

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y FORMALES
ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



GRAVEDADES CUASITOPOLÓGICAS GENERALIZADAS

Trabajo de Investigación presentado por:
Zevallos Rodriguez, Fabricio Sergio

Para optar por el Grado Académico de:
Bachiller en Física

Asesor:
Dr. Bueno Gomez, Pablo

Co-Asesor:
Dr. Mamani Troncoso, Richard Manuel

Arequipa - Perú

2023

INFORME DE SIMILITUD

N° 011-2024-FCNF-UNSA

Yo, Julia Lilians Zea Álvarez, en mi condición de directora de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Formales de la Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa; de acuerdo a lo dispuesto, hago constar que el Trabajo de Investigación¹ titulado:

Gravedades Cuasitopológicas Generalizadas

Presentado por:

Fabricio Sergio Zevallos Rodriguez

ha sido sometido a la herramienta de software anti plagio Turnitin, obteniendo un porcentaje de similitud del **3%**, tal y como se evidencia en el reporte oficial emitido por la plataforma utilizada, con el detalle de dichas similitudes e información complementaria correspondiente.

Por lo tanto, se concluye que el Trabajo de Investigación cumple con el criterio de originalidad y no presenta observaciones. Sin otro particular, es todo cuanto informo para conocimiento y fines pertinentes.

Arequipa, 18 de marzo del 2024



Dra. Julia Lilians Zea Álvarez
Directora de la Unidad de Investigación

¹ Término que engloba a: Tesis, Trabajo Académico, Trabajo de Suficiencia Profesional o Trabajo de Investigación.

Dedicado a mi madre...

Agradecimientos

Quiero comenzar expresando mi más profundo agradecimiento al Dr. Pablo Bueno del Instituto de Ciencias del Cosmos Universidad de Barcelona. Su apoyo ha sido fundamental e inigualable en la elaboración de este trabajo de investigación. La paciencia y dedicación que mostró durante el tiempo que hemos trabajado juntos, reflejan su excepcional habilidad como mentor, enriqueciendo así mi comprensión y desarrollo en este importante proyecto académico. Su guía ha sido esencial en mi trayectoria académica.

Asimismo, agradecerle al Dr. Richard Mamani, quien me brindó su apoyo en este proceso.

Con especial afecto, deseo expresar mi gratitud hacia mi familia, cuyo apoyo incondicional ha sido un pilar fundamental en este proceso. Dedico un reconocimiento especial a mi madre, Sandra Isabel Rodríguez Ancajima, a quien este trabajo de investigación está dedicado. Su amor, confianza y aliento han sido fundamentales, sosteniéndome y motivándome a lo largo de este desafiante recorrido académico.

Un agradecimiento especial a María Fernanda Rodríguez Pilco, por su compañía y apoyo inestimable en momentos cruciales de esta importante etapa de mi vida. Su presencia ha sido valiosa para este proceso.

Por último, pero no menos importante, quiero agradecer a mis amigos. En ustedes he encontrado una invaluable fuente de ánimo y compañía, brindándome apoyo en los momentos más cruciales.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

Resumen

El presente trabajo de investigación se adentra en el estudio de las *Generalized Quasi-Topological Gravities* (GQTG's), un campo emergente en la física teórica que profundiza en las teorías de gravedad en curvatura superior. Esta investigación se centra especialmente en el análisis de las propiedades y aplicaciones de los agujeros negros y fenómenos afines dentro del marco de las GQTG's. Aunque se han logrado avances significativos en este ámbito, aún quedan numerosos desafíos y preguntas sin resolver respecto a las características fundamentales de estas teorías.

Con un enfoque orientado hacia la revisión bibliográfica, este trabajo de investigación se dedica a examinar y compilar los hallazgos más importantes en el campo de las GQTG's. Se realiza un análisis exhaustivo de los progresos recientes, así como de los retos que enfrenta la investigación en GQTG's y su aplicación en la física teórica. El objetivo es identificar áreas con potencial para investigaciones futuras y contribuir de manera significativa al conocimiento en esta área.

Con el objetivo de profundizar en la comprensión de los cálculos y análisis realizados, este trabajo de investigación incorpora el uso de Python, cuyos detalles se especifican en los apéndices. Esta integración es clave para entender los procesos matemáticos empleados tanto en este trabajo como en los artículos que sirven de guía. Adicionalmente, en los apéndices se presentan cálculos detallados que facilitan la comprensión de las fórmulas utilizadas a lo largo de la investigación.

Reflejando el compromiso de esta investigación con la profundización en las GQTG's a lo largo de este estudio, se ha efectuado una revisión meticulosa y actualizada de la literatura científica. Se abarcan aspectos como los fundamentos teóricos, las propiedades específicas y las aplicaciones prácticas en el estudio de agujeros negros y otros fenómenos conexos, como también la inflación geométrica. Asimismo, se identifican y discuten las áreas de investigación actuales y los interrogantes pendientes en el campo de las GQTG's, con el propósito de esclarecer las limitaciones existentes y proponer direcciones innovadoras para futuras investigaciones.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	III
Resumen	IV
Índice de figuras	VIII
Lista de Símbolos	IX
Introducción	1
1. Gravedades más allá de la Relatividad General	3
1.1. Gravedad en curvatura superior	4
1.1.1. Ecuaciones de Movimiento	5
1.1.2. Ejemplos de gravedad de orden superior	8
Teorías de $f(R)$	8
Gravedad de Lovelock	9
1.2. Agujeros Negros	11
1.2.1. Termodinámica de agujeros negros	12
Termodinámica de agujeros negros en gravedad de curvatura superior	14
1.2.2. Soluciones de agujeros negros esféricamente simétricos	15
Agujeros Negros en la Gravedad de Lovelock	16
2. Gravedades Cuasitopológicas Generalizadas (QGTG's)	18
2.1. Introducción	18

2.2. Definición y propiedades generales	18
2.2.1. Propiedades	20
2.3. Subclases	20
2.4. Einsteinian cubic gravity	21
2.4.1. Soluciones esféricamente simétricas de ECG	22
2.4.2. Agujero Negro asintóticamente plano	23
Comportamiento asintótico	23
Cerca del Horizonte	26
2.5. Fórmulas de recurrencia	28
2.5.1. Fórmulas de Recurrencia	29
3. Estabilidad de agujeros negros en cuatro dimensiones	32
3.1. Introducción	32
3.2. Estabilidad universal de agujeros negros en cuatro dimensiones . . .	33
3.2.1. Agujeros Negros de Orden Superior	33
3.2.2. Termodinámica de Agujeros Negros	34
3.2.3. Evaporación de los agujeros Negros	36
4. Inflación geométrica	38
4.1. Introducción	38
4.2. Inflación Geométrica	39
4.3. Ecuaciones de Friedmann generalizadas.	41
4.4. Modelos Específicos	42
4.5. Cosmología del universo temprano.	44
4.6. Comparación entre Inflación Geométrica y Λ CDM	45
Conclusiones	46
A. Primera ley de la Termodinámica de Agujeros Negros	50

A.1. Primera Ley para un Agujero negro de Kerr	50
B. Aplicación del Método para identificar gravedades de derivada superior	52
B.1. Gauss-Bonnet $D = 5$	54
B.2. Gauss-Bonnet $D=6$	56
C. Verificación de la Fórmula de Recurrencia	57
C.1. Código en Python	57
D. Comportamiento en el Horizonte	60
D.1. Valores para los coeficientes a_3, a_4	60
D.2. Código Python	60
Bibliografía	64

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Comparación de la Solución de Schwarzschild y <i>Einsteinian Cubic Gravity</i>	28
3.1. Temperatura del agujero negro en función de la masa	35
4.1. Comparación entre el Modelo Λ CDM y el Modelo <i>GeomInf 1</i>	43
4.2. Comparación del modelo Λ CDM y los modelos <i>GeomInf 1</i> y <i>GeomInf 2</i>	43

LISTA DE SÍMBOLOS

c	Velocidad de la luz en el vacío
G	Constante Gravitacional
M	Masa del Agujero Negro
R	Escalar de Ricci/Escalar de Curvatura
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$R_{\alpha\beta\mu\nu}$	Tensor de Riemann
g	Determinante de la métrica
$g_{\mu\nu}$	Métrica
D	Dimensión
h	Métrica inducida en el horizonte de eventos
\mathcal{H}	Horizonte de eventos del agujero negro
r_h	Radio del horizonte de eventos
A	Área del Agujero Negro

κ_g	Gravedad Superficial
Λ	Constante Cosmológica
∇_μ	Derivada Covariante

INTRODUCCIÓN

El campo de la física teórica, siempre en la vanguardia del conocimiento científico, ha visto surgir un interés creciente por las *Generalized Quasi-Topological Gravities* (GQTG's), tal como lo documentan Bueno, Cano y Hennigar (2019). Estas teorías amplían la comprensión de la gravedad de Einstein (1915) y se extienden más allá de los modelos convencionales de gravedad en curvatura superior (Lovelock, 1970; Sotiriou & Faraoni, 2010). El vasto potencial de las GQTG's se extiende a fenómenos tan diversos como la formación de agujeros negros, la estructura del espacio-tiempo bajo condiciones extremas y las interpretaciones holográficas, en línea con la correspondencia AdS/CFT (Adair et al., 2020; Bueno & Cano, 2017b). Este trabajo de investigación representa una contribución substancial al cuerpo de conocimiento sobre las GQTG's, ofreciendo una revisión meticulosa de sus principios teóricos, aplicaciones y su importancia en la física de altas energías.

El objetivo de este trabajo de investigación es doble: consolidar la literatura sobre las GQTG's para facilitar el acceso a descubrimientos fundamentales y, paralelamente, identificar y explorar nuevas áreas de investigación y preguntas aún sin respuesta. Pretende ser un recurso referencial para investigadores y estudiantes, proporcionando una base teórica robusta y un marco conceptual coherente.

La estructura del trabajo de investigación se ha diseñado con esmero para abarcar aspectos fundamentales de las GQTG's. En el Capítulo 1 se introducen conceptos esenciales para entender estas teorías, tratando sus dimensiones físicas y matemáticas, y discutiendo las limitaciones de la Relatividad General. Se abordan las teorías de gravedad más allá de Einstein, como las teorías de $f(R)$ (Sotiriou & Faraoni, 2010) y Lovelock (1970), estableciendo así la base para una comprensión profunda de las GQTG's. Se detallan las ecuaciones de movimiento fundamentales

y definiciones críticas, como la analogía con el tensor de Ricci [véase la Ecuación (1.9)]. Se define formalmente a los agujeros negros, además se clarifican sus propiedades termodinámicas y las soluciones esféricamente simétricas, culminando en la solución de Schwarzschild-Tangherlini (Tangherlini, 1963). El desarrollo de las teorías de Lovelock en agujeros negros, usando la teoría de Gauss-Bonnet, que es fundamental, para $D = 5$ y $D = 6$, demuestra la aplicabilidad de las GQTG's (véase cálculos detallados en el Apéndice B).

El capítulo 2 profundiza en la definición detallada de las GQTG's, sus propiedades, las subclases, además se presenta a una pieza fundamental la teoría *Einsteinian Cubic Gravity* (Bueno & Cano, 2016a), haciendo una descripción completa de esta teoría, y un desarrollo detallado de la aplicación a la solución de agujeros negros, entendiendo así el comportamiento asintótico y cerca del horizonte. Por último, se presentan sus fórmulas de recurrencia (Bueno, Cano & Hennigar, 2019) y los cálculos necesarios para entender las áreas en desarrollo que se explorarán en los capítulos subsiguientes.

Los Capítulos 3 y 4 se centran en la aplicabilidad de las GQTG's, explorando nuevos desafíos y oportunidades. Se discute la estabilidad de agujeros negros en cuatro dimensiones, las contribuciones de las GQTG's a la cosmología contemporánea y su relevancia en la física de altas energías, ofreciendo una nueva perspectiva sobre el proceso inflacionario como alternativa al modelo Λ CDM. Estos capítulos integran avances recientes y perspectivas emergentes con un análisis crítico y positivo.

Finalmente, este trabajo no solo recopila y organiza de manera exhaustiva el conocimiento existente, sino que también fomenta la discusión y el intercambio de ideas en la comunidad científica. Además, que contribuye significativamente al avance del conocimiento en el área de la física teórica y la gravedad en curvatura superior, estableciendo un punto de referencia importante para futuras investigaciones y descubrimientos en el campo de las *Generalized Quasi-Topological Gravities*.

GRAVEDADES MÁS ALLÁ DE LA RELATIVIDAD GENERAL

La teoría de la Relatividad General describe la gravedad como la curvatura del espacio-tiempo. Es una teoría fundamental que fue propuesta por Albert Einstein (1915). Las ecuaciones de Campo de Einstein relacionan la geometría del espacio-tiempo con la distribución de materia y energía en el universo. En situaciones apropiadas, la Relatividad General reproduce las predicciones de la teoría de la gravedad de Newton y ha sido confirmada por una gran cantidad de experimentos y observaciones.

Sin embargo, la teoría de la Relatividad General presenta algunas limitaciones y problemas teóricos que han llevado a la búsqueda de teorías alternativas. Una de estas limitaciones es la falta de una descripción adecuada de la gravedad cuántica, que se observa a escalas muy pequeñas, especialmente en su capacidad para describir la física de altas energías. Además, predice la existencia de singularidades en el espacio-tiempo, como las encontradas en el centro de los agujeros negros, donde las leyes de la física ya no se aplican. Por otro lado, existen numerosos motivos que nos hacen pensar que la acción de Einstein-Hilbert es solo la primera de una torre infinita de correcciones de orden superior en curvatura. Estos motivos han llevado a la investigación de teorías como las *Generalized Quasi-Topological Gravities*

(GQTG's), que buscan superar estas limitaciones y proporcionar una comprensión más profunda de la gravedad.

En este trabajo de investigación, nos centraremos en el estudio de las GQTG's como una posible alternativa a la teoría de la Relatividad General para describir la gravedad en situaciones de curvatura espacio-temporal grande. Para ello, consideraremos una modificación de la acción de Einstein-Hilbert definida como¹:

$$S_{EH,\Lambda} = \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (1.1)$$

donde R es el escalar de Ricci, también conocido como escalar de curvatura y Λ la constante cosmológica.

Esta acción tiene una larga historia que se remonta a los primeros días de la Relatividad General. A través del estudio de las soluciones de las ecuaciones de campo correspondientes a esta acción modificada, esperamos obtener una comprensión más profunda de la gravedad y de cómo se comporta en condiciones extremas.

1.1. Gravedad en curvatura superior

Las teorías de curvatura superior aparecieron originalmente propuestas por Weyl (1952) y Eddington (1921) para una unificación geométrica del electromagnetismo y la gravedad. Estas teorías han sido estudiadas en varias áreas de física de altas energías, como la cosmología, la física de agujeros negros (Hawking, 1972a), la holografía (Padmanabhan, 2005) y la teoría de cuerdas (Maldacena, 1999). Estas teorías han sido utilizadas para entender el origen del universo y su expansión, describiendo fenómenos como la inflación cosmológica y la dinámica del universo en etapas tempranas; asimismo, parece ser que un fenómeno general de estas teorías, permite que la inflación pueda ser provocada por un mecanismo diferente conocido como inflación geométrica (Arciniega, Bueno et al., 2020), como se verá en el Capítulo 4. En física de agujeros negros, las teorías de gravedad de curvatura superior han

¹Extraída de (Blau, 2023) en el capítulo 20.

sido utilizadas para entender su estructura y comportamiento, permitiendo encontrar la solución de problemas como la paradoja de la información y la no unitariedad en la evolución del estado (Myers, 1999). En teoría de cuerdas, las teorías de gravedad de curvatura superior son esenciales para entender los aspectos de altas energías, tales como la descripción de estados excitados y la resolución de problemas relacionados con la unificación de la gravedad con otras fuerzas fundamentales.

El estudio de estas teorías permite una comprensión más profunda de la gravedad de Einstein y sus propiedades, al proporcionar un marco para probar qué características de la teoría son únicas y cuáles persisten cuando se consideran términos adicionales en la acción. Además, esto ofrece una forma de superar las limitaciones de la teoría de la Relatividad General.

La idea principal es agregar términos adicionales a la acción de Einstein-Hilbert, lo que implica potencias superiores del tensor de curvatura de Riemann. La acción modificada se puede expresar mediante una integral, como se muestra en la siguiente ecuación²:

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} L \left(g^{\alpha\beta}, R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \nabla_\epsilon R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \dots \right), \quad (1.2)$$

donde S es la acción, g es el determinante del tensor de métrica, L es la densidad lagrangiana y R, ∇ son los términos de curvatura y derivadas respectivamente.

