

Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

DISSESSAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.006/09

**Método de Integração em Dimensão Negativa em Teoria  
Quântica de Campos**

Oscar Leonardo Acevedo Pabón

Orientador

*Prof. Dr. Alfredo Takashi Suzuki*

Abril de 2009

**“A mi madre y a mi padre.”**

*“Hay un hogar donde alguien te extraña.  
¿Qué sería de tu ánimo y de tu esperanza,  
de tus logros, proyectos y hazañas,  
sin la fe de los tuyos cuando la tuya flaquea?”*

*“Adde parvum parvo magnus acervus erit.”*

Ovídio.

## **Agradecimentos**

Agradeço à minha família, especialmente pela sua grande fé em mim e o apoio incondicional.

Aos amigos do IFT: Alexander, Jackson, Almeira, Alberto, Bruce, Aline, e Danuce; agradeço sua colaboração para este trabalho e sobretudo sua grata companhia e valiosa amizade.

Aos demais colegas do IFT.

Aos grandes amigos que fiz no Brasil fora do IFT (Rodrigo, Elder, Leandro, Lissandre, Carmen, etc.), com os quais construi laços que durarão a vida toda. E aos meus amigos da Colômbia, que sempre me acompanharam, embora fosse mais no pensamento que com a presença física.

Agradeço aos professores e funcionários do IFT.

Agradeço ao meu orientador, Alfredo T. Suzuki, pela liberdade e compreensão com as que me permitiu trabalhar, pela forma concisa como fui orientado e pelas oportunidades que me ofereceu.

À Capes, pelo apoio financeiro.

## Resumo

Este trabalho é uma revisão do método de integração em dimensão negativa como uma ferramenta poderosa no cálculo das correções radiativas presentes na teoria quântica de campos perturbativa. Este método é aplicável no contexto da regularização dimensional e permite obter soluções exatas de integrais de Feynman onde tanto o parâmetro de dimensão como os expoentes dos propagadores estão generalizados. As soluções apresentam-se na forma de combinações lineares de funções hipergeométricas cujos domínios de convergência estão relacionados com a estrutura analítica da integral de Feynman. Cada solução definida por seu domínio de convergência está conectada com as outras através de continuações analíticas. Além de apresentar e discutir o algoritmo geral do método com detalhe, mostram-se aplicações concretas a integrais escalares de um e dois loops e à renormalização da eletrodinâmica quântica (QED) a um loop.

**Palavras Chaves:** Correções radiativas; integral de Feynman; regularização dimensional; continuação analítica; dimensão negativa.

**Áreas do conhecimento:** Ciências Exatas e da Terra; Física; Física Teórica; Teoria de Campos.

## **Abstract**

This work is a review of the Negative Dimension Integration Method as a powerful tool for the computation of the radiative corrections present in Quantum Field Perturbation Theory. This method is applicable in the context of Dimensional Regularization and it provides exact solutions for Feynman integrals with both dimensional parameter and propagator exponents generalized. These solutions are presented in the form of linear combinations of hypergeometric functions whose domains of convergence are related to the analytic structure of the Feynman Integral. Each solution is connected to the others through analytic continuations. Besides presenting and discussing the general algorithm of the method in a detailed way, we offer concrete applications to scalar one-loop and two-loop integrals as well as to the one-loop renormalization of Quantum Electrodynamics (QED).

---

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Considerações Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Forma geral de uma integral com $L$ loops . . . . .	4
1.2 Rotação de Wick . . . . .	5
1.3 Regularização dimensional . . . . .	8
1.4 Parametrização de Schwinger e integrais com estrutura tensorial . . . . .	10
1.5 Método de integração em dimensão negativa . . . . .	12
<b>2 Integrais escalares em 1 e 2 loops</b>	<b>15</b>
2.1 Diagrama tipo <i>bolha</i> . . . . .	15
2.2 Diagrama tipo <i>triângulo</i> . . . . .	22
2.3 Diagrama tipo <i>pôr de sol</i> . . . . .	28
2.4 Diagrama triangular a dois loops . . . . .	31
<b>3 Aplicação à QED a um loop</b>	<b>34</b>
3.1 Autoenergia do elétron . . . . .	35
3.2 Polarização do vácuo . . . . .	38
3.3 Correção ao vértice . . . . .	39
3.4 Renormalização . . . . .	42
<b>4 Discussão</b>	<b>44</b>
<b>5 Conclusão e perspectivas futuras</b>	<b>49</b>
<b>A Continuação analítica</b>	<b>51</b>
<b>B Fundamentos matemáticos do NDIM</b>	<b>56</b>
<b>C Funções hipergeométricas</b>	<b>59</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>62</b>

---

# Introdução

Desde o nascimento da teoria quântica de campos, os métodos perturbativos têm demonstrado ser extremamente úteis (possivelmente os mais úteis) para obter previsões na física de partículas. Com a chegada dos diagramas de Feynman, pôde-se levar em conta as correções perturbativas ordem por ordem de uma maneira simples e elegante. Contudo, ao passar da ordem zero de perturbação, em direção ao que se conhece como correções radiativas, aparecem diagramas que envolvem integrais sobre os 4-momentos (diagramas com *loops*) e algumas destas integrais são eventualmente divergentes. Dado que os diagramas ao nível de árvore só reproduzem as previsões da teoria clássica, a potência geral da teoria quântica de campos perturbativa depende radicalmente da possibilidade de calcular e manipular essas integrais, inclusive se são divergentes. Enquanto a precisão das medidas experimentais continuar aumentando e as previsões da teoria quântica de campos continuarem dependendo tão profundamente das correções radiativas, a necessidade de explorar e testar novas formas de calcular e manipular integrais de Feynman permanecerá em vigor.

Neste trabalho expõe-se uma técnica matemática para encontrar soluções analíticas exatas de integrais de Feynman conhecida como *método de integração em dimensão negativa* (NDIM). Esta técnica foi inicialmente proposta por Halliday e Ricotta em 1987 [1] e desde então tem sido aplicada com sucesso a diversos casos [2]-[16]. O método tem mostrado ser uma ferramenta poderosa para resolver diagramas que envolvem loops e em certos casos pôde-se comprovar a sua equivalência com outros métodos [12, 13]. Um progresso relativamente recente aconteceu quando I. González e I. Schmidt encontraram em 2007 uma significativa otimização do método além de proporcionar um novo fundamento matemático da técnica com base na parametrização de Schwinger e a expansão em série de Taylor-Riemann [15]. Este fato convida a reexaminar alguns dos resultados obtidos antes da otimização e a procurar uma panorâmica renovada do NDIM. Esta dissertação está dentro desse espírito, e o seu principal objetivo é explicar o NDIM desde um enfoque atualizado, procurando um equilíbrio entre o detalhe, a claridade e a concisão. Devido a que o tema central é uma ferramenta de cálculo, a grande maioria deste trabalho foi dedicada a expor aspectos matemáticos e manipulações formais. Contudo, procurou-se não perder de vista a motivação física que está por trás.

A ordem de exposição será a seguinte. O capítulo 1 começa apresentando o marco geral em que está inscrito o NDIM. Partindo de uma típica integral de Feynman no

espaço de Minkowski, explica-se a utilidade de pensar estas integrais como funções de variável complexa e são expostos os vários conceitos que permitem o controle exato das suas eventuais divergências. Depois, resume-se em forma geral os passos envolvidos para solucionar estas integrais segundo o NDIM, partindo da representação de Schwinger. O capítulo **2** é um pequeno compêndio de aplicações do NDIM a integrais escalares em um e dois loops. Os primeiros casos são bastante conhecidos na literatura mas foram escolhidos porque a sua simplicidade é ideal para ilustrar o método. Alguns dos resultados posteriores podem ser considerados originais em vários sentidos; em especial porque alguns deles reexaminam casos explorados antes da otimização encontrada por González e Schmidt. O capítulo **3** é uma manifestação do interesse físico que subjaz a este trabalho; nele ilustra-se como o NDIM pode ser aplicado a uma teoria de campos fisicamente relevante. Escolheu-se analisar a renormalização a primeira ordem da eletrodinâmica quântica (QED) a partir de alguns dos resultados do capítulo **2**. Esta escolha está muito bem justificada na importância histórica dos resultados e o amplo tratamento que tem esse caso na literatura; isto facilita enormemente o trabalho de comparação. Apesar de ser um caso tão conhecido, alguns dos resultados do capítulo **3** podem ser considerados novidades (e não só no sentido de que foram achados pelo NDIM). O capítulo **4** é uma crítica das limitações e as vantagens do NDIM desde a perspectiva atual; é justificável adiar esta discussão até este ponto devido a que os capítulos precedentes lhe oferecem uma base concreta. Finalmente, no capítulo **5** são apresentadas as conclusões e as perspectivas futuras. Além disso, os apêndices merecem menção própria. Eles foram tirados do corpo principal deste trabalho somente porque são de um conteúdo profundamente matemático; porém, eles explicam conceitos essenciais ao NDIM e nenhuma exposição do método estaria realmente completa sem eles.

