



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

CASCADAS DE ENERGÍA DE CAMPOS ESCALARES AUTOINTERACTUANTES SOBRE UN AGUJERO DE GUSANO ASINTÓTICAMENTE ANTI-DE SITTER

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción para optar al grado académico de Magíster en Ciencias con mención en Física

POR

CONSTANZA DEL PILAR QUIJADA BARRERA

Director de Tesis : Dr. Julio Oliva

Comisión : Dr. Guillermo Rubilar
Dr. Fabrizio Canfora

Marzo, 2019
Concepción, Chile

A mi familia.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi familia, por su apoyo y cariño incondicional, por la paciencia y la comprensión. Gracias por escucharme y ayudar, cada uno a su manera, en todo lo que podían. Sin ustedes este proceso hubiese sido mucho más difícil.

Quiero agradecer también a mis compañeros de carrera y postgrado, quienes siempre están dispuestos a ayudar y a apoyar cuando se requiere. En especial a Daniela Narbona, con quien tuve la oportunidad de trabajar, por su buena disposición y preocupación. También quiero agradecer a mis amigos de la sala de postgrado, Christopher León y José Barrientos, por el aguante, la paciencia, las risas y por su apoyo durante estos dos últimos años; a pesar de la distancia han sabido estar presentes. Y cómo no nombrar a Emilio Ojeda, con quien compartí productivas conversaciones de física y sobre el futuro científico.

También quiero agradecer a mis profesores, todos ellos han aportado a mi formación científica y personal. Haré mención especial a quienes han marcado de alguna forma mi carrera: Dr. Joaquín Díaz de Valdés, con quien tuve mis primeras clases de física en la universidad, en las que entendí a qué se referían con la palabra rigurosidad. Al Dr. Guillermo Rubilar, a quien le debo gran parte de mi formación científica; no es fácil, pero el aprendizaje es inmenso. Y por supuesto a mi tutor, Dr. Julio Oliva, a quien agradezco la confianza, la paciencia y la dedicación; las horas de trabajo rinden sus frutos. También quiero mencionar al Dr. Fabrizio Canfora y al Dr. Andrés Anabalón por todos sus aportes al desarrollo de esta tesis y otras investigaciones.

Quiero agradecer a Octavio, quien ha sido un gran apoyo en este último año y sobre todo en este período final, por su compañía, cariño, paciencia y confianza.

Finalmente, quiero agradecer a CONICYT por el apoyo económico entregado durante estos dos años, mediante CONICYT-PFCHA/Magíster Nacional/2017-22171243.

Tabla de contenido

Agradecimientos	iii
Índice de Figuras	viii
Resumen	viii
Abstract	ix
1. Introducción	1
2. Teorías Gravitacionales	3
2.1. Relatividad General	3
2.2. Teoría de Lovelock	4
2.2.1. Einstein-Gauss-Bonnet	5
3. Evolución no-lineal de un campo escalar sobre el espacio plano encerrado en cavidades	7
3.1. Ecuación de onda no-lineal de un campo escalar	7
3.1.1. Evolución en una membrana circular	8
3.1.2. Evolución en una esfera	12
4. Estabilidad de Anti de-Sitter	15
4.1. Espacio tiempo Anti de-Sitter	15
4.2. Modos normales en AdS_4	17
4.3. Campo escalar autointeractuante	19
4.3.1. Método perturbativo estándar	20
4.3.2. Formalismo de dos tiempos	21
4.4. (In)-estabilidades en AdS_4	24
4.4.1. Perturbaciones no-lineales	25
4.4.2. Formalismo de dos tiempos	28
4.5. Retorno de energía en AdS global	30

4.5.1. Soluciones dominadas por el modo fundamental	30
4.6. Soluciones dominadas por el primer modo excitado	32
5. Cascadas de energía en un Agujero de Gusano	35
5.1. Agujero de gusano asintóticamente AdS	35
5.2. Modos normales en el agujero de gusano	36
5.3. Campo escalar autointeractuante	39
5.3.1. Método perturbativo estándar	39
5.3.2. Formalismo de dos tiempos	41
5.4. Retornos de Energía	45
5.4.1. Soluciones dominadas por el modo fundamental	45
5.4.2. Soluciones dominadas por el primer modo excitado	47
6. Conclusiones y comentarios	50
A. Problema de Sturm-Liouville	53
A.1. Espacio AdS	53
A.2. Agujero de gusano	54
B. Método de Poincaré-Lindstedt en el péndulo no lineal	56
B.1. Péndulo simple	56
B.1.1. Esquema perturbativo	57
Bibliografía	61

Índice de figuras

3.1. Función de Bessel de orden cero. Los ceros de esta función no son equidistantes. Fuente: elaborada por autora.	12
3.2. (a) Función $\Pi^2(t, 0)$ para soluciones con condiciones iniciales (3.1.44). (b) Curvas de (a) escaladas de la forma $\varepsilon^{-2}\Pi^2(\varepsilon^2t, 0)$. Fuente: [4].	14
4.1. Evolución del sistema para dos modos encendidos inicialmente con la misma energía (panel izquierdo) y para tres modos encendidos inicialmente con la misma energía (panel derecho) con $j_{\max} = 20$. Fuente: elaborada por autora.	23
4.2. (a) $\Pi^2(t, 0)$ para las condiciones iniciales (4.4.12). (b) Las curvas de (a) después del escalamiento $\varepsilon^{-2}\Pi^2(\varepsilon^2t, 0)$. Fuente: [11].	27
4.3. Evolución de la energía del sistema obtenida de forma numérica (líneas sólidas) y con el formalismo de dos tiempos (líneas punteadas) para el caso de dos modos inicialmente encendidos con la misma energía. Fuente: [12].	30
4.4. Solución analítica de los retornos de energía. Vemos que existen retornos de energía cuando $k = 4, 5$ y 13 . Es posible ver que existen retornos muy precisos para $k = 9$ y 18 , pero éstos no son exactos. Fuente: [15].	32
4.5. Solución analítica de los retornos de energía para condiciones iniciales dominadas por el primer modo excitado. Vemos que existen retornos de energía cuando $k = 3, 6$ y 14 . Es posible ver que existen retornos muy precisos para $k = 17$ y 20 , pero estos no son exactos. Fuente: [15].	34
5.1. Evolución de la energía por modo para diferentes condiciones iniciales con los dos primeros modos de oscilación encendidos. El panel superior izquierdo corresponde a $[E_0(0), E_1(0)] = [3/4, 1/4]$, el panel superior derecho a $[E_0(0), E_1(0)] = [3/5, 2/5]$, el panel inferior izquierdo a $[E_0(0), E_1(0)] = [1/2, 1/2]$ y el panel inferior derecho a $[E_0(0), E_1(0)] = [1/4, 3/4]$. Fuente: elaborada por autora.	44

5.2.	Evolución de la energía como función del número de modo para diferentes condiciones iniciales con los dos primeros modos de oscilación encendidos. El panel superior izquierdo $[E_0(0), E_1(0)] = [3/4, 1/4]$, el panel derecho a $[E_0(0), E_1(0)] = [1/2, 1/2]$. Vemos que para tiempos superiores la energía por modo es exponencialmente suprimida, es decir, $E_j \sim e^{-\beta j}$, con β una constante. Fuente: elaborada por autora.	44
5.3.	Evolución de la energía en función del tiempo y del número de modo para tres (panel superior) y cuatro (panel inferior) modos encendidos inicialmente con la misma energía. Fuente: elaborada por autora.	45
5.4.	Solución analítica de los retornos de energía para condiciones iniciales dominadas por el modo fundamental. Dado a que los modos graficados poseen una amplitud nula inicialmente, se producen retornos cuando los puntos intersecan el eje horizontal. Fuente: elaborada por autora.	47
5.5.	Solución analítica de los retornos de energía para condiciones iniciales dominadas por el primer modo excitado. Vemos que existen retornos de energía cuando $n = 15$ y 16 . Es posible ver que existen retornos muy precisos para $n = 8, 23$ y 39 . Cabe notar que para $n = 31$ se visualiza un retorno exacto, pero éste no es real ya que el valor de $ q_3 ^2$ es del orden de 10^{-7} , pero no es exactamente cero. Fuente: elaborada por autora.	49

Resumen

En el siguiente trabajo se estudia la dinámica no-lineal de un campo escalar de prueba sobre la geometría de un agujero de gusano asintóticamente AdS, el que es solución a la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet con un único vacío. Mostramos que a nivel lineal es posible obtener un espectro de frecuencias equiespaciado, introduciendo un acoplamiento no-minimal entre el campo escalar y el escalar de Ricci e imponiendo condiciones de borde reflectantes en ambos infinitos. La presencia de este tipo de espectro permite obtener una dinámica rica al considerar no-linealidades en el sistema. Utilizando métodos perturbativos estudiamos la evolución del campo hasta tiempos de orden ϵ^{-2} (donde ϵ caracteriza la amplitud inicial de la perturbación), observando la aparición de cascadas de energía entre los modos con un patrón repetitivo. Esto nos lleva a explorar los retornos de energía, concluyendo que en general éstos no son exactos, pero son bastante precisos.

Abstract

In the following work we study the non-linear dynamics of a scalar probe on an asymptotically AdS wormhole geometry, which is a solution in the Einstein-Gauss-Bonnet theory with a single vacuum. We show that at a linear level, it is possible to obtain an equispaced spectrum by introducing a non-minimal coupling between the scalar probe and the Ricci scalar and by imposing reflective boundary conditions at both infinities. The presence of this type of spectrum leads to a rich dynamics when one considers non-linearities in the system. Using a perturbative approach we study the evolution of the scalar probe up to time scales of order ϵ^{-2} (where ϵ characterizes the amplitude of the initial perturbation), we observe direct and inverse energy cascades between modes with a repetitive pattern. This motivates us to explore the energy returns. We find evidence that near exact returns appear in this system.

Capítulo 1

Introducción

Durante las últimas décadas los espaciotiempos asintóticamente Anti-de Sitter (AAdS) han adquirido gran relevancia dentro de la física teórica debido a la correspondencia AdS/CFT, que consiste en la equivalencia entre la teoría de cuerdas en un espaciotiempo asintóticamente AdS y una teoría de campos conformes (CFT) definida en el borde de este espaciotiempo [1]. Esta dualidad ha concentrado los estudios en el espacio anti-de Sitter, generándose numerosas investigaciones acerca de la estabilidad de dicho espaciotiempo cuando se considera un campo escalar sobre su geometría (para un resumen ver [2]). Los sistemas de ecuaciones que resultaron en este problema son no-lineales para los campos, y a pesar de su dificultad, fue posible observar fenómenos dinámicos ricos y complejos que surgen debido al confinamiento de ondas no lineales en el espacio y a la particularidad de que el espectro de frecuencias linealizado es equiespaciado. Muchos de los aspectos de los fenómenos observados en este problema son capturados al considerar el espaciotiempo fijo y una autointeracción cuártica del campo escalar [3].

La fenomenología observada en AdS también aparece en sistemas no-lineales con diferente naturaleza física, tal como en el caso de un campo escalar confinado en una cavidad esférica en 3+1 [4], sistemas que describen condensados de Bose-Einstein [5], así como la dinámica conforme en el Universo de Einstein [6]. En este contexto fue encontrado un mecanismo para clasificar aquellos espaciotiempos en los que un campo escalar de prueba acoplado minimalmente puede ser resuelto exactamente como un problema de Schrödinger efectivo, iniciado en [7].

En la referencia [8] se encontró una solución de agujero de gusano para la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet con constante cosmológica, cuando la teoría admite un único vacío en AdS. Fue estudiada la propagación de un campo escalar sobre dicha geometría incluyendo un término de acomplamiento no-minimal en la acción, obteniendo el espectro de frecuencias

[9]. Dicho espectro resulta ser equiespaciado al fijar algunas constantes e imponer condiciones de borde reflectantes.

El objetivo de esta investigación es explorar perturbativamente diferentes aspectos de la dinámica no-lineal de un campo escalar de prueba autointeractuante sobre la geometría de este agujero de gusano.

Los capítulos de esta tesis están organizados de la siguiente forma: En el capítulo II revisamos la Teoría de Relatividad General y su extensión a mayores dimensiones, haciendo énfasis en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet. En el capítulo III estudiamos la evolución de un campo escalar autointeractuante encerrado en una cavidad esférica, problema que es muy instructivo para comprender el rol de los espectros equiespaciados en la evolución no-lineal. En el capítulo IV haremos una revisión de la estabilidad en AdS, obteniendo primero el espectro de frecuencias linealizado, para posteriormente resolver perturbativamente el sistema del campo escalar autointeractuante y revisar los resultados de la estabilidad perturbativa de dicho espaciotiempo considerando *backreaction*. En el capítulo V estudiaremos la solución de agujero de gusano y obtendremos su espectro linealizado. Posteriormente consideraremos el campo escalar con una autointeracción no-lineal sobre la geometría de este espaciotiempo y analizaremos perturbativamente su evolución. El capítulo VI está dedicado a comentarios y conclusiones.

Capítulo 2

Teorías Gravitacionales

2.1. Relatividad General

La Teoría de Relatividad General fue formulada por Albert Einstein en el año 1915. En ella se generaliza la teoría de relatividad especial y se describe la gravedad como una propiedad geométrica del espaciotiempo. De acuerdo a esta teoría la curvatura del espacio depende de la materia contenida y las trayectorias de las partículas dependen de dicha curvatura.

Relatividad General es una teoría (clásica) de campos donde el campo dinámico es la métrica $(g_{\mu\nu})$ ¹, tensor con el que se describe la geometría del espaciotiempo. La acción para la teoría de Relatividad General, también conocida como acción de Einstein-Hilbert, considerando constante cosmológica Λ , está dada por²

$$S = \frac{1}{16\pi G_4} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) d^4x + S_{\text{materia}} , \quad (2.1.1)$$

donde \mathcal{M} es una variedad pseudo-riemanniana 4-dimensional, g el determinante de la métrica, G_4 la constante de gravitación universal en 4 dimensiones, R es el escalar de Ricci y S_{materia} es la acción para la distribución de materia presente en la teoría. Variando esta acción respecto a la métrica obtenemos las ecuaciones de campo de Einstein, dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_4 T_{\mu\nu} , \quad (2.1.2)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci y $T_{\mu\nu}$ el tensor energía-momentum. Las soluciones a estas ecuaciones de campo corresponden a diferentes configuraciones del espaciotiempo debido a la presencia de materia (información contenida en el tensor de energía-momentum).

¹La signatura utilizada en este trabajo es $(-, +, +, \dots, +)$

²Usando las convenciones $c = 1$ y $\hbar = 1$.

2.2. Teoría de Lovelock

La teoría de gravedad de Lovelock es una generalización a la teoría de Relatividad General formulada por David Lovelock en 1971 [10]. Esta teoría considera la generalización al lagrangiano de Einstein-Hilbert en dimensión arbitraria considerando potencias superiores en la curvatura de manera tal que se obtienen ecuaciones de campo de segundo orden.

La acción de Lovelock en un espaciotiempo de dimensión D , considerando la presencia de materia, es dada por

$$S = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \sqrt{-g} \sum_{p=0}^{[D/2]} \alpha_{(p)} \mathcal{L}_{(p)} + S_{materia} , \quad (2.2.1)$$

donde

$$\mathcal{L}_p := \frac{1}{2^p} \delta_{\rho_1 \dots \rho_p \sigma_1 \dots \sigma_p}^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_p} R_{\mu_1 \nu_1}^{\rho_1 \sigma_1} \dots R_{\mu_p \nu_p}^{\rho_p \sigma_p} , \quad (2.2.2)$$

con G_D la constante de gravitación universal en D dimensiones y $\delta_{\rho_1 \dots \rho_p \sigma_1 \dots \sigma_p}^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_p}$ la delta de Kronecker generalizada, definida como

$$\delta_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} := \begin{vmatrix} \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} & \dots & \delta_{\beta_n}^{\alpha_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\beta_1}^{\alpha_n} & \dots & \delta_{\beta_n}^{\alpha_n} \end{vmatrix} . \quad (2.2.3)$$

La constante $\alpha_{(0)}$ corresponde a la constante cosmológica, mientras que $\alpha_{(p)}$ para $p \geq 2$ representan correcciones ultravioletas a la teoría de Einstein. En general, la dimensión de $\alpha_{(p)}$ es (longitud) $^{2(p-1)}$.

Las primeras densidades lagrangianas de Lovelock son

$$\mathcal{L}_{(0)} = 1 , \quad (2.2.4a)$$

$$\mathcal{L}_{(1)} = R , \quad (2.2.4b)$$

$$\mathcal{L}_{(2)} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} , \quad (2.2.4c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(3)} = & R^3 - 12RR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + 16R_{\mu\nu}R^\mu{}_\rho R^{\nu\rho} + 24R_{\mu\nu}R_{\rho\sigma}R^{\mu\rho\nu\sigma} + 3RR_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \\ & - 24R_{\mu\nu}R^\mu{}_{\rho\sigma\kappa}R^{\nu\rho\sigma\kappa} + 4R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\eta\zeta}R^{\rho\sigma}{}_{\eta\zeta} - 8R_{\mu\rho\nu\sigma}R^\mu{}_{\eta}{}^\nu{}_{\zeta}R^{\rho\eta\sigma\zeta} . \end{aligned} \quad (2.2.4d)$$

Vemos que el término con $p = 0$ corresponde a la constante cosmológica y con $p = 1$ a la densidad lagrangiana de Einstein-Hilbert. De esta forma es posible obtener la teoría de Relatividad General como un caso particular de la teoría de Lovelock.

Las ecuaciones de campo obtenidas de la acción (2.2.1) están dadas por

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = 8\pi G_D T_{\mu\nu} , \quad (2.2.5)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momentum para los campos de materia y

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} := \sum_{p=0}^{[D/2]} \alpha_{(p)} G_{\mu\nu}^{(p)} , \quad (2.2.6)$$

con

$$G_{\nu}^{\mu (p)} := -\frac{1}{2^{p+1}} \delta_{\nu\rho_1 \dots \rho_p \sigma_1 \dots \sigma_p}^{\mu\eta_1 \dots \eta_p \zeta_1 \dots \zeta_p} R_{\eta_1 \zeta_1}^{\rho_1 \sigma_1} \dots R_{\eta_p \zeta_p}^{\rho_p \sigma_p} . \quad (2.2.7)$$

Los primeros tensores de Lovelock son

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} , \quad (2.2.8a)$$

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} , \quad (2.2.8b)$$

$$G_{\mu\nu}^{(2)} = 2 (R R_{\mu\nu} - 2 R_{\mu\rho} R_{\nu}^{\rho} - 2 R^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\mu}^{\rho\sigma\gamma} R_{\nu\rho\sigma\gamma}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}^{(2)} , \quad (2.2.8c)$$

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(3)} = & 3 (R^2 R_{\mu\nu} - 4 R R_{\rho\mu} R_{\nu}^{\rho} - 4 R^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma} R_{\mu\nu} + 8 R^{\rho\sigma} R_{\rho\mu} R_{\sigma\nu} - 4 R R^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} \\ & + 8 R^{\rho\kappa} R_{\kappa}^{\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} - 16 R^{\rho\sigma} R_{(\mu} R_{\kappa\sigma\rho|\nu)} + 2 R R^{\rho\sigma\kappa}_{\mu} R_{\rho\sigma\kappa\nu} + R_{\mu\nu} R^{\rho\sigma\kappa\eta} R_{\rho\sigma\kappa\eta} \\ & - 8 R^{\rho}_{(\mu} R^{\sigma\kappa\eta}_{|\rho|} R_{|\sigma\kappa\eta|\nu)} - 4 R^{\rho\sigma} R^{\kappa\eta}_{\rho\mu} R_{\kappa\eta\sigma\nu} + 8 R_{\rho\sigma} R^{\rho\kappa\sigma\eta} R_{\kappa\mu\eta\nu} - 8 R_{\rho\sigma} R^{\rho\kappa\eta}_{\mu} R^{\sigma}_{\kappa\eta\nu} \\ & + 4 R^{\rho\sigma\kappa\eta} R_{\rho\sigma\zeta\mu} R_{\kappa\eta}^{\zeta}_{\nu} - 8 R^{\rho\kappa\sigma\eta} R^{\zeta}_{\rho\sigma\mu} R_{\zeta\kappa\eta\nu} - 4 R^{\rho\sigma\kappa}_{\eta} R_{\rho\sigma\kappa\zeta} R^{\eta}_{\mu} R^{\zeta}_{\nu}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}^{(3)} . \end{aligned} \quad (2.2.8d)$$

2.2.1. Einstein-Gauss-Bonnet

La teoría de Einstein-Gauss-Bonnet (EGB) está definida por una modificación a la acción de Einstein-Hilbert, que incluye una suma de términos cuadráticos en la curvatura dentro de la acción. Dicha suma se denomina término de Gauss-Bonnet y es proporcional a la densidad lagrangiana de Lovelock con $p = 2$ dada en (2.2.4c). El término de Gauss-Bonnet se reduce a un término de superficie en cuatro dimensiones, por lo cual dicho término contribuirá de manera no-trivial a las ecuaciones de movimiento sólo para dimensiones superiores a cuatro.

