

# **Regularisierung und Renormierung in der Quantenfeldtheorie – Resultate aus dem Vergleich konsistenter und praktikabler Methoden**

Dissertation  
zur Erlangung des Grades  
„Doktor der Naturwissenschaften“  
am Fachbereich Physik  
der Johannes Gutenberg-Universität  
in Mainz

Silke Falk  
geb. in Wiesbaden

Mainz 2005

Datum der mündlichen Prüfung: 2. Mai 2005  
D77, Mainzer Dissertation

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird zu Beginn der Vergleich spezieller Regularisierungsmethoden in der Quantenfeldtheorie mit dem Verfahren zur störungstheoretischen Konstruktion der  $S$ -Matrix nach Epstein und Glaser hergestellt.

Da dieses Verfahren für ein jedes  $S$ -Matrixelement einen endlichen Ausdruck liefert, kann es selbst als Regularisierungsmethode für divergente Feynmandiagramme herangezogen werden. Es basiert überdies ausschließlich auf physikalisch motivierten Postulaten an die  $S$ -Matrix, so daß die Äquivalenz von Ergebnissen anderer Regularisierungsverfahren mit den Resultaten der Epstein-Glaser-Konstruktion notwendig ist, um deren physikalische Zulässigkeit zu überprüfen. Die Untersuchung dieser Äquivalenz muß dabei im Rahmen der im Epstein-Glaser-Verfahren verwandten Freiheiten erfolgen, welche bei einem zulässigen Regularisierungsverfahren die Freiheiten bei der speziellen Renormierung repräsentieren.

Zusätzlich zur Herausstellung dieser Äquivalenz für das BPHZ-Renormierungsverfahren und die Methode der Dimensionalen Regularisierung liefert der Vergleich mit der Epstein-Glaser-Konstruktion ein weiteres wesentliches Resultat: Anhand von Beispielen für Ein- und Mehr-Schleifen-Diagramme wird demonstriert, wie im Zuge eines neuen praktikablen Verfahrens, des *modifizierten BPHZ-Verfahrens*, eine teils erhebliche Vereinfachung der konkreten Durchführung von Regularisierungen erreicht werden kann.

Dieses Verfahren wird zunächst an den grundlegenden Divergenzen der QED - Elektron-selbstenergie, Vakuum-polarisation und Vertexkorrektur - exemplarisch dargestellt. Es ist aber insbesondere auch unverändert bei Diagrammen einer chiralen Theorie anwendbar, wo die Berechnung mittels der vielverwandten Dimensionalen Regularisierung auf das sog.  $\gamma_5$ -Problem führt. Die aufwendige und problematische Fortsetzung der für vier Raumzeitdimensionen spezifischen  $\gamma_5$ -Matrix in  $d$  Dimensionen ist im modifizierten BPHZ-Verfahren nicht notwendig. Als Beispiel dient die im Rahmen einer axialen Erweiterung der QED-Lagrangedichte auftretende sog. *U(1)-Anomalie*: Hier wird die erhebliche Vereinfachung bei der Regularisierung des von drei Fermionen gebildeten divergenten Dreiecksgraphen, an zwei Vertices an ein vektorielles und am dritten an ein axiales Eichboson gekoppelt, demonstriert. Die Berechnung der Wardidentitäten und der Anomalie schließt sich auf direkte Weise an.

Auf der Stufe von Mehr-Schleifen-Diagrammen erfolgt der Vergleich des Epstein-Glaser-Verfahrens mit der BPHZ-Regularisierung, da diese mit der Zimmermannschen Waldformel eine allgemeine Regularisierungsvorschrift für Diagramme mit mehreren Schleifen enthält. Nun ist es insbesondere die unterschiedliche Kombinatorik hinsichtlich der Berücksichtigung von Unterdiagrammen, die beim Vergleich von Epstein-Glaser- und BPHZ-Regularisierung zu beachten ist: In der Zimmermannschen Waldformel wird eine größere Klasse von Unterdiagrammen berücksichtigt als bei der Epstein-Glaser-Konstruktion. Mehrere Beispiele aus der  $\phi^4$ -Theorie, darunter das sog. *Sunrise*-Diagramm, zeigen, daß zu deren Berechnung die in der Waldformel auftretenden Unterdiagramme auf solche im Sinne von Epstein-Glaser eingeschränkt werden können. Auch dieses Resultat ist für die Praxis der Regularisierung von Feynmandiagrammen bedeutsam, da es bereits auf der Stufe der zu berücksichtigenden Unterdiagramme zu einer Vereinfachung der konkreten Berechnungen führt.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Zweite Quantisierung und Streuprozesse</b>	<b>7</b>
2.1 Zweite Quantisierung am Beispiel des reellen freien Klein-Gordon-Felds . . . . .	7
2.2 Konstruktion der $S$ -Matrix mittels naiver Zeitordnung . . . . .	9
<b>3 Das Verfahren von Epstein und Glaser</b>	<b>13</b>
3.1 Die Konstruktion der $S$ -Matrix . . . . .	13
3.2 Das Splitten kausaler Distributionen . . . . .	18
3.3 Das Epstein-Glaser-Verfahren als Regularisierungsmethode . . . . .	22
3.4 Das modifizierte Epstein-Glaser-Verfahren . . . . .	25
<b>4 Das BPHZ-Renormierungsverfahren</b>	<b>29</b>
4.1 Regularisierung von Ein-Schleifen-Diagrammen . . . . .	29
4.2 Allgemeine Regularisierungsvorschrift . . . . .	35
<b>5 Dimensionale Regularisierung</b>	<b>39</b>
5.1 Berechnung von Feynmandiagrammen in $d$ Dimensionen . . . . .	39
5.2 Regularisierung in Termen der Eulerschen Gammafunktion . . . . .	41
<b>6 Das modifizierte BPHZ-Verfahren</b>	<b>45</b>
6.1 Motivation und allgemeine Vorgehensweise . . . . .	45
6.2 Demonstration an Beispielen aus der QED . . . . .	48
6.2.1 Elektronselfstenergie . . . . .	48
6.2.2 Vakuumpolarisation . . . . .	50
6.2.3 Vertexkorrektur . . . . .	51

<b>7 Die chirale Anomalie</b>	<b>55</b>
7.1 Berechnung des Dreiecksgraphen	56
7.2 Wardidentitäten	58
7.3 Berechnung der Anomalie	60
<b>8 Das Sunrise-Diagramm</b>	<b>63</b>
8.1 Berechnung mit dem modifizierten BPHZ-Verfahren	64
8.2 Vergleich mit Dimensionaler Regularisierung	67
8.3 BPHZ-Regularisierung nach der Waldformel	69
<b>9 Epstein-Glaser-Regularisierung in höherer Ordnung</b>	<b>71</b>
9.1 Zerlegung der Distributionen $T_n$ nach Wickmonomen	71
9.2 Beispiele für Diagramme dritter Ordnung	73
9.2.1 Zwei-Schleifen-Beitrag zur Vierpunktfunction in vier Dimensionen	73
9.2.2 Zwei-Schleifen-Beitrag zur Vierpunktfunction in sechs Dimensionen	76
9.2.3 Drei-Schleifen-Beitrag zum skalaren Propagator	79
<b>10 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>83</b>
<b>A Wickrotation</b>	<b>87</b>
<b>B Berechnung des Dreiecksgraphen <math>T_{\lambda\mu\nu}(p, q)</math></b>	<b>91</b>
B.1 Spurbildung	91
B.2 Durchführung der $k$ -Integration	92
<b>C Epstein-Glaser-Resultate im Impulsraum</b>	<b>95</b>
C.1 Erster Zwei-Schleifen-Beitrag, $d = 4$	95
C.2 Zweiter Zwei-Schleifen-Beitrag, $d = 6$	96
C.3 Drei-Schleifen-Beitrag zum Propagator	97
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>99</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Physikalische Wechselwirkungen von Elementarteilchen erfahren ihre Beschreibung im Rahmen der *Quantenfeldtheorie*. Ein zentrales Element dieser Theorie bildet dabei die sog. *Streu-* oder *S-Matrix*, welche die bei einem Streuprozess erfolgenden Übergänge zwischen physikalischen Anfangs- und Endzuständen vermittelt.

Eine anschauliche Darstellung solcher Streuprozesse liefern die *Feynmandiagramme*, welche die Wechselwirkung der einfallenden Teilchen untereinander durch die Propagation virtueller Teilchen symbolisieren. Diese bildliche Interpretation der zu beschreibenden Wechselwirkung spiegelt bereits einen zentralen Punkt in der formalen Konstruktion der zugrundeliegenden *S-Matrix* wider: Die *Propagation* von Teilchen beinhaltet eine bestimmte *Zeitordnung* von Raumzeitpunkten. In der formalen störungstheoretischen Entwicklung der *S-Matrix* ist es gerade diese Zeitordnung, welche - naiv angewendet - auf charakteristische Divergenzen, sog. *UV-Divergenzen*, in der Quantenfeldtheorie führt: Integrale, welche Wahrscheinlichkeitsamplituden bestimmter Streuprozesse darstellen, also bestimmte *S-Matrix*-Elemente, erweisen sich als divergent.

In der Quantenfeldtheorie existieren zwei konzeptionell unterschiedliche Methoden, diesem Problem Rechnung zu tragen:

1. Überführung der divergenten in endliche Integrale nach bestimmten *Regularisierungsverfahren*,
2. Ersetzung der *naiven* Zeitordnung durch eine wohldefinierte Zeitordnungsvorschrift und Konstruktion einer von vornherein divergenzfreien *S-Matrix* mittels des Verfahrens von *Epstein* und *Glaser*.

Obwohl mit letzterer Methode ein konstruktives Verfahren zur Entwicklung der *S-Matrix* zur Verfügung steht, welches auf einigen wenigen physikalischen Postulaten basiert, verlieren die unterschiedlichen Regularisierungsverfahren nicht an Bedeutung: In ihrer ursprünglichen Formulierung erscheint die Epstein-Glaser-Konstruktion durch ihr wesentliches Element, d. h. die modifizierte Zeitordnungsvorschrift, im Gegensatz zu den verschiedenen Regularisierungsmethoden zur expliziten Berechnung wenig praktikabel; der wesentliche Vorteil des Epstein-Glaser-Verfahrens liegt indessen in der vollständigen *Divergenzfreiheit* der konstruierten *S-Matrix*.

In der Tat bilden die Ergebnisse der Epstein-Glaser-Konstruktion eine Referenz, die es erlaubt, die Operationen der unterschiedlichen Regularisierungsmethoden auf ihre Zulässigkeit zu überprüfen: Allein die Forderung der *Kausalität* der  $S$ -Matrix, welche im Epstein-Glaser-Verfahren die Zeitordnung der Propagatoren impliziert, liefert - zusammen mit der Lorentzinvianz - für jedes Feynmandiagramm einen endlichen Wert, welcher allerdings aus einer bestimmten, der Konstruktion innewohnenden *Freiheit* heraus speziell gewählt werden muß; erst die an die Regularisierung anschließende sog. *Renormierung* verfügt schließlich im Sinne einer physikalischen Interpretation über diese Freiheit. Für ein sinnvolles Regularisierungsverfahren ist nun zunächst die Übereinstimmung seiner Resultate mit denen des Epstein-Glaser-Verfahrens innerhalb dieser Freiheit zu fordern. Während die Endlichkeit der regularisierten Integrale Teil der Aussage der unterschiedlichen Regularisierungsverfahren ist, fehlt aber gerade eine Untersuchung ihrer physikalischen Zulässigkeit in o. a. Sinne.

Das Ziel dieser Arbeit ist, die Vorteile bestimmter, hinsichtlich konkreter Berechnungen praktikabler Regularisierungsverfahren mit der Wohldefiniertheit und der physikalischen Motivation der Epstein-Glaser-Konstruktion zu verbinden. Die zu untersuchende Äquivalenz von Regularisierungsmethoden zum Epstein-Glaser-Verfahren ermöglicht es wiederum, die Regularisierungsverfahren bei einer Vielzahl von Anwendungen erheblich zu vereinfachen. Insbesondere auch die Berechnung von Mehr-Schleifen-Diagrammen folgt im Epstein-Glaser-Formalismus einer bestimmten Kombinatorik, welche mit der entsprechenden des betrachteten Regularisierungsverfahrens verglichen werden muß; auch in diesem Fall ist die Übereinstimmung der Ergebnisse im Rahmen der bei der Epstein-Glaser-Konstruktion verbleibenden Freiheiten zu fordern, und dieser Vergleich resultiert in der Anwendung gleichfalls in starken Vereinfachungen.

Als ein zentrales Element dieser Arbeit faßt das hier vorgestellte *modifizierte BPHZ-Verfahren* diese Ergebnisse zu einer neuen konsistenten und praktikablen Regularisierungsmethode zusammen.

Der Aufbau der Arbeit ist wie folgt vorgenommen:

In Kapitel 2 wird die Beschreibung von Streuprozessen durch die  $S$ -Matrix innerhalb des Formalismus der Zweiten Quantisierung wiederholt. Der Versuch einer Darstellung der relativistischen Prozesse in Analogie zum Wechselwirkungsbild der klassischen Quantenmechanik und die im Zuge dessen resultierende naive Zeitordnungsvorschrift in der störungstheoretischen Entwicklung der  $S$ -Matrix führen auf die bekannten UV-Divergenzen der Matrixelemente und werden hier lediglich als Motivation für die Postulate des in Kapitel 3 vorgestellten *Epstein-Glaser-Verfahrens* angeführt.

Im ersten Teil dieses dritten Kapitels wird der mit diesen Postulaten folgende Konstruktionsprozeß nach Epstein und Glaser erläutert, wobei der Schwerpunkt auf der Definition der  $S$ -Matrix als operatorwertige *Distribution* gelegt ist. Erst die Auswertung auf sog. *Testfunktionen* und die Bildung des Matrixelementes bzgl. physikalischer Anfangs- und Endzustände liefert den direkten Vergleich zu den Ausgangspunkten der Regularisierungsverfahren, d. h. den konkreten divergenten Integralen. Die Zeitordnung wird in jeder Ordnung der Entwicklung nach der Anzahl der Vertices durch die Forderung nach der *Kausalität* der  $S$ -Matrix impliziert; die konkrete Realisierung erfolgt mittels des Prozesses des *Distributionensplittens*, welcher im Anschluß erläutert wird. Über das ursprüngliche Epstein-Glaser-Verfahren hinaus gehen die beiden letzten

Unterkapitel dieses Kapitels 3: Hinsichtlich des Vorhabens, die Äquivalenz bestimmter Regularisierungsverfahren zur Epstein-Glaser-Methode zu überprüfen, ist es insbesondere nützlich, letztere selbst als Regularisierungsmethode aufzufassen; diese Interpretation ist u.a. in [PRA] und [PIN] ausgeführt und wird später im Impulsraum als Äquivalenzkriterium verwendet. Zum Vergleich weiterhin unabdingbar ist die Kenntnis der bei der Epstein-Glaser-Regularisierung verbleibenden Freiheiten; sie werden zunächst vollständig angegeben, um dann im *modifizierten Epstein-Glaser-Verfahren* von [GRB] auf eine Einschränkbarkeit hin überprüft zu werden, welche sich allerdings für die endgültige physikalische *Renormierung* i. a. als zu restriktiv erweist.

Hierbei - sowie auch im weiteren Verlauf der Arbeit - wurden die Ergebnisse der im Rahmen dieser Betrachtungen durchgeführten expliziten Berechnungen mittels des Mathematikprogramms *Maple V* überprüft.

Kapitel 4 stellt mit dem *BPHZ-Verfahren* das in Hinblick auf die Zielstellung der Arbeit wichtigste Renormierungsverfahren vor. Wie bereits z. B. in [GRB] erwähnt, erweist sich die in diesem Verfahren enthaltene Regularisierungsvorschrift auf der Stufe von Ein-Schleifen-Diagrammen - einschließlich der zur Verfügung stehenden Freiheiten - als dem in den Impulsraum übertragenen Epstein-Glaser-Verfahren äquivalent. Darüberhinaus enthält das BPHZ-Verfahren mit der sog. *Waldformel* eine allgemeine Vorschrift zur Regularisierung von Mehr-Schleifen-Diagrammen, deren Kombinatorik später gleichfalls mit der des Epstein-Glaser-Verfahrens verglichen werden soll. Obwohl es strukturell übersichtlich ist, hat das BPHZ-Verfahren den Nachteil, auf hinsichtlich der expliziten Berechnung aufwendige Integrale zu führen. Praktikabler in der konkreten Anwendung ist dagegen die Methode der *Dimensionalen Regularisierung*, welche im folgenden Kapitel 5 erläutert wird.

Die Dimensionale Regularisierung ist ein Verfahren, welches die auftretenden Divergenzen zunächst durch eine (infinitesimale) *Abweichung* von der ursprünglichen Theorie beseitigt und anschließend die parametrisierten Terme derart modifiziert, daß deren Wohldefiniertheit auch nach der Rückkehr zur eigentlichen Theorie erhalten bleibt. Die Äquivalenz zum Epstein-Glaser-Verfahren wird anhand eines Beispiels demonstriert; dieser Vergleich wiederum weist auf die Möglichkeit hin, die praktischen Vorteile der Dimensionalen Regularisierung zu nutzen, ohne die zugrundeliegende Theorie formal auf unphysikalische Dimensionen erweitern zu müssen. Dazu sei als eigentliche regularisierende Operation diejenige des BPHZ-Verfahrens angewandt: In Kapitel 6 wird als eine neue Vorgehensweise das *modifizierte BPHZ-Verfahren* vorgestellt, welches die Praktikabilität der Dimensionalen Regularisierung mit der strukturellen Übersichtlichkeit des BPHZ-Verfahrens hinsichtlich dessen Äquivalenz zum Epstein-Glaser-Verfahren vereint.

Drei bekannte Beispiele aus der Quantenelektrodynamik demonstrieren das modifizierte BPHZ-Verfahren im zweiten Teil des sechsten Kapitels :

- Elektronselfstenergie,
- Vakuumpolarisation und
- Vertexkorrektur.

Die Einführung eines Massenparameters als abschließender Schritt des Verfahrens ermöglicht den direkten Vergleich mit dem entsprechenden Ergebnis der Dimensionalen Regularisierung.

Dieser neue Parameter erscheint hier allerdings als eine im Rahmen der Freiheiten des Regularisierungsverfahrens mögliche *Verallgemeinerung* des Ergebnisses, und es bedarf seiner Einführung nicht, um die physikalische Dimension beim Übergang zu Integrationen in abweichender Dimension zu bewahren, wie es bei der Dimensionalen Regularisierung der Fall ist.

Ein wesentlicher Vorzug des modifizierten BPHZ-Verfahrens gegenüber der Dimensionalen Regularisierung wird insbesondere dort deutlich, wo die formale Erweiterung der Theorie auf unphysikalische Dimensionen auf konzeptionelle Probleme führt, insbesondere also bei einer *chiralen* Theorie, wo neben der Algebra der Diracschen Gammamatrizen in der QED auch die für den vierdimensionalen Minkowskiraum spezifische Matrix  $\gamma_5$  einer aufwendigen Neudefinition bedarf.

Die unveränderte Anwendbarkeit des modifizierten BPHZ-Verfahrens in diesem Fall wird in Kapitel 7 demonstriert:

- Berechnung der  $U(1)$ -Anomalie.

Als Beispiel dient eine axiale Erweiterung der QED-Lagrangedichte; hier tritt für den sog. *Dreiecksgraphen*, welcher drei innere Fermionen, an zwei vektorielle und ein axiales Eichboson koppelnd, beschreibt, eine sog.  *$U(1)$ -Anomalie* auf. Diese kann, ebenso wie die beiden die Erhaltung der Vektorströme bei der vektoriellen Kopplung beschreibenden Ward-Identitäten, auf natürliche Weise *nach der Regularisierung* des divergenten Dreiecksgraphen mittels des modifizierten BPHZ-Verfahrens berechnet werden.

Mit Kapitel 8 beginnt die Betrachtung von Mehr-Schleifen-Diagrammen. Da mit der Zimmermannschen Waldformel eine allgemeine Regularisierungsvorschrift im Rahmen der BPHZ-Regularisierung gegeben ist, bildet die in diesem Verfahren enthaltene Kombinatorik den Gegenstand der folgenden vergleichenden Betrachtungen. Auch für Mehr-Schleifen-Diagramme liefert das konstruktive Epstein-Glaser-Verfahren innerhalb der verbleibenden Freiheiten endliche Ergebnisse; die dortige Entwicklung der  $S$ -Matrix nach der Anzahl von Vertices impliziert insbesondere eine anschauliche Definition von Unterdiagrammen: Ein *Epstein-Glaser-Unterdiagramm* entstammt der Konstruktion einer im Vergleich zu der des Gesamtdiagrammes *niedrigeren* Vertexordnung. Im Gegensatz hierzu ist ein *BPHZ-Unterdiagramm* als ein Anteil des Gesamtdiagrammes mit einer niedrigeren Anzahl von *Schleifen* definiert: Die physikalische Interpretation des BPHZ-Verfahrens besteht in der Modifikation der zugrundeliegenden Lagrangedichte durch sukzessive Addition von Korrekturtermen, sog. *Countertermen*, steigender Ordnung in einer formalen Entwicklung nach  $\hbar$ , und auf der Stufe der Feynmandiagramme ist die Schleifenordnung mit der  $\hbar$ -Ordnung identisch. In diesem achten Kapitel wird nun ein erstes Beispiel für die Unterschiedlichkeit dieser beiden Arten der Berücksichtigung von Unterdiagrammen vorgestellt:

- Berechnung des *Sunrise*-Diagrammes.

Als ein Diagramm mit nur zwei Vertices enthält es kein divergentes Epstein-Glaser-Unterdiagramm, wohl aber, da je zwei der drei inneren Linien eine Schleife bilden, *drei* BPHZ-Unterdiagramme. Der Vergleich mit dem Ergebnis des modifizierten BPHZ-Verfahrens zeigt, daß die Berücksichtigung dieser sog. *reinen* BPHZ-Unterdiagramme - zumindest bei der hier verwandten Wahl des Standardimpulsflusses - nicht notwendig ist.

Tatsächlich unterstützen auch weitere Beispiele höherer Vertexordnung die Annahme, daß die in der Zimmermannschen Waldformel zu berücksichtigenden Unterdiagramme auf solche im Sinne von Epstein-Glaser einschränkbar sind. In Kapitel 9 wird hierzu zunächst die Epstein-Glaser-Regularisierung bis zur dritten Ordnung abgeleitet. Darin enthalten sind insbesondere drei Beispieldiagramme aus der skalaren  $\phi^4$ -Theorie in  $d = 4$  bzw.  $d = 6$  Dimensionen, anhand derer im zweiten Teil dieses Kapitels der Vergleich mit den Ergebnissen der Waldformel hergestellt wird:

- Zwei-Schleifen-Beitrag zur Vierpunktfunction in vier Dimensionen,
- Zwei-Schleifen-Beitrag zur Vierpunktfunction in sechs Dimensionen,
- Drei-Schleifen-Beitrag zum Propagator in sechs Dimensionen.

Während die Berücksichtigung der Unterdiagramme beim ersten Beispiel, welches ausschließlich solche im Sinne von Epstein-Glaser enthält, in beiden Regularisierungsverfahren auf gleiche Weise erfolgt, zeigt sich bei den beiden anderen Beispielen wiederum, daß die Beiträge der *reinen* BPHZ-Unterdiagramme nicht zum Resultat beitragen. Auch diese Vergleiche erfolgen naturgemäß für eine bestimmte und geeignete Wahl des Standardimpulsflusses in der Zimmermannschen Waldformel.

Der Vergleich mit den Ergebnissen der Epstein-Glaser-Regularisierung liefert somit bei Beispielen von Mehr-Schleifen-Diagrammen den zusätzlichen Vorteil, die Beiträge von Unterdiagrammen auf diejenigen einschränken zu können, welche in der Epstein-Glaser-Konstruktion auftreten, woraus i. a. eine erhebliche Vereinfachung des Integranden resultiert. Dieser Vergleich erfolgt am Beispiel zwar für einen speziellen, dazu am besten geeigneten Standardimpulsfluß; es besteht allerdings die Vermutung, daß die o. a. Einschränkung generell möglich ist: Auch im Formalismus der Counterterme können in den Feldern normalgeordnete Korrekturterme einer modifizierten Wechselwirkungslagrangedichte nur Propagatoren zu denjenigen Vertices generieren, welche bei der störungstheoretischen Entwicklung neu hinzukommen, und sind daher Counterterme zu *Epstein-Glaser-Unterdiagrammen* des Gesamtdiagrammes.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß in der Literatur die beiden zu Beginn dieses Kapitels charakterisierten Richtungen weitgehend unabhängig voneinander existieren: Während unterschiedliche Regularisierungsmethoden zunächst als teils willkürlich anmutende Operationen an divergenten Integralen angewandt werden, erscheint das Epstein-Glaser-Verfahren als eine rein theoretische Konstruktion ohne Nutzen für explizite Berechnungen. Diese Arbeit ist dagegen denjenigen zuzuordnen, welche die beiden Richtungen zu verbinden suchen. Sie greift die z. B. in [PRA] und [GRB] dargestellten Überlegungen hinsichtlich eines Vergleiches von Epstein-Glaser-Regularisierung und insbesondere BPHZ-Regularisierung auf, um daraus zweierlei Nutzen zu ziehen: Zusätzlich zum theoretischen Verständnis einer speziellen Regularisierungsmethode, das der Vergleich mit der Epstein-Glaser-Konstruktion sowohl hinsichtlich der regularisierenden Manipulationen als auch der Kombinatorik bei Mehr-Schleifen-Diagrammen schafft, liefert diese Herausstellung der Äquivalenz insbesondere Vereinfachungen in den expliziten Berechnungen; diese fassen das modifizierte BPHZ-Verfahren und die vereinfachte Anwendung der Waldformel zusammen.



## Kapitel 2

# Zweite Quantisierung und die Berechnung von Streuprozessen

### 2.1 Zweite Quantisierung am Beispiel des reellen freien Klein-Gordon-Felds

Im Gegensatz zur klassischen Quantenmechanik können die Lösungen der relativistischen Klein-Gordon- bzw. Dirac-Gleichung nicht ohne weiteres als Wahrscheinlichkeitsamplituden einzelner Bosonen bzw. Fermionen interpretiert werden. Mit der sog. *Zweiten Quantisierung*, der Ersetzung von klassischen Feldern durch Feldoperatoren, wird der Übergang zu einer Vielteilchen-Theorie bewerkstelligt, die dieser Interpretation nicht bedarf: In der *Quantenfeldtheorie* wird ein erst neu zu definierender *Fockraum* als Hilbertraum der freien Teilchen interpretiert.

Im folgenden sei kurz die Vorgehensweise bei der Quantisierung des reellen freien Klein-Gordon-Felds skizziert (für Einführungen in die Quantenfeldtheorie sei z. B. auf [BJD],[SWL] verwiesen):

Ausgehend von der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} - m^2 \phi^2 \right), \quad (2.1)$$

welche auf die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0 \quad (2.2)$$

führt, werden zwischen der kanonischen Variablen  $\phi(x)$  und ihrem kanonisch konjugierten Impuls  $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$  folgende gleichzeitige Vertauschungsrelationen postuliert:

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] &= 0, \\ [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] &= 0, \\ [\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] &= -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Zur Definition eines diese Kommutatorrelationen erfüllenden Feldoperators  $\phi(x)$  erfolgt nun über dessen Fourierzerlegung nach Ebene-Wellen-Lösungen ein Übergang in den Impulsraum:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}}} \left\{ e^{-ikx} a(\mathbf{k}) + e^{ikx} a^\dagger(\mathbf{k}) \right\} = \phi^+(\mathbf{x}, t) + \phi^-(\mathbf{x}, t),$$

$$k^0 = E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (2.4)$$

Auf der Stufe der hierdurch eingeführten Operatoren  $a(\mathbf{k})$  und  $a^\dagger(\mathbf{k})$  wird dann die Operatorwirkung definiert; die zwischen diesen resultierenden Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= 2E_{\mathbf{k}} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (2.5)$$

legen es nahe, in Analogie zur Besetzungszahldarstellung des quantenmechanischen harmonischen Oszillators einen Hilbertraum  $\mathcal{F}_{n_0}$  wie folgt zu konstruieren: Ein Zustand  $\psi$  wird mittels Anwendung der Erzeugungsoperatoren  $a^\dagger(\mathbf{k})$  auf einen Vakuumzustand  $|0\rangle$ , definiert durch die Wirkung der Vernichtungsoperatoren gemäß  $a(\mathbf{k})|0\rangle = 0$ , aufgebaut:

$$\psi = \left\{ c_0 + \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \frac{d^3 k_1}{2E_{\mathbf{k}_1}} \cdots \frac{d^3 k_n}{2E_{\mathbf{k}_n}} c_n(k_1, \dots, k_n) a^\dagger(\mathbf{k}_1) \cdots a^\dagger(\mathbf{k}_n) \right\} |0\rangle,$$

$$k_n^0 = \sqrt{\mathbf{k}_n^2 + m^2}. \quad (2.6)$$

Die Elemente dieses Fockraumes werden als Linearkombinationen von  $n$ -Teilchen-Zuständen interpretiert; für quadratintegrale Impulsverteilungen  $c_n(k_1, \dots, k_n)$  sind sie normierbar:

$$\langle \psi | \psi \rangle = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{n_0} \int \frac{d^3 k_1}{2E_{\mathbf{k}_1}} \cdots \frac{d^3 k_n}{2E_{\mathbf{k}_n}} |c_n(k_1, \dots, k_n)|^2. \quad (2.7)$$

Die Betrachtung von Zuständen mit diskreten Impulsen  $p_1, \dots, p_n$  erfordert die Einschließung des Grenzfalls  $c_n(k_1, \dots, k_n) = 2E_{\mathbf{k}_1} \cdots 2E_{\mathbf{k}_n} \delta^{3n}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{k}_n - \mathbf{p}_n)$ .

Auf dem derartig konstruierten Fockraum werden nun die Operatoren

$$\begin{aligned} \phi^+(g) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \phi^+(x) g(x) \\ &= \int \frac{d^3 k}{2E_{\mathbf{k}}} \sqrt{2\pi} a(\mathbf{k}) \check{g}(k) \end{aligned} \quad (2.8)$$

und

$$\begin{aligned} \phi^-(g) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \phi^-(x) g(x) \\ &= \int \frac{d^3 k}{2E_{\mathbf{k}}} \sqrt{2\pi} a^\dagger(\mathbf{k}) \check{g}(-k) \end{aligned} \quad (2.9)$$

für jedes Element

$$g(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} e^{ikx} \check{g}(k) \quad (2.10)$$

des Schwarzschen Funktionenraums  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$  von im Unendlichen schnell fallenden Funktionen als Abbildungen von  $\mathcal{F}_{n_0}$  nach  $\mathcal{F}_{n_0 \mp 1}$  definiert. Als ein linear-stetiges Funktional über  $\mathcal{S}$  erfahren die Objekte  $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$  folglich ihre Definition als temperierte operatorwertige *Distributionen*:  $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^4)$ .

Eigentlicher Gegenstand des Interesses sind nun allerdings nicht die freien, sondern die physikalischen, miteinander wechselwirkenden Felder; insbesondere die experimentell bedeutsame Klasse der Streuexperimente sollte im Formalismus der Zweiten Quantisierung eine sinnvolle Beschreibung erfahren.

Im folgenden sei daher demonstriert, wie die Erweiterung des Formalismus der freien Felder auf die Beschreibung von Streuprozessen vorgenommen wird. Dabei sollen zuerst einige in der Literatur häufig zitierte Analogieschlüsse zur klassischen Quantenmechanik als Motivation der Voraussetzungen im exakten Verfahren von Epstein und Glaser interpretiert werden.

## 2.2 Konstruktion der $S$ -Matrix mittels naiver Zeitordnung

In der nichtrelativistischen Quantenmechanik liefert das sog. Wechselwirkungs- oder Diracbild einen sinnvollen Rahmen zur Beschreibung von Übergangswahrscheinlichkeiten, wenn der gesamte Hamiltonoperator aus der Summe eines das freie System beschreibenden Anteils  $H_0$  und eines Störterms  $H_1(t)$  besteht:

$$H = H_0 + H_1(t). \quad (2.11)$$

Den Zusammenhang zwischen Dirac- und Schrödingerbild vermittelt eine unitäre Transformation, welche die aus dem freien Anteil des Hamiltonoperators resultierende Zeitabhängigkeit der Zustände im Schrödingerbild auf die in diesem konstanten Operatoren  $A$  überträgt, während der Wechselwirkungsanteil die zeitliche Entwicklung der Diraczustände  $\phi_D(t)$  bestimmt, so daß gilt:

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_D(t) = [A_D(t), H_0] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A_D(t), \quad (2.12)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\phi_D(t)\rangle = H_{1,D}(t) |\phi_D(t)\rangle. \quad (2.13)$$

Der Zeitentwicklungsoperator  $U_D(t, t_0)$ , welcher gemäß  $|\phi_D(t)\rangle = U_D(t, t_0)|\phi_D(t_0)\rangle$  den Zustand  $|\phi_D(t_0)\rangle$  in den Zustand  $|\phi_D(t)\rangle$  überführt, ist gegeben durch:

$$U_D(t, t_0) = T \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_{1,D}(t') \right). \quad (2.14)$$

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Übergang eines zur Zeit  $\tilde{t}$  vorliegenden Zustands  $|\psi(\tilde{t})\rangle$  in einen Zustand  $|\phi(t)\rangle$  wird folglich im Diracbild durch den Wechselwirkungsanteil des Hamiltonoperators bestimmt:

$$\langle\phi(t)|\psi(t)\rangle \equiv \langle\phi_D(t)|\psi_D(t)\rangle = \langle\phi_D(t)|U_D(t, \tilde{t})\psi_D(\tilde{t})\rangle. \quad (2.15)$$

Unter der Voraussetzung, daß der Störterm  $H_1(t)$  für  $t \rightarrow \pm\infty$  hinreichend schnell verschwindet, können in diesen Grenzwerten gemäß (2.12) und (2.13) die Diracoperatoren sowie insbesondere die Diraczustände mit denen des Heisenbergbilds *im freien System* identifiziert werden: Die Operatoren erfüllen dann die Heisenberggleichungen, während die Zustände zeitunabhängig sind.

Es sind somit die Basiselemente der *freien* Zustände, zwischen denen die  $S$ -Matrix Übergänge vom Anfangszustand  $|i\rangle$  in den Endzustand  $|f\rangle$  beschreibt; ihre Definition erfolgt über ihre Elemente gemäß

$$\langle f|U_D(\infty, -\infty)|i\rangle = \langle f|S|i\rangle = S_{fi}. \quad (2.16)$$

Aus den vorangegangenen Überlegungen kann zwar prinzipiell keine Schlußfolgerung für eine erst zu definierende quantenfeldtheoretische Beschreibung von Streuprozessen gezogen werden. Verhindert nun aber ein zusätzlicher Wechselwirkungsterm in der Lagrangedichte die direkte Lösbarkeit der resultierenden Feldgleichungen, so ist der Versuch naheliegend, diesen als einen Störterm für das - lösbare - freie System zu behandeln. Im folgenden sei anhand der sog.  $\phi^4$ -Theorie, eines Modells für ein skalares neutrales Feld mit einem Selbstwechselwirkungsterm, skizziert, wie die Definition von Streumatrixelementen bezüglich einer Basis von freien Feldern analog zum oben beschriebenen nichtrelativistischen Fall motiviert wird:

Ausgehend von der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} - m^2 \phi^2 \right) - \frac{g}{4!} \phi^4 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad \mathcal{L}_1 = -\frac{g}{4!} \phi^4, \quad (2.17)$$

werden für das wechselwirkende Feld  $\phi$  und dessen konjugierten Impuls  $\dot{\phi}$  versuchsweise die gleichen kanonischen Vertauschungsrelationen (2.3) postuliert wie im freien Fall. Es resultiert insbesondere die Relation

$$\frac{d}{dt}\phi(x) = -i[\phi(x), H_0], \quad H = H_0 + H_1 = H_0 - L_1, \quad (2.18)$$

welche als Bewegungsgleichung im Wechselwirkungsbild interpretiert werden soll; auch die Hamiltonoperatoren  $H_0$  und  $H_1$  sind damit, als Funktionen des Feldes  $\phi$ , diejenigen im Diracbild. Die noch zu definierenden Zustände werden entsprechend als Diraczustände gewählt, deren zeitliche Entwicklung somit der Wechselwirkungsterm  $H_1$  bestimmt. Es ist nun jedoch nicht der Zeitentwicklungsoperator (2.14), dessen Wirkung auf wechselwirkende Basiszustände definiert wird; eine weitere Annahme fließt an dieser Stelle in die heuristischen Überlegungen ein: Für die Definition der  $S$ -Matrix werden die freien mit den wechselwirkenden Feldern *identifiziert*.

Im nichtrelativistischen Streuprozeß gehen unter der Voraussetzung eines hinreichend schnell abfallenden Störterms in der Definition (2.16) die Basiszustände  $|i\rangle$  und  $|f\rangle$  im Grenzfall  $t \rightarrow \pm\infty$

in die des freien Systems über. Hier aber wird nun die zusätzliche Annahme gemacht, daß auch die wechselwirkenden Feldoperatoren durch die auf freie Basiszustände wirkenden freien Feldoperatoren ersetzt werden.

Erst an dieser Stelle erfährt die  $S$ -Matrix - versuchsweise - ihre Definition: Unter Verwendung der Entwicklung (2.4) für die freien Feldoperatoren wirkt der Operator

$$\begin{aligned} S(g) &= T \left( \exp \left( -i \int d^4x \mathcal{H}_1(x) g(x) \right) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n T(\mathcal{H}_1(x_1) \dots \mathcal{H}_1(x_n)) g(x_1) \dots g(x_n), \quad g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4), \end{aligned} \quad (2.19)$$

auf Elemente des in Kapitel 2.1 definierten freien Fockraums. Für dessen Basiselemente  $|i\rangle$  und  $|f\rangle$  liefert schließlich im Grenzwert  $g(x) \rightarrow 1$  der Ausdruck

$$\langle f | S | i \rangle = S_{fi} \quad (2.20)$$

die vorläufige Definition der Streumatrixelemente.

