

The role of magnetic monopole in confinement/deconfinement phase*

柴田章博

高エネルギー加速器研究機構・計算科学センター

1 はじめに

双対超伝導像は、クォーク閉じ込めを理解する最も魅力的かつ有力なシナリオである。特に、随伴 Higgs 場を含まない Yang-Mills 理論や QCD において、双対マイスナー効果を引き起こすのは、ゲージ場の位相的配位であると考えられる。これまでに多くの研究がなされ、著しい成果が得られた。しかしながら、特定なゲージ固定を必要としており、特別な仮定を設けずに Yang-Mills 理論からゲージ不变な双対超伝導像が得られること、すなわちゲージ不变な磁気モノポール配位が閉じ込めに支配的な寄与をもたらすことを立証することが求められる。

これらの困難を解決し双対超伝導像を確立するため、クォーク閉じ込めに効くゲージ不变な位相的配位を特別なゲージ固定に依らずに抽出できるような新しい定式化を提唱した。SU(2) Yang-Mills 場においては、Cho-Faddeev-Niemi-Chabanov (CFNS) 分解の格子ゲージ理論版を提唱し [3][1][2]、その拡張として SU(N) Yang-Mills 場における定式化を行った [5][4]。リンク変数はゲージ群の stability 部分群とその商空間の成分とに分解することができる。SU(2) においては、stability 部分群は $U(1)$ ゲージ群が唯一であるが、SU(3) においては、 $\tilde{H} = U(1) \times U(1)$ (maximal option) と $\tilde{H} = U(2)$ (minimal option) との 2 つの分解が存在する。[7] においては、SU(N) Yang-Mills 場のリンク変数による厳密な分解方程式の解を与えた。この定式化によって、閉じ込めに寄与する位相的配位をゲージに依存することなく抽出することが可能となった。また、ノンアーベリアン・ストークスの定理との関係を議論することで、YM 場の分解で得られた場の閉じ込めに果たす役割を議論することができ、分解で得られた変数を用いてゲージ不变な磁気的モノポールが導出される [11]。

*本研究は、近藤慶一（千葉大院・理）、篠原徹（千葉大院・理）、加藤清考（福井高専）との共同研究 [13] に基づく。

本研究では、 $SU(3)$ minimal option における解析を行い、クォーク閉じ込め機構における磁気的モノポールの果たす役割について調べる。

2 変数分解

YM 場のゲージポテンシャルを分解 $U_{x,\mu} = V_{x,\mu} X_{x,\mu}$ で、連続極限でゲージポテンシャルの分解 $A_\mu(x) = V_\mu(x) + X_\mu(x)$ を与えるものを考える [5]。リンク上の中点で定義された場 $\mathbb{A}_{x',\mu}$, $\mathbb{V}_{x',\mu}$ 及び、格子上場 $\mathbb{X}_{x,\mu}$ を用いて次のように対応付けられる。ゲージ変換 $\Omega_x \in SU(3)$ に対して $V_{x,\mu}$ はリンク変数として変換し、 $X_{x,\mu}$ はサイト変数として変換する。

$$U_{x,\mu} \rightarrow {}^\Omega U_{x,\mu} = \Omega_x U_{x,\mu} \Omega_{x+\mu}^\dagger, \quad (1a)$$

$$V_{x,\mu} \rightarrow {}^\Omega V_{x,\mu} = \Omega_x V_{x,\mu} \Omega_{x+\mu}^\dagger, \quad (1b)$$

$$X_{x,\mu} \rightarrow {}^\Omega X_{x,\mu} = \Omega_x X_{x,\mu} \Omega_x^\dagger. \quad (1c)$$

リンク変数の分解は、ゲージ群 $G = SU(3)$ の minimal option の stability group $\tilde{H} = U(2)$ とその商空間 G/H に対応して与えられる。リンク変数の分解は、新たにカーラー場 $\mathbf{h}_x = \Theta_x (\lambda_8/2) \Theta_x^\dagger, (\in G/H)$ を導入した次の定義方程式で与えられる [3][4]。

$$D_\mu^\epsilon [V] \mathbf{h}_x = \frac{1}{\epsilon} (V_{x,\mu} \mathbf{h}_{x+\mu} - \mathbf{h}_x V_{x,\mu}) = 0, \quad (2)$$

$$g_x = e^{-2\pi q_x/N} \exp(-ia_x^{(0)} \mathbf{h}_x - i \sum_{i=1}^3 a_x^{(i)} \mathbf{u}_x^{(i)}) \\ = 1. \quad (3)$$

