental de  $a_\mu^{\text{exp}}$  excede a las predicciones teóricas (1.6) y (1.7) en aproximadamente 3.3 y 0.9 desviaciones estándar y, (ii) las predicciones teóricas, ecs. (1.6) y (1.7) discrepan entre si en cerca de 3 desviaciones estándar. Un análisis detallado de las diferentes contribuciones a la predicción teórica permite concluir que el origen de la discrepancia entre las dos predicciones se encuentra principalmente en la contribución que proviene de los diagramas de polarización del vacío que involucran un par de mesones  $\pi$ . Sus valores respectivos, extraídos de datos experimentales de la aniquilación  $e^+e^-$  y de decaimientos del leptón  $\tau$ , son [24]:

$$a_\mu^{\pi\pi}(e^+e^-) = (504.6 \pm 3.1(\text{exp}) \pm 0.9(\text{rad.})) \times 10^{-10} \quad (1.8)$$

$$a_\mu^{\pi\pi}(\tau) = (519.1 \pm 1.5(\text{exp.}) \pm 2.6(\text{BR}) \pm 2.5(\text{Isospin})) \times 10^{-10}, \quad (1.9)$$

donde claramente se observa una discrepancia de magnitud similar a la que se tiene entre las ecs. (1.6) y (1.7). Como veremos a continuación, las dos diferentes predicciones mostradas en las ecs. (1.8) y (1.9) deberían ser las mismas debido a la simetría de isospin. El hecho de que exista una discrepancia revela que las correcciones debidas a la rotura de la simetría de isospin no han sido tomadas en cuenta correctamente o debido a que existe alguna pieza faltante de estas correcciones que no ha sido identificada.

La contribución hadrónica al momento magnético anómalo del muon debida a la polarización del vacío hadrónico se calcula a partir de los datos de la sección eficaz de producción

de dos piones mediante la relación de dispersión [25]

$$a_\mu^{\pi\pi}(e^+e^-) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{4m_\pi^2}^\infty dt K(t) \sigma^0(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-)(t) , \quad (1.10)$$

donde  $K(t)$  es una función de peso que decrece como  $1/t$  [26] y  $\sigma^0(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-)(t)$  denota la sección eficaz *desnuda* (es decir, donde las correcciones debidas a la radiación de fotones en el estado inicial, de la polarización de vacío y las correcciones al vértice inicial han sido sustraídas).

Un cálculo alternativo se puede obtener si se utilizan datos del espectro de 2 piones de los decaimientos  $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau$  usando la simetría de isospin [13]. Una vez que los efectos de rotura de la simetría de isospin han sido incorporados, se puede obtener la relación entre la función espectral de dos piones en decaimientos del leptón  $\tau$  y la sección eficaz de  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ . Esta relación, la cual permite calcular  $a_\mu^{\pi\pi}(\tau)$  al insertarla en (1.10), es la siguiente [17]:

$$\sigma^0(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-) = \left[ \frac{K_\sigma(t)}{K_\Gamma(t)} \frac{d\Gamma_{\pi\pi[\gamma]}}{dt} \times \frac{R_{IB}(t)}{S_{EW}} \right] , \quad (1.11)$$

donde  $d\Gamma_{\pi\pi[\gamma]}/dt$  denota la función espectral de dos piones con fotones inclusivos en decaimientos del  $\tau$ ,  $S_{EW} = 1.01907$  [27] son las correcciones electrodébiles de cortas distancias al decaimiento del  $\tau$  y,

$$\begin{aligned} K_\Gamma(t) &= \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 m_\tau^2}{384\pi^3} \left(1 - \frac{t}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2t}{m_\tau^2}\right) , \\ K_\sigma(t) &= \frac{\pi\alpha^2}{3t} . \end{aligned} \quad (1.12)$$

La función  $R_{IB}(t)$  [17] contiene los efectos de rompimiento de la simetría de isospin,

$$R_{IB}(t) = \frac{1}{G_{EM}(t)} \frac{\beta_{\pi^+\pi^-}^3}{\beta_{\pi^+\pi^0}^3} \left| \frac{F_V(t)}{f_+(t)} \right|^2 . \quad (1.13)$$

Los factores que intervienen en su definición son: (a) las correcciones electromagnéticas de QED de largas distancias ( $G_{EM}(t)$ ), (b) la corrección al espacio fase debida a la diferencia

de masas entre los piones cargados y neutros (factor  $\beta_{\pi^+\pi^-}^3/\beta_{\pi^+\pi^0}^3$ ), y (c) la razón entre los factores de forma electromagnético y débil del pion ( $|F_V(t)/f_+(t)|^2$ ).

Cada uno de estos tres factores sería igual a la unidad en el caso en que la simetría de isospin fuera exacta. Los efectos de rotura de la simetría de isospin inducen una ligera desviación respecto a la unidad y corresponde a la teoría el cálculo explícito de sus valores. Como ya se mencionó anteriormente en esta Introducción, entre los objetivos principales de esta tesis figuran el cálculo de los efectos de rotura de la simetría de isospin en los parámetros que intervienen en la razón de factores de forma del pión (Capítulo 2) y en las correcciones radiativas electromagnéticas de larga distancia (Capítulo 4).

# Capítulo 2

## Corrección radiativa a $\rho \rightarrow \pi\pi$

En este capítulo se estima el rompimiento de simetría de isospin en la diferencia de anchuras de los mesones  $\rho^\pm, \rho^0$ . Para tal fin, se realizan las correcciones electromagnéticas a la anchura de decaimiento de los procesos  $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$  y  $\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$  y se calcula el modo radiativo de cada proceso. La técnica propuesta en la ref.[28] se usa para calcular las correcciones radiativas virtuales finitas en el infrarrojo y ultravioleta en el caso del  $\rho^+$ .

### 2.1. Introducción

La simetría de isospin (IS) de las interacciones fuertes, permite clasificar a los mesones cargados  $\rho^\pm$  y neutro  $\rho^0$  en un triplete ( $I = 1$ ) de isospin. En el límite exacto de la IS (es decir,  $m_u = m_d$  y ausencia de interacciones electromagnéticas a nivel fundamental), estos mesones tienen la mismas masas y anchuras de decaimiento:

$$\begin{aligned}\Delta m_\rho &= m_{\rho^0} - m_{\rho^\pm} = 0, \\ \Delta \Gamma &= \Gamma_{\rho^0} - \Gamma_{\rho^\pm} = 0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

La primera desigualdad se sigue de la degeneración en las masas en el interior de un isomultiplete y la segunda debido a que en el límite de la IS, los mesones  $\rho^{\pm,0}$  experimentan únicamente decaimientos fuertes. De acuerdo con el PDG[3] el promedio pesado de los

valores de las masas y anchos de los mesones  $\rho$  son

$$\begin{aligned}\Delta m_\rho &= m_{\rho^0} - m_{\rho^\pm} = (-0.7 \pm 0.8) \text{MeV}(S = 1.5) , \\ \Delta \Gamma_\rho &= \Gamma_{\rho^0} - \Gamma_{\rho^\pm} = (0.3 \pm 1.3) \text{MeV}(S = 1.4).\end{aligned}\quad (2.2)$$

Debido al valor del factor de escala<sup>1</sup>  $S$  en ambos promedios, tenemos que tomar estos valores con la debida precaución y concluir que desde el punto de vista experimental el rompimiento de la simetría de isospin no ha sido totalmente establecida.

El siguiente cuadro muestra los valores obtenidos por diversos experimentos para la diferencia de masas y la diferencia de anchos, usados por el PDG para realizar el promedio indicado en la ec.(2.2). Claramente se observa que este conjunto de datos no proveen una determinación consistente de la ruptura de la simetría de isospin.

MeV	Colaboración	$m_{\rho^0} - m_{\rho^\pm}$
$-2.4 \pm 0.8$	ALEPH	$\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$
$0.4 \pm 0.7 \pm 0.6$	KLOE	$e^- e^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$
$1.3 \pm 1.1 \pm 2.6$	SND	$e^- e^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$
$1.6 \pm 0.6 \pm 1.7$	CBAR	$\bar{p}p \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$
$-4 \pm 4$	HBC	$\pi^- p$
$-5 \pm 5$	HBC	$\bar{p}p$
$2. \pm 2.1$	RVUE	$\pi N \rightarrow \rho N$
MeV	Colaboración	$\Gamma_{\rho^0} - \Gamma_{\rho^\pm}$
$-0.2 \pm 1.0$	ALEPH	$\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$
$3.6 \pm 1.8 \pm 1.7$	KLOE	$e^- e^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$

En la literatura existen algunos cálculos teóricos de las diferencias de masas de los mesones  $\rho$ [29]. Estos consisten básicamente en calcular las diferencias entre las correcciones de autoenergías de los mesones  $\rho$ . Los cálculos de la diferencia de masas en un modelo de dominancia vectorial [30] y en la teoría de perturbaciones quirales [31] arrojan, respectivamente,

<sup>1</sup>El factor de escala para un promedio de  $N$  medidas de una observable se define como  $S = [\chi^2/(N - 1)]^{1/2}$  y usualmente se reporta cuando no existe un buen acuerdo entre las distintas mediciones experimentales de una observable. Un valor grande de  $S$  se debe probablemente a que se ha subestimado el error en al menos uno de los experimentos[3]

los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}\Delta m_\rho(\text{VMD}) &= (-0.02 \pm 0.02)\text{MeV} , \\ (-0.4)\text{MeV} &< \Delta m_\rho(\text{ChPT}) < (0.7)\text{MeV}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

los cuales parecen mantener la degeneración en las masas de los mesones  $\rho$ .

En lo referente a la diferencias de anchuras, hasta antes de esta tesis no existía un cálculo teórico completo de  $\Delta\Gamma_\rho$ . En resumen, el rompimiento de la simetría de isospin en el sistema de mesones  $\rho$  es un problema aún abierto tanto desde el punto de vista experimental, como teórico. Debido a la importancia que el rompimiento de isospin en el sistema de mesones  $\rho$  tiene para el cálculo de las contribuciones hadrónicas al momento magnético anómalo del muón [13] [16]-[19], en esta tesis abordamos el problema de la cuantificación del rompimiento de la simetría de isospin en los anchos de decaimiento del meson  $\rho$ .

Para ilustrar la forma en que el rompimiento de la simetría de isospin contribuye en la determinación de  $a_\mu^{\pi\pi}(\tau)$  retomemos el cociente de los factores de forma electromagnético y débil del pion en un modelo simple en el cual ambos están dominados por los mesones  $\rho$ . Además de la contribución debida al meson  $\rho$ , en el caso del factor de forma electromagnético debemos agregar un término que rompe la simetría de isospin debido a la mezcla de los mesones  $\rho - \omega$ . Así, los factores de forma electromagnético y débil del pion que intervienen en la ec. (1.13), se puede escribir como [17]:

$$\begin{aligned}F_V(t) &= \frac{m_{\rho^0}^2}{m_{\rho^0}^2 - t - im_{\rho^0}\Gamma_{\rho^0}(t)} \left[ 1 - \frac{\theta_{\rho\omega}}{m_{\rho^+}^2} \frac{t}{m_\omega^2 - t - im_\omega\Gamma_\omega} \right] , \\ f_+(t) &= \frac{m_{\rho^+}^2}{m_{\rho^+}^2 - t - im_{\rho^+}\Gamma_{\rho^+}(t)} ,\end{aligned}$$

donde  $\theta_{\rho\omega} = (-3.5 \pm 0.7) \times 10^{-3}\text{GeV}^2$  denota la intensidad de la mezcla  $\rho - \omega$ . Como podemos observar, el rompimiento de la simetría de isospin en el cociente de factores de forma del pion está determinado por  $\Delta m_\rho$  y  $\Delta\Gamma_\rho$ . Más aún, cuando nos encontramos cerca

de la resonancia ( $t \approx m_\rho^2$ ), esta razón es particularmente sensible al valor de  $\Delta\Gamma_\rho$  y es por este motivo que su determinación es muy importante.

### 2.1.1. Contribuciones a la diferencia de anchuras

Como es usual, definimos la diferencia de anchuras de los mesones  $\rho$  a partir de sus anchos parciales de decaimiento. En la siguiente tabla, listamos los modos de decaimiento de los mesones  $\rho$  medidos experimentalmente [3].

Modo de decaimiento $\rho$	$\Gamma_i/\Gamma$
$\pi\pi$	$\sim 100\%$
$\rho^\pm$	
$\pi^\pm\gamma$	$(4.5 \pm 0.5) \times 10^{-4}$
$\pi^\pm\eta$	$< 6 \times 10^{-3}$
$\pi^\pm\pi^+\pi^-\pi^0$	$< 2 \times 10^{-3}$
$\rho^0$	
$\pi^+\pi^-\gamma$	$(9.9 \pm 1.6) \times 10^{-3}$
$\pi^0\gamma$	$(6.0 \pm 1.3) \times 10^{-4}$
$\eta\gamma$	$(2.95 \pm 0.4) \times 10^{-4}$
$\pi^0\pi^0\gamma$	$(4.5 \pm 0.0) \times 10^{-5}$
$\mu^+\mu^-$	$(4.55 \pm 0.28) \times 10^{-5}$
$e^+e^-$	$(4.70 \pm 0.09) \times 10^{-5}$
$\pi^+\pi^-\pi^0$	$(1.01^{+0.54}_{-0.36} \pm 0.34) \times 10^{-4}$
$\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	$(1.8 \pm 0.9) \times 10^{-5}$
$\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$	$< 4 \times 10^{-5}$

Si deseamos una precisión del orden de  $1 \times 10^{-3}$ , lo cual es la incertidumbre relevante para distinguir los efectos debidos a la rotura de la simetría de isospin, debemos concentrarnos únicamente en los modos de decaimientos siguientes:

$$\begin{aligned} \rho^0 &\rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^+\pi^-\gamma, \\ \rho^\pm &\rightarrow \pi^\pm\pi^0, \pi^\pm\pi^0\gamma. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Por lo tanto, para estimar los efectos del rompimiento de la simetría de isospin debemos calcular

- Las correcciones radiativas al decaimiento  $\rho \rightarrow \pi\pi$ .
- Los anchos de decaimiento de los modos radiativos  $\rho \rightarrow \pi\pi\gamma$ .

El ancho de decaimiento del proceso no radiativo se puede definir como:

$$\Gamma(\rho \rightarrow \pi\pi(\gamma)) = \Gamma(\rho \rightarrow \pi\pi) + \Gamma(\rho \rightarrow \pi\pi\gamma) , \quad (2.5)$$

donde el primer término contiene el ancho del proceso no radiativo a nivel árbol más las correcciones virtuales al proceso  $\rho \rightarrow \pi\pi$ , mientras que el segundo término es el ancho de decaimiento radiativo para fotones suaves<sup>2</sup>. En las siguientes secciones consideramos el caso de las diferentes contribuciones por separado.

## 2.2. Decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$

En esta sección mostramos los cálculos de las contribuciones al ancho de decaimiento del meson neutro  $\rho^0$ . Primero nos enfocaremos en el cálculo de las correcciones electromagnéticas virtuales de orden  $\alpha$  al proceso  $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ , después nos ocuparemos de sus correcciones debidas a la emisión de fotones suaves y finalmente al ancho de decaimiento radiativo  $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ .

### 2.2.1. Correcciones de fotones virtuales a $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$

Como es sabido, el cálculo de las correcciones virtuales contiene tanto divergencias ultravioletas (UV) como infrarrojas (IR). Las divergencias ultravioletas, las cuales provienen del comportamiento de altas energías de los fotones virtuales, son normalmente eliminadas mediante un proceso de renormalización[32]. Sin embargo, existen casos, como el que se considera en esta sección, en los cuales las correcciones virtuales no contienen divergencias ultravioletas debido a una identidad entre las correcciones de vértice y de autoenergía y debido a que no consideramos el acoplamiento del fotón al mesón vectorial  $\rho^0$  (nótese que

---

<sup>2</sup>A los fotones de energía menor que un cierto umbral  $\omega_0$  se les llama fotones suaves

el vértice electromagnético  $\gamma\rho^0\rho^0$  no existe para partículas reales debido a la simetría de conjugación de carga [33]). Por su parte, las divergencias infrarrojas, que provienen del comportamiento de bajas energías de los fotones virtuales, son eliminadas cuando se suman a las correcciones virtuales, las correcciones debidas a la emisión de fotones reales. Este procedimiento de cancelación de divergencias infrarrojas, conocido como el teorema de Bloch-Nordsiek [34][35], se muestra explícitamente en nuestro cálculo. El que las probabilidades cuánticas de dos procesos diferentes se pueden sumar se justifica en el hecho de que, experimentalmente es imposible distinguir los procesos no radiativos ( $\rho \rightarrow \pi\pi(\gamma)$ ) de los radiativos ( $\rho \rightarrow \pi\pi\gamma$ ) cuando los fotones reales en estos últimos tienen energías por debajo del umbral de detección.

Para poder eliminar las divergencias UV e IR que aparecen en el cálculo de las correcciones virtuales es necesario primero aislarlas o regularizarlas. En el presente trabajo de tesis hemos usado el método de regularización dimensional para aislar las divergencias ultravioletas y hemos atribuido una masa ficticia al fotón en su propagador<sup>3</sup> para regular la divergencia infrarroja. Para regular la divergencia que aparece en las correcciones debidas a fotones reales hemos atribuido también una masa ficticia al fotón, pero teniendo cuidado de sumar sobre los tres grados de polarización al calcular la probabilidad de transición.

En esta sección revisamos la corrección debida a fotones virtuales, que representa una corrección a orden  $\alpha$  (1 lazo) a la anchura de decaimiento  $\rho \rightarrow \pi^+\pi^-$ , usando QED escalar para modelar la interacción entre piones y fotón [11],[36]-[40].

La forma mas simple de la densidad Lagrangiana que describe la interacción fuerte  $\rho\pi\pi$ , que respeta la invariancia de Lorentz y de isospin es[36]:

$$\mathcal{L}(\rho \rightarrow \pi\pi) = G \frac{\gamma}{2} \rho_\mu^a (\pi_b \partial_\mu^\leftrightarrow \pi_c) \epsilon_{abc}, \quad (2.6)$$

donde  $G$  es la constante de acoplamiento fuerte y  $a, b, c = 1, 2, 3$  representan índices de isospin. Es fácil obtener de la anterior densidad Lagrangiana los vértices para las distintas

---

<sup>3</sup>En esta tesis se ha usado la norma de Feynman para el propagador del fotón

configuraciones de cargas

$$\begin{aligned} iG\rho_\mu^- [\pi^0 \partial_\mu \pi^- - \pi^- \partial_\mu \pi^0], \\ iG\rho_\mu^0 [\pi^- \partial_\mu \pi^+ - \pi^+ \partial_\mu \pi^-], \\ iG\rho_\mu^+ [\pi^+ \partial_\mu \pi^0 - \pi^0 \partial_\mu \pi^+], \end{aligned} \quad (2.7)$$

de tal manera que se satisface  $g_{\rho^0 \pi^+ \pi^-} = g_{\rho^\pm \pi^\pm \pi^0} = G$ . Las interacciones electromagnéticas para este sistema se introducen vía la sustitución mínima  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieQ A_\mu$ , donde Q es el operador de carga y  $A_\mu$  es el 4-vector del campo electromagnético.

En este modelo, la amplitud de probabilidad del decaimiento  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$  al orden mas bajo en la teoría de perturbaciones es:

$$\mathcal{M}_{\rho^0}^0 = i g_{\rho^0 \pi^+ \pi^-} [p - q] \cdot \eta(P, s), \quad (2.8)$$

donde (p, q, P) denota el 4-momento de  $(\pi^+, \pi^-, \rho^0)$  respectivamente,  $g_{\rho^0 \pi^+ \pi^-}$  es la constante de acoplamiento fuerte y  $\eta(P, s)$  el vector de polarización del meson vectorial  $\rho^0$ . La anchura de decaimiento no polarizada del meson  $\rho^0$ , se obtiene tomando el módulo al cuadrado de (2.8), promediando sobre spin inicial e integrando en el espacio fase del estado final. En el sistema en reposo de una partícula de masa m que decae en 2 partículas, la expresión para calcular la anchura es<sup>4</sup>

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{|\vec{p}_1|}{m^2} d\Omega, \quad (2.9)$$

$\vec{p}_1$  es el vector momento de cualquiera de las partículas finales,  $\overline{|\mathcal{M}|^2}$  representa promediar la amplitud cuadrada sobre spin inicial y sumar sobre spines finales y  $d\Omega$  es el ángulo sólido de la partícula 1. En el sistema en reposo de la partícula que decae,

$$\begin{aligned} E_{\pi^+} = E_{\pi^-} &= \frac{m_{\rho^0}}{2}, \\ v_0 &= \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{m_{\rho^0}^2}}, \\ |\vec{p}| = |\vec{q}| &= \frac{m_{\rho^0} v_0}{2}. \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>De manera simbólica el proceso se representa como  $V \rightarrow P_1^+ P_2^-$

Una vez insertadas las expresiones anteriores en (2.9) y realizada la integración, la anchura de decaimiento a nivel árbol (que se denota con el superíndice 0) es:

$$\Gamma_{\rho^0 \pi^+ \pi^-}^0 = \frac{g_{\rho^0 \pi^+ \pi^-}^2 v_0^3 m_{\rho^0}}{48\pi} . \quad (2.10)$$

Para obtener una expresión de la anchura de decaimiento al siguiente orden en la teoría de perturbaciones se requiere el cálculo de las correcciones radiativas que se pueden separar en dos tipos:

- Correcciones de cortas distancias (altas energías)
- Correcciones de largas distancias (bajas energías)

Las correcciones de cortas distancias están dominadas por las correcciones electrodébiles, es decir, por considerar que los fotones interactúan con los constituyentes de los hadrones (a nivel de quarks). Las correcciones de largas distancias están determinadas por QED escalar, el fotón se acopla a los mesones como si estos fuesen puntuales. En este trabajo de tesis se consideran a los piones puntuales, es decir nuestro cálculo se reduce al caso de correcciones de largas distancias.

Al considerar la contribución de los fotones virtuales (ver Fig.(2.1) ), la amplitud total de decaimiento se convierte en  $\mathcal{M}_{\rho^0}$

$$\mathcal{M}_{\rho^0} = \mathcal{M}_{\rho^0}^0 + \mathcal{M}_{\rho^0}^v . \quad (2.11)$$

La suma de las amplitudes generadas por los diagramas de autoenergía y de corrección al vértice está contenida en  $\mathcal{M}_{\rho^0}^v$ .

$$\mathcal{M}_{\rho^0}^v = \mathcal{M}_{\pi^+}^{SE} + \mathcal{M}_{\pi^-}^{SE} + \mathcal{M}_{VXT} . \quad (2.12)$$

En el caso que estamos estudiando no consideramos el posible acoplamiento del fotón al momento magnético del  $\rho$  neutro. Lo anterior se justifica en el hecho de que debido a la conjugación de carga, este vértice es nulo para partículas sobre su capa de masa.

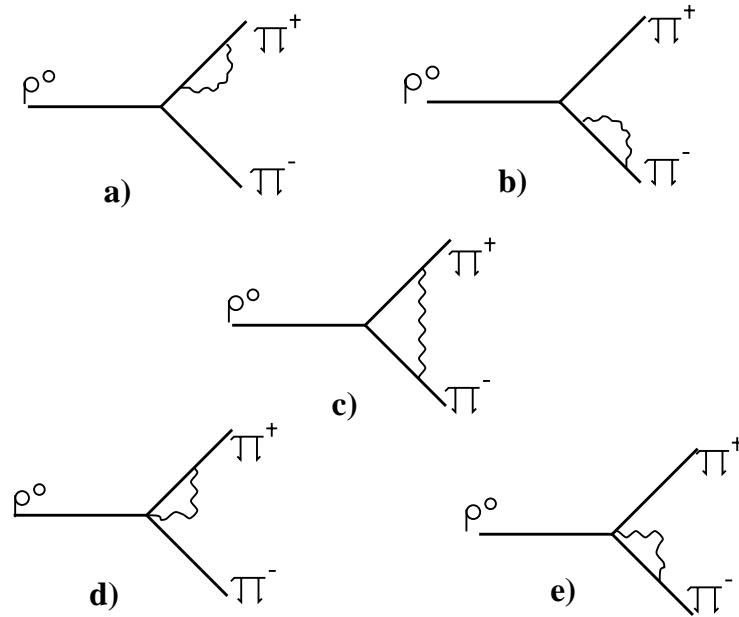


Figura 2.1: Diagramas de auto-energía a), b) y de corrección al vértice c) - e).

La función de autoenergía  $\Sigma_{\pi\pi}$ , involucrada en el cálculo de la amplitud del diagrama de autoenergía, puede ser escrita como un desarrollo en potencias de  $(p^2 - m^2)$  [41]:

$$\Sigma_{\pi\pi} = A + (p^2 - m^2)B + (p^2 - m^2)^2\Sigma_f(p^2) , \quad (2.13)$$

con las constantes definidas en la siguiente manera

$$A = \Sigma_{\pi\pi}|_{p^2=m^2} , \quad B = \partial\Sigma_{\pi\pi}/\partial p^2|_{p^2=m^2} .$$

La constante  $A$  se absorbe en la renormalización de la masa del pion y  $B$  contribuye a la renormalización de la función de onda, mientras que la función  $\Sigma_f$  no contribuye[41]. La contribución de auto-energía a la amplitud de correcciones virtuales se escribe de manera simbólica como:

$$\mathcal{M}_{\pi^\pm}^{SE} = \mathcal{M}_{\rho^0}^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \frac{[B_{UV} + B_{IR}]}{2} , \quad (2.14)$$

donde se han separado la parte divergente ultravioleta  $B_{UV}$  y la divergente infrarroja  $B_{IR}$ .

La divergencia ultravioleta presente en la amplitud de auto-energía y en la amplitud de corrección de vértice se cancelan al sumar las amplitudes. Esto es consecuencia de la identidad de Ward[42] que relaciona la función de auto-energía y la función corrección al vértice

$$\partial\Sigma_{\pi\pi}(p^2)/\partial p^\mu|_{p^2=m^2} = -\frac{1}{g}\Lambda_\mu(p, -p) . \quad (2.15)$$

Si la función de corrección al vértice por fotones virtuales se separa en una parte divergente UV ( contenida en  $L$  ) y una parte finita ultravioleta ( $\Lambda_f(s)$ ), se obtiene la expresión

$$\Lambda_\mu(p_+, p_-) = g_{\rho\pi\pi}(p_+ - p_-)_\mu [L + \Lambda_f(s)] .$$

De (2.15) se sigue que la condición para la cancelación de las divergencias ultravioletas es:

$$L + B_{UV} = 0 . \quad (2.16)$$

La cancelación de la divergencia ultravioleta<sup>5</sup> se puede mostrar explícitamente, para lo cual es necesario escribir analíticamente todas las amplitudes. La amplitud de auto-energía de cada línea externa tiene la forma:

$$\mathcal{M}_{\pi^\pm}^{SE} = \mathcal{M}_{\rho^0}^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{2} \left[ 2 \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln[4\pi] - \ln \left[ \frac{m_{\pi^+}^2}{\mu^2} \right] \right] - 2 \ln \left[ \frac{\lambda^2}{m_{\pi^+}^2} \right] \right] , \quad (2.17)$$

donde  $\lambda$  representa la masa ficticia del fotón. Este parámetro es introducido como regulador en las integrales que presentan comportamiento infrarrojo. Al final de la integración, se toma el límite  $\lambda \rightarrow 0$  y se recupera QED. Los términos que son cero en dicho límite se omiten y solo se considera el logaritmo en  $\lambda$ . La corrección al vértice es la suma de los diagramas c), d), e) mostrados en la Fig.(2.1). La amplitud la escribimos en términos de

---

<sup>5</sup>La divergencia ultravioleta, presente a través del polo en  $\epsilon = 4 - D$ , está definida como  $\Delta_{UV} = 2/\epsilon - \gamma_E + \ln[4\pi] - \ln \left[ \frac{m^2}{\mu^2} \right]$ , donde  $\gamma_E \simeq 0.5772$  es la constante de Euler-Mascheroni y  $\mu$  es la escala de masa introducida en el proceso de regularización dimensional

las funciones de Passarino-Veltman [43] como sigue :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{VXT} &= \mathcal{M}_{\rho^0}^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{2}{v_0^2} \bar{B}0 [m_{\pi^+}^2, 0, m_{\pi^+}^2] - \frac{1+v_0^2}{v_0^2} 2\bar{B}0 [m_{\rho^0}^2, m_{\pi^+}^2, m_{\pi^+}^2] \right. \\ &\quad - m_{\rho^0}^2 (1+v_0^2) C0 [m_{\pi^+}^2, m_{\pi^+}^2, m_{\rho^0}^2, m_{\pi^+}^2, \lambda^2, m_{\pi^+}^2] \\ &\quad \left. - 2 \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln[4\pi] - \ln \left[ \frac{m_{\pi^+}^2}{\mu^2} \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

En la ecuación anterior se ha separado el término divergente ultravioleta de las funciones Passarino-Veltman. Sumando las 2 contribuciones de auto-energía y la corrección total al vértice, el término divergente ultravioleta se cancela y la amplitud total virtual y finita UV se escribe como:

$$\mathcal{M}_{\rho^0}^v = \mathcal{M}_{\rho^0}^0 \times f_{vc}^{\rho^0}.$$

La función escalar  $f_{vc}^{\rho^0}$  contiene la información del cálculo a 1 lazo y se escribe en términos de funciones analíticas<sup>6</sup> para exhibir el término divergente infrarrojo.

$$\begin{aligned} f_{vc}^{\rho^0} &= \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ \pi^2 \frac{(1+v_0^2)}{2v_0} - 2 \left[ 1 + \frac{1+v_0^2}{2v_0} \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] \right] \right. \\ &\quad - 2 \ln \left[ \frac{\lambda}{m_{\pi^+}} \right] \left[ 1 + \frac{1+v_0^2}{2v_0} \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] \right] \\ &\quad - \frac{1+v_0^2}{v_0} [\text{Li}_2[v_0] - \text{Li}_2[-v_0]] \\ &\quad \left. - \frac{1+v_0^2}{2v_0} \left[ \text{Li}_2 \left[ \frac{2}{1+v_0} \right] - \text{Li}_2 \left[ \frac{2}{1-v_0} \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

La anchura de decaimiento  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$  corregida a orden  $\alpha$  debida a la emisión y reabsorción de fotones virtuales, normalizada a la anchura a nivel árbol, se escribe en la forma:

$$\frac{\Gamma_{\rho^0 \pi^+ \pi^-}^{vc}}{\Gamma_{\rho^0 \pi^+ \pi^-}^0} = 1 + 2\text{Re}[f_{vc}^{\rho^0}]. \quad (2.20)$$

Es claro que la ecuación anterior contiene la divergencia infrarroja en forma logarítmica y es necesario tomar en cuenta los fotones suaves del proceso de emisión de fotón real para

---

<sup>6</sup>La función dilogaritmo está definida como  $\text{Li}_2(z) = - \int_0^1 \frac{\ln[1-zt]dt}{t}$ .

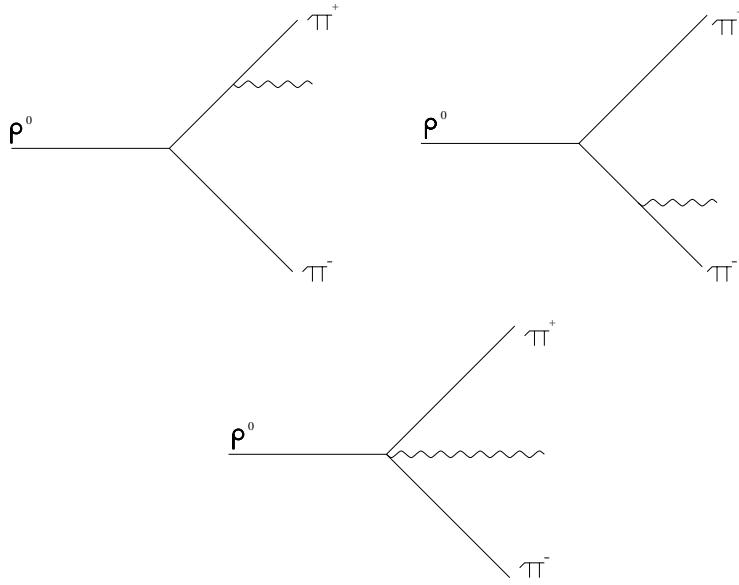


Figura 2.2: Diagramas de emisión de fotones reales.

eliminarlas. Una vez más señalamos que (2.19) se obtiene considerando piones puntuales (QED), es decir sin tomar en cuenta la estructura de estos.

### 2.2.2. Correcciones de fotones reales a $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$

Para eliminar la divergencia infrarroja que aparece en las correcciones virtuales (2.19) es necesario considerar el proceso de emisión de fotones reales, cuyos diagramas se muestra en la fig.(2.2). A estos diagramas se les llama *independientes del modelo* debido a que surgen de introducir el acoplamiento mínimo en (2.6). Las contribuciones *dependientes del modelo* se originan al considerar la contribución de estados intermedios no contenidos en la ec.(2.6).

En el estudio de los procesos radiativos se han establecido dos teoremas importantes que mencionamos brevemente. El teorema de Low[44] establece que la amplitud total del proceso radiativo se puede escribir en potencias de la energía ( $\omega$ ) del fotón emitido en la forma siguiente:

$$\mathcal{M}_\gamma^T = A\omega^{-1} + B\omega^0 + \omega C + \omega^2 D \dots \quad (2.21)$$

Los coeficientes  $A, B$  se obtienen únicamente a partir de las características del proceso no radiativo. Estos dos primeros términos de la amplitud definen la llamada *amplitud de Low*  $\mathcal{M}_L$ , tienen su origen en los diagramas de la figura 2.2 y su suma es invariante de norma e independiente de modelo. Los términos de orden  $\omega^{-1}$  provienen de la radiación de la carga eléctrica de las partículas externas. El resto de la amplitud depende del modelo usado para describir los detalles de la interacción y es invariante de norma a cada orden en  $\omega$ . La expansión anterior muestra que el comportamiento de la amplitud es divergente infrarrojo cuando  $\omega \rightarrow 0$ .

El otro teorema importante es el Teorema de Burnett-Kroll[45]. Este establece que el cuadrado de la amplitud total radiativa, sumada sobre los estados de polarización de partículas iniciales y finales (excepto las del fotón), no contiene términos divergentes de orden  $\omega^{-1}$  en la energía del fotón

$$\sum |\mathcal{M}_\gamma^T|^2 = \frac{a}{\omega^2} + b\omega^0 + c\omega^1 + \dots \quad (2.22)$$

Los coeficientes de la anterior ecuación están relacionados con los de la ec.(2.21). Mientras que el coeficiente  $a$  es independiente del modelo, todas las demás construcciones contienen términos dependientes del modelo.

La amplitud total del proceso radiativo, sin tomar en cuenta términos dependientes del modelo en primera aproximación, representada por los diagramas de Feynman de la fig.(2.2) es:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\gamma^T = \mathcal{M}_\gamma^\mu \epsilon_\mu(k) &= -e \hat{\mathcal{M}}_{\rho^0}^0 \left[ \frac{p \cdot \epsilon(k)}{p \cdot k} \right] - e \left[ \frac{p \cdot \epsilon(k)}{p \cdot k} \right] \imath g k \cdot \eta(P, s) \\ &\quad + e \hat{\mathcal{M}}_{\rho^0}^0 \left[ \frac{q \cdot \epsilon(k)}{q \cdot k} \right] - e \left[ \frac{q \cdot \epsilon(k)}{q \cdot k} \right] \imath g k \cdot \eta(P, s) \\ &\quad + 2\imath e g \epsilon(k) \cdot \eta(P, s). \end{aligned}$$

Es importante mencionar que la amplitud  $\hat{\mathcal{M}}_{\rho^0}^0$  está escrita en la forma de (2.8) pero con los momentos cumpliendo la relación  $P = p + q + k$ . Claramente esta amplitud tiene la forma de la amplitud de Low.

El módulo al cuadrado de la amplitud total, al sumar sobre el spin del meson vectorial, adquiere la forma establecida por el teorema de Burnett y Kroll <sup>7</sup>

$$|\bar{\mathcal{M}}_{\gamma}^T|^2 = e^2 |\mathcal{M}_{\rho^0}^0|_{k=0}^2 \left[ \frac{q \cdot \epsilon(k)}{q \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon(k)}{p \cdot k} \right]^2 + \bar{\mathcal{R}}(k^0). \quad (2.23)$$

Los términos de orden  $k^0$  están contenidos en la función  $\bar{\mathcal{R}}$  y el factor  $|\mathcal{M}_{\rho^0}^0|_{k=0}^2$  no contiene dependencia alguna en el momento del fotón.

Nos ocuparemos del término que presenta el problema de divergencia infrarroja, cuya amplitud de acuerdo a la ecuación anterior es:

$$\mathcal{M}_{\gamma}^{Soft} = e \mathcal{M}_{\rho^0}^0 \left[ \frac{q \cdot \epsilon(k)}{q \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon(k)}{p \cdot k} \right]. \quad (2.24)$$

Para calcular la anchura de decaimiento radiativo se requiere integrar en la energía  $\omega$  del fotón emitido. El rango de valores de  $\omega$  se puede dividir en 2 regiones,  $[0, \omega_0]$  y  $[\omega_0, \omega_{max}]$ . El primer intervalo es la región de bajas energías, donde la aproximación de fotón suave es requerida y válida siempre que  $\omega_0$  sea pequeño comparado con la escala de energía involucrada en el proceso. Este valor puede representar la resolución del experimento para la energía del fotón, es decir, la energía mínima de un fotón para ser detectado. En la aproximación de fotón suave, el momento del fotón es despreciado en cualquier parte de la expresión de la amplitud, excepto en el denominador. El segundo intervalo es la región de fotones duros, contribución que no tiene divergencia infrarroja y que generalmente se calcula numéricamente. La energía máxima accesible al fotón  $\omega_{max}$  se obtiene de la cinemática del decaimiento a 3 cuerpos, en el presente caso  $\omega^{max} = (m_{\rho^0}^2 - 4m_{\pi^{\pm}}^2)/2m_{\rho^0}$ .

