



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Thiago Calza

**Teorias de campos em espaços toroidais aplicadas ao efeito
Casimir**

Rio de Janeiro

2020

Thiago Calza

Teorias de campos em espaços toroidais aplicadas ao efeito Casimir

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Cesar Augusto Linhares da Fonseca Junior

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

C171t Calza,Thiago Cheble Alves.
Teorias de campos em espaços toroidais aplicadas ao
efeito Casimir / Thiago Chelbe Alves Calza. - 2020.
85 f.: il.

Orientador: Cesar Augusto Linhares da Fonseca Junior.
Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio de
Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1.Teoria de campos (Física) - Teses. 2. Eletrodinâmica
quântica - Teses. 3. Simetria quebrada (Física) - Teses.
4. Transformações de fases (Física estatística) - Teses.
I. Fonseca Junior, Cesar Augusto Linhares da. III. Universi-
dade do Estado d o Rio de Janeiro. Instituto de Física
Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 530.145

Bibliotecária: Denise da Silva Gayer CRB7/5069

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou
parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Thiago Calza

Teorias de campos em espaços toroidais aplicadas ao efeito Casimir

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 29 de outubro de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Cesar Augusto Linhares da Fonseca Junior (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Carlos Farina de Souza
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Jose Roberto Pinheiro Mahon
Instituto de Física Armando Dia Tavares – UERJ

Prof. Dr. Fernando Lopes Cardoso
Faculadade SENAI-RIO

Prof. Dr. Luiz Guilherme Silva Duarte
Instituto de Física Armando Dia Tavares – UERJ

Prof. Dr. Andreson L.C. Rego
Colégio de Aplicação - UERJ

Rio de Janeiro

2020

DEDICATÓRIA

Essa tese é dedicada a minha esposa Diana, aos meus pais e aos amigos Fernando e Gustavo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha esposa Diana Fernanda por sempre me apoiar e estar ao meu lado, seja em momentos bons ou momentos difíceis.

Agradeço aos meus pais, por todo o amor, dedicação, preocupação que possuem comigo até hoje. Mesmo estando mais longe agora deles, o carinho é diário, sem dúvida alguma fui muito abençoado em ter pais como vocês.

Agradeço a minha sobrinha e minhas irmãs por sempre se preocuparem e me ajudarem no que precisei.

Agradeço ao meu orientador Cesar Linhares por sempre estar disposto a me ensinar e me fazer compreender cada dia um pouco mais como é a vida acadêmica. Além de um orientador fantástico, sempre foi um grande amigo, obrigado por tudo.

Agradeço aos meus grandes amigos. Fernando e Gustavão, que tive a honra de conhecer durante a graduação na UERJ e que com quem pude trabalhar junto durante muitos anos, em iniciação científica, mestrado e por fim o doutorado. Tenham certeza que muito da minha trajetória na física teórica eu consegui, pois sempre tive o apoio e ajuda de vocês, com nossas reuniões de 6 horas por dia com o nosso orientador. Agradeço aos dois por tudo e principalmente pela amizade que temos até hoje e assim será para sempre.

Agradeço minha amiga Gabriela Nery, por ser essa querida amiga verdadeira de tantos anos, amiga de verdade, sempre disposta a me ajudar, sempre rindo muitos juntos. É muito bom ter sua amizade até hoje, meu C...

Agradeço ao meu grande amigo de tantos anos, Pablo Loureiro, por essa amizade que de mais de 20 anos, sempre verdadeira, fiel. Me alegra muito que mesmo distante nos falamos com frequência e tentamos nos ver sempre que possível, obrigado por tudo, meu amigo.

Agradeço à Faperj pela ajuda financeira ao longo desses anos de doutorado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

Se um dia tiver que escolher entre o mundo e o amor lembre-se: se escolher o mundo
ficará sem o amor, mas se escolher o amor com ele você conquistará o mundo

Albert Einstein

RESUMO

CALZA, T.C.A. *Teorias de campos em espaços toroidais aplicadas ao efeito Casimir*. 2020. 85 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

Neste trabalho utilizamos o formalismo de teorias quânticas de campos para descrever a interação desses campos em espaços não triviais. Tal formalismo é uma generalização da prescrição de Matsubara da teoria de campos a temperatura finita, sendo chamado de formalismo em espaços toroidais. O objetivo deste trabalho é fazer como uma aplicação deste método o estudo do efeito Casimir, fenômeno caracterizado por flutuações na energia de ponto zero do campo dando origem a uma força de atração entre duas superfícies neutras. O efeito, então, será estudado em espaços com dimensões compactadas, obtendo grandezas como a energia e a pressão de Casimir, nessas topologias não triviais. O método de regularização para eliminar as divergências da diferença das energias de ponto zero é o chamado método local. A partir dele obtemos os resultados para as duas quantidades mais fundamentais no efeito Casimir, conforme citado acima. Posteriormente, estendemos esse estudo para o cálculo das correções radiativas a 1 loop no contexto da eletrodinâmica quântica. Calculamos, então, o diagrama de loop fermiônico, representando a interação do elétron com o campo eletromagnético, obtendo assim a correção para a energia de Casimir.

Palavras-chave: Teoria de campos . Eletrodinâmica quântica. Simetria quebrada .
Transformações de fases .

ABSTRACT

CALZA, T.C.A. *Toroidal quantum field theories applied to Casimir effect*. 2020. 85 f.
Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

In this work we use the formalism of quantum field theories to describe the interaction of these fields in non-trivial spaces. Such formalism is a generalization of Matsubara's prescription of the field theory at finite temperature, namely as field theories in toroidal spaces. The main goal of this work is to study the Casimir effect, a phenomenon characterized by fluctuations in the zero point energy of the field, giving rise to an attractive force between two neutral surfaces. The effect, then, will be studied in spaces with compactified dimensions so as to compute quantities such as Casimir energy and pressure, by the local method, in these non-trivial topologies. Later, we extended this work to compute one loop radiative corrections in quantum electrodynamics, thus computing the contribution to Casimir energy due to interaction of the electron field with the electromagnetic field.

Keywords: Field Theories. Quantum Eletrodynamics. Broken symmetry. Phase Transitions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Interação no vácuo quântico	21
Figura 2	- Efeito Casimir	22
Figura 3	- Auto-energia do fóton	46
Figura 4	- Representação por diagramas	46

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

KMS	Kubo-Martin-Schwinger
QCD	Cromodinâmica Quântica
QED	Eletrodinâmica Quântica

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	11
1	TEORIAS QUÂNTICAS DE CAMPOS EM ESPAÇOS TOROI- DAIS	13
1.1	Teoria de campos a temperatura finita	13
1.2	Formalismo de Matsubara	14
1.3	Formalismo de Matsubara generalizado	18
2	O EFEITO CASIMIR	20
2.1	O conceito de vácuo na mecânica quântica	20
2.2	O surgimento do efeito Casimir	21
3	EFEITO CASIMIR EM UMA TOPOLOGIA TOROIDAL	26
3.1	Energia de Casimir pelo método local	27
3.2	Energia de Casimir com restrições espaciais	29
3.3	Pressão de Casimir	34
3.4	Efeitos térmicos na energia de Casimir	37
4	CORREÇÕES RADIATIVAS AO EFEITO CASIMIR	45
4.1	Teorias de calibre	45
4.2	Correções radiativas na eletrodinâmica	45
	CONCLUSÃO	79
	REFERÊNCIAS	81
	APÊNDICE A – Função Zeta de Epstein-Hurwitz	84

INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos, o interesse em sistemas físicos restritos a um determinado número de dimensões espaciais vem aumentando cada vez mais. Tais restrições de espaço levam a diferentes condições de contorno impostas a um determinado sistema. Ao impor, por exemplo, condições de contorno periódicas a essas dimensões espaciais, cada uma delas assume a topologia de um círculo de determinado comprimento. Dessa maneira, um espaço com um número total de dimensões D pode possuir um número d de dimensões compactadas, caracterizando assim um espaço com uma topologia toroidal, devido a essas limitações em algumas de suas dimensões (KHANNA et al., 2014);(LINHARES et al., 2012);(MALBOUISSON; MALBOUISSON; SANTANA, 2002). Uma das aplicações desses sistemas restritos a um tamanho finito consiste na transição de fase da matéria hadrônica, caracterizada pela mudança de uma fase em que os quarks estão confinados no interior dos hádrons a uma determinada temperatura, para uma fase de desconfinamento, conhecida como um plasma de quarks e glúons (KAPUSTA; GALE, 2013).

Esse trabalho se insere no estudo das teorias quânticas de campos aplicadas a sistemas físicos restritos a espaços com topologias toroidais. Tais restrições levam a alterações nas integrais dos diagramas de Feynman com loops em analogia com o tratamento similar ao de temperaturas finitas. Em particular, estudamos o efeito Casimir, fenômeno quântico em que, em sua formulação original, surgem forças entre placas paralelas condutoras, separadas por uma pequena distância L entre elas (CASIMIR, 1948). Estas forças são induzidas pela presença de um campo eletromagnético entre as placas; em outras palavras, o efeito Casimir pode ser entendido como variações na energia de ponto zero do campo. Qualquer que seja o tipo de campo considerado, poderá ocorrer uma flutuação da energia de vácuo. Assim, o efeito Casimir pode ser investigado para diversos tipos de campos relativísticos. Também podem ser consideradas diferentes geometrias que, de alguma forma, delimitem o espaço onde atuam os campos, levando a uma variedade de condições de contorno às quais eles estão sujeitos (FARINA, 2006). O trabalho se concentrará no estudo do efeito Casimir no contexto de teorias de calibre, com simetria abeliana, portanto estamos interessados no estudo da eletrodinâmica quântica. O objetivo deste trabalho é utilizar o formalismo de teoria quântica de campos em espaços toroidais para obter expressões para a pressão e a energia de Casimir, em função da separação entre as placas, fazendo restrições espaciais. Em seguida, esse cálculo será generalizado de forma a também incluir efeitos térmicos simultaneamente com a restrição espacial. Tais grandezas podem ser obtidas por diferentes métodos e também utilizando diferentes condições de contorno. Considerando, primeiramente, o efeito Casimir para o campo eletromagnético, realizamos os cálculos de pressão e energia, na aproximação de campo livre, via tensor de energia-momentum e sua ligação com o propagador de campo livre (REGO; LINHARES;

MALBOUISSON, 2016). Aplica-se, então, o formalismo de Matsubara generalizado, com condições de contorno periódicas. Em seguida, estendemos esse estudo do efeito Casimir considerando a interação do campo eletromagnético e do campo do elétron, de acordo com a eletrodinâmica quântica na aproximação de 1 loop (ITZYKSON; ZUBER, 2005). Obtêm-se, assim, neste contexto, correções radiativas (BORDAG; ROBASCHIK; WIECZOREK, 1985) para o efeito Casimir, bem como correções devidas a temperatura finita. O tratamento de integrais relativas a amplitudes de Feynman é, novamente, realizado através do método de Matsubara para temperatura e delimitação de uma dimensão espacial. Os resultados assim obtidos para a energia e a pressão de Casimir podem ser comparados com os já conhecidos na literatura, calculados por outros métodos. Esta tese foi dividida conforme a seguinte sequência:

No capítulo 1 falamos sobre a teoria de campos a temperatura finita, segundo a prescrição de Matsubara. A partir disso, generalizamos tal prescrição apresentando o método de teorias de campos em topologias toroidais. No capítulo 2, abordamos o conceito de vácuo na mecânica quântica e na teoria quântica de campos. Nesse contexto, discutimos o processo histórico sobre efeito Casimir e suas aplicações nos diferentes ramos da física. Além disso, enfatizamos que o mesmo está muito além de uma força atrativa entre duas placas paralelas descarregadas. Em outras palavras, tal efeito é caracterizado como sendo variações da energia de ponto zero dos campos, contidos no vácuo, utilizados em questão. Neste capítulo deixamos explícito que o efeito Casimir é a principal aplicação do método de teorias quânticas de campos em topologias toroidais utilizado ao longo dessa tese. No capítulo 3, aplicamos o formalismo de Matsubara generalizado para calcular expressões para a pressão e a energia de Casimir, em função da separação entre as placas, fazendo restrições espaciais. Em seguida, esse cálculo será generalizado de forma a também incluir efeitos térmicos simultaneamente com a restrição espacial. Tais grandezas podem ser obtidas por diferentes métodos e também utilizando diferentes condições de contorno. Considerando, o efeito Casimir para o campo eletromagnético, realizamos os cálculos de pressão e energia, na aproximação de campo livre, via tensor de energia-momento e sua ligação com o propagador de campo livre, caracterizando o uso do método local para obtenção de tais grandezas. Aplica-se, então, o formalismo de Matsubara generalizado, com condições de contorno periódicas impostas aos campos. Em seguida, no capítulo 4, estendemos esse estudo do efeito Casimir considerando a interação do campo eletromagnético e do campo do elétron, de acordo com a eletrodinâmica quântica na aproximação a 1 loop, obtendo então a correção da energia de Casimir e seu comportamento com relação a distância L entre as placas. Encerramos com algumas considerações finais a respeito da aplicabilidade do efeito Casimir em diferentes geometrias e diferentes teorias de interação. Destacando que tanto a geometria e as condições de contorno impostas aos campos podem gerar flutuações na energia de ponto zero do vácuo, o que caracteriza o efeito Casimir.

1 TEORIAS QUÂNTICAS DE CAMPOS EM ESPAÇOS TOROIDAIS

Em muitos problemas em física nos deparamos com condições de contorno periódicas em sistemas restritos a uma extensão finita de um certo número de dimensões espaciais. Diferentemente do espaço livre, estas dimensões finitas com condições de contorno, do ponto de vista topológico, são ditas compactas. Cada dimensão compactada adquire, portanto, a topologia de um círculo S^1 . Um espaço euclidiano de D dimensões, com um número $d < D$ de suas dimensões compactadas, possui assim uma topologia de um hipertoro, de modo que, em geral, tais geometrias são ditas possuindo uma topologia toroidal. Isto é, sua topologia é do tipo $\Gamma_D^d = (S^1)^d \times \mathbb{R}^{D-d}$. Tal formalismo de topologias toroidais aplica-se a diversos ramos da física, como o estudo de transições de fase em materiais supercondutores, transições de fase da matéria hadrônica, problemas envolvendo dimensões extras. Além disso, esse formalismo por se tratar de limitações em determinadas dimensões de um dado espaço dá origem a um dos fenômenos de maior interesse na física desde as últimas décadas, o chamado efeito Casimir. Esse será o grande objeto de estudo nessa tese, no qual iremos aplicar as compactações de determinadas dimensões (espaciais e temporal) ao campo eletromagnético. Em outras palavras, utilizando as condições de contorno periódicas, limitamos o campo mencionado a uma certa região do espaço, estudando assim as flutuações na energia de ponto zero do mesmo. Para um estudo detalhado sobre esse formalismo, envolvendo métodos de cálculo e aplicações, indicamos as seguintes referências. (KHANNA, 2009);(KHANNA et al., 2014);(ABREU, 2013);(LINHARES et al., 2012);(CALZA, 2016);(MALBOUISSON; MALBOUISSON; SANTANA, 2002);(CARDOSO,)

1.1 Teoria de campos a temperatura finita

O estudo da teoria de campos a temperatura finita consiste em aplicarmos os efeitos térmicos, no contexto da mecânica estatística, para descrever a interação desses campos com um determinado meio externo. Existem alguns formalismos para se descrever essa interação, que diferem um do outro pela maneira de como a variável de temperatura é introduzida. Dentre esses formalismos, temos os chamados formalismos de tempo imaginário e tempo real (DAS, 1997), esse último sendo mais adequado para descrever processos fora do equilíbrio(EZAWA; TOMOZAWA; UMEZAWA, 1957). O mais antigo deles, formalismo de tempo imaginário ou também chamado de formalismo de Matsubara, proposto por Takeo Matsubara em 1955 (MATSUBARA, 1955), é ideal para descrever os sistemas em equilíbrio. A abordagem devida a Matsubara propõe que seja utilizado um espaço euclidiano, no qual, além das três dimensões espaciais usuais, há uma quarta dimensão,

de extensão finita, limitada de zero a $\beta = T^{-1}$. Por analogia, esta abordagem é dita de tempo imaginário. Considera-se, ainda, uma periodicidade das funções de correlação de campos bosônicos, como o campo escalar. Portanto, a periodicidade no formalismo de tempo imaginário é equivalente a formular a teoria em uma topologia toroidal do tipo $\Gamma_4^1 = S^1 \times \mathbb{R}^3$, onde S^1 é uma circunferência de comprimento proporcional ao inverso da temperatura. Posteriormente, alguns formalismos foram desenvolvidos de forma a generalizar a prescrição de Matsubara, entre eles temos o chamado formalismo de topologias toroidais (KHANNA, 2009), o qual será utilizado amplamente nesse trabalho.

1.2 Formalismo de Matsubara

Para desenvolver um pouco da abordagem do formalismo de Matsubara, vamos introduzir alguns conceitos fundamentais da mecânica estatística (LEBELLAC, 1996). Consideramos, então, um sistema descrito por uma hamiltoniana H na presença de um reservatório térmico de temperatura $1/\beta$, caracterizando, no equilíbrio térmico, o chamado ensemble canônico. O operador de matriz densidade que descreve a evolução desse sistema é dado por:

$$\rho = e^{-\beta H} \quad (1)$$

onde $\beta = 1/T$, no sistema de unidades naturais. Para extrair diversas grandezas termodinâmicas de um sistema, como pressão, entropia, número de partículas, definimos a função de partição:

$$Z = \text{Tr}(\rho) = \sum_n \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle. \quad (2)$$

A partir dela podemos obter diversas grandezas importantes da mecânica estatística, conforme alguns exemplos abaixo.

$$P = T \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \quad (3)$$

$$N = T \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \quad (4)$$

$$S = T \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \quad (5)$$

Podemos, então, obter o valor esperado de um dado operador O , em equilíbrio térmico no seu ensemble, como:

$$\langle O \rangle_0 = \sum_n \langle n | O | n \rangle, \quad (6)$$

onde $|n\rangle$ é um conjunto completo de estados ortonormais. Porém, quando o sistema encontra-se em um banho térmico, o valor esperado do operador deve ser calculado como a média sobre o ensemble com um fator de Boltzmann

$$\langle O \rangle_\beta = \frac{1}{Z} \sum_n \langle n | O | n \rangle e^{-\beta H} = \frac{1}{Z} \text{Tr} (e^{-\beta H} O), \quad (7)$$

podendo ser escrito também em termos do operador matriz densidade, como:

$$\langle O \rangle_\beta = \frac{\text{Tr} O \rho}{\text{Tr} \rho}. \quad (8)$$

A partir de agora, podemos obter uma relação fundamental na teoria de campos a temperatura finita (DAS, 1997). Utilizando a função de green da teoria, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \phi(x, t) \phi(y, 0) \rangle &= \frac{1}{Z} \text{Tr} [e^{-\beta H} \phi(x, t) \phi(y, 0)] \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr} [\phi(x, t) e^{-\beta H} e^{\beta H} \phi(y, 0) e^{-\beta H}] \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr} [\phi(x, t) e^{-\beta H} e^{i(-i\beta H)} \phi(y, 0) e^{-i(-i\beta H)}] \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr} [\phi(x, t) e^{-\beta H} \phi(y, -i\beta)] \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr} [e^{-\beta H} \phi(y, -i\beta) \phi(x, t)] \\ &= \langle \phi(y, -i\beta) \phi(x, t) \rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

conforme mostrado acima, utilizamos a propriedade de permutação cíclica do traço do produto de operadores.

Observa-se, então, que a temperatura desempenha um papel de variável de tempo imaginário. Desse modo, a variável de tempo imaginária é definida, por uma rotação de Wick, da seguinte maneira:

$$\tau = it \quad t = -i\tau, \quad (10)$$

portanto, a equação (9) pode ser reescrita como

$$\langle \phi(x, \tau) \phi(y, 0) \rangle = \langle \phi(y, \beta) \phi(x, \tau) \rangle. \quad (11)$$

A equação acima, assim como a eq.(9), é conhecida na teoria de campos a temperatura

finita, como relação Kubo-Martin-Schwinger ou de forma abreviada relação KMS. Interpretando a relação acima, observamos que o propagador da teoria é periódico no eixo do tempo imaginário, com período delimitado por uma extensão igual ao inverso da temperatura. A partir da relação KMS, temos que os campos obedecem à seguinte condição de contorno:

$$\phi(x, 0) = \pm \phi(x, \beta), \quad (12)$$

nessa equação, o sinal \pm representa se os campos são bosônicos (comutam) ou fermiônicos (anticomutam). Em outras palavras, a relação KMS evidencia que os campos podem assumir condições de contorno periódicas ou antiperiódicas.

De maneira análoga ao que é feito na teoria de campos à temperatura zero, trabalhamos com os campos no espaço de momento-frequência. Devido a periodicidade imposta pelas condições de contorno sobre os campos, podemos representar os mesmos por uma expansão de Fourier de seguinte maneira:

$$\phi(x, \tau) = \sum_n \phi(x, w_n) e^{i w_n \tau}. \quad (13)$$

Portanto, ao impormos restrições em alguma das variáveis, o que antes era uma integral contínua de Fourier é substituído por uma série de Fourier, na qual as frequências dos modos dos campos assumem valores discretos. Respectivamente, para bósons e férmions, esses valores são dados por:

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta} \quad (14)$$

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}. \quad (15)$$

Tais valores discretos, onde n são números inteiros que podem variar de $-\infty$ a $+\infty$, são conhecidos como frequências de Matsubara.

Podemos, então, de forma análoga a teoria de campos usual (temperatura zero), obter os propagadores livres em termos da variável de tempo imaginário. Desta maneira, podemos definir os propagadores de Matsubara conforme abaixo:

$$\Delta(\tau) = \frac{1}{Z} \sum_n \langle n | e^{-\beta H} \phi(\tau) \phi(0) | n \rangle. \quad (16)$$

tomando sua transformada de Fourier, temos:

$$\Delta(iw_n) = \int_0^\beta d\tau e^{iw_n\tau} \Delta(\tau), \quad (17)$$

as frequências de Matsubara $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}$ podem ser observadas da condição:

$$\Delta(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_n e^{iw_n\tau} \Delta(iw_n) = \Delta(\tau + \beta). \quad (18)$$

A relação entre os propagadores livres no formalismo de tempo imaginário e no tempo real pode ser encontrada como:

$$\Delta(\tau) = \Delta^+(t = -i\tau) = \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-k_0\tau} [1 + n(k^0)] \rho(k^0), \quad (19)$$

onde $n(k^0)$ e $\rho(k^0)$ representam, respectivamente, a distribuição de Bose-Einstein (LEBELLAC, 1996) e a função espectral (PESKIN; SCHROEDER, 1995), dadas por:

$$n = \frac{1}{e^{-\beta k^0} - 1}$$

$$\rho(k^0) = 2\pi\epsilon k^0 \delta((k^0)^2 - E_k)$$

substituindo a eq.(19) na eq.(17), obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta(iw_n) &= \int_0^\beta d\tau e^{iw_n\tau} \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-k_0\tau} [1 + n(k^0)] \rho(k^0) \\ &= \int \frac{dk_0}{2\pi} \int_0^\beta d\tau e^{(iw_n - k_0)\tau} [1 + n(k^0)] \rho(k^0), \end{aligned} \quad (20)$$

integrando em τ , temos:

$$\Delta(iw_n) = \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{(iw_n - k_0)\tau} \Big|_0^\beta}{(iw_n - k_0)} \left[1 + \frac{1}{e^{-\beta k^0} - 1} \right] \rho(k^0) = - \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{\rho(k^0)}{iw_n - k^0} \quad (21)$$

substituindo $\rho(k^0)$, encontramos que:

$$\Delta(iw_n) = -\frac{1}{2E_k} \left(\frac{1}{iw_n - E_k} - \frac{1}{iw_n + E_k} \right), \quad (22)$$

onde $E_k = \mathbf{k}^2 + \mathbf{m}^2$.