# Capítulo 1

---

## Considerações Preliminares

### 1.1 Forma geral de uma integral com $L$ loops

Os objetos de estudo básicos deste trabalho são integrais da forma,

$$\mathcal{F}^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j) = \left( \prod_{k=1}^L \int \frac{d^4 q_k}{(2\pi)^4} \right) \left( \prod_{j=1}^N \frac{1}{[r_j^2 - m_j^2 + i\epsilon]} \right) \mathcal{N}^{\{\mu_t\}}(p_i, q_l; m_j), \quad (1.1)$$

com,

$$r_j = \sum_{k=1}^L \xi_{jk} q_k + \sum_{i=1}^E \chi_{ji} p_i. \quad (1.2)$$

A integral (1.1) representa um diagrama de Feynman amputado com  $L$  loops,  $N$  linhas internas, e  $E$  linhas externas. Os  $r_j$  representam os momentos das linhas internas e as  $m_j$  suas massas respetivas. As matrizes  $\xi_{jk}$  e  $\chi_{ji}$  só podem ter entradas 0 e  $\pm 1$ ; dado que os  $p_i$  representam os  $E$  momentos externos, os  $q_k$  representam os  $L$  momentos internos independentes, e aplica-se a conservação do 4-momento em cada vértice do diagrama. O numerador  $\mathcal{N}^{\{\mu_t\}}$  é um tensor com índices  $\mu_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) que pode ser expresso como um polinômio de produtos diretos de 4-vetores  $p_i^\mu$  e  $q_l^\mu$ , a métrica de Minkowski  $\eta^{\mu\nu}$ , e eventualmente as matrizes de Dirac  $\gamma^\mu$ . No último caso,  $\mathcal{N}^{\{\mu_t\}}$  seria um tensor de matrizes que agem sobre spinores de Dirac. O polinômio tensorial  $\mathcal{N}^{\{\mu_t\}}$  terá coeficientes associados às constantes de acoplamento envolvidas nos vértices do diagrama, aspectos combinatórios, assim como eventuais fatores associados à dimensão do espaço-tempo no qual a teoria se desenvolve. Os fatores combinatórios dos diagramas não vão ser levados a conta. O termo  $i\epsilon$  nos denominadores corresponde à prescrição usual que assegura que tal propagador de Feynman no espaço de momento tem a forma adequada ao voltar ao espaço de posições quando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .

Embora as variáveis  $p_i, m_j, q_k$  na fórmula (1.1) sejam no final números reais; é conveniente pensar nelas como números complexos. De fato, a presença da prescrição  $+i\epsilon$  é já uma justificativa de que a perspectiva de variável complexa faz-se necessária.

No caso de números complexos, as integrais com respeito às variáveis  $\{q_k^\mu\}$  significam integrais de contorno no espaço  $\mathbb{C}^{4L}$ . A perspectiva de variável complexa é o primeiro passo para empregar amplamente uma das técnicas mais poderosas da análise complexa: a *continuação analítica*. No apêndice A explicam-se com mais detalhe os fundamentos desta técnica.

## 1.2 Rotação de Wick

Uma das primeiras aplicações da continuação analítica no cálculo de integrais de Feynman acontece no procedimento conhecido como *rotação de Wick*. Este procedimento é usado para qualquer diagrama e se faz necessário devido a que na integral (1.1) o denominador poderia cancelar-se quando  $r_j^2 = -m_j^2$  se não fosse pelo termo  $+i\epsilon$ ; em outras palavras, o integrando diverge nos polos dos propagadores. Apesar do termo  $+i\epsilon$  controlar estas divergências, não fica claro como esta prescrição deve ser aplicada para obter respostas sem ambigüidades. A rotação de Wick permite encontrar estas respostas calculando primeiro as integrais quando as energias externas  $p_{i,0}$  estão no eixo imaginário. As integrais para outros valores dos  $p_{i,0}$  poderão ser achadas por continuação analítica.

Para entender melhor a rotação de Wick, é conveniente usar a *parametrização de Feynman*,

$$\prod_{j=1}^N \frac{1}{A_j^{\nu_j}} = \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^N \nu_j\right)}{\prod_{j=1}^N \Gamma(\nu_j)} \left( \prod_{j=1}^N \int_0^1 dx_j x_j^{\nu_j-1} \right) \frac{\delta\left(1 - \sum_{j=1}^N x_j\right)}{\left[\sum_{j=1}^N x_j A_j\right]^{\sum_j \nu_j}}; \quad (1.3)$$

onde cada  $A_j$  representaria um propagador cujo expoente é  $\nu_j$ . Desta forma, pode se exprimir (1.1) como,

$$\mathcal{F}^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j) = \left( \prod_{k=1}^L \int \frac{d^4 q_k}{(2\pi)^4} \right) \left( \prod_{j=1}^N \int_0^1 dx_j \right) \frac{\Gamma(N) \delta\left(1 - \sum_{j=1}^N x_j\right) \mathcal{N}^{\{\mu_t\}}(p_i, q_l; m_j)}{\left[\sum_{j=1}^N x_j r_j^2 - \sum_{j=1}^N x_j m_j^2 + i\epsilon\right]^N}. \quad (1.4)$$

Agora, defina-se uma nova função  $\mathcal{G}^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j, \theta)$  onde todas as energias internas e externas estejam *rodadas*,  $p_{i,0} \rightarrow e^{i\theta} p_{i,0}$   $q_{i,0} \rightarrow e^{i\theta} q_{i,0}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j, \theta) &= \left( \prod_{k=1}^L \frac{e^{i\theta} \int dq_{k,0} \int d^3 \mathbf{q}_k}{(2\pi)^4} \right) \left( \prod_{j=1}^N \int_0^1 dx_j \right) \Gamma(N) \delta\left(1 - \sum_{j=1}^N x_j\right) \times \\ &\quad \frac{\mathcal{N}^{\{\mu_t\}}(e^{i\theta} p_{i,0}, \mathbf{p}_i, e^{i\theta} q_{l,0}, \mathbf{q}_l; m_j)}{\left[e^{2i\theta} \sum_{j=1}^N x_j r_{j,0}^2 - \sum_{j=1}^N x_j (|\mathbf{r}_j|^2 + m_j^2) + i\epsilon\right]^N}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Sobre esta função, no intervalo  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , se pode dizer:

1.  $\mathcal{G}^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j, 0) = \mathcal{F}^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j)$ , ou seja, a integral (1.1) é obtida para um dos possíveis valores de  $\theta$ .

2. Enquanto a integral em geral for convergente, a função  $\mathcal{G}^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j, \theta)$  é uma função analítica da variável  $\theta$  no intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  independentemente dos valores das outras variáveis. A única possibilidade para ela não ser analítica seria que o denominador se anulasse. Mas isto não é possível porque a parte imaginária do denominador é sempre definida positiva graças ao termo  $i\epsilon$ . Desta forma, a prescrição  $+i\epsilon$  faz possível uma continuação analítica com respeito à variável  $\theta$  no intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .
3. O caso  $\mathcal{G}^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j, \frac{\pi}{2})$  merece especial atenção. Enquanto no caso  $\theta = 0$  os produtos do tipo  $p_i \cdot p_j$  estão definidos segundo a métrica (pseudo-riemanniana, sem sinal definido) de Minkowski,

$$(p_1 \cdot p_2)_{\theta=0} = (p_1 \cdot p_2)_M = p_{i,0}p_{j,0} - \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j,$$

no caso  $\theta = \frac{\pi}{2}$  estes produtos estão definidos como,

$$(p_i \cdot p_j)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -(p_i \cdot p_j)_E = -(p_{i,0}p_{j,0} + \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j),$$

onde o subíndice  $E$  indica que se trata da métrica euclidiana. A grande vantagem de trabalhar com uma métrica riemanniana autêntica como a métrica euclidiana é que todos os produtos internos adquirem sinal definido, o qual facilita enormemente os cálculos subsequentes. Além disso, observe-se que se as energias  $p_{i,0}$  na continuação analítica fossem energias *físicas* (ou seja, se tivessem valores reais,  $p_{i,0} \in \mathbb{R}$ ), o caso  $\theta = \frac{\pi}{2}$  significaria que se está assumindo que os  $p_{i,0}$  são imaginários puros.