Sie beinhaltet eine *naive* Form der Zeitordnung von Operatoren und führt im Falle der  $\phi^4$ -Theorie bei der Berechnung von Matrixelementen auf UV-Divergenzen, d. h. auf Integrale im Impulsraum, die für große Impulse divergieren. Es ist das Konstruktionsverfahren von Epstein und Glaser, das die Ursache dieser speziellen Divergenzen, die auch in anderen Quantenfeldtheorien, z. B. der Quantenelektrodynamik, auftreten, erklärt und gleichzeitig aus einigen wenigen Grundannahmen heraus eine  $S$ -Matrix liefert, welche in allen Ordnungen einer formalen Entwicklung nach der Kopplungskonstanten frei von UV-Divergenzen ist.



## Kapitel 3

# Das Verfahren von Epstein und Glaser

### 3.1 Die Konstruktion der $S$ -Matrix

Die Methode von Epstein und Glaser, von den Autoren in [EPG] ausgeführt, wird in [SRF] ausführlich behandelt. Sie basiert auf einem störungstheoretischen Ansatz, bei dem die Streumatrix per Definition auf dem Raum der freien Zustände operiert. Einige Eigenschaften, die bereits in die heuristischen Überlegungen von Kapitel 2.2 eingegangen sind, werden als *Postulate* an die zu definierende  $S$ -Matrix übernommen:

1. Der Operator  $S(g)$  ist als eine formale Potenzreihe definiert:

$$S(g) = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n T_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n). \quad (3.1)$$

Dabei beschreibt die Ortsintegration die Wirkung der operatorwertigen *Distributionen*  $T_n(x_1, \dots, x_n)$  auf die Funktion  $g(x_1) \dots g(x_n) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{4n})$ .

2.  $S(g)$  ist Poincaré-kovariant: Sei  $U(a, \Lambda)$  eine unitäre Darstellung der Poincarégruppe auf dem Fockraum der freien Zustände,

$$(U(a, \Lambda)c)_n(p_1, \dots, p_n) = e^{ia \sum_{i=1}^n p_i} c_n(\Lambda^{-1}p_1, \dots, \Lambda^{-1}p_n). \quad (3.2)$$

Für eine Poincarétransformation  $x' = \Lambda x + a$  folgt dann mit dem Transformationsverhalten der Testfunktion,

$$\tilde{g}(x') = g(\Lambda^{-1}(x' - a)), \quad (3.3)$$

die Kovarianzbedingung

$$U(a, \Lambda)S(g)U^{-1}(a, \Lambda) = S(\tilde{g}). \quad (3.4)$$

3. Kausalität: Es gelte für zwei Testfunktionen  $g_1(x)$  und  $g_2(x)$

$$\text{supp } g_1 < \text{supp } g_2, \quad (3.5)$$

d. h. die beiden Träger werden durch eine raumartige Fläche derart voneinander getrennt, daß insbesondere ein Bezugssystem existiert, in dem alle Punkte des Trägers von  $g_1$  kleinere Zeitkomponenten haben als die des Trägers von  $g_2$ . Die Kausalitätsbedingung lautet dann:

$$S(g_1 + g_2) = S(g_2)S(g_1). \quad (3.6)$$

4. Unitarität:

$$S(g)S^\dagger(g) = S^\dagger(g)S(g) = \mathbf{1}. \quad (3.7)$$

Das Epstein-Glaser-Verfahren liefert nun eine rekursive Konstruktionsvorschrift für die operatorwertigen Distributionen  $T_n(x_1, \dots, x_n)$  in der Entwicklung (3.1), welche allein aus der Kausalitätsbedingung 3 und unter Verwendung der Lorentzkovarianz abgeleitet wird. Dieses exakte Verfahren, das in jeder Ordnung  $n$  wohldefinierte Distributionen liefert und im Grenzwert  $g(x) \rightarrow 1$  auf  $S$ -Matrixelemente führt, die frei von UV-Divergenzen sind, sei im folgenden kurz skizziert:

Auf der Stufe der Distributionen  $T_n(x_1, \dots, x_n)$  folgt aus der Forderung der Kausalität die Bedingung

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = T_i(x_1, \dots, x_i)T_{n-i}(x_{i+1}, \dots, x_n) \quad \text{für } \{x_1, \dots, x_i\} > \{x_{i+1}, \dots, x_n\}, \quad (3.8)$$

d. h. die  $T_n(x_1, \dots, x_n)$  sind zeitgeordnete Produkte in dem Sinne, daß (3.8) gilt. Eine *naive* Zeitordnung gemäß

$$\begin{aligned} T_n(x_1, \dots, x_n) &= T(T_1(x_1) \cdots T_1(x_n)) \\ &= \sum_{\pi(1, \dots, n)} \theta(x_{\pi_1}^0 - x_{\pi_2}^0) \cdots \theta(x_{\pi_{n-1}}^0 - x_{\pi_n}^0) T_1(x_{\pi_1}) \cdots T_1(x_{\pi_n}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

ist jedoch i. a. nicht definiert, der Versuch ihrer Definition im Rahmen der heuristischen Überlegungen, resultierend in (2.19), führt gerade auf die dortigen UV-Divergenzen. Im Epstein-Glaser-Formalismus hingegen erfolgt eine *exakte* Definition der  $T_n(x_1, \dots, x_n)$ , welche (3.8) erfüllen.

Wesentlich für das gesamte Verfahren sind die Eigenschaften der  $T_n(x_1, \dots, x_n)$  als temperierte operatorwertige *Distributionen* (als Einführungen in die Theorie von Distributionen seien hier insbesondere [GES] und [GRO] angeführt). Insbesondere besitzt die Schreibweise  $T_n(x_1, \dots, x_n)$  nur einen formalen Sinn als der Ausdruck, welcher mit einer Testfunktion  $h(x_1, \dots, x_n) = g(x_1) \cdots g(x_n) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{4n})$  gewichtet und  $n$ -fach über den Minkowskiraum integriert den Wert  $T_n(h)$  des Funktionals liefert. Gemäß (3.1) sind die  $T_n(x_1, \dots, x_n)$  in diesem Sinne *symmetrisch* in den Argumenten, weshalb diese im folgenden durch die ungeordnete Menge  $X = \{x_i, i = 1, \dots, n\}$  ersetzt werden sollen.

Ein weiteres wesentliches Element der Epstein-Glaser-Konstruktion ist die Produktbildung von operatorwertigen Distributionen. Zur Erläuterung sei diese Problemstellung zunächst für

einfache skalare Distributionen erläutert: Es seien zwei linear-stetige Funktionale  $A(g)$  und  $B(g)$  über dem Raum der Schwarzfunktionen  $g(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$  gemäß

$$A(g) = \int dx A(x)g(x), \quad B(g) = \int dx B(x)g(x) \quad (3.10)$$

definiert. Ein Produkt  $(AB)(g)$  kann nur dann über

$$(AB)(g) = \int A(x)B(x)g(x) \quad (3.11)$$

definiert werden, wenn wenigstens eine der beiden Distributionen  $A$  und  $B$  *regulär* ist, d. h. der Ausdruck  $A(x)$  bzw.  $B(x)$  nicht nur formale Bedeutung hat, sondern tatsächlich eine stetige Funktion über  $\mathbf{R}$  darstellt. Auch für nicht-reguläre, sog. *singuläre* Distributionen definiert ist hingegen die Bildung des *direkten* Produkts

$$(A \times B)(\phi) = A(B(\phi)) = \int dx A(x) \left( \int dy B(y) \phi(x, y) \right) \quad (3.12)$$

auf dem Raum der Schwarzfunktionen  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ . Für Produkte zweier Testfunktionen  $g, h \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$  gilt überdies die einfache Beziehung

$$(A \times B)(gh) = A(gB(h)) = A(g)B(h) = \left( \int dx A(x)g(x) \right) \left( \int dy B(y)h(y) \right). \quad (3.13)$$

Sämtliche von nun an auftretenden Distributionenprodukte sind stets als *direkte* Produkte aufzufassen; sie sind insbesondere auch für auf verschiedendimensionalen Schwarzräumen definierte Funktionale erklärt. Auf der Stufe der formalen Ortsabhängigkeit ist das direkte Produkt durch *unterschiedliche* Ortsargumente in den einzelnen Faktoren gekennzeichnet, wie es der Vergleich von (3.11), formal  $A(x)B(x)$ , mit der symbolischen Schreibweise  $A(x)B(y)$  in (3.12) demonstriert.

Im Verfahren von Epstein und Glaser ist es nun zunächst das inverse Funktional  $S(g)^{-1}$ , in dessen formaler Potenzreihe

$$S(g)^{-1} = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \tilde{T}_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) \quad (3.14)$$

die Distributionen  $\tilde{T}_n(x_1, \dots, x_n) = \tilde{T}_n(X)$  über direkte Produkte erklärt sind; die Auswertung der  $S(g)^{-1}$  definierenden Relation

$$S(g)S(g)^{-1} = S(g)^{-1}S(g) = \mathbf{1} \quad (3.15)$$

für die Potenzreihenentwicklungen liefert:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1(x_1) &= -T_1(x_1), \\ \tilde{T}_2(x_1, x_2) &= -T_2(x_1, x_2) + T_1(x_1)T_1(x_2) + T_1(x_2)T_1(x_1), \\ \tilde{T}_3(x_1, x_2, x_3) &= -T_3(x_1, x_2, x_3) + T_1(x_1)T_2(x_2, x_3) + T_1(x_2)T_2(x_1, x_3) + T_1(x_3)T_2(x_1, x_2) \\ &\quad + T_2(x_1, x_2)T_1(x_3) + T_2(x_1, x_3)T_1(x_2) + T_2(x_2, x_3)T_1(x_1) \\ &\quad - T_1(x_1)T_1(x_2)T_1(x_3) - T_1(x_2)T_1(x_3)T_1(x_1) - T_1(x_3)T_1(x_1)T_1(x_2) \\ &\quad - T_1(x_3)T_1(x_2)T_1(x_1) - T_1(x_2)T_1(x_1)T_1(x_3) - T_1(x_1)T_1(x_3)T_1(x_2), \end{aligned} \quad (3.16)$$

allgemein ausgedrückt durch die Beziehung

$$\tilde{T}_n(x_1, \dots, x_n) = \tilde{T}_n(X) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{P_i} T_{n_1}(X_1) \cdots T_{n_i}(X_i). \quad (3.17)$$

Hierbei wird die ungeordnete Menge  $X = \{x_i, i = 1, \dots, n\}$  in disjunkte, nichtleere und gleichfalls ungeordnete Untermengen  $X_1$  bis  $X_i$  zerlegt,

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_i, \quad (3.18)$$

und dann über alle möglichen Zerlegungen  $P_i$  summiert; die Indizierungen der Distributionen  $T_n$  entsprechen dabei stets der Ordnung  $n$  der ungeordneten Menge im Argument.

Überdies setzt die Bildung direkter Produkte von *operatorwertigen* Distributionen, wie es die Bestimmung der  $\tilde{T}_n(x_1, \dots, x_n)$  gemäß (3.17) erfordert, voraus, daß auch die Produkte der nach Anwendung auf die Testfunktionen  $g(x_1) \cdots g(x_n)$  resultierenden *Operatoren* wohldefiniert sind. Dies ist der Fall, wenn für alle  $n$  die auf einen Fockraum  $\mathcal{F}_{n_0}$  wirkenden Operatoren  $T_n(h)$ ,  $h(x_1, \dots, x_n) = g(x_1) \cdots g(x_n)$ , diesen auch wiederum auf einen bestimmten Fockraum  $\mathcal{F}_{n_1}(n)$  abbilden.

Die rekursive Konstruktion der  $T_n(x_1, \dots, x_n)$  findet nun folgendermaßen statt: Es seien bereits alle  $T_m(X) : \mathcal{F}_{n_0} \rightarrow \mathcal{F}_{n_1}(m)$  mit Index  $1 \leq m \leq n-1$ ,  $n \geq 2$  bekannt und erfüllen die Bedingungen, welche die Postulate 1 bis 4 an die *S*-Matrix auf der Stufe dieser Funktionale ergeben. Dann lassen sich durch direkte Produktbildung folgende operatorwertige Distributionen angeben:

$$A'_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{P_2} \tilde{T}_k(X) T_{n-k}(Y, x_n), \quad (3.19)$$

$$R'_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{P_2} T_{n-k}(Y, x_n) \tilde{T}_k(X). \quad (3.20)$$

Die Partitionen  $P_2$  sind hierbei Zerlegungen der ungeordneten Menge  $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$  in zwei disjunkte ungeordnete Untermengen  $X$  und  $Y$ , bei denen die leere Menge für  $X$  ausgeschlossen wird:

$$P_2 : \{x_1, \dots, x_{n-1}\} = X \cup Y, \quad X \neq \emptyset. \quad (3.21)$$

Im einzelnen bedeutet dies für die Distributionen  $A'_n$  und  $R'_n$ :

$$\begin{aligned} A'_2(x_1, x_2) &= \tilde{T}_1(x_1) T_1(x_2) = -T_1(x_1) T_1(x_2), \\ A'_3(x_1, x_2, x_3) &= \tilde{T}_1(x_1) T_2(x_2, x_3) + \tilde{T}_1(x_2) T_2(x_1, x_3) + \tilde{T}_2(x_1, x_2) T_1(x_3) \\ &= -T_1(x_1) T_2(x_2, x_3) - T_1(x_2) T_2(x_1, x_3) - T_2(x_1, x_2) T_1(x_3) \\ &\quad + T_1(x_1) T_1(x_2) T_1(x_3) + T_1(x_2) T_1(x_1) T_1(x_3), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} R'_2(x_1, x_2) &= T_1(x_2) \tilde{T}_1(x_1) = -T_1(x_2) T_1(x_1), \\ R'_3(x_1, x_2, x_3) &= T_2(x_2, x_3) \tilde{T}_1(x_1) + T_2(x_1, x_3) \tilde{T}_1(x_2) + T_1(x_3) \tilde{T}_2(x_1, x_2) \\ &= -T_2(x_2, x_3) T_1(x_1) - T_2(x_1, x_3) T_1(x_2) - T_1(x_3) T_2(x_1, x_2) \\ &\quad + T_1(x_3) T_1(x_1) T_1(x_2) + T_1(x_3) T_1(x_2) T_1(x_1). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Im Unterschied hierzu *nicht* bekannt sind die Distributionen  $A_n$  und  $R_n$ , bei denen die Summation in (3.19) und (3.20) auf die Partitionen  $P_2^0$ , welche auch die leere Menge für  $X$  einschließen, erweitert wird: In den Ausdrücken

$$A_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{P_2^0} \tilde{T}_k(X) T_{n-k}(Y, x_n) = A'_n + T_n(x_1, \dots, x_n), \quad (3.24)$$

$$R_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{P_2^0} T_{n-k}(Y, x_n) \tilde{T}_k(X) = R'_n + T_n(x_1, \dots, x_n) \quad (3.25)$$

sind die erst noch zu konstruierenden  $T_n(X)$  unbekannt. Dennoch sind es gerade diese Gleichungen, welche den entscheidenden Hinweis zur Bestimmung der gesuchten Funktionale liefern: Die Betrachtung der bekannten niedrigeren Ordnungen  $m < n$  zeigt, daß die Distributionen  $A_m(x_1, \dots, x_m)$  und  $R_m(x_1, \dots, x_m)$  bestimmte *Trägereigenschaften* besitzen:  $A_m$  besitzt avancierten,  $R_m$  retardierten Träger gemäß

$$\text{supp } A_m(x_1, \dots, x_m) \subseteq \Gamma_m^-(x_m), \quad (3.26)$$

$$\text{supp } R_m(x_1, \dots, x_m) \subseteq \Gamma_m^+(x_m), \quad (3.27)$$

d. h. alle Argumente  $x_1, \dots, x_m$  befinden sich im abgeschlossenen Vorwärts- ( $\overline{V^+}$ ) bzw. Rückwärtslichtkegel ( $\overline{V^-}$ ) des Elements  $x_m$ ,

$$\Gamma_m^\pm(x_m) = \{(x_1, \dots, x_m), x_i \in \overline{V^\pm}(x_m), \forall i = 1, \dots, m\}. \quad (3.28)$$

Als Vereinigung der Träger von  $A_n$  und  $R_n$  ist dann derjenige der Distribution

$$D_m(x_1, \dots, x_m) = R_m(x_1, \dots, x_m) - A_m(x_1, \dots, x_m) = R'_m(x_1, \dots, x_m) - A'_m(x_1, \dots, x_m) \quad (3.29)$$

*kausal*, d. h.  $\text{supp } D_m(x_1, \dots, x_m) \subseteq \Gamma_m^-(x_m) \cup \Gamma_m^+(x_m)$ . Diese Kausalität, resultierend aus den kausalen Eigenschaften (3.8) der bereits bekannten  $T_m$ , muß nun auch für die interessierende Ordnung  $n$  gefordert werden; allerdings ist die Distribution  $D_n(x_1, \dots, x_n)$  nach (3.29) bereits über die auch in dieser Ordnung bekannten *gestrichenen* Funktionale  $A'_n$  und  $R'_n$  festgelegt. Tatsächlich zeigt sich unter zusätzlicher Verwendung von deren Lorentzkovarianz, daß die an den Träger von  $D_n$  zu stellende Kausalitätsbedingung für  $n \geq 3$  generell erfüllt ist und folglich nur in der Ordnung  $n = 2$  explizit überprüft werden muß.

Gelingt nun schließlich eine Zerlegung der kausalen Distribution  $D_n$  in einen avancierten und einen retardierten Anteil  $A_n$  bzw.  $R_n$ , so läßt sich zeigen, daß das mit diesen resultierende Funktional

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = R_n(x_1, \dots, x_n) - R'_n(x_1, \dots, x_n) = A_n(x_1, \dots, x_n) - A'_n(x_1, \dots, x_n) \quad (3.30)$$

die geforderten Kausalitätseigenschaften (3.8) besitzt. Wenn dieses sog. *Splitten* darüberhinaus stets durch die Multiplikation mit entsprechenden Stufenfunktionen möglich wäre, ergäbe sich hieraus wieder die naive Zeitordnung (3.9). Es ist somit das Splitten von kausalen Distributionen, das der genaueren Betrachtung bedarf; insbesondere die Freiheit, welche die Forderung der Kausalität für zusammenfallende Argumente noch enthält, bekommt dabei eine grundlegende Bedeutung.

### 3.2 Das Splitten kausaler Distributionen

Zur Anwendung des beschriebenen rekursiven Verfahrens ist nun zunächst die Festlegung des Funktionalen  $T_1(x)$  erforderlich. In Anlehnung an den aus heuristischen Überlegungen folgenden Ausdruck (2.19) für  $S(g)$  scheint hier der Ansatz  $T_1(x) = -i\mathcal{H}_1(x) = i\mathcal{L}_1(x)$  einen sinnvollen Eingang der zu beschreibenden Wechselwirkung in die Konstruktion darzustellen. Es ist ferner für die Anwendbarkeit des Epstein-Glaser-Verfahrens wesentlich, daß dieser Wechselwirkungsanteil der Lagragedichte aus einem normalgeordneten Polynom in den operatorwertigen Felddistributionen besteht; unter dieser Voraussetzung läßt sich überdies das Problem des Distributionensplittens erheblich vereinfachen. Dies soll im folgenden wiederum am Beispiel der  $\phi^4$ -Theorie demonstriert werden:

Das *Wicktheorem* für Produkte von aus einem Erzeugungs- und einem Vernichtungsanteil bestehender Feldoperatoren erlaubt deren Umordnung in eine Summe *normalgeordneter* Operatoren, d. h. Operatoren, deren Vernichtungsanteile den Erzeugungsanteilen in ihrer Wirkung auf die Zustände des Fockraums vorangehen. Dieses Theorem ist zunächst für Feldoperatoren  $A_i = \phi(g_i)$ , d. h. für auf Testfunktionen  $g_i$  ausgewertete Distributionen  $\phi$ , formuliert, deren Produkte wie folgt normalgeordnet werden können:

$$\begin{aligned}
 & A_1 A_2 \cdots A_n \\
 &= :A_1 A_2 \cdots A_n: + \sum_{i < j} \langle 0 | A_i A_j | 0 \rangle :A_1 \cdots \check{A}_i \cdots \check{A}_j \cdots A_n: \\
 &+ \sum_{i_1 < j_1, i_2 < j_2} \langle 0 | A_{i_1} A_{j_1} | 0 \rangle \langle 0 | A_{i_2} A_{j_2} | 0 \rangle :A_1 \cdots \check{A}_{i_1} \cdots \check{A}_{j_1} \cdots \check{A}_{i_2} \cdots \check{A}_{j_2} \cdots A_n: \\
 &+ \dots + \sum_{i_a < j_a} \Pi_a \langle 0 | A_{i_a} A_{j_a} | 0 \rangle :A_1 \cdots \check{A}_{i_a} \cdots \check{A}_{j_a} \cdots A_n:,
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

wobei  $\check{A}_i$  die Auslassung des Operators  $A_i$  bedeutet. Es kann direkt auf den Fall verallgemeinert werden, daß die Operatoren  $A_i$  selbst bereits normalgeordnete Produkte von Feldoperatoren sind; dann erfolgen die Summationen in (3.31) ausschließlich über Kontraktionen zwischen Feldoperatoren *verschiedener* Normalordnungen. Formal liefert das Wicktheorem damit auch eine Vorschrift zur Normalordnung von Produkten operatorwertiger Felddistributionen  $\phi(x_i)$  an verschiedenen Orten  $x_i$ ; an die Stelle der Vakuumserwartungswerte  $\langle 0 | A_i A_j | 0 \rangle$  bzw.  $\langle 0 | A_j A_i | 0 \rangle$  treten dann die Ausdrücke

$$\langle 0 | \phi(x_i) \phi(x_j) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2E_{\mathbf{k}}} e^{-ik(x_i - x_j)} = i\Delta_+(x_i - x_j), \tag{3.32}$$

$$\langle 0 | \phi(x_j) \phi(x_i) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2E_{\mathbf{k}}} e^{ik(x_i - x_j)} = -i\Delta_-(x_i - x_j), \tag{3.33}$$

$$k^0 = E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}.$$

Auch wohldefinierte direkte Produkte von normalgeordneten Polynomen in den Felddistributionen, wie sie bei der Epstein-Glaser-Konstruktion auftreten, werden entsprechend dieser Vorschrift normalgeordnet; nur Kontraktionen zwischen Feldern aus verschiedenen Normalordnun-

gen tragen bei.<sup>1</sup> Die spezielle Konstruktion der Funktionale  $A'_n$  und  $R'_n$  gemäß (3.19) und (3.20), bei der in deren einzelnen Summanden stets die Reihenfolge der Distributionen  $\tilde{T}_k(X)$  und  $T_{n-k}(Y, x_n)$  relativ zueinander vertauscht ist, erlaubt es nun, auch das zu splittende Funktional  $D_n = R'_n - A'_n$  in eine Summe normalgeordneter Operatoren zusammenzufassen: Die Feldoperatoren innerhalb der Normalordnung *kommutieren*, während das Trägerverhalten von den skalaren Vorfaktoren bestimmt wird.

Letztere sind nun bereits für sich betrachtet als temperierte skalare *Distributionen* über dem Testfunktionenraum  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{4n})$  definiert, da das Produkt der ursprünglichen Testfunktion mit dem Erwartungswert der normalgeordneten Feldoperatoren bezüglich Zuständen des Fockraums wieder eine zulässige Testfunktion ergibt. Überdies sind diese skalaren Distributionen, wie es (3.32) und (3.33) demonstrieren, *translationsinvariant* in ihrer - formalen - Ortsabhängigkeit. Im Hinblick auf die gesuchte Zerlegung in einen bez.  $x_n$  avancierten bzw. retardierten Anteil ist an dieser Stelle eine weitere Vereinfachung möglich: Für festes  $x_n$ , d. h. für Testfunktionen aus  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{4n-4})$ , und nach dem Einführen neuer Variablen  $x'_i = x_i - x_n$  entspricht diese Zerlegung einem Splitten an der Stelle  $x'_i = 0$ .

Es ist nun das Verhalten der skalaren Distribution, formal abhängig von den neuen Ortsargumenten  $x'_i$ , an dieser Stelle  $x'_i = 0$ , welches entscheidet, ob das Splitten entsprechend der beiden Trägerbereiche möglich ist; weil diese Punkte sowohl dem avancierten als auch dem retardierten abgeschlossenen Trägerbereich zugehören, ist zu vermuten, daß die gesuchte Zerlegung nur dann möglich ist, wenn die zu splittende Distribution in der Umgebung der Stelle  $x'_i = 0$ , d. h. für Testfunktionen, deren Träger auf diese Umgebung konzentriert sind, hinreichend schnell verschwindet.

Tatsächlich liefert die Definition der sog. *singulären Ordnung* einer temperierten Distribution  $d(x_1, \dots, x_{n-1}) \equiv d(x) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^k)$ ,  $k = 4n-4$ , ein einfaches Kriterium für die Zerlegbarkeit, indem sie das Verhalten von  $d(x)$  in der Umgebung von  $x = 0$  charakterisiert: Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) \delta^k d(\delta x) = d_0(x) \not\equiv 0 \quad (3.34)$$

gleichfalls als temperierte Distribution in  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^k)$ , und gilt für die positive stetige sog. *Power-counting-Funktion*  $\rho(\delta)$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\rho(a\delta)}{\rho(\delta)} = a^\omega, \quad a > 0, \quad (3.35)$$

so wird hierdurch die singuläre Ordnung  $\omega$  definiert.

Es ist der Wert von  $\omega$ , welcher für eine gegebene temperierte Distribution in bezug auf das Zerlegungsproblem zwei Fälle unterscheidet:

1.  $\omega < 0$ : In diesem Fall ist das Splitten möglich; die Trennung des Trägers durch eine raumartige Hyperfläche  $v \cdot x = 0$  definiert gemäß

$$\int d^k x \, d_{\text{ret}}(x) g(x) := \int d^k x \, d(x) \theta(v \cdot x) g(x), \quad (3.36)$$

---

<sup>1</sup>Die Anwendbarkeit des Wicktheorems für diesen Fall, in dem anstelle direkter Produkte von Felddistributionen solche von *Polynomen* von Felddistributionen - insbesondere am gleichen Ort - normalgeordnet werden, wird in Kapitel 9.1 explizit demonstriert.

$$\int d^k x \, d_{\text{av}}(x) g(x) := - \int d^k x \, d(x) (1 - \theta)(v \cdot x) g(x) \quad (3.37)$$

für alle Testfunktionen  $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$  eindeutig den retardierten bzw. avancierten Teil der Distribution  $d(x) = d_{\text{ret}}(x) - d_{\text{av}}(x)$ ; diese Zerlegung ist zudem unabhängig vom zeitartigen Vektor  $v = (v_1, \dots, v_{n-1})$ ,  $v_i \in V^+$ .

2.  $\omega \geq 0$ : Hier ist ein Splitten in die beiden Trägerbereiche auf dem gesamten Definiti onsreich  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$  nicht möglich. Lediglich für diejenigen Funktionen  $\phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$  mit  $D^a \phi(0) = 0$  für  $|a| \leq \omega$ , wobei

$$D^a = \frac{\partial^{a_1 + \dots + a_k}}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_k^{a_k}}, \quad |a| = a_1 + \dots + a_k, \quad (3.38)$$

ist auch in diesem Fall die gesuchte Zerlegung gemäß (3.36) und (3.37) definiert.

An dieser Stelle muß nun die bereits erwähnte Freiheit, welche die Forderung von Kausa lität für zusammenfallende Argumente noch enthält, hinzugezogen werden, um die rekursive Konstruktionsmethode auch im Fall 2 zu ermöglichen. Nach Ausnutzung der Translationsinvarianz wie geschehen besteht diese Freiheit gerade für die Argumente  $(x_1, \dots, x_{n-1}) = x = 0$ : Die Trägereigenschaften der zu splittenden Distribution manifestieren sich notwendigerweise nur auf Testfunktionen, die für  $x = 0$  einschließlich aller ihrer Ableitungen verschwinden; nur für diese ist zunächst die Zerlegbarkeit zu fordern, und für diese ist sie auch im Falle  $\omega \geq 0$  gewährleistet.

Dennoch ist es - im Hinblick auf den adiabatischen Limes  $g(x) \rightarrow 1$  - nötig, auch für  $\omega \geq 0$  eine Definition der avancierten bzw. retardierten Distributionen zu formulieren, welche für alle Testfunktionen  $g$  erklärt ist. Eine solche liefert nun:

$$\int d^k x \, d_{\text{ret,reg}}(x) g(x) := \int d^k x \, d(x) \theta(v \cdot x) (Wg)(x), \quad (3.39)$$

$$\int d^k x \, d_{\text{av,reg}}(x) g(x) := - \int d^k x \, d(x) (1 - \theta)(v \cdot x) (Wg)(x), \quad (3.40)$$

mit dem Operator  $W : \mathcal{S}(\mathbf{R}^k) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$  gemäß

$$(Wg)(x) := g(x) - w(x) \sum_{|a|=0}^{\omega} \frac{x^a}{a!} (D^a g)(0) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k), \quad (3.41)$$

wobei die Schwarzfunktion  $w(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$  den Bedingungen

$$w(0) = 1, \quad D^a w(x) = 0 \quad \forall \quad 1 \leq |a| \leq \omega \quad (3.42)$$

genügen soll. Auf die Testfunktionen  $\phi$ , für die gemäß Punkt 2 das Splitten auch für  $\omega \geq 0$  möglich ist, wirkt der Operator  $W$  als Identität, i. a. aber sind die in (3.39) und (3.40) definierten Distributionen abhängig von der speziellen Wahl der Funktion  $w(x)$ , welche somit in bestimmter Weise über die ausgenutzte Freiheit verfügt.

Mit der Lösung des Zerlegungsproblems ist nun das rekursive Verfahren zur Bestimmung der Distributionen  $T_n$  in der Entwicklung (3.1) der formalen Potenzreihe von  $S(g)$  vollständig erklärt; insbesondere erfüllen diese *per Konstruktion* die Kausalitätsbedingung (3.8). Noch zu überprüfen verbleiben somit die Forderungen, welche Poincaré-Kovarianz und Unitarität des Funktionals  $S(g)$  in jeder Ordnung  $n$  der Entwicklung an die Distributionen  $T_n$  stellen:

Liefert ein Poincaré-kovarianter Wechselwirkungsterm  $i\mathcal{L}_1(x) = T_1(x) : \mathcal{F}_{n_0} \rightarrow \mathcal{F}_{n_1}$  den Ausgangspunkt des Konstruktionsverfahrens, so wird dieses Transformationsverhalten direkt auf die Funktionale  $T_n$  der höheren Ordnungen übertragen, denn sowohl die Bildung der direkten Produkte als auch das Splitten der kausalen translationsinvarianten Distributionen erhält die Poincaré-Kovarianz. In bezug auf letzteres verdient der Fall  $\omega \geq 0$  eine spezielle Betrachtung: Wie es die Ausdrücke (3.32) und (3.33) demonstrieren, handelt es sich bei den zu splittenden skalaren Distributionen insbesondere auch um Lorentz-*invariante* Funktionale. Nur die Wahl einer gleichfalls Lorentz-invarianten Funktion  $w(x)$  im Operator  $W(g)$  von (3.41) garantiert den Erhalt dieser Eigenschaft beim Zerlegungsprozeß; anderenfalls bedingt das Transformationsverhalten von  $w$  eine - allerdings wohlkontrollierte - Abhängigkeit der speziellen Zerlegung vom Bezugssystem.

Die Forderung der Unitarität schließlich liefert auf der Stufe der Distributionen  $T_n$  die Bedingung

$$T_n^\dagger(x_1, \dots, x_n) = \tilde{T}_n(x_1, \dots, x_n), \quad (3.43)$$

welche in jeder Ordnung  $n$  zu überprüfen bleibt - insbesondere unter erneuter Hinzunahme von beim Zerlegungsverfahren ausgenutzten Freiheiten, über die bei dessen spezieller Durchführung zunächst auf bestimmte Art und Weise verfügt wurde.

Der wesentliche Unterschied zwischen dem Versuch der Definition einer  $S$ -Matrix mittels naiver Zeitordnung gemäß (2.19) und dem konsistenten Konstruktionsverfahren von Epstein und Glaser manifestiert sich in Streuprozessen, zu deren Berechnung skalare Distributionen mit singulärer Ordnung  $\omega \geq 0$  zu zerlegen sind, für die ein naives Splitten mit Stufenfunktionen nicht definiert ist. Während der heuristische Ansatz, auf dieser naiven Definition der Zeitordnung basierend, für die entsprechenden  $S$ -Matrixelemente auf UV-Divergenzen führt, treten solche im Epstein-Glaser-Verfahren nicht auf:

Es ist somit der Vergleich mit den Ergebnissen dieser Konstruktionsmethode, dem ein jedes *Regularisierungsverfahren*, welches den formalen, divergenten Resultaten des heuristischen Ansatzes einen endlichen Term zuordnet, im Rahmen der verbleibenden Freiheiten standhalten muß.

Eine leichte Modifikation der Epstein-Glaser-Methode erlaubt schließlich den direkten Vergleich von nur formalen, divergenten Bestandteilen der naiv bestimmten Funktionale  $\mathcal{T}(\mathcal{H}_1(x_1) \cdot \dots \cdot \mathcal{H}_1(x_n))$  mit den entsprechenden im wohldefinierten Konstruktionsverfahren und liefert somit eine Vorschrift zur Regularisierung.

### 3.3 Das Epstein-Glaser-Verfahren als Regularisierungsmethode

Die Interpretation der Epstein-Glaser-Konstruktion als Regularisierungsmethode ist u. a. in [PIN] und [PRA] ausgeführt. Sie soll im folgenden am Beispiel eines Prozesses aus der  $\phi^4$ -Theorie erläutert werden, dessen Berechnung dazu kurz skizziert sei: Zur sog. *Vierpunktfunction*, die Wechselwirkung vierer Teilchen beschreibend, trägt in zweiter Ordnung, d. h. als Bestandteil des Funktionalen  $T_2(x_1, x_2)$ , der Term mit dem Wickmonom  $:\phi^2(x_1)\phi^2(x_2):$  bei; dieser wird mittels des rekursiven Verfahrens, ausgehend von der Distribution  $T_1(x) = i\mathcal{L}_1(x) = -i\frac{g}{4!}:\phi^4:$ , in folgenden Schritten bestimmt:

1. Konstruktion des relevanten Beitrags zur kausalen Distribution  $D_2(x_1, x_2)$  durch Anwendung des Wicktheorems:

$$\begin{aligned} A'_2(x_1, x_2) &= -:T_1(x_1)::T_1(x_2): = \frac{g^2}{(4!)^2}:\phi^4(x_1)::\phi^4(x_2): \\ &= \dots + 72 \cdot \frac{g^2}{(4!)^2} \langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle^2 :\phi^2(x_1)\phi^2(x_2): + \dots, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} R'_2(x_1, x_2) &= -:T_1(x_2)::T_1(x_1): = \frac{g^2}{(4!)^2}:\phi^4(x_2)::\phi^4(x_1): \\ &= \dots + 72 \cdot \frac{g^2}{(4!)^2} \langle 0|\phi(x_2)\phi(x_1)|0\rangle^2 :\phi^2(x_1)\phi^2(x_2): + \dots \end{aligned} \quad (3.45)$$

und somit

$$\begin{aligned} D_2(x_1, x_2) &= R'_2(x_1, x_2) - A'_2(x_1, x_2) \\ &= \dots + 72 \cdot \frac{g^2}{(4!)^2} (\langle 0|\phi(x_2)\phi(x_1)|0\rangle^2 - \langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle^2) :\phi^2(x_1)\phi^2(x_2): + \dots \\ &= \dots + 72 \cdot \frac{g^2}{(4!)^2} (\Delta_+^2(x_1 - x_2) - \Delta_-^2(x_1 - x_2)) :\phi^2(x_1)\phi^2(x_2): + \dots \end{aligned} \quad (3.46)$$

2. Zerlegung der skalaren Distribution in avancierten und retardierten Anteil:

Die Trägereigenschaft der zu splittenden Distribution  $\Delta_+^2(x) - \Delta_-^2(x) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^4)$  leitet sich aus derjenigen einer Zusammensetzung ihrer Bestandteile  $\Delta_+$  und  $\Delta_-$  ab: Gemäß den kanonischen Vertauschungsrelationen besitzt die Kommutatordistribution  $\Delta(x)$  mit

$$\begin{aligned} i\Delta(x_1 - x_2) &= [\phi(x_1), \phi(x_2)] = \langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2) - \phi(x_2)\phi(x_1)|0\rangle \\ &= i\Delta_+(x_1 - x_2) + i\Delta_-(x_1 - x_2) \\ &=: i\Delta_{\text{av}}(x_1 - x_2) - i\Delta_{\text{ret}}(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (3.47)$$

kausalen Träger<sup>2</sup>,  $\text{supp } \Delta(x_1, x_2) \subseteq \Gamma_2^+(x_2) \cup \Gamma_2^-(x_2)$ ; überdies erlaubt die singuläre Ordnung  $\omega = -2$  der Distribution  $\Delta$  die einfache Konstruktion von  $\Delta_{\text{av}}$  und  $\Delta_{\text{ret}}$  durch

---

<sup>2</sup>Im folgenden wird für die Indizierung konkreter, die Distributionen  $\Delta_{\text{av}}$  bzw.  $\Delta_{\text{ret}}$  enthaltender Ausdrücke stets die hier getroffene Vorzeichenkonvention verwandt.

Multiplikation mit der entsprechenden Stufenfunktion. Die Relation

$$\Delta_+^2 - \Delta_-^2 = (\Delta_+ + \Delta_-)(\Delta_+ - \Delta_-) = \Delta(\Delta_+ - \Delta_-) \quad (3.48)$$

zeigt schließlich, daß das zu splittende Funktional tatsächlich kausalen Träger besitzt; als eine Distribution mit singulärer Ordnung  $\omega = 0$  kann es allerdings nur gemäß (3.39) und (3.40) auf *subtrahierten*, d. h. der  $W$ -Operation unterzogenen Testfunktionen in einen avancierten und einen retardierten Anteil zerlegt werden.