Portanto, o propagador livre de Matsubara é dado por:

$$\Delta(\omega_n, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} = \frac{1}{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} \quad (23)$$

De forma análoga a teoria quântica de campos à temperatura zero, as regras de Feynman na expansão perturbativa (PESKIN; SCHROEDER, 1995) também podem ser obtidas para o formalismo de campos a temperatura finita. De um modo geral, a integração sobre todas as componentes do momento (à temperatura zero) é substituída por uma soma sobre as frequências de Matsubara. Mais especificamente, devemos usar:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (24)$$

A conexão entre mecânica estatística e teoria quântica de campos é baseada no fato de que o operador $e^{-\beta H}$, na função de partição, pode ser identificado com o operador de evolução temporal ao longo do eixo temporal imaginário. Ou seja, formalmente, o operador quântico de evolução temporal e^{-itH} ($\hbar = 1$) se transforma em $e^{-\beta H}$ quando realizamos a continuação analítica $t \rightarrow -i\beta$. Dito isso, podemos obter uma generalização da função de partição da eq. (2), reescrevendo-a em termos de uma integral de caminho

$$Z = \text{Tre}^{-\beta H} = \int \mathcal{D}q e^{-\int_0^\beta d\tau \mathcal{L}(q)}, \quad (25)$$

onde a integração funcional é realizada sobre todas as trajetórias $q(\tau)$ sujeitas à condição de contorno $q(0) = q(\beta)$. Generalizando da teoria quântica de partículas para a teoria quântica de campos, formulada em $D + 1$ dimensões, obtemos para a função de partição

$$Z = \text{Tre}^{-\beta H} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^D x \mathcal{L}[\phi(x)]}, \quad (26)$$

onde todas as configurações $\phi(x, \tau)$ que satisfazem a condição de contorno da eq.(12) devem ser incluídas na integral de caminho. É interessante observar que no limite de temperatura nula, quando $\beta \rightarrow \infty$, a eq.(26) se reduz à teoria de campos usual formulada no espaço euclidiano (neste caso, as condições de contorno deixam de ser importantes).

1.3 Formalismo de Matsubara generalizado

Conforme mencionamos no início de deste capítulo, um sistema contido em um certo espaço de D dimensões, pode ter um certo número d de suas dimensões compactadas, de forma que este é dito ter uma topologia da forma: $\Gamma_D^d = (S^1)^d \times \mathbb{R}^{D-d}$. O formalismo de Matsubara, portanto, é um caso particular em que apenas a dimensão tem-

poral (tempo imaginário) é compactada, tendo uma topologia do tipo $\Gamma_D^1 = S^1 \times \mathbb{R}^{D-1}$. Porém, além da dimensão temporal, as dimensões espaciais também podem ser compactadas de forma que $1 \leq d \leq D$, sendo a dimensão temporal e cada uma das dimensões espaciais compactadas em uma circunferência de comprimento L_i , no qual $L_0 = \beta$ corresponde a extensão do inverso da temperatura para a dimensão temporal (LINHARES et al., 2012). Podemos, então, considerar um sistema que encontra-se em equilíbrio térmico a uma certa temperatura e confinado em uma caixa retangular com $(d - 1)$ dimensões espaciais. Adotamos coordenadas cartesianas $r = (x_1, \dots, x_d, \mathbf{z})$, onde \mathbf{z} é um vetor $(D - d)$ dimensional e com um vetor no espaço de momento dado por $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d, \mathbf{q})$, sendo \mathbf{q} um vetor $(D - d)$ no espaço dos momentos. Portanto, o formalismo de Matsubara pode ser generalizado da seguinte forma:

$$\int \frac{dk_i}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{L_i} \sum_{n=-\infty}^{\infty},$$

e as componentes compactadas dos momentos são dados por:

$$k_i = \begin{cases} \frac{2\pi n_i}{L_i}, & \text{para bósons} \\ \frac{2\pi(n_i + \frac{1}{2})}{L_i}, & \text{para férmions} \end{cases} \quad (27)$$

onde $i = 0, 1, \dots, d$, sendo $i = 0$ correspondente a dimensão de tempo imaginário. Portanto, explicitamente, temos que as regras de Feynman compostas pelas integrais no espaço de momento são substituídas agora por somas de valores discretos de frequências. Ao escolhermos, então, uma dimensão temporal (efeito térmico) e uma dimensão espacial para serem compactadas, a prescrição de Matsubara é dada por:

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{n_0=-\infty}^{\infty}, \quad k_0 \rightarrow \frac{2\pi n_0}{\beta}, \quad k_0 \rightarrow \frac{2\pi(n_0 + \frac{1}{2})}{\beta}. \quad (28)$$

$$\int \frac{dk_1}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{L_1} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}, \quad k_1 \rightarrow \frac{2\pi n_1}{L_1}, \quad k_1 \rightarrow \frac{2\pi(n_1 + \frac{1}{2})}{L_1}. \quad (29)$$

De um modo geral, as integrais de Feynman são calculadas pelos métodos usuais da teoria quântica de campos (PESKIN; SCHROEDER, 1995), enquanto a parte das dimensões que foram compactadas, correspondente a séries sobre as frequências de Matsubara, são tratadas pelas propriedades da funções Zeta de Epstein-Hurwitz. Para um estudo detalhado sobre essas funções é interessante a leitura de (ELIZALDE, 1995); (KIRSTEN, 1994).

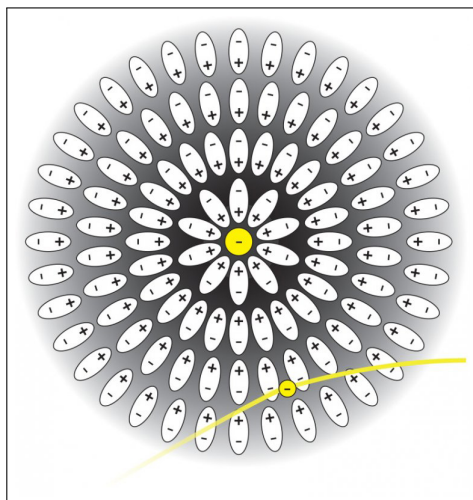
2 O EFEITO CASIMIR

2.1 O conceito de vácuo na mecânica quântica

A ideia de vácuo, segundo a física clássica, está associada a um espaço vazio, sem qualquer tipo de partículas e interação entre as mesmas. A única generalização do conceito, desde o surgimento do eletromagnetismo de Maxwell, é de que as ondas eletromagnéticas propagam-se nesse vácuo assim como as ondas mecânicas precisam de um meio material para se propagar. Com o surgimento da mecânica quântica e posteriormente da teoria quântica de campos, a ideia de vácuo passou a assumir um outro significado, o qual agora é caracterizado como sendo o estado quântico de mais baixa energia. Nesse vácuo ocorrem a todo momento criação e aniquilação de pares de partículas virtuais, essas podem interagir durante espaços e tempos muito pequenos de acordo com princípio de incerteza de Heisenberg. Todas essas pequenas interações entre as partículas são ditas como sendo flutuações em torno da energia de ponto zero do vácuo. Por exemplo no caso da eletrodinâmica quântica (QED), teoria que descreve a propagação e interação de férmions com o campo eletromagnético, tanto a propagação de um elétron ou de um fóton é agora afetada por suas interações com esses pares de partículas virtuais. Em particular, o movimento de uma carga elétrica é afetado pelas interações que essa partícula sofre com o vácuo, de modo que esse começa a se comportar como um meio dielétrico devido a presença dessa carga, conforme ilustra a Fig.1.

Esse fenômeno de alinhamento dos dipolos é conhecido como a polarização do vácuo. Além disso, tais flutuações dos campos não se restringem simplesmente ao campo eletromagnético descrito na eletrodinâmica quântica, qualquer teoria relativística pode ter flutuação da energia de vácuo com seu respectivo campo. Dentre algumas condições externas que podem influenciar essas flutuações do vácuo, a principal delas será o objeto de estudo dessa tese, o chamado efeito Casimir e de que maneira esse efeito influencia nessa energia de ponto zero (MILONNI, 1994)

Figura 1 - Interação no vácuo quântico



Legenda: Interação entre pares de partículas virtuais com uma carga elétrica no vácuo quântico

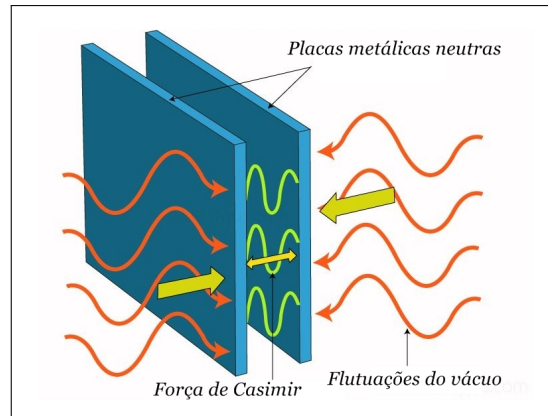
Fonte: Página do INFN^a

^a Disponível em <<http://w3.lnf.infn.it>>. Acesso em: 27 jul. 2020.

2.2 O surgimento do efeito Casimir

No fim da década de 1940, o físico Holandês Hendrik Casimir do Laboratório de Pesquisa Phillips, chegou a previsão de que duas placas neutras condutoras, separadas por uma certa distância a , muito menor que suas dimensões, e colocadas em uma região de vácuo, estão sujeitas a uma força de atração entre elas (CASIMIR, 1948) que varia de forma inversamente proporcional com a quarta potência da distância entre as mesmas. Porém, devido as placas estarem neutras, essa força que surge entre elas não é de origem elétrica conforme espera-se pela lei de Coulomb, além disso, o vácuo é um meio incapaz de exercer qualquer tipo de interação, conforme prevê a física clássica. Em 1948, Casimir publica em seu artigo que essa força surge das flutuações da energia do campo contido no vácuo formado entre as placas (CASIMIR; POLDER, 1948). De fato, ao se considerar a natureza quântica do vácuo, a simples presença das placas já afeta tais flutuações de energia dos campos, contrariando a física clássica. Logo, podemos dizer agora que existe algum tipo de interação entre o vácuo e as placas, conforme ilustrado na Fig.2. Como os campos são um conjunto de vários osciladores harmônicos quantizados, esses possuem valores de energia bem definidos sem a possibilidade de valores intermediários. Tais valores

Figura 2 - Efeito Casimir



Legenda: Força atrativa entre placas neutras
devido a flutuações do vácuo

Fonte: Adaptado pelo autor^b

^b Tradução da imagem coletada no site do INFN

permitidos formam um espectro de energia discreto dado pela seguinte equação:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (30)$$

onde \hbar é a constante de Planck e ω são os possíveis modos de frequência do campo eletromagnético.

Observando a equação acima, percebemos que esse espectro só possui valores discretos de energia e esses sempre sendo múltiplos de $\hbar\omega$, conforme prevê a mecânica quântica. Porém, a contribuição de maior relevância para entendermos a origem da força de atração no efeito Casimir vem do fato que a energia de um oscilador quântico jamais terá um valor nulo, conforme a eq.(30). Para o nível de mais baixa energia, chamado de fundamental, o valor será dado por $\hbar\omega/2$, conhecido como energia de ponto zero. Portanto, a força de atração se origina devido as flutuações da energia de ponto zero do campo eletromagnético. O cálculo da força de Casimir, pode ser feito utilizando a energia do estado fundamental do campo, a chamada energia de ponto zero. Essa energia é uma quantidade infinita, mas em um caso simplificado em que desconsideramos influências de campos externos e condições de contorno, esse termo infinito poderia ser eliminado por uma redefinição da escala de energia. Porém, a grande contribuição de Casimir ao explicar a força de atração entre as placas está na influência das condições de contorno, impostas pelas placas, na energia de ponto zero. De fato, essas condições de contorno fazem com que a energia do campo eletromagnético adquira uma dependência com a distância entre as placas de

forma que essa não pode ser descartada por uma redefinição de escala. O método utilizado por Casimir para obter a expressão a força entre duas placas paralelas consiste em somar todas as frequências possíveis no interior de uma caixa. Tal método é caracterizado pela diferença entre a energia de ponto zero sujeita influência de condições de contorno e a energia de ponto sem tais restrições espaciais. A demonstração da força de Casimir é feita agora, segundo (MILONNI, 1994), utilizando o sistema de unidades naturais.

Partindo da ideia de restringir uma porção do espaço, consideramos uma caixa vazia em forma de paralelepípedo de lados $L_x = L_y = L$ e sendo $L_z = d$ a distância entre as placas paralelas. Devido as condições de contorno impostas, as frequências discretas possíveis no interior da caixa são dadas por:

$$\omega_{lmn} = \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)^{1/2} = \pi \left(\frac{l^2}{L^2} + \frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{L^2}\right)^{1/2} \quad (31)$$

onde l , m e n correspondem a valores inteiros positivos e zero. A energia de ponto zero é definida como:

$$E_0(d) = \sum_{lmn} (2) \frac{1}{2} \omega_{lmn} = \pi \left(\frac{l^2}{L^2} + \frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{L^2}\right)^{1/2}, \quad (32)$$

o fator 2 aparece devido as duas polarizações independentes dos modos quando l, m, n são diferentes de zero. Sendo as dimensões das placas muito maior que a distância entre elas, $L \gg d$, podemos escrever os somatórios como integrais da forma:

$$E_0(d) = \frac{L^2}{\pi} \sum_n \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \left(x^2 + y^2 + \frac{\pi n^2}{d^2}\right)^{1/2}, \quad (33)$$

sendo d arbitrariamente grande, esse somatório restante pode ser substituído por uma integral:

$$E_0(\infty) = \frac{L^2}{\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}. \quad (34)$$

A energia de ponto zero no interior das placas é dado pela diferença entre o termo de energia com restrição espacial e o termo sem restrição espacial, de forma que:

$$E(d) = E_0(d) - E_0(\infty), \quad (35)$$

substituindo as equações(33) e (34), temos:

$$E(d) = \frac{L^2}{\pi} \left[\sum_n \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \left(x^2 + y^2 + \frac{\pi n^2}{d^2}\right)^{1/2} - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} \right]$$

(36)

passando de um sistema de coordenadas cartesianas para coordenadas polares:

$$E(d) = \frac{L^2 \pi}{2\pi^2} \left[\sum_n \int_0^\infty r dr \left(r^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2} \right)^{1/2} - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty dz \int_0^\infty r dr \left(r^2 + z^2 \right)^{1/2} \right] \quad (37)$$

fazendo uma mudança de variável, temos:

$$E(d) = \frac{\pi^2 L^2}{4d^3} \left[\sum_n \int_0^\infty dx \left(x^2 + n^2 \right)^{1/2} - \int_0^\infty dz \int_0^\infty dx \left(x^2 + z^2 \right)^{1/2} \right] \quad (38)$$

essa diferença de energia, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$E(d) = \frac{\pi^2 L^2}{4d^3} \left[\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^\infty F(n) - \int_0^\infty dz F(z) \right] \quad (39)$$

onde o fator $1/2$ no primeiro termo corresponde a uma única polarização independente quando $n = 0$. As funções $F(n)$ e $F(z)$ são dadas por:

$$F(n) = \int_0^\infty dx \left(x^2 + n^2 \right)^{1/2} \quad F(z) = \int_0^\infty dx \left(x^2 + z^2 \right)^{1/2}. \quad (40)$$

Utilizando a fórmula de Euler–Maclaurin, para ordens baixas (APOSTOL, 1999), como forma de aproximar essa diferença de duas quantidades infinitas para somas finitas:

$$\sum_{n=1}^\infty F(n) - \int_0^\infty dz F(z) = -\frac{1}{2} F(0) - \frac{1}{12} F'(0) + \frac{1}{720} F'''(0) \quad (41)$$

onde $F'(z) = -2z$; $F'(0) = 0$ e $F'''(0) = -4$. Portanto,

$$\sum_{n=1}^\infty F(1) - \int_0^\infty dz F(z) = -\frac{1}{2} F(0) - \frac{4}{720} \quad (42)$$

logo, a eq.(39) assume a forma:

$$E(d) = \frac{\pi^2 L^2}{4d^3} \left(-\frac{4}{720} \right) = -\frac{\pi^2 L^2}{720 d^3} \quad (43)$$

para de determinarmos a força basta fazer a derivada da energia em relação a d , logo:

$$F(d) = \frac{\partial E(d)}{\partial d} = -A \frac{\pi^2}{240 d^4} \quad (44)$$

onde $A = L^2$ corresponde à área de cada uma das placas. O sinal negativo indica que a força é de origem atrativa. Além disso, observando a expressão acima, percebemos que a força de Casimir é pequena comparada à lei de Gravitação Universal e à lei de Coulomb,

já que ela comporta-se com o inverso da quarta potência da distância, enquanto as outras duas comportam-se com o inverso do quadrado da distância.

É válido destacar que a grande contribuição do efeito Casimir não está no fato de surgir uma força atrativa entre duas placas condutoras neutras, pois tal comportamento já tinha sido estudado na teoria de London, na qual ele falava das forças dispersivas entre moléculas neutras. Em outras palavras, o efeito Casimir pode ser caracterizado por qualquer tipo de restrição em um certo espaço, pois tais restrições sempre geram condições de contorno que influenciam as flutuações da energia de ponto zero de um determinado tipo de campo. Do ponto de vista experimental, o efeito Casimir demorou basicamente 50 anos para ser comprovado devido a grande dificuldade de se medir a força, devido ao seu valor bem pequeno, em torno $0,013\text{dyn}$, e por se tratar de uma distância muito pequena entre as placas, da ordem de 10^{-6}m . O primeiro a tentar essa verificação experimental foi Sparnaay (SPARNAAY, 1958), em 1958. Seus resultados não se mostraram incompatíveis, mas a incerteza na medida da separação das placas implicava demais na precisão para o valor final da força. Passados quase 40 anos do experimento de Sparnaay, em 1997 Lamoreaux (LAMOREAUX, 1997) chega a um resultado preciso que comprova a força prevista por Casimir em 1948. Lamoreaux utilizou uma placa plana e uma placa esférica variando a distância entre ambas com valores de 0,6 micrômetros a 6 micrômetros, obtendo assim um erro experimental de 5% que garantiu a precisão do resultado para comprovar a existência do efeito Casimir. Posteriormente, essa precisão foi ainda melhor no experimento de Mohideen e Roy (MOHIDEEN; ROY, 1998), obtendo um erro experimental de 1%.

3 EFEITO CASIMIR EM UMA TOPOLOGIA TOROIDAL

Conforme apresentamos no capítulo anterior, o efeito Casimir é caracterizado por alterações (flutuações) na energia de ponto zero do vácuo em que o campo eletromagnético está contido. Apesar do efeito original ser descrito utilizando o campo eletromagnético, qualquer campo relativístico, confinado em uma certa região do espaço, pode afetar essa energia de vácuo devido as condições de contorno impostas por esse confinamento. De fato, essa modificação na energia de ponto zero é o que chamamos de energia de Casimir, responsável pela força de atração entre as placas, caracterizando assim o efeito descrito pelo mesmo em 1948. Considerando, então, que o campo eletromagnético comporta-se com um conjunto de infinitos osciladores harmônicos, cada um com energia dado pela eq.(30), podemos escrever a energia de Casimir como sendo:

$$E_c = \left[\sum_n \frac{\hbar\omega}{2} \right]_{cc} - \left[\sum_n \frac{\hbar\omega}{2} \right]_{sc}, \quad (45)$$

onde o primeiro termo corresponde a energia do vácuo com condições de contorno (cc) e o segundo termo a energia do vácuo sem as condições de contorno (sc). Entretanto, ambas as somas na equação acima são quantidades divergentes, assim como a diferença entre os dois termos. Essa definição da energia não tem um sentido físico, para isso precisamos utilizar o processo de renormalização com o objetivo de transformar essa energia em uma quantidade finita e de possível interpretação física. Hoje em dia, existem uma razoável quantidade de métodos de regularização para transformar certas expressões divergentes em algo que seja finito. Dentre esses métodos podemos citar o método de corte nas frequências, o método da discretização do espaço, método da função zeta generalizada, entre outros (FARINA, 2006). Além desses, temos os chamados métodos locais. Cada método tem suas características e possui maior eficácia ou não dependendo do quanto a fundo você quer estudar o fenômeno. Nesta tese, utilizamos o chamado método local, para tratar a expressão da eq.(45) e obter uma quantidade finita da energia de ponto zero, chamada de energia de Casimir. Para um estudo detalhado sobre as características, fatos históricos, relacionados ao efeito Casimir e as flutuações da energia de ponto zero, vale a leitura das seguintes referências (MILONNI, 1994);(FARINA, 2006);(COUGO-PINTO; FARINA; A, 2000);(LAMOREAUX, 2007);(ELIZALDE; ROMEO, 1991);(MILTON, 2001).

3.1 Energia de Casimir pelo método local

O método local, consiste em utilizarmos o tensor-energia momento do campo eletromagnético, como forma de regularizar a diferença das energias de ponto zero, e obter assim grandezas com significado físico, como a densidade de energia e a pressão de Casimir. Tal método consiste em escrever o tensor energia momento em termos das funções de Green que aparecem na teoria. Em outras palavras, calculamos o valor esperado do tensor energia momento como sendo o propagador do campo em questão utilizado. Esse método é utilizado, conforme Brown e Maclay (BROWN; MACLAY, 1969), os quais introduziram o formalismo local de obtenção da energia de vácuo. Nesta seção faremos o caso do campo eletromagnético livre, portanto calculamos o propagador livre do fóton, para cada componente do tensor energia momento desejada. A densidade de energia de Casimir é obtida pela componente T^{00} do tensor, enquanto a pressão de Casimir é obtida pela componente T^{33} . O cálculo será feito compactando uma dimensão espacial, utilizando a prescrição de Matsubara generalizada. Em seguida, compactamos duas dimensões, sendo uma espacial e a dimensão temporal, como forma de incluir os efeitos térmicos no fenômeno estudado (REGO; LINHARES; MALBOUISSON, 2016). No capítulo seguinte, calculamos a interação do campo do fóton com o campo fermiônico, obtendo assim as correções radiativas para a energia de Casimir.

Partindo da teoria do eletromagnetismo, a densidade de lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (46)$$

e o tensor eletromagnético possui a seguinte representação:

$$F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (47)$$

onde A representa o vetor potencial no espaço de Minkowski.

Conforme mencionado acima, o método local baseia-se no cálculo do valor esperado do tensor energia-momento do campo eletromagnético. Partindo da definição deste tensor, temos:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha}F_\alpha^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (48)$$

utilizando a técnica de separação de pontos, podemos definir o tensor energia-momento, como:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}(x) = \lim_{x \rightarrow x'} \left[F^{\mu\alpha}(x) F_\alpha^\nu(x') + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}(x) F_{\alpha\beta}(x') \right], \quad (49)$$

substituindo a eq.(47) nessa equação, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mu\nu}(x) = & \lim_{x \rightarrow x'} [(\partial^\mu A^\alpha(x) - \partial^\alpha A^\mu(x))(\partial'_\alpha A^\nu(x') - \partial'^\nu A_\alpha(x')) \\ & + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}(\partial^\mu A^\alpha(x) - \partial^\alpha A^\mu(x)) \times (\partial'_\alpha A^\nu(x') - \partial'^\nu A_\alpha(x'))], \end{aligned} \quad (50)$$

após certa álgebra, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mu\nu}(x) = & \lim_{x \rightarrow x'} \left[g^{\nu\beta} \partial^\mu \partial'^\alpha - g^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial'^\nu - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \partial^\rho \partial'_\rho + g^{\mu\alpha} \partial^\beta \partial'^\nu \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g^{\beta\alpha} \partial^\rho \partial'_\rho - \partial^\beta \partial'^\alpha) \right] \times A_\alpha(x) A_\beta(x'). \end{aligned} \quad (51)$$

Deste modo, o valor esperado no vácuo do tensor energia-momento é dado por:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \langle 0 | T^{\mu\nu} | 0 \rangle = \lim_{x \rightarrow x'} [O^{\mu\nu}(x, x')] \langle 0 | T A_\alpha(x) A_\beta(x') | 0 \rangle, \quad (52)$$

onde T representa o produto de ordenamento temporal e $O^{\mu\nu}$ representa o tensor do operador diferencial. Por definição, $\langle 0 | T A_\alpha(x) A_\beta(x') | 0 \rangle = G(x - x')$ representa a função de Green no espaço de Minkowski de D dimensões. Logo, a integral de Fourier dessa função pode ser escrita como:

$$G(x - x') = -i g_{\alpha\beta} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ik \cdot (x - x')}}{k^2 + i\varepsilon}, \quad (53)$$

sendo k e x vetores nesse espaço de D dimensões. Substituindo a expressão acima na eq.(52) e aplicando o tensor de operador diferencial, obtemos o tensor energia-momento da seguinte forma:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = 2i \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\frac{D-2}{2}(k^\mu k^\nu) - \frac{D-3}{4} g^{\mu\nu} k^2}{k^2 + i\varepsilon}, \quad (54)$$

utilizando uma rotação de Wick de forma que $k^0 \rightarrow i k_E^0$, $d^D k \rightarrow i d^D k_E$ e $g^{\mu\nu} = -\delta^{\mu\nu}$, o tensor energia-momento no espaço euclidiano assume a forma:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = 2 \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{\frac{D-2}{2}(k_E^\mu k_E^\nu) - \frac{D-3}{4} \delta^{\mu\nu} k_E^2}{k_E^2 + m^2}. \quad (55)$$

onde m é uma massa fictícia introduzida como regulador infravermelho e que no final será feito um limite em que m tende a zero. O índice E será omitido de agora em diante no decorrer dos cálculos.