De esta forma, la acción para esta teoría en el vacío está dada por

$$S = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + \alpha (R^2 - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma})) , \quad (2.2.9)$$

donde hemos utilizado $\alpha_{(0)} := -2\Lambda$, $\alpha_{(1)} := 1$, $\alpha_{(2)} := \alpha$.

La ecuación para el campo gravitacional está dada por

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda + \alpha H_{\mu\nu} = 0 , \quad (2.2.10)$$

donde

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R , \quad (2.2.11)$$

$$H_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho}) \\ + 2(RR_{\mu\nu} - 2R_{\mu\rho}R_{\nu}^{\rho} - 2R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\delta}R_{\nu}^{\rho\sigma\delta}) . \quad (2.2.12)$$

Cabe destacar que, como mencionamos al comienzo de esta sección, las ecuaciones de campo obtenidas son de segundo orden para la métrica.

Capítulo 3

Evolución no-lineal de un campo escalar sobre el espacio plano encerrado en cavidades

En este capítulo estudiaremos la evolución de un campo escalar esféricamente simétrico y sin masa sobre un espacio plano en $d + 1$ dimensiones, encerrado en una cavidad de la forma $\mathbb{R} \times B^d$ de radio R^1 . Este modelo permite entender cómo la no-linealidad afecta a la evolución del campo escalar y el rol de los espectros equiespaciados en dicho fenómeno. En particular, revisaremos el caso de una membrana circular y de una cavidad esférica, considerando condiciones de borde reflectantes.

3.1. Ecuación de onda no-lineal de un campo escalar

La acción para este sistema es de la forma

$$S[\phi; g_{\mu\nu}] = \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right), \quad (3.1.1)$$

de la cual obtenemos la siguiente ecuación de campo

$$\square \phi - \frac{\lambda}{3!} \phi^3 = 0, \quad (3.1.2)$$

con

$$\square \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \phi, \quad (3.1.3)$$

donde g denota al determinante de la métrica.

¹ B^d denota a una bola de d dimensiones.

Considerando la métrica esféricamente simétrica de la forma

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2 , \quad (3.1.4)$$

donde $d\Omega_{d-1}$ denota a la métrica de la $(d-1)$ -esfera, y que el campo ϕ no posee momento angular, la ecuación (3.1.2) toma la forma

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_t (\sqrt{-g} g^{tt} \partial_t) \phi + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_r (\sqrt{-g} g^{rr} \partial_r) \phi - \frac{\lambda}{3!} \phi^3 , \\ &= -\partial_t^2 \phi + \frac{1}{r^{d-1}} \partial_r (r^{d-1} \partial_r) \phi - \frac{\lambda}{3!} \phi^3 , \\ &= -\partial_t^2 \phi + \partial_r^2 \phi + \frac{d-1}{r} \partial_r \phi - \frac{\lambda}{3!} \phi^3 . \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Definimos el operador autoadjunto

$$L^{(d+1)} := -\frac{1}{r^{d-1}} \partial_r (r^{d-1} \partial_r) , \quad (3.1.6)$$

sobre el dominio radial $[0, R]$ cuyos autovalores y autofunciones dependen de la dimensión en que se analice el problema. Así, la ecuación (3.1.5) toma la forma

$$0 = -\partial_t^2 \phi - L^{(d+1)} \phi - \frac{\lambda}{3!} \phi^3 . \quad (3.1.7)$$

Para resolver la ecuación (3.1.5) proponemos la siguiente solución perturbativa

$$\phi(t, r) = \epsilon \phi_1(t, r) + \epsilon^3 \phi_3(t, r) + \mathcal{O}(\epsilon^5) . \quad (3.1.8)$$

Colectando orden a orden en ϵ obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\partial_t^2 \phi_1 + L^{(d+1)} \phi_1 = 0 , \quad (3.1.9)$$

$$\partial_t^2 \phi_3 + L^{(d+1)} \phi_3 = S , \quad (3.1.10)$$

con

$$S := -\frac{\lambda}{6} \phi_1^3 . \quad (3.1.11)$$

3.1.1. Evolución en una membrana circular

Cuando $d = 2$ el sistema corresponde a una onda sobre una membrana circular de radio R cuyo extremo está fijo. En este caso el operador (3.1.6) toma la forma $L^{(3)} = -\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r)$ y la ecuación para ϕ_1 (3.1.9) es

$$-\partial_t^2 \phi_1 + \partial_r^2 \phi_1 + \frac{1}{r} \partial_r \phi_1 = 0 . \quad (3.1.12)$$

Utilizando el método de separación de variables proponemos una solución de la forma $\phi_1(t, r) = T(t)F(r)$ e introducimos la constante de separación ω^2 , obteniendo

$$0 = \ddot{T} + \omega^2 T, \quad (3.1.13)$$

$$0 = F'' + \frac{1}{r}F' + \omega^2 F = -L^{(3)}F + \omega^2 F, \quad (3.1.14)$$

donde hemos denotado con $\dot{(\)}$ la derivada respecto a la coordenada t y $(\)'$ a la derivada respecto a la coordenada r . La ecuación (3.1.13) corresponde es una ecuación de oscilador armónico cuya solución es de la forma

$$T(t) = A \cos(\omega t + \beta), \quad (3.1.15)$$

mientras que la ecuación (3.1.14) es la ecuación de Bessel cuya solución, imponiendo regularidad en $r = 0$, es la función de Bessel de primera especie y orden cero, la que denotaremos como $J_0(\omega r)$. Además, imponiendo condiciones de Dirichlet en el borde $r = R$ obtenemos que $\omega = \omega_j = \alpha_{0,j}/R$ donde $\alpha_{0,j}$ es el j -ésimo cero de la función de Bessel J_0 , con $j \in \mathbb{N}$. De aquí vemos que las autofunciones y autovalores del operador $L^{(3)}$ son

$$f_j(r) = B_j J_0\left(\frac{\alpha_{0,j}}{R}r\right), \quad (3.1.16)$$

$$\omega_j = \frac{\alpha_{0,j}}{R}, \quad (3.1.17)$$

donde B_j es una constante de integración.

Por otro lado, considerando la condición inicial $\dot{\phi}(t, r)|_{t=0} = 0$ tenemos que $\beta = \beta_j = 0, \forall j$ en (3.1.15). Así, la solución a la ecuación (3.1.12) toma la forma

$$\phi_1(t, r) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos(\omega_p t) f_p(r). \quad (3.1.18)$$

Para resolver (3.1.10), escribimos ϕ_3 como una superposición de autofunciones del operador $L^{(3)}$, es decir

$$\phi_3(t, r) = \sum_{p=1}^{\infty} C_p(t) f_p(r), \quad (3.1.19)$$

y reemplazamos en (3.1.10), obteniendo

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\ddot{C}_p(t) + C_p(t) L^{(3)} \right) f_p &= -\frac{\lambda}{6} \phi_1^3, \\ \sum_{p=1}^{\infty} \left(\ddot{C}_p(t) + \omega_p^2 C_p(t) \right) f_p &= -\frac{\lambda}{6} \phi_1^3. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Para estudiar la solución ϕ_3 consideraremos como condición inicial el modo fundamental y los dos primeros modos excitados encendidos, es decir

$$\phi(t, r)|_{t=0} = \epsilon [af_1(r) + bf_2(r) + cf_3(r)] , \quad (3.1.21)$$

donde a, b y c son constantes reales. Utilizando esta condición en (3.1.18) obtenemos $A_1 = a, A_2 = b, A_3 = c$ y $A_j = 0, \forall j > 3$. Así

$$\phi_1(t, r) = a \cos(\omega_1 t) f_1(r) + b \cos(\omega_2 t) f_2(r) + c \cos(\omega_3 t) f_3(r) . \quad (3.1.22)$$

Reemplazando en (3.1.20) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\ddot{C}_p + \omega_p^2 C_p \right) f_p &= a^3 \cos^3(\omega_1 t) f_1^3 + b^3 \cos^3(\omega_2 t) f_2^3 + c^3 \cos^3(\omega_3 t) f_3^3 \\ &+ 3a^2 b \cos^2(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) f_1^2 f_2 + 3a^2 c \cos^2(\omega_1 t) \cos(\omega_3 t) f_1^2 f_3 \\ &+ 3b^2 a \cos^2(\omega_2 t) \cos(\omega_1 t) f_2^2 f_1 + 3b^2 c \cos^2(\omega_2 t) \cos(\omega_3 t) f_2^2 f_3 \\ &+ 3c^2 a \cos^2(\omega_3 t) \cos(\omega_1 t) f_3^2 f_1 + 3c^2 b \cos^2(\omega_3 t) \cos(\omega_2 t) f_3^2 f_2 \\ &+ 6abc \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) \cos(\omega_3 t) f_1 f_2 f_3 . \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Proyectamos la ecuación anterior sobre la base de autofunciones del operador $L^{(3)}$, obteniendo el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} \ddot{D}_j + \omega_j^2 D_j &= a^3 \cos^3(\omega_1 t) I_{a^3}(j) + b^3 \cos^3(\omega_2 t) I_{b^3}(j) + c^3 \cos^3(\omega_3 t) I_{c^3} \\ &+ 3a^2 b \cos^2(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) I_{a^2 b}(j) + 3a^2 c \cos^2(\omega_1 t) \cos(\omega_3 t) I_{a^2 c}(j) \\ &+ 3b^2 a \cos^2(\omega_2 t) \cos(\omega_1 t) I_{b^2 a}(j) + 3b^2 c \cos^2(\omega_2 t) \cos(\omega_3 t) I_{b^2 c}(j) \\ &+ 3c^2 a \cos^2(\omega_3 t) \cos(\omega_1 t) I_{c^2 a}(j) + 3c^2 b \cos^2(\omega_3 t) \cos(\omega_2 t) I_{c^2 b}(j) \\ &+ 6abc \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) \cos(\omega_3 t) I_{abc}(j) , \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

donde $D_j = J_1^2(\alpha_{0,j}) C_j / (2R^2)$,

y con

$$\begin{aligned}
I_{a^3}(j) &= \frac{1}{R^2} \int_0^R r f_1^3 f_j dr = \frac{1}{R^2} \int_0^R r J_0^3\left(\alpha_{0,1} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,j} \frac{r}{R}\right) dr, \\
I_{b^3}(j) &= \frac{1}{R^2} \int_0^R r f_2^3 f_j dr = \frac{1}{R^2} \int_0^R r J_0^3\left(\alpha_{0,2} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,j} \frac{r}{R}\right) dr, \\
I_{c^3}(j) &= \frac{1}{R^2} \int_0^R r f_3^3 f_j dr = \frac{1}{R^2} \int_0^R r J_0^3\left(\alpha_{0,3} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,j} \frac{r}{R}\right) dr, \\
I_{a^2b}(j) &= \frac{1}{R^2} \int_0^R r f_1^2 f_2 f_j dr = \frac{1}{R^2} \int_0^R r J_0^2\left(\alpha_{0,1} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,2} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,j} \frac{r}{R}\right) dr, \\
I_{a^2c}(j) &= \frac{1}{R^2} \int_0^R r f_1^2 f_3 f_j dr = \frac{1}{R^2} \int_0^R r J_0^2\left(\alpha_{0,1} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,3} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,j} \frac{r}{R}\right) dr, \\
I_{b^2a}(j) &= \frac{1}{R^2} \int_0^R r f_2^2 f_1 f_j dr = \frac{1}{R^2} \int_0^R r J_0^2\left(\alpha_{0,2} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,1} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,j} \frac{r}{R}\right) dr, \\
I_{b^2c}(j) &= \frac{1}{R^2} \int_0^R r f_2^2 f_3 f_j dr = \frac{1}{R^2} \int_0^R r J_0^2\left(\alpha_{0,2} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,3} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,j} \frac{r}{R}\right) dr, \\
I_{c^2a}(j) &= \frac{1}{R^2} \int_0^R r f_3^2 f_1 f_j dr = \frac{1}{R^2} \int_0^R r J_0^2\left(\alpha_{0,3} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,1} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,j} \frac{r}{R}\right) dr, \\
I_{c^2b}(j) &= \frac{1}{R^2} \int_0^R r f_3^2 f_2 f_j dr = \frac{1}{R^2} \int_0^R r J_0^2\left(\alpha_{0,3} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,2} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,j} \frac{r}{R}\right) dr, \\
I_{abc}(j) &= \frac{1}{R^2} \int_0^R r f_1 f_2 f_3 f_j dr = \frac{1}{R^2} \int_0^R r J_0\left(\alpha_{0,1} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,2} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,3} \frac{r}{R}\right) J_0\left(\alpha_{0,j} \frac{r}{R}\right) dr,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la relación de ortogonalidad de las funciones de Bessel, dada por

$$\int_0^1 x J_0(\alpha_{0,p}x) J_0(\alpha_{0,q}x) dx = \frac{\delta_{p,q}}{2} [J_1(\alpha_{0,q})]^2.$$

Vemos que el lado derecho de la ecuación (3.1.24) contiene términos de la forma coseno cubo. En general, encendiendo modos arbitrarios en $t = 0$ siempre obtendremos términos con la forma coseno cubo multiplicados por integrales que dependen de la parte espacial, de manera que una condición necesaria (pero no suficiente) para que exista resonancia es que alguna de las siguientes relaciones se satisfaga

$$\omega_j = \omega_{j_1} + \omega_{j_2} + \omega_{j_3}, \quad (3.1.25)$$

$$\omega_j = \omega_{j_1} + \omega_{j_2} - \omega_{j_3}, \quad (3.1.26)$$

$$\omega_j = \omega_{j_1} - \omega_{j_2} - \omega_{j_3}, \quad (3.1.27)$$

$$\omega_j = -\omega_{j_1} - \omega_{j_2} - \omega_{j_3}, \quad (3.1.28)$$

donde $\{j_1, j_2, j_3\}$ corresponden a los índices de un trío de modos no nulos en la condición inicial del sistema. Las igualdades (3.1.25) - (3.1.28) se denominan canales de resonancia.

Si consideramos R igual a la unidad, obtenemos que $\omega_j = \alpha_{0,j}$ por lo tanto no tendremos resonancia ya que sumas y restas de ceros de la función de Bessel J_0 , en general, no resultan en otro cero de la misma función.

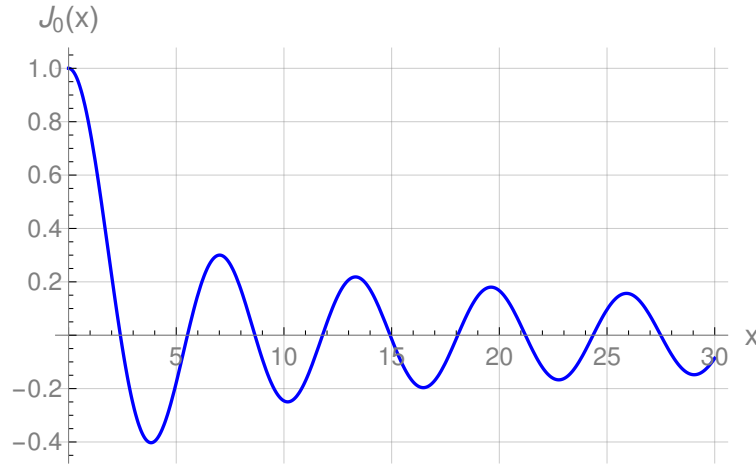


Figura 3.1: Función de Bessel de orden cero. Los ceros de esta función no son equidistantes. Fuente: elaborada por autora.

3.1.2. Evolución en una esfera

En el caso en que $d = 3$ el operador (3.1.6) toma la forma $L^{(4)} = -\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)$ y la ecuación para ϕ_1 , (3.1.9), es

$$-\partial_t^2\phi_1 + \partial_r^2\phi_1 + \frac{2}{r}\partial_r\phi_1 = 0. \quad (3.1.29)$$

Utilizando el método de separación de variables proponemos una solución de la forma $\phi_1(t, r) = T(t)F(r)$ e introducimos la constante de separación ω^2 , obteniendo

$$0 = \ddot{T} + \omega^2 T, \quad (3.1.30)$$

$$0 = F'' + \frac{2}{r}F' + \omega^2 F = -L^{(4)}F + \omega^2 F. \quad (3.1.31)$$

La ecuación (3.1.30) es una ecuación de oscilador armónico cuya solución es de la forma

$$T(t) = A \cos(\omega t + \beta), \quad (3.1.32)$$

mientras que la ecuación (3.1.31) tiene una solución de la forma

$$F(r) = C_1 \frac{\sin(\omega r)}{r} + C_2 \frac{\cos(\omega r)}{r}. \quad (3.1.33)$$

Imponiendo regularidad en $r = 0$ obtenemos que C_2 es nula, por lo tanto

$$F(r) = C_1 \frac{\sin(\omega r)}{r}. \quad (3.1.34)$$

Además, imponiendo condiciones de Dirichlet en el borde $r = R$ obtenemos que $\omega = \omega_j = j\pi/R$ con $j \in \mathbb{N}$. De esta forma obtenemos que las autofunciones y autovalores del operador $L^{(4)}$ son

$$f_j(r) = \sqrt{\frac{2}{R}} \frac{\sin(\omega_j r)}{r}, \quad (3.1.35)$$

$$\omega_j = \frac{j\pi}{R}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (3.1.36)$$

Considerando la condición inicial $\dot{\phi}(t, r)|_{t=0} = 0$ tenemos que $\beta = \beta_j = 0, \forall j$ en (3.1.32). Así la solución a la ecuación (3.1.29) es

$$\phi_1(t, r) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos(\omega_p t) f_p(r). \quad (3.1.37)$$

Para resolver (3.1.10) proponemos una solución de la forma

$$\phi_3(t, r) = \sum_{p=1}^{\infty} C_p(t) f_p(r), \quad (3.1.38)$$

y reemplazamos en (3.1.10) obteniendo

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left(\ddot{C}_p(t) + \omega_p^2 C_p(t) \right) f_p(r) = -\frac{\lambda}{6} \phi_1^3. \quad (3.1.39)$$

Este problema es análogo al estudiado en la subsección anterior, con la diferencia que en este caso el espectro es equiespaciado o también llamado *fully-resonant*, por lo cual es posible que alguna de las condiciones (3.1.25)-(3.1.27) se satisfaga² pudiendo aparecer un término resonante en el lado derecho de la ecuación (3.1.39), lo que dependerá de la no-nulidad de la integral

$$I_{j,j_1,j_2,j_3} := -\frac{\lambda}{6} \int_0^R r^2 f_j f_{j_1} f_{j_2} f_{j_3} dr, \quad (3.1.40)$$

donde los subíndices $j_{1,2,3}$ denotan a los modos encendidos en la condición inicial.

Motivados por la presencia de un espectro equiespaciado, este problema fue analizado considerando *backreaction* en la referencia [4]. En este trabajo proponen una métrica de la forma

$$ds^2 = -\frac{A(t, r)}{N(t, r)} dt^2 + \frac{1}{A(t, r)} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (3.1.41)$$

²Cabe notar que debido a que las frecuencias son positivas el canal (3.1.28) no aplica en este caso.

y se estudia la evolución de un campo escalar gravitante sin masa, minimalmente acoplado y esféricamente simétrico, cuya ecuación de campo es

$$\square\phi = 0 . \quad (3.1.42)$$

Además, se definen las variables auxiliares

$$\Phi := \phi' , \quad \Pi := A^{-1}N\dot{\phi} , \quad (3.1.43)$$

y se consideran las siguientes condiciones iniciales para la evolución del sistema

$$\Phi(0, r) = 0 \quad , \quad \Pi(0, r) = \varepsilon \exp \left[-32 \tan^2 \left(\frac{\pi}{2} r \right) \right] . \quad (3.1.44)$$

Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 3.2, de donde vemos que se produce un colapso, formándose un horizonte aparente en el punto en que la función A se anula.