3. Bestimmung des resultierenden Anteils an der Distribution  $T_2(x_1, x_2)$ :

Für das Funktional  $T_2(x_1, x_2)$  folgt schließlich:

$$\begin{aligned} T_2(x_1, x_2) &= A_2(x_1, x_2) - A'_2(x_1, x_2) \\ &= \dots - 72 \cdot \frac{g^2}{(4!)^2} \left( (\Delta_+^2(x_1 - x_2) - \Delta_-^2(x_1 - x_2))_{\text{av,reg}} - \Delta_+^2(x_1 - x_2) \right) \\ &\quad \cdot : \phi^2(x_1) \phi^2(x_2) : + \dots \end{aligned} \quad (3.49)$$

Zur Interpretation des Epstein-Glaser-Verfahrens als Regularisierungsverfahren sei an dieser Stelle der Vergleich mit dem formalen Ergebnis der Konstruktion über die naive Zeitordnung hergestellt: Für zeitgeordnete Produkte von Feldoperatoren tritt im Wicktheorem (3.31) an die Stelle der Distributionen  $\Delta_+$  und  $\Delta_-$  das symmetrische Funktional

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{T}(\phi(x_i)\phi(x_j)) | 0 \rangle &= \langle 0 | \theta(x_i^0 - x_j^0)\phi(x_i)\phi(x_j) + \theta(x_j^0 - x_i^0)\phi(x_j)\phi(x_i) | 0 \rangle \\ &= i\Delta_+(x_i - x_j) - i\Delta_{\text{av}}(x_i - x_j) = -i\Delta_-(x_i - x_j) - i\Delta_{\text{ret}}(x_i - x_j) \\ &=: \Delta_F(x_i - x_j) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x_i - x_j)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

der Feynmanpropagator der  $\phi^4$ -Theorie. Dieses Wicktheorem für zeitgeordnete Operatoren ist in seiner Wirkung auf nicht naiv definierte zeitgeordnete Operatorprodukte allerdings nur formal zu interpretieren: Es ermöglicht gerade, auf der Ebene einzelner konkreter Streuprozesse, den gesuchten Vergleich der auf divergente Integrale führenden heuristisch motivierten Konstruktion mit der wohldefinierten von Epstein und Glaser. Im Falle des Beitrags zur Vierpunktfunction in zweiter Ordnung liefert es - formal - den Ausdruck

$$\begin{aligned} i^2 \mathcal{T}(\mathcal{H}_1(x_1)\mathcal{H}_1(x_2)) &= -\frac{g^2}{(4!)^2} \mathcal{T}(\phi^4(x_1)\phi^4(x_2)) \\ &= \dots - 72 \cdot \frac{g^2}{(4!)^2} \Delta_F^2(x_1 - x_2) : \phi^2(x_1) \phi^2(x_2) : + \dots \end{aligned} \quad (3.51)$$

Im Gegensatz zu der skalaren Distribution  $(\Delta_+^2 - \Delta_-^2)_{\text{av,reg}} - \Delta_+^2$  im entsprechenden Term (3.49) ist das Quadrat des Funktionals  $\Delta_F$  auf allgemeinen Testfunktionen  $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$  *nicht* definiert.

Als leichte Modifikation der Epstein-Glaser-Methode sei nun, analog zur dortigen Konstruktion der avancierten Distribution  $(\Delta_+^2 - \Delta_-^2)_{\text{av,reg}}$ , auch das Funktional  $\Delta_+^2$  auf entsprechend der singulären Ordnung  $\omega = 0$  subtrahierte Testfunktionen eingeschränkt,

$$\int d^4 x \Delta_{+, \text{reg}}^2(x) g(x) = \int d^4 x \Delta_+^2(x) (g(x) - w(x)g(0)), \quad (3.52)$$

so daß insgesamt als Modifikation der skalaren Distribution im betrachteten Prozeß folgendes Funktional resultiert:

$$\begin{aligned}
 (\Delta_+^2 - \Delta_-^2)_{\text{av,reg}} - \Delta_{+, \text{reg}}^2 &= ((\Delta_+^2 - \Delta_-^2)_{\text{av}} - \Delta_{+, \text{reg}}^2)_{\text{reg}} = (\Delta_{\text{av}}(\Delta_+ - \Delta_-) - \Delta_+^2)_{\text{reg}} \\
 &= (\Delta_{\text{av}}(2\Delta_+ - \Delta_{\text{av}} + \Delta_{\text{ret}}) - \Delta_+^2)_{\text{reg}} = (-\Delta_{\text{av}}^2 + 2\Delta_+\Delta_{\text{av}} - \Delta_+^2)_{\text{reg}} \\
 &= \Delta_{F, \text{reg}}^2.
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Indem hier lediglich zur Einschränkung der prinzipiell auf beliebigen Testfunktionen  $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$  definierten Distribution  $\Delta_+^2$  gemäß (3.52) nochmals dieselbe Freiheit in der Definition der Funktionale  $T_n$  herangezogen wird, wie sie bereits für den Zerlegungsprozeß ausgenutzt wurde, ist nun ein direkter Vergleich mit dem formalen Ausdruck  $\Delta_F^2$  möglich, welcher zugleich eine *Regularisierungsvorschrift* liefert:

Die Einschränkung des Funktionals  $\Delta_F^2$  auf gemäß der  $W$ -Operation (3.41) subtrahierte Testfunktionen ergibt eine auf dem gesamten Raum der Schwarzfunktionen definierte *Regularisierung*  $\Delta_{F, \text{reg}}$  dieser Distribution,

$$\int d^4x \Delta_{F, \text{reg}}^2(x) g(x) = \int d^4x \Delta_F^2(x) (g(x) - w(x)g(0)) \quad \forall g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4). \tag{3.54}$$

Generell soll nun, diesem Beispiel entsprechend, als *Regularisierungsverfahren nach Epstein-Glaser* diejenige Methode bezeichnet werden, bei der eine bestimmte, durch naive Zeitordnung konstruierte und auf allgemeinen Testfunktionen *nicht* definierte skalare Distribution mit der nach dem Epstein-Glaser-Verfahren konstruierten verglichen und durch Einschränkung auf bis zur entsprechenden singulären Ordnung  $\omega$  subtrahierte Testfunktionen *regularisiert* wird.

Die Freiheit, welche die Kausalitätsbedingung (3.8) für zusammenfallende Argumente gewährt, diente bereits im Konstruktionsverfahren zur Erklärung des Zerlegungsprozesses und wurde schließlich im Regularisierungsverfahren nochmals herangezogen; eine spezielle Wahl der Funktion  $w(x)$  in der  $W$ -Operation aber verfügt letztlich auf bestimmte Weise über sie. Wenn sich daher Epstein-Glaser-Regularisierungen mit unterschiedlichen  $W$ -Operatoren auf gewisse Art und Weise unterscheiden, so ist dies eine Manifestation eben dieser Freiheit, und auch nur innerhalb derer muß ein jedes anderes Regularisierungsverfahren dem Vergleich mit dem nach Epstein und Glaser standhalten.

Bei der Epstein-Glaser-Regularisierung einer Distribution  $d \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^k)$  mit singulärer Ordnung  $\omega$  ergibt sich die Differenz zweier mittels unterschiedlicher  $W$ -Operatoren, entsprechend zweier verschiedener Schwarzfunktionen  $w$  und  $v$ , erhaltener Resultate wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \int d^k x (d_{\text{reg}, w}(x) - d_{\text{reg}, v}(x)) g(x) &= \int d^k x d(x) (v(x) - w(x)) \sum_{|a|=0}^{\omega} \frac{x^a}{a!} (D^a g)(0) \\
 &= \int d^k x \left( \sum_{|a|=0}^{\omega} c_a D^a \delta(x) \right) g(x),
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

wobei die Konstanten  $c_a$  durch

$$c_a = \int d^k x d(x) (-1)^{|a|} \frac{x^a}{a!} (v(x) - w(x)) \tag{3.56}$$

bestimmt sind; aufgrund der Eigenschaften (3.42) der Funktionen  $v$  und  $w$  sind sie als Werte der Distribution  $d(x)$  zulässig. Bei diesem Vergleich manifestiert sich die ausgenutzte Freiheit somit darin, daß sich zwei verschiedene Regularisierungen durch Diracsche  $\delta$ -Distributionen und deren Ableitungen bis zur Ordnung  $\omega$  unterscheiden.

Erst die *beliebige* Wahl der Koeffizienten  $c_a$  in (3.55) repräsentiert dann schließlich die gesamte Freiheit, welche - prinzipiell beim Konstruktions- bzw. Regularisierungsverfahren von Epstein-Glaser ausgenutzt - die Forderung der Kausalität gewährt: Zwei verschiedene Distributionen bilden genau dann jeweils eine Regularisierung der Distribution  $d$ , wenn sie sich sowohl untereinander als auch von einer beliebigen Epstein-Glaser-Regularisierung nur um Funktionale

$$d_{\text{reg},1}(x) - d_{\text{reg},2}(x) = \sum_{|a|=0}^{\omega} c_a D^a \delta(x) \quad (3.57)$$

mit bestimmten Konstanten  $c_a$  unterscheiden.

Unter diesen zunächst äquivalenten Regularisierungen eine bestimmte auszuwählen, ist der Gegenstand der *Renormierung*; die Auswahl unterliegt insbesondere den Bedingungen, welche die Forderung der Poincaré-Kovarianz und Unitarität der  $S$ -Matrix an sie stellen. Ein vollständiges Renormierungsverfahren basiert somit auf einer zur Methode nach Epstein-Glaser äquivalenten *Regularisierung* und nutzt zur *Renormierung* - zunächst - die gesamte Freiheit (3.57) aus. Insbesondere die Äquivalenz zur Epstein-Glaser-Regularisierung bleibt dabei für jedes andere Regularisierungsverfahren als Voraussetzung für dessen Zulässigkeit zu prüfen.

### 3.4 Das modifizierte Epstein-Glaser-Verfahren

Als eine Modifikation der im Zuge der Epstein-Glaser-Regularisierung anzuwendenden, mit der Schwarzfunktion  $w(x)$  *gewichteten* Taylorsubtraktion  $W$  gemäß (3.41) wird in [GRB] der Subtraktionsoperator  $T_w$  eingeführt:

$$(T_w g)(x) := g(x) - \sum_{|a|=0}^{\omega-1} \frac{x^a}{a!} (D^a g)(0) - w(x) \sum_{|a|=\omega} \frac{x^a}{a!} (D^a g)(0), \quad w(0) = 1. \quad (3.58)$$

Die Anwendung dieses Subtraktionsoperators bei der Epstein-Glaser-Regularisierung einer bestimmten Distribution setzt dabei von vornherein deren Definiertheit auf der Funktion  $(T_w g)(x)$  voraus, welche für eine singuläre Ordnung  $\omega \geq 1$  aufgrund des isoliert stehenden Polynomes der Ordnung  $\omega - 1$  *kein* Element des Schwarzschen Funktionenraumes ist; auch die Funktion  $w(x)$ , welche die höchste auftretende Ordnung des subtrahierten Polynomes gewichtet, ist im modifizierten Verfahren - abhängig vom Definitionsbereich der betrachteten Distribution - nicht notwendigerweise als Schwarzfunktion zu wählen.

Generell zeigt eine zu (3.55) analoge Betrachtung des Unterschiedes zweier durch die Anwendung von unterschiedlichen Subtraktionsoperatoren  $T_w$  und  $T_v$  erhaltener Regularisierungen  $\tilde{d}_{\text{reg},w}(x)$  und  $\tilde{d}_{\text{reg},v}(x)$ , daß dieser auf die höchsten auftretenden Ableitungen der Diracschen

Deltadistribution eingeschränkt wird:

$$\tilde{d}_{\text{reg},w}(x) - \tilde{d}_{\text{reg},v}(x) = \sum_{|a|=\omega} c_a D^a \delta(x); \quad (3.59)$$

die beliebige Wahl dieser verbleibenden Koeffizienten  $c_a, |a| = \omega$ , repräsentiert dabei die gesamte im modifizierten Epstein-Glaser-Verfahren zur Verfügung stehende Freiheit.

Tatsächlich ist nun z. B. bei der Regularisierung - formaler - Produkte von skalaren Propagatoren der massiven  $\phi^n$ -Theorie am gleichen Ort die Epstein-Glaser-Regularisierung mit der Wahl  $w(x) = 1$  im Subtraktionsoperator möglich. Während die konkrete Ausführung entsprechender Regularisierungen Gegenstand der folgenden Kapitel sein soll, sei an dieser Stelle das Gewicht auf die in deren Anschluß herangezogenen Freiheiten gelegt.

Als Beispiel diene das Modell der skalaren massiven  $\phi^3$ -Theorie auf einem formal auf fünf Ortskomponenten erweiterten Minkowskiraum. Die formale Transformation der Epstein-Glaser-Regularisierung der Distribution  $\Delta_F^2(x)$  mit der singulären Ordnung  $\omega = 2$  in den Impulsraum liefert - bei Unterdrückung allgemeiner Normierungsfaktoren - mit der Wahl  $w(x) = 1$  im Subtraktionsoperator als Ein-Schleifen-Korrektur zum Propagator das folgende Ergebnis:<sup>3</sup>

$$\Lambda_0^{(6)}(p) = ig^2 \int_0^1 dz (p^2 z(1-z) - m^2) \ln \frac{m^2}{m^2 - p^2 z(1-z)} + \frac{i}{6} g^2 p^2. \quad (3.60)$$

Die Fouriertransformationen der die verbleibenden Freiheiten im Ortsraum darstellenden Ableitungen von Deltadistributionen resultieren ferner im Impulsraum in Potenzen der Impulsvariablen  $p$ ,

$$\widehat{(D^a \delta)}(p) = \frac{(-i)^{|a|}}{(2\pi)^{k/2}} p^a, \quad (3.61)$$

so daß ein allgemeines lorentzinvariantes Ergebnis durch

$$\Lambda^{(6)}(p) = \Lambda_0^{(6)}(p) + c_0 + c_2 p^2 \quad (3.62)$$

gegeben ist. Hierbei treten gemäß (3.55) im klassischen Epstein-Glaser-Verfahren beide Konstanten  $c_0$  und  $c_2$  auf, während im modifizierten Verfahren die Konstante  $c_0$  verschwindet.

Im Zuge der Renormierung erfährt nun der ursprüngliche Propagator folgende Korrektur:

$$\begin{aligned} \frac{i}{p^2 - m^2} &\rightarrow \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{p^2 - m^2} \Lambda^{(6)}(p) \frac{i}{p^2 - m^2} \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2 - i\Lambda^{(6)}(p)} \left( + \begin{array}{l} \text{Mehr-Schleifen-} \\ \text{Beiträge} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Die Interpretation der rechten Seite von (3.63) als bis zur Ein-Schleifen-Ordnung modifizierter Propagator impliziert dann die folgenden *physikalischen* Renormierungsbedingungen:

$$\Lambda^{(6)}(p = m) = 0, \quad (3.64)$$

$$\left. \frac{d}{d(p^2)} \Lambda^{(6)}(p) \right|_{p=m} = 0. \quad (3.65)$$

<sup>3</sup>vgl. die analoge Herleitung der Ein-Schleifen-Korrektur in der vierdim.  $\phi^4$ -Theorie in (6.4)

Angewandt auf das Ergebnis  $\Lambda^{(6)}(p) = \Lambda_0^{(6)}(p) + c_0 + c_2 p^2$  resultieren hieraus Bedingungen für die Konstanten  $c_0$  und  $c_2$ :

$$\Lambda^{(6)}(p = m) = ig^2 m^2 \left( \frac{1}{6} \sqrt{3} \pi - \frac{8}{9} \right) + c_0 + c_2 m^2 \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.66)$$

$$\frac{d}{d(p^2)} \Lambda^{(6)}(p) \Big|_{p=m} = ig^2 \left( \frac{17}{18} - \frac{1}{6} \sqrt{3} \pi \right) + c_2 \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.67)$$

welche mit einer nichtverschwindenden Konstanten  $c_0$  folgende Lösung besitzen:

$$c_0 = ig^2 m^2 \left( \frac{11}{6} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right), \quad (3.68)$$

$$c_2 = ig^2 \left( \frac{1}{6} \sqrt{3} \pi - \frac{17}{18} \right). \quad (3.69)$$

Tatsächlich ist somit die Konstante  $c_0$  notwendig, um die Erfüllbarkeit der physikalisch motivierten Renormierungsbedingungen zu gewährleisten. Das modifizierte Epstein-Glaser-Verfahren liefert zwar gleichfalls eine *Regularisierung* der betrachteten Distribution, zur Realisierung der speziellen *Renormierung* jedoch erweist sich die Einschränkung (3.59) als zu restriktiv. Gerade die an die Regularisierung anschließende Renormierung ist jedoch für eine physikalische Interpretation der betrachteten Theorie unabdingbar, so daß die Einschränkung der Freiheiten innerhalb des modifizierten Verfahrens i. a. nicht aufrechthalten ist.



## Kapitel 4

# Das BPHZ-Renormierungsverfahren

### 4.1 Regularisierung von Ein-Schleifen-Diagrammen

Im Gegensatz zur Epstein-Glaser-Methode folgen Regularisierung und Renormierung innerhalb des BPHZ-Verfahrens (*Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, Zimmermann*) einer formalen Entwicklung nach Potenzen der Konstanten  $\hbar$  (für eine ausführliche Darstellung der Grundlagen dieser Renormierungsmethode sei z. B. auf [HAE] sowie [ITZ] und [COL] verwiesen). Das Verfahren ist im Impulsraum definiert und ordnet zur Regularisierung, die nun insbesondere Gegenstand der folgenden Betrachtungen sein soll, jedem auf divergente Integrale führenden ein-Teilchen-irreduziblen Feynmandiagramm einen endlichen Ausdruck zu. In der Sprache der Feynmandiagramme geschieht dies sukzessive entsprechend der Anzahl von *Schleifen*, die ein solches Diagramm enthält; tatsächlich entspricht die Schleifenanzahl der  $\hbar$ -Ordnung des betrachteten Prozesses.

Bevor nun aber mit der sog. *Waldformel* die allgemeine Regularisierungsvorschrift innerhalb dieses Verfahrens angegeben wird, sei zuerst die darin enthaltene Behandlung von Diagrammen betrachtet, zu deren Regularisierung gemäß der Epstein-Glaser-Methode keine Unterdiagramme berücksichtigt werden müssen - z. B. Ein-Schleifen-Diagramme - und auf dieser Stufe die Äquivalenz zur Epstein-Glaser-Regularisierung untersucht:

Das Divergenzverhalten eines Diagrammes  $\gamma$  wird - allgemein im BPHZ-Verfahren - charakterisiert durch den sog. *Divergenzgrad*  $d(\gamma)$ , definiert über die grundlegende Struktur eines jeden irreduziblen Feynmandiagrammes: Als Fouriertransformation von mittels naiver Zeitordnung gebildeten Produkten von Propagatoren im Ortsraum resultieren im Impulsraum spezielle Faltungen der transformierten Propagatoren; in der UV-Divergenz der in diesen enthaltenen Integrationen über sog. *innere* Impulse  $k$  manifestiert sich dann im speziellen Fall das Scheitern dieses Ansatzes. Diese Divergenz nun kennzeichnet sowohl das Verhalten des Integranden im Falle  $k \rightarrow \infty$  als auch die Dimension  $4m$  der Integration über  $m$  Schleifen: Unter Beachtung des UV-Verhaltens für verschiedene Propagatoren im Impulsraum,

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \rightarrow k^{-2},$$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \frac{1}{k^2} &\rightarrow k^{-2}, \\ \frac{k+m}{k^2-m^2} &\rightarrow k^{-1}, \end{aligned}$$

wird der Divergenzgrad  $d(\gamma)$  wie folgt bestimmt:

$$d(\gamma) = 4m - 2I_B - I_F + \sum_V \text{degr } V. \quad (4.1)$$

$I_B$  und  $I_F$  bezeichnen dabei die Anzahl der inneren bosonischen bzw. fermionischen Linien,  $m$  ist die Anzahl der unabhängigen Schleifen; die Summation erfolgt über alle Vertices des Diagrammes und erfaßt einen möglichen Beitrag des Vertexfaktors zum Divergenzverhalten, indem  $\text{degr } V$  die Potenzen der inneren Impulse am Vertex  $V$  zählt.

Im Hinblick auf den Vergleich zur Epstein-Glaser-Regularisierung zeigt sich in einer solchen Klassifikation der Divergenzen bereits ein Hinweis auf die zu fordernde Äquivalenz:

Die Definition der Regularisierung erfolgt dort entsprechend der singulären Ordnung  $\omega$  der im Zuge des ursprünglichen Konstruktionsprozesses zu splittenden kausalen Distribution  $d_s = r' - a'$ . Das - i. a. nur formal - durch einfache Zerlegung mittels Stufenfunktionen resultierende Funktional  $d = d_{s,\text{ret}} - r' = d_{s,\text{av}} - a'$  besitzt schließlich ebenso wie dessen Epstein-Glaser-Regularisierung  $d_{\text{reg}}$  dieselbe singuläre Ordnung  $\omega$  wie  $d_s$ : Diese stimmt bei den Funktionalen  $r'$ ,  $a'$  und  $d_s$  per Konstruktion überein und wird auf die einfache Zusammensetzung  $d$  übertragen; auch die zur Definition der Regularisierung  $d_{\text{reg}}$  verwandte Einschränkung der Testfunktionen verändert die singuläre Ordnung nicht. Deren Bestimmung kann folglich gemäß (3.34) anstatt mittels der kausalen Distribution  $d_s$  insbesondere direkt - für  $\omega \geq 0$  formal - anhand des Funktionalen  $d$  erfolgen.

Nun besitzt jede temperierte skalare Distribution  $d \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^k)$  eine Fouriertransformierte  $\hat{d}$ , definiert über die inverse Fouriertransformierte  $\check{g}$  durch

$$\hat{d}(g) = d(\check{g}), \quad \hat{d} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^k). \quad (4.2)$$

Im Impulsraum wird nun die singuläre Ordnung unter Verwendung der Power-counting-Funktion  $\rho(\delta) = \delta^\omega$  durch folgende Bedingung bestimmt:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^\omega \delta^k \int d^k x \, d(\delta x) g(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^\omega \int d^k p \, \hat{d}\left(\frac{p}{\delta}\right) \check{g}(p) = \int d^k p \, \hat{d}_0(p) \check{g}(p) \neq 0. \quad (4.3)$$

Es ist die spezielle Gestalt der Distributionen  $\hat{d}(p)$ , welche im Falle  $\text{degr } V = 0$  einen direkten Bezug zum entsprechenden  $k$ -Integral im BPHZ-Formalismus herstellt: Zwar handelt es sich hier bislang lediglich um eine skalare Distribution, welche von dem ihr zugehörigen Wickmonom getrennt betrachtet wird und folglich noch keine Aussage bezüglich eines tatsächlichen Impulsflusses, entsprechend einem bestimmten  $S$ -Matrixelement, enthalten kann - erst dessen Berechnung stellt den Zusammenhang zwischen den Impulsen  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , und den Impulsverteilungen der Anfangs- und Endzustände her; dennoch wird bei den in der Fouriertransformierten  $\hat{d}(p)$  auftretenden Faltungen von Propagatoren das Skalierungsverhalten  $\omega$  in den Variablen  $p$  gerade

durch das entsprechende in den inneren Impulsen  $k$  bestimmtes, welches im Grenzfall  $k \rightarrow \infty$  den Divergenzgrad  $d(\gamma)$  liefert.

Als Beispiel sei hier wieder das zu regularisierende Funktional  $\Delta_F^2(x) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^4)$  herangezogen: Bestehend aus zwei inneren bosonischen Linien, die sich zu einer Schleife schließen, und als ein Diagramm der  $\phi^4$ -Theorie mit  $\text{degr } V = 0$  folgt für dieses gemäß (4.1) der Divergenzgrad  $d(\gamma) = 4 - 2 \cdot 2 = 0$ . Im Vergleich dazu wird die singuläre Ordnung bei der Epstein-Glaser-Regularisierung im Impulsraum bestimmt: Formal resultiert hier die Fouriertransformierte

$$\widehat{(\Delta_F^2)}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \hat{\Delta}_F(p-k) \hat{\Delta}_F(k) \quad (4.4)$$

als Faltung der transformierten Propagatoren. Unter Verwendung der expliziten Gestalt des Funktionals  $\hat{\Delta}_F(p)$ ,

$$\hat{\Delta}_F(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (4.5)$$

folgt schließlich für das Skalierungsverhalten in der Variablen  $p$ :

$$\begin{aligned} \widehat{(\Delta_F^2)}\left(\frac{p}{\delta}\right) &= -\frac{1}{(2\pi)^6} \int d^4k \frac{1}{(\frac{p}{\delta} - k)^2 - m^2} \frac{1}{k^2 - m^2} \\ &\stackrel{k'=\delta k}{=} -\frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d^4k'}{\delta^4} \frac{1}{(\frac{p}{\delta} - \frac{k'}{\delta})^2 - m^2} \frac{1}{\frac{k'^2}{\delta^2} - m^2} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^6} \int d^4k \frac{1}{(p - k)^2 - \delta^2 m^2} \frac{1}{k^2 - \delta^2 m^2} \\ &\stackrel{\delta \rightarrow 0}{\rightarrow} \widehat{(\Delta_F^2)}(p)^{(m=0)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Tatsächlich stimmt somit, wie es die Erfüllbarkeit der Bedingung (4.3) mit der Wahl  $\omega = 0$  und dem Funktional  $\hat{d}_0(p) = \widehat{(\Delta_F^2)}(p)^{(m=0)}$  zeigt, die singuläre Ordnung mit dem Divergenzgrad überein.

Nach dieser Betrachtung sei nun in Folge anhand desselben Beispiels die konkrete Vorgehensweise bei der BPHZ-Regularisierung demonstriert. Im Spezialfall eines solchen irreduziblen divergenten Ein-Schleifen-Diagrammes nimmt die durch die Waldformel gegebene allgemeine Regularisierungsvorschrift eine kompakte Gestalt an, welche überdies einen direkten Vergleich mit dem hierzu in den Impulsraum übertragenen Epstein-Glaser-Verfahren ermöglicht; dieser Übergang und die hierdurch im Impulsraum induzierte Regularisierungsvorschrift seien im Anschluß wiederum am Beispiel erläutert.

Ausgangspunkt des BPHZ-Verfahrens sind die Feynmanregeln im Impulsraum. Formal liefern diese für ein bestimmtes, auf divergente Integrale über innere Impulse  $k$  führendes Diagramm  $\gamma$  folgende allgemeine Gestalt des Integranden  $I_\gamma$ :

$$I_\gamma(p, k) = \prod_{l \in \mathcal{L}} \Delta_c(p, k) \prod_{V \in \mathcal{V}} P_V(p, k). \quad (4.7)$$

Die Faktoren  $\Delta_c$  sind hierbei proportional zu den Feynmanpropagatoren  $\hat{\Delta}_F$  im Impulsraum, die jeder Linie  $l$  aus der Gesamtheit  $\mathcal{L}$  der inneren Linien zugeordnet sind, ausgewertet auf inneren Impulsen  $k$  und äußeren Impulsen  $p$ , wie sie ein gegebener Impulsfluß der entsprechenden Linie zuteilt. Ferner trägt nach den Feynmanregeln jeder Vertex  $V$  aus der Menge  $\mathcal{V}$  von Vertices des betrachteten Diagrammes einen Faktor  $P_V$  bei - in der  $\phi^4$ -Theorie liefert das resultierende Produkt die Potenz in der Kopplungskonstanten  $g$ .

Die Regularisierung eines irreduziblen Ein-Schleifen-Diagrammes erfolgt durch *Modifikation des Integranden*  $I_\gamma$ : Entsprechend dem Divergenzgrad  $d(\gamma)$  wird dieser durch einen neuen Integranden  $R_\gamma$  ersetzt, welcher wie folgt definiert ist:

$$R_\gamma(p, k) := I_\gamma(p, k) - \sum_{|n|=0}^{d(\gamma)} \frac{1}{n!} p^n \left. \frac{d^n}{dp^n} \right|_{p=0} I_\gamma(p, k) = \left( 1 - t_p^{d(\gamma)} \right) I_\gamma(p, k). \quad (4.8)$$

Der *Tayloroperator*  $t_p^{d(\gamma)}$  symbolisiert hierbei die Taylorentwicklung in der Gesamtheit  $p$  der unabhängigen äußeren Impulse des entsprechenden Diagrammes. Von Bedeutung für den Renormierungsanteil des Verfahrens ist dann die Angabe des allgemeinen Resultats für das so regularisierte Integral: Gemäß der Art der Modifikation des Integranden, bei welcher mit dessen Taylorentwicklung nach den äußeren Impulsen  $p$  auch die des Integrals bis zum Divergenzgrad  $d(\gamma)$  subtrahiert wird, soll ein allgemeines Polynom  $P^{d(\gamma)}(p)$  der Ordnung  $d(\gamma)$  die Freiheit, über welche zunächst verfügt wurde, repräsentieren:

$$J_\gamma(p) := \left( \int d^4 k I_\gamma(p, k) \right)_{\text{reg, BPHZ}} = \int d^4 k R_\gamma(p, k) + P^{d(\gamma)}(p). \quad (4.9)$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß der Impuls  $p$  in obigem Beispiel (4.4) aus der  $\phi^4$ -Theorie - nach Hinzunahme der zugehörigen Wickmonome zur separat betrachteten skalaren Distribution und in Folge der Berechnung des entsprechend im BPHZ-Formalismus betrachteten speziellen Streumatrixelementes - mit dem an einem der beiden Vertices einfallenden äußeren Gesamtimpuls identifiziert wird, ist die BPHZ-Regularisierung bereits auf der Stufe dieser skalaren Distribution anwendbar. Für das einem Diagramm mit dem Divergenzgrad  $d(\gamma) = 0$  entsprechende Integral folgt somit zunächst als spezielle Lösung

$$\left( \widehat{(\Delta_F^2)}(p) \right)_{\text{reg, BPHZ}} = -\frac{1}{(2\pi)^6} \int d^4 k \left\{ \frac{1}{(p-k)^2 - m^2} \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} \right\}. \quad (4.10)$$

Zum Vergleich dieses Resultats mit der Epstein-Glaser-Regularisierung sei letztere nun in den Impulsraum übertragen: Ausgangspunkt ist dabei die per Definition des Verfahrens im Ortsraum gegebene Regularisierungsvorschrift für eine skalare Distribution  $d(x)$  mit singulärer Ordnung  $\omega$ , dem Divergenzgrad des zugehörigen Feynmandiagrammes entsprechend. Den Übergang zur Regularisierung im Impulsraum bewerkstelligen dann folgende Umformungen:

$$\begin{aligned} d_{\text{reg}}(g) &= \int d^k x d_{\text{reg}}(x) g(x) \\ &= \int d^k x d(x) \left\{ g(x) - w(x) \sum_{|a|=0}^{\omega} \frac{x^a}{a!} (D^a g)(0) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^k x \, d(x) \int \frac{d^k p}{(2\pi)^{k/2}} e^{ipx} \left\{ \check{g}(p) - \sum_{|a|=0}^{\omega} \frac{1}{a!} (iD_p)^a \check{w}(p) (D^a g)(0) \right\} \\
&= \int \frac{d^k x}{(2\pi)^{k/2}} d(x) \\
&\quad \cdot \left\{ \int d^k p \, e^{ipx} \check{g}(p) - \int d^k p' \, e^{ip'x} \sum_{|a|=0}^{\omega} \frac{(iD_{p'})^a}{a!} \check{w}(p') \int \frac{d^k p}{(2\pi)^{k/2}} (ip)^a \check{g}(p) \right\} \\
&= \int d^k p \int \frac{d^k x}{(2\pi)^{k/2}} d(x) \left\{ e^{ipx} - \int \frac{d^k p'}{(2\pi)^{k/2}} e^{ip'x} \sum_{|a|=0}^{\omega} \frac{(-1)^{|a|}}{a!} (D_{p'})^a \check{w}(p') p^a \right\} \check{g}(p) \\
&= \int d^k p \, \hat{d}_{\text{reg}}(p) \check{g}(p) = \hat{d}_{\text{reg}}(\check{g}). \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Nun handelt es sich bei den nach dem Epstein-Glaser-Verfahren zu regularisierenden Distributionen  $d(x)$  um formale Produkte von Feynmanpropagatoren im Ortsraum. Ein dieses erklärendes, aus der Fouriertransformation resultierendes Faltungsprodukt  $\hat{d}(p)$  von Propagatoren im Impulsraum ist aber im Falle einer nicht-negativen singulären Ordnung nicht definiert; an dessen Stelle tritt die Regularisierung  $\hat{d}_{\text{reg}}(p)$  gemäß (4.11), wie sie das Epstein-Glaser-Verfahren im Impulsraum induziert. Die Äquivalenz des BPHZ-Verfahrens zu letzterem sei nun anhand des betrachteten Beispiels  $d(x) = \Delta_F^2(x)$  überprüft. Für dieses resultiert:

$$\begin{aligned}
&\widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(p) \\
&= \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^2} \Delta_F^2(x) \left\{ e^{ipx} - \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^2} e^{ip'x} \check{w}(p') \right\} \\
&= \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^2} e^{-i(k+k')x} \hat{\Delta}_F(k) \hat{\Delta}_F(k') \left\{ e^{ipx} - \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^2} e^{ip'x} \check{w}(p') \right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k \int d^4 k' \hat{\Delta}_F(k) \hat{\Delta}_F(k') \left\{ \delta(p - k - k') - \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^2} \delta(p' - k - k') \check{w}(p') \right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k \hat{\Delta}_F(k) \left\{ \hat{\Delta}_F(p - k) - \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^2} \hat{\Delta}_F(p' - k) \check{w}(p') \right\} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^6} \int d^4 k \frac{1}{k^2 - m^2} \left\{ \frac{1}{(p - k)^2 - m^2} - \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m^2} \check{w}(p') \right\}. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Die Angabe einer speziellen Lösung innerhalb der Epstein-Glaser-Regularisierungen erfordert an dieser Stelle die Auswahl einer Testfunktion  $w(x)$ , welche die im Rahmen des Verfahrens festgelegten Bedingungen (3.42) erfüllt; hier im speziellen  $w(0) = 1$ . Nun wird per Definition zur Bestimmung der Streumatrix  $S = \lim_{g \rightarrow 1} S(g)$  im betrachteten Grenzwert der Raum der Schwarzfunktionen als Argumente des Funktionals  $S(g)$  verlassen; tatsächlich erlaubt in der  $\phi^4$ -Theorie die spezielle Gestalt der zu regularisierenden skalaren Distributionen als Produkte von Propagatoren *massiver* Teilchen die Auswertung der Funktionale sogar auf Polynomen in der Variablen  $x$ : Das entsprechende IR-Verhalten sowohl der im Impulsraum resultierenden

Faltungen von Propagatoren als auch dasjenige von deren Ableitungen nach der Variablen  $p$  ist wohldefiniert.

Für die in der Definition der Regularisierung enthaltene Funktion  $w(x)$  ist folglich im betrachteten Beispiel die Wahl  $w(x) = 1$  - welche weiterhin die Bedingungen  $w(0) = 1$ ,  $(D^a w)(0) = 0$  erfüllt - zulässig. Mit der Einsetzung der Fouriertransformierten  $\check{w}(p)$  gemäß

$$\check{w}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 x e^{-ipx} = (2\pi)^2 \delta(p) \quad (4.13)$$

in das Ergebnis von (4.12) resultiert schließlich gerade die BPHZ-Regularisierung (4.10); letztere ist somit zum - um die Einschließung der konstanten Funktion  $w(x) = 1$  innerhalb des Regularisierungsprozesses erweiterten - Epstein-Glaser-Verfahren äquivalent.

Auch die zur Renormierung vom BPHZ-Verfahren zugelassene Freiheit (4.9) in der Wahl einer speziellen Regularisierung muß gerade die allgemeine Unbestimmtheit im Epstein-Glaser-Formalismus repräsentieren. Während diese Freiheit im BPHZ-Verfahren auf der Stufe der bei Epstein-Glaser behandelten skalaren Distributionen  $\hat{d}_{\text{reg}}(p)$  - d. h. ohne Bezug auf einen speziellen Impulsfluß - einem Polynom  $P^{d(\gamma)}(p)$  in den Variablen  $p$  des Impulsraums entspricht, gilt nun aber gemäß (3.57) für die Epstein-Glaser-Regularisierung

$$\begin{aligned} \int d^k x (d_{\text{reg},1}(x) - d_{\text{reg},2}(x)) g(x) &= \sum_{|a|=0}^{\omega} c_a \int d^k x D^a \delta(x) g(x) \\ &= \sum_{|a|=0}^{\omega} \frac{(-i)^{|a|} c_a}{(2\pi)^{k/2}} \int d^k p p^a \check{g}(p) = \int d^k p (\hat{d}_{\text{reg},1}(p) - \hat{d}_{\text{reg},2}(p)) \check{g}(p), \end{aligned} \quad (4.14)$$

so daß auf der Stufe der Fouriertransformierten Regularisierungen die entsprechende Freiheit tatsächlich in der beliebigen Wahl der Koeffizienten  $\tilde{c}_a = \frac{(-i)^{|a|} c_a}{(2\pi)^{k/2}}$  des Polynoms  $P^\omega(p) = P^{d(\gamma)}(p)$  besteht. Für das oben betrachtete Beispiel mit dem Divergenzgrad bzw. der singulären Ordnung  $d(\gamma) = \omega = 0$  gewähren folglich beide Regularisierungsverfahren eine Freiheit in Form einer additiven Konstanten im Impulsraum.

