

L. Tamm

INSTITUT FÜR PHYSIK DER UNIVERSITÄT BASEL

Das  $q^2\bar{q}^2$  - System im Rahmen  
des MIT Bagmodells

Diplomarbeit von Petr Zimak

Ausgeführt von Anfang April 1983

bis Ende Juli 1983

unter der Leitung von PD Dr. R. D. Viollier

## INHALT

### I : Theorie

1.1	Allgemeines	1
1.2	QCD, M.I.T. - Bagmodell	5
1.2.1	Die freien Feldgleichungen	7
1.2.2	Quantisierung	13
1.2.3	Zwei-Fermionen-Wechselwirkung	14

### II : Anwendungen

2.1	Das Zwei-Teilchen-System	20
2.2	Das $q^2 \bar{q}^2$ - System	24
2.2.1	Zustände in der $q^2 \bar{q}^2$ - Basis	24
2.2.2	C- und G-Parität	28
2.2.3	Die Dimeson-Basis	34
2.2.4	Wechselwirkung	37
2.2.5	Das Baryoniumspektrum	42
2.2.6	Zerfälle und Energiebreiten	43
2.2.7	Interpretation	47

Anhang	51
--------	----

## EINLEITUNG

Nachdem die Physiker die Vielfalt der Atome auf nur drei "elementare" Teilchen - Proton, Neutron und Elektron - zurückführen konnten, sahen sie sich kurze Zeit später vor der Explosion der Anzahl der Hadronen, zu denen das Proton und das Neutron gehören. Die Struktur dieses neu entstandenen "Teilchenzoo's" konnte nur dann verstanden werden, wenn die Hadronen ihrerseits als zusammengesetzte Systeme betrachtet wurden. Ihre Bausteine nannte man Quarks. Zuerst als rein mathematische Gebilde eingeführt, konnten sie sich nach einigen Experimenten als physikalisch reale Teilchen behaupten, die allerdings eine Besonderheit haben : Sie sind nicht direkt beobachtbar (confinement). Um die Konsistenz des Modells zu wahren, musste den Quarks ein neuer Freiheitsgrad zugesprochen werden, der sog. Color (Farbe). Die ihm zugrundegelegte Symmetrie ist die  $SU(3)_c$ . Es zeigt sich, dass die Theorie, die diesen Freiheitsgrad als bestimmend für die Quarkdynamik annimmt, einigen Erfolg in der Erklärung bereits bekannter und der Voraussage neuer Phänomene hat. Sie heisst Quantenchromodynamik (QCD). Als eine Eichtheorie benötigt sie Eichfelder, die die Wechselwirkung zwischen den Teilchen vermitteln. In der QCD sind dies die acht Gluonen.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Anwendung der QCD. Der erste Teil enthält einen Ueberblick über die Theorie. Nach einigen Bemerkungen zur Störungsrechnung wenden wir uns insbesondere der "bagged" - QCD zu. In Abschnitt 1.2 geben wir die Lösungen der freien Feldgleichungen an sowie ihre Quantisierung. Danach behandeln wir die QCD in erster Ordnung Störungsrechnung in der U-Matrix.

Im Hinblick auf unsere Anwendungen beschränken wir uns dabei auf Systeme, die keine reellen Gluonen enthalten.

Im zweiten Teil leiten wir aus der Theorie konkrete Aussagen ab. Wir berechnen in 2.1 die Zwei-Teilchen-Wechselwirkung und daraus das  $q\bar{q}$ -Mesonenspektrum. Abschnitt 2.2 enthält das Hauptthema dieser Arbeit : Die Behandlung des  $q^2\bar{q}^2$ -Systems, das auch Baryonium genannt wird. Wir konstruieren explizit die Color-, Spin- und Isospinzustände in der Diquark-Antidiquark-Basis und bestimmen ihre C- und G-Parität. Die Baryoniumzustände werden auch in der Dimeson-Basis angeschrieben, da dies später gebraucht wird. Als Nächstes berechnen wir das nonstrange-Baryoniumspektrum, wobei alle Wechselwirkungen zweiter Ordnung in  $g$  berücksichtigt werden : Ein-Gluon-Austausch und Annihilation. Nachdem auch die Zerfälle vorausgesagt wurden, vergleichen wir die theoretischen Angaben mit bekannten Mesonenresonanzen sowie einem Experiment, in welchem gezielt nach Baryonium gesucht wurde. Wir werden eine gute Uebereinstimmung feststellen können.

Im Anhang beweisen wir einige nützliche Beziehungen von  $SU(N)$  - Generatoren, die viele Rechnungen erleichtern.

## TEIL I : THEORIE

### 1.1 Allgemeines

Wir geben eine kurze Zusammenfassung einiger wichtiger Ergebnisse aus der Störungsrechnung, von denen in der Folge meist unerwähnt Gebrauch gemacht wird.

Die Größen des Schrödinger-Bildes  $|\psi(t)\rangle$ ,  $H$ ,  $O$  (allg. Operator), die die Schrödinger-Gleichung erfüllen

$$i \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\psi(t)\rangle$$

werden nach der Aufspaltung  $H = H_0 + V$  durch die unitäre Transformation  $W$

$$W(t)^+ = e^{-iH_0 t}$$

ins Wechselwirkungs-Bild übersetzt

$$|\psi(t)\rangle \rightarrow |\phi(t)\rangle = W(t) |\psi(t)\rangle$$

$$O \rightarrow O(t) = W(t) O W(t)^+$$

Sie gehorchen den Beziehungen

$$i \frac{\partial |\phi(t)\rangle}{\partial t} = H_I(t) |\phi(t)\rangle \quad (1.1)$$

$$i \frac{\partial O(t)}{\partial t} = [O(t), H_0]$$

mit  $H_I(t) = W(t) V W(t)^+$ . Beachte  $H_0(t) = H_0$ .

Gleichung (1.1) kann formal integriert werden, d.h. in eine Integralgleichung umgeschrieben werden

$$|\phi(t)\rangle = |\phi(t_0)\rangle - i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') |\phi(t')\rangle$$

Man führt die U-Matrix bzw. den Zeitentwicklungsoperator ein, der die Lösungen dieser Gleichung zu einer beliebigen Zeit  $t$  generiert

$$|\phi(t)\rangle = U(t, t_0) |\phi(t_0)\rangle$$

Er hat die Form

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$P$  bezeichnet das Dyson'sche zeitgeordnete Produkt.

Nehmen wir an, das Eigenwertproblem von  $H_0$  sei bereits gelöst

$$H_0 |\phi_0\rangle = E_0 |\phi_0\rangle$$

Uns interessiert das volle Problem

$$H |\phi\rangle = (H_0 + H_I) |\phi\rangle = E |\phi\rangle$$

Wir stellen uns vor, dass es eine Zeit gab (z.B.  $t = -\infty$ ), zu der das System ungestört war :  $H(t = -\infty) = H_0$ .

Danach wurde die Wechselwirkung adiabatisch eingeschaltet, sodass sie zur Zeit  $t = 0$  voll entwickelt ist

$$H_{\varepsilon}(t) = H_0 + e^{\varepsilon t} H_I(t) \quad (\varepsilon > 0, t \leq 0)$$

und 
$$H(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} H_{\varepsilon}(t)$$

Auf diese Weise konstruieren wir die Grössen, über die uns physikalische Aussagen interessieren (d.h. Grössen im gestörten oder wechselwirkenden System)

$$|\phi_0\rangle \rightarrow |\phi\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} U_{\varepsilon}(0, -\infty) |\phi_0\rangle$$

$$E_0 \rightarrow E = E_0 + \frac{\langle \phi_0 | H_I(0) | \phi \rangle}{\langle \phi_0 | \phi \rangle}$$

$U_{\varepsilon}$  erhält man aus  $U$ , indem jedes  $H_I(t_k)$  durch  $e^{\varepsilon t_k} H_I(t_k)$  ersetzt wird. Die Wechselwirkung bewirkt also gegenüber dem ungestörten System einen Energieshift

$$E - E_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{\langle \phi_0 | H_I(0) U_{\varepsilon}(0, -\infty) | \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0 | U_{\varepsilon}(0, -\infty) | \phi_0 \rangle}$$

Dies kann auch geschrieben werden als

$$E - E_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \langle \phi_0 | H_I(0) U_{\varepsilon}(0, -\infty) | \phi_0 \rangle_c$$

$c$  steht für "connected" und bedeutet die Einschränkung auf verbundene Feynman-Graphen (siehe weiter unten).

Wären wir in der Lage, die Reihe (1.2) für  $U$  aufzusummieren, so hätten wir die volle Theorie exakt gelöst. In der Praxis gelingt dies jedoch nicht. An dieser Stelle setzt die Störungsrechnung ein: Wir glauben vernünftige Resultate zu erhalten, indem wir nur die ersten paar

Reihenglieder in  $U$  berücksichtigen. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf die ersten zwei (Erste Ordnung Störungsrechnung in  $U$ ).

$$U_E(0, -\infty) = 1 - i \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} P(H_I(t))$$

$$\begin{aligned} E - E_0 &= \langle \phi_0 | H_I(0) | \phi_0 \rangle \\ &- i \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} \langle \phi_0 | P(H_I(0) H_I(t)) | \phi_0 \rangle \end{aligned}$$

Das Dyson'sche zeitgeordnete Produkt  $P$ , das im Falle, wenn Fermionenfelder nur in geraden Potenzen vorkommen, mit dem Wick'schen zeitgeordneten Produkt  $T$  übereinstimmt, kann nach dem Wick'schen Theorem in Normalprodukte entwickelt werden. Die Wickzerlegung hat in der Feldtheorie eine grosse Bedeutung, da ihren einzelnen Termen physikalisch anschauliche graphische Darstellungen - die sog. Feynman-Graphen - zugeordnet werden können. Man kann sogar den zuerst befolgten Weg umkehren, und eine physikalische Theorie auffassen als die Menge ihrer Graphen, zusammen mit einem Uebersetzungsschlüssel - den sog. Feynman-Regeln - , der uns erlaubt, jedem Graphen einen analytischen Ausdruck zuzuordnen (den entsprechenden Summanden der Wickzerlegung).



## 1.2 QCD , M.I.T. - Bagmodell

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist eine nichtabelsche Eichtheorie, die gegeben ist durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \not{D} \Psi - \bar{\Psi} m \Psi - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a$$

(Einstein'sche Summenkonvention,  $a = 1..8, \mu, \nu = 0..3$ )  
 $G_a^{\mu\nu}$  ist der antisymmetrische Feldtensor

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + g f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu$$

$A_a^\mu$  sind die acht Gluonenfelder (Eichbosonen),  $f_{abc}$  die Strukturkonstanten der  $SU(3)_c$ .  $g$  ist die Kopplungskonstante der QCD.

$\Psi$  bezeichnet das Fermionenfeld (Quarks und Antiquarks), das einen bestimmten Color und Flavor trägt:  $\Psi_{cf}$

$D$  ist die kovariante Ableitung

$$(D_\mu)_{ab} = \partial_\mu \delta_{ab} - i g (F_c)_{ab} A_\mu^c$$

$F_c$  sind die Generatoren der  $SU(3)$ ; sie erfüllen die Lie-Algebra

$$[F_a, F_b] = i f_{abc} F_c$$

In der 3-dimensionalen Darstellung der  $SU(3)$  sind sie durch die Gell-Mann-Matrizen bestimmt:  $F_a = 1/2 \lambda_a$   
 Das Symbol  $\overleftrightarrow{D}$  hat die Bedeutung

$$X \overleftrightarrow{D} Y = X (D Y) - (D X) Y$$

$\gamma$  steht für den Vierervektor der Dirac-Matrizen. Wir verwenden die Signatur  $(+, -, -, -)$ , d.h. der metrische Fundamentaltensor  $g^{\mu\nu}$  ist gegeben zu:  $g^{00} = 1$ ,  
 $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$

Die Massenmatrix  $m$  ist diagonal, ihre Elemente hängen nur vom Flavor ab. Wir wollen uns ausschliesslich mit den leichtesten Quarks befassen : Flavor up (u) und Flavor down (d) . Dabei vernachlässigen wir ihren Massenunterschied. Wir werden deshalb statt vom Flavor auch vom Isospin reden.

Jede Theorie, die Quarkdynamik beschreiben will, muss dem confinement (Quarkeinschluss) Rechnung tragen : Freie Quarks sind nicht beobachtbar. Man nimmt an, dass die QCD das confinement enthält, es konnte jedoch bis heute nicht bewiesen werden. Um im Rahmen der QCD konkrete Aussagen machen zu können, prägt man deshalb das confinement der Lagrangedichte "von Hand" auf. Die so entstandene Theorie heisst das M.I.T. - Bagmodell (die Teilchen werden in einem "Sack" eingesperrt)

$$\mathcal{L}(x) = (\mathcal{L}_{QCD} - B) \Theta_B(x) - \frac{1}{2} \bar{\Psi} \Psi \delta_S(x)$$

$B$  ist eine Konstante, der sog. Vakuumsdruck.  $\Theta_B(x)$  ist die Bag-Stepfunktion, die gleich 1 ist im Raumgebiet, wo sich die Quarks aufhalten können, 0 ausserhalb;  $\delta_S(x)$  die Bag-Oberflächendeltafunktion.

Die Aufspaltung in Volumen- und Oberflächenanteil liefert bei Bestimmung der Feldgleichungen Terme mit  $\Theta_B(x)$ , die den effektiven Feldgleichungen im Bag entsprechen, und Terme mit  $\delta_S(x)$ , die Randbedingungen beinhalten und ein diskretes Energiespektrum zur Folge haben.

### 1.2.1 Die freien Feldgleichungen

Die Feldgleichungen lauten im wechselwirkungsfreien Fall ( $g = 0$ )

$$\text{Im Bag} \quad : \quad (i \gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi = 0 \quad (1.3)$$

$$\bar{\psi} (i \gamma_\mu \partial^\mu + m) = 0 \quad (1.4)$$

$$\square A_a^\mu = 0 \quad (1.5)$$

$$\text{Oberfläche} \quad : \quad (i \eta_\mu \gamma^\mu - 1) \psi = 0 \quad (1.6)$$

$$\bar{\psi} (i \eta_\mu \gamma^\mu + 1) = 0 \quad (1.7)$$

$$n_\nu (\partial^\nu A_a^\mu - \partial^\mu A_a^\nu) + n^\mu \partial_\mu A_a^\nu = 0 \quad (1.8)$$

$n^\mu$  ist ein raumartiger Einheitsvektor ( $\eta_\mu n^\mu = -1$ ), dessen Raumanteil  $\vec{n}$  senkrecht zur Bagoberfläche steht und nach innen gerichtet ist.

Wir geben die Lösungen für den statischen Fall ( $n^0 = 0$ ) und einen sphärischen Bag mit Radius  $R$  an. Die Zeitabhängigkeit soll für alle Gleichungen exponentiell sein:  $\exp(-iEt)$ .

#### (i) Quarks

Gleichung (1.3) ist die Dirac-Gleichung. Es treten also Lösungen mit negativen Energien auf. Wie in der Quantenelektrodynamik interpretieren wir sie mit Antiquarks, während Lösungen mit positiven Energien Quarks beschreiben. Wir spalten die Felder nach diesen zwei Beiträgen auf

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x)$$

$$\psi_{cf}^{(+)}(x) = \sum_{n\ell m} b_{cf n\ell m} \phi_{n\ell m}(\vec{x}) e^{-i \epsilon_{n\ell} t}$$

$$\psi_{cf}^{(-)}(x) = \sum_{n\ell m} d_{cf n\ell m}^+ \phi_{-n-\ell-m}(\vec{x}) e^{i \epsilon_{n\ell} t}$$

$$\bar{\psi}_{cf}^{(+)}(x) = \sum_{n\ell m} d_{cf n\ell m} \bar{\phi}_{-n-\ell-m}(\vec{x}) e^{-i \epsilon_{n\ell} t}$$

$$\bar{\psi}_{cf}^{(-)}(x) = \sum_{n\ell m} b_{cf n\ell m}^+ \bar{\phi}_{n\ell m}(\vec{x}) e^{i \epsilon_{n\ell} t}$$

Die Summenindizes durchlaufen die Werte

$$\begin{aligned} n &: 1 \dots \infty ; & \ell &: 1 \dots \infty \\ m &: -\ell + 1/2 \text{ bis } \ell - 1/2 \end{aligned}$$

$$\phi_{n\ell m}(\vec{r}) = \frac{C_{n\ell}}{R^{3/2}} \begin{pmatrix} f_{n\ell}(r) & \chi_{\ell m}(\hat{r}) \\ i g_{n\ell}(r) & \chi_{-\ell m}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

mit  $f_{n\ell}(r) = j_{\ell}(x_{n\ell} r/R)$

$$g_{n\ell}(r) = \operatorname{sgn}(n\ell) \sqrt{\frac{R \epsilon_{n\ell} - \frac{1}{2}}{R \epsilon_{n\ell} + \frac{1}{2}}} j_{\ell}(x_{n\ell} r/R)$$

und dem sphärischen Spinor

$$\chi_{\ell m}(\hat{r}) = \sum_{m_1 m_2} \langle 1 m_1 \ 1/2 m_2 | j m \rangle Y_{1 m_1}(\hat{r}) U_{m_2}$$

$$U_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad U_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$j_1(r)$  sind die sphärischen Besselfunktionen,  $Y_{lm}(\hat{r})$  die Kugelfunktionen,

$$\begin{aligned} R \varepsilon_{n\kappa} &= \operatorname{sgn}(n) \sqrt{x_{n\kappa}^2 + \xi^2} \\ x &= p R \quad (p = 3\text{-Impuls}) \\ \xi &= m R \quad (m = \text{Quarkmasse}) \end{aligned}$$

Die Drehimpulsquantenzahlen  $j, l, \bar{l}$  ergeben sich aus

$$\begin{aligned} j &= |\kappa| - 1/2 ; \quad l = j + 1/2 \operatorname{sgn}(\kappa) \\ \bar{l} &= j - 1/2 \operatorname{sgn}(\kappa) \end{aligned}$$

Die Bestimmungsgleichung für die Zahlen  $x_{n\kappa}$  folgt aus den Randbedingungen (1.6) und (1.7)

$$j_l(x) + \frac{\operatorname{sgn}(\kappa) x}{R \varepsilon_{n\kappa} + \xi} j_{\bar{l}}(x) = 0 \quad (x \equiv x_{n\kappa})$$

Für jedes  $\kappa$  existiert eine abzählbar-unendliche Menge von Lösungen ( $\rightarrow$  diskretes Spektrum), die wir ihrer Grösse nach durchnummerieren  $n = 1, 2, \dots$ . Es werden jedoch auch  $x$  mit negativen  $n$ 's gebraucht; diese müssen wir definieren als

$$x_{-n-\kappa} = x_{n\kappa}$$

Nach einiger Integration erhalten wir die Normierungskonstante

$$(C_{n\kappa})^{-2} = \frac{j_1^2(x_{n\kappa})}{x_{n\kappa}^2} \left[ 2R \varepsilon_{n\kappa} (R \varepsilon_{n\kappa} + \kappa) + \xi \right]$$

Die einzelnen Quarkmoden sind Eigenzustände der folgenden vier Operatoren

$$\gamma^0 (-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m) \phi_{nkm} = \epsilon_{nkm} \phi_{nkm}$$

$$\vec{J}^2 \phi_{nkm} = j(j+1) \phi_{nkm}$$

$$J_z \phi_{nkm} = m \phi_{nkm}$$

$$\mathcal{P} \phi_{nkm} = \gamma_p (-1)^l \phi_{nkm}$$

wobei

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = -i \vec{r} \times \vec{\nabla} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P} = \gamma_p \gamma^0 I \quad ; \quad I f(\vec{r}) := f(-\vec{r})$$

( $\gamma_p$  bezeichnet die innere Parität des Zustandes)

Zwischen  $\phi$  und  $\bar{\phi}$  besteht die Beziehung

$$i \gamma^2 \gamma^0 \bar{\phi}_{nkm} = \gamma_c \phi_{-n-k-m}$$

$\gamma_c$  ist die C-Parität.