Como estamos procurando algum significado física para a energia de Casimir, o valor

esperado na vácuo, renormalizado, para o tensor energia-momento é definido como a diferença entre valor esperado de $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ com as condições de contorno impostas e o valor de $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ sem condições de contorno, ou seja,

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \langle 0 | \mathcal{T}^{\mu\nu} | 0 \rangle_{cc} - \langle 0 | \mathcal{T}^{\mu\nu} | 0 \rangle_{sc} \quad (56)$$

onde cc representa com condições de contorno e sc o termo sem condições de contorno. Analisando a eq.(52), o tensor de operador diferencial não se altera ao impormos condições de contorno. As divergências que surgem do caráter local dos propagadores também não afetam o valor esperado, podendo assim serem eliminadas (KHANNA et al., 2014). Portanto, na equação acima, o termo que corresponde à energia de Casimir e que tem contribuição física é aquele em que as condições de contorno são impostas e que assim geram as flutuações na energia de vácuo. A partir desse momento iremos nos referir à energia de Casimir como sendo apenas a parte do tensor energia-momento com condições de contorno. O termo original da energia de ponto zero, livre de condições de contorno, é eliminado pelo método de regularização que utilizamos. Durante todos os cálculos iremos utilizar o sistema natural de unidades ($\hbar = c = K = 1$).

3.2 Energia de Casimir com restrições espaciais

Nesta seção, vamos calcular a energia de Casimir para o campo eletromagnético utilizando o formalismo de topologias toroidais. A princípio, vamos incluir apenas restrições espaciais, compactando uma dimensão, $d = 1$ e impondo condições de contorno periódicas ao campo eletromagnético. Posteriormente, iremos considerar as contribuições da temperatura ao compactarmos a dimensão de tempo imaginário, conforme (REGO; LINHARES; MALBOUISSON, 2016)

Partindo da expressão do tensor energia-momento, dado pela eq.(54), vamos a calcular componente T^{00} deste tensor como forma de obter a energia de Casimir em um espaço com uma topologia do tipo $\Gamma_D^1 = S^1 \times \mathbb{R}^{D-1}$, onde S^1 corresponde a uma circunferência de comprimento L . A partir da componente T^{00} do tensor energia-momento, de acordo com a eq.(55), temos:

$$\mathcal{T}^{00} = 2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\frac{D-2}{2}(k^0)^2 - \frac{D-3}{4}k^2}{k^2 + m^2}, \quad (57)$$

sendo $k^2 = (k^0)^2 + (k^1)^2 + (k^2)^2 + \dots + (k^D)^2$ as componentes do momento, temos que:

$$\mathcal{T}^{00} = (D-2) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^0)^2}{k_\perp^2 + (k^3)^2 + m^2} - \left(\frac{D-3}{2} \right) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\perp^2 + (k^3)^2}{k_\perp^2 + (k^3)^2 + m^2}, \quad (58)$$

onde k_\perp são as componentes perpendiculares à componente k^3 do momento.

Utilizando o formalismo de Matsubara estendido, as regras de Feynman são modificadas de acordo com a seguinte prescrição:

$$\int \frac{dk_3}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty}, \quad k_3 \rightarrow \frac{2n\pi}{L}, \quad (59)$$

logo, a eq. (58) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{00} = & (D-2) \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-1} k_\perp}{(2\pi)^{D-1}} \frac{(k^0)^2}{\left(k_\perp^2 + \frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2} + m^2 \right)^s} \\ & - \left(\frac{D-3}{2L} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-1} k_\perp}{(2\pi)^{D-1}} \frac{k_\perp^2}{\left(k_\perp^2 + \frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2} + m^2 \right)^s} \\ & - \left(\frac{D-3}{2L} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-1} k_\perp}{(2\pi)^{D-1}} \frac{\frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2}}{\left(k_\perp^2 + \frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2} + m^2 \right)^s}, \end{aligned} \quad (60)$$

onde s é apenas um expoente, no caso particular valendo 1, colocado no denominador das integrais para fazermos uma regularização dimensional das mesmas.

Utilizando as seguintes fórmulas de regularização dimensional,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l^2 + \Delta)^s} &= \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(s - D/2)}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{s - \frac{D}{2}} \\ \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{l^2}{(l^2 + \Delta)^s} &= \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{D}{2} \frac{\Gamma(s - \frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{s - \frac{D}{2} - 1} \\ \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{l^\mu l^\nu}{(l^2 + \Delta)^s} &= \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{-\delta^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(s - \frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{s - \frac{D}{2} - 1}, \end{aligned} \quad (61)$$

podemos, então, escrever o tensor energia-momento da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{00} = & (D-2) \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{-\delta^{00}}{2} \frac{\Gamma\left(s - \frac{D-1}{2} - 1\right)}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{\frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2} + m^2} \right)^{s - \frac{D-1}{2} - 1} \\
& - \left(\frac{D-3}{2L} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{D-1}{2} \frac{\Gamma\left(s - \frac{D-1}{2} - 1\right)}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{\frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2} + m^2} \right)^{s - \frac{D-1}{2} - 1} \\
& - \left(\frac{D-3}{2L} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2} \frac{\Gamma\left(s - \frac{D-1}{2}\right)}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{\frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2} + m^2} \right)^{s - \frac{D-1}{2}}, \quad (62)
\end{aligned}$$

escrevendo em termos de parâmetros adimensionais, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{00} = & \frac{2-D}{2L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + c^2)^{\nu-1}} \\
& - \frac{(D-3)(D-1)}{4L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + c^2)^{\nu-1}} \\
& - \frac{D-3}{2L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{an^2}{(an^2 + c^2)^{\nu}}, \quad (63)
\end{aligned}$$

onde $a = \frac{1}{L^2}$, $c^2 = \frac{m^2}{(2\pi)^2}$, $\nu = s - \frac{D-1}{2}$.

Somando e subtraindo o fator c^2 no numerador dentro do somatório do último termo da equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{00} = & \frac{2-D}{2L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + c^2)^{\nu-1}} \\
& - \frac{(D-3)(D-1)}{4L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + c^2)^{\nu-1}} \\
& - \frac{D-3}{2L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \\
& \times \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + c^2)^{\nu-1}} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c^2}{(an^2 + c^2)^{\nu}} \right]. \quad (64)
\end{aligned}$$

A soma em cada um dos termos da equação acima é reconhecida como uma das funções zeta de Epstein-Hurwitz (ELIZALDE, 1995), definida como:

$$Z_d^{c^2}(\nu; a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_k) = \sum_{\{n_j\}=-\infty}^{\infty} \left[a_1(n_1 - b_1)^2 + \dots + a_k(n_k - b_k)^2 + c^2 \right]^{-\nu}, \quad (65)$$

a qual, em nosso caso de uma dimensão compactada ($d = 1$) e sendo $b = 0$, é reduzida na forma:

$$Z_1^{c^2}(\nu; a,) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[an^2 + c^2 \right]^{-\nu}. \quad (66)$$

Utilizando a propriedade da função gama $\Gamma(\nu) = (\nu-1)\Gamma(\nu-1)$, a eq.(64) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{00} = & \frac{1}{2L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \left\{ (2-D) Z_1^{c^2}(\nu-1; a) \right. \\ & - \frac{(D-3)(D-1)}{2} Z_1^{c^2}(\nu-1; a) - (D-3)(\nu-1) \\ & \left. \times [Z_1^{c^2}(\nu-1; a) - c^2 Z_1^{c^2}(\nu; a)] \right\} \end{aligned} \quad (67)$$

O termo $c^2 Z_1^{c^2}(\nu; a)$ na equação acima é eliminado, pois c^2 não depende da separação entre as placas e assim não contribui para a energia de Casimir. Logo a eq.(67) é reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{00} = & \frac{1}{2L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \\ & \times \left[(2-D) - \frac{(D-3)(D-1)}{2} - (D-3)(\nu-1) \right] Z_1^{c^2}(\nu-1; a), \end{aligned} \quad (68)$$

fazendo uma continuação analítica na função zeta, podemos escrevê-la em termos de uma função de Bessel modificada de segunda espécie (ELIZALDE, 1995; ELIZALDE, 1989), que no caso geral para d dimensões, é dada por:

$$\begin{aligned} Z_d^{c^2}(\nu; a_1, \dots, a_d) = & \frac{2\pi^{d/2}}{\sqrt{a_1, \dots, a_d} \Gamma(\nu)} \left[\frac{\Gamma(\nu-d/2)}{2c^{2(\nu-d/2)}} \right. \\ & + 2 \sum_{j=1}^d \sum_{n_j=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n_j}{c\sqrt{a_j}} \right)^{\nu-d/2} K_{\nu-d/2} \left(\frac{2\pi c n_j}{\sqrt{a_j}} \right) + \dots \\ & + 2^d \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \dots + \frac{n_d^2}{a_d}} \right)^{\nu-d/2} \\ & \left. \times K_{\nu-d/2} \left(2\pi c \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \dots + \frac{n_d^2}{a_d}} \right) \right], \end{aligned} \quad (69)$$

para o caso de uma dimensão compactada, $d = 1$, essa continuação analítica é reduzida para:

$$Z_1^{c^2}(\nu; a) = \frac{2\pi^{d/2}}{\sqrt{a} \Gamma(\nu)} \left[\frac{\Gamma(\nu-1/2)}{2c^{2\nu-1}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{c\sqrt{a}} \right)^{\nu-1/2} K_{\nu-1/2} \left(\frac{2\pi n c}{\sqrt{a}} \right) \right]. \quad (70)$$

Eliminando termos independentes de L na equação acima, a eq.(68), pode ser escrita

como:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{00} &= \frac{1}{2L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \\ &\times \left[(2-D) - \frac{(D-3)(D-1)}{2} - (D-3)(\nu-1) \right] \\ &\times \frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu-1)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{c\sqrt{a}} \right)^{\nu-3/2} K_{\nu-3/2} \left(\frac{2\pi cn}{\sqrt{a}} \right),\end{aligned}\quad (71)$$

simplicando alguns termos, considerando $\nu-1 = \frac{1-D}{2}$ e $s=1$, obtemos:

$$\mathcal{T}^{00} = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} (2\pi)^{(D-1)} (2-D) 4\sqrt{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi^2 n L}{m} \right)^{-D/2} K_{D/2}(mnL), \quad (72)$$

usando a aproximação da função de Bessel para argumentos pequenos, dada por:

$$K_{D/2}(mnL) \sim \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \left(\frac{2}{mnL}\right)^{D/2}, \quad (73)$$

a equação (72) assume a forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{00} &= \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} (2\pi)^{(D-1)} (2-D) 4\sqrt{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi^2 n L} \right)^{D/2} \left(\frac{2}{mnL} \right)^{D/2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} (2\pi)^{(D-1)} (2-D) 4\sqrt{\pi} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \frac{1}{\pi^D L^D} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^D},\end{aligned}\quad (74)$$

utilizando um espaço de dimensões $D=4$, temos:

$$\mathcal{T}^{00} = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} (2\pi)^{(3)} (-2) \sqrt{\pi} \Gamma(2) \frac{1}{\pi^4 L^4} \zeta(4), \quad (75)$$

onde $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ corresponde à função zeta de Riemann. Logo, a energia de Casimir em um espaço de 4 dimensões, com uma de suas dimensões espaciais compactadas, corresponde a:

$$\mathcal{T}^{00} = E(L) = -\frac{2\pi^2}{90L^4} = -\frac{\pi^2}{45L^4}. \quad (76)$$

onde o sinal negativo refere-se ao caráter atrativo da força entre as placas.

3.3 Pressão de Casimir

O cálculo da pressão de Casimir, pelo método local, é demonstrado de maneira totalmente análoga ao feito para a energia na seção anterior. A diferença é a componente do tensor energia momento utilizada. Como estamos interessados na pressão de Casimir, vamos partir da componente T^{33} do tensor energia-momento, dada por:

$$\mathcal{T}^{33} = 2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\frac{D-2}{2}(k^3)^2 - \frac{D-3}{4}k^2}{k^2 + m^2}, \quad (77)$$

$$\mathcal{T}^{33} = (D-2) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^3)^2}{k_\perp^2 + (k^3)^2 + m^2} - \left(\frac{D-3}{2}\right) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\perp^2 + (k^3)^2}{k_\perp^2 + (k^3)^2 + m^2}, \quad (78)$$

ao aplicarmos a prescrição de Matsubara, a integral na componente k_3 do momento transforma-se numa soma sobre valores discretos. Desse modo, a eq.(78) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{33} = & (D-2) \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-1} k_\perp}{(2\pi)^{D-1}} \frac{\frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2}}{\left(k_\perp^2 + \frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2} + m^2\right)^s} \\ & - \left(\frac{D-3}{2L}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-1} k_\perp}{(2\pi)^{D-1}} \frac{k_\perp^2}{\left(k_\perp^2 + \frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2} + m^2\right)^s} \\ & - \left(\frac{D-3}{2L}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-1} k_\perp}{(2\pi)^{D-1}} \frac{\frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2}}{\left(k_\perp^2 + \frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2} + m^2\right)^s}, \end{aligned} \quad (79)$$

após aplicarmos a regularização, dada por (61), temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{33} = & (D-2) \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2} \frac{\Gamma\left(s - \frac{D-1}{2}\right)}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{\frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2} + m^2}\right)^{s - \frac{D-1}{2}} \\ & - \left(\frac{D-3}{2L}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{D-1}{2} \frac{\Gamma\left(s - \frac{D-1}{2} - 1\right)}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{\frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2} + m^2}\right)^{s - \frac{D-1}{2} - 1} \\ & - \left(\frac{D-3}{2L}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2} \frac{\Gamma\left(s - \frac{D-1}{2}\right)}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{\frac{(2\pi)^2 n^2}{L^2} + m^2}\right)^{s - \frac{D-1}{2}}, \end{aligned} \quad (80)$$

renomeando alguns parâmetros, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{33} = & \frac{D-2}{L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{an^2}{(an^2 + c^2)^\nu} \\ & - \frac{(D-3)(D-1)}{4L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + c^2)^{\nu-1}} \\ & - \frac{D-3}{2L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{an^2}{(an^2 + c^2)^\nu},\end{aligned}\quad (81)$$

somando e subtraindo c^2 no numerador dentro do somatório do primeiro e último termo da equação acima,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{33} = & \frac{D-2}{L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \\ & \times \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + c^2)^{\nu-1}} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c^2}{(an^2 + c^2)^\nu} \right] \\ & - \frac{(D-3)(D-1)}{4L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + c^2)^{\nu-1}} \\ & - \frac{D-3}{2L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{an^2}{(an^2 + c^2)^\nu} \\ & \times \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + c^2)^{\nu-1}} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c^2}{(an^2 + c^2)^\nu} \right],\end{aligned}\quad (82)$$

utilizando a identidade $\Gamma(\nu) = (\nu-1)\Gamma(\nu-1)$, reconhecendo as funções zeta de Epstein-Hurwitz, conforme feito anteriormente, e organizando de forma a colocar fatores comuns em evidência:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{33} = & \frac{1}{L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \left\{ \left[(D-2) - \frac{(D-3)}{2} \right] (\nu-1) \right. \\ & \times \left[Z_1^{c^2}(\nu-1; a) - c^2 Z_1^{c^2}(\nu; a) \right] - \left[\frac{(D-3)(D-1)}{4} Z_1^{c^2}(\nu-1; a) \right] \left. \right\}.\end{aligned}\quad (83)$$

Eliminando os termos sem contribuição física, que não dependem da distância entre as placas, e escrevendo a função zeta de Epstein-Hurwitz por sua continuação analítica no caso particular de apenas uma dimensão compactada, obtemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{33} = & \frac{1}{L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2(\nu-1)}} \\ & \times \left\{ \left[(D-2) - \frac{(D-3)}{2} \right] (\nu-1) - \frac{(D-3)(D-1)}{4} \right\} \\ & \times \frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu-1)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{c\sqrt{a}} \right)^{\nu-3/2} K_{\nu-3/2} \left(\frac{2\pi cn}{\sqrt{a}} \right).\end{aligned}\quad (84)$$

Retornando às variáveis originais, considerando $\nu - 1 = \frac{1-D}{2}$, $s = 1$, e organizando alguns termos, a equação fica reduzida a:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{33} = & \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} (2\pi)^{(D-1)} \left(-D^2 + \frac{14D}{4} - 1 \right) \\ & \times 4\sqrt{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi^2 n L}{m} \right)^{-D/2} K_{D/2}(mnL), \end{aligned} \quad (85)$$

utilizando a aproximação da função de Bessel para argumentos pequenos, a equação acima fica:

$$\mathcal{T}^{33} = \frac{1}{(4\pi)^{(D-1)/2}} (2\pi)^{(D-1)} \left(-D^2 + \frac{14D}{4} - 1 \right) 4\sqrt{\pi} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \frac{1}{\pi^D L^D} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^D}, \quad (86)$$

fazendo $D = 4$, temos:

$$\mathcal{T}^{33} = \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} (2\pi)^{(3)} (-3) 2\sqrt{\pi} \Gamma(2) \frac{1}{\pi^4 L^4} \zeta(4), \quad (87)$$

lembrando $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Deste modo, a pressão de Casimir, para $D = 4$ dimensões, corresponde a:

$$\mathcal{T}^{33} = P(L) = -\frac{6\pi^2}{90L^4} = -\frac{\pi^2}{15L^4}. \quad (88)$$

Portanto, as equações (76) e (88) correspondem, respectivamente, à energia e à pressão de Casimir em um espaço com uma topologia do tipo Γ_4^1 com condições de contorno periódicas aplicadas ao campo eletromagnético. Tais resultados estão de acordo com aqueles encontrados por (BROWN; MACLAY, 1969), basta considerarmos que $L = 2a$, correspondendo às condições de contorno de Dirichlet. Ao substituírmos $L = 2a$ nas equações da energia e da pressão, obtemos:

$$\mathcal{T}^{00} = E(a) = -\frac{\pi^2}{720a^4} \quad \mathcal{T}^{33} = P(a) = -\frac{\pi^2}{240a^4}, \quad (89)$$

tais resultados correspondem aquele previsto por Casimir em 1948. Vale destacar que diferentes tipos de condições de contorno podem ser utilizados ao estudarmos o efeito Casimir, como Dirichlet, Neumann, mistas, entre outras. Ao longo dessa tese, utilizamos condições de contorno periódicas no estudo do efeito Casimir.

3.4 Efeitos térmicos na energia de Casimir

De forma análoga ao caso anterior, vamos agora obter a energia de Casimir incluindo efeitos térmicos (REGO; LINHARES; MALBOUISSON, 2016). Portanto, além de compactar uma dimensão espacial, vamos compactar também a dimensão temporal, na qual obtemos uma circunferência comprimento igual ao inverso da temperatura e uma circunferência de comprimento L referente a dimensão espacial. Podemos dizer, então, que agora nosso espaço possui uma topologia do tipo Γ_4^2 . Partindo da eq.(55), dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{00} = & (D-2) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^0)^2}{k_\perp^2 + (k^0)^2 + (k^3)^2 + m^2} \\ & - \left(\frac{D-3}{2} \right) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\perp^2 + (k^0)^2 + (k^3)^2}{k_\perp^2 + (k^0)^2 + (k^3)^2 + m^2}, \end{aligned} \quad (90)$$

onde k_\perp são as componentes perpendiculares as componentes k^3 e k^0 do momento, sendo estas compactadas de acordo com a prescrição de Matsubara, dada por:

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}, \quad k_0 \rightarrow \frac{2\pi n_1}{\beta}. \quad (91)$$

$$\int \frac{dk_3}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{L} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty}, \quad k_3 \rightarrow \frac{2\pi n_2}{L}. \quad (92)$$

Assim, o tensor energia-momento pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{00} = & (D-2) \frac{1}{\beta L} \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-2} k_\perp}{(2\pi)^{D-2}} \frac{\frac{(2\pi)^2 n_1^2}{\beta^2}}{\left(k_\perp^2 + \frac{(2\pi)^2 n_1^2}{\beta^2} + \frac{(2\pi)^2 n_2^2}{L^2} + m^2 \right)^s} \\ & - \left(\frac{D-3}{2\beta L} \right) \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-2} k_\perp}{(2\pi)^{D-2}} \frac{k_\perp^2}{\left(k_\perp^2 + \frac{(2\pi)^2 n_1^2}{\beta^2} + \frac{(2\pi)^2 n_2^2}{L^2} + m^2 \right)^s} \\ & - \left(\frac{D-3}{2\beta L} \right) \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-2} k_\perp}{(2\pi)^{D-2}} \frac{\frac{(2\pi)^2 n_1^2}{\beta^2}}{\left(k_\perp^2 + \frac{(2\pi)^2 n_1^2}{\beta^2} + \frac{(2\pi)^2 n_2^2}{L^2} + m^2 \right)^s} \\ & - \left(\frac{D-3}{2\beta L} \right) \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-2} k_\perp}{(2\pi)^{D-2}} \frac{\frac{(2\pi)^2 n_2^2}{L^2}}{\left(k_\perp^2 + \frac{(2\pi)^2 n_1^2}{\beta^2} + \frac{(2\pi)^2 n_2^2}{L^2} + m^2 \right)^s} \end{aligned} \quad (93)$$

fazendo uma regularização dimensional, a equação acima fica da forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{00} = & (D-2) \frac{1}{\beta L} \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma\left(s - \frac{D-2}{2}\right)}{\Gamma(s)} \left(\frac{\frac{(2\pi)^2 n_1^2}{\beta^2}}{\frac{(2\pi)^2 n_1^2}{\beta^2} + \frac{(2\pi)^2 n_2^2}{L^2} + m^2} \right)^{s - \frac{D-2}{2}} \\
& - \left(\frac{D-3}{2\beta L} \right) \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{D-2}{2} \frac{\Gamma\left(s - \frac{D-2}{2} - 1\right)}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{\frac{(2\pi)^2 n_1^2}{\beta^2} + \frac{(2\pi)^2 n_2^2}{L^2} + m^2} \right)^{s - \frac{D-2}{2} - 1} \\
& - \left(\frac{D-3}{2\beta L} \right) \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma\left(s - \frac{D-2}{2}\right)}{\Gamma(s)} \left(\frac{\frac{(2\pi)^2 n_1^2}{\beta^2}}{\frac{(2\pi)^2 n_1^2}{\beta^2} + \frac{(2\pi)^2 n_2^2}{L^2} + m^2} \right)^{s - \frac{D-2}{2}} \\
& - \left(\frac{D-3}{2\beta L} \right) \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma\left(s - \frac{D-2}{2}\right)}{\Gamma(s)} \left(\frac{\frac{(2\pi)^2 n_1^2}{\beta^2}}{\frac{(2\pi)^2 n_1^2}{\beta^2} + \frac{(2\pi)^2 n_2^2}{L^2} + m^2} \right)^{s - \frac{D-2}{2}}. \tag{94}
\end{aligned}$$

Definindo em termos de alguns parâmetros adimensionais, $a_1 = \frac{1}{\beta^2}$; $a_2 = \frac{1}{L^2}$; $c^2 = \frac{m^2}{(2\pi)^2}$, sendo $\nu = s - \frac{D-2}{2} - 1$ e utilizando a propriedade $\Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{00} = & \frac{1}{\beta L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-2)/2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2\nu}} \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} \left\{ (D-2)\nu \frac{a_1 n_1^2}{(a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + c^2)^{\nu+1}} \right. \\
& \left. - \frac{(D-3)}{2} \left[\frac{D-2}{2} \frac{1}{(a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + c^2)^\nu} + \frac{\nu a_1 n_1^2 + \nu a_2 n_2^2}{(a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + c^2)^{\nu+1}} \right] \right\}, \tag{95}
\end{aligned}$$

com a finalidade de reconhecermos as funções Zeta de Epstein-Hurwitz, fazemos a seguinte álgebra: ao primeiro termo da equação acima somamos e subtraímos $a_2 n_2^2 + c^2$ e no último termo somamos e subtraímos νc^2 . Portanto, a equação fica da forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{00} = & \frac{1}{\beta L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-2)/2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2\nu}} \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} \\
& \times \left\{ (D-2)\nu \left(\frac{1}{(a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + c^2)^\nu} - \frac{a_2 n_2^2 + c^2}{(a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + c^2)^{\nu+1}} \right) \right. \\
& - \frac{(D-3)}{2} \left[\frac{D-2}{2} \frac{1}{(a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + c^2)^\nu} + \frac{\nu}{(a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + c^2)^\nu} \right. \\
& \left. \left. - \frac{\nu c^2}{(a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + c^2)^{\nu+1}} \right] \right\}, \tag{96}
\end{aligned}$$

sendo a função Zeta de Epstein-Hurwitz, com duas dimensões compactadas, dada por:

$$Z_2^{c^2}(\nu; a_1, a_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + c^2)^\nu}, \tag{97}$$

e sua derivada em relação a a_2 dada por:

$$\frac{\partial}{\partial a_2} Z_2^{c^2}(\nu; a_1, a_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-\nu n_2^2}{(a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + c^2)^{\nu+1}}, \tag{98}$$

eliminando os termos c^2 que não possuem dependência com a distância entre as placas, a eq.(96) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{00} = & \frac{1}{\beta L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-2)/2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2\nu}} \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \\ & \times \left\{ \left[(D-2)\nu - \frac{(D-3)(D-2)}{4} + \frac{D-3}{2}\nu \right] Z_2^{c^2}(\nu; a_1, a_2) \right. \\ & \left. + (D-2)a_2 \frac{\partial}{\partial a_2} Z_2^{c^2}(\nu; a_1, a_2) \right\} \end{aligned} \quad (99)$$