Während nun in der hier am Beispiel erläuterten Weise die Äquivalenz von BPHZ- und Epstein-Glaser-Regularisierung für ein jedes Ein-Schleifen-Diagramm überprüft werden kann, erschwert die grundlegende Verschiedenheit in der Konstruktion beider Verfahren diesen Vergleich für Diagramme mit mehr als einer Schleife. Auf diese prinzipielle Unterschiedlichkeit sei bereits an dieser Stelle, bevor im Anschluß die BPHZ-Regularisierungsvorschrift für Mehr-Schleifen-Diagramme vorgestellt wird, hingewiesen: Während bei Epstein-Glaser die Distributionen  $T_n(x_1, \dots, x_n)$  in der Entwicklung (3.1) von  $S(g)$  entsprechend der Anzahl  $n$  von Vertices der jeweiligen Ordnung sukzessive konstruiert werden, folgt der Aufbau des BPHZ-Verfahrens mit der formalen Entwicklung nach Potenzen der Konstanten  $\hbar$  einer *Schleifenentwicklung*. Im Zuge dessen enthält die BPHZ-Regularisierungsvorschrift für Mehr-Schleifen-Diagramme eine Definition von Unterdiagrammen, z. B. in [ZIM], welche sich von der entsprechenden bei Epstein-Glaser, wo die Betrachtung niedriger Ordnungen  $n_i \leq n$  auf der Stufe der Feynmandiagramme das Weglassen von Vertices impliziert, unterscheidet: Jede in einem Diagramm enthaltene Schleife ist ein

BPHZ-Unterdiagramm. Das sog. *Sunrise*-Diagramm in Kapitel 8 sowie die in den Kapiteln 9.2.2 und 9.2.3 betrachteten Prozesse liefern Beispiele für die Verschiedenheit dieser beiden Definitionen. Die explizite BPHZ-Regularisierungsvorschrift für ein beliebiges Feynmandiagramm basiert auf der von BPHZ-Unterdiagrammen und ist durch die sog. *Waldformel* gegeben.

## 4.2 Allgemeine Regularisierungsvorschrift

Neben dem Element der Regularisierung, deren Äquivalenz zum Epstein-Glaser-Verfahren später auch anhand von Beispielen für Mehr-Schleifen-Diagramme überprüft werden soll, enthält das BPHZ-Verfahren einen Renormierungsanteil, innerhalb dessen über die - bereits im Regularisierungsprozess verwandten - Freiheiten auf physikalische Art und Weise verfügt wird. Zur Wechselwirkungslagrangedichte  $\mathcal{L}_1 = -\mathcal{H}_1$ , dem Ausgangspunkt der mittels naiver Zeitordnung konstruierten *S*-Matrix (2.19), werden sukzessive in aufsteigenden Potenzen der Konstanten  $\hbar$  Korrekturterme, sog. *Counterterme*, addiert, welche die bei der naiven Konstruktion von Feynmandiagrammen auftretenden Divergenzen gerade kompensieren. Diese *unendlichen* Counterterme, d. h. Polynome von Feldern und deren Ableitungen, welche auf der Stufe der Feynmandiagramme die erforderlichen Kompensationsterme implizieren, beinhalten sowohl eine spezielle Regularisierungsvorschrift als auch - in Form eines freien, endlichen Anteils der Counterterme - die allgemeine Freiheit beim Regularisierungsprozeß. In jeder Ordnung von  $\hbar$  wird die derart modifizierte Wechselwirkungslagrangedichte mit der physikalischen identifiziert, welches insbesondere die Festlegung der endlichen Counterterme durch gewisse *Renormierungsbedingungen* beinhaltet.

Bei der Regularisierung eines Diagrammes mit  $l$  Schleifen sind somit, ausgehend von der bereits bis zur Ordnung  $\hbar^{l-1}$  modifizierten Lagrangedichte, alle Counterterme zu den Unterdiagrammen zu berücksichtigen, welche auf einen Beitrag in der Ordnung  $\hbar^l$  zum Gesamtdiagramm führen, bevor letzteres - falls es selbst divergent ist - mit einer abschließenden Impulssubtraktion regularisiert wird.

Es ist die Waldformel, die für jedes Diagramm diese Beiträge von Countertermen niedriger Ordnungen in der Konstanten  $\hbar$  zusammenfaßt; insbesondere wird innerhalb dieser *jede* im Gesamtdiagramm enthaltene Schleife als Unterdiagramm interpretiert - obgleich im Sinne einer Entwicklung nach Vertices nur solche beitragen können, die eine geringere Vertexanzahl aufweisen. Dennoch bleibt auch auf der Stufe solcher Mehr-Schleifen-Diagramme die Forderung nach Äquivalenz zum Epstein-Glaser-Verfahren bestehen und mit dieser die Bedingung, daß sich - die erfolgte physikalische Renormierung der niedrigeren  $\hbar$ -Ordnungen vorausgesetzt - die Ergebnisse beider Regularisierungsverfahren nur um Polynome bis zur Ordnung des Divergenzgrades des Gesamtdiagrammes in dessen äußeren Impulsen unterscheiden.

Die im BPHZ-Verfahren resultierende geschlossene Form der Waldformel setzt nun gewisse Bedingungen an die Wahl des Impulsflusses im betrachteten Diagramm voraus; so verlangt etwa die Rekursivität des Regularisierungsprozesses, daß die inneren Impulse der Unterdiagramme nicht von den äußeren Impulsen eines divergenten Gesamtdiagrammes abhängig sind, da sonst die entsprechenden zu letzterem beitragenden Counterterme abschließend einer erneuten Impulssubtraktion unterworfen wären. In diesem Sinne zulässig ist die Wahl des sog. *Standard-*

impulsflusses, welcher im folgenden erklärt wird.

Definition des Standardimpulsflusses:

- Es seien mit  $\{p_1, \dots, p_n\}$  und  $\{k_1, \dots, k_m\}$  die Mengen der unabhängigen äußeren bzw. inneren Impulse des Gesamtdiagrammes  $\gamma$  bezeichnet; jeder innere Impuls  $k_i$  sei dabei einer Schleife zugeordnet. Die von Vertex  $a$  zu Vertex  $b$  fließenden Impulse  $l_{abv}$  setzen sich jeweils aus dem durch die entsprechende Linie  $L_{abv}$  fließenden Anteil  $q_{abv}$  der äußeren und dem Beitrag  $k_{abv}$  der inneren Impulse zusammen:

$$l_{abv} = q_{abv}(p) + k_{abv}(k). \quad (4.15)$$

Dabei numeriert der Index  $v$  die Linien zwischen den Vertices  $a$  und  $b$ .

- Jeder Linie  $L_{abv}$  werden sog. *Widerstände*  $r_{abv}$  zugeordnet, über die - analog zu den Kirchhoff'schen Regeln in der Elektrodynamik - der *Stromfluß* der äußeren Impulse festgelegt wird: Zur Impulserhaltung an jedem Vertex  $V_a$  mit einfließendem äußeren Impuls  $q_a$ ,

$$\sum_{b,v} q_{abv} = q_a \quad \forall V_a \in \mathcal{V}(\gamma), \quad (Knotenregel) \quad (4.16)$$

wird für jede Schleife  $C$  des Diagrammes zusätzlich die Bedingung

$$\sum_{L_{abv} \in C} r_{abv} q_{abv} = 0 \quad (Maschenregel) \quad (4.17)$$

gestellt. Die Wahl der Widerstände ist bis auf eine Anforderung beliebig, welche die Existenz geschlossener Schleifen mit Widerstand null oder unendlich ausschließt.

- Mit einem Unterdiagramm  $\lambda$ , zunächst als eigenständiges Diagramm betrachtet, wird analog verfahren; die einmal für das Gesamtdiagramm  $\gamma$  getroffene Wahl der Widerstände ist hierfür jedoch beizubehalten. Innere und äußere Impulse des Unterdiagrammes  $\lambda$  erhalten schließlich ihre Abhängigkeit von denjenigen des Gesamtdiagrammes  $\gamma$  durch die *Einbettung* von  $\lambda$  in  $\gamma$ ; diese liefert als Bedingungen:

$$q_{abv}(p) + k_{abv}(k) = q_{abv}^\lambda(p^\lambda, k) + k_{abv}^\lambda(k), \quad (4.18)$$

für alle Linien  $L_{abv}^\lambda$  des Unterdiagrammes, sowie

$$p_a^\lambda(p, k) = q_a - \sum_{b \text{ oder } v \notin \lambda} l_{abv}(p, k) \quad \forall V_a \in \mathcal{V}(\lambda) \quad (4.19)$$

für dessen am Vertex  $a$  einfallende äußere Impulse  $p_a^\lambda$ .

Den Ausgangspunkt zur Regularisierung eines beliebigen Mehr-Schleifen-Diagrammes bilden nun die Integranden der aus den Feynmanregeln im Impulsraum resultierenden Integrale (4.7) unter Verwendung des Standardimpulsflusses. Die Regularisierungsvorschrift schließlich ist durch die Zimmermannsche Waldformel gegeben, deren Aussage an dieser Stelle zitiert sei:

Counterterme niedrigerer  $\hbar$ -Ordnung werden prinzipiell berücksichtigt, indem - symbolisiert durch den Substitutionsoperator  $S_\lambda$  - der Anteil des betrachteten Unterdiagrammes  $\lambda$  am Integranden gemäß dem Standardimpulsfluß als Funktion von dessen Impulsen  $p^\lambda$  und  $k^\lambda$  parametrisiert und der entsprechende Counterterm bestimmt wird; sämtliche beitragenden Counterterme werden in der Waldformel zusammengefaßt und definieren die Modifikation  $R_\gamma$  des Integranden  $I_\gamma$  wie folgt:

$$R_\gamma(p, k) = S_\gamma \sum_{U \in \mathcal{F}_\gamma} \prod_{\lambda \in U} \left( -t_{p^\lambda}^{d(\lambda)} S_\lambda \right) I_\gamma(U) \quad (\text{Waldformel}). \quad (4.20)$$

Die Summation erfolgt hierbei über alle sog. *Wälder*  $U$  des Gesamtdiagrammes  $\gamma$ , d. h. alle möglichen Mengen von *nicht überlappenden* divergenten ein-Teilchen-irreduziblen Unterdiagrammen einschließlich der leeren Menge und, falls dieses selbst divergent ist, des gesamten Diagrammes; nicht überlappende divergente Diagramme  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind entweder *disjunkt*,  $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \emptyset$ , oder *verschachtelt*,  $\lambda_1 \subset \lambda_2$  oder  $\lambda_2 \subset \lambda_1$ .<sup>1</sup>

Als ein selbständiges Regularisierungsverfahren beinhaltet die BPHZ-Regularisierung den Beweis der Konvergenz des  $k$ -Integrals über den Integranden  $R_\gamma(p, k)$ . Dennoch ist es die auf Ein-Schleifen-Niveau bereits demonstrierte Äquivalenz zum Epstein-Glaser-Verfahren, welche erst die *Zulässigkeit* der BPHZ-Methode gewährleistet; beim durch die Unterschiedlichkeit des jeweiligen rekursiven Vorgehens erschwerten Vergleich der beiden Verfahren auf der Stufe von Mehr-Schleifen-Diagrammen soll diese später am Beispiel demonstriert werden, wobei insbesondere die Verschiedenheit der Definition von Unterdiagrammen zu untersuchen ist.

Wenngleich nun das BPHZ-Renormierungsverfahren auf kompakte Art und Weise jedem divergenten Diagramm mittels der Waldformel eine Regularisierung zuweist und in Form von endlichen Countertermen die jeweils verwandten Freiheiten offenlegt, so ist doch die explizite Durchführung der Integrationen über die modifizierten Integranden in der Regel recht aufwendig im Vergleich zu anderen Regularisierungsmethoden. Diese wiederum offenbaren nicht in - zumindest auf Ein-Schleifen-Niveau - gleichsam übersichtlicher Weise ihre Äquivalenz zum Epstein-Glaser-Verfahren, insbesondere im Hinblick auf die verbleibenden Freiheiten, welche zur Erfüllung physikalischer Renormierungsbedingungen teils *ad hoc* in Form von endlichen Countertermen zum Regularisierungverfahren hinzugenommen werden müssen.

Gerade die häufig verwandte *Dimensionale Regularisierung*, bei welcher im Zuge des Regularisierungsprozesses die physikalische Dimension verlassen wird, führt zudem auf das Problem einer sinnvollen Fortsetzung der betrachteten Theorie in beliebige Dimensionen. Diese Regularisierungsmethode ist ein Beispiel für ein Verfahren, bei dem bei der Berechnung von Feynman-Diagrammen auftretende Divergenzen zunächst durch die Einführung (mindestens) eines neuen Parameters in die entsprechende Theorie beseitigt werden; dieser parametrisiert gerade eine auf endliche Diagramme führende *Abweichung* von der ursprünglichen Theorie. Durch entsprechende Grenzwertbildung im eingeführten Parameter wird schließlich die Ausgangstheorie wiederhergestellt; zuvor aber erfährt ein in diesem Grenzwert zunächst divergenter Ausdruck eine Modifikation, durch welche seine Wohldefiniertheit auch in diesem Falle erhalten bleibt. Insbesondere muß

<sup>1</sup>Ein einfaches Beispiel für die Anwendung der Waldformel liefert Kapitel 8.3 mit der entsprechenden Berechnung des Sunrise-Diagrammes.

hierbei die erfolgte Modifikation im Grenzfall eine im Sinne der Epstein-Glaser-Regularisierung zulässige sein. Im folgenden sei demonstriert, wie die Methode der Dimensionalen Regularisierung als Parameter die Abweichung  $\epsilon$  von der physikalischen Dimension nutzt, um für bestimmte divergente Feynmandiagramme die im Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  auftretenden konvergenten von den divergenten Anteilen zu separieren; ein Teil der dort verwandten Techniken wird später vor dem theoretischen Hintergrund der Epstein-Glaser- bzw. BPHZ-Regularisierung die Basis des modifizierten BPHZ-Verfahrens bilden.

## Kapitel 5

# Dimensionale Regularisierung

### 5.1 Berechnung von Feynmandiagrammen in $d$ Dimensionen

Prinzipiell basiert die Methode der Dimensionalen Regularisierung von Ein-Schleifen-Diagrammen auf der Berechnung  $d$ -dimensionaler Faltungsprodukte von Feynmanpropagatoren im Impulsraum. Die Auswertung der darin enthaltenen Integrationen über innere Impulse  $k$  geschieht in Termen der *Eulerschen Gammafunktion*  $\Gamma$ , welche im Grenzwert physikalischer Dimension  $d_{\text{ph}}$  divergieren; diese Divergenzen sind nun aber Polstellen von  $\Gamma$ , in deren Umgebung diese meromorphe Funktion eine wohldefinierte Laurentreihenentwicklung besitzt, welche die Grundlage der anschließenden Regularisierung bildet (Einführungen in die Dimensionale Regularisierung enthalten u.a. [MAS],[RYD]). Für Dimensionen  $d < 2n$  gilt z. B. die Beziehung:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int \frac{d^d k}{(k^2 - s + i\eta)^n} = i\pi^{d/2} (-1)^n \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-d/2}}. \quad (5.1)$$

Mittels der sog. *Feynmanparametrisierung* ist es nun möglich, das zu regularisierende Faltungsprodukt eines logarithmisch divergenten Diagrammes ( $d_{\text{ph.}} = 2n$ ) auf die Form der linken Seite von (5.1) zu bringen, nachdem es zuvor durch den Übergang zu Dimensionen  $d < 2n$  *naiv* regularisiert wurde - dieser die Divergenz des zu berechnenden Integrals beseitigende Übergang geht der tatsächlichen Regularisierung voraus und wird im Anschluß an diese wieder rückgängig gemacht. Auf die Nenner  $a_i$  der Produkte von auf dem entsprechenden Impulsfluß ausgewerteten Feynmanpropagatoren im Integranden wird die folgende Parametrisierung angewandt:

$$\frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_n} = \Gamma(n+1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} \frac{dz_n}{[a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \dots + (a_n - a_{n-1})z_n]^{n+1}}, \quad (5.2)$$

im einzelnen:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dz \frac{1}{[a(1-z) + bz]^2}, \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{[a + (b-a)x + (c-b)y]^3} \quad (5.4)$$

$$= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[a(1-x-y) + bx + cy]^3}. \quad (5.5)$$

Die Bewahrung der physikalischen Dimension der zu berechnenden  $S$ -Matrixelemente erfordert überdies die Einführung eines Massenparameters  $\mu$  in die Theorie, wie es am Beispiel der  $\phi^4$ -Theorie demonstriert sei: Es ist die Wirkung  $S = \int d^d x \mathcal{L}$ , welche es hierzu - in quantenfeldtheoretischen Einheiten ( $\hbar = c = 1, \Lambda = [p] = 1/[x] = 1/L$ ) - dimensionslos zu erhalten gilt; für die Dimension der Lagragedichte  $\mathcal{L}$  folgt somit notwendigerweise  $[\mathcal{L}] = \Lambda^d$ . Letzteres allerdings kann nur dann unter Beibehaltung der physikalischen Einheiten sämtlicher Parameter der ursprünglichen Theorie erfüllt werden, wenn im Wechselwirkungsanteil  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  ein zusätzlicher Faktor  $\mu^{4-d}$  eingefügt wird:

$$\mathcal{L}^{(d)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} - m^2 \phi^2 \right) - \mu^{4-d} \frac{g}{4!} \phi^4. \quad (5.6)$$

Die beiden ersten Summanden in (5.6) legen die Impulsdimension des Feldes  $\phi$  auf  $\frac{d}{2} - 1$  fest, welches dann die angegebene Modifikation des Wechselwirkungsanteils bedingt.

Für das bereits mit Epstein-Glaser- und BPHZ-Regularisierung behandelte Beispiel des logarithmisch divergenten Beitrags zur Vierpunktfunction in der Ordnung  $g^2$ , nun für einen konkreten Impulsfluß nach den Feynmanregeln bestimmt, existiert für  $d < 4$  das folgende  $d$ -dimensionale Impulsintegral:

$$\begin{aligned} \Lambda^{(d)}(p) &= \frac{1}{2} g^2 (\mu^2)^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 + i\eta} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\eta} \\ &= \frac{1}{2} g^2 (\mu^2)^{4-d} \int_0^1 dz \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[((p-k)^2 - m^2)(1-z) + z(k^2 - m^2) + i\eta]^2} \\ &= \frac{1}{2} g^2 (\mu^2)^{4-d} \int_0^1 dz \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - 2kp(1-z) + p^2(1-z) - m^2 + i\eta]^2} \\ &= \frac{1}{2} g^2 (\mu^2)^{4-d} \int_0^1 dz \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + p^2(1-z)z - m^2 + i\eta]^2} \\ &= \frac{1}{2} g^2 (\mu^2)^{4-d} \frac{i\pi^{d/2}}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \int_0^1 dz \frac{1}{[m^2 - p^2 z(1-z)]^{2-d/2}} \\ &= \frac{i}{32\pi^2} g^2 (\mu^2)^{2-d/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dz \left[ \frac{4\pi\mu^2}{m^2 - p^2 z(1-z)} \right]^{2-d/2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Insbesondere ist die nach der dritten Zeile von (5.7) vorgenommene Translation  $k \rightarrow k + p(1-z)$  der Integrationsvariablen dieses *wohldefinierten* Integrals zulässig. Die anschließende Regularisierung des resultierenden Ausdrucks, welcher mit der in diesem enthaltenen Gammafunktion für  $d = 4$  eine Polstelle besitzt, erfolgt im Rahmen der Dimensionalen Regularisierung durch die Laurententwicklung um diese Singularität und die darauffolgende Subtraktion der hierdurch separierten divergenten Anteile. Inwiefern diese Methode mit der - für Ein-Schleifen-Diagramme mittels Fouriertransformation direkt mit dem BPHZ-Verfahren identifizierbaren -

Epstein-Glaser-Regularisierung verträglich ist, soll im folgenden überprüft werden. Ferner wird auch für Diagramme, welche stärker als logarithmisch divergent sind ( $d_{\text{ph.}} > 2n$ ), die Dimensionale Regularisierung verwandt, wenngleich hier (5.1) nicht gültig ist; in diesem Falle liefert die Fortsetzbarkeit der Gammafunktion  $\Gamma(x)$  für alle  $x \neq 0, -1, -2, \dots$  die Grundlage der folgenden Regularisierung. Auch für dieses Vorgehen soll schließlich die Zulässigkeit überprüft werden.

## 5.2 Regularisierung in Termen der Eulerschen Gammafunktion

Das für reelle positive Argumente  $x$  konvergente Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty dt e^{-t} t^{x-1} \quad (5.8)$$

bildet eine *Verallgemeinerung* der  $n$ -Fakultät  $n! = \Gamma(n+1)$ , indem es die Eulersche  $\Gamma$ -Funktion als Lösung der Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z = 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

definiert. Überdies existiert eine eindeutige analytische Fortsetzung von  $\Gamma(x)$  zu einer meromorphen komplexen Funktion  $\Gamma(z)$  mit Polstellen an den Punkten  $z = -n = 0, -1, -2, \dots$ ; für die Laurententwicklung in deren jeweiligen Umgebungen gilt:

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (5.10)$$

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.11)$$

wobei  $\gamma$  die *Eulersche Konstante* ist,

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \approx 0,5772. \quad (5.12)$$

In einem ursprünglich logarithmisch divergenten Ein-Schleifen-Diagramm, welches durch den Übergang zu  $d < 4$  Dimensionen zunächst naiv regularisiert wurde, erfolgt nun als nächster Schritt der Dimensionalen Regularisierung die Separation desjenigen Anteils, welcher im Grenzwert  $d \rightarrow 4$  divergiert; demonstriert sei dies weiterhin am Beispiel (5.7):

Eine positive reelle Variable  $\epsilon = 4 - d$  parametrisiert zunächst die Abweichung von der physikalischen Dimension. Zur anschließenden Berechnung der Laurententwicklung von (5.7) um die Polstelle  $\epsilon = 0$  werden nun sowohl die Entwicklung (5.10) der  $\Gamma$ -Funktion als auch die Taylorentwicklung der übrigen  $\epsilon$ -abhängigen Anteile dieses Ausdrucks herangezogen; für das betrachtete Beispiel resultiert:

$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (5.13)$$

$$\left[ \frac{4\pi\mu^2}{m^2 - p^2(1-z)z} \right]^{2-d/2} = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2 - p^2z(1-z)} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (5.14)$$

und für den gesamten Ausdruck (5.7):

$$\begin{aligned}\Lambda^{(d)}(p) &= \frac{i}{32\pi^2} g^2 \mu^\epsilon \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma \right) \left( 1 + \int_0^1 dz \frac{1}{2} \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2 - p^2 z(1-z)} \epsilon \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= \frac{i}{16\pi^2 \epsilon} g^2 \mu^\epsilon - \frac{i}{32\pi^2} g^2 \mu^\epsilon \left( \gamma - \int_0^1 dz \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2 - p^2 z(1-z)} \right) + \mathcal{O}(\epsilon).\end{aligned}\quad (5.15)$$

Es ist die Subtraktion des im Grenzfall  $\epsilon \rightarrow 0$  divergenten ersten Termes von (5.15), welche nun die Regularisierung bewerkstelligt; überdies hat in das verbleibende, bei der Grenzwertbildung endliche Ergebnis auch der aus Dimensionsgründen eingefügte Massenparameter  $\mu$  Eingang gefunden.

Tatsächlich zeigt die Betrachtung der funktionalen Abhängigkeit des für  $\epsilon \rightarrow 0$  zu regularisierenden Ausdrucks von den äußeren Impulsen  $p$ , daß die hier vorgenommene Subtraktion des zu  $1/\epsilon$  proportionalen Termes eine im Sinne von Epstein-Glaser zulässige ist: Das für ein solches Ein-Schleifen-Diagramm bereits als äquivalent zu letzterem befundene BPHZ-Verfahren schreibt zu dessen Regularisierung eine Taylorsubtraktion des Integranden in den äußeren Impulsen bis zur Ordnung  $d(\gamma) = 0$  vor, nach welcher eine additive Konstante bzgl.  $p$  die hierzu ausgenutzte Freiheit wiederherstellt. Bei der Dimensionalen Regularisierung dieses logarithmisch divergenten Diagrammes wird nun das Integral über den ursprünglichen Integranden zunächst - auf wohldefinierte Art und Weise - in  $d < 4$  Dimensionen berechnet; danach erfolgt die zulässige Subtraktion des im Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  divergenten Anteils der Taylorentwicklung in  $p$  bis zur Ordnung Null, indem der bzgl.  $p$  konstante  $1/\epsilon$ -Term abgezogen wird.

Auch der im Resultat der Dimensionalen Regularisierung verbleibende Massenparameter  $\mu$  kann vor dem Hintergrund der BPHZ-Regularisierungsmethode interpretiert werden, wozu im folgenden mittels der Ersetzung  $\mu = \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}} m$ ,  $0 < \lambda < \infty$ , das Skalierungsverhalten des Ergebnisses bzgl. dieser Variablen betrachtet sei; es resultiert:

$$\begin{aligned}\Lambda(p)_{D.R.} &= -\frac{i}{32\pi^2} g^2 \left( \gamma - \int_0^1 dz \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2 - p^2 z(1-z)} \right) \\ &= -\frac{i}{32\pi^2} g^2 \left( \gamma - 2 \ln \lambda - \int_0^1 dz \ln \frac{m^2}{m^2 - p^2 z(1-z)} \right).\end{aligned}\quad (5.16)$$

Durchläuft somit der Parameter  $\lambda$  die positiven reellen Zahlen und generiert demgemäß sämtliche möglichen Werte einer nichtverschwindenden Masse  $\mu$ , so schöpft der zu  $\ln \lambda$  proportionale Anteil von (5.16) die gesamte Freiheit der Addition eines bzgl.  $p$  konstanten Termes aus. Eine jede Wahl von  $\lambda$  liefert eine zulässige Regularisierung; darunter ausgezeichnet diejenige von  $\lambda = \lambda_0 = e^{\gamma/2}$ :

Der Ausdruck

$$\Lambda(p)_{D.R.}^{\lambda_0} = \frac{i}{32\pi^2} g^2 \int_0^1 dz \ln \frac{m^2}{m^2 - p^2 z(1-z)} \quad (5.17)$$

verschwindet an der Stelle  $p = 0$  und liefert somit - auf dem Umwege der Dimensionalen Regularisierung - das Ergebnis der durch diese verschwindende Taylorentwicklung bis zur Ordnung Null charakterisierten BPHZ-Regularisierung.

Nachdem nun anhand dieses Beispiels die Zulässigkeit der im Rahmen der Dimensionalen Regularisierung erfolgenden Berechnungen und Subtraktionen für logarithmisch divergente Ein-Schleifen-Diagramme überprüft worden ist, sei im folgenden das Vorgehen für solche Diagramme mit höherem Divergenzgrad untersucht. Für diese Fälle, charakterisiert durch  $d_{\text{ph.}} > 2n$  in (5.1), ist gerade diese grundlegende Beziehung zwischen Impulsintegralen und Termen der  $\Gamma$ -Funktion auch nach einer naiven Regularisierung durch den Übergang in  $d_{\text{ph.}} - \epsilon$  Dimensionen nicht gültig. Deren rechte Seite allerdings besitzt als Funktion von  $d$  außerhalb ihrer Polstellen  $d = 2n+2m, m = 0, 1, \dots$ , und somit insbesondere auch für  $d = d_{\text{ph.}} - \epsilon$  eine eindeutige analytische Fortsetzung, welche nun den Ausgangspunkt der Dimensionalen Regularisierung bildet:

Analog zum behandelten Beispiel des logarithmisch divergenten Diagrammes erfolgt an dieser Stelle die Laurententwicklung *der Fortsetzung* um die - für geradzahliges  $d_{\text{ph.}}$  vorliegende - Polstelle für  $\epsilon = 0$  sowie die abschließende Subtraktion der zu  $1/\epsilon$  proportionalen Anteile.

In bezug auf die Zulässigkeit eines solchen Vorgehens sei zum Vergleich mit dem entsprechenden innerhalb der BPHZ-Regularisierung die folgende Überlegung angestellt: Das  $d$ -dimensionale Impulsintegral über den gemäß der BPHZ-Regularisierungsvorschrift subtrahierten Integranden ist für alle  $d \leq d_{\text{ph.}}$  definiert. Ferner lässt sich dieses Integral für  $d < 2n$  in Einzelintegrale über jeweils den ursprünglichen Integranden und die Koeffizienten der von diesem zu subtrahierenden Taylorentwicklung in den äußeren Impulsen zerlegen; für jedes dieser einzelnen Integrale gilt (5.1). Schließlich liefern sowohl die analytische Fortsetzung dieser Einzelintegrale in Termen der  $\Gamma$ -Funktion als auch das BPHZ-subtrahierte  $d$ -dimensionale Impulsintegral selbst eine Fortsetzung in die Dimensionen  $2n \leq d \leq d_{\text{ph.}}$ . Aus der Analytizität des letzteren als Funktion der Variablen  $d$  und der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung folgt im Grenzwert  $d \rightarrow d_{\text{ph.}}$  die Äquivalenz von Dimensionaler und BPHZ-Regularisierung, falls die  $p$ -Abhängigkeit des bei jener zu subtrahierenden  $1/\epsilon$ -Termes nur in einem Polynom bis zur Ordnung  $d(\gamma)$  besteht.

Das BPHZ-Verfahren, für welches selbst wenngleich nicht die Endlichkeit seiner Resultate - dies ist *Teil* des Verfahrens - so doch seine Zulässigkeit in bezug auf die verwandten Freiheiten durch Vergleich mit der Epstein-Glaser-Regularisierung überprüft werden muß, dient hier im ganzen als eine Art theoretischer Rahmen, mithilfe dessen die zunächst willkürlich anmutende Subtraktion der  $1/\epsilon$ -Terme bei der Dimensionalen Regularisierung erklärt werden kann. Insbesondere für Ein-Schleifen-Diagramme, wo die Äquivalenz von BPHZ- und Epstein-Glaser-Regularisierung, wie in Kapitel 4.1 beschrieben, unmittelbar herausgestellt werden kann, erlaubt nun aber dieser Vergleich eine Modifikation des klassischen BPHZ-Verfahrens, welche zum einen auf bei der Dimensionalen Regularisierung bewährte Techniken zurückgreift, zum anderen aber ausschließlich innerhalb der physikalischen Dimension verbleibt und somit sämtliche mit einer Verallgemeinerung der Dimensionalität verbundenen Schwierigkeiten vermeidet; dieses modifizierte BPHZ-Verfahren sei der Gegenstand des folgenden Kapitels.



## Kapitel 6

# Das modifizierte BPHZ-Verfahren

### 6.1 Motivation und allgemeine Vorgehensweise

Im klassischen BPHZ-Verfahren erfährt zwar jedes ein Feynmandiagramm darstellende divergente Impulsintegral seine Regularisierung in übersichtlicher Art und Weise durch entsprechende Subtraktion des Integranden; die konkrete Ausführung des solchermaßen modifizierten Integrals ist aber gegenüber anderen Regularisierungsverfahren zunächst stark erschwert.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, zunächst auf Ein-Schleifen-Ebene ein modifiziertes BPHZ-Verfahren zu konstruieren, welches den wohldefinierten theoretischen Rahmen des klassischen BPHZ-Formalismus mit den technischen Vorzügen der vielverwandten Dimensionalen Regularisierung vereint und überdies den Vergleich mit letzterer vereinfacht.

Die Idee hierzu besteht darin, bereits am noch nicht subtrahierten Integranden in Anlehnung an die Vorgehensweise bei der Dimensionalen Regularisierung Feynmanparameter einzuführen und den entstehenden Ausdruck durch weitere Modifikationen auf eine Form zu bringen, in der die abschließende Regularisierung in Form einer Taylorsubtraktion im äußeren Impuls erheblich leichter durchgeführt werden kann. Wesentlich hierbei ist, daß die der regularisierenden Subtraktion vorangestellten Manipulationen am Integranden vor einem wohldefinierten Hintergrund erfolgen; inwiefern dieser durch Vergleich mit dem klassischen BPHZ-Verfahren zur Verfügung gestellt wird, sei zunächst wieder am bereits bekannten Beispiel aus der  $\phi^4$ -Theorie demonstriert:

Gemäß dem klassischen BPHZ-Verfahren wird das aus den Feynmanregeln folgende logarithmisch divergente und zur Vierpunktfunction in der Ordnung  $g^2$  beitragende Integral durch die Taylorsubtraktion des Integranden bis zur Ordnung Null regularisiert:

$$\Lambda(p) = \frac{1}{2}g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (1 - t_p^0) \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(p - k)^2 - m^2}. \quad (6.1)$$

Dieser endliche Ausdruck bildet den Ausgangspunkt des modifizierten Verfahrens: Der nach der klassischen BPHZ-Regularisierung zu subtrahierende Integrand wird in einem ersten Schritt, analog zum Vorgehen bei der Dimensionalen Regularisierung, mittels der Einführung eines Feynmanparameters  $z$  umgeformt. Es ist die spezielle Beschaffenheit des resultierenden  $z$ -abhängigen

Integranden, welche es anschließend ermöglicht, *vor der regularisierenden Taylorsubtraktion* die Integration über den Feynmanparameter mit der Impulsintegration zu vertauschen: Auch der modifizierte Integrand wird durch Taylorsubtraktion im äußeren Impuls bis zur Ordnung des Divergenzgrades von den bzgl. der  $k$ -Integration divergenten Anteilen befreit. Als letzte Modifikation kann dann, gleichfalls *vor* der abschließenden Subtraktion, eine Translation der Integrationsvariablen um den Term  $p(z-1)$  vorgenommen werden, welche die - das spätere Ausführen der Impulsintegration wesentlich erleichternde - Trennung von innerem und äußerem Impuls im Nenner des Integranden bewirkt. Im einzelnen sind es somit die folgenden Umformungen, welche dem expliziten Ausführen der Taylorsubtraktion vorausgehen:

$$\begin{aligned}
 \Lambda(p) &= \frac{1}{2}g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz (1-t_p^0) \frac{1}{[((p-k)^2 - m^2)(1-z) + z(k^2 - m^2)]^2} \\
 &= \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 dz \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (1-t_p^0) \frac{1}{[k^2 - 2pk(1-z) + p^2(1-z) - m^2]^2} \\
 &= \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 dz \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} (1-t_p^0) \frac{1}{[k'^2 + p^2z(1-z) - m^2]^2}.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Wesentlich im Hinblick auf die abschließende Translation der Integrationsvariablen um einen zum äußeren Impuls  $p$  proportionalen Term ist wiederum die Tatsache, daß das Skalierungsverhalten<sup>1</sup> des ursprünglichen Integranden für große innere Impulse  $k$  durch die Einführung der Feynmanparameter nicht verändert wird: Wie bereits das Impulsintegral über den parametrisierten Integranden denselben Divergenzgrad aufweist wie dasjenige über den ursprünglichen, so verringert auch weiterhin eine jede Ableitung nach dem äußeren Impuls  $p$  den Skalierungsgrad bzgl.  $k$ ; die Koeffizienten der Taylorentwicklung nach  $p$  führen folglich für Ordnungen größer als der Divergenzgrad auf konvergente  $k$ -Integrale. Dieselbe Überlegung, welche im klassischen BPHZ-Verfahren eine Translation der Integrationsvariablen um einen  $p$ -proportionalen Term - realisiert durch die veränderte Wahl des Standardimpulsflusses - rechtfertigt, ist somit weiterhin anwendbar:

Ausgehend vom subtrahierten ursprünglichen - im Falle des klassischen BPHZ-Verfahrens - bzw. parametrisierten Integranden  $F(k, p)$  sei zunächst am gesamten konvergenten Integral  $I(p)$  die Translation  $k' = k + \lambda p$  in der Integrationsvariablen, gefolgt von einer erneuten, redundanten Taylorsubtraktion, betrachtet:

$$\begin{aligned}
 I(p) &= \int d^4k (F(k, p) - t_p^\omega F(k, p)) = \int d^4k \left( F(k, p) - F(k, 0) - \dots - \frac{1}{\omega!} p^\omega \frac{\partial^\omega}{\partial p^\omega} F(k, 0) \right) \\
 &= \int d^4k \left( F(k + \lambda p, p) - F(k + \lambda p, 0) - \dots - \frac{1}{\omega!} p^\omega \frac{\partial^\omega}{\partial p^\omega} F(\tilde{k}, 0) \Big|_{\tilde{k}=k+\lambda p} \right) \\
 &= \int d^4k \left( (1 - t_p^\omega) F(k + \lambda p, p) - (1 - t_p^\omega) \left( t_p^\omega F(\tilde{k}, p) \right) \Big|_{\tilde{k}=k+\lambda p} \right) \\
 &= \int d^4k (1 - t_p^\omega) F(k + \lambda p, p) - I_0(p).
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

---

<sup>1</sup>Aufgrund der speziellen Gestalt der betrachteten Integranden liefert dieses Skalierungsverhalten tatsächlich eine Aussage über die Konvergenz des entsprechenden Integrals: Nach der Durchführung einer Wickrotaion wird dessen Nenner von einer Potenz des Euklidischen Betrages von  $k$  dominiert.

Neben jeder  $p$ -Ableitung erniedrigt nun aber auch eine jede Differentiation nach  $k$  den Skalierungsgrad von  $F(k, p)$  bzgl. des inneren Impulses; die nach Translation und erneuter Taylorsubtraktion verbleibenden Anteile des anfänglichen Subaktionsterms führen somit weiterhin auf ein *konvergentes* Integral. Aus der Tatsache, daß überdies jeder dieser Anteile mindestens eine  $k$ -Differentiation enthält, folgt schließlich das Verschwinden des resultierenden Integrals  $I_0(p)$ : Der Gaußsche Satz ermöglicht eine Umwandlung desselben in Integrale von Vektorfeldern mit einem Skalierungsverhalten von  $k^{-a}$ ,  $a \geq 4$ , für große innere Impulse über eine dreidimensionale Hyperfläche und im Grenzwert  $k \rightarrow \infty$ .