## (ii) Gluonen

Bei Abseparation der Zeit  $e^{-i\omega t}$  vereinfacht sich die d'Alembert-Gleichung (1.5) zur Helmholtz-Gleichung

$$A_a^\mu(x) = A_a^\mu(\vec{x}, t) = A_a^\mu(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

$$(\Delta + \omega^2) A_a^\mu(\vec{x}) = 0$$

Wir spalten wieder nach Beiträgen positiver und negativer Frequenzen auf

$$A_a^{\mu(+)}(x) = \sum_{NJM\lambda} \frac{1}{\sqrt{2 \omega_{NJ}^\lambda}} a_{aNJM}^\lambda A_{NJM\lambda}^\mu(\vec{x}) e^{-i \omega_{NJ}^\lambda t}$$

$$A_a^{\mu(-)}(x) = \sum_{NJM\lambda} \frac{1}{\sqrt{2 \omega_{NJ}^\lambda}} a_{aNJM}^{\lambda+} A_{NJM\lambda}^{\mu*}(\vec{x}) e^{i \omega_{NJ}^\lambda t}$$

$$(N = 1, 2, \dots; \quad J = 0, 1, \dots; \quad M = -J, \dots, +J; \quad \lambda = S, M, E, L)$$

Als Basis im Lösungsraum wählen wir die Hansen-Funktionen.

Sie weisen definierte Polarisierungen  $\lambda$  auf:  $\lambda = S$

(skalar),  $\lambda = M$  (transversal magnetisch),  $\lambda = E$

(transversal elektrisch),  $\lambda = L$  (longitudinal elektrisch).

Nach der Zerlegung in Zeit- und Raumanteil  $A_{NJM\lambda}^\mu(\vec{x}) = (A_{NJM\lambda}^0(\vec{x}), \vec{A}_{NJM\lambda}(\vec{x}))$  sehen die Lösungen folgendermassen aus:

$$A_{NJMS}^0(\vec{x}) = i Q_{NJMS}(\vec{x})$$

$$\vec{A}_{NJMS}(\vec{x}) = 0$$

$$A_{NJM\lambda}^0(\vec{x}) = 0 \quad (\lambda = M, E, L)$$

$$\vec{A}_{NJMM}(\vec{x}) = \frac{\vec{L}}{\sqrt{J(J+1)}} Q_{NJMM}(\vec{x}) \quad *)$$

$$\vec{A}_{NJME}(\vec{x}) = \frac{1}{i \omega_{NJ}^E} \frac{\vec{\nabla} \times \vec{L}}{\sqrt{J(J+1)}} Q_{NJME}(\vec{x}) \quad *)$$

$$\vec{A}_{NJML}(\vec{x}) = \frac{1}{\omega_{NJ}^L} \vec{\nabla} \cdot Q_{NJML}(\vec{x})$$

\*) Es existieren keine Lösungen mit  $J = 0$

mit

$$Q_{NJM\lambda}(\vec{x}) = \frac{N_{NJ}^{\lambda}}{R^{3/2}} j_J(Y_{NJ}^{\lambda} r/R) Y_{JM}(\hat{r}) \quad (1.11)$$

Die Namen der Polarisationen leiten sich ab von den Formeln

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{NJM\mathcal{M}}(\vec{x}) &= 0 & \vec{A}_{NJM\mathcal{M}}(-\vec{x}) &= -(-1)^J \vec{A}_{NJM\mathcal{M}}(\vec{x}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{NJM\mathcal{E}}(\vec{x}) &= 0 & \vec{A}_{NJM\lambda}(-\vec{x}) &= (-1)^J \vec{A}_{NJM\lambda}(\vec{x}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{A}_{NJM\mathcal{L}}(\vec{x}) &= 0 & (\lambda &= s, \mathcal{E}, \mathcal{L}) \end{aligned}$$

Die Randbedingung (1.8) legt die Zahlen  $Y_{NJ}^{\lambda}$  fest

$$\begin{aligned} J j_J(Y_{NJ}^{\lambda}) + Y_{NJ}^{\lambda} j_{J+1}(Y_{NJ}^{\lambda}) &= 0 & (\lambda &= s, \mathcal{L}) \\ J j_J(Y_{NJ}^{\mathcal{M}}) - Y_{NJ}^{\mathcal{M}} j_{J-1}(Y_{NJ}^{\mathcal{M}}) &= 0 \\ j_J(Y_{NJ}^{\mathcal{E}}) &= 0 \end{aligned}$$

Die Frequenzen  $\omega$  sind mit den  $Y$ 's verknüpft durch

$$\omega_{NJ}^{\lambda} = \frac{Y_{NJ}^{\lambda}}{R}$$

Die Normierungskonstanten, aufgefasst als Funktion der  $Y_{NJ}^{\lambda}$ , sind

$$(N_{NJ}^{\lambda})^{-2} = \frac{1}{2} j_J^2(Y_{NJ}^{\lambda}) \left[ 1 - \frac{J(J+1)}{(Y_{NJ}^{\lambda})^2} \right] \quad (\lambda = s, \mathcal{M}, \mathcal{L})$$

$$(N_{NJ}^{\mathcal{E}})^{-2} = \frac{1}{2} j_{J+1}(Y_{NJ}^{\mathcal{E}})$$



### 1.2.2 Quantisierung

Bis jetzt sind die Lösungen der Gleichungen (1.3) bis (1.8) klassische Felder, die  $b$ ,  $d$  und  $a$  verallgemeinerte Fourierentwicklungskoeffizienten. Bei der Quantisierung werden aus den Feldern Feldoperatoren, indem man diesen Koeffizienten (Anti-) Vertauschungsrelationen auferlegt.

Die Quarks sind als Spin  $1/2$  - Teilchen Fermionen. Sie werden daher mit Antikommutatoren quantisiert

$$\begin{aligned} \{b_{cf n \kappa m}, b_{c' f' n' \kappa' m'}^+\} &= \\ \{d_{cf n \kappa m}, d_{c' f' n' \kappa' m'}^+\} &= \delta_{cc'} \delta_{ff'} \delta_{nn'} \delta_{\kappa \kappa'} \delta_{mm'} \\ &(\text{alle anderen } \{, \} \text{ verschwinden}) \end{aligned}$$

Die Gluonen sind Spin 1 - Teilchen, also Bosonen; hier kommen Kommutatoren zur Anwendung

$$[a_{a N J M}^\wedge, a_{a' N' J' M'}^{\wedge +}] = -g^{\wedge \wedge'} \delta_{aa'} \delta_{NN'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'}$$

Nach diesen Vereinbarungen fassen wir  $b$ ,  $d$  und  $a$  als Vernichtungsoperatoren,  $b^+$ ,  $d^+$  und  $a^+$  als Erzeugungsoperatoren von Quarks, Antiquarks bzw. Gluonen auf. Zustände wie  $b^+|0\rangle$ ,  $d^+a^+|0\rangle$  etc. bilden den Fock-Raum, in welchem sich die ganze Physik abspielt ( $|0\rangle$  ist das Vakuum, d.h. der Null-Teilchen-Zustand).

### 1.2.3 Zwei-Fermionen-Wechselwirkung

Wir betrachten Graphen, die Erste-Ordnung-Störungsrechnung in  $U$  (d.h. zweite Ordnung in  $g$ ) liefert. Wir beschränken uns auf Systeme, die keine reellen Gluonen enthalten. Aus unserer Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  berechnen wir mit der wohlbekannten Vorschrift die Hamiltondichte  $\mathcal{H}$  und spalten sie auf :  
 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I$ . Das Eigenwertproblem von  $H_0$

$$H_0(t) = \int_V d^3x \mathcal{H}_0(x)$$

haben wir bereits in Abschnitt 1.2.1 gelöst. Der für uns relevante Teil von  $\mathcal{H}_I$  ist

$$\mathcal{H}_I^q(x) = -g \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \Psi(x) A_\mu^a(x)$$

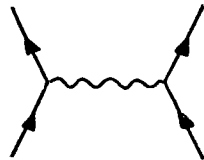
Da unsere Graphen keine externen Gluonenlinien besitzen, ergibt nur der Term der Wickzerlegung einen nichtverschwindenden Beitrag, in welchem über alle Gluonenfelder kontrahiert wurde.  $\langle \Phi_0 | H_I(0) | \Phi_0 \rangle$  im Ausdruck für den Energieshift aus Abschnitt 1.1 fällt deshalb weg. Es bleibt der Operator

$$\begin{aligned} \Delta E &= (-i) \int_{-\infty}^0 dt T(H_I(0) H_I(t)) \\ &= (-i) \int_{-\infty}^0 dt \int_V \int_V d^3x d^3y T(\mathcal{H}_I(x) \mathcal{H}_I(y)) \\ &\quad x = (\vec{x}, 0) \quad y = (\vec{y}, t) \end{aligned}$$

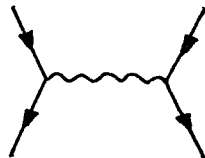
Die Berechnung der Matrixelemente dieses Operators ist ziemlich aufwendig, obwohl keine prinzipiellen Schwierigkeiten auftreten. Wir wollen darum nur einige wichtige Schritte besprechen.

Jeder der drei Fälle  $qq$  (Diquark),  $\bar{q}\bar{q}$  (Antidiquark) und  $q\bar{q}$  (Quark-Antiquark) muss einzeln betrachtet werden. Dementsprechend erhalten wir die

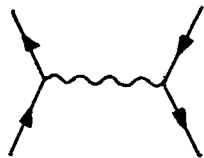
o Quark-Quark Wechselwirkung



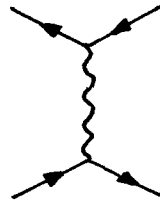
o Antiquark-Antiquark Wechselwirkung



o Quark-Antiquark Wechselwirkung



und



Jedesmal stoßen wir auf ein Integral von der Form

$$I = \int_V d^3x \bar{\Phi}_{n',k',m'}(\vec{x}) \gamma_\mu \Phi_{n,k,m}(\vec{x}) A_{NJM\lambda}^\mu(\vec{x})$$

Wir spalten es auf in Radial- und Winkelanteil

$$I = R_{NJ\lambda}(k',n',k,n) W_{JM}(k',m',k,m)$$

$$W_{JM}(k',m',k,m) = \int d\Omega \chi_{k'm'}^+ Y_{JM} \chi_{km}$$

Die Form von  $R_{NJ\lambda}(k',n',k,n)$  hängt von der Polarisation  $\lambda$  ab

Dabei haben wir die Gleichungen (1.9) und (1.10), (1.11) eingesetzt. Beachte, dass  $w_{JM}$  im Gegensatz zu  $R_{NJ\lambda}$  unabhängig von der Quarkmasse ist.

Während  $R_{NJ\lambda}$  numerisch berechnet werden muss (wir konnten eine von R. Buser erstellte Tabelle benutzen), kann  $w_{JM}$  analytisch ausgewertet werden

$$w_{JM}(\kappa', m', \kappa, m) = (-1)^{m'+1/2} \frac{\sqrt{2j'+1} \sqrt{2J+1} \sqrt{2j+1}}{\sqrt{4\pi}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} j' & J & j \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j' & J & j \\ -m' & M & m \end{pmatrix}$$

(für  $j' + J + j$  gerade)

$$= 0 \quad \text{sonst}$$

(nach R.D. Viollier)

$v_{EX}^{(J)}$  in (1.12) und  $v_{AN}^{(J)}$  in (1.13), die weiter unten gebraucht werden, hängen im wesentlichen folgendermassen von  $w_{JM}$  ab

$$\sum_M (-1)^M w_{JM}(\kappa'_1, m'_1, \kappa_1, m_1) w_{J-M}(\kappa'_2, m'_2, \kappa_2, m_2)$$

Diesen Ausdruck nennen wir  $\Sigma_J$  und berechnen ihn für  $J = 0, 1$  (Wir setzen  $|\kappa| = |\kappa'| = 1$ )

(i)  $J = 0$

Man überzeugt sich leicht, dass

$$w_{00}(\kappa', m', \kappa, m) = \frac{\delta_{m'm}}{\sqrt{4\pi}},$$

also  $\Sigma_0 = \frac{1}{4\pi} \delta_{m'_1 m_1} \delta_{m'_2 m_2}$

(ii) J = 1

Mit Hilfe des Wigner-Eckart-Theorems wandeln wir das M-abhängige 3-J-Symbol in der Formel für  $w_{JM}$  in ein Matrixelement des Spinoperators  $\vec{S}$  um und benützen, dass das reduzierte Matrixelement  $\langle 1/2 || \vec{S} || 1/2 \rangle = \sqrt{6}$ . Es folgt

$$w_{1M} = - \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{2}{\sqrt{3}} (S_M)_{m'm}$$

$S_M$  bezeichnet die sphärischen Komponenten von  $\vec{S}$ , die mit den rechtwinkligen zusammenhängen nach

$$\begin{aligned} S_{+1} &= - \frac{1}{\sqrt{2}} (S_x + iS_y) & S_0 &= S_z \\ S_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (S_x - iS_y) & \text{wobei } \vec{S} &= \frac{1}{2} \vec{\sigma} \end{aligned}$$

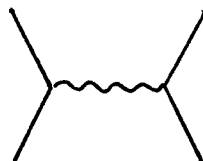
Die Summe in  $\sum_1$  entpuppt sich als das Skalarprodukt in sphärischen Koordinaten, sodass

$$\sum_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{4}{3} (\vec{S})_{m'_1 m_1} \cdot (\vec{S})_{m'_2 m_2}$$

Damit ist es uns gelungen, den Spin, der nicht explizit in der Lagrangedichte auftritt, einzuführen.

Das Ergebnis für den Ein-Gluon-Austausch zwischen zwei Fermionen ist

$$\hat{\Delta E}_{EX} = \frac{g^2}{R} \sum_J \vec{F} \cdot \vec{F} \mu(J) v_{EX}^{(J)} \quad (1.12)$$



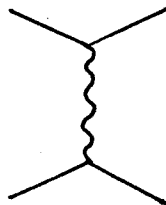
$\vec{F}$  bezeichnet den Vektor der acht  $SU(3)_c$ -Generatoren.  $v_{EX}^{(J)}$  ist eine Funktion der Winkelintegrale,  $\mu(J)$  der Radialintegrale.

Falls alle  $\kappa$ 's nur die Werte  $\pm 1$  annehmen ( $\kappa = -1$  : Quarks im Grundzustand), kann  $J = 0$  oder  $1$  sein ( $SU(2)$ -Addition von zwei Drehimpulsen  $1/2$ ).  $v_{EX}^{(J)}$  hat dann die einfache Form

$$v_{EX}^{(0)} = \frac{1}{4\pi} \mathbb{1} \quad v_{EX}^{(1)} = \frac{1}{\pi} \vec{S} \cdot \vec{S}$$

Den Annihilationsgraph kann man sich vorstellen als den Ein-Gluon-Austausch, wobei die kausale und die räumliche Richtung vertauscht wurden. Die Rechnung liefert ein ähnliches Resultat wie für  $\Delta E_{EX}$  mit dem Unterschied, dass die Matrixelemente zwischen den Anfangs- bzw. Endzuständen genommen werden müssen. Um die Formel physikalisch durchsichtiger zu machen und die Weiterrechnung zu erleichtern, möchten wir nur Matrixelemente zwischen je einem Anfangs- und einem Endzustand haben. Im Anhang ist die Umrechnung vorgeführt. Als Folge davon erhalten die Skalarprodukte wie  $\vec{F} \cdot \vec{F}$  zusätzlich eine additive Konstante. Das Ergebnis lautet

$$\hat{\Delta E}_{AN} = \frac{g^2}{R} \left( \frac{1}{4} - \vec{T} \cdot \vec{T} \right) \left( \vec{F} \cdot \vec{F} + \frac{4}{3} \right) \sum_J \nu(J) v_{AN}^{(J)} \quad (1.13)$$

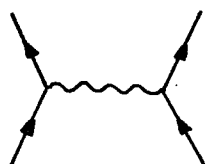


$\vec{T}$  sind die Isospinoperatoren ( $SU(2)_f$ ),  $\vec{T} = \frac{1}{2} \vec{\tau}$  ( $\vec{\tau}$  : Pauli-Matrizen)

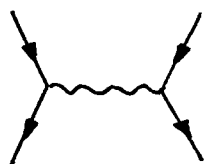
Für  $|k| = 1$  folgt

$$v_{AN}^{(0)} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{4} - \vec{S} \cdot \vec{S} \right) ; \quad v_{AN}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \left( \vec{S} \cdot \vec{S} + \frac{3}{4} \right)$$

Quarks im Grundzustand ( $k = -1$ )

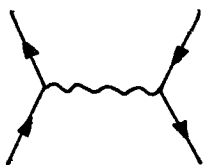


$$\hat{\Delta E} = \frac{\alpha_c}{R} \left[ \mu(0) + 4\mu(1) \vec{S}^q \cdot \vec{S}^{\bar{q}} \right] \vec{F}^q \cdot \vec{F}^{\bar{q}}$$

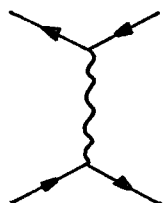


$$\hat{\Delta E} = \frac{\alpha_c}{R} \left[ \mu(0) + 4\mu(1) \vec{S}^{\bar{q}} \cdot \vec{S}^q \right] \vec{F}^{\bar{q}} \cdot \vec{F}^q$$

(1.14)



$$\hat{\Delta E} = \frac{\alpha_c}{R} \left[ \mu(0) + 4\mu(1) \vec{S}^q \cdot \vec{S}^{\bar{q}} \right] \vec{F}^q \cdot \vec{F}^{\bar{q}}$$



$$\hat{\Delta E} = \frac{\alpha_c}{R} \left( \frac{1}{4} - \vec{T}^q \cdot \vec{T}^{\bar{q}} \right) \left( \vec{F}^q \cdot \vec{F}^{\bar{q}} + \frac{4}{3} \right) \times \\ \left[ v(0) \left( \frac{1}{4} - \vec{S}^q \cdot \vec{S}^{\bar{q}} \right) + v(1) \left( \vec{S}^q \cdot \vec{S}^{\bar{q}} + \frac{3}{4} \right) \right]$$

$$\left( \alpha_c = \frac{g^2}{4\pi} \right)$$

Durch  $q$  bzw.  $\bar{q}$  haben wir angedeutet, ob der Operator auf ein Quark oder Antiquark wirkt.