A função zeta de Epstein-Hurwitz, fazendo uma continuação analítica, pode ser escrita em termos de uma função de Bessel de segunda espécie, conforme a eq.(69). No caso de $d = 2$ dimensões compactadas, essa é dada por:

$$\begin{aligned} Z_2^{c^2}(\nu; a_1, a_2) = & \frac{2\pi}{\sqrt{a_1 a_2} \Gamma(\nu)} \left[\frac{\Gamma(\nu-1)}{2c^{2(\nu-1)}} + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n_1}{c\sqrt{a_1}} \right)^{\nu-1} K_{\nu-1} \left(\frac{2\pi c n_1}{\sqrt{a_1}} \right) \right. \\ & + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n_2}{c\sqrt{a_2}} \right)^{\nu-1} K_{\nu-1} \left(\frac{2\pi c n_2}{\sqrt{a_2}} \right) \\ & \left. + 2^2 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right)^{\nu-1} K_{\nu-1} \left(2\pi c \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right) \right], \end{aligned} \quad (100)$$

e sua derivada em relação a a_2 será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_2} Z_2^{c^2}(\nu; a_1, a_2) = & \frac{2\pi}{\sqrt{a_1 a_2} \Gamma(\nu)} \left\{ (1-\nu) \frac{\pi^{\nu-1}}{c^{\nu-1} a_2^{\frac{\nu+1}{2}}} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2^{1-\nu}} K_{\nu-1} \left(\frac{2\pi c n_2}{\sqrt{a_2}} \right) \right. \\ & + \frac{\pi^\nu}{c^{\nu-2} a_2^{\frac{\nu}{2}}} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2^{-\nu}} \left[K_{\nu-2} \left(\frac{2\pi c n_2}{\sqrt{a_2}} \right) + K_\nu \left(\frac{2\pi c n_2}{\sqrt{a_2}} \right) \right] \\ & + \frac{2(1-\nu)}{a_2^2} \left(\frac{\pi}{c} \right)^{\nu-1} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} n_2^2 \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right)^{\nu-3} \\ & \times K_{\nu-1} \left(2\pi c \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right) \\ & + \frac{2\pi^\nu}{c^{\nu-2} a_2^2} \left(\frac{\pi}{c} \right)^{\nu-1} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} n_2^2 \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right)^{\nu-2} \\ & \times \left[K_{\nu-2} \left(2\pi c \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right) + K_\nu \left(2\pi c \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right) \right] \Big\} \\ & - \frac{\pi}{a_2 \sqrt{a_1 a_2} \Gamma(\nu)} Z_2^{c^2}(\nu; a_1, a_2). \end{aligned} \quad (101)$$

Substituindo a equação da função Zeta e sua respectiva derivada na eq.(99) e separando em três termos, cada um deles dependendo de um certo tipo de somatório, obtemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{00} = & \frac{1}{\beta L} \frac{1}{(4\pi)^{(D-2)/2}} \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2\nu}} \left[\left(\frac{2(3D-7)\nu - (D-3)(D-2)}{4} \right) \right. \\ & \times \left. \frac{2\pi\Gamma(\nu-1)}{2\sqrt{a_1 a_2} c^{2(\nu-1)}} - (D-2) \frac{2\pi\Gamma(\nu-1)}{2\sqrt{a_1 a_2} c^{2(\nu-1)}} \right] + \mathcal{T}_{n_1} + \mathcal{T}_{n_2} + \mathcal{T}_{n_1, n_2}. \end{aligned} \quad (102)$$

O termo $\frac{1}{\beta L} = \sqrt{a_1 a_2}$ pode ser simplificado com os mesmos termos que aparecem dentro do colchete. Dessa forma, podemos fazer uma renormalização por subtração e desprezar os termos que não dependem das separações β e L das placas. Portanto, a eq.(102), assume a forma:

$$\mathcal{T}^{00} = \mathcal{T}_{n_1} + \mathcal{T}_{n_2} + \mathcal{T}_{n_1, n_2}. \quad (103)$$

sendo \mathcal{T}_{n_1} a parte do tensor que possui termos com somatório apenas em n_1 , \mathcal{T}_{n_2} apenas para termos com somatório em n_2 e \mathcal{T}_{n_1, n_2} representa os termos cruzados que apresentam somatório duplo em n_1 e n_2 . Cada um desses termos gera uma contribuição para a expressão geral do tensor energia momento. Trabalhando, separadamente, cada um deles, obtemos que \mathcal{T}_{n_1} será:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{n_1} = & \frac{1}{(4\pi)^{(D-2)/2}} \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{2\nu}} \left(\frac{2(3D-7)\nu - (D-3)(D-2)}{4} \right) \\ & \times \frac{4\pi^\nu}{c^{(\nu-1)}(\sqrt{a_1})^{\nu-1}} \sum_{n_1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{1-\nu}} K_{1-\nu} \left(\frac{2\pi c n_1}{\sqrt{a_1}} \right), \end{aligned} \quad (104)$$

sendo $\nu = s - \frac{D-2}{2} - 1$ e fazendo o limite em que $s \rightarrow 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{n_1} = & \frac{1}{(4\pi)^{(D-2)/2}} (2\pi)^{D-2} ((3D-7)(2-D) - (D-3)(D-2)) \\ & \times \frac{\pi^{\frac{2-D}{2}}}{c^{-D/2}(\sqrt{a_1})^{-D/2}} \sum_{n_1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{D/2}} K_{D/2} \left(\frac{2\pi c n_1}{\sqrt{a_1}} \right), \end{aligned} \quad (105)$$

usando a aproximação $K_{D/2}(mnL) \sim \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\left(\frac{2}{mnL}\right)^{D/2}$, a eq.(105) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{n_1} = & \frac{1}{(4\pi)^{(D-2)/2}} (2\pi)^{D-2} ((3D-7)(2-D) - (D-3)(D-2)) \pi^{\frac{2-D}{2}} \\ & \times \sum_{n_1}^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi n_1 \beta} \right)^{D/2} \left(\frac{2}{mn_1 \beta} \right)^{D/2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right), \end{aligned} \quad (106)$$

organizando os termos, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{n_1} &= \frac{1}{(4\pi)^{(D-2)/2}} (2\pi)^{D-2} ((3D-7)(2-D) - (D-3)(D-2)) \pi^{\frac{2-D}{2}} \\ &\quad \times \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \frac{1}{\pi^{D/2} \beta^D} \sum_{n_1}^{\infty} \frac{1}{n_1^D},\end{aligned}\quad (107)$$

fazendo $D = 4$ e identificando $\sum_{n_1}^{\infty} \frac{1}{n_1^D} = \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ como a função zeta de Riemann, obtemos que o termo \mathcal{T}_{n_1} do tensor energia-momento será:

$$\mathcal{T}_{n_1} = \frac{\pi^2}{15\beta^4}.\quad (108)$$

O resultado acima corresponde a contribuição da temperatura para a energia de Casimir. O comportamento com o inverso da quarta potência da temperatura reproduz a lei de Stefan-Boltzmann (Radiação de corpo negro).

Trabalhando agora com o termo \mathcal{T}_{n_2} , obtemos uma expressão análoga a eq.(105) com termos adicionais referentes aos somatórios em n_2 , dada por :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{n_2} &= \frac{1}{(4\pi)^{(D-2)/2}} (2\pi)^{D-2} \left(\frac{(3D-7)(2-D) - (D-3)(D-2)}{4} \right) \frac{2\pi^{\frac{2-D}{2}}}{c^{-D/2}(\sqrt{a_2})^{-D/2}} \\ &\quad \times \sum_{n_2}^{\infty} \frac{1}{n_2^{D/2}} K_{D/2} \left(\frac{2\pi c n_2}{\sqrt{a_2}} \right) + (D-2) \frac{2\pi^{\frac{2-D}{2}} a_2^{D/2}}{c^{-D/2}(\sqrt{a_2})^{-D/2}} \sum_{n_2}^{\infty} \frac{1}{n_2^{D/2}} K_{D/2} \left(\frac{2\pi c n_2}{\sqrt{a_2}} \right) \\ &\quad + (D-2) \frac{2\pi^{\frac{4-D}{2}}}{c^{\frac{D+2}{2}}(\sqrt{a_2})^{\frac{2-D}{2}}} \sum_{n_2}^{\infty} \frac{1}{n_2^{\frac{D-2}{2}}} \left[K_{\frac{D+2}{2}} \left(\frac{2\pi c n_2}{\sqrt{a_2}} \right) + K_{\frac{D-2}{2}} \left(\frac{2\pi c n_2}{\sqrt{a_2}} \right) \right],\end{aligned}\quad (109)$$

simplificando alguns termos, organizando a equação acima, e lembrando que os parâmetros adimensionais são dados por $c = \frac{m}{2\pi}$ e $a_2 = \frac{1}{L}$, obtemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{n_2} &= 2 \left(\frac{m}{2\pi L} \right)^{D/2} \left(\frac{(3D-7)(2-D) - (D-3)(D-2)}{4} \right) \sum_{n_2}^{\infty} \frac{1}{n_2^{D/2}} K_{D/2}(mn_2 L) \\ &\quad - \frac{mL}{2} (D-2) \sum_{n_2}^{\infty} \frac{1}{n_2^{D/2-1}} K_{D/2-1}(mn_2 L) + \\ &\quad + \frac{mL}{2} (D-2) \sum_{n_2}^{\infty} \frac{1}{n_2^{D/2-1}} K_{D/2+1}(mn_2 L),\end{aligned}\quad (110)$$

colocando alguns termos comuns em evidência, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{n_2} &= 2 \left(\frac{m}{2\pi L} \right)^{D/2} \left(\frac{(3D-7)(2-D) - (D-3)(D-2)}{4} \right) \sum_{n_2}^{\infty} \frac{1}{n_2^{D/2}} K_{D/2}(mn_2 L) \\ &\quad - \frac{mL}{2} (D-2) \sum_{n_2}^{\infty} \frac{1}{n_2^{D/2-1}} \left(K_{D/2-1}(mn_2 L) - K_{D/2+1}(mn_2 L) \right),\end{aligned}\quad (111)$$

utilizando a seguinte recorrência da função de Bessel $K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = \frac{-2\nu}{x} K_{\nu}(x)$, a

equação acima fica:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{n_2} = & 2 \left(\frac{m}{2\pi L} \right)^{D/2} \left(\frac{(3D-7)(2-D) - (D-3)(D-2) + 2(D-2)D}{4} \right) \\ & \times \sum_{n_2}^{\infty} \frac{1}{n_2^{D/2}} K_{D/2}(mn_2L) + \frac{(D-2)D}{2} \sum_{n_2}^{\infty} \frac{1}{n_2^{D/2}} K_{D/2}(mn_2L), \end{aligned} \quad (112)$$

sendo a função de Bessel comum a ambos os termos, podemos escrever como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{n_2} = & 2 \left(\frac{m}{2\pi L} \right)^{D/2} \left(\frac{(3D-7)(2-D) - (D-3)(D-2) + 2(D-2)D + \frac{(D-2)D}{2}}{4} \right) \\ & \times \sum_{n_2}^{\infty} \frac{1}{n_2^{D/2}} K_{D/2}(mn_2L). \end{aligned} \quad (113)$$

Fazendo $D = 4$ e utilizando e identificando a função zeta de Riemann, obtemos:

$$\mathcal{T}_{n_2} = -\frac{\pi^2}{45L^4}. \quad (114)$$

O resultado é idêntico ao encontrado na eq.(76), portanto representa a compactação de uma dimensão espacial.

Por fim, podemos trabalhar no termo, $\mathcal{T}_{n_1 n_2}$, correspondendo a contribuição de ambas as dimensões compactadas. Desse modo,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{n_1 n_2} = & \frac{1}{(4\pi)^{(D-2)/2}} (2\pi)^{D-2} \left\{ \left(\frac{(3D-7)(2-D) - (D-3)(D-2)}{4} \right) \frac{4\pi^{-D/2}}{c^{-D/2}} \right. \\ & \times \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right)^{-D/2} K_{D/2} \left(2\pi c \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right) \\ & + 4\pi \frac{(D-2)D}{2a_2} \left(\frac{\pi}{c} \right)^{-D/2} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} n_2^2 \left(\sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right)^{-D/2-2} \\ & \times K_{D/2} \left(2\pi c \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right) \\ & + (D-2) \frac{4\pi^{2-D/2}}{a_2 c^{-D/2-1}} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} n_2^2 \left(\sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right)^{-D/2-1} \\ & \left. \times \left[K_{D/2+1} \left(2\pi c \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right) + K_{D/2-1} \left(2\pi c \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (115)$$

escrevendo em termos das variáveis originais e simplificando alguns termos, a equação

acima pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{n_1 n_2} = & 4 \left(\frac{m}{2\pi} \right)^{D/2} \left\{ \left(\frac{(3D-7)(2-D) - (D-3)(D-2)}{4} \right) \right. \\
& \times \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n_1^2 \beta^2 + n_2^2 L^2}} \right)^{D/2} K_{D/2} \left(m \sqrt{n_1^2 \beta^2 + n_2^2 L^2} \right) \\
& + (D-2) \frac{DL^2}{2} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} n_2^2 \left(\frac{1}{\sqrt{n_1^2 \beta^2 + n_2^2 L^2}} \right)^{D/2+2} K_{D/2} \left(m \sqrt{n_1^2 \beta^2 + n_2^2 L^2} \right) \\
& + \frac{mL^2}{2} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} n_2^2 \left(\frac{1}{\sqrt{n_1^2 \beta^2 + n_2^2 L^2}} \right)^{D/2+1} \\
& \left. \times \left[K_{\frac{D}{2}+1} \left(m \sqrt{n_1^2 \beta^2 + n_2^2 L^2} \right) + K_{\frac{D}{2}-1} \left(m \sqrt{n_1^2 \beta^2 + n_2^2 L^2} \right) \right] \right\}, \tag{116}
\end{aligned}$$

usando a relação de recorrência da função de Bessel $K_{\nu+1} = K_{\nu-1}(x) + \frac{2\nu}{x} K_{\nu}(x)$, organizando e colocando em evidência um fator comum, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{n_1 n_2} = & 4 \left(\frac{m}{2\pi} \right)^{D/2} \left\{ \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n_1^2 \beta^2 + n_2^2 L^2}} \right)^{D/2} \right. \\
& \times \left[\frac{(3D-7)(2-D) - (D-3)(D-2)}{4} + \frac{n_2^2 L^2 (D-2)}{n_1^2 \beta^2 + n_2^2 L^2} \left(\frac{D}{2} + 1 \right) \right] \\
& \times K_{D/2} \left(m \sqrt{n_1^2 \beta^2 + n_2^2 L^2} \right) + mL^2 (D-2) \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} n_2^2 \left(\frac{1}{\sqrt{n_1^2 \beta^2 + n_2^2 L^2}} \right)^{\frac{D}{2}+1} \\
& \left. \times K_{\frac{D}{2}-1} \left(m \sqrt{n_1^2 \beta^2 + n_2^2 L^2} \right) \right\}, \tag{117}
\end{aligned}$$

fazendo o limite em que $m \rightarrow 0$, a equação acima fica:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{n_1 n_2} = & 4 \left(\frac{m}{2\pi} \right)^{D/2} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n_1^2 \beta^2 + n_2^2 L^2}} \right)^{D/2} \\
& \times \left[\frac{(3D-7)(2-D) - (D-3)(D-2)}{4} + \frac{n_2^2 L^2 (D-2)}{n_1^2 \beta^2 + n_2^2 L^2} \left(\frac{D}{2} + 1 \right) \right] \\
& \times K_{D/2} \left(m \sqrt{n_1^2 \beta^2 + n_2^2 L^2} \right). \tag{118}
\end{aligned}$$

Considerando a dimensão como $D = 4$, utilizando a aproximação da função de Bessel para argumentos pequenos, e simplificando alguns termos, a eq.(118) assume a seguinte forma

$$\mathcal{T}_{n_1 n_2} = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{n_1^2 \beta^2 - n_2^2 L^2}{(n_1^2 \beta^2 + n_2^2 L^2)^3}. \tag{119}$$

Portanto, de acordo com a eq.(103), a energia de Casimir com efeitos térmicos, é dada por:

$$\mathcal{T}^{00} = \frac{\pi^2}{15\beta^4} - \frac{\pi^2}{45L^4} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{n_1^2\beta^2 - n_2^2L^2}{(n_1^2\beta^2 + n_2^2L^2)^3}. \quad (120)$$

onde o primeiro termo reproduz a radiação de corpo negro (compactação da dimensão temporal), o segundo termo expressa a contribuição da energia de Casimir (compactação da dimensão espacial), e o último termo representa a contribuição mista das compactações espacial e temporal. O resultado acima foi calculado utilizando condições de contorno periódicas, podendo esse ser generalizado para as condições de Dirichlet, Neumann ou mistas.

4 CORREÇÕES RADIATIVAS AO EFEITO CASIMIR

4.1 Teorias de calibre

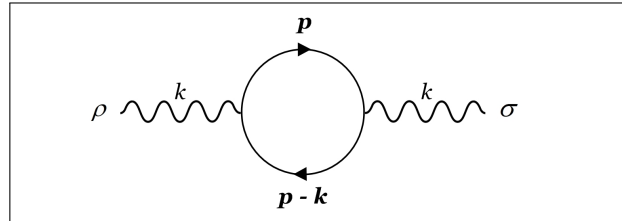
As simetrias ligadas as teorias físicas desempenham um papel fundamental no estudo de diversos fenômenos na natureza. O termo simetria em física refere-se ao fato de algum parâmetro ser invariante na sua forma. Deste modo, dizemos que um sistema é invariante sob um determinado grupo de transformações ou que ele apresenta uma determinada simetria em algum parâmetro que o descreve. Em física, existem dois tipos de simetria: as chamadas simetrias globais e as chamadas simetrias locais, essas últimas sendo de grande importância no desenvolvimento da teoria de campos, conhecidas como simetrias de calibre ou de gauge. Na década de 1960 a teoria quântica de campos passou a ser estudada no contexto das chamadas teorias de calibre. Como exemplos dessas teorias, temos: a eletrodinâmica quântica (QED), que descreve essencialmente os processos de interação entre elétrons e fótons, classificada como uma teoria de calibre abeliana. Além dessa, temos também a chamada cromodinâmica quântica (QCD), descrevendo a interação entre os quarks e glúons no interior da matéria hadrônica, sendo caracterizada como uma teoria de calibre não abeliana. Nesse trabalho, o efeito Casimir é estudado no contexto da eletrodinâmica quântica, porém o mesmo pode ser aplicado a outros tipos de campos, conforme descrito pela QCD.

4.2 Correções radiativas na eletrodinâmica

Até agora estudamos o efeito Casimir, considerando apenas o campo livre, ou seja, apenas o propagador do fóton. Porém, para uma teoria quântica de campos que descreve a natureza de uma forma mais precisa, é necessário considerarmos a interação entre os campos. Quanto maior as ordens na teoria de perturbação mais próximo da realidade será descrito o fenômeno estudado. No caso particular, o estudo do efeito Casimir. A partir desse momento, estendemos nosso estudo, considerando a interação do campo eletromagnético e do campo do elétron, de acordo com a eletrodinâmica quântica na aproximação de 1 loop. Obtêm-se, assim, neste contexto, correções radiativas para o efeito Casimir, bem como correções devidas a temperatura finita. O tratamento de integrais relativas a amplitudes de Feynman é, novamente, realizado através do método de Matsubara generalizado, delimitando então um determinado número de dimensões. Os resultados assim obtidos para a energia e a pressão de Casimir podem ser comparados com os já conhecidos na literatura, calculados por outros métodos (RAVNDAL; THOMASSEN, 2004);(BARONE; CAVALCANTI; FARINA, 2004);(BORDAG; SCHAR-

NHORST, 1998)(CAVALCANTI; FARINA; BARONE, 2006). Os primeiros a calcularem correções radiativas a energia de Casimir foram Bordag, Robaschik, e Wieczorek (BORDAG; ROBASCHIK; WIECZOREK, 1985), encontrando $\Delta E_0 = \frac{\pi^2 \alpha}{2560 m a^4}$ como a correção em primeira ordem da energia de vácuo, onde m corresponde a massa do elétron, a sendo a separação entre as placas. Tal correção se origina como um efeito devido a polarização do vácuo. O processo físico de nosso interesse no presente trabalho corresponde aquele onde há dois fótons externos, representando portanto a propagação do fóton na presença da interação. As contribuições perturbativas são identificadas como a auto-energia do fóton, na qual o fóton ao se propagar cria um par elétron-pósitron que interage com o campo bosônico (ITZYKSON; ZUBER, 2005). Portanto, estamos interessados em calcular o diagrama de loop fermiônico que representa a auto-energia do fóton, conforme mostra a Fig.3. O tratamento aqui será feito de forma análoga ao utilizado nos cálculos para campo

Figura 3 - Auto-energia do fóton



Legenda: Correção ao propagador do fóton

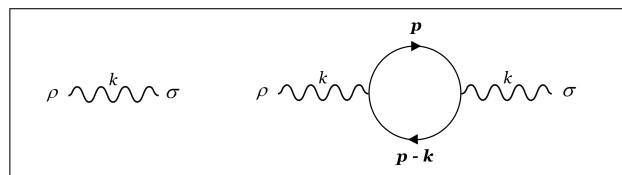
Fonte: O autor, 2020.

livre. Partindo da ideia de calcularmos a energia de Casimir pelo valor esperado no vácuo do tensor energia-momento, representado pela eq.(52), podemos escrever que:

$$\langle \Omega | T A_\alpha(x) A_\beta(x') | \Omega \rangle = \langle 0 | T A_\alpha(x) A_\beta(x') | 0 \rangle + \langle \Omega | T A_\alpha(x) A_\beta(x') | \Omega \rangle^{(1)}, \quad (121)$$

onde o primeiro termo na equação acima corresponde ao campo livre do fóton e o segundo termo representa a correção a 1 loop ao propagador do fóton, conforme representado pelos

Figura 4 - Representação por diagramas



Legenda: Propagador livre e propagador fermiônico a 1 loop

Fonte: O autor, 2020.

diagramas da Fig.4

Deste modo, de acordo com as regras de Feynman na QED, a correção radiativa para a energia de Casimir, pode ser calculado pelo diagrama de loop fermiônico. Logo:

$$\begin{aligned} \left\langle \Omega \mid T A_\alpha(x) A_\beta(x') \mid \Omega \right\rangle^{(1)} &= g_{\alpha\rho} g_{\sigma\beta} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{(k^2 + i\varepsilon)^2} \\ &\times \left[(-1) \times (-e^2) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} Tr \left(\gamma^\rho \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma^\sigma \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \right) \right], \end{aligned} \quad (122)$$

onde o fator -1 representa o loop fermiônico e e^2 corresponde a carga do elétron.