La corrección al ancho de decaimiento del proceso  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$  debido a los fotones suaves se obtiene a partir de la amplitud mostrada en (2.24) e integrando en la energía del fotón real hasta  $\omega_0$ . Al sumar sobre la polarización del fotón se deben tener en cuenta los 3 grados de polarización de acuerdo a la ref. [46] y como se indica en el apéndice C. La corrección al ancho de decaimiento del proceso  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$  debida a fotones suaves

---

<sup>7</sup>El factor  $|\mathcal{M}_{\rho^0}^0|_{k=0}^2$  representa la densidad cinemática del proceso no radiativo

normalizada al ancho a nivel árbol es :

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma_{\rho^0 \pi^+ \pi^- \gamma}^{soft}}{\Gamma_{\rho^0 \pi^+ \pi^-}^0} &= g_\gamma^{\rho^0} \\
 &= \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 2 \ln \left[ \frac{\lambda}{2\omega_0} \right] \left\{ 1 + \frac{1+v_0^2}{2v_0} \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] \right\} - \frac{1}{v_0} \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] \right. \\
 &\quad + \frac{1+v_0^2}{2v_0} \left[ \text{Li}_2 \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] - \text{Li}_2 \left[ \frac{1+v_0}{1-v_0} \right] + i\pi \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] \right. \\
 &\quad \left. \left. + \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] \ln \left[ \frac{4v_0^2}{1-v_0^2} \right] \right\} . \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

Esta expresión depende logarítmicamente de la masa ficticia  $\lambda$  del fotón, lo cual servirá para cancelar el término divergente infrarrojo de la expresión para las correcciones virtuales (2.19). Nótese que también contiene una dependencia en el corte  $\omega_0$ . Finalmente al incorporar las correcciones virtuales (2.19) y las debidas a fotones reales suaves (2.25), el ancho corregido de decaimiento del proceso  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ , normalizado al ancho a nivel árbol es (el proceso corregido se denota por  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-(\gamma)$ ):

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma_{\rho^0 \pi^+ \pi^-(\gamma)}}{\Gamma_{\rho^0 \pi^+ \pi^-}^0} &= 1 + 2\text{Re}[f_{vc}^{\rho^0}] + g_\gamma^{\rho^0} \\
 &= 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 2 \ln \left[ \frac{m_{\pi^+}}{2\omega_0} \right] \left[ 1 + \frac{1+v_0^2}{2v_0} \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] \right] - \frac{1}{v_0} \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] \right. \\
 &\quad + \frac{1+v_0^2}{2v_0} \left[ \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] \ln \left[ \frac{4v_0^2}{1-v_0^2} \right] \right. \\
 &\quad + \text{Li}_2 \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] - \text{Li}_2 \left[ \frac{1+v_0}{1-v_0} \right] + i\pi \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] \left. \right] \\
 &\quad + \pi^2 \frac{(1+v_0^2)}{2v_0} - 2 \left[ 1 + \frac{1+v_0^2}{2v_0} \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] \right] \\
 &\quad - \frac{1+v_0^2}{v_0} [\text{Li}_2[v_0] - \text{Li}_2[-v_0]] \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1+v_0^2}{2v_0} \left[ \text{Li}_2 \left[ \frac{2}{1+v_0} \right] - \text{Li}_2 \left[ \frac{2}{1-v_0} \right] \right] \right\} . \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

A la expresión anterior se le debe agregar la contribución de los términos regulares en la energía del fotón (término  $\bar{\mathcal{R}}(k^0)$  en (2.23) ) integrando en la energía del fotón hasta  $\omega_0$  y

cuyo cálculo se presentan en el apéndice D ( $\mathcal{O}(10^{-6})$  para  $\omega_0 = 10$  MeV). Este resultado es adecuado para describir el ancho de decaimiento cuando se pueden excluir los procesos radiativos con energías del fotón mayores a  $\omega_0$ .

### 2.3. Decaimiento $\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$

Para obtener la corrección electromagnética a la anchura de decaimiento del meson  $\rho^+$  en 2 piones, debemos mencionar que estrictamente hablando no existe una verdadera teoría para el meson vectorial cargado interactuando con el campo electromagnético. Sin embargo, es razonable (o al menos manejable) suponer que el vértice electromagnético de la  $\rho^+$  está dado por un término del tipo Yang-Mills (idéntico al del bosón de norma  $W^\pm$ ) y explorar las consecuencias de esta hipótesis. Una de las consecuencias inmediatas de tener al fotón acoplado al mesón vectorial cargado es que la amplitud total de las correcciones radiativas virtuales es divergente en el ultravioleta, por lo que es necesario implementar un método para tratar adecuadamente la divergencia ultravioleta.

De forma similar al cálculo realizado para el meson  $\rho^0$ , la amplitud a nivel árbol que modela el decaimiento  $\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$  y que proviene del Lagrangiano mostrado en (2.6) es :

$$\mathcal{M}_{\rho^+}^0 = \imath g_{\rho^+\pi^+\pi^0} [p^+ - q^0] \cdot \eta(P, s) , \quad (2.27)$$

donde los 4 momentos  $(P, p^+, q^0)$  corresponden a  $(\rho^+, \pi^+, \pi^0)$  y  $\eta(P, s)$  es el vector de polarización del meson. Al usar masas diferentes para el pion cargado y el neutro, la velocidad de los piones en el sistema de reposo del meson  $\rho^+$  es:

$$v_+ = \sqrt{1 - \frac{2[m_{\pi^+}^2 + m_{\pi^0}^2]}{m_{\rho^+}^2} + \frac{[m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2]^2}{m_{\rho^+}^4}} . \quad (2.28)$$

En el mismo sistema de referencia (el meson  $\rho^+$  en reposo), las energías y el momento de

los piones del estado final son:

$$\begin{aligned} E_{\pi^+} &= \frac{m_{\rho^+}}{2} \left(1 + \frac{\Delta_\pi^2}{m_{\rho^+}^2}\right), \\ E_{\pi^0} &= \frac{m_{\rho^+}}{2} \left(1 - \frac{\Delta_\pi^2}{m_{\rho^+}^2}\right), \\ |\vec{p}^+| &= \frac{m_{\rho^+} v_+}{2}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde hemos definido  $\Delta_\pi^2 = m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2$  y  $\Sigma_\pi^2 = m_{\pi^+}^2 + m_{\pi^0}^2$ . La anchura de decaimiento del meson cargado, a nivel árbol es:

$$\Gamma_{\rho^+ \pi^+ \pi^0}^0 = \frac{g_{\rho^+ \pi^+ \pi^0}^2 m_{\rho^+} v_+^3}{48\pi}. \quad (2.30)$$

Comparando con (2.10), se observa que la única diferencia proviene de la diferencia de masas de los  $\rho$ 's y de los piones cargados y neutros, ya que  $g_{\rho^0 \pi^+ \pi^-} = g_{\rho^+ \pi^+ \pi^-}$ . En el siguiente apartado nos concentraremos en el cálculo de las correcciones electromagnéticas virtuales y reales a este proceso.

### 2.3.1. Correcciones de fotones virtuales a $\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$

Debido a que las correcciones virtuales a un lazo involucran el vértice electromagnético de la  $\rho^+$ , no se satisface una identidad de Ward que cancele las divergencias UV en forma automática. En esta tesis utilizaremos un método originalmente propuesto por Yennie y Meister [28], el cual permite aislar y calcular la parte finita de las correcciones radiativas a un lazo.

La técnica consiste en separar la amplitud total de las correcciones radiativas virtuales en dos partes. Por una parte está la amplitud obtenida al considerar la emisión y absorción de fotones virtuales por las líneas externas cargadas y que son llamadas correcciones radiativas *externas*. Aquellas donde las líneas fotónicas terminan en una línea interna se les denomina correcciones radiativas *internas*. En este esquema, la amplitud total de las correcciones radiativas, se puede escribir como:

$$\mathcal{M}_{vc}^T = \mathcal{M}_{EXT}^v + \mathcal{M}_{INT}^v.$$

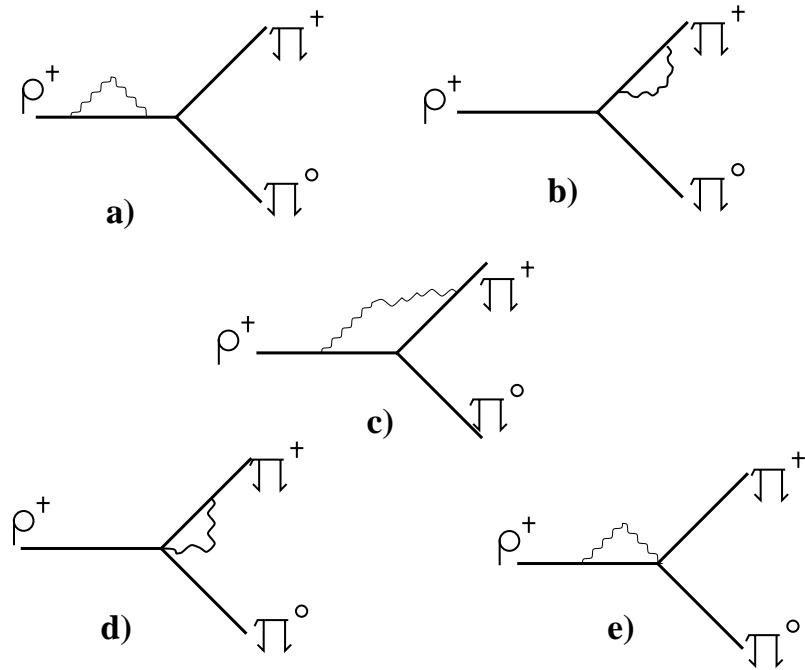


Figura 2.3: Diagramas de correcciones radiativas virtuales

Las amplitudes de las Correcciones Externas contienen a los llamados *términos de convección*, los cuales se originan en la radiación por las cargas de las partículas externas:

$$\mathcal{M}_{EXT}^v = \mathcal{M}_{conv}^v + \mathcal{M}_{EXT}^{v,resto}.$$

Un hecho importante es que la suma de las amplitudes de convección es invariante de norma, es libre de divergencias UV y contiene todas las divergencias IR [28].

Para el proceso de nuestro interés, los diagramas que dan lugar a las correcciones externas son las auto-energías, diagramas a) y b) de la fig.(2.3) y el diagrama donde el fotón se emite desde el pion cargado y es absorbido por el meson  $\rho^+$ , diagrama c) fig.(2.3). Los diagramas que involucran un vértice de cuatro partículas solo contribuyen a las correcciones internas.

Incluyendo solo el término de convección, se obtiene la siguiente amplitud para el dia-

grama de auto-energía del pion cargado (Figura 2.3 a):

$$\mathcal{M}_{\pi^+, conv}^{SE} = \frac{\mathcal{M}_{\rho^+}^0}{2} \times \frac{\imath e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{[2p^+ + k] \cdot [2p^+ + k] d^4 k}{k^2 [(p^+ + k)^2 - m_{\pi^+}^2]^2}. \quad (2.31)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, la amplitud correspondiente para la auto-energía del meson  $\rho^+$  (figura 2.3 b) es:

$$\mathcal{M}_{\rho^+, conv}^{SE} = \frac{\mathcal{M}_{\rho^+}^0}{2} \times \frac{\imath e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{[2P + k] \cdot [2P + k] d^4 k}{k^2 [(P + k)^2 - m_{\rho^+}^2]^2}. \quad (2.32)$$

De forma similar, el término de convección para el diagrama c) de la figura 2.3 es:

$$\mathcal{M}_{conv}^{coul} = \mathcal{M}_{\rho^+}^0 \times \frac{4\pi\alpha}{\imath} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{[2p^+ + k] \cdot [2P + k] d^4 k}{k^2 [(P + k)^2 - m_{\rho^+}^2] [(p^+ + k)^2 - m_{\pi^+}^2]}. \quad (2.33)$$

De (2.31-2.33) se obtiene la amplitud total debida a los términos de convección en las correcciones virtuales:

$$\mathcal{M}_{conv}^v = \mathcal{M}_{\rho^+}^0 \times f_{conv}^{\rho^+},$$

donde  $\mathcal{M}_{\rho^+}^0$  es la amplitud de orden árbol para el proceso  $\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$ . La forma explícita de la función de corrección radiativa es:<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} f_{conv}^{\rho^+} = & \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ -\ln \left[ \frac{\lambda^2}{m_{\rho^+}^2} \right] - \frac{1}{2v_+/\xi} \ln \left[ \frac{1 - v_+/\xi}{1 + v_+/\xi} \right] \ln \left[ \frac{\lambda^2}{m_{\pi^+} m_{\rho^+}} \right] \right\} \\ & + \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -2 + \frac{3}{2} \ln \left[ \frac{m_{\pi^+}^2}{m_{\rho^+}^2} \right] + \frac{1}{2m_{\pi^0}^2} \left[ m_{\rho^+}^2 \ln \left[ \frac{m_{\rho^+}^2}{m_{\pi^+}^2} \right] \left( 1 - \frac{\Delta_\pi^2}{m_{\rho^+}^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - m_{\rho^+}^2 v_+ \left[ \ln \left[ \frac{1 - v_+ - \frac{\Delta_\pi^2}{m_{\rho^+}^2}}{1 + v_+ - \frac{\Delta_\pi^2}{m_{\rho^+}^2}} \right] + \ln \left[ \frac{1 + v_+ - \frac{\Sigma_\pi^2}{m_{\rho^+}^2}}{1 - v_+ - \frac{\Sigma_\pi^2}{m_{\rho^+}^2}} \right] \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{v_+/\xi} \ln \left[ \frac{1 - v_+/\xi}{1 + v_+/\xi} \right] \left[ -\frac{1}{4} \ln \left[ \frac{1 - v_+/\xi}{1 + v_+/\xi} \right] + 2 \ln \left[ \frac{2v_+/\xi}{1 + v_+/\xi} \right] \right] \right. \\ & \left. + \frac{2}{v_+/\xi} \left[ -\frac{\pi^2}{6} + \text{Li}_2 \left[ \frac{1 - v_+/\xi}{1 + v_+/\xi} \right] + \frac{1}{2} \ln^2 \left[ \frac{m_{\pi^+}}{m_{\rho^+}} \right] + \text{Li}_2 \left[ \frac{v_+ + (\xi - 2)}{\xi + v_+} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{Li}_2 \left[ \frac{v_+ - \xi + 2}{2} \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

<sup>8</sup>Se ha definido  $\xi \equiv 1 + \frac{\Delta_\pi^2}{m_{\rho^+}^2}$

El resultado anterior para las correcciones virtuales contiene todas las divergencias infrarrojas que aparecen en el cálculo a un lazo (masa ficticia del fotón  $\lambda$ ) y es explícitamente finita en el límite UV.

Regresando a la amplitud total debida a las correcciones virtuales, ésta se ha separado en una amplitud que contiene los términos de convección y el resto en la forma siguiente

$$\mathcal{M}_{vc}^T = \mathcal{M}_{conv}^v + \mathcal{M}_{int}^v . \quad (2.35)$$

La amplitud  $\mathcal{M}_{int}^v$  contiene todos los términos restantes (es la suma de  $\mathcal{M}_{INT}^v + \mathcal{M}_{EXT}^{v,resto}$ ) y un cálculo explícito muestra que puede llevarse a la forma siguiente

$$\mathcal{M}_{int}^v = \imath g_{\rho^+\pi^+\pi^0} \frac{\alpha}{4\pi} [F^+ [p^+ \cdot \eta(P, s)] + F^0 [q \cdot \eta(P, s)]] ,$$

donde  $F^+$  y  $F^0$  son funciones escalares de Lorentz que contienen divergencias ultravioletas, pero son finitas en el infrarrojo. Nótese que ésta amplitud no es proporcional a la amplitud a nivel de árbol multiplicada por una función escalar.

La amplitud total del proceso  $\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$  que incluye la amplitud árbol se escribe como sigue

$$\mathcal{M}^T = \mathcal{M}_{\rho^+}^0 + \mathcal{M}_{conv}^v + \mathcal{M}_{int}^v . \quad (2.36)$$

Considerando una presición de orden  $\alpha$ , la probabilidad no polarizada de la transición es

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}^T|^2 &= |\mathcal{M}_{\rho^+}^0|^2 \left[ 1 + 2Re f_c^{\rho^+} \right] + 2Re[\mathcal{M}_{\rho^+}^0]^\dagger \frac{\imath g \alpha}{4\pi} [F^+(p^+ \cdot \eta(P)) + F^0(q \cdot \eta(P))] \\ &= |\mathcal{M}_{\rho^+}^0|^2 \left[ 1 + 2Re f_c^{\rho^+} \right] + 2Re|\mathcal{M}_{\rho^+}^0|^2 \frac{\alpha}{4\pi} [F^+ - F^0] \\ &\simeq |\mathcal{M}_{\rho^+}^0|^2 \left[ 1 + 2Re f_c^{\rho^+} \right] [1 + 2Re f_{int}] . \end{aligned}$$

La función escalar  $f_{int} = (\alpha/4\pi) [F^+ - F^0]$ , es finita en el infrarrojo pero contiene divergencias ultravioletas y depende de los detalles de las interacciones electromagnéticas del  $\rho^+$ , se absorbe en la definición de la constante de acoplamiento fuerte,

$$g_{\rho^+\pi^+\pi^0} = [1 + 2Re[f_{int}]] g_{\rho^+\pi^+\pi^0} . \quad (2.37)$$

Por lo tanto, hasta el orden  $\alpha$ , la anchura de decaimiento corregida por fotones virtuales y normalizada a la anchura a nivel árbol se puede escribir como sigue:

$$\frac{\Gamma_{\rho^+ \pi^+ \pi^0}^{vc}}{\Gamma_{\rho^+ \pi^+ \pi^0}^0} = 1 + 2\text{Re}[f_{conv}^{\rho^+}] , \quad (2.38)$$

donde la función  $f_{conv}^{\rho^+}$  ha sido definida en la ec.(2.34).

Es importante recordar que la corrección virtual calculada de esta forma es libre de divergencias ultravioletas, contiene todas las divergencias infrarrojas y es invariante de norma [28]. En la próxima sección nos dedicaremos a calcular las correcciones debidas a fotones suaves.

### 2.3.2. Correcciones de fotones reales a $\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$

Consideremos ahora el proceso radiativo  $\rho^+(P, \eta) \rightarrow \pi^+(p^+) \pi^0(p^0) \gamma(k, \epsilon)$ . La parte divergente IR de la amplitud la cual es importante para fotones suaves viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{M}_\gamma^{soft} = e \mathcal{M}_{\rho^+}^0 \left[ \frac{p^+ \cdot \epsilon(k)}{p^+ \cdot k} - \frac{P \cdot \epsilon(k)}{P \cdot k} \right] , \quad (2.39)$$

donde  $P$  es el momento del mesón  $\rho^+$ ,  $\epsilon(k)$  el vector de polarización del fotón y  $p^+$  el momento del pion. Es claro que dicha amplitud es invariante de norma electromagnética y contiene todos los términos singulares de la amplitud de Low.

El método usual para calcular la anchura de decaimiento con emisión de fotón suave, consiste en tomar los fotones de momento nulo en la función delta de Dirac (conservación de la energía-momento) y situarse en el sistema de reposo de la partícula que decae ( $\rho^+$ ).

Así obtenemos:

$$\begin{aligned}
 d\Gamma &= \sum \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{1}{(2\pi)^5 2m_{\rho^+} 8} \delta^3(-\vec{p}^+ - \vec{q}) \delta(m_\rho - E_+ - E_-) \frac{d^3 p^+}{E_+} \frac{d^3 q}{E_0} \frac{d^3 k}{\omega} \\
 &= \sum \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{1}{(2\pi)^5 2m_{\rho^+} 8} \delta^3(\vec{q} - (-\vec{p}^+)) \delta(m_\rho - E_+ - E_-) \frac{d^3 p^+}{E_+} \frac{d^3 q}{E_0} \frac{d^3 k}{\omega} \\
 &= \sum \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{1}{(2\pi)^5 2m_{\rho^+} 8} \delta(m_\rho - E_+ - E_0) \frac{d^3 p^+}{E_+} \frac{1}{\sqrt{|\vec{p}^+|^2 + m_{\pi^0}^2}} \frac{d^3 k}{\omega}.
 \end{aligned}$$

Las siguientes relaciones son útiles en la evaluación de la ecuación anterior,

$$\begin{aligned}
 \frac{d^3 p^+}{E_+} &= |\vec{p}^+| dE_+ d\Omega_+ , \\
 \delta(m_\rho - E_+ - E_0) &= \frac{\delta(E_+ - x_+)}{1 + \frac{x_+}{\sqrt{x_+^2 - \Delta_\pi^2}}} , \\
 x_+ &= \frac{m_{\rho^+}^2 + \Delta_\pi^2}{2m_{\rho^+}} .
 \end{aligned}$$

Despues de realizar la suma correcta sobre polarizaciones del fotón en la Norma de Coester[41], es decir,

$$\sum (\epsilon \cdot a)(\epsilon \cdot b) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{k} \vec{b} \cdot \vec{k}}{\omega^2}, \quad \omega^2 = \vec{k}^2 + \lambda^2, \quad (2.40)$$

se obtiene la expresión para la anchura de decaimiento del proceso radiativo ( fotones suaves) normalizada a la anchura a nivel árbol:

$$\frac{\Gamma_{\rho^+\pi^+\pi^0\gamma}^{soft}}{\Gamma_0} = \frac{\alpha}{2\pi} v_+^2 \int \sin \theta d\theta k^2 dk \frac{\left[1 - \frac{\tilde{k}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta\right]}{\omega^3 \xi^2 \left[1 - \frac{v_+ k \cos \theta}{\omega \xi}\right]^2} .$$

Una vez realizada la integración el resultado es:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma_{\rho^+ \pi^+ \pi^0 \gamma}^{soft}}{\Gamma_{\rho^+ \pi^+ \pi^-}^0} &= g_\gamma^{\rho^+} \\
 &= \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 1 - 2 \ln[2] + \frac{1}{2 \frac{v_+}{\xi}} \ln \left[ \frac{1 + \frac{v_+}{\xi}}{1 - \frac{v_+}{\xi}} \right] + \ln \left[ \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \right] \left( 1 + \frac{1}{2 \frac{v_+}{\xi}} \ln \left[ \frac{1 - \frac{v_+}{\xi}}{1 + \frac{v_+}{\xi}} \right] \right) \right. \\
 &\quad - \frac{1}{2 \frac{v_+}{\xi}} \left[ \text{Li}_2 \left[ \frac{1 + \frac{v_+}{\xi}}{1 - \frac{v_+}{\xi}} \right] - \text{Li}_2 \left[ \frac{1 - \frac{v_+}{\xi}}{1 + \frac{v_+}{\xi}} \right] + \ln \left[ \frac{\frac{v_+^2}{\xi^2}}{1 - \frac{v_+^2}{\xi^2}} \right] \ln \left[ \frac{1 + \frac{v_+}{\xi}}{1 - \frac{v_+}{\xi}} \right] \right. \\
 &\quad \left. \left. + i\pi \ln \left[ \frac{1 + \frac{v_+}{\xi}}{1 - \frac{v_+}{\xi}} \right] \right] \right\} , \tag{2.41}
 \end{aligned}$$

el cual contiene las divergencias infrarrojas y depende del parámetro de corte en la energía del fotón  $\omega_0$ . Nótese que en el límite de la simetría de isospin,  $\xi = 1$  y  $v_+ = v_0$ , lo cual permitiría hacer una comparación entre términos similares con la expresión de las correcciones virtuales de  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ .

Al sumar el ancho de decaimiento corregido por las correcciones virtuales calculadas en la sección anterior ec.(2.38) con el ancho de emisión de fotón suave ec.(2.41), se obtiene el ancho de decaimiento del proceso  $\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$  corregido a orden  $\alpha$ , el cual viene dado por :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0(\gamma)) &= \Gamma_{\rho^+ \pi^+ \pi^0}^0 [1 + 2 \text{Re}[f_{conv}^{\rho^+}] + g_\gamma^{\rho^+}] \\
 &= \Gamma_{\rho^+ \pi^+ \pi^0}^0 [1 + \delta_{tot}^{\rho^+}] . \tag{2.42}
 \end{aligned}$$

Si se usa la siguiente notación para los argumentos de los dilogaritmos

$$Y_1 = \frac{v_+ + 2 - \xi}{2} , \quad Y_2 = \frac{v_+ + \xi - 2}{[\xi + v_+]} ,$$

podemos escribir la expresión analítica para la función de corrección radiativa  $\delta_{tot}^{\rho^+}$  como,

$$\begin{aligned}
\delta_{tot}^{\rho^+} = & \frac{\alpha}{\pi} \left\{ -2 \ln[2] + \frac{1}{4m_{\pi^0}^2} \left[ m_{\rho^+}^2 \ln \left[ \frac{m_{\rho^+}^2}{m_{\pi^+}^2} \right] \left( 1 - \frac{\Delta_\pi^2}{m_{\rho^+}^2} \right) \right. \right. \\
& - m_{\rho^+}^2 v_+ \left[ \ln \left[ \frac{1 - v_+ - \frac{\Delta_\pi^2}{m_{\rho^+}^2}}{1 + v_+ - \frac{\Delta_\pi^2}{m_{\rho^+}^2}} \right] + \ln \left[ \frac{1 + v_+ - \frac{\Sigma_\pi^2}{m_{\rho^+}^2}}{1 - v_+ - \frac{\Sigma_\pi^2}{m_{\rho^+}^2}} \right] \right] \\
& - \ln \left[ \frac{\omega_0^2}{m_{\rho^+}^2} \right] \left[ 1 + \frac{1}{2v_+/\xi} \ln \left[ \frac{1 - v_+/\xi}{1 + v_+/\xi} \right] \right] + \frac{3}{4} \ln \left[ \frac{m_{\pi^+}^2}{m_{\rho^+}^2} \right] \\
& + \frac{1}{2v_+/\xi} \left[ \ln \left[ \frac{1 - v_+/\xi}{1 + v_+/\xi} \right] \left[ -\frac{1}{4} \ln \left[ \frac{1 - v_+/\xi}{1 + v_+/\xi} \right] + 2 \ln \left[ \frac{2v_+/\xi}{1 + v_+/\xi} \right] \right] \right. \\
& + \ln \left[ \frac{1 + v_+/\xi}{1 - v_+/\xi} \right] - \ln \left[ \frac{1 - v_+/\xi}{1 + v_+/\xi} \right] \ln \left[ \frac{m_{\rho^+}}{m_{\pi^+}} \right] - \text{Li}_2 \left[ \frac{1 + v_+/\xi}{1 - v_+/\xi} \right] \\
& + \text{Li}_2 \left[ \frac{1 - v_+/\xi}{1 + v_+/\xi} \right] - \ln \left[ \frac{[v_+/\xi]^2}{1 - [v_+/\xi]^2} \right] \ln \left[ \frac{1 + v_+/\xi}{1 - v_+/\xi} \right] - \imath\pi \ln \left[ \frac{1 + v_+/\xi}{1 - v_+/\xi} \right] \\
& \left. \left. + \frac{1}{v_+/\xi} \left[ -\frac{\pi^2}{6} + \text{Li}_2 \left[ \frac{1 - v_+/\xi}{1 + v_+/\xi} \right] + \frac{1}{2} \ln^2 \left[ \frac{m_{\pi^+}}{m_{\rho^+}} \right] + \text{Li}_2 [Y_1] + \text{Li}_2 [Y_2] \right] \right] \right\} . \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Los términos no divergentes del cálculo de fotones suaves, así como en el cálculo debido a la emisión de fotones duros se evalúan en forma numérica y se incorporaran en la siguiente sección.

## 2.4. Rompimiento de isospin en el sistema $\rho^\pm - \rho^0$

Con el fin de evaluar el rompimiento de la simetría de isospin en los anchos del sistema  $\rho^\pm - \rho^0$  empecemos por definir estos anchos a partir de sus anchos parciales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\rho^+} = & \Gamma(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0(\gamma); \omega \leq \omega_0) + \Gamma(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \gamma; \omega \geq \omega_0) \\
& + \Gamma(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \gamma) + \Gamma(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^0) + \dots \\
= & \Gamma(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0(\gamma); \omega \leq \omega_0) + \Gamma(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \gamma; \omega \geq \omega_0) + \Gamma_{\rho^+}^{sub} \tag{2.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\rho^0} &= \Gamma(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-(\gamma); \omega \leq \omega_0) + \Gamma(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma; \omega \geq \omega_0) \\
&\quad + \Gamma(\rho^0 \rightarrow \pi^0 \gamma) + \Gamma(\rho^0 \rightarrow \eta \gamma) + \Gamma(\rho^0 \rightarrow \pi^0 \gamma) \\
&\quad + \sum_{l=e,\mu} \Gamma(\rho^0 \rightarrow l^+ l^-) + \Gamma(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+ \pi^-) + \dots \\
&= \Gamma(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-(\gamma); \omega \leq \omega_0) + \Gamma(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma; \omega \geq \omega_0) + \Gamma_{\rho^0}^{sub}, \quad (2.45)
\end{aligned}$$

donde los puntos suspensivos denotan otros posibles (pero despreciables en tamaño) modos de decaimiento en cada canal. Los términos restantes (denotados con el superíndice *sub*), contribuyen respectivamente en 0.04 % y 0.11 % [3] a los anchos de decaimiento del  $\rho^+$  y del  $\rho^0$ , por lo que pueden ser despreciados cuando se quiere evaluar los efectos del rompimiento del isospin mayores que 0.5 %. Por lo tanto solo evaluaremos los anchos de decaimiento de los modos  $\pi\pi\gamma$  y las correcciones radiativas al ancho  $\pi\pi$ .

Un aspecto importante a comentar es que las anchuras de decaimiento de los mesones  $\rho$  deben ser independientes del parámetro  $\omega_0$  el cual separa los modos radiativos de los no radiativos. Algunos cálculos usados anteriormente en la literatura para los anchos de los  $\rho$  [14][17], no satisfacen este criterio, ya que combinan el modo radiativo  $\pi\pi\gamma$  definido para una cierta energía de corte  $\omega_0$  y la anchura del proceso  $\rho \rightarrow \pi\pi$  a nivel de árbol (la cual es independiente de  $\omega_0$ ). Como consecuencia de ello, la anchura así definida es dependiente de la energía de corte del fotón, lo cual es inconsistente con el hecho de que el ancho de una partícula es una propiedad intrínseca de ella y no debe depender del modo en que se cortan las contribuciones de los modos radiativos.

Tomando en cuenta los modos dominantes de decaimiento, definimos las contribuciones electromagnéticas a la diferencia de los anchos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\Delta\Gamma_\rho &= \Gamma(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-(\gamma), \omega \leq \omega_0) - \Gamma(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0(\gamma), \omega \leq \omega_0) \\
&\quad + \Gamma(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma, \omega \geq \omega_0) - \Gamma(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \gamma, \omega \geq \omega_0). \quad (2.46)
\end{aligned}$$

Las anchuras de decaimiento correspondientes a  $\rho \rightarrow \pi\pi(\gamma)$ , es decir las que incorporan el ancho a nivel árbol, las correcciones radiativas virtuales y las correcciones de fotones

suaves se definen en la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-(\gamma), \omega \leq \omega_0) &\equiv \Gamma_{\rho^0 \pi^+ \pi^-}^0 + \Gamma_{\rho^0 \pi^+ \pi^-}^{vc} \\
 &\quad + \Gamma_{\rho^0 \pi^+ \pi^- \gamma}^{soft} \\
 &= \Gamma_{\rho^0 \pi^+ \pi^-}^0 \left[ 1 + 2f_{vc}^{\rho^0} + g_{\gamma}^{\rho^0} \right] \\
 &= \Gamma_{\rho^0 \pi^+ \pi^-}^0 \left[ 1 + \delta_{tot}^{\rho^0} \right], \\
 \Gamma(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0(\gamma), \omega \leq \omega_0) &\equiv \Gamma_{\rho^+ \pi^+ \pi^0}^0 + \Gamma_{\rho^+ \pi^+ \pi^0}^{vc} \\
 &\quad + \Gamma_{\rho^+ \pi^+ \pi^0 \gamma}^{soft} \\
 &= \Gamma_{\rho^+ \pi^+ \pi^0}^0 \left[ 1 + 2f_{conv}^{\rho^+} + g_{\gamma}^{\rho^+} \right] \\
 &= \Gamma_{\rho^+ \pi^+ \pi^0}^0 \left[ 1 + \delta_{tot}^{\rho^+} \right]. \tag{2.47}
 \end{aligned}$$

Estos anchos de decaimiento dependen explícitamente del parámetro de corte de los fotones (ver ec.(2.25) y (ec.2.41)), que por no detectarse están incluidos en los modos no radiativos.

Los valores de las correcciones radiativas ( $\delta_{tot}^{\rho^0}$ ,  $\delta_{tot}^{\rho^+}$ ) definidas en (ec.2.47) se presentan en el Cuadro (2.1), en función del corte  $\omega_0$  y para 3 valores distintos de las masas de los mesones  $\rho^{0,\pm}$  que son consistentes con un pequeño rompimiento de la simetría de isospin. Como puede verse, el tamaño de la corrección en cada caso depende muy débilmente del valor específico de la masa del mesón  $\rho$ . Sin embargo, el tamaño de las correcciones radiativas es diferente entre los decaimientos de mesones cargados y neutros, lo cual contribuirá de manera significativa al rompimiento del isospin. Finalmente, es interesante señalar que el factor de Coulomb no es el término dominante de las correcciones en el modo  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$  como sucede en el caso de las correcciones radiativas a  $\phi(1020) \rightarrow K^+ K^-$  (Ver siguiente capítulo). La razón para esto es que los piones emitidos en el decaimiento del  $\rho$  son relativistas, mientras que los kaones emitidos en el decaimiento de la  $\phi$  son no relativistas.

Los anchos de decaimiento de los modos radiativos definidos a través del parámetro (el

$\omega_0$ (MeV)	$m_{\rho^0,+} = 772$ MeV	$m_{\rho^0,+} = 775$ MeV	$m_{\rho^0,+} = 778$ MeV
	$\delta_{tot}^{\rho^0}$	$\delta_{tot}^{\rho^0}$	$\delta_{tot}^{\rho^0}$
2	-0.03670	-0.03692	-0.03714
4	-0.02910	-0.02930	-0.02949
6	-0.02465	-0.02483	-0.02501
8	-0.02150	-0.02167	-0.02183
10	-0.01905	-0.01921	-0.01937
12	-0.01705	-0.01720	-0.01736
14	-0.01536	-0.01550	-0.01565
16	-0.01389	-0.01403	-0.01477
18	-0.01260	-0.01273	-0.01287
20	-0.01144	-0.01157	-0.01170
30	-0.00697	-0.00708	-0.00720
40	-0.00378	-0.00388	-0.00399
50	-0.00130	-0.00139	-0.00150
	$\delta_{tot}^{\rho^+}$	$\delta_{tot}^{\rho^+}$	$\delta_{tot}^{\rho^+}$
	-0.01959	-0.01968	-0.01970
2	-0.01701	-0.01710	-0.01718
4	-0.01551	-0.01558	-0.01566
6	-0.01444	-0.01451	-0.01459
8	-0.01361	-0.01368	-0.01375
10	-0.01293	-0.01300	-0.01307
12	-0.01236	-0.01242	-0.01249
14	-0.01186	-0.01192	-0.01199
16	-0.01142	-0.01149	-0.01155
18	-0.01103	-0.01109	-0.01115
20	-0.00953	-0.00958	-0.00963
30	-0.00844	-0.00849	-0.00854
40	-0.00761	-0.00765	-0.00769

Cuadro 2.1: Corrección radiativa  $\delta_{\rho^0,+}$  definida en ec.(2.47) como función de  $\omega_0$  y para 3 diferentes valores de la masa  $m_{\rho^0,+}$

cual es prácticamente equivalente a la definición de la fracción de decaimiento):

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\rho^0} &\equiv \frac{\Gamma(\rho^0 \rightarrow \pi\pi\gamma, \omega \geq \omega_0)}{\Gamma_{\rho^0\pi^+\pi^-}^0}, \\
 \Delta_{\rho^+} &\equiv \frac{\Gamma(\rho^+ \rightarrow \pi\pi\gamma, \omega \geq \omega_0)}{\Gamma_{\rho^+\pi^+\pi^0}^0},
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

se muestran en la Cuadro (2.2). Estos anchos también dependen de la energía del corte  $\omega_0$  y como es de esperarse, disminuyen conforme crece  $\omega_0$ . Nuevamente, podemos constatar que al nivel de los modos radiativos existe un rompimiento del isospin de niveles apreciables.

Un aspecto interesante es que, al nivel de precisión que estamos discutiendo (relevantes para la rotura del isospin), la contribución de los términos dependientes del modelo en la amplitud radiativa (terminos de orden  $\omega$  y superiores, ver ec.(2.21)) son dos ordenes de magnitud menores que los que se muestran en el cuadro (2.2). Estas contribuciones dependientes de modelo fueron calculadas en las referencias [36], [39], [40] suponiendo que los estados intermedios están dominados por la producción de decaimiento de mesones  $\omega(782)$ ,  $a_1(1260)$  y  $\sigma(600)$ .

$\omega_0$ (MeV)	$m_{\rho^{0,+}} = 772$ MeV		$m_{\rho^{0,+}} = 775$ MeV		$m_{\rho^{0,+}} = 778$ MeV	
	$\Delta_{\rho^+}$	$\Delta_{\rho^0}$	$\Delta_{\rho^+}$	$\Delta_{\rho^0}$	$\Delta_{\rho^+}$	$\Delta_{\rho^0}$
2	0.01544	0.04475	0.01553	0.04497	0.01561	0.04518
4	0.01290	0.03724	0.01297	0.03742	0.01302	0.03761
6	0.01143	0.03288	0.01149	0.03305	0.01155	0.03322
8	0.01039	0.02981	0.01045	0.02997	0.01051	0.03013
10	0.00959	0.02745	0.00965	0.02760	0.00970	0.02775
12	0.00894	0.02553	0.00900	0.02568	0.00905	0.02582
14	0.00840	0.02393	0.00845	0.02406	0.00850	0.02420
16	0.00793	0.02255	0.00798	0.02268	0.00803	0.02281
18	0.00753	0.02134	0.00758	0.02147	0.00762	0.02159
20	0.00717	0.02027	0.00721	0.02039	0.00726	0.02051
30	0.00581	0.01624	0.00585	0.01635	0.00589	0.01645
40	0.00488	0.01350	0.00492	0.01359	0.00495	0.01369
50	0.00420	0.01146	0.00423	0.01155	0.00426	0.01163
60	0.00366	0.00987	0.00369	0.00994	0.00372	0.01002
70	0.00322	0.00857	0.00325	0.00864	0.00327	0.00871
80	0.00286	0.00750	0.00288	0.00757	0.00291	0.00763
90	0.00255	0.00659	0.00257	0.00665	0.00259	0.00672
100	0.00228	0.00582	0.00230	0.00588	0.00232	0.00593

Cuadro 2.2: Correcciones radiativas  $\Delta_{\rho^{0,+}}$  a la razón de decaimiento definidas en ec.(2.48) como función de la energía mínima  $\omega_0$  del fotón y para 3 diferentes valores de la masa  $m_{\rho^{0,+}}$

La predicción para la fracción de decaimiento del modo neutro usando los datos del Cuadro(2.2) es  $B(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma, \omega \geq 50 \text{ MeV}) = 11.5 \times 10^{-3}$ , resultado que se compara muy bien (dentro de  $1\sigma$ ) con el valor experimental reportado en el PDG[3] para el mismo valor de la energía de corte  $\omega_0$

$$B(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma, \omega \geq 50 \text{ MeV}) = 9.9 \pm 1.6 \times 10^{-3}$$

Para el mismo valor de  $\omega_0$ , obtenemos el efecto de rompimiento de simetría de isospin en el modo radiativo (suponiendo  $\Gamma_{\rho^+} = \Gamma_{\rho^0} = 150 \text{ MeV}$ )

$$\Gamma(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma, \omega \geq 50 \text{ MeV}) - \Gamma(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \gamma, \omega \geq 50 \text{ MeV}) \approx 1.1 \text{ MeV}$$

el cual difiere del valor central ( $0.45 \pm 0.45 \text{ MeV}$ ) supuesto por la referencia [17], el cual es el valor usado en la literatura. Aunque son consistentes dentro de las incertidumbres, las predicciones del rompimiento del isospin en la evaluación de las contribuciones hadrónicas a  $a_\mu$  a partir de los datos del lepton  $\tau$  son muy diferentes.