Für masselose Teilchen haben die Koeffizienten  $\mu$  und  $v$  die Werte

$$\mu(0) = 0.0098$$

$$v(0) = 0$$

$$4\mu(1) = -0.7081$$

$$v(1) = 0.1875$$

## TEIL II : ANWENDUNGEN

Von nun an befassen wir uns nur noch mit masselosen Quarks im Grundzustand. Wir bezeichnen den Spin mit  $J$ , den Isospin mit  $I$  und die Dimension der Color-Darstellung mit  $\{N\}$ .

Weiter setzen wir

$$\begin{aligned} \mu_0 &:= \mu(0) & \nu_0 &:= \nu(0) \\ \mu_1 &:= 4\mu(1) & \nu_1 &:= \nu(1) \end{aligned}$$

### 2.1 Das Zwei-Teilchen-System

Wir betrachten die Wechselwirkung zwischen zwei Quarks in allen Color-, Spin- und Isospinzuständen. Die Ergebnisse können für grobe Abschätzungen in Multiquarksystemen verwendet werden.

Ueber die Formel

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = \frac{1}{2} \left[ (\vec{X} + \vec{Y})^2 - \vec{X}^2 - \vec{Y}^2 \right]$$

führen wir die Skalarprodukte in (1.14) auf Casimiroperatoren zurück

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 &= \frac{1}{2} \left[ C - \frac{8}{3} \right] \\ \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 &= \frac{1}{2} \left[ J(J+1) - \frac{3}{2} \right] \\ \vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2 &= \frac{1}{2} \left[ I(I+1) - \frac{3}{2} \right] \end{aligned}$$



Die Quantenzahlen  $J, I$  können die Werte 0 und 1 annehmen, die Color-Dimension  $\{N\} = \{\bar{3}\}, \{6\}$  für  $qq$ ,  $\{3\}, \{\bar{6}\}$  für  $\bar{q}q$  und  $\{1\}, \{8\}$  für  $q\bar{q}$ .

(i)  $qq, \bar{q}q$

$$R \hat{\Delta E}_{EX}(\{N\}) = \alpha_c \frac{1}{2} (C\{N\} - \frac{8}{3}) \left( \mu_0 - \frac{3}{4} \mu_1 + \frac{\mu_1}{2} J(J+1) \right)$$

$$C\{3\} = 4/3 \quad C\{6\} = 10/3$$

$$\text{also } R \hat{\Delta E}_{EX}(\{3\}) = (-2) R \hat{\Delta E}_{EX}(\{6\})$$

Der Annihilationsgraph leistet natürlich keinen Beitrag.

(ii)  $q\bar{q}$

Mit  $C\{1\} = 0$ ,  $C\{8\} = 3$  folgt

$$R \hat{\Delta E}_{EX}(\{1\}) = (-8) R \hat{\Delta E}_{EX}(\{8\})$$

Weiter ist

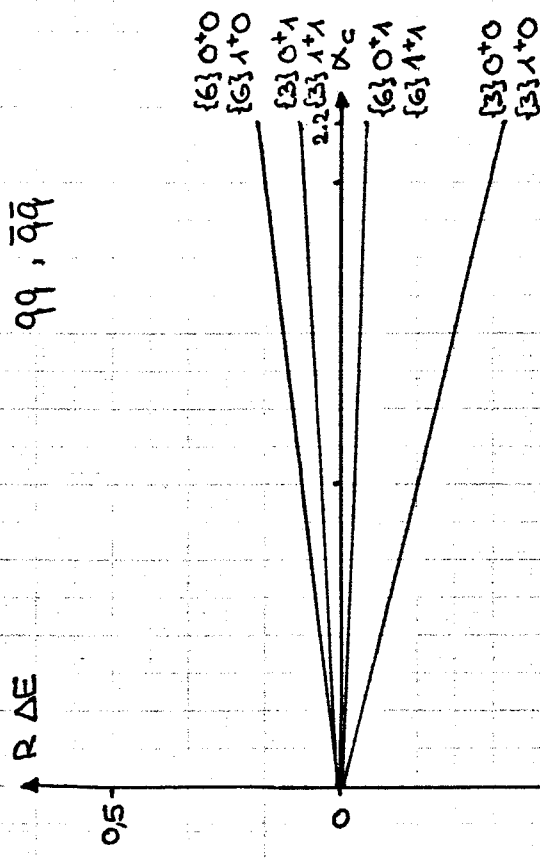
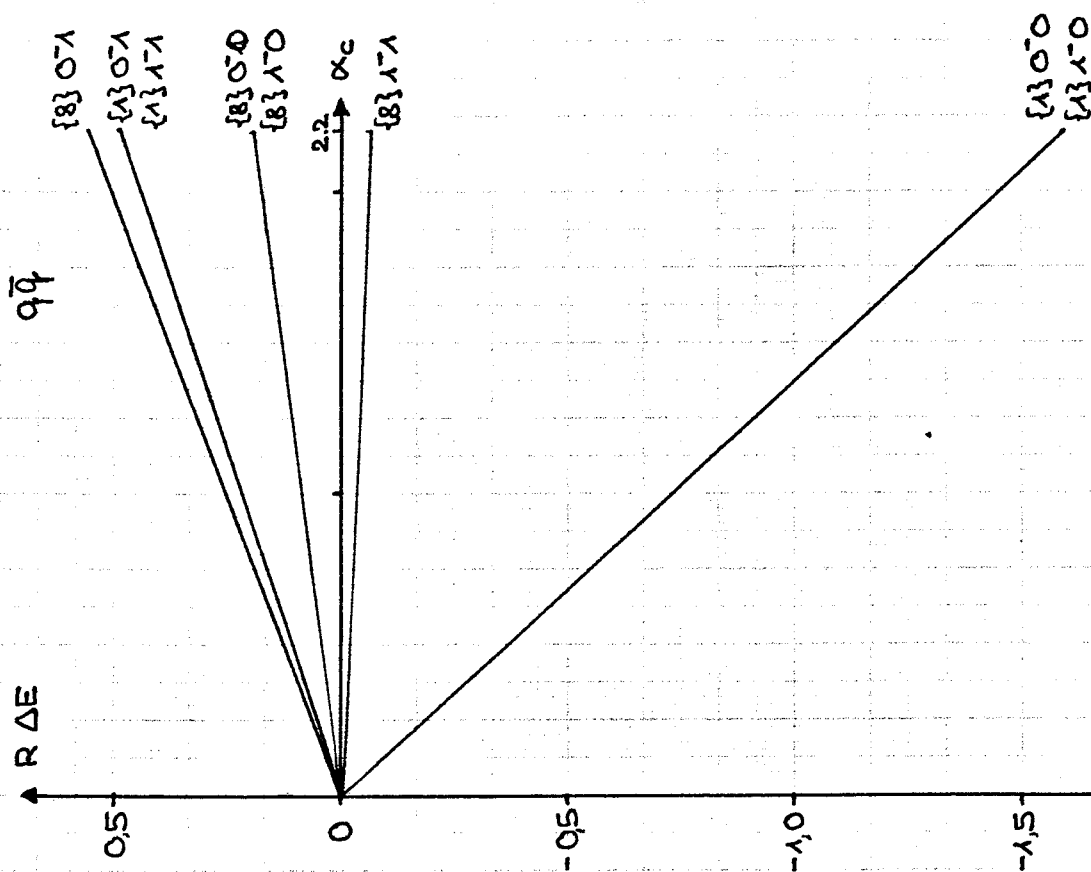
$$R \hat{\Delta E}_{AN}(\{1\}) = 0$$

$$R \hat{\Delta E}_{AN}(\{8\}) = \alpha_c \left( 1 - \frac{1}{2} I(I+1) \right) \frac{3}{2} \left( \nu_0 + \frac{\nu_1 - \nu_0}{2} J(J+1) \right)$$

Beachte, dass ein  $q\bar{q}$ -System nur dann an der Annihilations-Wechselwirkung teilnehmen kann, wenn es die Quantenzahlen eines Gluons trägt.

In Abb. 1 ist  $R \Delta E = R \Delta E_{EX} + R \Delta E_{AN}$  als Funktion von  $\alpha_c$  dargestellt.

Abb. 1



Notation :  $\{N\ I^P\}$

Mit diesen Angaben können wir die Massen der  $q\bar{q}$ -Mesonen im Rahmen des Bagmodells berechnen. Allerdings müssen wir vorher noch Folgendes nachtragen :

Der Hamiltonoperator lässt sich in unserem Fall aufspalten in

$$\hat{H} = \hat{H}_0^q + \hat{H}^B + \hat{H}_I^q$$

$\hat{H}_0^q$  : wechselwirkungsfreie Quarks

$\hat{H}^B$  : Volumenenergie des Bags

$\hat{H}_I^q$  : Wechselwirkung der Quarks

Dementsprechend setzt sich die totale Energie zusammen aus

$$E(R) = \sum_{\text{Quarks}} \frac{x_n}{R} - \frac{z_0}{R} + \frac{4\pi}{3} R^3 B + \frac{\alpha_c}{R} \lambda$$

-  $\frac{z_0}{R}$  , der sog. Casimir-Term, stammt von  $\hat{H}_0^q$  und berücksichtigt die Quantenfluktuationen des Systems ( $z_0$  hängt von der Baggeometrie ab)

$\frac{\alpha_c}{R} \lambda$  bezeichnet die Beiträge der Graphen  
(  $\lambda$  ist unabhängig von R )

Das Bagmodell liefert neben den Randbedingungen (1.6) bis (1.8) eine weitere, die Quark- und Gluonenfelder quadratisch miteinander verknüpft. Sie verlangt, dass sich die Quarks und die Gluonen mit ihren Drücken an der Bagoberfläche lokal die Waage halten. Wir können diese Bedingung zwar nicht exakt, aber doch im Mittel erfüllen, indem wir die Energie unseres Systems in Bezug auf den Radius minimieren (R war bisher ein freier Parameter). Auf diese Weise erhalten wir die effektiven Werte für Masse und Radius.

$$R_0^4 = \frac{A}{4\pi B} \quad M = \frac{16\pi}{3} B R_0^3$$

mit  $A = \sum_{\text{Quarks}} x_{n\kappa} - z_0 + \alpha_c \lambda$

Wir werden in dieser Arbeit einheitlich die Werte

$$B^{1/4} = 146 \text{ MeV} \quad z_0 = 1.842 ,$$

die aus dem Baryonenspektrum gefittet wurden, verwenden.

Wir nehmen also das Bagmodell ernst und setzen voraus, dass  $B$  eine Eigenschaft des Vakuums ist und nicht von der Teilchensorte abhängt.

Die Quark-Randbedingung liefert

$$x_{1-1} = 2.0428$$

Es ergibt sich das folgende  $q\bar{q}$ -Mesonenspektrum (Notation  $I^P J$ )

		$R_0$	$M$	$M(\text{exp})$
$\rho$	$0^{-}0$	0.65 fm	267 MeV	548.8 MeV
$\pi$	$1^{-}0$	0.65 fm	267 MeV	138.0 MeV
$\omega$	$0^{-}1$	0.92 fm	779 MeV	782.6 MeV
$\eta$	$1^{-}1$	0.92 fm	779 MeV	769 MeV

$$(\hbar c = 197.32858 \text{ MeV fm})$$

Die  $J=1$  - Mesonen kommen recht gut heraus. Da das physikalische  $\rho$  einen beträchtlichen Anteil an einem  $s\bar{s}$ -Quarkpaar hat, kann seine grosse Masse qualitativ erklärt werden. Schwierigkeiten macht das  $\pi$  : seine viel zu niedrige Masse bleibt unverstanden.

## 2.2 Das $q^2\bar{q}^2$ - System

Als Nächstes studieren wir Baryonium, bestehend aus zwei Quarks und zwei Antiquarks, etwas ausführlicher. Dieses System ist deshalb interessant, weil es das kleinste ist, dessen Color-Freiheitsgrade nicht vollständig durch die Gesamtstruktur festgefroren sind, wie z.B. bei den  $q\bar{q}$ -Mesonen ( $\{3\} \otimes \{\bar{3}\} \rightarrow \{1\}$ ) oder den  $q^3$ -Baryonen ( $\{3\} \otimes \{3\} \otimes \{3\} \rightarrow \{1\}$ ). Das Baryonium kennt zwei Wege, seine Quarks und Antiquarks zu Color-Singletts zu koppeln.

### 2.2.1 Zustände in der $q^2\bar{q}^2$ - Basis

Die Zustandsfunktion, die unser System beschreibt, enthält neben dem Raumanteil noch Color ( $SU(3)_c$ ) -, Spin ( $SU(2)_s$ ) - und Isospin (bei uns  $SU(2)_f$ ) - Anteile. Diese wollen wir nun, ausgehend von den Ein-Teilchen-Zuständen, konstruieren. Es ist sinnvoll, zuerst ein Diquark und ein Antidiquark zu bilden und diese zum Baryonium zu verbinden ( Alternative : Weg über zwei Mesonen), da auf diese Weise das Pauli-Prinzip für Quarks bzw. Antiquarks leichter erfüllbar ist.

#### (i) $SU(3)$ (Color)

$$\begin{array}{ll}
 q^2: \{3\} \otimes \{3\} = \{\bar{3}\} \oplus \{6\} & \bar{q}^2: \{\bar{3}\} \otimes \{\bar{3}\} = \{3\} \oplus \{\bar{6}\} \\
 \square \otimes \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Die Basisvektoren der 6-dimensionalen Darstellungen sind symmetrisch, die der 3-dimensionalen antisymmetrisch bei Austausch von zwei Teilchen.

$$\begin{aligned}
 q^2 \bar{q}^2 : \quad \{\bar{3}\} \otimes \{3\} &= \{1\} \oplus \{8\} \\
 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} &= \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \{\bar{3}\} \otimes \{\bar{6}\} &= \{8\} \oplus \{\bar{10}\} \\
 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \{6\} \otimes \{3\} &= \{8\} \oplus \{10\} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \{6\} \otimes \{\bar{6}\} &= \{1\} \oplus \{8\} \oplus \{27\} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} &= \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

Da nur Color-Singletts physikalische Zustände beschreiben, bleiben uns, wie bereits erwähnt, zwei Möglichkeiten

$$\begin{aligned}
 \{\bar{3}\} \otimes \{3\} &\longrightarrow \{1\} : |\{\bar{3}\}; \{3\}; \{1\}\rangle \\
 \text{und } \{6\} \otimes \{\bar{6}\} &\longrightarrow \{1\} : |\{6\}; \{\bar{6}\}; \{1\}\rangle
 \end{aligned}$$

Im Folgenden wollen wir die schon benutzte Schreibweise beibehalten : im Ket stehen an erster Stelle Angaben über die Quarks, an zweiter die über Antiquarks und an letzter die über das ganze System. Allerdings wird der Gesamtcolor später weggelassen, da er immer  $\{1\}$  sein muss.

Ausgedrückt durch die Ein-Teilchen-Zustände :

$$\begin{aligned}
 |\{\bar{3}\}; \{3\}; \{1\}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \begin{aligned}
 &bg\bar{b}\bar{g} - bg\bar{g}\bar{b} - gb\bar{b}\bar{g} + gb\bar{g}\bar{b} \\
 &+ rg\bar{r}\bar{g} - rg\bar{g}\bar{r} - gr\bar{r}\bar{g} + gr\bar{g}\bar{r} \\
 &+ rb\bar{r}\bar{b} - rb\bar{b}\bar{r} - br\bar{r}\bar{b} + br\bar{b}\bar{r}
 \end{aligned} \right) \quad (2.1a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 | \{6\}; \{\bar{6}\}; \{1\} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left( \begin{aligned} & r r \bar{r} \bar{r} + b b \bar{b} \bar{b} + g g \bar{g} \bar{g} \\ & + \frac{1}{2} ( b g \bar{b} \bar{g} + b g \bar{g} \bar{b} + g b \bar{b} \bar{g} + g b \bar{g} \bar{b} \\ & + r g \bar{r} \bar{g} + r g \bar{g} \bar{r} + g r \bar{r} \bar{g} + g r \bar{g} \bar{r} \\ & + r b \bar{r} \bar{b} + r b \bar{b} \bar{r} + b r \bar{r} \bar{b} + b r \bar{b} \bar{r} ) \end{aligned} \right) \quad (2.1b)
 \end{aligned}$$

$(r, b, g)$  ist das fundamentale Triplet,  $(-\bar{r}, \bar{b}, \bar{g})$  das Antitriplett der  $SU(3)_c$ .

(ii)  $SU(2)$  (Spin und Isospin)

Quarks und Antiquarks sind Spin 1/2 - Teilchen; die leichten, auf die wir uns beschränken, bilden ein Isospin-Doublett. Daher kann der Isospin wie der Spin mit den Methoden der  $SU(2)$  - Clebsch-Gordan-Kopplungen behandelt werden.

(In den folgenden Formeln bezeichnen wir die irreduziblen Darstellungen mit ihrem Isospin statt ihrer Dimension,  $\dim = 2I + 1$  )

$$q^2, \bar{q}^2 : \quad 1/2 \otimes 1/2 = 0 \oplus 1$$

Die  $I=0$  - Darstellung ist antisymmetrisch, die  $I=1$  symmetrisch unter der Vertauschung von zwei Teilchen.

$$\begin{aligned}
 q^2 \bar{q}^2 : \quad & 0 \otimes 0 = 0 \\
 & 0 \otimes 1 = 1 \\
 & 1 \otimes 0 = 1 \\
 & 1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2
 \end{aligned}$$

Da die Clebsch-Gordan-Reihen der  $SU(2)$  wohlbekannt sind, verzichten wir auf die Angabe der Young-Tableaux.

Hier sind die Zustände mit ihrem Ein-Teilchen-Inhalt :

$$\begin{aligned}
 |0;0;00\rangle &= [ud][\bar{u}\bar{d}] \\
 |1;1;00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (uu\bar{u}\bar{u} + \{ud\}\{\bar{u}\bar{d}\} + dd\bar{d}\bar{d}) \\
 |0;1;11\rangle &= [ud]\bar{d}\bar{d} \\
 |1;0;11\rangle &= uu[\bar{u}\bar{d}] \\
 |1;1;11\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (uu\{\bar{u}\bar{d}\} + \{ud\}\bar{d}\bar{d}) \\
 |0;1;10\rangle &= -[ud]\{\bar{u}\bar{d}\} \\
 |1;0;10\rangle &= \{ud\}[\bar{u}\bar{d}] \\
 |1;1;10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (uu\bar{u}\bar{u} - dd\bar{d}\bar{d}) \\
 |0;1;1-1\rangle &= [ud]\bar{u}\bar{u} \\
 |1;0;1-1\rangle &= dd[\bar{u}\bar{d}] \\
 |1;1;1-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\{ud\}\bar{u}\bar{u} + dd\{\bar{u}\bar{d}\}) \\
 |1;1;22\rangle &= uu\bar{d}\bar{d} \\
 |1;1;21\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (uu\{\bar{u}\bar{d}\} - \{ud\}\bar{d}\bar{d}) \\
 |1;1;20\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} (uu\bar{u}\bar{u} - 2\{ud\}\{\bar{u}\bar{d}\} + dd\bar{d}\bar{d}) \\
 |1;1;2-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\{ud\}\bar{u}\bar{u} - dd\{\bar{u}\bar{d}\}) \\
 |1;1;2-2\rangle &= dd\bar{u}\bar{u}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dabei haben wir gesetzt

$$\begin{aligned}
 u &= |1/2 \ 1/2\rangle & \bar{u} &= -|1/2 \ -1/2\rangle \\
 d &= |1/2 \ -1/2\rangle & \bar{d} &= |1/2 \ 1/2\rangle
 \end{aligned}$$

Macht man die entsprechenden Identifikationen mit  $\uparrow$  und  $\downarrow$ , so können aus dieser Zusammenstellung auch die Spinzustände abgelesen werden.