Fazendo as contrações de $g_{\alpha\rho}$ e $g_{\sigma\beta}$ com o operador diferencial $O^{\mu\nu}$, o tensor energia-momento pode ser escrito da forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mu\nu}(x) &= \lim_{x \rightarrow x'} \left[\delta_\sigma^\nu \partial^\mu \partial'_\rho - g_{\rho\sigma} \partial^\mu \partial'^\nu - \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu \partial^\lambda \partial'_\lambda + \delta_\rho^\mu \partial_\sigma \partial'^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g^{\rho\sigma} \partial^\lambda \partial'_\lambda - \partial^\sigma \partial'^\rho) \right] \\ &\times \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{(k^2 + i\varepsilon)^2} \\ &\times e^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} Tr \left(\gamma^\rho \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma^\sigma \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \right), \end{aligned} \quad (123)$$

utilizando as propriedades do traço das matrizes gama, em um espaço de D dimensões, dadas por:

$$Tr(\gamma_\rho \gamma_\sigma) = D g_{\rho\sigma}$$

$$Tr(\gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\sigma \gamma_\beta) = D (g_{\rho\alpha} g_{\sigma\beta} - g_{\rho\sigma} g_{\alpha\beta} + g_{\rho\beta} g_{\alpha\sigma}),$$

a equação (123) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mu\nu}(x) &= \lim_{x \rightarrow x'} \left[\delta_\sigma^\nu \partial^\mu \partial'_\rho - g_{\rho\sigma} \partial^\mu \partial'^\nu - \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu \partial^\lambda \partial'_\lambda + \delta_\rho^\mu \partial_\sigma \partial'^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g^{\rho\sigma} \partial^\lambda \partial'_\lambda - \partial^\sigma \partial'^\rho) \right] \\ &\times \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{(k^2 + i\varepsilon)^2} \\ &\times D e^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\rho (p-k)_\sigma + p_\sigma (p-k)_\rho - g_{\rho\sigma} (p \cdot (p-k) - m^2)}{(p^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)}, \end{aligned} \quad (124)$$

após uma certa álgebra no numerador da integral em p , e passando para o espaço euclidiano, o tensor energia-momento fica:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mu\nu}(x) &= \lim_{x \rightarrow x'} \left[\delta_\sigma^\nu \partial^\mu \partial'_\rho - g_{\rho\sigma} \partial^\mu \partial'^\nu - \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu \partial^\lambda \partial'_\lambda + \delta_\rho^\mu \partial_\sigma \partial'^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g^{\rho\sigma} \partial^\lambda \partial'_\lambda - \partial^\sigma \partial'^\rho) \right] \\ &\quad \times \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{(k^2 + m^2)^2} \\ &\quad De^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{2p_\rho p_\sigma - p_\rho k_\sigma - \delta_{\rho\sigma}((p^2 - p \cdot k) + m^2)}{(p^2 + m^2)((p - k)^2 + m^2)}. \end{aligned} \quad (125)$$

Observando o numerador da integral em p , percebemos que esse representa um polinômio do segundo grau. Desse modo, podemos escrevê-lo como derivadas que atuam em uma função exponencial (CARDOSO,), portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mu\nu}(x) &= \lim_{x \rightarrow x'} \left[\delta_\sigma^\nu \partial^\mu \partial'_\rho - g_{\rho\sigma} \partial^\mu \partial'^\nu - \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu \partial^\lambda \partial'_\lambda + \delta_\rho^\mu \partial_\sigma \partial'^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g^{\rho\sigma} \partial^\lambda \partial'_\lambda - \partial^\sigma \partial'^\rho) \right] \\ &\quad \times De^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{(k^2 + m^2)^2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \\ &\quad \times \left[\frac{2 \frac{\partial}{\partial z^\rho} \frac{\partial}{\partial z^\sigma} - k_\sigma \frac{\partial}{\partial z^\rho} - k_\rho \frac{\partial}{\partial z^\sigma} - \delta_{\rho\sigma} (\nabla^2 - k_i \frac{\partial}{\partial z^i} + m^2)}{(p^2 + m^2)((p - k)^2 + m^2)} \right] \times e^{p \cdot z} \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (126)$$

Esse polinômio mencionado, pode ser interpretado como um operador, escrito da seguinte forma:

$$\mathcal{P}(k, \frac{\partial}{\partial z}) = \left[2 \frac{\partial}{\partial z^\rho} \frac{\partial}{\partial z^\sigma} - k_\sigma \frac{\partial}{\partial z^\rho} - k_\rho \frac{\partial}{\partial z^\sigma} - \delta_{\rho\sigma} (\nabla^2 - k_i \frac{\partial}{\partial z^i} + m^2) \right] \times e^{p \cdot z} \Big|_{z=0}, \quad (127)$$

portanto, a parte da eq.(126) referente a integral em p , pode ser escrita com a seguinte notação:

$$\Gamma_{\rho\sigma}(k) = \lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{P}(k, \frac{\partial}{\partial z}) \mathcal{I}(k, z), \quad (128)$$

onde $\mathcal{I}(k, z)$, é a parte remanescente da integral em p , dada por:

$$\mathcal{I}(k, z) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{e^{p \cdot z}}{(p^2 + m^2)((p - k)^2 + m^2)}. \quad (129)$$

Utilizando a prescrição de Matsubara para a compactação de uma dimensão espacial, a eq.(128) fica da forma:

$$\Gamma_{\rho\sigma}(k) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{L} \sum_n \int \frac{d^N p_\perp}{(2\pi)^N} \mathcal{P}(k, \frac{\partial}{\partial z}) \frac{e^{p_\perp z_\perp + l z'}}{(p_\perp^2 + m^2 + l^2)((p_\perp - k_\perp)^2 + m^2 + (l - k')^2)}, \quad (130)$$

onde p_\perp e z_\perp são as componentes ortogonais em relação as componentes compactadas do

momento e do parâmetro z , dadas respectivamente por l e z' . O número N corresponde à dimensão do espaço após uma compactação. Portanto, $N = D - 1$, correspondendo a uma dimensão espacial compactada. Logo,

$$\Gamma_{\rho\sigma}(k) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{L} \sum_n \mathcal{P}_{\rho\sigma} \Gamma^N(k, n, z) e^{z'l}, \quad (131)$$

sendo $\Gamma^N(k, n, z)$, igual a:

$$\Gamma^N(k, n, z) = \int \frac{d^N p_\perp}{(2\pi)^N} \frac{e^{z_\perp p_\perp}}{(p_\perp^2 + m_1^2)((p_\perp - k_\perp)^2 + m_2^2)}, \quad (132)$$

onde $m_1^2 = m^2 + l^2$ e $m_2^2 = m^2 + (l - k')^2$.

Escrevendo o polinômio de derivadas $\mathcal{P}(k, \frac{\partial}{\partial z})$ junto com a integral acima, podemos defini-los conforme abaixo:

$$I = \int \frac{d^N k_\perp}{(2\pi)^N} \frac{\mathcal{P}(\frac{\partial}{\partial z}) e^{z_\perp p_\perp}}{(k_\perp^2 + m_1^2)((k_\perp + p_\perp)^2 + m_2^2)}. \quad (133)$$

Utilizando os parâmetros de Schwinger (ITZYKSON; ZUBER, 2005), podemos reescrever denominador da integral como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_\perp^2 + m_1^2} &= \int_0^\infty d\alpha_1 e^{-\alpha_1(k_\perp^2 + m_1^2)} \\ \frac{1}{(k_\perp + p_\perp)^2 + m_2^2} &= \int_0^\infty d\alpha_2 e^{-\alpha_2(k_\perp + p_\perp)^2 + m_2^2} \end{aligned} \quad (134)$$

sendo assim, a integral pode ser escrita na forma:

$$I = \mathcal{P}(\frac{\partial}{\partial z}) \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \int \frac{d^N k_\perp}{(2\pi)^N} e^{-\alpha_1(k_\perp^2 + m_1^2) - \alpha_2(k_\perp + p_\perp)^2 + m_2^2}. \quad (135)$$

Desenvolvendo o expoente da integral acima, podemos escrevê-lo da seguinte maneira:

$$-E = \alpha_1 k_\perp^2 + \alpha_2 \left(k_\perp^2 + 2k_\perp p_\perp - k_\perp \frac{z_\perp}{\alpha_2} \right) + \sum m_i^2 \alpha_i + \alpha_2 p_\perp^2 \quad (136)$$

após uma certa álgebra, obtemos:

$$\begin{aligned} -E &= (\alpha_1 + \alpha_2) \left[\left(k_\perp + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(p_\perp - \frac{z_\perp}{2\alpha_2} \right) \right)^2 - \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \left(p_\perp - \frac{z_\perp}{2\alpha_2} \right)^2 \right] \\ &\quad + \sum m_i^2 \alpha_i + \alpha_2 p_\perp^2, \end{aligned} \quad (137)$$

fazendo um deslocamento sem jacobiano, ou seja, $k_\perp \rightarrow k_\perp + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(p_\perp - \frac{z_\perp}{2\alpha_2} \right)$, o expoente

pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
-E &= (\alpha_1 + \alpha_2) k_{\perp}^2 - \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)} \left(p_{\perp}^2 - \frac{p_{\perp} z_{\perp}}{\alpha_2} + \frac{z_{\perp}^2}{4\alpha_2^2} \right) + \sum m_i^2 \alpha_i + \alpha_2 p_{\perp}^2 \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2) k_{\perp}^2 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)} p_{\perp}^2 - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\frac{z_{\perp}^2}{4} - \alpha^2 z_{\perp} p_{\perp} \right) + \sum m_i^2 \alpha_i,
\end{aligned} \tag{138}$$

substituindo o expoente de volta na integral I , dada pela (eq.135), obtemos:

$$I = \mathcal{P}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \int_0^{\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 \int \frac{d^N k_{\perp}}{(2\pi)^N} e^{\left[(\alpha_1 + \alpha_2) k_{\perp}^2 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)} p_{\perp}^2 - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\frac{z_{\perp}^2}{4} - \alpha^2 z_{\perp} p_{\perp} \right) + \sum m_i^2 \alpha_i \right]}. \tag{139}$$

Podemos, então, resolver a integral em k_{\perp} como:

$$\int \frac{d^N k_{\perp}}{(2\pi)^N} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2) k_{\perp}^2} = \frac{1}{(2\pi)^N} \left(\frac{\pi}{(\alpha_1 + \alpha_2)} \right)^{N/2}, \tag{140}$$

logo, a integral I assume a forma:

$$I = \frac{\mathcal{P}(\partial/\partial z)}{(4\pi)^{N/2}} \int_0^{\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{N/2}} e^{-\frac{\alpha_1 \alpha_2 p_{\perp}^2}{\alpha_1 + \alpha_2} + \sum m_i^2 \alpha_i - \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \left(\frac{z_{\perp}^2}{4} - \alpha_2 p_{\perp} z_{\perp} \right)}. \tag{141}$$

Inserindo a seguinte relação de completeza dada pela delta de Dirac:

$$1 = \int_0^{\infty} d\lambda \delta(\lambda - \alpha_1 - \alpha_2), \tag{142}$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\mathcal{P}(\partial/\partial z)}{(4\pi)^{N/2}} \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{N/2}} \delta(\lambda - \alpha_1 - \alpha_2) e^{-\frac{\alpha_1 \alpha_2 p_{\perp}^2}{\alpha_1 + \alpha_2}} \\
&\quad + \sum m_i^2 \alpha_i - \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \left(\frac{z_{\perp}^2}{4} - \alpha_2 p_{\perp} z_{\perp} \right),
\end{aligned} \tag{143}$$

fazendo um escalonamento, de forma que $\alpha_i \rightarrow \lambda \alpha_i$, temos:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\mathcal{P}(\partial/\partial z)}{(4\pi)^{N/2}} \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{\lambda^{2-N/2}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{N/2}} \delta(\lambda - \lambda(\alpha_1 - \alpha_2)) \\
&\quad \times e^{-\lambda \left[\frac{\alpha_1 \alpha_2 p_{\perp}^2}{\alpha_1 + \alpha_2} + \sum m_i^2 \right] - \frac{1}{\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)} \left[\frac{z_{\perp}^2}{4} - \lambda \alpha_2 p_{\perp} z_{\perp} \right]},
\end{aligned} \tag{144}$$

utilizando a propriedade da delta de Dirac $\delta(\lambda - \lambda(\alpha_1 - \alpha_2)) = \frac{1}{\lambda} \delta(1 - (\alpha_1 - \alpha_2))$, temos:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\mathcal{P}(\partial/\partial z)}{(4\pi)^{N/2}} \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{\lambda^{2-N/2-1}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{N/2}} \delta(\lambda - \lambda(\alpha_1 - \alpha_2)) \\
&\quad \times e^{-\lambda \left[\frac{\alpha_1 \alpha_2 p_{\perp}^2}{\alpha_1 + \alpha_2} + \sum m_i^2 \right] - \frac{1}{\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)} \left[\frac{z_{\perp}^2}{4} - \lambda \alpha_2 p_{\perp} z_{\perp} \right]},
\end{aligned} \tag{145}$$

integrando em α_1 com a delta de Dirac, a integral I fica da forma:

$$I = \frac{\mathcal{P}(\partial/\partial z)}{(4\pi)^{N/2}} \int_0^\infty d\lambda \int_0^1 d\alpha \lambda^{2-N/2-1} e^{-\lambda[(1-\alpha)\alpha p_\perp^2 + \sum m_i^2] - \frac{1}{\lambda} \left[\frac{z_\perp^2}{4} - \lambda \alpha p_\perp z_\perp \right]}, \quad (146)$$

fazendo $p \rightarrow -k$, a integral acima volta a ter o mesmo formato da integral $\Gamma^N(k, n, z)$, dada pela eq.(132). Portanto, temos que:

$$\Gamma^N = \frac{\mathcal{P}(\partial/\partial z)}{(4\pi)^{N/2}} \int_0^\infty d\lambda \int_0^1 d\alpha \lambda^{2-N/2-1} e^{-\lambda[(1-\alpha)\alpha k_\perp^2 + \sum m_i^2] - \frac{1}{\lambda} \left[\frac{z_\perp^2}{4} - \lambda \alpha k_\perp z_\perp \right]}, \quad (147)$$

Substituindo a integral acima na expressão do tensor energia-momento, dado pela eq.(125), obtemos:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \lim_{y \rightarrow 0} \Theta_{\mu\nu\sigma\rho} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{k \cdot y}}{(k^2 + m^2)^2} \Gamma_{\rho\sigma}, \quad (148)$$

onde $\Gamma_{\rho\sigma} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{L} \sum_n \mathcal{P}_{\rho\sigma} \Gamma^N(k, n, z) e^{z'l}$, $y = -i(x - x')$. Sendo $\Theta_{\mu\nu\sigma\rho}$, um operador de 4ª ordem, definido por:

$$\Theta_{\mu\nu\sigma\rho} = -\delta_{\nu\sigma} \partial_\mu \partial_\rho - \delta_{\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\nu + \delta_{\rho\mu} \delta_{\sigma\nu} \partial^2 - \delta_{\rho\mu} \partial_\sigma \partial_\nu - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} (\delta_{\rho\sigma} \partial^2 + \partial_\rho \partial_\sigma) \quad (149)$$

onde $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial y_\mu}$.

De forma análoga ao que fizemos no início desse capítulo, vamos trabalhar agora com o momento externo k do diagrama de loop. Logo, pela prescrição de Matsubara, temos que: $k = k_\perp + k'$ e $y = y_\perp + y'$, onde k' e y' representam as componentes compactadas em relação as componentes ortogonais k_\perp e y_\perp . Desse modo, o tensor energia-momento, assume a seguinte forma:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{L^2} \sum_{m_i} \int \frac{d^N k_\perp}{(2\pi)^N} \frac{\Theta_{\mu\nu\sigma\rho} (e^{y_\perp k_\perp} e^{y' k'} \Gamma_{\rho\sigma})}{(k_\perp^2 + m_3^2)^2}, \quad (150)$$

sendo $m_3^2 = k'^2 + m^2$

Lembrando que $\Gamma_{\rho\sigma}$ possui um operador diferencial $\mathcal{P}_{\rho\sigma}$ escrito em termos de k . Portanto, de forma análoga a eq.(127), podemos definir que:

$$\mathcal{P}_{\rho\sigma} = \Omega_{\rho\sigma} e^{k \cdot y} \Big|_{y=0}, \quad (151)$$

onde $\Omega_{\rho\sigma}$, representa um operador diferencial que atua em $e^{k \cdot y}$, dado por:

$$\Omega_{\rho\sigma} = \left[2 \frac{\partial}{\partial z^\rho} \frac{\partial}{\partial z^\sigma} - \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \frac{\partial}{\partial z^\rho} - \frac{\partial}{\partial y^\rho} \frac{\partial}{\partial z^\sigma} - \delta_{\rho\sigma} (\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial z^i} + m^2) \right]. \quad (152)$$

Portanto, reescrevemos o tensor energia-momento, dado pela eq.(150), da seguinte maneira:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \Psi_{\mu\nu} \frac{1}{L^2} \lim_{z,y \rightarrow 0} \sum_{m_i, n_j} \int \frac{d^N k_\perp}{(2\pi)^N} \frac{e^{k_\perp y_\perp} \Gamma^N}{(k_\perp^2 + m_3^2)^2} e^{k' y' + z' l}, \quad (153)$$

onde $\Psi_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu\sigma\rho} \Omega_{\rho\sigma}$ representa um operador diferencial resultante da contração dos dois outros operadores de ordens diferentes.

Definindo a integral em k_\perp na expressão acima como:

$$A = \int \frac{d^N k_\perp}{(2\pi)^N} \frac{e^{k_\perp y_\perp} \Gamma^N}{(k_\perp^2 + m_3^2)^2}. \quad (154)$$

O denominador da integral acima esta elevado a uma potência, utilizando uma ideia análoga a uma transformada de Laplace para escrever parâmetros de Schwinger, podemos escrevê-lo como:

$$\frac{1}{(k_\perp^2 + m_3^2)^2} = \int_0^\infty d\beta \beta e^{-\beta(k_\perp^2 + m_3^2)},$$

deste modo,

$$B = \frac{1}{(4\pi)^{N/2} (2\pi)^N} \int d^N k_\perp e^{-\beta k_\perp^2 - \lambda(1-\alpha)\alpha k_\perp^2 - \alpha z_\perp k_\perp + k_\perp y_\perp}, \quad (155)$$

trabalhando no expoente, temos:

$$\begin{aligned} -E &= -\beta k_\perp^2 - \lambda(1-\alpha)\alpha k_\perp^2 - \alpha z_\perp k_\perp + k_\perp y_\perp \\ &= (\beta + \lambda(1-\alpha)\alpha) \left[k_\perp^2 + \frac{(\alpha z_\perp - y_\perp) k_\perp}{\beta + \lambda(1-\alpha)\alpha} \right] \\ &= (\beta + \lambda(1-\alpha)\alpha) \left[\left(k_\perp + \frac{1}{2} \frac{(\alpha z_\perp - y_\perp)}{\beta + \lambda(1-\alpha)\alpha} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{(\alpha z_\perp - y_\perp)^2}{(\beta + \lambda(1-\alpha)\alpha)^2} \right]. \end{aligned} \quad (156)$$

Fazendo o deslocamento $k_\perp \rightarrow k_\perp + \frac{1}{2} \frac{(\alpha z_\perp - y_\perp)}{\beta + \lambda(1-\alpha)\alpha}$, a integral em k_\perp pode ser escrita na forma:

$$B = \frac{1}{(4\pi)^{N/2} (2\pi)^N} \int d^N k_\perp e^{-\left[(\beta + \lambda(1-\alpha)\alpha) k_\perp^2 - \frac{1}{4} \frac{(\alpha z_\perp - y_\perp)^2}{(\beta + \lambda(1-\alpha)\alpha)^2} \right]}, \quad (157)$$

resolvendo a integral em k_\perp , obtemos que:

$$B = \left(\frac{\pi}{\beta + \lambda(1 - \alpha)\alpha} \right)^{N/2} e^{-\frac{1}{4} \frac{(\alpha z_\perp - y_\perp)^2}{(\beta + \lambda(1 - \alpha)\alpha)^2}}, \quad (158)$$

logo, a eq.(154) pode se escrita como:

$$A = \frac{1}{(4\pi)^N} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{2-N/2-1} e^{-\frac{z_\perp^2}{4\lambda}} \int_0^1 d\alpha e^{-\lambda \sum \alpha_i m_i^2} \int_0^\infty d\beta \beta e^{-\beta m_3^2} \times (\beta + \lambda(1 - \alpha)\alpha)^{-N/2} e^{-\frac{1}{4} \frac{(\alpha z_\perp - y_\perp)^2}{(\beta + \lambda(1 - \alpha)\alpha)^2}} \quad (159)$$

fazendo $\beta \rightarrow \lambda\beta$; $\int_0^\infty d\beta \rightarrow \int_0^1 d\beta$, obtemos que:

$$A = \frac{1}{(4\pi)^N} \int_0^1 d\beta d\alpha (\beta + (1 - \alpha)\alpha)^{-N/2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{4-N-1} \times e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2) - \frac{z_\perp^2}{4\lambda} - \frac{1}{4} \frac{(\alpha z_\perp - y_\perp)^2}{(\beta + (1 - \alpha)\alpha)^2}}. \quad (160)$$

Substituindo na expressão do tensor energia-momento, dado pela eq.(153), temos:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{(4\pi)^N} \frac{1}{L^2} \lim_{z, y \rightarrow 0} \sum_{m_i, n_j} \left[\int_0^1 d\beta d\alpha (\beta + (1 - \alpha)\alpha)^{-N/2} \int_0^\infty \Psi_{\mu\nu} d\lambda \lambda^{4-N-1} \times e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2) - \frac{z_\perp^2}{4\lambda} - \frac{1}{4} \frac{(\alpha z_\perp - y_\perp)^2}{(\beta + (1 - \alpha)\alpha)^2}} \right] e^{k'y' + z'l}. \quad (161)$$

Lembrando que $\Psi_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu\sigma\rho} \Omega_{\rho\sigma}$ é o operador diferencial resultante da contração dos outros dois operadores. Contraíndo cada um dos termos de $\Theta_{\mu\nu\sigma\rho}$, dado pela eq.(149), com cada termo de $\Omega_{\rho\sigma}$, dado pela eq.(152), obtemos que:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu\nu} = & \frac{\partial^2}{\partial y^\mu \partial y^\rho} \left[2 \frac{\partial}{\partial z^\rho} \frac{\partial}{\partial z^\nu} - \frac{\partial}{\partial y^\nu} \frac{\partial}{\partial z^\rho} - \frac{\partial}{\partial y^\rho} \frac{\partial}{\partial z^\nu} - \delta_{\nu\rho} (\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial z^i} + m^2) \right] \\ & - \frac{\partial^2}{\partial y^\mu \partial y^\rho} \left[(2 - D) \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial z^i} \right) - D m^2 \right] \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[2 \frac{\partial}{\partial z^\mu} \frac{\partial}{\partial z^\nu} - \frac{\partial}{\partial y^\nu} \frac{\partial}{\partial z^\mu} - \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial z^\nu} - \delta_{\mu\nu} (\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial z^i} + m^2) \right] \\ & - \frac{\partial^2}{\partial y^\sigma \partial y^\nu} \left[2 \frac{\partial}{\partial z^\mu} \frac{\partial}{\partial z^\sigma} - \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \frac{\partial}{\partial z^\mu} - \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial z^\sigma} - \delta_{\mu\sigma} (\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial z^i} + m^2) \right] \\ & - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[(2 - D) \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial z^i} \right) - D m^2 \right] \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^\rho \partial y^\sigma} \left[2 \frac{\partial}{\partial z^\rho} \frac{\partial}{\partial z^\sigma} - \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \frac{\partial}{\partial z^\rho} - \frac{\partial}{\partial y^\rho} \frac{\partial}{\partial z^\sigma} - \delta_{\rho\sigma} (\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial z^i} + m^2) \right] \right\}, \quad (162) \end{aligned}$$

fazendo as devidas contrações, simplificando alguns termos, e organizando esse operador

diferencial resultante, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mu\nu} = & 2 \frac{\partial^2}{\partial y^\mu \partial z^\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^\rho \partial y^\rho} - \nabla^2 \right) + 2 \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial z^\mu \partial z^\nu} \\
& + \frac{\partial^2}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^\sigma \partial y^\sigma} - \frac{\partial^2}{\partial z^\rho \partial y^\rho} - \left[(2-D) \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial z^i} \right) - D m^2 \right] \right) \\
& - 2 \frac{\partial^2}{\partial z^\mu \partial y^\nu} \frac{\partial^2}{\partial z^\sigma \partial y^\sigma} \\
& - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \left\{ \nabla^2 \left[\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial z^i} \right) (1 + (2-D)) - m^2 (D-1) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{163}$$

Arrumando o operador $\Psi_{\mu\nu}$ e fazendo $\mu = \nu$, pois estamos interessados na componente \mathcal{T}^{00} do tensor energia-momento que representa energia de Casimir, podemos escrevê-lo como:

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mu\mu} = & \nabla_y^2 \left[2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial z_\mu} \right) - \frac{(3-D)}{2} \left(\nabla_z^2 - \frac{\partial^2}{\partial y_\rho \partial z_\rho} \right) \right] \\
& + \frac{(D-1)}{2} m^2 + \frac{\partial^2}{\partial y_\mu^2} \left[\left(\nabla_z^2 - \frac{\partial^2}{\partial y_\rho \partial z_\rho} \right) (2-D) \right],
\end{aligned} \tag{164}$$

esse operador irá atuar na função exponencial contida na eq.(161), dada por:

$$f(z, y) = e^{ay_\perp^2 + by_\perp z_\perp + cz_\perp^2 + z'l + k'y} \tag{165}$$

onde os parâmetros acima são identificados por:

$$a = -\frac{1}{4(\beta + (1-\alpha)\alpha)^2}$$

$$b = \frac{\alpha}{2(\beta + (1-\alpha)\alpha)^2}$$

$$c = -\left(\frac{\alpha^2}{4(\beta + (1-\alpha)\alpha)^2} + \frac{1}{4\lambda} \right)$$

Observando a eq.(164) podemos identificar 4 operadores distintos, dados por $\left(\nabla_z^2 - \frac{\partial^2}{\partial y_\rho \partial z_\rho} \right)$; $\left(\frac{\partial^2}{\partial z_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial z_\mu} \right)$; ∇_y^2 e $\frac{\partial^2}{\partial y_\mu^2}$. Portanto, cada um desses termos irá atuar na função $f(z, y)$ descrita acima. Logo, temos que:

$$\nabla_z^2 f(z, y) = \sum \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} f(z, y) = \frac{\partial^2 f(z, y)}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} e^{ay_\perp^2 + by_\perp z_\perp + cz_\perp^2 + z_3 l + k'y_3} \right), \tag{166}$$

para $i = 0, 1, 2$, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \left((by^i + 2cz^i)f(z, y) \right) = \left(2c\delta^{ij} + (by^i + 2cz^i)(by^j + 2cz^j) \right) f(z, y) \quad (167)$$

para $i = 3$, temos $\frac{\partial^2}{\partial z_3^2} = l^2 f(z, y)$.