Zur Auswertung des  $k'$ -Integrals in (6.2) wird nun eine sog. *Wickrotation* durchgeführt, welche unter Beachtung der bislang in abkürzender Schreibweise unterdrückten Integrationsvorschift  $+i\eta$  in den Nennern der Propagatoren im Impulsraum die Einführung vierdimensionaler Euklidischer Polarkoordinaten  $(k_0, \mathbf{k})$  mit Betrag  $\bar{k}$  ermöglicht (Anhang A). Aufgrund der im vorangegangenen erfolgten und gerade den Mischterm  $-2pk(1-z)$  aufhebenden Translation in der Integrationsvariablen resultiert überdies ein ausschließlich vom Betrage  $\bar{k}$  abhängiger Integrand, dessen Winkelintegration somit direkt durch die Multiplikation mit der Oberfläche  $\Omega_4$  der vierdimensionalen Einheitskugel ausgeführt werden kann:

$$\begin{aligned} \Lambda(p) &= i\Omega_4 \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} g^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty d\bar{k} \left\{ \frac{\bar{k}^3}{[\bar{k}^2 - p^2 z(1-z) + m^2]^2} - \frac{\bar{k}^3}{[\bar{k}^2 + m^2]^2} \right\} \\ &= \frac{i}{32\pi^2} g^2 \int_0^1 dz \ln \frac{m^2}{m^2 - p^2 z(1-z)}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Im Gegensatz zum über den Umweg der Dimensionalen Regularisierung erhaltenen Resultat (5.17) erfolgt dessen Herleitung im hier beschriebenen Vorgehen vollständig innerhalb der physikalischen Dimension. Ferner legt die verbleibende Freiheit in der Addition einer Konstanten bzgl. des äußeren Impulses  $p$  eine direkte Verallgemeinerung des Ergebnisses in Form der Ersetzung  $m \rightarrow \mu$  im Zähler des Logarithmus nahe. Im Unterschied zur Dimensionalen Regularisierung ist es im modifizierten BPHZ-Verfahren jedoch nicht das spezielle Vorgehen, das die Einführung einer Massenskala erfordert; vielmehr verallgemeinert der eingeführte Massenparameter das spezielle Resultat, indem er die grundlegende Freiheit bei der Regularisierung verwendet:

$$\Lambda^\mu(p) = \frac{i}{32\pi^2} g^2 \int_0^1 dz \ln \frac{\mu^2}{m^2 - p^2 z(1-z)}. \quad (6.5)$$

Das Ergebnis (5.16) der Dimensionalen Regularisierung ist in dieser Verallgemeinerung enthalten; die Wahl  $\mu^2 = 4\pi\mu_{D.R.}^2 e^{-\gamma}$  vermittelt dabei den Übergang zwischen den beiden Parametrisierungen:

$$\Lambda(p)_{D.R.} = \frac{i}{32\pi^2} g^2 \left\{ -\gamma + \int_0^1 dz \ln \frac{4\pi\mu_{D.R.}^2}{m^2 - p^2 z(1-z)} \right\}. \quad (6.6)$$

Die vorangegangenen Betrachtungen legen nun eine allgemeine Vorgehensweise bei der Regularisierung divergenter Ein-Schleifen-Diagramme  $\gamma$  nahe. Ausgehend vom Impulsintegral über den inneren Impuls  $k$  des aus der klassischen BPHZ-Regularisierung resultierenden subtrahierten Integranden  $(1 - t_p^\omega) I_\gamma(k, p)$  seien die wesentlichen Schritte des modifizierten BPHZ-Verfahrens wie folgt vorgegeben:

1. Einführung der Feynmanparametrisierung am Term  $I_\gamma(k, p)$  und Vertauschung der dies-bzgl. Integrationen mit dem Operator  $(1 - t_p^\omega)$  und der  $k$ -Integration,
2. Translation der Integrationsvariablen um  $\lambda p$  zur Separation von äußerem und innerem Impuls im Nenner des Integranden ( $\lambda$  ist eine Funktion der Feynmanparameter),
3. Ausführung der Taylorsubtraktion um  $p = 0$  bis zur singulären Ordnung  $\omega$ ,
4. Durchführung der Wickrotation und Einführung Euklidischer Polarkoordinaten,
5. Ausführung der Impulsintegration und Ersetzung der Masse  $m$  durch einen Massenparameter  $\mu$  im  $p$ -konstanten Teil des resultierenden Logarithmus.

## 6.2 Demonstration an Beispielen aus der QED

In den folgenden Abschnitten sei das modifizierte BPHZ-Verfahren zunächst an den drei beitragenden divergenten Ein-Schleifen-Diagrammen der Quantenelektrodynamik - Elektronselfstenergie, photonische Selbstenergie und Vertexkorrektur - demonstriert. Neben der deutlichen Herausstellung der regularisierenden Manipulation in Form der Taylorsubtraktion, welche auch die Zulässigkeit des angewandten Verfahrens im Sinne von Epstein-Glaser sicherstellt, wird bereits an diesen Beispielen als weiterer wesentlicher Vorteil gegenüber der Dimensionalen Regularisierung deutlich, daß keine im Zuge der Erweiterung auf  $d$  Dimensionen anfallende Definition  $d$ -dimensionaler Diracscher Gammamatrizen erforderlich ist. Die Verallgemeinerung der einzelnen Ergebnisse durch die Einführung eines Massenparameters  $\mu$  stellt abschließend den Vergleich zwischen den beiden Verfahren her.

### 6.2.1 Elektronselfstenergie

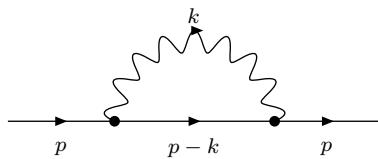


Abbildung 6.1: Elektronselfstenergie

Für diesen nach den Feynmanregeln konstruierten, linear divergenten Beitrag niedrigster Schleifenordnung zum Elektronpropagator liefert das klassische BPHZ-Verfahren:

$$\begin{aligned}
 \Sigma(p) &= -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1 - t_p^1) \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma_\nu \frac{g^{\mu\nu}}{k^2} \\
 &= -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1 - t_p^1) \frac{\gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\mu}{[(p - k)^2 - m^2] k^2}.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Nach der Einführung des Feynmanparameters  $z$  bewerkstelligt die Substitution  $k = k' + pz$  der Integrationsvariablen die Trennung von äußerem und innerem Impuls:

$$\begin{aligned}\Sigma(p) &= -ie^2 \int_0^1 dz \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1-t_p^1) \frac{\gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\mu}{[(p-k)^2 z - m^2 z + k^2(1-z)]^2} \\ &= -ie^2 \int_0^1 dz \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} (1-t_p^1) \frac{\gamma_\mu (\not{p} - \not{p}z - \not{k}' + m) \gamma^\mu}{[k'^2 - m^2 z + p^2 z(1-z)]^2}.\end{aligned}\quad (6.8)$$

Aufgrund der Symmetrie des Integrationsvolumens tragen ferner die in  $k$  ungeraden Terme des Integranden nicht bei; Wickrotation und Einführung vierdimensionaler Euklidischer Polarkoordinaten gehen schließlich dem expliziten Ausführen der Subtraktion voraus:

$$\begin{aligned}\Sigma(p) &= -ie^2 \int_0^1 dz \gamma_\mu (\not{p}(1-z) + m) \gamma^\mu \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} (1-t_p^0) \frac{1}{[k'^2 - m^2 z + p^2 z(1-z)]^2} \\ &= -ie^2 \int_0^1 dz \gamma_\mu (\not{p}(1-z) + m) \gamma^\mu \\ &\quad \Omega_4 i \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\bar{k} \left\{ \frac{\bar{k}^3}{[\bar{k}^2 + m^2 z - p^2 z(1-z)]^2} - \frac{\bar{k}^3}{[\bar{k}^2 + m^2 z]^2} \right\} \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dz (2\not{p}(z-1) + 4m) \ln \frac{m^2}{m^2 - p^2(1-z)},\end{aligned}\quad (6.9)$$

unter Verwendung der Beziehungen  $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$ ,  $\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu = -2\gamma_\nu$ . Als Ergebnis des modifizierten BPHZ-Verfahrens folgt somit:

$$\Sigma^\mu(p) = \frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dz (2\not{p}(z-1) + 4m) \ln \frac{\mu^2}{m^2 - p^2(1-z)}. \quad (6.10)$$

Mit der speziellen Wahl  $\mu^2 = 4\pi\mu_{D.R.}^2 \exp\{\frac{1}{2} - \gamma\}$  resultiert der endliche Anteil des gemäß [RYD] aus der Dimensionalen Regularisierung erhaltenen Ergebnisses:

$$\begin{aligned}\Sigma(p)_{D.R.} &= \frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dz (2\not{p}(z-1) + 4m) \ln(ze^{\frac{1}{2} - \gamma}) \\ &\quad + \frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dz (2\not{p}(z-1) + 4m) \ln \frac{4\pi\mu_{D.R.}^2}{m^2 z - p^2 z(1-z)} \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2} \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) (-\not{p} + 4m) + \frac{e^2}{16\pi^2} \left( \frac{3}{2}\not{p} - 4m \right) \\ &\quad + \frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dz (2\not{p}(z-1) + 4m) \ln \frac{4\pi\mu_{D.R.}^2}{m^2 z - p^2 z(1-z)} \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2} (\not{p}(1 + \gamma) - 2m(1 + 2\gamma)) \\ &\quad + \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \int_0^1 dz (2\not{p}(z-1) + 4m) \ln \frac{4\pi\mu_{D.R.}^2}{m^2 z - p^2 z(1-z)} \right\}.\end{aligned}\quad (6.11)$$

### 6.2.2 Vakuumpolarisation

Als zweites Beispiel soll nun der quadratisch divergente Beitrag zur photonischen Selbstenergie in Ein-Schleifen-Ordnung berechnet werden.

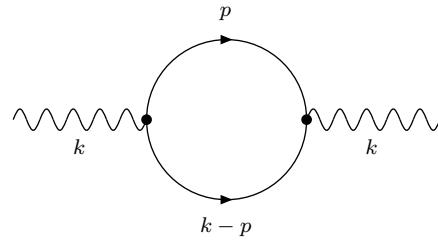


Abbildung 6.2: Vakuumpolarisation

Für dieses Diagramm liefert das klassische BPHZ-Verfahren die folgende Regularisierung des aus den Feynmanregeln folgenden Integrals:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^4 p}{(4\pi)^2} (1 - t_k^2) \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \right]. \quad (6.12)$$

Auf die Erweiterung des Integranden mit  $\not{p} + m$  und  $\not{p} - \not{k} + m$  und die Einführung des Feynmanparameters  $z$  folgt zunächst nach dem allgemeinen Schema des modifizierten Verfahrens die Translation der Integrationsvariablen  $p$  gemäß  $p = p' + k(1 - z)$ ,  $p' \rightarrow p$ , so daß resultiert:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = ie^2 \int_0^1 dz \int \frac{d^4 p}{(4\pi)^2} (1 - t_k^2) \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p} + \not{k}(1 - z) + m)\gamma_\nu(\not{p} - \not{k}z + m)]}{[p^2 + k^2 z(1 - z) - m^2]^2}. \quad (6.13)$$

Bei der expliziten Berechnung der Spur verschwinden nun aber zunächst die zu  $m$  proportionalen Terme, da sie eine ungerade Anzahl von  $\gamma$ -Matrizen enthalten; ferner tragen auch die in  $p$  linearen Anteile aufgrund der symmetrischen Integrationsgrenzen nicht zum Integral bei:

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p} + \not{k}(1 - z) + m)\gamma_\nu(\not{p} - \not{k}z + m)] \\ &= \text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p} + \not{k}(1 - z))\gamma_\nu(\not{p} - \not{k}z) + m^2\gamma_\mu\gamma_\nu] \\ &= \text{Tr}[\gamma_\mu\not{p}\gamma_\nu\not{p} - \gamma_\mu\not{k}\gamma_\nu\not{k}z(1 - z) + m^2\gamma_\mu\gamma_\nu] + \mathcal{O}(p) \\ &= -4g_{\mu\nu}[p^2 - k^2 z(1 - z) - m^2] + 8p_\mu p_\nu - 8k_\mu k_\nu z(1 - z) + \mathcal{O}(p), \end{aligned} \quad (6.14)$$

mit den Spuren

$$\text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu] = 4g_{\mu\nu}, \quad \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\kappa\gamma_\nu\gamma_\lambda] = 4(g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu}g_{\kappa\lambda} + g_{\mu\lambda}g_{\kappa\nu}). \quad (6.15)$$

Die Verwendung von (6.14) in (6.13) führt somit auf:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = ie^2 \int_0^1 dz \int \frac{d^4 p}{(4\pi)^2} (1 - t_k^2) \frac{8p_\mu p_\nu - 8k_\mu k_\nu z(1 - z) - 4g_{\mu\nu}[p^2 - k^2 z(1 - z) - m^2]}{[p^2 + k^2 z(1 - z) - m^2]^2}, \quad (6.16)$$

woraus durch partielle Integration des ersten Teils und abschließendes explizites Ausführen der Taylorsubtraktion resultiert:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}(k) &= ie^2 \int_0^1 dz \int \frac{d^4 p}{(4\pi)^2} (1 - t_k^2) \left\{ \frac{4g_{\mu\nu}}{p^2 + k^2 z(1-z) - m^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{8k_\mu k_\nu z(1-z) + 4g_{\mu\nu}[p^2 - k^2 z(1-z) - m^2]}{[p^2 + k^2 z(1-z) - m^2]^2} \right\} \\
&= 8ie^2 \int_0^1 dz \int \frac{d^4 p}{(4\pi)^2} (1 - t_k^2) \frac{g_{\mu\nu} k^2 z(1-z) - k_\mu k_\nu z(1-z)}{[p^2 + k^2 z(1-z) - m^2]^2} \\
&= -\frac{e^2}{\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^\infty d\bar{p} (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) z(1-z) \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{\bar{p}^3}{[\bar{p}^2 - k^2 z(1-z) + m^2]^2} - \frac{\bar{p}^3}{[\bar{p}^2 + m^2]^2} \right\} \\
&= -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dz (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) z(1-z) \ln \frac{m^2}{m^2 - k^2 z(1-z)}. \tag{6.17}
\end{aligned}$$

Als Ergebnis des modifizierten BPHZ-Verfahrens folgt schließlich:

$$\Pi_{\mu\nu}^{\tilde{\mu}}(k) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dz (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) z(1-z) \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m^2 - k^2 z(1-z)}. \tag{6.18}$$

Zum Vergleich mit dem in [RYD] aus der Dimensionalen Regularisierung erhaltenen endlichen Resultat wird wiederum der Massenparameter  $\tilde{\mu}$  variiert; jenes spezielle Ergebnis folgt für die Wahl  $\tilde{\mu}^2 = 4\pi\mu_{D.R.}^2 \exp\{-\gamma\}$ :

$$\Pi_{\mu\nu D.R.}(k) = -\frac{e^2}{2\pi^2} (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \left\{ \frac{-\gamma}{6} + \int_0^1 dz z(1-z) \ln \frac{4\pi\mu_{D.R.}^2}{m^2 - k^2 z(1-z)} \right\}. \tag{6.19}$$

### 6.2.3 Vertexkorrektur

Als letzte Ein-Schleifen-Korrektur in der QED sei nun der Beitrag zur Kopplung berechnet (Abb. 6.3). Das entsprechende logarithmisch divergente Integral besitzt die folgende BPHZ-Regularisierung:

$$\begin{aligned}
-ie\Lambda_\mu(p, p') &= ie^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1 - t_{p,p'}^0) \gamma_\nu \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m} \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma_\rho \frac{-ig^{\nu\rho}}{k^2} \\
&= -e^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1 - t_{p,p'}^0) \frac{\gamma_\nu (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\nu}{[(p' - k)^2 - m^2][(p - k)^2 - m^2] k^2}. \tag{6.20}
\end{aligned}$$

Nach der Einführung der Feynmanparameter  $x$  und  $y$  und der darauffolgenden Substitution  $k' = k + px + p'y$  tragen wiederum die im Zähler zu  $\not{k}'$  proportionalen Terme nicht zum Integral bei. Darüberhinaus führt derjenige Teil, welcher im Zähler keine  $k$ -Potenz enthält, bereits ohne

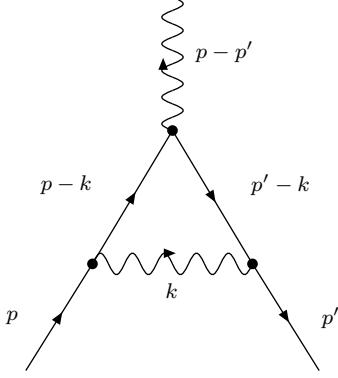


Abbildung 6.3: Vertexkorrektur

Taylorsubtraktion auf ein konvergentes Integral; dem klassischen BPHZ-Verfahren folgend, wird diese dennoch - als eine endliche Modifikation - durchgeführt:

$$\begin{aligned}
 & -ie\Lambda_\mu(p, p') \\
 &= -2e^3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1 - t_{p,p'}^0) \frac{\gamma_\nu (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\nu}{[k^2 - m^2(x+y) - 2k(px+p'y) + p^2x + p'^2y]^3} \\
 &= -2e^3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\
 & \quad \cdot \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} (1 - t_{p,p'}^0) \frac{\gamma_\nu (\not{p}'(1-y) - \not{p}x - \not{k}' + m) \gamma_\mu (\not{p}(1-x) - \not{p}'y - \not{k}' + m) \gamma^\nu}{[k'^2 - m^2(x+y) + p^2x(1-x) + p'^2y(1-y) - 2pp'xy]^3} \\
 &= -2e^3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1 - t_{p,p'}^0) \left\{ \frac{\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu \not{k} \gamma^\nu}{[k^2 - M^2]^3} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\gamma_\nu (\not{p}'(1-y) - \not{p}x + m) \gamma_\mu (\not{p}(1-x) - \not{p}'y + m) \gamma^\nu}{[k^2 - M^2]^3} \right\}, \quad (6.21)
 \end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$M^2 := m^2(x+y) - p^2x(1-x) - p'^2y(1-y) + 2pp'xy. \quad (6.22)$$

Nach der Ausführung der Summation über  $\gamma$ -Matrizen im ersten Teil von (6.21),

$$\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu \not{k} \gamma^\nu = -4k_\mu \not{k} + 2k^2 \gamma_\mu, \quad (6.23)$$

wird der aus dem ersten Summanden von (6.23) folgende Term zunächst mittels partieller Integration umgeformt:

$$\begin{aligned}
& -ie\Lambda_\mu(p, p') \\
&= -2e^3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ (1 - t_{p,p'}^0) \left( -\gamma_\mu \frac{1}{[k^2 - M^2]^2} + 2k^2 \gamma_\mu \frac{1}{[k^2 - M^2]^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 - t_{p,p'}^0) \frac{\gamma_\nu (\not{p}'(1-y) - \not{p}x + m) \gamma_\mu (\not{p}(1-x) - \not{p}'y + m) \gamma^\nu}{[k^2 - M^2]^3} \right\} \\
&= \frac{-ie^3}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^\infty d\bar{k} \left\{ -\gamma_\mu \left( \frac{\bar{k}^3}{[\bar{k}^2 + M^2]^2} - \frac{\bar{k}^3}{[\bar{k}^2 + m^2(x+y)]^2} \right) \right. \\
&\quad + 2\bar{k}^2 \gamma_\mu \left( \frac{\bar{k}^3}{[\bar{k}^2 + M^2]^3} - \frac{\bar{k}^3}{[\bar{k}^2 + m^2(x+y)]^3} \right) \\
&\quad \left. - \left( \frac{\bar{k}^3 \gamma_\nu (\not{p}'(1-y) - \not{p}x + m) \gamma_\mu (\not{p}(1-x) - \not{p}'y + m) \gamma^\nu}{[\bar{k}^2 + M^2]^3} - \frac{\bar{k}^3 m^2 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\nu}{[\bar{k}^2 + m^2(x+y)]^3} \right) \right\} \\
&= \frac{-ie^3}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \gamma_\mu \ln \frac{m^2(x+y)}{M^2} + \frac{ie^3 \gamma_\mu}{8\pi^2} \\
&\quad + \frac{ie^3}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\gamma_\nu (\not{p}'(1-y) - \not{p}x + m) \gamma_\mu (\not{p}(1-x) - \not{p}'y + m) \gamma^\nu}{M^2}. \tag{6.24}
\end{aligned}$$

Mit der Ersetzung  $m \rightarrow \tilde{\mu}$  folgt schließlich das Ergebnis des modifizierten BPHZ-Verfahrens:

$$\begin{aligned}
-ie\Lambda_\mu^{\tilde{\mu}}(p, p') &= \frac{-ie^3}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \gamma_\mu \ln \frac{\tilde{\mu}^2(x+y)}{M^2} + \frac{ie^3}{8\pi^2} \gamma_\mu \\
&\quad + \frac{ie^3}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\gamma_\nu (\not{p}'(1-y) - \not{p}x + m) \gamma_\mu (\not{p}(1-x) - \not{p}'y + m) \gamma^\nu}{M^2}, \tag{6.25}
\end{aligned}$$

$M^2$  aus (6.22). Wiederum ist das Ergebnis der Dimensionalen Regularisierung in diesem Resultat enthalten; letzteres liefert die - mit der bereits zu diesem Zwecke im Falle der Elektronself-energie getroffenen identische - Wahl  $\tilde{\mu}^2 = 4\pi\mu_{D.R.}^2 \exp\{\frac{1}{2} - \gamma\}$  in (6.25):

$$\begin{aligned}
-ie\Lambda_\mu(p, p')_{D.R.} &= \frac{i\gamma}{16\pi^2} e^3 \gamma_\mu - \frac{ie^3}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \gamma_\mu \ln \frac{4\pi\mu_{D.R.}^2}{M^2} + \frac{ie^3}{8\pi^2} \gamma_\mu \\
&\quad + \frac{ie^3}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\gamma_\nu (\not{p}'(1-y) - \not{p}x + m) \gamma_\mu (\not{p}(1-x) - \not{p}'y + m) \gamma^\nu}{M^2}. \tag{6.26}
\end{aligned}$$

Tatsächlich folgt aus dem Zusammenhang von modifiziertem BPHZ-Verfahren und Dimensionaler Regularisierung im Falle von  $\Sigma(p)$  und  $\Lambda_\mu(p, p')$  durch dieselbe Umparametrisierung ( $\tilde{\mu} \leftrightarrow \mu_{D.R.}$ ) die Gültigkeit der - bei letzterer Regularisierungsmethode erfüllten - Wardidentität

$$\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu} = -\Lambda_\mu(p, p) \tag{6.27}$$

auch für das modifizierte BPHZ-Verfahren.

Während somit bereits anhand der in diesem Kapitel vorgestellten Beispiele aus der QED die Vereinfachung gezeigt wurde, welche die Vermeidung der Definition von Diracschen Gam-mamatrizen in  $d$  Dimensionen durch ein ausschließlich in physikalischer Dimension formuliertes Regularisierungsverfahren ermöglicht, sind es die *chiralen* Theorien, bei denen diesem zunächst praktischen Vorteil eine wesentliche Bedeutung zukommt: Die in diesen auftretende Matrix  $\gamma_5$  enthält den für den vierdimensionalen Minkowskiraum spezifischen Levi-Civita-Tensor  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  und bedarf beim Übergang in  $d$  Dimensionen einer - im Vergleich zur Fortsetzung der einzelnen Gam-mamatrizen aufwendigen - neuen Definition. Im folgenden Kapitel sei anhand eines bekannten Beispiels die dahingegen unproblematische Anwendung des modifizierten BPHZ-Verfahrens für ein Diagramm mit axialer Kopplung demonstriert.

# Kapitel 7

## Die chirale Anomalie

Zur Konstruktion eines Beispiels für die unveränderte Anwendbarkeit des modifizierten BPHZ-Verfahrens bei den Feynmandiagrammen einer chiralen Theorie sei vom Modell einer axialen Erweiterung der QED-Lagrangedichte ausgegangen, wie z. B. in [CMS] angeführt, in welcher das massive Fermion zusätzlich an ein axiales Eichboson  $A_5^\mu$  koppelt:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\cancel{d} - m)\Psi - eJ_\mu A^\mu - e'J_{5\mu}A_5^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{5\mu\nu}F_5^{\mu\nu}. \quad (7.1)$$

Aus der Invarianz dieser - zunächst klassischen - Lagrangedichte unter globalen  $U(1)$ -Transformationen des Spinorfeldes  $\Psi$ ,

$$\Psi' = e^{i\alpha}\Psi, \quad \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}e^{-i\alpha}, \quad (7.2)$$

folgt nach dem Theorem von E. Noether die Erhaltung des Vektorstromes  $J_\mu$ , während die Invarianz unter entsprechenden axialen  $U(1)$ -Transformationen,

$$\Psi' = e^{i\beta\gamma_5}\Psi, \quad \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}e^{i\beta\gamma_5}, \quad (7.3)$$

durch den Massenanteil gebrochen ist; insgesamt gilt für vektoriellen und axialen Strom:

$$\partial^\mu J_\mu = 0, \quad \partial^\mu J_{5\mu} = 2im\bar{\Psi}\gamma_5\Psi, \quad (7.4)$$

mit  $J_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$  und  $J_{5\mu} = \bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi$ .

Für den in Abb. 7.1 dargestellten Beitrag zum sog. *Dreiecksgraphen*  $T_{\lambda\mu\nu}$ , drei innere Fermionen beschreibend, welche an zwei vektorielle, mit den Impulsen  $p$  und  $q$  an den Vertices  $\mu$  und  $\nu$  einfallende, und ein axiales Eichboson koppeln, tritt - als Folge des Übergangs zur quantentheoretischen Betrachtung - eine Anomalie auf: Während die klassische Erhaltung von  $J_\mu$  in den Wardidentitäten

$$p^\mu T_{\lambda\mu\nu} = 0, \quad (7.5)$$

$$q^\nu T_{\lambda\mu\nu} = 0 \quad (7.6)$$

resultiert, folgt auch im Grenzfall  $m = 0$  keine analoge, die in diesem Falle vorliegende Erhaltung auch des axialen Stromes  $J_{5\mu}$  ausdrückende Gleichung; stattdessen gilt unter Beiseitelassung der Kopplungskonstanten :

$$(p^\lambda + q^\lambda)T_{\lambda\mu\nu} = 2mT_{\mu\nu} + \frac{1}{2\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q^\rho p^\sigma, \quad (7.7)$$

mit

$$T_{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{1}{k-m} \gamma_\mu \frac{1}{k-p-m} \gamma_5 \frac{1}{k+q-m} \gamma_\nu \right) + (p \leftrightarrow q, \mu \leftrightarrow \nu). \quad (7.8)$$

Als Anomalie wird hierbei der massenunabhängige zweite Teil von (7.7) bezeichnet, welcher die klassisch für masselose Fermionen vorliegende axiale  $U(1)$ -Symmetrie auf Quantenniveau bricht. Wesentlich zur dessen Herleitung ist die Tatsache, daß die entsprechende, naiv nach den Feynmanregeln berechnete Amplitude für diesen Prozeß linear divergent ist. Die natürliche Vorgehensweise zur Berechnung der Gleichungen (7.5) bis (7.7) besteht somit darin, zunächst eine Regularisierung  $T_{\lambda\mu\nu}$  anzugeben, um jene dann auf der Stufe des resultierenden endlichen Ausdrucks zu überprüfen. Auf diese Weise können konsequent Manipulationen mit divergenten Termen, die für die z. B. in [RYD] zur Bestimmung der Anomalie herangezogenen Symmetrieverlegungen vonnöten sind, vermieden werden.

Eine Berechnung der Anomalie im Rahmen der Dimensionalen Regularisierung ist in [NOV] ausgeführt, wobei insbesondere das sog.  $\gamma_5$ -Problem behandelt wird.

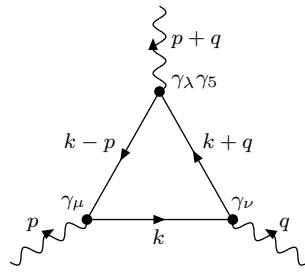


Abbildung 7.1: Beitrag zum Dreiecksgraphen  $T_{\lambda\mu\nu}(p, q)$

## 7.1 Berechnung des Dreiecksgraphen

Das betrachtete linear divergente Diagramm besitzt - bei entsprechender Unterdrückung der Vorfaktoren - nach dem klassischen BPHZ-Verfahren die folgende Regularisierung:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} T_{\lambda\mu\nu}(p, q) \\
&= - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1 - t_{p,q}^1) \text{Tr} \left( \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{\not{k} - \not{p} + m}{(k - p)^2 - m^2} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{\not{k} + \not{q} + m}{(k + q)^2 - m^2} \gamma_\nu \right) \\
&= -2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\
&\quad \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1 - t_{p,q}^1) \frac{\text{Tr}((\not{k} + m) \gamma_\mu (\not{k} - \not{p} + m) \gamma_\lambda \gamma_5 (\not{k} + \not{q} + m) \gamma_\nu)}{[(k^2 - m^2)(1 - x - y) + ((k - p)^2 - m^2)x + ((k + q)^2 - m^2)y]^3} \\
&= -2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1 - t_{p,q}^1) \\
&\quad \frac{\text{Tr}((\not{k} + m) \gamma_\mu (\not{k} - \not{p} + m) \gamma_\lambda \gamma_5 (\not{k} + \not{q} + m) \gamma_\nu)}{[(k + (qy - px))^2 - (qy - px)^2 - m^2(1 - x - y) + (q^2 - m^2)y + (p^2 - m^2)x]^3}. \quad (7.9)
\end{aligned}$$

Ein zweiter, gleichfalls zur Kopplung beitragender Term ergibt sich durch die Vertauschungen  $(p \leftrightarrow q)$  und  $(\mu \leftrightarrow \nu)$  aus dem ersten; aus Symmetriegründen liefert dessen Anteil jedoch nur einen Faktor 2.

Die nun anschließende Substitution  $k' = k - (qy - px)$ ,  $k' \rightarrow k$ , separiert im Nenner - dem Schema des modifizierten Verfahrens folgend - den inneren von den äußeren Impulsen und erlaubt die Unterscheidung von in  $k$  geraden und ungeraden Anteilen anhand der entsprechenden Potenzen im Argument der Spur:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu} &= -4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1 - t_{p,q}^1) \\
&\quad \frac{\text{Tr}((\not{k} - (\not{q}y - \not{p}x) + m) \gamma_\mu (\not{k} - (\not{q}y - \not{p}x) - \not{p} + m) \gamma_\lambda \gamma_5 (\not{k} - (\not{q}y - \not{p}x) + \not{q} + m) \gamma_\nu)}{[k^2 - (qy - px)^2 - m^2 + q^2y + p^2x]^3}; \quad (7.10)
\end{aligned}$$

aufgrund der Symmetrie des  $k$ -Integrationsintervalls tragen in der Spur nur Terme proportional zu geraden Potenzen von  $k$  zum Integral bei. Da überdies die Spur über eine ungerade Anzahl von  $\gamma$ -Matrizen verschwindet, reduzieren sich die zu berechnenden Terme auf einen zum ursprünglich logarithmisch divergenten Teil des Integrals gehörenden Anteil

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}(\gamma_5 \not{k} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\lambda (\not{p}x - \not{q}y + \not{q}) \gamma_\nu) + \text{Tr}(\gamma_5 \not{k} \gamma_\mu (\not{p}x - \not{q}y - \not{p}) \gamma_\lambda \not{k} \gamma_\nu) \\
&+ \text{Tr}((\not{p}x - \not{q}y) \gamma_\mu \not{k} \gamma_\lambda \gamma_5 \not{k} \gamma_\nu) \\
&= 8i\epsilon_{\lambda\tau\nu\rho} k^\rho k_\mu (p^\tau x - q^\tau y + q^\tau) + 8i\epsilon_{\mu\tau\lambda\rho} k^\rho k_\nu (p^\tau x - q^\tau y - p^\tau) \\
&+ 8i\epsilon_{\nu\tau\mu\rho} k^\rho k_\lambda (p^\tau x - q^\tau y) - 12i\epsilon_{\nu\tau\mu\lambda} k^2 (p^\tau x - q^\tau y) - 4i\epsilon_{\lambda\tau\nu\mu} k^2 (q^\tau - p^\tau), \quad (7.11)
\end{aligned}$$

sowie den auf den endlichen Teil führenden Term

$$\begin{aligned}
& m^2 \text{Tr}((\not{q}y - \not{p}x) \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\nu + \gamma_\mu (\not{q}y - \not{p}x + \not{p}) \gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\nu + \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_5 (\not{q}y - \not{p}x - \not{q}) \gamma_\nu) \\
&+ \text{Tr}((\not{q}y - \not{p}x) \gamma_\mu (\not{q}y - \not{p}x + \not{p}) \gamma_\lambda \gamma_5 (\not{q}y - \not{p}x - \not{q}) \gamma_\nu) \\
&= 4i\epsilon_{\lambda\mu\nu\tau} \{(q^\tau(y - 1) - p^\tau(x - 1))[(qy - px)^2 - m^2] - q^2 p^\tau y + p^2 q^\tau x\} \\
&+ 8iy\epsilon_{\mu\tau\lambda\rho} q^\rho p^\tau (q_\nu(y - 1) - p_\nu x) - 8ix\epsilon_{\lambda\tau\nu\rho} p^\rho q^\tau (p_\mu(x - 1) - q_\mu y). \quad (7.12)
\end{aligned}$$

Die Berechnung des  $k$ -Integrals im zu den Spuren (7.11) gehörigen Anteil führt schließlich auf

$$T_{\lambda\mu\nu}^{\log} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \epsilon_{\lambda\mu\nu\tau} \{p^\tau(3x-1) - q^\tau(3y-1)\} \ln \frac{m^2}{m^2 + (qy-px)^2 - q^2y - p^2x}, \quad (7.13)$$

während die  $k$ -Integration des aus den Spuren (7.12) resultierenden Teils folgenden Ausdruck ergibt:

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu\nu}^{\text{end}} = & \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left( \frac{\epsilon_{\lambda\mu\nu\tau}((q^\tau(y-1) - p^\tau(x-1))[(qy-px)^2 - m^2] - q^2p^\tau y + p^2q^\tau x)}{(qy-px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x} \right. \\ & + \frac{2y\epsilon_{\mu\tau\lambda\rho}q^\rho p^\tau[q_\nu(y-1) - p_\nu x] - 2x\epsilon_{\lambda\tau\nu\rho}p^\rho q^\tau[p_\mu(x-1) - q_\mu y]}{(qy-px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x} \\ & \left. + \epsilon_{\lambda\mu\nu\tau}(q^\tau(y-1) - p^\tau(x-1)) \right). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Zu den Berechnungen der Spuren sowie zur expliziten Ausführung der  $k$ -Integrationen sei auf Anhang B verwiesen.

Tatsächlich ist das Ergebnis

$$T_{\lambda\mu\nu} = T_{\lambda\mu\nu}^{\log} + T_{\lambda\mu\nu}^{\text{end}} \quad (7.15)$$

bereits mit dem allgemeineren des modifizierten BPHZ-Verfahrens, resultierend aus der Ersetzung  $m \rightarrow \mu$  im Zähler des Logarithmus, identisch: Die diesbezügliche Änderung

$$\sim \{p^\tau(3x-1) - q^\tau(3y-1)\} \ln \frac{m^2}{\mu^2}$$

verschwindet bei der Integration über die Feynmanparameter  $x$  und  $y$ . Bemerkenswerterweise scheint hier die Unmöglichkeit, nach dem eng mit dem entsprechenden Verfahren bei der Dimensionalen Regularisierung korrelierten Vorgehen einen Massenparameter in das Ergebnis einzuführen, die ausgezeichnete Rolle des physikalischen Minkowskiraums bezüglich der Definition von chiralen Zuständen widerzuspiegeln.

Die Kenntnis der konkreten Regularisierung (7.15) erlaubt nun anschließend die Überprüfung der Wardidentitäten (7.5) und (7.6) sowie die Bestimmung der Anomalie in (7.7) auf der Stufe wohldefinierter endlicher Ausdrücke.

## 7.2 Wardidentitäten

Als Beispiel soll hier die Wardidentität (7.5) dienen; für diese gilt:

$$\begin{aligned} p^\mu T_{\lambda\mu\nu} = & \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\lambda\mu\nu\tau} q^\tau p^\mu \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left( (1-3y) \ln \frac{m^2}{m^2 + (qy-px)^2 - q^2y - p^2x} \right. \\ & \left. + \frac{y(qy-px)^2 - m^2(y-1) - q^2y^2 + p^2x(x-1)}{(qy-px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x} + (y-1) \right). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Durch partielle Integration des logarithmischen Anteils bzgl. der Feynmanparameters läßt sich dieser wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-3y) \ln \frac{m^2}{m^2 + (qy - px)^2 - q^2y - p^2x} \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-2y-x) \ln \frac{m^2}{m^2 + (qy - px)^2 - q^2y - p^2x} \\
&\quad - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (y-x) \ln \frac{m^2}{m^2 + (qy - px)^2 - q^2y - p^2x} \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{y(1-y-x)(2(qy - px)q - q^2)}{(qy - px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x} \\
&\quad - \int_0^1 dx \frac{(1-x)^2}{2} \ln \frac{(qx - p(1-x))^2 + m^2 - q^2x - p^2(1-x)}{(q(1-x) - px)^2 + m^2 - q^2(1-x) - p^2x} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{y^2(2(qy - px)q - q^2) - x^2(-2(qy - px)p - p^2)}{(qy - px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x}. \tag{7.17}
\end{aligned}$$

Hier verschwindet der Logarithmus im zweiten Term dieses letzten Ausdrucks, so daß schließlich mit der Addition des verbleibenden Anteils von (7.16) resultiert:

$$p^\mu T_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\lambda\mu\nu\tau} q^\tau p^\mu \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left( \frac{(-yx + 2yx^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^2)p^2 + (yx^2 - y^2x)qp + (-y^3 - 2y^2x + \frac{1}{2}y^2 + yx)q^2}{(qy - px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x} \right). \tag{7.18}$$

Es ist die spezielle Gestalt dieser Gleichung, welche nun zur Verifizierung der Wardidentität an die Stelle einer aufwendigen expliziten Ausführung der Integrationen über die Feynmanparameter eine einfache Symmetrieverlegung setzt:

Im betrachteten Diagramm sind die an den Vertices  $\mu$  und  $\nu$  einfallenden Teilchen mit den Impulsen  $p$  und  $q$  *identische* vektorielle Eichbosonen. Die Verwendung der Identität  $p^2 = q^2$  für identische Teilchen in (7.18) offenbart aber, insbesondere im hier vorliegenden Falle  $p^2 = q^2 = 0$ , die Antisymmetrie des Integranden bzgl. der Vertauschung von  $x$  und  $y$ , welche wegen der Symmetrie des Integrationsgebietes zum Verschwinden des Integrals führt; die Wardidentität (7.5),  $p^\mu T_{\lambda\mu\nu} = 0$ , ist folglich für den betrachteten Prozeß erfüllt.