O item (3) merece ainda mais explicação. Assuma-se que os  $p_{i,0}$  na integral (1.1) são efetivamente imaginários puros ( $p_{i,0} = iP_{i,0}$ ,  $P_{i,0} \in \mathbb{R}$ ). Pode-se provar (através de um procedimento idêntico ao da seção 1.5) que existe uma transformação ortogonal seguida de uma translação, equivalente a uma mudança nas variáveis de integração  $q_{k,0} \rightarrow Q_{k,0}$ , que deixa a integral (1.1) como,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\{\mu_t\}}(P_{i,0}, \mathbf{p}_i, m_j) &= \left( \prod_{k=1}^L \frac{\int dQ_{k,0} \int d^3 \mathbf{q}_k}{(2\pi)^4} \right) \left( \prod_{j=1}^N \int_0^1 dx_j \right) \Gamma(N) \delta \left( 1 - \sum_{j=1}^N x_j \right) \frac{\mathcal{N}^{\{\mu_t\}}}{[\det \mathbf{A}]^{\frac{1}{2}}} \times \\ &\quad \left[ \sum_{j=1}^N Q_{k,0}^2 - \sum_{i=1}^E B_i(\xi, \chi, x) P_{i,0}^2 - \sum_{j=1}^N x_j (|\mathbf{r}_j|^2 + m_j^2) + i\epsilon \right]^{-N}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

A expressão (1.6) oferece outra forma de enxergar a rotação de Wick. Esta outra perspectiva aparece após uma nova mudança de variáveis para passar das variáveis  $Q_{k,0}$  à sua versão em coordenadas esféricas generalizadas,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\{\mu_t\}}(P_{i,0}, \mathbf{p}_i, m_j) &= \int_0^\infty dQ \int d\Omega_Q \left( \prod_{k=1}^L \frac{\int d^3 \mathbf{q}_k}{(2\pi)^4} \right) \left( \prod_{j=1}^N \int_0^1 dx_j \right) \Gamma(N) \delta \left( 1 - \sum_{j=1}^N x_j \right) \times \\ &\quad \frac{\mathcal{N}^{\{\mu_t\}}}{[\det \mathbf{A}]^{\frac{1}{2}}} \left[ Q^2 - \sum_{i=1}^E B_i P_{i,0}^2 - \sum_{j=1}^N x_j (|\mathbf{r}_j|^2 + m_j^2) + i\epsilon \right]^{-N}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Em tal caso, o denominador pode ser visto basicamente sob a forma  $[Q^2 - \Delta^2 + i\epsilon]^N$  e portanto só há polos quando  $Q = \pm(\Delta - i\epsilon)$ . Apesar de que as expressões (1.6) e (1.7) não contêm o fator  $e^{i\theta}$  nas energias internas como em (1.5), a variável  $\theta$  pode ser vista agora como um verdadeiro ângulo de rotação pelo qual se muda o caminho de integração da variável  $Q$ . Isto é ilustrado na figura 1.1. Graças ao termo  $i\epsilon$ , a região encerrada pelo caminho na figura 1.1 não contém polos. Desta forma, o caminho rodado  $1 \rightarrow 3$  é igualmente válido como caminho de integração enquanto o arco  $2 - 3$  é desprezível no limite em que seu raio é infinito. Quando  $\theta = \frac{\pi}{2}$  obtém-se um caso idêntico a  $\mathcal{G}^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j, \frac{\pi}{2})$  exceto por alguns fatores do tipo  $i^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

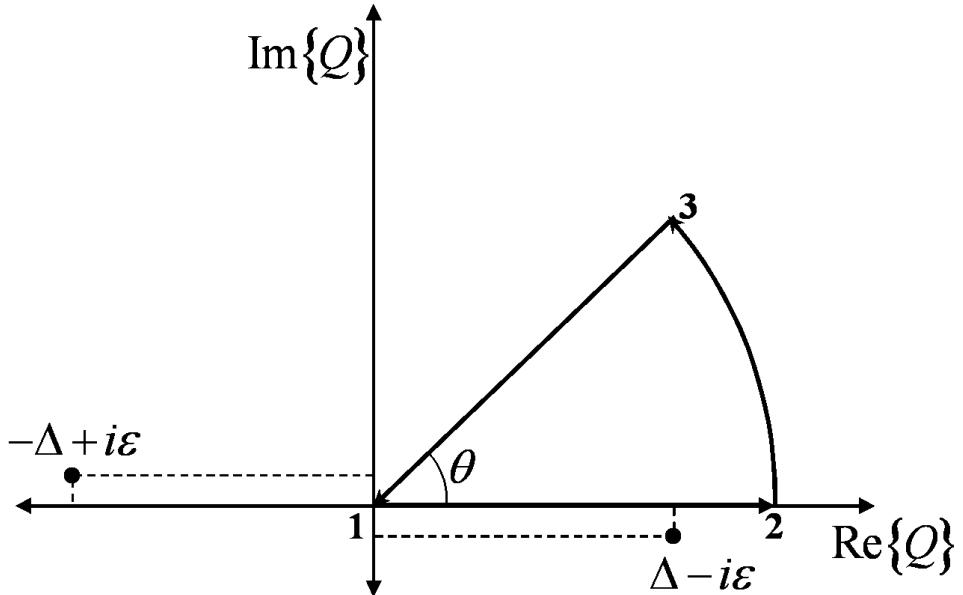


Figura 1.1: Ilustração da rotação de Wick como uma mudança no caminho de integração da variável  $Q$ .

Os resultados desta seção podem ser resumidos da seguinte forma. Em vez de tentar calcular a integral minkowskiana (1.1) de difícil manipulação, pode-se em câmbio trabalhar com a integral euclidiana,

$$\mathcal{F}_E^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j) = \left( \prod_{k=1}^L \int \frac{d^4 q_k}{i(2\pi)^4} \right) \left( \prod_{j=1}^N \frac{1}{[(r_j^2)_E + m_j^2]} \right) \mathcal{N}_E^{\{\mu_t\}}(p_i, q_l; m_j), \quad (1.8)$$

onde o termo  $+i\epsilon$  pode ser omitido dado que a ambigüidade no propagador já foi esclarecida\*. Porém, o numerador  $\mathcal{N}_E^{\{\mu_t\}}(p_i, q_l; m_j)$  precisa de uma explicação. Para que a rotação de Wick seja coerente, o numerador  $\mathcal{N}_E^{\{\mu_t\}}$  precisa conter as mudanças do fator  $e^{i\pi/2}$ . Estas se resumem nas seguintes regras básicas de transformação com respeito ao numerador não rodado (Minkowski),

$$(p_{i_2} \cdot p_{i_1})_M \longrightarrow -(p_{i_2} \cdot p_{i_1})_E; \quad (1.9a)$$

$$(\not{p})_M \longrightarrow -i(\not{p})_E; \quad (1.9b)$$

$$(\eta^{\mu\nu})_M \longrightarrow (\eta^{\mu\nu})_E. \quad (1.9c)$$

---

\*Isto é, no eixo imaginário o caminho de integração fica longe dos polos dos propagadores.

Desta maneira, fórmulas como  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$  ou  $(p)^2 = p^2$  permanecem intactas; assim como toda a álgebra das matrizes de Dirac. Uma vez que a integral (1.8) estiver resolvida, o único que se precisa fazer é usar as regras inversas e assim obter ,

$$\mathcal{F}^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j) = (-1)^{-N} \left[ \mathcal{F}_E^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j) \right]_{E \rightarrow M}. \quad (1.10)$$

A justificação deste método baseia-se na continuação analítica. Contudo, a análise do item (2) assumiu que as integrais convergiam. Sabe-se que este não é sempre o caso e faz-se necessária uma forma de sobrelevar esta dificuldade.

### 1.3 Regularização dimensional

Como já foi dito, as integrais de Feynman precisam ser manipuladas controladamente apesar de que algumas delas são de fato divergentes. O artifício matemático que consegue este controle conhece-se como *regularização*. A regularização consiste basicamente em utilizar um ou vários parâmetros *regularizadores* adicionais na integral para que a divergência apareça como um limite singular em um determinado valor desses parâmetros. Entre os vários métodos de regularização (*cut-off* direto, Pauli-Villars, etc.) existe um que é freqüentemente preferido na literatura atual conhecido como *regularização dimensional* (RD) [38]. A razão desta preferência é que a RD conserva extensamente as simetrias do problema inicial ao longo de todo o processo de manipulação matemática, exceto alguns casos muito especiais onde podem acontecer *anomalias* [20]. A RD é especialmente preferida devido a que preserva as simetrias de boa parte das teorias de Gauge, sendo este tipo de simetria as que parecem subjazer à dinâmica interna das partículas fundamentais.

A RD consiste na continuação analítica do valor da dimensionalidade das integrais de Feynman para valores complexos. Sem precisar explicar o que poderia significar um espaço com dimensão complexa, a RD aproveita certas identidades formais que expressam uma integral específica para um número arbitrário de dimensões  $D$ . No caso de dimensões inteiras positivas ( $D \in \mathbb{Z}^+$ ), essas identidades coincidem com as expressões específicas da teoria nessa dimensão. A vantagem consiste em que essas identidades podem extender-se a um valor complexo onde as divergências aparecem como polos simples em valores inteiros positivos de  $D$ . Dessa forma, as divergências podem ser controladas mediante uma expansão em série de Laurent ao redor do polo.