1.1.1. Ecuaciones de Movimiento

Las ecuaciones de campo de la teoría de la Relatividad General, también conocidas como ecuaciones de campo de Einstein, son una generalización de la Ley de Gravitación Universal Newtoniana, mientras que esta ley asume la existencia de solo un potencial que describe el campo gravitacional, la teoría de la Relatividad General cuenta con 10 potenciales. Estos potenciales, se identifican en las 10 componentes del tensor métrico simétrico $g_{\mu\nu}$ de la geometría del espacio-tiempo Riemanniano curvado, como se discute en el libro de Carmeli (1982).

²Revisar (Bueno & Cano, 2017b)

Las ecuaciones de campo de Einstein muestran una propiedad importante, su no linealidad en las funciones de campo, lo cual es fácil de ver a partir de la estructura del tensor de Ricci. Este hecho diferencia las ecuaciones de campo gravitacional de las ecuaciones de campo de otras teorías conocidas, como la teoría del campo electromagnético. Sin embargo, no son tan diferentes de otras teorías de gauge, que generalmente también son no lineales. Debido a esta propiedad, el principio de superposición ya no es válido para las ecuaciones de campo de Einstein.

La distribución y movimiento de la materia son determinadas por las funciones de campo gravitacional, es decir, las componentes del tensor métrico, y al mismo tiempo el tensor métrico es determinado por la distribución y movimiento de la materia a través de las ecuaciones de campo de Einstein.

Desde un punto de vista moderno, las ecuaciones de campo para la teoría de la Relatividad General, se pueden obtener a partir del principio de acción como se discute p.e., en las notas de Blau (2023).³ Así, variando la acción [véase la Ecuación (1.1)] con respecto a la métrica, se tiene:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \Lambda g_{\alpha\beta} = 0, \quad (1.3)$$

donde la parte izquierda de (1.3) representa la parte geométrica del espacio-tiempo; además, al considerar cero en el lado derecho de la ecuación, significa que no hay fuentes de energía y masa presentes, a excepción por la energía del vacío representada por la constante cosmológica. Las soluciones a esta ecuación son soluciones de la teoría de la Relatividad General en un espacio-tiempo vacío con constante cosmológica. En el caso maximalmente simétrico, a tales soluciones se las conoce como de Sitter o Anti-de Sitter, dependiendo del signo de Λ ya puesto (de Sitter, 1916).

Asimismo la acción que abarca tanto la relación entre materia y gravedad para la Relatividad General es:

$$S[g_{\alpha\beta}, \phi] = \frac{1}{16\pi G} S_{EH}[g_{\alpha\beta}] + S_M[\phi, g_{\alpha\beta}], \quad (1.4)$$

³Las siguientes ecuaciones se extraen de (Blau, 2023)

donde S_M es la acción para la materia.

De la misma manera, variando la acción general, se pueden obtener las ecuaciones de campo de Einstein asociado al tensor de Energía-Momento, el cual es la fuente de las ecuaciones del campo gravitatorio:

$$\frac{\delta S[g_{\alpha\beta}, \phi]}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} . \quad (1.5)$$

donde, $G_{\mu\nu}$ representa el tensor de Einstein. Por otro lado, el tensor de Energía-Momento $T_{\mu\nu}$, se define como:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} . \quad (1.6)$$

A partir de trabajar con la acción, uno puede ver que es relativamente sencillo llegar a generalizaciones covariantes de la acción de Einstein-Hilbert, se asume que la acción modificada se reduce a la acción de Einstein-Hilbert cuando todos los acoplamientos de orden superior se fijan en cero. Gracias a esto, podemos escribir el Lagrangiano anterior de la forma p.e., (Bueno & Cano, 2017b):

$$L(g^{\alpha\beta}, R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \nabla_\epsilon R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \dots) = \frac{1}{16\pi G} [-2\Lambda_0 + R + \text{términos de derivada superior}] . \quad (1.7)$$

Consideremos el caso en el que no hay derivadas covariante del tensor de Riemann. Se debe enfatizar que el Lagrangiano gravitacional presentado anteriormente, depende tanto de la curvatura como de la métrica, pero no de las derivadas de la curvatura, es decir, el Lagrangiano contiene términos solo hasta derivados de segundo orden de la métrica. La cantidad más importante, que será útil para nuestro propósito posterior, derivada del Lagrangiano, es el siguiente tensor⁴:

$$p^{\alpha\beta\gamma\delta} = \left(\frac{\partial L}{\partial R_{\alpha\beta\gamma\delta}} \right)_{g_{uv}} . \quad (1.8)$$

⁴Revisar el trabajo de Bueno et al. (2023)

También este tensor es útil para poder construir un tensor análogo al tensor de Ricci, definiéndolo así:

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} \equiv P_{\alpha\gamma\kappa\lambda} R_{\beta}{}^{\gamma\kappa\lambda}, \quad (1.9)$$

Al tener ya definido el funcional de la acción, y para obtener las ecuaciones de campo, se requiere variar la acción, dando como resultado:

$$\delta S = \int_{\partial_M} d^D x \sqrt{-g} \mathcal{E}_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + \int_{\partial_M} d^D x \sqrt{-g} \nabla_{\lambda} \delta v^{\lambda}, \quad (1.10)$$

donde $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ representa el término de las ecuaciones de campo, que resulta de la variación de la parte principal de la acción y δv^{λ} es el término de la frontera. Así, las ecuaciones de campo de una teoría $\mathcal{L}(g_{\alpha\beta}, R^{\alpha\beta\gamma\delta})$ tienen la forma:

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} \equiv \mathcal{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} L - 2 \nabla^{\gamma} \nabla^{\delta} P_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0. \quad (1.11)$$

La cantidad⁵ $P^{\alpha\beta\gamma\delta}$ involucra derivadas de segundo orden de la métrica, lo que implica que el término $\nabla^{\gamma} \nabla^{\delta} P_{\alpha\gamma\delta\beta}$ en $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ contiene derivadas de cuarto orden de la métrica.

1.1.2. Ejemplos de gravedad de orden superior

Teorías de $f(R)$

Las teorías $f(R)$ de la gravedad, surgen a partir de la generalización del Lagrangiano en la acción Einstein-Hilbert [véase la ecuación (1.1)]. Además, el escalar de Ricci R , se sustituirá por una función general de R , es decir:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4 x \sqrt{-g} f(R). \quad (1.12)$$

Las acciones $f(R)$, son suficientemente generales para abarcar algunas características básicas de gravedad en orden superior y al mismo tiempo son lo suficiente

⁵Véase más a detalle sus propiedades en el trabajo de Padmanabhan (2011)

simples a la hora de ser manipuladas en los cálculos a realizar (Sotiriou & Faraoni, 2010).

Considerando y definiendo $f(R) = R$, obtenemos nuevamente la acción de Einstein-Hilbert (con $\Lambda = 0$). Además, $f(R)$ se puede considerar con la constante cosmológica no nula ($\Lambda \neq 0$), es decir, la función $f(R) = R - 2\Lambda$ obtenemos la acción de Hilbert-Einstein [véase la Ecuación (1.1)].

Como se observa, tanto la acción de Hilbert-Einstein con la Constante Cosmológica, como sin la Constante Cosmológica, son parte de la familia de las funciones $f(R)$.

Utilizando el procedimiento visto en la sección anterior, es decir agregando el término de materia S_M , la acción total para gravedad $f(R)$ toma la forma:

$$S_{f(R)} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \phi), \quad (1.13)$$

donde ϕ denota colectivamente los campos de materia. La variación con respecto a la métrica da, después de algunas manipulaciones y términos del módulo de superficie, la siguiente expresión general:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square] f'(R) = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.14)$$

Gravedad de Lovelock

La teoría de Lovelock (1970) es una extensión natural de la teoría de Einstein de la gravedad a dimensiones superiores, y es de gran interés en la física teórica, ya que describe una amplia clase de modelos. La teoría de Lovelock es la teoría más general de la gravedad que produce ecuaciones de movimiento de segundo orden en un número arbitrario de dimensiones. A su vez, es la generalización natural de la teoría de la Relatividad General de Einstein a dimensiones superiores. En tres y cuatro dimensiones la teoría de Lovelock coincide con la teoría de Einstein, pero en dimensiones superiores ambas teorías son en realidad diferentes. De hecho, para $D > 4$, la gravedad de Einstein se puede considerar como un caso particular de

la gravedad de Lovelock, ya que el término de Einstein-Hilbert es uno de varios términos que constituyen la acción de Lovelock (2003).

El Lagrangiano de la teoría se da como una suma de densidades de Euler, siendo la densidad de Euler $2n - \text{dimensional}$:

$$\chi(\mathcal{M}) = \frac{(-)^{n+1} \Gamma(2n+1)}{2^{2+n} \pi^n \Gamma(n+1)} \int_{\mathcal{M}} d^{2n}x \sqrt{-g} \mathcal{R}_n, \quad (1.15)$$

extendidas dimensionalmente, y se puede escribir de la siguiente manera⁶:

$$\mathcal{L} = \sum_{n=0}^{D/2} \alpha_n \mathcal{R}_n, \quad \mathcal{R}_n = \frac{1}{2^n} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_n \beta_n}^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n} \prod_{r=1}^n R^{\alpha_r \beta_r}_{\mu_r \nu_r}, \quad (1.16)$$

donde $\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_n \beta_n}^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}$ es la delta de Kronecker generalizada.

Cada término \mathcal{R}_n corresponde a la extensión dimensional de la densidad de Euler en $2n$ dimensiones, por lo que esto solo contribuye a las ecuaciones de movimiento para $n < D/2$.

Expandiendo (1.16) el Lagrangiano toma la forma familiar:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2 \left(R^2 + R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right) + \alpha_3 O(R^3) \right). \quad (1.17)$$

En particular, el término de segundo orden es el término de Gauss-Bonnet.

$$\mathcal{R}_2 = R^2 + R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}. \quad (1.18)$$

La condición de segundo orden para las ecuaciones de campo nos lleva a imponer una condición sobre $P^{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$\nabla_\alpha P^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0. \quad (1.19)$$

Esta condición caracteriza precisamente a las gravedades de Lovelock, al eliminar los posibles términos de más de dos derivadas en las ecuaciones de movimiento.

⁶Para una detallada explicación, ver (Garraffo & Giribet, 2008)

1.2. Agujeros Negros

Un agujero negro es una solución exacta de las ecuaciones de la Relatividad General de Einstein. Describe una región del espacio-tiempo caracterizada por la presencia de un horizonte de eventos, es decir, una región donde la gravedad es tan fuerte que nada, ni siquiera la luz, puede escapar.

Un agujero negro,⁷ en un espacio-tiempo asintóticamente plano $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ se define como una región

$$\mathcal{B} = \mathcal{M} - I^-(I^+), \quad (1.20)$$

donde I^+ es el infinito nulo futuro y I^- es el pasado cronológico. En otras palabras, esto significa que el futuro de \mathcal{B} no está contenido en la región asintótica. El horizonte de eventos del agujero negro es una hipersuperficie nula que corresponde a la frontera común entre \mathcal{B} y el pasado de I^+ . Es importante destacar que el horizonte de eventos es una característica global del espacio-tiempo que requiere conocer toda su historia futura, por lo que carece de un significado local.

Hoy por hoy tenemos evidencia experimental directa de los agujeros negros gracias a los detectores de ondas gravitacionales LIGO/Virgo⁸ y a The Event Horizon Telescope.⁹

En este trabajo de investigación trabajaremos con agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos. Schwarzschild (1915) fue el primero en encontrar una solución exacta no trivial a las ecuaciones de campo de Einstein para un agujero negro estático, sin carga ni momento angular. En coordenadas esféricamente simétricas la componente temporal se anula para cierto radio, y ahí existe un horizonte.

La importancia del estudio de los agujeros negros es que este es un excelente laboratorio para probar la relación entre la mecánica cuántica y la gravedad, ya que muchas de sus propiedades tienen un origen mecánico cuántico, además, permite entender mejor el comportamiento de esta interacción fundamental.

⁷Revisar el trabajo de Cano (2019)

⁸Revisar los hallazgos de Abbott et al. (2016)

⁹Revisar los hallazgos de The Event Horizon Telescope Collaboration et al. (2019)

1.2.1. Termodinámica de agujeros negros

Clásicamente, se considera que un agujero negro, por su naturaleza absorbente, no puede emitir nada. Esta característica conlleva a la noción de que un agujero negro carece de temperatura, ya que no emite radiación alguna. Sin embargo, este concepto entra en conflicto con las leyes de la termodinámica. Por un lado, la idea de que los agujeros negros no tienen temperatura implica una violación de la segunda ley de la termodinámica. Teóricamente, uno podría “ocultar” entropía dentro de un agujero negro, lo que reduciría la entropía observable del universo, contraviniendo esta ley. Observaciones relevantes indican que el área de los agujeros negros nunca disminuye; siempre crece o permanece constante¹⁰. Esta propiedad llevó a Bekenstein (1973) a proponer una relación directa entre la entropía y el área de un agujero negro. Este autor sugirió que la entropía de un agujero negro es proporcional a su área, pues entonces, la segunda ley de la termodinámica en presencia de agujeros negros se satisface sin problema lo que se llama *La Segunda Ley Generalizada*. La entropía de un agujero negro, es dada por la fórmula de Bekenstein-Hawking:

$$S_{BH} = \frac{A}{4G}, \quad (1.21)$$

donde G es la constante gravitacional y A es el área.

Sin embargo, si se asocia una entropía a un agujero negro, tiene que ser un objeto termodinámico, es decir que debería tener temperatura, pero previamente se mencionó que los agujeros negros no tienen temperatura. Hawking (1975) demostró que un agujero negro emite radiación térmica. La temperatura de esta radiación es directamente proporcional a la superficie gravitacional del agujero negro, denotada por κ_g . Esta superficie gravitacional se define como la aceleración debida a la gravedad que un observador experimentaría cerca del horizonte del agujero negro, medida de forma asintótica. La relación entre la temperatura (T_H) y la superficie

¹⁰Los primeros en observar que un agujero negro muestra una tendencia a incrementar el área de la superficie de su horizonte cuando experimenta cualquier transformación fueron Penrose y Floyd (1971), quienes además sugirieron que un aumento en el área podría ser una característica general de las transformaciones de agujeros negros, lo cual permitió sentar las bases para las ideas posteriores desarrolladas por Bekenstein (1973) y Hawking (1975) sobre la relación entre la entropía y el área del horizonte de los agujeros negros.

gravitacional se expresa mediante la fórmula:

$$T_H = \frac{\kappa_g}{2\pi}, \quad (1.22)$$

donde κ_g representa la superficie gravitacional. Este descubrimiento valida la propuesta de Bekenstein (1973) y Hawking (1975), mostrando que los agujeros negros tienen tanto temperatura como entropía.

Existen varias similitudes entre la física de agujeros negros y la termodinámica. La similitud más llamativa es la que existe entre los comportamientos del área de un agujero negro y de la entropía, debido a que ambas cantidades tienden a aumentar de manera irreversible. A partir de la analogía entre agujeros negros y la termodinámica, se pueden describir las 4 leyes de la mecánica de agujeros negros (Bardeen et al., 1973), las cuales son las leyes ordinarias de la termodinámica, que rigen los grados de libertad $UV^{11,12}$ microscópicos que forman los agujeros negros. Mediante esta analogía existente se pueden identificar a aquellas cargas conservadas como la Masa, Momento angular o la carga eléctrica, que permiten caracterizar a los agujeros negros como las variables termodinámicas.

La *ley cero* de la mecánica de los agujeros negros, establece que dado un agujero negro estacionario, κ_g es siempre constante en el horizonte (Hawking, 1972a, 1972b); esto nos lleva a pensar en la *ley cero* de la termodinámica que establece que la temperatura es uniforme en todas partes en un sistema en equilibrio térmico.

La *primera ley* de la mecánica de la agujeros negros establece que al considerar un proceso cuasiestático durante el cual un agujero negro estacionario de masa M , momento angular J y área superficial A es llevado a un nuevo agujero negro estacionario con parámetros $M + \delta M$, $J + \delta J$ y $A + \delta A$. Los cambios en la masa, el momento angular y el área superficial están relacionados por¹³:

$$dM = \frac{\kappa_g}{8\pi G} dA + \Omega dJ + \dots, \quad (1.23)$$

¹¹Revisar el trabajo de Moffat (2011)

¹²Se refiere a *UV-complete theory of gravity*.

¹³Revisar el Apéndice A para ver cómo se obtiene la ecuación (1.23)

estos últimos puntos suspensivos indican variables adicionales de las que puede depender la solución del agujero negro, tal como la carga de este agujero negro.