Aus diesem Ergebnis folgt wegen der Symmetrie von  $T_{\lambda\mu\nu}$  bzgl. der Vertauschung  $(p \leftrightarrow q)$  und  $(\mu \leftrightarrow \nu)$  direkt auch die Gültigkeit der zweiten Wardidentität (7.6):

$$\begin{aligned}
p^\mu T_{\lambda\mu\nu}(p, q) &= p^\mu T_{\lambda\nu\mu}(q, p) = 0 \\
&\stackrel{p \rightarrow q, \mu \rightarrow \nu}{\Rightarrow} q^\nu T_{\lambda\mu\nu}(p, q) = 0. \tag{7.19}
\end{aligned}$$

### 7.3 Berechnung der Anomalie

Zur Bestätigung der Gleichung (7.7) sei zuerst auch im dort enthaltenen Term  $2mT_{\mu\nu}$  die Feynmanparametrisierung eingeführt und das parametrisierte Impulsintegral berechnet. Unter Verwendung der Beziehung

$$\text{Tr}((\not{k} + m)\gamma_\mu(\not{k} - \not{p} + m)\gamma_5(\not{k} + \not{q} + m)\gamma_\nu) = -4im\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q^\rho p^\sigma \quad (7.20)$$

resultiert:

$$\begin{aligned} & 2mT_{\mu\nu}(m) \\ &= -16im^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q^\rho p^\sigma}{(k^2 - m^2)((k - p)^2 - m^2)((k + q)^2 - m^2)} \\ &= -32im^2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q^\rho p^\sigma \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2 - (qy - px)^2 + q^2y + p^2x]^3} \\ &= -\frac{1}{\pi^2} m^2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q^\rho p^\sigma \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(qy - px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Aus der expliziten Berechnung der entsprechenden Impulskontraktion folgt andererseits:

$$\begin{aligned} & (p^\lambda + q^\lambda)T_{\lambda\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\lambda\mu\nu\tau} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left( \{p^\tau q^\lambda (3x - 1) - q^\tau p^\lambda (3y - 1)\} \ln \frac{m^2}{(qy - px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x} \right. \\ & \quad \left. + \frac{[q^\tau p^\lambda (y - 1) - p^\tau q^\lambda (x - 1)][(qy - px)^2 - m^2] - q^2 p^\tau q^\lambda y + p^2 q^\tau p^\lambda x}{(qy - px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x} + p^\tau q^\lambda (2 - x - y) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\lambda\mu\nu\tau} p^\tau q^\lambda \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left( \{3x + 3y - 2\} \ln \frac{m^2}{(qy - px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(2 - x - y)[(qy - px)^2 - m^2] - q^2 y - p^2 x + 2m^2}{(qy - px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x} + 2 - x - y \right) \\ & \quad - \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\lambda\mu\nu\tau} p^\tau q^\lambda \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2m^2}{(qy - px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

In Analogie zum bereits bei der Berechnung der Wardidentität verwandten Vorgehen wird erneut der logarithmische Anteil durch partielle Integration bzgl. der Feynmanparameter umgeformt,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \{3x + 3y - 2\} \ln \frac{m^2}{(qy - px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x} \\ &= - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{y(1 - y - x)(2(qy - px)q - q^2) + x(1 - x - y)(-2(qy - px)p - p^2)}{(qy - px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

so daß schließlich nach der Addition der übrigen Terme die zu bestätigende Identität (7.7) resultiert:

$$\begin{aligned} (p^\lambda + q^\lambda)T_{\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\lambda\mu\nu\tau} p^\tau q^\lambda \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left( 2 + \frac{-2m^2}{(qy - px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x} \right) \\ &= 2mT_{\mu\nu}(m) + \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\lambda\mu\nu\tau} p^\tau q^\lambda. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Die natürliche Vorgehensweise, alle betrachteten Identitäten auf der Stufe einer wohldefinierten konkreten Regularisierung  $T_{\lambda\mu\nu}$  zu überprüfen, erlaubt es ferner, die Abhängigkeit jener Gleichungen von der speziellen Wahl der Regularisierung zu untersuchen: Tatsächlich existiert kein endlicher Counterterm, entsprechend der linearen Divergenz des betrachteten Diagrammes aus einem Polynom ersten Grades in den Impulsen  $p$  und  $q$  bestehend, welcher die Anomalie  $\frac{1}{2\pi^2}\epsilon_{\lambda\mu\nu\tau}p^\tau q^\lambda$  kompensiert, zugleich aber die Wardidentitäten (7.5) und (7.6) aufrechterhält. Die Änderung der Feynmanamplitude um<sup>1</sup>

$$\Delta T_{\lambda\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi^2}\epsilon_{\lambda\mu\nu\tau}(p^\tau - q^\tau) \quad (7.25)$$

beseitigt zwar die Anomalie in (7.24), verletzt jedoch gemäß

$$p^\mu \Delta T_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4\pi^2}\epsilon_{\lambda\mu\nu\tau}q^\tau p^\mu \quad (7.26)$$

$$q^\nu \Delta T_{\lambda\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi^2}\epsilon_{\lambda\mu\nu\tau}p^\tau q^\nu \quad (7.27)$$

beide vektoriellen Wardidentitäten.

Obgleich der hier an einem Beispiel aus einer chiralen Theorie besonders deutlich werdende Vorteil des modifizierten BPHZ-Verfahrens in einer Vereinfachung der expliziten Durchführung der Impulsintegration - sowohl gegenüber dem klassischen BPHZ-Verfahren als auch gegenüber der Dimensionalen Regularisierung - liegt, so ist es doch die Äquivalenz zur Epstein-Glaser-Regularisierung, welche die regularisierende Operation bei Ein-Schleifen-Diagrammen, d. h. die Taylorsubtraktion in den unabhängigen äußeren Impulsen, erst rechtfertigt.

Auch bei der nun folgenden Behandlung von Diagrammen höherer Schleifenordnung gilt es somit vor allem, diese Äquivalenz herauszustellen. Im Hinblick auf eine Erweiterung des modifizierten BPHZ-Verfahrens für Mehr-Schleifen-Diagramme ist es die auf einer Entwicklung in der Schleifenordnung basierende Zimmermannsche Waldformel, deren Aussage bzgl. der Regularisierung eines Feynmandiagramms dazu mit der entsprechenden, einer Entwicklung nach Vertices folgenden Konstruktionsvorschrift nach dem Epstein-Glaser-Verfahren zu vergleichen.

Am sog. *Sunrise*-Diagramm der  $\phi^4$ -Theorie sei als an einem ersten Beispiel dieser Vergleich demonstriert und insbesondere die Unterschiedlichkeit von Unterdiagrammen im Sinne der Waldformel und solchen, deren Definition die Epstein-Glaser-Konstruktion nahelegt, herausgestellt.

---

<sup>1</sup>Die Bedingung  $(p^\lambda + q^\lambda)\Delta T_{\lambda\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi^2}\epsilon_{\lambda\mu\nu\tau}p^\tau q^\lambda$  legt den bzgl. der Vertauschung ( $\mu \leftrightarrow \nu$ ) antisymmetrischen Anteil von  $\Delta T_{\lambda\mu\nu}$  gemäß (7.25) fest; ein diesbzgl. symmetrischer Teil kann aber die Verletzung der vektoriellen Wardidentitäten nicht kompensieren.



## Kapitel 8

# Das Sunrise-Diagramm

Die Interpretation des klassischen Epstein-Glaser-Verfahrens als *Regularisierungsverfahren* ist prinzipiell auch für Mehr-Schleifen-Diagramme anwendbar; für den Konstruktionsprozeß relevant ist einzig die Anzahl  $n$  der *Vertices* beim betrachteten Prozeß: Die Epstein-Glaser-Methode liefert, ausgehend von der aus dem normalgeordneten Produkt von Feldoperatoren bestehenden temperierten Distribution  $T_1 = i\mathcal{L}_1$ , ein bzgl. der Anzahl der Vertices rekursives Verfahren zur Ermittlung der Funktionale  $T_n$  in der Potenzreihenentwicklung (3.1). Die im Zuge des Verfahrens notwendigen Einschränkungen der Testfunktionen für die in der Wickzerlegung von  $T_n$  enthaltenen divergenten skalaren Distributionen liefern die jeweilige Vorschrift zu deren Regularisierung. Es ist die Abhängigkeit von den bereits in den Ordnungen  $m < n$  regularisierten Funktionalen, welche den Einfluß von *Unterdiagrammen* auf das Gesamtdiagramm festlegt; solche Unterdiagramme bestehen folglich stets aus irreduziblen divergenten Teildiagrammen mit einer gegenüber dem Gesamtdiagramm *niedrigeren* Anzahl von Vertices und sollen im folgenden als *Epstein-Glaser-Unterdiagramme* bezeichnet werden.

Die sukzessive Modifikation der Wechselwirkungslagrangedichte  $\mathcal{L}_1$  durch die Addition von Countertermen steigender Ordnung in  $\hbar$ , auf welcher das klassische BPHZ-Verfahren basiert, verlangt hingegen zunächst eine andere Klassifikation von Unterdiagrammen: Als ein *BPHZ-Unterdiagramm* sei ein solcher irreduzibler divergenter Teil des Gesamtdiagrammes bezeichnet, welcher eine niedrigere Anzahl von *Schleifen* enthält. Tatsächlich besteht der Unterschied zu den Epstein-Glaser-Unterdiagrammen gerade in solchen, welche zwar eine niedrigere Schleifenordnung, aber keine geringere Vertexanzahl aufweisen, im folgenden als *reine BPHZ-Unterdiagramme* bezeichnet.

In der zufordernden Übereinstimmung mit der Epstein-Glaser-Konstruktion, bei welcher die grundlegende Distribution  $T_1$  aus einem *normalgeordneten* Produkt von Feldoperatoren besteht und auch die Distributionen  $T_n$  als normalgeordnete Wickzerlegungen konstruiert werden, tragen nur die Epstein-Glaser-Unterdiagramme zu einem Gesamtdiagramm bei: In den im Rahmen des Verfahrens zu bildenden direkten Produkten von Funktionalen  $T_i$  stehen Feldoperatoren, welche die äußeren Beine eines Unterdiagrammes bilden, an jedem einzelnen Vertex dieses Teildiagrammes bereits in Normalordnung; eine neu entstehende innere Linie des zu konstruierenden Diagrammes kann folglich nur zu einem neu hinzugenommenen Vertex führen. Mit der geforder-

ten Äquivalenz zum Epstein-Glaser-Verfahren folgt, daß die zusätzlichen im BPHZ-Formalismus enthaltenen Unterdiagramme keinen Beitrag zur Regularisierung des Gesamtdiagrammes bilden; lediglich eine endliche Differenz der jeweiligen Resultate beider Regularisierungsverfahren, bestehend aus einem Polynom in den äußeren Impulsen des Gesamtdiagrammes und von der Ordnung dessen Divergenzgrades, ist als Auswirkung eines solchen BPHZ-Teildiagrammes zulässig.

Ein Beispiel für diese unterschiedliche Klassifikation von Unterdiagrammen liefert das sog. *Sunrise*-Diagramm der  $\phi^4$ -Theorie (Abb. 8.1). Als ein Diagramm mit zwei Vertices besitzt es im Sinne von Epstein-Glaser kein divergentes Teildiagramm und kann folglich in einem Schritt durch Taylorsubtraktion im äußeren Impuls regularisiert werden, während die Berechnung des Prozesses nach der Waldformel zunächst die Bestimmung des Einflusses der Counterterme von drei logarithmisch divergenten Unterdiagrammen erfordert. Im folgenden sei nun das *Sunrise*-Diagramm mittels des modifizierten BPHZ-Verfahrens berechnet; die Modifikation gegenüber dem klassischen BPHZ-Formalismus besteht nun und im weiteren zusätzlich - im Sinne der Herausstellung der Äquivalenz zur Epstein-Glaser-Konstruktion - in einer Reduktion der zu betrachtenden Unterdiagramme auf solche im Sinne von Epstein-Glaser. Das explizite Ergebnis für das betrachtete Beispiel sei dann zunächst mit dem aus der Dimensionalen Regularisierung erhaltenen verglichen, bevor schließlich die Redundanz der Berücksichtigung der BPHZ-Unterdiagramme demonstriert wird.

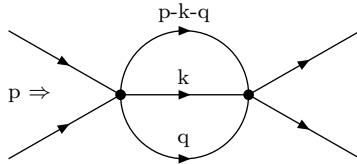


Abbildung 8.1: *Sunrise*-Diagramm

## 8.1 Berechnung mit dem modifizierten BPHZ-Verfahren

Die Regularisierung des quadratisch divergenten *Sunrise*-Diagrammes erfolgt durch direkte Taylorsubtraktion des aus den Feynmanregeln erhaltenen Ausdrucks:

$$\tilde{\Sigma}(p) = \frac{g^2}{6} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1 - t_p^2) \frac{1}{(p - k - q)^2 - m^2} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{q^2 - m^2}. \quad (8.1)$$

Zur Ausführung der Impulssubtraktionen seien die Feynmanparameter in Hinblick auf deren sukzessive Abfolge - beginnend mit der  $k$ -Integration - eingeführt; die Translation  $k \rightarrow k + (p - q)(1 - z)$  isoliert anschließend diesen ersten inneren Impuls. Mit einer redundanten Anwendung des Operators  $(1 - t_p^0)$  folgt für die entsprechende Integration:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}(p) &= \frac{g^2}{6} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (1 - t_p^2) \\
&\quad \int_0^1 dz \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1 - t_p^0) \frac{1}{[(p - k - q)^2(1 - z) - m^2(1 - z) + z(k^2 - m^2)]^2} \frac{1}{q^2 - m^2} \\
&= \frac{g^2}{6} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (1 - t_p^2) \int_0^1 dz \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1 - t_p^0) \frac{1}{[k^2 + (p - q)^2 z(1 - z) - m^2]^2} \frac{1}{q^2 - m^2} \\
&= \frac{g^2 \pi^2 i}{3(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (1 - t_p^2) \int_0^1 dz \int_0^\infty d\bar{k} (1 - t_p^0) \frac{\bar{k}^3}{[\bar{k}^2 - (p - q)^2 z(1 - z) + m^2]^2} \frac{1}{q^2 - m^2} \\
&= \frac{g^2 i}{96\pi^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (1 - t_p^2) \int_0^1 dz \ln \frac{m^2 - q^2 z(1 - z)}{m^2 - (p - q)^2 z(1 - z)} \frac{1}{q^2 - m^2}. \tag{8.2}
\end{aligned}$$

Die partielle Integration bzgl. des Feynmanparameters  $z$  sorgt an dieser Stelle für die Möglichkeit, weitere Feynmanparameter  $x$  und  $y$  zur anschließenden Auswertung der  $q$ -Integration einzuführen. Mit der Abkürzung  $m_1^2 := m^2(z(1 - z))^{-1}$  resultiert:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}(p) &= -\frac{g^2 i}{96\pi^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (1 - t_p^2) \int_0^1 dz \frac{m^2 z(1 - 2z)(p^2 - 2pq)}{[m^2 - q^2 z(1 - z)][m^2 - (p - q)^2 z(1 - z)]} \frac{1}{q^2 - m^2} \\
&= -\frac{g^2 i}{96\pi^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (1 - t_p^2) \int_0^1 dz \frac{m^2 z}{z^2(1 - z)^2} \frac{(1 - 2z)(p^2 - 2pq)}{[q^2 - m_1^2][(p - q)^2 - m_1^2][q^2 - m^2]} \\
&= -\frac{g^2 i}{48\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (1 - t_p^2) \frac{m^2 z}{z^2(1 - z)^2} \\
&\quad \cdot \frac{(1 - 2z)(p^2 - 2pq)}{[[q^2 - m_1^2](1 - x - y) + x[(p - q)^2 - m_1^2] + y[q^2 - m^2]]^3}. \tag{8.3}
\end{aligned}$$

Durch die Translation  $q \rightarrow q + xp$  wird nun die Integrationsvariable  $q$  vom äußeren Impuls  $p$  separiert; die im Zähler verbleibenden ungeraden Potenzen von  $q$  stellen ferner die in dieser Variablen ungeraden Anteile des Integranden dar, welche bei der Integration verschwinden:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}(p) &= -\frac{g^2 i}{48\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\
&\quad \cdot \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (1 - t_p^2) \frac{m^2}{z(1 - z)^2} \frac{(1 - 2z)(p^2 - 2pq - 2p^2 x)}{[q^2 - p^2 x^2 - m_1^2(1 - y) - ym^2 + p^2 x]^3} \\
&= -\frac{g^2 i}{48\pi^2} \frac{-i}{8\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\
&\quad \cdot \int_0^\infty d\bar{q} \bar{q}^3 \frac{p^2 m^2}{z(1 - z)^2} (1 - t_p^0) \frac{(1 - 2z)(1 - 2x)}{[\bar{q}^2 + p^2 x^2 + m_1^2(1 - y) + ym^2 - p^2 x]^3} \\
&= \frac{g^2}{1536\pi^4} \int_0^1 dz \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\
&\quad \cdot \frac{p^2 m^2}{z(1 - z)^2} \frac{(1 - 2z)(1 - 2x)xp^2(x - 1)}{[p^2 x(x - 1) + m_1^2(1 - y) + ym^2][m_1^2(1 - y) + ym^2]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g^2}{1536\pi^4} \int_0^1 dz \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{p^4 m^2 zx(x-1)(1-2z)(1-2x)}{p^2 x(x-1)z(1-z) + m^2(1-y) + ym^2 z(1-z)} \\
&\cdot \frac{1}{m^2(1-y) + ym^2 z(1-z)}. \tag{8.4}
\end{aligned}$$

Die Integration über den Feynmanparameter  $y$  ist direkt ausführbar:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}(p) &= \frac{g^2}{1536\pi^4} \int_0^1 dz \int_0^1 dx \frac{p^4 m^2 zx(x-1)(1-2z)(1-2x)}{(1-z-x+xz)zp^2 xm^2(1-z+z^2)} \\
&\cdot \left( \ln \frac{-x - (1-x)z + (1-x)z^2}{p^2 xz(1-x-z+xz) - m^2 + m^2(1-x)(1-z+z^2)} \right. \\
&\quad \left. - \ln \frac{-1}{p^2 xz(1-x-z+xz) - m^2} \right) \\
&= \frac{g^2}{1536\pi^4} \int_0^1 dz \int_0^1 dx \frac{p^2(1-2z)(1-2x)}{(z-1)(1-z+z^2)} \\
&\cdot \ln \frac{[-x - (1-x)z(1-z)][p^2 xz(1-x)(1-z) - m^2]}{-p^2 xz(1-x)(1-z) + m^2 - m^2(1-x)(1-z+z^2)}. \tag{8.5}
\end{aligned}$$

Schließlich folgt unter der Verwendung der Tatsache, daß der folgende Ausdruck aufgrund der Antisymmetrie bzgl. der Ersetzung  $x \rightarrow 1-x$  und der Symmetrie des Integrationsgebietes verschwindet:

$$\int_0^1 dz \int_0^1 dx \frac{p^2(1-2z)(1-2x)}{(z-1)(1-z+z^2)} \ln \frac{p^2 xz(1-x)(1-z) - m^2}{-m^2} = 0, \tag{8.6}$$

das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}(p) &= \frac{g^2}{1536\pi^4} \int_0^1 dz \int_0^1 dx \frac{p^2(1-2z)(1-2x)}{(z-1)(1-z+z^2)} \\
&\cdot \ln \frac{m^2(1-x)(1-z)z + m^2x}{-p^2 xz(1-x)(1-z) + m^2(1-x)(1-z)z + m^2x}. \tag{8.7}
\end{aligned}$$

Dieses Resultat wird durch die dem Schema des modifizierten BPHZ-Verfahrens folgende Einführung eines allgemeinen Massenparameters  $\mu$  mittels der Ersetzung  $m \rightarrow \mu$  im Zähler des Logarithmus nicht verändert, so wie auch bereits im vorigen die regularisierte Amplitude des Dreiecksgraphen  $T_{\lambda\mu\nu}$  in Kapitel 7.1: Aufgrund des bzgl. der Vertauschung  $x \rightarrow 1-x$  antisymmetrischen Vorfaktors  $(1-2x)$  im Integranden verschwindet die hierdurch induzierte Änderung des Integrals; es ist  $\tilde{\Sigma}^\mu(p) = \tilde{\Sigma}(p)$ .

Im Vergleich dazu sei nun das entsprechende Resultat der Dimensionalen Regularisierung, sowohl bzgl. dessen expliziter Gestalt als auch im Hinblick auf die Abhängigkeit vom Massenparameter  $\mu_{D.R.}$ , betrachtet.

## 8.2 Vergleich mit dem Ergebnis der Dimensionalen Regularisierung

Eine Berechnung des Sunrise-Diagrammes im Rahmen der Dimensionalen Regularisierung ist in [VHE] ausgeführt; dort wird der zu berechnende Ausdruck zunächst wie folgt zerlegt:

$$\tilde{\Sigma}_{D.R.}(p) = \frac{g^2}{6} \left[ 3m^2 \tilde{\Sigma}_{D.R.}^{(1)}(p) + p^\mu \tilde{\Sigma}_{D.R.,\mu}^{(2)}(p) \right]. \quad (8.8)$$

Zum Vergleich mit dem Ergebnis des modifizierten BPHZ-Verfahrens seien nun die folgenden regularisierten Ergebnisse für  $\tilde{\Sigma}_{D.R.}^{(1)}(p)$  und  $\tilde{\Sigma}_{D.R.,\mu}^{(2)}(p)$ , welche den Regularisierungsparameter  $\epsilon$  enthalten, entsprechend der grundlegenden, auch zuvor bereits zur Dimensionalen Regularisierung verwandten Freiheit als Ausgangspunkt für eine zusätzliche Taylorsubtraktion im äußeren Impuls  $p$  verwandt:

$$\begin{aligned} p^\mu \tilde{\Sigma}_{D.R.,\mu}^{(2)}(p) &= \frac{p^2}{(4\pi)^4} \left[ \frac{1}{4\epsilon} - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{8} + \int_0^1 dx \int_0^1 dz (1-x) \right. \\ &\quad \left. \cdot \ln \frac{4\pi \mu_{D.R.}^2 z(1-z)}{-p^2 x z(1-x)(1-z) + m^2(1-x)(1-z)z + m^2 x} \right], \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{D.R.}^{(1)}(p) &= -\frac{1}{(4\pi)^4} \left\{ \frac{1}{2\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{1}{2} - \gamma + \ln \frac{4\pi \mu_{D.R.}^2}{m^2} \right) + \frac{3}{2} + \gamma - \gamma^2 - \frac{\pi^2}{12} - \right. \\ &\quad - \int_0^1 dx \int_0^1 dz \left[ \left[ 2\gamma + \ln \frac{z(1-z)}{x} - \ln \frac{4\pi \mu_{D.R.}^2}{M_2^2} \right] \ln \frac{4\pi \mu_{D.R.}^2}{M_2^2} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(1-x)}{M_2^2} \left[ 2\gamma + \ln \frac{z(1-z)}{x} - 2 \ln \frac{4\pi \mu_{D.R.}^2}{M_2^2} \right] \partial_x M_2^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$\text{mit } M_2^2 = \frac{-p^2 x z(1-x)(1-z) + m^2(1-x)(1-z)z + m^2 x}{z(1-z)}. \quad (8.11)$$

Für ein erstes Zwischenergebnis können insbesondere diejenigen Teile der jeweiligen Taylorentwicklungen in  $p$  bis zur Ordnung  $p^2$  subtrahiert werden, welche bereits als Polynome isoliert stehen; hierbei fallen sowohl die im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  endlichen Polynome als auch die den Regularisierungsparameter  $\epsilon$  enthaltenden Terme weg<sup>1</sup>:

$$p^\mu \tilde{\Sigma}_{D.R.,\mu}^{(2)}(p) = \frac{p^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^1 dz (1-x) \ln \frac{4\pi \mu_{D.R.}^2}{M_2^2}, \quad (8.12)$$

sowie mit anschließender partieller Integration bzgl. des Feynmanparameters  $x$ :

---

<sup>1</sup>Zur Vereinfachung der Notation erhalten die folgenden modifizierten Regularisierungen keine separaten Bezeichnungen.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}_{D.R.}^{(1)}(p) &= \frac{1}{(4\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^1 dz \left\{ \left[ 2\gamma + \ln \frac{z(1-z)}{x} - \ln \frac{4\pi\mu_{D.R.}^2}{M_2^2} \right] \cdot \ln \frac{4\pi\mu_{D.R.}^2}{M_2^2} \right. \\
&\quad - \ln \frac{M_2^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-x) \left( 2\gamma + \ln \frac{z(1-z)}{x} \right) \right] \\
&\quad \left. + \frac{(1-x)}{M_2^2} 2 \ln \frac{M_2^2}{4\pi\mu_{D.R.}^2} \frac{\partial}{\partial x} M_2^2 \right\} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^1 dz \left\{ \left[ 2\gamma + \ln \frac{z(1-z)}{x} \right] \cdot \ln \frac{4\pi\mu_{D.R.}^2}{m^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1-x}{x} \ln \frac{m^2}{M_2^2} - \left( \ln \frac{m^2}{4\pi\mu_{D.R.}^2} \right)^2 \right\}. \tag{8.13}
\end{aligned}$$

Tatsächlich beeinflußt der Massenparameter  $\mu_{D.R.}$  in (8.13) ausschließlich die bzgl.  $p$  konstanten Teile des Integranden, nicht jedoch das Argument des  $p$ -abhängigen Logarithmus. Mit der speziellen Wahl  $\mu_{D.R.}^2 = (4\pi)^{-1}m^2$  resultiert als weiteres Zwischenergebnis ein modifiziertes Gesamtdiagramm entsprechend (8.8):

$$\tilde{\Sigma}_{D.R.}(p) = \frac{g^2}{1536\pi^4} \int_0^1 dx \int_0^1 dz \left[ -3m^2 \frac{1-x}{x} + p^2(1-x) \right] \ln \frac{m^2}{M_2^2}. \tag{8.14}$$

Vor dem abschließenden Vergleich mit dem Ergebnis (8.7) aus dem modifizierten BPHZ-Verfahren muß von diesem letzten Ausdruck noch die verbleibende Taylorentwicklung bis zur Ordnung  $p^2$  subtrahiert werden, woraus sich schließlich ergibt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}_{D.R.}(p) &= \frac{g^2}{1536\pi^4} \int_0^1 dx \int_0^1 dz \left\{ \left[ -3m^2 \frac{1-x}{x} + p^2(1-x) \right] \right. \\
&\quad \left. \cdot \ln \frac{m^2(1-x)(1-z)z + m^2x}{-p^2xz(1-x)(1-z) + m^2(1-x)(1-z)z + m^2x} + \frac{1}{2}p^2 \right\}. \tag{8.15}
\end{aligned}$$

Obgleich sich die Vorfaktoren der Logarithmen in den Integranden der zu vergleichenden Regularisierungen (8.7) und (8.15) erheblich in ihrer Abhängigkeit von den Feynmanparametern unterscheiden und das Verschwinden der Ableitung nach  $p^2$  im Ergebnis der Dimensionalen Regularisierung erst mit dem zusätzlichen Term  $\frac{1}{2}p^2$  in (8.15) erreicht wird, stellen beide Ausdrücke doch Regularisierungen derselben skalaren Distribution dar. Weil überdies beider Taylorentwicklungen bis zur Ordnung  $p^2$  verschwinden, ist zudem über sämtliche Freiheit *gleichermaßen* verfügt: Die beiden Resultate sind folglich identisch.

Eine analytische Herausstellung dieser Gleichheit erscheint aufgrund der involvierten Parameterabhängigkeit beider Ausdrücke nicht praktikabel; tatsächlich läßt sich aber das Verschwinden der Taylorentwicklung der Differenz im äußeren Impuls  $p$  Ordnung für Ordnung verifizieren.

Im Anschluß an diesen Vergleich der expliziten Ergebnisse soll nun abschließend - im Hinblick auf ein allgemeines modifiziertes BPHZ-Verfahren - die Äquivalenz zum Vorgehen bei der klassischen BPHZ-Regularisierung anhand dieses Beispiels herausgestellt werden.

### 8.3 BPHZ-Regularisierung nach der Waldformel

Der Einfluß der Counterterme der drei logarithmisch divergenten BPHZ-Unterdiagramme  $\gamma_1$  bis  $\gamma_3$ , welche jeweils nur zwei innere Linien enthalten, auf das Sunrise-Diagramm  $\gamma$  (Abb. 8.2) wird innerhalb des klassischen BPHZ-Verfahrens durch die Waldformel (4.20) beschrieben. Da es sich um überlappende Divergenzen handelt, tragen keine Vereinigungen von Unterdiagrammen zur Menge  $\mathcal{F}(\gamma)$  der Wälder bei, und mit

$$\mathcal{F}(\gamma) = \{\emptyset, \{\gamma\}, \{\gamma_1\}, \{\gamma_2\}, \{\gamma_3\}, \{\gamma, \gamma_1\}, \{\gamma, \gamma_2\}, \{\gamma, \gamma_3\}\} \quad (8.16)$$

liefert die Waldformel für den Integranden  $R_\gamma$  des Gesamtdiagramms:

$$R_\gamma(p, k, q) = (1 - t_p^2) S_\gamma \left( 1 - \sum_{i=1}^3 t_{p^{\gamma_i}}^0 S_{\gamma_i} \right) I_\gamma(p, k, q). \quad (8.17)$$

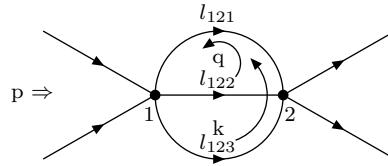


Abbildung 8.2: Gesamtdiagramm  $\gamma$

Die Substitutionsoperatoren  $S_{\gamma^{(i)}}$  symbolisieren für das mit ihrem Index bezeichnete Diagramm diejenige Parametrisierung durch eine Basis dessen innerer und äußerer Impulse, welche die Wahl des Standardimpulsflusses gemäß dessen Definition in Kapitel 4.2 vorschreibt. Letzterer wird insbesondere durch die Festlegung der den einzelnen Linien des Feynmandiagrammes zugeordneten Widerstände bestimmt; allgemein liefern die jeweiligen Parametrisierungen folgende Impulsflüsse  $l^\gamma$  durch die einzelnen Linien des entsprechenden Diagrammes:

- Gesamtdiagramm  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} l_{121}^\gamma &= \frac{r_{122}r_{123}}{r_{121}r_{122} + r_{121}r_{123} + r_{122}r_{123}} p - k - q, \\ l_{122}^\gamma &= \frac{r_{121}r_{123}}{r_{121}r_{122} + r_{121}r_{123} + r_{122}r_{123}} p + k, \\ l_{123}^\gamma &= \frac{r_{121}r_{122}}{r_{121}r_{122} + r_{121}r_{123} + r_{122}r_{123}} p + q, \end{aligned} \quad (8.18)$$

- Unterdiagramm  $\gamma_1$ :

$$\begin{aligned} l_{121}^{\gamma_1} &= \frac{r_{122}}{r_{121} + r_{122}} p^{\gamma_1} - k^{\gamma_1}, \\ l_{122}^{\gamma_1} &= \frac{r_{121}}{r_{121} + r_{122}} p^{\gamma_1} + k^{\gamma_1}, \\ k^{\gamma_1} &= k + \frac{r_{121}}{r_{121} + r_{122}} q, \end{aligned} \quad (8.19)$$

- Unterdiagramm  $\gamma_2$ :

$$\begin{aligned} l_{121}^{\gamma_2} &= \frac{r_{123}}{r_{121} + r_{123}} p^{\gamma_2} - k^{\gamma_2}, \\ l_{123}^{\gamma_2} &= \frac{r_{121}}{r_{121} + r_{123}} p^{\gamma_2} + k^{\gamma_2}, \\ k^{\gamma_2} &= q + \frac{r_{121}}{r_{121} + r_{123}} k, \end{aligned} \quad (8.20)$$

- Unterdiagramm  $\gamma_3$ :

$$\begin{aligned} l_{122}^{\gamma_3} &= \frac{r_{123}}{r_{122} + r_{123}} p^{\gamma_3} - k^{\gamma_3}, \\ l_{122}^{\gamma_3} &= \frac{r_{122}}{r_{122} + r_{123}} p^{\gamma_3} + k^{\gamma_3}, \\ k^{\gamma_3} &= \frac{r_{123}}{r_{122} + r_{123}} q - \frac{r_{122}}{r_{122} + r_{123}} k =: \lambda q - \mu k. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Die derjenigen in (8.1) entsprechende Wahl der Parametrisierung des Gesamtdiagrammes legt den Wert des Widerstands  $r_{121}$  auf Null fest, so daß der Integrand  $R_\gamma$  der Waldformel - unter Beiseitelassung allgemeiner Vorfaktoren - folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned} R_\gamma(p, k, q) &= (1 - t_p^2) \left( \frac{1}{(p - k - q)^2 - m^2} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{q^2 - m^2} - \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} \frac{1}{q^2 - m^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{[q^2 - m^2]^2} \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{1}{(p - k - q)^2 - m^2} \frac{1}{[(\lambda q - \mu k)^2 - m^2]^2} \right). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Nun erfordert die postulierte Äquivalenz zur Epstein-Glaser-Konstruktion das Verschwinden der Integration über die Gesamtheit der drei um ihre jeweilige Taylorentwicklung nach  $p$  verengerten Subtraktionsterme. Tatsächlich verschwinden die aus den Unterdiagrammen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  resultierenden Terme aufgrund ihrer Unabhängigkeit vom äußeren Impuls bereits bei der Taylorsubtraktion. Die Relation  $\lambda + \mu = 1$  ermöglicht es dann, durch die separat am letzten Subtraktionsterm von (8.22) durchgeführten Translationen

$$q \rightarrow q + \mu p, \quad k \rightarrow k + \lambda p \quad (8.23)$$

auch dessen  $p$ -Abhängigkeit zu beseitigen, so daß auch dieser bei der Taylorsubtraktion herausfällt; wie gefordert tragen die Counterterme der drei Unterdiagramme im Sinne des BPHZ-Formalismus, welche keine Epstein-Glaser-Unterdiagramme sind, nicht zur Regularisierung des Sunrise-Diagrammes bei.

Anhand einiger Beispiele sei nun im folgenden Kapitel die Epstein-Glaser-Regularisierung für Mehr-Schleifen-Diagramme demonstriert, welche auch Unterdiagramme im Sinne dieses Konstruktionsverfahrens enthalten; insbesondere soll auch für diese der Vergleich mit der entsprechenden Regularisierung nach der Waldformel hinsichtlich der dort zu berücksichtigenden BPHZ-Unterdiagramme erfolgen. Im Hinblick auf ein allgemeines modifiziertes BPHZ-Verfahren liege der Schwerpunkt bzgl. der Modifikation nun auf der Herausstellung der Äquivalenz des klassischen BPHZ-Verfahrens zur Epstein-Glaser-Konstruktion und der in deren Zuge erfolgenden Einschränkung der in der Waldformel zu berücksichtigenden Unterdiagramme auf solche im Sinne von Epstein-Glaser.

## Kapitel 9

# Epstein-Glaser-Regularisierung in höherer Ordnung

Zur Anwendung der Epstein-Glaser-Konstruktion als Regularisierungsverfahren für konkrete Feynmandiagramme ist insbesondere die rekursive Bestimmbarkeit der operatorwertigen Distributionen  $T_n$  als Zerlegung nach Wickmonomen notwendig: Die Regularisierung einer Distribution, welche einen Skalar bzgl. der Wirkung auf den Fockraum darstellt, kann dann als diejenige, welche in Kombination mit dem entsprechenden, die äußeren Beine des Diagrammes repräsentierenden Wickmonom auftritt, aus den Komponenten der Zerlegung isoliert werden. Diese natürlich erscheinende Identifizierbarkeit der einzelnen Komponenten der Wickzerlegung mit den entsprechenden Feynmandiagrammen bedarf, insbesondere hinsichtlich von Prozessen mit einer höheren Anzahl von Vertices, einer genaueren Betrachtung, wenn etwa der Teilcheninhalt von Anfangs- und Endzustand nicht zur Unterscheidung verschiedener innerer Strukturen des betrachteten Diagrammes ausreicht. Ausgangspunkt der Untersuchung der das rekursive Verfahren betreffenden erforderlichen Struktur ist die zugrundeliegende Distribution  $T_1$ , welche in der Anwendung der Konstruktionsmethode auf eine bestimmte Theorie als die entsprechende normalgeordnete Wechselwirkungslagrangedichte gewählt wird; hierzu sei im folgenden als einfaches Modellbeispiel die skalare  $\phi^2$ -Theorie zur Demonstration herangezogen.