Finalmente, en el Cuadro (2.3) presentamos las correcciones (correspondiente a fotones *inclusivos*) que deben aplicarse al ancho de decaimiento  $\rho \rightarrow \pi\pi$  para obtener el ancho total de los mesones para los casos neutro y cargado. La corrección  $\sigma_{\rho^i}$  tabulada está definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\rho^0 \rightarrow \pi\pi(\gamma), \omega \leq \omega_0) + \Gamma(\rho^0 \rightarrow \pi\pi\gamma, \omega \geq \omega_0)}{\Gamma_{\rho^0\pi^+\pi^-}^0} &= 1 + \delta_{tot}^{\rho^0} + \Delta_{\rho^0} \equiv 1 + \sigma_{\rho^0} \\ \frac{\Gamma(\rho^+ \rightarrow \pi\pi(\gamma), \omega \leq \omega_0) + \Gamma(\rho^+ \rightarrow \pi\pi\gamma, \omega \geq \omega_0)}{\Gamma_{\rho^+\pi^+\pi^-}^0} &= 1 + \delta_{tot}^{\rho^+} + \Delta_{\rho^+} \equiv 1 + \sigma_{\rho^+} \end{aligned}$$

Tal como señalamos anteriormente, la corrección inclusiva debe de ser independiente de el corte  $\omega_0$ . A partir del cuadro(2.3) se observa que este requisito se satisface para valores pequeños de  $\omega_0$ [47]. La razón importante de que no sea una independencia perfecta se debe, por un lado a que la aproximación de fotón suave se realiza, desechando todos los términos

$\omega_0$ (MeV)	$\sigma_{\rho^0}$	$\sigma_{\rho^+}$	$\sigma_{\rho^0} - \sigma_{\rho^+}$
2	$8.05 \times 10^{-3}$	$-4.15 \times 10^{-3}$	$12.20 \times 10^{-3}$
4	$8.12 \times 10^{-3}$	$-4.13 \times 10^{-3}$	$12.25 \times 10^{-3}$
6	$8.22 \times 10^{-3}$	$-4.09 \times 10^{-3}$	$12.31 \times 10^{-3}$
8	$8.30 \times 10^{-3}$	$-4.06 \times 10^{-3}$	$12.36 \times 10^{-3}$
10	$8.39 \times 10^{-3}$	$-4.03 \times 10^{-3}$	$12.42 \times 10^{-3}$
12	$8.48 \times 10^{-3}$	$-4.00 \times 10^{-3}$	$12.48 \times 10^{-3}$
14	$8.56 \times 10^{-3}$	$-3.97 \times 10^{-3}$	$12.53 \times 10^{-3}$
16	$8.65 \times 10^{-3}$	$-3.94 \times 10^{-3}$	$12.59 \times 10^{-3}$
18	$8.74 \times 10^{-3}$	$-3.91 \times 10^{-3}$	$12.65 \times 10^{-3}$
20	$8.82 \times 10^{-3}$	$-3.88 \times 10^{-3}$	$12.70 \times 10^{-3}$

Cuadro 2.3: Corrección de fotones inclusivos a la fracción de decamiento  $\Delta_{\rho^0,+}$  como función de la energía mínima  $\omega_0$  del fotón y para el valor común de la masas  $m_{\rho^0,+} = 775$  MeV

en potencias de  $\omega_0$  y solo se mantiene el término logarítmico, mientras que el proceso con fotones duros contiene todos los términos tales como polinomios en  $\omega_0$ .

La diferencia entre anchuras de decaimiento de los mesones  $\rho$  en términos de las diferentes contribuciones se escribe como sigue

$$\Delta\Gamma_\rho = \Gamma_{\rho^0}^0 \left[ 1 + \sigma_{\rho^0} - \left[ \frac{m_{\rho^+} v_+^3}{m_{\rho^0} v_0^3} \right] [1 + \sigma_{\rho^+}] \right] + \Delta\Gamma^{sub} \quad (2.49)$$

Una vez que sea establecido de manera definitiva cual es el valor y signo de  $\Delta m_\rho$ , el valor de  $\Delta\Gamma_\rho$  podrá obtenerse con los datos de los cuadros (2.1) y (2.2) en la ecuación anterior. Para propósitos ilustrativos, usando  $\Gamma_{\rho^0}^0 = 150$  MeV,  $\omega_0 = 10$  MeV, obtendríamos los siguientes valores que dependen de la elección de  $\Delta m_\rho$ .

$\Delta m_\rho$	-3 MeV	0 MeV	3 MeV
$\Delta\Gamma_\rho$	0.02 MeV	0.86 MeV	1.70 MeV

Como es de esperarse, el resultado anterior muestra que existe una correlación importante entre el rompimiento de isospin en las masas y las anchuras del sistema  $\rho^\pm - \rho^0$ . Sin embargo, la extracción de estos parámetros a partir de los datos experimentales (producción

de un par de piones en la aniquilación  $e^+e^-$ , en decaimientos del leptón  $\tau$  y en reacciones hadrónicas[3]) no toman en cuenta esta correlación o restricción que impone la teoría. Así por ejemplo un análisis combinado de datos sobre la sección eficaz de  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  y del espectro hadrónico en  $\tau^- \rightarrow \pi^+\pi^0\nu$  en la región de la resonancia  $\rho(770)$  indica que [48]

$$\Delta\Gamma_\rho = (-2.3 \pm 1.6) \text{ MeV} \quad y \quad \Delta m_\rho = -(3.1 \pm 0.9) \text{ MeV} \quad (2.50)$$

Sin embargo, un análisis similar efectuado por la referencia [6] arroja:

$$\Delta\Gamma_\rho = (-0.2 \pm 1.0) \text{ MeV} \quad y \quad \Delta m_\rho = (-2.4 \pm 0.8) \text{ MeV} . \quad (2.51)$$

Sin duda, un análisis combinado de dichos datos que tome en cuenta de manera adecuada el rompimiento de la simetría de isospin en las masas y anchos de decaimiento [19][20] es necesario.

## 2.5. Conclusiones

En el presente capítulo hemos analizado el rompimiento de la simetría de isospin en la anchura total de decaimiento de los mesones  $\rho(770)$ . Definiendo los anchos totales de decaimiento de la  $\rho$  a partir de la suma sobre sus anchos parciales, hemos encontrado que solo los modos de decaimiento en dos piones ( $\rho \rightarrow \pi\pi$  y  $\rho \rightarrow \pi\pi\gamma$ ) son relevantes cuando se desea una precisión mayor al 0.5 %.

Para calcular de forma completa el ancho de decaimiento de las  $\rho$ 's hemos (*i*) evaluado las correcciones radiativas al decaimiento no radiativo del  $\rho$  y (*ii*) los anchos de decaimiento radiativos de la  $\rho$  en dos piones. Se encuentra que ambos decaimientos contribuyen de manera significativa al rompimiento de la simetría de isospin en la diferencias de anchuras del sistema  $\rho^0 - \rho^\pm$ . Además se encuentra que la diferencia de anchuras depende de el signo y valor absoluto de la diferencia de masas.



# Capítulo 3

## Corrección radiativa a $\phi \rightarrow K^+K^-$

En este capítulo se estudia el rompimiento de la simetría de isospin en los procesos  $\phi \rightarrow K^+K^-/K^0\bar{K}^0$ . Para tal fin se define la razón entre las anchuras de decaimiento  $\mathcal{R}^T = \Gamma(\phi \rightarrow K^+K^-)/\Gamma(\phi \rightarrow K^0\bar{K}^0)$ . Se realizan las correcciones electromagnéticas que solo afectan al proceso con kaones cargados (QED escalar). Posteriormente se analiza la incorporación de factores de forma a los kaones para modelar su interacción con el fotón.

### 3.1. Introducción

El meson  $\phi(1020)$  posee los mismos números cuánticos que el fotón ( $J^{PC} = 1^{--}$ ), pero tiene una masa de 1019.45 MeV [3]. Puede ser producido tanto en reacciones hadrónicas, como en la aniquilación electrón-positrón y decae principalmente en un par de mesones  $K$  ( $K^+K^-$  y  $K^0\bar{K}^0$ ). Sus principales modos de decaimiento se muestran en la siguiente Tabla<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>Siguiendo la convención adoptada en la literatura, en esta tesis hablaremos indistintamente de los estados  $K^0\bar{K}^0$  y  $K_LK_S$  para el par de kaones neutros.

Estado Final	$\Gamma_i/\Gamma$	Factor de escala
$K^+K^-$	$(49.1 \pm 0.6) \%$	1.2
$K^0\bar{K}^0$	$(34.0 \pm 0.5) \%$	1.1
$\pi^+\pi^-\pi^0$	$(15.04 \pm 0.5) \%$	1.3
$\eta\gamma$	$(1.295 \pm 0.25) \%$	1.1

Nuevamente, de la tabla anterior podemos observar que estos promedios reportados en el [3] poseen factores de escala mayores a la unidad.

A partir de los valores experimentales más precisos obtenidos en las refs.[7],[8],[9], se puede derivar la siguiente razón de producción de un par de kaones [3]:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\phi^{exp} &= \frac{\Gamma(\phi \rightarrow K^+K^-)}{\Gamma(\phi \rightarrow K^0\bar{K}^0)} \\ &= 1.45 \pm 0.03 . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Esta razón de producción de kaones es muy grande ya que debido a que siendo el mesón  $\phi$  un isosinglete, en el límite de la simetría de isospin se esperaría  $R_\phi = 1$ . Como veremos más adelante, la explicación de este rompimiento de la simetría de isospin sigue siendo un reto para la fenomenología de partículas elementales.

Los datos experimentales más limpios se obtienen a través de la reacción  $e^+e^- \rightarrow \phi \rightarrow K\bar{K}$ , la cual ha sido estudiada por los experimentos CMD2 y SND en Novosibirsk [8][9], Nuevos resultados se esperan en el experimento KLOE localizado en DAΦNE [10][49], por lo que es factible que se logre una reducción en las incertidumbres de la medición de  $\mathcal{R}_\phi^{exp}$ . Cabe mencionar que los experimentos CMD2 y SND han medido simultáneamente las fracciones de decaimiento de los modos principales del mesón  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow K^+K^- , \\ \phi &\rightarrow K^0\bar{K}^0 , \\ \phi &\rightarrow \pi^-\pi^+\pi^0 , \\ \phi &\rightarrow \eta\gamma . \end{aligned}$$

sujetos a la restricción  $\sum_X B(\phi \rightarrow X) = 1$ .

El meson  $\phi$  es un isosinglete, mientras que los kaones pueden ser agrupados en isodo-bletes (la diferencia de masas de los kaones es:  $\delta m_K = m_{K^+} - m_{K^0} \sim -4$  MeV):

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix}.$$

Debido a que los decaimientos del meson  $\phi$  en un par de kaones ocurren por medio de las interacciones fuertes, el par  $K\bar{K}$  debe encontrarse en un estado de isospin  $I = 0$ . Por tanto, en el límite de la simetría de isospin se esperaría que  $\mathcal{R}_\phi^I = 1$ , lo cual al compararse con la ec. (3.1) indica un gran rompimiento de la simetría de isospin. La razón para esta fuerte ruptura se debe principalmente a que el decaimiento del  $\phi$  ocurre muy cerca del umbral de producción de kaones, lo cual realza el efecto de rompimiento del isospin.

A nivel hadrónico, las fuentes de rompimiento del isospin deben provenir de las diferencias de masas entre los kaones cargados y neutros y de las interacciones electromagnéticas entre las partículas externas [11], [12]. La diferencia de masas entre los kaones produce un realce en  $R_\phi$  debido al espacio de fase de estas partículas. Las correcciones radiativas debidas a las interacciones electromagnéticas de los kaones cargados en el estado final producen un realce adicional. Al tomar en cuenta ambos efectos se encuentra [11], [12]:

$$\mathcal{R}_\phi^t \simeq 1.59. \quad (3.2)$$

Este resultado se encuentra  $4.5\sigma$  por encima del valor experimental ec.(3.1) lo cual representa un reto para la teoría. Adicionalmente, posibles correcciones de isospin a las constantes de interacción fuertes calculadas en el contexto de interacciones efectivas hadrónicas, incrementan aun más la predicción teórica hasta  $\mathcal{R}^t = 1.62$ [12].

Una solución no convencional a este rompimiento de la simetría de isospin fue propuesta en la ref.[50]. Ese trabajo supone que existen correcciones a la regla de oro de Fermi para razones de decaimiento, aunque introduce el inconveniente de poner a mano un factor de forma fenomenológico que depende de un parámetro relacionado con la escala de energía de confinamiento de los hadrones involucrados.

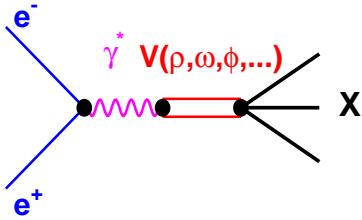


Figura 3.1: Modelo de dominancia vectorial para la reacción  $e^+e^- \rightarrow$  hadrones.

Otra solución alternativa fue propuesta en la referencia [51] donde se consideran modificaciones al potencial de Coulomb para cortas distancias en la evaluación de las interacciones fuertes en el estado final de las reacciones  $e^+e^- \rightarrow P^+P^-/P^0\bar{P}^0$  ( $P = K, D, B$ ) cerca del umbral de producción [51].

Aunque estos enfoques parecen brindar una solución a la discrepancia de la simetría de isospin, se trata de hipótesis *ad hoc* cuya validación requeriría de verificaciones adicionales.

Debido a que las correcciones radiativas electromagnéticas [11] fueron hechas sin tomar en cuenta la estructura electromagnética de los kaones, en este capítulo revisamos el cálculo de las mismas. Nuestra contribución original consiste en tomar en cuenta la estructura de los kaones (cargados y neutros) para lo cual usamos un modelo de dominancia vectorial (VDM) [52, 53]. Nuestro trabajo es similar a la consideración de los efectos de estructura electromagnética hechas en la referencia [54] en el caso de los decaimientos débiles  $\tau \rightarrow K\nu$  y  $\pi \rightarrow \mu\nu$ . También hemos realizado una estimación de las contribuciones dependientes de modelo en los diagramas de emisión de fotones reales ( $\phi \rightarrow K\bar{K}\gamma$ ), los cuales, como se espera, resultan completamente despreciables.

### 3.1.1. El proceso $V \rightarrow P\bar{P}$ a nivel de árbol

La densidad Lagrangiana que modela el decaimiento de un meson vectorial de spin 1 y masa M a dos escalares (pseudo-escalares) cada uno de masa m es[55]

$$\mathcal{L} = ig_{VP\bar{P}}V^\mu(x) [P(x)\partial_\mu\bar{P}(x) - \bar{P}(x)\partial_\mu P(x)] . \quad (3.3)$$

La anchura de decaimiento  $\Gamma(V \rightarrow P\bar{P})$  al orden mas bajo de la teoría de perturbaciones, obtenida de esta densidad Lagrangiana esta dada por la expresión [11][56]

$$\Gamma(V \rightarrow P\bar{P}) = \frac{1}{12} \frac{|g_{VP\bar{P}}|^2}{4\pi} M v^3 , \quad (3.4)$$

donde  $g_{VP\bar{P}}$  es la constante de acoplamiento fuerte entre el meson vectorial y los escalares (pseudo-escalares) y la velocidad v está definida como

$$v = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} .$$

La razón de decaimiento correspondientes a los procesos  $\phi \rightarrow K^+K^-/K^0\bar{K}^0$  al orden más bajo en teoría de perturbaciones, usando (3.4) es :

$$\begin{aligned} \Gamma(\phi \rightarrow K^+K^-) &= \Gamma_{\phi K^+K^-}^0 = \frac{1}{12} \frac{|g_{\phi K^+K^-}|^2}{4\pi} m_\phi v_{\phi,+}^3 , \\ \Gamma(\phi \rightarrow K^0\bar{K}^0) &= \Gamma_{\phi K^0\bar{K}^0}^0 = \frac{1}{12} \frac{|g_{\phi K^0\bar{K}^0}|^2}{4\pi} m_\phi v_{\phi,0}^3 , \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde  $v_{\phi,+} = \sqrt{1 - \frac{4m_{K^\pm}^2}{m_\phi^2}}$  y  $v_{\phi,0} = \sqrt{1 - \frac{4m_{K^0}^2}{m_\phi^2}}$  denotan las velocidades de los kaones en el sistema en reposo del  $\phi$ . A partir de la ec.(3.5), la razón  $\mathcal{R}_\phi^t$  tiene la siguiente forma

$$\mathcal{R}_\phi^t = \frac{g_{\phi K^+K^-}}{g_{\phi K^0\bar{K}^0}} \frac{v_{\phi,+}^3}{v_{\phi,0}^3} . \quad (3.6)$$

Este resultado muestra que los efectos que rompen la simetría de isospin pueden provenir de las diferencias de masas entre los kaones (razón de velocidades) y de la razón de constantes de acoplamiento. Debido a que las interacciones fuertes respetan la simetría de isospin,

supondremos siempre que  $g_{\phi K^+ K^-} = g_{\phi K^0 \bar{K}^0}$ . Por lo tanto, a este orden la rotura de la simetría de isospin viene dada por el factor:

$$\frac{v_{\phi,+}^3}{v_{\phi,0}^3} = 1.5225 . \quad (3.7)$$

A continuación consideraremos las correcciones radiativas en el caso de kaones puntuales.

## 3.2. Correcciones radiativas en QED escalar

En esta sección se rehacen las correcciones radiativas de orden  $\alpha$  en el caso en que los kaones se consideran como partículas puntuales (QED escalar). En este límite únicamente el proceso  $\phi \rightarrow K^+K^-$  es corregido por la emisión o reabsorción de fotones. El problema de las divergencias infrarrojas y ultravioletas ha sido discutido en el capítulo anterior para el caso  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ , por lo que el cálculo resulta inmediato. Primero nos enfocamos en las correcciones debidas a fotones virtuales y después consideraremos la emisión de fotones reales suaves.

### 3.2.1. Correcciones de fotones virtuales a $\phi \rightarrow K^+K^-$

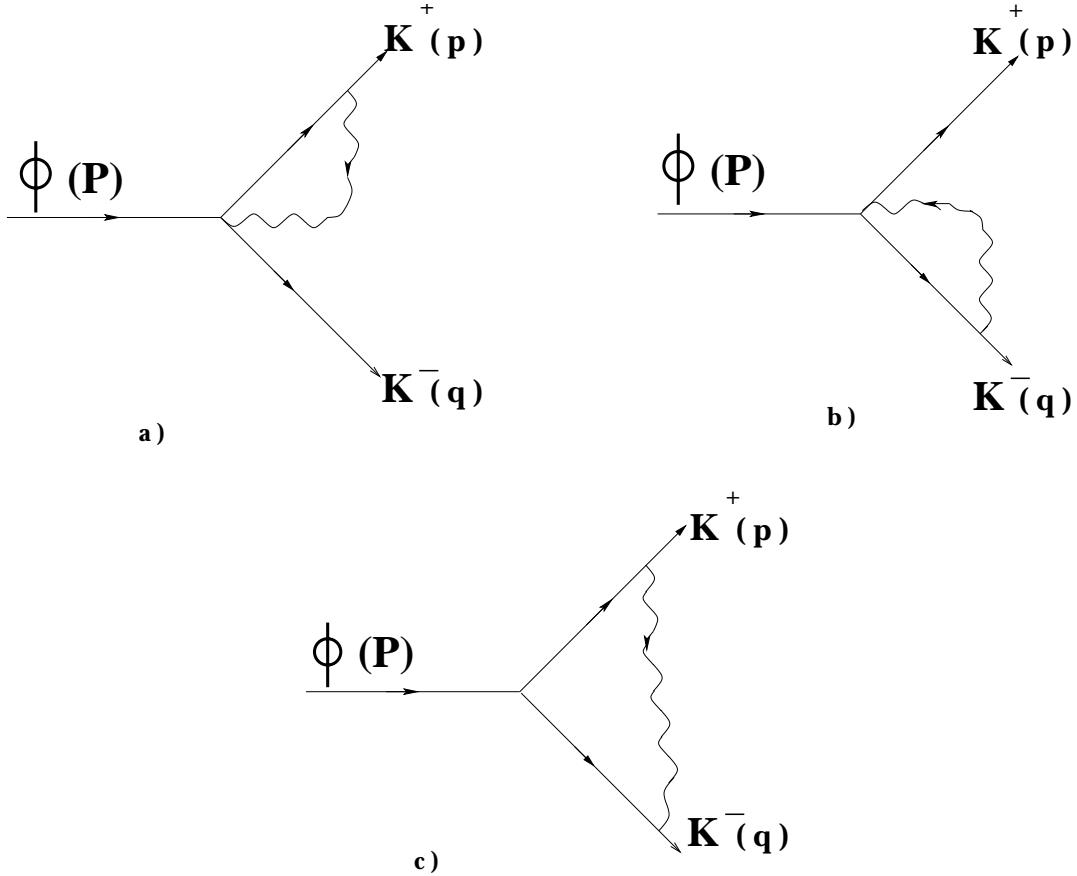
Las correcciones QED al decaimiento  $\phi \rightarrow K^+K^-$  han sido realizadas por Cremmer [11] por lo que ésta sección es una revisión a su trabajo. La densidad Lagrangiana que describe la interacción de un mesón vectorial de spin 1 con pseudoescalares tiene la forma siguiente:

$$\mathcal{L} = ig_{\phi K^+ K^-} \phi^\mu(x) [K^+(x) \partial_\mu K^-(x) - K^-(x) \partial_\mu K^+(x)] . \quad (3.8)$$

La amplitud a nivel árbol obtenida de la anterior expresión es:

$$\mathcal{M}_\phi^0 = ig_{\phi K^+ K^-} (p - q) \cdot \eta(P, s) , \quad (3.9)$$

donde  $p$ ,  $q$ ,  $P$  son los 4-momentos asociados a  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $\phi$  respectivamente,  $\eta(P, s)$  es el 4-vector de polarización del mesón vectorial y  $g_{\phi K^+ K^-}$  es la constante de acoplamiento. Las

Figura 3.2: Correcciones virtuales al proceso  $\phi \rightarrow K^+K^-$  en QED escalar.

interacciones electromagnéticas son introducidas de la manera usual, con la sustitución mínima  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieQ A_\mu$  en (3.8)[57].

Las amplitudes de los diagramas mostrados en a) y b) de la fig.(3.2) son respectivamente:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{\phi,1} &= \int -2g_{\phi K^+ K^-} \frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{(2p+k) \cdot \eta(P, s)}{k^2((p+k)^2 - m_{K^+}^2)} d^4k \\
 &= -ig_{\phi K^+ K^-} [p \cdot \eta(P, s)] \frac{\alpha}{4\pi} (3B0 [m_{K^+}^2, 0, m_{K^+}^2] + 1) , \\
 \mathcal{M}_{\phi,2} &= \int 2g_{\phi K^+ K^-} \frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{(2q+k) \cdot \eta(P, s)}{k^2((q+k)^2 - m_{K^+}^2)} d^4k \\
 &= ig_{\phi K^+ K^-} [q \cdot \eta(P, s)] \frac{\alpha}{4\pi} (3B0 [m_{K^+}^2, 0, m_{K^+}^2] + 1) . \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

La amplitud que describe la interacción de Coulomb, diagrama c) de la fig(3.2) es:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\phi,3} &= \int \frac{-g_{\phi K^+ K^-} e^2 (2p - k) \cdot (2q + k) \cdot [(p - q - 2k) \cdot \eta(P, s)]}{((p - k)^2 - m_{K^+}^2) \cdot ((q + k)^2 - m_{K^+}^2) \cdot k^2 \cdot (2\pi)^4} d^4 k \\ &= \mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \left( 1 + \frac{2 + 3v_{\phi,+}^2}{v_{\phi,+}^2} \right) \cdot B0[m_{K^+}^2, 0, m_{K^+}^2] - \frac{1 + v_{\phi,+}^2}{v_{\phi,+}^2} \cdot 2B0[m_\phi^2, m_{K^+}^2, m_{K^+}^2] \\ &\quad - m_\phi^2 (1 + v_{\phi,+}^2) \cdot C0[m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, m_\phi^2, m_{K^+}^2, \lambda^2, m_{K^+}^2] . \end{aligned} \quad (3.11)$$

La suma de (3.10) y (3.11) se escribe como el producto de la amplitud a nivel árbol y una función escalar de Lorentz de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_T &= \mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} (B0[m_{K^+}^2, 0, m_{K^+}^2] \cdot \frac{2}{v_{\phi,+}^2} - \frac{1 + v_{\phi,+}^2}{v_{\phi,+}^2} \cdot 2B0[m_\phi^2, m_{K^+}^2, m_{K^+}^2] \\ &\quad - m_\phi^2 (1 + v_{\phi,+}^2) \cdot C0[m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, m_\phi^2, m_{K^+}^2, \lambda^2, m_{K^+}^2]) . \end{aligned} \quad (3.12)$$

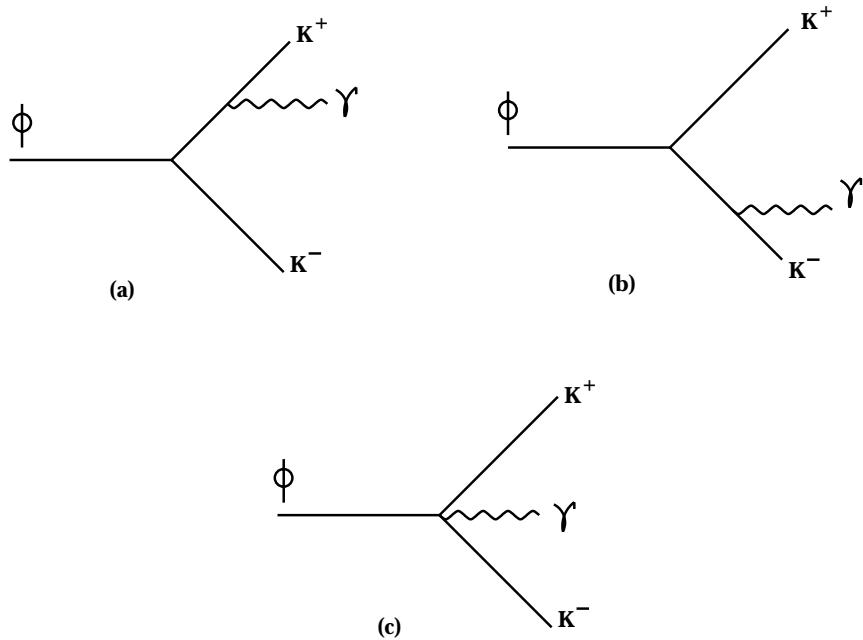
Para obtener la contribución total de las correcciones radiativas virtuales, se deben agregar al resultado anterior las contribuciones de autoenergía de los kaones:

$$\mathcal{M}_{K^\pm}^{SE} = \mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{2} \left[ 2 \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln[4\pi] - \ln \left[ \frac{m_{K^+}^2}{\mu^2} \right] \right] - 2 \ln \left[ \frac{\lambda^2}{m_{\pi^+}^2} \right] \right] . \quad (3.13)$$

De esta manera la amplitud total de las correcciones radiativas virtuales, resultado de la suma de (3.12) y (3.13), escrita de manera explícita es [58]:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\phi^v &= \mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \frac{\pi^2 (1 + v_{\phi,+}^2)}{2v_{\phi,+}} - 2 \left[ 1 + \ln \left[ \frac{\lambda}{m_{K^+}} \right] \right] \left[ 1 + \frac{1 + v_{\phi,+}^2}{2v_{\phi,+}} \ln \left[ \frac{1 - v_{\phi,+}}{1 + v_{\phi,+}} \right] \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 + v_{\phi,+}^2}{2v_{\phi,+}} \left[ 2\text{Li}_2[v_{\phi,+}] - 2\text{Li}_2[-v_{\phi,+}] + \text{Li}_2 \left[ \frac{2}{1 + v_{\phi,+}} \right] - \text{Li}_2 \left[ \frac{2}{1 - v_{\phi,+}} \right] \right] \right] \\ &= \mathcal{M}_\phi^0 \times \delta_{point}^v . \end{aligned} \quad (3.14)$$

La contribución  $(\alpha\pi(1 + v_{\phi,+}^2))/(2v_{\phi,+})$  usualmente conocido como término de Coulomb, resulta ser dominante en este proceso. Debido a que la masa del  $\phi$  está ligeramente arriba del umbral de la producción del par  $K^+ K^-$ , la energía cinética disponible para los kaones es pequeña, así que después de la producción del par  $K^+ K^-$ , cada una de las partículas se desplazan lentamente, condición favorable para una interacción Coulombiana entre ellos antes de su posterior decaimiento.

Figura 3.3: Emisión de fotón real en  $\phi \rightarrow K^+K^-$ 

La amplitud del decaimiento  $\phi \rightarrow K^+K^-$  modificado por las correcciones virtuales se escribe ahora como la suma de la amplitud a nivel de árbol (3.9) y la amplitud de las correcciones virtuales (3.14)

$$\mathcal{M}_\phi = \mathcal{M}_\phi^0 + \mathcal{M}_\phi^v . \quad (3.15)$$

La correspondiente razón de decaimiento corregida por las correcciones virtuales es

$$\Gamma_{\phi K^+ K^-} = \Gamma_{\phi K^+ K^-}^0 [1 + 2\text{Re}[\delta_{point}^v]] . \quad (3.16)$$

Como puede verse de la ec.(3.14), las correcciones virtuales de orden  $\alpha$  contienen una divergencia infrarroja la cual esta regulada por la masa ficticia  $\lambda$  del fotón.

### 3.2.2. Correcciones de fotones reales $\phi \rightarrow K^+K^-$

La emisión de fotones reales debe ser considerado para eliminar las divergencias infrarrojas de (3.16) tal como se ha mencionado en el capítulo 2.

La amplitud total de emisión de fotón real, independiente del modelo, que contiene la contribución de los 3 diagramas de Feynman mostrados en la fig.(3.3) es:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\gamma = & -e\hat{\mathcal{M}}_\phi^0 \left[ \frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k} \right] - e \left[ \frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k} \cdot \imath g_{\phi K^+ K^-} k \cdot \eta(P, s) \right] \\ & + e\hat{\mathcal{M}}_\phi^0 \left[ \frac{q \cdot \epsilon^*(k)}{q \cdot k} \right] - e \left[ \frac{q \cdot \epsilon^*(k)}{q \cdot k} \cdot \imath g_{\phi K^+ K^-} k \cdot \eta(P, s) \right] \\ & + 2\imath e g_{\phi K^+ K^-} \epsilon^*(k) \cdot \eta(P, s) . \end{aligned} \quad (3.17)$$

La primera línea es la amplitud de la fig.(3.3 a) , la segunda línea es la amplitud de la fig.(3.3 b) y por último la contribución de la fig. (3.3 c) corresponde a la última línea. Recordemos que en la amplitud  $\hat{\mathcal{M}}_\phi^0 = \imath g_{\phi K^+ K^-} (p - q) \cdot \eta(P, s)$ , los momentos satisfacen la relación de conservación de energía-momento para 3 cuerpos :

$$P = p + q + k . \quad (3.18)$$

Es fácil notar que (3.17) es invariante de norma electromagnética y que satisface el teorema de Low[44]. Para mostrar que se satisface el teorema de Burnett-Kroll[45] escribimos la amplitud total de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\gamma = & -e\hat{\mathcal{M}}_\phi^0 \left[ \frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k} - \frac{q \cdot \epsilon^*(k)}{q \cdot k} \right] - \imath g_{\phi K^+ K^-} \left[ \frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k} + \frac{q \cdot \epsilon^*(k)}{q \cdot k} \right] k \cdot \eta(P, s) \\ & + 2\imath e g_{\phi K^+ K^-} \epsilon^*(k) \cdot \eta(P, s) . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Escrita en esta forma, la amplitud refleja más claramente la expansión de Low.

Para verificar el teorema de Burnett-Kroll, tomamos el cuadrado de (3.19) y promediamos sobre el spin del mesón  $\phi$ . El cuadrado del primer término en la ec. (3.19) contiene las potencias  $\omega^{-2}, \omega^{-1}, \omega^0$  (nótese que usamos indistintamente la expansión en  $k$  como expansión en  $\omega$ ):

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{3} |A\omega^{-1}|^2 &= \frac{e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2}{3} \left[ \left| \frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k} - \frac{q \cdot \epsilon^*(k)}{q \cdot k} \right|^2 (-4m_k^2 + m_\phi^2) \right. \\ &\quad + \left| \frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k} - \frac{q \cdot \epsilon^*(k)}{q \cdot k} \right|^2 \cdot (-2(p+q) \cdot k) \\ &\quad \left. + \frac{1}{m_\phi^2} \left| \frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k} - \frac{q \cdot \epsilon^*(k)}{q \cdot k} \right|^2 \cdot [(p-q) \cdot k]^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

El cuadrado del segundo y tercer términos en (3.19) solo contiene potencias de orden  $\omega^0$ :

$$\sum \frac{1}{3} |B\omega^0|^2 = \frac{e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2}{3} \left[ -4\epsilon(k) \cdot \epsilon^*(k) + \frac{1}{m_\phi^2} [(p-q) \cdot k]^2 \left| \frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k} - \frac{q \cdot \epsilon^*(k)}{q \cdot k} \right|^2 \right]. \quad (3.21)$$

Finalmente la interferencia entre los términos de orden  $k^{-1}$  y  $k^0$  en (3.19), da lugar a:

$$\begin{aligned} \sum I &= \sum \frac{1}{3} [A\omega^{-1}(B\omega^0)^* + (A\omega^{-1})^* B\omega^0] \\ &= \frac{e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2}{3} \left[ \frac{2}{m_\phi^2} \left[ \frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k} - \frac{q \cdot \epsilon^*(k)}{q \cdot k} \right] \left[ \frac{p \cdot \epsilon(k)}{p \cdot k} + \frac{q \cdot \epsilon(k)}{q \cdot k} \right] [k \cdot (p-q)] [(p+q) \cdot k] \right. \\ &\quad \left. + 2((p+q) \cdot k) \left| \frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k} - \frac{q \cdot \epsilon^*(k)}{q \cdot k} \right|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sumando las expresiones (3.20), (3.21), (3.22) se verifica el teorema de Burnett-Kroll

$$\begin{aligned} \sum |\mathcal{M}_\gamma|^2 &= e^2 g^2 \left| \frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k} - \frac{q \cdot \epsilon^*(k)}{q \cdot k} \right|^2 (-4m_k^2 + m_\phi^2) - g^2 e^2 4\epsilon(k) \cdot \epsilon^*(k) \\ &\quad + \frac{e^2 g^2}{m_\phi^2} \left| \frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k} - \frac{q \cdot \epsilon^*(k)}{q \cdot k} \right|^2 \cdot [(p-q) \cdot k]^2 \\ &\quad + \frac{2e^2 g^2}{m_\phi^2} \left[ \frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k} - \frac{q \cdot \epsilon^*(k)}{q \cdot k} \right] \left[ \frac{p \cdot \epsilon(k)}{p \cdot k} + \frac{q \cdot \epsilon(k)}{q \cdot k} \right] \cdot [k \cdot (p-q)] [(p+q) \cdot k], \end{aligned} \quad (3.23)$$

es decir, los términos de orden  $k^{-1}$  no aparecen en el cuadrado de la amplitud.

Para obtener las correcciones de fotones suaves, se usa la amplitud de orden  $k^{-1}$  definida como:

$$\mathcal{M}_\phi^{Soft} = e \mathcal{M}_\phi^0 \left[ \frac{q \cdot \epsilon^*(k)}{q \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k} \right]. \quad (3.24)$$

Recordemos una vez más que en la aproximación de fotón suave, se elimina la dependencia en la variable  $k$  (4-momento del fotón) en el numerador de (3.24) manteniendo la dependencia solo en el denominador. En otras palabras, la amplitud  $\mathcal{M}_\phi^0$  usada en (3.24) debe corresponder a la del modo no radiativo.

La corrección al ancho de decaimiento debido a la emisión de fotones de baja energía se calcula usando la expresión :

$$d\Gamma_\phi^{soft} = \frac{(2\pi)^4}{2m_\phi} |\mathcal{M}_\phi^{Soft}|^2 \delta^4(P - p - q - k) \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{K^+}} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2E_{K^-}} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \quad (3.25)$$

En el sistema de referencia en el que la partícula que decae está en reposo e integrando en las variables de los kaones se obtiene

$$d\Gamma_\phi^{soft} = \Gamma_{\phi K^+ K^-}^0 \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{\pi} \left| \frac{q \cdot \epsilon^*(k)}{q \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k} \right|^2 \cdot \frac{d^3\vec{k}}{\omega} \quad (3.26)$$

El resultado final para las correcciones de fotones suaves (ver apéndice C)<sup>2</sup>, se escribe como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_\phi^{soft}}{\Gamma_{\phi K^+ K^-}^0} &= \delta_\phi^{sb} \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \left[ 2 \ln \left[ \frac{\lambda}{2\omega_0} \right] \left\{ 1 + \frac{1 + v_{\phi,+}^2}{2v_{\phi,+}} \ln \left[ \frac{1 - v_{\phi,+}}{1 + v_{\phi,+}} \right] \right\} - \frac{1}{v_{\phi,+}} \ln \left[ \frac{1 - v_{\phi,+}}{1 + v_{\phi,+}} \right] \right. \\ &\quad + \frac{1 + v_{\phi,+}^2}{2v_{\phi,+}} \left[ \text{Li}_2 \left[ \frac{1 - v_{\phi,+}}{1 + v_{\phi,+}} \right] - \text{Li}_2 \left[ \frac{v_{\phi,+} + 1}{1 - v_{\phi,+}} \right] + i\pi \ln \left[ \frac{1 - v_{\phi,+}}{1 + v_{\phi,+}} \right] \right] \\ &\quad \left. + \frac{1 + v_{\phi,+}^2}{2v_{\phi,+}} \left[ \ln \left[ \frac{4v_{\phi,+}^2}{1 - v_{\phi,+}^2} \right] \ln \left[ \frac{1 - v_{\phi,+}}{1 + v_{\phi,+}} \right] \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Una vez que se agrega la corrección de fotones suaves (3.27) a las correcciones radiativas virtuales (3.16), se obtiene la razón de decaimiento del proceso  $\phi \rightarrow K^+K^-$  corregida a orden  $\alpha$ , la cual es finita en el infrarrojo y en el ultravioleta

$$\Gamma_{rc} = \Gamma_{\phi K^+ K^-}^0 \left[ 1 + \delta_{\phi,point}^{QED} \right], \quad (3.28)$$

---

<sup>2</sup>Las referencias [59], [60] contienen identidades útiles entre las funciones dilogaritmo, que muestran la equivalencia analítica entre nuestro resultado y el de la ref.[11]

donde se ha definido la corrección puntual  $\delta_{\phi,point}^{QED} = 2\text{Re}\delta_{\text{point}}^{\text{v}} + \delta_{\phi}^{\text{sb}}$  y cuya expresión analítica es:

$$\begin{aligned} \delta_{\phi,point}^{QED} = & \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{\pi^2(1 + v_{\phi,+}^2)}{2v_{\phi,+}} - 2 \left[ 1 + \ln \left[ \frac{2\omega_0}{m_{K^+}} \right] \right] \left[ 1 + \frac{1 + v_{\phi,+}^2}{2v_{\phi,+}} \ln \left[ \frac{1 - v_{\phi,+}}{1 + v_{\phi,+}} \right] \right] \right. \\ & - 2 \frac{1 + v_{\phi,+}^2}{v_{\phi,+}} [\text{Li}_2[v_{\phi,+}] - \text{Li}_2[-v_{\phi,+}]] - \frac{1}{v_{\phi,+}} \ln \left[ \frac{1 - v_{\phi,+}}{1 + v_{\phi,+}} \right] \\ & \left. - \frac{1 + v_{\phi,+}^2}{v_{\phi,+}} \left[ \text{Li}_2 \left[ \frac{2}{1 + v_{\phi,+}} \right] - \text{Li}_2 \left[ \frac{2}{1 - v_{\phi,+}} \right] \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

### 3.2.3. Predicción teórica $\mathcal{R}_{\phi}^t$

Las correcciones radiativas en QED escalar modifican únicamente la razón de decaimiento el proceso  $\phi \rightarrow K^+K^-$ . Aún cuando existe una evidente dependencia en el corte  $\omega_0$ , el resultado numérico no es muy sensible a una elección dada, por tal motivo se usa en el cálculo<sup>3</sup> el valor  $\omega_0 = \omega^{max}$ .