El trabajo de Hawking (1971), introdujo el importante teorema del área en la mecánica de los agujeros negros. Este teorema, conocido como *la segunda ley* de la mecánica de los agujeros negros, establece que bajo la condición de la energía nula, el área de la superficie de un agujero negro no puede disminuir. Esto se representa matemáticamente mediante la ecuación:

$$\delta A \geq 0, \quad (1.24)$$

donde δA simboliza la variación en el área de la superficie del agujero negro. La ley implica que, en cualquier proceso físico, el área de la superficie de un agujero negro tiende a permanecer constante o a aumentar, pero nunca a disminuir.

Por último, *la tercera ley* de la mecánica de los agujeros negros establece que la gravedad superficial del horizonte no puede ser reducida a cero en un número finito de pasos.¹⁴

Termodinámica de agujeros negros en gravedad de curvatura superior

La ley del área en la fórmula de entropía de Bekenstein-Hawking, puede ser reemplazada por la fórmula de entropía de Wald (1993), en el caso de teorías más generales que la de Einstein definidas por un lagrangiano dependiente de la métrica y el tensor de Riemann $\mathcal{L}(g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\rho\sigma})$.

$$S_W = -2\pi \int_{\mathcal{H}} d^{D-2}x \sqrt{h} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta R_{\mu\nu\rho\sigma}} \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\rho\sigma}, \quad (1.25)$$

donde:

- \mathcal{H} es el horizonte de eventos del agujero negro.
- h es la métrica inducida en el horizonte de eventos.

¹⁴Una formulación más precisa de la tercera ley es probada y propuesta por W. Israel (Israel, 1986)

- $\epsilon_{\mu\nu}$ es el tensor binormal al horizonte de eventos.

Además Wald mostró que la entropía definida de esta manera, satisface la primera ley de la mecánica de agujeros negros:

$$\delta M = \frac{\kappa_g}{2\pi} \delta S_W + \Omega \delta J + \dots \quad (1.26)$$

1.2.2. Soluciones de agujeros negros esféricamente simétricos

El ansatz estático y esféricamente simétrico general¹⁵ tiene la forma:

$$ds_{N,f}^2 = -N(r)^2 f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{D-2}^2, \quad (1.27)$$

donde $N(r)$ y $f(r)$ son dos funciones independientes, además $d\Omega_{D-2}^2$ es la métrica de $(D-2)$ – esfera.

Tanto las funciones $N(r)$ y $f(r)$, en general, son determinadas por un sistema de ecuaciones diferenciales que pueden ser elegidas como las componentes $\mathcal{E}_{tt} = 0$ y $\mathcal{E}_{rr} = 0$ de las ecuaciones de movimiento. Usando las identidades de Bianchi de las ecuaciones de movimiento $\nabla^\mu \mathcal{E}_{\mu\nu} = 0$, el resto de componentes resultan de una combinación de estas.

En el caso de Relatividad General con una constante cosmológica:

$$L = \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda), \quad (1.28)$$

su única solución corresponde a $N(r) = N_0$ ¹⁶:

$$ds_f^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{(D-2)}^2, \quad (1.29)$$

¹⁵Revisar (Bueno & Cano, 2017b)

¹⁶Usualmente $N_0 = 1$, dado que siempre se puede redefinir el tiempo, pero no necesariamente tiene que ser 1, por ejemplo se podría tomar $N(r) = 5$, esto quiere decir que el nuevo tiempo es 5 veces el tiempo inicial, entonces la métrica se modificaría y en la parte temporal habría un factor de 25, así como $t' = 5t$, esto solo es para g_{tt} .

donde:

$$f(r) = 1 - \frac{16\pi GM}{(D-2)\Omega_{D-2}r^{D-3}} - \frac{2\Lambda_0 r^2}{(D-1)(D-2)}. \quad (1.30)$$

Esta es la conocida solución de Schwarzschild-Tangherlini. Para cuatro dimensiones y en ausencia de la constante cosmológica, esta se reduce a la solución usual de Schwarzschild (1915),¹⁷ según lo propuesto por Tangherlini (1963).

Agujeros Negros en la Gravedad de Lovelock

La gravedad de Lovelock, como la forma más general de gravedad de curvatura superior, se caracteriza por ecuaciones de movimiento de segundo orden. Esta teoría propone modificaciones a la Relatividad General en contextos de dimensiones superiores. Inicialmente, enfocamos nuestra atención en un espacio de cinco dimensiones, dado que en dimensiones menores a siete ($D < 7$), el término \mathcal{R}_3 no influye en las ecuaciones de movimiento. En cinco dimensiones, la teoría de Lovelock se alinea esencialmente con la gravedad de Einstein, integrada con la extensión dimensional de la densidad de Euler de cuatro dimensiones, conocida comúnmente como la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet (EGB).¹⁸

La teoría de Gauss-Bonnet es crucial para extender la teoría convencional de la gravedad, especialmente en dimensiones superiores. La acción de Einstein-Gauss-Bonnet en un espacio-tiempo de dimensión D se expresa mediante la ecuación:

$$S_{EGB} = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{-g} [-2\Lambda_0 + R + \alpha \chi_4]. \quad (1.31)$$

Para un espacio de $D = 5$, la generalización se describe con:

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{4\alpha} \pm \sqrt{1 + \frac{\Lambda_0 r^4}{12\alpha} + \frac{r^4}{16\alpha^2} + \frac{2GM}{\alpha r^3}}. \quad (1.32)$$

Esta formulación indica una solución que amplía nuestra comprensión de la gravedad más allá de las cuatro dimensiones habituales. Al expandir la teoría a un espacio

¹⁷ $f(r) = 1 - \frac{2GM}{r}$

¹⁸La solución estática con simetría esférica en la teoría EGB fue desarrollada por Boulware y Deser, como se detalla en (Boulware & Deser, 1985)

de $D = 6$, obtenemos la siguiente ecuación

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{12\alpha} \mp \sqrt{\frac{2\pi GM}{3\alpha r\Omega} + \frac{r^4}{144\alpha^2} + \frac{\Lambda_0 r^4}{60\alpha}} . \quad (1.33)$$

Estas ecuaciones para $D = 5$ y $D = 6$ dimensiones se exploran en profundidad en el Apéndice B, basándose en las características presentadas en el siguiente capítulo.

GRAVEDADES CUASITOPOLÓGICAS GENERALIZADAS (GQTG's)

2.1. Introducción

En este capítulo, se examinará en detalle las *Generalized Quasi-Topological Gravities* (GQTG's) y su relación con la gravedad y los agujeros negros. Se discutirán las definiciones y propiedades generales de estas teorías, así como su aplicación específica en la *Einsteinian Cubic Gravity* (ECG). Se analizarán las soluciones esféricamente simétricas de ECG y el comportamiento asintótico de los agujeros negros asintóticamente planos, incluyendo el análisis del horizonte. También se discutirán las fórmulas de recurrencia y cómo se utilizan para calcular la evolución temporal de estas teorías en relación a los agujeros negros. Este capítulo proporcionará una comprensión detallada de cómo las GQTG's pueden contribuir a nuestra comprensión de la gravedad y la física de los agujeros negros.

2.2. Definición y propiedades generales

En estos últimos años se comenzó a trabajar en una nueva familia de teorías de gravedad de curvatura superior, las cuales resultan muy interesantes a la hora de

describir y calcular propiedades de la gravedad. La acción de las llamadas *Generalized Quasi-Topological Gravities* se puede escribir como¹:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{-g} \left[-2\Lambda + R + \sum_{n=2} \sum_{i_n} \ell^{2(n-1)} \mu_{i_n}^{(n)} \mathcal{R}_{i_n}^{(n)} \right], \quad (2.1)$$

donde ℓ es alguna escala de longitud, $\mu_{i_n}^{(n)}$ son acoplamientos adimensionales, $\mathcal{R}_{i_n}^{(n)}$ son combinaciones lineales de densidades construidas en cada caso desde la contracción de n tensores de Riemann.

Estas teorías, que ahora se sabe que existen en órdenes generales y en dimensiones arbitrarias (Bueno et al., 2023), son muy interesantes, dado que cuando se evalúa sobre backgrounds esféricamente simétricos, las ecuaciones de campo se reducen a ecuaciones diferenciales de segundo orden y admiten soluciones exactas de una forma muy parecida a la gravedad de Lovelock (Hennigar et al., 2017). Una particularidad interesante de las *Generalized Quasi-Topological Gravities* es que en backgrounds de simetría máxima, las ecuaciones de movimiento linealizadas coinciden con las ecuaciones de Einstein linealizadas excepto un prefactor global.

Para saber si una teoría genérica como $\mathcal{L}(g^{\alpha\beta}, R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \nabla_\alpha R_{\beta\gamma\delta\epsilon}, \dots)$ pertenece a la familia de las GQTG's, se necesita evaluar en $\sqrt{g}\mathcal{L}$ el ansatz general estático y esféricamente simétrico:

$$ds_{SSS}^2 = -N^2(r)f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2. \quad (2.2)$$

Obteniendo como resultado $L_{N,f}$ siendo este el Lagrangiano efectivo. Definiendo con mayor precisión, se tiene que este Lagrangiano efectivo:

$$L_{N,f}(r, f(r), N(r), f'(r), N'(r), \dots) \equiv N(r)r^{D-2} \mathcal{L} \Big|_{g^{\alpha\beta}=g_{N,f}^{\alpha\beta}}. \quad (2.3)$$

Por definición, extraída del trabajo de Bueno, Cano, Moreno y Murcia (2019), diremos entonces que, para que $\mathcal{L}(g^{\alpha\beta}, R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \nabla_\alpha R_{\beta\gamma\delta\epsilon}, \dots)$ pertenezca a la familia de las GQTG's se debe cumplir que las ecuaciones de Euler-Lagrange de L_f se anulen

¹Revisar (Bueno, Cano & Hennigar, 2019)

idénticamente, es decir, si:

$$\frac{\partial L_f}{\partial f} - \frac{d}{dr} \frac{\partial L_f}{\partial f'} + \frac{d^2}{dr^2} \frac{\partial L_f}{\partial f''} - \dots = 0, \quad \forall f(r). \quad (2.4)$$

2.2.1. Propiedades

- I. Cuando se linealiza alrededor de cualquier fondo simétrico máximo, las ecuaciones de movimiento de las *GQTG's* se vuelven de segundo orden, es decir, solo propagan el gravitón habitual sin masa y sin traza de la gravedad de Einstein en dichos backgrounds.
- II. Tienen un límite de gravedad de Einstein continuo y bien definido, que corresponde a establecer $\mu_{i_n}^{(n)} \rightarrow 0$ para todo n y i_n
- III. Admiten generalizaciones del agujero negro de Schwarzschild (asintóticamente plano, de Sitter o Anti-de Sitter), es decir, soluciones que se reducen a él en el límite de gravedad de Einstein, caracterizados por una única función $f(r)$. Para ellos, $N(r) = 1$ (o alguna otra constante) en la ecuación (2.2) y $g_{tt}g_{rr} = -1$
- IV. Cualquier acción efectiva de gravedad puede ser mapeada, mediante una redefinición de la métrica, a una *Generalized Quasi-Topological Gravity*, orden por orden en términos de los acoplamientos.

2.3. Subclases

Por la forma de las densidades *GQTG's*, se pueden clasificar en tres grupos o subclases:

- **Primer Grupo:** La densidad correspondiente no contribuye, en absoluto, a la ecuación de $f(r)$ se les llama “triviales”
- **Segundo Grupo:** Entre las *GQTG's* densidades, se encuentran las teorías llamadas *Quasi-Topological*, en las cuales, la ecuación que caracteriza a la función

métrica $f(r)$ es algebraica y no involucra derivadas de $f(r)$; además, alguna de ellas que satisfacen el teorema de Birkhoff². Las teorías de esta subclase solo existen para $D \geq 5$ con la excepción de *Eintein Gravity*. Un subconjunto de esta subclase son las teorías de Lovelock. También las soluciones de un agujero negro estático de esta subclase está, caracterizada, por una simple función que es determinada por una ecuación algebraica, esto ocurre de manera similar para las teorías de Lovelock (Boulware & Deser, 1985).

- **Tercer Grupo:** En este grupo la densidad contribuye a la ecuación con términos que contienen derivadas de segundo orden para $f(r)$, un ejemplo claro sería *Einsteinian Cubic Gravity* en $D = 4$ la cual se desarrollará en la Sección (2.4.)

2.4. Einsteinian cubic gravity

Antes del descubrimiento de *Einsteinian Cubic Gravity* (ECG), las únicas teorías quasitopológicas conocidas operaban en 5 dimensiones o más. Todas estas teorías eran válidas para dimensiones iguales o superiores a 5. *Einsteinian Cubic Gravity* fue pionera al ser la primera teoría de este tipo aplicable a 4 dimensiones, lo que impulsó un auge en la investigación en este campo. Es notable mencionar que este avance no se realizó a través del estudio de sus agujeros negros, sino mediante el análisis del espectro linealizado (Bueno & Cano, 2016a).

Esta teoría fue construida al inicio como una modificación generalizada para curvatura superior de la gravedad de Einstein que, hasta el orden cúbico, solo propaga el gravitón sin traza y transverso sobre un background maximalmente simétrico en dimensiones generales. A partir de esta teoría se pudo definir y clasificar las GQTG's (Adair et al., 2020). Siendo la acción de esta teoría dada por:

$$\mathcal{E}_{ECG} = \int d^D x \sqrt{-g} \mathcal{L}. \quad (2.5)$$

²En Relatividad General, el teorema de Birkhoff establece que las soluciones esféricamente simétricas de las ecuaciones de Einstein en el vacío son localmente isométricas a la solución de Schwarzschild, para su generalización a teorías de derivadas superiores de la gravedad. Revisar (Oliva & Ray, 2011)

Para poder construir la teoría *Einsteinian Cubic Gravity*, Bueno y Cano (2016a) se basaron en que tenía que satisfacer las propiedades (I.) y (II.) de la Sección (2.2.1) para dimensiones generales. Obteniendo, así, la densidad lagrangiana de esta teoría que está dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa} [-2\Lambda + R] + \alpha\chi_4 + \kappa [\beta\chi_6 + \lambda\mathcal{P}] , \quad (2.6)$$

donde³:

$$\mathcal{P} = 12R_{\alpha}^{\gamma} R_{\beta}^{\delta} R_{\gamma}^{\epsilon} R_{\delta}^{\lambda} R_{\epsilon}^{\alpha} R_{\lambda}^{\beta} + R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}^{\epsilon\lambda} R_{\epsilon\lambda}^{\alpha\beta} - 12R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\gamma} R^{\beta\delta} + 8R_{\alpha}^{\beta} R_{\beta}^{\gamma} R_{\gamma}^{\alpha} , \quad (2.7)$$

además, χ_4 y χ_6 son las densidades de Euler de 4 y 6 dimensiones^{4,5} o también conocidas como el término de Gauss-Bonnet y el término cúbico de Lovelock respectivamente. Siendo χ_4 topológico en $D = 4$ y trivial para $D \leq 3$, mientras que χ_6 es topológico en $D = 6$ y trivial para $D \leq 5$. Las ecuaciones de movimiento de ECG son (Adair et al., 2020) :

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\kappa}^{\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\kappa} - 2\nabla^{\beta}\nabla^{\gamma}P_{\alpha\beta\gamma\kappa} = 0, \quad P_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_{ECG}}{\partial R^{\alpha\beta\gamma\delta}} . \quad (2.8)$$

2.4.1. Soluciones esféricamente simétricas de ECG

Si se restringe el estudio a agujeros negros de vacío asintóticamente planos, estáticos y esféricamente simétricos (SSS) en 4 dimensiones (Adair et al., 2020; Bueno & Cano, 2016b; Hennigar & Mann, 2017; Hennigar et al., 2018; Poshteh & Mann, 2019), la acción se reduce a:

$$S_{ECG} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [R - G^2\lambda\mathcal{P}] , \quad (2.9)$$

³ $\kappa \equiv 8\pi G$

⁴ $\chi_4 = R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$

⁵ $\chi_6 = -8R_{\alpha}^{\gamma} R_{\beta}^{\delta} R_{\gamma}^{\epsilon} R_{\delta}^{\lambda} + 4R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}^{\epsilon\lambda} R_{\epsilon\lambda}^{\alpha\beta} - 24R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma} R^{\delta\epsilon} + 3R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} + 24R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\gamma} R^{\beta\delta} + 16R_{\alpha}^{\beta} R_{\beta}^{\gamma} R_{\gamma}^{\alpha} + 12R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R^3$

así, utilizando el elemento de línea

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (2.10)$$

Se obtiene la única ecuación de campo independiente:

$$-(f-1)r - G^2\lambda \left[4f'^3 + 12\frac{f'^2}{r} - 24f(f-1)\frac{f'}{r^2} - 12ff'' \left(f' - \frac{2(f-1)}{r} \right) \right] = r_0 , \quad (2.11)$$

donde la cantidad r_0 que aparece en el lado derecho de la ecuación está asociada con la masa ADM^6 del agujero negro, este valor se trabajará en la Sección (2.4.2) con más detalles.