### 9.1 Zerlegung der Distributionen $T_n$ nach Wickmonomen

Grundlegend für die Epstein-Glaser-Konstruktion ist die Wohldefiniertheit der auf einer Testfunktion  $g$  des Schwarzschen Funktionenraums ausgewerteten Distribution  $T_1$  als Operator auf dem Fockraum der Zustände  $\psi$  gemäß (2.6). Für ein - im Gegensatz zum direkten Produkt - zunächst nur formales Produkt von Felddistributionen am gleichen Ort muß diese zunächst überprüft werden; tatsächlich wird sie erst durch die abschließende Normalordnungsvorschrift gewährleistet: Im betrachteten Beispiel  $T_1(x) =: \phi^2(x) :$  bildet jeder der Summanden in

$$: \phi^2(x) :=: (\phi^+(x) + \phi^-(x))^2 := (\phi^+)^2(x) + 2\phi^-(x)\phi^+(x) + (\phi^-)^2(x) \quad (9.1)$$

eine wohldefinierte operatorwertige Distribution:

$$\begin{aligned}
 (\phi^+)^2(g) &= \int d^4x \phi^+(x) \phi^+(x) g(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^3k}{2E_{\mathbf{k}}} \int \frac{d^3k'}{2E_{\mathbf{k}'}} a(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}') \check{g}(k+k'), \\
 \phi^- \phi^+(g) &= \int d^4x \phi^-(x) \phi^+(x) g(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^3k}{2E_{\mathbf{k}}} \int \frac{d^3k'}{2E_{\mathbf{k}'}} a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}') \check{g}(k'-k), \\
 (\phi^-)^2(g) &= \int d^4x \phi^-(x) \phi^-(x) g(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^3k}{2E_{\mathbf{k}}} \int \frac{d^3k'}{2E_{\mathbf{k}'}} a^+(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k}') \check{g}(-k-k'). \quad (9.2)
 \end{aligned}$$

Definiert ist folglich auch jeder Summand des direkten Distributionenproduktes

$$\begin{aligned}
 : \phi^2(x) : : \phi^2(y) : &= \phi^+(x) \phi^+(x) \phi^+(y) \phi^+(y) + 2\phi^+(x) \phi^+(x) \phi^-(y) \phi^+(y) + \phi^+(x) \phi^+(x) \phi^-(y) \phi^-(y) \\
 &+ 2\phi^-(x) \phi^+(x) \phi^+(y) \phi^+(y) + 4\phi^-(x) \phi^+(x) \phi^-(y) \phi^+(y) + 2\phi^-(x) \phi^+(x) \phi^-(y) \phi^-(y) \\
 &+ \phi^-(x) \phi^-(x) \phi^+(y) \phi^+(y) + 2\phi^-(x) \phi^-(x) \phi^-(y) \phi^+(y) + \phi^-(x) \phi^-(x) \phi^-(y) \phi^-(y) .
 \end{aligned}$$

Ein jeder Summand, der noch nicht in normalgeordneter Form vorliegt, kann nun durch die aus dem Wicktheorem formal für die Distributionen folgende Vorschrift

$$\begin{aligned}
 \phi(x) \phi(y) &= : \phi(x) \phi(y) : + i\Delta_+(x-y) \\
 \Rightarrow [\phi^+(x), \phi^-(y)] &= i\Delta_+(x-y) \quad (9.3)
 \end{aligned}$$

in diese gebracht werden; aufgrund der unterschiedlichen Anzahl von Erzeugungs- und Vernichtungsanteilen  $\phi^-$  und  $\phi^+$  ist jede Komponente dieser Zerlegung nach Wickmonomen separat definiert. Auf analoge Art und Weise können sämtliche bei der Epstein-Glaser-Konstruktion auftretenden Distributionenprodukte in Summanden mit einer normalgeordneten Abfolge von Produkten aus den Operatoren  $\phi^+$  und  $\phi^-$  zerlegt werden; insbesondere die skalaren Vorfaktoren sind dabei vor jedem Wickmonom wohldefiniert und somit mit einem bestimmten Feynmandiagramm identifizierbar: Die formale Ortsabhängigkeit der betrachteten Distribution liefert die Struktur des entsprechenden Feynmandiagrammes.

Zur Regularisierung eines bestimmten Diagramms ist es folglich auch für ein solches, welches Epstein-Glaser-Unterdiagramme enthält, ausreichend, allein diejenige skalare Distribution aus dem gesamten Funktional  $T_n$  der entsprechenden Ordnung zu betrachten, welche anhand ihrer ortsabhängigen Wickmonome mit dem jeweiligen Prozeß zu identifizieren ist. Während - dem rekursiven Konstruktionsverfahren folgend - die bei naiver Herleitung divergenten skalaren Distributionen in den Wickzerlegungen der Funktionale  $T_m, m < n$ , bereits regularisiert sind, verbleibt bei der Konstruktion der  $n$ -ten Ordnung das Problem des Distributionensplittens bzgl. der Differenzvariablen zu  $x_n$ : Für ein divergentes Gesamtdiagramm liefert die erforderliche und als Regularisierungsmethode verwendbare Subtraktion der Testfunktionen nach der Übersetzung in den Impulsraum die abschließende Taylorsubtraktion in den äußeren Impulsen.

Im folgenden seien anhand von Beispielen aus der  $\phi^4$ -Theorie einige Epstein-Glaser-Regularisierungen von Diagrammen dritter Ordnung konstruiert. Der Schwerpunkt dieser Betrachtungen liege dabei weiterhin im Vergleich mit dem entsprechenden Vorgehen bei der BPHZ-Regularisierung und, hinsichtlich der Herausstellung deren Äquivalenz zum Epstein-Glaser-Verfahren, in der Demonstration der Einschränkbarkeit der Waldformel auf die Berücksichtigung von Epstein-Glaser-Unterdiagrammen.

## 9.2 Beispiele für Diagramme dritter Ordnung

Beginnend mit der Wechselwirkungslagrangedichte der  $\phi^4$ -Theorie als Wahl für die grundlegenden Distribution  $T_1$  geht der Konstruktion eines Diagrammes dritter Ordnung die Bestimmung des Funktionals  $T_2$  voraus; ohne Berücksichtigung sowohl allgemeiner Vorfaktoren als auch kombinatorischer Faktoren vor den einzelnen Summanden seien somit die Wickzerlegungen dieser operatorwertigen Distributionen bekannt:

$$\begin{aligned} T_1(x_1) &= : \phi^4(x_1) :, \\ T_2(x_1, x_2) &= : \phi^4(x_1) \phi^4(x_2) : + \Delta_F(x_1 - x_2) : \phi^3(x_1) \phi^3(x_2) \\ &\quad + \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_2) : \phi^2(x_1) \phi^2(x_2) : + \Delta_{F,\text{reg}}^3(x_1 - x_2) : \phi(x_1) \phi(x_2) : \\ &\quad + \Delta_{F,\text{reg}}^4(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Aus den hieraus zu konstruierenden Funktionalen  $A'_3(x_1, x_2, x_3)$  und  $R'_3(x_1, x_2, x_3)$  gemäß (3.22) und (3.23) seien nun mittels der erneuten Anwendung des Wicktheorems für verschiedene Beispiele die den jeweiligen Feynmandiagrammen zugehörigen skalaren Distributionen isoliert. Die Epstein-Glaser-Konstruktion liefert anschließend die entsprechende Feynmanamplitude im Ortsraum; nach der Transformation in den Impulsraum sowie der Auswertung für einen speziellen Impulsfluß, ausgeführt in Anhang C, sei dieses Ergebnis der Epstein-Glaser-Regularisierung schließlich mit dem des BPHZ-Verfahrens verglichen.

### 9.2.1 Zwei-Schleifen-Beitrag zur Vierpunktfunction in vier Dimensionen

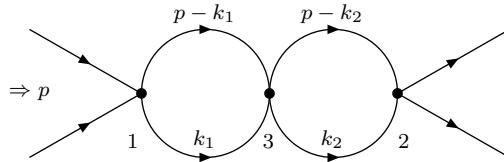


Abbildung 9.1: Beitrag zur Vierpunktfunction,  $d = 4$

Diesem logarithmisch divergenten Diagramm mit einem Vertex  $V_3$  ohne äußere Linien entsprechen die folgenden skalaren Distributionen  $a'_3$  und  $r'_3$ , welche zusammen mit den zugehörigen Wickmonomen Bestandteile der Funktionale  $A'_3$  bzw.  $R'_3$  darstellen:

$$\begin{aligned} a'_3(x_1, x_2, x_3) &= -(i\Delta_+)^2(x_1 - x_3)\Delta_{F,\text{reg}}^2(x_2 - x_3) - \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_3)(i\Delta_+)^2(x_2 - x_3) \\ &\quad - (i\Delta_+)^2(x_1 - x_3)(i\Delta_+)^2(x_2 - x_3) + (i\Delta_+)^2(x_1 - x_3)(i\Delta_+)^2(x_2 - x_3) \\ &\quad + (i\Delta_+)^2(x_1 - x_3)(i\Delta_+)^2(x_2 - x_3) \\ &= \Delta_+^2(x_1 - x_3)\Delta_{F,\text{reg}}^2(x_2 - x_3) + \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_3)\Delta_+^2(x_2 - x_3) \\ &\quad + \Delta_+^2(x_1 - x_3)\Delta_+^2(x_2 - x_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r'_3(x_1, x_2, x_3) &= -(-i\Delta_-)^2(x_1 - x_3)\Delta_{F,\text{reg}}^2(x_2 - x_3) - \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_3)(-i\Delta_-)^2(x_2 - x_3) \\
&\quad - (-i\Delta_-)^2(x_1 - x_3)(-i\Delta_-)^2(x_2 - x_3) + (-i\Delta_-)^2(x_1 - x_3)(-i\Delta_-)^2(x_2 - x_3) \\
&\quad + (-i\Delta_-)^2(x_1 - x_3)(-i\Delta_-)^2(x_2 - x_3) \\
&= \Delta_-^2(x_1 - x_3)\Delta_{F,\text{reg}}^2(x_2 - x_3) + \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_3)\Delta_-^2(x_2 - x_3) \\
&\quad + \Delta_-^2(x_1 - x_3)\Delta_-^2(x_2 - x_3). \tag{9.5}
\end{aligned}$$

Die Differenz  $c_3 = r'_3 - a'_3$  besitzt bzgl. der Variablen  $x'_1 = x_1 - x_3$  und  $x'_2 = x_2 - x_3$  einen kausalen Träger; dessen Aufteilung in avancierten und retardierten Anteil kann der folgenden Darstellung entnommen werden:

$$\begin{aligned}
c_3(x_1, x_2, x_3) &= (\Delta_-^2(x_1 - x_3) + \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_3))(\Delta_-^2(x_2 - x_3) + \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_2 - x_3)) \\
&\quad - (\Delta_+^2(x_1 - x_3) + \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_3))(\Delta_+^2(x_2 - x_3) + \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_2 - x_3)). \tag{9.6}
\end{aligned}$$

Da für die bereits regularisierten Distributionen  $\Delta_{F,\text{reg}}$  gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta_{F,\text{reg}}^2 &= (i\Delta_+ - i\Delta_{\text{av}})^2_{\text{reg}} = (-\Delta_+^2 + 2\Delta_+\Delta_{\text{av}} - \Delta_{\text{av}}^2)_{\text{reg}}, \\
&= (-i\Delta_- - i\Delta_{\text{ret}})^2_{\text{reg}} = (-\Delta_-^2 - 2\Delta_-\Delta_{\text{ret}} - \Delta_{\text{ret}}^2)_{\text{reg}}, \tag{9.7}
\end{aligned}$$

folgt für die gesuchte, auf subtrahierten Testfunktionen definierte Aufteilung  $c_3 = r_3 - a_3$ :

$$\begin{aligned}
a_3(x_1, x_2, x_3) &= (\Delta_+^2(x_1 - x_3) + \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_3))(\Delta_+^2(x_2 - x_3) + \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_2 - x_3)) \\
&= (2\Delta_+\Delta_{\text{av}} - \Delta_{\text{av}}^2)_{\text{reg}}(x_1 - x_3)(2\Delta_+\Delta_{\text{av}} - \Delta_{\text{av}}^2)_{\text{reg}}(x_2 - x_3) \\
r_3(x_1, x_2, x_3) &= (\Delta_-^2(x_1 - x_3) + \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_3))(\Delta_-^2(x_2 - x_3) + \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_2 - x_3)) \\
&= (-2\Delta_-\Delta_{\text{ret}} - \Delta_{\text{ret}}^2)_{\text{reg}}(x_1 - x_3)(-2\Delta_-\Delta_{\text{ret}} - \Delta_{\text{ret}}^2)_{\text{reg}}(x_2 - x_3). \tag{9.8}
\end{aligned}$$

Es resultiert somit als Epstein-Glaser-Regularisierung  $t_3 = a_3 - a'_3 = r_3 - r'_3$  des betrachteten Zwei-Schleifen-Diagrammes die abschließend durch Einschränkung der Testfunktionen zu regularisierende Distribution:

$$t_3(x_1, x_2, x_3) = \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_3)\Delta_{F,\text{reg}}^2(x_2 - x_3). \tag{9.9}$$

Tatsächlich ist die abschließende Regularisierung des zu einem Produkt zweier regularisierter Distributionen faktorisierenden Ergebnisses redundant; die einzelnen Funktionale erfahren ihre Definition gerade durch die Subtraktion der Testfunktionen bis zur Ordnung des Divergenzgrades  $d = 0$  in den Differenzvariablen  $x'_1$  und  $x'_2$ , bzgl. derer auch die abschließende Subtraktion des gleichfalls logarithmisch divergenten Gesamtdiagrammes durchzuführen ist.

Ausgewertet für einen einfallenden Gesamtimpuls  $p$  besitzt das entsprechende Diagramm im Impulsraum die Struktur

$$\begin{aligned}
\hat{t}_3(p) &= \left( \int d^4 k_1 \left\{ \frac{1}{(p - k_1)^2 - m^2} \frac{1}{k_1^2 - m^2} - \frac{1}{[k_1^2 - m^2]^2} \right\} \right) \\
&\quad \cdot \left( \int d^4 k_2 \left\{ \frac{1}{(p - k_2)^2 - m^2} \frac{1}{k_2^2 - m^2} - \frac{1}{[k_2^2 - m^2]^2} \right\} \right). \tag{9.10}
\end{aligned}$$

Da das betrachtete Diagramm ausschließlich zwei - an einem Vertex überlappende - Epstein-Glaser-Unterdiagramme besitzt, liefert die Berechnung gemäß der Waldformel zunächst einen durch den Einfluß von deren beiden Countertermen modifizierten Integranden des Gesamtdiagrammes. Die Wahl  $r_{131} = r_{321} = 0, r_{132} = r_{322} = 1$  für die den einzelnen Linien in Abb. 9.2 zugeordneten Widerstände legt die folgenden Bestandteile des Standardimpulsflusses fest:

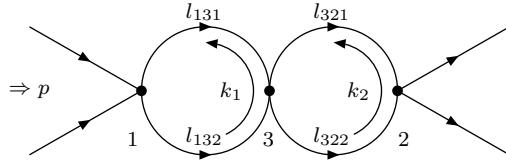


Abbildung 9.2: Gesamtdiagramm  $\gamma$

- Gesamtdiagramm  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} l_{131}^\gamma &= p - k_1, \\ l_{132}^\gamma &= k_1, \\ l_{321}^\gamma &= p - k_2, \\ l_{322}^\gamma &= k_2, \end{aligned} \quad (9.11)$$

- Unterdiagramm  $\gamma_1$ :

$$\begin{aligned} l_{131}^{\gamma_1} &= p^{\gamma_1} - k^{\gamma_1}, \\ l_{132}^{\gamma_1} &= k^{\gamma_1}, \\ k^{\gamma_1} &= k_1, \end{aligned} \quad (9.12)$$

- Unterdiagramm  $\gamma_2$ :

$$\begin{aligned} l_{321}^{\gamma_2} &= p^{\gamma_2} - k^{\gamma_2}, \\ l_{322}^{\gamma_2} &= k^{\gamma_2}, \\ k^{\gamma_2} &= k_2. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Die Waldformel liefert somit für das betrachtete Beispiel folgenden Integranden:

$$\begin{aligned} R_\gamma(p, k_1, k_2) &= (1 - t_p^0) \left( \frac{1}{(p - k_1)^2 - m^2} \frac{1}{k_1^2 - m^2} \frac{1}{(p - k_2)^2 - m^2} \frac{1}{k_2^2 - m^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{[k_1^2 - m^2]^2} \frac{1}{(p - k_2)^2 - m^2} \frac{1}{k_2^2 - m^2} - \frac{1}{(p - k_1)^2 - m^2} \frac{1}{k_1^2 - m^2} \frac{1}{[k_2^2 - m^2]^2} \right). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Nach dem expliziten Ausführen der abschließenden Subtraktion faktorisiert auch das hieraus folgende Ergebnis zum Produkt (9.10) zweier regularisierter Distributionen: Erwartungsgemäß sind die beiden Regularisierungsmethoden bereits hinsichtlich der jeweils zu betrachtenden Unterdiagramme identisch.

### 9.2.2 Zwei-Schleifen-Beitrag zur Vierpunktfunction in sechs Dimensionen

Zur Konstruktion eines Beispiels, in welchem neben divergenten Epstein-Glaser-Unterdiagrammen auch entsprechende reine BPHZ-Unterdiagramme in der Waldformel zu berücksichtigen sind, ist es in der  $\phi^4$ -Theorie notwendig, den Minkowskiraum formal auf  $d - 1 > 3$  Ortskomponenten zu erweitern, um ein solches unter den irreduziblen Diagrammen mit drei Vertices aufzufinden; diese formale Änderung dient lediglich der Modifikation der Divergenzgrade sämtlicher Diagramme, wie sie auch in verschiedenen Theorien durch eine unterschiedliche Impulsabhängigkeit der Propagatoren bewirkt wird, und soll es somit ermöglichen, die allgemeine Vorschrift der Waldformel und deren Äquivalenz mit dem Epstein-Glaser-Verfahren an weiteren Beispielen zu untersuchen, ohne auf die rechnerischen Vereinfachungen der skalaren Modelltheorie zu verzichten.

In  $d = 6$  Dimensionen besitzt ein weiterer Zwei-Schleifen-Beitrag zur Vierpunktfunction den Divergenzgrad  $d(\gamma) = 4$ : Das Diagramm in Abb. 9.3 enthält ferner ein quadratisch divergentes Epstein-Glaser-Unterdiagramm, resultierend aus der Wegnahme des Vertex  $V_3$ , sowie zwei logarithmisch divergente reine BPHZ-Unterdiagramme.

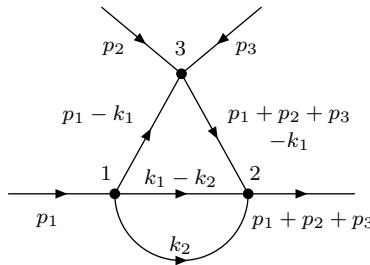


Abbildung 9.3: Beitrag zur Vierpunktfunction,  $d = 6$

Die diesem Diagramm entsprechenden Bestandteile der Distributionen  $A'_3$  und  $R'_3$  in der Epstein-Glaser-Konstruktion sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
 a'_3(x_1, x_2, x_3) &= -(i\Delta_+)^2(x_1 - x_2)i\Delta_+(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_3) \\
 &\quad -(-i\Delta_-)^2(x_1 - x_2)\Delta_F(x_1 - x_3)i\Delta_+(x_2 - x_3) \\
 &\quad -\Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_2)i\Delta_+(x_1 - x_3)i\Delta_+(x_2 - x_3) \\
 &\quad +(i\Delta_+)^2(x_1 - x_2)i\Delta_+(x_1 - x_3)i\Delta_+(x_2 - x_3) \\
 &\quad +(-i\Delta_-)^2(x_1 - x_2)i\Delta_+(x_1 - x_3)i\Delta_+(x_2 - x_3), \\
 r'_3(x_1, x_2, x_3) &= -(-i\Delta_-)^2(x_1 - x_2)(-i\Delta_-)(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_3) \\
 &\quad -(i\Delta_+)^2(x_1 - x_2)\Delta_F(x_1 - x_3)(-i\Delta_-)(x_2 - x_3)
 \end{aligned} \tag{9.15}$$

$$\begin{aligned}
& -\Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_2)(-i\Delta_-)(x_1 - x_3)(-i\Delta_-)(x_2 - x_3) \\
& + (i\Delta_+)^2(x_1 - x_2)(-i\Delta_-)(x_1 - x_3)(-i\Delta_-)(x_2 - x_3) \\
& + (-i\Delta_-)^2(x_1 - x_2)(-i\Delta_-)(x_1 - x_3)(-i\Delta_-)(x_2 - x_3),
\end{aligned} \quad (9.16)$$

so daß als bzgl. der Variablen  $x'_1 = x_1 - x_3$  und  $x'_2 = x_2 - x_3$  an der Stelle  $x'_1 = x'_2 = 0$  zu splittende Distribution  $c_3 = r'_3 - a'_3$  resultiert:

$$\begin{aligned}
c_3(x_1, x_2, x_3) &= -i\Delta_-^2(x_1 - x_2)\Delta_-(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_3) - i\Delta_+^2(x_1 - x_2)\Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_-(x_2 - x_3) \\
& + \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_2)\Delta_-(x_1 - x_3)\Delta_-(x_2 - x_3) + \Delta_+^2(x_1 - x_2)\Delta_-(x_1 - x_3)\Delta_-(x_2 - x_3) \\
& + \Delta_-^2(x_1 - x_2)\Delta_-(x_1 - x_3)\Delta_-(x_2 - x_3) - i\Delta_-^2(x_1 - x_2)\Delta_+(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_3) \\
& - i\Delta_-^2(x_1 - x_2)\Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_+(x_2 - x_3) - \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_2)\Delta_+(x_1 - x_3)\Delta_+(x_2 - x_3) \\
& - \Delta_+^2(x_1 - x_2)\Delta_+(x_1 - x_3)\Delta_+(x_2 - x_3) - \Delta_-^2(x_1 - x_2)\Delta_+(x_1 - x_3)\Delta_+(x_2 - x_3).
\end{aligned} \quad (9.17)$$

Tatsächlich besitzt diese Distribution  $c_3$  den erforderlichen kausalen Träger: Für die auf den entsprechend dem Divergenzgrad  $d(\gamma) = 4$  des Gesamtdiagrammes einzuschränkenden Testfunktionen gelingt das Splitten in avancierten und retardierten Anteil gemäß:

$$\begin{aligned}
a_3(x_1, x_2, x_3) &= a'_3(x_1, x_2, x_3) + t_3(x_1, x_2, x_3) \\
&= (\Delta_{F,\text{reg}}^2 + \Delta_+^2)(x_1 - x_2)(i\Delta_F + \Delta_+)(x_1 - x_3)(i\Delta_F + \Delta_+)(x_2 - x_3) \\
&\quad - (\Delta_{F,\text{reg}}^2 + \Delta_+^2)(x_1 - x_2)i\Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_{\text{av}}(x_2 - x_3) \\
&\quad - \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_2)\Delta_{\text{av}}(x_1 - x_3)\Delta_{\text{av}}(x_2 - x_3) \\
&\quad + (\Delta_{F,\text{reg}}^2 + \Delta_-^2)(x_1 - x_2)\Delta_{\text{av}}(x_1 - x_3)\Delta_+(x_2 - x_3),
\end{aligned} \quad (9.18)$$

$$\begin{aligned}
r_3(x_1, x_2, x_3) &= r'_3(x_1, x_2, x_3) + t_3(x_1, x_2, x_3) \\
&= (\Delta_{F,\text{reg}}^2 + \Delta_-^2)(x_1 - x_2)(i\Delta_F - \Delta_-)(x_1 - x_3)(i\Delta_F - \Delta_-)(x_2 - x_3) \\
&\quad - (\Delta_{F,\text{reg}}^2 + \Delta_-^2)(x_1 - x_2)i\Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_{\text{ret}}(x_2 - x_3) \\
&\quad - \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_2)\Delta_{\text{ret}}(x_1 - x_3)\Delta_{\text{ret}}(x_2 - x_3) \\
&\quad - (\Delta_{F,\text{reg}}^2 + \Delta_+^2)(x_1 - x_2)\Delta_{\text{ret}}(x_1 - x_3)\Delta_-(x_2 - x_3),
\end{aligned} \quad (9.19)$$

mit

$$t_3(x_1, x_2, x_3) = \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_2)\Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_3). \quad (9.20)$$

Ausgewertet für den speziellen Impulsfluß in Abb. 9.3 resultiert somit ohne Berücksichtigung allgemeiner Vorfaktoren das folgende Ergebnis im Impulsraum:

$$\begin{aligned}
\hat{t}_3(p_1, p_2, p_3) &= \int d^6 k_1 \int d^6 k_2 (1 - t_{p_1, p_2, p_3}^4) \left\{ \frac{1}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} \frac{1}{(p_1 + p_2 + p_3 - k_1)^2 - m^2} \right. \\
&\quad \left. \left( (1 - t_{p_1}^2) \frac{1}{(\frac{p_1}{2} - k_1)^2 - m^2} \frac{1}{(\frac{p_1}{2} + k_1)^2 - m^2} \right)_{p_1 = k_1, k_1 = k_2 - \frac{p_1}{2}} \right\}. \quad (9.21)
\end{aligned}$$

Während bei der Epstein-Glaser-Konstruktion ausschließlich die Counterterme des divergenten Epstein-Glaser-Unterdiagrammes  $\gamma_1$  beitragen, erfordert die Berechnung desselben Diagrammes nach der Waldformel die Berücksichtigung zweier weiterer reiner BPHZ-Diagramme  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$ . Mit der Wahl  $r_{121} = r_{122} = 1, r_{131} = r_{321} = 0$  für die den Linien in Abb. 9.4 zugeordneten Widerstände folgt für die Impulsflüsse der einzelnen Diagramme:

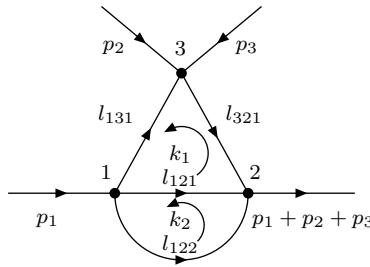


Abbildung 9.4: Gesamtdiagramm  $\gamma$

- Gesamtdiagramm  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
 l_{121} &= -k_2 + k_1, \\
 l_{122} &= k_2, \\
 l_{131} &= p_1 - k_1, \\
 l_{321} &= p_1 + p_2 + p_3 - k_1,
 \end{aligned} \tag{9.22}$$

- Unterdiagramm  $\gamma_1$ :

$$\begin{aligned}
 l_{121}^{\gamma_1} &= \frac{p^{\gamma_1}}{2} - k^{\gamma_1}, \\
 l_{122}^{\gamma_1} &= \frac{p^{\gamma_1}}{2} + k^{\gamma_1}, \\
 p^{\gamma_1} &= k_1 \\
 k^{\gamma_1} &= k_2 - \frac{k_1}{2},
 \end{aligned} \tag{9.23}$$

- Unterdiagramm  $\gamma_2$ :

$$\begin{aligned}
 l_{121}^{\gamma_2} &= k^{\gamma_2}, \\
 l_{131}^{\gamma_2} &= p_1^{\gamma_2} - k^{\gamma_2}, \\
 l_{321}^{\gamma_2} &= p_1^{\gamma_2} + p_2^{\gamma_2} - k^{\gamma_2}, \\
 k^{\gamma_2} &= -k_2 + k_1,
 \end{aligned} \tag{9.24}$$

- Unterdiagramm  $\gamma_3$ :

$$\begin{aligned}
 l_{122}^{\gamma_3} &= k^{\gamma_3}, \\
 l_{131}^{\gamma_3} &= -k^{\gamma_3} + p_1^{\gamma_3}, \\
 l_{321}^{\gamma_3} &= -k^{\gamma_3} + p_1^{\gamma_3} + p_2^{\gamma_3}, \\
 k^{\gamma_3} &= k_2.
 \end{aligned} \tag{9.25}$$

Für den abschließend subtrahierten Integranden folgt somit nach der Waldformel:

$$\begin{aligned}
 R_\gamma(p_1, p_2, p_3) &= (1 - t_{p_1, p_2, p_3}^4) \left\{ \frac{1}{(k_1 - k_2)^2 - m^2} \frac{1}{k_2^2 - m^2} \frac{1}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} \frac{1}{(p_1 + p_2 + p_3 - k_1)^2 - m^2} \right. \\
 &\quad - t_{p^{\gamma_1}}^2 \left( \frac{1}{(\frac{p^{\gamma_1}}{2} - k^{\gamma_1})^2 - m^2} \frac{1}{(\frac{p^{\gamma_1}}{2} + k^{\gamma_1})^2 - m^2} \right)_{p^{\gamma_1} = k_1, k^{\gamma_1} = k_2 - \frac{k_1}{2}} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} \frac{1}{(p_1 + p_2 + p_3 - k_1)^2 - m^2} \\
 &\quad \left. - \frac{1}{k_2^2 - m^2} \frac{1}{[(k_1 - k_2)^2 - m^2]^3} - \frac{1}{(k_1 - k_2)^2 - m^2} \frac{1}{[k_2^2 - m^2]^3} \right\}. \tag{9.26}
 \end{aligned}$$

Tatsächlich verschwinden auch in diesem Beispiel die Beiträge der reinen BPHZ-Unterdiagramme  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$  bei der abschließenden Taylorsubtraktion in den äußeren Impulsen des Gesamtdiagrammes; die Regularisierung nach der Waldformel ist mit der entsprechenden Epstein-Glaser-Regularisierung identisch.

### 9.2.3 Drei-Schleifen-Beitrag zum skalaren Propagator

Ein weiteres Diagramm mit drei Vertices, welches nach dem formalen Übergang in  $d = 6$  Dimensionen sowohl divergente Epstein-Glaser-Unterdiagramme als auch ebensolche reinen BPHZ-Unterdiagramme enthält, zeigt Abb. 9.5:

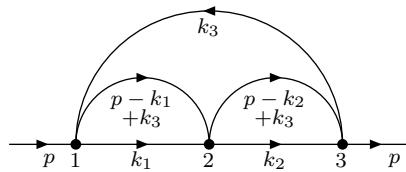


Abbildung 9.5: Drei-Schleifen-Beitrag zur Zweipunktfunktion,  $d = 6$

Obwohl dieses Feynmandiagramm bereits drei Schleifen enthält, ist die Regularisierung nach der Epstein-Glaser-Methode auf die den vorangegangenen Beispielen mit drei Vertices analoge

Weise durchführbar; lediglich die beiden durch das Weglassen der Vertices  $V_1$  bzw.  $V_3$  entstehenden Epstein-Glaser-Unterdiagramme tragen zur Regularisierung des Gesamtdiagrammes bei.

Im Gegensatz dazu erfolgt die Summation in der Waldformel über eine Vielzahl von Wäldern, welche - zusätzlich zu denjenigen, welche die Epstein-Glaser-Unterdiagramme enthalten - sowohl von sämtlichen möglichen reinen Ein- und Zwei-Schleifen-BPHZ-Unterdiagrammen als auch von deren nicht-überlappenden Verschachtelungen erzeugt werden.

Aufgrund ebendieser Involviertheit der Berechnung durch die Waldformel sei die Betrachtung dieses Beispiels auf die Epstein-Glaser-Regularisierung beschränkt; erwartungsgemäß liefert die anschließende Anwendung der auf die Berücksichtigung ausschließlich der Epstein-Glaser-Unterdiagramme eingeschränkten Waldformel die geforderte Übereinstimmung.

Die im Zuge der Epstein-Glaser-Methode zu isolierenden Beiträge der Distributionen  $R'_3$  und  $A'_3$  lauten für das betrachtete Diagramm wie folgt:

$$\begin{aligned} a'_3(x_1, x_2, x_3) &= -(i\Delta_+)^2(x_1 - x_2)\Delta_{F,\text{reg}}^2(x_2 - x_3)i\Delta_+(x_1 - x_3) \\ &\quad -(-i\Delta_-)^2(x_1 - x_2)(i\Delta_+)^2(x_2 - x_3)\Delta_F(x_1 - x_3) \\ &\quad -\Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_2)(i\Delta_+)^2(x_2 - x_3)i\Delta_+(x_1 - x_3) \\ &\quad +(i\Delta_+)^2(x_1 - x_2)(i\Delta_+)^2(x_2 - x_3)i\Delta_+(x_1 - x_3) \\ &\quad +(-i\Delta_-)^2(x_1 - x_2)(i\Delta_+)^2(x_2 - x_3)i\Delta_+(x_1 - x_3), \end{aligned} \quad (9.27)$$

$$\begin{aligned} r'_3(x_1, x_2, x_3) &= -(-i\Delta_-)^2(x_1 - x_2)\Delta_{F,\text{reg}}^2(x_2 - x_3)(-i\Delta_-)(x_1 - x_3) \\ &\quad -(i\Delta_+)^2(x_1 - x_2)(-i\Delta_-)^2(x_2 - x_3)\Delta_F(x_1 - x_3) \\ &\quad -\Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_2)(-i\Delta_-)^2(x_2 - x_3)(-i\Delta_-)(x_1 - x_3) \\ &\quad +(i\Delta_+)^2(x_1 - x_2)(-i\Delta_-)^2(x_2 - x_3)(-i\Delta_-)(x_1 - x_3) \\ &\quad +(-i\Delta_-)^2(x_1 - x_2)(-i\Delta_-)^2(x_2 - x_3)(-i\Delta_-)(x_1 - x_3). \end{aligned} \quad (9.28)$$

Auch die aus diesen Funktionalen gebildete Distribution  $c_3 = r'_3 - a'_3$  besitzt einen kausalen Träger, und die Zerlegung in avancierten bzw. retardierten Anteil gelingt mit:

$$\begin{aligned} a_3(x_1, x_2, x_3) &= a'_3(x_1, x_2, x_3) + t_3(x_1, x_2, x_3) \\ &= i(\Delta_+^2 + \Delta_{F,\text{reg}}^2)(x_1 - x_2)(\Delta_+^2 + \Delta_{F,\text{reg}}^2)(x_2 - x_3)\Delta_+(x_1 - x_3) \\ &\quad +i\Delta_-^2(x_1 - x_2)(\Delta_+^2 + \Delta_{F,\text{reg}}^2)(x_2 - x_3)\Delta_{\text{av}}(x_1 - x_3) \\ &\quad +i(2\Delta_- \Delta_{\text{ret}} + \Delta_{\text{ret}}^2)\text{reg}(x_1 - x_2)\Delta_{F,\text{reg}}^2(x_2 - x_3)\Delta_{\text{av}}(x_1 - x_3), \end{aligned} \quad (9.29)$$

$$\begin{aligned} r_3(x_1, x_2, x_3) &= r'_3(x_1, x_2, x_3) + t_3(x_1, x_2, x_3) \\ &= -i(\Delta_-^2 + \Delta_{F,\text{reg}}^2)(x_1 - x_2)(\Delta_-^2 + \Delta_{F,\text{reg}}^2)(x_2 - x_3)\Delta_-(x_1 - x_3) \\ &\quad +i\Delta_+^2(x_1 - x_2)(\Delta_-^2 + \Delta_{F,\text{reg}}^2)(x_2 - x_3)\Delta_{\text{ret}}(x_1 - x_3) \\ &\quad +i(-2\Delta_+ \Delta_{\text{av}} + \Delta_{\text{av}}^2)\text{reg}(x_1 - x_2)\Delta_{F,\text{reg}}^2(x_2 - x_3)\Delta_{\text{ret}}(x_1 - x_3), \end{aligned} \quad (9.30)$$

mit

$$t_3(x_1, x_2, x_3) = \Delta_{F,\text{reg}}^2(x_1 - x_2)\Delta_{F,\text{reg}}^2(x_2 - x_3)\Delta_F(x_1 - x_3). \quad (9.31)$$

Ausgewertet für den speziellen Impulsfluß gemäß Abb. 9.5 ergibt sich aus diesem Resultat für das Funktional  $t_3$  folgender Ausdruck im Impulsraum:

$$\begin{aligned} \hat{t}_3(p) = & \int d^6 k_1 \int d^6 k_2 \int d^6 k_3 (1 - t_p^8) \left\{ (1 - t_{p^{\gamma_1}}^2) \frac{1}{(p^{\gamma_1} - k_1)^2 - m^2} \frac{1}{k_1^2 - m^2} \Big|_{p^{\gamma_1} = p + k_3} \right. \\ & \cdot (1 - t_{p^{\gamma_2}}^2) \frac{1}{(p^{\gamma_2} - k_2)^2 - m^2} \frac{1}{k_2^2 - m^2} \Big|_{p^{\gamma_2} = p + k_3} \left. \right\} \frac{1}{k_3^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Im Vergleich hierzu sei nun die Berechnung desselben Diagrammes mittels der auf die Berücksichtigung ausschließlich der beiden Epstein-Glaser-Unterdiagramme eingeschränkten Waldformel durchgeführt. Mit der Wahl der den Linien in Abb. 9.6 zugeordneten Widerstände  $r_{121} = r_{231} = 0$ ,  $r_{122} = r_{232} = r_{131} = 1$  resultieren die folgenden Impulsflüsse:

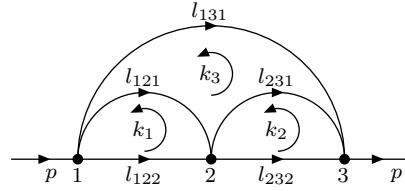


Abbildung 9.6: Gesamtdiagramm  $\gamma$

- Gesamtdiagramm  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} l_{121} &= p - k_1 + k_3, \\ l_{122} &= k_1, \\ l_{231} &= p - k_2 + k_3, \\ l_{232} &= k_2, \\ l_{131} &= -k_3, \end{aligned} \quad (9.33)$$

- Unterdiagramm  $\gamma_1$ :

$$\begin{aligned} l_{121}^{\gamma_1} &= p^{\gamma_1} - k^{\gamma_1}, \\ l_{122}^{\gamma_1} &= k^{\gamma_1}, \\ p^{\gamma_1} &= p + k_3, \\ k^{\gamma_1} &= k_1, \end{aligned} \quad (9.34)$$

- Unterdiagramm  $\gamma_2$ :

$$l_{231}^{\gamma_2} = p^{\gamma_2} - k^{\gamma_2},$$

$$\begin{aligned}
l_{232}^{\gamma_2} &= k^{\gamma_2}, \\
p^{\gamma_2} &= p + k_3, \\
k^{\gamma_2} &= k_2.
\end{aligned} \tag{9.35}$$

Die Auswertung der Waldformel für diese Wahl des Standardimpulsflusses liefert schließlich:

$$\begin{aligned}
R_\gamma(p, k_1, k_2, k_3) &= (1 - t_p^8) \left\{ \frac{1}{(p - k_1 + k_3)^2 - m^2} \frac{1}{k_1^2 - m^2} \frac{1}{(p - k_2 + k_3)^2 - m^2} \frac{1}{k_2^2 - m^2} \frac{1}{k_3^2 - m^2} \right. \\
&\quad - t_{p^{\gamma_1}}^2 \left( \frac{1}{(p^{\gamma_1} - k^{\gamma_1})^2 - m^2} \frac{1}{(k^{\gamma_1})^2 - m^2} \right)_{p^{\gamma_1} = p + k_3, k^{\gamma_1} = k_1} \\
&\quad \cdot \frac{1}{(p - k_2 + k_3)^2 - m^2} \frac{1}{k_2^2 - m^2} \frac{1}{k_3^2 - m^2} \\
&\quad - t_{p^{\gamma_2}}^2 \left( \frac{1}{(p^{\gamma_2} - k^{\gamma_2})^2 - m^2} \frac{1}{(k^{\gamma_2})^2 - m^2} \right)_{p^{\gamma_2} = p + k_3, k^{\gamma_2} = k_2} \\
&\quad \left. \cdot \frac{1}{(p - k_1 + k_3)^2 - m^2} \frac{1}{k_1^2 - m^2} \frac{1}{k_3^2 - m^2} \right\}. \tag{9.36}
\end{aligned}$$

Der vorangestellte Operator  $(1 - t_p^8)$  erlaubt es, dessen Argument zu dem den Integranden des Ergebnisses (9.32) bildenden Produkt zu ergänzen: Epstein-Glaser-Regularisierung und - auf Epstein-Glaser-Unterdiagramme eingeschränkte - Berechnung nach der Waldformel liefern dasselbe Ergebnis.