Der gesamte Baryoniumzustand ist das direkte Produkt von Color-, Spin- und Isospinanteil

$$|B\rangle = |C\rangle |I\rangle |J\rangle ,$$

wobei darauf zu achten ist, dass die Quarks und Antiquarks das Pauli-Prinzip erfüllen, d.h.  $|B\rangle$  muss das Vorzeichen ändern, wenn zwei Quarks bzw. Antiquarks vertauscht werden. In Tabelle 2.1 sind alle Zustände aufgeführt, die dieser Bedingung genügen.

Ohne Berücksichtigung der magnetischen Quantenzahlen existieren zwanzig Baryoniumzustände (aufgebaut nur aus u- und d-Quarks), die wir mit  $B_1$  bis  $B_{20}$  bezeichnen. Sie bilden eine orthonormale Basis im  $q^2 \bar{q}^2$ -Hilbertraum (ohne Ortsraumanteil); diese wollen wir Diquark-Antidiquark- bzw.  $q^2 \bar{q}^2$ -Basis nennen.

### 2.2.2 C- und G-Parität

Die C-Parität wirkt wie folgt auf den Ein-Teilchen-Zuständen

$$\begin{array}{lll} \hat{C}u = \bar{u} & \hat{C}\uparrow = \uparrow & \hat{C}r = \bar{r} \\ \hat{C}d = \bar{d} & \hat{C}\downarrow = \downarrow & \hat{C}b = \bar{b} \\ & & \hat{C}g = \bar{g} \\ \hat{C}\bar{u} = u & & \hat{C}\bar{r} = r \\ \hat{C}\bar{d} = d & & \hat{C}\bar{b} = b \\ & & \hat{C}\bar{g} = g \end{array} \quad (2.3)$$

Die C-Parität eines Viel-Teilchen-Systems erhält man, indem man  $\hat{C}$  auf jedes Teilchen einzeln anwendet. Wie führen die Rechnung zuerst explizit an einem Beispiel durch.

Tabelle 2.1

$\{N_q\}$	$j_q$	$i_q$	$\{N_{\bar{q}}\}$	$j_{\bar{q}}$	$i_{\bar{q}}$	J	I	Bezeichnung	
$\{\bar{3}\}$	0	0	$\{3\}$	0	0	0	0	$B_1$	$ (3,0)0;(3,0)0;00\rangle$
			$\{3\}$	1	1	1	1	$B_{11}$	$ (3,0)0;(3,1)1;11\rangle$
$\{\bar{3}\}$	1	1	$\{3\}$	0	0	1	1	$B_{14}$	$ (3,1)1;(3,0)0;11\rangle$
			$\{3\}$	1	1	0	0	$B_4$	$ (3,1)1;(3,1)1;00\rangle$
						0	1	$B_6$	$ (3,1)1;(3,1)1;01\rangle$
						0	2	$B_8$	$ (3,1)1;(3,1)1;02\rangle$
						1	0	$B_{10}$	$ (3,1)1;(3,1)1;10\rangle$
						1	1	$B_{15}$	$ (3,1)1;(3,1)1;11\rangle$
						1	2	$B_{16}$	$ (3,1)1;(3,1)1;12\rangle$
						2	0	$B_{18}$	$ (3,1)1;(3,1)1;20\rangle$
						2	1	$B_{19}$	$ (3,1)1;(3,1)1;21\rangle$
						2	2	$B_{20}$	$ (3,1)1;(3,1)1;22\rangle$
$\{6\}$	0	1	$\{\bar{6}\}$	0	1	0	0	$B_2$	$ (6,0)1;(6,0)1;00\rangle$
						0	1	$B_5$	$ (6,0)1;(6,0)1;01\rangle$
						0	2	$B_7$	$ (6,0)1;(6,0)1;02\rangle$
			$\{\bar{6}\}$	1	0	1	1	$B_{12}$	$ (6,0)1;(6,1)0;11\rangle$
$\{6\}$	1	0	$\{\bar{6}\}$	0	1	1	1	$B_{13}$	$ (6,1)0;(6,0)1;11\rangle$
			$\{\bar{6}\}$	1	0	0	0	$B_3$	$ (6,1)0;(6,1)0;00\rangle$
						1	0	$B_9$	$ (6,1)0;(6,1)0;10\rangle$
						2	0	$B_{17}$	$ (6,1)0;(6,1)0;20\rangle$

Die Notation im Ket ist  $|(N_q, j_q) i_q; (N_{\bar{q}}, j_{\bar{q}}) i_{\bar{q}}; J I\rangle$

Die Nummerierung der Zustände richtet sich nach ihren Gesamtquantenzahlen J und I.

$$\begin{aligned}
 |0;1;10\rangle &= - [\bar{u}d]\{\bar{u}\bar{d}\} \\
 |1;0;10\rangle &= \{\bar{u}d\}[\bar{u}\bar{d}] \\
 |1;1;10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u}\bar{u}\bar{u} - d\bar{d}\bar{d}\bar{d}) \\
 \hat{C}|0;1;10\rangle &= - [\bar{u}\bar{d}]\{ud\} \\
 \hat{C}|1;0;10\rangle &= \{\bar{u}\bar{d}\}[ud] \\
 \hat{C}|1;1;10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}\bar{u}uu - \bar{d}\bar{d}dd)
 \end{aligned}$$

Nun stehen wir vor einem Problem. In unseren Zustandsfunktionen kommen keine Terme wie  $\bar{u}dud$  vor, wo also die Antiquarks an erster, die Quarks an zweiter Stelle stehen. Das Pauli-Prinzip verlangt, dass die totale Zustandsfunktion antisymmetrisch ist bei Austausch von zwei beliebigen Fermionen. Unsere Funktionen sind also nur Kurzschreibweisen, da in den voll ausgeschriebenen auch Terme wie  $\bar{u}dud$ ,  $u\bar{u}dd$  etc. auftreten müssen. Unsere Schreibweise entspricht der Einführung einer Standardreihenfolge der Teilchen: alle Quarks stehen vor allen Antiquarks. Wir bringen also die Ausdrücke  $\bar{u}dud$  etc. durch Vertauschen der Fermionen mit den Antifermionen in die Standardform zurück. Da wir von jeder Sorte zwei Teilchen haben, müssen wir eine gerade Anzahl von Permutationen ausführen. Das Vorzeichen der Zustandsfunktion bleibt daher unverändert. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \hat{C}|0;1;10\rangle &= - |1;0;10\rangle \\
 \hat{C}|1;0;10\rangle &= - |0;1;10\rangle \\
 \hat{C}|1;1;10\rangle &= |1;1;10\rangle
 \end{aligned}$$

Führen wir dies für alle Isospin-Zustände aus, so finden wir

$$\hat{C}|i_1; i_2; I I_3\rangle = (-1)^{i_1 - i_2 + I_3} |i_2; i_1; I - I_3\rangle$$

Wegen dem Vorzeichenwechsel von  $I_3$  können nur neutrale Teilchen Eigenzustände der C-Parität sein :  $I_3 = 0$  (Ladung  $Q = I_3$ , da die Hyperladung  $Y$  in unserem Fall verschwindet). Weiter mischen diejenigen mit asymmetrischen Quark-Antiquark-Isospin  $i_1 \neq i_2$ , sodass die Eigenzustände die Folgenden sind

$$\hat{C}_n^I |i; i; I_0\rangle = |i; i; I_0\rangle$$

$$\hat{C}_n^I |i_1; i_2; I_0\rangle_{\pm} = \pm (-1)^{i_1 - i_2} |i_1; i_2; I_0\rangle_{\pm}$$

$$\text{mit } |i_1; i_2; I_3\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|i_1; i_2; I_3\rangle \pm |i_2; i_1; I_3\rangle)$$

Beachte, dass  $i_1$  nicht etwa durchgehend den Quark-Isospin bezeichnet : bei dieser Zuordnung kommt es auf die Position im Ket an.

Wir haben  $\hat{C}^I$  statt  $\hat{C}$  geschrieben, um hervorzuheben, dass dies erst die Wirkung auf den Isospinanteil ist, und die folgende Zerlegung eingeführt

$$C^I = C_n^I (-1)^{I_3} \quad (n \text{ steht für neutral})$$

Was wir bis jetzt haben, ist noch nicht die ganze Wahrheit. Um unsere Standardreihenfolge zu erhalten, haben wir die Fermionenfelder vertauscht und dies beeinflusst natürlich auch den Color- und Spinanteil.

Man überzeugt sich leicht, dass die Ersetzung  $r \leftrightarrow \bar{r}$ ,  $b \leftrightarrow \bar{b}$ ,  $g \leftrightarrow \bar{g}$  und anschließende Permutation die Colorfunktionen (2.1) nicht ändert:  $C^C = 1$ .

Die C-Parität wirkt nicht auf dem Spin. Die Vertauschung liefert wegen

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J M \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - J} \langle j_2 m_2 j_1 m_1 | J M \rangle$$

eine Phase, sodass gilt

$$\hat{C}^J |j_1; j_2; JJ_3\rangle = (-1)^{j_1+j_2-J} |j_1; j_2; JJ_3\rangle$$

Das Ergebnis lautet damit

$$\begin{aligned} C &= C_n (-1)^{I_3} \\ \hat{C}_n &= \hat{C}^C \hat{C}_n^I \hat{C}^J \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } C_n &= (-1)^{j_1+j_2-J} \quad \text{für } i_1 = i_2 \\ C_n &= \pm (-1)^{i_1-i_2} (-1)^{j_1+j_2-J} \quad \text{für } i_1 \neq i_2 \end{aligned}$$

Die C-Parität hat den Nachteil, dass sie nur für neutrale Mitglieder eines Isospin-Multipletts definiert ist. Man führt deshalb die G-Parität ein, die für das ganze Multiplett gilt. Sie wird definiert als

$$\hat{G} = \hat{C} e^{i\pi \hat{I}_2} \quad (2.5)$$

Man kann zeigen, dass

$$e^{i\pi \hat{I}_2} |II_3\rangle = (-1)^{I-I_3} |I-I_3\rangle \quad (2.6)$$

Wir beweisen dies zuerst für Ein-Teilchen-Zustände und erweitern das Resultat durch Induktion auf die aus ihnen Gebildeten

$$\exp\left(\frac{1}{2} i \Theta \hat{n} \cdot \vec{\tau}\right) = \cos \frac{\Theta}{2} + i \hat{n} \cdot \vec{\tau} \sin \frac{\Theta}{2}$$

$\Theta = \pi$ ,  $\hat{n} = (0, 1, 0)$  eingesetzt

$$\exp\left(\frac{1}{2}i\pi\tau_2\right) = i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

woraus folgt

$$e^{i\pi\hat{I}_2} |1/2 I_3\rangle = (-1)^{1/2 - I_3} |1/2 -I_3\rangle$$

Sei also (2.6) für  $i_1$  und  $i_2$  bewiesen. Dann pflanzt sich das Gesetz durch alle Kopplungen weiter :

$$\begin{aligned} |i_1; i_2; II_3\rangle &= \sum_{m_1 m_2} \langle i_1 m_1 i_2 m_2 | II_3 \rangle |i_1 m_1\rangle |i_2 m_2\rangle \\ e^{i\pi\hat{I}_2} |i_1; i_2; II_3\rangle &= \sum_{m_1 m_2} \langle i_1 m_1 i_2 m_2 | II_3 \rangle (-1)^{i_1 - m_1} |i_1 - m_1\rangle \\ &\quad \times (-1)^{i_2 - m_2} |i_2 - m_2\rangle \end{aligned}$$

Die Auswahlregel verlangt  $m_1 + m_2 = I_3$ , die Gesamtpphase ist also

$$(-1)^{i_1 + i_2 - I_3}$$

Wir ändern die Summationsindizes zu  $m_1 = -k_1$ ,  $m_2 = -k_2$  und benützen

$$\begin{aligned} \langle i_1 m_1 i_2 m_2 | II_3 \rangle &= (-1)^{i_1 + i_2 - I} \langle i_1 - m_1 i_2 - m_2 | I - I_3 \rangle \\ e^{i\pi\hat{I}_2} |i_1; i_2; II_3\rangle &= \sum_{k_1 k_2} \langle i_1 k_1 i_2 k_2 | I - I_3 \rangle |i_1 k_1\rangle |i_2 k_2\rangle \\ &\quad \times (-1)^{i_1 + i_2 - I_3} (-1)^{I - i_1 - i_2} \\ &= (-1)^{I - I_3} |i_1; i_2; I - I_3\rangle \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Der Term  $e^{i\pi\hat{I}_2}$  dreht somit die dritte Isospinkomponente, die die C-Parität geändert hat, wieder zurück und macht die Phase  $I_3$ -unabhängig

$$\begin{aligned}\hat{G} |II_3\rangle &= e^{i\pi\hat{I}_2} \hat{C} |II_3\rangle \\ &= e^{i\pi\hat{I}_2} C_n (-1)^{I_3} |I-I_3\rangle \\ &= C_n (-1)^{I_3} (-1)^{I+I_3} |II_3\rangle \\ &= C_n (-1)^I |II_3\rangle\end{aligned}$$

Mit diesen Informationen können wir Tabelle 2.2 erstellen.

Wenn wir C und G für ein  $q^N \bar{q}^N$ -System (man mache sich klar, dass diese Paritäten nur dann definiert werden können, wenn gleichviele Teilchen wie Antiteilchen vorliegen) bestimmen wollen, müssen wir die Vertauschungen von Quarks mit Anti-quarks zählen, die benötigt werden, um die Standardreihenfolge nach der Anwendung von  $\hat{C}$  wieder herzustellen. Wie man leicht einsieht, sind es  $N \bmod 2$  Permutationen. Damit lautet die Verallgemeinerung von  $C_n$

$$C_n = C^C (-1)^{i_q - i_{\bar{q}}} (-1)^{j_q + j_{\bar{q}} - J} (-1)^N$$

Die Beziehung  $G = C_n (-1)^I$  gilt weiter.

Bei den gewöhnlichen Mesonen ( $i_q = i_{\bar{q}} = 1/2$ ,  $j_q = j_{\bar{q}} = 1/2$ ,  $C^C = 1$ ,  $N=1$ ) vereinfachen sich diese Formeln zu

$$\begin{aligned}C_n &= (-1)^J \\ G &= (-1)^{J+I} \quad (q\bar{q} - \text{Mesonen})\end{aligned}$$

Tabelle 2.2

Baryoniumzustand		$C_n^I$	$C_n^J$	$C_n$	G	
$B_1$	$ (3,0)0;(3,0)0;00\rangle$	+	+	+	+	
$B_2$	$ (6,0)1;(6,0)1;00\rangle$	+	+	+	+	
$B_3$	$ (6,1)0;(6,1)0;00\rangle$	+	+	+	+	
$B_4$	$ (3,1)1;(3,1)1;00\rangle$	+	+	+	+	
$B_5$	$ (6,0)1;(6,0)1;01\rangle$	+	+	+	-	
$B_6$	$ (3,1)1;(3,1)1;01\rangle$	+	+	+	-	
$B_7$	$ (6,0)1;(6,0)1;02\rangle$	+	+	+	+	
$B_8$	$ (3,1)1;(3,1)1;02\rangle$	+	+	+	+	
$B_9$	$ (6,1)0;(6,1)0;10\rangle$	+	-	-	-	
$B_{10}$	$ (3,1)1;(3,1)1;10\rangle$	+	-	-	-	
$B_{11}$	$ (3,0)0;(3,1)1;11\rangle$	$B_{11}+B_{14} :$ $B_{12}+B_{13} :$ $B_{12}-B_{13} :$ $B_{11}-B_{14} :$	-	+	-	+
$B_{12}$	$ (6,0)1;(6,1)0;11\rangle$		-	+	-	+
$B_{13}$	$ (6,1)0;(6,0)1;11\rangle$		+	+	+	-
$B_{14}$	$ (3,1)1;(3,0)0;11\rangle$		+	+	+	-
$B_{15}$	$ (3,1)1;(3,1)1;11\rangle$		+	-	-	+
$B_{16}$	$ (3,1)1;(3,1)1;12\rangle$		+	-	-	-
$B_{17}$	$ (6,1)0;(6,1)0;20\rangle$		+	+	+	+
$B_{18}$	$ (3,1)1;(3,1)1;20\rangle$		+	+	+	+
$B_{19}$	$ (3,1)1;(3,1)1;21\rangle$		+	+	+	-
$B_{20}$	$ (3,1)1;(3,1)1;22\rangle$		+	+	+	+



### 2.2.3 Die Dimeson-Basis

Für viele Belange ist es günstiger, die Zustände in der  $(q\bar{q})^2$ - bzw. Dimeson-Basis zu kennen. Die Symmetrieverhältnisse der Quarks und Antiquarks sind hier zwar nicht so offensichtlich wie in der  $q^2\bar{q}^2$ -Basis, doch die physikalischen Aussagen können in diesem Bezugssystem leichter abgelesen werden. Es werden auch diejenigen Zwei-Teilchen-Operatoren diagonal, die es in der Diquark-Antidiquark-Basis nicht sind. Man kann sich Baryonium direkt aus zwei Color-Singlett- bzw. Color-Oktett-Mesonen aufgebaut denken.