Aplicando o outro termo do primeiro operador, temos que:

$$\frac{\partial^2 f(z, y)}{\partial y_j \partial z_i} = \left(b\delta^{ij} + (by^i + 2cz^i)(bz^i + 2ay^j) \right) f(z, y), \quad (168)$$

para $i = j = 0, 1, 2$, temos:

$$\frac{\partial^2 f(z, y)}{\partial y_j \partial z_i} = \left(b\delta^{ii} + (by^i + 2cz^i)(bz^i + 2ay^i) \right) f(z, y), \quad (169)$$

para $i=j=3$, temos que $\frac{\partial^2}{\partial y_3 \partial z_3} = k'l f(z, y)$.

Tomando o limite de $z \rightarrow 0$, obtemos que o primeiro operador será:

$$\left(\nabla_z^2 - \frac{\partial^2}{\partial y_\rho \partial z_\rho} \right) f(0, y) = \left(\delta^{ii}(2c - b) + y^2(b^2 - 2ba) + l^2 - k'l \right) f(0, y) \quad (170)$$

de forma análoga o termo $\left(\frac{\partial^2}{\partial z_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial z_\mu} \right)$, pode ser escrito como:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial z_\mu} \right) = \left(\delta^{\mu\mu}(2c - b)y^{\mu^2}(b^2 - 2ba) \right) f(0, y). \quad (171)$$

Portanto, o operador diferencial $\Psi_{\mu\mu}$, dado pela eq.(164), pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu\mu} G(y) &= \delta^{\mu\mu} \nabla_y^2 \left\{ \left[(2c - b) \left(2 + \frac{D-3}{2} \delta^{ii} \right) - \frac{(3-D)}{2} \left((b^2 - 2ba)y^2 + l^2 - k'l \right) \right] G(y) \right\} \\ &\quad + (b^2 - 2ba) \nabla_y^2 \left[y^{\mu^2} G(y) \right] + \delta^{\mu\mu} \frac{(D-1)}{2} m^2 G(y) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial y_\mu^2} \left[\left(\delta^{ii}(2c - b) + l^2 - k'l + y^2(b^2 - 2ba) \right) (2 - D) G(y) \right], \end{aligned} \quad (172)$$

onde $G(y) = f(0, y) = e^{ay_\perp^2 + k'y_3}$.

Organizando os termos da equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mu\mu}G(y) &= \delta^{\mu\mu} \left[(2c-b)(2 + \frac{D-3}{2}\delta^{ii}) + \frac{(D-3)}{2}(l^2 - k'l)\nabla_y^2 G(y) \right. \\
&\quad + \frac{D-3}{2}(b^2 - 2ba)\nabla_y^2(y^2 G(y)) \left. \right] + (b^2 - 2ba)\nabla_y^2(y^{\mu 2} G(y)) \\
&\quad + \left[\left(\delta^{ii}(2c-b) + l^2 - k'l \right) \frac{\partial^2 G(y)}{\partial y_\mu^2} + (b^2 - 2ba)\frac{\partial^2}{\partial y_\mu^2}(y^2 G(y)) \right] \\
&\quad \times (2-D) + \delta^{\mu\mu} \frac{(D-1)}{2} m^2 G(y).
\end{aligned} \tag{173}$$

Observando a equação acima, podemos identificar 5 tipos de derivadas: $\nabla_y^2 G(y)$; $\nabla_y^2(y^2 G(y))$; $\nabla_y^2(y^{\mu 2} G(y))$; $\frac{\partial^2 G(y)}{\partial y_\mu^2}$; $\frac{\partial^2}{\partial y_\mu^2}(y^2 G(y))$. Atuando cada uma dessas derivadas na função $G(y)$ e tomando o limite em que $y \rightarrow 0$, temos que:

$$\nabla_y^2 G(y) = \frac{\partial^2 G(y)}{\partial y_i^2} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(2ay_i e^{ay_1^2 + k'y_3} \right) = \left(2a\delta^{ii} + (2a)^2 y^2 \right) G(y), \tag{174}$$

para $i = 0, 1, 2$.

Sendo $i = 3$, obtemos:

$$\frac{\partial^2 G(y)}{\partial y_i^2} = k'^2 G(y)$$

Desse modo:

$$\nabla_y^2 G(0) = \left(2a\delta^{ii} + (2a) + k'^2 \right). \tag{175}$$

Fazendo o processo análogo para os outros 4 tipos de derivadas restantes e substituindo os resultados na expressão do operador diferencial, dado pela eq.(173), e considerando $\delta^{ii} = (D-1)$ e $\delta^{\mu\mu} = 1$, obtemos que:

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mu\mu} &= \left[(2c-b)(2 + \frac{D-3}{2}(D-1)) + \frac{(D-3)}{2}(l^2 - k'l) \right] \left(2a(D-1) + k'^2 \right) \\
&\quad + \left[(D-3)(D-1) + 2 + 2(2-D) \right] (b^2 - 2ba) \\
&\quad + 2a(2-D) \left[(D-1)(2c-b) + l^2 - k'l \right] + \frac{(D-1)}{2} m^2
\end{aligned} \tag{176}$$

fazendo algumas manipulações algébricas, podemos reescrever essa equação da forma:

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mu\mu} = & a(2c - b)(D - 1) \left((D - 3)^2 + 4 \right) + (b^2 - 2ba)(D - 3)^2 \\
& + (2c - b) \left[\frac{k'^2}{2} \left((D - 2)^2 + 3 \right) \right] + a((D - 3)^2 - 2) (l^2 - k'l) \\
& + \frac{k'^2}{2} (l^2 - k'l) (D - 3) + \frac{(D - 1)}{2} m^2.
\end{aligned} \tag{177}$$

Lembrando que esse operador está contido na expressão do tensor energia-momento, dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{\mu\mu} = & \frac{1}{(4\pi)^N} \frac{1}{L^2} \sum_{n_i, n_j} \int_0^1 d\beta d\alpha (\beta + (1 - \alpha)\alpha)^{-N/2} \int_0^\infty \Psi_{\mu\mu} d\lambda \lambda^{4-N-1} \\
& \times e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2)},
\end{aligned} \tag{178}$$

observando a equação acima, podemos identificar 5 tipos de integrais que aparecem com a atuação do operador diferencial, dado pela eq.(177). Cada uma dessas integrais são nomeadas abaixo, como:

- tipo 1: $O_1 = a(2c - b)$
- tipo 2: $O_2 = (b^2 - 2ba)$
- tipo 3: $O_3 = (2c - b)$
- tipo 4: $O_4 = a$
- tipo 5: $O_5 = 1$

Além disso, temos também 4 tipos de termos que influenciam o somatório da equação, dados por:

- tipo 1: $S_1 = k'^2$
- tipo 2: $S_2 = (l^2 - k'l)$
- tipo 3: $S_3 = k'^2 (l^2 - k'l)$
- tipo 4: $S_4 = 1$

Lembrando que os parâmetros a , b e c são:

$$a = -\frac{1}{4(\beta + (1 - \alpha)\alpha)^2} \tag{179}$$

$$b = \frac{\alpha}{2(\beta + (1 - \alpha)\alpha)^2} \tag{180}$$

$$c = -\left(\frac{\alpha^2}{4(\beta + (1 - \alpha)\alpha)^2} + \frac{1}{4\lambda} \right). \tag{181}$$

a partir dessas definições acima, conseguimos relacionar os parâmetros, conforme abaixo:

$$b = -2\alpha a \quad (182)$$

e também que:

$$c = \alpha^2 a - \frac{1}{4\lambda}. \quad (183)$$

Desse modo, cada um dos 5 tipos de integrais ficam da forma:

$$O_1 = 2a \left(\alpha^2 a - \frac{1}{4\lambda} + \alpha a \right) \quad (184)$$

$$O_1 = 2a^2 \alpha (\alpha + 1) - \frac{a}{2\lambda}. \quad (185)$$

De forma similar para O_2 :

$$O_2 = b(b - 2a) \quad (186)$$

$$O_2 = 4a^2 \alpha (\alpha + 1). \quad (187)$$

Analogamente para O_3 :

$$O_3 = 2a\alpha (\alpha + 1) - \frac{1}{2\lambda}. \quad (188)$$

Portanto, ao reorganizarmos, cada um dos tipos de integral fica:

$$\text{tipo 1: } O_1 = 2a^2 \alpha (\alpha + 1) - \frac{a}{2\lambda}$$

$$\text{tipo 2: } O_2 = 4a^2 \alpha (\alpha + 1)$$

$$\text{tipo 3: } O_3 = 2a\alpha (\alpha + 1) - \frac{1}{2\lambda}$$

$$\text{tipo 4: } O_4 = a$$

$$\text{tipo 5: } O_5 = 1.$$

De maneira geral, esses diferentes tipos de integral são da forma:

$$U_i = \int_0^1 d\beta d\alpha \beta (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-N/2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{4-N-1} O_i e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2)}, \quad (189)$$

observando cada um dos tipos, percebemos que apenas as integrais U_1 e U_3 tem modi-

ficações sobre as integrais em λ . O restante das integrais tem apenas modificações nas integrais sobre α e β . Explicitamente, essas integrais são da forma:

$$U_1 = \frac{1}{8} \int_0^1 d\beta d\alpha \beta \alpha (\alpha + 1) (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-N/2-4} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{4-N-1} e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2)} \\ + \frac{1}{8} \int_0^1 d\beta d\alpha \beta (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-N/2-2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{4-N-2} e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2)} \quad (190)$$

$$U_2 = \frac{1}{4} \int_0^1 d\beta d\alpha \beta (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-N/2-4} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{4-N-1} e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2)} \quad (191)$$

$$U_3 = -\frac{1}{2} \int_0^1 d\beta d\alpha \beta \alpha (\alpha + 1) (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-N/2-2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{4-N-1} e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2)} \\ - \frac{1}{2} \int_0^1 d\beta d\alpha \beta (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-N/2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{4-N-2} e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2)} \quad (192)$$

$$U_4 = -\frac{1}{4} \int_0^1 d\beta d\alpha \beta (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-N/2-2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{4-N-1} e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2)} \quad (193)$$

$$U_5 = \int_0^1 d\beta d\alpha \beta (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-N/2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{4-N-1} e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2)}; \quad (194)$$

As integrais que irão gerar as funções de Bessel modificadas de segunda especie são as integrais sobre λ . A parte que interfere nas somas, referente aos termos S_i , podem ser feitas facilmente transformando os termos de somatório S_i em operadores diferenciais atuando sobre a exponencial $e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2)}$, com algumas modificações da forma:

$$e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2)} = e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2 + \phi_1 l^2 + \phi_2 k^2 + \phi_3 lk)} \Big|_{\phi_1=\phi_2=\phi_3=0}. \quad (195)$$

Desta forma , qualquer polinômio pode ser substituído por operadores diferenciais.

$$l^2 = \frac{-1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \phi_1} e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2 + \phi_1 l^2 + \phi_2 k^2 + \phi_3 lk)} \Big|_{\phi_1=\phi_2=\phi_3=0} \quad (196)$$

$$k^2 = \frac{-1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \phi_2} e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2 + \phi_1 l^2 + \phi_2 k^2 + \phi_3 lk)} \Big|_{\phi_1=\phi_2=\phi_3=0}. \quad (197)$$

$$lk = \frac{-1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \phi_3} e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2 + \phi_1 l^2 + \phi_2 k^2 + \phi_3 lk)} \Big|_{\phi_1=\phi_2=\phi_3=0}. \quad (198)$$

Atuando esses termos de somatório, algumas integrais sobre λ devem ser modificadas. Porém, de um modo genérico:

$$H = \int_0^\infty d\lambda \lambda^{4-N-P} e^{-\lambda(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2 + \phi_1 l^2 + \phi_2 k^2 + \phi_3 lk)} \quad (199)$$

onde P são os possíveis valores do expoente de λ referente a cada uma das integrais chamadas de U .

Utilizando a identidade da função gama dada por:

$$\sum (x+y)^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum \int_0^\infty t^{s-1} dt e^{-(x+y)t}, \quad (200)$$

a eq.(199) pode ser reescrita como:

$$H = \frac{\Gamma(4-N-P+1)}{(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2 + \phi_1 l^2 + \phi_2 k^2 + \phi_3 lk)^{4-N-P+1}}. \quad (201)$$

Substituindo a função H na eq.(178), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mu\mu} &= \frac{1}{(4\pi)^N} \frac{1}{L^2} \sum_{n_1, n_2} \int_0^1 d\beta d\alpha (\beta + (1-\alpha)\alpha)^{-N/2} \Psi_{\mu\mu} \Gamma(4-N-P+1) \\ &\quad \times \left(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2 + \phi_1 l^2 + \phi_2 k^2 + \phi_3 lk \right)^{-(4-N-P+1)}, \end{aligned} \quad (202)$$

o somatório dessa equação dado pelo termo

$$\sum_{n_1, n_2} \left(\sum \alpha_i m_i^2 + \beta m_3^2 + \phi_1 l^2 + \phi_2 k^2 + \phi_3 lk \right)^{-(4-N-P+1)}, \quad (203)$$

é identificado como um caso particular da função zeta de Epstein-Hurwitz. Trabalhando nessa função, temos que:

$$\sum_{n_1, n_2} \left(\alpha_1 m_1^2 + \alpha_2 m_2^2 + \beta m_3^2 + \phi_1 l^2 + \phi_2 k^2 + \phi_3 lk \right)^{-(4-N-P+1)}, \quad (204)$$

lembrando que $m_1^2 = m^2 + l^2$; $m_2^2 = m^2 + (l - k')^2$; $m_3^2 = k'^2$.

Portanto, a função zeta pode ser escrita como:

$$\zeta = \sum_{n_1, n_2} \left(\alpha_1(m^2 + l^2) + \alpha_2(m^2 + l^2 - 2lk' + k'^2) + \beta k'^2 + \phi_1 l^2 + \phi_2 k^2 + \phi_3 lk \right)^{-(4-N-P+1)} \quad (205)$$

sendo $l = \frac{2\pi n_1}{L}$ e $k' = \frac{2\pi n_2}{L}$ a compactação de uma dimensão dos momentos internos e externos pela prescrição de Matsubara. Portanto, organizando os termos, obtemos

$$\zeta = \sum_{n_1, n_2} \left[\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1) n_1^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (\phi_3 - 2\alpha_2) n_1 n_2 + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (\alpha_2 + \beta + \phi_2) n_2^2 + m^2 (\alpha_1 + \alpha_2) \right]^{-(4-N-P+1)}, \quad (206)$$

escrevendo de uma forma mais compacta, temos:

$$\zeta = \sum_{n_1, n_2} \left(w_1 n_1^2 + w_2 n_1 n_2 + w_3 n_2^2 + q \right)^{-(4-N-P+1)}, \quad (207)$$

onde os parâmetros utilizados acima são identificados como:

$$w_1 = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)$$

$$w_2 = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (\phi_3 - 2\alpha_2)$$

$$w_3 = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (\alpha_2 + \beta + \phi_2)$$

$$q = m^2 (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Utilizando a fórmula de Chowla-Selberg (ELIZALDE, 1995), essa função zeta pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \zeta(s; w_1, w_2, w_3; q) &= \sum_{n_1, n_2} \left(w_1 n_1^2 + w_2 n_1 n_2 + w_3 n_2^2 + q \right)^{-s} \\ &= 2Z_1(s, q/w_1) w_1^{-s} + \frac{2^{2s} \sqrt{\pi} w_1^{s-1}}{\Gamma(s) (4w_1 w_3 - w_2^2)^{s-1/2}} \Gamma(s-1/2) Z_1\left(s-1/2, 4w_1 q / (4w_1 w_3 - w_2^2)\right) \\ &\quad + \frac{2^{s+5/2} \pi^s}{\Gamma(s) \sqrt{w_1}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} \cos(n\pi w_2/w_1) \sum_{d|n} d^{1-2s} \left((4w_1 w_3 - w_2^2) + \frac{4w_1 q}{d^2} \right)^{1/4-s/2} \\ &\quad \times K_{s-1/2} \left(\frac{\pi n}{w_1} \sqrt{(4w_1 w_3 - w_2^2) + \frac{4w_1 q}{d^2}} \right) \end{aligned} \quad (208)$$

onde o somatório duplo sobre n_1 e n_2 é reescrito como uma soma sobre o produto $n = n_1 n_2$ e sobre os divisores desse produto dado por $\sum_{d|n} d^{1-2s}$ (ELIZALDE, 1995). Os dois termos de $Z_1(s, v)$ correspondem a função zeta de Epstein-Hurwitz no caso de uma dimensão

compactada, definida como :

$$Z_1(s, v) = -\frac{v^{-s}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)}v^{-s+1/2} + \frac{2\pi^s v^{-s/2+1/4}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi n\sqrt{v}). \quad (209)$$

onde $v = q/w_1$.

Substituindo os parâmetros w_1, w_2, w_3 e q da eq.(207) na eq.(208), temos:

$$\begin{aligned} \zeta(s; w_1, w_2, w_3; q) &= 2Z_1(s, q/w_1) \left[\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1) \right]^{-s} \\ &+ \frac{2^{2s} \sqrt{\pi} \left[\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1) \right]^{s-1} \Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s) \left(\left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 [4(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)(\alpha_2 + \beta + \phi_2) - (\phi_3 - 2\alpha_2)^2] \right)^{s-1/2}} \\ &\times Z_1 \left(s-1/2, 4w_1q/(4w_1w_3 - w_2^2) \right) \\ &+ \frac{2^{s+5/2} \pi^s}{\Gamma(s) \sqrt{\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} \cos(n\pi(\phi_3 - 2\alpha_2)/(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)) \\ &\times \sum_{d|n} d^{1-2s} \left\{ \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 [4(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)(\alpha_2 + \beta + \phi_2) - (\phi_3 - 2\alpha_2)^2] \right. \\ &\left. + \frac{4 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1) m^2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{d^2} \right\}^{1/4-s/2} \\ &\times K_{s-1/2} \left\{ \frac{\pi n}{\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)} \left[\left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 (4(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)(\alpha_2 + \beta + \phi_2) - (\phi_3 - 2\alpha_2)^2) \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{4 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1) m^2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{d^2} \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (210)$$

observando a expressão acima, temos que L é um parâmetro análogo a distância entre as placas no efeito Casimir e m corresponde a massa do elétron. Ao compararmos essas duas quantidades, podemos verificar que a ordem de grandeza da massa, em torno de 10^{-31} , será muito menor que a ordem de grandeza de L , dada por 10^{-6} . Portanto, sendo $m \ll L$,

podemos tomar um limite em que $m \rightarrow 0$, logo a equação acima pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\zeta(s; w_1, w_2, w_3; q) &= 2 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-2s} (\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)^{-s} Z_1(s, q/w_1) \\
&+ 2^{2s} \sqrt{\pi} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-2s} \frac{[(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)]^{s-1} \Gamma(s-1/2)}{[4(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)(\alpha_2 + \beta + \phi_2) - (\phi_3 - 2\alpha_2)^2]^{s-1/2} \Gamma(s)} \\
&\times Z_1\left(s-1/2, 4w_1q/(4w_1w_3 - w_2^2)\right) \\
&+ \frac{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-2s} 2^{s+5/2} \pi^s}{\Gamma(s) \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} \cos(n\pi(\phi_3 - 2\alpha_2)/(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)) \\
&\times [4(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)(\alpha_2 + \beta + \phi_2) - (\phi_3 - 2\alpha_2)^2]^{1/4-s/2} \\
&\times K_{s-1/2} \left[\frac{\pi n}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)} \left(4(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)(\alpha_2 + \beta + \phi_2) - (\phi_3 - 2\alpha_2)^2 \right)^{1/2} \right]. \quad (211)
\end{aligned}$$

Lembrando que $s = 4 - N - P + 1$, sendo $N = D - d$ o número de dimensões após a compactação, e P o expoente das integrais em λ . Ao aplicarmos nas integrais U_i os termos que contribuem para a soma, dados pelas eqs.(196),(197) e (198), observamos que o expoente P assume os valores 1, 2 e 3. Fazendo $D = 4$, e aplicando os valores de P , obtemos $s = 1$, $s = 0$ e $s = -1$. O valor de $s = 1$ corresponde a função de Bessel com ordem $\nu > 0$, enquanto os valores $s = 0$ e $s = -1$ correspondem a uma ordem $\nu < 0$ que podem ser tratadas pela propriedade de reflexão das funções de Bessel (WATSON, 2011). Utilizando a aproximação da função de Bessel $K_\nu(z) \sim \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{2}{z}\right)^\nu$ de argumentos pequenos, temos:

$$\begin{aligned}
\zeta(s; w_1, w_2, w_3; q) &= 2 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-2s} (\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)^{-s} Z_1(s, q/a) \\
&+ 2^{2s} \sqrt{\pi} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-2s} \frac{[(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)]^{s-1} \Gamma(s-1/2)}{[4(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)(\alpha_2 + \beta + \phi_2) - (\phi_3 - 2\alpha_2)^2]^{s-1/2} \Gamma(s)} \\
&\times Z_1\left(s-1/2, 4w_1q/(4w_1w_3 - w_2^2)\right) \\
&+ \frac{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-2s} 2^{s+5/2} \pi^s}{\Gamma(s) \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} \cos(n\pi(\phi_3 - 2\alpha_2)/(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)) \\
&\times [4(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)(\alpha_2 + \beta + \phi_2) - (\phi_3 - 2\alpha_2)^2]^{1/4-s/2} \\
&\times \frac{1}{2} \Gamma(s-1/2) \left(\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)}{\pi n [4(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)(\alpha_2 + \beta + \phi_2) - (\phi_3 - 2\alpha_2)^2]^{1/2}} \right)^{s-1/2} \quad (212)
\end{aligned}$$

Renomeando alguns termos da equação acima de forma a limpar um pouco a notação,

temos:

$$\begin{aligned}
\zeta(s; w_1, w_2, w_3; q) &= 2 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-2s} [f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)]^{-s} Z_1(s, q/w_1) \\
&+ 2^{2s} \sqrt{\pi} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-2s} \frac{[f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)]^{s-1} \Gamma(s-1/2)}{[f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)]^{s-1/2} \Gamma(s)} \\
&\times Z_1\left(s-1/2, 4w_1q/(4w_1w_3 - w_2^2)\right) \\
&+ \frac{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-2s} 2^{s+5/2} \pi^s}{\Gamma(s) \sqrt{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} \cos(n\pi f_3(\alpha_2, \phi_3)/f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)) \\
&\times [f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)]^{1/4-s/2} \\
&\times \frac{2^{s-3/2}}{(\pi n)^{s-1/2}} \Gamma(s-1/2) \left(\frac{[f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)]}{[f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)]^{1/2}} \right)^{s-1/2}, \tag{213}
\end{aligned}$$

onde os termos renomeados são identificados abaixo por:

$$f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1$$

$$f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta) = 4(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)(\alpha_2 + \beta + \phi_2) - (\phi_3 - 2\alpha_2)^2$$

$$f_3(\alpha_2, \phi_3) = \phi_3 - 2\alpha_2 \tag{214}$$

Observando a eq.(213), identificamos os termos $Z_1(s, q/w_1)$ e $Z_1(s-1/2, 4w_1q/(4w_1w_3 - w_2^2))$ que são funções zeta de Epstein-Hurwitz definidas conforme a eq.(209). Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
Z_1(s, q/w_1) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{m^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\frac{2\pi}{L})^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)} \right)^{-s} \\
&+ \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)} \left(\frac{m^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\frac{2\pi}{L})^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)} \right)^{-s+1/2} \\
&+ \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} \left(\frac{m^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\frac{2\pi}{L})^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)} \right)^{-s/2+1/4} \\
&\times \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} K_{s-1/2} \left(2\pi n \sqrt{\left(\frac{m^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\frac{2\pi}{L})^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)} \right)} \right). \tag{215}
\end{aligned}$$

De forma análoga ao que foi feito na eq.(211), devidos aos valores possíveis de s , temos que nas funções de Bessel, para os valores de $s-1/2 < 0$, utilizamos a propriedade de

reflexão dessas funções. Portanto, $K_{s-1/2} = K_{1/2-s}$. Logo, utilizando a aproximação para argumentos pequenos, obtemos, respectivamente, as expressões de $Z_1(s, q/w_1)$ correspondente as ordens maiores que zero ($s - 1/2 > 0$) da função de Bessel e as ordens inferiores a zero ($s - 1/2 < 0$):

$$\begin{aligned} Z_1(s, q/w_1) = & -\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{2s} m^{2s} \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{-s} \\ & + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s - 1/2)}{2\Gamma(s)} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{2s-1} m^{-2s+1} \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{-s+1/2} \\ & + \frac{\Gamma(s - 1/2)}{\Gamma(s)} 2^{2s-1} \pi^{2s-1/2} L^{-2s+1} m^{-2s+1} \zeta(0) \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{-s+1/2}, \end{aligned} \quad (216)$$

onde $f_4(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$. Lembrando que a função zeta de Riemann é definida como $\zeta(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon}$, podemos identificar na equação acima no termo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{s-1/2}}{n^{s-1/2}}$, sendo portanto $\varepsilon = 0$. Pela continuação analítica da função zeta de Riemann, temos que $\zeta(0) = -1/2$.