Como hemos mencionado, la corrección mostrada en (3.29) incluye únicamente la contribución de fotones suaves en la amplitud radiativa. La contribución de los términos regulares de la amplitud radiativa se evalúan numéricamente sin problema (ver Apéndice C2) y se obtiene:

$$\delta_R^r = 7.96 \times 10^{-5} \quad (3.30)$$

Otras posibles contribuciones a la amplitud radiativa son los términos dependientes de modelo, los cuales provienen de procesos con estados intermedios resonantes (por ejemplo  $\phi \rightarrow K^+K^{*-} \rightarrow K^+K^-\gamma$ ). Los contribuciones dependientes de modelo resultan ser<sup>4</sup> muy pequeñas: aproximadamente  $\sim 7 \times 10^{-8}$  para el modo  $\phi \rightarrow K^+K^-\gamma$ , mientras que para el

---

<sup>3</sup>La cinemática del proceso radiativo establece que la máxima energía  $\omega_{max} = (m_{\phi}^2 - 4m_{K^+}^2)/m_{\phi}$  permitida para el fotón emitido es  $\omega_{max} \approx 31.6\text{MeV}$ . Si se evalúa la corrección radiativa en el rango de valores  $10\text{ MeV} \leq \omega_0 \leq \omega^{max}$ , el resultado numérico varía tan solo por  $4 \times 10^{-4}$

<sup>4</sup>Ver apéndice C3.

modo con kaones neutros éstos han sido acotados experimentalmente debido a que  $B(\phi \rightarrow K^0 \bar{K}^0 \gamma) \leq 1.8 \times 10^{-8}$ [61].

Por lo tanto, tomando en cuenta las correcciones de isospin provenientes del espacio de fase y las correcciones radiativas de orden  $\alpha$  en el caso que los kaones se consideran partículas puntuales se obtiene el siguiente resultado para la razón de producción de kaones en decaimientos del mesón  $\phi$ :

$$\mathcal{R}_\phi^t = \frac{v_{\phi,+}^3}{v_{\phi,0}^3} (1 + \delta_{\phi,point}^{QED} + \delta_R^r) = 1.588 \quad (3.31)$$

Es decir, la predicción teórica se encuentra  $4.5\sigma$ 's arriba del valor experimental.

### 3.3. Correcciones virtuales para kaones no puntuales

A diferencia de QED escalar, las correcciones virtuales afectan tanto el decaimiento en kaones cargados como en kaones neutros. Los efectos de la estructura electromagnética de los kaones se manifiesta para grandes virtualidades del fotón. Experimentalmente, esta estructura ha sido explorada para virtualidades del fotón de hasta unos cuantos GeV's en la región temporaloide y se sabe que el modelo de dominancia vectorial (VDM) describe adecuadamente esta estructura. Sin embargo, se ignora cual es la estructura de los factores de forma del kaon para cuando  $k^2$  es muy grande y se piensa que los métodos de QCD perturbativa son más adecuados en ese régimen.

Debido a esto, en el cálculo de las correcciones virtuales comúnmente se realiza una separación de la región de integración (el momento del fotón virtual) en largas distancias con  $0 \leq |k|^2 \lesssim \mu_{cut}^2$  y en cortas distancias con  $\mu_{cut}^2 \leq |k|^2$ . La escala de energía que hace viable la separación en el lazo (loop) suele tomarse del orden de unos cuantos GeV's[54]. Debido a que las correcciones de cortas distancias exploran la estructura de los hadrones a nivel de quarks, se espera que las correcciones sean las mismas independientemente de las cargas de los kaones. Por lo anterior, solo consideraremos las correcciones radiativas de

largas distancias, es decir tomando en cuenta la estructura electromagnética de los kaones mediante el modelo de dominancia vectorial.

En esta sección se estudian las correcciones virtuales de largas distancias al proceso  $\phi \rightarrow K^+K^-$ , modelando la estructura de los hadrones mediante el factor de forma de los kaones. Medidas de la interacción electromagnética de los kaones a energías bajas [62] e intermedias [8] muestran una estructura que puede ser descrita dentro del modelo de dominancia vectorial como se muestra en la Figura 3.1. En nuestra aproximación incluimos los factores de forma, usando el Modelo de Dominancia Vectorial (VDM) en las correcciones radiativas virtuales.

### 3.3.1. Correcciones virtuales en VMD para kaones cargados

Siguiendo las referencias [8], [54], el factor de forma descrito por VDM modifica las expresiones de cada amplitud a 1 lazo, en cualquier parte del diagrama de Feynman que se encuentre un vértice  $KK\gamma$  se realiza la modificación como se indica en la fig.(3.4).

La suma indicada se realiza sobre los 3 mesones vectoriales que acoplan al fotón con los kaones:

$$\begin{aligned} g_{V\bar{K}\bar{K}} &= \{g_{\phi\bar{K}\bar{K}}, g_{\omega\bar{K}\bar{K}}, g_{\rho\bar{K}\bar{K}}\} , \\ f_V &= \{f_\phi, f_\omega, f_\rho\} , \\ m_V &= \{m_\rho, m_\omega, m_\phi\} , \\ \hat{m}_{V\theta}^2 &= m_V^2 + \imath m_V \Gamma_V \theta(k^2 - k_{\text{threshold}}^2) . \end{aligned} \quad (3.32)$$

La constante  $f_V$  esta relacionada con la anchura de decaimiento electrónica del mesón vectorial mediante la relación[63]:

$$\Gamma(V \rightarrow e^+e^-) = \frac{4\pi\alpha^2 m_V}{3f_V^2} \left(1 + \frac{2m_e^2}{m_V^2}\right) \left(1 - \frac{4m_e^2}{m_V^2}\right)^{1/2} , \quad (3.33)$$

y la constante de acoplamiento  $g_{V\bar{K}\bar{K}}$  proviene de la interacción del mesón vectorial  $V$  con el estado final  $K\bar{K}$ . El factor de forma generado por VDM para el kaon cargado puede

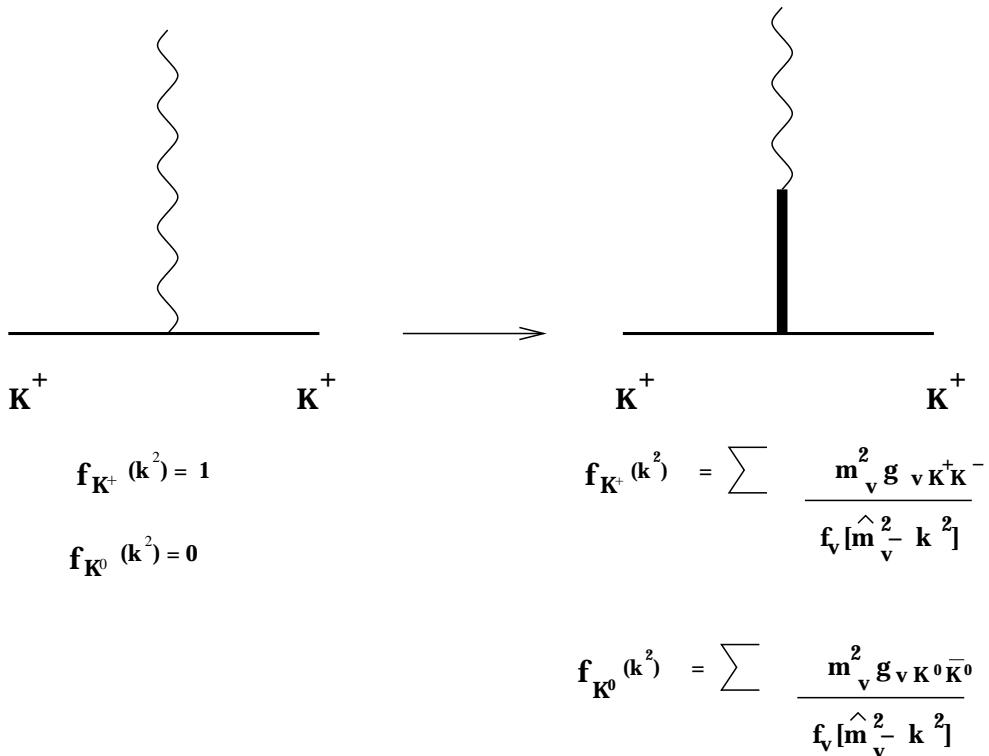


Figura 3.4: Vértice electromagnético para kaones puntuales (izquierda) y con estructura (derecha).

escribirse de manera que es posible separar la contribución puntual de la dependiente de la estructura de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 f_{K^+}(k) &= \sum \frac{m_V^2 g_{VKK}(-1)}{f_V(k^2 - \hat{m}_{V\theta}^2)} \\
 &= 1 + \left\{ \sum \frac{m_V^2 g_{VKK}(-1)}{f_V(k^2 - \hat{m}_{V\theta}^2)} - 1 \right\} \\
 &= 1 + \sum \frac{g_{VKK}}{f_V} \left[ \frac{k^2}{-k^2 + \hat{m}_{V\theta}^2} - i \frac{m_V \Gamma_V \theta(k^2 - k_{\text{threshold}}^2)}{k^2 - \hat{m}_{V\theta}^2} \right], \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

donde se ha definido  $\hat{m}_{V\theta}^2 = m_V^2 - i m_V \Gamma_V \theta(k^2 - k_{\text{threshold}}^2)$ .

Para evaluar las amplitudes a un lazo, omitiremos en nuestra aproximación la función de Heaviside y tomamos las anchuras como constantes, por lo que el factor de forma puede ser dividido en 2 partes

$$\begin{aligned}
 f_{K^+}(k) &= \left[ 1 - \sum \frac{T_{VKK} k^2}{k^2 - \hat{m}_V^2} \right] - i \sum \frac{T_{VKK} m_V \Gamma_V}{k^2 - \hat{m}_V^2}, \\
 T_{VKK} &= \frac{g_{VKK}}{f_V}, \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

donde ahora la masa es  $\hat{m}_V^2 = m_V^2 - i m_V \Gamma_V$ . Para satisfacer la condición de normalización  $f_{K^+}(k^2 = 0) = 1$ , omitimos la contribución de la parte imaginaria de la ecuación anterior y en esta aproximación solo tomamos el primer término:

$$f_{K^+}(k) = 1 - \sum \frac{T_{VKK} k^2}{k^2 - \hat{m}_V^2}. \quad (3.36)$$

Una forma sencilla de obtener las amplitudes con contribución VDM consiste en tomar las amplitudes del caso de kaones puntuales revisadas en la sección anterior y colocar el factor de forma correspondiente dado por la relación anterior. Así, la amplitud para el diagrama a) de la fig(3.5) es:

$$\mathcal{M}_1^{VDM} = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [(2p + k) \cdot \eta(P, s)] [f_{K^+}(k)]^2 \left[ \frac{2e^2 g_{\phi K^+ K^-}}{k^2 [(p + k)^2 - m_{K^+}^2]} \right]. \quad (3.37)$$

En el límite  $f_{K^+} \rightarrow 1$  obtenemos de manera inmediata la interacción puntual. Desarrollando el cuadrado del factor de forma, podremos separar la contribución de kaones puntuales del

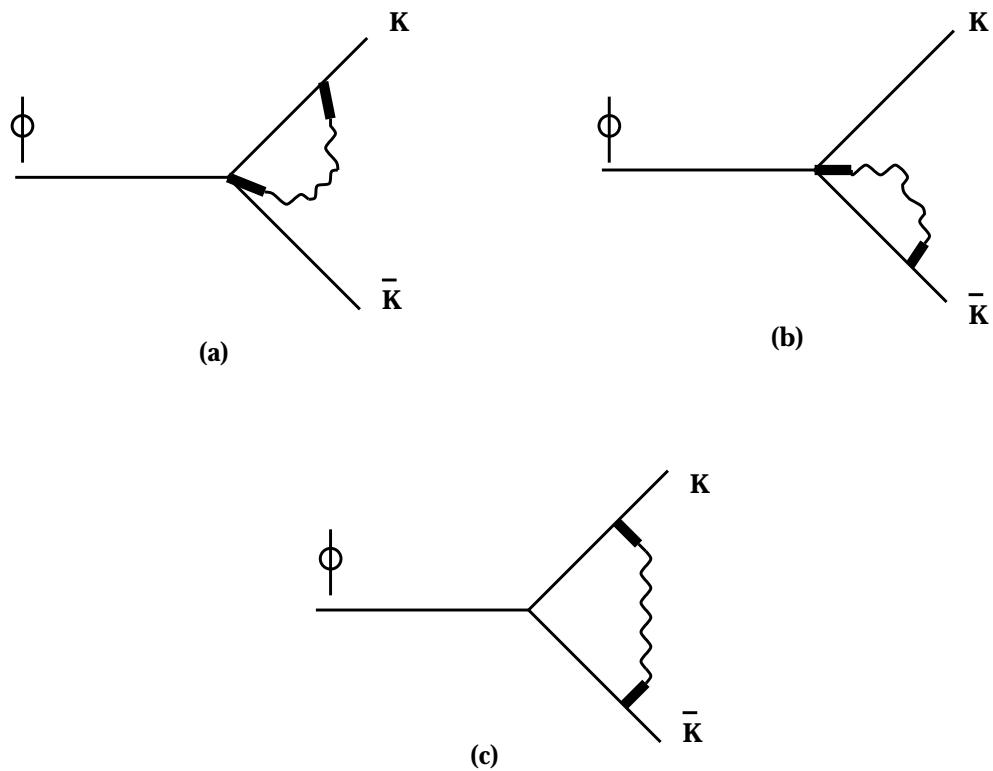


Figura 3.5: Correcciones virtuales para kaones con estructura.

resto

$$[f_{K^+}(k)]^2 = 1 + 2 \sum \frac{g_{V\bar{K}\bar{K}}}{f_V} \frac{k^2}{-k^2 + m_V^2} + \sum_{V^i} \sum_{V^j} \frac{g_{V^i\bar{K}\bar{K}} g_{V^j\bar{K}\bar{K}}}{f_{V^i} f_{V^j}} \frac{k^4}{[-k^2 + \hat{m}_{V^i}^2] [-k^2 + \hat{m}_{V^j}^2]} .$$

Introduciendo el desarrollo del factor de forma en (3.37)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^{VDM} &= - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [(2p+k) \cdot \eta(P, s)] \left[ \frac{2e^2 g_{\phi K^+ K^-}}{k^2 [(p+k)^2 - m_{K^+}^2]} \right] \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [(2p+k) \cdot \eta(P, s)] \left[ 2 \sum \frac{g_{V\bar{K}\bar{K}}}{f_V [-k^2 + \hat{m}_V^2]} \right] \left[ \frac{2e^2 g_{\phi K^+ K^-}}{[(p+k)^2 - m_{K^+}^2]} \right] \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [(2p+k) \cdot \eta(P, s)] \left[ \sum_i \sum_j \frac{(g_{V^i\bar{K}\bar{K}} g_{V^j\bar{K}\bar{K}}) k^2}{f_{V^i} f_{V^j} [-k^2 + \hat{m}_{V^i}^2] [-k^2 + \hat{m}_{V^j}^2]} \right] * \\ &\quad * \left[ \frac{2e^2 g_{\phi K^+ K^-}}{[(p+k)^2 - m_{K^+}^2]} \right] \\ &= \mathcal{M}_1^0 + \mathcal{M}_1^a + \mathcal{M}_1^b . \end{aligned} \quad (3.38)$$

El primer término  $\mathcal{M}_1^0$  corresponde al caso de kaones puntuales ya revisado en la sección anterior, el segundo y tercer término son las nuevas contribuciones. La primera de ellas es:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^a &= 2e^2 g_{\phi K^+ K^-} \sum 2 \frac{g_{V\bar{K}\bar{K}}}{f_K} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{(2p+k) \cdot \eta(P, s) dk^4}{[(p+k)^2 - m_{K^+}^2] [k^2 - \hat{m}_V^2]} \\ &= ig_{\phi K^+ K^-} (p \cdot \eta(P, s)) \frac{\alpha}{4\pi} \sum 2 \frac{g_{V\bar{K}\bar{K}}}{f_V} [3\Delta_{UV} + f(m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2)] . \end{aligned} \quad (3.39)$$

En la ecuación anterior se ha definido la función finita ultravioleta, expresada en términos de funciones Passarino-Veltman:

$$\begin{aligned} f(m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2) &= \left[ 1 - \frac{\hat{m}_V^2}{m_{K^+}^2} \right] [B0[m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2] - B0[0, m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2]] \\ &\quad + 3\bar{B}0[m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2] . \end{aligned}$$

La función  $\bar{B}0$  es finita debido a que la divergencia ultravioleta se ha extraído y se escribe explícitamente con el fin de mostrar la cancelación al sumar las amplitudes y los diagramas de auto-energía.

$$\Delta_{UV} = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln[4\pi] - \ln \left[ \frac{m_{K^+}^2}{\mu^2} \right] .$$

La otra parte de la amplitud de la ec.(3.38) se obtiene dividiendo en diferentes piezas el integrando y usando fracciones parciales

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_1^b &= -2e^2 g_{\phi K^+ K^-} \sum_i \sum_j \frac{g_{V^i K \bar{K}}}{f_{V^i}} \frac{g_{V^j K \bar{K}}}{f_{V^j}} \left[ \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{[(2p+k) \cdot \eta(P, s)] dk^4}{[(p+k)^2 - m_{K^+}^2] [k^2 - \hat{m}_{V^i}^2]} \right. \\
 &\quad \left. + \hat{m}_{V^i}^2 \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{[(2p+k) \cdot \eta(P, s)] dk^4}{[(p+k)^2 - m_{K^+}^2] [k^2 - \hat{m}_{V^i}^2] [k^2 - \hat{m}_{V^j}^2]} \right] \\
 &= -ig_{\phi K^+ K^-} (p \cdot \eta(P, s)) \frac{\alpha}{4\pi} \left[ \sum_i \sum_j \frac{g_{V^i K \bar{K}}}{f_{V^i}} \frac{g_{V^j K \bar{K}}}{f_{V^j}} [3\Delta_{UV} + f(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2)] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=j} \frac{g_{V^i K \bar{K}}^2}{f_{V^i}^2} \hat{m}_{V^i}^2 \bar{C}0 [0, m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2, \hat{m}_{V^i}^2, m_{K^+}^2] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i \neq j} \sum \frac{g_{V^i K \bar{K}}}{f_{V^i}} \frac{g_{V^j K \bar{K}}}{f_{V^j}} \frac{\hat{m}_{V^i}^2}{\hat{m}_{V^i}^2 - \hat{m}_{V^j}^2} [f(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2) - f(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^j}^2)] \right], \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

donde se ha definido la función:

$$\begin{aligned}
 \bar{C}0 [0, m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2, \hat{m}_{V^i}^2, m_{K^+}^2] &= \bar{C}0^i \\
 &= -2 \int_0^1 \frac{z(1+z) dz}{\hat{m}_{V^i}^2 z + m_{K^+}^2 (1-z)^2}. \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

El procedimiento para calcular la amplitud del diagrama b) de la Fig(3.5) se efectúa de forma similar,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_2^{VDM} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [(2q+k) \cdot \eta(P, s)] \left[ \frac{2e^2 g_{\phi K^+ K^-}}{k^2 [(q+k)^2 - m_{K^+}^2]} \right] \\
 &\quad + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [(2q+k) \cdot \eta(P, s)] \left[ 2 \sum_i \frac{g_{V^i K \bar{K}}}{f_{V^i} [-k^2 + \hat{m}_{V^i}^2]} \right] \left[ \frac{2e^2 g_{\phi K^+ K^-}}{[(q+k)^2 - m_{K^+}^2]} \right] \\
 &\quad + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [(2q+k) \cdot \eta(P, s)] \left[ \sum_{V_i} \sum_{V_j} \frac{(g_{V_i K \bar{K}} g_{V_j K \bar{K}}) k^2}{f_{V_i} f_{V_j} [-k^2 + \hat{m}_{V_i}^2] [-k^2 + \hat{m}_{V_j}^2]} \right] * \\
 &\quad * \left[ \frac{2e^2 g_{\phi K^+ K^-}}{[(q+k)^2 - m_{K^+}^2]} \right] \\
 &= \mathcal{M}_2^0 + \mathcal{M}_2^a + \mathcal{M}_2^b. \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

Sumando el resultado de (3.38) y (3.42) se obtiene la expresión siguiente:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{1+2}^{VDM} = & -\mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} [3\bar{B}0 [m_{K^+}^2, 0, m_{K^+}^2] + 1 - 2 \sum \frac{g_{V\bar{K}}}{f_V} f(m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2) \\
 & + \sum_i \sum_j \frac{g_{V^i\bar{K}} g_{V^j\bar{K}}}{f_{V^i} f_{V^j}} [f(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2)] \\
 & + \sum_{i \neq j} \sum_j \frac{\hat{m}_{V^i}^2 g_{V^i\bar{K}} g_{V^j\bar{K}}}{f_{V^i} f_{V^j} [\hat{m}_{V^i}^2 - \hat{m}_{V^j}^2]} [f(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2) - f(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^j}^2)] \\
 & + \sum_i \frac{g_{V^i}^2}{f_{V^i}^2} \hat{m}_{V^i}^2 C0 [0, m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2, \hat{m}_{V^i}^2, m_{K^+}^2]] \\
 & - \mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \left[ 3\Delta_{UV} \left[ 1 - 2 \sum \frac{g_{V\bar{K}}}{f_V} + \sum_i \sum_j \frac{g_{V^i\bar{K}} g_{V^j\bar{K}}}{f_{V^i} f_{V^j}} \right] \right]. \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

El último diagrama que representa agregar el factor de forma a la interacción de Coulomb, diagrama c) de la fig.(3.5), tiene la amplitud:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_3^{VDM} = & - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [(p - q - 2k) \cdot \eta(P, s)] [f_{K^+}(k)]^2 [(2p - k) \cdot (2q + k)] * \\
 & * \left[ \frac{g_{\phi K^+ K^-} e^2}{k^2 [(q + k)^2 - m_{K^+}^2] [(p - k)^2 - m_{K^+}^2]} \right] \\
 = & - \frac{g_{\phi K^+ K^-} e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{(2p - k) \cdot (2q + k) [(p - q - 2k) \cdot \eta(P, s)] dk^4}{k^2 [(p - k)^2 - m_{K^+}^2] [(q + k)^2 - m_{K^+}^2]} \\
 & + 2 \sum_V \frac{g_{V\bar{K}}}{f_V} g_{\phi K^+ K^-} e^2 \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{(2p - k) \cdot (2q + k) [(p - q - 2k) \cdot \eta(P, s)] dk^4}{[(p - k)^2 - m_{K^+}^2] [(q + k)^2 - m_{K^+}^2] [k^2 - \hat{m}_V^2]} \\
 & + \mathcal{M}_{3,r}^{VDM}, \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

donde se ha usado la siguiente notación para simplificar el resultado:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{3,r}^{VDM} = & -g_{\phi K^+ K^-} e^2 \sum_i \sum_j \frac{g_{V^i\bar{K}} g_{V^j\bar{K}}}{f_{V^i} f_{V^j}} \frac{1}{(2\pi)^4} \int (2p - k) \cdot (2q + k) \\
 & \times \frac{[k^2 (p - q - 2k) \cdot \eta(P, s)] d^4 k}{[(p - k)^2 - m_{K^+}^2] [(q + k)^2 - m_{K^+}^2] [k^2 - \hat{m}_{V^i}^2] [k^2 - \hat{m}_{V^j}^2]}.
 \end{aligned}$$

Si definimos la siguiente función con (para  $M = m_\phi$ ),

$$\bar{C}0_c^i [m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, M^2, m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2] = \int_0^1 \int_0^x \frac{(x + 1) dy dx}{[\hat{m}_{V^i}^2 (x - 1) - (m_{K^+}^2 x^2 + M^2 y^2 + x y M^2)]}, \quad$$

el resultado de la integración del segundo término de (3.44) es:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{3a}^{VDM} = & \ i g_{\phi K^+ K^-} (p - q) \cdot \eta(P, s) \frac{\alpha}{4\pi} \sum_V 2 \frac{g_{V K \bar{K}}}{f_V} \left[ -\bar{B}0 \left[ m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2 \right] \right. \\
 & \left[ 2(M^2 - 2m_{K^+}^2) + \hat{m}_V^2 \right] \bar{C}0_c^i \left[ m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, M^2, m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2 \right] \\
 & + \left( 1 - \frac{\hat{m}_V^2}{m_{K^+}^2} \right) (B0 \left[ 0, m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2 \right] - B0 \left[ m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2 \right]) \\
 & \left. - \mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \left[ \sum \frac{2g_{V K \bar{K}}}{f_K} \right] \Delta_{UV} \right]. \tag{3.45}
 \end{aligned}$$

El tercer término  $\mathcal{M}_{3r}^{VDM}$  se divide en dos partes para su cálculo, que corresponden a los casos cuando los índices de las sumatorias son iguales y cuando son diferentes,

$$\mathcal{M}_{3r}^{VDM} = \mathcal{C}_{i=j} + \mathcal{C}_{i \neq j}. \tag{3.46}$$

Con la definición de las siguientes funciones,

$$\begin{aligned}
 \bar{D}0_c^i &= \bar{D}0_c(\hat{m}_{V^i}^2, m_{K^+}^2, M^2) \\
 &= \int_0^1 \int_0^x \frac{y^2 dx dy}{\left[ \hat{m}_{V^i}^2 y + m_{K^+}^2 (x-1)^2 + m_{K^+}^2 (x-y)^2 + (x-1)(x-y) [M^2 - 2m_{K^+}^2] \right]^2} \\
 \bar{C}0_0^i &= \bar{C}0_0(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2) \\
 &= \int_0^1 \frac{-2z^2 dz}{\left[ \hat{m}_{V^i}^2 z + m_{K^+}^2 (1-z)^2 \right]},
 \end{aligned}$$

el resultado de la integración en el caso de índices iguales es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{i=j} = & -\mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \sum_{i=j} \frac{g_{V^i K \bar{K}}^2}{f_{V^i}^2} \left[ 2 \left[ 2p \cdot q + \hat{m}_{V^i}^2 \right] \bar{C}0_c^i - \hat{m}_{V^i}^2 \bar{C}0_0^i + \hat{m}_{V^i}^2 \left[ 4p \cdot q + \hat{m}_{V^i}^2 \right] \bar{D}0_c^i \right. \\
 & + \left( 1 - \frac{\hat{m}_{V^i}^2}{m_{K^+}^2} \right) \left[ B0 \left[ 0, m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2 \right] - B0 \left[ m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2 \right] \right] - \bar{B}0 \left[ m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2 \right] \\
 & \left. + M_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \left[ \sum_{i=j} \frac{g_{V^i K \bar{K}}^2}{f_{V^i}^2} \right] \Delta_{UV} \right]. \tag{3.47}
 \end{aligned}$$

El otro caso ( $i \neq j$ ) se simplifica al tomar en cuenta la descomposición siguiente:

$$\frac{1}{[k^2 - \hat{m}_{V^i}^2] [k^2 - \hat{m}_{V^j}^2]} = \frac{1}{[\hat{m}_{V^i}^2 - \hat{m}_{V^j}^2]} \left[ \frac{1}{[k^2 - \hat{m}_{V^i}^2]} - \frac{1}{[k^2 - \hat{m}_{V^j}^2]} \right].$$

La relación anterior permite escribir  $\mathcal{C}_{i \neq j}$  de la forma simplificada

$$\mathcal{C}_{i \neq j} = -g_{\phi K^+ K^-} e^2 \sum_{i \neq j} \sum_j \frac{g_{V^i K \bar{K}} g_{V^j K \bar{K}}}{f_{V^i} f_{V^j}} \frac{1}{[\hat{m}_{V^i}^2 - \hat{m}_{V^j}^2]} [A_i - A_j] . \quad (3.48)$$

Las integrales relevantes ya han sido calculadas anteriormente y algunas no son necesarias de evaluar, pues se cancelan en la diferencia  $A_i - A_j$ .

$$A_i = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{[(p - q - 2k) \cdot \eta] [(2p - k)(2q + k)] k^2 dk^4}{[(p - k)^2 - m_{K^+}^2] [(q + k)^2 - m_{K^+}^2] [k^2 - \hat{m}_{V^i}^2]} .$$

El resultado para índices diferentes es:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{i \neq j} = & -\mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \sum_{i \neq j} \sum_j \frac{g_{V^i K \bar{K}} g_{V^j K \bar{K}}}{f_{V^i} f_{V^j} [\hat{m}_{V^i}^2 - \hat{m}_{V^j}^2]} [4p \cdot q [\bar{C}0_c^i \hat{m}_{V^i}^2 - \bar{C}0_c^j \hat{m}_{V^j}^2] \\ & + \hat{m}_{V^i}^4 \bar{C}0_c^i - \hat{m}_{V^j}^4 \bar{C}0_c^j + \hat{m}_{V^i}^2 g(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2) - \hat{m}_{V^j}^2 g(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^j}^2)] \\ & + M_\phi^0 \times \left[ \sum_{i \neq j} \sum_j \frac{g_{V^i K \bar{K}} g_{V^j K \bar{K}}}{f_{V^i} f_{V^j}} \right] \Delta_{UV} , \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde se ha definido la función finita ultravioleta  $g(m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2)$  como:

$$\begin{aligned} g(m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2) = & (1 - \frac{\hat{m}_V^2}{m_{K^+}^2}) [B0 [0, m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2] - B0 [m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2]] \\ & - \bar{B}0 [m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2] . \end{aligned} \quad (3.50)$$

Sumando (3.43), (3.44) y la contribución de los diagramas de autoenergía <sup>5</sup> obtenemos la

---

<sup>5</sup>Ver el Apéndice A

amplitud total:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}^T &= \mathcal{M}_{point} \\
 &+ \mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \left[ 2 \sum_V \frac{g_{VK^+K^-}}{f_V} \{ 2B0 [m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2] + (2m_\phi^2 - 4m_{K^+}^2 + \hat{m}_V^2) \bar{C}0_c^i \} \right. \\
 &+ \sum_{i=j} \frac{g_{VK^+K^-}^2}{f_V^2} \left[ -f(m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2) - \hat{m}_V^2 \bar{C}0^i + \hat{m}_V^2 \bar{C}0_0^i - 2(2p \cdot q + \hat{m}_V^2) \bar{C}0_c^i \right. \\
 &- \hat{m}_V^2 (\hat{m}_V^2 + 2m_\phi^2 - 4m_{K^+}^2) \bar{D}0_c^i - g(m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2) \left. \right] \\
 &+ \sum_{i \neq j} \frac{g_{ViK^+K^-} - g_{VjK^+K^-}}{f_{Vi} f_{Vj}} \left[ \frac{1}{[\hat{m}_{Vi}^2 - \hat{m}_{Vj}^2]} \left[ \hat{m}_{Vi}^2 \{ f(m_{K^+}^2, \hat{m}_{Vi}^2) - f(m_{K^+}^2, \hat{m}_{Vj}^2) \} \right. \right. \\
 &- (2m_\phi^2 - 4m_{K^+}^2) [\hat{m}_{Vi}^2 \bar{C}0_c^i - \hat{m}_{Vj}^2 \bar{C}0_c^j] - \hat{m}_{Vi}^4 \bar{C}0_c^i + \hat{m}_{Vj}^4 \bar{C}0_c^j \\
 &\left. \left. - \hat{m}_{Vi}^2 g(m_{K^+}^2, \hat{m}_{Vi}^2) + \hat{m}_{Vj}^2 g(m_{K^+}^2, \hat{m}_{Vj}^2) \right] - f(m_{K^+}^2, \hat{m}_{Vj}^2) \right] , \tag{3.51}
 \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{M}_{point}$  es la amplitud en el caso puntual. En efecto, la amplitud total se divide en dos partes  $\mathcal{M}^T = \mathcal{M}_{point} + \mathcal{M}^{VDM}$ . La contribución de la amplitud para kaones puntuales ha sido evaluada en la anterior sección, por lo que ahora nos interesa evaluar la contribución contenida en  $\mathcal{M}^{VDM}$ .

Separando la contribución de cada mesón vectorial y evaluando numéricamente usando masas reales<sup>6</sup> de los mesones vectoriales obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}^{VDM} &= \mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \left[ 4.3459 \left[ \frac{g_{\rho K^+ K^-}}{f_\rho^2} \right]^2 + 5.8444 \left[ \frac{g_{\phi K^+ K^-}}{f_\phi} \right]^2 + 4.3917 \left[ \frac{g_{\omega K^+ K^-}}{f_\omega} \right]^2 \right. \\
 &+ 10.2421 \frac{g_{\rho K^+ K^-} g_{\phi K^+ K^-}}{f_\rho f_\phi} + 9.0343 \frac{g_{\rho K^+ K^-} g_{\omega K^+ K^-}}{f_\rho f_\omega} + 10.2721 \frac{g_{\phi K^+ K^-} g_{\omega K^+ K^-}}{f_\phi f_\omega} \\
 &\left. - 6.2674 \frac{g_{\rho K^+ K^-}}{f_\rho} - 6.3152 \frac{g_{\omega K^+ K^-}}{f_\omega} - 7.9403 \frac{g_{\phi K^+ K^-}}{f_\phi} \right] . \tag{3.52}
 \end{aligned}$$

Para terminar la evaluación numérica es necesario introducir los valores de las constantes de acoplamiento. La densidad Lagrangiana invariante bajo SU(3) que modela la interacción entre mesones vectoriales, nos permite obtener las relaciones entre las constantes de

---

<sup>6</sup>Al final de la sección mostramos que la diferencia entre usar masas reales y el resultado de usar  $m_V^2 = m_V^2 - \imath m_V \Gamma_V$  es despreciable en el resultado total

acoplamiento (ver [64]):

$$\begin{aligned}
 g_{\rho K^+ K^-} &= -g_{\rho K^0 \bar{K}^0} = \frac{1}{2} G_{VP_1 P_2}^8, \\
 g_{\omega K^+ K^-} &= g_{\omega K^0 \bar{K}^0} = \frac{\sqrt{3}}{2} G_{VP_1 P_2}^8 \sin \theta_v, \\
 g_{\phi K^+ K^-} &= g_{\phi K^0 \bar{K}^0} = \frac{\sqrt{3}}{2} G_{VP_1 P_2}^8 \cos \theta_v.
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Las condiciones de normalización para los factores de forma de los kaones cargado y neutro

$$\begin{aligned}
 f_{K^+}(0) &= \frac{g_{\rho K^+ K^-}}{f_\rho} + \frac{g_{\omega K^+ K^-}}{f_\omega} + \frac{g_{\phi K^+ K^-}}{f_\phi} = 1, \\
 f_{K^0}(0) &= \frac{g_{\rho K^0 \bar{K}^0}}{f_\rho} + \frac{g_{\omega K^0 \bar{K}^0}}{f_\omega} + \frac{g_{\phi K^0 \bar{K}^0}}{f_\phi} = 0,
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

proveen una restricción auxiliar en la determinación de las constantes de acoplamiento.

Asumiendo la mezcla ideal  $\phi - \omega$  ( $\tan \theta_v = 1/\sqrt{2}$  también usado en la ref. [8]) y las ecs. (3.53), (3.54) obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 g_{\phi K^+ K^-} &= \frac{f_\omega f_\phi}{\sqrt{2} [f_\phi + \sqrt{2} f_\omega]}, \\
 g_{\omega K^+ K^-} &= \frac{f_\omega f_\phi}{2 [f_\phi + \sqrt{2} f_\omega]}, \\
 \frac{g_{\rho K^+ K^-}}{f_\rho} &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Los valores de  $f_\omega, f_\phi$  los extraemos de los resultados experimentales reportados en el PDG[3], mediante la relación:

$$\begin{aligned}
 f_\phi &= 2\alpha \sqrt{\frac{\pi}{3} \frac{m_\phi}{\Gamma_{\phi \rightarrow e^+ e^-}} (1 + \frac{2m_e^2}{m_\phi^2}) (1 - \frac{4m_e^2}{m_\phi^2})^{1/2}}, \\
 f_\omega &= 2\alpha \sqrt{\frac{\pi}{3} \frac{m_\omega}{\Gamma_{\omega \rightarrow e^+ e^-}} (1 + \frac{2m_e^2}{m_\omega^2}) (1 - \frac{4m_e^2}{m_\omega^2})^{1/2}}.
 \end{aligned}$$

Una vez especificados todos los parámetros, la contribución VDM a la corrección virtual

es:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{VDM} &= \mathcal{M}_\phi^0 \times [-1.13 \times 10^{-3}] \\ &= \mathcal{M}_\phi^0 \times \delta_+^{VDM}\end{aligned}\quad (3.55)$$

Para obtener la modificación a la anchura de decaimiento debido a la corrección virtual de VDM se emplea la ecuación:

$$\Gamma_{\phi \rightarrow (+,0)} = \Gamma_{\phi \rightarrow (+,0)}^0 \left[ 1 + 2\text{Re} \left[ \delta_{+,0}^{\text{point}} \right] + 2\text{Re} [\delta_{+,0}^{\text{VDM}}] \right]$$

donde las cantidades etiquetadas con + (0) corresponde al caso de Kaones cargados (neutros) en el estado final.