この方程式は厳密解が得られており、任意の YM 場カラーフ場が与えられると一意に分解が決定される。

$$L_{x,\mu} = \frac{N^2 - 2N + 2}{N} \mathbf{1} + (N-2) \sqrt{\frac{2(N-1)}{N}} (\mathbf{h}_x + U_{x,\mu} \mathbf{h}_{x+\mu} U_{x,\mu}^{-1}) + 4(N-1) \mathbf{h}_x U_{x,\mu} \mathbf{h}_{x+\mu} U_{x,\mu}^{-1}, \quad (4a)$$

$$\hat{L}_{x,\mu} = \left(\sqrt{L_{x,\mu} L_{x,\mu}^\dagger} \right)^{-1} L_{x,\mu}, \quad (4b)$$

$$X_{x,\mu} = \hat{L}_{x,\mu}^\dagger (\det(\hat{L}_{x,\mu}))^{1/N} g_x^{-1}, \quad (4c)$$

$$V_{x,\mu} = g_x \hat{L}_{x,\mu} U_{x,\mu} \left(\det(\hat{L}_{x,\mu}) \right)^{-1/N}. \quad (4d)$$

変数分解で得られた新しい変数で書かれた理論が YM 理論と等価な理論であるためには、カラー場導入で拡大したゲージ対称性をもともとの YM のゲージ対称性に一致させるため、reduction 条件を導入する。reduction 条件は、与えられたリンク変数 $\{U_{x,\mu}\}$ に対して reduction 関数 $F_{\text{reduction}}[\mathbf{h}_x; U_{x,\mu}]$ 最小化する $\{\mathbf{h}_x\}$ として定める。ここでは、 $SU(2)$ YM 理論で CFNS 分解で導入された reduction 関数を $SU(N)$ に拡張したものを導入する。

$$F_{\text{reduction}}[\mathbf{h}_x; U_{x,\mu}] = \sum_{x,\mu,k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left((D_\mu^\epsilon [U_{x,\mu}] \mathbf{h}_x)^\dagger D_\mu^\epsilon [U_{x,\mu}] \mathbf{h}_x \right). \quad (5)$$

ここで、変換数はゲージ変換 Ω に対して \mathbf{h}_x はゲージ変換に対して $\mathbf{h}_x \rightarrow \mathbf{h}'_x = \Omega_x \mathbf{h}_x \Omega_x^\dagger$ と変換し、 $F_{\text{reduction}}$ はゲージ不変である。

得られた新しい変数 $V_{x,\mu}$ の物理的な意味は、ノンアーベリアンストークスの定理 (NAST) との対応を見ると明らかになる。基本表現のクォークに対するウイルソンループは、minimal option¹ のリンク変数で得られたあたらしい変数を用いて書けることが示される [10][12]。

$$W_c[U] = \prod_{<x,x+\mu> \in C} U_{x,\mu} \cong \int d\mu(\xi_x) \prod_{<x,x+\mu> \in C} \langle \Lambda, \xi_x | V_{x,\mu} | \xi_{x+\mu}, \Lambda \rangle =: W_C[V]. \quad (6)$$

¹Wilson loop は使用するフェルミオンの表現に依存しており、基本表現のファルミオンに対応する表現は、minimal option であり、 $SU(2)$ の類推で従来考えられてきた最大可換ゲージにおけるアーベリアン射影ではないことが示される。

3 磁気的モノポール

ノンアーベリアンストークスの定理を用いると、ウイルソンループを境界とする面 $\Sigma : C = \partial\Sigma$ を用いて、ウイルソンループは対のように書きなおせる。[10]

$$W_C[\mathcal{A}] = \int d\mu_\Sigma(\xi) \exp \left(\int_{S: C=\partial\Sigma} dS^{\mu\nu} F_{\mu\nu}[\mathcal{V}] \right), \quad (7)$$

ここで、 $\mathcal{V}_\mu(x)$ は次で与えられ、リンク変数 $V_{x,\mu} = \exp(-ig\epsilon\mathcal{V}_\mu(x))$ の連続極限と一致する。

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\mu(x) &= \mathcal{A}_\mu(x) - \frac{2(N-1)}{N} [\mathbf{h}(x), [\mathbf{h}(x), \mathcal{A}_\mu(x)]] \\ &\quad + ig^{-1} \frac{2(N-1)}{N} [\mathbf{h}(x), \partial_\mu \mathbf{h}(x)]. \end{aligned} \quad (8)$$

さらに Hodge 分解を適用するとウイルソンループは、 $\mathcal{V}_\mu(x)$ で定義される電磁的カレント j と磁気的カレント k を用いて書きなおすことができる。

$$\begin{aligned} W_C[\mathcal{A}] &= \int d\mu_\Sigma(\xi) \\ &\times \exp \left[ig \sqrt{\frac{N-1}{2N}} (k, \Xi_\Sigma) + ig \sqrt{\frac{N-1}{2N}} (j, N_\Sigma) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 k, j は 1-form の保存カレント $\delta k = 0 = \delta j$ で次で与えられる。

$$k := \delta^* F = {}^* dF, \quad \Xi_\Sigma := \delta^* \Theta_\Sigma \Delta^{-1}, \quad (10a)$$

$$j := \delta F, \quad N_\Sigma := \delta \Theta_\Sigma \Delta^{-1}, \quad (10b)$$