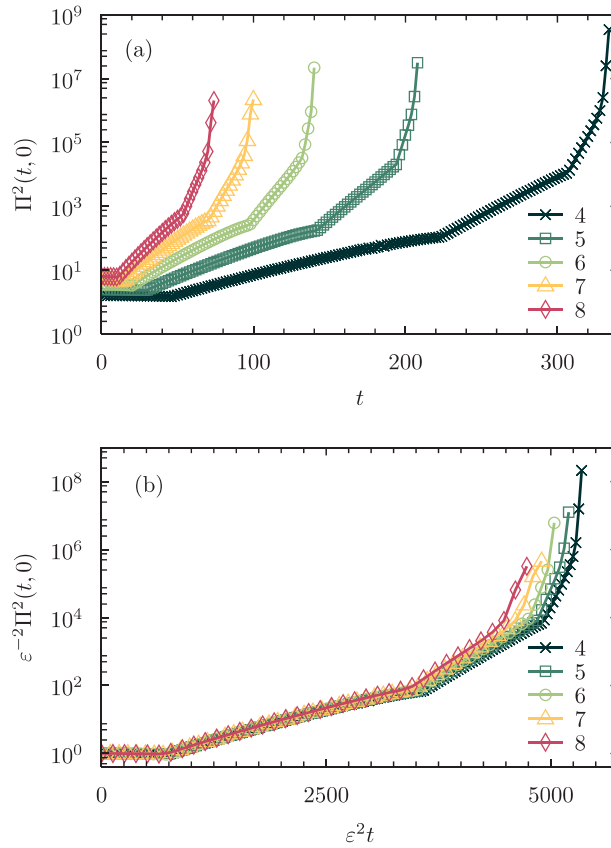


Figura 3.2: (a) Función $\Pi^2(t, 0)$ para soluciones con condiciones iniciales (3.1.44). (b) Curvas de (a) escaladas de la forma $\varepsilon^{-2}\Pi^2(\varepsilon^2 t, 0)$. Fuente: [4].

Capítulo 4

Estabilidad de Anti de-Sitter

En este capítulo estudiaremos la evolución de un campo escalar sobre AdS_4 . Comenzaremos por obtener los modos normales de dicho campo, para luego considerar el problema con *backreaction* [11]. Antes de analizar esto último, es de gran utilidad estudiar el caso del campo escalar sobre la métrica de AdS fija, considerando una autointeracción cuártica en la acción. Este modelo captura correctamente la fenomenología del campo escalar cuando uno considera *backreaction* [3]. En la evolución de este sistema se pueden observar fenómenos interesantes a escalas de tiempo de ϵ^{-2} , por lo cual es posible estudiarlo perturbativamente utilizando el formalismo de dos tiempos (TTF) [12]. De los resultados, vemos que existen condiciones iniciales para las cuales el sistema colapsa formándose un horizonte de eventos, mientras que para otras condiciones el sistema no colapsa [13] y se pueden observar cascadas de energía directas e inversas [14]. En estas últimas soluciones es posible ver que el sistema retorna a su distribución de energía inicial (con diferentes grados de precisión) después de cierto número de oscilaciones [15].

4.1. Espacio tiempo Anti de-Sitter

El espacio anti-de Sitter (AdS) es la solución maximalmente simétrica de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica (Λ) negativa:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 . \quad (4.1.1)$$

Geoméricamente, AdS_{d+1} se puede definir como un hiperboloide de radio $\ell > 0$, definido por la condición

$$-X_0^2 + \sum_{i=1}^d X_i^2 - X_{d+1}^2 = -\ell^2 , \quad (4.1.2)$$

embebido en un espacio plano $(d + 2)$ -dimensional, cuyo elemento de línea es

$$ds^2 = -(dX_0)^2 + \sum_{i=1}^d (dX_i)^2 - (dX_{d+1})^2 . \quad (4.1.3)$$

El radio de curvatura del hiperboloide se relaciona con la constante cosmológica por

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2\ell^2} . \quad (4.1.4)$$

Considerando la parametrización

$$\begin{aligned} X_0 &= \ell \cosh(\rho) \cos(\tau) , \\ X_{d+1} &= \ell \cosh(\rho) \sin(\tau) , \\ X_i &= \ell \sinh(\rho) x_i , \quad i = 1, \dots, d , \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

donde $\tau \in [-\pi, \pi[$, $\rho \in [0, \infty[$ y las coordenadas x_i parametrizan a una esfera unitaria en $(d - 1)$ dimensiones (S^{d-1}), de manera que en coordenadas esféricas tenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos(\theta_1) , \\ x_2 &= \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) , \\ &\vdots \\ x_{d-1} &= \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{d-2}) \cos(\varphi) , \\ x_d &= \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{d-2}) \sin(\varphi) , \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

con $\varphi \in [0, 2\pi[$ y $\theta_n \in [0, \pi]$ para $n = 1, \dots, d - 2$. Utilizando (4.1.5) y (4.1.6) obtenemos que la métrica inducida en el hiperboloide (4.1.2) es

$$ds^2 = \ell^2 (-\cosh^2(\rho) d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2(\rho) d\Omega_{d-1}^2) , \quad (4.1.7)$$

donde $d\Omega_{d-1}$ denota al elemento de línea de la esfera unitaria en $d - 1$ dimensiones. Para evitar curvas tipo tiempo cerradas identificaremos AdS con su espacio recubridor universal, que corresponde a cambiar la coordenada tipo tiempo τ por la coordenada tipo tiempo $t \in (-\infty, \infty)$ [16].

Realizando el cambio de coordenadas

$$r = \ell \sinh(\rho) , \quad (4.1.8a)$$

$$\tilde{t} = \ell t , \quad (4.1.8b)$$

obtenemos la métrica usual de AdS global dada por

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) d\tilde{t}^2 + \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2 , \quad (4.1.9)$$

con $\tilde{t} \in (-\infty, \infty)$ y $r \in [0, \infty[$.

Otro cambio de coordenadas conveniente en (4.1.7) es

$$\tan(x) = \sinh(\rho) , \quad (4.1.10)$$

con $x \in [0, \pi/2[$, de manera que la métrica toma la forma

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\cos^2(x)} (-dt^2 + dx^2 + \sin^2(x) d\Omega_{d-2}^2) . \quad (4.1.11)$$

El escalar de curvatura del espacio AdS, es constante y está dado por la expresión

$$R = -\frac{d(d+1)}{\ell^2} , \quad (4.1.12)$$

y su invariante de Kretschmann es

$$K = R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = 2\frac{d(d+1)}{\ell^4} . \quad (4.1.13)$$

Por simplicidad, en adelante utilizaremos $\ell = 1$ en este capítulo.

4.2. Modos normales en AdS₄

Estudiaremos los modos normales de un campo escalar de prueba sobre un espacio anti-de Sitter de cuatro dimensiones.

La acción para este caso está dada por

$$S[\phi; g_{\mu\nu}] = \int \sqrt{-g} \frac{1}{2} (-\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - m^2 \phi^2) d^4x . \quad (4.2.1)$$

Variando la acción respecto al campo ϕ obtenemos la ecuación de Klein-Gordon

$$(\square - m^2)\phi = 0 , \quad (4.2.2)$$

donde $\square\phi$ está dado en (3.1.3).

Utilizando la métrica (4.1.9) tenemos que

$$\sqrt{-g} = r^2 \sqrt{\sigma} = r^2 \sin(\theta) , \quad (4.2.3)$$

con σ el determinante de la métrica de la 2-esfera unitaria σ_{ij} . Así, la ecuación de Klein-Gordon toma la forma

$$\begin{aligned} 0 = \square\phi - m^2\phi &= \frac{1}{r^2 \sqrt{\sigma}} \left[\partial_t (r^2 \sqrt{\sigma} g^{tt} \partial_t \phi) + \partial_r (r^2 \sqrt{\sigma} g^{rr} \partial_r \phi) + \partial_i \left(r^2 \frac{\sqrt{\sigma}}{r^2} \sigma^{ij} \partial_j \phi \right) \right] - m^2 \phi , \\ &= -(1+r^2)^{-1} \partial_t^2 \phi + \frac{2}{r} (1+2r^2) \partial_r \phi + (1+r^2) \partial_r^2 \phi \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \partial_\theta \phi + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \phi + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \partial_\varphi^2 \phi - m^2 \phi . \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Consideramos una solución separable de la forma

$$\phi(t, r, \theta, \varphi) = T(t)R(r)Y(\theta, \varphi) . \quad (4.2.5)$$

Reemplazando en (4.2.4), reordenando términos e introduciendo las constantes de separación λ y ω obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$0 = \frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2T(t) , \quad (4.2.6)$$

$$0 = \nabla_{S^2}Y(\theta, \varphi) + \lambda Y(\theta, \varphi) , \quad (4.2.7)$$

$$0 = r^2(1+r^2)\frac{d^2R(r)}{dr^2} + 2r(1+2r^2)\frac{dR(r)}{dr} + \left(\frac{r^2\omega^2}{1+r^2} - m^2r^2 - \lambda\right)R(r) . \quad (4.2.8)$$

La ecuación (4.2.6) es una ecuación de oscilador armónico cuya solución está dada por:

$$T(t) = \alpha \cos(\omega t + \beta) , \quad (4.2.9)$$

donde α y β son constantes de integración.

Por otro lado, la ecuación (4.2.7) es una ecuación de autovalores, donde la autofunción es Y y el autovalor es $-\lambda$. Pidiendo regularidad en los polos y que la función sea univaluada para el ángulo φ , obtenemos que los autovalores de la ecuación quedan dados por $-\lambda = -l(l+1)$ con $l \in \mathbb{N}_0$, de manera que las autofunciones Y corresponden a las funciones armónicas esféricas $Y_{l,n}$ donde $n = -l, \dots, 0, \dots, l$.

La ecuación (4.2.8) es una ecuación diferencial hipergeométrica, cuya solución es de la forma [17]

$$R(r) = (1+r^2)^{\frac{\omega}{2}} [C_1 r^l {}_2F_1(a, b; c; -r^2) + C_2 r^{-l-1} {}_2F_1(1+a-c, 1+b-c; 2-c; -r^2)] ,$$

donde

$$a = \frac{1}{2}\omega + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}l + \frac{1}{4}\sqrt{4m^2 + 9} , \quad (4.2.10a)$$

$$b = \frac{1}{2}\omega + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}l - \frac{1}{4}\sqrt{4m^2 + 9} , \quad (4.2.10b)$$

$$c = \frac{3}{2} + l , \quad (4.2.10c)$$

y con $C_{1,2}$ constantes de integración. Imponiendo la condición de regularidad en el origen tenemos que $C_2 = 0$, de manera que

$$R(r) = C_1(1+r^2)^{\frac{\omega}{2}} r^l {}_2F_1(a, b; c; -r^2) . \quad (4.2.11)$$

Utilizando propiedades de las funciones hipergeométricas (ver [17]) podemos reescribir

$$\begin{aligned}
R(r) &= C_1(1+r^2)^{\frac{\omega}{2}} r^l (1+r^2)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{r^2}{1+r^2}\right), \\
R(r) &= C_1(1+r^2)^{\frac{\omega}{2}} r^l \left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} \left(\frac{1}{1+r^2}\right)^a {}_2F_1\left(a, c-b; a-b+1; \frac{1}{1+r^2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} \left(\frac{1}{1+r^2}\right)^b {}_2F_1\left(c-a, b; 1-a+b; \frac{1}{1+r^2}\right) \right]. \tag{4.2.12}
\end{aligned}$$

Imponiendo que la función R sea nula en infinito, obtenemos la condición $c-b = -j$, con $j \in \mathbb{N}_0$. Esta condición determina el espectro de frecuencias de oscilación del campo, el que está dado por:

$$\omega_{j,l} = 2j + l + \frac{3}{2} + \sqrt{m^2 + \frac{9}{4}}, \tag{4.2.13}$$

con l y $j \in \mathbb{N}_0$. De esta forma la solución para la función R es

$$R_{j,l}(r) = C_j(1+r^2)^{\omega_{j,l}/2} r^l {}_2F_1(a_{j,l}, b_{j,l}; c_{j,l}; -r^2), \tag{4.2.14}$$

donde C_1 ha sido reemplazada por C_j y $a_{j,l}$, $b_{j,l}$ y $c_{j,l}$ son como (4.2.10) reemplazando ω por $\omega_{j,l}$ dado en (4.2.13).

A partir de las soluciones para T , Y y R obtenemos

$$\phi_{j,l,n}(r, t, \theta, \varphi) = \alpha_{j,l,n} \cos(\omega_{j,l}t + \beta_{j,l,n}) R_{j,l}(r) Y_{l,n}(\theta, \varphi), \tag{4.2.15}$$

solución que describe a un modo de oscilación del campo. Dado que la ecuación es lineal una superposición arbitraria de soluciones también será solución, por lo tanto la solución general queda dada por

$$\phi(r, t, \theta, \varphi) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{n=-l}^l \phi_{j,l,n}(r, t, \theta, \varphi). \tag{4.2.16}$$

4.3. Campo escalar autointeractuante

En esta sección estudiaremos la evolución de un campo escalar sin masa y esféricamente simétrico, considerando una autointeracción cuártica en la acción, manteniendo el *background* fijo. Este modelo es muy instructivo para estudiar la estabilidad de AdS considerando el sistema con *backreaction*, ya que captura varias de las características principales de dicho problema [3]. La acción para este sistema está dada por

$$S[\phi; g_{\mu\nu}] = \int \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) d^4x, \tag{4.3.1}$$

a partir de la cual obtenemos la ecuación de campo

$$\square \phi(t, x) - \frac{\lambda}{3!} \phi^3(t, x) = 0. \tag{4.3.2}$$

4.3.1. Método perturbativo estándar

Considerando la métrica (4.1.11) del espacio AdS en cuatro dimensiones, reemplazamos la siguiente expansión para el campo escalar

$$\phi(t, x) = \epsilon\phi_1(t, x) + \epsilon^3\phi_3(t, x) + \mathcal{O}(\epsilon^5), \quad (4.3.3)$$

en (4.3.2), obteniendo un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas. En efecto, a primer orden en ϵ tenemos

$$\ddot{\phi}_1 + L\phi_1 = 0, \quad (4.3.4)$$

donde L , definido como

$$L := -\frac{1}{\tan^2(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\tan^2(x) \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (4.3.5)$$

es un operador auto-adjunto sobre el dominio $[0, \pi/2[$ cuya función peso es $\tan^2(x)$. Sus autovalores y autofunciones, a las que denominaremos oscilones, son¹

$$e_j = d_j \cos^3(x) {}_2F_1 \left(-j, 3 + j, \frac{3}{2}; \sin^2(x) \right), \quad (4.3.6)$$

$$\omega_j^2 = (3 + 2j)^2, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (4.3.7)$$

El producto interno de este espacio lo denotaremos como

$$(f, g) := \int_0^{2\pi} f(x)g(x) \tan^2(x) dx. \quad (4.3.8)$$

Así, la solución a (4.3.4) se puede escribir como

$$\phi_1(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(\omega_j t + \beta_j) e_j(x). \quad (4.3.9)$$

La ecuación que resulta a tercer orden en ϵ está dada por

$$\ddot{\phi}_3 + L\phi_3 = S, \quad (4.3.10)$$

donde

$$S := -\frac{\lambda}{6} \frac{\phi_1^3}{\cos^2(x)}. \quad (4.3.11)$$

Proponemos una solución de la forma

$$\phi_3(t, x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(t) e_l(x), \quad (4.3.12)$$

¹Para más detalle revisar Apéndice A.1

y reemplazamos en (4.3.10). Proyectando sobre la base de oscilones obtenemos un conjunto infinito de osciladores armónicos forzados desacoplados para los coeficientes $c_j(t)$

$$\ddot{c}_j + \omega_j^2 c_j = S_j , \quad (4.3.13)$$

donde $S_j := (S, e_j)$ es la proyección de la función S sobre la base de oscilones.

Si imponemos como condición inicial $[\phi, \dot{\phi}]_{t=0} = \epsilon[e_0(x), 0]$, aparece un término de la forma $\cos^3(\omega_0 t)$ en la función S , por lo cual hay posibles resonancias para los modos $j = 0$ y $j = 3$. Al proyectar S sobre la base de oscilones, obtenemos que sólo S_0 posee un término resonante. El término secular resultante debido a la resonancia puede ser reabsorbido a través del método de Poincaré-Lindstedt² [18], de manera que la solución a primer orden toma la forma

$$\phi = \epsilon \cos \left[\left(3 + \epsilon^2 \frac{7\lambda}{24\pi} \right) t \right] e_0(x) + \mathcal{O}(\epsilon^3) . \quad (4.3.14)$$

Por otro lado, si imponemos $[\phi, \dot{\phi}]_{t=0} = \epsilon[e_0(x) + e_1(x), 0]$, la función S tendrá una dependencia temporal de la forma $(\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t))^3$, por lo cual pueden aparecer resonancias para $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, pero al proyectar en la base de oscilones sólo obtenemos tres resonancias: $j = 0$, $j = 1$ y $j = 2$. Los términos seculares en c_0 y c_1 pueden ser reabsorbidos a través del método de Poincaré-Lindstedt, pero el término resonante en S_2 persiste y produce un término secular $c_2 \sim t \sin(\omega_2 t)$.

Es posible demostrar que aparecerán resonancias en S_j sólo si

$$\omega_j = \omega_{j_1} + \omega_{j_2} - \omega_{j_3} , \quad (4.3.15)$$

donde (j_1, j_2, j_3) son tales que a_{j_1} , a_{j_2} y a_{j_3} son no nulos en ϕ_1 [19]. En general, al existir resonancias aparecerán términos seculares, por lo cual el método perturbativo estándar es válido sólo hasta tiempos menores a $1/(\lambda\epsilon^2)$, ya que para tiempos superiores los términos de la solución con factor ϵ y ϵ^3 son del mismo orden de magnitud. Para poder estudiar la evolución del campo escalar a tiempos $\mathcal{O}(\lambda^{-1}\epsilon^{-2})$ utilizamos el formalismo de dos tiempos.

4.3.2. Formalismo de dos tiempos

Este método perturbativo consiste en introducir el “tiempo lento” $\tau := \epsilon^2 t$ como una variable. De esta forma, proponemos la siguiente expansión para el campo ϕ

$$\phi(t, \tau, x) = \epsilon\phi_1(t, \tau, x) + \epsilon^3\phi_3(t, \tau, x) + \mathcal{O}(\epsilon^5) . \quad (4.3.16)$$

²Para más detalle ver Apéndice B.

Reemplazando (4.3.16) en (4.3.2) y considerando que, debido a la presencia de la coordenada τ , $\partial_t \rightarrow \partial_t + \epsilon^2 \partial_\tau$ [20], obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas al coleccionar orden a orden en ϵ . A primer orden obtenemos

$$\partial_t^2 \phi_1 + L\phi_1 = 0 , \quad (4.3.17)$$

donde L es el operador dado en (4.3.5). La solución para (4.3.17) es

$$\phi_1(t, \tau, x) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l(\tau)e^{-i\omega_l t} + \bar{A}_l(\tau)e^{i\omega_l t}) e_l(x) , \quad (4.3.18)$$

donde $A_l(\tau)$ son funciones arbitrarias de τ que serán determinadas posteriormente, y $\bar{A}_l(\tau)$ denota a su complejo conjugado.