## Kapitel 10

# Zusammenfassung und Ausblick

Abschließend seien an dieser Stelle die Ergebnisse der Arbeit hinsichtlich der anfangs ausgeführten Zielstellung resümiert: Das Verfahren von Epstein und Glaser wird als ein störungstheoretisches Konstruktionsverfahren vorgestellt, welches auf vier physikalisch sinnvollen Postulaten an die *S*-Matrix basiert; insbesondere die Forderung der Kausalität, auf welcher das konstruktive Verfahren fußt, wird dabei durch die heuristische Konstruktion mittels naiver Zeitordnung im einleitenden Kapitel 2 motiviert.

Es wird die Interpretation des Verfahrens als *Regularisierungsverfahren* dargelegt und damit ein Kriterium für die physikalische Zulässigkeit einer jeden anderen Regularisierungsmethode herausgestellt: Zu fordern ist gerade die Äquivalenz zur Epstein-Glaser-Regularisierung im Rahmen der dort verbleibenden Freiheit.

Die folgenden Kapitel 4 und 5 stellen zwei wichtige weitere Regularisierungsverfahren vor und demonstrieren zugleich an Beispielen als Folge der Äquivalenz zum Epstein-Glaser-Verfahren deren Zulässigkeit. Die Auswahl der BPHZ-Regularisierung und der Dimensionalen Regularisierung aus einer Reihe weiterer Verfahren erfolgt dabei aus bestimmtem Grund: Während das BPHZ-Verfahren hinsichtlich seiner Äquivalenz zur Epstein-Glaser-Methode sehr transparent erscheint und ferner ein Vorgehen darstellt, welches mit der Zimmermannschen Waldformel auch die Behandlung von Mehr-Schleifen-Diagrammen einschließt, ist die Dimensionale Regularisierung ein vor allem für explizite Berechnungen gut praktikables Verfahren.

Als eine neue Vorgehensweise wird im folgenden Kapitel 6 das *modifizierte BPHZ-Verfahren* erklärt, das die Vorteile beider genannten Regularisierungsmethoden vereint. Die Dimensionslosigkeit der impulsabhängigen Argumente der Logarithmen, welche die Resultate der betrachteten Anwendungsbeispiele stets enthalten, erfordert ferner den Bezug auf eine Referenzmasse; im Zuge des Verfahrens übernimmt in den betrachteten Beispielen die Masse des Elektrons in der QED bzw. der skalaren Teilchen in der  $\phi^4$ -Theorie diese Referenz. Eine Umskalierung ist jedoch innerhalb der Freiheit des Regularisierungsprozesses möglich und erlaubt die Einführung eines neuen Massenparameters, der o. B. d. A. mit dem der Dimensionalen Regularisierung identifiziert werden kann. Drei Beispiele aus der QED demonstrieren, wie das modifizierte BPHZ-Verfahren den Charakter dieses zusätzlichen Parameters offenlegt: Im Gegensatz zur Dimensionalen Re-

gularisierung, wo seine Einführung aus Dimensionsgründen notwendig ist, erscheint er hier als Repräsentation der prinzipiellen Freiheit innerhalb des Regularisierungsprozesses; dies rechtfertigt insbesondere sein Auftreten in den Ergebnissen des dimensionalen Verfahrens.

Die Vorteile des modifizierten BPHZ-Verfahrens werden ferner insbesondere bei der Betrachtung von *chiralen* Theorien deutlich: Kapitel 7 zeigt die im Gegensatz zur Dimensionalen Regularisierung uneingeschränkte Anwendbarkeit am Beispiel der Berechnung der  $U(1)$ -Anomalie; Verallgemeinerungen von Diracschen Gammamatrizen und insbesondere der für vier Dimensionen spezifischen  $\gamma_5$ -Matrix auf  $d$  Dimensionen sind nicht notwendig.

Auch für eine Vielzahl von Mehr-Schleifen-Diagrammen liefert der Vergleich der BPHZ-Regularisierung mit der nach Epstein-Glaser - neben dem Beweis der Zulässigkeit jener - insbesondere teils erhebliche Vereinfachungen in den expliziten Berechnungen. Die Auswertung des Sunrise-Diagrammes in Kapitel 8 stellt das einfachste Beispiel eines Diagrammes von höherer Schleifenordnung dar, an welchem die unterschiedliche Charakterisierung von *Unterdiagrammen* einerseits bei der BPHZ-Regularisierung nach der Waldformel und andererseits bei der Epstein-Glaser-Konstruktion deutlich wird: Während dieses Diagramm der  $\phi^4$ -Theorie frei von Epstein-Glaser-Unterdiagrammen ist, besitzt es zwei unabhängige BPHZ-Unterdiagramme. Hier entsteht zum erstenmal die Vermutung, daß die in der Zimmermannschen Waldformel enthaltene Summation über Unterdiagramme - zumindest bei der hier getroffenen Wahl des Standardimpulsflusses - auf die über solche im Sinne von Epstein-Glaser eingeschränkt werden kann.

Tatsächlich erhärtet sich dieser Verdacht bei der Betrachtung weiterer Beispiele in Kapitel 9. Diese Beispiele entstammen bereits der dritten Vertexordnung in der Epstein-Glaser-Konstruktion und erhalten auch entsprechende Epstein-Glaser-Unterdiagramme; die jeweiligen Resultate stimmen stets mit denjenigen überein, welche die auf letztere eingeschränkte Waldformel liefert.

Abschließend ist somit festzuhalten, daß der Vergleich des - zunächst eher formal erscheinenden - Epstein-Glaser-Konstruktionsverfahrens sowohl mit der BPHZ-Regularisierung als auch mit dem dimensionalen Regularisierungsverfahren für eine Vielzahl von Anwendungen sowohl ein grundlegenderes Verständnis der regularisierenden Operation als auch eine z. T. erhebliche Vereinfachung in den expliziten Berechnungen geliefert hat.

Es verbleiben im übrigen noch eine Reihe von Fragestellungen und Zielen, die den in dieser Arbeit eingeschlagenen Weg weiterverfolgen: Während die Behandlung von Ein-Schleifen-Diagrammen im Rahmen des modifizierten BPHZ-Verfahrens bereits praktikabel erscheint, ist die Epstein-Glaser-Konstruktion von Diagrammen mit entsprechenden Epstein-Glaser-Unterdiagrammen verhältnismäßig aufwendig, da das betrachtete Gesamtdiagramm i. a. einer hohen ( $n \geq 3$ ) Vertexordnung entstammt und die Schwierigkeit der Konstruktion mit ansteigender Vertexanzahl rasch zunimmt. Eine Formalisierung dieses Konstruktionsprozesses könnte die hier noch unbewiesene Vermutung bestätigen, daß die zugrundeliegende Kombinatorik durch die eingeschränkte Zimmermannsche Waldformel beschrieben wird, wobei die Einschränkung in der ausschließlichen Berücksichtigung von Epstein-Glaser-Unterdiagrammen liegt.

Ferner liegt den in dieser Arbeit berechneten Beispielen stets die Wahl eines bestimmten Standardimpulsflusses zur Anwendung der Waldformel zugrunde. Für eine Einschränkung der

Waldformel aufgrund eines allgemeinen Vergleiches zur Epstein-Glaser-Konstruktion wäre es schließlich sinnvoll, jene auf die Unabhängigkeit vom gewählten Standardimpulsfluß zu überprüfen.

Prinzipiell wäre es letztlich erstrebenswert, eine jede regularisierende Operation, die der Beseitigung von UV-Divergenzen dient, stets vor dem Hintergrund der Epstein-Glaser-Regularisierung bzw. deren Manifestation im Impulsraum betrachten zu können, um Ursache und Beschaffenheit der Divergenzen, Kombinatorik von Unterdiagrammen und Freiheiten der Regelmierung klar herauszustellen.



## Anhang A

# Wickrotation

Um die erforderlichen Integrationen über den inneren Impuls  $k$  durchzuführen, bietet sich eine Wickrotation im Impulsraum an. Hierzu ist insbesondere die Kenntnis der richtigen Integrationsvorschrift der Propagatoren im Impulsraum wichtig, welche dort durch eine infinitesimale Verschiebung  $+i\eta$  beschrieben wird; für den Fermionpropagator  $S_F$  gilt:

$$S_F(k) \sim \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\eta}, \quad (\text{A.1})$$

für den Photonpropagator:

$$D_F^{\mu\nu}(k) \sim -g^{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\eta}, \quad (\text{A.2})$$

sowie für den massiven Propagator der skalaren  $\phi^4$ -Theorie:

$$\Delta_F(k) \sim \frac{1}{k^2 - m^2 + i\eta}. \quad (\text{A.3})$$

Unter Berücksichtigung dieser Integrationsvorschriften bei der Berechnung der in den Feynmandiagrammen enthaltenen Produkte von Propagatoren resultiert nach der Einführung der Feynmanparameter bei einem Ein-Schleifen-Diagramm mit innerem Impuls  $k$  ein Nenner der Form

$$\frac{1}{(k^2 - s^2 + i\eta)^n}, \quad n \geq 2. \quad (\text{A.4})$$

Hierbei ist  $s$  eine Funktion der Feynmanparameter sowie der Massen und der äußeren Impulse des entsprechenden Diagramms. Der Zähler wird nun gegebenenfalls zunächst durch partielle Integrationen auf die Lorentz-invariante Form  $f(k^2)$  gebracht. An dieser Stelle kann dann leicht eine Wickrotation durchgeführt werden. Hierzu seien zuerst die Polstellen der Funktion  $\frac{f(k^2)}{(k^2 - s^2 + i\eta)^n}$  bezüglich der  $k_0$ -Integration bestimmt, welche an folgenden Stellen liegen:

1. Für  $\mathbf{k}^2 + s^2 > 0$ :

$$\omega_{1,>} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + s^2} - i\eta', \quad (\text{A.5})$$

$$\omega_{2,>} = -\sqrt{\mathbf{k}^2 + s^2} + i\eta', \quad (\text{A.6})$$

2. für  $\mathbf{k}^2 + s^2 < 0$ :

$$\omega_{1,<} = i\sqrt{-(\mathbf{k}^2 + s^2)} - \eta'', \quad (\text{A.7})$$

$$\omega_{2,<} = -i\sqrt{-(\mathbf{k}^2 + s^2)} + \eta'', \quad (\text{A.8})$$

3. für  $\mathbf{k}^2 + s^2 = 0$ :

$$\omega_{1,0} = \sqrt{-i\eta''}, \quad (\text{A.9})$$

$$\omega_{2,0} = -\sqrt{-i\eta''}. \quad (\text{A.10})$$

In einem Koordinatensystem mit den Achsen  $\Re(k_0)$  und  $\Im(k_0)$  liegen die Polstellen folglich in keinem Fall im ersten oder dritten Quadranten. Nach dem Residuensatz ist daher das Integral

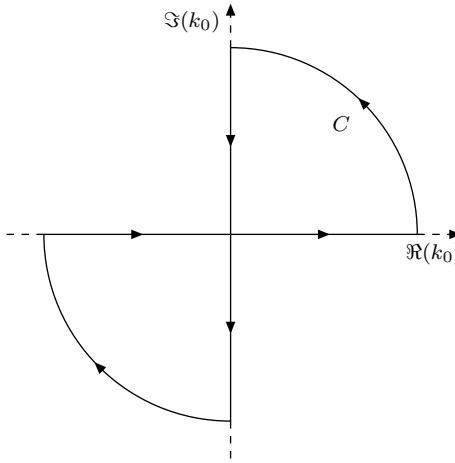


Abbildung A.1: Integrationsweg C

entlang der geschlossenen Kurve  $C$  gleich Null; ferner läßt sich das Integrationsgebiet wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{f(k^2)}{(k_0^2 - \mathbf{k}^2 - s^2 + i\eta)^n} &= \oint_C dk_0 \frac{f(k^2)}{(k_0^2 - \mathbf{k}^2 - s^2 + i\eta)^n} \\ &+ \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \frac{f(k^2)}{(k_0^2 - \mathbf{k}^2 - s^2 + i\eta)^n}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

wobei berücksichtigt wurde, daß die Integrationen entlang der Viertelkreise für die betrachteten, aus den Faltungen von Propagatoren resultierenden Integranden aufgrund deren Verhalten für  $k_0 \rightarrow \infty$  verschwinden. Es resultiert somit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{f(k^2)}{(k_0^2 - \mathbf{k}^2 - s^2 + i\eta)^n} = \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \frac{f(k^2)}{(k_0^2 - \mathbf{k}^2 - s^2 + i\eta)^n}. \quad (\text{A.12})$$

Schließlich führt dann die Substitution  $\tilde{k}_0 := ik_0$  das Integrationsgebiet auf die reelle Achse zurück, so daß die Definition eines Euklidischen Vierervektors  $\tilde{k} = (\tilde{k}_0, \mathbf{k})$  mit dem Betrag  $\bar{k}$  die Einführung vierdimensionaler Polarkoordinaten ermöglicht:

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \frac{f(k^2)}{(k_0^2 - \mathbf{k}^2 - s^2 + i\eta)^n} = i \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{k}_0 \frac{\tilde{f}(\tilde{k}^2)}{(-\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}^2 - s^2 + i\eta)^n} \quad (\text{A.13})$$

$$\rightarrow i \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{k}_0 \int d^3k \frac{\tilde{f}(\tilde{k}^2)}{(-\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}^2 - s^2 + i\eta)^n} = i(-1)^n \Omega_4 \int_0^{\infty} d\bar{k} \frac{\bar{k}^3 f(-\bar{k}^2)}{(\bar{k}^2 + s^2 - i\eta)^n}. \quad (\text{A.14})$$

Hierbei ist  $\Omega_4$  die Oberfläche der vierdimensionalen Einheitskugel gemäß der Gleichung für die Oberflächen  $n$ -dimensionaler Einheitskugeln,

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \Rightarrow \Omega_4 = 2\pi^2; \quad (\text{A.15})$$

$\Gamma$  ist die Eulersche Gammafunktion,  $\Gamma(2) = 1$ .



## Anhang B

# Berechnung des Dreiecksgraphen $T_{\lambda\mu\nu}(p, q)$

### B.1 Spurbildung

Zur Berechnung der Spuren über  $\gamma$ -Matrizen werden folgende Gleichungen verwandt:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\lambda \gamma_\sigma \gamma_\kappa \gamma_\tau \gamma_\mu) &= 4i\epsilon_{\kappa\tau\mu\alpha} (\delta_\rho^\alpha g_{\lambda\sigma} - \delta_\lambda^\alpha g_{\rho\sigma} + \delta_\sigma^\alpha g_{\rho\lambda}) \\ &\quad - 4i\epsilon_{\rho\lambda\sigma\alpha} (\delta_\kappa^\alpha g_{\tau\mu} - \delta_\tau^\alpha g_{\kappa\mu} + \delta_\mu^\alpha g_{\kappa\tau}), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \not{k} \gamma_\lambda \not{k} \gamma_\kappa \not{k} \gamma_\mu) = 4i\epsilon_{\kappa\lambda\mu\alpha} k^\alpha k^2, \quad (\text{B.2})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\lambda \gamma_\sigma) = -4i\epsilon_{\mu\rho\lambda\sigma}. \quad (\text{B.3})$$

Während das Ergebnis (7.11) direkt durch die separate Anwendung der aus (B.1) folgenden Relation

$$k^\rho k^\sigma \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\lambda \gamma_\sigma \gamma_\kappa \gamma_\tau \gamma_\mu) = 8i\epsilon_{\kappa\tau\mu\rho} k_\lambda k^\rho - 4i\epsilon_{\kappa\tau\mu\lambda} k^2 \quad (\text{B.4})$$

auf die einzelnen Spuren erhalten wird und der zu  $m^2$  proportionale Anteil von (7.12) entsprechend mittels der Verwendung von (B.3), bedarf der verbleibende Teil von (7.12) einer detaillierteren Betrachtung; der zu berechnende Ausdruck sei dazu zunächst wie folgt zerlegt:

$$\begin{aligned} &\text{Tr}[(\not{q}y - \not{p}x) \gamma_\mu (\not{q}y - \not{p}x + \not{p}) \gamma_\lambda \gamma_5 (\not{q}y - \not{p}x - \not{q}) \gamma_\nu] \\ &= \text{Tr}[(\not{q}y - \not{p}x) \gamma_\mu (\not{q}y - \not{p}x) \gamma_\lambda \gamma_5 (\not{q}y - \not{p}x) \gamma_\nu] \\ &\quad + \text{Tr}[(\not{q}y - \not{p}x) \gamma_\mu \not{p} \gamma_\lambda \gamma_5 (\not{q}y - \not{p}x) \gamma_\nu] \\ &\quad - \text{Tr}[(\not{q}y - \not{p}x) \gamma_\mu (\not{q}y - \not{p}x) \gamma_\lambda \gamma_5 \not{q} \gamma_\nu] \\ &\quad - \text{Tr}[(\not{q}y - \not{p}x) \gamma_\mu \not{p} \gamma_\lambda \gamma_5 \not{q} \gamma_\nu]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Die Auswertung der einzelnen Summanden mittels (B.3) bzw. (B.4) liefert folgende Identitäten:

$$\text{Tr}[(\not{q}y - \not{p}x) \gamma_\mu (\not{q}y - \not{p}x) \gamma_\lambda \gamma_5 (\not{q}y - \not{p}x) \gamma_\nu] = 4i\epsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (q^\alpha y - p^\alpha x) (qy - px)^2,$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[(\not{q}y - \not{p}x)\gamma_\mu \not{p}\gamma_\lambda \gamma_5 (\not{q}y - \not{p}x)\gamma_\nu] &= 8i\epsilon_{\mu\tau\lambda\rho}(q^\rho y - p^\rho x)(q_\nu y - p_\nu x)p^\tau \\
&\quad - 4i\epsilon_{\mu\tau\lambda\nu}(qy - px)^2 p^\tau, \\
\text{Tr}[(\not{q}y - \not{p}x)\gamma_\mu (\not{q}y - \not{p}x)\gamma_\lambda \gamma_5 \not{q}\gamma_\nu] &= 8i\epsilon_{\lambda\tau\nu\rho}(q^\rho y - p^\rho x)(q_\mu y - p_\mu x)q^\tau \\
&\quad - 4i\epsilon_{\lambda\tau\nu\mu}(qy - px)^2 q^\tau, \\
\text{Tr}[(\not{q}y - \not{p}x)\gamma_\mu \not{p}\gamma_\lambda \gamma_5 \not{q}\gamma_\nu] &= 8iy\epsilon_{\mu\tau\lambda\rho}q^\rho q_\nu p^\tau - 8ix\epsilon_{\lambda\tau\nu\rho}p^\rho p_\mu q^\tau \\
&\quad - 4i\epsilon_{\mu\tau\lambda\nu}(q^2 p^\tau y - p^2 q^\tau x), \tag{B.6}
\end{aligned}$$

womit schließlich der zu berechnenden Anteil von (7.12) folgt:

$$\begin{aligned}
&\text{Tr}[(\not{q}y - \not{p}x)\gamma_\mu (\not{q}y - \not{p}x + \not{p})\gamma_\lambda \gamma_5 (\not{q}y - \not{p}x - \not{q})\gamma_\nu] \\
&= 4i\epsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}(q^\alpha y - p^\alpha x)(qy - px)^2 + 8i\epsilon_{\mu\tau\lambda\rho}(q^\rho y - p^\rho x)(q_\nu y - p_\nu x)p^\tau \\
&\quad + 4i\epsilon_{\tau\mu\lambda\nu}(qy - px)^2 p^\tau - 8i\epsilon_{\lambda\tau\nu\rho}(q^\rho y - p^\rho x)(q_\mu y - p_\mu x)q^\tau \\
&\quad - 4i\epsilon_{\tau\lambda\nu\mu}(qy - px)^2 q^\tau - 8iy\epsilon_{\mu\tau\lambda\rho}q^\rho q_\nu p^\tau + 8ix\epsilon_{\lambda\tau\nu\rho}p^\rho p_\mu q^\tau \\
&\quad - 4i\epsilon_{\mu\tau\nu\lambda}(q^2 p^\tau y - p^2 q^\tau x) \\
&= 4i\epsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}(q^\alpha(y-1) - p^\alpha(x-1))(qy - px)^2 - 4i\epsilon_{\lambda\tau\mu\nu}(q^2 p^\tau y - p^2 q^\tau x) \\
&\quad + 8i\epsilon_{\mu\tau\lambda\rho}q^\rho q_\nu y^2 p^\tau - 8i\epsilon_{\mu\tau\lambda\rho}q^\rho p_\nu x y p^\tau + 8i\epsilon_{\lambda\tau\nu\rho}p^\rho q^\mu x y q^\tau - 8i\epsilon_{\lambda\tau\nu\rho}p^\rho p_\mu x^2 q^\tau \\
&\quad - 8iy\epsilon_{\mu\tau\lambda\rho}q^\rho q_\nu p^\tau + 8ix\epsilon_{\lambda\tau\nu\rho}p^\rho p_\mu q^\tau \\
&= 4i\epsilon_{\lambda\mu\nu\tau}\{(q^\tau(y-1) - p^\tau(x-1))(qy - px)^2 - q^2 p^\tau y + p^2 q^\tau x\} \\
&\quad + 8iy\epsilon_{\mu\tau\lambda\rho}q^\rho p^\tau[q_\nu(y-1) - p_\nu x] - 8ix\epsilon_{\lambda\tau\nu\rho}p^\rho q^\tau[p_\mu(x-1) - q_\mu y]. \tag{B.7}
\end{aligned}$$

## B.2 Durchführung der $k$ -Integration

Als Beispiel für die explizite Auswertung der Impulsintegrationen sei diese am ursprünglich divergenten Anteil  $T_{\lambda\mu\nu}^{\log}$  demonstriert. Durch partielle Integration derjenigen Terme, welche einzelne Komponenten von  $k$  enthalten, lässt sich zunächst erreichen, daß der gesamte Ausdruck ausschließlich von  $k^2$  abhängig ist; an dieser Stelle transformiert dann die Wickrotation das  $k$ -Integral in das schließlich auszuführende vierdimensionale Euklidische Integral:

$$\begin{aligned}
&T_{\lambda\mu\nu}^{\log}(p, q) \\
&= -16i \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1 - t_{p,q}^1) \left( \frac{2\epsilon_{\lambda\tau\nu\rho}k^\rho k_\mu(p^\tau x - q^\tau y + q^\tau)}{[k^2 - (qy - px)^2 - m^2 + q^2 y + p^2 x]^3} \right. \\
&\quad + \frac{2\epsilon_{\mu\tau\lambda\rho}k^\rho k_\nu(p^\tau x - q^\tau y - p^\tau)}{[k^2 - (qy - px)^2 - m^2 + q^2 y + p^2 x]^3} + \frac{2\epsilon_{\nu\tau\mu\rho}k^\rho k_\lambda(p^\tau x - q^\tau y)}{[k^2 - (qy - px)^2 - m^2 + q^2 y + p^2 x]^3} \\
&\quad - \frac{3\epsilon_{\nu\tau\mu\lambda}k^2(p^\tau x - q^\tau y)}{[k^2 - (qy - px)^2 - m^2 + q^2 y + p^2 x]^3} - \frac{\epsilon_{\lambda\tau\nu\mu}k^2(q^\tau - p^\tau)}{[k^2 - (qy - px)^2 - m^2 + q^2 y + p^2 x]^3} \Big) \\
&= -8i \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1 - t_{p,q}^1) \left( \frac{\epsilon_{\lambda\tau\nu\mu}(p^\tau x - q^\tau y + q^\tau)}{[k^2 - (qy - px)^2 - m^2 + q^2 y + p^2 x]^2} \right. \\
&\quad + \frac{\epsilon_{\mu\tau\lambda\nu}(p^\tau x - q^\tau y - p^\tau)}{[k^2 - (qy - px)^2 - m^2 + q^2 y + p^2 x]^2} + \frac{\epsilon_{\nu\tau\mu\lambda}(p^\tau x - q^\tau y)}{[k^2 - (qy - px)^2 - m^2 + q^2 y + p^2 x]^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2\epsilon_{\nu\tau\mu\lambda}k^2(3p^\tau x - 3q^\tau y + q^\tau - p^\tau)}{[k^2 - (qy - px)^2 - m^2 + q^2y + p^2x]^3} \Big) \\
& = 8\Omega_4 \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^\infty d\bar{k} (1 - t_{p,q}^1) \bar{k}^3 \\
& \quad \left( \frac{\epsilon_{\lambda\tau\nu\mu}(3p^\tau x - 3q^\tau y + q^\tau - p^\tau)}{[\bar{k}^2 + (qy - px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x]^2} - \frac{2\epsilon_{\nu\tau\mu\lambda}\bar{k}^2(3p^\tau x - 3q^\tau y + q^\tau - p^\tau)}{[\bar{k}^2 + (qy - px)^2 + m^2 - q^2y - p^2x]^3} \right) \\
& = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \epsilon_{\lambda\mu\nu\tau} \{p^\tau(3x - 1) - q^\tau(3y - 1)\} \ln \frac{m^2}{m^2 + (qy - px)^2 - q^2y - p^2x}. \quad (\text{B.8})
\end{aligned}$$



## Anhang C

# Epstein-Glaser-Resultate im Impulsraum

Während die einfache Übersetzung einer formal von  $n - 1$  Ortsdifferenzen  $x_i - x_n$  abhängigen skalaren Distribution in den Impulsraum in einer Abhängigkeit von  $n - 1$  unabhängigen Impulsvariablen  $q_i$  resultiert, bewirkt eine Berücksichtigung der zugehörigen Wickmonome im Ortsraum und eine Anwendung der  $S$ -Matrix auf äußere Teilchen die Ersetzung einer jeden Impulsvariablen  $q_i$  durch den am Vertex  $V_i$  einfallenden äußeren Impuls  $p_i$  gemäß  $q_i = -p_i$ ; die regularisierende Taylorsubtraktion bzgl. der Impulsraumvariablen wird durch diejenige hinsichtlich einer Auswahl von unabhängigen äußeren Impulsen ersetzt.

Im folgenden sei dieser Übergang für die in Kapitel 9.2 betrachteten Mehr-Schleifen-Diagramme demonstriert:

### C.1 Erster Zwei-Schleifen-Beitrag, $d = 4$

Beginnend mit der im Ortsraum abschließend auf subtrahierte Testfunktionen einzuschränkenden Distribution

$$d'(x'_1, x'_2) = \Delta_{F,\text{reg}}^2(x'_1) \Delta_{F,\text{reg}}^2(x'_2) \quad (\text{C.1})$$

gemäß (9.9) sei zunächst formal die Fouriertransformierte gebildet:

$$\hat{d}(q_1, q_2) = \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_1) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_2). \quad (\text{C.2})$$

In der regularisierten Distribution

$$\hat{d}_{\text{reg}}(q_1, q_2) = (1 - t_{q_1, q_2}^0) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_1) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_2) \quad (\text{C.3})$$

ist nun die Taylorsubtraktion bzgl. der Impulsraumvariablen  $q_1$  und  $q_2$  aufgrund des Verschwindens der einzelnen Regularisierungen  $\widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_i)$  an der Stelle  $q_i = 0$  redundant, so daß bereits

die Rücktransformation von (C.2) in den Ortsraum die Regularisierung des Gesamtdiagrammes im Ortsraum darstellt:

$$d_{\text{reg}}(x_1, x_2, x_3) = \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^2} e^{-iq_1(x_1-x_3)} e^{-iq_2(x_2-x_3)} \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_1) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_2). \quad (\text{C.4})$$

Zum Vergleich mit dem BPHZ-Verfahren, welches auf der Stufe von bzgl. ein- und ausfallender äußerer Teilchen gebildeten Matrixelementen definiert ist, sei an dieser Stelle die entsprechende Feynmanamplitude gebildet:

Die Hinzunahme des Wickmonoms  $\phi^2(x_1)\phi^2(x_2)$  mit den Feldoperatoren gemäß (2.4) liefert nach der Anwendung auf zwei am Vertex  $V_1$  mit dem Gesamtmpuls  $p$  einfallende und zwei bei  $V_2$  entsprechend mit  $q$  auslaufende Teilchen den Faktor  $\frac{1}{(2\pi)^6} e^{-ipx_1} e^{iqx_2}$ , so daß als Auswertung der regularisierten Distribution  $d_{\text{reg}}$  auf der im physikalischen Grenzwert zu betrachteten Funktion  $g(x_1, x_2, x_3) = 1$  folgender Ausdruck resultiert:

$$\begin{aligned} \hat{d}(p, q) &= \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int d^4 x_3 \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^2} e^{-iq_1(x_1-x_3)} e^{-iq_2(x_2-x_3)} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(2\pi)^6} e^{-ipx_1} e^{iqx_2} \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_1) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_2) \\ &= (2\pi)^2 \int d^4 q_1 \int d^4 q_2 \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_1) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_2) \delta(-q_1 - p) \delta(-q_2 + q) \delta(q_1 + q_2) \\ &= (2\pi)^2 \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(-p) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q) \delta(p - q), \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

woraus unter Verwendung der speziellen Gestalt der Regularisierungen  $\widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}$  die in (9.10) mit  $\hat{t}_3(p)$  bezeichnete Struktur folgt.

## C.2 Zweiter Zwei-Schleifen-Beitrag, $d = 6$

Auf analoge Art und Weise erfolgt die Behandlung der abschließend zu regularisierenden Distribution

$$d'(x'_1, x'_2) = \Delta_{F,\text{reg}}^2(x'_1 - x'_2) \Delta_{F,\text{reg}}(x'_1) \Delta_{F,\text{reg}}(x'_2) \quad (\text{C.6})$$

gemäß (9.20). Die im Impulsraum bzgl. der Impulsvariablen  $q_1$  und  $q_2$  taylorsubtrahierte Fouriertransformierte,

$$\hat{d}_{\text{reg}}(q_1, q_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^6 \tilde{p} (1 - t_{q_1, q_2}^4) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(\tilde{p}) \hat{\Delta}_F(q_1 - \tilde{p}) \hat{\Delta}_F(q_2 + \tilde{p}), \quad (\text{C.7})$$

führt nach Rücktransformation in den Ortsraum, Multiplikation mit dem die vier äußeren Teilchen berücksichtigenden Phasenfaktor  $\frac{1}{(2\pi)^{10}} e^{-ip_1 x_1} e^{-i(p_1 + p_2)x_3} e^{ip_4 x_2}$  und Auswertung auf der Funktion  $g = 1$  auf folgendes Resultat:

$$\begin{aligned}
& \hat{d}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\
&= \int d^6 x_1 \int d^6 x_2 \int d^6 x_3 \int \frac{d^6 q_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^6 q_2}{(2\pi)^3} e^{-iq_1(x_1-x_3)} e^{-iq_2(x_2-x_3)} \\
&\quad \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^6 \tilde{p} (1 - t_{q_1, q_2}^4) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(\tilde{p}) \hat{\Delta}_F(q_1 - \tilde{p}) \hat{\Delta}_F(q_2 + \tilde{p}) \\
&\quad \cdot \frac{1}{(2\pi)^{10}} e^{-ip_1 x_1} e^{-i(p_1+p_2)x_3} e^{ip_4 x_2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int d^6 q_1 \int d^6 q_2 \int d^4 \tilde{p} (1 - t_{q_1, q_2}^4) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(\tilde{p}) \hat{\Delta}_F(q_1 - \tilde{p}) \hat{\Delta}_F(q_2 + \tilde{p}) \\
&\quad \cdot \delta(-q_1 - p_1) \delta(-q_2 + p_4) \delta(q_1 + q_2 - p_2 - p_3) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int d^6 \tilde{p} (1 - t_{p_1, p_2, p_3}^4) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(\tilde{p}) \hat{\Delta}_F(-p_1 - \tilde{p}) \hat{\Delta}_F(p_1 + p_2 + p_3 + \tilde{p}) \\
&\quad \cdot \delta(-p_1 - p_2 - p_3 + p_4). \tag{C.8}
\end{aligned}$$

Die Substitution  $\tilde{p} = -k_1$  führt schließlich zusammen mit der Verwendung einer speziellen Wahl der Regularisierung  $\widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(\tilde{p})$  auf  $\hat{t}_3(p_1, p_2, p_3)$  gemäß (9.21).

### C.3 Drei-Schleifen-Beitrag zum Propagator

Die regularisierte Fouriertransformierte des Beitrags (9.31),

$$d'(x'_1, x'_2) = \Delta_{F, \text{reg}}^2(x'_1 - x'_2) \Delta_{F, \text{reg}}^2(x'_2) \Delta_{F, \text{reg}}(x'_1), \tag{C.9}$$

zur Propagatorfunktion besitzt folgende Gestalt:

$$\hat{d}_{\text{reg}}(q_1, q_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^6 \tilde{p} (1 - t_{q_1, q_2}^8) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_1 - \tilde{p}) \hat{\Delta}_F(\tilde{p}) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_1 + q_2 - \tilde{p}). \tag{C.10}$$

In diesem Beispiel liefern zwei äußere Teilchen den Phasenfaktor  $\frac{1}{(2\pi)^5} e^{-ipx_1} e^{iqx_3}$ , so daß - nach der Substitution  $\tilde{p} \rightarrow k_3$  - die Struktur des folgenden Ergebnisses gemäß (9.32) mit dem entsprechenden Resultat des BPHZ-Verfahrens zu vergleichen ist:

$$\begin{aligned}
\hat{d}(p, q) &= \int d^6 x_1 \int d^6 x_2 \int d^6 x_3 \int \frac{d^6 q_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^6 q_2}{(2\pi)^3} e^{-iq_1(x_1-x_3)} e^{-iq_2(x_2-x_3)} \\
&\quad \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^6 \tilde{p} (1 - t_{q_1, q_2}^8) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_1 - \tilde{p}) \hat{\Delta}_F(\tilde{p}) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_1 + q_2 - \tilde{p}) \\
&\quad \cdot \frac{1}{(2\pi)^5} e^{-ipx_1} e^{iqx_3} \\
&= (2\pi)^4 \int d^6 q_1 \int d^6 q_2 \int d^6 \tilde{p} (1 - t_{q_1, q_2}^8) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_1 - \tilde{p}) \hat{\Delta}_F(\tilde{p}) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(q_1 + q_2 - \tilde{p}) \\
&\quad \cdot \delta(-q_1 - p) \delta(-q_2) \delta(q_1 + q_2 + q) \\
&= (2\pi)^4 \int d^6 \tilde{p} (1 - t_p^8) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(-p - \tilde{p}) \hat{\Delta}_F(\tilde{p}) \widehat{(\Delta_F^2)}_{\text{reg}}(-p - \tilde{p}) \delta(p - q). \tag{C.11}
\end{aligned}$$



# Literaturverzeichnis

- [BJD] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistische Quantenmechanik*, Bibliographisches Institut Mannheim, 1966, *Relativistische Quantenfeldtheorie*, B. I., 1967
- [CMS] P. D. B. Collins, A. D. Martin, E. J. Squires: *Particle Physics and Cosmology*, Wiley & Sons, New York 1989
- [COL] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, 1984
- [EPG] H. Epstein, V. Glaser, *The role of locality in perturbation theory*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A, Vol. XIX, 211-295, 1973
- [GES] I. M. Gelfand, G. E. Schilov, *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) I*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960
- [GRB] J. M. Gracia-Bondía, *Improved Epstein-Glaser renormalization in coordinate space I. Euclidean framework*, hep-th/0202023, 4.2.2002
- [GRO] S. Großmann, *Funktionalanalysis*, Aula-Verlag, 1988
- [HAE] R. Häufling, *Störungstheoretische Renormierung von Quantenfeldtheorien*, Vorlesungsskript, Universität Mainz
- [ITZ] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980
- [MAS] F. Mandl, G. Shaw, *Quantenfeldtheorie*, Aula-Verlag, 1993
- [NOV] J. Novotný, *Axial Anomaly and Dimensional Regularization - a review*, Czech. J. Phys. 44, 633, 1994
- [PIN] G. Pinter, *Epstein-Glaser Renormalization: Finite Renormalizations, the S-Matrix of  $\phi^4$ -Theory and the Action Principle*, Dissertation, Hamburg, 2000
- [PRA] D. Prange, *Causal Perturbation Theory and Differential Renormalization*, hep-th/9710225
- [RYD] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1985
- [SRF] G. Scharf, *Finite Quantum Electrodynamics: the Causal Approach*, Springer-Verlag, Berlin, 1995

- [SWL] F. Schwabl, *Quantenmechanik für Fortgeschrittene*, Springer-Verlag, 1997
- [VHE] H. van Hees, *Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Skript zu *International Student Program at GSI*
- [ZIM] W. Zimmermann, *The Power Counting Theorem for Minkowski Metric*, Commun. math. Phys. 11, 1-8, 1968