### 3.3.2. Correcciones virtuales en VDM para kaones neutros

La evidencia experimental de estructura de los kaones neutros [65] nos lleva a considerar, en esta aproximación, el cálculo a 1 lazo en el decaimiento  $\phi \rightarrow K^0 \bar{K}^0$ . De forma paralela a la sección anterior, el factor de forma en el contexto de VDM para kaones neutros se escribe como:

$$f_{K^0} = \sum \frac{(-1)m_V^2 g_{VK^0\bar{K}^0}}{f_V [k^2 - \hat{m}_V^2]} \quad (3.56)$$

Debido a que la carga de los kaones neutros es cero ( $f_{K^0}(0) = 0$ ), las constantes de acoplamiento satisfacen la condición de normalización:

$$\sum \frac{g_{VK^0\bar{K}^0}}{f_V} = 0$$

Usando la misma aproximación que en el modo cargado, la expresión para el factor de forma se escribe como:

$$\begin{aligned}
 f_{K^0} &= \sum \frac{(-1)m_V^2 g_{VK^0\bar{K}^0}}{f_V [k^2 - \hat{m}_V^2]} - 0 \\
 &= \sum \frac{(-1)m_V^2 g_{VK^0\bar{K}^0}}{f_V [k^2 - \hat{m}_V^2]} - \sum \frac{g_{VK^0\bar{K}^0}}{f_V} \\
 &= \sum \frac{g_{VK^0\bar{K}^0}}{f_V} \left[ -\frac{m_V^2}{k^2 - \hat{m}_V^2} - 1 \right] \\
 &\simeq \sum \frac{g_{VK^0\bar{K}^0}}{f_V} \left[ \frac{-k^2}{k^2 - \hat{m}_V^2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Para obtener las correcciones radiativas para este modo, se usa la ec.(3.57) en las amplitudes de los diagramas de la fig(3.5). La contribución de los diagramas a) y b) es <sup>7</sup>:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{M}}_{VDM}^{1+2} &= \mathcal{M}_{\phi K^0 \bar{K}^0}^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \left[ \sum_{i=j} G_{V^i}^2 \left[ -f(m_{K^0}^2, \hat{m}_V^2) - \hat{m}_V^2 \bar{C}0^i \right] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i \neq j} \sum_j G_{V^i} G_{V^j} \left[ -f(m_{K^0}^2, \hat{m}_{V^j}^2) - \frac{\hat{m}_{V^i}^2}{\hat{m}_{V^i}^2 - \hat{m}_{V^j}^2} \{f(m_{K^0}^2, \hat{m}_{V^i}^2) - f(m_{K^0}^2, \hat{m}_{V^j}^2)\} \right] \right]
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

donde  $\mathcal{M}_{\phi K^0 \bar{K}^0}^0 = ig_{\phi K^0 \bar{K}^0}(p - q) \cdot \eta$ . Las funciones  $(f(m_{K^0}^2, \hat{m}_{V^i}^2), \bar{C}0^i, g(m_{K^0}^2, \hat{m}_{V^i}^2) \dots)$  son las mismas que las que se usaron en la sección anterior, solo que ahora se usa la masa del kaon neutro, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 f(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^j}^2) &\rightarrow f(m_{K^0}^2, \hat{m}_{V^j}^2) , \\
 g(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2) &\rightarrow g(m_{K^0}^2, \hat{m}_{V^i}^2) .
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

---

<sup>7</sup>Definimos la notación  $G_{V^i} = g_{V^i K^0 \bar{K}^0} / f_{V^i}$

La contribución del diagrama c) de la fig.(3.5) es:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}_{VDM}^3 &= \mathcal{M}_{\phi K^0 \bar{K}^0}^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \left[ \sum_{i=j} G_{V^i}^2 \left[ -2(m_\phi^2 - 2m_{K^0}^2 + \hat{m}_V^2) \bar{C}0_c^i - \hat{m}_{V^i}^2 (2m_\phi^2 - 4m_{K^0}^2 + \hat{m}_V^2) \bar{D}0_c^i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{m}_{V^i}^2 \bar{C}0_0^i - g(m_{K^0}^2, \hat{m}_{V^i}^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \neq j} \sum_j \frac{G_{V^i} G_{V^j}}{\hat{m}_{V^i}^2 - \hat{m}_{V^j}^2} \left[ -\hat{m}_{V^i}^2 \left[ (2m_\phi^2 - 4m_{K^0}^2 + \hat{m}_{V^i}^2) \bar{C}0_c^i + g(m_{K^0}^2, \hat{m}_{V^i}^2) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{m}_{V^j}^2 \left[ (2m_\phi^2 - 4m_{K^0}^2 + \hat{m}_{V^j}^2) \bar{C}0_c^j + g(m_{K^0}^2, \hat{m}_{V^j}^2) \right] \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Finalmente, la contribución total de la corrección radiativa con el factor de forma para los kaones neutros es:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}_{VDM}^T &= \mathcal{M}_{\phi K^0 \bar{K}^0}^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \left[ \sum_{i=j} G_{V^i}^2 \left[ -f(m_{K^0}^2, \hat{m}_V^2) - \hat{m}_V^2 \bar{C}0^i - 2(m_\phi^2 - 2m_{K^0}^2 + \hat{m}_{V^i}^2) \bar{C}0_c^i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \hat{m}_{V^i}^2 (2m_\phi^2 - 4m_{K^0}^2 + \hat{m}_{V^i}^2) \bar{D}0_c^i + \hat{m}_{V^i}^2 \bar{C}0_0^i - g(m_{K^0}^2, \hat{m}_{V^i}^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \neq j} \sum_j G_{V^i} G_{V^j} \left[ \frac{1}{\hat{m}_{V^i}^2 - \hat{m}_{V^j}^2} \left[ -\hat{m}_{V^i}^2 \{ (2m_\phi^2 - 4m_{K^0}^2 + \hat{m}_{V^i}^2) \bar{C}0_c^i + g(m_{K^0}^2, \hat{m}_{V^i}^2) \} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \hat{m}_{V^j}^2 \{ (2m_\phi^2 - 4m_{K^0}^2 + \hat{m}_{V^j}^2) \bar{C}0_c^j + g(m_{K^0}^2, \hat{m}_{V^j}^2) \} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \hat{m}_{V^i}^2 \{ f(m_{K^0}^2, \hat{m}_{V^i}^2) - f(m_{K^0}^2, \hat{m}_{V^j}^2) \} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - f(m_{K^0}^2, \hat{m}_{V^j}^2) \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.61)$$

El resultado de la contribución de las correcciones virtuales con factor de forma del kaon neutro son finitas una vez que se ha agregado la contribución de las amplitudes de auto-energía. La evaluación numérica de las funciones escalares da el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}_{VDM} &= \mathcal{M}_{\phi K^0 \bar{K}^0}^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \left[ 5.8064 \left[ \frac{g_{\phi K^0 \bar{K}^0}^0}{f_\phi} \right]^2 + 4.3177 \left[ \frac{g_{\rho K^0 \bar{K}^0}^0}{f_\rho} \right]^2 + 4.3632 \left[ \frac{g_{\omega K^0 \bar{K}^0}^0}{f_\omega} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + 10.1499 \frac{g_{\rho K^0 \bar{K}^0}^0 g_{\phi K^0 \bar{K}^0}^0}{f_\rho f_\phi} + 10.1799 \frac{g_{\omega K^0 \bar{K}^0}^0 g_{\phi K^0 \bar{K}^0}^0}{f_\omega f_\phi} + 8.9400 \frac{g_{\rho K^0 \bar{K}^0}^0 g_{\omega K^0 \bar{K}^0}^0}{f_\rho f_\omega} \right] \\ &= \mathcal{M}_{\phi K^0 \bar{K}^0}^0 \times [-1.55 \times 10^{-5}] = \mathcal{M}_{\phi K^0 \bar{K}^0}^0 \times \delta_0^{VDM}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

donde el resultado numérico de la última línea se obtiene, al igual que en la sección anterior, usando las relaciones de SU(3). Usando los valores numéricos para las ecs.(3.55), (3.62) la

predicción para la razón  $\mathcal{R}$  incluyendo efectos de factores de forma de kaones cargados como neutros es,[66]:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\phi^t &= \frac{v_{\phi,+}^3}{v_{\phi,0}^3} [1 + \delta_{QED} + 2\text{Re} [\delta_+^{VDM} - \delta_0^{VDM}]] \\ &= 1.58488 .\end{aligned}\quad (3.63)$$

Si usamos las masas complejas  $\hat{m}_V^2 = m_V^2 - im_V\Gamma_V$  en la ec.(3.62) y ec.(3.52), el resultado que se obtiene es:

$$\mathcal{R}_\phi^t = 1.58490 .\quad (3.64)$$

el cuál es casi idéntico al resultado (3.63)

### 3.3.3. Región de validez del modelo de dominancia vectorial.

La pregunta inmediata es: ¿ qué tan válido es usar el factor de forma de los kaones en el cálculo a 1 lazo, pues están involucradas altas y bajas energías en el momento de los fotones?. Si fuera posible mostrar que la contribución principal de la estructura de los kaones en los loops proviene del régimen donde el modelo de dominancia vectorial es válido (abajo de 1~2 GeVs) podemos tener mas confianza en nuestros resultados de la sección anterior.

Para ello introducimos una versión modificada del propagador del fotón en la siguiente forma [54]:

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{k^2} \frac{\mu^2}{\mu^2 - k^2} ,\quad (3.65)$$

donde  $\mu$  es una escala de *corte* que separa las regiones de cortas y largas distancias. Nótese que cuando  $\mu^2 \rightarrow \infty$  la expresión anterior se reduce al propagador usual del fotón. En cierta manera, esta forma modificada del propagador del fotón recuerda el método de regularización de Pauli-Villars [67] donde al introducir el factor adicional ayuda a la convergencia de

la integral divergente. Por otra parte, dicho factor adicional en la ecuación anterior hace que las contribuciones cercanas a la región  $k^2 \approx \mu^2$  se vuelvan las más importantes.

De esta manera, el regulador extrae la contribución de VDM para energías no más allá de la escala  $\mu$ . Aunque no existen primeros principios para especificar la escala de dicha separación, mostramos al final de esta sección una gráfica que muestra el comportamiento del resultado para las correcciones radiativas en función del valor del corte. Lo que esperamos es que el resultado obtenido en el caso del modelo de dominancia vectorial se vuelva estable para escalas de energía donde el mismo tiene su validez. De manera ilustrativa solo calculamos la contribución VDM con corte para el caso de kaones cargados.

Ahora calcularemos la contribución de VDM usando el propagador modificado del fotón mostrado en la ecuación (3.65). Las correcciones virtuales correspondientes a los diagramas de las figuras (3.5a y 3.5b) se convierten en:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{1+2,\mu}^{vdm} = & -\mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \left[ -2 \sum \frac{g_{V K \bar{K}}}{f_V} \frac{1}{\left[ 1 - \frac{\hat{m}_V^2}{\mu^2} \right]} \left[ f(m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2) - f(m_{K^+}^2, \mu^2) \right] \right. \\
 & + \sum_i \sum_j \frac{g_{V^i K \bar{K}} g_{V^j K \bar{K}}}{f_{V^i} f_{V^j}} \frac{1}{\left[ 1 - \frac{\hat{m}_{V^j}^2}{\mu^2} \right]} \left[ f(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^j}^2) - f(m_{K^+}^2, \mu^2) \right] \\
 & \left. \sum_{i \neq j} \sum_j j \frac{g_{V^i K \bar{K}} g_{V^j K \bar{K}}}{f_{V^i} f_{V^j}} \frac{\hat{m}_{V^i}^2}{\left[ 1 - \frac{\hat{m}_{V^i}^2}{\mu^2} \right] \left[ \hat{m}_{V^i}^2 - \hat{m}_{V^j}^2 \right]} \left\{ f(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2) - f(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^j}^2) \right\} \right. \\
 & + \sum_i \sum_j \frac{g_{V^i K \bar{K}} g_{V^j K \bar{K}}}{f_{V^i} f_{V^j}} \frac{\hat{m}_{V^i}^2}{\left[ 1 - \frac{\hat{m}_{V^j}^2}{\mu^2} \right] \left[ \mu^2 - \hat{m}_{V^i}^2 \right]} \left\{ f(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2) - f(m_{K^+}^2, \mu^2) \right\} \\
 & \left. + \sum_{i=j} \frac{g_{V K \bar{K}}^2}{f_V^2} \frac{\hat{m}_V^2}{\left[ 1 - \frac{\hat{m}_V^2}{\mu^2} \right]} \bar{C}0 \left[ 0, m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2, \hat{m}_V^2, m_{K^+}^2 \right] \right] \quad (3.66)
 \end{aligned}$$

Para evaluar la contribución que contiene la interacción de Coulomb, dividimos la amplitud del diagrama fig.(3.5c) en dos términos:

$$\mathcal{M}_{Coulomb}^{vdm} = \mathcal{M}_{3a,\mu}^{vdm} + \mathcal{M}_{3r,\mu}^{vdm} \quad (3.67)$$

Una vez realizadas las integraciones, las expresiones explícitas para ambos términos de esta

amplitud son:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{3a,\mu}^{vdm} = & \mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \sum 2 \frac{g_{V\bar{K}\bar{K}}}{f_V} \frac{1}{1 - \frac{\hat{m}_V^2}{\mu^2}} \left[ (2M^2 - 4m_{K^+}^2 + \hat{m}_V^2) \bar{C}0_c + g(m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2) \right. \\
 & \left. - (2M^2 - 4m_{K^+}^2 + \mu^2) \bar{C}0_c(m_{K^+}^2, m_{V^i}^2, M^2, m_{K^+}^2, m_{V^i}^2, \mu^2) - g(m_{K^+}^2, \mu^2) \right] . \\
 (3.68)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{3r,\mu}^{vdm} = & -\mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} \left[ \sum_{i=j} \frac{g_{V^i\bar{K}\bar{K}}^2}{f_{V^i}^2} \frac{1}{1 - \frac{\hat{m}_{V^i}^2}{\mu^2}} \left[ 2 [2p \cdot q + \hat{m}_{V^i}^2] \bar{C}0_c^i - \hat{m}_{V^i}^2 \bar{C}0_0^i \right. \right. \\
 & + \hat{m}_{V^i}^2 [4p \cdot q + \hat{m}_{V^i}^2] \bar{D}0_c^i + g(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2)] \\
 & + \sum_{i \neq j} \sum_j \frac{g_{V^i\bar{K}\bar{K}} g_{V^j\bar{K}\bar{K}}}{f_{V^i} f_{V^j} [\hat{m}_{V^i}^2 - \hat{m}_{V^j}^2] \left[ 1 - \frac{\hat{m}_{V^i}^2}{\mu^2} \right]} \left[ 4p \cdot q [\bar{C}0_c^i \hat{m}_{V^i}^2 - \bar{C}0_c^j \hat{m}_{V^j}^2] \right. \\
 & + \hat{m}_{V^i}^4 \bar{C}0_c^i - \hat{m}_{V^j}^4 \bar{C}0_c^j + \hat{m}_{V^i}^2 g(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2) - \hat{m}_{V^j}^2 g(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^j}^2)] \\
 & + \sum_i \sum_j \frac{g_{V^i\bar{K}\bar{K}} g_{V^j\bar{K}\bar{K}}}{f_{V^i} f_{V^j} \left[ 1 - \frac{\hat{m}_{V^i}^2}{\mu^2} \right] \left[ 1 - \frac{\hat{m}_{V^j}^2}{\mu^2} \right]} \left[ \frac{\hat{m}_{V^j}^2}{\mu^2} [(4p \cdot q + \hat{m}_{V^j}^2) \bar{C}0_c^j \right. \\
 & \left. \left. + g(m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^j}^2)] - (4p \cdot q + \mu^2) \bar{C}0_c^\mu - g(m_{K^+}^2, \mu^2)] \right] \\
 (3.69)
 \end{aligned}$$

Definimos entonces las correcciones virtuales para kaones con estructura en presencia de un propagador modificado en el proceso  $\phi \rightarrow K^+ K^-$  de la siguiente forma:

$$\delta_{VDM}^+ = \mathcal{M}_{1+2,\mu}^{vdm} + \mathcal{M}_{Coulomb,\mu}^{vdm} \quad (3.70)$$

La gráfica (3.6) muestra el comportamiento de la corrección radiativa en función de la escala de energía  $\mu$ . Podemos observar que el resultado para la corrección radiativa alcanza su valor mostrado en la ecuación (3.55) para valores de la escala de energía del orden de 3GeV. Esto significa que la principal contribución a  $\delta_{VDM}^+$  se encuentra en la región de energía menor a 3 GeV, lo cual es consistente con el límite de validez del modelo de dominancia vectorial.

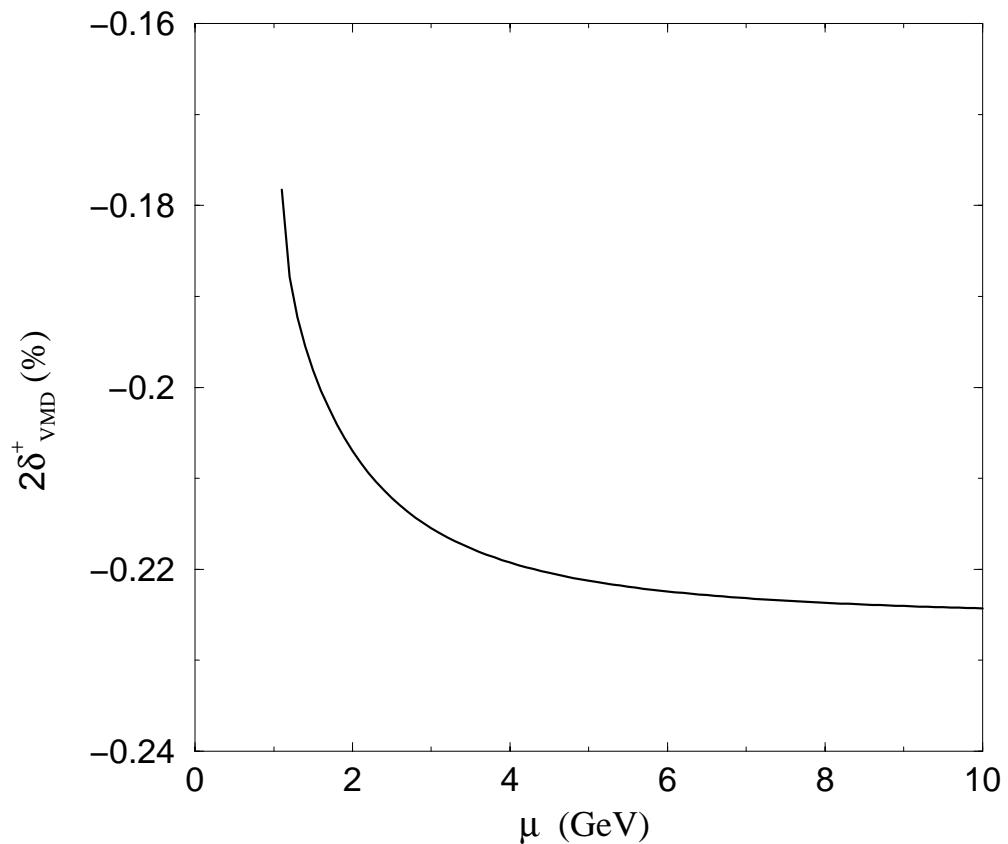


Figura 3.6: Corrección virtual  $2\delta_{VDM}^+$  al decaimiento  $\phi \rightarrow K^+K^-$  como función de la escala de corte  $\mu$ .

### 3.4. Resultado y Conclusiones

En este capítulo hemos revisado las correcciones de isospin a la razón  $\mathcal{R}_\phi = \Gamma(\phi(1020) \rightarrow K^+ K^-)/\Gamma(\phi(1020) \rightarrow K^0 \bar{K}^0)$ . Nuestro énfasis se ha puesto en el cálculo de las correcciones radiativas de orden  $\alpha$  y en particular, en la consideración de estructura electromagnética de los kaones, la cual ha sido modelada en el contexto de un modelo de dominancia vectorial. Hemos mostrado que la contribución de los efectos de estructura, extraídos de su región de validez mediante un corte que separa altas y bajas energías, coincide con la contribución obtenida sin esta escala de corte para valores del orden de  $\mu \approx 2 \sim 3$  GeVs.

La correcciones de isospin obtenidas una vez que se incluyen los efectos de la estructura kaones cargados y neutros es[66]:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_\phi^t &= \frac{v_{\phi,+}^3}{v_{\phi,0}^3} [1 + \delta_{QED} + 2 [\delta_{VDM}^+ - \delta_{VDM}^0]] \\
 &= 1.58490 \quad (\hat{m}_V^2 = m_V^2 - \imath m_V \Gamma_V) \\
 &= 1.58488 \quad (\hat{m}_V^2 = m_V^2) ,
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

lo cual indica que los efectos de la estructura son despreciables.

Nuestro cálculo confirma la discrepancia de alrededor de  $4.5\sigma$ s que existe entre la predicción teórica y el resultado experimental para la razón  $\phi \rightarrow K^+ K^- / K_L K_S$ . Por lo tanto, podemos inferir dos posibilidades en el marco usual de la teoría cuántica de campos: (i) que los efectos de estructura de los kaones a muy altas virtualidades del fotón tenga un comportamiento diferente al predicho por el modelo de dominancia vectorial, o (ii) que el resultado experimental sea incorrecto. Respecto a este último caso, es importante señalar que las fracciones de decaimiento usadas para obtener la razón mostrada en (3.1) se obtienen de un ajuste global al ancho de decaimiento del mesón  $\phi$  suponiendo que los modos principales saturan la razón de decaimiento total [3]. En vista de lo anterior, es importante contar con la extracción directa de las fracciones de decaimiento en un mismo experimento.



# Capítulo 4

## Correcciones radiativas a $\tau \rightarrow \pi\pi\nu$

En este capítulo describimos el cálculo de las correcciones radiativas electromagnéticas de orden  $\alpha$  al proceso  $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu$ . Estas correcciones son muy importantes cuando se desea comparar las predicciones teóricas para la fracción de decaimiento con las medidas experimentales con una precisión menor a 1~2 por ciento. También, estas correcciones son importante cuando se desea hacer una verificación de la hipótesis de corriente vectorial conservada (CVC) para los factores de forma débil y electromagnético del pion. Este último punto es de gran relevancia para entender la actual discrepancia entre las predicciones teóricas y la medida experimental del momento magnético anómalo del muón.

### 4.1. Introducción

El  $\tau$  es el único leptón que puede decaer en estados finales que contienen hadrones. Las actuales fábricas de mesones  $B$ , BABAR y BELLE, han acumulado del orden de  $10^9$  pares  $\tau^+\tau^-$  [68, 69] con los cuales se pueden estudiar en detalle algunos de los modos de decaimiento del  $\tau$ . Con esta alta estadística se están mejorando las determinaciones de algunos modos suprimidos de decaimiento, otros se están midiendo por primera vez y en otros casos, se mejorará la precisión de algunos de los modos dominantes, como es el caso del modo que nos ocupa.

En este capítulo nos concentraremos en el estudio del proceso

$$\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau , \quad (4.1)$$

el cual es el modo de decaimiento dominante del  $\tau$  con una fracción de decaimiento de  $B(\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau) = (25.41 \pm 0.10)$  [3]. Para este grado de precisión experimental (del orden de 0.5 %) se requiere que los cálculos teóricos de esta observable incluyan los efectos de las correcciones radiativas de  $O(\alpha)$ . También se han reportado las medidas del espectro de dos piones en el estado final por las colaboraciones OPAL [4], CLEO [5], ALEPH[70] y recientemente BELLE [68].

Las medidas de esta observable son muy importantes porque (i) permiten estudiar en un ambiente limpio las propiedades intrínsecas de la familia de resonancias vectoriales cargadas  $\rho$ ,  $\rho'$ , ..., (ii) permiten hacer una prueba de la hipótesis de corriente vectorial conservada (CVC) al comparar el factor de forma del proceso  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  con el factor de forma del proceso  $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu$  para cada valor de la masa invariante del sistema  $\pi\pi$  y (iii) la distribución de la masa invariante permite calcular, mediante la relación de CVC, la contribución hadrónica mas importante a la predicción teórica del momento magnético anómalo del muon [14][15][16][19][20].

Más específicamente, en este trabajo de tesis nos concentraremos en el cálculo de las correcciones radiativas virtuales de tipo electromagnético de orden ( $\alpha$ ) para el proceso  $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau$ . Estas correcciones radiativas, tambien llamadas de *larga distancia*, fueron calculadas recientemente en las referencias [17][18][19][20]. En la referencia [19] se encontró que las contribuciones dependientes de modelo en las correcciones debidas a fotones reales juegan un papel más importante de lo que se pensaba anteriormente[17]. Sin embargo, en los artículos que publicamos anteriormente [19][20] tomamos el cálculo de las correcciones de fotones suaves tal como fueron calculadas en [17][18], sin tomar en cuenta el hecho de que ellas se calculan de manera inconsistente al sumar únicamente sobre dos grados de polarización del fotón real [46]. En este capítulo hacemos los cálculos correctamente

y compararemos nuestros resultados con los calculados en la referencia [17].

## 4.2. Correcciones virtuales al decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$

Al orden mas bajo en las interacciones débiles (denotado por el superíndice 0), la amplitud de probabilidad de la desintegración  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  que procede vía el proceso elemental  $\tau^- \rightarrow \bar{u}d\nu_\tau$  esta dada por:

$$\mathcal{M}(\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ud} L_\alpha H^\alpha \quad (4.2)$$

donde  $G_F$  denota la constante de Fermi y  $V_{ud}$  el elemento correspondiente de la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [72],  $L_\alpha$  denota la corriente leptónica y  $H^\alpha$  es el elemento de matriz hadrónico definido por:

$$H^\mu = \langle \pi^- \pi^0 | \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d | 0 \rangle .$$

En el caso particular que estudiamos, el estado hadrónico final consiste de 2 piones y debido a que este sistema tiene una G-paridad par, solamente contribuye la parte vectorial del elemento de matriz hadrónico

$$H_\mu = \langle \pi^- \pi^0 | \bar{u} \gamma_\mu d | 0 \rangle . \quad (4.3)$$

Aunque no es posible en la actualidad calcular de primeros principios (es decir, del modelo estándar) el elemento de matriz que representa (4.3), se le puede parametrizar de la siguiente manera con el requisito de que se satisfaga la covariancia de Lorentz:

$$H_\mu = F_+(t)(p^- - p^0)_\mu + F_-(t)(p^- + p^0)_\mu . \quad (4.4)$$

Los factores de forma ( $F_+(t), F_-(t)$ ) son funciones invariantes de Lorentz, contienen toda la información sobre la estructura hadrónica y dependen únicamente de la variable  $t = (p^- + p^0)^2$ . Si la simetría de isospin se conserva, se tiene que  $F_-(t) = 0$ . Dado que la simetría de isospin no es exacta,  $F_-(t)$  es diferente de cero, pero su contribución a la razón

de decaimiento es tan pequeña (del orden de  $10^{-6}$ ) [17] que se le puede despreciar en los cálculos.

Por lo tanto, nuestra expresión para la amplitud a nivel árbol[17] la definiremos como  $(\tau^-(P) \rightarrow \pi^-(p_-)\pi^0(p_0)\nu_\tau(q)$ ; donde las cantidades entre parentésis denotan los cuadrimomentos de las partículas):

$$\mathcal{M}_\tau^0 = iG_F V_{ud} f_+(t) \bar{u}(q) [\not{p}^0 - \not{p}^-] \gamma^7 u(P) , \quad (4.5)$$

donde se ha definido el factor de forma normalizado  $f_+(t) = F_+(t)/\sqrt{2}$  tal que se satisface  $f_+(t=0) = 1$  y se ha definido la matriz  $\gamma^7 = 1 - \gamma^5$ . Como es bien conocido, la probabilidad no polarizada de un decaimiento en tres cuerpos puede escribirse en términos de dos variables cinemáticas independientes. Ademas de la variable  $t$  introducida anteriormente, definimos:

$$u = (P - p^-)^2 .$$

Luego entonces, la probabilidad de decaimiento no polarizada al orden más bajo en la teoría de perturbaciones, está dada por:

$$\sum \overline{|\mathcal{M}_\tau^0|^2} = \frac{1}{2} \sum (\mathcal{M}_\tau^0)^\dagger \mathcal{M}_\tau^0 = 4G_F^2 |V_{ud}|^2 |f_+(t)|^2 D_c(t, u) , \quad (4.6)$$

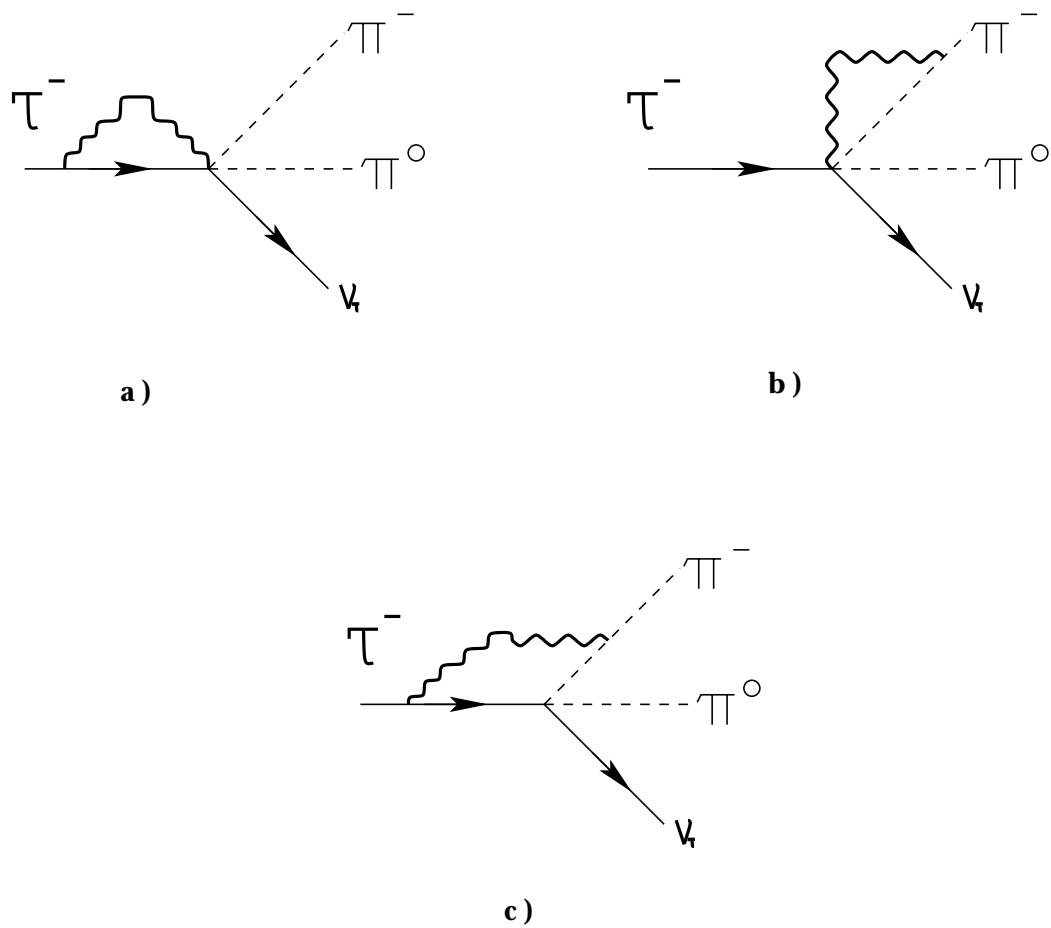
donde se ha definido la densidad cinemática  $D_c(t, u)$  del proceso como

$$D_c(t, u) = 2u^2 + \frac{m_\tau^2}{2} [m_\tau^2 - t] + 2u [t - m_\tau^2 - m_{\pi_0}^2 - m_{\pi_-}^2] + 2m_{\pi_0}^2 m_{\pi_-}^2 . \quad (4.7)$$

En el sistema en reposo del leptón  $\tau$ , la razón diferencial de decaimiento a nivel de árbol se escribe de la manera siguiente

$$d\Gamma^0(\tau \rightarrow \pi\pi\nu)/dtdu = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{(4\pi)^3 m_\tau^3} |f_+(t)|^2 D_c(t, u) . \quad (4.8)$$

Las correcciones de fotones virtuales al orden  $\alpha$  para este proceso se muestran en la fig.(4.1)(los diagramas de autoenergía, aunque no se muestran, si se consideran en el cálculo). Al igual que en la referencia [17] supondremos que el factor de forma  $f_+(t)$  es constante

Figura 4.1: Correcciones de fotones virtuales al proceso  $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau$ .

en el cálculo de las correcciones radiativas. En el cálculo a 1 lazo, como es usual se coloca una masa ficticia  $\lambda$  al fotón para regularizar las divergencias infrarrojas.

La amplitud que corresponde al diagrama a) de la fig.(4.1), se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\tau,v}^a &= \bar{u}(q) \left[ -ieG_F V_{ud} \gamma_\mu \gamma^7 \right] \frac{1}{(2\pi)^4} \int \left[ -\frac{ig^{\mu\alpha}}{k^2} \right] \left[ \frac{i(\not{P} + \not{k} + m_\tau)}{(P+k)^2 - m_\tau^2} \right] [ie\gamma_\alpha] dk^4 u(P) \\ &= e^2 G_F V_{ud} \bar{u}(q) \gamma_\mu \gamma^7 \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{[\not{P} + \not{k} + m_\tau] \gamma^\mu dk^4}{k^2 [(P+k)^2 - m_\tau^2]} u(P) \\ &= 4\pi\alpha G_F V_{ud} \bar{u}(q) \gamma_\mu \gamma^7 [\not{P} \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{P}] u(P) \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dk^4}{k^2 D_P} \\ &\quad + 4\pi\alpha G_F V_{ud} \bar{u}(q) \gamma_\mu \gamma^7 \gamma_\beta \gamma^\mu u(P) \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{k^\beta dk^4}{k^2 D_P}.\end{aligned}$$

Se ha introducido la notación  $D_P = (P+k)^2 - m_\tau^2$ . Para simplificar la escritura se usan las propiedades de las matrices de Dirac y se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\tau,v}^a &= 4\pi\alpha G_F V_{ud} [\bar{u}(q) 2\not{P} \gamma^7 u(P) \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dk^4}{k^2 D_P} \\ &\quad + \bar{u}(q) (-2) \gamma_\beta \gamma^7 u(P) \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{k^\beta dk^4}{k^2 D_P}].\end{aligned}$$

Realizando la integración en  $D = 4$  dimensiones (Regularización dimensional), el resultado se escribe en la siguiente forma:

$$\mathcal{M}_{\tau,v}^a = iG_F V_{ud} \bar{u}(q) [A^a \not{p}^0 - B^a \not{p}^-] \gamma^7 u(P). \quad (4.9)$$

Se ha definido:

$$\begin{aligned}A^a = -B^a &= \frac{\alpha}{4\pi} [2B0 [m_\tau^2, 0, m_\tau^2] + (-2)f_P] \\ f_P &= -\frac{[B0 [m_\tau^2, 0, m_\tau^2] - 1]}{2}.\end{aligned} \quad (4.10)$$

La expresión analítica para la función escalar de Passarino-Veltman[43] se ha comparado numéricamente con el resultado del programa LoopTools [73] y su forma explícita es:

$$B0 [m^2, 0, m^2] = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + 2 + \ln [4\pi] - \ln \left[ \frac{m^2}{\mu^2} \right], \quad (4.11)$$

donde  $\epsilon = 4 - D$ ,  $\gamma_E = .5772$  y  $\mu$  es la escala de masa en regularización dimensional.

La amplitud para el diagrama b) de la fig.(4.1), se puede calcular en forma similar. Usando la notación  $D_{p^-} = (p^- + k)^2 - m_\pi^2$ , el resultado es:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{\tau,v}^b &= \bar{u}(q) [-\imath e G_F V_{ud} \gamma_\mu \gamma^7] \frac{1}{(2\pi)^4} \int \left[ -\frac{\imath g^{\mu\alpha}}{k^2} \right] \left[ \frac{\imath}{D_{p^-}} \right] [\imath e (p^- + p^- + k)^\alpha] dk^4 u(P) \\
 &= e^2 G_F V_{ud} \bar{u}(q) \gamma_\mu \gamma^7 u(P) \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{[2p^- + k]^\mu dk^4}{k^2 D_{p^-}} \\
 &= 4\pi\alpha G_F V_{ud} \bar{u}(q) \gamma^\mu \gamma^7 u(P) \left[ \frac{2p_\mu^-}{(2\pi)^4} \int \frac{dk^4}{k^2 D_{p^-}} + \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{k_\mu dk^4}{k^2 D_{p^-}} \right] \\
 &= 4\pi\alpha G_F V_{ud} \bar{u}(q) (2p^-) \gamma^7 u(P) \left[ \frac{\imath B0 [m_\pi^2, 0, m_\pi^2]}{16\pi^2} + \frac{\imath f_{p^-}}{2 \cdot 16\pi^2} \right] \\
 &= \imath G_F V_{ud} \bar{u}(q) [-B^b p^-] \gamma^7 u(P) ,
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde

$$B^b = \frac{\alpha}{4\pi} [-2B0 [m_\pi^2, 0, m_\pi^2] - f_{p^-}] , \tag{4.13}$$

y se define la función  $f_{p^-} = -[B0 [m_{\pi^+}^2, 0, m_{\pi^+}^2] - 1]/2$ .