Existem várias maneiras de enxergar a RD. Para ilustrá-las, tome-se como exemplo a integral euclidiana,

$$j(m^2, D) = \int d^D k (k^2 + m^2)^{-1}, \quad (1.11)$$

a qual é evidentemente divergente quando  $D \geq 2$ . Para analizar a dependência analítica de  $j(m^2, D)$  com respeito a  $D$ , insira-se a unidade dentro da integral de (1.11) mediante a representação,

$$1 = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^D \left[ \frac{\partial}{\partial k_m} k_m \right], \quad (1.12)$$

e, ao integrar por partes<sup>†</sup>, observa-se que

$$\begin{aligned}
\int d^D k (k^2 + m^2)^{-1} &= \frac{1}{D} \sum_{m=1}^D \int d^D k \left[ \frac{\partial}{\partial k_m} k_m \right] (k^2 + m^2)^{-1} \\
&= \frac{2}{D} \sum_{m=1}^D \int d^D k k_m^2 (k^2 + m^2)^{-2} \\
&= \frac{2}{D} \int d^D k k^2 (k^2 + m^2)^{-2} \\
&= \frac{2}{D} \left[ \int d^D k (k^2 + m^2)^{-1} - m^2 \int d^D k (k^2 + m^2)^{-2} \right].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$j(m^2, D) = -m^2 \left( \frac{2}{D-2} \right) \int d^D k (k^2 + m^2)^{-2}. \quad (1.13)$$

Ao repetir o procedimento,

$$\begin{aligned}
\int d^D k (k^2 + m^2)^{-2} &= \int d^D k \left[ \frac{\partial}{\partial k_m} k_m \right] (k^2 + m^2)^{-2} \\
&= \frac{4}{D} \sum_{m=1}^D \int d^D k k_m^2 (k^2 + m^2)^{-2} \\
&= \frac{4}{D} \left[ \int d^D k (k^2 + m^2)^{-2} - m^2 \int d^D k (k^2 + m^2)^{-3} \right],
\end{aligned}$$

obtém-se que,

$$\int d^D k (k^2 + m^2)^{-2} = -m^2 \left( \frac{4}{D-4} \right) \int d^D k (k^2 + m^2)^{-3}. \quad (1.14)$$

Juntando (1.13) e (1.14) conclui-se que,

$$j(m^2, D) = m^4 \left[ \frac{8}{(D-2)(D-4)} \right] \int d^D k (k^2 + m^2)^{-3}. \quad (1.15)$$

Dado que a integral na direita de (1.15) é finita para  $D < 6$ , encontra-se uma estrutura de polos simples para  $D = 2$  e  $D = 4$ .

Por outro lado, a estrutura de polos simples em (1.11) pode ser vista usando coordenadas esféricas generalizadas e outras identidades. Dado que,

$$\begin{aligned}
\int d^D k (k^2 + m^2)^{-s} &= \int d\Omega_{D-1} \int_0^\infty dk k^{D-1} (k^2 + m^2)^{-s} \\
&= \frac{D\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2}+1)} (m^2)^{\frac{D}{2}-s} \int_0^\infty d\left(\frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m}\right)^{D-1} \left[\left(\frac{k}{m}\right)^2 + 1\right]^{-s} \\
&= \frac{D\pi^{D/2}}{2\Gamma(\frac{D}{2}+1)} (m^2)^{\frac{D}{2}-s} \int_0^\infty dy y^{\frac{D}{2}-1} [y+1]^{-s};
\end{aligned}$$

onde  $d\Omega_{D-1}$  é o elemento de ângulo hiper-esférico. Usando a representação integral (C.3), obtém-se,

$$\int d^D k (k^2 + m^2)^{-s} = \pi^{D/2} (m^2)^{\frac{D}{2}-s} \frac{\Gamma(s-\frac{D}{2})}{\Gamma(s)}; \quad (1.16)$$

---

<sup>†</sup>Para que isto seja válido, assume-se provisoriamente que todas as integrais envolvidas são convergentes, ou seja, que se trabalha em uma região adequada do valor de  $D$ .

em particular,

$$j(m^2, D) = \pi^{D/2} (m^2)^{\frac{D}{2}-1} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right). \quad (1.17)$$

Da mesma forma que (1.15), a equação (1.17) mostra de novo uma estrutura de polos simples para valores pares de  $D$ . Mediante uma extensão deste argumento, pode-se mostrar que para o caso geral de  $L$  loops a estrutura de polos com respeito à dimensão continua se apresentando [21]. Desde o ponto de vista da regularização dimensional, desaparecem as dificuldades encontradas na seção anterior para completar a rotação de Wick em integrais divergentes. Mudando a integral para o caso de dimensão geral, a continuação analítica envolvida na rotação de Wick será válida para valores de  $D$  onde não houver divergências. Todo comportamento singular restringe-se a certos valores isolados de  $D$ .

## 1.4 Parametrização de Schwinger e integrais com estrutura tensorial

No contexto geral da RD e de integrais euclidianas, a parametrização de Feynman de (1.4) não é a técnica mais adequada [14, 20]. Nestes casos, faz-se uso de outra parametrização (associada a J. Schwinger) que aproveita a possibilidade de resolver integrais gaussianas em dimensões genéricas. Antes de continuar, é preferível fazer uma generalização dos expoentes dos propagadores em (1.8) além da dimensão  $D$  generalizada,

$$\mathcal{F}_E^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j; \nu_j, D) = \left( \prod_{k=1}^L \frac{\int d^D q_k}{(2\pi)^D} \right) \left( \prod_{j=1}^N \frac{1}{[r_j^2 + m_j^2]^{\nu_j}} \right) \mathcal{N}^{\{\mu_t\}}(p_i, q_l; m_j). \quad (1.18)$$

A justificativa desta generalização será apreciada mais na frente. A parametrização de Schwinger começa representando cada propagador (denotado aqui com a variável  $A$ ) como,

$$\frac{1}{A^\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-xA} dx, \quad \text{Re}\{\nu\} > 0, \quad (1.19)$$

para assim exprimir (1.18) como,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_E^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j; \nu_j, D) &= \left( \prod_{k=1}^L \frac{\int d^D q_k}{(2\pi)^D} \right) \int D\vec{x} \mathcal{N}^{\{\mu_t\}}(p_i, q_l; m_j) \times \\ &\exp \left\{ - \sum_{j=1}^N x_j (r_j^2 + m_j^2)^{\nu_j-1} \right\}; \end{aligned} \quad (1.20)$$

onde o símbolo  $\int D\vec{x}$  é uma abreviação,

$$\int D\vec{x} \equiv \prod_{j=1}^N \int_0^\infty dx_j \frac{x_j^{\nu_j-1}}{\Gamma(\nu_j)}. \quad (1.21)$$

Defina-se  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  como matrizes  $E \times 1$  e  $L \times 1$ <sup>‡</sup> respectivamente cujas entradas  $(\mathbf{p})_i$  e  $(\mathbf{q})_j$  são os 4-vetores  $p_i$  e  $q_j$  respectivamente. Sabendo que segundo (1.2) os  $r_j$  estão

---

<sup>‡</sup>Os números  $E$  e  $S$  estão definidos na seção 1.1.

definidos de acordo com cada vértice no diagrama, pode ver-se que a integral (1.20) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_E^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j; \nu_j, D) &= \left( \prod_{k=1}^L \frac{\int d^D q_k}{(2\pi)^D} \right) \int D\vec{x} \mathcal{N}^{\{\mu_t\}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; m_j) \times \\ &\quad \exp \left\{ -\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q} + 2\mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{q} - \mathbf{p}^T \mathbf{C} \mathbf{p} - \sum_{j=1}^N x_j m_j^2 \right\}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

onde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  são matrizes de ordem  $L \times L$ ,  $E \times L$  e  $E \times E$  respectivamente. Devido às matrizes  $\xi_{jk}$  e  $\chi_{ji}$  em (1.2), cada uma das entradas destas matrizes tem a forma geral  $\sum_{j=1}^N \alpha_j x_j$  com  $\alpha_j = \pm 1, 0$ . As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  são simétricas e não singulares, de fato constituem formas quadráticas definidas positivas. O argumento da exponencial em (1.22) pode ser simplificado através de um método análogo a completar o quadrado que aproveita a invariança translacional do denominador. Usando a identidade,

$$-\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q} + 2\mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{q} = -\left(\mathbf{q} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{p}\right)^T \mathbf{A} \left(\mathbf{q} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{p}\right) + \mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{p}, \quad (1.23)$$

e após uma translação nas variáveis de integração  $\mathbf{q}$ , obtém-se,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_E^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j; \nu_j, D) &= \left( \prod_{k=1}^L \frac{\int d^D q_k}{(2\pi)^D} \right) \int D\vec{x} \mathcal{N}^{\{\mu_t\}}(\mathbf{p}, q_k + \tilde{p}_k; m_j) \times \\ &\quad \exp \left\{ -\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q} + \mathbf{p}^T \mathbf{D} \mathbf{p} - \sum_{j=1}^N x_j m_j^2 \right\}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

onde  $\mathbf{D} = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T - \mathbf{C}$  e  $\tilde{p}_k = \left(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{p}\right)_k$ . Após uma transformação ortogonal,  $\mathbf{q} = \mathbf{O} \mathbf{q}'$ , que diagonaliza o primeiro termo da exponencial<sup>§</sup> e uma nova mudança de variáveis,  $Q_k = \lambda_k^{1/2} q'_k$ , chega-se finalmente a,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_E^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j; \nu_j, D) &= \left( \prod_{k=1}^L \frac{\int d^D Q_k}{(2\pi)^D} \right) \int D\vec{x} \mathcal{N}^{\{\mu_t\}} \left( \mathbf{p}, \frac{(\mathbf{O} \mathbf{Q})_k + \tilde{p}_k}{\lambda_k^{1/2}}; m_j \right) \times \\ &\quad \frac{1}{[\det \mathbf{A}]^{D/2}} \exp \left\{ -\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} + \mathbf{p}^T \mathbf{D} \mathbf{p} - \sum_{j=1}^N x_j m_j^2 \right\}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Se não fosse pelo numerador, a integral respeito aos  $Q_k$  já estaria resolvida pela fórmula de uma integral gaussiana generalizada,

$$\left( \prod_{k=1}^L \frac{\int d^D Q_k}{(2\pi)^D} \right) e^{-\mathbf{q}^T \mathbf{q}} = \left( \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \right)^L. \quad (1.26)$$

Afortunadamente, a presença do numerador em uma integral de Feynman não é um grande problema dado que, independentemente de sua estrutura tensorial, sempre existe uma forma de reduzir a integral a uma soma de integrais escalares acompanhadas de coeficientes tensoriais extraídos da métrica e os momentos externos

---

<sup>§</sup> $(\mathbf{q} \mathbf{O})^T \mathbf{A} \mathbf{O} \mathbf{q} = \mathbf{q}'^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{q}'$  com  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_L)$  a matriz diagonal de valores próprios.