A orden cúbico obtenemos

$$\partial_t^2 \phi_3 + L\phi_3 + 2\partial_t \partial_\tau \phi_1 = S(t, \tau, x) , \quad (4.3.19)$$

donde

$$S := -\frac{\lambda}{6} \frac{\phi_1^3}{\cos^2(x)} . \quad (4.3.20)$$

Proponemos una solución de la forma

$$\phi_3(t, \tau, x) = \sum_{l=0}^{\infty} (B_l(t, \tau) + \bar{B}_l(t, \tau)) e_l(x) . \quad (4.3.21)$$

Reemplazando en (4.3.19) y proyectando sobre la base de autofunciones del operador L obtenemos

$$\partial_t^2 (B_j + \bar{B}_j) + \omega_j^2 (B_j + \bar{B}_j) - 2i\omega_j (\partial_\tau A_j e^{-i\omega_j t} - \partial_\tau \bar{A}_j e^{i\omega_j t}) = (e_j, S) , \quad (4.3.22)$$

con

$$\begin{aligned} (e_j, S) &= \sum_{n,l,m} \frac{\mathcal{S}_{jnlm}}{3} (A_l e^{-i\omega_l t} + \bar{A}_l e^{i\omega_l t}) (A_m e^{-i\omega_m t} + \bar{A}_m e^{i\omega_m t}) (A_n e^{-i\omega_n t} + \bar{A}_n e^{i\omega_n t}) , \\ &= \sum_{n,l,m} \frac{\mathcal{S}_{jnlm}}{3} (A_l A_m A_n e^{-i(\omega_l + \omega_m + \omega_n)t} + 3A_l A_m \bar{A}_n e^{-i(\omega_l + \omega_m - \omega_n)t} \\ &\quad + 3A_l \bar{A}_m \bar{A}_n e^{-i(\omega_l - \omega_m - \omega_n)t} + \bar{A}_l \bar{A}_m \bar{A}_n(\tau) e^{-i(-\omega_l - \omega_m - \omega_n)t}) , \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{S}_{jnlm} := -\frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2(x) e_j(x) e_n(x) e_l(x) e_m(x)}{\cos^2(x)} dx , \quad (4.3.23)$$

son constantes reales.

Con la presencia de términos proporcionales a $e^{\pm i\omega_j t}$ en el lado izquierdo de la ecuación, podemos cancelar los términos resonantes en el lado derecho. En efecto, utilizando la relación de ortonormalidad de las funciones exponenciales obtenemos

$$-2i\omega_j \partial_\tau A_j = \sum_{n,l,m} \frac{\mathcal{S}_{jnlm}}{3} \left[A_l A_m A_n \delta_{\omega_j, \omega_l + \omega_m + \omega_n} + 3A_l A_m \bar{A}_n \delta_{\omega_j, \omega_l + \omega_m - \omega_n} \right. \\ \left. + 3A_l \bar{A}_m \bar{A}_n \delta_{\omega_j, \omega_l - \omega_m - \omega_n} + \bar{A}_l \bar{A}_m(\tau) \bar{A}_n \delta_{\omega_j, -\omega_l - \omega_m - \omega_n} \right] .$$

Dado que las integrales \mathcal{S}_{jnlm} son no nulas sólo si $\omega_j + \omega_n = \omega_l + \omega_m$, o equivalentemente, $j + n = l + m$, obtenemos

$$-2i\omega_j \partial_\tau A_j = \sum_{j+n=l+m} \mathcal{S}_{jnlm} A_l A_m \bar{A}_n , \quad (4.3.24)$$

expresión que define a un *set* de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas para A_j .

Para resolver el sistema de ecuaciones (4.3.24) es necesario truncarlo hasta $j = j_{\max}$. Algunas soluciones al sistema se muestran en la Fig. 4.1, donde hemos utilizado $j_{\max} = 20$. De los resultados obtenidos vemos que hay un intercambio de energía entre los modos: los modos de frecuencias bajas traspasan energía a los modos de mayor frecuencia, fenómeno denominado cascada de energía directa, y también la energía de los modos con mayor frecuencia pasa a los modos con menor frecuencia, fenómeno denominado cascada de energía inversa.

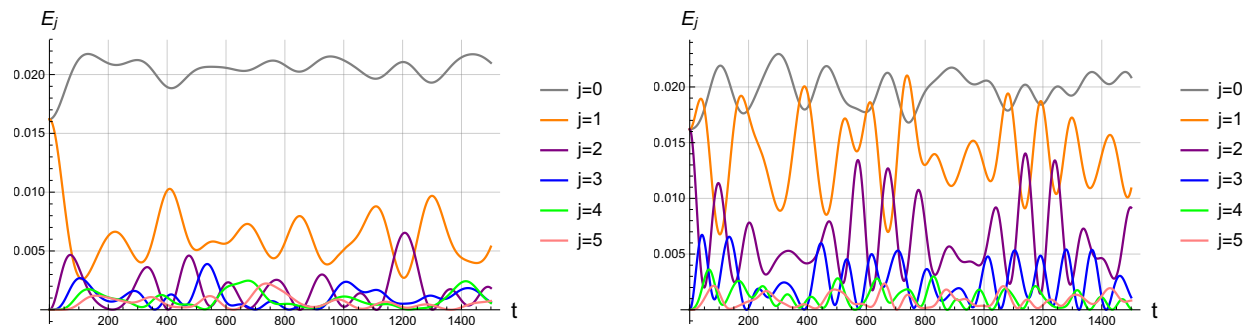


Figura 4.1: Evolución del sistema para dos modos encendidos inicialmente con la misma energía (panel izquierdo) y para tres modos encendidos inicialmente con la misma energía (panel derecho) con $j_{\max} = 20$. Fuente: elaborada por autora.

El sistema (4.3.24) posee dos cantidades conservadas [3]: la energía linealizada

$$E := \sum_{j=0}^{\infty} E_j , \quad (4.3.25)$$

donde

$$E_j := \omega_j^2 |A_j|^2 , \quad (4.3.26)$$

y el número de partículas

$$N := \sum_{j=0}^{\infty} N_j , \quad (4.3.27)$$

donde

$$N_j := \omega_j |A_j|^2 , \quad (4.3.28)$$

cantidades que están asociadas a las transformaciones de simetría

$$A_j \rightarrow e^{i\alpha} A_j \quad \text{y} \quad A_j \rightarrow e^{i\omega_j \beta} A_j , \quad (4.3.29)$$

respectivamente. Además, dicho sistema posee una simetría de escala: si $A_j(\tau)$ es solución, también lo es $\epsilon A_j(\tau/\epsilon^2)$, para cualquier ϵ .

Las cantidades conservadas E y N sirven para monitorear la estabilidad del método numérico utilizado para resolver (4.3.24).

4.4. (In)-estabilidades en AdS_4

En esta sección revisaremos los resultados del estudio del colapso de un campo escalar sin masa y esféricamente simétrico sobre AdS_4 .

Siguiendo la configuración de [11], la acción para este caso está dada por

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = \int \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} (R + 2\Lambda) - \frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi \right] d^4x , \quad (4.4.1)$$

a partir de la cual obtenemos las siguientes ecuaciones de campo

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla\phi)^2 \right) , \quad (4.4.2)$$

$$\square\phi = 0 , \quad (4.4.3)$$

las que denominaremos sistema Einstein-Klein-Gordon (EKG).

Utilizaremos el siguiente *ansatz* para la métrica

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2(x)} \left(-A(t, x) e^{-2\delta(t, x)} dt^2 + A^{-1}(t, x) dx^2 + \sin^2(x) d\Omega^2 \right) , \quad (4.4.4)$$

donde $d\Omega$ es el elemento de línea de la 2-esfera unitaria, y además $t \in]-\infty, \infty[$ y $x \in [0, \pi/2[$.

Introduciendo las funciones auxiliares $\Phi = \phi'$ y $\Pi = A^{-1}e^\delta \dot{\phi}$, donde la prima denota la derivada respecto a la coordenada x y el punto denota la derivada respecto a la coordenada t , las ecuaciones de campo toman la forma

$$\dot{\Phi} = (Ae^{-\delta}\Pi)' , \quad (4.4.5a)$$

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{\tan^2(x)}(\tan^2(x)Ae^\delta\Phi)' , \quad (4.4.5b)$$

con los siguientes *constraints*

$$A' = \frac{1 + 2\sin^2(x)}{\sin(x)\cos(x)}(1 - A) - \sin(x)\cos(x)A(\Phi^2 + \Pi^2) , \quad (4.4.6a)$$

$$\delta' = -\sin(x)\cos(x)(\Phi^2 + \Pi^2) , \quad (4.4.6b)$$

$$\dot{A} = -2\sin(x)\cos(x)A^2e^{-\delta}\Phi\Pi . \quad (4.4.6c)$$

4.4.1. Perturbaciones no-lineales

Es posible obtener soluciones aproximadas al sistema EKG considerando soluciones de la forma:

$$\phi = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^{2j+1} \phi_{2j+1} , \quad (4.4.7a)$$

$$A = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j} \epsilon^{2j} , \quad (4.4.7b)$$

$$\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{2j} \epsilon^{2j} . \quad (4.4.7c)$$

Reemplazando (4.4.7) en el sistema EKG obtenemos un conjunto de ecuaciones lineales acopladas al colector orden a orden en ϵ . A primer orden obtenemos la ecuación (4.3.4) donde L está dado por (4.3.5). Luego, la solución a ϕ_1 es

$$\phi_1(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(\omega_j t + \beta_j) e_j(x) . \quad (4.4.8)$$

donde a_j y β_j son constantes que serán determinadas por las condiciones iniciales.

La respuesta de la métrica a la presencia del campo escalar aparece a segundo orden en el

parámetro ϵ , lo que se puede integrar obteniendo

$$A_2(t, x) = \frac{\cos^3(x)}{\sin(x)} \int_0^x \left(\dot{\phi}_1^2(t, y) + \phi_1'^2(t, y) \right) \tan^2(y) dy , \quad (4.4.9a)$$

$$\delta_2(t, x) = - \int_0^x \left(\dot{\phi}_1^2(t, y) + \phi_1'^2(t, y)^2 \right) \sin(y) \cos(y) dy . \quad (4.4.9b)$$

La ecuación que resulta a tercer orden en ϵ está dada por

$$\ddot{\phi}_3 + L\phi_3 = S, \quad (4.4.10)$$

donde $S := -2(A_2 + \delta_2)\ddot{\phi}_1 - (\dot{A}_2 + \dot{\delta}_2)\dot{\phi}_1 - (A_2' + \delta_2')\phi_1'$. Proyectando (4.4.10) sobre la base de autofunciones del operador L obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones para los coeficientes c_j

$$\ddot{c}_j + \omega_j^2 c_j = S_j , \quad (4.4.11)$$

donde $S_j := (S, e_j)$.

Sea $I = \{j \in \mathbb{N}_0 : a_j \neq 0\}$ un conjunto de índices no-nulos en la solución (4.4.8), es posible demostrar que cada triada $(j_1, j_2, j_3) \in I^3$ tal que $\omega_j = \omega_{j_1} + \omega_{j_2} - \omega_{j_3}$ da origen a un término resonante en S_j [21]. Algunas de estas resonancias pueden ser reabsorbidas mediante el método Poincaré-Lindstedt, pero para una condición inicial general no todas las resonancias pueden ser reabsorbidas, tal como en el caso del campo escalar autointeractuante en AdS₄. Por ejemplo, para la condición inicial $[\phi, \dot{\phi}]_{t=0} = \epsilon[e_0(x), 0]$ sólo S_0 contiene un término resonante, el que puede ser reabsorbido, obteniendo así la solución $\phi(t, x) = \epsilon \cos(3t + 153/(4\pi)\epsilon^2 t)e_0(x) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$. En el caso en que la condición inicial sea $[\phi, \dot{\phi}]_{t=0} = \epsilon[e_0(x) + e_1(x), 0]$, los términos resonantes en S_0 y S_1 pueden ser reabsorbidos, pero la resonancia en S_2 no, dando origen a un término secular en la solución, por lo cual ésta última no es válida para tiempos de orden ϵ^{-2} .

De acuerdo a los resultados numéricos, el colapso del campo escalar ocurre a tiempos de orden ϵ^{-2} (donde ϵ caracteriza la amplitud de la perturbación), por lo cual es de interés obtener soluciones que sean válidas a dichos tiempos [11].

A continuación mostraremos los resultados de la evolución numérica realizada en [11] para el caso en que las condiciones iniciales son

$$\Phi(0, x) = 0 , \quad \Pi(0, x) = \frac{2\epsilon}{\pi} \exp\left(-\frac{4 \tan^2 x}{\pi^2 \sigma^2}\right) , \quad (4.4.12)$$

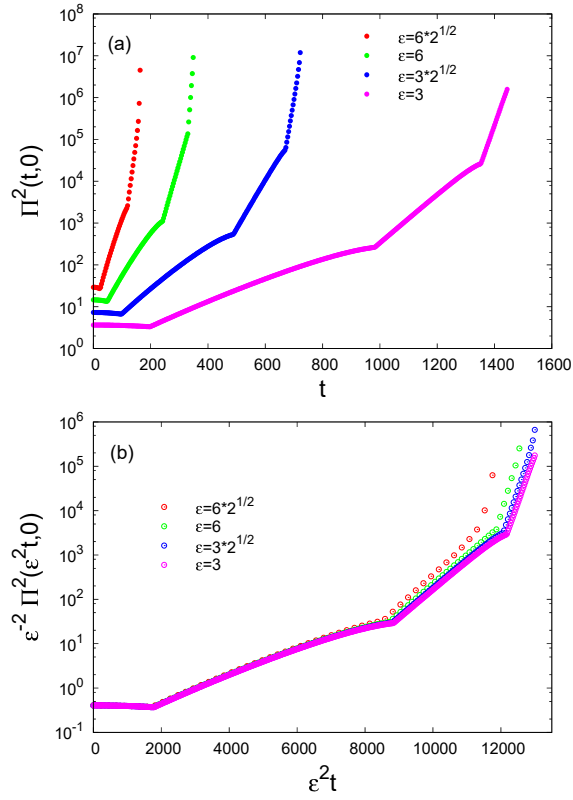


Figura 4.2: (a) $\Pi^2(t, 0)$ para las condiciones iniciales (4.4.12). (b) Las curvas de (a) después del escalamiento $\epsilon^{-2}\Pi^2(\epsilon^2 t, 0)$. Fuente: [11].

donde se ha fijado $\sigma = 1/16$ (ver Fig. 4.2).

Con las herramientas numéricas y analíticas es posible ver que la energía inicial del sistema es transferida a modos con mayor frecuencia (cascada directa), es decir, la energía se concentra en escalas más y más pequeñas lo que puede resultar en el colapso a un agujero negro. Lo importante de dicho resultado, es que este colapso sucede independiente de la amplitud ϵ del campo escalar.

4.4.2. Formalismo de dos tiempos

Como hemos visto, el formalismo de dos tiempos es un método perturbativo que permite llegar hasta los tiempos de interés. Siguiendo el procedimiento descrito en [12], consideramos las siguientes expansiones para el campo escalar y las funciones métricas, considerando el tiempo lento $\tau = \epsilon^2 t$:

$$\phi(t, \tau, x) = \epsilon \phi_1(t, \tau, x) + \epsilon^3 \phi_3(t, \tau, x) + \mathcal{O}(\epsilon^5), \quad (4.4.13)$$

$$A(t, \tau, x) = 1 + \epsilon^2 A_2(t, \tau, x) + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (4.4.14)$$

$$\delta(t, \tau, x) = \epsilon^2 \delta_2(t, \tau, x) + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (4.4.15)$$

Aplicaremos este método en el sistema Einstein-Klein-Gordon, considerando que las derivadas temporales tomarán la forma $\partial_t \rightarrow \partial_t + \epsilon^2 \partial_\tau$. A primer orden en ϵ obtenemos la ecuación (4.3.17) donde el operador L está dado nuevamente por (4.3.5). La solución general para esta ecuación es

$$\phi_1(t, \tau, x) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l(\tau) e^{-i\omega_l t} + \bar{A}_l(\tau) e^{i\omega_l t}) e_l(x). \quad (4.4.16)$$

A orden ϵ^2 obtenemos

$$A_2(t, \tau, x) = -\frac{\cos^3(x)}{\sin(x)} \int_0^x \left(\dot{\phi}_1^2(t, \tau, y) + \phi_1'^2(t, \tau, y) \right) \tan^2(y) dy, \quad (4.4.17)$$

$$\delta_2(t, \tau, x) = -\int_0^x \left(\dot{\phi}_1^2(t, \tau, y) + \phi_1'^2(t, \tau, y) \right) \sin(y) \cos(y) dy. \quad (4.4.18)$$

Finalmente, la ecuación a orden ϵ^3 es

$$\partial_t^2 \phi_3 + L\phi_3 + 2\partial_t \partial_\tau \phi_1 = S(t, \tau, x), \quad (4.4.19)$$

donde el término de fuente está dado por

$$S := \partial_t(A_2 - \delta_2) \partial_t \phi_1 - 2(A_2 - \delta_2) L\phi_1 + (A_2' - \delta_2') \phi_1'. \quad (4.4.20)$$

Las soluciones (4.4.17) y (4.4.18) para A_2 y δ_2 se sustituyen directamente en S . En general, como hemos visto con el método perturbativo estándar, el término fuente S contiene términos resonantes si $\omega_j = \omega_{j_1} + \omega_{j_2} - \omega_{j_3}$ donde (j_1, j_2, j_3) son los índices de los modos no nulos en la condición inicial del problema.

Proponemos una solución para ϕ_3 de la forma

$$\phi_3(t, \tau, x) = \sum_l^{\infty} (B_l(t, \tau) + \bar{B}_l(t, \tau)) e_l(x). \quad (4.4.21)$$

Reemplazando en (4.4.19) y proyectando sobre la base de oscilones tenemos

$$\partial_t^2 (B_j + \bar{B}_j) + \omega_j^2 (B_j + \bar{B}_j) - 2i\omega_j(\partial_\tau A_j e^{-i\omega_j t} - \partial_\tau \bar{A}_j e^{i\omega_j t}) = (e_j, S) . \quad (4.4.22)$$

Integrando en el tiempo obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones para las funciones $A_j(\tau)$

$$-2i\omega_j \partial_\tau A_j = \sum_{klm} \mathcal{S}_{jklm} \bar{A}_k A_l A_m , \quad (4.4.23)$$

donde \mathcal{S}_{jklm} son constantes reales, que representan la contribución de las diferentes resonancias.

Cabe notar que en este caso también se conservan la energía linealizada

$$E = \sum_{j=0}^{\infty} E_j = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j^2 |A_j|^2 , \quad (4.4.24)$$

y el número de partículas

$$N = \sum_{j=0}^{\infty} N_j = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j |A_j|^2 , \quad (4.4.25)$$

como se puede ver en [14] y [22].

Además, la ecuación (4.4.23) es invariante bajo la transformación $A_j(\tau) \rightarrow \epsilon A_j(\tau/\epsilon^2)$, la que es una propiedad de las ecuaciones obtenidas a partir de este formalismo.

En el caso en que consideremos dos modos encendidos inicialmente en el sistema (4.4.23), es decir,

$$A_j(0) = \frac{1}{3} (\delta_j^0 + \kappa \delta_j^1) , \quad (4.4.26)$$

con la misma energía inicial en cada uno de ellos ($\kappa = 3/5$) es posible observar cascadas de energías directas e inversas (ver Fig. 4.3).

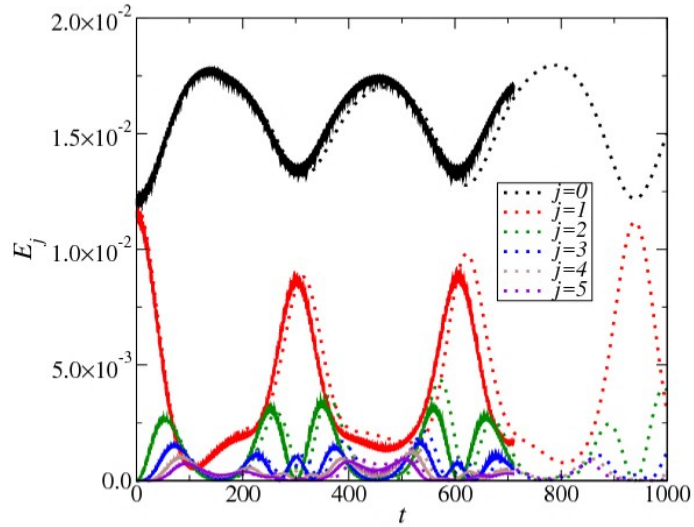


Figura 4.3: Evolución de la energía del sistema obtenida de forma numérica (líneas sólidas) y con el formalismo de dos tiempos (líneas punteadas) para el caso de dos modos inicialmente encendidos con la misma energía. Fuente: [12].