2.4.2. Agujero Negro asintóticamente plano

La ecuación (2.11) no tiene solución analítica; sin embargo, se puede analizar mediante expansiones y aproximaciones, permitiendo entender la naturaleza de la solución.

Comportamiento asintótico

Fijémonos en el comportamiento asintótico. Para ello, se realiza una expansión alrededor de $r \rightarrow +\infty$. La solución puede expresarse como la solución de Schwarzschild más una corrección pequeña:

$$f(r) = 1 - \frac{r_0}{r} + f_1(r) , \quad (2.12)$$

⁶La masa ADM (Arnowitt-Deser-Misner) se refiere a la masa total de un sistema gravitacional aislado. El nombre proviene de los físicos Richard Arnowitt, Stanley Deser y Charles W. Misner, quienes la definieron en el contexto de su formulación del formalismo de descomposición 3+1 de la relatividad general, conocido también como formalismo ADM.

donde $|f_1(r)| \ll 1$. Luego de introducir (2.12) en (2.11) y expandiendo linealmente en $f_1(r)$ se obtiene la ecuación diferencial con la corrección:

$$-r^6 f_1 - G^2 \lambda \left(108r_0^2 - \frac{92r_0^2}{r} \right) + 12G^2 \lambda r_0 \left[(6r - 14r_0)f_1 + 3r(r_0 - 2r)f_1' + 3r^2(r - r_0)f_1'' \right] = 0. \quad (2.13)$$

La solución de esta ecuación diferencial de segundo orden es la suma entre la solución particular y la homogénea $f_1 = f_{1,p} + f_{1,h}$.

Para primer orden en λ , la solución particular es:

$$f_{1,p}(r) = G^2 \lambda \left(-\frac{108r_0^2}{r^6} + \frac{92r_0^3}{r^7} \right) + \mathcal{O} \left(\lambda^2, \frac{r_0^4}{r^8} \right), \quad (2.14)$$

los primeros términos dan una buena aproximación, debido a que los términos de orden superior para λ decaen tan rápido como $r \rightarrow \infty$.

La ecuación homogénea puede escribirse de la siguiente manera:

$$f_{1,h}'' - \gamma(r)f_{1,h}' - \omega^2(r)f_{1,h} = 0, \quad (2.15)$$

donde:

$$\begin{aligned} \omega^2(r) &= \frac{r^4}{36G^2 \lambda r_0(r - r_0)} - \frac{6r - 14r_0}{3r^2(r - r_0)} \\ \gamma(r) &= \frac{2r - r_0}{r(r - r_0)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ahora, cuando r es muy grande, se tiene que $\omega'/\omega^2 \ll 1$ y $\gamma \ll \omega$. En esta situación, la solución de la ecuación anterior es aproximadamente:

$$f_{1,h} \approx A \exp \left[\int dr \omega(r) \right] + B \exp \left[- \int dr \omega(r) \right], \quad (2.17)$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Cuando $r \rightarrow +\infty$, se obtiene:

$$\omega^2 = \frac{r^3}{36G^2 \lambda r_0} + \mathcal{O}(r^2), \quad (2.18)$$

así, la solución se da de manera muy aproximada por:

$$f_{1,h}(r) \simeq A \exp \left(\frac{r^{5/2}}{15G\sqrt{\lambda r_0}} \right) + B \exp \left(-\frac{r^{5/2}}{15G\sqrt{\lambda r_0}} \right), \quad (2.19)$$

entonces, debido a que se quiere que la métrica sea asintóticamente plana, debemos fijar $A = 0$. Esto nos deja con una familia uniparamétrica de soluciones que son asintóticamente planas. Por lo tanto, en el límite de r grande, la solución se da por:

$$f(r) \simeq 1 - \frac{r_0}{r} - G^2 \lambda \left(\frac{108r_0^2}{r^6} - \frac{92r_0^3}{r^7} \right) + \mathcal{O} \left(\lambda^2, \frac{r_0^4}{r^8} \right) + B \exp \left(-\frac{r^{5/2}}{15G\sqrt{\lambda r_0}} \right). \quad (2.20)$$

La expansión asintótica permite determinar la masa del agujero negro. En el contexto de un espacio-tiempo asintóticamente plano, la fórmula de Abbott-Deser para calcular la masa no se ve alterada por términos de curvatura de orden superior. Esto nos permite emplear el método convencional para este cálculo. De manera específica, la masa total del agujero negro en este escenario se determina mediante la siguiente ecuación:

$$M = \frac{1}{2G} \lim_{r \rightarrow +\infty} r(g_{rr}(r) - 1). \quad (2.21)$$

Tal como se mencionó anteriormente, las correcciones de orden superior en λ decrecen más rápidamente que el término principal $-r_0/r$ cuando r tiende a infinito. Esto implica que el término principal no se ve afectado significativamente por estas correcciones. En consecuencia, aplicando esta fórmula obtenemos:

$$r_0 = 2GM, \quad (2.22)$$

lo cual coincide con los resultados estándar. A partir de esta relación y de la ecuación (2.20), es posible expresar la expansión asintótica de $f(r)$ para valores pequeños de λ y cuando r se aproxima a infinito:

$$f(r \rightarrow \infty) = 1 - \frac{2GM}{r} - G^2 \left(\frac{108(2GM)^2}{r^6} - \frac{92(2GM)^3}{r^7} \right). \quad (2.23)$$

Cerca del Horizonte

La superficie $r = r_h$ es el horizonte para la métrica de la forma (2.10), en la cual $f(r_h) = 0$ y $f'(r_h) \geq 0$, esto quiere decir que la función debe ser diferenciable en r_h . La superficie gravitacional (κ_g) sobre el horizonte para este tipo de métrica es $\kappa_g = \frac{f'(r)}{2}$. Considerando que la función $f(r)$ es completamente regular y que se puede expandir en una serie de Taylor, obtenemos:

$$f(r) = 2\kappa_g(r - r_h) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(r - r_h)^n, \quad (2.24)$$

donde $a_n = f^{(n)}(r_h)/n!$, esta expansión la introducimos en la ecuación⁷ (2.11) y se resolverá orden por orden para $(r - r_h)^n$. Expandiendo hasta segundo orden se obtiene:

$$\begin{aligned} & + r_h - 2GM - 16\lambda G^2 \kappa_g^2 \left(2\kappa_g + \frac{3}{r_h} \right) + (r - r_h) \left(1 - 2\kappa_g r_h - \frac{48\lambda G^2 \kappa_g^2}{r_h^2} \right) + (r - r_h)^2 \left[-2\kappa_g - a_2 r_h \right. \\ & + \lambda \left(48G^2 \kappa_g \left(a_2^2 + \frac{\kappa_g(3 + 4\kappa_g r_h)}{r_h^3} \right) - a_2 \left(\frac{192G^2 \kappa_g^2}{r_h} + \frac{144G^2 \kappa_g}{r_h^2} \right) + a_3 \left(144G^2 \kappa_g^2 + \frac{144G^2 \kappa_g}{r_h} \right) \right] \\ & \left. + O((r - r_h)^3) = 0, \right] \quad (2.25) \end{aligned}$$

como se observa en la expresión (2.25), las dos primeras ecuaciones determinan el radio del horizonte r_h y la gravedad superficial κ_g como funciones de la masa:

$$r_h - 2GM - 16\lambda G^2 \kappa_g^2 \left(2\kappa_g + \frac{3}{r_h} \right) = 0, \quad (2.26)$$

$$1 - 2\kappa_g r_h - \frac{48\lambda G^2 \kappa_g^2}{r_h^2} = 0. \quad (2.27)$$

Es esencial enfatizar la precisión de las relaciones discutidas. La habilidad de derivar conexiones exactas entre la masa, el radio del horizonte y la gravedad superficial es notable y distingue a esta teoría de la gravedad de otras de orden superior. Estas relaciones establecen que, una vez fijados los valores de r_h y κ_g , se puede obtener una relación lineal entre los coeficientes a_2 y a_3 usando la tercera ecuación. Esta linealidad en a_3 simplifica su determinación como función de a_2 . De manera similar, la cuarta ecuación presenta una linealidad en a_4 , facilitando su cálculo en función

⁷ $r_0 = 2GM$, ver (Bardeen et al., 1973)

de los coeficientes anteriores. Generalizando este proceso⁸, el coeficiente a_n puede determinarse a partir de la n -ésima ecuación. Como resultado, emergen soluciones caracterizadas por un único parámetro libre, a_2 .

Respecto a los términos de orden superior, resulta que todos están determinados exclusivamente por el parámetro a_2 . Al elegir adecuadamente a_2 , es posible lograr que la solución se acerque asintóticamente a Minkowski. Esto implica que hay un parámetro que define la solución cerca del horizonte y otro que evita la presencia de un modo exponencial, lo cual es crucial para asegurar que la solución no tenga pelo.

Estas observaciones llevan a dos conclusiones clave. Primero, la teoría ECG admite soluciones de agujeros negros con horizontes regulares. Segundo, la condición de un horizonte regular limita las soluciones posibles a una familia con un único parámetro. Esto subraya la singularidad y las restricciones impuestas por la condición de horizonte regular en esta teoría específica.

Las expresiones (2.26) y (2.27), nos permiten determinar κ_g y r_h como funciones de la masa. Sin embargo, es más fácil obtener las relaciones⁸ $\kappa_g(r_h)$ y $M(r_h)$. Es decir:

$$\kappa_g = \frac{1}{r_h \left(1 + \sqrt{1 + 48G^2\lambda/r_h^4}\right)}, \quad (2.28)$$

$$\frac{2GM}{r_h} = 1 - \frac{16G^2\lambda}{r_h^4} \frac{\left(5 + 3\sqrt{1 + 48G^2\lambda/r_h^4}\right)}{\left(1 + \sqrt{1 + 48G^2\lambda/r_h^4}\right)^3}. \quad (2.29)$$

Si representamos gráficamente $M(r_h)$ y la comparamos con la solución de Schwarzschild, observamos diferencias significativas, como se detalla a continuación:

⁸Revisar el Apéndice D

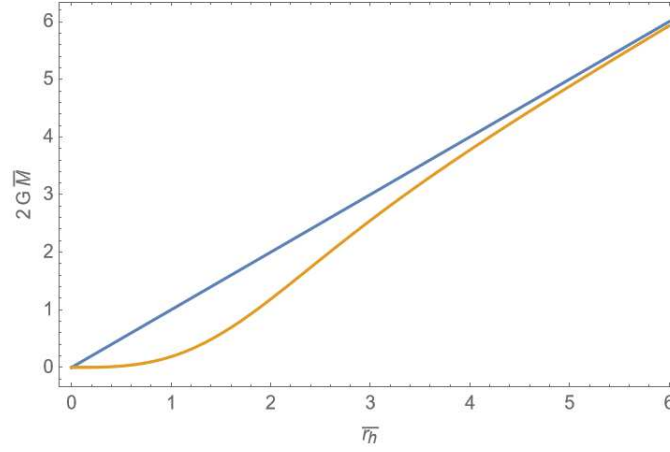


FIGURA 2.1: Representación de $2GM$ como función de r_h para la solución ECG (en amarillo) con $\lambda > 0$ y la solución de Schwarzschild estándar (en azul). Hemos introducido las definiciones $\bar{M} \equiv \frac{M}{(G2\lambda)^{1/3}}$ y $\bar{r}_h \equiv \frac{r_h}{(G2\lambda)^{1/3}}$ para una mayor claridad en la presentación de los resultados. Es importante notar que la gráfica en azul es aplicable para todos los valores de $\lambda > 0$.

Como se puede observar en la Figura 2.1, esta representación nos indica que para valores elevados de \bar{r}_h , las predicciones de la teoría ECG se vuelven indistinguibles de la solución de Schwarzschild, lo que resalta la motivación de investigar en teorías de gravedad con curvatura superior, las cuales podrían proporcionar una comprensión más profunda de la singularidad gravitatoria.

2.5. Fórmulas de recurrencia

Las fórmulas de recurrencia son una técnica matemática utilizada para generar una secuencia de números, funciones o elementos de un conjunto, donde cada elemento de la secuencia se define en términos de los elementos anteriores. Es una técnica común en matemáticas, física, informática y otras áreas.

En el caso de las teorías de gravedad generalizadas como las *GQTG's*, las fórmulas de recurrencia permiten construir teorías de gravedad con órdenes de curvatura más altas a partir de teorías de gravedad con órdenes de curvatura inferiores. Como se muestra en el trabajo de Bueno, Cano y Hennigar (2019) es posible construir teorías *Quasi-Topological* y *GQTG's* de órdenes de curvatura arbitrarias a partir

de relaciones recursivas simples que involucran densidades de órdenes inferiores del mismo tipo. Es decir, que se utilizan las fórmulas de recurrencia para generar las densidades de estas teorías. Cada término de la densidad se define en términos de los términos anteriores, utilizando una relación recursiva específica [véase más adelante Sección (2.5.1)].

Esto ha servido para completar la demostración general de que cualquier acción efectiva de curvatura superior, que involucre contracciones arbitrarias del tensor de Riemann y la métrica, se puede escribir en términos de una teoría *Generalized Quasi-Topological* (GQTG) mediante redefiniciones de la métrica (Bueno, Cano, Moreno & Murcia, 2019).

2.5.1. Fórmulas de Recurrencia

La ecuación (2.30) es la fórmula de recurrencia que forma parte del proceso de construcción de estas teorías. Estas relaciones recursivas permiten obtener las teorías GQTG's de órdenes de curvatura superiores a partir de las teorías de órdenes inferiores, lo que facilita el estudio de las propiedades y soluciones de estas teorías.

La fórmula de recurrencia⁹ dada por,

$$S_{(n+5)} = -\frac{3(n+3)S_{(1)}S_{(n+4)}}{4(D-1)(n+1)} + \frac{3(n+4)S_{(2)}S_{(n+3)}}{4(D-1)n} - \frac{(n+3)(n+4)S_{(3)}S_{(n+2)}}{4(D-1)n(n+1)} \quad (2.30)$$

está definida de tal manera que hace uso de las densidades semilla, es decir, las siguientes densidades definidas de la forma:

$$S_{(1)} = -R, \quad (2.31)$$

$$S_{(2)} = -\frac{D}{4(D-2)(D-3)} \left[R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} \right], \quad (2.32)$$

$$S_{(3)} = \frac{3DRR_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}}{4(D-1)(D-2)^2} - \frac{(D^2 + 8D - 8)R^3}{16(D-1)^2(D-2)^2} - \frac{3R^{\alpha\beta}R^{\gamma\delta}W_{\alpha\gamma\beta\delta}}{2(D-2)(D-3)} \\ - \frac{3DRW_{\alpha\beta\gamma\delta}W^{\alpha\beta\gamma\delta}}{16(D-1)(D-2)(D-3)} + \frac{(D-2)(2D-1)W_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}W_{\gamma\delta}^{\epsilon\lambda}W_{\epsilon\lambda}^{\alpha\beta}}{8(D-3)(D^3 - 9D^2 + 26D - 22)}, \quad (2.33)$$

⁹Revisar el Apéndice C para el cálculo de la verificación de la fórmula de recurrencia.

$$\begin{aligned}
S_{(4)} = & + \frac{3D}{8(D-1)^2(D-2)^2} R^2 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} \\
& - \frac{(D^2 + 20D - 20)}{64(D-1)^3(D-2)^2} R^4 - \frac{3}{2(D-1)(D-2)(D-3)} R R^{\alpha\beta} R^{\gamma\delta} W_{\alpha\beta\gamma\delta} \\
& - \frac{3(2D^5 - 17D^4 + 33D^3 + 16D^2 - 64D + 32)}{32(D-1)^2(D-2)(D-3)(2D^4 - 17D^3 + 49D^2 - 48D + 16)} R^2 W_{\alpha\beta\gamma\delta} W^{\alpha\beta\gamma\delta} \\
& - \frac{3D}{(D-3)(2D^4 - 17D^3 + 49D^2 - 48D + 16)} R R^{\alpha\beta} W_{\alpha}{}^{\gamma\delta\epsilon} W_{\beta\gamma\delta\epsilon} \\
& + \frac{3D^2}{4(D-3)(2D^4 - 17D^3 + 49D^2 - 48D + 16)} R^{\alpha\beta} R^{\gamma\delta} W_{\alpha\gamma}{}^{\epsilon\lambda} W_{\beta\delta\epsilon\lambda} \\
& + \frac{(D-2)(2D-1)}{8(D-1)(D-3)(D^3 - 9D^2 + 26D - 22)} R W_{\alpha\beta}{}^{\epsilon\lambda} W^{\alpha\beta\gamma\delta} W_{\gamma\delta\epsilon\lambda} \\
& + \frac{3D^2}{4(D-3)(2D^4 - 17D^3 + 49D^2 - 48D + 16)} R^{\gamma}{}_{\alpha} R^{\alpha\beta} W_{\beta}{}^{\delta\epsilon\lambda} W_{\gamma\delta\epsilon\lambda} \\
& - \frac{3(D-2)^2(3D-2)}{64(D-3)(D^5 - 14D^4 + 79D^3 - 224D^2 + 316D - 170)} W_{\alpha\beta}{}^{\epsilon\lambda} W_{\gamma\delta}{}^{\alpha\beta} W_{\chi\xi}{}^{\gamma\delta} W_{\epsilon\lambda}{}^{\chi\xi}, \tag{2.34}
\end{aligned}$$

donde $W_{\alpha\beta\gamma\delta}$ es el tensor de Weyl. Por ejemplo si deseamos obtener $S_{(5)}$, lo que debemos hacer es que en en (2.30) se considera $n = 0$, observando que estará en términos de $S_{(1)}$, $S_{(2)}$, $S_{(3)}$ y $S_{(4)}$, siendo esta una expresión covariante. $S_{(5)}$ además es una expresión tensorial, que va a ser lagrangiano escrito en términos de tensores de Riemann de orden 5, esto es porque se obtiene a base de multiplicar densidades de órdenes más bajos. La expresión (2.30) vale a cualquier orden.