Finalmente la amplitud para el diagrama de interacción de Coulomb, diagrama c) Fig.(4.1), es:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{\tau,v}^C &= \bar{u}(q) \frac{1}{(2\pi)^4} \int [\imath G_F V_{ud} (p^0 - p^- - k)_\nu \gamma^\nu \gamma^7] \cdot \left[ \imath \frac{P + k + m_\tau}{(P + k)^2 - m_\tau^2} \right] [\imath e \gamma^\alpha] \left[ -\frac{\imath g^{\alpha\beta}}{k^2} \right] \times \\
 &\quad \times [\imath e (p^- + k + p^-)_\beta] \left[ \frac{\imath}{(p^- + k)^2 - m_\pi^2} \right] u(P) \\
 &= 4\pi\alpha G_F V_{ud} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \bar{u}(q) (p^0 - p^- - k)_\nu \gamma^\nu \gamma^7 \left[ \frac{P + k + m_\tau}{D_P D_{p^-} - k^2} \right] \gamma^\beta [2p^- + k]_\beta dk^4 u(P) \\
 &= 4\pi\alpha G_F V_{ud} \bar{u}(q) (p^0 - p^-)_\nu \gamma^\nu \gamma^7 \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{P + k + m_\tau}{D_P D_{p^-} - k^2} [2p^- + k] u(P) dk^4 \\
 &\quad - 4\pi\alpha G_F V_{ud} \bar{u}(q) \gamma^\nu \gamma^7 \frac{1}{(2\pi)^4} \int k_\nu \frac{P + k + m_\tau}{D_P D_{p^-} - k^2} [2p^- + k] u(P) dk^4 .
 \end{aligned}$$

En la expresión anterior, el primer sumando contiene la contribución debida al término de *convección* (ver discusión en Capítulo 2) y el cual podemos extraer usando la siguiente

relación:

$$[\mathcal{P} + \mathcal{k} + m_\tau] [2\mathcal{p}^- + \mathcal{k}] u(P) = [(2p^- + k) \cdot (2P + k) + 2p^- \cdot k - 2\mathcal{p}^- \mathcal{k}] u(P) .$$

El término  $(2p_- + k) \cdot (2P + k)$  es reconocido como la contribución del término de convección. Para simplificar la evaluación de la integración se usa la siguiente identidad:

$$\bar{u}(q) \mathcal{k} \gamma^7 [\mathcal{P} + \mathcal{k} + m_\tau] [2\mathcal{p}^- + \mathcal{k}] u(P) = (D_P + 4P \cdot p^-) \bar{u}(q) \mathcal{k} \gamma^7 u(P) + 2\bar{u}(q) k^2 \mathcal{p}^- \gamma^7 u(P) .$$

Finalmente escribimos la amplitud en términos de integrales básicas que ya han sido estudiadas en capítulos anteriores:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\tau,v}^C &= iG_F V_{ud} \bar{u}(q) (p^0 - p^-)_\nu \gamma^\nu \gamma^7 u(P) 4\pi\alpha \left[ \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{(2p^- + k) \cdot (2P + k) dk^4}{k^2 D_P D_{p^-}} \right] \\ &\quad + 4i\pi\alpha G_F V_{ud} \bar{u}(q) (p^0 - p^-)_\nu \gamma^\nu \gamma^7 u(P) \left[ \frac{2p_\alpha^-}{(2\pi)^4} \int \frac{k^\alpha dk^4}{k^2 D_P D_{p^-}} \right] \\ &\quad - 4i\pi\alpha G_F V_{ud} \bar{u}(q) (p^0 - p^-)_\nu \gamma^\nu \gamma^7 [2\mathcal{p}^- \gamma_\beta] u(P) \left[ \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{k^\beta dk^4}{k^2 D_P D_{p^-}} \right] \\ &\quad - 4i\pi\alpha G_F V_{ud} \bar{u}(q) \gamma^\beta \gamma^7 u(P) \left[ \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{k_\beta dk^4}{k^2 D_{p^-}} \right] \\ &\quad - 4i\pi\alpha G_F V_{ud} \bar{u}(q) \gamma^\beta \gamma^7 [4P \cdot p^-] u(P) \left[ \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{k_\beta dk^4}{k^2 D_P D_{p^-}} \right] \\ &\quad - 4i\pi\alpha G_F V_{ud} \bar{u}(q) 2\mathcal{p}^- \gamma^7 u(P) \left[ \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dk^4}{D_P D_{p^-}} \right] . \end{aligned}$$

Notese que la única integral divergente infrarroja esta contenida en la primera línea de la ecuación anterior, que es el único término proporcional a la amplitud del modo no radiativo y es el mencionado término de convección. Para la evaluación de esta integral, se coloca una masa ficticia  $\lambda$  en el propagador del fotón  $(1/(k^2 - \lambda^2))$  y al final del cálculo, se realiza el límite  $\lambda \rightarrow 0$  manteniendo solamente el término divergente. Como se discutió en el capítulo 2, los términos de convección contienen la totalidad de las divergencias infrarrojas. Una

expresión simplificada del término de Coulomb es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{\tau,v}^C &= \imath G_F V_{ud} \bar{u}(q) (p^0 - p^-)_\nu \gamma^\nu \gamma^7 u(P) 4\pi\alpha \left[ \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{(2p^- + k) \cdot (2P + k) dk^4}{k^2 D_P D_{p^-}} \right] \\
 &\quad + \imath G_F V_{ud} \bar{u}(q) \mathcal{P} \gamma^7 u(P) \left[ \frac{\alpha}{4\pi} \right] [F_P(4m_\pi^2 - 6P \cdot p^-)] \\
 &\quad + \imath G_F V_{ud} \bar{u}(q) (-2\mathcal{P}^-) \gamma^7 u(P) \left[ \frac{\alpha}{4\pi} \right] [F_P(2P \cdot p^- - m_\tau^2) + 2P \cdot p^- F_{p^-} \\
 &\quad + f_{p^-}/2 + B0[u, m_\pi^2, m_\tau^2]] . \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

Expresemos la anterior ecuación de la siguiente forma:

$$\mathcal{M}_{\tau,v}^C = \imath G_F V_{ud} \bar{u}(q) A^{conv} [\mathcal{P}^0 - \mathcal{P}^-] \gamma^7 u(P) + \imath G_F V_{ud} \bar{u}(q) [A^c \mathcal{P}^0 - B^c \mathcal{P}^-] \gamma^7 u(P) , \tag{4.15}$$

donde

$$\begin{aligned}
 A^{conv} &= 4\pi\alpha \left[ \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{(2p^- + k) \cdot (2P + k) dk^4}{[k^2 - \lambda^2] D_P D_{p^-}} \right] \\
 &= \frac{\alpha}{4\pi} [B0[m_\pi^2, 0, m_\pi^2] + B0[m_\tau^2, 0, m_\tau^2] - B0[u, m_\pi^2, m_\tau^2] \\
 &\quad + 4P \cdot p^- C0[m_\pi^2, u, m_\tau^2, \lambda^2, m_\pi^2, m_\tau^2]] \\
 A^c &= \frac{\alpha}{4\pi} [F_P(4m_\pi^2 - 6P \cdot p^-)] \\
 B^c &= \frac{\alpha}{4\pi} [F_P(-4m_\pi^2 + 6P \cdot p^- + 4P \cdot p^- - 2m_\tau^2) \\
 &\quad - 4P \cdot p^- F_{p^-} - f_{p^-} - 2B0[u, m_{\pi^+}^2, m_\tau^2]] . \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Las expresiones analíticas para cada una de las funciones involucradas en la ecuación anterior son

$$\begin{aligned}
 F_P &= \frac{B0^* [u, m_\pi^2, m_\tau^2] (u - m_\tau^2 + m_\pi^2) - [u - 3m_\pi^2 - m_\tau^2] \ln \left[ \frac{m_\pi}{m_\tau} \right]}{m_\tau^4 - 2m_\tau^2(m_\pi^2 + u) + (u - m_\pi^2)^2} \\
 F_{p^-} &= \frac{B0^* [u, m_\pi^2, m_\tau^2] (u + m_\tau^2 - m_\pi^2) + [u - 3m_\tau^2 - m_\pi^2] \ln \left[ \frac{m_\pi}{m_\tau} \right]}{m_\tau^4 - 2m_\tau^2(m_\pi^2 + u) + (u - m_\pi^2)^2} . \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

Con la definición de las variables siguientes

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{1}{2\sqrt{r_t}} \left[ y_t - \sqrt{y_t^2 - 4r_t} \right] , \\ y_t &= 1 + r_t - \frac{u}{m_\pi^2} , \\ r_t &= \frac{m_\tau^2}{m_\pi^2} , \end{aligned}$$

la función de dos y tres puntos de Passarino-Veltman se escriben como:

$$\begin{aligned} B0^* [u, m_\pi^2, m_\tau^2] &= \frac{m_\pi^2 - m_\tau^2}{u} \ln \left[ \frac{m_\tau}{m_\pi} \right] - \frac{m_\pi m_\tau}{u} \left[ \frac{1}{x_t} - x_t \right] \ln [x_t] \\ C0 [m_\pi^2, u, m_\tau^2, \lambda^2, m_\pi^2, m_\tau^2] &= \mathcal{C}(u, \lambda^2) \\ &= \frac{1}{m_\tau m_{\pi^+}} \frac{x_t}{1 - x_t^2} \left\{ -\frac{1}{2} \ln^2 [x_t] + 2 \ln [x_t] \ln [1 - x_t^2] \right. \\ &\quad - \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{8} \ln^2 [r_t] + \text{Li}_2[x_t^2] + \text{Li}_2[1 - x_t \sqrt{r_t}] \\ &\quad \left. - \ln [x_t] \ln \left[ \frac{\lambda^2}{m_\tau m_{\pi^+}} \right] \right\} . \end{aligned} \quad (4.18)$$

Finalmente, la amplitud que contiene todas las correcciones virtuales de orden  $\alpha$  se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathcal{M}_{\tau,v}^t = iG_F V_{uf} \bar{u}(q) \left[ \hat{A}(u, m_\tau, m_{\pi^\pm}, m_{\pi^0}) \not{p}^0 - \hat{B}(u, m_\tau, m_{\pi^\pm}, m_{\pi^0}) \not{p}^- \right] \gamma^7 u(P) , \quad (4.19)$$

donde las funciones  $\hat{A}(u, m_\tau, m_{\pi^\pm}, m_{\pi^0}), \hat{B}(u, m_\tau, m_{\pi^\pm}, m_{\pi^0})$  contienen las funciones escalares que resultan del cálculo a 1 lazo (4.10, 4.13, 4.16)

$$\begin{aligned} \hat{A}(u, m_\tau, m_{\pi^\pm}, m_{\pi^0}) &= A^a + A^{conv} + A^c , \\ \hat{B}(u, m_\tau, m_{\pi^\pm}, m_{\pi^0}) &= B^a + B^b + A^{conv} + B^c . \end{aligned}$$

La probabilidad no polarizada corregida a orden  $\alpha$  es la siguiente:

$$\sum \frac{1}{2} |\mathcal{M}|^2 = \sum \frac{1}{2} |\mathcal{M}_\tau^0 + \mathcal{M}_{\tau,v}^t|^2 \simeq \sum \frac{1}{2} |\mathcal{M}_\tau^0|^2 + 2 \text{Re} \sum \frac{1}{2} \mathcal{M}_\tau^0 \mathcal{M}_{\tau,v}^t .$$

El término que nos interesa es el segundo, pues contiene la información del cálculo a 1 lazo,

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{2} \mathcal{M}_\tau^0 \mathcal{M}_v^t &= \frac{1}{2} C^2 \sum \bar{u}(P) [\not{p}^0 - \not{p}^-]_\alpha \gamma^7 u(q) \bar{u}(q) [\hat{A} \not{p}^0 - \hat{B} \not{p}^-] \gamma^7 u(P) \\ &= C^2 \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ (\not{P} + m_\tau) [\not{p}^0 - \not{p}^-] \gamma^7 \not{A} [\hat{A} \not{p}^0 - \hat{B} \not{p}^-] \gamma^7 \right] \\ &= C^2 \frac{1}{2} \text{Tr} [\not{P} \not{Q} \gamma^7 \not{A} \not{X} \gamma^7] , \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde se usa la notación

$$\begin{aligned} C^2 &= G_F^2 |V_{ud}|^2 |f_+(t)|^2 , \\ \not{Q} &= \not{p}^0 - \not{p}^- , \\ \not{X} &= \hat{A} \not{p}^0 - \hat{B} \not{p}^- . \end{aligned}$$

Desarrollando la traza se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\not{P} \not{Q} \gamma^7 \not{A} \not{X}] &= \text{Tr} \left[ \not{P} \not{Q} \gamma^7 \not{A} (\hat{A} \not{p}^0 - \hat{A} \not{p}^- - \hat{B} \not{p}^- + \hat{B} \not{p}^0) \right] \\ &\quad + \hat{A} \text{Tr} [\not{P} \not{Q} \gamma^7 \not{A} \not{p}^-] - \hat{B} \text{Tr} [\not{P} \not{Q} \gamma^7 \not{A} \not{p}^0] \\ &= \text{Tr} [\not{P} \not{Q} \gamma^7 \not{A} \not{Q}] (\hat{A} + \hat{B}) + \hat{A} \text{Tr} [\not{P} \not{Q} \gamma^7 \not{A} \not{p}^-] - \hat{B} \text{Tr} [\not{P} \not{Q} \gamma^7 \not{A} \not{p}^0] . \end{aligned}$$

Las variables de Mandelstam

$$\begin{aligned} t &= (p^0 + p^-)^2 = (P - q)^2 , \\ u &= (p^0 + q)^2 = (P - p^-)^2 , \\ s &= (P - p^0)^2 = (p^- + q)^2 , \\ s + t + u &= m_\tau^2 + m_{\pi^+}^2 + m_{\pi^0}^2 . \end{aligned} \quad (4.21)$$

permiten escribir las trazas en términos de la densidad cinemática:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\not{P} \not{Q} \gamma^7 \not{A} \not{p}^-] &= -2D_c(t, u) + 2m_\tau^2 \left[ u - m_{\pi^0}^2 - \frac{1}{2} [m_\tau^2 - t] \right] , \\ \text{Tr} [\not{P} \not{Q} \gamma^7 \not{A} \not{p}^0] &= 2D_c(t, u) + 2m_\tau^2 \left[ u - m_{\pi^0}^2 - \frac{1}{2} [m_\tau^2 - t] \right] , \\ \text{Tr} [\not{P} \not{Q} \gamma^7 \not{A} \not{Q}] &= 4D_c(t, u) . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Con las relaciones anteriores, la ec.(4.20) se escribe en la siguiente forma

$$\sum \frac{1}{2} \mathcal{M}_\tau^0 \mathcal{M}_v^t = C^2 \left[ (\hat{A} + \hat{B}) 2D_c(t, u) + (\hat{A} - \hat{B}) m_\tau^2 [2u - 2m_{\pi^0}^2 - [m_\tau^2 - t]] \right]. \quad (4.23)$$

En la referencia [17] se argumenta que las correcciones radiativas virtuales son factorizables, es decir que al incluir correcciones de  $O(\alpha)$  la amplitud total del decaimiento tiene la forma

$$\mathcal{M}_{v,\tau} = \mathcal{M}_\tau^0 + \mathcal{M}_\tau^0 \times f(u, m_\tau, m_{\pi^{\pm,0}}, \lambda),$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{2} |\mathcal{M}|^2 &\approx \sum \frac{1}{2} |\mathcal{M}_\tau^0|^2 \times (1 + 2f(u, m_\tau, m_{\pi^{\pm,0}})) \\ &= 4D_c(t, u)(1 + 2f(u, m_\tau, m_{\pi^{\pm,0}})). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Como se observa de nuestro resultado (4.23), las correcciones virtuales inducen términos no factorizables. Debido a que nos interesa verificar el cálculo de las correcciones virtuales, nos concentraremos únicamente en el primer término de (4.23).

La probabilidad no polarizada corregida por las correcciones virtuales (solo por el primer término de (4.23)) se escribe com sigue:

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{2} |\mathcal{M}|^2 &= \sum \frac{1}{2} |\mathcal{M}_\tau^0 + \mathcal{M}_{\tau,v}^t|^2 \simeq \sum \frac{1}{2} |\mathcal{M}_\tau^0|^2 + 2\text{Re} \sum \frac{1}{2} \mathcal{M}_\tau^0 \mathcal{M}_{\tau,v}^t \\ &= \sum \frac{1}{2} |\mathcal{M}_\tau^0|^2 \times [1 + f_{cc} + f_{resto} + \Sigma_\tau^{SE} + \Sigma_{\pi^-}^{SE}]. \end{aligned}$$

donde se han incluido ya la contribución de los diagrama de autoenergía ( $\Sigma_\tau^{SE}, \Sigma_{\pi^-}^{SE}$ ), y las

funciones  $f_{cc}$ ,  $f_{resto}$  se ha definido en términos de (4.10, 4.13, 4.16):

$$\begin{aligned}
 f_{cc} &= A^{conv} \\
 &= \frac{\alpha}{4\pi} [B0[m_\pi^2, 0, m_\pi^2] + B0[m_\tau^2, 0, m_\tau^2] - B0[u, m_\pi^2, m_\tau^2] \\
 &\quad + 4P \cdot p^- C0[m_\pi^2, u, m_\tau^2, \lambda^2, m_\pi^2, m_\tau^2]] \\
 f_{resto} &= \frac{1}{2} [A^a + A^c + B^a + B^b + B^c] \\
 &= \frac{\alpha}{4\pi} [B0[u, m_\pi^2, m_\tau^2] - B0[m_\pi^2, 0, m_\pi^2] + [m_\pi^2 - u] [F_P + F_{p^-}] + m_\tau^2 F_{p^-}] . 
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Para escribir nuestro resultado final, se usan las definiciones de la ref.[17]

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_c &= \frac{1}{u} \left[ -\frac{1}{2} \ln[r_t] + \frac{2-y}{\sqrt{r_t}} \frac{x_t}{1-x_t^2} \ln[x_t] \right] \\
 \mathcal{B}_c &= \frac{1}{u} \left[ \frac{1}{2} \ln[r_t] + \frac{2r_t-y}{\sqrt{r_t}} \frac{x_t}{1-x_t^2} \ln[x_t] \right] ,
 \end{aligned}$$

de tal forma que resolviendo para los logaritmos:

$$\begin{aligned}
 \ln[x_t] &= \frac{m_\tau m_\pi}{2x_t} [1 - x_t^2] [\mathcal{A}_c + \mathcal{B}_c] \\
 \ln[r_t] &= \mathcal{A}_c [m_\pi^2 - m_\tau^2 - u] + \mathcal{B}_c [m_\pi^2 - m_\tau^2 + u] .
 \end{aligned}$$

Mostremos como escribir el siguiente término en función de  $\mathcal{A}_c$  y de  $\mathcal{B}_c$

$$\begin{aligned}
 [m_\pi^2 - u] [F_P + F_{p^-}] &= 2 \frac{[m_\pi^2 - u]}{\lambda_K^2(u, m_\pi^2, m_\tau^2)} \left[ u B0^* [u, m_\pi^2, m_\tau^2] + \ln \left[ \frac{m_\pi}{m_\tau} \right] [m_\pi^2 - m_\tau^2] \right] \\
 &= -\frac{2 [m_\pi^2 - u] m_\pi m_\tau}{\lambda_k^2(u, m_\pi^2, m_\tau^2)} \left[ \frac{1 - x_t^2}{x_t} \right] \ln[x_t] \\
 &= -\frac{2 [m_\pi^2 - u] m_\pi^2 m_\tau^2}{2 \lambda_k^2(u, m_\pi^2, m_\tau^2)} \left[ \frac{(1 - x_t^2)(1 - x_t^2)}{x_t^2} \right] [\mathcal{A}_c + \mathcal{B}_c] \\
 &= [u - m_\pi^2] [\mathcal{A}_c + \mathcal{B}_c] ,
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

donde la función de Källén está definida como

$$\lambda_K^2(u, m_\pi^2, m_\tau^2) = u^2 + m_\tau^4 + m_\pi^4 - 2 [u m_\pi^2 + u m_\tau^2 + m_\pi^2 m_\tau^2] .$$

Otras relaciones útiles son:

$$\begin{aligned} y_t^2 &= \frac{\lambda_k^2(u, m_\pi^2, m_\tau^2)}{m_\pi^4} + 4r_t \\ (1 - x_t^2)(1 - x_t^2) &= \frac{x_t^2 \lambda_k^2(u, m_\pi^2, m_\tau^2)}{r_t m_\pi^4}. \end{aligned}$$

Con la ayuda de las relaciones anteriores el término  $m_\tau^2 F_{p^-}$  se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} m_\tau^2 F_{p^-} &= \frac{m_\tau^2}{u} \left[ \ln \left[ \frac{m_\pi}{m_\tau} \right] - \frac{m_\pi m_\tau}{\lambda_k^2(u, m_\pi^2, m_\tau^2)} \left[ \frac{1 - x_t^2}{x_t} \right] [u - m_\pi^2 + m_\tau^2] \ln [x_t] \right] \\ &= \frac{m_\tau^2}{u} \left[ \ln \left[ \frac{m_\pi}{m_\tau} \right] - \frac{1}{2} [u + m_\tau^2 - m_\pi^2] [\mathcal{A}_c + \mathcal{B}_c] \right] \\ &= \frac{m_\tau^2}{u} \left[ -\frac{1}{2} \ln \left[ \frac{m_\tau^2}{m_\pi^2} \right] - \frac{1}{2} [u + m_\tau^2 - m_\pi^2] [\mathcal{A}_c + \mathcal{B}_c] \right] \\ &= -m_\tau^2 \mathcal{B}_c. \end{aligned} \tag{4.27}$$

La expresión analítica de la contribución de las auto-energías es [54]:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\pi^{SE} = \mathcal{M}_\tau^0 \Sigma_\pi &= \frac{\mathcal{M}_\tau^0}{2} \left[ \frac{\alpha}{4\pi} \right] \left[ 2 \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln [4\pi] \right] - 2 \ln \left[ \frac{m_\pi^2}{\mu^2} \right] - 2 \ln \left[ \frac{\lambda^2}{m_\pi^2} \right] \right], \\ \mathcal{M}_\tau^{SE} = \mathcal{M}_\tau^0 \Sigma_\tau &= \frac{\mathcal{M}_\tau^0}{2} \left[ \frac{\alpha}{4\pi} \right] \left[ 2 \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln [4\pi] \right] - 2 \ln \left[ \frac{m_\tau^2}{\mu^2} \right] - 2 \ln \left[ \frac{\lambda^2}{m_\tau^2} \right] \right]. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Insertado las expresiones anteriores, la corrección virtual  $\delta = 1 + f_{cc} + f_{resto} + \Sigma_\tau^{SE} + \Sigma_{\pi^-}^{SE}$  es

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ 4P \cdot p^- C0 [u, m_\pi^2, m_\tau^2, \lambda^2, m_\pi^2, m_\tau^2] + \mathcal{A}_c [u - m_\pi^2] + \mathcal{B}_c [u - m_\pi^2 - m_\tau^2] \right. \\ &\quad \left. + 2 \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln [4\pi] \right] - 2 \ln \left[ \frac{m_\pi m_\tau}{\mu^2} \right] - 2 \ln \left[ \frac{\lambda^2}{m_\pi m_\tau} \right] + B0 [m_\tau^2, 0, m_\tau^2] \right\} \\ &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ 4P \cdot p^- C0 [u, m_\pi^2, m_\tau^2, \lambda^2, m_\pi^2, m_\tau^2] \right. \\ &\quad \left. + 2 \ln \left[ \frac{m_\pi m_\tau}{\lambda^2} \right] + \mathcal{A}_c [u - m_\pi^2] + \mathcal{B}_c [u - m_\pi^2 - m_\tau^2] \right. \\ &\quad \left. + 3 \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln [4\pi] \right] - 2 \ln \left[ \frac{m_\pi m_\tau}{\mu^2} \right] - \ln \left[ \frac{m_\tau^2}{\mu^2} \right] + 2 \right\}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

A continuación definimos la función  $f_{Cir}$ [17], la cual contiene el término de Coulomb y el término infrarrojo resultado de los diagramas de auto-energía,

$$\begin{aligned} f_{Cir} = & \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ 4P \cdot p^- C0 [u, m_\pi^2, m_\tau^2, \lambda^2, m_\pi^2, m_\tau^2] + 2 \ln \left[ \frac{m_\pi m_\tau}{\lambda^2} \right] \right. \\ & \left. + \mathcal{A}_c [u - m_\pi^2] + \mathcal{B}_c [u - m_\pi^2 - m_\tau^2] \right\} . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Es importante señalar que las correcciones de QED completas al decaimiento  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0$  contienen dos partes que se han indentificado claramente. Una de ellas es proporcional a la densidad cinemática del decaimiento en tres cuerpos, que se traduce en que la amplitud correspondiente sea proporcional a la amplitud a nivel de árbol y contiene la divergencia infrarroja. La otra parte no es proporcional a la densidad cinemática de orden árbol, y no fué considerada por Cirigliano ni la consideraremos más en esta tesis. Al igual que en el caso de las correcciones a los decaimientos del Capítulo 2, es probable que los efectos de esta amplitud adicional puedan ser reabsorbidos en una redefinición del factor de forma del pión.

Para terminar esta sección, consideraremos la cinemática del decaimiento a 3 cuerpos la cual está determinada por los límites de integración sobre las dos variables cinemáticas independientes. Estos límites pueden encontrarse en el apéndice C de la referencia [64] y son:

$$(m_{\pi^+} + m_{\pi^0})^2 \leq t \leq m_\tau^2 \quad (4.31)$$

$$u_-(t) \leq u \leq u_+(t) , \quad (4.32)$$

donde las funciones  $u_\pm(t)$  están definidas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} u_-(t) = & \frac{1}{2t} [2t(m_\tau^2 + m_{\pi^0}^2 - t) - (m_\tau^2 - t)(m_{\pi^-}^2 + t - m_{\pi^0}^2) \\ & - (m_\tau^2 - t)\lambda^{1/2}(t, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2)] \\ u_+(t) = & \frac{1}{2t} [2t(m_\tau^2 + m_{\pi^0}^2 - t) - (m_\tau^2 - t)(m_{\pi^-}^2 + t - m_{\pi^0}^2) \\ & + (m_\tau^2 - t)\lambda^{1/2}(t, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2)] , \end{aligned}$$

y  $\lambda(t, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2)$  es la conocida función de Källen.

### 4.3. Correcciones de fotones reales a $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau$

Como ya discutimos en capítulos anteriores, es necesarios agregar a las correcciones virtuales las correcciones debidas a fotones reales del proceso  $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau$  con el fin de obtener resultados que son finitos en el infrarrojo. En esta sección solo consideraremos las correcciones reales debidas a fotones suaves para mostrar el mecanismo de cancelación de las divergencias infrarrojas. Como veremos, la cancelación de dichas divergencias es un requisito necesario pero no suficiente para asegurarse de que el resultado sea correcto.

Empecemos por definir la función de corrección debida a los fotones reales. Después de integrar la razón diferencial de decaimiento sobre el resto de las variables cinemáticas, podemos obtener la distribución en las variables  $t$  y  $u$  introducidas anteriormente. De esta manera obtenemos:

$$\frac{d\Gamma(\tau \rightarrow \pi\pi\nu\gamma)}{dtdu} = \frac{d\Gamma^0(\tau \rightarrow \pi\pi\nu)}{dtdu} \times \left( \frac{\alpha}{\pi} I(u, t, \lambda) \right) , \quad (4.33)$$

donde el factor  $d\Gamma^0(\tau \rightarrow \pi\pi\nu)$  denota la razón diferencial a nivel de árbol indicada en la ec. (4.8) para el proceso de no-radiativo,  $I(u, t)$  es la función de corrección debida a fotones suaves.

La función  $I(u, t, \lambda)$  fue calculada por primera vez en la referencia [17] con el siguiente resultado:

$$I^{ciri}(u, t, \lambda) = J_{11}(t, u, \lambda) + J_{20}(t, u, \lambda) + J_{02}(t, u, \lambda) , \quad (4.34)$$

donde las funciones  $J_{ij}$  están dadas por [17]:

$$\begin{aligned}
 J_{11}(t, u, \lambda) &= \ln \left[ \frac{2x_+(t, u)\bar{\gamma}}{\lambda} \right] \frac{1}{\bar{\beta}} \ln \left[ \frac{1 + \bar{\beta}}{1 - \bar{\beta}} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{\bar{\beta}} (\text{Li}_2(1/Y_2) - \text{Li}_2(Y_1) + \ln^2[-1/Y_2]/4 - \ln^2[-1/Y_1]/4), \\
 J_{20}(t, u, \lambda) &= \ln \left[ \frac{\lambda(m_\tau^2 - t)}{m_\tau x_+(t, u)} \right], \\
 J_{02}(t, u, \lambda) &= \ln \left[ \frac{\lambda(m_\tau^2 + m_\pi^2 - t - u)}{m_\pi x_+(t, u)} \right]. \tag{4.35}
 \end{aligned}$$

Las definiciones de las variables involucradas son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 x_+(t, u) &= \frac{1}{2m_{\pi^-}^2} [2m_{\pi^-}^2(m_\tau^2 + t) - (t + m_{\pi^-}^2 - m_{\pi^0}^2)(m_\tau^2 + m_{\pi^-}^2 - u) \\
 &\quad + \sqrt{\lambda_K(t, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2)} \sqrt{\lambda_K(u, m_{\pi^-}^2, m_\tau^2)}] \\
 \lambda_K(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz) \\
 Y_{1,2} &= \frac{1 - 2\bar{\alpha} \pm \sqrt{(1 - 2\bar{\alpha})^2 - (1 - \bar{\beta}^2)}}{1 + \bar{\beta}} \\
 \bar{\alpha} &= \frac{(m_\tau^2 - t)(m_\tau^2 + m_{\pi^0}^2 - t - u)}{m_{\pi^-}^2 + m_\tau^2 - u} \frac{\lambda_K(u, m_{\pi^-}^2, m_\tau^2)}{2\bar{\delta}} \\
 \bar{\beta} &= -\frac{\sqrt{\lambda_K(u, m_{\pi^-}^2, m_\tau^2)}}{m_{\pi^-}^2 + m_\tau^2 - u} \\
 \bar{\gamma} &= \frac{\sqrt{\lambda_K(u, m_{\pi^-}^2, m_\tau^2)}}{2\sqrt{\bar{\delta}}} \\
 \bar{\delta} &= -m_{\pi^0}^4 m_\tau^2 + m_{\pi^-}^2(m_\tau^2 - t)(m_{\pi^0}^2 - u) - tu(-m_\tau^2 + t + u) \\
 &\quad + m_{\pi^0}^2(-m_\tau^4 + tu + m_\tau^2 t + m_\tau^2 u)
 \end{aligned}$$

Estos resultados fueron obtenidos a partir de la siguiente razón diferencial de decadimento una vez que se integra sobre el resto de las variables [17]

$$\begin{aligned}
 d\Gamma_\tau(\pi\pi\gamma) &= \frac{\alpha G_F |V_{ud}|^2 |f_+(t)|^2 D_c(t, u)}{32\pi^7 m_\tau} \left\{ \frac{2P \cdot p^-}{[k \cdot P - \frac{1}{2}\lambda^2] [k \cdot p_- + \frac{1}{2}\lambda^2]} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{m_\tau^2}{[k \cdot P - \frac{1}{2}\lambda^2]^2} - \frac{m_{\pi^-}^2}{[k \cdot p^- + \frac{1}{2}\lambda^2]^2} \right\} d\Phi_{LIPS}, \tag{4.36}
 \end{aligned}$$

donde el espacio fase invariante de Lorentz para 5 cuerpos es

$$d\Phi_{LIPS} = \delta^4(P - q - p^- - p^0 - k) \frac{d^3p}{2E_\nu} \frac{d^3p^-}{2E_{\pi^-}} \frac{d^3p^0}{2E_{\pi^0}} \frac{d^3k}{2\omega} . \quad (4.37)$$

Después de integrar sobre las demás variables, excepto  $t$  y  $u$  se obtiene el resultado de las ecuaciones 4.35. Es fácil constatar que en la ecuación anterior los autores de la referencia [17] introdujeron una masa ficticia  $\lambda$  en el propagador de las partículas que radían el fotón y que realizaron la suma sobre polarizaciones del fotón de acuerdo a:

$$\sum_{pols} \epsilon^\mu \epsilon^\nu = -g^{\mu\nu} , \quad (4.38)$$

lo cual equivale a sumar únicamente sobre los dos grados transversales de polarización de un fotón *sin masa*.

Como fue señalado por Kinoshita y Sirlin [46], este procedimiento claramente es inconsistente. Para resolver esta inconsistencia, es necesario efectuar la suma sobre las polarizaciones del fotón de acuerdo a la siguiente relación [74][75]

$$\sum_{\epsilon} (\epsilon \cdot a)(\epsilon \cdot b) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{k})}{\omega^2} , \quad (4.39)$$

donde  $a$  y  $b$  son dos trivectores y  $\omega = \sqrt{\vec{K}^2 + \lambda^2}$  es la energía del fotón.. El resultado obtenido para la función de corrección de fotones suaves en este (nuestro) caso es:

$$I^{nos}(u, t, \lambda) = -\frac{1}{\beta} \left[ 2\beta + \ln \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \right] \ln \left[ \frac{k_{max}}{\lambda} \right] + I'(u, t) , \quad (4.40)$$

donde

$$k_{max} = \sqrt{\left( \frac{m_\tau^2 - 4m_{\pi^-}^2}{2m_\tau} \right)^2 - \lambda^2} \quad \beta \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2 m_\tau^2}{b^2}} , \quad b \equiv m_\tau^2 + m_\pi^2 - u , \quad (4.41)$$

y

$$\begin{aligned} I'(u, t) = & \frac{1}{2\beta} \left\{ \frac{b(1-\beta^2)}{2m_\tau^2} \left[ \ln \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right) + \left( 1 - \frac{m_\pi^2}{m_\tau^2} \right) \ln \left( \frac{2m_\tau^2 - b(1+\beta)}{2m_\tau^2 - b(1-\beta)} \right) \right] \right. \\ & - 2\beta + 2\beta \ln \left( \frac{(2m_\tau^2 - b)^2 - b^2\beta^2}{(m_\tau^2 - b)^2} \right) + 2 \ln \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \ln \left( \frac{m_\tau^2 - b}{2m_\tau^2} \right) \\ & \left. + 2\text{Li} \left( \frac{b}{2m_\tau^2} (1+\beta) \right) - 2\text{Li} \left( \frac{b}{2m_\tau^2} (1-\beta) \right) \right\} . \end{aligned} \quad (4.42)$$

Esta expresión parece ser muy diferente de la que se obtuvo en la Ref.[17], por lo que es interesante ver cual es el efecto que la misma tendría en el cálculo de las correcciones radiativas totales. Al sumar las correcciones virtuales de ec.(4.30) y las correcciones debidas a los fotones suaves, y despues de integrar sobre la variable  $u$  definida en ec.(4.21), obtenemos el siguiente resultado para la distribución en la masa invariante de los dos piones del proceso  $\tau \rightarrow \pi\pi\nu(\gamma)$ :

$$\frac{d\Gamma_{\pi\pi[\gamma]}}{dt} = \frac{G_F^2 m_\tau^3 |V_{ud}|^2}{384\pi^3} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{t}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{t}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2t}{m_\tau^2}\right) |f_+(t)|^2 G_{EM}^0(t) , \quad (4.43)$$

donde la función  $G_{EM}^0(t)$  contiene la contribución a nivel árbol mas las correcciones radiativas que incluyen las correcciones virtuales y las correcciones debidas a los fotones reales suaves. Es interesante notar que, en ambos casos, la función de corrección de largas distancias es independiente de la masa ficticia del fotón por lo que este criterio no es suficiente para garantizar que el resultado de las correcciones radiativas es correcto.

La función  $G_{EM}^0(t)$  está definida mediante la siguiente expresión:

$$G_{EM}^0(t) = 1 + \frac{\int D_c(t, u) \Delta^0(t, u) du}{\int D_c(t, u) du} , \quad (4.44)$$

donde  $D_c(t, u)$  es la densidad cinemática del espacio fase de tres cuerpos

$$D_c(t, u) = \frac{m_\tau^2}{2} (m_\tau^2 - t) + 2m_\pi^4 - 2u(m_\tau^2 - t + 2m_\pi^2) + 2u^2 , \quad (4.45)$$

y  $\Delta^0(t, u, \lambda)$  es la suma de las correcciones virtuales  $2f_{Cir}(t, u, \lambda)$  eq.(4.30) y de las correcciones reales  $\alpha I(t, u, \lambda)/\pi$  ec.(4.33). Para propósitos de comparación, a continuación proporcionamos las expresiones explícitas de  $\Delta^0(t, u)$ . Al usar las correcciones reales de la

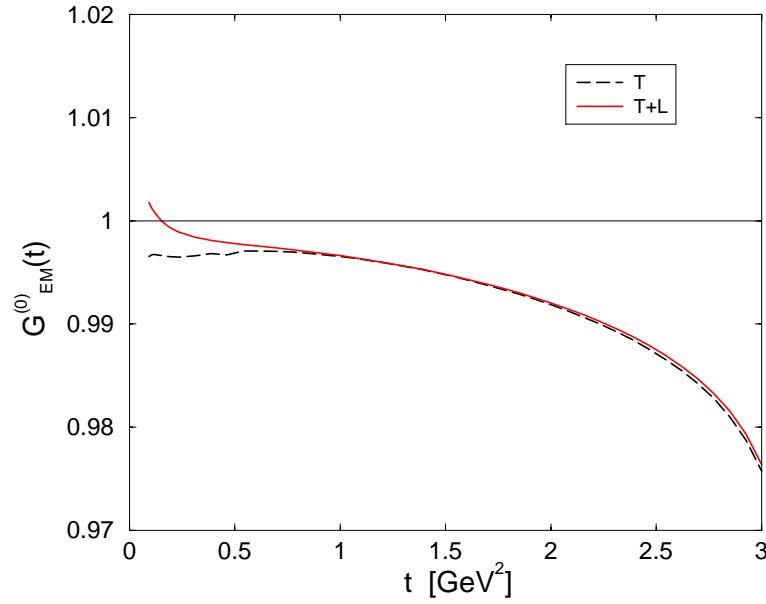


Figura 4.2: Comparación del cálculo de  $G_{EM}^0(t)$  sumando sobre 2 (línea entrecortada) y 3 (línea sólida) estados de polarización del fotón.

referencia [18], ecs.(4.34) y (4.35), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \Delta_T^0(t, u) = & \frac{\alpha}{\pi} \left\{ -\frac{y_\tau}{\sqrt{y_\tau^2 - 4r_\tau}} \ln[x_\tau] \ln \left[ \frac{4x_+^2(t, u)\bar{\gamma}^2}{m_\tau m_\pi} \right] + \ln \left[ \frac{(m_\tau^2 - t)(m_\tau^2 + m_\pi^2 - u - t)}{x_+^2(t, u)} \right] \right. \\
 & + \frac{y_\tau}{\sqrt{y_\tau^2}} \left[ \text{Li}_2 \left[ \frac{1}{Y_2} \right] - \text{Li}_2[Y_1] + \ln^2 \left[ \frac{-1/Y_2}{4} \right] - \ln^2 \left[ \frac{-1/Y_1}{4} \right] \right] \\
 & + \frac{1}{2u} [u - m_\pi^2] \left( -\frac{1}{2} \ln[r_\tau] + \frac{2 - y_\tau}{\sqrt{r_\tau}} \frac{x_\tau}{1 - x_\tau^2} \ln[x_\tau] \right) \\
 & + \frac{u - m_\pi^2 - m_\tau^2}{2u} \left( \frac{1}{2} \ln[r_\tau] + \frac{2r_\tau - y_\tau}{\sqrt{r_\tau}} \frac{x_\tau}{1 - x_\tau^2} \ln[x_\tau] \right) \\
 & + \frac{m_\pi^2 + m_\tau^2 - u}{m_\tau m_\pi} \frac{x_\tau}{1 - x_\tau^2} \left[ -\frac{1}{2} \ln[x_\tau] + 2 \ln[x_\tau] \ln[1 - x_\tau^2] - \frac{\pi^2}{6} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{8} \ln^2[r_\tau] + \text{Li}_2[x_\tau^2] + \text{Li}_2[1 - \frac{x_\tau}{\sqrt{r_\tau}}] + \text{Li}_2[1 - x_\tau \sqrt{r_\tau}] \right] \right\}. \quad (4.46)
 \end{aligned}$$

En el caso en que se toman en cuenta los tres grados de polarización del fotón masivo,

nosotros estamos obteniendo:

$$\begin{aligned}
\Delta_{L+T}^0(t, u) = & \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \frac{1}{2\beta} \left\{ \left[ 2\beta + \ln \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \right] \ln \left( \frac{m_\pi}{m_\tau} \right) + 2\beta \ln \left( \frac{(2m_\tau^2 - b)^2 - b^2\beta^2}{(m_\tau^2 - b)^2} \right) \right. \right. \\
& + \eta \left[ \ln \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right) + (1-r_\tau) \ln \left( \frac{1-\eta/(1-\beta)}{1-\eta(1+\beta)} \right) \right] - 2\beta \\
& + 2 \ln \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \ln \left( \frac{m_\tau^2 - b}{2m_\tau^2} \right) + 2\text{Li}_2 \left( \frac{\eta}{1-\beta} \right) - 2\text{Li}_2 \left( \frac{\eta}{1+\beta} \right) \} \\
& + 1 - 2 \ln 2 + \frac{1}{2\beta} \tanh^{-1} \beta \left[ 2 + 4 \ln 2 + \ln \left( \frac{1-\beta^2}{4} \right) \right] \\
& - \frac{1}{2\beta} \left[ 2\text{Li}_2(\beta) - 2\text{Li}_2(-\beta) + \text{Li}_2 \left( \frac{1-\beta}{2} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{1+\beta}{2} \right) \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{u-m_\pi^2}{u} \left( -\frac{1}{2} \ln r_\tau + \frac{2-y_\tau}{\sqrt{r_\tau}} \frac{x_\tau}{1-x_\tau^2} \ln x_\tau \right) \right. \\
& + \frac{u-m_\pi^2-m_\tau^2}{u} \left( \frac{1}{2} \ln r_\tau + \frac{2r_\tau-y_\tau}{\sqrt{r_\tau}} \frac{x_\tau}{1-x_\tau^2} \ln x_\tau \right) \\
& + \frac{2(m_\pi^2+m_\tau^2-u)}{m_\tau m_\pi} \frac{x_\tau}{1-x_\tau^2} \left[ -\frac{1}{2} \ln^2 x_\tau + 2 \ln x_\tau \ln(1-x_\tau^2) - \frac{\pi^2}{6} \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{8} \ln^2 r_\tau + \text{Li}_2(x_\tau^2) + \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{x_\tau}{\sqrt{r_\tau}} \right) + \text{Li}_2(1-x_\tau\sqrt{r_\tau}) \right] \right] \} . \quad (4.47)
\end{aligned}$$

En las expresiones anteriores hemos puesto un subíndice  $T$  ( $T + L$ ) para denotar que dichas correcciones se obtienen al considerar grados de libertad transversales (transversales mas longitudinal) para el fotón masivo. Puede observarse que ambas expresiones para las correcciones radiativas son independientes de la divergencia infrarroja (como debe de ser), aunque ellas difieren en varios de los los términos de las primeras dos líneas. Para poder ver la diferencia entre estas dos correcciones, en la figura (4.2) mostramos la gráfica de la corrección  $G_{EM}^0(t)$  en función de  $t$ . Sorprendentemente ambas correcciones son casi idénticas excepto para valores muy pequeños de  $t$  donde se puede apreciar una pequeña diferencia. Esto nos permite concluir que, a pesar de que el cálculo de las correcciones debidas a fotones suaves hechas en la referencia [17] es incorrecta, el efecto de hacerlas correctamente produce un cambio despreciable. En consecuencia, las correcciones de isospin que provienen de las correcciones radiativas al proceso  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  permanecen casi las mismas que las

reportadas en el cálculo incorrecto de la referencia [17][19].