[34, 35]. Estas novas integrais escalares costumam ter outros expoentes nos propagadores (diferentes de  $\nu_j = 1$ ) e a dimensão delas também pode estar mudada (aumentada em algum número par). Para o caso de um só loop, a redução das integrais tensoriais a integrais escalares pode ser feita diretamente através da fórmula (1.25), pois nesse caso  $\mathbf{A}$  será simplesmente um número (matriz  $1 \times 1$ ). Em geral, a estrutura do denominador das novas integrais escalares não muda, e é por isso que é tão conveniente tentar resolver a versão escalar ( $\mathcal{N}^{\{\mu_t\}} = 1$ ) da integral na equação (1.18) com a dimensão e os expoentes generalizados. Esta integral, após a parametrização de Schwinger e a integração dos loops, está definida como,

$$\mathcal{F}_E^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j; \nu_j, D) = \int D\vec{x} \frac{1}{[(4\pi)^L \det \mathbf{A}]^{D/2}} \exp \left\{ \mathbf{p}^T \mathbf{D} \mathbf{p} - \sum_{j=1}^N x_j m_j^2 \right\}. \quad (1.27)$$

Em resumo, o problema foi reduzido a calcular integrais com relação aos parâmetros de Schwinger  $x_j$ . É nesse momento em que a técnica de integração em dimensão negativa, o tema central deste trabalho, resulta útil.

## 1.5 Método de integração em dimensão negativa

A técnica de integração em dimensão negativa (NDIM) deve o seu nome ao fato que, dentro do contexto da regularização dimensional, efetua uma continuação analítica para valores negativos do parâmetro  $D$ . Nesse sentido, o conceito de dimensão negativa não é particularmente mais surpreendente que o conceito de dimensão complexa envolvido na regularização dimensional. Em ambos os casos não se está definindo um autêntico espaço geométrico com dimensão  $D$  **exótica**, senão que são expressões formais que exprimem as integrais em uma dimensão arbitrária  $D$ . Analiticamente estas expressões podem fazer sentido inclusive para valores negativos de  $D$ ; embora não se tenha um significado geométrico sobre isso. O NDIM foi originalmente concebido na consideração da seguinte integral gaussiana,

$$\int d^D q e^{-\lambda q^2} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{D}{2}}. \quad (1.28)$$

Se a exponencial fosse expandida segundo a usual série de McLaurin, e se invertesse a ordem da somatória com a integral, se teria uma identidade do tipo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{\Gamma(n+1)} \int d^D q (q^2)^n = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{D}{2}}; \quad (1.29)$$

o que poderia significar que, ao comparar os expoentes de  $\lambda$  em ambos lados da igualdade,

$$\int d^D q (q^2)^n = (-1)^n \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(n+1) \delta_{n+\frac{D}{2}, 0}. \quad (1.30)$$

Dado que expansão da exponencial só cobre valores de  $n$  positivos, a dedução da identidade (1.30) só faria sentido se a dimensão  $D$  for negativa; daí a origem do nome da técnica.

A dedução da identidade (1.30) contém em essência o NDIM geral [2]. Para resolver uma integral escalar ( $\mathcal{N}^{\{\mu_t\}} = 1$ ) geral como (1.18) começa-se com uma integral gaussiana do tipo,

$$\mathcal{I}_G = \left( \prod_{k=1}^L \frac{\int d^D q_k}{(2\pi)^D} \right) \exp \left[ - \sum_{j=1}^N x_j [r_j^2 + m_j^2] \right], \quad (1.31)$$

onde  $r_j$  está definido segundo (1.2). Através do método de completar o quadrado, explicado nas equações (1.22-1.26), encontra-se que,

$$\mathcal{I}_G = \frac{1}{[(4\pi)^L \det \mathbf{A}]^{D/2}} \exp \left\{ \mathbf{p}^T \mathbf{D} \mathbf{p} - \sum_{j=1}^N x_j m_j^2 \right\}. \quad (1.32)$$

Por outro lado, expandindo a exponencial em (1.31),

$$\mathcal{I}_G = \left( \prod_{k=1}^L \frac{\int d^D q_k}{(2\pi)^D} \right) \sum_{a_1, a_2, \dots, a_N} \left[ \prod_{j=1}^N \frac{(-1)^{a_j}}{\Gamma(a_j + 1)} (r_j^2 + m_j^2)^{a_j} x_j^{a_j} \right], \quad (1.33)$$

e invertendo a ordem entre a integral e a somatória, obtém-se,

$$\mathcal{I}_G = \sum_{a_1, a_2, \dots, a_N} \left( \prod_{j=1}^N \frac{(-1)^{a_j}}{\Gamma(a_j + 1)} x_j^{a_j} \right) \mathcal{F}_E^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j; \nu_j = -a_j, D). \quad (1.34)$$

Através da expansão em série da função exponencial e certas expansões multinomiais <sup>¶</sup>, existe sempre uma maneira de expandir (1.32) como uma série múltipla respeito às variáveis  $x_j$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_G &= \frac{1}{[(4\pi)^L \det \mathbf{A}]^{D/2}} \exp \left\{ \mathbf{p}^T \mathbf{D} \mathbf{p} - \sum_{j=1}^N x_j m_j^2 \right\} \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_s, \dots, n_S} \frac{F(n_s, D, L)}{\left[ \prod_{\sigma=1}^S \Gamma(n_\sigma + 1) \right]} \left( \prod_{r=1}^R (k_r^2)^{\alpha_r} \right) \left( \prod_{j=1}^N (m_j^2)^{\beta_j} \right) \times \\ &\quad \left( \prod_{j=1}^N x_j^{\theta_j} \right) \tilde{\Delta}(n_s, D), \end{aligned} \quad (1.35)$$

onde as  $\alpha_r(n_s)$ ,  $\beta_j(n_s)$  e  $\theta_j(n_s)$  são funções lineares dos índices  $n_s$ ; os  $k_r(p_i)$  são combinações lineares adequadas dos momentos externos; e  $\tilde{\Delta}(n_s, D)$  representa um conjunto de vínculos lineares relacionados com as expansões multinomiais que restringem a independência dos índices  $n_s$ . Comparando os expoentes das  $x_j$  na expansão de (1.34) com aqueles de (1.35), conclui-se finalmente que a solução geral da integral de Feynman (1.18) escalar é,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_E^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j; \nu_j, D) &= \sum_{n_1, \dots, n_s, \dots, n_S} \frac{F(n_s, D, L)}{\left[ \prod_{\sigma=1}^S \Gamma(n_\sigma + 1) \right]} \left( \prod_{r=1}^R (k_r^2)^{\alpha_r} \right) \left( \prod_{j=1}^N (m_j^2)^{\beta_j} \right) \times \\ &\quad \left( \prod_{j=1}^N (-1)^{\nu_j} \Gamma(1 - \nu_j) \delta_{\theta_j + \nu_j, 0} \right) \tilde{\Delta}(n_s, D). \end{aligned} \quad (1.36)$$

---

<sup>¶</sup>Veja-se a equação (B.8).

Dado que existem vínculos lineares nos índices  $n_s$  presentes em  $\tilde{\Delta}(n_s, D)$  e  $\delta_{\theta_j+\nu_j,0}$ , o número de índices da somatória é menor do que o original  $S$ . Em geral, a expansão (1.36) poderá ser expressa como uma série hipergeométrica generalizada de uma ou várias variáveis. Este resultado do NDIM é compartilhado com o método de integração por Mellin-Barnes, o qual permite uma fácil comparação entre os dois métodos [12]. Espera-se que apareçam diversas possíveis séries hipergeométricas, segundo os índices  $n_s$  que se deixarem independentes após aplicar os vínculos. As diferentes séries hipergeométricas terão possivelmente regiões de convergência distintas, que correspondem a regiões cinemáticas distintas no espaço de momentos externos  $\{p_i\}$  e as massas  $\{m_j\}$ .