4.5. Retorno de energía en AdS global

De los resultados obtenidos en la sección anterior vemos que existe cierta periodicidad en la evolución de la energía del campo escalar cuando tenemos dos modos encendidos inicialmente. Debido a esto, es de interés caracterizar los retornos de energía y determinar si ellos son exactos o sólo cercanos a exactos. Es posible analizar analíticamente este fenómeno cuando domina alguno de los modos iniciales, en particular revisaremos los casos en que domina el modo fundamental y el primer modo excitado cuando consideramos el campo escalar con *backreaction* [15].

4.5.1. Soluciones dominadas por el modo fundamental

Consideraremos que el espectro es suprimido exponencialmente a medida que uno se aleja del modo fundamental

$$A_n = \delta^n \frac{q_n(\tau)}{\sqrt{\omega_n}}, \quad (4.5.1)$$

con $\delta \ll 1$. Redefinimos la constante S_{nmkl} de la sección anterior como sigue

$$C_{nmkl} = -\frac{1}{2} \frac{S_{nmkl}}{\sqrt{\omega_n \omega_m \omega_k \omega_l}}, \quad (4.5.2)$$

de manera que (4.4.23) toma la forma

$$i\dot{q}_n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+m} \delta^{2m} C_{nmk, n+m-k} q_k q_{n+m-k} \bar{q}_m, \quad (4.5.3)$$

donde hemos denotado con $\dot{(\)}$ la derivada respecto a la variable τ .

A orden δ^0 , sólo los términos con $m = 0$ aparecen en la ecuación anterior, así

$$i\dot{q}_n = \bar{q}_0(\tau) \sum_{k=0}^n C_{n0k,n-k} q_k q_{n-k} . \quad (4.5.4)$$

Este conjunto de ecuaciones se puede resolver de forma recursiva. Para mostrar su estructura escribiremos las ecuaciones para los cuatro primeros modos

$$i\dot{q}_0 = C_{0000}|q_0|^2 q_0 , \quad (4.5.5)$$

$$i\dot{q}_1 = 2C_{1010}|q_0|^2 q_1 , \quad (4.5.6)$$

$$i\dot{q}_2 = 2C_{2020}|q_0|^2 q_2 + C_{2011} \bar{q}_0 q_1^2 , \quad (4.5.7)$$

$$i\dot{q}_3 = 2C_{3030}|q_0|^2 q_3 + 2C_{3021} \bar{q}_0 q_1 q_2 , \quad (4.5.8)$$

$$i\dot{q}_4 = 2C_{4040}|q_0|^2 q_4 + 2C_{4031} \bar{q}_0 q_1 q_3 + C_{4022} \bar{q}_0 q_2^2 . \quad (4.5.9)$$

Utilizando la simetría de escala de la ecuación obtenida a través del formalismo de dos tiempos (4.4.23) siempre es posible fijar $|q_0|^2 = 1$.

Con el objetivo de ver si existen retornos de energía exactos, resolveremos (4.5.4) con las condiciones iniciales $q_0(0) = 1$, $q_1(0) = 1$ y $q_{n \geq 2} = 0$. De esta forma las soluciones para q_0 y q_1 son

$$q_0 = e^{-iC_{0000}\tau} , \quad q_1 = e^{-2iC_{1010}\tau} . \quad (4.5.10)$$

La solución para q_2 es de la forma

$$q_2(\tau) = \frac{-2iC_{2011}}{C_{0000} - 4C_{1010} + 2C_{2020}} \sin\left(\frac{C_{0000} - 4C_{1010} + 2C_{2020}}{2} \tau\right) e^{i\left(\frac{C_{0000} - 4C_{1010} + 2C_{2020}}{2}\right)\tau} , \quad (4.5.11)$$

de donde obtenemos que la energía $E_2 \propto |q_2|^2$ posee un período $T_2 = 10\pi^2/123$.

La solución para el tercer modo excitado es

$$q_3(\tau) = \frac{2C_{2011}C_{3021}}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \left((\lambda_2 - \lambda_1) - \lambda_2 e^{-i\lambda_1\tau} + \lambda_1 e^{-i\lambda_2\tau} \right) e^{-2iC_{3030}\tau} , \quad (4.5.12)$$

con

$$\lambda_1 = -2C_{0000} + 6C_{1010} - 2C_{3030} , \quad (4.5.13)$$

$$\lambda_2 = -C_{0000} + 2C_{1010} + 2C_{2020} - 2C_{3030} . \quad (4.5.14)$$

En este caso la energía $E_3 \propto |q_3|^2$ oscila con período $T_3 = 140\pi^4/3$ lo que corresponde exactamente a 574 veces T_2 . Resolviendo al siguiente orden se obtiene que $E_4 \propto |q_4|^2$ también

es periódica, con período $T_4 = 420\pi^2$, lo que corresponde a 9 veces T_3 , o equivalentemente, 5166 veces T_2 .

El patrón de períodos comunes se puede generalizar para los modos siguientes, ya que existen relaciones racionales entre los coeficientes C_{nmkl} en AdS₄ [22],[13]. Debido a esto, obtendremos un retorno arbitrariamente preciso a la distribución inicial de energía si uno espera el tiempo suficiente.

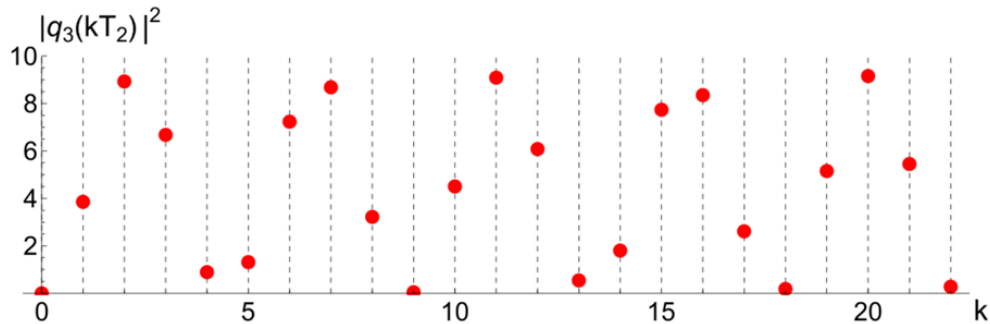


Figura 4.4: Solución analítica de los retornos de energía. Vemos que existen retornos de energía cuando $k = 4, 5$ y 13 . Es posible ver que existen retornos muy precisos para $k = 9$ y 18 , pero éstos no son exactos. Fuente: [15].

4.6. Soluciones dominadas por el primer modo excitado

Ahora consideramos que los modos son suprimidos a medida que se alejan del primer modo excitado

$$A_0 = \delta \frac{q_0(\tau)}{\sqrt{\omega_0}}, \quad A_{n \geq 1} = \delta^{n-1} \frac{q_n(\tau)}{\sqrt{\omega_n}}, \quad (4.6.1)$$

con $\delta \ll 1$. Redefiniendo

$$C_{nmkl} = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{S}_{nmkl}}{\sqrt{\omega_n \omega_m \omega_k \omega_l}}, \quad (4.6.2)$$

la ecuación (4.4.23) para el modo 0 toma la forma

$$i\dot{q}_0 = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} C_{0mk,m-k} \bar{q}_m q_k q_{m-k} \delta^{2m-4} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} C_{0m0m} \bar{q}_m q_m q_0 \delta^{2m-2} + C_{0000} \bar{q}_0 q_0 q_0 \delta^2, \quad (4.6.3)$$

y para los modos de orden superior

$$i\dot{q}_n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+m-1} C_{nmk,n+m-k} \bar{q}_m q_k q_{n+m-k} \delta^{2m-2} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n0k,n-k} \bar{q}_0 q_k q_{n-k} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm0,n+m} \bar{q}_m q_0 q_{n+m} \delta^{2m} + 2C_{0n0n} \bar{q}_0 q_0 q_n \delta^2 . \quad (4.6.4)$$

Considerando sólo los términos a orden cero en δ obtenemos la siguiente ecuación para el modo fundamental

$$i\dot{q}_0 = C_{0211} \bar{q}_2 q_1^2 + 2C_{0101} |q_1|^2 q_0 , \quad (4.6.5)$$

mientras que para los modos excitados tenemos

$$i\dot{q}_n = \bar{q}_1 \sum_{k=1}^n C_{n1k,n+1-k} q_k q_{n+1-k} + \bar{q}_0 \sum_{k=1}^{n-1} C_{n0k,n-k} q_k q_{n-k} . \quad (4.6.6)$$

Para ver la estructura de estas ecuaciones, escribimos explícitamente las ecuaciones para los primeros modos:

$$i\dot{q}_0 = 2C_{0101} |q_1|^2 q_0 + C_{0211} \bar{q}_2 q_1^2 , \quad (4.6.7)$$

$$i\dot{q}_1 = C_{1111} |q_1|^2 q_1 , \quad (4.6.8)$$

$$i\dot{q}_2 = 2C_{2121} |q_1|^2 q_2 + C_{2011} \bar{q}_0 q_1^2 , \quad (4.6.9)$$

$$i\dot{q}_3 = 2C_{3131} |q_1|^2 q_3 + C_{3122} \bar{q}_1 q_2^2 + 2C_{3021} \bar{q}_0 q_1 q_2 , \quad (4.6.10)$$

$$i\dot{q}_4 = 2C_{4141} |q_1|^2 q_4 + 2C_{4132} \bar{q}_1 q_2 q_3 + C_{4022} \bar{q}_0 q_2^2 + 2C_{4031} \bar{q}_0 q_1 q_3 . \quad (4.6.11)$$

Utilizando la simetría de escala de (4.4.23) podemos fijar $|q_1|^2 = 1$. Luego, las ecuaciones (4.6.7) y (4.6.9) forman un sistema de ecuaciones lineales acopladas. Las ecuaciones para los ordenes superiores se pueden resolver de forma recursiva.

Considerando las condiciones iniciales $q_0(0) = 1$, $q_1(0) = 1$ y $q_{n \geq 2} = 0$ obtenemos

$$q_0(\tau) = \left(\cos\left(\frac{\lambda\tau}{2}\right) + \frac{i\beta}{\lambda} \sin\left(\frac{\lambda\tau}{2}\right) \right) e^{-i(2C_{0101} + \beta/2)\tau} , \quad (4.6.12)$$

$$q_1(\tau) = e^{-iC_{1111}\tau} , \quad (4.6.13)$$

$$q_2(\tau) = -\frac{2iC_{1102}}{\lambda} \sin\left(\frac{\lambda\tau}{2}\right) e^{-i(2C_{2121} + \beta/2)\tau} , \quad (4.6.14)$$

donde $\beta = 2(C_{1111} - C_{0101} - C_{2121})$ y $\lambda = \sqrt{\beta^2 - 4C_{1102}^2}$. De aquí vemos que el período T_0 de $E_0 \propto |q_0|^2$ es igual al período T_2 de $E_2 \propto |q_2|^2$ y su valor es $2\pi/\lambda$.

La solución para el tercer modo excitado es

$$q_3(\tau) = \frac{C_{1102}}{2\gamma\lambda^2(\gamma^2 - \lambda^2)} (a + b e^{i\lambda\tau} + c e^{2i\lambda\tau} + d e^{i(\lambda-\gamma)\tau}) e^{i(-\lambda + 2C_{0101} - 2C_{2121} - C_{1111})\tau} , \quad (4.6.15)$$

con

$$a = 2\gamma(\gamma - \lambda)(C_{1102}C_{2213} + (\beta + \lambda)C_{1203}) , \quad (4.6.16)$$

$$b = 4(\lambda^2 - \gamma^2)(C_{1102}C_{2213} + \beta C_{1203}) , \quad (4.6.17)$$

$$c = 2\gamma(\gamma + \lambda)(C_{1102}C_{2213} + (\beta - \lambda)C_{1203}) , \quad (4.6.18)$$

$$d = -4\lambda^2(C_{1102}C_{2213} + (\beta - \lambda)C_{1203}) , \quad (4.6.19)$$

$$\gamma = -2C_{0101} + C_{1111} + 2C_{2121} - C_{3131} . \quad (4.6.20)$$

La energía para este modo $E_3 \propto |q_3|^2$ no es periódica ya que $\lambda/\gamma = 7\sqrt{3665}/149 \sim 2,84$. Esto implica que no existen retornos de energía exactos, pues los períodos de los primeros modos (hasta $n = 3$) no son conmensurables³, por lo cual no importa cuánto tiempo se espere, el sistema no retornará a su estado inicial.

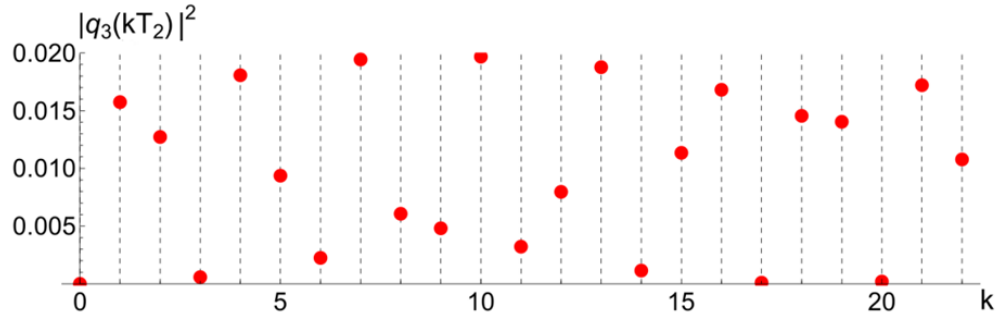


Figura 4.5: Solución analítica de los retornos de energía para condiciones iniciales dominadas por el primer modo excitado. Vemos que existen retornos de energía cuando $k = 3, 6$ y 14 . Es posible ver que existen retornos muy precisos para $k = 17$ y 20 , pero estos no son exactos. Fuente: [15].

³Dos números reales, a y b , que no son cero, son conmensurables sólo cuando la razón a/b es un número racional.

Capítulo 5

Cascadas de energía en un Agujero de Gusano

Este capítulo presenta los resultados originales de esta tesis.

En la referencia [8] se encontró una solución de agujero de gusano asintóticamente AdS para la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet en dimensión $2j + 1$, con $j \geq 2$, y con constante cosmológica negativa. Los modos normales de un campo escalar sobre este espacio fueron estudiados en la referencia [9], de donde se puede observar que es posible obtener un espectro equiespaciado considerando un término de acoplamiento no-minimal proporcional al escalar de curvatura. Debido a esto último, es natural preguntarse si los fenómenos observados en AdS_4 se replican en este espaciotiempo. Cabe notar que la solución de agujero de gusano existe siempre y cuando la teoría posea un único vacío de AdS, por lo cual no es posible estudiar perturbativamente la evolución del campo con *backreaction*, siendo el objetivo de este capítulo el estudio de la teoría con el campo escalar autointeractuante.

5.1. Agujero de gusano asintóticamente AdS

La acción de Einstein-Gauss-Bonnet en cinco dimensiones con constante cosmológica está dada por

$$S [g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G_5} \int \sqrt{-g} [R - 2\Lambda + \alpha (R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\gamma\sigma}R^{\mu\nu\gamma\sigma})] d^5x . \quad (5.1.1)$$

Esta teoría posee una solución de agujero de gusano si la constante de acoplamiento del término de Gauss-Bonnet es tal que la teoría posee un único vacío AdS, es decir, $\alpha\Lambda = -3/4$ [8].

Dicha solución está dada por

$$ds^2 = \ell^2 \left[-\cosh^2(\rho - \rho_0) dt^2 + d\rho^2 + \cosh^2(\rho) d\Sigma_3^2 \right], \quad (5.1.2)$$

con ρ_0 una constante de integración y $\Sigma_3 = S_1 \times H_2$, donde el radio del hiperboloide es $3^{-1/2}$. La métrica (5.1.2) describe a un agujero de gusano estático con una garganta de radio ℓ ubicada en $\rho = 0$. Esta solución conecta dos regiones asintóticamente localmente anti-de Sitter con radio de curvatura $\ell^2 = 4\alpha = -3/\Lambda$.

El escalar de curvatura de este espacio está dado por

$$R = -\frac{20}{\ell^2} + \frac{6}{\ell^2 \cosh^2(\rho)}, \quad (5.1.3)$$

y el escalar de Kretschmann

$$K = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{40}{\ell^2} - \frac{24}{\ell^4 \cosh^2(\rho)} + \frac{36}{\ell^4 \cosh^4(\rho)}. \quad (5.1.4)$$

Por simplicidad, de aquí en adelante utilizaremos $\ell = 1$.

5.2. Modos normales en el agujero de gusano

En esta sección estudiaremos la evolución de un campo escalar de prueba masivo sobre la geometría del agujero de gusano, agregando un término de acoplamiento no-minimal, proporcional al escalar de Ricci. Este problema tiene solución analítica cuando la constante de integración $\rho_0 = 0$, caso que se analiza con detalle en [9] y que reproduciremos en esta sección. Si por el contrario $\rho_0 \neq 0$ el problema se debe resolver con herramientas numéricas, cálculo realizado en [23].

La acción considerada está dada por

$$S[\phi; g_{\mu\nu}] = \int \sqrt{-g} \frac{1}{2} \left(-\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - m^2 \phi^2 - \xi R \phi^2 \right) d^5x, \quad (5.2.1)$$

donde ξ es una constante y R el escalar de Ricci¹. Variando la acción respecto al campo ϕ obtenemos la siguiente ecuación de campo

$$(\square\phi - m^2 - \xi R)\phi = 0, \quad (5.2.2)$$

¹En AdS el escalar de Ricci es constante, por lo cual el término de acoplamiento no-minimal es equivalente a un *shift* en la masa, mientras que en el caso del agujero de gusano el escalar de Ricci no es constante por lo cual el término es no-trivial.

a la que denominaremos ecuación de Klein-Gordon modificada. Utilizando la expresión del operador \square (ver en (3.1.3)) y la solución (5.1.2), en la que

$$\sqrt{-g} = \cosh^4(\rho)\sqrt{\Sigma} , \quad (5.2.3)$$

donde Σ_{ij} corresponde a la métrica de la variedad tridimensional $\Sigma_3 = S_1 \times H_2$ y Σ a su determinante, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \square\phi - (m^2 + \xi R)\phi \\ &= \frac{1}{\cosh^4(\rho)\sqrt{\Sigma}} \left[\partial_t \left(\cosh^4(\rho)\sqrt{\Sigma}g^{tt}\partial_t\phi \right) + \partial_\rho \left(\cosh^4(\rho)\sqrt{\Sigma}g^{\rho\rho}\partial_\rho\phi \right) \right. \\ &\quad \left. + \partial_i \left(\cosh^4(\rho)\sqrt{\Sigma}\frac{1}{\cosh^2(\rho)}\Sigma^{ij}\partial_j\phi \right) \right] - \left(m^2 - 20\xi + \frac{6\xi}{\cosh^2(\rho)} \right) \phi \\ &= -\frac{1}{\cosh^2(\rho)}\partial_t^2\phi + 4\tanh(\rho)\partial_\rho\phi + \partial_\rho^2\phi + \frac{1}{\cosh^2(\rho)}\nabla_{\Sigma_3}^2\phi - m^2\phi + 20\xi\phi - \frac{6\xi}{\cosh^2(\rho)}\phi , \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

donde $\nabla_{\Sigma_3}^2$ denota al operador laplaciano sobre la variedad Σ_3 .

Reemplazando el *ansatz*

$$\phi(t, \rho, \varphi, x, y) = T(t)R(\rho)Y(\varphi, x, y) , \quad (5.2.5)$$

en (5.2.4) obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$0 = \frac{d^2}{dt^2}T(t) + \omega^2T(t) , \quad (5.2.6)$$

$$0 = \nabla_{\Sigma_3}^2Y(\varphi, x, y) + QY(\varphi, x, y) , \quad (5.2.7)$$

$$0 = \frac{d^2}{d\rho^2}R(\rho) + 4\tanh(\rho)\frac{d}{d\rho}R(\rho) + \left(\omega^2 - Q - m^2 + 20\xi - \frac{6\xi}{\cosh^2(\rho)} \right) R(\rho). \quad (5.2.8)$$

La ecuación (5.2.6) es una ecuación de oscilador armónico cuya solución está dada por

$$T(t) = \alpha \cos(\omega t + \beta) , \quad (5.2.9)$$

donde α y β son constantes de integración.