#### (i) SU(3)

$$q\bar{q} : \quad \{3\} \otimes \{\bar{3}\} = \{1\} \oplus \{8\}$$

$$\square \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$(q\bar{q})^2 : \quad \{1\} \otimes \{1\} = \{1\}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$\{8\} \otimes \{8\} = \{1\} \oplus \{8\} \oplus \{8\} \oplus \{\bar{10}\} \oplus \{10\} \oplus \{27\}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

Die Kombinationen  $\{1\} \otimes \{8\} = \{8\}$  und  $\{8\} \otimes \{1\} = \{8\}$  interessieren uns nicht, da sie kein Color-Singlett enthalten. Wir suchen nun eine unitäre Transformation  $U$ , sodass gilt

$$\begin{pmatrix} |\bar{3}; 3; 1\rangle \\ |\bar{6}; \bar{6}; 1\rangle \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} |1; 1; 1\rangle \\ |8; 8; 1\rangle \end{pmatrix}$$

Ihre Matrixelemente sind

$$\begin{aligned} u_{11} &= \langle \{\bar{3}\}; \{3\}; \{1\} | \{1\}; \{1\}; \{1\} \rangle \\ u_{12} &= \langle \{\bar{3}\}; \{3\}; \{1\} | \{8\}; \{8\}; \{1\} \rangle \\ u_{21} &= \langle \{6\}; \{\bar{6}\}; \{1\} | \{1\}; \{1\}; \{1\} \rangle \\ u_{22} &= \langle \{6\}; \{\bar{6}\}; \{1\} | \{8\}; \{8\}; \{1\} \rangle \end{aligned}$$

Wir konstruieren uns also  $|\{1\}; \{1\}; \{1\}\rangle$  und  $|\{8\}; \{8\}; \{1\}\rangle$ , wie wir es in (2.1) für die anderen zwei aufgeführt haben, und bilden die Skalarprodukte. Nach einiger Rechnung finden wir

$$\begin{aligned} |\{\bar{3}\}; \{3\}; \{1\}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |\{1\}; \{1\}; \{1\}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\{8\}; \{8\}; \{1\}\rangle \\ |\{6\}; \{\bar{6}\}; \{1\}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\{1\}; \{1\}; \{1\}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\{8\}; \{8\}; \{1\}\rangle \end{aligned}$$

## (ii) SU(2)

Das Vorgehen ist hier das gleiche wie oben : Konstruktion der  $(q\bar{q})^2$ -Basis und Berechnung der Skalarprodukte. Wir verwenden die Indizes  $q$  (Diquark-Antidiquark) und  $m$  (Dimeson) zur Unterscheidung der zwei Basen.

$$\begin{aligned} |0;0;0\rangle_q &= \frac{1}{2} |0;0;0\rangle_m + \sqrt{\frac{3}{2}} |1;1;0\rangle_m \\ |1;1;0\rangle_q &= \sqrt{\frac{3}{2}} |0;0;0\rangle_m - \frac{1}{2} |1;1;0\rangle_m \\ |0;1;1\rangle_q &= \frac{1}{2} |0;1;1\rangle_m - \frac{1}{2} |1;0;1\rangle_m + \sqrt{\frac{1}{2}} |1;1;1\rangle_m \\ |1;0;1\rangle_q &= -\frac{1}{2} |0;1;1\rangle_m + \frac{1}{2} |1;0;1\rangle_m + \sqrt{\frac{1}{2}} |1;1;1\rangle_m \\ |1;1;1\rangle_q &= \sqrt{\frac{1}{2}} |0;1;1\rangle_m + \sqrt{\frac{1}{2}} |1;0;1\rangle_m \\ |1;1;2\rangle_q &= |1;1;2\rangle_m \end{aligned}$$

Mit diesen Formeln ausgerüstet, können wir den Mesoneninhalt der Baryoniumzustände angeben. Die Rechnung besteht nur aus Ausmultiplizieren, ist aber wegen der Anzahl der  $q^2\bar{q}^2$ -Zustände ziemlich langwierig. Wir führen sie nur an einem Beispiel vor :

$$\begin{aligned} B_2 &= |(6,0)1;(6,0)1;00\rangle = |\{6\};\{\bar{6}\};\{1\}\rangle^C |0;0;0\rangle_m^J |1;1;0\rangle_m^I \\ &= |6\rangle^C \left( \frac{1}{2} |0\rangle_m^J + \frac{\sqrt{3}}{2} |1\rangle_m^J \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} |0\rangle_m^I - \frac{1}{2} |1\rangle_m^I \right) \\ &= |6\rangle^C \left( \frac{\sqrt{3}}{4} |0\rangle_m^J |0\rangle_m^I - \frac{1}{4} |0\rangle_m^J |1\rangle_m^I + \frac{3}{4} |1\rangle_m^J |0\rangle_m^I - \frac{\sqrt{3}}{4} |1\rangle_m^J |1\rangle_m^I \right) \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen  $|6\rangle^C = |\{6\};\{\bar{6}\};\{1\}\rangle$

$$|0\rangle_m^J = |0;0;0\rangle_m \quad |1\rangle_m^J = |1;1;0\rangle_m$$

Wir ordnen zu

$$\begin{aligned} |0\rangle_m^J |0\rangle_m^I &= \eta\eta \\ |0\rangle_m^J |1\rangle_m^I &= \pi\pi \\ |1\rangle_m^J |0\rangle_m^I &= \omega\omega \\ |1\rangle_m^J |1\rangle_m^I &= \varrho\varrho \end{aligned}$$

mit den  $q\bar{q}$ -Mesonen, was J und I betrifft, die zu dem totalen Spin und Isospin gekoppelt sind, wie es der Baryoniumzustand verlangt.

$$\begin{aligned} B_2 &= \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle^C - \sqrt{\frac{1}{3}} |8\rangle^C \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \eta\eta - \frac{1}{4} \pi\pi + \frac{3}{4} \omega\omega - \frac{\sqrt{3}}{4} \varrho\varrho \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \eta^1 \eta^1 - \frac{\sqrt{6}}{12} \pi^1 \pi^1 + \frac{\sqrt{6}}{4} \omega^1 \omega^1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \varrho^1 \varrho^1 \\ &\quad - \frac{1}{4} \eta^8 \eta^8 + \frac{\sqrt{3}}{12} \pi^8 \pi^8 - \frac{\sqrt{3}}{4} \omega^8 \omega^8 + \frac{1}{4} \varrho^8 \varrho^8 \end{aligned}$$

Die hochgestellte Zahl gibt die Color-Dimension an; das ganze Zwei-Mesonen-System wird natürlich zu Color-Singlett gekoppelt.

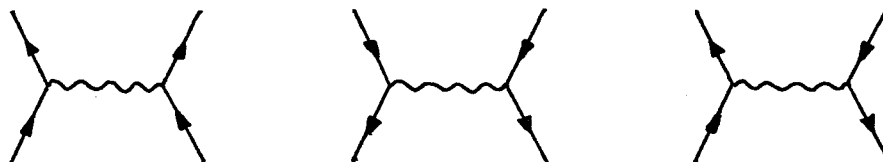
Auf diese Weise entstand Tabelle 2.3 .

#### 2.2.4 Wechselwirkung

Wir haben bereits eine ganze Menge Informationen über Baryonium : wir kennen die möglichen Quantenzahlen und den Mesoneninhalt. Nun stellen wir uns die Frage, wie die Zustände in der Natur vorkommen. Im wechselwirkungsfreien Fall könnten wir eine beliebige Linearkombination von solchen mit gleichen Quantenzahlen als physikalisch annehmen. Ihre Masse wäre nach den Formeln aus Abschnitt 2.1  $M = 1463 \text{ MeV}$  und ihr Radius  $1.14 \text{ fm}$  ; sie wären also vollkommen entartet. Ihr Mesoneninhalt würde natürlich von der gewählten Linearkombination abhängen.

Dieser Fall ist zwar trivial zu handhaben; wir dürfen aber nicht erwarten, dass wir auf diese Weise mehr als eine grobe Abschätzung der mittleren Masse von Baryonium erhalten.

Einige Autoren (z.B. Jaffe, Aerts) haben sich im Rahmen des Bagmodells mit  $q^2 \bar{q}^2$  - Systemen auseinandergesetzt und als Wechselwirkung den Ein-Gluon-Austausch betrachtet



In ihren Arbeiten steckt aber eine Unsicherheit drin : sie haben nicht alle Graphen berücksichtigt, die Zweite-Ordnung

Tabelle 2.3

Baryoniumzustände in der Dimeson-Basis

J = 0 , I = 0

$$B_1 = \frac{\sqrt{3}}{12} |\eta\eta\rangle^1 + \frac{1}{4} |\pi\pi\rangle^1 + \frac{1}{4} |\omega\omega\rangle^1 + \frac{\sqrt{3}}{4} |\eta\eta\rangle^1 \\ + \frac{\sqrt{6}}{12} |\eta\eta\rangle^8 + \frac{\sqrt{2}}{4} |\pi\pi\rangle^8 + \frac{\sqrt{2}}{4} |\omega\omega\rangle^8 + \frac{\sqrt{6}}{4} |\eta\eta\rangle^8$$

$$B_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} |\eta\eta\rangle^1 - \frac{\sqrt{6}}{12} |\pi\pi\rangle^1 + \frac{\sqrt{6}}{4} |\omega\omega\rangle^1 - \frac{\sqrt{2}}{4} |\eta\eta\rangle^1 \\ - \frac{1}{4} |\eta\eta\rangle^8 + \frac{\sqrt{3}}{12} |\pi\pi\rangle^8 - \frac{\sqrt{3}}{4} |\omega\omega\rangle^8 + \frac{1}{4} |\eta\eta\rangle^8$$

$$B_3 = \frac{\sqrt{2}}{4} |\eta\eta\rangle^1 + \frac{\sqrt{6}}{4} |\pi\pi\rangle^1 - \frac{\sqrt{6}}{12} |\omega\omega\rangle^1 - \frac{\sqrt{2}}{4} |\eta\eta\rangle^1 \\ - \frac{1}{4} |\eta\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{3}}{4} |\pi\pi\rangle^8 + \frac{\sqrt{3}}{12} |\omega\omega\rangle^8 + \frac{1}{4} |\eta\eta\rangle^8$$

$$B_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} |\eta\eta\rangle^1 - \frac{1}{4} |\pi\pi\rangle^1 - \frac{1}{4} |\omega\omega\rangle^1 + \frac{\sqrt{3}}{12} |\eta\eta\rangle^1 \\ + \frac{\sqrt{6}}{4} |\eta\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{2}}{4} |\pi\pi\rangle^8 - \frac{\sqrt{2}}{4} |\omega\omega\rangle^8 + \frac{\sqrt{6}}{12} |\eta\eta\rangle^8$$

J = 0 , I = 1

$$B_5 = \frac{\sqrt{3}}{6} |\eta\pi\rangle^1 + \frac{\sqrt{3}}{6} |\pi\eta\rangle^1 + \frac{1}{2} |\omega\eta\rangle^1 + \frac{1}{2} |\eta\omega\rangle^1 \\ - \frac{\sqrt{6}}{12} |\eta\pi\rangle^8 - \frac{\sqrt{6}}{12} |\pi\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{2}}{4} |\omega\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{2}}{4} |\eta\omega\rangle^8$$

$$B_6 = \frac{\sqrt{2}}{4} |\eta\pi\rangle^1 + \frac{\sqrt{2}}{4} |\pi\eta\rangle^1 - \frac{\sqrt{6}}{12} |\omega\eta\rangle^1 - \frac{\sqrt{6}}{12} |\eta\omega\rangle^1 \\ + \frac{1}{2} |\eta\pi\rangle^8 + \frac{1}{2} |\pi\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{3}}{3} |\omega\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{3}}{3} |\eta\omega\rangle^8$$

$$\underline{J = 0, I = 2}$$

$$B_7 = \frac{\sqrt{6}}{6} |\pi\pi\rangle^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} |\eta\eta\rangle^1 - \frac{\sqrt{3}}{6} |\pi\pi\rangle^8 - \frac{1}{2} |\eta\eta\rangle^8$$

$$B_8 = \frac{1}{2} |\pi\pi\rangle^1 - \frac{\sqrt{3}}{6} |\eta\eta\rangle^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} |\pi\pi\rangle^8 - \frac{\sqrt{6}}{6} |\eta\eta\rangle^8$$

$$\underline{J = 1, I = 0}$$

$$B_9 = \frac{\sqrt{3}}{6} |\eta\omega\rangle^1 + \frac{\sqrt{3}}{6} |\omega\eta\rangle^1 + \frac{1}{2} |\pi\eta\rangle^1 + \frac{1}{2} |\eta\pi\rangle^1 \\ - \frac{\sqrt{6}}{12} |\eta\omega\rangle^8 - \frac{\sqrt{6}}{12} |\omega\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{2}}{4} |\pi\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{2}}{4} |\eta\pi\rangle^8$$

$$B_{10} = \frac{\sqrt{2}}{4} |\eta\omega\rangle^1 + \frac{\sqrt{2}}{4} |\omega\eta\rangle^1 - \frac{\sqrt{6}}{12} |\pi\eta\rangle^1 - \frac{\sqrt{6}}{12} |\eta\pi\rangle^1 \\ + \frac{1}{2} |\eta\omega\rangle^8 + \frac{1}{2} |\omega\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{3}}{6} |\pi\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{3}}{6} |\eta\pi\rangle^8$$

$$\underline{J = 1, I = 1}$$

$$B_{11} = \frac{\sqrt{3}}{12} |\eta\eta\rangle^1 + \frac{\sqrt{3}}{12} |\eta\eta\rangle^1 - \frac{\sqrt{3}}{12} |\pi\omega\rangle^1 - \frac{\sqrt{3}}{12} |\omega\pi\rangle^1 \\ + \frac{\sqrt{6}}{12} |\pi\eta\rangle^1 - \frac{\sqrt{6}}{12} |\eta\pi\rangle^1 + \frac{\sqrt{6}}{12} |\omega\eta\rangle^1 - \frac{\sqrt{6}}{12} |\eta\omega\rangle^1 + \frac{\sqrt{3}}{6} |\eta\eta\rangle^8 \\ + \frac{\sqrt{6}}{12} |\eta\eta\rangle^8 + \frac{\sqrt{6}}{12} |\eta\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{6}}{12} |\pi\omega\rangle^8 - \frac{\sqrt{6}}{12} |\omega\pi\rangle^8 \\ + \frac{\sqrt{3}}{6} |\pi\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{3}}{6} |\eta\pi\rangle^8 + \frac{\sqrt{3}}{6} |\omega\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{3}}{6} |\eta\omega\rangle^8 + \frac{\sqrt{6}}{6} |\eta\eta\rangle^8$$

$$B_{12} = -\frac{\sqrt{6}}{12} |\eta\eta\rangle^1 - \frac{\sqrt{6}}{12} |\eta\eta\rangle^1 + \frac{\sqrt{6}}{12} |\pi\omega\rangle^1 + \frac{\sqrt{6}}{12} |\omega\pi\rangle^1 \\ + \frac{\sqrt{3}}{6} |\pi\eta\rangle^1 - \frac{\sqrt{3}}{6} |\eta\pi\rangle^1 - \frac{\sqrt{3}}{6} |\omega\eta\rangle^1 + \frac{\sqrt{3}}{6} |\eta\omega\rangle^1 + \frac{\sqrt{6}}{6} |\eta\eta\rangle^8 \\ + \frac{\sqrt{3}}{12} |\eta\eta\rangle^8 + \frac{\sqrt{3}}{12} |\eta\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{3}}{12} |\pi\omega\rangle^8 - \frac{\sqrt{3}}{12} |\omega\pi\rangle^8 \\ - \frac{\sqrt{6}}{12} |\pi\eta\rangle^8 + \frac{\sqrt{6}}{12} |\eta\pi\rangle^8 + \frac{\sqrt{6}}{12} |\omega\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{6}}{12} |\eta\omega\rangle^8 - \frac{\sqrt{3}}{6} |\eta\eta\rangle^8$$

$$\begin{aligned}
 B_{13} = & -\frac{\sqrt{6}}{12}|\eta\eta\rangle^1 - \frac{\sqrt{6}}{12}|\eta\eta\rangle^1 + \frac{\sqrt{6}}{12}|\pi\omega\rangle^1 + \frac{\sqrt{6}}{12}|\omega\pi\rangle^1 \\
 & - \frac{\sqrt{3}}{6}|\pi\eta\rangle^1 + \frac{\sqrt{3}}{6}|\eta\pi\rangle^1 + \frac{\sqrt{3}}{6}|\omega\eta\rangle^1 - \frac{\sqrt{3}}{6}|\eta\omega\rangle^1 + \frac{\sqrt{6}}{6}|\eta\eta\rangle^1 \\
 & + \frac{\sqrt{3}}{12}|\eta\eta\rangle^8 + \frac{\sqrt{3}}{12}|\eta\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{3}}{12}|\pi\omega\rangle^8 - \frac{\sqrt{3}}{12}|\omega\pi\rangle^8 \\
 & + \frac{\sqrt{6}}{12}|\pi\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{6}}{12}|\eta\pi\rangle^8 - \frac{\sqrt{6}}{12}|\omega\eta\rangle^8 + \frac{\sqrt{6}}{12}|\eta\omega\rangle^8 - \frac{\sqrt{3}}{6}|\eta\eta\rangle^8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{14} = & \frac{\sqrt{3}}{12}|\eta\eta\rangle^1 + \frac{\sqrt{3}}{12}|\eta\eta\rangle^1 - \frac{\sqrt{3}}{12}|\pi\omega\rangle^1 - \frac{\sqrt{3}}{12}|\omega\pi\rangle^1 \\
 & - \frac{\sqrt{6}}{12}|\pi\eta\rangle^1 + \frac{\sqrt{6}}{12}|\eta\pi\rangle^1 - \frac{\sqrt{6}}{12}|\omega\eta\rangle^1 + \frac{\sqrt{6}}{12}|\eta\omega\rangle^1 + \frac{\sqrt{3}}{6}|\eta\eta\rangle^1 \\
 & + \frac{\sqrt{6}}{12}|\eta\eta\rangle^8 + \frac{\sqrt{6}}{12}|\eta\eta\rangle^8 - \frac{\sqrt{6}}{12}|\pi\omega\rangle^8 - \frac{\sqrt{6}}{12}|\omega\pi\rangle^8 \\
 & - \frac{\sqrt{3}}{6}|\pi\eta\rangle^8 + \frac{\sqrt{3}}{6}|\eta\pi\rangle^8 - \frac{\sqrt{3}}{6}|\omega\eta\rangle^8 + \frac{\sqrt{3}}{6}|\eta\omega\rangle^8 + \frac{\sqrt{6}}{6}|\eta\eta\rangle^8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{15} = & \frac{\sqrt{3}}{6}|\eta\eta\rangle^1 + \frac{\sqrt{3}}{6}|\eta\eta\rangle^1 + \frac{\sqrt{3}}{6}|\pi\omega\rangle^1 + \frac{\sqrt{3}}{6}|\omega\pi\rangle^1 \\
 & + \frac{\sqrt{6}}{6}|\eta\eta\rangle^8 + \frac{\sqrt{6}}{6}|\eta\eta\rangle^8 + \frac{\sqrt{6}}{6}|\pi\omega\rangle^8 + \frac{\sqrt{6}}{6}|\omega\pi\rangle^8
 \end{aligned}$$

$$\underline{J = 1, I = 2}$$

$$B_{16} = \frac{\sqrt{6}}{6}|\pi\eta\rangle^1 + \frac{\sqrt{6}}{6}|\eta\pi\rangle^1 + \frac{\sqrt{3}}{3}|\pi\eta\rangle^8 + \frac{\sqrt{3}}{3}|\eta\pi\rangle^8$$

$$\underline{J = 2, I = 0}$$

$$B_{17} = \frac{\sqrt{6}}{6}|\omega\omega\rangle^1 + \frac{\sqrt{2}}{2}|\eta\eta\rangle^1 - \frac{\sqrt{3}}{6}|\omega\omega\rangle^8 - \frac{1}{2}|\eta\eta\rangle^8$$

$$B_{18} = \frac{1}{2}|\omega\omega\rangle^1 - \frac{\sqrt{3}}{6}|\eta\eta\rangle^1 + \frac{\sqrt{2}}{2}|\omega\omega\rangle^8 - \frac{\sqrt{6}}{6}|\eta\eta\rangle^8$$

$$\underline{J = 2, I = 1}$$

$$B_{19} = \frac{\sqrt{6}}{6} |\omega \xi\rangle^1 + \frac{\sqrt{6}}{6} |\xi \omega\rangle^1 + \frac{\sqrt{3}}{3} |\omega \xi\rangle^8 + \frac{\sqrt{3}}{3} |\xi \omega\rangle^8$$

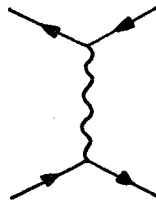
$$\underline{J = 2, I = 2}$$

$$B_{20} = \frac{\sqrt{3}}{3} |\xi \xi\rangle^1 + \frac{\sqrt{6}}{3} |\xi \xi\rangle^8$$

Für die Quantenzahlen der Baryoniumzustände siehe Tabelle 2.1 bzw. Tabelle 2.2 .