Se as equações (1.27) e (1.35) são comparadas atentamente, percebe-se que poderíamos afirmar que,

$$\mathcal{F}_E^{\{\mu_t\}}(p_i, m_j; \nu_j, D) = \sum_{n_1, \dots, n_s, \dots, n_S} \frac{F(n_s, D, L)}{\left[ \prod_{\sigma=1}^S \Gamma(n_\sigma + 1) \right]} \left( \prod_{r=1}^R (k_r^2)^{\alpha_r} \right) \left( \prod_{j=1}^N (m_j^2)^{\beta_j} \right) \times \\ \left( \prod_{j=1}^N \int_0^\infty dx_j \frac{x_j^{\nu_j-1}}{\Gamma(\nu_j)} \right) \tilde{\Delta}(n_s, D). \quad (1.37)$$

Ao observar (1.37) e (1.36), conclui-se que, após a parametrização de Schwinger (1.20), a solução da integral gaussiana múltipla (1.27), e a expansão em série múltipla (1.35), o NDIM poderia resumir-se na equivalência formal,

$$\int_0^\infty dx x^{\nu+\theta-1} \equiv (-1)^\nu \Gamma(\nu) \Gamma(1-\nu) \delta_{\theta+\nu,0}. \quad (1.38)$$

Contudo, ficam algumas dúvidas razoáveis com respeito à dedução anterior. Embora seja completamente possível que  $D$  tome valores negativos na regularização dimensional, em um sentido rigoroso só se está interessado no caso em que  $D \rightarrow 4$ . Nesse caso não há como fazer sentido ao resultado (1.30) enquanto  $n$  for positivo. A situação se complica ainda mais quando se lembra que, no caso de integrais divergentes,  $D$  toma um valor complexo na vizinhança de  $D = 4$  para que a integral possa ser expandida como uma série de Laurent. Neste último caso,  $n$  na fórmula (1.30) não poderia ser nem sequer inteiro. Uma crítica semelhante vale para o resultado geral (1.36) pois na comparação de expoentes das  $x_j^{a_j}$  apareceria de novo o dilema dos possíveis valores das  $a_j$  na expansão em série da exponencial. Baseados nestas dúvidas, I. Schmidt e I. Gonzalez encontraram que a autêntica fundamentação matemática do NDIM residia na área da matemática conhecida como *cálculo fracionário* [15]. No apêndice **B** explicam-se melhor os conceitos pelos quais a anterior manipulação algébrica das expansões em série está bem fundamentada.

# Capítulo 2

---

## Integrais escalares em 1 e 2 loops

O algoritmo descrito no capítulo anterior baseou-se em expressões de integrais de Feynman assaz gerais que dificultam a compreensão do seu conteúdo exato. Neste capítulo oferece-se uma explicação mais concreta do NDIM por meio de alguns exemplos de integrais escalares que surgiriam em uma teoria do tipo  $\phi^3 \oplus \phi^4$ . Esclarece-se que o interesse físico dessas integrais transcende o alcance de um possível modelo físico com campos escalares do tipo  $\phi^3 \oplus \phi^4$ . Dada a possibilidade de reduzir integrais tensoriais a escalares [34], alguns dos resultados deste capítulo poderão ser usados no capítulo 3 onde será analizada uma teoria com integrais tensoriais: a eletrodinâmica quântica (QED). Outra extensão da aplicabilidade dos resultados deste capítulo reside em que algumas das integrais escalares resolvidas podem ser importantes no cálculo de outras integrais escalares mais complexas. Os exemplos deste capítulo começam desde os casos mais simples, aumentando progressivamente em complexidade.

### 2.1 Diagrama tipo *bolha*

Um dos exemplos mais simples possíveis de integral de Feynman é o que surge do diagrama ilustrado na figura 2.1. Este diagrama corresponde a correções radiativas de primeira ordem do propagador escalar. Sem levar a conta fatores de proporcionalidade, a integral euclidiana envolvida com este diagrama é,

$$\mathcal{F}_{\text{bub.}}(p, m_i; \nu_i, D) = \int \frac{d^D q (2\pi)^{-D}}{[q^2 + m_1^2]^{\nu_1} [(q - p)^2 + m_2^2]^{\nu_2}}, \quad (2.1)$$

onde se está supondo o caso mais geral possível de duas linhas internas massivas e com massas diferentes. A parametrização de Schwinger correspondente é,

$$\mathcal{F}_{\text{bub.}} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^D} \left( \prod_{j=1}^2 \frac{\int_0^\infty dx_j x_j^{\nu_j-1}}{\Gamma(\nu_j)} \right) e^{-x_1 q^2 - x_2 (q-p)^2 - x_1 m_1^2 - x_2 m_2^2}, \quad (2.2)$$

que, após o procedimento descrito pelas equações (1.22)-(1.26) para resolver integrais gaussianas, resulta sendo\*,

$$\mathcal{F}_{\text{bub.}} = \int D\vec{x} \frac{\exp \left\{ -\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} p^2 - x_1 m_1^2 - x_2 m_2^2 \right\}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} (x_1 + x_2)^{\frac{D}{2}}}. \quad (2.3)$$

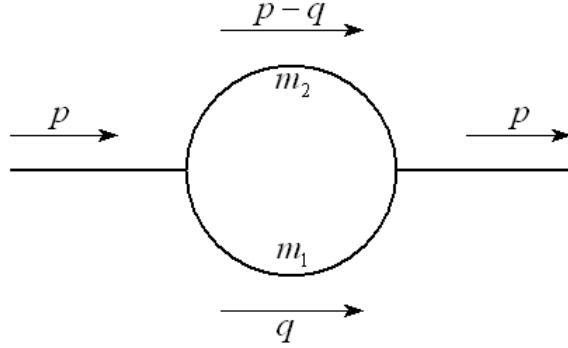


Figura 2.1: Diagrama tipo *bolha*.

Após a expansão em múltiplas séries de potências das exponenciais obtém-se,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{bub.}} &= (4\pi)^{-\frac{D}{2}} \int D\vec{x} \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{(-1)^{n_1+n_2+n_3} x_1^{n_1+n_2} x_2^{n_1+n_3} (x_1 + x_2)^{-n_1-\frac{D}{2}}}{\Gamma(n_1+1) \Gamma(n_2+1) \Gamma(n_3+1)} \times \\ &\quad (p^2)^{n_1} (m_1^2)^{n_2} (m_2^2)^{n_3}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

que expandida segundo a fórmula de expansão binomial em multiregiões resulta em,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{bub.}} &= (4\pi)^{-\frac{D}{2}} \int D\vec{x} \sum_{n_1, \dots, n_5} \frac{(-1)^{n_1+n_2+n_3} \Gamma(1-n_1-\frac{D}{2}) x_1^{n_1+n_2+n_4} x_2^{n_1+n_3+n_5}}{\Gamma(n_1+1) \dots \Gamma(n_5+1)} \times \\ &\quad (p^2)^{n_1} (m_1^2)^{n_2} (m_2^2)^{n_3} \delta_{n_1+n_4+n_5+\frac{D}{2}, 0}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

A equação (2.5) é um caso particular da fórmula (1.35), onde podem identificar-se  $\theta_1(n_s) = n_1 + n_2 + n_4$  e  $\theta_2(n_s) = n_1 + n_3 + n_5$ . Pelo NDIM, resumido na identidade (1.38), as integrais com respeito aos parâmetros de Schwinger podem ser feitas e assim surge a solução,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{bub.}} &= (4\pi)^{-\frac{D}{2}} \sum_{n_1, \dots, n_5} (-1)^{n_1+n_2+n_3+\nu_1+\nu_2} \frac{\Gamma(1-\nu_1) \Gamma(1-\nu_2) \Gamma(1-n_1-\frac{D}{2})}{\Gamma(n_1+1) \dots \Gamma(n_5+1)} \times \\ &\quad (p^2)^{n_1} (m_1^2)^{n_2} (m_2^2)^{n_3} \Delta(n_s, D), \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde  $\Delta(n_s, D)$  significa o conjunto de vínculos lineares,

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_4 &= -\nu_1 = \theta_1(n_s), \\ n_1 + n_3 + n_5 &= -\nu_2 = \theta_2(n_s), \\ n_1 + n_4 + n_5 &= -\frac{D}{2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

---

\*Lembre-se a abreviação (1.21).

Dado que segundo (2.7) ficam dois índices somatórios  $n_s$  independentes em (2.6), a multiplicidade de opções para escolher dois índices entre os cinco seria em princípio:  $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$ . Porém, nem todos estes pares de índices são independentes entre si (pois  $n_2 - n_5 = \frac{D}{2} - \nu_1$  e  $n_3 - n_4 = \frac{D}{2} - \nu_2$ ), e portanto só existem oito opções diferentes. A dedução da primeira solução será explicada com detalhe e as outras só serão apresentadas.