Analogamente, a expressão para ordens inferiores à zero, é dada por

$$\begin{aligned} Z_1(s, q/w_1) = & -\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{2s} m^{2s} \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{-s} \\ & + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s - 1/2)}{2\Gamma(s)} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{2s-1} m^{-2s+1} \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{-s+1/2} \\ & + \frac{\Gamma(1/2 - s)}{\Gamma(s)} \pi^{2s-1/2} \zeta(1 - 2s) \end{aligned} \quad (217)$$

onde $\zeta(1 - 2s)$ corresponde a função zeta de Riemann para os possíveis valores de s .

Aplicando os possíveis valores de s nas equações acima, obtemos:

$$\begin{aligned} Z_1(1, q/w_1) = & -\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 m^2 \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{-1} \\ & + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2)}{2\Gamma(1)} \left(\frac{2\pi}{L} \right) m^{-1} \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{-1/2} \\ & - \pi^{3/2} L^{-1} m^{-1} \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (218)$$

$$\begin{aligned}
Z_1(0, q/w_1) &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(-1/2)}{2\Gamma(0)} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-1} m \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{1/2} \\
&\quad + \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(0)} \pi^{-1/2} \zeta(1)
\end{aligned} \tag{219}$$

$$\begin{aligned}
Z_1(-1, q/w_1) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-2} m^{-2} \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{-1} \\
&\quad + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(-3/2)}{2\Gamma(-1)} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-3} m^3 \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{3/2} \\
&\quad + \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(-1)} \pi^{-5/2} \zeta(3)
\end{aligned} \tag{220}$$

Trabalhando agora na função zeta $Z_1(s - 1/2, 4w_1q/(4w_1w_3 - w_2^2))$, temos que:

$$\begin{aligned}
Z_1\left(s - 1/2, 4w_1q/(4w_1w_3 - w_2^2)\right) &= \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{4\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)m^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 [4(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)(\alpha_2 + \beta + \phi_2) - (\phi_3 - 2\alpha_2)^2]} \right)^{-s+1/2} \\
&\quad + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1)}{2\Gamma(s-1/2)} \left(\frac{4\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)m^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 [4(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)(\alpha_2 + \beta + \phi_2) - (\phi_3 - 2\alpha_2)^2]} \right)^{-s+1} \\
&\quad + \frac{2\pi^{s-1/2}}{\Gamma(s-1/2)} \left(\frac{4\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)m^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 [4(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)(\alpha_2 + \beta + \phi_2) - (\phi_3 - 2\alpha_2)^2]} \right)^{-s/2+1/2} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} K_{s-1} \left(2\pi n \sqrt{\left(\frac{4\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)m^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 [4(\alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1)(\alpha_2 + \beta + \phi_2) - (\phi_3 - 2\alpha_2)^2]} \right)} \right).
\end{aligned} \tag{221}$$

escrevendo de uma forma mais compacta e simplificando alguns termos:

$$\begin{aligned}
Z_1 \left(s - 1/2, 4w_1q/(4w_1w_3 - w_2^2) \right) = \\
-2^{-2s} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{2s-1} m^{-2s+1} \left[\frac{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \right]^{-s+1/2} \\
+ 2^{-2s+1} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1)}{\Gamma(s-1/2)} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{2s-2} m^{-2s+2} \left[\frac{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \right]^{-s+1} \\
+ \frac{2^{-s+2}\pi^{s-1/2}}{\Gamma(s-1/2)} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{s-1} m^{-s+1} \left[\frac{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \right]^{-s/2+1/2} \\
\sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} K_{s-1} \left(2nmL \left[\frac{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \right]^{1/2} \right), \tag{222}
\end{aligned}$$

como o argumento dessa função Zeta difere da outra, a função de Bessel assumirá valores diferentes. Substituindo os três valores possíveis de s , encontramos K_0 , K_{-1} e K_{-2} . Portanto, para as funções de Bessel de ordens menores que zero, temos:

$$\begin{aligned}
Z_1 \left(s - 1/2, 4w_1q/(4w_1w_3 - w_2^2) \right) = \\
-2^{-2s} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{2s-1} m^{-2s+1} \left[\frac{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \right]^{-s+1/2} \\
+ 2^{-2s+1} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1)}{\Gamma(s-1/2)} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{2s-2} m^{-2s+2} \left[\frac{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \right]^{-s+1} \\
+ \pi^{2s-3/2} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s-1/2)} \zeta(2-2s). \tag{223}
\end{aligned}$$

Para obter a expressão da zeta correspondente a ordem zero da função de Bessel, vamos fazer a seguinte manipulação algébrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} K_{\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{2} \left(\frac{2}{Un} \right)^{\varepsilon} = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{2^{1-\varepsilon}} U^{-\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\varepsilon}, \tag{224}$$

tomando um limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} K_{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma(\varepsilon) \zeta(2\varepsilon) \frac{U^{-\varepsilon}}{2^{1-\varepsilon}} = \frac{\Gamma(0) \zeta(0)}{2}, \tag{225}$$

utilizando uma propriedade de todas as funções zeta, conhecida como fórmula de reflexão (ELIZALDE, 1995), dada por:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \frac{\pi n}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \tag{226}$$

obtemos para $s = 1$

$$\zeta(1) = 2\Gamma(0)\zeta(0) \quad (227)$$

substituindo na eq.(225), chegamos a conclusão que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} K_{\varepsilon} = \frac{\zeta(1)}{4}. \quad (228)$$

Portanto, para a ordem zero da função de Bessel, a eq.(222) é reescrita como:

$$\begin{aligned} Z_1 \left(s - 1/2, 4w_1q/(4w_1w_3 - w_2^2) \right) = \\ -2^{-2s} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{2s-1} m^{-2s+1} \left[\frac{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \right]^{-s+1/2} \\ + 2^{-2s+1} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1)}{\Gamma(s-1/2)} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{2s-2} m^{-2s+2} \left[\frac{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \right]^{-s+1} \\ + \frac{2^{-s}\pi^{s-1/2}}{\Gamma(s-1/2)} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{s-1} m^{-s+1} \left[\frac{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \right]^{-s/2+1/2} \zeta(1). \end{aligned} \quad (229)$$

Substituindo os três valores possíveis de s , temos:

$$\begin{aligned} Z_1 \left(1/2, 4w_1q/(4w_1w_3 - w_2^2) \right) = \\ -2^{-2} \left(\frac{2\pi}{L} \right) m^{-1} \left[\frac{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \right]^{-1/2} + 2^{-1} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(0)}{\Gamma(1/2)} + \frac{2^{-1}\pi^{1/2}}{\Gamma(1/2)} \zeta(1) \end{aligned} \quad (230)$$

$$\begin{aligned} Z_1 \left(-1/2, 4w_1q/(4w_1w_3 - w_2^2) \right) = \\ -2 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-1} m \left[\frac{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \right]^{1/2} + 2 \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(-1)}{\Gamma(-1/2)} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-2} \\ \times m^2 \left[\frac{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \right] + \pi^{-3/2} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-1/2)} \zeta(2) \end{aligned} \quad (231)$$

$$\begin{aligned} Z_1 \left(-3/2, 4w_1q/(4w_1w_3 - w_2^2) \right) = \\ -2^2 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-3} m^3 \left[\frac{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \right]^{-1/2} + 2^3 \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(-2)}{\Gamma(-3/2)} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-4} \\ \times m^4 \left[\frac{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \right]^2 + \pi^{-7/2} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(-3/2)} \zeta(4). \end{aligned} \quad (232)$$

Substituindo as equações das funções Zeta de Epstein-Hurwitz na fórmula de fórmula de Chowla-Selberg, dada pela eq.(213), obtemos para os valores de s que:

$$\begin{aligned}
\zeta(1; w_1, w_2, w_3; q) &= -m^2 f_4^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-1} \pi m^{-1} \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{-1/2} \\
&\quad - \frac{\pi^{-1/2}}{2L^{-1}} \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{-1/2} - \pi \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-1} m^{-1} [f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4(\alpha_1, \alpha_2)]^{-1/2} \\
&\quad + 2\pi \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-2} \Gamma(0) f_2^{-1/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta) + 2\pi \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-2} \zeta(1) \\
&\quad \times f_2^{-1/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta) \\
&\quad + 8\pi \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi f_3(\alpha_2, \phi_3) / f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)), \tag{233}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta(0; w_1, w_2, w_3; q) &= -1 - \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-1} \frac{2\pi}{\Gamma(0)} m \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{1/2} + \frac{2\zeta(1)}{\Gamma(0)} \\
&\quad + \frac{4\pi}{\Gamma(0)} \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{1/2} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-1} m + \frac{2\pi\Gamma(-1)}{\Gamma(0)} m^2 \frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2^{1/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \\
&\quad + \frac{\pi}{6\Gamma(0)} \frac{f_1^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)}{f_2^{-1/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} - \frac{4\pi}{\Gamma(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi f_3(\alpha_2, \phi_3) / f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)) \\
&\quad \times \frac{f_2^{1/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \tag{234}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta(-1; w_1, w_2, w_3; q) &= -\frac{f_1^2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)}{f_4(\alpha_1, \alpha_2)} m^{-2} + \frac{4\pi}{3\Gamma(-1)} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-1} m^3 \frac{f_4^{3/2}(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1^{1/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \\
&\quad + \frac{\pi^{-2}}{\Gamma(-1)} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) \zeta(3) - \frac{4\pi}{3\Gamma(-1)} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-1} \frac{f_1^{-5/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4^{-1/2}(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2^{-2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \\
&\quad + 2\pi \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-2} \frac{\Gamma(-2)}{\Gamma(-1)} m^4 \frac{f_4^2(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2^{1/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} + \frac{\pi}{90\Gamma(-1)} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \\
&\quad \times \frac{f_1^{-2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)}{f_2^{-3/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{2\pi}{3\Gamma(-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi f_3(\alpha_2, \phi_3) / f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)) \\
&\quad \times \frac{f_2^{3/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)}{f_1^2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \tag{235}
\end{aligned}$$

Lembrando que as três equações acima serão multiplicadas por um fator global de $\Gamma(s)/L^2$ que vem da eq.(202) Portanto, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(1)}{L^2} \zeta(1; w_1, w_2, w_3; q) &= -\frac{1}{L^2} m^2 f_4^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{(2\pi)^{-1}}{L} \pi m^{-1} \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{-1/2} \\
&\quad - \frac{\pi^{-1/2}}{2L} \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{-1/2} - \pi \frac{(2\pi)^{-1}}{L} m^{-1} [f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4(\alpha_1, \alpha_2)]^{-1/2} \\
&\quad + (2\pi)^{-1} \Gamma(0) f_2^{-1/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta) + (2\pi)^{-1} \zeta(1) f_2^{-1/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta) \\
&\quad + 8\pi (2\pi)^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi f_3(\alpha_2, \phi_3) / f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)), \tag{236}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(0)}{L^2} \zeta(0; w_1, w_2, w_3; q) &= -\frac{\Gamma(0)}{L^2} - \frac{(2\pi)^{-1}}{L} 2\pi m \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{1/2} + \frac{1}{L^2} 2\zeta(1) \\
&\quad + \frac{1}{L^2} 4\pi \left[\frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right]^{1/2} (2\pi)^{-1} m + \frac{1}{L^2} 2\pi \Gamma(-1) m^2 \frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2^{1/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \\
&\quad + \frac{1}{L^2} \frac{\pi}{6} \frac{f_1^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)}{f_2^{-1/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} - \frac{1}{L^2} 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi f_3(\alpha_2, \phi_3) / f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)) \\
&\quad \times \frac{f_2^{1/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)}{f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \tag{237}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(-1)}{L^2} \zeta(-1; w_1, w_2, w_3; q) &= -\frac{\Gamma(-1)}{L^2} \frac{f_1^2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)}{f_4(\alpha_1, \alpha_2)} m^{-2} + \frac{1}{L} \frac{4\pi}{3} (2\pi)^{-1} m^3 \frac{f_4^{3/2}(\alpha_1, \alpha_2)}{f_1^{1/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \\
&\quad + \frac{1}{L^4} \pi^{-2} (2\pi)^2 f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) \zeta(3) - \frac{1}{L} \frac{4\pi}{3} (2\pi)^{-1} \frac{f_1^{-5/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4^{-1/2}(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2^{-2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \\
&\quad + 2\pi (2\pi)^{-2} \Gamma(-2) m^4 \frac{f_4^2(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2^{1/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} + \frac{1}{L^4} \frac{\pi}{90} (2\pi)^2 \frac{f_1^{-2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)}{f_2^{-3/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \\
&\quad + \frac{1}{L^4} (2\pi)^2 \frac{2\pi}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi f_3(\alpha_2, \phi_3) / f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)) \frac{f_2^{3/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)}{f_1^2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)}. \tag{238}
\end{aligned}$$

Estudando o regime assintótico de cada equação acima com seu valor específico de s , como L refere-se a distância entre as placas no efeito Casimir, sendo $L \ll 1$, os termos que mais contribuem são aqueles com a maior potência de L no denominador. Além disso, os termos que não dependem da distância entre as placas podem ser desprezados, pois não possuem nenhuma contribuição física para a energia de Casimir. Podemos observar que na eq.(236), todos os termos podem ser desprezados, pois possuem potências menores 4. Os termos que contém divergências devido a $\Gamma(0)$ e $\zeta(1)$ não possuem dependência em L , podendo assim serem eliminados por uma renormalização por subtração. Já nas equações (237) e (238), mantemos apenas as maiores potências de L e os termos de divergência

com dependência em L . Portanto, as equações ficam reescritas como:

$$\frac{\Gamma(0)}{L^2} \zeta(0; w_1, w_2, w_3; q) = -\frac{\Gamma(0)}{L^2} + \frac{2}{L^2} \zeta(1) + \frac{1}{L^2} 2\pi \Gamma(-1) m^2 \frac{f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2^{1/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \quad (239)$$

colocando os termos comuns em evidência:

$$\frac{\Gamma(0)}{L^2} \zeta(0; w_1, w_2, w_3; q) = \frac{2}{L^2} \left(-\frac{\Gamma(0)}{2} + \zeta(1) + \frac{\pi \Gamma(-1) m^2 f_4(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2^{1/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \right) \quad (240)$$

e a outra equação, para o caso de $s = -1$, fica:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(-1)}{L^2} \zeta(-1; w_1, w_2, w_3; q) &= -\frac{\Gamma(-1)}{L^2} \frac{f_1^2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)}{f_4(\alpha_1, \alpha_2)} m^{-2} + \frac{2}{L^4} f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) \zeta(3) \\ &- \frac{2}{3L} \frac{f_1^{-5/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4^{-1/2}(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2^{-2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} + \frac{4\pi^3}{90L^4} \frac{f_2^{3/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)}{f_1^2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \\ &+ \frac{8\pi^3}{3L^4} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi f_3(\alpha_2, \phi_3)/f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)) \frac{f_2^{3/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)}{f_1^2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)}, \end{aligned} \quad (241)$$

usando a regularização de Dirichlet, dada por:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} \cos(n\pi f_3(\alpha_2, \phi_3)/f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)) \right) = -\frac{1}{2}, \quad (242)$$

podemos reescrever a eq.(241) conforme abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(-1)}{L^2} \zeta(-1; w_1, w_2, w_3; q) &= -\frac{\Gamma(-1)}{L^2} \frac{f_1^2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)}{f_4(\alpha_1, \alpha_2)} m^{-2} + \frac{2}{L^4} f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) \zeta(3) \\ &- \frac{2}{3L} \frac{f_1^{-5/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4^{-1/2}(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2^{-2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} + \frac{4\pi^3}{90L^4} \frac{f_2^{3/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)}{f_1^2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \\ &- \frac{4\pi^3}{3L^4} \frac{f_2^{3/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)}{f_1^2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)}, \end{aligned} \quad (243)$$

organizando de forma a colocar os termos comuns em evidência, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(-1)}{L^2} \zeta(-1; w_1, w_2, w_3; q) &= \frac{2}{L^4} \left(f_1(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) \zeta(3) - \frac{58\pi^3}{90} \frac{f_2^{3/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)}{f_1^2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)} \right) \\ &- \frac{\Gamma(-1)}{L^2} \frac{f_1^2(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1)}{f_4(\alpha_1, \alpha_2)} m^{-2} - \frac{2}{3L} \frac{f_1^{-5/2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1) f_4^{-1/2}(\alpha_1, \alpha_2)}{f_2^{-2}(\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \beta)} \end{aligned} \quad (244)$$

Como o operador $\Psi_{\mu\mu}$, dado pela eq.(177), gera 5 tipos de integrais (U_1, U_2, U_3, U_4, U_5), sendo cada uma delas com um expoente P específico, que pode assumir valores 1, 2 ou 3. Lembrando que em algumas dessas integrais também atuam termos de somatório,

conforme definimos anteriormente (S_1, S_2, S_3, S_4) . As integrais com expoente $P = 1$ são desprezadas devido ao termo $\zeta(1; w_1, w_2, w_3; q)$ que foi ignorado por possuir potências de L abaixo de 4 e possuir termos sem sentido físico. Atuando cada uma das integrais com seus valores correspondentes de P , temos que:

$$S_4 U_1 = \frac{15}{4L^2} \int_0^1 d\beta d\alpha \beta (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-N/2-2} \times \left[-\frac{\Gamma(0)}{2} + \zeta(1) + \frac{\pi \Gamma(-1) m^2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{(4(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \beta) - 4\alpha_2^2)^{1/2}} \right] \quad (245)$$

$$S_1 U_3 = \frac{7}{2} \int_0^1 d\beta d\alpha \beta \alpha (\alpha + 1) (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-N/2-2} \times \left[-\frac{1}{L^2} \pi \Gamma(-1) (4(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \beta) - 4\alpha_2^2)^{-3/2} (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \right] + \frac{7}{2} \int_0^1 d\beta d\alpha \beta (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-N/2} \times \left[-\frac{4}{3L} (4(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \beta) - 4\alpha_2^2) (\alpha_1 + \alpha_2)^{-2} - \frac{29}{15L^4} (4(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \beta) - 4\alpha_2^2)^{1/2} (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \right] \quad (246)$$

$$S_2 U_4 = \frac{1}{4L^2} \int_0^1 d\beta d\alpha \beta (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-N/2-2} \times \left[\pi \Gamma(-1) m^2 (4(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \beta) - 4\alpha_2^2)^{-3/2} (\alpha_1 + \alpha_2) (5\alpha_2 + \beta) \right] \quad (247)$$

$$S_3 U_5 = \int_0^1 d\beta d\alpha \beta (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-N/2} \times - \left(\frac{58}{45L^4} \right) \left\{ \frac{3}{4} (4(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \beta) - 4\alpha_2^2)^{-1/2} (\alpha_1 + \alpha_2) (-3\alpha_2 + \beta) + (4(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \beta) - 4\alpha_2^2)^{1/2} ((\alpha_2 + \beta) - 3(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}) \right\} - \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1/2}}{3L} \left\{ (4(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \beta) - 4\alpha_2^2) \times (2(\alpha_1 + \alpha_2)^{-5/2} (\alpha_2 + \beta) - 5(\alpha_1 + \alpha_2)^{-3/2}) + 2(\alpha_1 + \alpha_2)^{-3/2} ((\alpha_2 + \beta) + 4\alpha_2) \right\}. \quad (248)$$

Da mesma forma feita anteriormente, dentre as integrais acima, mantemos apenas os termos de maior potência de L e aqueles termos que possuem algum tipo de divergência. Lembrando que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$; $\alpha_2 = 1 - \alpha$ e $N = D - d$. Portanto, para $D = 4$, essas equações podem ser reescritas como:

$$S_4 U_1 = \frac{15}{8L^2} \int_0^1 d\beta d\alpha \beta (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-7/2} \times \left[-\Gamma(0) + 2\zeta(1) + \pi\Gamma(-1)m^2 (\alpha + \alpha^2 + \beta)^{-1/2} \right] \quad (249)$$

$$S_1 U_3 = -\frac{7}{16L^2} \int_0^1 d\beta d\alpha \beta \alpha (\alpha + 1) (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-7/2} \pi\Gamma(-1) (\alpha + \alpha^2 + \beta)^{-3/2} - \frac{203}{15L^4} \int_0^1 d\beta d\alpha \beta (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-3/2} (\alpha + \alpha^2 + \beta)^{1/2} \quad (250)$$

$$S_2 U_4 = \frac{1}{32L^2} \int_0^1 d\beta d\alpha \beta (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-7/2} \pi\Gamma(-1) \times (\alpha + \alpha^2 + \beta)^{-3/2} (-5\alpha + \beta - 5) \quad (251)$$

$$S_3 U_5 = -\frac{58}{45L^4} \int_0^1 d\beta d\alpha \beta (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-3/2} \times \left[\left(\frac{3}{8} (\alpha + \alpha^2 + \beta)^{-1/2} (3\alpha + \beta - 3) + 2 (\alpha + \alpha^2 + \beta)^{1/2} (-\alpha + \beta - 2) \right) \right] \quad (252)$$

Analisando cada umas das 4 equações acima, percebemos que aquelas que possuem convergência são dadas pelas equações (250) e (252). Ambos os termos relevantes se comportam com o inverso de L^4 . Podemos, então, resolver as integrais convergentes utilizando o software Wolfram. Desse modo, a integral convergente em (250) é dada por

$$\int_0^1 d\beta \beta (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-3/2} (\alpha + \alpha^2 + \beta)^{1/2} = (\alpha + \alpha^2 + \beta)^{1/2} \left(\frac{-3\alpha^2 + 3\alpha + \beta}{(\alpha - \alpha^2 + \beta)^{1/2}} + \frac{2(2\alpha - 1) \sinh^{-1} \left(\frac{(\alpha - \alpha^2 + \beta)^{1/2}}{2^{1/2}\alpha} \right)}{\frac{(\alpha + \alpha^2 + \beta)^{1/2}}{\alpha}} \right) + C \quad (253)$$

aplicando os limites de integração, temos:

$$\int_0^1 (\alpha + \alpha^2)^{1/2} \left(\frac{-3\alpha^2 + 3\alpha}{(\alpha - \alpha^2)^{1/2}} + \frac{2(2\alpha - 1) \sinh^{-1} \left(\frac{(\alpha - \alpha^2)^{1/2}}{2^{1/2}\alpha} \right)}{\frac{(\alpha + \alpha^2)^{1/2}}{\alpha}} \right) d\alpha = 1,0236 \quad (254)$$

$$\int_0^1 (1 + \alpha + \alpha^2)^{1/2} \left(\frac{1 - 3\alpha^2 + 3\alpha}{(1 + \alpha - \alpha^2)^{1/2}} + \frac{2(2\alpha - 1) \sinh^{-1} \left(\frac{(1 + \alpha - \alpha^2)^{1/2}}{2^{1/2}\alpha} \right)}{\frac{(1 + \alpha + \alpha^2)^{1/2}}{\alpha}} \right) d\alpha = 2,01796 \quad (255)$$