Störungsrechnung zulässt. Die fehlende Wechselwirkung ist die Annihilation



Wir haben ja bereits den analytischen Ausdruck auch für diesen Graph angegeben. Im Folgenden wollen wir das Baryoniumspektrum berechnen, wobei wir alle Graphen mitnehmen.

Der erste Schritt ist die Bestimmung der Matrixdarstellung von  $\hat{\Delta E}$ , z.B. in der  $q^2 \bar{q}^2$ -Basis. Um die Terme wie  $\vec{F}^q \cdot \vec{F}^q$ ,  $\vec{F}^q \cdot \vec{F}^{\bar{q}}$ , die in den Ausdrücken für die Graphen auftreten (siehe Abschnitt 1.2.3), auszuwerten, könnten wir einen Teil der Rechnung ( $qq$ - und  $\bar{q}\bar{q}$ -Wechselwirkung) in der  $q^2 \bar{q}^2$ -Basis, den Rest ( $q\bar{q}$ -Wechselwirkung) in der  $(q\bar{q})^2$ -Basis ausführen und zurücktransformieren. Obwohl die Rechnungen an sich einfach sind, haben sie einen beträchtlichen Umfang:  $SU(2)$ - und  $SU(3)$ -Matrixelemente, danach direktes Produkt von Color, Spin und Isospin den Kopplungen entsprechend. Wir haben stattdessen ein Computerprogramm geschrieben, das die Ausdrücke vom obengenannten Typ in der Vier-Teilchen-Basis auswertet, sie in die korrekten  $SU(2)$ - und  $SU(3)$ -Zustände transformiert und gerade die Kombinationen, wie sie in den Graphen vorkommen, berechnet.

Wir machen die folgende Aufspaltung

$$R \hat{\Delta E}_{EX} = \alpha_c (\mu_0 \hat{G}_0 + \mu_1 \hat{G}_1)$$

$$R \hat{\Delta E}_{AN} = \alpha_c (\nu_0 \hat{A}_0 + \nu_1 \hat{A}_1)$$

mit

$$\hat{G}_0 = \sum_{i>i'} \vec{F}_i \cdot \vec{F}_{i'}$$

$$\hat{G}_1 = \sum_{i>i'} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i'} \vec{F}_i \cdot \vec{F}_{i'}$$

$$\hat{A}_0 = \sum_{j, \bar{k}} \left( \frac{1}{4} - \vec{T}_j \cdot \vec{T}_{\bar{k}} \right) \left( \vec{F}_j \cdot \vec{F}_{\bar{k}} + \frac{4}{3} \right) \left( \frac{1}{4} - \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{\bar{k}} \right)$$

$$\hat{A}_1 = \sum_{j, \bar{k}} \left( \frac{1}{4} - \vec{T}_j \cdot \vec{T}_{\bar{k}} \right) \left( \vec{F}_j \cdot \vec{F}_{\bar{k}} + \frac{4}{3} \right) \left( \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{\bar{k}} + \frac{3}{4} \right)$$

Die Indizes i und i' beziehen sich auf alle Teilchen, j auf Quarks und  $\bar{k}$  auf Antiquarks

Jeden dieser vier Operatoren  $\hat{G}$  und  $\hat{A}$  können wir durch eine  $20 \times 20$  - Matrix darstellen (20 Baryoniumzustände, keine Abhängigkeit von den magnetischen Quantenzahlen). Wie nicht anders zu erwarten, erweist es sich, dass die Matrizen Blockdiagonalform haben, sodass nur Zustände mit gleichen Quantenzahlen untereinander mischen. Dazu gehört auch, dass im Fall  $J=1, I=1$  die  $5 \times 5$  - Matrizen (Basis  $B_{11}$  bis  $B_{15}$ ) nach einer Transformation auf Zustände mit definierten C- und G-Paritäten (siehe Tabelle 2.2) zerfallen in  $2 \times 2$  - und  $3 \times 3$  - Blöcke. Wir sehen hier eindrucksvoll demonstriert, dass die QCD-Theorie C- und G-invariant ist.

$\hat{G}_0$  ist in allen Zuständen diagonal und hat den Wert

$$\begin{aligned} G_0 &= \sum_{i>i'} \vec{F}_i \cdot \vec{F}_{i'} = \frac{1}{2} \left( \left( \sum_i F_i \right)^2 - \sum_i (F_i)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (C\{1\} - 4 C\{3\}) = \frac{1}{2} \left( 0 - 4 \frac{4}{3} \right) \\ &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

$C\{N\}$  ist wie in Abschnitt 2.1 der Wert des quadratischen Casimiroperators in der N-dim. Darstellung der  $SU(3)$

In Tabelle 2.4 geben wir die Matrixdarstellungen von  $\hat{G}_1$ ,  $\hat{A}_0$  und  $\hat{A}_1$  in der  $q^2\bar{q}^2$ -Basis an. Sie enthalten die meiste Information über Baryonium und können bei allfälliger Weiterrechnung wiederverwendet werden. Ist bei einer Matrix ein Vektor hinzugefügt, so kann sie als dyadisches Produkt dieses Vektors mit sich selbst aufgefasst werden

$$M = |x\rangle\langle x|$$

$$M|y\rangle = \langle x|y\rangle|x\rangle$$

Die Operatoren  $\hat{A}_0$  und  $\hat{A}_1$  sind spezielle Projektoren, die aus einem  $q\bar{q}$ -System dessen Anteil mit bestimmten Color-, Spin- und Isospinquantenzahlen herausfiltrieren. Zum Beispiel

$$\left(\frac{1}{4} - \vec{T}^q \cdot \vec{T}^{\bar{q}}\right) |I=0\rangle = 1 \cdot |I=0\rangle$$

$$\left(\frac{1}{4} - \vec{T}^q \cdot \vec{T}^{\bar{q}}\right) |I=1\rangle = 0 \cdot |I=1\rangle$$

Unter Benützung der Formeln aus Abschnitt 2.1 kann man die Skalarprodukte  $\vec{T}^q \cdot \vec{T}^{\bar{q}}$  etc. durch Casimir's ausdrücken und sich so die Projektionen auf beliebige  $q\bar{q}$ -Quantenzahlen konstruieren. Wir führen dies an einem Beispiel vor

$$\pi : \{N\} = \{1\}, \quad J = 0, \quad I = 1$$

$$\hat{p} = \hat{p}^C \hat{p}^J \hat{p}^I$$

Wir verlangen

$$\hat{p}^C |\{N\} = \{1\}\rangle = 1 \cdot |\{N\} = \{1\}\rangle$$

$$\hat{p}^C |\{N\} = \{8\}\rangle = 0 \cdot |\{N\} = \{8\}\rangle$$

und setzen an

$$\hat{p}^C = a \vec{T}^q \cdot \vec{T}^{\bar{q}} + b$$

Tabelle 2.4

Matrixdarstellung von  $\hat{G}_1$ ,  $\hat{A}_0$  und  $\hat{A}_1$  in der  $q^2 \bar{q}^2$  - Basis

---

J = 0 , I = 0

Basis :  $B_1, B_2, B_3, B_4$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & \sqrt{3/2} \\ \sqrt{3/2} & 0 & 11/6 & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 6 \\ -\sqrt{6} & 3 & 3 & -\sqrt{54} \\ -\sqrt{6} & 3 & 3 & -\sqrt{54} \\ 6 & -\sqrt{54} & -\sqrt{54} & 18 \end{pmatrix} ; |x\rangle = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & -\sqrt{54} & \sqrt{6} & -6 \\ -\sqrt{54} & 9 & -3 & \sqrt{54} \\ \sqrt{6} & -3 & 1 & -\sqrt{6} \\ -6 & \sqrt{54} & -\sqrt{6} & 6 \end{pmatrix} ; |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -3 \\ 1 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

J = 0 , I = 1

Basis :  $B_5, B_6$

$$G_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3/2} \\ \sqrt{3/2} & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 6 \end{pmatrix} ; |x\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} ; |x\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{J = 0, I = 2}$$

$$\text{Basis : } B_7, B_8$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3/2} \\ \sqrt{3/2} & 1/3 \end{pmatrix} ; \quad A_0 = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{J = 1, I = 0}$$

$$\text{Basis : } B_9, B_{10}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 6 \end{pmatrix} = A_1 ; \quad |x\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\underline{J = 1, I = 1}$$

$$\text{Basis : } B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{15}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{8} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{8} \\ 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 4 & \sqrt{8} & \sqrt{8} & 4 & 8 \end{pmatrix} ; \quad |x\rangle = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{8} \\ \sqrt{8} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & \sqrt{18} & -\sqrt{2} & -2 & -4 \\ \sqrt{18} & 3 & -1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{8} \\ -\sqrt{2} & -1 & 3 & \sqrt{18} & -\sqrt{8} \\ -2 & -\sqrt{2} & \sqrt{18} & 6 & -4 \\ -4 & -\sqrt{8} & -\sqrt{8} & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Transformation in eine Basis mit definierter C- und G-Parität :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(B_{11} - B_{14}), \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{12} - B_{13}), \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{11} + B_{14}), \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{12} + B_{13}), B_{15}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \sqrt{2} & \sqrt{8} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{8} & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{8} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{8} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \sqrt{2} & -\sqrt{8} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{8} & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{J = 1, I = 2}$$

$$\text{Basis : } B_{16}$$

$$G_1 = A_0 = A_1 = 0$$

$$\underline{J = 2, I = 0}$$

$$\text{Basis : } B_{17}, B_{18}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix} ; \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 6 \end{pmatrix} ; \quad |x\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\underline{J = 2, I = 1}$$

$$\text{Basis : } B_{19}$$

$$G_1 = -2/3 ; \quad A_0 = 0 ; \quad A_1 = 2$$

$$\underline{J = 2, I = 2}$$

$$\text{Basis : } B_{20}$$

$$G_1 = -2/3 ; \quad A_0 = A_1 = 0$$

$$\{1\} : \quad a \frac{1}{2} (0 - \frac{8}{3}) + b = -\frac{4}{3} a + b = 1$$

$$\{8\} : \quad a \frac{1}{2} (3 - \frac{8}{3}) + b = \frac{1}{6} a + b = 0$$

$$\text{d.h.} \quad \hat{p}^0 = -\frac{2}{3} \vec{F}^q \cdot \vec{F}^{\bar{q}} + \frac{1}{9}$$

analog

$$\hat{p}^3 = \frac{1}{4} - \vec{S}^q \cdot \vec{S}^{\bar{q}}$$

$$\hat{p}^1 = \frac{3}{4} + \vec{T}^q \cdot \vec{T}^{\bar{q}}$$

Die Diagonalelemente dieser Operatoren  $\hat{P}$  für ein Viel-Teilchen-System geben gerade die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Meson darin zu finden. Zur Veranschaulichung :

$$|\psi\rangle_1 = p|\phi\rangle_1 + q|\phi\rangle_2$$

$$|\psi\rangle_2 = r|\phi\rangle_1 + s|\phi\rangle_2$$

$|\psi\rangle_1$  und  $|\psi\rangle_2$  sind die Zustände in einer beliebigen,  $|\phi\rangle_1$  und  $|\phi\rangle_2$  die in der Multimesonbasis.  $\hat{P}$  wirke folgendermassen

$$\hat{P}|\phi\rangle_1 = 1 \cdot |\phi\rangle_1$$

$$\hat{P}|\phi\rangle_2 = 0 \cdot |\phi\rangle_2$$

Somit

$$\langle\psi_1|\hat{P}|\psi\rangle_1 = |p|^2 \quad \langle\psi_1|\hat{P}|\psi\rangle_2 = p^* r$$

$$\langle\psi_2|\hat{P}|\psi\rangle_1 = r^* p \quad \langle\psi_2|\hat{P}|\psi\rangle_2 = |r|^2$$

Die Ausserdiagonalelemente sind nicht so einfach zu deuten : Sie enthalten Information über die relativen Phasen.



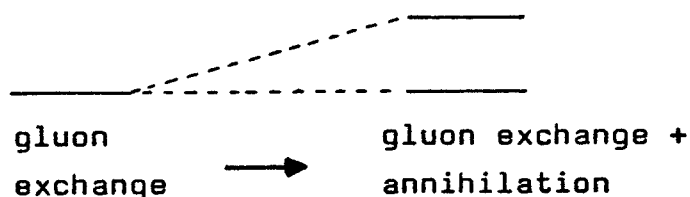
### 2.2.5 Das Baryoniumspektrum

Wir bilden aus den Matrixdarstellungen von  $\hat{G}_0$ ,  $\hat{G}_1$ ,  $\hat{A}_0$  und  $\hat{A}_1$  den Operator

$$\frac{R}{\alpha_c} \hat{\Delta E} = \mu_0 \hat{G}_0 + \mu_1 \hat{G}_1 + \nu_0 \hat{A}_0 + \nu_1 \hat{A}_1$$

und diagonalisieren ihn. Seine Eigenvektoren fassen wir dabei als die physikalischen Baryoniumzustände auf, seine Eigenwerte  $\Lambda$  als die Beiträge der Zweite-Ordnungs-Graphen zur totalen Energie. Sie sind in Tabelle 2.5 zusammengestellt. Die effektiven Massen und Radii berechnen wir daraus nach den Beziehungen aus Abschnitt 2.1. Auf diese Weise erhalten wir das Baryoniumspektrum, das in Abb. 2 dargestellt ist. Für die Zahlenwerte verweisen wir auf z.B. Tabelle 2.8.

Hervorgehoben ist in Abb. 2 die Aufspaltung der Energieniveaux, die der Annihilationsgraph gegenüber dem Ein-Gluon-Austausch bewirkt



Als teilweise Kontrolle dient uns der Vergleich mit dem Jaffe-Spektrum (gluon exchange)

Der Uebersichtlichkeit halber ist die Darstellung unterteilt in  $J=0$  - (links),  $J=1$  - (Mitte) und  $J=2$  - Zustände (rechts).

Das Hauptmerkmal des Spektrums ist die Anhebung der Energie durch die Annihilation: kein einziger Zustand erhält eine niedrigere Masse als im Jaffe-Spektrum. Die Annihilations-

-42a-

Abb. 2

# Baryoniumspektrum

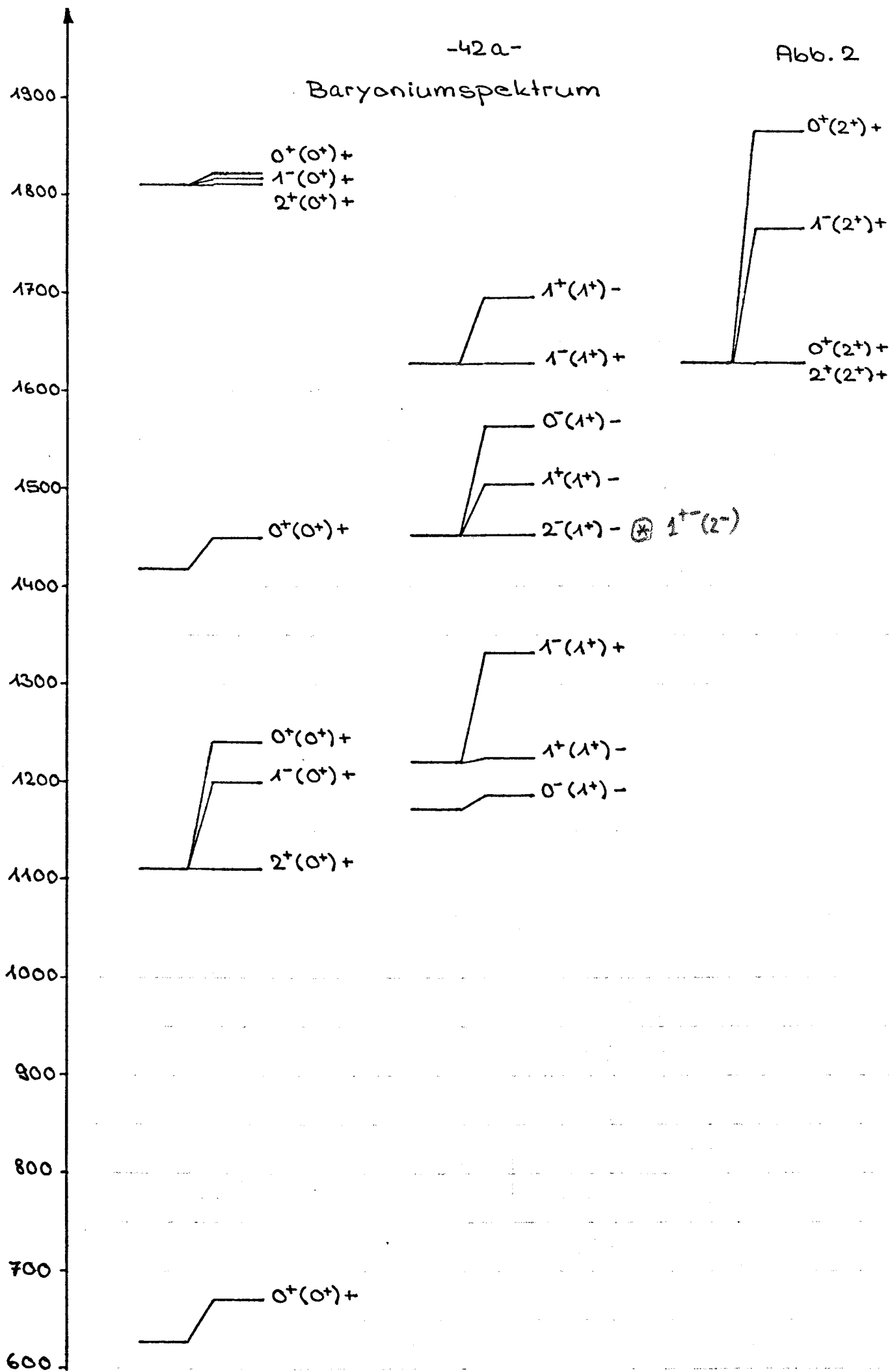


Tabelle 2.5

-----  
SPIN = 0 ISOSPIN = 0  
-----

I1> = I(3,0)0;(3,0)0;00>  
I2> = I(6,0)1;(6,0)1;00>  
I3> = I(6,1)0;(6,1)0;00>  
I4> = I(3,1)1;(3,1)1;00>

-- G0 = .0098 A0 = .0000  
-- G1 = -.7081 A1 = .1875

EIGENWERT(E) EIGENVEKTOR(EN)