La ecuación (5.2.7) es una ecuación de autovalores para el operador laplaciano sobre Σ_3 , cuya autofunción es Y y su autovalor es Q . Para resolver la ecuación (5.2.8) realizamos el siguiente cambio de variable

$$\tanh(\rho) = 1 - 2z , \quad (5.2.10)$$

de manera que la coordenada $\rho \in (-\infty, \infty)$ es mapeada a $z \in (1, 0)$ y la ecuación toma la siguiente forma

$$-z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}R(z) + (1-2z)\frac{d}{dz}R(z) + \frac{m^2 - 20\xi}{4z(1-z)}R(z) + (-\omega^2 + Q + 6\xi)R(z) = 0. \quad (5.2.11)$$

Esta última es una ecuación diferencial hipergeométrica cuya solución está dada por

$$R(z) = C_1 z^{1+\frac{1}{2}\sqrt{m^2-20\xi+4}}(1-z)^{1-\frac{1}{2}\sqrt{m^2-20\xi+4}} {}_2F_1(a, b; c; z) \\ + C_2 [z(1-z)]^{1-\frac{1}{2}\sqrt{m^2-20\xi+4}} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1; 2-c; z), \quad (5.2.12)$$

donde

$$a := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - 4Q - 24\xi + 9}, \quad (5.2.13a)$$

$$b := \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - 4Q - 24\xi + 9}, \quad (5.2.13b)$$

$$c := 1 + \sqrt{m^2 - 20\xi + 4}, \quad (5.2.13c)$$

y con $C_{1,2}$ constantes de integración.

Pediremos que la solución sea regular en los extremos, es decir que sea finita en $z = 0$ y $z = 1$. Para este análisis consideraremos aquellos casos en que $m^2 \geq 20\xi$.

Imponiendo regularidad en $z = 0$ obtenemos que $C_2 = 0$, de manera que

$$R(z) = C_1 z^{1+\frac{1}{2}\sqrt{m^2-20\xi+4}}(1-z)^{1-\frac{1}{2}\sqrt{m^2-20\xi+4}} {}_2F_1(a, b; c; z). \quad (5.2.14)$$

Utilizando propiedades de las funciones hipergeométricas (ver [17]) podemos reescribir

$$R(r) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} z^{1+\frac{1}{2}\sqrt{m^2-20\xi+4}}(1-z)^{1-\frac{1}{2}\sqrt{m^2-20\xi+4}} {}_2F_1(a, b; a+b+1-c; 1-z) \\ + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} z^{1+\frac{1}{2}\sqrt{m^2-20\xi+4}}(1-z)^{1+\frac{1}{2}\sqrt{m^2-20\xi+4}} {}_2F_1(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-z). \quad (5.2.15)$$

Pidiendo que la solución sea finita en $z = 1$ obtenemos la condición $c-a = -j$ con $j \in \mathbb{N}_0$. A partir de esta última obtenemos el espectro de frecuencias de oscilación del campo, dado por

$$\omega_{j,Q}^2 = \left(j + \frac{1}{2} + \sqrt{m^2 - 20\xi + 4} \right)^2 - \frac{9}{4} + Q + 6\xi. \quad (5.2.16)$$

Así la solución toma la forma

$$R_{j,Q}(z) = C_{j,Q} z^{1+\frac{1}{2}\sqrt{m^2-20\xi+4}}(1-z)^{1-\frac{1}{2}\sqrt{m^2-20\xi+4}} {}_2F_1(a_{j,Q}, b_{j,Q}; c_{j,Q}; z), \quad (5.2.17)$$

donde $a_{j,Q}$, $b_{j,Q}$ y $c_{j,Q}$ son como en (5.2.13) reemplazando ω por $\omega_{j,Q}$ dado en (5.2.16). Además se ha reemplazado C_1 de (5.2.14) por C_j .

A partir de las soluciones obtenidas por medio del método de separación de variables, tenemos que la solución para el campo escalar es

$$\phi(t, z, \varphi, x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \int dQ \phi_{j,Q}(t, z, \varphi, x, y), \quad (5.2.18)$$

donde

$$\phi_{j,Q} = \alpha_{j,Q} \cos(\omega_{j,Q}t + \beta_{j,Q}) R_{j,Q}(z) Y_Q(\varphi, x, y). \quad (5.2.19)$$

5.3. Campo escalar autointeractuante

En esta sección estudiaremos la evolución de un campo escalar masivo sin dependencia angular, considerando una autointeracción cuártica y un término de acoplamiento no-minimal proporcional al escalar de Ricci en la acción, manteniendo el *background* (5.1.2) fijo. La acción para este sistema está dada por

$$S[\phi; g_{\mu\nu}] = \int \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\mu} \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \xi R \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) d^5x, \quad (5.3.1)$$

donde ξ es una constante y R el escalar de Ricci. Variando la acción respecto al campo ϕ obtenemos la siguiente ecuación

$$\square \phi - (m^2 + \xi R) \phi - \frac{\lambda}{3!} \phi^3 = 0. \quad (5.3.2)$$

De la expresión (5.2.16) vemos que un campo escalar sin dependencia angular posee un espectro equiespaciado si $\xi = 3/8$. En adelante nos enfocaremos en este caso.

5.3.1. Método perturbativo estándar

Comenzaremos por resolver este problema utilizando el método perturbativo estándar. A partir de la solución (5.1.2) y la siguiente expansión para el campo escalar

$$\phi(t, \rho) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_{2j+1} \epsilon^{2j+1}, \quad (5.3.3)$$

obtenemos un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas. En efecto, a primer orden en el parámetro ϵ tenemos

$$\ddot{\phi}_1 + L\phi_1 = 0, \quad (5.3.4)$$

donde L , definido como

$$L := -z^2(1-z)^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z(1-z)} \frac{d}{dz} \right) + \frac{m^2 - 15/2}{4z(1-z)} + \frac{9}{4}, \quad (5.3.5)$$

es un operador auto-adjunto sobre el dominio $(1, 0)$ cuya función peso es $-z^{-2}(1-z)^{-2}$. Sus autovalores y autofunciones, a las que denominaremos oscilones del agujero de gusano, son²

$$\omega_j^2 = \left(j + \frac{1}{2} + \sqrt{m^2 - \frac{7}{2}} \right)^2, \quad (5.3.6)$$

$$e_j(z) = C_j z^{1+\frac{1}{2}\sqrt{m^2-\frac{7}{2}}}(1-z)^{1-\frac{1}{2}\sqrt{m^2-\frac{7}{2}}} \times {}_2F_1 \left(-j - \sqrt{m^2 - \frac{7}{2}}, 1 + j + \sqrt{m^2 - \frac{7}{2}}; 1 + \sqrt{m^2 - \frac{7}{2}}; z \right). \quad (5.3.7)$$

donde C_j es la constante que asegura la ortonormalidad y su valor depende de la masa m del campo escalar.

El producto interno de este espacio lo denotaremos como

$$(f, g) := \int_0^1 \frac{f(z)g(z)}{z^2(1-z)^2} dz. \quad (5.3.8)$$

La solución para ϕ_1 está dada por

$$\phi_1(t, z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(\omega_j t + \beta_j) e_j(z). \quad (5.3.9)$$

A tercer orden obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2} + L\phi_3 = S, \quad (5.3.10)$$

donde

$$S = -\frac{\lambda}{24} \frac{\phi_1^3}{z(1-z)}. \quad (5.3.11)$$

Proponemos una solución de la forma

$$\phi_3(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) e_n(z). \quad (5.3.12)$$

Reemplazando la solución de ϕ_3 en (5.3.10) y proyectando sobre la base de autofunciones del operador L obtenemos

$$\ddot{c}_j + \omega_j^2 c_j = S_j, \quad (5.3.13)$$

²Para más detalle ver Apéndice A.2

donde $S_j := (e_j, S)$, es la proyección de S sobre la base de oscilones del agujero de gusano.

Fijaremos la masa del campo escalar tal que su masa efectiva $m_{\text{eff}}^2 = m^2 - 20\xi$ (definida en [9]) sea igual a cero, es decir $m^2 = 15/2$. En este caso el espectro de frecuencias toma la forma $\omega_j = j + 5/2$ y la constante de normalización de (5.3.7) está dada por $2C_j = [(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)(2j+5)]^{1/2}$.

Si la condición inicial del problema consiste en $[\phi, \dot{\phi}]_{t=0} = \epsilon[e_0(x), 0]$, las posibles resonancias, debido a la presencia de $\cos^3(\omega_0 t)$ en la función S , pueden aparecer para los modos $j = 0$ y $j = 5$. Al proyectar sobre la base de autofunciones del operador L , obtenemos que sólo S_0 posee un término resonante, pero el término secular que aparece debido a esta resonancia puede ser removido mediante el método de Poincaré-Lindstedt. En efecto, obtenemos

$$\phi(t, z) = \epsilon \cos \left[\left(\omega_0 + \epsilon^2 \frac{5\lambda}{2464} \right) t \right] e_0(z) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (5.3.14)$$

Por otro lado, si la condición inicial es $[\phi, \dot{\phi}]_{t=0} = \epsilon[e_0(x) + e_1(x), 0]$, podrían existir resonancias para los modos $j = 0, 1, 2, 5, 6, 7, 8$ debido a que la parte temporal de S tiene la forma $(\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t))^3$, pero al proyectar S sobre la base de oscilones obtenemos términos resonantes sólo en los modos $j = 0, 1, 2$. Los términos seculares en c_0 y c_1 pueden ser removidos utilizando el método de Poincaré-Lindstedt, pero el término secular en $c_2(t) \sim t \sin(9t/2)$ no puede ser removido con el método mencionado.

Al igual que en AdS, se puede demostrar que el canal de resonancia para este caso es

$$\omega_j = \omega_{j_1} + \omega_{j_2} - \omega_{j_3}, \quad (5.3.15)$$

donde (j_1, j_2, j_3) son tales que a_{j_1} , a_{j_2} y a_{j_3} son no-nulos en la solución lineal ϕ_1 .

Como ya vimos, a partir de este método obtenemos soluciones que no son válidas a tiempos de orden $\lambda^{-1}\epsilon^{-2}$, razón por la cual aplicaremos el formalismo de dos tiempos para este caso.

5.3.2. Formalismo de dos tiempos

Consideramos la siguiente expansión para el campo escalar, incluyendo la variable de tiempo lento $\tau = \epsilon^2 t$

$$\phi(t, \tau, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^{2j+1} \phi_{2j+1}(t, \tau, z). \quad (5.3.16)$$

Reemplazamos la expansión (5.3.16) en (5.3.2) y revisamos las ecuaciones orden a orden en ϵ . Cabe notar que las derivadas temporales tomarán la forma $\partial_t \rightarrow \partial_t + \epsilon^2 \partial_\tau$ debido a la presencia de la variable τ . A primer orden tenemos:

$$\partial_t^2 \phi_1 + L\phi_1 = 0, \quad (5.3.17)$$

donde el operador L está dado en (5.3.5).

La solución general para (5.3.17) es

$$\phi_1(t, \tau, x) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l(\tau)e^{-i\omega_l t} + \bar{A}_l(\tau)e^{i\omega_l t}) e_l(z), \quad (5.3.18)$$

donde $A_l(\tau)$ son funciones arbitrarias de τ que serán determinadas de acuerdo a las condiciones iniciales del problema, y $\bar{A}_l(\tau)$ denota a su conjugado.

A orden ϵ^3 tenemos

$$\partial_t^2 \phi_3 + L\phi_3 + 2\partial_t \partial_\tau \phi_1 = S(t, \tau, z), \quad (5.3.19)$$

donde

$$S := -\frac{1}{24} \frac{\phi_1^3}{z(1-z)}. \quad (5.3.20)$$

Proponemos una solución para ϕ_3 de la forma:

$$\phi_3(t, \tau, x) = \sum_n^{\infty} (B_n(t, \tau) + \bar{B}_n(t, \tau)) e_n(z). \quad (5.3.21)$$

Proyectando la ecuación (5.3.19) sobre la base de autofunciones del operador L obtenemos la siguiente ecuación

$$\partial_t^2 (B_j + \bar{B}_j) + \omega_j^2 (B_j + \bar{B}_j) - 2i\omega_j (\partial_\tau A_j e^{-i\omega_j t} - \partial_\tau \bar{A}_j e^{i\omega_j t}) = (e_j, S), \quad (5.3.22)$$

con

$$\begin{aligned} (e_j, S) &= \sum_{n,l,m} \frac{\mathcal{S}_{jnmlm}}{3} (A_l e^{-i\omega_l t} + \bar{A}_l e^{i\omega_l t}) (A_m e^{-i\omega_m t} + \bar{A}_m e^{i\omega_m t}) (A_n e^{-i\omega_n t} + \bar{A}_n e^{i\omega_n t}), \\ &= \sum_{n,l,m} \frac{\mathcal{S}_{jnmlm}}{3} (A_l A_m A_n e^{-i(\omega_l + \omega_m + \omega_n)t} + 3A_l A_m \bar{A}_n e^{-i(\omega_l + \omega_m - \omega_n)t} \\ &\quad + 3A_l \bar{A}_m \bar{A}_n e^{-i(\omega_l - \omega_m - \omega_n)t} + \bar{A}_l \bar{A}_m \bar{A}_n e^{-i(-\omega_l - \omega_m - \omega_n)t}), \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

donde

$$\mathcal{S}_{jnmlm} = \frac{\lambda}{8} \int_1^0 \frac{e_j(z) e_n(z) e_l(z) e_m(z)}{z^3 (1-z)^3} dz, \quad (5.3.24)$$

son constantes reales.

Debido a la presencia de términos proporcionales a $e^{\pm i\omega_j t}$ en el lado izquierdo de la ecuación, podemos cancelar los términos resonantes en el lado derecho de la ecuación. En efecto, utilizando la relación de ortonormalidad de las funciones exponenciales obtenemos

$$-2i\omega_j \partial_\tau A_j = \sum_{n,l,m} \frac{\mathcal{S}_{jnlm}}{3} [A_l A_m A_n \delta_{\omega_j, \omega_l + \omega_m + \omega_n} + 3A_l A_m \bar{A}_n \delta_{\omega_j, \omega_l + \omega_m - \omega_n} + 3A_l \bar{A}_m \bar{A}_n \delta_{\omega_j, \omega_l - \omega_m - \omega_n} + \bar{A}_l \bar{A}_m \bar{A}_n \delta_{\omega_j, -\omega_l - \omega_m - \omega_n}]. \quad (5.3.25)$$

Considerando que las integrales \mathcal{S}_{jnlm} , son no-nulas sólo si $\omega_j + \omega_n = \omega_l + \omega_m$, o equivalentemente, $j + n = l + m$, obtenemos

$$-2i\omega_j \partial_\tau A_j = \sum_{\omega_j + \omega_n = \omega_l + \omega_m} \mathcal{S}_{jnlm} A_l A_m \bar{A}_n, \quad (5.3.26)$$

expresión que define un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas para $A_j(\tau)$.

En este caso, también se conservan la energía linealizada

$$E = \sum_{j=0}^{\infty} E_j = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j^2 |A_j|^2, \quad (5.3.27)$$

y el número de partículas

$$N = \sum_{j=0}^{\infty} N_j = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j |A_j|^2, \quad (5.3.28)$$

cantidades que son utilizadas para el monitoreo de la soluciones obtenidas del sistema (5.3.26). Además, como ya es conocido, esta última ecuación es invariante bajo la transformación $A_j(\tau) \rightarrow \epsilon A_j(\tau/\epsilon^2)$.

Para encontrar soluciones al sistema dado por (5.3.26) debemos truncarlo hasta $j = j_{\max}$. Resolveremos las ecuaciones considerando dos modos encendidos inicialmente, el modo fundamental y el primer modo excitado (Figuras 5.1 y 5.2), de donde vemos que se producen cascadas de energía inversas y directas. Si consideramos tres y cuatro modos encendidos inicialmente, también es posible observar dicho fenómeno. Además, la energía en función del número de modo decae de forma exponencial (Fig. 5.3). Para todas las soluciones hemos trabajado con $j_{\max} = 50$.

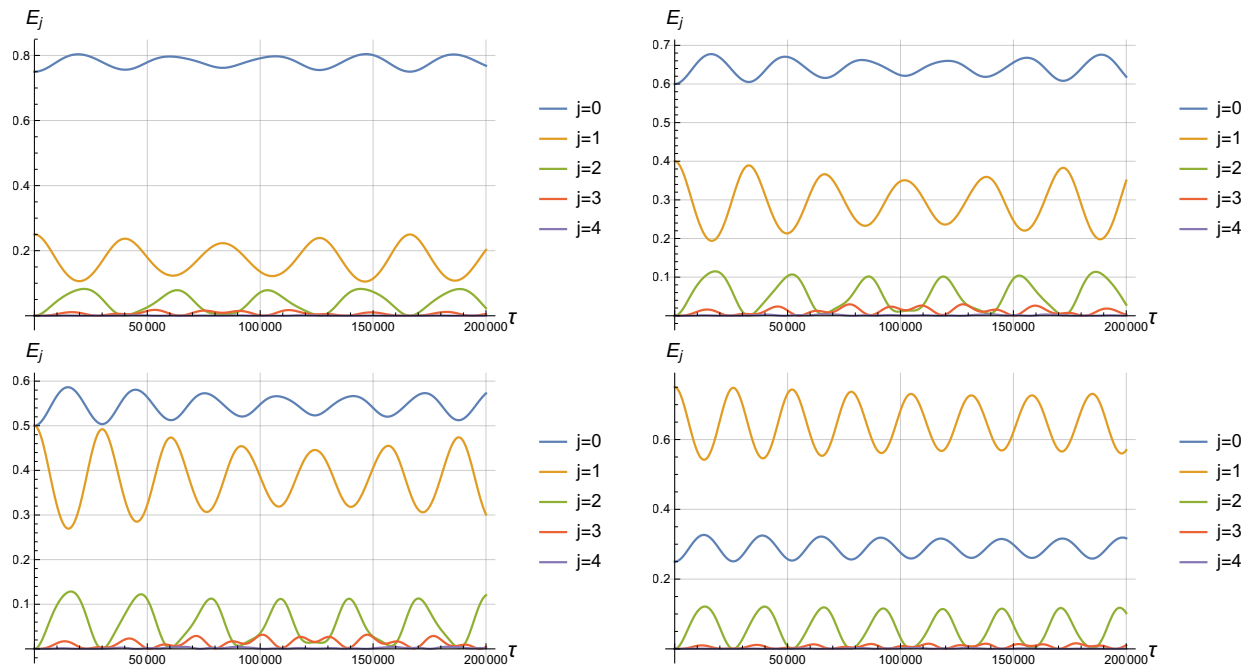


Figura 5.1: Evolución de la energía por modo para diferentes condiciones iniciales con los dos primeros modos de oscilación encendidos. El panel superior izquierdo corresponde a $[E_0(0), E_1(0)] = [3/4, 1/4]$, el panel superior derecho a $[E_0(0), E_1(0)] = [3/5, 2/5]$, el panel inferior izquierdo a $[E_0(0), E_1(0)] = [1/2, 1/2]$ y el panel inferior derecho a $[E_0(0), E_1(0)] = [1/4, 3/4]$. Fuente: elaborada por autora.