Seja a primeira solução à somatória de (2.6) segundo os índices  $n_1$  e  $n_2$ . Neste caso a solução do sistema linear de equações (2.7) é,

$$\begin{aligned} n_3 &= \frac{D}{2} - \nu_2 - \nu_1 - n_1 - n_2; \\ n_4 &= -\nu_1 - n_1 - n_2; \\ n_5 &= \nu_1 - \frac{D}{2} + n_2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (2.6) obtém-se,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1, n_2]} &= (-4\pi)^{-\frac{D}{2}} (m_2^2)^{\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2} \sum_{n_1, n_2} \frac{\Gamma(1-\nu_1)\Gamma(1-\nu_2)\Gamma(1-n_1-\frac{D}{2})}{\Gamma(1+\sigma-n_1-n_2)\Gamma(1-\nu_1-n_1-n_2)\Gamma(1+\nu_1-\frac{D}{2}+n_2)} \times \\ &\quad \frac{(p^2/m_2^2)^{n_1}}{\Gamma(n_1+1)} \frac{(m_1^2/m_2^2)^{n_2}}{\Gamma(n_2+1)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $\sigma = \frac{D}{2} - \nu_2 - \nu_1$ . Multiplicando e dividindo por termos que envolvem funções gamma, e comparando com (C.4), completam-se quatro símbolos de Pochhammer na somatória. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1, n_2]} &= (-4\pi)^{-\frac{D}{2}} (m_2^2)^{\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2} \frac{\Gamma(1-\frac{D}{2})\Gamma(1-\nu_2)}{\Gamma(1+\sigma)\Gamma(1+\nu_1-\frac{D}{2})} \times \\ &\quad \sum_{n_1, n_2} \frac{(1-\nu_1-n_1-n_2)_{n_1+n_2}(1+\sigma-n_1-n_2)_{n_1+n_2}}{(1-\frac{D}{2}-n_1)_{n_1}(1+\nu_1-\frac{D}{2})_{n_2}} \frac{(p^2/m_2^2)^{n_1}}{\Gamma(n_1+1)} \frac{(m_1^2/m_2^2)^{n_2}}{\Gamma(n_2+1)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Usando a identidade (C.8), tem-se,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1, n_2]} &= (-4\pi)^{-\frac{D}{2}} (m_2^2)^{\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2} \frac{(1+\nu_1-\frac{D}{2})_\sigma}{(1-\frac{D}{2})_{\frac{D}{2}+\sigma}} \times \\ &\quad \sum_{n_1, n_2} \frac{(\nu_1)_{n_1+n_2} (\nu_2+\nu_1-\frac{D}{2})_{n_1+n_2}}{(\frac{D}{2})_{n_1} (1+\nu_1-\frac{D}{2})_{n_2}} \frac{(-p^2/m_2^2)^{n_1}}{\Gamma(n_1+1)} \frac{(m_1^2/m_2^2)^{n_2}}{\Gamma(n_2+1)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

que ao ser comparado com (C.15) acaba sendo,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1, n_2]} &= (4\pi)^{-\frac{D}{2}} (m_2^2)^{\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2} \frac{(\nu_2)_\sigma}{(-\sigma)_{\frac{D}{2}+\sigma}} \times \\ &\quad F_4(\nu_1, \nu_2 + \nu_1 - \frac{D}{2}; \frac{D}{2}, 1 + \nu_1 - \frac{D}{2}; -p^2/m_2^2, m_1^2/m_2^2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

De uma forma similar, calculam-se as outras sete soluções. As oito soluções estão expostas na tabela 2.1, elas possuem a forma geral,

$$\mathcal{F}_{\text{bub.}}(p, m_i; \nu_i, D)_{[m, n]} = (4\pi)^{-\frac{D}{2}} G F_4(\alpha, \alpha'; \beta, \gamma; x, y). \quad (2.13)$$

Observa-se uma grande similaridade entre os pares de soluções  $\mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1, n_2]}$  e  $\mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1, n_3]}$ , o par  $\mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1, n_4]}$  e  $\mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1, n_5]}$ ; e o par  $\mathcal{F}_{\text{bub.}[n_2, n_4]}$  e  $\mathcal{F}_{\text{bub.}[n_3, n_5]}$ . A similaridade resume-se

em que uma solução do par é equivalente à outra mas com a permutação  $1 \leftrightarrow 2$ . A solução  $\mathcal{F}_{\text{bub.}[n_4, n_5]}$  merece um comentário a mais. O termo  $G$  dela contém no denominador um fator  $\Gamma(1 - \frac{D}{2})$  que não pode ser compensado com outro no numerador para assim formar um símbolo de Pochhammer. Esse termo faz que, independentemente do valor de  $D$ , no final o coeficiente  $G$  tenda sempre a anular-se. Desta forma, essa solução não deve ser considerada [6].

A função hipergeométrica de Appell tem uma região de convergência dada por (C.16) e depende dos seus argumentos  $x$  e  $y$ . Na tabela 2.1 evidencia-se que estes argumentos, ao serem comparados com a região de convergência, definem três regiões cinemáticas diferentes das variáveis  $p^2$ ,  $m_1^2$  e  $m_2^2$ . Contudo, algumas das soluções contêm a mesma região cinemática. Ao serem comparados os resultados pelo NDIM com os de outros métodos [12, 13], conclui-se que nestes casos *somam-se todos os resultados linearmente independentes correspondentes à mesma região cinemática*. Desta forma, o resultado final do diagrama tipo bolha é, segundo as três regiões cinemáticas,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\text{bub. } I} &= \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_2, n_3]} + \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_2, n_4]} + \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_3, n_5]}, \quad \left| \frac{m_1^2}{p^2} \right|^{\frac{1}{2}} + \left| \frac{m_2^2}{p^2} \right|^{\frac{1}{2}} < 1; \\ \mathcal{F}_{\text{bub. } II} &= \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1, n_2]} + \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1, n_5]}, \quad \left| \frac{p^2}{m_1^2} \right|^{\frac{1}{2}} + \left| \frac{m_2^2}{m_1^2} \right|^{\frac{1}{2}} < 1; \\ \mathcal{F}_{\text{bub. } III} &= \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1, n_3]} + \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1, n_4]}, \quad \left| \frac{p^2}{m_2^2} \right|^{\frac{1}{2}} + \left| \frac{m_2^2}{m_2^2} \right|^{\frac{1}{2}} < 1.\end{aligned}\tag{2.14}$$

A origem dessas regiões cinemáticas reside em um fenômeno conhecido como *rampificação* na continuação analítica e é explicada no apêndice A.

Existem vários casos particulares da integral (2.1) que são interessantes em si mesmos. Através do NDIM, estes resultados particulares podem ser extraídos de duas formas diferentes. Por um lado, pode ser a partir de uma integral mais particular que (2.1) e então aplica-se todo o procedimento. Por outro lado, podem ser usados os resultados adequados da tabela 2.1 restringindo-os ao caso particular. Aproveitando a generalidade da integral inicial, se tentará usar esta segunda via.

Em primeiro lugar, suponha-se que as duas massas são iguais ( $m_1 = m_2 = m$ ). Nesse caso, apresentam-se duas formas de reduzir a função de Appel  $F_4$  explicadas nas fórmulas (C.18) e (C.19). A primeira aplica-se às soluções desde  $\mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1, n_2]}$  até  $\mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1, n_5]}$ , e a segunda aplica-se às outras três. Quando a fórmula (C.18) é aplicada, obtém-se o mesmo resultado para as quatro soluções iniciais,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1, n_2]}^A &= (4\pi)^{-\frac{D}{2}} (m_2^2)^\sigma \left( \frac{D}{2} - \sigma \right)_{-\frac{D}{2}} \times \\ &\quad {}_3F_2 \left( \nu_1, \nu_2, -\sigma; \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}, \frac{\nu_1 + \nu_2 + 1}{2}; -\frac{p^2}{4m^2} \right),\end{aligned}\tag{2.15}$$

onde foi usado um caso particular da função hipergeométrica generalizada (C.11). Quando a fórmula (C.19) é aplicada, obtém-se resultados diferentes para cada uma

das soluções. A primeira solução é,

$$\mathcal{F}_{\text{bub.}[n_2,n_3]}^A = (4\pi)^{-\frac{D}{2}} (p^2)^\sigma \frac{(\nu_1)_\sigma (\nu_2)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma+\frac{D}{2}}} \times {}_3F_2 \left( -\sigma, \frac{2-2\sigma-D}{4}, \frac{4-2\sigma-D}{4}; 1 + \nu_1 - \frac{D}{2}, 1 + \nu_2 - \frac{D}{2}; -\frac{4m^2}{p^2} \right), \quad (2.16)$$

onde o superíndice  $A$  indica que as massas são iguais. A segunda solução é,

$$\mathcal{F}_{\text{bub.}[n_2,n_4]}^A = (4\pi)^{-\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(-j - D/2)}{\Gamma(-j)} \frac{(m^2)^{\sigma+\nu_1}}{(p^2)^{\nu_1}} (\nu_2)_{-\frac{D}{2}} \times {}_3F_2 \left( \nu_1, \frac{\nu_1-\nu_2+1}{2}, \frac{\nu_1-\nu_2+2}{2}; 1 + \nu_1 - \nu_2, 1 + \frac{D}{2} - \nu_2; -\frac{4m^2}{p^2} \right), \quad (2.17)$$