-1.859596 I1'> = ( .550882)I1> + ( .095497)I2> + ( .821785)I3> + ( .109903)I4>  
-.566261 I2'> = (-.128521)I1> + (-.513104)I2> + ( .254070)I3> + (-.809725)I4>  
-.032677 I3'> = (-.823252)I1> + ( .094972)I2> + ( .510001)I3> + ( .230511)I4>  
.931360 I4'> = (-.047519)I1> + ( .847694)I2> + ( .004071)I3> + (-.528328)I4>

-----  
SPIN = 0 ISOSPIN = 1  
-----

I1> = I(6,0)1;(6,0)1;01>  
I2> = I(3,1)1;(3,1)1;01>

-- G0 = .0098 A0 = .0000  
-- G1 = -.7081 A1 = .1875

EIGENWERT(E) EIGENVEKTOR(EN)

-.666986 I1'> = (-.552362)I1> + (-.833604)I2> -.983181 I1'> = (-.582203)I1> + (-.813043)I2>  
.967111 I2'> = ( .833604)I1> + (-.552362)I2> .948931 I2'> = ( .813043)I1> + (-.582203)I2>

-----  
SPIN = 0 ISOSPIN = 2  
-----

I1> = I(6,0)1;(6,0)1;02>  
I2> = I(3,1)1;(3,1)1;02>

-- G0 = .0098 A0 = .0000  
-- G1 = -.7081 A1 = .1875

EIGENWERT(E) EIGENVEKTOR(EN)

```
-----
SPIN = 1  ISOSPIN = 0
-----
```

```
I1> = I(6,1)0;(6,1)0;10>
I2> = I(3,1)1;(3,1)1;10>
```

```
-- G0 = .0098      A0 = .0000
-- G1 = -.7081     A1 = .1875
```

```
EIGENWERT(E)      EIGENVEKTOR(EN)
```

```
-.701145      I1'> = (-.992868)I1> + (-.119215)I2>
.268903      I2'> = (.119215)I1> + (-.992868)I2>
```

```
-----
SPIN = 1  ISOSPIN = 1
-----
```

```
I1> = I(3,0)0;(3,1)1;11>
I2> = I(6,0)1;(6,1)0;11>
I3> = I(6,1)0;(6,0)1;11>
I4> = I(3,1)1;(3,0)0;11>
I5> = I(3,1)1;(3,1)1;11>
```

```
-- G0 = .0098      A0 = .0000
-- G1 = -.7081     A1 = .1875
```

```
EIGENWERT(E)      EIGENVEKTOR(EN)
```

```
-.605385      I1'> = (-.564033)I1> + (.424004)I2> + (.424004)I3> + (-.564033)I4> + (-.064611)I5>
-.334967      I2'> = (.577350)I1> + (.408248)I2> + (-.408248)I3> + (-.577350)I4> + (.000000)I5>
.112412      I3'> = (.100982)I1> + (.206389)I2> + (.206389)I3> + (.100982)I4> + (.945734)I5>
.445933      I4'> = (-.408248)I1> + (.577350)I2> + (-.577350)I3> + (.408248)I4> + (.000000)I5>
.624681      I5'> = (-.414330)I1> + (-.526900)I2> + (-.526900)I3> + (-.414330)I4> + (.318454)I5>
```

```
-----
SPIN = 1  ISOSPIN = 2
-----
```

```
-- G0 = .0098      A0 = .0000
-- G1 = -.7081     A1 = .1875
```

```
EIGENWERT(E)      EIGENVEKTOR(EN)
```

```
-.026133      I(3,1)1;(3,1)1;12>
```

```
-----
SPIN = 2  ISOSPIN = 0
-----
```

```
I1> = I(6,1)0;(6,1)0;20>
I2> = I(3,1)1;(3,1)1;20>
```

```
-- G0 = .0098      A0 = .0000
-- G1 = -.7081     A1 = .1875
```

EIGENWERT(E)

EIGENVEKTOR(EN)

```
.445933
1.102183
```

```
I1'> = (-.925820)I1> + (-.377964)I2>
I2'> = (.377964)I1> + (-.925820)I2>
```

```
-----
SPIN = 2  ISOSPIN = 1
-----
```

```
-- G0 = .0098      A0 = .0000
-- G1 = -.7081     A1 = .1875
```

EIGENWERT(E)

EIGENVEKTOR(EN)

```
.820933
```

I(3,1)1;(3,1)1;21>

```
-----
SPIN = 2  ISOSPIN = 2
-----
```

```
-- G0 = .0098      A0 = .0000
-- G1 = -.7081     A1 = .1875
```

EIGENWERT(E)

EIGENVEKTOR(EN)

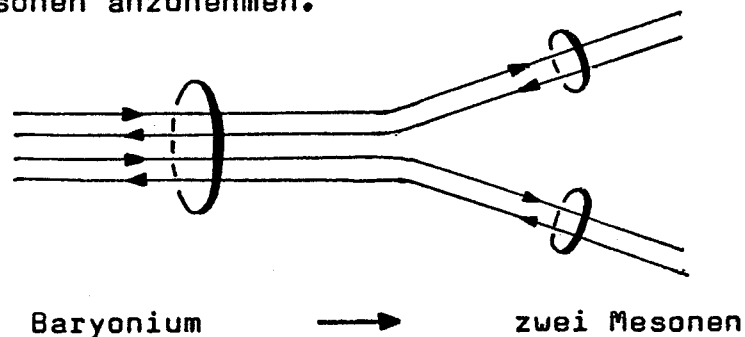
```
.445933
```

I(3,1)1;(3,1)1;22>

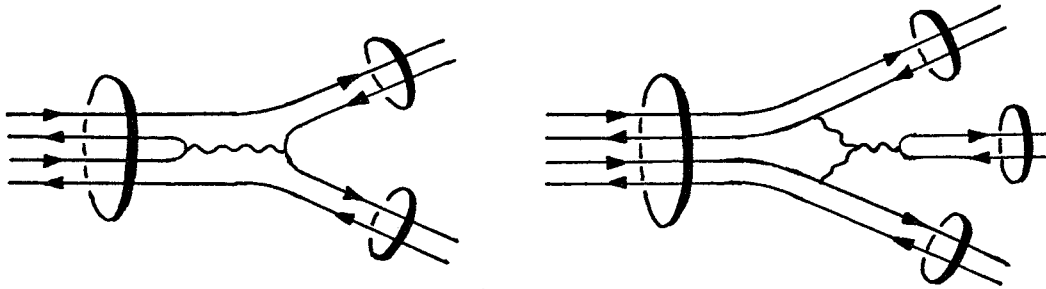
wechselwirkung stellt sich als "abstossend" heraus (vgl. Abb. 1 ). Charakteristisch ist die Art der Aufspaltung : während im Jaffe-Spektrum vollkommene Isospinentartung herrscht, erfahren bei uns die  $I=0$  - Zustände den grössten Energiezuwachs, die  $I=1$  einen mittleren und die  $I=2$  bleiben unverändert. Dies wird verständlich, wenn man sich vor die Augen hält, dass die Stärke, mit der ein System aus Quarks und Antiquarks an der Annihilationswechselwirkung teilnimmt, durch seinen Anteil an  $q\bar{q}$  - Paaren bestimmt wird, die die Quantenzahlen eines Gluons tragen :  $I=0$  ,  $J=1$  und  $\{N\} = \{8\}$  ; nur solche Paare können annihilieren. In unserem Fall bleiben die  $I=2$  - Zustände unbeeinflusst, weil hier alle Ein-Teilchen-Isospins parallel ausgerichtet sind und deshalb kein  $q\bar{q}$  - Teilsystem  $I=0$  haben kann.

#### 2.2.6 Zerfälle und Energiebreiten

Wir wenden uns nun den Zerfällen von Baryonium zu. Die Möglichkeit, das System als ein Dimeson aufzufassen, legt es nahe, als dominanten Zerfallsmechanismus die Dissoziation in zwei Mesonen anzunehmen.



Natürlich sind auch Prozesse denkbar wie



Da sie alle aber Graphen mindestens zweiter Ordnung in  $g$  benötigen, dürfen wir sie gegenüber der Dissoziation in erster Näherung vernachlässigen.

Mit dieser Annahme können wir neben den möglichen Zerfällen auch ihre Partialbreite angeben. Die Lorentz-invariante Form der Energiebreite des Uebergangs

$$B \longrightarrow a + b$$

ist

$$\Gamma_{B \rightarrow a+b} = \frac{1}{2m_B} \int |\mathcal{M}_{B \rightarrow a+b}|^2 d\text{Lips}(m_B^2; p_a; p_b) \quad (2.7)$$

$\mathcal{M}_{B \rightarrow a+b}$  ist das invariante Matrixelement der Zerfallswechselwirkung. Da wir nur Prozesse nullter Ordnung berücksichtigen, ist es proportional zum Skalarprodukt von Baryonium  $B$  mit den beiden Mesonen  $a$  und  $b$  (kombiniert zu einem Zustand  $|a,b\rangle$ ).  $|\mathcal{M}_{B \rightarrow a+b}|^2$  ist dann im wesentlichen die Wahrscheinlichkeit, präformierte Color-Singlett-Mesonen  $a$  und  $b$  im Bag zu finden

$$|\mathcal{M}_{B \rightarrow a+b}|^2 = \beta \cdot w_{B|ab}$$

$\beta$  ist eine universelle Konstante für alle Baryoniumzustände. Die Wahrscheinlichkeiten  $w_{B|ab}$  erhalten wir, indem wir die Eigenzustände, die uns in der  $q^2 \bar{q}^2$ -Basis bekannt sind, in

die Dimeson-Basis transformieren und dort die Quadrate der entsprechenden Amplituden bilden. In Tabelle 2.6 sind die Amplituden aufgeführt, Tabelle 2.7 enthält die Wahrscheinlichkeiten.

Lips in (2.7) steht für lorentz invariant phase space,  $d\text{Lips}(s;p_a;p_b)$  ist das Zweikörper-Phasenraumelement

$$d\text{Lips}(s;p_a;p_b) = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^4(p - p_a - p_b) d^4p \frac{|\vec{q}_a^{\text{CM}}|}{4\sqrt{s}} d\Omega_a^{\text{CM}}$$

CM : centre of mass

p : 4 - Impulse

q : 3 - Impulse

In unserem Fall hängt der Integrand (2.7) nicht von den Ortskoordinaten ab, d.h. die Mesonen werden isotrop ausgesandt. Die Integration bereitet daher keine Schwierigkeiten

$$\Gamma_{B \rightarrow a+b} = \frac{\beta}{8\pi} \cdot w_{B|ab} \cdot \frac{|\vec{q}_a^{\text{CM}}|}{m_B^2}$$

mit der Bedingung  $p = p_B = p_a + p_b$ , die uns erlaubt,  $q = |\vec{q}_a^{\text{CM}}|$  auszurechnen

$$\begin{aligned} p_B &= (m_B, 0) & p_a &= (E_a, \vec{q}_a) \\ & & p_b &= (E_b, \vec{q}_b) \end{aligned}$$

$$\text{also } \vec{q}_a + \vec{q}_b = 0, \quad E_a + E_b = m_B$$

$$\begin{aligned} (m_B - E_a)^2 &= m_B^2 - 2 m_B E_a + m_a^2 + \vec{q}_a^2 \\ &= E_b^2 = m_b^2 + \vec{q}_b^2 \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } E_a = \frac{m_B}{2} + \frac{m_a^2 - m_b^2}{2 m_B}$$



# COLOR-SINGLET MESONEN-INHALT DER BARYONIENZUSTÄNDE

60 = .0098 61 = .7081 60 = .0000 61 = .1875

[illegible]

COLOR-ONTETT MESONEN-INHALT DER BARYONIUMZUSTÄNDE

G0 = .0078 G1 = -.7081 A0 = .0000 A1 = .1875

[illegible]

BARYONIUMSPEKTRUM MIT WAHRSCHEINLICHKEITEN FÜR PROFORMIERTE COLOR-SINGLETT MESONENPAARE

G0 = .0093 G1 = -.7081 A0 = .0000 A1 = .1875

IPJ	GC	MASSE	RADIUS	ETA ETA	ETA PI	ETA OME	ETA RHO	PI OME	PI RHO	OME OME	OME RHO	RHO RHO
0+0	++	671.	.88	.2038	.0000	.0000	.0000	.3528	.0000	.0000	.0000	.0049
	++	1241.	1.08	.2123	.0000	.0000	.0000	.1854	.0000	.0383	.0000	.0066
	++	1450.	1.14	.0380	.0000	.0000	.0000	.0009	.0000	.0957	.0000	.2885
	++	1823.	1.23	.0043	.0000	.0000	.0000	.0025	.0000	.4076	.0000	.1584
1+0	-+	1200.	1.07	.0000	.4126	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0225	.0000
	-+	1813.	1.22	.0000	.0041	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.5609	.0000
2+0	++	1111.	1.04	.0000	.0000	.0000	.0000	.4150	.0000	.0000	.0000	.0313
	++	1811.	1.22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0017	.0000	.0000	.0000	.5520
0+1	--	1186.	1.06	.0000	.0000	.2162	.0000	.0000	.0000	.4458	.0000	.0000
	--	1564.	1.16	.0000	.0000	.2005	.0000	.0000	.0000	.1376	.0000	.0000
1+1	+ -	1225.	1.07	.0000	.0000	.0000	.2514	.0000	.2013	.0000	.0000	.0004
	-+	1333.	1.10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.4444	.0000	.0000
	+ -	1505.	1.15	.0000	.0000	.0000	.0950	.0000	.2153	.0000	.0000	.0514
	-+	1629.	1.18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0556	.0000	.0000
	+ -	1695.	1.20	.0000	.0000	.0000	.0703	.0000	.0000	.0000	.0000	.4481
2+1	--	1453.	1.14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.3333	.0000	.0000
0+2	++	1629.	1.18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.3214	.0000	.2976
	++	1865.	1.23	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0952	.0000	.2857
1+2	-+	1766.	1.21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.3333	.0000
2+2	++	1629.	1.18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.3333

-4501

Tabelle 2.7

BARYONIUMSPEKTRUM MIT WAIRSCHHEINLICHKEITEN FUER PRAEFORMIERTE COLOR-OKTETT MESONENPAARE

GO = .0098 G1 = -.7081 A0 = .0000 A1 = .1075

IPJ	GC	MASSE	RADIUS	ETA ETA	ETA FI	ETA OME	ETA RHO	FI FI	FI OME	FI RHO	OME OME	OME RHO	RHO RHO
0+0	++	671.	.88	.0025	.0000	.0000	.0000	.0347	.0000	.0000	.0544	.0000	.3470
	++	1241.	1.08	.2091	.0000	.0000	.0000	.0032	.0000	.0000	.2497	.0000	.0953
	++	1450.	1.14	.0317	.0000	.0000	.0000	.3260	.0000	.0000	.1156	.0000	.0935
	++	1823.	1.23	.2933	.0000	.0000	.0000	.0844	.0000	.0000	.0386	.0000	.0058
1+0	-+	1200.	1.07	.0000	.1849	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.3801	.0000
	-+	1818.	1.22	.0000	.3734	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0366	.0000
2+0	++	1111.	1.04	.0000	.0000	.0000	.0000	.1655	.0000	.0000	.0000	.0000	.3882
	++	1811.	1.22	.0000	.0000	.0000	.0000	.4178	.0000	.0000	.0000	.0000	.0285
0+1	--	1186.	1.06	.0000	.0000	.0409	.0000	.0000	.0000	.2971	.0000	.0000	.0000
	--	1564.	1.16	.0000	.0000	.5424	.0000	.0000	.0000	.1195	.0000	.0000	.0000
1+1	+ -	1225.	1.07	.0000	.0000	.0000	.0360	.0000	.0133	.0000	.0000	.0000	.4975
	-+	1333.	1.10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0556	.0000	.5000	.0000
	+ -	1505.	1.15	.0000	.0000	.0000	.4741	.0000	.1628	.0000	.0000	.0000	.0013
	-+	1629.	1.18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.4444	.0000	.0000	.0000
	+ -	1695.	1.20	.0000	.0000	.0000	.0731	.0000	.4073	.0000	.0000	.0000	.0012
2+1	--	1453.	1.14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.6667	.0000	.0000	.0000
0+2	++	1629.	1.18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.3810
	++	1865.	1.23	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.5833	.0000	.0357
1+2	-+	1766.	1.21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.6667	.0000
2+2	++	1629.	1.18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.6667

$$\text{und } q^2 = E_a^2 - m_a^2$$

Weiter verbietet die Einschränkung  $q^2 \geq 0$  Zerfälle, die den Energie-Impuls-Satz verletzen würden. Sie ist gleichbedeutend mit

$$m_B \geq m_a + m_b$$

Somit sind alle Grössen in  $\Gamma_{B \rightarrow a+b}$  bekannt, zusammen mit dem Kriterium, wann ein Zerfall überhaupt möglich ist.

Noch eine Warnung zu den Wahrscheinlichkeiten für präformierte Mesonenpaare : Wir haben nur den Color-, Spin- und Isospinanteil der Zustandsfunktion berücksichtigt, den Ortsraumanteil aber vernachlässigt. Es ist jedoch zu erwarten, dass dieser die Zerfallswahrscheinlichkeit ebenfalls beeinflusst. Falls das Baryonium seine tiefstmögliche Energie einnehmen will, müssen sich die Konstituenten von  $q\bar{q}$ -Paaren, die nach Abb. 1 einen positiven Beitrag zur Gesamtenergie leisten, hüten, nahe zueinander zu kommen, da sie sonst ein gut ausgeprägtes Teilsystem bilden würden, das die Masse stark anhebt. Dieses Argument ist zu qualitativ, als dass wir damit der räumlichen Korrelation Rechnung tragen könnten. Wir würden uns aber nicht wundern, wenn sich im Experiment herausstellt, dass die Bildung eines  $\omega$  oder  $\xi$  gegenüber  $\eta$  und  $\pi$  unterdrückt ist.

Bei den Phasenraumformeln nehmen wir an, dass unsere theoretischen Baryoniummassen auch realisiert werden und setzen diese ausgerechneten Werte ein. Für die  $q\bar{q}$ -Mesonen hingegen verwenden wir nicht die Voraussagen des Bagmodells (siehe Abschnitt 2.1), sondern ihre experimentellen Massen. Wir verlassen damit zwar das reine Bagmodell, doch erscheint uns dieser Weg zuverlässiger.

In Tabelle 2.8 ist die meiste Information zusammengefasst, die wir über Baryonium erarbeitet haben. Für die Angabe der Zerfallsbreiten verwenden wir

$$\frac{\beta}{8\pi} = 2996590 \text{ MeV}^2$$

Diese Wahl wird im nächsten Abschnitt begründet. Die Zerfallsbreite in  $\pi + x$ , wobei  $x$  ein beliebiges  $q\bar{q}$ -Meson ist, könnte als Abschätzung der effektiven Breite gelten, da hier zum einen die obenerwähnte räumliche Korrelation grob berücksichtigt wurde. Zum anderen wissen wir, dass das physikalische  $\eta$  zu einem grossen Teil aus  $s\bar{s}$ -Quarkpaaren besteht. Unser Baryonium enthält nur  $u$ - und  $d$ -Quarks, die Erzeugung eines  $\eta$  erfordert daher einen Prozess zweiter Ordnung



Weiter muss die nicht vernachlässigbare Ruheenergie der  $s$ -Quarks zur Verfügung gestellt werden. Wir erwarten somit, dass als einziges das  $\pi$ -Meson gebildet werden kann.