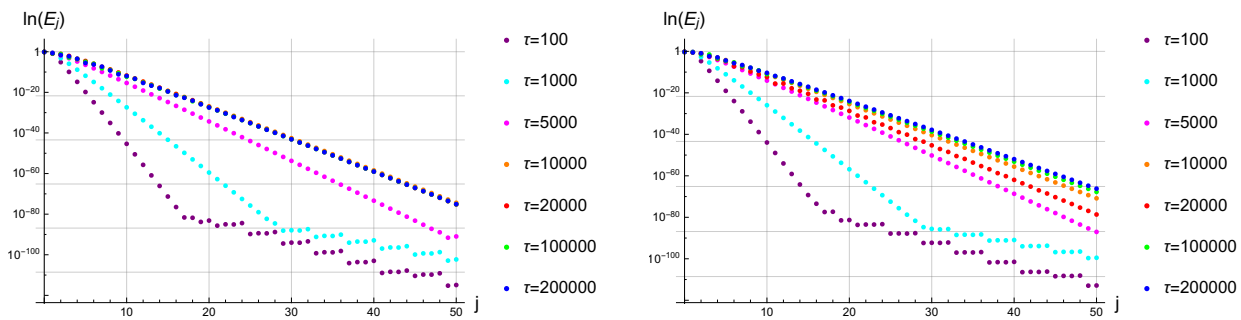


Figura 5.2: Evolución de la energía como función del número de modo para diferentes condiciones iniciales con los dos primeros modos de oscilación encendidos. El panel superior izquierdo $[E_0(0), E_1(0)] = [3/4, 1/4]$, el panel derecho a $[E_0(0), E_1(0)] = [1/2, 1/2]$. Vemos que para tiempos superiores la energía por modo es exponencialmente suprimida, es decir, $E_j \sim e^{-\beta j}$, con β una constante. Fuente: elaborada por autora.

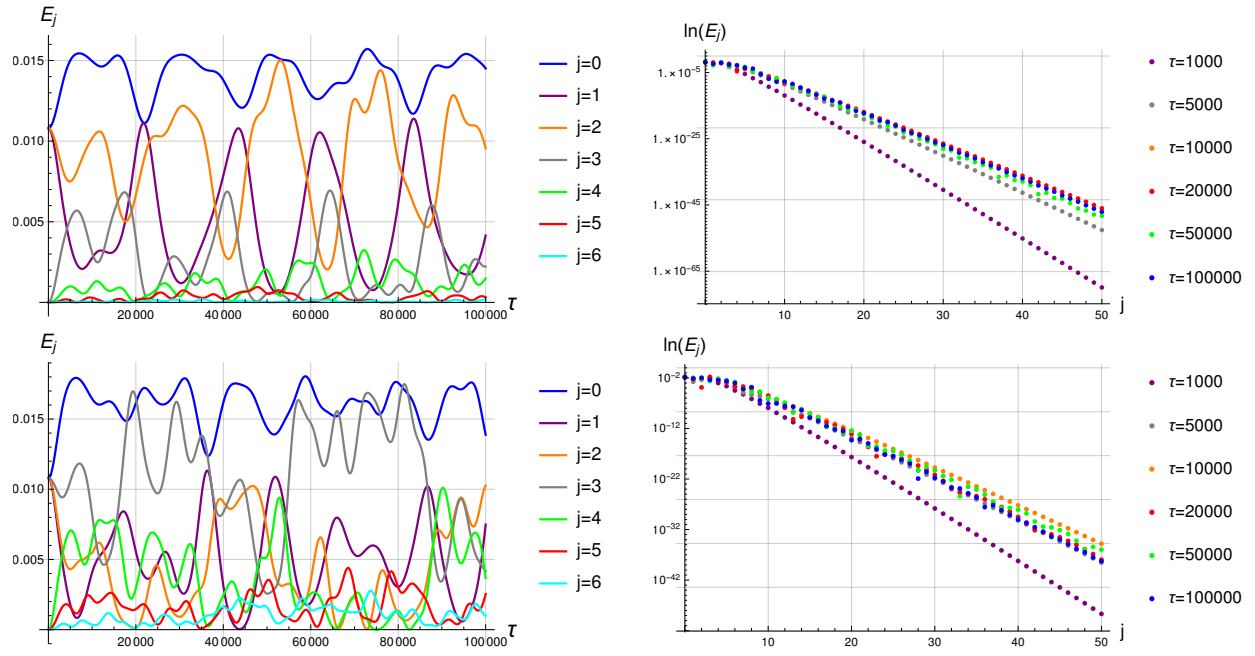


Figura 5.3: Evolución de la energía en función del tiempo y del número de modo para tres (panel superior) y cuatro (panel inferior) modos encendidos inicialmente con la misma energía. Fuente: elaborada por autora.

5.4. Retornos de Energía

De los resultados obtenidos en la sección anterior para dos modos encendidos inicialmente (Fig. 5.1) vemos que hay cierta periodicidad en la evolución de la energía del campo escalar. Es por esto que realizaremos un análisis más detallado de dicho fenómeno para el caso de dos modos encendidos inicialmente y de esta forma determinar si es que es posible ver un retorno exacto o casi exacto de energía para determinadas condiciones iniciales. En particular, análogamente a lo realizado en AdS, revisaremos los casos en que predomina el modo fundamental y el primer modo excitado.

5.4.1. Soluciones dominadas por el modo fundamental

Consideraremos que el espectro es suprimido exponencialmente a medida que uno se aleja del modo fundamental

$$A_n = \delta^n \frac{q_n(\tau)}{\sqrt{\omega_n}}, \quad (5.4.1)$$

con $\delta \ll 1$. Redefinimos la constante S_{nmkl} de la sección anterior como sigue

$$C_{nmkl} = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{S}_{nmkl}}{\sqrt{\omega_n \omega_m \omega_k \omega_l}}, \quad (5.4.2)$$

de manera que (5.3.26) toma la forma

$$i\dot{q}_n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+m} \delta^{2m} C_{nmk, n+m-k} q_k q_{n+m-k} \bar{q}_m , \quad (5.4.3)$$

donde hemos denotado con $\dot{(\)}$ la derivada respecto a la variable τ .

A orden cero en δ obtenemos

$$i\dot{q}_n = \bar{q}_0(\tau) \sum_{k=0}^n C_{n0k, n-k} q_k q_{n-k} . \quad (5.4.4)$$

Para $n = 0$ obtenemos una ecuación diferencial no-lineal para q_0 , mientras que para $n \geq 1$, se obtienen un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales acopladas las que se pueden resolver de forma recursiva.

Utilizando la simetría de escala de (5.3.26) siempre es posible fijar $|q_0|^2 = 1$.

Resolveremos el sistema (5.4.4) con las condiciones iniciales $q_0(0) = 1$, $q_1(0) = 1$ y $q_{n \geq 2} = 0$. De esta forma las soluciones para q_0 y q_1 son

$$q_0 = e^{-iC_{0000}\tau} , \quad q_1 = e^{-2iC_{1010}\tau} , \quad (5.4.5)$$

donde, para el caso del agujero de gusano, $C_{0000} = 1/308$ y $C_{1010} = 1/4004$.

El sistema de ecuaciones (5.4.4) es igual al sistema que aparece en AdS (ver (4.5.4)), y por tanto las soluciones tendrán la misma forma, pero el valor de las constantes $C_{n_0 n_0}$ será diferente. Así, resolviendo las ecuaciones de forma recursiva hasta $n = 6$ obtenemos que los períodos T_j de las energías por modo $E_j \propto |q_j|^2$ son

$$T_2 = 24024\pi , \quad T_3 = 17 T_2 , \quad \pi T_4 = 19 T_3 , \quad T_5 = T_4 , \quad T_6 = 23 T_5 . \quad (5.4.6)$$

De estos resultados podemos ver que los períodos de las energías son conmensurables, lo que asegura un retorno exacto de energía a tiempo finito. Sin embargo se debe notar que los períodos T_j aumentan a medida que j es más grande, por lo tanto mientras más modos se incluyan en el análisis, más tiempo se debe esperar para observar el retorno de energía. Cabe destacar que los modos más altos van suprimidos como δ^j .

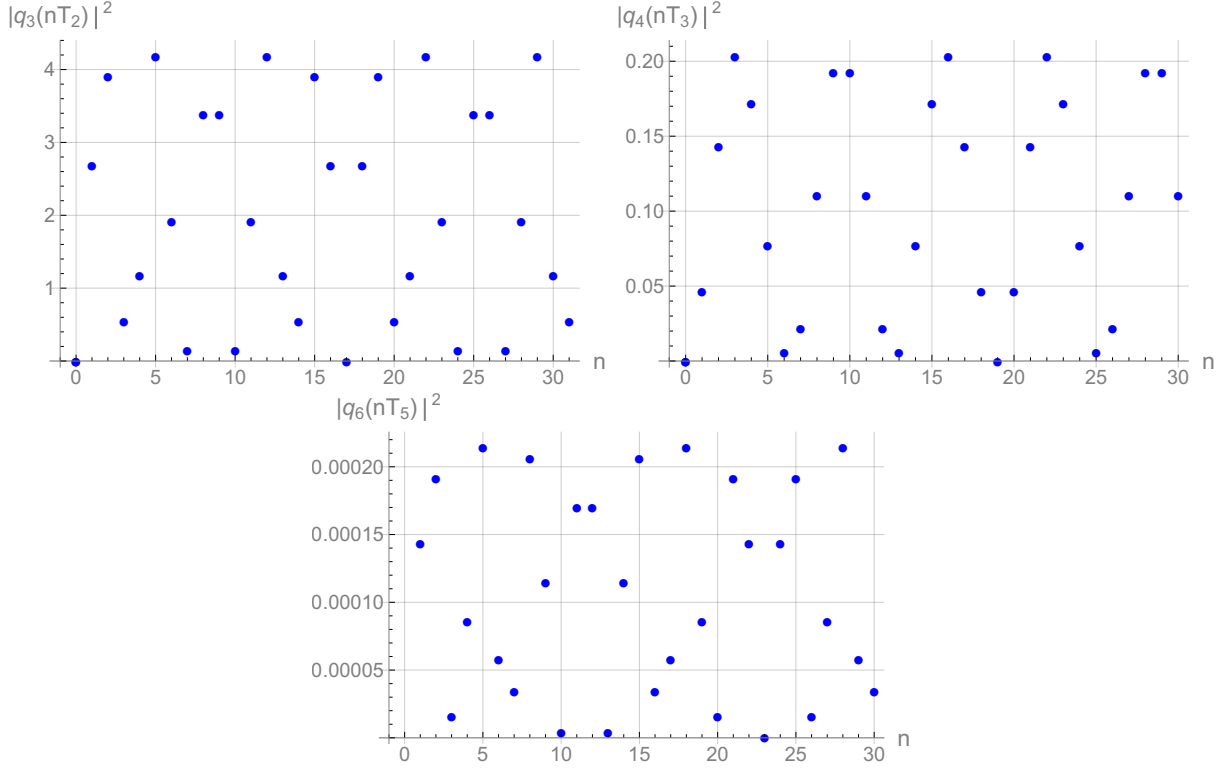


Figura 5.4: Solución analítica de los retornos de energía para condiciones iniciales dominadas por el modo fundamental. Dado a que los modos graficados poseen una amplitud nula inicialmente, se producen retornos cuando los puntos intersectan el eje horizontal. Fuente: elaborada por autora.

5.4.2. Soluciones dominadas por el primer modo excitado

Ahora consideramos que los modos son suprimidos a medida que se alejan del primer modo excitado

$$A_0 = \delta \frac{q_0(\tau)}{\sqrt{\omega_0}}, \quad A_{n \geq 1} = \delta^{n-1} \frac{q_n(\tau)}{\sqrt{\omega_n}}, \quad (5.4.7)$$

con $\delta \ll 1$. Redefiniendo

$$C_{nmkl} = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{S}_{nmkl}}{\sqrt{\omega_n \omega_m \omega_k \omega_l}}, \quad (5.4.8)$$

la ecuación (5.3.26) para el modo 0 toma la forma

$$i\dot{q}_0 = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} C_{0mk,m-k} \bar{q}_m q_k q_{m-k} \delta^{2m-4} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} C_{0m0m} \bar{q}_m q_m q_0 \delta^{2m-2} + C_{0000} \bar{q}_0 q_0 q_0 \delta^2, \quad (5.4.9)$$

y para los modos de orden superior

$$\begin{aligned}
i\dot{q}_n &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+m-1} C_{nmk,n+m-k} \bar{q}_m q_k q_{n+m-k} \delta^{2m-2} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n0k,n-k} \bar{q}_0 q_k q_{n-k} \\
&\quad + 2 \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm0,n+m} \bar{q}_m q_0 q_{n+m} \delta^{2m} + 2C_{0n0n} \bar{q}_0 q_0 q_n \delta^2 .
\end{aligned} \tag{5.4.10}$$

Considerando sólo los términos de orden cero en δ obtenemos la siguiente ecuación para el modo fundamental

$$i\dot{q}_0 = C_{0211} \bar{q}_2 q_1^2 + 2C_{0101} |q_1|^2 q_0 , \tag{5.4.11}$$

mientras que para los modos excitados tenemos

$$i\dot{q}_n = \bar{q}_1 \sum_{k=1}^n C_{n1k,n+1-k} q_k q_{n+1-k} + \bar{q}_0 \sum_{k=1}^{n-1} C_{n0k,n-k} q_k q_{n-k} . \tag{5.4.12}$$

Resolveremos el sistema de ecuaciones diferenciales considerando las condiciones iniciales $q_0(0) = 1$, $q_1(0) = 1$ y $q_{n \geq 2}(0) = 0$. Como en el caso de AdS_4 , utilizando la simetría de escala de (5.3.26) podemos fijar $|q_1|^2 = 1$, de manera que

$$q_1(\tau) = e^{-iC_{1111}\tau} , \tag{5.4.13}$$

donde $C_{1111} = 5/4004$.

De las soluciones obtenidas para los modos $n = 0, 2$ obtenemos que los períodos $T_{0,2}$ de sus energías $E_{0,2} \propto |q_{0,2}|^2$ son iguales ($T_0 = T_2$). Para $n = 3$ la solución obtenida no es periódica, pues q_3 es una superposición de oscilaciones no-conmesurables. Debido a esto, la energía $E_3 \propto |q_3|^2$ tampoco es una función periódica. Esto implica que no existen retornos de energía exactos, pues los períodos de las energías de los primeros modos de oscilación (hasta $n = 3$) no son conmesurables, por lo cual no importa cuanto tiempo se espere, el sistema no retornará a su estado inicial, sólo puede acercarse, incluso con gran precisión, a dicha configuración.

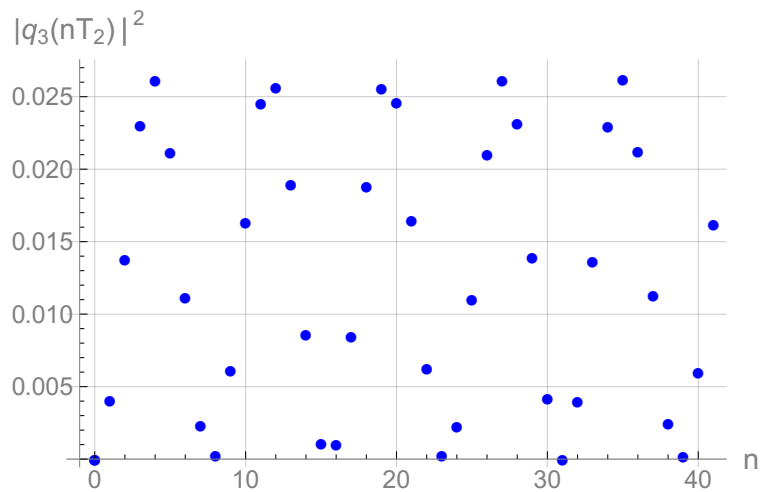


Figura 5.5: Solución analítica de los retornos de energía para condiciones iniciales dominadas por el primer modo excitado. Vemos que existen retornos de energía cuando $n = 15$ y 16 . Es posible ver que existen retornos muy precisos para $n = 8, 23$ y 39 . Cabe notar que para $n = 31$ se visualiza un retorno exacto, pero éste no es real ya que el valor de $|q_3|^2$ es del orden de 10^{-7} , pero no es exactamente cero. Fuente: elaborada por autora.

Capítulo 6

Conclusiones y comentarios

En este capítulo, además de presentar las conclusiones y de resumir los resultados principales de esta tesis, se realizarán algunos comentarios importantes relativos a la investigación.

Hemos mostrado la existencia de un espaciotiempo sobre el cual la dinámica de un campo escalar de prueba, modificando el operador de onda, resulta ser resonante, por lo cual al incluir una no-linealidad obtenemos una rica fenomenología.

Dentro de los fenómenos observados al resolver el problema perturbativamente, vimos que al encender inicialmente los primeros modos de oscilación del campo, la evolución no-lineal del sistema genera el traspaso de energía de dichos modos a modos de frecuencias más altas. Este intercambio energético ocurre en ambas direcciones, es decir, la energía pasa de los modos de frecuencia baja a los de frecuencias altas y viceversa, fenómenos conocidos como cascada de energía directa e inversa, respectivamente. La energía como función del número de modo decae exponencialmente para tiempos superiores, por lo cual no es posible observar un régimen turbulento.

De nuestros resultados fue posible ver que existe cierta periodicidad en las cascadas de energía, por lo cual es natural preguntarse si esa periodicidad existe realmente o es aparente. Considerando el sistema dominado inicialmente por el modo fundamental vimos que esperando el tiempo suficiente es posible que el sistema retorne a su estado inicial, al menos en los modos que poseen energía de forma significativa. Por el contrario, en el caso en que el sistema es dominado inicialmente por el primer modo excitado, no es posible observar dicho retorno de forma exacta, solo se puede lograr de forma aproximada pero con una precisión bastante alta.

A continuación, se harán algunos comentarios acerca del caso con *backreaction*. Es posi-

ble hacer un análisis perturbativo general para la teoría de Lovelock en AdS, utilizando el formalismo de dos tiempos. Las ecuaciones de campo de Lovelock acopladas a un campo escalar están dadas en (2.2.5), donde $T_{\mu\nu}$, en este caso, es el tensor de energía-momentum de un campo escalar sin masa.

Consideramos la métrica

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\cos^2(x)} \left[-e^{-2f(t,x)} A(t,x) dt^2 + \frac{dx^2}{A(t,x)} + \sin^2(x) d\Omega_{S^{n-2}}^2 \right], \quad (6.0.1)$$

y las expansiones

$$\begin{aligned} A(t, \tau, x) &= 1 - \varepsilon^2 A_2(t, \tau, x) + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \\ f(t, \tau, x) &= \varepsilon^2 f_2(t, \tau, x) + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \\ \phi(t, \tau, x) &= \varepsilon \phi_1(t, \tau, x) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

donde $\tau \sim \varepsilon^2 t$ denota al tiempo lento.

A orden ε^0 las ecuaciones de Lovelock determinan el radio de AdS, ℓ , en términos de las constantes α_p , a través de la ecuación (ver [24])

$$P[\ell^{-2}] := \sum_{p=0}^{[D/2]} \frac{\alpha_p (-1)^{p+1}}{(n-2p-1)!} \left(\frac{1}{\ell^2} \right)^p = 0, \quad (6.0.2)$$

que define el polinomio $P[\xi]$. Al siguiente orden obtenemos una ecuación para ϕ_1 , cuya solución es una superposición de oscilones. A orden ε^2 obtenemos las siguientes ecuaciones para las componentes tt , tx y xx :

$$\begin{aligned} (n-2)! \frac{dP[\ell^{-2}]}{d\xi} \left(\frac{A'_2}{\tan x} - \frac{(2\cos^2 x - n + 1)}{\sin^2 x} A_2 \right) &= -\cos^2 x \left(\dot{\phi}_1^2 + \phi_1'^2 \right), \\ \frac{(n-2)! dP[\ell^{-2}]}{2} \frac{\dot{A}}{d\xi} \frac{1}{\tan x} &= -\cos^2 x \phi_1' \dot{\phi}_1, \\ (n-2)! \frac{dP[\ell^{-2}]}{d\xi} \left(\frac{A'_2}{\tan x} - \frac{(2\cos^2 x - n + 1)}{\sin^2 x} A_2 - \frac{2f'_2}{\tan x} \right) &= \cos^2 x \left(\dot{\phi}_1^2 + \phi_1'^2 \right), \end{aligned}$$

donde $()'$ y $(\dot{})$ denotan las derivadas respecto a la coordenada x y t , respectivamente. A este orden no aparecen derivadas respecto al tiempo lento τ . Por lo tanto, las ecuaciones obtenidas a través del formalismo de dos tiempos para la teoría de Lovelock tienen la misma forma funcional que para Relatividad General, siempre que estemos expandiendo en torno a AdS con una curvatura correspondiente a un cero simple de (6.0.2), de manera que $dP[\ell^{-2}]/d\xi$ es no-nulo.