Esto demuestra que existen a todos los órdenes, debido a que si se pudo obtener hasta orden cinco, (2.30) podemos aplicarlo de manera recursiva para cualquier orden, es decir, se está sugiriendo que es posible construir densidades de curvatura de orden arbitrariamente alto mediante la aplicación iterativa de la ecuación (2.30). Además, se puede afirmar que tales densidades construidas de esta manera pertenecerán automáticamente a la clase *GQTG* y que la existencia de esta relación recursiva demuestra la existencia de estas densidades *GQTG* en todos los órdenes de curvatura.

Demostración: Para demostrar esto es conveniente reescribir el tensor de Riemann para la métrica de la forma (1.29) como:

$$R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} |_f = 2 \left[-A + T_{[\beta}^{[\alpha} T_{\delta]}^{\gamma]} + 2B T_{[\gamma}^{[\alpha} \sigma_{\delta]}^{\beta]} + \psi \sigma_{[\gamma}^{[\alpha} \sigma_{\delta]}^{\beta]} \right], \tag{2.35}$$

donde T_a^b , son los proyectores en las direcciones (t, r) y σ_a^b , son los proyectores en las direcciones angulares. Además se definen las funciones A , B y ψ como:

$$A \equiv \frac{f''(r)}{2}, \quad B \equiv -\frac{f'(r)}{2r}, \quad \psi \equiv \frac{\kappa - f(r)}{r^2}. \quad (2.36)$$

Las densidades GQTG's al ser evaluadas on shell deben tomar la forma de:

$$r^{D-2} \mathcal{S}_{(n)}|_f = \frac{d}{dr} \left[2(n-2)r^{D-1} \left(B + \frac{(D-4)}{4}\psi \right)^{n-1} \left(B - \frac{(D-4+2n)}{2(n-2)}\psi \right) \right]. \quad (2.37)$$

O expandiendo la ecuación (2.37) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(n)}|_f = & + \frac{1}{2} \left[(n-1) \left((D-4)\psi - (D-6)B + 2A \right) \left((D-4+2n)\psi - 2(n-2)B \right) \right. \\ & - 2 \left(B + \frac{(D-4)}{4}\psi \right) \left((D-3)(D-4+2n)\psi \right. \\ & \left. \left. + \left((6-2n)D + 8(n-2) \right) B + 2(n-2)A \right) \right] \left(B + \frac{(D-4)}{4}\psi \right)^{n-2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ahora, para poder demostrar que (2.30) construye densidades GQTG's, esto para un n arbitrario, lo que se debe de hacer es:

- A partir de (2.38) escribir las densidades para $\mathcal{S}_{(1)}|_f$, $\mathcal{S}_{(n+4)}|_f$, $\mathcal{S}_{(2)}|_f$, $\mathcal{S}_{(n+3)}|_f$, $\mathcal{S}_{(3)}|_f$, $\mathcal{S}_{(n+2)}|_f$ y $\mathcal{S}_{(n+2)}|_f$.
- Evaluar estas densidades en el lado derecho de (2.30)

Evaluar estas densidades en el lado izquierdo de (2.30), es decir:

$$-\frac{3(n+3)\mathcal{S}_{(1)}|_f \mathcal{S}_{(n+4)}|_f}{4(D-1)(n+1)} + \frac{3(n+4)\mathcal{S}_{(2)}|_f \mathcal{S}_{(n+3)}|_f}{4(D-1)n} - \frac{(n+3)(n+4)\mathcal{S}_{(3)}|_f \mathcal{S}_{(n+2)}|_f}{4(D-1)n(n+1)}. \quad (2.39)$$

Al hacer los productos correspondientes de las densidades mencionadas, y realizar la suma de estos valores, obtendremos precisamente que el resultado de esto que toma la forma de una única densidad de orden $(n+5)$, dando así esta densidad de la forma (2.38) para $\mathcal{S}_{(n+5)}|_f$, siendo esta la forma que debe de tomar una densidad GQTG's. Lo que demuestra que (2.30) es válida y construye las densidades GQTG's de órdenes arbitrarios a partir de las densidades de orden inferior.

ESTABILIDAD DE AGUJEROS NEGROS EN CUATRO DIMENSIONES

3.1. Introducción

Un estudio sobre la estabilidad de los agujeros negros en cuatro dimensiones muestra que la adición de términos de curvatura superior a la acción gravitatoria de Einstein-Hilbert puede estabilizar los agujeros negros por debajo de cierta masa. Estos nuevos agujeros negros tienen un comportamiento termodinámico universal para valores generales de los acoplamientos de orden superior. Además, estos nuevos agujeros negros pueden tener una entropía enorme y una vida infinita, lo que cambia completamente el proceso de evaporación. También se discute cómo estos nuevos agujeros negros afectan la teoría de la relatividad general y se proporcionan ecuaciones detalladas para las propiedades termodinámicas de estos nuevos agujeros negros. Así, se presenta una nueva familia de gravedades de orden superior que admiten generalizaciones no peludas, estáticas y esféricamente simétricas del agujero negro de Schwarzschild, y que tienen propiedades termodinámicas universales y un comportamiento completamente diferente al de los agujeros negros de Schwarzschild (Bueno & Cano, 2017a).

3.2. Estabilidad universal de agujeros negros en cuatro dimensiones

3.2.1. Agujeros Negros de Orden Superior

Como se mostró en capítulos anteriores,¹ podemos trabajar con el Ansatz (1.27), pero para este caso se considerará $D = 4$, debido a que trabajaremos en 4 dimensiones.

Así mismo, podemos definir el lagrangiano de la familia de gravedades de orden superior, que admiten extensiones simples de la solución de Schwarzschild y cuyas propiedades termodinámicas son de fácil acceso.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} \left[R + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\lambda_n}{M_c^{2(n-1)}} \mathcal{R}_{(n)} \right], \quad (3.1)$$

donde se considera que M_c es alguna nueva escala de energía, además los λ_n son acoplamientos sin dimensión y n es el orden de la curvatura para cada $\mathcal{R}_{(n)}$ ² invariante, estos, como se vió en capítulos anteriores, están formados por las contracciones de la métrica y el tensor de Riemann, en este caso no sus derivadas covariantes.

Una vez definido el Lagrangiano, podemos evaluar el ansatz mencionado anteriormente en este y así obtener la siguiente expresión:

$$2GM - (1-f)r = - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\lambda_n}{M_c^{2(n-1)}} \left(\frac{f'}{r} \right)^{n-3} \left[\frac{f'^3}{n} + \frac{(n-3)f+2}{(n-1)r} f'^2 - \frac{2}{r^2} f(f-1)f' - \frac{1}{r} f f'' (f'r - 2(f-1)) \right]. \quad (3.2)$$

Se puede aproximar a una solución analítica en el Horizonte y comprobar el comportamiento asintótico [véase la Sección (2.4.2)]; debido a esto se plantea una solución numérica que permitirá analizar el comportamiento de los agujeros negros cuando se aplica la corrección a la acción de Hilbert-Einstein.

¹véase la Sección (1.2.2)

²véase en el Capítulo 1 cómo se obtienen estos $\mathcal{R}_{(n)}$.

Además se pueden obtener las siguientes relaciones a partir de utilizar la expresión (2.24), considerando $2k_g = 4\pi T$, siendo T la temperatura del agujero negro. Entonces, reemplazando esta expresión en (3.2) para los dos primeros órdenes en $(r - r_h)$, se obtienen las siguientes relaciones:

$$2GM = r_h - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\lambda_n (4\pi T)^{n-1}}{M_c^{2(n-1)} r_h^{n-1}} \frac{(2n + (n-1)4\pi T r_h)}{n(n-1)}, \quad (3.3)$$

$$1 = 4\pi T r_h + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\lambda_n (4\pi T)^{n-1}}{M_c^{2(n-1)} r_h^{n-3}} \frac{(2n + (n-1)4\pi T r_h)}{n(n-1)}. \quad (3.4)$$

Después de este análisis se observa que cambiando los valores de λ_n , no modifica cualitativamente estas curvas; esto significa que al cambiar los valores de estos parámetros, las curvas no cambian en su forma o características generales. En otras palabras, aunque los valores numéricos de las curvas pueden cambiar, su apariencia y comportamiento general permanecen iguales.

3.2.2. Termodinámica de Agujeros Negros

En teorías de gravedad con acoplamientos de orden superior, los agujeros negros muestran un comportamiento termodinámico que se distingue de los agujeros negros de Schwarzschild. Al aplicar la fórmula de Wald para calcular la entropía de estas soluciones, se verifica que cumplen con la primera ley de la termodinámica, que relaciona el cambio en la masa del agujero negro (dM) con su temperatura (T) y el cambio en su entropía (dS) a través de la ecuación $dM = TdS$.

En contraste con los agujeros negros de Schwarzschild, estas soluciones presentan un máximo en la temperatura para un valor específico de masa (M_{max}). Cuando la masa de un agujero negro es mayor que M_{max} , su comportamiento es similar al de un agujero negro de Schwarzschild. Sin embargo, para masas menores a M_{max} , el calor específico de las soluciones es positivo, lo que implica que los agujeros negros pequeños se comportan como sistemas termodinámicos convencionales, enfriándose a medida que emiten radiación y tendiendo a alcanzar el equilibrio en presencia de un entorno térmico.

Este comportamiento termodinámico se observa tan pronto como al menos uno de los acoplamientos de orden superior es distinto de cero, y no se modifica cualitativamente al encender acoplamientos adicionales. Todos los agujeros negros posibles con diferentes valores de $\lambda_n (\geq 0)$, excepto el agujero negro de Schwarzschild, pertenecen a la misma clase de universalidad.

Cuando la masa de un agujero negro es mucho menor que M_{max} ($M \ll M_{max}$), las expresiones para el radio del horizonte (r_h) en función de la masa coinciden con las de una teoría conforme de campos (CFT; del inglés, *Conformal field Theory*) tridimensional a temperatura finita, si se identifica la masa M con la densidad de energía de la CFT. En este régimen, la relación $M = \frac{2}{3}TS$ es válida para cualquier valor de λ_n , siempre que al menos uno sea distinto de cero. Este resultado coincide con lo encontrado en agujeros negros planares asintóticamente Anti-de Sitter (AdS). Esta relación termodinámica difiere de la relación análoga en agujeros negros de Schwarzschild, que es $M = 2TS$. La relación de Schwarzschild también es válida para valores generales de λ_n cuando $M \gg M_{max}$ (véase Figura 3.1).

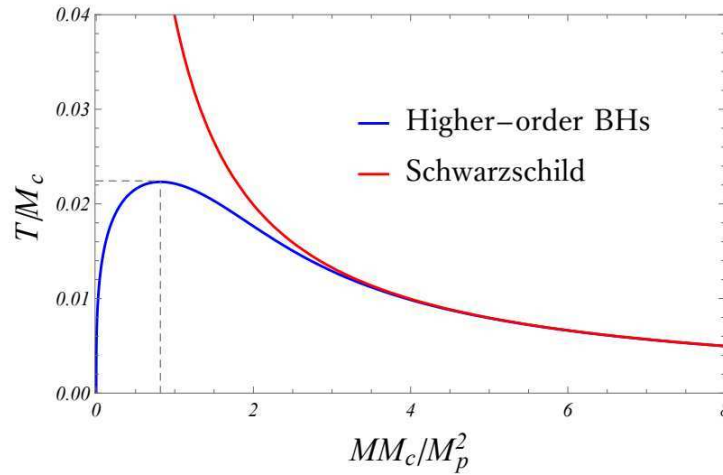


FIGURA 3.1: Temperatura del agujero negro en función de la masa para la solución de Schwarzschild (rojo) y para los agujeros negros de orden superior con $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 1, \lambda_n > 6 = 0$ (se debe tener en cuenta que la línea azul es válida para cualquier M_c). Los agujeros negros de orden superior se vuelven estables por debajo de $M_{max} \sim M_p^2/M_c$. La forma de esta curva es cualitativamente la misma para cualquier otra elección de acoplamientos (excepto $\lambda_n = 0$ para todos los n). Adaptado de “Universal Black Hole Stability in Four Dimensions” por Bueno y Cano (2017a).

3.2.3. Evaporación de los agujeros Negros

Se puede analizar cómo el proceso de evaporación de agujeros negros se ve afectado por el comportamiento termodinámico especial de las nuevas soluciones en el régimen de masa pequeña. La tasa de pérdida de masa de un agujero negro en el vacío se puede calcular utilizando la ley de Stefan-Boltzmann

$$\frac{dM(t)}{dt} = -4\pi r_h^2 \sigma \cdot T^4, \quad (3.5)$$

con $\sigma = \pi^2/60$. Integrando esta expresión para $M \ll M_{max}$, se obtiene

$$M(t) = \frac{M_0}{(1 + t/t_{1/2})}, \quad (3.6)$$

donde $t_{1/2}$ es la vida media del agujero negro.

Se observa que se requiere un tiempo infinito para que los agujeros negros se evaporen por completo. La vida media es enorme siempre que M_c sea mucho menor que M_P . Para que la física de los agujeros negros macroscópicos no se vea afectada por los nuevos acoplamientos, se puede elegir M_c alrededor de $10^{-9}eV$.

La descripción semiclásica es válida cuando el radio del horizonte es mucho mayor que la longitud de onda de Compton correspondiente ($r_h \gg \lambda_{Compton}$), y la descripción termodinámica es válida cuando $S \gg 1$. Un agujero negro de Schwarzschild alcanza la masa de Planck en un tiempo $\Delta t \sim M_0^3/M_P^4$, después del cual ambas condiciones se violan. Sin embargo, en los nuevos agujeros negros, la condición sobre la entropía nunca se viola si $M_c \ll M_P$.

Al comparar cuantitativamente con el caso de Schwarzschild, se muestra que los nuevos agujeros negros pequeños tienen una vida mucho más larga o incluso infinita para todos los propósitos prácticos, en contraste con los agujeros negros de Schwarzschild. Además, todos los agujeros negros, grandes o pequeños, que pertenecen a la nueva familia tienen vidas útiles infinitas. En el caso de agujeros negros con $M_0 > M_{max}$, el proceso de evaporación sería similar al de Schwarzschild hasta que la masa restante sea menor que M_{max} . A partir de ese momento, la discusión en

esta sección comenzaría a aplicarse.

Estos resultados sugieren que el proceso de evaporación de agujeros negros puede verse drásticamente modificado en escalas en las que las correcciones a la relatividad general se vuelven importantes.