### 2.2.7 Interpretation

Wir versuchen nun, einige bekannte Mesonresonanzen als  $q^2\bar{q}^2$ -Zustände zu entlarven. Kandidaten können nur Teilchen mit positiver Parität und  $I \leq 2$ ,  $J \leq 2$  sein.

Tabelle 2.8

BARYONIUMSPEKTRUM UND ZERFAELLE

G0 = .0098      A0 = .0000      ETA 548.8MEV      OME 782.6MEV  
G1 = .7031      A1 = .1875      PI 138.0MEV      RHO 769.0MEV

IPJ	GC	MASSE (MEV)	RADIUS (FM)	BREITE PI+X	BREITE TOT		PROB.	LIPS	PART. BREITE
0+0	++	671.	.88	718.	718.	-->	PI PI	.3528	.6795-03 718.
	++	1241.	1.03	218.	338.	-->	ETA ETA	.2123	.1379-03 120.
							PI PI	.1854	.3929-03 218.
	++	1450.	1.14	1.	27.	-->	ETA ETA	.0330	.2253-03 26.
							PI PI	.0009	.3385-03 1.
	++	1823.	1.23	2.	246.	-->	ETA ETA	.0043	.2190-03 3.
							PI PI	.0025	.2712-03 2.
							OME OME	.4076	.1406-03 172.
							RHO RHO	.1584	.1472-03 70.
1+0	-+	1200.	1.07	397.	397.	-->	ETA PI	.4126	.3210-03 397.
	-+	1818.	1.22	3.	244.	-->	ETA PI	.0041	.2481-03 3.
							OME RHO	.5609	.1433-03 241.
2+0	++	1111.	1.04	542.	542.	-->	PI PI	.4150	.4360-03 542.
	++	1811.	1.22	1.	243.	-->	PI PI	.0017	.2728-03 1.
							RHO RHO	.5520	.1458-03 241.
0+1	--	1186.	1.06	307.	307.	-->	PI RHO	.4458	.2300-03 307.
	--	1564.	1.16	98.	198.	-->	ETA OME	.2005	.1658-03 100.
							PI RHO	.1376	.2383-03 98.
1+1	+-	1225.	1.07	138.	138.	-->	PI OME	.2013	.2290-03 138.
	-+	1333.	1.10	322.	322.	-->	PI RHO	.4444	.2421-03 322.
	+-	1505.	1.15	153.	198.	-->	ETA RHO	.0750	.1588-03 45.
							PI OME	.2153	.2375-03 153.
	-+	1629.	1.18	39.	180.	-->	PI RHO	.0556	.2350-03 39.
							OME RHO	.5000	.9371-04 140.
	+-	1695.	1.20	0.	205.	-->	ETA RHO	.0703	.1839-03 39.
							RHO RHO	.4481	.1239-03 166.
2+1	--	1453.	1.14	242.	242.	-->	PI RHO	.3333	.2422-03 242.
0+2	++	1629.	1.18	0.	173.	-->	OME OME	.3214	.8532-04 82.
							RHO RHO	.2976	.1014-03 90.
	++	1865.	1.23	0.	171.	-->	OME OME	.0952	.1458-03 42.
							RHO RHO	.2857	.1517-03 130.
1+2	-+	1766.	1.21	0.	135.	-->	OME RHO	.3333	.1351-03 135.
2+2	++	1629.	1.18	0.	101.	-->	RHO RHO	.3333	.1014-03 101.

	$I^G(J^P)C_n$	Masse (MeV)	Breite (MeV)	2 - Meson Zerfälle
S*	$0^+(0^+)_+$	975	33	$\pi\pi$
$\delta$	$1^-(0^+)_+$	983	54	$\eta\pi$
H	$0^-(1^+)_-$	1190	320	$\pi\eta$
B	$1^+(1^+)_-$	1233	137	$\pi\omega$
f	$0^+(2^+)_+$	1273	179	$\pi\pi$
$A_1$	$1^-(1^+)_+$	1275	315	$\pi\eta$
$\epsilon$	$0^+(0^+)_+$	$\sim 1300$	200-600	$\pi\pi$ $\eta\eta$ schwach
$A_2$	$1^-(2^+)_+$	1318	110	$\pi\eta$ $\eta\pi$

(aus : Review of Particle Properties  
April 1982 )

D(1285) und E(1420) haben wir ausgeschlossen, da ihre Quantenzahlen in unserem Schema nicht vorkommen, sowie  $f'(1515)$ , das hauptsächlich in strange-Mesonen ( $K\bar{K}$ ) zerfällt.

Die Spin 2 - Teilchen haben alle, verglichen mit unserem Spektrum, eine viel zu niedrige Masse. Das Schwerste,  $A_2(1320)$ , liegt immerhin mehr als 300 MeV unter unserem leichtesten  $J=2$  Zustand bei 1629 MeV. Eine Interpretation als reine  $q^2\bar{q}^2$  - Zustände wäre daher etwas gewaltsam.

Im  $J^P = 0^+$  Sektor sehen die Verhältnisse bereits besser aus.  $\epsilon(1300)$ , dessen Massenangabe recht unsicher ist, können wir versuchsweise mit  $0^+(0^+)_+$  Baryonium bei 1241 MeV identifizieren. Die vorausgesagten Zerfälle sind vor allem in  $\pi\pi$  und schwächer in  $\eta\eta$ , die Energiebreite um 200 MeV. Dies widerspricht nicht den experimentellen Angaben.



Etwas mehr Mühe machen  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{S}^*$ .  $\mathcal{S}(980)$  liegt ca. 220 MeV unter einem passenden  $q\bar{q}^2$ -Zustand bei 1200 MeV. Obwohl der Zerfall nach  $2\pi$  übereinstimmt, wird eine Erklärung als Baryonium nicht die ganze Wahrheit sein.

Bei  $J^P = 1^+$  fallen sofort zwei Resonanzen auf :  $H(1190)$  und  $B(1235)$ . Sie stimmen überraschend gut mit  $0^-(1^+)$ - bei 1186 MeV und  $1^+(1^+)$ - bei 1225 überein. Die Massenunterschiede verlieren sich in den experimentellen und theoretischen Unsicherheiten, die Zerfälle werden korrekt vorausgesagt und auch das Verhältnis der Energiebreiten ist richtig. Diese vielen Koinzidenzen werden kaum zufällig sein. Eine Interpretation als Baryonium erscheint sehr natürlich. Sie ergibt sich zwangsloser als  $q\bar{q}$ -Modelle mit Bahndrehimpuls oder andere Erklärungen.

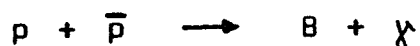
An diesen beiden Zuständen haben wir die Konstante  $\beta/(8\pi)$  aus dem letzten Abschnitt gefittet, die in die Energiebreiten in Tabelle 2.8 eingeht.

Der nächste Kandidat,  $A_1(1275)$ , zeigt wieder eine grössere Massendifferenz zu einem unserer Baryonia : ca. 60 MeV bis  $1^-(1^+)$ + bei 1333 MeV. Dies ist zweimal so viel wie die experimentelle Unsicherheit. Nichtsdestotrotz stimmt die Zerfallsart und die Breite überein.

$I^G(J^P)C_n$	Baryonium			Zuordnung
	Masse	Breite	Zerfälle	
$0^+(0^+)+$	1241	218	$\pi\pi$ $\gamma\gamma$	$\mathcal{E}$
$0^-(1^+)-$	1186	307	$\pi\mathcal{S}$	H
$1^+(1^+)-$	1225	138	$\pi\omega$	B
$1^-(1^+)+$	1333	322	$\pi\mathcal{S}$	$A_1$

Diese Gegenüberstellung erlaubt uns mit gutem Grund anzunehmen, dass einige der seit längerer Zeit bekannten Resonanzen tatsächlich  $q^2\bar{q}^2$  - Zustände sind.

Zum Abschluss vergleichen wir unser Spektrum mit den Daten aus einem Experiment, in welchem am CERN gezielt nach Baryonium in der niederenergetischen  $p\bar{p}$  - Streuung gesucht wurde



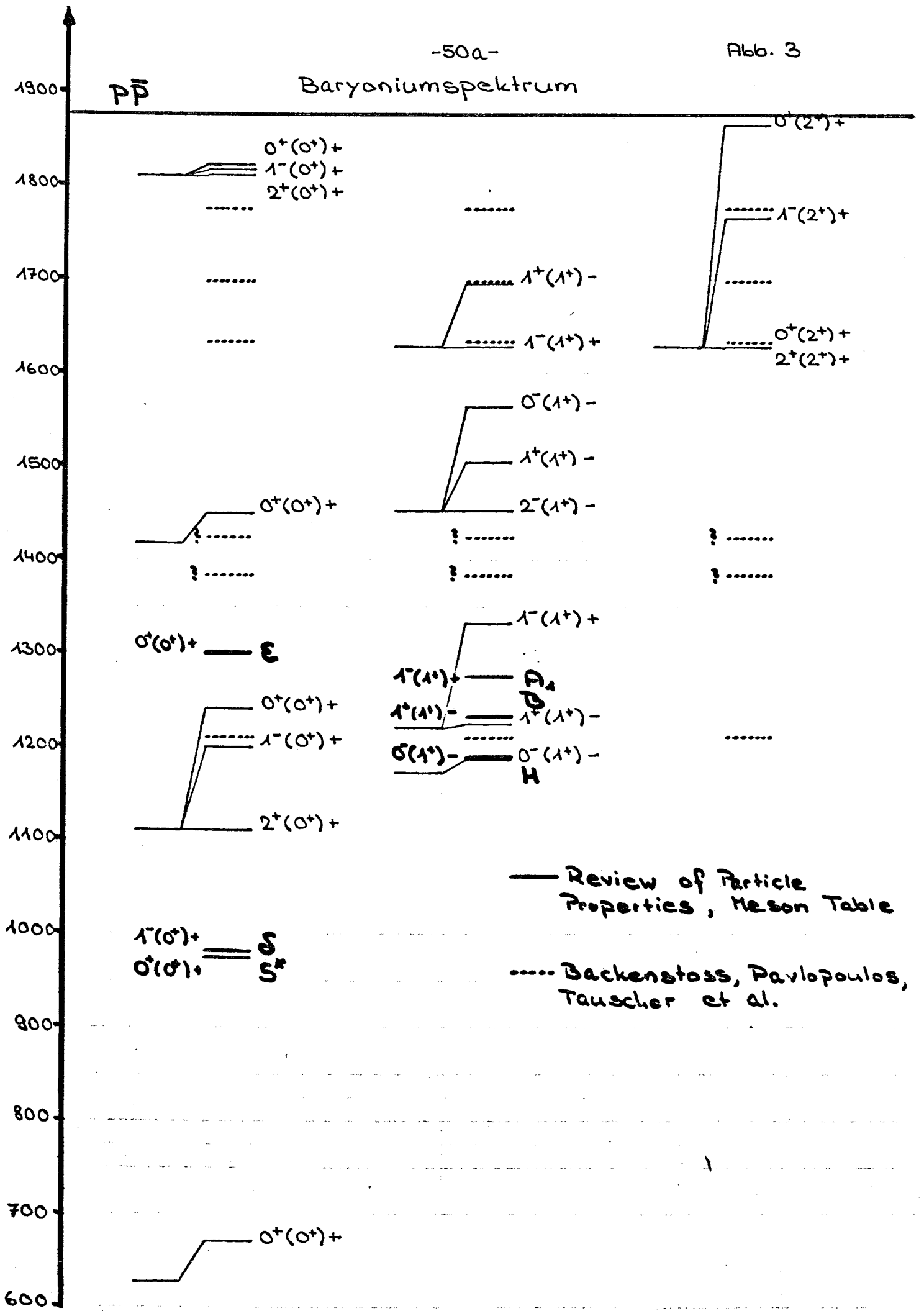
Es wurden hier bei Energien zwischen 1200 MeV und 1800 MeV einige erstaunlich enge Resonanzen gefunden (Backenstoss, Tauscher, Pavlopoulos et al.)

Masse	Breite	Masse	Breite
1771	<8	1421 (?)	<23
1694	<12	1383 (?)	<23
1638	38	1210	<29

Die Evidenz für die mit (?) Bezeichneten ist schwächer als für die anderen; alle Angaben wie immer in MeV.

Es stellt sich heraus, dass sich diese Resonanzen recht gut in unser  $q^2\bar{q}^2$  - Schema einordnen lassen. Ihre Energieschärfe kann allerdings nur verstanden werden, wenn einzig Zerfälle in  $\pi + x$  zugelassen werden (vgl. Tabelle 2.8).

In Abb. 3, welche die besprochenen Resonanzen unserem Baryoniumspektrum gegenüberstellt, wurden diese Zustände in alle drei Kolonnen ( $J = 0, 1, 2$ ) eingetragen, da im Experiment keine Quantenzahlen bestimmt wurden. Es ist jedoch klar, dass keine  $I=2$  - Baryonia entstehen konnten ( $I_{\text{Proton}} = 1/2$ ). Weiter war die Bildung von  $J=0$  - Zuständen gehemmt gegenüber den mit  $J=1$  und  $J=2$ , da angenommen wird, dass das  $p\bar{p}$ -System aus einem relativen S-Zustand reagierte.



# ANHANG

Die Menge  $\{M^j\}_{j=1}^{N^2-1}$  bilde zusammen mit der Einheit  $\mathbb{1}$  eine hermitesche Basis im Raume der komplexen  $N \times N$ -Matrizen, wobei gelte

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \text{Sp}(M^j) &= 0 \\ \text{(ii)} \quad \text{Sp}(M^j M^k) &= S \delta_{jk} \end{aligned} \quad j, k = 1, \dots, N^2 - 1$$

Als erstes beweisen wir eine fundamentale Beziehung. Wir setzen

$$(D_{ac})_{bd} := \delta_{ab} \delta_{cd} \quad a, b, c, d = 1 \dots N$$

Entwicklung nach der Basis

$$D_{ac} = A_{ac} \mathbb{1} + B_{ac}^k M^k \quad (\text{Summenkonvention})$$

Koeffizienten bestimmen

$$\text{Sp}(D_{ac}) = N A_{ac} = \delta_{ab} \delta_{cb} = \delta_{ac}$$

$$\begin{aligned} \text{Sp}(D_{ac} M^j) &= B_{ac}^k S \delta_{jk} = S B_{ac}^j \\ &= \delta_{ab} \delta_{cd} M_{db}^j = M_{ca}^j \end{aligned}$$

$$D_{ac} = \frac{1}{N} \delta_{ac} \mathbb{1} + \frac{1}{S} M_{ca}^k M^k$$

$$\text{bzw.} \quad M_{ca}^k M_{bd}^k = S \delta_{ab} \delta_{cd} - \frac{S}{N} \delta_{ca} \delta_{bd} \quad (\text{A1})$$

### Folgerungen

- 1) Die Matrizen  $M^j$  können als Generatoren einer  $SU(N)$  aufgefasst werden.

$$[M^j, M^k] = i f_{jkl} M^l$$

Aus (ii) folgt

$$f_{jkl} = \frac{1}{i S} \text{Sp}([M^j, M^k] M^l)$$

Wir definieren  $C = M^k M^k$

$$\begin{aligned} C_{ab} &= M_{ac}^k M_{cb}^k = S \delta_{cc} \delta_{ab} - \frac{S}{N} \delta_{ac} \delta_{cb} \\ &= N S \delta_{ab} - \frac{S}{N} \delta_{ab} \end{aligned}$$

$$C = S \frac{N^2-1}{N} \mathbb{1} \quad \begin{array}{l} \text{Casimir der fundamentalen} \\ \text{Darstellung der } SU(N) \end{array} \quad (A2)$$

- 2)  $b \leftrightarrow c$  in (A1) vertauschen und mit (A1) kombinieren

$$M_{ba}^k M_{cd}^k = S \frac{N^2-1}{N^2} \delta_{ac} \delta_{bd} - \frac{1}{N} M_{ca}^k M_{bd}^k \quad (A3)$$

Dies ist die Beziehung, die wir beim Annihilationsgraph brauchen.

- 3) Indem wir (A1) mit dem allgemeinen Element  $A_{pq}$  einer beliebigen Matrix  $A$  multiplizieren und über geeignete Indizes summieren, erhalten wir

$$M^k A M^k = \text{Sp}(A) \mathbb{1} - \frac{S}{N} A \quad (A4)$$

$$M^k A (M^k)^t = S (A)^t - \frac{S}{N} A \quad (A5)$$

$$\text{und} \quad M^k \operatorname{Sp}(M^k A) = S A - \frac{S}{N} \operatorname{Sp}(A) \mathbb{1} \quad (\text{A6})$$

Dabei ist  $(M)^t$  die Transponierte von  $M$ .

$$\begin{aligned} 4) \quad M^k M^j M^k &= M^k M^k M^j + M^k [M^j, M^k] \\ &= C M^j + i f_{jkl} M^k M^l \\ &= -\frac{S}{N} M^j \quad \text{wegen (A4) und (i)} \end{aligned}$$

Es folgt

$$f_{jkl} M^k M^l = i S N M^j$$

weiter

$$\begin{aligned} f_{jkl} M^k M^l &= f_{jkl} M^l M^k + f_{jkl} [M^k, M^l] \\ &= -f_{jkl} M^k M^l + i f_{jkl} f_{klm} M^m \\ &\quad (\text{Antisymmetrie der } f_{jkl}) \end{aligned}$$

Zusammen mit dem oberen Ergebnis heisst das

$$f_{jkl} f_{klm} = 2 S N \delta_{jn} \quad \text{Casimir der adjungierten Darstellung}$$

$$5) \quad [M^j, M^n][M^k, M^n] = -f_{jnp} f_{knq} M^p M^q$$

Andererseits liefert Ausmultiplikation der Kommutatoren und Benützung von (A4)

$$[M^j, M^n][M^k, M^n] = -S N M^j M^k - S^2 \delta_{jk} \mathbb{1}$$

Somit

$$M^j M^k = \frac{1}{SN} f_{jnp} f_{knq} M^p M^q - \frac{S}{N} \delta_{jk} \mathbb{1}$$

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 A. T. M. Aerts, The MIT Bagmodel and some spectroscopic applications (Masterthesis) Krips Repro, Meppel (1979)
- 2 R. L. Jaffe, Multiquark hadrons I + II Phys. Rev. D 15, 267 und 281 (1977)
- 3 S. M. Bilenky, Introduction to Feynman diagrams Pergamon Press Ltd (1974)
- 4 W. Greiner, Theoretische Physik Band 5 : Quantenmechanik II, Symmetrien Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main (1979)
- 5 F. E. Close, An Introduction to Quarks and Partons Academic Press, London (1979)
- 6 R. F. Buser, Interacting Quarks and Gluons in a Cavity (Masterthesis) (1983), bisher nicht erschienen
- 7 G. Backenstoss, P. Pavlopoulos, L. Tauscher et al. New Results in the Search for Narrow States in the  $p\bar{p}$  System below Threshold (1983), bisher nicht erschienen