El agujero de gusano analizado en esta tesis es solución a la teoría justamente cuando la derivada del polinomio es nula, y por lo tanto no es posible aplicar el método perturbativo para el caso con *backreaction*, por lo cual es necesario utilizar otras herramientas para resolver dicho problema.

Cabe notar que las ecuaciones para la teoría de Lovelock implican que la dinámica con *backreaction* es universal hasta tiempos de orden ε^2 , la que es capturada por el formalismo de dos tiempos, para valores genéricos de las constantes de acoplamiento. Esto fue demostrado en el caso de Einstein-Gauss-Bonnet en [25], pero como hemos visto aquí, se puede extender hasta cualquier orden en la curvatura dentro de la teoría de Lovelock.

Apéndice A

Problema de Sturm-Liouville

A.1. Espacio AdS

Considerando un campo escalar sin masa y sin momento angular tenemos que la ecuación (4.2.8) toma la forma

$$r^2 \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + 2r \left(1 + 2\frac{r^2}{\ell^2}\right) \frac{dR(r)}{dr} = -\frac{\ell^2 r^2}{\ell^2 + r^2} \omega^2 R(r). \quad (\text{A.1.1})$$

Realizando el cambio de variable

$$r = \ell \tan(x) \quad (\text{A.1.2})$$

la ecuación toma la siguiente forma

$$\sin^2(x) \frac{d^2 R(x)}{dx^2} + 2 \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \frac{dR(x)}{dx} = -\ell^2 \omega^2 \sin^2(x) R(x). \quad (\text{A.1.3})$$

Multiplicando por el factor de integración $1/\cos^2(x)$ obtenemos el siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$-\tan^2(x) \frac{d^2 R(x)}{dx^2} - 2 \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} \frac{dR(x)}{dx} = \ell^2 \tan^2(x) \omega^2 R(x). \quad (\text{A.1.4})$$

A partir de este problema definimos

$$L := -\frac{1}{\tan^2(x)} \frac{d}{dx} \left(\tan^2(x) \frac{d}{dx} \right), \quad (\text{A.1.5})$$

el que es un operador esencialmente autoadjunto para condiciones de borde reflectantes. A partir de (A.1.4) vemos que la función peso para este caso es

$$w(x) = \tan^2(x) \quad (\text{A.1.6})$$

de manera que el producto interior está dado por

$$(g, h) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) g(x) \tan^2(x) dx, \quad (\text{A.1.7})$$

donde g y h son funciones arbitrarias.

Las autofunciones y autovalores de L son

$$e_j = d_j \cos^3(x) {}_2F_1\left(-j, 3+j, \frac{3}{2}; \sin^2(x)\right), \quad (\text{A.1.8})$$

$$\omega_j = \frac{3}{\ell} + \frac{2j}{\ell}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (\text{A.1.9})$$

donde

$$d_j = \sqrt{\frac{16(j+1)(j+2)}{\pi}}, \quad (\text{A.1.10})$$

es el factor que asegura ortonormalidad de las autofunciones, a las que denominaremos oscilones.

A.2. Agujero de gusano

Considerando un campo escalar masivo y sin dependencia angular la ecuación (5.2.8) toma la forma

$$\frac{d^2}{d\rho^2} R(\rho) + 4 \tanh(\rho) \frac{d}{d\rho} R(\rho) - \left(m^2 - 20\xi + \frac{6\xi}{\cosh^2(\rho)} \right) R(\rho) = -\frac{\omega^2}{\cosh^2(\rho)} R(\rho). \quad (\text{A.2.1})$$

Realizando el cambio de variable $\tanh(\rho) = 1 - 2z$, con $z \in (1, 0)$ y multiplicando por el factor de integración $-4^{-1}z^{-3}(1-z)^{-3}$ obtenemos

$$-\frac{1}{z(1-z)} \frac{d^2 R(z)}{dz^2} - \frac{(2z-1)}{z^2(1-z)^2} \frac{dR(z)}{dz} + \frac{m^2 - 20\xi}{4z^3(1-z)^3} R(z) + \frac{6\xi}{z^2(1-z)^2} R(z) = \frac{1}{z^2(1-z)^2} \omega^2 R(z). \quad (\text{A.2.2})$$

A partir de esta última expresión definimos el operador L como

$$L := -z^2(1-z)^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z(1-z)} \frac{d}{dz} \right) + \frac{m^2 - 20\xi}{4z(1-z)} + 6\xi, \quad (\text{A.2.3})$$

cuya función peso, de acuerdo a (A.2.2), es

$$w(z) = -\frac{1}{z^2(z-1)^2}, \quad (\text{A.2.4})$$

de manera que el producto interior está dado por

$$(g, h) = -\int_1^0 \frac{g(z)h(z)}{z^2(z-1)^2} dz, \quad (\text{A.2.5})$$

donde g y h son funciones arbitrarias.

Los autovalores y autofunciones del operador L son

$$\omega_j^2 = \left(j + \frac{1}{2} + \sqrt{m^2 - 20\xi + 4} \right)^2 - \frac{9}{4} + 6\xi, \quad (\text{A.2.6})$$

$$e_j(z) = C_j z^{1+\frac{1}{2}\sqrt{m^2-20\xi+4}} (1-z)^{1-\frac{1}{2}\sqrt{m^2-20\xi+4}} {}_2F_1(a_j, b_j; c_j; z), \quad (\text{A.2.7})$$

con $j \in \mathbb{N}_0$, donde C_j es una constante que asegura la ortonormalidad de las autofunciones, la que depende del valor de la masa m , y

$$a_j := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_j^2 - 24\xi + 9}, \quad (\text{A.2.8a})$$

$$b_j := \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_j^2 - 24\xi + 9}, \quad (\text{A.2.8b})$$

$$c_j := 1 + \sqrt{m^2 - 20\xi + 4}. \quad (\text{A.2.8c})$$

En el caso particular en que $\xi = 3/8$ el operador L toma la forma

$$L := -z^2(1-z)^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z(1-z)} \frac{d}{dz} \right) + \frac{m^2 - 15/2}{4z(1-z)} + \frac{9}{4}, \quad (\text{A.2.9})$$

y sus autovalores y autofunciones son

$$\omega_j = j + \frac{1}{2} + \sqrt{m^2 - \frac{7}{2}}, \quad (\text{A.2.10})$$

$$e_j(z) = C_j z^{1+\frac{1}{2}\sqrt{m^2-\frac{7}{2}}} (1-z)^{1-\frac{1}{2}\sqrt{m^2-\frac{7}{2}}} \times {}_2F_1 \left(-j - \sqrt{m^2 - \frac{7}{2}}, 1 + j + \sqrt{m^2 - \frac{7}{2}}; 1 + \sqrt{m^2 - \frac{7}{2}}; z \right). \quad (\text{A.2.11})$$

Apéndice B

Método de Poincaré-Lindstedt en el péndulo no lineal

Para comprender de mejor forma el método de Poincaré-Lindstedt mostraremos su aplicación en el caso de la ecuación para un péndulo simple considerando una aproximación que incluya términos no lineales.

B.1. Péndulo simple

Consideremos una masa m suspendida por una cuerda (sin masa) de largo l . Para un desplazamiento angular θ de la masa tenemos que la distancia recorrida por ella a lo largo del arco de circunferencia de radio l , es $l\theta$. De esta forma tenemos que la velocidad angular es $l\frac{d\theta}{dt}$ y la aceleración angular es $l\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Además, para un desplazamiento θ , hay una fuerza tangencial a la trayectoria de la masa que actúa sobre ésta, igual a $-mg\sin(\theta)$. Utilizando la segunda ley de Newton tenemos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) . \quad (\text{B.1.1})$$

Para resolver esta ecuación, consideramos la expansión en serie de potencias de la función seno hasta orden cúbico, es decir,

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \mathcal{O}(\theta^5) . \quad (\text{B.1.2})$$

A primer orden en θ obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 . \quad (\text{B.1.3})$$

expresión que corresponde a la ecuación de un oscilador armónico simple con frecuencia $\omega = \sqrt{g/l}$ y cuya solución es de la forma

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{B.1.4})$$

donde A y φ son constantes de integración. Si consideramos la expansión de la función seno hasta primer orden, la solución (B.1.4) es válida cuando los valores de θ no superan los 17° .

A tercer orden, el ángulo θ también está restringido a ciertos valores (menores a 45°), por lo cual introducimos un parámetro de control λ , con $\lambda \in]0, 1]$, que permite asegurar la validez de la ecuación. Así, la igualdad (B.1.1) toma la forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta - \omega^2\frac{\lambda^2}{6}\theta^3 = 0 . \quad (\text{B.1.5})$$

Definimos $\epsilon := \lambda^2/6$, de manera que:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta - \epsilon\omega^2\theta^3 = 0 , \quad (\text{B.1.6})$$

donde hemos denotado la derivada temporal de θ con $\dot{\theta}$.

La ecuación (B.1.6) es no lineal en la variable θ y para resolverla utilizaremos un esquema perturbativo.

B.1.1. Esquema perturbativo

Consideremos que podemos escribir la solución

$$\theta = \theta_0 + \epsilon\theta_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) , \quad (\text{B.1.7})$$

luego, reemplazándola en (B.1.6)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\theta_0 + \epsilon\theta_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) + \omega^2(\theta_0 + \epsilon\theta_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) - \epsilon\omega^2(\theta_0 + \epsilon\theta_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2))^3 &= 0 , \\ \ddot{\theta}_0 + \epsilon\ddot{\theta}_1 + \omega^2\theta_0 + \epsilon\omega^2\theta_1 - \epsilon\omega^2\theta_0^3 + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0 , \\ \ddot{\theta}_0 + \omega^2\theta_0 + \epsilon(\ddot{\theta}_1 + \omega^2\theta_1 - \omega^2\theta_0^3) + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{B.1.8})$$

Dado que ϵ es fijo pero arbitrario, obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales acopladas

$$\ddot{\theta}_0 + \omega^2\theta_0 = 0 \quad (\text{B.1.9})$$

$$\ddot{\theta}_1 + \omega^2\theta_1 = \omega^2\theta_0^3 \quad (\text{B.1.10})$$

Vemos que la igualdad (B.1.9) es una ecuación de oscilador armónico simple, mientras que la igualdad (B.1.10) es una ecuación de oscilador armónico forzado, donde el forzamiento depende de la solución de θ_0 , que actúa como fuente.

La solución para la ecuación (B.1.9) es conocida y está dada por (B.1.4). Reemplazamos esta solución en (B.1.10) obteniendo

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 + \omega^2\theta_1 &= \omega^2 A^3 \cos^3(\omega t + \varphi) , \\ \ddot{\theta}_1 + \omega^2\theta_1 &= \frac{A^3\omega^2}{4} \cos(3(\omega t + \varphi)) + \frac{3A^3\omega^2}{4} \cos(\omega t + \varphi) .\end{aligned}\quad (\text{B.1.11})$$

De esta última expresión vemos que al descomponer el término de forzamiento obtenemos una resonancia.

La ecuación (B.1.11) es una ecuación diferencial lineal inhomogénea, por lo cual su solución se puede obtener como la suma de la solución a la ecuación homogénea y dos soluciones particulares, es decir

$$\theta_1 = \theta_1^h + \theta_1^{p1} + \theta_1^{p2} , \quad (\text{B.1.12})$$

donde θ_1^h corresponde a la solución de la ecuación homogénea, θ_1^{p1} y θ_1^{p2} a las soluciones particulares.

(a) La ecuación homogénea está dada por

$$\ddot{\theta}_1^h + \omega^2\theta_1^h = 0 , \quad (\text{B.1.13})$$

la que corresponde a la ecuación del oscilador armónico y por tanto su solución es

$$\theta_1^h = B \cos(\omega t + \beta) , \quad (\text{B.1.14})$$

con B y β constantes de integración.

(b) La solución θ_1^{p1} debe satisfacer

$$\ddot{\theta}_1^{p1} + \omega^2\theta_1^{p1} = \frac{A^3\omega^2}{4} \cos(3(\omega t + \varphi)) . \quad (\text{B.1.15})$$

Proponemos una solución de la forma

$$\theta_1^{p1} = a \cos[3(\omega t + \varphi)] , \quad (\text{B.1.16})$$

reemplazando en (B.1.15) obtenemos que $a = -A^3/32$, así

$$\theta_1^{p1} = -\frac{A^3}{32} \cos[3(\omega t + \varphi)] . \quad (\text{B.1.17})$$

(c) Por otro lado la solución θ_1^{p2} debe satisfacer la ecuación

$$\theta_2^{\ddot{p}2} + \omega^2 \theta_1^{p2} = \frac{3A^3\omega^2}{4} \cos(\omega t + \varphi) , \quad (\text{B.1.18})$$

Proponemos una solución de la forma

$$\theta_1^{p2} = bt \sin(\omega t + \varphi) , \quad (\text{B.1.19})$$

reemplazando en (B.1.18) obtenemos $b = 3A^3\omega/8$, así

$$\theta_1^{p2} = \frac{3A^3\omega}{8} t \sin(\omega t + \varphi) . \quad (\text{B.1.20})$$

De esta forma,

$$\theta_1(t) = B \cos(\omega t + \beta) - \frac{A^3}{32} \cos[3(\omega t + \varphi)] + \frac{3A^3\omega}{8} t \sin(\omega t + \varphi) . \quad (\text{B.1.21})$$

Así, obtenemos que la solución de θ está dada por

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + \epsilon \left[B \cos(\omega t + \beta) - \frac{A^3}{32} \cos[3(\omega t + \varphi)] + \frac{3A^3\omega}{8} t \sin(\omega t + \varphi) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \quad (\text{B.1.22})$$

Consideramos las siguientes condiciones iniciales

$$\theta(t)|_{t=0} = 1 , \quad (\text{B.1.23})$$

$$\dot{\theta}(t)|_{t=0} = 0 . \quad (\text{B.1.24})$$

De la condición $\dot{\theta}|_{t=0} = 0$ tenemos que $\dot{\theta}_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}_0$, de manera que $\varphi = 0$ y $\beta = 0$. Por otro lado, de la condición $\theta|_{t=0} = 1$ tenemos que $\theta_0 = 1$ y $\theta_j = 0 \forall j \in \mathbb{N}$, por lo tanto $A = 1$ y $B = A^3/32$.

De esta forma, tenemos que

$$\theta(t) = \cos(\omega t) + \epsilon \left[\frac{1}{32} \cos(\omega t) - \frac{1}{32} \cos(3\omega t) + \frac{3\omega}{8} t \sin(\omega t) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \quad (\text{B.1.25})$$

Vemos que la solución (B.1.25) tiene un término secular, es decir, un término de la forma $t \sin(\omega t)$. El método de Poincaré-Lindstedt nos permite reescribir el término secular a partir de la siguiente igualdad

$$\cos[(\omega + \alpha\epsilon)t] + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \cos(\omega t) - \epsilon\alpha t \sin(\omega t) + \mathcal{O}(\epsilon^2) , \quad (\text{B.1.26})$$

donde α es una constante.

Utilizando los términos apropiados de (B.1.25), reescribimos

$$\cos(\omega t) + \epsilon \frac{3\omega}{8} t \sin(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \cos \left[\left(\omega - \frac{3\omega\epsilon}{8} \right) t \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \quad (\text{B.1.27})$$

Finalmente tenemos

$$\theta(t) = \cos \left[\left(\omega - \frac{3\omega\epsilon}{8} \right) t \right] + \frac{\epsilon}{32} [\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)] + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \quad (\text{B.1.28})$$

Por lo tanto, la solución de la función θ , hasta orden ϵ , es una superposición unidimensional de oscilaciones armónicas.

Bibliografía

- [1] J. M. Maldacena, *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999) [*Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998)] doi:10.1023/A:1026654312961, 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a1 [hep-th/9711200].
- [2] G. Martinon, arXiv:1708.05600 [gr-qc].
- [3] P. Basu, C. Krishnan and A. Saurabh, *Int. J. Mod. Phys. A* **30**, no. 21, 1550128 (2015) doi:10.1142/S0217751X15501286 [arXiv:1408.0624 [hep-th]].
- [4] M. Maliborski, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 221101 (2012) doi:10.1103/PhysRevLett.109.221101 [arXiv:1208.2934 [gr-qc]].
- [5] A. Biasi, P. Bizon, B. Craps and O. Evnin, *Phys. Rev. E* **98**, no. 3, 032222 (2018) doi:10.1103/PhysRevE.98.032222 [arXiv:1805.01775 [cond-mat.quant-gas]].
- [6] P. Bizoń, B. Craps, O. Evnin, D. Hunik, V. Luyten and M. Maliborski, *Commun. Math. Phys.* **353**, no. 3, 1179 (2017) doi:10.1007/s00220-017-2896-8 [arXiv:1608.07227 [math.AP]].
- [7] O. Evnin, H. Demirchian and A. Nersessian, *Phys. Rev. D* **97**, no. 2, 025014 (2018) doi:10.1103/PhysRevD.97.025014 [arXiv:1711.03297 [hep-th]].
- [8] G. Dotti, J. Oliva and R. Troncoso, *Phys. Rev. D* **75**, 024002 (2007) doi:10.1103/PhysRevD.75.024002 [hep-th/0607062].
- [9] D. H. Correa, J. Oliva and R. Troncoso, *JHEP* **0808**, 081 (2008) doi:10.1088/1126-6708/2008/08/081 [arXiv:0805.1513 [hep-th]].
- [10] D. Lovelock, *J. Math. Phys.* **12**, 498 (1971). doi:10.1063/1.1665613
- [11] P. Bizon and A. Rostworowski, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 031102 (2011) doi:10.1103/PhysRevLett.107.031102 [arXiv:1104.3702 [gr-qc]].
- [12] V. Balasubramanian, A. Buchel, S. R. Green, L. Lehner and S. L. Liebling, *Phys. Rev. Lett.* **113**, no. 7, 071601 (2014) doi:10.1103/PhysRevLett.113.071601 [arXiv:1403.6471 [hep-th]].

- [13] S. R. Green, A. Maillard, L. Lehner and S. L. Liebling, Phys. Rev. D **92**, no. 8, 084001 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.084001 [arXiv:1507.08261 [gr-qc]].
- [14] A. Buchel, S. R. Green, L. Lehner and S. L. Liebling, Phys. Rev. D **91**, no. 6, 064026 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.064026 [arXiv:1412.4761 [gr-qc]].
- [15] A. Biasi, B. Craps and O. Evnin, arXiv:1810.04753 [hep-th].
- [16] Natsuume M. (2015), “*The AdS Spacetime: AdS/CFT Duality User Guide*”, Lecture Notes in Physics, vol 903. Springer, Tokyo, Ch. 6.
- [17] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1972) “*Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*”, 9th printing. New York: Dover, Ch. 15, pp. 555-566.
- [18] Drazin, P.G. (1992), “*Nonlinear systems*”, Cambridge University Press, ISBN 0-521-40668-4, pp. 181–186.
- [19] I. S. Yang, Phys. Rev. D **91**, no. 6, 065011 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.065011 [arXiv:1501.00998 [hep-th]].
- [20] Mark J. Ablowitz, (2011), “*Nonlinear Dispersive Waves: Asymptotic Analysis and Solitons*”, Cambridge University Press, ISBN: 1107012546, pp. 81-86.
- [21] B. Craps, O. Evnin and J. Vanhoof, JHEP **1410**, 048 (2014) doi:10.1007/JHEP10(2014)048 [arXiv:1407.6273 [gr-qc]].
- [22] B. Craps, O. Evnin and J. Vanhoof, JHEP **1501**, 108 (2015) doi:10.1007/JHEP01(2015)108 [arXiv:1412.3249 [gr-qc]].
- [23] O. Fierro, D. Narbona, J. Oliva, C. Quijada and G. Rubilar, arXiv:1812.02089 [hep-th].
- [24] H. Maeda, S. Willison and S. Ray, Class. Quant. Grav. **28**, 165005 (2011) doi:10.1088/0264-9381/28/16/165005 [arXiv:1103.4184 [gr-qc]].
- [25] A. Buchel, S. R. Green, L. Lehner and S. L. Liebling, arXiv:1410.5381 [hep-th].