INFLACIÓN GEOMÉTRICA

4.1. Introducción

En el campo de la cosmología teórica, una perspectiva interesante ha surgido respecto a cómo las correcciones de alta curvatura en la gravedad podrían influir en la evolución temprana del universo. Según esta visión, modificando la acción de Einstein-Hilbert, que es la base de la teoría de la relatividad general, para incluir una serie de términos de alta curvatura, se puede capturar efectos de alta energía que no están presentes en la teoría estándar. Estas correcciones geométricas, derivadas de las contracciones del tensor métrico y el tensor de Riemann, llevan a una generalización de las ecuaciones de Friedman (1922). Tradicionalmente, estas ecuaciones describen cómo el factor de escala del universo, $a(t)$, evoluciona con el tiempo bajo la influencia de la gravedad. Sin embargo, al introducir las correcciones de alta curvatura, las ecuaciones resultantes se convierten en un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden que ofrecen una nueva perspectiva sobre la expansión o contracción del universo. Dentro de este marco, se han explorado modelos específicos, que sugieren una era inflacionaria en el universo temprano como resultado directo de estas correcciones. Estos modelos propuestos por Arciniega, Bueno et al. (2020), conocidos como “GeomInf 1” y “GeomInf 2”, indican que el tradicional Big Bang, propuesto por Lemaître (1927), dominado por la radiación podría ser reemplazado por un período de crecimiento exponencial del factor de escala. Es decir,

en lugar de un inicio con un Big Bang, el universo podría haber experimentado una fase de inflación geométrica, que eventualmente se enlaza con la fase de materia oscura fría observada en épocas más tardías del universo. Lo más notable de esta inflación geométrica es que surge de manera natural a partir de la propia estructura geométrica del espacio-tiempo, sin la necesidad de introducir campos escalares adicionales, que son una característica común en muchos modelos de inflación convencionales. Esta nueva aproximación no solo ofrece una interpretación alternativa de la inflación y la aceleración tardía del universo, sino que también establece una base para futuras investigaciones. Por ejemplo, el análisis de perturbaciones cosmológicas dentro de este marco podría proporcionar comparaciones valiosas con los datos observacionales actuales, desafiando y posiblemente enriqueciendo nuestra comprensión de la cosmología temprana y la expansión del universo.

4.2. Inflación Geométrica

La acción con la que se trabaja en esta teoría está dada por:

$$S = \int \frac{d^4x \sqrt{g}}{16\pi G} \left\{ -2\Lambda + R + \sum_{n=3}^{\infty} \lambda_n L^{2n-2} R_{(n)} \right\}. \quad (4.1)$$

Aquí en esta acción se introducen acoplamientos sin dimensión λ_n , así como también, una nueva escala de energía $\sim L^{-1}$.

Los $R_{(n)}$ son *GQTG's* que además satisfacen ciertas propiedades deseables, como tener ecuaciones linealizadas de segundo orden, admitir generalizaciones de agujeros negros de Schwarzschild(-AdS) y tener un problema de valor inicial bien planteado en el contexto cosmológico.

- i. Alrededor de cualquier fondo con simetría máxima, la teoría posee ecuaciones linealizadas de segundo orden. Esto quiere decir que cuando se estudian pequeñas perturbaciones alrededor de un espacio-tiempo simétrico, las ecuaciones que describen estas perturbaciones son de segundo orden en sus derivadas.

- ii. La teoría admite generalizaciones sin pelo (non-hairy) del agujero negro de Schwarzschild(-AdS) y, más en general, de las soluciones de Taub-NUT/bolt en gravedad de Einstein. Estas generalizaciones están caracterizadas por una única función, $g_{tt}g_{rr} = -1$, y sus propiedades termodinámicas pueden ser analizadas de manera completamente analítica.
- iii. La teoría posee un problema de valor inicial bien planteado en el contexto cosmológico. Es decir, admite soluciones cosmológicas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que son las soluciones más comunes utilizadas para describir la evolución del universo en la teoría de la relatividad general.

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (4.2)$$

donde las ecuaciones generalizadas de Friedmann asociadas al factor de escala $a(t)$ son de segundo orden.

Esta teoría gravitacional en cuatro dimensiones cuenta propiedades notables, como la capacidad de generalizar agujeros negros de Schwarzschild y admitir soluciones cosmológicas de FLRW (Robertson, 1935). Estas teorías están relacionadas con teorías de dimensiones superiores y han sido estudiadas en diversos grados de complejidad y orden de curvatura. La representación cúbica en la teoría gravitacional involucra una combinación lineal de la densidad de *Einsteinian Cubic Gravity* (2.7) con:

$$\mathcal{C} = R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu}{}_{\delta} R^{\nu\delta} - \frac{1}{4} R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} R - 2R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\mu} R^{\beta\nu} + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} R. \quad (4.3)$$

Lo cual es trivial cuando se evalúa sobre un ansatz estática y esféricamente simétrica. Quedando la combinación exacta:

$$\mathcal{R}_{(3)} \propto \mathcal{P} - 8\mathcal{C}, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{R}_{(3)} = \frac{3}{16} \left[R^3 - 4Q_1 R - Q_2 R - \frac{16}{3} C_1 - 2C_2 + 8C_3 \right] = \frac{1}{8} (\mathcal{P} - \mathcal{V}\mathcal{C}) - \frac{1}{16} \chi_6 + \mathcal{T}_3, \quad (4.5)$$

donde \mathcal{P} es la densidad correspondiente a Einsteinian cubic gravity, \mathcal{C} es una densidad definida por (Hennigar et al., 2017), χ_6 es la densidad de Euler de 6-dimensional,

y \mathcal{T}_3 es el término definido anteriormente en la ecuación (1) en (Arciniega, Edelstein & Jaime, 2020), como se mostró en capítulos anteriores, estos dos últimos términos desaparecen idénticamente para métricas en cuatro dimensiones. En el caso de curvaturas de orden superior, las invariantes son, por supuesto, más complicadas. Para observar las formas explícitas revisar el apéndice A del trabajo de (Arciniega, Bueno et al., 2020).

4.3. Ecuaciones de Friedmann generalizadas.

Evaluando sobre un ansatz FLRW de la forma (4.2), siendo este un universo que es homogéneo e isotrópico, las ecuaciones no lineales completas de (4.1), se reducen a un par de ecuaciones diferenciales de segundo orden para el factor de escala, dado que el factor de escala es básicamente una medida de cómo el tamaño del universo cambia con el tiempo. Si se considera además la métrica de un espacio plano, $k = 0$, se obtienen las ecuaciones generalizadas de Friedmann:

$$3F(H) = 8\pi G\rho + \lambda , \quad (4.6)$$

$$-\frac{\dot{H}}{H}F'(H) = 8\pi G(\rho + P) , \quad (4.7)$$

donde:

$$F(H) \equiv H^2 + L^{-2} \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \lambda_n (LH)^{2n} . \quad (4.8)$$

Para esto consideraremos el parámetro usual de Hubble $H \equiv \dot{a}/a$, siendo este la medida de la tasa a la que el universo se está expandiendo, además ρ es la densidad y P es la presión de un fluido perfecto, esto nos permite describir de manera idealizada la materia y la energía del universo. Una vez más si nosotros fijamos el conjunto de todos los acoplamientos de curvatura superior a cero, tanto (4.6) como (4.7) se reducen a la versión usual de la gravedad de Einstein. Además, al usar ambas ecuaciones se puede obtener la ecuación de conservación.

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H(P + \rho) = 0 . \quad (4.9)$$

4.4. Modelos Específicos

En este lagrangiano con el que se está trabajando, los acoplamientos gravitacionales λ_n son parámetros libres. Esto permite o da pie a un gran rango de posibles modelos con sus propias peculiaridades. Bajo esto se necesita restringir ese gran rango imponiendo o requiriendo agujeros negros de masa positiva, esto permite arreglar el signo del primer acoplamiento que no desaparece, esto se podría hacer $\lambda_3 > 0$, también es conveniente elegir $F(H)$ como una función biyectiva. Al trabajar de esta manera se logra evitar situaciones inusuales, como la ausencia de soluciones para densidades de energía suficientemente altas o la aparición de singularidades en puntos en los que $F(H)$ alcanza un extremo. El imponer que todos los acoplamientos de orden par sean positivo y que los acoplamientos de orden impar sean cero, es la forma más sencilla de satisfacer estos requisitos. Es decir:

$$\lambda_{2k+1} = 0, \quad \lambda_{2k} > 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+. \quad (4.10)$$

Cabe resaltar que los impares pueden incluirse de manera segura si son negativas, excepto para λ_3 , o también podrían elegirse positivas pero suficientemente pequeñas. Así como en la Sección (1.2.2), se pueden elegir los valores relativos de los diferentes acoplamientos. Para observarlo de mejor manera, se considerarán dos modelos [véase en la Figura 4.1 y la Figura 4.2] que se pueden comparar con el estándar ΛCDM ¹:

$$\text{Modelo GeomInf 1 :} \quad \lambda_{2k+1} = 0, \quad \lambda_{4+2k} = \frac{\lambda}{4!}, \quad k \in \mathbb{Z}^+. \quad (4.11)$$

¹ ΛCDM ; del inglés, Lambda Cold Dark Matter

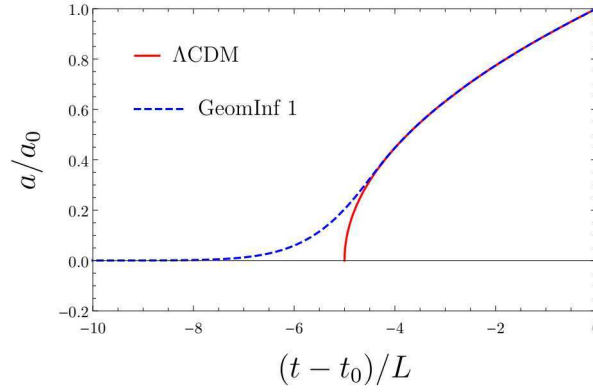


FIGURA 4.1: En figura se compara el modelo estándar Λ CDM y Modelo *GeomInf 1*. El factor de escala $a(t)$ está en función del tiempo t , además el factor de escala a se normaliza por a_0 , que es su valor en un tiempo posterior t_0 , cuando las correcciones de alta curvatura se vuelven insignificantes. El modelo Λ CDM predice una singularidad de Big Bang en $t - t_0 = -5L$, pero el Modelo *GeomInf 1* con correcciones de curvatura superior nunca alcanza el valor $a = 0$, sino que se aproxima asintóticamente a cero a medida que t tiende a menos infinito. Adaptado de “*Geometric Inflation*” por Arciniega, Bueno et al. (2020)

$$\text{Modelo GeomInf 2 : } \quad \lambda_3 > 0, \quad \lambda_{n \geq 4} = \frac{(-1)^n \lambda_3}{(n-4)!}. \quad (4.12)$$

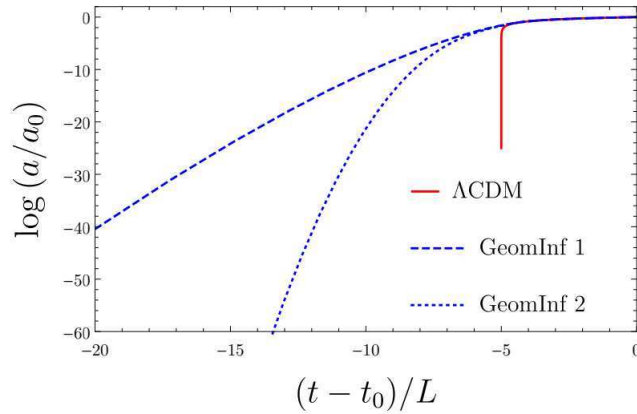


FIGURA 4.2: Se muestra $\log(a/a_0)$ en función de $(t - t_0)/L$. En los modelos de inflación geométrica, el Big Bang es reemplazado por un periodo de crecimiento exponencial, el cual se hace evidente. Adaptado de “*Geometric Inflation*” por Arciniega, Bueno et al. (2020)

Asimismo para los modelos anteriores se encuentra $F(H)$. Para el Modelo *GeomInf 1*, se tiene:

$$F(H) = H^2 + \lambda_4 H^8 L^6 e^{(HL)^4}, \quad (4.13)$$

y para el Modelo GeomInf 2:

$$F(H) = H^2 + \lambda_2 L^4 H^6 \left[1 - (HL)^2 e^{(HL)^2} \right]. \quad (4.14)$$

4.5. Cosmología del universo temprano.

Si consideramos valores pequeños para el factor de escala, se observa que la radiación domina sobre la materia y la energía oscura. En este régimen, el universo escala como $a(t) \sim t^{1/2}$, lo que predice una aceleración negativa (o desaceleración) $\ddot{a}/a \sim -1/(4t^2)$, siendo esto problemático desde la perspectiva de la inflación cósmica, que postula que el universo temprano experimentó una rápida expansión, pero al introducir términos de orden superior en las ecuaciones cosmológicas, este comportamiento cambia significativamente; impacta la aceleración predicha de la expansión del universo.

$$a(t) \sim t^{n_{max}/2} \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow 0. \quad (4.15)$$

Esto se reduce al resultado en la gravedad de Einstein para $n_{max} = 1$. La introducción crucial de términos de curvatura superior cambia el signo de la aceleración del factor de escala haciéndola positiva, es decir:

$$\ddot{a}(t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_{max} > 2. \quad (4.16)$$

Asimismo, cuando se incluye la torre completa de términos de curvatura superior, el factor de escala crecerá más rápido que cualquier polinomio cerca de $a = 0$. Por lo tanto, la expansión será al menos exponencial. Esto se puede verificar en los dos modelos planteados anteriormente, en particular, cuando $t \rightarrow -\infty$ se encuentra que:

Modelo 1:

$$a(t) \sim e^{-\left(\frac{-3t}{L}\right)^{4/3}}, \quad (4.17)$$

Modelo 2:

$$a(t) \sim e^{-(t^2/L^2)}. \quad (4.18)$$

Un detalle importante a resaltar y destacar es que gracias a trabajar con estos modelos podemos entender que no hay un “inicio” claro para el universo, es decir no existe un $t = 0$ donde comience el universo. En lugar de ello, el comienzo del universo solo se aproxima asintóticamente a medida que $t \rightarrow -\infty$, lo que significa que el universo se extiende infinitamente hacia el pasado.

4.6. Comparación entre Inflación Geométrica y Λ CDM

Al analizar estos modelos y compararlos con el modelo Λ CDM el cual muestra una expansión que parte de una singularidad conocida como el Big Bang. En cambio, el Modelo de Inflación Geométrica, definido matemáticamente en la ecuación (4.11) y que incorpora correcciones de mayor curvatura, sugiere que el universo nunca partió de una singularidad, sino que se aproximó a ella asintóticamente. Estas correcciones buscan abordar ciertos problemas asociados con la singularidad del Big Bang en la cosmología tradicional. Ambos modelos, aunque diferentes en sus predicciones para el universo temprano, convergen en sus predicciones para el universo más reciente, lo que demuestra la complejidad y diversidad de las teorías cosmológicas. Es a través de este tipo de comparaciones y estudios que la ciencia avanza, refinando constantemente nuestra comprensión del vasto y misterioso universo en el que residimos.

CONCLUSIONES

El presente trabajo de investigación ha representado una incursión profunda y rigurosa en el estudio de las *Generalized Quasi-Topological Gravities (GQTG's)*, un área emergente y desafiante en la física teórica. Los objetivos planteados al inicio de esta investigación se han cumplido satisfactoriamente. A continuación, se presentan las conclusiones que sintetizan los resultados de esta investigación.

Cumplimiento de Objetivos Generales

- Se realizó una revisión exhaustiva de la literatura en *GQTG's*, abarcando los fundamentos teóricos, propiedades y aplicaciones en el estudio de agujeros negros y evolución cosmológica, lo cual ha permitido establecer un marco actualizado en este campo emergente.
- Se identificaron áreas de investigación y cuestiones abiertas en *GQTG's*, como lo son los modelos inflacionarios y la estabilidad de agujeros negros, ofreciendo una visión clara de las limitaciones actuales y delineando caminos prometedores para indagaciones futuras, lo que servirá de guía para próximos trabajos en esta área.

Cumplimiento de Objetivos Específicos

- Se analizaron las subclases de *GQTG's* y su conexión con otras teorías de gravedad, proporcionando una síntesis de resultados clave que resalta la complementariedad y el contraste con teorías de curvatura superior como la gravedad

de Lovelock y las teorías $f(R)$.