## 4.4. Conclusiones

En este capítulo hemos revisado las correcciones radiativas al proceso  $\tau \rightarrow \pi\pi\nu$ . Como se discutió en las referencias [14]-[20], estas correcciones son de gran importancia en la evaluación de la corrección de isospin a la predicción de las correcciones hadrónicas al momento magnético del muon cuando se usan datos experimentales del leptón  $\tau$ .

En primer lugar revisamos las correcciones virtuales y logramos verificar que las mismas son idénticas a las calculadas anteriormente en la referencia [17] bajo la hipótesis de que el factor de forma del pion no varía con la energía. Demostramos también que las divergencias ultravioletas provenientes de las correcciones virtuales solo aparecen en un término que no es factorizable pero que en principio puede reabsorberse en la redefinición de las constantes de acoplamiento.

Finalmente, en esta tesis hicimos el cálculo correcto de las correcciones debidas a fotones (reales) suaves. En cálculos realizados anteriormente [17][19] se había supuesto que el fotón tiene una masa (ficticia), pero solo se había efectuado la suma sobre los dos grados transversales de la polarización del fotón. En esta tesis nosotros hicimos ese cálculo de manera consistente al efectuar la suma sobre los tres grados de polarización que debe tener un fotón masivo. Aunque los resultados analíticos son realmente diferentes, resulta sorprendente que para este caso el efecto de dicho cálculo correcto en las correcciones radiativas al espectro en la masa invariante de dos piones (la función  $G_{EM}^0(t)$ ) es muy pequeña.

# Capítulo 5

## Conclusiones Generales y Perspectivas

En el presente trabajo de tesis hemos estudiado los efectos del rompimiento de la simetría de isospin inducidos por las correcciones radiativas electromagnéticas en varias observables físicas asociadas con los decaimientos en dos partículas pseudoescalares. Nuestro trabajo se concentró principalmente en la evaluación de estas correcciones al orden  $\alpha$  en el régimen de largas distancias.

En todos los casos hemos usado el método de regularización dimensional para regularizar las divergencias ultravioletas y hemos introducido una pequeña masa ficticia para el fotón para regularizar las divergencias infrarrojas. En todos los casos hemos probado explícitamente la cancelación de las divergencias infrarrojas. En el caso de las correcciones debidas a fotones reales suaves, hemos realizado los cálculos de manera consistente tomando en cuenta los tres grados de polarización para el fotón masivo.

Nuestras conclusiones específicas para cada caso pueden resumirse de la siguiente forma:

1.- En el Capítulo 2 hemos calculado las anchuras totales de decaimiento de los mesones  $\rho^\pm$  y  $\rho^0$  con una precisión mayor a 0.5 %. Para ello hemos calculado las correcciones radiativas electromagnéticas a los modos  $\rho \rightarrow \pi\pi$  y las anchuras de los modos radiativos  $\rho \rightarrow \pi\pi\gamma$ . Nuestros resultados[76] muestran que existe una correlación importante en el rompimiento de la simetría de isospin entre las anchuras y las masas de los mesones  $\rho$ . En

las futuras medidas de estas cantidades a partir de los datos experimentales del factor de forma del pion, será necesario tomar en cuenta dichas correlaciones ya que las diferentes medidas experimentales efectuadas hasta ahora no son conclusivas respecto al tamaño y signo del rompimiento de la simetría de isospin.

En lo relativo a los modos de decaimientos radiativos ( $\rho \rightarrow \pi\pi\gamma$ ), hemos encontrado a partir de nuestros cálculos que el rompimiento de isospin es  $\Delta\Gamma_\rho = 1.1$  MeV, el cual difiere de los valores usados anteriormente  $\Delta\Gamma_\rho = 0.45 \pm 0.45$  MeV [13][17], en la evaluación de la contribución hadrónica al momento magnético anómalo del muon a partir de los datos del proceso  $\tau \rightarrow \pi\pi\nu$  [68][69][70]. Nuestros resultados podrían tener un efecto importante para encontrar una explicación a la discrepancia que existe actualmente entre las predicciones de la contribución hadrónica al momento magnético del muon basados en datos de la aniquilación  $e^+e^-$  [7][8][9] y en decaimientos del lepton  $\tau$  [68][69][70].

2.- En el capítulo 3 hemos calculado las correcciones radiativas de orden  $\alpha$  a los decaimientos  $\phi(1020) \rightarrow K^+K^-/K_LK_S$ . Los cálculos actuales de las correcciones radiativas a esta razón, efectuados usando la electrodinámica escalar, exceden en 4.5 desviaciones estandar al valor medido experimentalmente. Nuestro cálculo ha tomado en cuenta el efecto de la estructura de los kaones en el cálculo de las correcciones virtuales. Nuestros resultados[66] indican que no es posible explicar dicha discrepancia entre teoría y experimento basandose en metodos convencionales (es decir, tomando en cuenta la diferencia de masas de los kaones y las correcciones radiativas). Nuestra conclusión al respecto es que hay que esperar a que se realicen medidas mas precisas de estos decaimientos dominantes del meson vectorial  $\phi(1020)$  antes de pretender que la teoría falla.

3.-Finalmente, en el Capítulo 4 hemos reconsiderado las correcciones radiativas de orden  $\alpha$  en el decaimiento  $\tau \rightarrow \pi\pi\nu$ . Los datos experimentales sobre el espectro de dos piones en este proceso son de enorme importancia en la verificación de la hipótesis de CVC y en el cálculo de la contribucion hadrónica de la polarización del vacío al momento magnético anómalo del muon. En ambos casos es necesario tener un control de los efectos de rom-

pimiento del isospin del orden de unas cuantas partes por mil, y es ahí donde radica la importancia de las correcciones radiativas. En esta tesis hemos recalculado las correcciones virtuales a este proceso en la aproximación en que el factor de forma del pion es constante y hemos encontrado los mismos resultados que en la referencia [17]. Posteriormente, realizamos el cálculo de las correcciones debidas a fotones reales suaves. Esta parte de la corrección había sido calculado de forma incorrecta en la referencia [17][18] pues se consideraba que el fotón solo tenía dos grados (transversales) de polarización. Basados en los trabajos de Kinoshita y Sirlin [46], rehicimos este cálculo sumando sobre los tres grados de libertad del fotón masivo en las correcciones de fotones reales. Sin embargo, el resultado de las correcciones radiativas no difieren sensiblemente de las calculadas mediante el procedimiento incorrecto de la ref. [17] por lo que el impacto en la predicción teórica de  $a_\mu$  a partir de datos del  $\tau$ , no es significativo.

La perspectiva del trabajo realizado está centrada principalmente en los estudios del capítulo 2 y 4. El resultado obtenido para  $\Delta\Gamma_\rho$  en el capítulo 2 puede ser usado en conjunto con los resultados de las referencias [19][20] para obtener una predicción del momento magnético anómalo del muon  $a_\mu^{SM}(\tau)$  que incluirá, términos dependientes del modelo[19], [20] no considerados anteriormente y los efectos de rompimiento de la simetría de isospin en el meson  $\rho(770)$  obtenidos en esta tesis de manera consistente[76].



# Apéndice A

## Autoenergías de kaones

En el capítulo 3, se usa el factor de forma de VDM para modelar la estructura de los kaones. Como se menciona en dicho capítulo, las amplitudes en el caso de kaones puntuales se modifican al introducir el factor de forma. Para obtener las amplitudes de los diagramas de Feynman, se introduce por cada línea conectando un fotón con un kaon, un factor de forma  $f_{K^+}(k^2), f_{K^0}(k^2)$  según corresponda, procedimiento que también se realiza en los diagramas de auto-energía.

En este apéndice obtendremos la contribución de los diagramas de auto-energía considerando la estructura electromagnética de los kaones cargados (el procedimiento se realiza de manera similar al considerar la estructura en el caso de los kaones neutros). Se muestra que al considerar todos los diagramas de Feynman del proceso, la divergencia ultravioleta se cancela.

Recordemos que la expresión para obtener la contribución de autoenergía de manera general, para el caso de partículas escalares es:

$$\mathcal{M}^{SE} = \frac{\mathcal{M}^0 e^2}{2i} (\partial \Sigma_{P^+} / \partial p^2) \Big|_{p^2 = m_{P^+}^2} . \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathcal{M}^0$  es la amplitud a nivel de árbol del proceso en el cual aparece el escalar cargado (por ejemplo,  $\phi \rightarrow K^+ K^-$ ),  $\Sigma_{P^+}$  es la función de auto-energía del escalar cargado denotado como  $P^+$  y cuyo momento se ha denotado por  $p$ .

Definimos la función de autoenergía  $\Sigma_{K^+}^{VDM}(p, m_{K^+}, m_V)$  para los kaones cargados considerando el factor de forma. La parte divergente se obtiene después obtener la derivada (ver (A.1)). Usando la expansión del factor de forma que permite identificar el caso puntual ec.(3.36) obtenemos la función de auto-energía

$$\begin{aligned}\Sigma_{K^+}^{VDM}(p, m_{K^+}, \hat{m}_V) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{[2p+k]^2 [f_{K^+}]^2 dk^4}{k^2 [(p+k)^2 - m_{K^+}^2]} \\ &= \Sigma_{K^+}^0(p, m_K) + \Sigma_{K^+}^a(p, m_{K^+}, \hat{m}_V) + \Sigma_{K^+}^b(p, m_{K^+}, \hat{m}_{V^i}, \hat{m}_{V^j}) ,\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

donde

$$\begin{aligned}\Sigma_{K^+}^0(p, m_{K^+}) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{[2p+k]^2 dk^4}{k^2 [(p+k)^2 - m_{K^+}^2]} , \\ \Sigma_{K^+}^a(p, m_{K^+}, m_V) &= 2 \sum \frac{g_{VK^+K^-}}{f_V} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{[2p+k]^2 k^2 dk^4}{k^2 [(p+k)^2 - m_{K^+}^2] [-k^2 + \hat{m}_V^2]} , \\ \Sigma_{K^+}^b(p, m_{K^+}, \hat{m}_{V^i}, \hat{m}_{V^j}) &= \sum \sum \frac{g_{V^i K^+ K^-}}{f_{V^i}} \frac{g_{V^j K^+ K^-}}{f_{V^j}} \frac{1}{(2\pi)^4} \int [2p+k]^2 k^4 dk^4 \\ &\quad \times \frac{1}{k^2 [(p+k)^2 - m_{K^+}^2] [-k^2 + \hat{m}_{V^i}^2] [-k^2 + \hat{m}_{V^j}^2]} .\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

El primer término es la contribución a la función de auto-energía en el caso de kaones puntuales, la cual ya ha sido estudiado con anterioridad. Éste contiene una parte divergente infrarroja que se cancela al sumarle la contribución de fotones reales y una parte divergente ultravioleta que desaparece al sumarla a la corrección al vértice. La amplitud de auto-energía en el caso puntual es:

$$\mathcal{M}_{K^+}^{SE, \text{point}} = \mathcal{M}_\phi^0 \times \left[ \frac{\alpha}{4\pi} \right] \frac{1}{2} \left[ 2 \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln[4\pi] \right] - 2 \ln \left[ \frac{m_{K^+}^2}{\mu^2} \right] - 2 \ln \left[ \frac{\lambda^2}{m_{K^+}^2} \right] \right] . \quad (\text{A.4})$$

Al evaluar el segundo término en la ec. (A.3) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{K^+}^a(p, m_{K^+}, \hat{m}_V) &= -2 \sum \frac{g_{VK^+K^-}}{f_V} \frac{[2p^2 + 2m_{K^+}^2 - \hat{m}_V^2]}{(2\pi)^4} \int \frac{dk^4}{[k^2 - \hat{m}_V^2] [(p+k)^2 - m_{K^+}^2]} \\
 &\quad -2 \sum \frac{g_{VK^+K^-}}{f_V} \frac{2}{(2\pi)^4} \int \frac{dk^4}{[k^2 - \hat{m}_V^2]} \\
 &\quad +2 \sum \frac{g_{VK^+K^-}}{f_V} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dk^4}{[(p+k)^2 - m_{K^+}^2]} \\
 &= -2 \sum \frac{g_{VK^+K^-}}{f_V} [2p^2 + 2m_{K^+}^2 - \hat{m}_V^2] \frac{\imath}{16\pi^2} B0 [p^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_V^2] \\
 &\quad -2 \sum \frac{g_{VK^+K^-}}{f_V} \frac{2\imath}{16\pi^2} A0 [\hat{m}_V^2] + 2 \sum \frac{g_{VK^+K^-}}{f_V} \frac{\imath}{16\pi^2} A0 [m_{K^+}^2] .
 \end{aligned}$$

La derivada de este término con respecto a  $p^2$  evaluada en  $p^2 = m_{K^+}^2$  da lugar a la contribución (divergente UV):

$$\partial \Sigma_{K^+}^a(p, m_{K^+}, \hat{m}_V) / \partial p^2|_{p^2} = m_{K^+}^2 = -2 \frac{\imath}{16\pi^2} \sum \frac{g_{VK^+K^-}}{f_V} 2 \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln[4\pi] - \ln \left[ \frac{m_{K^+}^2}{\mu^2} \right] \right] \quad (A.5)$$

El tercer término de la ec.(A.3) es:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{K^+}^b(p, m_{K^+}, \hat{m}_{V^i}, \hat{m}_{V^j}) &= \imath \sum \sum \frac{g_{V^i K^+ K^-}}{f_{V^i}} \frac{g_{V^j K^+ K^-}}{f_{V^j}} \left[ \frac{2p^2 + 2m_{K^+}^2 - \hat{m}_{V^i}^2}{16\pi^2} \right] \times \\
 &\quad \{ B0 [p^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2] + \hat{m}_{V^i}^2 C0 [0, p^2, m_{K^+}^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^i}^2, \hat{m}_{V^j}^2] \} \\
 &\quad + \frac{2\imath}{16\pi^2} \sum \sum \frac{g_{V^i K^+ K^-}}{f_{V^i}} \frac{g_{V^j K^+ K^-}}{f_{V^j}} \{ \hat{m}_{V^j}^2 B0 [0, \hat{m}_{V^i}^2, \hat{m}_{V^j}^2] \\
 &\quad + A0 [\hat{m}_{V^j}^2] \} \\
 &\quad - \sum \sum \frac{g_{V^i K^+ K^-}}{f_{V^i}} \frac{g_{V^j K^+ K^-}}{f_{V^j}} \frac{\imath}{16\pi^2} \{ \hat{m}_{V^j}^2 B0 [p^2, m_{K^+}^2, \hat{m}_{V^j}^2] \\
 &\quad + A0 [m_{K^+}^2] \}
 \end{aligned}$$

La derivada de la expresión anterior evaluada en  $p^2 = m_{K^+}^2$  da lugar a la contribución divergente :

$$\partial \Sigma_K^b(p, m_{K^+}, \hat{m}_{V^i}, \hat{m}_{V^j}) / \partial p^2|_{p^2=m_{K^+}^2} = \sum \sum \frac{g_{V^i K^+ K^-}}{f_{V^i}} \frac{g_{V^j K^+ K^-}}{f_{V^j}} \frac{\imath}{16\pi^2} 2 [\Delta] , \quad (A.6)$$

donde  $\Delta \equiv \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln [4\pi] - \ln \left[ \frac{m_{K^+}^2}{\mu^2} \right]$ .

Sumando las contribuciones de la función de auto-energía ecs.(A.4, A.5, A.6), la amplitud del diagrama de auto-energía en el VDM es:

$$\mathcal{M}_{SE}^{VDM} = \frac{\mathcal{M}_\phi^0}{2} \times \frac{\alpha}{4\pi} \left[ f_{VDM}^0(2\Delta) - 2 \ln \left[ \frac{\lambda^2}{m_{K^+}^2} \right] \right], \quad (\text{A.7})$$

donde ahora se ha definido

$$f_{VDM}^0 = \left[ 1 - 2 \sum \frac{g_{VK^+K^-}}{f_V} + \sum \sum \frac{g_{V^i K^+ K^-}}{f_{V^i}} \frac{g_{V^j K^+ K^-}}{f_{V^j}} \right].$$

Es fácil mostrar que el resultado total del cálculo usando VDM es finito en el ultravioleta. Esto se puede hacer retomando la amplitud  $\mathcal{M}_{1+2}^{VDM}$  del capítulo 3 (ec. (3.43)) y aislando en ella la parte que depende del término divergente  $\Delta$  en la siguiente forma:

$$\mathcal{M}_{1+2}^{VDM} = \bar{\mathcal{M}}_{1+2}^{VDM} - \mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} f_{VDM}^0 [3\Delta]. \quad (\text{A.8})$$

donde  $\bar{\mathcal{M}}_{1+2}^{VDM}$  contiene solo términos finitos en el ultravioleta. Haciendo lo mismo para la amplitud del diagrama de Coulomb (Ver ecs. 3.44, 3.45, 3.47 y 3.49) obtenemos:

$$\mathcal{M}_3^{VDM} = \bar{\mathcal{M}}_{Coul}^{VDM} + \mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} f_{VDM}^0 [\Delta]. \quad (\text{A.9})$$

Sumando las 2 contribuciones de auto-energía (A.7) con (A.8),(A.9) se obtiene que la expresión total se escribe

$$\mathcal{M}_{VDM}^T = \bar{\mathcal{M}}_{VDM}^T + \mathcal{M}_\phi^0 \times \frac{\alpha}{4\pi} f_{VDM}^0 [-3\Delta + \Delta + 2\Delta]. \quad (\text{A.10})$$

La amplitud total  $\bar{\mathcal{M}}_{VDM}^T$  es libre de divergencias ultravioleta y además, independiente de la escala  $\mu$  introducida en el proceso de regularización dimensional, una vez que se suman todas las amplitudes, incluyendo los diagramas de autoenergía modificados.

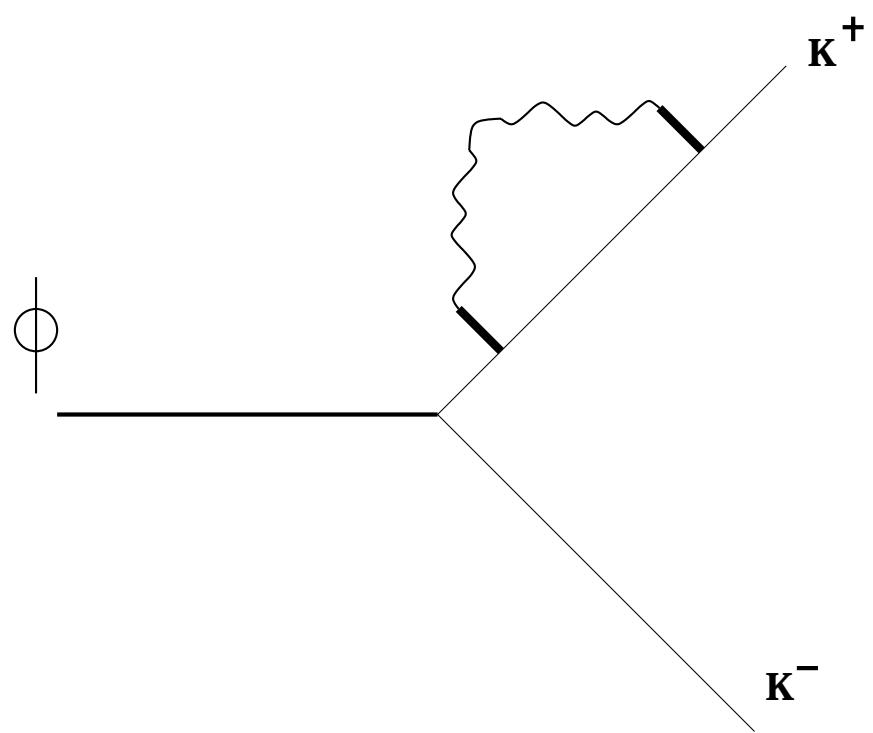


Figura A.1: Diagrama de auto-energía considerando la estructura del kaon cargado  $K^+$ .



# Apéndice B

## El proceso radiativo $V \rightarrow P^+ P^- \gamma$

En este apéndice mostramos en forma detallada el cálculo del proceso radiativo  $V \rightarrow P^+ P^- \gamma$ . En la sección de las evaluaciones numéricas nos concentraremos en el caso del proceso  $\phi \rightarrow K^+ K^- \gamma$ .

### B.1. Emisión de fotones reales suaves

La divergencia infrarroja presente en las correcciones radiativa virtuales se cancela con la adición de la contribución de fotones reales suaves, tal como se menciona en el capítulo 2. En el cálculo a 1 lazo (correcciones radiativas virtuales), la divergencia infrarroja se origina cuando el  $k^2 \rightarrow 0$  ( $k$  es el momento del fotón virtual en el loop). Para aislar la divergencia, es usual agregar un parámetro  $\lambda$  en el propagador del fotón que representa una masa ficticia para éste. Al final del cálculo, se toma el límite  $\lambda \rightarrow 0$  y se recupera QED, mientras que la divergencia infrarroja queda aislada en forma logarítmica.

La emisión de un fotón real suave (de energía pequeña comparada con la resolución del experimento) también da lugar a una divergencia infrarroja la cual se regulariza también introduciendo una masa ficticia para el fotón. Al sumar sobre las polarizaciones del fotón real para obtener la probabilidad de desintegración del proceso radiativo, es necesario tomar en cuenta que se debe sumar sobre los 3 grados de polarización del fotón masivo. Recordemos que en el caso de fotones reales sin masa, existen solo dos estados (transversales)

de polarización por lo que la siguiente relación se satisface en ese caso:

$$\sum_{pol} \epsilon^\mu \epsilon^\nu = -g^{\mu\nu} . \quad (B.1)$$

Introducir un parámetro de masa significa que no podemos utilizar ya esta relación. Es necesario ahora, introducir también el modo longitudinal correspondiente [41]. En este sección mostraremos el procedimiento correcto para calcular esta contribución.

La expresión para la suma sobre las polarizaciones transversales longitudinales del fotón masivo en la norma de Coester[74][75], se escribe como:

$$\sum_{\epsilon} (\epsilon \cdot a)(\epsilon \cdot b) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}}{\omega^2} , \quad (B.2)$$

donde ahora estamos empleando la relación energía-momento del fotón dada por  $\omega^2 = k^2 + \lambda^2$ .

A pesar de que la ec.(C.2) parece que es no covariante, hemos de señalar que se ha elegido una norma (Coester) para escribir dicha relación, lo que significa que se ha fijado la parametrización de los vectores de polarización. El cálculo se realiza en el sistema de referencia en el que el mesón vectorial se encuentra en reposo, y  $\mathbf{k}$  sobre el eje z.

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= (0, 0, k) , \\ \epsilon_1^\mu &= (0, 1, 0, 0) , \\ \epsilon_2^\mu &= (0, 0, 1, 0) . \end{aligned} \quad (B.3)$$

Para obtener la expresión en otro sistema de referencia es necesario acompañar la transformación de Lorentz con una transformación de norma correspondiente.

Tomando en cuenta solo el término divergente de la amplitud de Low, la anchura de decaimiento del proceso  $V \rightarrow P^+ P^- \gamma$  para un fotón suave se escribe (después de integrar

sobre los momentos de los pseudoscalares) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma_{\gamma}^{soft}}{\Gamma_{\phi}^0} &= \frac{\alpha}{4\pi} \sum_{\epsilon} \frac{1}{\pi} \int \left| \frac{q \cdot \epsilon}{q \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} \right|^2 \frac{d^3 \vec{k}}{\omega} \\
 &= \frac{\alpha}{4\pi} [I_1 + I_2 + I_{12}] \\
 I_1 &= \sum_{\epsilon} \frac{1}{\pi} \int \left| \frac{q \cdot \epsilon}{q \cdot k} \right|^2 \frac{d^3 \vec{k}}{\omega}, \\
 I_2 &= \sum_{\epsilon} \frac{1}{\pi} \int \left| \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} \right|^2 \frac{d^3 \vec{k}}{\omega}, \\
 I_{12} &= -2 \sum_{\epsilon} \frac{1}{\pi} \int \frac{[q \cdot \epsilon][p \cdot \epsilon]}{[q \cdot k][p \cdot k]} \frac{d^3 \vec{k}}{\omega}. \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

La suma sobre las polarizaciones del fotón real se realiza usando ec.(B.2). La integración en el ángulo azimutal es trivial, y el siguiente paso es realizar la integración en el ángulo polar  $\theta$ . Enfocándonos en las 2 primeras integrales

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{\pi} \int \frac{2\pi k^2 \sin \theta d\theta dk |\vec{q}|^2 (1 - \frac{|\vec{k}|^2 \cos^2 \theta}{\omega^2})}{\omega(q \cdot k)^2}, \\
 I_2 &= \frac{1}{\pi} \int \frac{2\pi k^2 \sin \theta d\theta dk |\vec{p}|^2 (1 - \frac{|\vec{k}|^2 \cos^2 \theta}{\omega^2})}{\omega(p \cdot k)^2},
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 p \cdot k &= \frac{m_{\phi}\omega}{2} \left[ 1 - \frac{|\vec{k}| \beta \cos \theta}{\omega} \right], \\
 q \cdot k &= \frac{m_{\phi}\omega}{2} \left[ 1 + \frac{|\vec{k}| \beta \cos \theta}{\omega} \right],
 \end{aligned}$$

y  $\beta$  es la velocidad del kaon en el sistema de reposo del mesón  $\phi$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m_{P^{\pm}}^2}{m_V^2}}.$$

Realizando la integración en la variable angular se muestra que el resultado final es el mismo para  $I_1$  y  $I_2$ .

$$\int_{-1}^1 \frac{1 - \frac{k^2}{\omega^2} x^2}{(1 \pm \beta \frac{k}{\omega} x)^2} dx = -\frac{2}{\beta^3 v (\beta^2 v^2 - 1)} [\beta v (\beta^2 (v^2 - 1) - 2) + (1 - \beta^2 v^2) \ln \left[ \frac{\beta v + 1}{\beta v - 1} \right]]. \tag{B.5}$$

donde  $v = k/\omega$ . Por lo tanto una vez realizada la integración angular, el resultado es el mismo para  $I_1 = I_2$ .

$$\begin{aligned} I = I_1 = I_2 &= \sum \frac{1}{\pi} \int \left| \frac{q \cdot \epsilon}{q \cdot k} \right|^2 \frac{d^3 k}{\omega} \\ &= \frac{1}{\pi} \int \frac{2\pi k^2 dk \sin \theta d\theta |\vec{q}|^2}{\omega q_0^2 (\omega + \beta k \cos \theta)^2} \left[ 1 - \frac{k^2}{\omega^2} \cos^2 \theta \right] . \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Usando el siguiente cambio de variable y modificando los límites de integración correspondientes de acuerdo con

$$v = \frac{k}{\omega}, \quad v_i = 0, \quad v_f = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}}, \quad (\text{B.7})$$

se obtiene que  $I$  se pude separar en 2 términos

$$\begin{aligned} I &= 4(I_1^a + I_1^b), \\ I_1^a &= \int \frac{v^2 [\beta^2(v^2 + 1) - 2] dv}{[1 - v^2][1 - v^2\beta^2]}, \\ I_2^a &= \frac{1}{\beta} \int \frac{v \ln \left[ \frac{1+\beta v}{1-\beta v} \right] dv}{1 - v^2} . \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Al final de la integración, todos los términos que dependen de  $\lambda$  tal que son cero en el límite  $\lambda \rightarrow 0$  se omiten, dando como resultado lo siguiente:

$$\begin{aligned} I_1^a &= 1 - 2 \ln[2] + \frac{1}{2\beta} \ln \left[ \frac{1+\beta}{1-\beta} \right] - 2 \ln \left[ \frac{\omega_0}{\lambda} \right] , \\ I_1^b &= -\frac{1}{2\beta} \ln \left[ \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \right] \ln \left[ \frac{1+\beta}{1-\beta} \right] - \frac{1}{2\beta} \left[ \text{Li}_2 \left[ \frac{1+\beta}{1-\beta} \right] - \text{Li}_2 \left[ \frac{1-\beta}{1+\beta} \right] \right. \\ &\quad \left. + \ln \left[ \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \right] \ln \left[ \frac{1+\beta}{1-\beta} \right] + \imath\pi \ln \left[ \frac{1+\beta}{1-\beta} \right] \right] . \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Incorporando los resultados en la ec.(B.8) se obtiene

$$\begin{aligned} I &= 4 \left[ -\ln \left[ \frac{\omega_0}{\lambda} \right] \left[ 2 + \frac{1}{\beta} \ln \left[ \frac{1-\beta}{1+\beta} \right] \right] - 2 \ln[2] + 1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\beta} \left[ \text{Li}_2 \left[ \frac{1-\beta}{1+\beta} \right] - \text{Li}_2 \left[ \frac{1+\beta}{1-\beta} \right] + \ln \left[ \frac{1+\beta}{1-\beta} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \ln \left[ \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \right] \ln \left[ \frac{1+\beta}{1-\beta} \right] - \imath\pi \ln \left[ \frac{1+\beta}{1-\beta} \right] \right] \right] . \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

La integración restante se realiza de manera similar

$$\begin{aligned}
I_{12} &= -\frac{2}{\pi} \int \frac{\vec{p} \cdot \vec{q} - \frac{\vec{q} \vec{k} \vec{p} \vec{k}}{\omega^2}}{(q \cdot k)(p \cdot k)} \frac{d^3 k}{\omega} \\
&= 4\beta^2 \int \frac{1 - \frac{k^2}{\omega^2} x^2}{1 - \beta^2 \frac{k^2}{\omega^2} x^2} \frac{k^2}{\omega^2} \frac{dk dx}{\omega} \\
&= 8 \left[ \frac{\beta^2}{2} \int \frac{k^2}{\omega^2} \frac{dk}{\omega} \int_{-1}^1 \frac{1 - v^2 x^2}{1 - \beta^2 v^2 x^2} dx \right] \\
&= 8 \int \frac{v^2}{1 - v^2} dv - 4 \frac{(1 - \beta^2)}{\beta} \int \frac{v \ln \left[ \frac{1 + \beta v}{1 - \beta v} \right]}{1 - v^2} dv \\
&= 4 \left[ -2 + 2 \ln [2] - \ln \left[ \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \right] - \frac{1 - \beta^2}{2\beta} \left[ -\ln \left[ \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \right] \ln \left[ \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right] \right. \\
&\quad \left. - (\text{Li}_2 \left[ \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right] - \text{Li}_2 \left[ \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right] + \ln \left[ \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right] \ln \left[ \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \right] + i\pi \ln \left[ \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right]) \right]. \tag{B.11}
\end{aligned}$$

Finalmente, incorporando los resultados de las ecs.(B.10, B.11) en la ec.(B.4) obtenemos que la contribución de fotones suaves es:

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma_\gamma^{soft}}{\Gamma_0} &= \frac{\alpha}{\pi} \left[ 2 \ln \left[ \frac{\lambda}{2\omega_0} \right] \left\{ 1 + \frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln \left[ \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right] \right\} - \frac{1}{\beta} \ln \left[ \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right] \right. \\
&\quad + \frac{1 + \beta^2}{2\beta} \left\{ \text{Li}_2 \left[ \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right] - \text{Li}_2 \left[ \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right] + i\pi \ln \left[ \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right] \right. \\
&\quad \left. \left. + \ln \left[ \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right] \ln \left[ \frac{4\beta^2}{1 - \beta^2} \right] \right\} \right]. \tag{B.12}
\end{aligned}$$

La expresión contiene el término divergente infrarrojo necesario para cancelar la divergencia que se encuentra en la corrección virtual. Mediante las relaciones entre dilogaritmos, esta expresión reproduce el resultado presentado en la ref.[11]

Supongamos ahora que hubiesemos usado la expresión (incorrecta) de la ec.(B.1) para efectuar la suma sobre polarizaciones del fotón,

$$\begin{aligned}
\Gamma_\gamma^{soft} &= -\Gamma_\phi^0 \left[ \frac{\alpha}{4\pi} \right] \frac{1 - \beta^2}{\pi} \int_0^{\omega_0} \left[ \frac{1}{\omega^2(1 + \beta \cos \theta)^2} + \frac{1}{\omega^2(1 - \beta \cos \theta)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2 \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}}{\omega^2(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} \right] \frac{d^3 \vec{k}}{\omega} \tag{B.13}
\end{aligned}$$

donde, como se ha usado la relación de suma sobre polarizaciones para fotón real, se tienen las expresiones:

$$\begin{aligned} p \cdot k &= \frac{\omega m_\phi}{2} [1 - \beta \cos \theta] \\ q \cdot k &= \frac{\omega m_\phi}{2} [1 + \beta \cos \theta] \\ |\vec{k}| &= \omega \end{aligned}$$

Una de las integrales a realizar la mostramos explícitamente

$$\begin{aligned} a &= \int_0^{\omega_0} \frac{d^3 \vec{k}}{\omega^2 (1 \pm \beta \cos \theta)^2} \\ &= 2\pi \int_0^{\omega_0} \frac{k^2 dk \sin \theta d\theta}{\omega^3 (1 \pm \beta \cos \theta)^2} \\ &= \frac{4\pi}{1 - \beta^2} \int_0^{\omega_0} \frac{|\vec{k}|^2 dk}{\omega^3} = \frac{4\pi}{1 - \beta^2} \int_\lambda^{\omega_0} \frac{d\omega}{\omega} \\ &= \frac{4\pi}{1 - \beta^2} \ln \left[ \frac{\omega_0}{\lambda} \right] \end{aligned}$$

donde en el penúltimo paso, se colocó el corte para realizar la integración. Es precisamente en esta etapa del procedimiento que suele cometerse una inconsistencia en el cálculo. Al sumar sobre polarizaciones del fotón se toma en cuenta 2 estados, sin embargo, al colocar el corte, esto implica una masa al fotón y por lo tanto se requiere considerar también el otro estado de polarización. La otra integral necesaria a resolver, usando el mismo procedimiento inconsistente señalado es:

$$\begin{aligned} b &= - \int_0^{\omega_0} \frac{\frac{2p \cdot q}{m_K^2} d^3 \vec{k}}{\omega^3 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} = - \frac{4\pi (1 + \beta^2)}{1 - \beta^2} \int_0^{\omega_0} \frac{|k|^2 dk \sin \theta d\theta}{\omega^3 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} \\ &= - \frac{4\pi}{\beta} \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \ln \left[ \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right] \int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{\omega} = - \frac{4\pi}{\beta} \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \ln \left[ \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right] \ln \left[ \frac{\omega_0}{\lambda} \right] \end{aligned}$$

La expresión para la razón de decaimiento se escribe como:

$$\Gamma_\gamma^{Soft} = \Gamma_\phi^0 \left[ \frac{\alpha}{\pi} \right] 2 \ln \left[ \frac{\lambda}{\omega_0} \right] \left[ 1 + \frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln \left[ \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right] \right] \quad (B.14)$$

Claramente la diferencia entre las expresiones incorrecta (B.14) y la correcta (B.12) son término finitos.

## B.2. Contribuciones finitas al decaimiento $\phi \rightarrow K^+K^-\gamma$

Ahora mostraremos la contribución de los términos de orden cero (en la energía del fotón) en la amplitud del decaimiento radiativo  $\phi \rightarrow K^+K^-\gamma$ .

El cálculo de la anchura de emisión de fotón suave solo toma en cuenta el término divergente en la energía del fotón (de orden  $\omega^{-1}$ ) de la amplitud radiativa. Recordemos que la probabilidad del proceso radiativo  $V \rightarrow P^+P^-$  puede descomponerse

$$\frac{1}{3} \sum |\mathcal{M}|^2 = A/\omega^2 + B\omega^0 \quad (\text{B.15})$$

El primer término es empleado para calcular el proceso de emisión de fotón suave, y el segundo término, que es finito en el límite  $\omega \rightarrow 0$ , se le denomina término regular. En el término regular puede usarse la suma sobre 2 estados de polarización del fotón sin problema. Para mostrar la contribución regular, tomaremos como caso particular el decaimiento  $\phi \rightarrow K^+K^-\gamma$

$$\begin{aligned} B\omega^0 &= \frac{16g^2\pi\alpha}{3} \left[ -L^2 \left[ (q \cdot k)^2/m_\phi^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + 1 + \frac{q \cdot k + p \cdot k}{m_\phi^2(p \cdot k)} \left[ m_\phi^2 - m_K^2 - m_K^2 \frac{q \cdot k}{p \cdot k} - 2q \cdot k \right] \right] \end{aligned}$$

y  $L$  está definida por la siguiente expresión[40]

$$L^2 = \frac{m_K^2}{(q \cdot k)^2} + \frac{m_K^2}{(p \cdot k)^2} - 2 \frac{q \cdot p}{(p \cdot k)(q \cdot k)}$$

La contribución del término regular se obtiene a partir de la razón diferencial de decaimiento siguiente

$$d\Gamma^r = \Gamma_\phi^0 \frac{4\alpha F}{\pi m_\pi^2 v_+^3} dE d\omega \quad (\text{B.16})$$

donde se ha definido a la función  $F$  como

$$\begin{aligned} F &= -L^2 \left[ (q \cdot k)^2/m_\phi^2 \right] \\ &\quad + 1 + \frac{q \cdot k + p \cdot k}{m_\phi^2(p \cdot k)} \left[ m_\phi^2 - m_K^2 - m_K^2 \frac{q \cdot k}{p \cdot k} - 2q \cdot k \right] \end{aligned}$$

La integración en la energía del fotón puede tomar el límite inferior  $\omega = 0$  sin problema alguno y se realiza hasta la energía máxima permitida por la cinemática del proceso. Al integrar sobre todo el espacio de fase del modo radiativo se obtiene:

$$\frac{\Gamma^r}{\Gamma_\phi^0} = 0.00007962 \quad (B.17)$$

El comportamiento del término regular en función de la energía de corte  $\omega_0$  se muestra en la siguiente tabla.

$\omega_0$ (MeV)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\delta_R^{inf} \times 10^5$	0.0148	0.0588	0.1309	0.2300	0.3552	0.5053	0.6791	0.8756	1.0936
$\delta_R^{sup} \times 10^5$	7.9477	7.9003	7.8316	7.7324	7.6073	7.4572	7.2834	7.0869	6.8689
$\omega_0$ (MeV)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\delta_R^{inf} \times 10^5$	1.3318	1.589	1.8638	2.1549	2.4608	2.7801	3.1111	3.4523	3.8018
$\delta_R^{sup} \times 10^5$	6.6307	6.3735	6.0987	5.8076	5.5017	5.1824	4.8514	4.5102	4.1660
$\omega_0$ (MeV)	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$\delta_R^{inf} \times 10^5$	4.1557	4.5185	4.8815	5.2444	5.6049	5.9599	6.3006	6.6404	6.9577
$\delta_R^{sup} \times 10^5$	3.8046	3.4440	3.0810	2.7181	2.3576	2.0026	1.6561	1.3221	1.0048
$\omega_0$ (MeV)	28	29	30	31	31.5				
$\delta_R^{inf} \times 10^5$	7.2527	7.5183	7.7441	7.9117	7.9592				
$\delta_R^{sup} \times 10^5$	0.7098	0.4442	0.2184	0.0508	0.0033				

Se obtiene  $\delta_R^{inf}$  integrando la parte regular en la energía del fotón, desde 0 hasta  $\omega_0$ , mientras que  $\delta_R^{sup}$  se obtiene integrando desde  $\omega_0$  hasta la energía máxima  $\omega_{max}$  permitido por la cinemática ( $\omega_{max} = 31.5966$ ). Claramente la suma  $\delta_R^{inf} + \delta_R^{sup}$  representa integrar la parte regular desde 0 hasta la energía máxima del fotón  $\omega_{max}$ .