ここで、 $\Delta := d\delta + \delta d$ はラプラス演算子、 $\Theta_\Sigma^{\mu\nu} := \int_\Sigma d^2 S^{\mu\nu}(x(\sigma)) \delta^D(x - x(\sigma))$ は面要素である。したがって、格子上の磁気的モノポールは新しい変数を用いて次で与えられる。

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu}^8 &= \\ &- \arg \text{Tr} \left[\left(\frac{1}{3} \mathbf{1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{h}_x \right) V_{x,\mu} V_{x+\mu,\nu} V_{x+\nu,\mu}^\dagger V_{x,\nu}^\dagger \right], \end{aligned} \quad (11a)$$

$$k_{x,\mu} := \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \Theta_{\alpha\beta}^8. \quad (11b)$$

定義より、 k_μ はゲージ不変な量であり、tability 部分群 $\tilde{H} = U(2)$ の固有状態 $V_{x,\mu}$ から導かれるノンアーベリアンモノポールである。

したがって、格子上のアーベリアンドミナンス、磁気的モノポールドミナンスは次で与えられる。

$$\langle W_C[U] \rangle \cong \langle W_C[V] \rangle \cong \langle W_M[k] \rangle \quad (12)$$

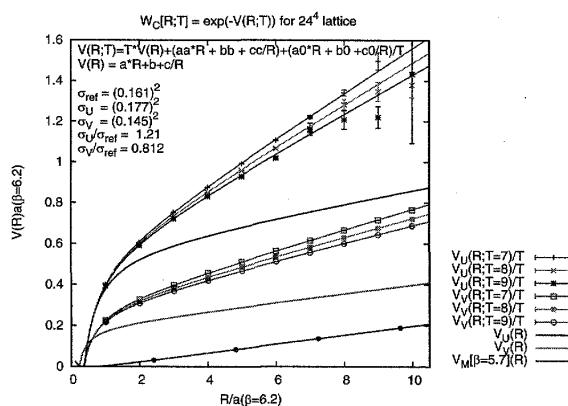


図 1: ウィルソンループ期待値とクォーク間ポテンシャルの $V(R, T)$ と $V(R)$: 上から順にオリジナル YM 場 $\langle W_{(R,T)}[U_{x,\mu}] \rangle$, restricted $U(2)$ -part $\langle W_{(R,T)}[V_{x,\mu}] \rangle$, 磁気的モノポールパート $\langle W_{(R,T)}[k_{x,\mu}] \rangle$.

4 シミュレーション

図 1 は、ウィルソンループの期待値 $\langle W_C[U] \rangle$ 、 $\langle W_C[V] \rangle$ 、 $\langle W_M[k] \rangle$ と、それこれから計算されるクォーク・クォーク間ポテンシャルを示している。 (R, T) の長方形のウィルソンループから得られる期待値を次の 2 変数関数形で string tension σ を求めた。

$$\langle W_{(R,T)}[V] \rangle = \exp(-V(R, T)), \quad (13)$$

$$V(R, T) := T \times V(R) + (a_1 R + b_1 + c_1/R)$$

$$+ (a_2 R + b_2 + c_2/R)/T, \quad (14)$$

$$V(R) = \sigma R + b + c/R. \quad (15)$$

$\langle W_C[U] \rangle$ に比して、 $\langle W_C[V] \rangle$ から 85-90% の restricted $U(2)$ ドミナンス (V ドミナンス)、 $\langle W_M[k] \rangle$ から 75% の $U(2)$ 磁気的モノポールドミナンスを示している。基本表現のクォークの閉じ込めは、minimail option で構成したノンアーベリアン磁気的モノポールが支配的は役割を果たしていることを示す。

閉じ込め相・非閉じ込め層の相転移と磁気的モノポールの関係を理解することは、双対超電導像における閉じ込めの理解において重要である。我々の方法によって、ゲージ不变な (ゲージに依存しない) 磁気的モノポールを定義し、その配位を抽出し、クォーク間ポテンシャルのすることが可能となった。格子上の磁気的モノポールは、量子化されたチャージを持ち幾何的な対応物として

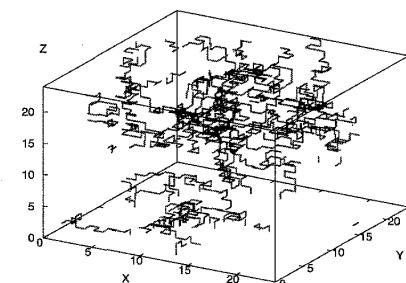
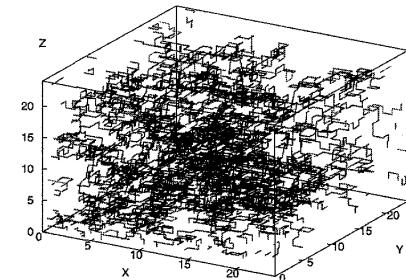