- Se presentaron y evaluaron soluciones de agujeros negros esféricamente simétricos, enriqueciendo el catálogo de soluciones conocidas y ofreciendo nuevos insights para la interpretación de observaciones astronómicas y experimentales, así como el desarrollo detallado de los cálculos necesarios para entender tanto el comportamiento asintótico como cerca del horizonte para la teoría *Einsteinian Cubic Gravity*.
- Se examinaron las fórmulas de recurrencia y las propiedades estructurales generales de las *GQTG's*, demostrando cómo estos resultados pueden simplificar y proporcionar nuevas perspectivas en el cálculo de soluciones complejas en estas teorías, como el proporcionar un código que permite verificar su validez.
- Se discutieron los avances en el análisis de la estabilidad de agujeros negros en cuatro dimensiones, destacando la relevancia de la estabilidad termodinámica y la relación con la evaporación de agujeros negros, aportando claridad a este aspecto crucial de la física de agujeros negros.
- Se examinaron los modelos alternativos al Modelo Λ CDM, "*GeomInf 1*" y "*GeomInf 2*". Estos modelos destacan en la nueva información que proporcionan al trabajar con modificaciones de curvatura superior, lo mismo que en cómo el factor de escala es afectado. Se observa, particularmente en estos modelos, la idea de que no hay una singularidad, sino que se acerca asintóticamente a ella, dando así más información que el modelo cosmológico actual.

Contribuciones Adicionales

La integración Python ha resultado favorable para los cálculos extensos, permitiendo una comprensión más profunda de los procesos matemáticos implicados y ofreciendo una herramienta que permite comprobar los resultados de la literatura existente, así como se obtuvieron los coeficientes del análisis de la solución cerca del horizonte, dando así una forma de comprobar lo que se explicaba de la importancia

del coeficiente a_2 , observando que todos los a_n son funciones de a_2 , esto se observa de manera concreta en los *outputs* del código en mención. También, como ya se mencionó, el permitir comprobar la veracidad de la fórmula de recurrencia.

Los apéndices de este trabajo de investigación no solo facilitan la reproducción de los cálculos realizados, sino que también sirven como material de referencia valioso para futuras investigaciones, permitiendo a otros investigadores construir sobre la base sólida establecida por este trabajo.

Perspectivas Futuras

Las *Generalized Quasi-Topological Gravities* presentan un campo muy interesante para la exploración continua. Este trabajo de investigación sienta las bases para futuros estudios que pueden expandir el entendimiento de las implicaciones cosmológicas de estas teorías y su potencial para resolver enigmas en la física fundamental. Se espera que los métodos y análisis presentados aquí inspiren y faciliten dichos avances. Asimismo, las **nuevas investigaciones**, se pueden basar en el análisis proporcionado en los capítulos 3 y 4, ya que son áreas de interés en la investigación y entendimiento de nuestro universo. Además, se pueden destacar las áreas de investigación futura prometedoras derivadas del estudio de las *Generalized Quasi-Topological Gravities*, subrayando su potencial para avanzar en la física teórica a través de tres direcciones principales:

1. **Implicaciones Cosmológicas:** Se destaca la importancia de desarrollar y profundizar en modelos que incorporen las *GQTG's* en consonancia con las observaciones astronómicas actuales. Esto no solo promete avanzar en nuestra comprensión del universo temprano y la naturaleza de la energía oscura, sino que también abre la posibilidad de predecir y explicar fenómenos cosmológicos aún no observados.
2. **Unificación de Fuerzas:** La estructura matemática de las *GQTG's*, como se ha discutido en este trabajo, sugiere un camino intrigante hacia la exploración de nuevas geometrías del espacio-tiempo, que podrían ser clave en la búsqueda

de una teoría unificada de las fuerzas fundamentales. Investigaciones futuras en este ámbito podrían descubrir las conexiones subyacentes entre la relatividad general, la mecánica cuántica, y potencialmente otras teorías fundamentales.

3. **Física de Agujeros Negros:** El análisis detallado realizado en este trabajo sobre las soluciones de agujeros negros y sus propiedades dentro de las *GQTG*'s establece un punto de partida sólido para exploraciones más profundas en la física de agujeros negros. Esto incluye la termodinámica, la radiación de Hawking, y la posible solución a problemas como la paradoja de la información de los agujeros negros.

La investigación en estos campos no solo promete avanzar en la teoría, sino también en nuestra comprensión del cosmos, marcando potencialmente el camino hacia descubrimientos revolucionarios en física teórica.

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA DE AGUJEROS NEGROS

A.1. Primera Ley para un Agujero negro de Kerr

Consideremos un agujero negro de Kerr de masa M , carga Q y momento angular \vec{L} . Además su área racionalizada está dada por:

$$\begin{aligned}\alpha &= r_+^2 + a^2 \\ &= 2Mr_+ - Q^2 .\end{aligned}\tag{A.1}$$

Considerando que:

$$\vec{a} = \vec{L}/M ,\tag{A.2}$$

$$r_{\pm} = M \pm (M^2 - Q^2 - a^2)^{1/2} ,\tag{A.3}$$

donde r_+ es el horizonte de eventos y r_- es el horizonte de Cauchy.

Para lograr obtener una expresión para dM , lo primero que haremos será diferenciar (A.1), es decir:

$$d\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial M}dM + \frac{\partial\alpha}{\partial \vec{L}}d\vec{L} + \frac{\partial\alpha}{\partial Q}dQ. \quad (\text{A.4})$$

Despejando dM , tenemos la siguiente expresión:

$$dM = \Theta d\alpha + \vec{\Omega} \cdot d\vec{L} + \Phi dQ, \quad (\text{A.5})$$

donde:

$$\Theta = \frac{1}{\frac{\partial\alpha}{\partial M}} = \frac{\sqrt{-\frac{L^2}{M^2} + M^2 - Q^2}}{4M \left(\sqrt{-\frac{L^2}{M^2} + M^2 - Q^2} + M \right) - 2Q^2}, \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{\frac{\partial\alpha}{\partial M}} \frac{\partial\alpha}{\partial \vec{L}} = \frac{2\vec{L}}{M \left(4M \left(\sqrt{-\frac{L^2}{M^2} + M^2 - Q^2} + M \right) - 2Q^2 \right)}, \quad (\text{A.7})$$

$$\Phi = \frac{1}{\frac{\partial\alpha}{\partial M}} \frac{\partial\alpha}{\partial Q} = \frac{MQ^3 \left(M - \sqrt{-\frac{L^2}{M^2} + M^2 - Q^2} \right) + 2L^2Q}{M(4L^2 + Q^4)}, \quad (\text{A.8})$$

Las expresiones anteriores se pueden reescribir como:

$$\Theta = \frac{1}{4} \frac{(r_+ - r_-)}{\alpha}, \quad (\text{A.9})$$

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{a}}{\alpha}, \quad (\text{A.10})$$

$$\Phi = \frac{Qr_+}{\alpha}. \quad (\text{A.11})$$

APLICACIÓN DEL MÉTODO PARA IDENTIFICAR GRAVEDADES DE DERIVADA SUPERIOR

En el trabajo realizado por Bueno y Cano (2017b), se propone un método muy simple y eficiente para identificar las teorías de gravedad de curvatura superior con soluciones simples de agujeros negros y para caracterizar esas soluciones. Al mismo tiempo, las soluciones construidas de esta manera corresponden al campo exterior de una distribución de masa esféricamente simétrica, y las teorías correspondientes son automáticamente equivalentes a la gravedad de Einstein a nivel linealizado.

Para ilustrar este método, utilizando lo planteado en el Capítulo (2), aquí se aplicará a la teoría cuadrática en D dimensiones,

$$\mathcal{L}_{\text{cuadrático}} = \frac{1}{16\pi G} \left[-2\Lambda_0 + R + \alpha_1 R^2 + \alpha_2 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \alpha_3 R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \right]. \quad (\text{B.1})$$

Evaluando el ansatz (1.27) en (B.1), se obtiene el lagrangiano efectivo (B.2) que depende de N y de f siendo este un lagrangiano unidimensional, es decir, es como un lagrangiano de mecánica clásica, donde lo que hace las veces de tiempo es r y lo que

hace las veces de la posición son dos funciones (Bueno & Cano, 2017b):

$$L_{N,f} = NL_f + N'F_1 + N''F_2, \quad (\text{B.2})$$

donde F_1 y F_2 son funciones a determinar.

Considerando este lagrangiano efectivo, y calculando las ecuaciones de Euler-Lagrange asociados a f y N , se puede demostrar que:

- A partir de variar la ecuación de E-L con respecto a f , se impone que $N = 1$.
- A partir de variar la ecuación de E-L con respecto a N da una ecuación para F que se puede integrar una vez y se obtiene (B.3)

$$F_0 - F_1 + F_2' = C. \quad (\text{B.3})$$

Para dimensión D , se obtiene la siguiente forma del Lagrangiano efectivo:

$$\begin{aligned} L_f = & \frac{1}{16\pi G} \left[-2\Lambda_0 r^{D-2} + (D-2)(D-3)r^{D-4}(f-1) + 2(D-2)r^{D-3}f' + r^{D-2}f'' \right. \\ & \alpha_1 r^{D-6}((D-2)(D-3)(f-1) + 2(D-2)rf' + r^2f'')^2 \\ & \alpha_2 r^{D-6}((D-2)((D-3)(f-1) + rf') + ((D-2)rf' + r^2f'')^2/2) \\ & \left. \alpha_3 r^{D-6}(2(D-2)(D-3)(f-1)^2 + 2(D-2)r^2f'^2 + r^4f''^4) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

A partir de la ecuación anterior, es sencillo calcular la derivada de Euler-Lagrange, lo que da:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L_f}{\delta f} = & \frac{(D-2)}{16\pi G} \left[(3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(4(D-3)(f-1) - 2r^2f'') \right. \\ & \left. + (2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)((D-4)r^2f'' + 2r^2f^{(3)} + r^4f^{(4)}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Obteniendo F_0, F_1, F_2 , considerando $\delta L_f / \delta f = 0 \forall f(r)$ fijando los valores de: $\alpha_1 = \alpha_3 = -\alpha_2/4 = \alpha$

$$16\pi GF_0 = (D-2)r^{D-3}(1 - 2r^2\Lambda_0 / ((D-2)(D-1)) - f) \\ + f'(2(D-3)(D-2)r^{D-4}(f-1)\alpha - r^{D-2}) \\ + (D-4)(D-3)(D-2)r^{D-5}(f-1)^2\alpha, \quad (B.6)$$

$$16\pi GF_1 = r^{D-5}(-3f'r^3 + 2(D-3)(D-2)(5f-3)f'r\alpha \\ - 2(D-2)f(r^2 - 2(D-4)(D-3)(f-1)\alpha)), \quad (B.7)$$

$$16\pi GF_2 = -2r^{D-4}f(r^2 + 2(D-3)(D-2)\alpha(1-f)). \quad (B.8)$$

Utilizando estos resultados en la ecuación (B.3) podemos obtener la ecuación para $f(r)$

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{2(D-3)(D-4)\alpha} \left[1 \mp \sqrt{1 + \frac{8\alpha\Lambda_0(D-4)(D-3)}{(D-2)(D-1)} + \frac{64\alpha\pi GM(D-3)(D-4)}{(D-2)\Omega_{(D-2)}r^{D-1}}} \right] \quad (B.9)$$

B.1. Gauss-Bonnet D = 5

Para observar un caso particular, se considerará la acción de Einstein-Gauss-Bonnet en $D = 5$. Es decir:

$$S_{EGB} = \frac{1}{16\pi G} \int d^5x \mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} \int d^5x \sqrt{-g} [-2\Lambda_0 + R + \alpha\chi_4], \quad (B.10)$$

siendo χ_4 el término de Gauss-Bonnet¹. Para poder obtener la función $f(r)$, utilizaremos el Ansatz (1.27) para $D = 5$:

$$ds_{N,f}^2 = -N^2(r)f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 \left[d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 (d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 d\theta_3^2) \right], \quad (B.11)$$

¹ $\chi_4 = R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$.

donde:

$$\begin{aligned}
 L_f &= -r^3 f''(r) - 12\alpha r f''(r) + 12\alpha r f(r) f''(r) - 6r^2 f'(r) + 12\alpha r f'(r)^2 \\
 &\quad - 24\alpha f'(r) + 24\alpha f(r) f'(r) - 6r f(r) - 2\Lambda_0 r^3 + 6r, \\
 F_1 &= -3r^3 f'(r) - 36\alpha r f'(r) + 60\alpha r f(r) f'(r) - 6r^2 f(r) + 24\alpha f(r)^2 - 24\alpha f(r), \\
 F_2 &= -2r^3 f(r) + 24\alpha r f(r)^2 - 24\alpha r f(r).
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Además, se puede demostrar que L_f es una derivada total, es decir, que existe una función F_0 tal que:

$$L_f = F_0'. \tag{B.13}$$

Integrando (B.12) se tiene:

$$F_0(r, f, f') = -\frac{1}{12\alpha} [r^3 f'(r)^2 - 4\alpha (r f(r) f'(r) - 2f(r)) + 2r^3 f(r) + 2r^3 \Lambda_0] + C,$$

$$F_0 = -r (12\alpha - 12\alpha f(r) + r^2) f'(r) - 3f(r) (4\alpha + r^2) + 6\alpha f(r)^2 - \frac{\Lambda_0 r^4}{2} + 3r^2. \tag{B.14}$$

Una vez que tenemos F_0 , F_1 y F_2 , reemplazamos en (B.3), se reduce a la siguiente expresión:

$$-3f(r) (4\alpha + r^2) + 6\alpha f(r)^2 - \frac{\Lambda_0 r^4}{2} + 3r^2 = C. \tag{B.15}$$

Como se observa, se obtuvo una ecuación polinómica de grado 2. Resolviendo la ecuación (B.15) con $C = \frac{16\pi GM}{\Omega_{(D-2)}}$ para $f(r)$:

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{4\alpha} \pm \sqrt{1 + \frac{\Lambda_0 r^4}{12\alpha} + \frac{r^4}{16\alpha^2} + \frac{8\pi GM}{3\alpha\Omega}}, \tag{B.16}$$

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{4\alpha} \pm \sqrt{1 + \frac{\Lambda_0 r^4}{12\alpha} + \frac{r^4}{16\alpha^2} + \frac{2GM}{\alpha r^3}}. \tag{B.17}$$

Esta función nos permite calcular r_h , siendo r_h aquel valor para que $f(r_h) = 0$.

B.2. Gauss-Bonnet D=6

Utilizando el siguiente Ansatz en D = 6:

$$ds^2 = -f(r)N(r)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_6^2, \quad (\text{B.18})$$

donde $d\Omega_4^2 = d\theta_1^2 + \sin^2(\theta_1)d\theta_2^2 + \sin^2(\theta_1)\sin^2(\theta_2)d\theta_3^2 + \sin^2(\theta_1)\sin^2(\theta_2)\sin^2(\theta_3)d\theta_4^2$ es el elemento de ángulo sólido en 6 dimensiones.

Obteniendo así:

$$\begin{aligned} L_f = & 24\alpha - r^4 f''(r) - 24\alpha r^2 f''(r) + 24\alpha r^2 f(r) f''(r) - 8r^3 f'(r) + 24\alpha r^2 f'(r)^2 - 96\alpha r f'(r) \\ & + 96\alpha r f(r) f'(r) - 12r^2 f(r) + 24\alpha f(r)^2 - 48\alpha f(r) - 2\Lambda_0 r^4 + 12r^2, \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} F_0(r) = & -r^4 f'(r) - 24\alpha r^2 f'(r) + 24\alpha r^2 f(r) f'(r) - 4r^3 f(r) + 24\alpha r f(r)^2 \\ & - 48\alpha r f(r) - \frac{1}{5} 2\Lambda_0 r^5 + 4r^3 + 24\alpha r, \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned} F_1(r) = & -3r^4 f'(r) - 72\alpha r^2 f'(r) + 120\alpha r^2 f(r) f'(r) - 8r^3 f(r) + 96\alpha r f(r)^2 \\ & - 96\alpha r f(r), \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$F_2(r) = -2r^4 f(r) + 48\alpha r^2 f(r)^2 - 48\alpha r^2 f(r). \quad (\text{B.22})$$

Reemplazando en:

$$F_0 - F_1 + F_2' = 0. \quad (\text{B.23})$$

Se obtiene:

$$-4f(r) \left(r^3 + 12\alpha r \right) + 24\alpha r f(r)^2 - \frac{1}{5} 2\Lambda_0 r^5 + 4r^3 + 24\alpha r = C. \quad (\text{B.24})$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, donde $C = \frac{16\pi GM}{\Omega}$, se obtienen las siguientes 2 soluciones:

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{12\alpha} \mp \frac{\sqrt{\frac{480\pi\alpha GM r}{\Omega} + 12\alpha\Lambda_0 r^6 + 5r^6}}{12\sqrt{5}\alpha r}. \quad (\text{B.25})$$

Reduciendo (B.25) se tiene:

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{12\alpha} \mp \sqrt{\frac{2\pi GM}{3\alpha r \Omega} + \frac{r^4}{144\alpha^2} + \frac{\Lambda_0 r^4}{60\alpha}}. \quad (\text{B.26})$$

VERIFICACIÓN DE LA FÓRMULA DE RECURRENCIA

El código Python desarrollado tiene como objetivo principal verificar la fórmula de recurrencia (2.30) [véase la Sección (2.5.1)]. Una característica destacada de este código es su capacidad para calcular las densidades *GQTG*'s en cualquier orden deseado. Lo notable es que no solo realiza estos cálculos, sino que también ofrece la posibilidad de exportar las densidades de forma visual, lo que facilita su interpretación y análisis. Además, este código está diseñado para permitir el manejo simbólico de las densidades obtenidas, brindando así un enfoque versátil y eficiente para trabajar con estos datos en un contexto más amplio.