Portanto, o valor da integral será

$$\int_0^1 d\beta \beta (\beta + (1 - \alpha) \alpha)^{-3/2} (\alpha + \alpha^2 + \beta)^{1/2} = 2,01796 - 1,0236 \approx 0,994. \quad (256)$$

Trabalhando agora na resolução da integral na eq.(252), percebemos que ela possui um fator comum de $(\alpha + \alpha^2 + \beta)$ com diferença apenas no seu expoente. Portanto, a integral pode ser dividida em duas integrais: uma com $-1/2$ no expoente do fator mencionado e outra com expoente $1/2$. Dessa forma, temos que para o expoente $-1/2$, essa integral será:

$$I_{-1/2} = \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\alpha \beta (\beta + \alpha (1 - \alpha))^{-3/2} (\beta + \alpha (1 + \alpha))^{-1/2} (3\alpha + \beta - 3), \quad (257)$$

dividindo essa integral em 3 partes, conforme abaixo:

$$I_1 = \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\alpha \beta \alpha (\beta + \alpha (1 - \alpha))^{-3/2} (\beta + \alpha (1 + \alpha))^{-1/2} \quad (258)$$

$$I_2 = \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\alpha \beta^2 (\beta + \alpha (1 - \alpha))^{-3/2} (\beta + \alpha (1 + \alpha))^{-1/2} \quad (259)$$

$$I_3 = \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\alpha \beta \alpha (\beta + \alpha (1 - \alpha))^{-3/2} (\beta + \alpha (1 + \alpha))^{-1/2}, \quad (260)$$

desse modo, a eq.(257), é escrita como:

$$I = 3I_1 + I_2 - 3I_3. \quad (261)$$

Para resolver as integrais acima, podemos utilizar a seguinte aproximação:

$$\alpha(1 - \alpha) \approx 0 \quad (262)$$

$$\alpha(1 + \alpha) \approx 2\alpha, \quad (263)$$

portanto, cada uma das integrais assume a forma:

$$I_1 = \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\alpha \beta \alpha (\beta)^{-3/2} (\beta + 2\alpha)^{-1/2} \quad (264)$$

$$I_2 = \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\alpha \beta^2 (\beta)^{-3/2} (\beta + 2\alpha)^{-1/2} \quad (265)$$

$$I_3 = \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\alpha \beta (\beta)^{-3/2} (\beta + 2\alpha)^{-1/2}. \quad (266)$$

Integrando I_2 e I_3 em relação à α :

$$\int_0^1 d\alpha (\beta + 2\alpha)^{-1/2} = (-\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + 2}) \quad (267)$$

, de maneira análoga, a integral I_1 ao ser integrada em α será:

$$\int_0^1 d\alpha \alpha (\beta + 2\alpha)^{-1/2} = \frac{1}{3} \left(\beta^{3/2} - (\beta - 1)\sqrt{2 + \beta} \right). \quad (268)$$

Integrando em β cada uma delas, encontramos:

$$I_1 = \frac{1}{3} \int_0^1 d\beta \beta^{-1/2} \left(\beta^{3/2} - (\beta - 1)\sqrt{2 + \beta} \right) = \frac{1}{6} + \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (269)$$

$$I_2 = \int_0^1 d\beta \beta^{1/2} (-\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + 2}) = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (270)$$

$$I_3 = \int_0^1 d\beta \beta^{-1/2} (-\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + 2}) = -1 + \sqrt{3} + 2 \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (271)$$

substituindo I_1 , I_2 e I_3 na eq.(261):

após uma certa álgebra, o resultado encontrado para essa integral será:

$$I_{-1/2} = 3 - 2\sqrt{3} - \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx -1.12258. \quad (273)$$

De forma análoga, podemos resolver a outra integral da eq.(252), correspondendo ao expoente $1/2$. Sendo assim, identificamos a integral como:

$$I_{1/2} = \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\alpha \beta (\beta + \alpha(1 - \alpha))^{-3/2} (\beta + \alpha(1 + \alpha))^{1/2} (-2\alpha + 2\beta - 6), \quad (274)$$

fazendo as mesmas aproximações, dadas pelas equações (262) e (263),

$$I_{1/2} = \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\alpha \beta^{-1/2} (\beta + 2\alpha)^{1/2} (-2\alpha + 2\beta - 6), \quad (275)$$

dividindo a integral acima em três tipos de integrais, temos:

$$I_{1/2} = -2I_4 + 2I_5 - 6I_6, \quad (276)$$

identificando cada uma delas, conforme abaixo

$$I_4 = \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\alpha \beta^{-1/2} \alpha (\beta + 2\alpha)^{1/2} \quad (277)$$

$$I_5 = \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\alpha \beta^{1/2} (\beta + 2\alpha)^{1/2} \quad (278)$$

$$I_6 = \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\alpha \beta^{-1/2} (\beta + 2\alpha)^{1/2}. \quad (279)$$

Observando as equações acima, temos 2 tipos de integral em α . Para as integrais I_5 e I_6 , temos:

$$\int_0^1 d\alpha (\beta + 2\alpha)^{1/2} = \frac{1}{3} \left(-\beta^{3/2} + (2 + \beta)^{3/2} \right) \quad (280)$$

, enquanto para a integral I_4 , a integração em α nos fornece:

$$\int_0^1 d\alpha \alpha (\beta + 2\alpha)^{1/2} = \frac{1}{15} \left(\beta^{5/2} - (\beta - 3)(2 + \beta)^{3/2} \right). \quad (281)$$

Fazendo as integrais em relação à β , encontramos:

$$I_4 = \frac{1}{15} \int_0^1 d\beta \beta^{-1/2} \left(\beta^{5/2} - (\beta - 3)(2 + \beta)^{3/2} \right) = \frac{1}{45} + \frac{21}{45} \sqrt{3} + \frac{30}{45} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (282)$$

$$I_5 = \frac{1}{3} \int_0^1 d\beta \beta^{1/2} (-\beta^{3/2} + (2 + \beta)^{3/2}) = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3} \sqrt{3} - \frac{1}{3} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (283)$$

$$I_6 = \frac{1}{3} \int_0^1 d\beta \beta^{-1/2} (-\beta^{3/2} + (2 + \beta)^{3/2}) = -\frac{1}{6} + \sqrt{3} + \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (284)$$

Substituindo na eq.(276), obtemos:

$$\begin{aligned} I_{1/2} = & -\frac{2}{45} + 1 - \frac{2}{9} - \frac{42}{45} \sqrt{3} + \frac{4}{3} \sqrt{3} - 6\sqrt{3} - \frac{60}{45} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ & - \frac{2}{3} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 6 \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned} \quad (285)$$

logo, o resultado para essa integral é dado por:

$$I_{1/2} = \frac{11}{15} - \frac{28}{5} \sqrt{3} - 8 \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -14.23398 \quad (286)$$

Substituindo os valores encontrados, dados pelas equações (273) e (286), na equação (252), encontramos:

$$S_3 U_5 = -\frac{58}{45 L^4} \left(-1.12258 \frac{3}{8} - 14.23398 \right) \approx \frac{18.8886}{L^4}. \quad (287)$$

Desse modo, as integrais que contribuem para a correção na energia de Casimir são dadas por:

$$S_3 U_5 + S_1 U_3 = \frac{18.888599}{L^4} - \frac{203}{15 L^4} 0.994 = \frac{5.436334184}{L^4}. \quad (288)$$

Por fim, esse resultado é substituído na expressão geral do tensor energia-momento, dado pela equação (202). Lembrando ainda que, tal resultado deve ser multiplicado por um fator global de De^2 , dado pela equação (125), que se refere a dimensão total do espaço e a carga do elétron. Portanto, encontramos para a correção da energia de Casimir em primeira ordem, um valor de:

$$T^{00} \simeq \frac{(4e^2) 5.436334184}{(4\pi)^3 L^4} \simeq \frac{4e^2 \pi^2}{3603 L^4}. \quad (289)$$

Esse resultado apresenta o mesmo comportamento daquele encontrado por (BORDAG; ROBASCHIK; WIECZOREK, 1985).

O cálculo de correções radiativas para a energia de Casimir, apresentado nessa tese, foi feito utilizando o formalismo de topologias toroidais, tendo como base a compactação de uma dimensão espacial. O resultado encontrado, para a correção da energia, mostra um comportamento que varia com o inverso da quarta potência da distância entre as placas. Observamos que o tensor energia momento também forneceu quantidades divergentes para essa correção, as quais não conseguimos extrair algum significado físico. De fato, ao utilizarmos o método de topologias toroidais esperamos uma diminuição no grau de divergência que surge durante o cálculo do diagrama de loop. Porém, para uma melhor interpretação dos resultados, precisamos aplicar a teoria de renormalização no cálculo desses diagramas de loop, na qual os contratermos que surgem da teoria perturbativa podem absorver as contribuições sem significado físico nos parâmetros utilizados. Portanto, como uma perspectiva futura seria necessário entender e aplicar a teoria de renormalização nesses espaços com parte de suas dimensões compactadas, comparando assim a diferença no grau da divergência dos parâmetros em uma teoria quântica de campos convencional (temperatura zero) com a teoria quântica de campos a temperatura finita, sendo esta última descrita conforme realizado nessa tese, pelo formalismo de Matsubara generalizado.

CONCLUSÃO

Observa-se, então, que o efeito Casimir é um fenômeno caracterizado por flutuações na energia de ponto zero de um determinado campo relativístico restrito a uma certa região do espaço, a qual é feita de vácuo. Conforme discutido ao longo da tese, tal vácuo é entendido como o estado de menor energia do campo em questão, sendo que essa energia surge a partir das interações entre o campo e as partículas virtuais que são criadas a todo momento nesse vácuo, obedecendo assim ao princípio de incerteza de Heisenberg. Além disso, o efeito casimir não é restrito apenas a um determinado tipo de geometria ou campo. O mesmo pode ser descrito por placas esféricas, cilíndricas, toroidais, entre outras.

Tal energia de vácuo, conforme mostrado por Casimir no fim dos anos 40, é definida como a diferença entre duas quantidades divergentes, sendo um termo dependente da separação entre as placas, impostas por um determinado conjunto de condições de contorno utilizada. Enquanto isso, o outro termo não depende das condições de contorno. Desse modo, por se tratar de uma quantidade divergente, é necessário aplicar algum método de regularização como forma de extrair um sentido físico para essas quantidades divergentes. Com a evolução da teoria quântica de campos, novos métodos de regularização foram sendo criados com o intuito de contornarmos tais quantidades sem sentido físico, a princípio. Além disso, a escolha de qual método de regularização utilizar não deve influenciar nos resultados que são fisicamente relevantes, podendo um método ou outro ser mais eficiente de acordo com as características a serem extraídas do fenômeno. Dentre algumas dessas escolhas, podemos citar o método de corte nas frequências, o método da função zeta generalizada, o método da função de Green, entre outros. Nesse trabalho, escolhemos o método local para tratarmos essas divergências. Esse baseia-se em calcular o valor esperado do tensor energia momento em termos dos propagadores de uma determinada teoria, a qual fizemos no contexto da eletrodinâmica quântica.

O estudo do efeito Casimir foi feito utilizando o formalismo de topologias toroidais, o qual trata-se de uma generalização de formalismo de campos a temperatura finita, desenvolvido por Matsubara em 1955. Em outras palavras, além de compactarmos a dimensão temporal (interpretada como temperatura), podemos compactar também dimensões espaciais. Portanto, as integrais nos momentos que variam de zero à infinito, podem agora ser substituídas por somatórios com valores discretos dos momentos. Nesse contexto, utilizamos o tensor energia-momento em termos do propagador livre do fóton, para calcular as expressões da energia e da pressão entre as placas, chegando no mesmo resultado previsto por Casimir em 1948. Posteriormente, esse cálculo é feito incluindo os efeitos térmicos na energia de Casimir, realizando uma compactação dupla, sendo uma

coordenada espacial e a outra temporal. No resultado encontrado, observa-se que o termo referente a compactação temporal reproduz a lei de Stefan-Boltzmann, a compactação espacial reproduz a energia encontrada por Casimir e o último termo da equação representa a contribuição mista de ambas as dimensões citadas.

Por fim, a parte mais importante dessa tese, concentra-se em calcular as correções radiativas na energia de Casimir na aproximação a 1 loop. Dessa maneira, consideramos a interação do elétron com o campo eletromagnético, na qual calculamos o digrama de loop fermiônico que representa a auto-energia do fóton. O resultado obtido mostra um comportamento com o inverso da quarta potência da distância entre as placas no efeito Casimir. Porém, alguns termos aparecem como quantidades divergentes ao fim desse cálculo. Tais divergências têm origem devido a alguns valores específicos da função gama (pólos) e da função Zeta de Riemann. Como uma possível solução futura para eliminar as divergências desse cálculo, precisamos fazer um estudo da renormalização desses diagramas em um espaço com dimensões compactadas. Uma das maneiras de fazer essa renormalização, seria considerar os contratermos de maneira englobar esses termos de divergência, restando apenas aqueles com algum significado físico.

Como perspectiva futura, podemos estender esse estudo do efeito Casimir no contexto da cromodinâmica quântica. Quarks e glúons, como se sabe, são quanta de campos completamente confinadas dentro dos hádrons. Ou seja, em todos os experimentos já realizados, utilizando níveis de energia cada vez mais elevados, os quarks nunca foram observados de forma isolada. Por esse motivo, o confinamento é um dos aspectos mais estudados desde a década de 1970 até os dias de hoje, buscando respostas para essa característica dos quarks. Uma solução foi a criação do chamado modelo de sacola (bag model). Neste modelo, os hádrons são interpretados como sacolas confinantes, na quais os quarks e glúons estão contidos. Assim, tornam-se relevantes as contribuições à energia de Casimir dos campos em questão, não apenas as de campos livres, mas também as das interações entre eles, no contexto da cromodinâmica quântica a 1 loop, à temperatura zero e a temperatura finita.

REFERÊNCIAS

- ABREU, L. M. t. Magnetic effects on spontaneous symmetry breaking/restoration in a toroidal topology. *Physical Review D*, [S.l], v. 88, n. 10, 2013.
- APOSTOL, T. An elementary view of euler's summation formula. *The American Mathematical Monthly*, [S.l], v. 106, n. 5, p. 409, 1999.
- BARONE, F.; CAVALCANTI, R.; FARINA, C. Radiative corrections to the casimir effect for the massive scalar field. *Nuclear Physics B*, [S.l], v. 127, n. 3, p. 118–122, 2004.
- BORDAG, M.; ROBASCHIK, D.; WIECZOREK, E. Quantum field theoretic treatment of the casimir effect. *Annals of Physics*, [S.l], v. 165, p. 192, 1985.
- BORDAG, M.; SCHARNHORST, K. $o(\alpha)$ radiative correction to the casimir energy for penetrable mirrors. *Physical Review Letters*, [S.l], v. 81, n. 5, p. 3815, 1998.
- BROWN, L.; MACLAY, G. Vacuum stress between conducting plates: An image solution*. *Physical Review*, [S.l], v. 184, n. 5, p. 1272, Jan 1969.
- CALZA, T. C. A. t. Compatibility between the ginzburg–landau model and finite-temperature quantum field theory. *Modern Physics Letters A*, [S.l], v. 31, n. 40, p. 1650227, Jun 2016.
- CARDOSO, F. *Um estudo dos efeitos das compactações dimensionais nas teorias de campos*. Tese (Doutorado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.
- CASIMIR, H. On the attraction between two perfectly conducting plates. *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, [S.l], v. 51, n. 4A, p. 793, 1948.
- CASIMIR, H.; POLDER, D. The influence of retardation on the london-van der waals forces plates. *Physical Review*, [S.l], v. 73, p. 360–372, 1948.
- CAVALCANTI, R.; FARINA, C.; BARONE, F. Radiative corrections to casimir effect in the $\lambda\phi^4$ model. *Physical Review Letters*, [S.l], n. 5, p. 24, 2006.
- COUGO-PINTO, M.; FARINA, C.; A, T. O efeito casimir. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, [S.l], v. 22, n. 1, p. 122, 2000.
- DAS, A. *Finite temperature field theory*. Singapore: World Scientific, 1997.
- ELIZALDE, A. t. Zeta regularization techniques with applications. *Journ.Math.Phys*, [S.l], v. 30, p. 1133, 1989.
- ELIZALDE, E. *Ten physical applications of spectral zeta functions*. Berlin: Springer, 1995.
- ELIZALDE, E.; ROMEO, A. Essentials of the casimir effect and its computation. *RAmerican Journal of Physics*, [S.l], v. 59, n. 1, p. 711, 1991.
- EZAWA, H.; TOMOZAWA, Y.; UMEZAWA, H. Quantum statistics of fields and multiple production of mesons. *Il Nuovo Cimento*, [S.l], v. 5, n. 4, p. 810–841, 1957.

- FARINA, C. The casimir effect: Some aspects. *Brazilian Journal of Physics*, [S.l], v. 36, n. 4A, p. 1137, 2006.
- ITZYKSON, C.; ZUBER, J. *Quantum field theory / Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber*. New York: Dover Publications, 2005.
- KAPUSTA, J.; GALE, C. *Finite-temperature field theory: principles and applications*. Reino Unido: Cambridge University Press, 2013.
- KHANNA, F. et al. Quantum field theory on toroidal topology: Algebraic structure and applications. *Physics Reports*, [S.l], v. 539, n. 3, p. 135–224, 2014.
- KHANNA, F. C. *Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications*. Hackensack, NJ: World Scientific, 2009.
- KIRSTEN, K. Spectral functions in mathematics and physics. *Journ.Math.Phys*, [S.l], v. 35, p. 459, 1994.
- LAMOREAUX, S. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6m range. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l], v. 78, n. 5, p. 751, 1997.
- LAMOREAUX, S. Casimir forces: still surprising after 60 years. *Physicis Today*, [S.l], v. 78, n. 5, p. 40–45, 2007.
- LEBELLAC, M. *Thermal field theory*. Reino Unido: Cambridge University Press, 1996.
- LINHARES, C. A. et al. Spontaneous symmetry restoration in a field theory at finite chemical potential in a toroidal topology. *Physical Review D*, [S.l], v. 86, n. 10, 2012.
- MALBOUISSON, A.; MALBOUISSON, J.; SANTANA, A. Spontaneous symmetry breaking in compactified $\lambda\phi^4$ theory. *Nuclear Physics B*, [S.l], v. 631, n. 1-2, p. 83–94, 2002.
- MATSUBARA, T. A new approach to quantum-statistical mechanics. *Progress of Theoretical Physics*, [S.l], v. 14, n. 4, p. 351–378, 1955.
- MILONNI, P. *The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics*. San Diego: Academic, 1994.
- MILTON, K. *Physical Manifestation of zero point energy - The Casimir effect*. Singapore: World Scientific, 2001.
- MOHIDEEN, U.; ROY, A. Precision measurement of the casimir force from 0.1 to 0.9m. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l], v. 81, n. 5, p. 4549, 1998.
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An introduction to quantum field theory*. Reading, Massachusetts: Westview Press Inc, 1995.
- RAVNDAL, F.; THOMASSEN, J. Radiative corrections to the casimir energy and effective field theory. *Nuclear Physics B*, [S.l], v. 127, n. 3, p. 135–224, 2004.
- REGO, A.; LINHARES, C.; MALBOUISSON, A. Casimir effect via a generalized matsubara formalism. *arXiv:1608.01367*, [S.l], 2016.

SPARNAAY, M. Measurements of attractive forces between flat plates. *Physica*, [S.l], v. 24, p. 751–764, 1958.

WATSON, G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Reino Unido: Cambridge University Press, 2011.

APÊNDICE A – Função Zeta de Epstein-Hurwitz

A.1 Continuação analítica da Função Zeta de Epstein-Hurwitz

As funções zeta inhomogêneas de Epstein-Hurwitz, são definidas da seguinte forma

$$Z_k^{c^2}(\nu, a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_k) = \sum_{n_j=-\infty}^{\infty} \left[a_1(n_1 - b_1)^2 + \dots a_k(n_k - b_k)^2 + c^2 \right]^{-\nu}, \quad (290)$$

fazendo o caso particular de uma dimensão compactada, essa equação é reduzida para:

$$Z_1^{c^2}(\nu, a, b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a(n - b)^2 + c^2 \right]^{-\nu}, \quad (291)$$

utilizando uma representação da zeta de Epstein-Hurwitz pode ser representada, dada por:

$$Z_1^{c^2}(\nu, a, b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} dt t^{\nu-1} e^{-a(n-b)^2 t} e^{-c^2 t}. \quad (292)$$

Utilizando a identidade,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-tn^2+2\pi inb} = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2(n-b)^2/t}, \quad (293)$$

fazendo $t \rightarrow 1/t$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2/t+2\pi inb} = (\pi t)^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2(n-b)^2 t}, \quad (294)$$

e definindo $t' = \frac{a}{\pi^2} t$, obtemos

$$Z_1^{c^2}(\nu, a, b) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\pi^2}{a}\right)^{\nu} \pi^{-1/2} \int_0^{\infty} dt t^{\nu-1/2-1} e^{-(\pi^2/a)c^2 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2/t+2\pi inb}. \quad (295)$$

O somatório na equação acima pode ser reescrito como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2/t+2\pi inb} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-n^2/t+2\pi inb} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2/t+2\pi inb} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi nb) e^{-n^2/t}, \quad (296)$$

desta maneira, a eq.(295) torna-se

$$Z_1^{c^2}(\nu, a, b) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\pi^2}{a} \right)^\nu \pi^{-1/2} \left[\int_0^\infty dt t^{\nu-1/2-1} e^{-(\pi^2/a)c^2 t} + 2 \sum_{n=1}^\infty \cos(2\pi nb) \right. \\ \left. \times \int_0^\infty dt t^{\nu-1/2-1} e^{-(\pi^2/a)c^2 t - n^2/t} \right]. \quad (297)$$

A integral no primeiro termo de $Z_1^{c^2}$ pode ser obtida pela identidade

$$\frac{1}{\Delta^\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt t^{\nu-1} e^{-\Delta t}. \quad (298)$$

Logo, obtemos que:

$$\int_0^\infty dt t^{\nu-1/2-1} e^{-(\pi^2/a)c^2 t} = \frac{\Gamma(\nu - 1/2)}{\left(\frac{\pi^2}{a} c^2 \right)^{\nu-1/2}} \pi^{1/2}. \quad (299)$$

Substituindo na eq. (297), obtemos que o primeiro termo de $Z_1^{c^2}$ é

$$\frac{\Gamma(\nu - 1/2)}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\pi^2}{a} \right)^{1/2} c^{1-2\nu}. \quad (300)$$

O segundo termo de $Z_1^{c^2}$ pode ser expresso em termos das funções de Bessel modificadas de segunda espécie K_ν , as quais possuem uma representação integral dada por

$$2 \left(\frac{A}{B} \right)^{\nu/2} K_\nu(2\sqrt{AB}) = \int_0^\infty dt t^{\nu-1} e^{-A/t - Bt}. \quad (301)$$

Assim, podemos escrever como

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\pi^2}{a} \right)^\nu 4\pi^{-1/2} \sum_{n=1}^\infty \cos(2\pi nb) \left(\frac{n\sqrt{a}}{\pi c} \right)^{\nu-1/2} K_{\nu-1/2} \left(\frac{2\pi c}{\sqrt{a}} n \right) \\ = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \frac{4\pi^\nu}{(\sqrt{a})^{\nu+1/2}} c^{1/2-\nu} \sum_{n=1}^\infty \cos(2\pi nb) n^{\nu-1/2} K_{\nu-1/2} \left(\frac{2\pi c}{\sqrt{a}} n \right). \quad (302)$$

Colocando $\nu = s - (D - 1)/2$, a expressão final para $Z_1^{c^2}$ é da forma

$$Z_1^{c^2}(s - (D - 1)/2; a; b) = \frac{\Gamma\left(s - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(s - \frac{D-1}{2}\right)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{1/2} c^{1-2\nu} \\ + \frac{4\pi^{s-(D-1)/2}}{(\sqrt{a})^{s-D/2+1}} \frac{c^{D/2-s}}{\Gamma\left(s - \frac{D-1}{2}\right)} \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(2\pi nb)}{n^{D/2-s}} K_{D/2-s} \left(\frac{2\pi c}{\sqrt{a}} n \right). \quad (303)$$