図 2: 磁気的モノポールの配位: 4 次元ユークリッド空間を 3 次元空間に射影した。図は、ある配位の連結した最大クラスターのモノポールを示す。(上図) 24^4 格子 $\beta = 6.0$ (下図) $24^3 \times 8$ 格子 $\beta = 6.0$

記述され、代数幾何の手法を用いて解析することが可能となる。図 2 は、抽出したモノポールの配位の可視化の例を示す。 $\beta = 6.0$ における、 24^4 格子 (上段) と $24^3 \times 8$ 格子 (下段) のモノポールループ²の最大クラスター (モノポールループの連結成分) を示す。代数的幾何の手法用いて、閉じ込め非閉じ込めの相転移と磁気的モノポールループの幾何的な指標 (モノポール密度、ループの長さ、T 軸方向のまきつき数) との対応を調べる研究を現在進めている。

5 まとめ

$SU(2)$ の CFN 分解の方法を $SU(N)$ に拡張した格子上の非線形変換を方法用いて、双対超電導像におけるクォークの閉じ込め機構に中心的な役割を示すモードを YM 場からゲージに依存することなく抽出し、クォーク閉じ込めの弦張力を再現することを示した。ノンアーベ

² カレント保存則から、モノポールカレントはループをなすことが示される。

リアンストークスの定理との対応から、 $SU(3)$ においては、minomial option によって抽出した restricted $U(3)$ のモードが寄与することを実際にシミュレーションによって示した。ゲージ不变なモノポールの配位を直接シミュレーションの配位から抽出化のあるため、閉じ込め・非閉じ込めの有限温度転移の対し適用し、モノポールの果たす役割の解析できる。

謝辞

本研究は KEK 大型シミュレーション研究 No.09-15 (FY2009) 及び No.09/10-19 (FY2009-2010) のサポートを受けた。また、科学研究費基盤研究 (C) 21540256 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] A. Shibata, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara, S. Ito, CHIBA-EP-165, KEK-PREPRINT-2007-19, arXiv:0706.2529 [hep-lat]. Published in Phys.Lett.B653:101-108,2007
- [2] S. Ito, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, A. Shibata , T. Shinohara CHIBA-EP-158,
- [3] Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata , Toru Shinohara, Takeharu Murakami, Seikou Kato, Shoichi Ito, CHIBA-EP-168, KEK-2008-1, arXiv:0803.2451 [hep-lat]
- [4] A. Shibata, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara, S. Ito, CHIBA-EP-166, KEK-PREPRINT-2007-50, POS(LATTICE-2007)331,arXiv:0710.3221 [hep-lat];
- [5] Kei-Ichi Kondo, Toru Shinohara, Takeharu Murakami, Phys.Lett.B645:67-74(2007), CHIBA-EP-167, arXiv:0803.0176 [hep-th] KEK-PREPRINT-2006-2,hep-lat/0604016. .
- [6] Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata, Toru Shinohara, Seikou Kato, CHIBA-EP-185, KEK-PREPRINT-2010-22, arXiv:1007.2696 [hep-th]
- [7] Akihiro Shibata, Kei-Ichi Kondo, Toru Shinohara, (Chiba U.) Phys.Lett.B691:91-98,2010., KEK-PREPRINT-2009-32, CHIBA-EP-181, arXiv:0911.5294 [hep-lat]
- [8] Akihiro Shibata, Kei-Ichi Kondo, Seikou Kato, Shoichi Ito, Toru Shinohara, Nobuyui Fukui, PoS LAT2009:232,2009, KEK-PREPRINT-2009-28, CHIBA-EP-180, Nov 2009. 7pp.
- [9] S. Kato, K.-I. Kondo, A. Shibata, T. Shinohara, S. Ito, PoS LAT2009:228,2009, CHIBA-EP-179, KEK-PREPRINT-2009-27, arXiv:0911.0755 [hep-lat]
- [10] K.-I. Kondo, Phys.Rev.D77 085029 (2008)
- [11] Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata, CHIBA-EP-170, KEK-PREPRINT-2007-73, arXiv:0801.4203 [hep-th]
- [12] K.-I. Kondo and A. Shibata, , CHIBA-EP-170, KEK-PREPRINT-2007-73, arXiv:0801.4203[hep-th]
- [13] A. Shibata, K.-I. Kondo, S. Kato,T. Shinohara, Talk given at the 28th International Symposium on Lattice Field Theory, Lattice 2010, June 14 -19 at the Tanka Village Resort, Villasimius, Sardinia, Italy.