### B.3. Contribuciones dependientes del modelo en $\phi \rightarrow K^+ K^- \gamma$

Supongamos ahora que existe un estado intermedio resonante en el proceso radiativo (el cual genera términos dependientes del modelo). En este caso, consideraremos  $\phi \rightarrow K^* K^-$

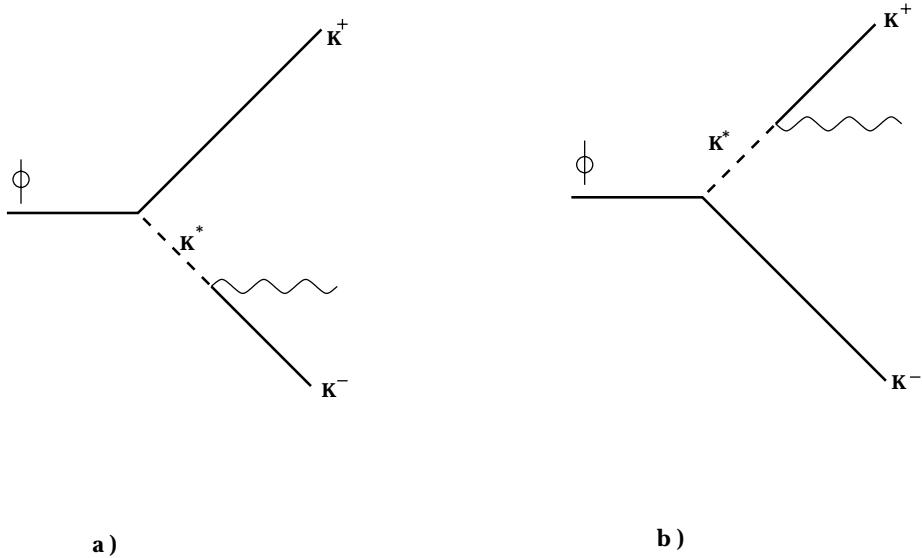


Figura B.1: Ejemplo de contribución dependiente del modelo al proceso  $\phi \rightarrow K^+K^-\gamma$ .

donde el mesón vectorial  $K^*$  luego decae mediante el proceso  $K^* \rightarrow K^+\gamma$ . Una contribución similar existe para el kaon negativo. Analizamos primero el caso del kaon negativo, la amplitud a nivel árbol del proceso es [77]

$$\mathcal{M}_{DM}^- = -\frac{g_{K^*K^-\gamma}g_{\phi K^*K^-}\epsilon^\nu\eta^\beta\epsilon_{\mu\nu\alpha\delta}\epsilon_{\lambda\beta\tau\delta}k^\mu(P-q)^\alpha P^\lambda(P-q)^\tau}{m_\phi^2 + m_{K^+}^2 - m_{K^*}^2 - 2P \cdot p}$$

de tal manera que el término de interferencia de esta amplitud con la de Low, sumada sobre polarizaciones es:

$$\sum \mathcal{M}_{DM}^-\mathcal{M}_{Low}^\dagger = \frac{-2eg_{\phi K\bar{K}}g_{\phi K^*K^-}g_{K^*K^+\gamma}(k \cdot p)(k \cdot P)^2 L^2}{m_\phi^2 + m_{K^+}^2 - m_{K^*}^2 - 2P \cdot p} \quad (B.18)$$

donde se recordará que

$$L = \frac{p^2}{(k \cdot p)^2} + \frac{q^2}{(k \cdot q)^2} - 2\frac{p \cdot q}{(k \cdot p)(k \cdot q)}$$

Para calcular la contribución a la anchura usamos la expresión siguiente

$$\frac{\Gamma_{DM}^-}{\Gamma^0\phi} = \int \frac{-2eg_{\phi K\bar{K}}g_{\phi K^*K^-}g_{K^*K^+\gamma}(k \cdot p)(k \cdot P)^2 L^2 dE d\omega}{[m_\phi^2 + m_{K^+}^2 - m_{K^*}^2 - 2P \cdot p] 4m_\phi^2 \pi^2 g_{\phi K\bar{K}}^2 v^3},$$

Usamos los siguientes valores de las constantes obtenidas bajo la simetría SU(3) (ver [64])

$$\begin{aligned}
 g_{\phi K^+ K^-} &= 4.48, \\
 g_{K^* K^+ \gamma} &= (2.53 \times 10^{-4}) \text{MeV}^{-1}, \\
 g_{\phi K^* K^-} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} G_{V_i V_f P}^8 \left[ \cos \theta_v + 2\sqrt{2}r \sin \theta_v \right], \\
 \theta_v &= 35.3^\circ, \\
 r &= 1.088, \\
 G_{V_i V_f P}^8 &= (1.052 \times 10^{-2}) \text{MeV}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Recordemos que la amplitud del modo radiativo es posible separarla de la siguiente manera

$$\mathcal{M}_\gamma^T = \mathcal{M}_\gamma^{MI} + \mathcal{M}_\gamma^{MD}, \quad (\text{B.19})$$

donde  $\mathcal{M}_\gamma^{MI}$  es la parte independiente del modelo, mientras que la dependencia del modelo (inclusión de estados intermedios en el proceso) está contenida en  $\mathcal{M}_\gamma^{MD}$ .

Así, la contribución dependiente e independiente del modelo a la anchura de decamiento del modo radiativo se puede dividir como sigue:

$$\Gamma_\gamma^T = \Gamma_\gamma^{MI} + \Gamma_\gamma^{MD}, \quad (\text{B.20})$$

donde  $\Gamma_\gamma^{MD}$  contiene, en este caso, el término de interferencia entre la amplitud independiente del modelo y la amplitud dependiente del modelo (ver ec(B.18)). La contribución dependiente del modelo (fig(B.1)) a la anchura de decamiento y normalizada a la anchura del modo no radiativo es:

$$\frac{\Gamma_\gamma^{MD}}{\Gamma_\phi^0} = -7.04 \times 10^{-8}. \quad (\text{B.21})$$

# Apéndice C

## Correcciones radiativas de convección en $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$

En este apéndice calculamos las correcciones radiativas virtuales al proceso  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$  en el caso que se consideran únicamente los términos de convección en los vértices electromagnéticos. En el Capítulo 2 de esta tesis se hizo el cálculo completo de estas correcciones virtuales.

El diagrama de auto-energía para el término de convección se reduce a:

$$\Sigma_{\pi^\pm} = \mathcal{M}^0 \frac{4\pi\alpha}{2} \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{[2p+k][2p+k] dk^4}{k^2 [(p+k)^2 - m_{\pi^+}^2]^2} . \quad (\text{C.1})$$

El término de convección del diagrama de interacción de Coulomb, expresado como función de la velocidad:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_c &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{g4\pi\alpha [2p-k] \cdot [2q+k] [(p-q) \cdot \eta] dk^4}{k^2 [(p-k)^2 - m_{\pi^+}^2] [(q+k)^2 - m_{\pi^+}^2]} \\ &= -\mathcal{M}^0 \frac{\alpha}{4\pi} \left[ -\Delta_{UV} - 2 + v_0 \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] + \frac{1+v_0^2}{v_0} \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] \ln \left[ \frac{\lambda^2}{m_{\pi^+}^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1+v_0^2}{v_0} \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] \left[ 2 \ln \left[ \frac{4v_0}{(1+v_0)^2} \right] - \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1+v_0^2}{v_0} \left[ \frac{\pi^2}{3} + \text{Li}_2 \left[ \frac{(1-v_0)^2}{(1+v_0)^2} \right] + 2\text{Li}_2 \left[ \frac{2}{1+v_0} \right] \right] \right] . \quad (\text{C.2}) \end{aligned}$$

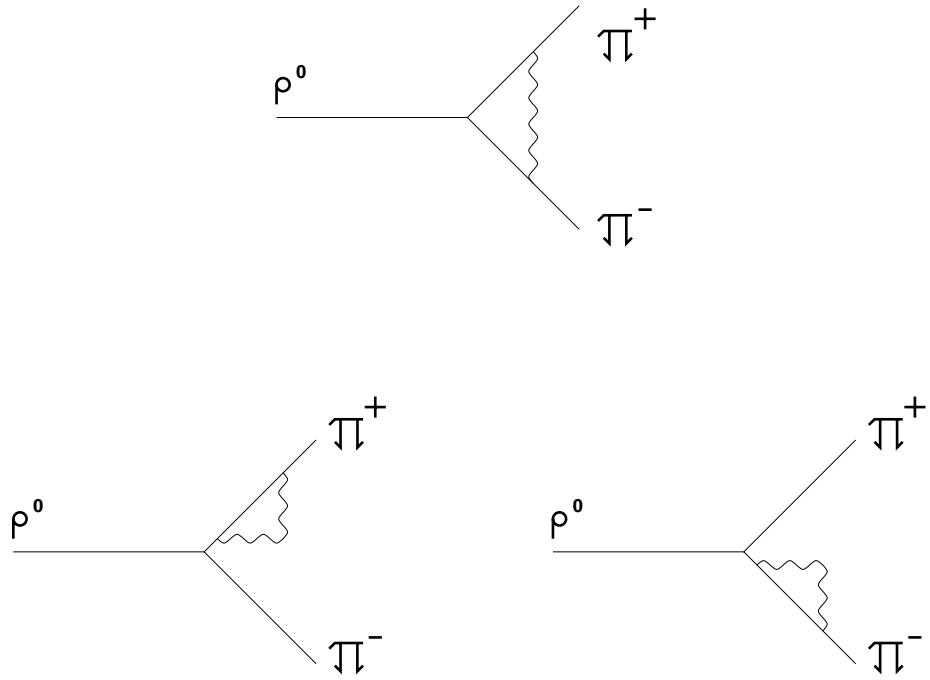


Figura C.1: Diagramas que dan lugar a los términos de convección.

donde  $\Delta_{UV}$  es el término divergente ultravioleta definido de la forma usual

$$\Delta_{UV} = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln[4\pi] - \ln \left[ \frac{m_{K^+}^2}{\mu^2} \right]$$

Sumando las contribuciones resultantes de auto-energías y del término de Coulomb se obtiene la contribución a las correcciones virtuales de los términos de convección la cual es finita en el ultravioleta y contiene todas las divergencias infrarrojas del cálculo

$$\begin{aligned}
 2f_v^{cc} = & \frac{\alpha}{\pi} \left[ -\ln \left[ \frac{\lambda^2}{m_{\pi^+}^2} \right] \left[ 1 + \frac{1+v_0^2}{2v_0} \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] \right] + \left[ \frac{1+v_0^2}{2v_0} \right] \pi^2 \right. \\
 & - \frac{1+v_0^2}{2v_0} \left[ \text{Li}_2 \left[ \frac{2}{1+v_0} \right] - \text{Li}_2 \left[ \frac{2}{1-v_0} \right] + 2(\text{Li}_2[v_0] - \text{Li}_2[-v_0]) \right] \\
 & \left. + \left[ 1 - \frac{v_0}{2} \ln \left[ \frac{1-v_0}{1+v_0} \right] \right] \right]. \tag{C.3}
 \end{aligned}$$

En la siguiente tabla se muestra la corrección radiativa que resulta de considerar los términos de convección en las correcciones virtuales que incluye la contribución de los

fotones suaves mostrados en el Capítulo 2. La evaluación numérica se obtuvo usando  $m_{\pi^+} = 139.57$  MeV,  $m_{\rho^0} = 775$  MeV.

$\omega_0$ (MeV)	$\delta_{\rho^0}^{cc}$
2	-0.04196
4	-0.03434
6	-0.02987
8	-0.02671
10	-0.02425
12	-0.02224
14	-0.02055
16	-0.01908
18	-0.01778
20	-0.01662
30	-0.01216
40	-0.008995
50	-0.006539
60	-0.004532
70	-0.002836
80	-0.001366
90	-0.000069
100	0.001089

El cálculo anterior es invariante de norma electromagnética (al igual que el resultado del caso cargado considerado en el Capítulo 2) como lo mostramos a continuación. El propagador del fotón mas general tiene la forma [78] :

$$D^{\mu\nu} = i \left[ \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{(1-\xi)k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2} \right], \quad (C.4)$$

donde el valor del parámetro  $\xi$  depende de la norma usada. Empleando la ec.(C.4) obtenemos un término adicional a la amplitud de autoenergía <sup>1</sup> el cual es divergente:

$$\begin{aligned} S_{\pi^+}^\xi &= \frac{\mathcal{M}^0 e^2 (1-\xi)}{2i(2\pi)^4} \int \frac{[(2p+k) \cdot k] [(2p+k) \cdot k] dk^4}{k^4 [(p+k)^2 - m_{\pi^+}^2]^2} \\ &= \frac{\mathcal{M}^0 (1-\xi) 4\pi\alpha}{2i} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dk^4}{k^4}. \end{aligned} \quad (C.5)$$

---

<sup>1</sup>A lo largo de la tesis hemos empleado la norma de Feynman para el popagador del fotón, por lo que el término adicional se debe a la segunda parte del propagador ec.(C.4)

De la misma manera, el término dependiente de la norma en el propagador del fotón genera un término divergente en el cálculo de la amplitud de Coulomb:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3^{c,\xi} &= \frac{\mathcal{M}^0 4\pi\alpha(1-\xi)}{\imath} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{[(2p-k) \cdot k] [(2q+k) \cdot k] dk^4}{k^4 [(p-k)^2 - m_{\pi^+}^2] [(q+k)^2 - m_{\pi^+}^2]} \\ &= -\frac{\mathcal{M}^0(1-\xi)4\pi\alpha}{\imath} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dk^4}{k^4}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Al sumar dichas contribuciones ellas se cancelan mutuamente, por lo que una elección distinta de la norma en el cálculo de las correcciones radiativas virtuales de los términos de convección no afecta el resultado final. Esto está en acuerdo con el resultado general enunciado por Sirlin[79], *las correcciones virtuales provenientes de los términos de convección son finitas en el ultravioleta, contienen todas las divergencias infrarrojas necesarias para cancelar la que proviene del bremsstrahlung suave y además son invariantes de norma*. El resultado de Sirlin fue obtenido usando la norma de Landau, pero de acuerdo a su enunciado, es posible elegir cualquier otra norma.

Una vez que se ha mostrado que el resultado satisface la invarianza de norma, resta por estudiar los términos restantes de la separación realizada en el tratamiento de las correcciones virtuales (ver capítulo ), que son finitos en el infrarrojo, pero contienen divergencias ultravioletas y posibles contribuciones finitas adicionales. El término restante del diagrama de auto-energía es divergente ultravioleta y puede escribirse como:

$$S_{\pi^+}^r = \mathcal{M}^0 \frac{\alpha}{4\pi} \sigma^r, \quad (\text{C.7})$$

donde  $\sigma^r$  es una función escalar de Lorentz y contiene divergencias ultravioleta.

El resto del diagrama de interacción de Coulomb tambien es finito en el infrarrojo, y se puede escribir como:

$$\mathcal{M}_3^{C,r} = \mathcal{M}^0 \frac{\alpha}{4\pi} f_3^r, \quad (\text{C.8})$$

donde la función escalar de Lorentz  $f_3^r$  contiene términos finitos y divergencias ultravioleta.

A primer orden en  $\alpha$  la amplitud del proceso se escribe como:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \mathcal{M}^0 + \mathcal{M}^c + \mathcal{M}^r \\ &= \mathcal{M}^0 + \mathcal{M}^0 f_v^{cc} + \mathcal{M}^0 f_v^r \\ f_v^r &= \frac{\alpha}{4\pi} [f_3^r + \sigma^r] .\end{aligned}$$

Tomando la amplitud al cuadrado, obtenemos que a orden  $\alpha$  se escribe como:

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}|^2 &= |\mathcal{M}^0|^2 [1 + f_v^{cc} + f_v^r]^2 \\ &\sim |\mathcal{M}^0|^2 [1 + 2\text{Re}alf_v^{cc} + 2\text{Re}alf_v^r] \\ &\sim |\mathcal{M}^0|^2 [1 + 2\text{Re}alf_v^{cc}] [1 + 2\text{Re}alf_v^r] \\ &\sim \imath g(p - q) \cdot \eta [1 + 2\text{Re}alf_v^{cc}] [1 + 2\text{Re}alf_v^r] \\ &= \imath g'(p - q) \cdot \eta [1 + 2\text{Re}alf_v^{cc}] ,\end{aligned}\tag{C.9}$$

donde se ha definido  $g' = g(1 + 2\text{Re}alf_v^r)$ .

Se ha mostrado que los términos restantes, cuando se ha sustraído los términos de convección, pueden ser absorbidos en una re-definición de la constante de acoplamiento fuerte.

La siguiente tabla muestra una comparación entre las correcciones radiativas al proceso  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$  que incluyen la correcciones virtuales en la aproximación en que se usan los términos de convección únicamente ( $\delta_\rho^{conv}$ ) con el caso en que se consideran de las correcciones completas ( $\delta_\rho$ ) obtenidas en el Capítulo 2. En ambos casos se usan las correcciones de fotones suaves para el caso de las correcciones reales. Los valores usados para las masas son  $m_{\rho^0} = 775$  MeV y  $m_{\pi^\pm} = 139.57$  MeV.

$w_0(MeV)$	$\delta_{\rho^0}$	$\delta_{\rho^0}^{conv}$
1	-0.04455	-0.04959
2	-0.03692	-0.04196
4	-0.02929	-0.03434
6	-0.02483	-0.02987
8	-0.02166	-0.02671
10	-0.01921	-0.02425
12	-0.01720	-0.02224
14	-0.01550	-0.02055
16	-0.01403	-0.01908
18	-0.01274	-0.01778
20	-0.01158	-0.01662
25	-0.009126	-0.01417
30	-0.007120	-0.01216
35	-0.005423	-0.01046
40	-0.003954	-0.008995
45	-0.002657	-0.007698
50	-0.001498	-0.006539
60	0.000508	-0.004532
70	0.002204	-0.002836
80	0.003674	-0.001366
90	0.00497	-0.000069
100	0.00613	0.001089

## Apéndice D

### Contribución de los términos regulares en $\rho \rightarrow \pi\pi\gamma$

En el cálculo del Bremsstrahlung suave  $\rho \rightarrow \pi\pi\gamma$ , se tomó de la amplitud al cuadrado, solo la contribución del término de orden  $\omega^{-2}$ . Los demás términos que no presentan el problema de divergencia infrarroja (de orden  $\omega^0$ ) son presentados en este apéndice. En la evaluación de estos términos regulares en  $\omega$  se emplea la suma sobre los 2 estados de polarización del fotón.

Recordemos que la cinemática de decaimiento de  $1 \rightarrow 3$  cuerpos (ver apéndice D de [64]) permite escribir la anchura diferencial del proceso  $\rho \rightarrow \pi\pi\gamma$  como:

$$d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{3(2\pi)^3 8m_\rho} dE d\omega$$

donde  $E$  es la energía del  $\pi^+$  cuyo intervalo está limitado por los valores máximo ( $E_+$ ) y mínimo ( $E_-$ ):

$$\begin{aligned} E_\pm &= \frac{1}{2(m_\rho^2 - 2\omega m_\rho)} [m_\rho^3 - 3\omega m_\rho^2 + 2\omega^2 m_\rho + \Delta_\pi^2(m_\rho - \omega) \\ &\quad \pm \omega \sqrt{m_\rho^4 - 4\omega m_\rho^3 + (4\omega^2 + 2\Delta_\pi^2 - 4m_\pi^2)m_\rho^2 + (8m_\pi^2\omega - 4\omega\Delta_\pi^2)m_\rho + \Delta_\pi^2}] \end{aligned}$$

donde  $\Delta_\pi^2 = m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^-}^2$ .

Las expresiones de los términos regulares pueden ser encontrados en las ref.[38],[40]. Se usa la masa  $m_{\rho^\pm} = m_{\rho^0} = 775\text{MeV}$ ,  $m_{\pi^\pm} = 139.57\text{MeV}$ ,  $m_{\pi^0} = 134.97\text{MeV}$ . Para

propósitos de comparación, también se muestran los resultados para el caso de la simetría de isospin en las masas de los piones  $m_{\pi^+} = m_{\pi^0}$  (en el caso del decaimiento  $\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ )

$\omega_0$ (MeV)	10	20	30	40	50
$\delta_{\rho^0}^r$	$4.54 \times 10^{-6}$	$1.78 \times 10^{-5}$	$3.94 \times 10^{-5}$	$6.88 \times 10^{-5}$	$1.05 \times 10^{-4}$
$\delta_r^{\rho^+}(m_{\pi^+} = m_{\pi^0})$	$1.07 \times 10^{-6}$	$4.27 \times 10^{-6}$	$9.59 \times 10^{-6}$	$1.70 \times 10^{-5}$	$2.65 \times 10^{-5}$
$\delta_r^{\rho^+}(m_{\pi^+} \neq m_{\pi^0})$	$1.06 \times 10^{-6}$	$4.25 \times 10^{-6}$	$9.55 \times 10^{-6}$	$1.69 \times 10^{-5}$	$2.64 \times 10^{-5}$
$\omega_0$ (MeV)	60	70	80	90	100
$\delta_{\rho^0}^r$	$1.49 \times 10^{-4}$	$1.99 \times 10^{-4}$	$2.55 \times 10^{-4}$	$3.16 \times 10^{-4}$	$3.83 \times 10^{-4}$
$\delta_r^{\rho^+}(m_{\pi^+} = m_{\pi^0})$	$3.81 \times 10^{-5}$	$5.17 \times 10^{-5}$	$6.73 \times 10^{-5}$	$8.49 \times 10^{-5}$	$1.04 \times 10^{-4}$
$\delta_r^{\rho^+}(m_{\pi^+} \neq m_{\pi^0})$	$3.79 \times 10^{-5}$	$5.15 \times 10^{-5}$	$6.70 \times 10^{-5}$	$8.46 \times 10^{-5}$	$1.04 \times 10^{-4}$
$\omega_0$ (MeV)	150				
$\delta_{\rho^0}^r$	$7.79 \times 10^{-4}$				
$\delta_r^{\rho^+}(m_{\pi^+} = m_{\pi^0})$	$2.3 \times 10^{-4}$				
$\delta_r^{\rho^+}(m_{\pi^+} \neq m_{\pi^0})$	$2.29 \times 10^{-4}$				

Como puede apreciarse, la contribución de los términos regulares es muy pequeña.

# Apéndice E

## Matrices de Dirac

Las matrices de Dirac satisfacen la relación de anticommutación

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad (E.1)$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \quad (E.2)$$

$$\gamma^5 = \imath\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (E.3)$$

Definiendo  $\mathcal{A} = \gamma^\mu A_\mu$ , donde  $A_\mu$  es un 4-vector, se tienen las siguientes identidades en D dimensiones[80].

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = D, \quad (E.4)$$

$$\gamma_\mu\mathcal{A}\gamma^\mu = (2 - D)\mathcal{A}, \quad (E.5)$$

$$\gamma_\mu\mathcal{B}\mathcal{C}\gamma^\mu = 4B \cdot C + (D - 4)\mathcal{B}\mathcal{C}, \quad (E.6)$$

$$\gamma_\mu\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\gamma^\mu = -2\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{A} + (4 - D)\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}. \quad (E.7)$$

Las matrices de Dirac tienen traza nula

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0, \quad (E.8)$$

$$\text{Tr}[\gamma^5] = 0. \quad (E.9)$$

Con las anteriores propiedades de las matrices se obtienen las siguientes reacciones útiles

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}, \quad (\text{E.10})$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] = 4(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}), \quad (\text{E.11})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu] = 0, \quad (\text{E.12})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] = -4\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (\text{E.13})$$

La condición de Hermiticidad

$$\gamma^{\mu,\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad (\text{E.14})$$

$$\gamma^{5,\dagger} = \gamma^5 \quad (\text{E.15})$$

# Apéndice F

## Funciones de Passarino-Veltman.

Las funciones Passarino-Veltman están definidas de la forma siguiente[43]:

$$\begin{aligned} \frac{\imath A0(m_0)}{16\pi^2} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 - m_0^2} \\ \frac{\imath B0(p^2, m_0^2, m_1^2)}{16\pi^2} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{[k^2 - m_0^2][(k+p)^2 - m_1^2]} \\ \frac{\imath C0(p_1^2, p_2^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2)}{16\pi^2} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{[k^2 - m_0^2][(k+p_1)^2 - m_1^2][(k+p_2)^2 - m_2^2]} . \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

Las expresiones analíticas de algunas funciones de Passarino-Veltman que resultan útiles pueden ser obtenidas de las expresiones siguientes[81]:

$$\begin{aligned} A0(m_0) &= m_0^2 \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln[4\pi] - \ln \left[ \frac{m_0^2}{\mu^2} \right] + 1 \right] \\ B0(p^2, m_0^2, m_1^2) &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln[4\pi] - \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{p^2 x^2 - x(p^2 - m_0^2 + m_1^2) + m_1^2}{\mu^2} \right] . \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$



# Apéndice G

## Función dilogaritmo

La función dilogaritmo está definida como

$$\text{Li}_2(z) = - \int_0^1 \frac{\ln[1-zy]}{y} dy . \quad (\text{G.1})$$

Las siguientes relaciones se satisfacen [59], [60].

$$\begin{aligned} \text{Li}_2\left[\frac{1+v}{1-v}\right] &= \text{Li}_2\left[\frac{2v}{1+v}\right] - \frac{1}{2} \ln^2\left[\frac{1-v}{1+v}\right] + \zeta(2) \\ &\quad + \ln\left[\frac{1-v}{1+v}\right] \ln\left[\frac{2v}{1+v}\right] + i\pi \ln\left[\frac{1-v}{1+v}\right] . \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

$$\begin{aligned} \text{Li}_2\left[\frac{1-v}{1+v}\right] &= \text{Li}_2\left[\frac{-2v}{1-v}\right] - \frac{1}{2} \ln^2\left[\frac{1+v}{1-v}\right] + \zeta(2) \\ &\quad + \ln\left[\frac{1+v}{1-v}\right] \ln\left[\frac{2v}{1-v}\right] . \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

$$\begin{aligned} \text{Li}_2\left[\frac{2v}{1+v}\right] &= \text{Li}_2[v] - \text{Li}_2\left[\frac{1+v}{2}\right] - \zeta(2) - \frac{1}{2} \ln^2\left[-\left(\frac{1+v}{2}\right)\right] \\ &\quad + \text{Li}_2\left[\frac{v}{1+v}\right] + \text{Li}_2[2] - \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} \ln^2[1+v] \\ &\quad - i\pi \ln[1+v] + 2i\pi \ln[2] + 2i\pi \ln\left[\frac{1+v}{2}\right] . \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

$$\begin{aligned} \text{Li}_2\left[\frac{-2v}{1-v}\right] &= \text{Li}_2[-v] - \text{Li}_2\left[\frac{1-v}{2}\right] - \zeta(2) + \text{Li}_2[2] + \frac{1}{2}\ln^2[1-v] \\ &\quad - \frac{1}{2}\ln^2\left[\frac{1-v}{2}\right] + \text{Li}_2\left[\frac{-v}{1-v}\right] + i\pi\ln[2] . \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

$$\text{Li}_2\left[\frac{-v}{1-v}\right] = \zeta(2) - \frac{1}{2}\ln^2\left[\frac{v-1}{v}\right] + \ln\left[\frac{v-1}{v}\right]\ln\left[\frac{-1}{v}\right] + \text{Li}_2\left[\frac{1}{v}\right] . \quad (\text{G.6})$$

$$\text{Li}_2\left[\frac{v}{1+v}\right] = \zeta(2) - \frac{1}{2}\ln^2\left[\frac{v+1}{v}\right] + \ln\left[\frac{v+1}{v}\right]\ln\left[\frac{1}{v}\right] + \text{Li}_2\left[\frac{1}{-v}\right] . \quad (\text{G.7})$$

$$\text{Li}_2\left[\frac{1}{v}\right] = -\text{Li}_2[v] - \frac{1}{2}\ln^2[v] - \zeta(2) + i\pi\ln[v] + \frac{\pi^2}{2} . \quad (\text{G.8})$$

$$\text{Li}_2\left[\frac{1}{-v}\right] = -\text{Li}_2[-v] - \frac{1}{2}\ln^2[v] - \zeta(2) . \quad (\text{G.9})$$

$$\ln^2[-v] = \ln^2[v] + 2i\pi\ln[v] - \pi^2 . \quad (\text{G.10})$$

La función de  $\zeta(2)$  de Riemann esta definida como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} . \quad (\text{G.11})$$

En particular  $\zeta(2) = \pi^2/6$ .

# Bibliografía

- [1] W. Heisenberg, Zeitschrift für Physik **A 77**, 1 (1932);  
E. Wigner, Phys. Rev. **51**, 106 (1937).
- [2] J. Chadwick, Nature **129**, 312 (1932).
- [3] W.M. Yao *et al* (Particle Data Group), J. Phys. **G 33**, 1 (2006).
- [4] K. Ackerstaff *et al* (OPAL Collaboration), Eur. Phys. J. **C 7**, 571 (1999).
- [5] S. Anderson *et al* (CLEO Collaboration), Phys. Rev. **D 61**, 112002 (2000).
- [6] R. Barate *et al* (ALEPH Collaboration), Phys. Rep. **421**, 191 (2005).
- [7] M. N. Achasov, Nucl. Phys. **B (Proc. Suppl.)162**, 114 (2006).
- [8] R.R. Akhmetshin *et al* (CMD2 Collaboration), Phys. Rev. Lett. **B 364**, 199 (1995).
- [9] R.R. Akhmetshin *et al* (SND Collaboration), Phys. Rev. **D 63**, 072002 (2001).
- [10] P. Gauzi *et al*, Int. Journal of Modern Physics **A 22**, 357 – 364 (2007).
- [11] E. Cremmer and M. Gourdin, Nucl. Phys. **B 9**, 451 (1969).
- [12] A. Bramon, R. Escribano, J.L. Lucio M. and G. Pancheri, Phys. Lett. **B 486**, 406 (2000).
- [13] R. Alemany, M. Davier and A. Höcker, Eur. Phys. J. **C 2**, 123 (1998).
- [14] M. Davier *et al*, Eur. Phys. J. **C 31**, 503 (2003)
- [15] M. Davier, A. Hocker and Z. Zhang, Rev. Mod. Phys. **78**, 1043 (2006).
- [16] M. Davier, Nucl. Phys. **B (Proc. Supl.) 169**, 288 (2007)
- [17] V. Cirigliano, G. Ecker and H. Neufeld, JHEP **0208**, 002 (2002).

- [18] V. Cirigliano, G. Ecker and H. Neufeld, Phys. Lett. **B 513**, 361 (2001).
- [19] F. Flores-Baéz, A. Flores-Tlalpa, G. López Castro and G. Toledo Sánchez, Phys. Rev. **D 74**, 071301 (2006).
- [20] F. Flores-Baéz, A. Flores-Tlalpa, G. López Castro and G. Toledo Sánchez, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **169**, 250 (2007).
- [21] G.W. Bennett *et al*, Phys. Rev. **D 73**, 072003 (2006).
- [22] G.W. Bennett *et al* (The g-2 Collaboration), Phys. Rev. Lett. **92**, 161802 (2004); Phys. Rev. Lett. **89**, 101804 (2002);  
H. N. Brown, Phys. Rev. Lett. **86**, 2227 (2001);  
Phys. Rev. **D 62**, 091101 (2000);  
Phys. Rev. Lett. **82**, 1632 (1999).
- [23] M. Davier, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **131**, 192 (2004).
- [24] The Belle Collaboration, arXiv: 0805.7773 v1[hep-exp], 24 Mayo 2008.
- [25] M. Gourdin and E. de Rafael, Nucl. Phys. **B 10**, 667 (1969).
- [26] S.J. Brodsky and E. de Rafael, Phys. Rev. **168**, 1620 (1968);  
B.E. Lautrup and E. de Rafael, Phys. Rev. **174**, 1835 (1968).
- [27] A. Sirlin, Rev. Mod. Phys. **50**, 573 (1978);  
A. Sirlin, Nucl. Phys. **B 196**, 83 (1982);  
W.J. Marciano and A. Sirlin, Phys. Rev. Lett. **61**, 1815 (1988);  
E. Braaten and C. S. Li, Phys. Rev. **D 42**, 3888 (1990);  
J. Erler, Rev. Mex. Fís. **50**, 200 (2004).
- [28] N. Meister and D.R. Yennie, Phys. Rev. **130**, 3 (1963);  
A. Queijeiro and A. García, Phys. Rev. **D 38**, 2218 (1988).
- [29] H. Harari, Phys. Rev. Lett. **17**, 1303 (1966).
- [30] M. Feuillat, J.L. Lucio M. and J. Pestieau, Phys. Lett. **B 501**, 37 (2001).
- [31] J. Bijnens and P. Gosdzinsky, Phys. Lett. **B 388**, 203 (1996).
- [32] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1985) section 9.7.

- [33] M. Spearman, *Elementary Particle Theory*, North-Holland Publishing Company (1970), Chapter 5.
- [34] F. Bloch and A. Nordsieck, Phys. Rev. **52**, 54 (1937);  
Noboru Nakanishi, Progress of Theoretical Physics, **Vol. 19**, No. 2 (1958).
- [35] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific (1998), Chapter 6.
- [36] P. Singer, Phys. Rev. **130**, 2441 (1963); **161**, 1694 (Errata) (1967).
- [37] G. López Castro and G. Toledo Sánchez, Phys. Rev. **D 56**, 4408 (1997); **60**, 053004 (1999).
- [38] G. López Castro and G. Toledo Sánchez, J.Phys. **G 27**, 2203 (2001).
- [39] A. Bramon, J.L. Díaz-Cruz and G. López-Castro, Phys. Rev. **D 47**, 5181 (1993).
- [40] G. Toledo Sánchez, J.L. García Luna and V. Gonzalez Enciso, Phys. Rev. **D 76**, 033001 (2007).
- [41] J.M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*, Springer-Verlag 1975.
- [42] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company (1996), Section 7.4.
- [43] G. Passarino and M. Veltman, Nucl. Phys. **B 160**, 151 (1979).
- [44] F.E. Low, Phys. Rev. **110**, 974 (1958).
- [45] T. H. Burnett and N.M. Kroll, Phys. Rev. Lett. **20**, 86 (1968).
- [46] T. Kinoshita and A. Sirlin, Phys. Rev. **113**, 1652 (1959).
- [47] ver por ejemplo G. Rodrigo, H. Czyz, J. H. Kühn and M. Szopa, Eur. Phys. J. **C 24**, 71 (2002).
- [48] S. Ghozzi and F. Jegerlenher, Phys. Lett. **B 583**, 222 (2004).
- [49] The Second DaΦne Physics Handbook, editado por Luciano Maiani, G. Pancheri and N. Paver. (INFN-LNF publication 1995), p. 761
- [50] E. Fischbach, A. W. Overhauser and B. Woodahl, Phys. Lett. **B 526**, 355 (2002).
- [51] M.B. Voloshin *et al*, Phys. Rev. **D 75**, 113001 (2007).

- [52] J.J. Sakurai *Currents and Mesons*, Chicago (1969).
- [53] A. Bramon, *Lectures on Electromagnetic Interactions of Hadrons*, Barcelona, Universidad Autonoma de Barcelona, Belaterra (1979).
- [54] R. Decker and M. Finkemeier, Nucl. Phys. **B 438**, 17-53 (1995).
- [55] P. Carruthers, *Introduction to Unitary Symmetry* Interscience, New York (1996).  
M. Gell-Mann, Phys. Rev. **125**, 1067 (1962); Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [56] J.J. Sakurai, Phys. Rev. Letters **9**, 472 (1962).
- [57] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons, (1999).
- [58] A. Denner and W. Beenakker, Nucl. Phys. **B 338**, 349 (1990).
- [59] Leonard Lewin, *Structural Properties of Polylogarithms*, Amer. Math. Soc. Mathematical Surveys and Monographs, 37 (1991).
- [60] A. Devoto and D.W. Duke, La Rivista del Nouvo Cimento, **Vol. 7**, 1 (1984).
- [61] F. Ambrosio *et al*(KLOE Collaboration), arXiv:0707.4148v2,[*hep-ex*]
- [62] S.R. Amendiola *et al* Phys. Lett. **B 178**, 435 (1986);  
E.B. Dally *et al*, Phys. Rev. Lett. **45**, 232 (1980).
- [63] S. I. Dolinsky *et al*, Physics. Reports **202**, No.3, 99 (1991).
- [64] Alain Flores Tlalpa, *Modelo de dominancia de mesones para decaimientos semi-leptónicos de sabores pesados*, Tesis de Doctorado, Enero 2008.
- [65] W.R. Molzon, Phys. Rev. Lett. **41**, 1213 (1978).
- [66] F.V. Flores-Baéz and G. López Castro enviado a publicación en Phys. Rev. D.
- [67] Ta-Pei Cheng, Ling-Fong Li, *Gauge Theory of Elementary Particles*, Oxford Clarendon Press, (1984).
- [68] K. Abe *et al* (BELLE Collaboration), Nucl. Proc. Suppl. **169**, 111 (2007);  
Phys. Lett. **B 643**, 5 (2006).
- [69] I. M. Nugent *et al* (BABAR Collaboration), Nucl. Phys. Proc. Suppl. **169**, 98 (2007);  
B. Aubert *et al*, Phys. Rev. Lett. **100**, 011801 (2008).

- [70] R. Barate *et al* (ALEPH Collaboration), Z. Phys. **C 76**, 15 (1997) ;  
S. Anderson *et al*, Phys. Rev. **D 61**, 112002 (2000).
- [71] S. Anderson *et al* (CLEO Collaboration) , Phys. Rev. **D 61**, 112002 (2006);  
M. Benayoun *et al*, Eur. Phys. J. **C 2**, 269 (1998).
- [72] M. Kobayashi and T. Maskawa, Progr. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).
- [73] T. Hahn, Comput. Phys. Commun. **118**, 153 (1999).
- [74] F. Coester, Phys. Rev. **83**, 798 (1951).
- [75] D.M. Tun, S. R. Juárez W. and A. García, Phys. Rev. **D 40**, 2967 (1989).
- [76] F.V. Flores-Baéz, G. López Castro and G. Toledo Sánchez, Phys. Rev. **D 76**, 096010 (2007).
- [77] G. López Castro and G. Toledo Sánchez, J. Phys. **G 27**, 2203 (2001).
- [78] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Section 7.
- [79] A. Sirlin, Phys. Rev. **164**, 1768 (1967).
- [80] F.J. Yndurain, *Quantum Chromodynamics: An Introduction to the theory of Quarks and gluons*, Springer-Verlag, (1983), Appendix B.
- [81] M. Veltman, *Diagrammatica: The Path to Feynman Diagrams*, Cambridge University Press, (1995), Appendix C.