C.1. Código en Python

```
#Paquetes.  
from sympy import symbols, Function, diff, expand, collect, apart  
from sympy import init_printing, Eq, simplify, factor, cancel  
  
#Salida en formato Latex  
init_printing(use_latex=True)
```

```
# Definir Variables.
```

```
D, n, r, A, B, psi = symbols('D n r A B psi', real=True)
S1, S2, S3 = symbols('S_{(1)}|_f S_{(2)}|_f S_{(3)}|_f', real=True)
Sn2, Sn3 = symbols('S_{(n+2)}|_f S_{(n+3)}|_f ', real=True)
Sn4, Sn5 = symbols('S_{(n+4)}|_f S_{(n+5)}|_f', real=True)
S = Function('S')(n)
```

```
# Definicion de las densidades GQT usando la ecuacion (2.31).
```

```
def S_density(n):
    T11 = (D-4)*psi - (D-6)*B+2*A
    T12 = (D-4 + 2*n)*psi - 2*(n-2)*B
    term1 = (n-1) * (T11) * (T12)
    T21 = (D-3)*(D-4+2*n)*psi
    T22 = ((6-2*n)*D + 8*(n-2))*B+2 * (n-2) * A
    term2 = -2 * (B + (D-4)/4*psi) * ( T21 + T22)
    return 0.5 * (term1 + term2) * (B + (D-4)/4*psi)**(n-2)
```

```
# Obtener las densidades para diferentes valores de n.
```

```
S1_f = S_density(1)
S2_f = S_density(2)
S3_f = S_density(3)
Sn2_f = S_density(n+2)
Sn3_f = S_density(n+3)
Sn4_f = S_density(n+4)
Sn5_f = S_density(n+5)
```

```
# Evaluacion de los terminos en formula de recurrencia (2.23) usando (2.31).
```

```
def S_recurrency(m):
    n = m - 5
    term1 = -(3*(n+3)*S1_f*Sn4_f)/(4*(D-1)*(n+1))
    term2 = (3*(n+4)*S2_f*Sn3_f)/(4*(D-1)*n)
    term3 = -((n+3)*(n+4)*S3_f*Sn2_f)/(4*(D-1)*n*(n+1))
    return term1 + term2 + term3
```

```
#Comprobacion de la premisa propuesta.
if S_recurrency(n+5).equals(S_density(n+5)):
    print('Lo que queda demostrado')
else:
    print('No se pudo demostrar')

#Modelo para exportar las distintas densidades.
display(Eq(S1,S1_f))
display(Eq(S2,S2_f))
display(Eq(S3,S3_f))
display(Eq(Sn2,Sn2_f))
display(Eq(Sn3,Sn3_f))
display(Eq(Sn4,Sn4_f))
```

COMPORTAMIENTO EN EL HORIZONTE

D.1. Valores para los coeficientes a_3, a_4

Como se indicó en la Sección (2.4.2), a partir de expandir en más ordenes, podemos encontrar los coeficientes, donde se observa, ya que aparecen de manera lineal, en función del coeficiente a_2 , así, vemos que:

$$a_3 = \frac{1}{144G^2\kappa_g\lambda r_h^2(\kappa_g r_h + 1)} \left[-48a_2^2G^2\kappa_g\lambda r_h^3 + 192a_2G^2\kappa_g^2\lambda r_h^2 + 144a_2G^2\kappa_g\lambda r_h + a_2r_h^4 - 144G^2\kappa_g^2\lambda - 192G^2\kappa_g^3\lambda r_h + 2\kappa_g r_h^3 \right], \quad (D.1)$$

$$a_4 = \frac{1}{384G^2r_h^3\kappa_g(1 + r_h\kappa_g)\lambda} \left[-16a_2^3G^2\lambda r_h^4 + 192a_2^2G^2\kappa_g\lambda r_h^3 + 48a_2^2G^2\lambda r_h^2 - 48a_2a_3G^2\lambda r_h^3 - 576a_2G^2\kappa_g^2\lambda r_h^2 - 288a_2G^2\kappa_g\lambda r_h + a_2r_h^4 + 576a_3G^2\kappa_g^2\lambda r_h^3 + 336a_3G^2\kappa_g\lambda r_h^2 + a_3r_h^5 + 240G^2\kappa_g^2\lambda + 384G^2\kappa_g^3\lambda r_h - 336a_2a_3G^2\kappa_g\lambda r_h^4 \right]. \quad (D.2)$$

D.2. Código Python

El código Python que se presenta a continuación está diseñado para evaluar la función $f(r)$, tal como se describe en la forma (2.24), en el contexto de la ecuación

diferencial (2.11). Esta implementación facilita una comprensión más profunda del comportamiento de $f(r)$ cerca del horizonte. El código no solo calcula los valores de $f(r)$ en diferentes órdenes (n) de la expansión de Taylor, sino que también ofrece la posibilidad de visualizar estos cálculos, mejorando así la interpretación y el análisis de los resultados obtenidos.

```

from sympy import symbols, diff, simplify, Eq
from sympy import init_printing, series, collect

#Salida en formato Latex
init_printing(use_latex=True)

# Definicion de simbolos
kappaG, rh, r0, G, lambda_, M = symbols('kappa_G r_h r_0 G lambda M')
r = symbols('r')
nmax = int(input('Ingresar n='))

# Definicion de f(r)
a = symbols('a2 a3 a4 a5 a6') # Simbolos para los coeficientes a2,...
f = 2 * kappaG * (r - rh)
f += sum([a[n-2] * (r - rh)**n for n in range(2, nmax + 1)])

# Calculo de las derivadas de f(r)
f_prime = diff(f, r)
f_double_prime = diff(f_prime, r)

# Sustitucion de f(r) en la ecuacion diferencial
eq1 = -(f - 1) * r - G**2 * lambda_ * (
    4 * f_prime**3 + 12 * f_prime**2 / r
    - 24 * f * (f - 1) * f_prime / r**2
    - 12 * f * f_double_prime * (f_prime - 2 * (f - 1) / r)) - 2*G*M

# Expansion hasta el n orden
eq_expanded = series(eq1, r, rh, nmax).removeO()

```

```
# Organizar en funcion de las potencias de (r - rh)
eq_organized = collect(eq_expanded, (r - rh))

# Visualizacion
display(Eq(eq_organized,0))
```



```

from sympy import symbols, diff, simplify, Eq
from sympy import init_printing, series, collect

#Salida en formato Latex
init_printing(use_latex=True)

# Definicion de simbolos
kappaG, rh, r0, G, lambda_, M = symbols('kappa_G r_h r_0 G lambda M')
r = symbols('r')
nmax = int(input('Ingresar n='))

# Definicion de f(r)
a = symbols('a2 a3 a4 a5 a6') # Simbolos para los coeficientes a2,...
f = 2 * kappaG * (r - rh)
f += sum([a[n-2] * (r - rh)**n for n in range(2, nmax + 1)])

# Calculo de las derivadas de f(r)
f_prime = diff(f, r)
f_double_prime = diff(f_prime, r)

# Sustitucion de f(r) en la ecuacion diferencial
eq1 = -(f - 1) * r - G**2 * lambda_ * (
    4 * f_prime**3 + 12 * f_prime**2 / r
    - 24 * f * (f - 1) * f_prime / r**2
    - 12 * f * f_double_prime * (f_prime - 2 * (f - 1) / r)) - 2*G*M

# Expansion hasta el n orden
eq_expanded = series(eq1, r, rh, nmax).removeO()

# Organizar en funcion de las potencias de (r - rh)
eq_organized = collect(eq_expanded, (r - rh))

# Visualizacion
display(Eq(eq_organized, 0))

```

BIBLIOGRAFÍA

- Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., Abernathy, M. R., Acernese, F., Ackley, K., Adams, C., Adams, T., Addesso, P., Adhikari, R. X., Adya, V. B., Affeldt, C., Agathos, M., Agatsuma, K., Aggarwal, N., Aguiar, O. D., Aiello, L., Ain, A., Ajith, P., ... Zweizig, J. (2016). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116, 061102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102>
- Adair, C., Bueno, P., Cano, P. A., Hennigar, R. A., & Mann, R. B. (2020). Slowly rotating black holes in Einsteinian cubic gravity. *Physical Review D*. (2016), 102(8). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.084001>
- Arciniega, G., Bueno, P., Cano, P. A., Edelstein, J. D., Hennigar, R. A., & Jaime, L. G. (2020). Geometric inflation. *Physics Letters. Part B*, 802(135242), 135242. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135242>
- Arciniega, G., Edelstein, J. D., & Jaime, L. G. (2020). Towards geometric inflation: The cubic case. *Physics Letters. Part B*, 802(135272), 135272. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135272>
- Bardeen, J. M., Carter, B., & Hawking, S. W. (1973). The four laws of black hole mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 31(2), 161-170. <https://doi.org/10.1007/bf01645742>
- Bekenstein, J. D. (1973). Black Holes and Entropy. *Phys. Rev. D*, 7, 2333-2346. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2333>
- Blau, M. (2023). *Lecture Notes on General Relativity*. Consultado el 3 de noviembre de 2023, desde <http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf>
- Boulware, D. G., & Deser, S. (1985). String-generated gravity models. *Physical Review Letters*, 55(24), 2656-2660. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.55.2656>
- Bueno, P., & Cano, P. A. (2016a). Einsteinian cubic gravity. *Physical Review. D*, 94(10), 104005. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.104005>

- Bueno, P., & Cano, P. A. (2016b). Four-dimensional black holes in Einsteinian cubic gravity. *Phys. Rev. D*, 94, 124051. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.124051>
- Bueno, P., & Cano, P. A. (2017a). Universal black hole stability in four dimensions. *Physical Review. D*, 96(2), 024034. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.024034>
- Bueno, P., & Cano, P. A. (2017b). On black holes in higher-derivative gravities. *Classical and Quantum Gravity*, 34(17), 175008. <https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa8056>
- Bueno, P., Cano, P. A., & Hennigar, R. A. (2019). (Generalized) quasi-topological gravities at all orders. *Classical and Quantum Gravity*, 37(1), 015002. <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab5410>
- Bueno, P., Cano, P. A., Hennigar, R. A., Lu, M., & Moreno, J. (2023). Generalized quasi-topological gravities: the whole shebang. *Class. Quant. Grav.*, 40(1), 015004. <https://doi.org/10.1088/1361-6382/aca236>
- Bueno, P., Cano, P. A., Moreno, J., & Murcia, Á. (2019). All higher-curvature gravities as Generalized quasi-topological gravities. *Journal of High Energy Physics*, 2019(11), 62. [https://doi.org/10.1007/JHEP11\(2019\)062](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2019)062)
- Cano, P. A. (2019). Higher-Curvature Gravity, Black Holes and Holography. *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/1912.07035>
- Carmeli, M. (1982). *Classical fields: General relativity and gauge theory* (4.^a ed.). New York: John Wiley & Sons.
- de Sitter, W. (1916). On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. Second paper. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 77(2), 155-184. <https://doi.org/10.1093/mnras/77.2.155>
- Eddington, A. S. (1921). A generalisation of Weyl's theory of the electromagnetic and gravitational fields. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 99(697), 104-122. <https://doi.org/10.1098/rspa.1921.0027>
- Einstein, A. (1915). On the general theory of relativity (addendum). *SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN*, 799.
- Friedman, A. (1922). Über die Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik*, 10(1), 377-386. <https://doi.org/10.1007/BF01332580>

- Garraffo, C., & Giribet, G. (2008). The Lovelock black holes. *Modern Physics Letters A. Particles and Fields, Gravitation, Cosmology, Nuclear Physics*, 23(22), 1801-1818. <https://doi.org/10.1142/s0217732308027497>
- Hawking, S. W. (1971). Gravitational Radiation from Colliding Black Holes. *Physical Review Letters*, 26(21), 1344-1346. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.26.1344>
- Hawking, S. W. (1972a). Black holes in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*, 25(2), 152-166. <https://doi.org/10.1007/BF01877517>
- Hawking, S. W. (1972b). Black holes in the Brans-Dicke: Theory of gravitation. *Communications in Mathematical Physics*, 25(2), 167-171. <https://doi.org/10.1007/BF01877518>
- Hawking, S. W. (1975). Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, 43(3), 199-220. <https://doi.org/10.1007/BF02345020>
- Hennigar, R. A., Jahani Poshteh, M. B., & Mann, R. B. (2018). Shadows, signals, and stability in Einsteinian cubic gravity. *Physical Review D*, 97(6), 064041. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.064041>
- Hennigar, R. A., Kubizňák, D., & Mann, R. B. (2017). Generalized quasitopological gravity. *Physical Review D*, 95(10), 104042. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.104042>
- Hennigar, R. A., & Mann, R. B. (2017). Black holes in Einsteinian cubic gravity. *Physical Review D*, 95(6), 064055. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.064055>
- Israel, W. (1986). Third Law of Black-Hole Dynamics: A Formulation and Proof. *Physical Review Letters*, 57(4), 397-399. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.57.397>
- Lemaître, G. (1927). Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, A47*, p. 49-59, 47, 49-59. <https://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1927ASSB...47...49L>
- Lovelock, D. (1970). Divergence-free tensorial concomitants. *Aequationes mathematicae*, 4(1), 127-138. <https://doi.org/10.1007/BF01817753>
- Lovelock, D. (2003). The Einstein Tensor and Its Generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 44(3), 498-501. <https://doi.org/10.1063/1.1665613>
- Maldacena, J. (1999). The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4), 1113-1133. <https://doi.org/10.1023/A:1026654312961>

- Moffat, J. W. (2011). Ultraviolet complete quantum gravity. *The European Physical Journal Plus*, 126(4). <https://doi.org/10.1140/epjp/i2011-11043-7>
- Myers, R. C. (1999). Black Holes in Higher Curvature Gravity. En *Black Holes, Gravitational Radiation and the Universe: Essays in Honor of C.V. Vishveshwara* (pp. 121-136). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0934-7_8
- Oliva, J., & Ray, S. (2011). Birkhoff's theorem in higher derivative theories of gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 28(17), 175007. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/17/175007>
- Padmanabhan, T. (2005). Holographic gravity and the surface term in the Einstein-Hilbert action. *Brazilian Journal of Physics*, 35(2a), 362-372. <https://doi.org/10.1590/S0103-97332005000200023>
- Padmanabhan, T. (2011). Some aspects of field equations in generalized theories of gravity. *Physical Review D*, 84(12), 124041. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.124041>
- Penrose, R., & Floyd, R. M. (1971). Extraction of Rotational Energy from a Black Hole. *Nature Physical Science*, 229, 177-179. <https://doi.org/10.1038/physci229177a0>
- Poshteh, M. B. J., & Mann, R. B. (2019). Gravitational lensing by black holes in Einsteinian cubic gravity. *Physical Review D*, 99(2), 024035. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.024035>
- Robertson, H. P. (1935). Kinematics and World-Structure [Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System]. *The Astrophysical Journal*, 82, 284. <https://doi.org/10.1086/143681>
- Schwarzschild, K. (1915). On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.physics/9905030>
- Sotiriou, T. P., & Faraoni, V. (2010). $f(R)$ theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, 82(1), 451-497. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.451>
- Tangherlini, F. R. (1963). Schwarzschild field in n -dimensions and the dimensionality of space problem. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 27(3), 636-651. <https://doi.org/10.1007/BF02784569>
- The Event Horizon Telescope Collaboration, Akiyama, K., Alberdi, A., Alef, W., Asada, K., Azulay, R., Baczkó, A.-K., Ball, D., Baloković, M., Barrett, J., Bintley, D., Blackburn, L., Boland, W., Bouman, K. L., Bower, G. C., Bremer, M., Brinkerink, C. D., Brissenden, R., Britzen, S., ... Yamaguchi, P. (2019). First M87 event horizon telescope results. IV. Imaging the central supermassive black hole. *Astrophys. J. Lett.*, 875(1), L4.

Wald, R. M. (1993). Black hole entropy is the Noether charge. *Physical Review D*, 48(8), R3427-R3431.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.48.R3427>

Weyl, H. (1952). *Space, Time, Matter* (4.^a ed.). German: Dover Publications.