e a terceira ( $\mathcal{F}_{\text{bub.}[n_3,n_5]}^A$ ) é equivalente à segunda após a permutação  $1 \leftrightarrow 2$ . Seguindo a filosofia de separar as soluções nas regiões cinemáticas onde a função hipergeométrica é convergente, e evitando somar soluções degeneradas (linearmente dependentes), obtém-se dois domínios de convergência,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{bub.}I}^A &= \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_2,n_3]}^A + \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_2,n_4]}^A + \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_3,n_5]}^A, \quad \left| \frac{4m^2}{p^2} \right| < 1; \\ \mathcal{F}_{\text{bub.}II}^A &= \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1,n_2]}^A, \quad \left| \frac{p^2}{4m^2} \right| < 1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Outro caso particular de (2.1) aparece quando uma das duas massas é zero. Devido à simetria sob a permutação  $1 \leftrightarrow 2$  só é necessário considerar um dos casos:  $m_1 = 0$  ou  $m_2 = 0$ . Escolha-se o primeiro caso e defina-se  $m_2 = m$ . Também terá que ser lembrado que o índice  $\nu_1$  corresponderá àquele de massa nula. Algumas das soluções da tabela 2.1 não são aplicáveis porque contêm nos argumentos da função hipergeométrica variáveis com denominador  $m_1^2$ . Nestas condições, encontram-se três soluções não nulas e diferentes. A primeira é,

$$\mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1,n_2]}^B = (4\pi)^{-\frac{D}{2}} (m^2)^\sigma \frac{(\nu_2)_\sigma}{(-\sigma)_{\frac{D}{2}+\sigma}} {}_2F_1 \left( \nu_1, -\sigma; \frac{D}{2}; -\frac{p^2}{m^2} \right); \quad (2.19)$$

a segunda é,

$$\mathcal{F}_{\text{bub.}[n_2,n_3]}^B = (4\pi)^{-\frac{D}{2}} (p^2)^\sigma \frac{(\nu_1)_\sigma (\nu_2)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma+\frac{D}{2}}} {}_2F_1 \left( 1 - \sigma - \frac{D}{2}, -\sigma; 1 + \nu_2 - \frac{D}{2}; -\frac{m^2}{p^2} \right); \quad (2.20)$$

e a terceira é,

$$\mathcal{F}_{\text{bub.}[n_2,n_4]}^B = (4\pi)^{-\frac{D}{2}} (p^2)^\sigma \frac{(m^2)^{\sigma+\nu_1}}{(p^2)^{\nu_1}} (\nu_2)_{-\frac{D}{2}} {}_2F_1 \left( 1 + \nu_1 - \frac{D}{2}, \nu_1; 1 + \frac{D}{2} - \nu_2; -\frac{m^2}{p^2} \right). \quad (2.21)$$

A separação em regiões cinemáticas para esta restrição nas massas é,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{bub.}I}^B &= \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_2,n_4]}^B + \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_2,n_3]}^B, \quad \left| \frac{m^2}{p^2} \right| < 1; \\ \mathcal{F}_{\text{bub.}II}^B &= \mathcal{F}_{\text{bub.}[n_1,n_2]}^B, \quad \left| \frac{p^2}{m^2} \right| < 1. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Finalmente, o resultado (2.20) permite achar o caso quando as duas massas são nulas, o qual é simplesmente,

$$\mathcal{F}_{\text{bub.}}^C = (4\pi)^{-\frac{D}{2}} (p^2)^\sigma \frac{(\nu_1)_\sigma (\nu_2)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma + \frac{D}{2}}}. \quad (2.23)$$

Todos os resultados do diagrama tipo bolha apresentados aqui já eram conhecidos através de métodos distintos ao NDIM [17]; contudo, este exemplo foi uma das primeiras provas que o NDIM era de fato confiável. Por causa disso, o diagrama tipo bolha é um exemplo recorrente na hora de explicar o NDIM [6, 15]. Aproveita-se este momento para esclarecer certas convenções usadas nesta dissertação que diferem da forma de apresentar os resultados em outros trabalhos sobre o NDIM. Aqui são expostas soluções para integrais euclidianas com propagadores (com expoentes positivos) no denominador; tal como é mostrado na equação (1.18). Outros textos mostram os resultados das integrais no espaço de Minkowski (o qual gera certos fatores iniciais e muda o sinal dos produtos  $p_i \cdot p_j$ ) ou põem os propagadores como numeradores cujos expoentes podem ser negativos.

Para completar a discussão sobre o diagrama tipo bolha se fará a análise das suas equações de Landau, as quais explicam a ramificação em regiões cinemáticas das soluções (veja-se apêndice A). O caso particular do denominador (A.1) é então,

$$T_{\text{bub.}} = x_1 q^2 + x_2 (q - p)^2 - x_1 m_1^2 - x_2 m_2^2, \quad (2.24)$$

com a restrição  $x_1 + x_2 = 1$  presente na delta de Dirac da parametrização de Feynman. Devido a topologia do diagrama, a única possibilidade para que exista a superfície de Landau é que todas as linhas estejam *on-shell*, e portanto as equações de Landau são,

$$x_1 q - x_2 (p - q) = 0; \quad (2.25a)$$

$$q^2 = m_1^2; \quad (2.25b)$$

$$(q - p)^2 = m_2^2. \quad (2.25c)$$

Manipulando adequadamente estas equações chega-se a seguinte representação da superfície de Landau,

$$p^4 - 2p^2 m_1^2 - 2p^2 m_2^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2 = 0. \quad (2.26)$$

Quando esta equação é resolvida em termos das variáveis  $x = \left| \frac{p^2}{m_1^2} \right|^{\frac{1}{2}}$  e  $y = \left| \frac{p^2}{m_2^2} \right|^{\frac{1}{2}}$ , as quais definem as regiões de convergência das funções hipergeométricas encontradas na solução da integral  $\mathcal{F}_{\text{bub.}}$ , conclui-se que a superfície de Landau define exatamente três regiões cinemáticas acessíveis por continuação analítica e que elas coincidem com aquelas achadas pelo NDIM. A figura 2.2 mostra como a superfície de Landau separa estas três regiões. Também pode observar-se que os casos particulares em que  $m_1 = m_2$  ( $\mathcal{F}_{\text{bub.}}^A$ ) e  $m_1 = 0$  ( $\mathcal{F}_{\text{bub.}}^B$ ) encontram seu ponto de ramificação exatamente onde as curvas respectivas cortam a superfície de Landau.

Tabela 2.1: Soluções do diagrama tipo *bolha*.

$m, n$	$G$	$\alpha, \alpha'; \beta, \gamma$	$x, y$
$n_1, n_2$	$(m_2^2)^\sigma \frac{(\nu_2)_\sigma}{(-\sigma) \frac{D}{2} + \sigma}$	$\nu_1, -\sigma; \frac{D}{2}, 1 + \nu_1 - \frac{D}{2}$	$-\frac{p^2}{m_2^2}, \frac{m_1^2}{m_2^2}$
$n_1, n_3$	$(m_1^2)^\sigma \frac{(\nu_1)_\sigma}{(-\sigma) \frac{D}{2} + \sigma}$	$\nu_2, -\sigma; \frac{D}{2}, 1 + \nu_2 - \frac{D}{2}$	$-\frac{p^2}{m_1^2}, \frac{m_2^2}{m_1^2}$
$n_1, n_4$	$\frac{(m_2^2)^{\sigma+\nu_1}}{(m_1^2)^{\nu_1}} (\nu_2)_{-\frac{D}{2}}$	$\nu_1, \frac{D}{2}; \frac{D}{2}, 1 + \frac{D}{2} - \nu_2$	$-\frac{p^2}{m_1^2}, \frac{m_2^2}{m_1^2}$
$n_1, n_5$	$\frac{(m_1^2)^{\sigma+\nu_2}}{(m_2^2)^{\nu_2}} (\nu_1)_{-\frac{D}{2}}$	$\nu_2, \frac{D}{2}; \frac{D}{2}, 1 + \frac{D}{2} - \nu_1$	$-\frac{p^2}{m_2^2}, \frac{m_1^2}{m_2^2}$
$n_2, n_3$	$(p^2)^\sigma \frac{(\nu_1)_\sigma (\nu_2)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma+\frac{D}{2}}}$	$1 - \sigma - \frac{D}{2}, -\sigma; 1 + \nu_1 - \frac{D}{2}, 1 + \nu_2 - \frac{D}{2}$	$-\frac{m_1^2}{p^2}, -\frac{m_2^2}{p^2}$
$n_2, n_4$	$\frac{(m_2^2)^{\sigma+\nu_1}}{(p^2)^{\nu_1}} (\nu_2)_{-\frac{D}{2}}$	$1 + \nu_1 - \frac{D}{2}, \nu_1; 1 + \nu_1 - \frac{D}{2}, 1 + \frac{D}{2} - \nu_2$	$-\frac{m_1^2}{p^2}, -\frac{m_2^2}{p^2}$
$n_3, n_5$	$\frac{(m_1^2)^{\sigma+\nu_2}}{(p^2)^{\nu_2}} (\nu_1)_{-\frac{D}{2}}$	$1 + \nu_2 - \frac{D}{2}, \nu_2; 1 + \nu_2 - \frac{D}{2}, 1 + \frac{D}{2} - \nu_1$	$-\frac{m_2^2}{p^2}, -\frac{m_1^2}{p^2}$
$n_4, n_5$	$\frac{(m_1^2)^{\sigma+\nu_2} (m_2^2)^{\sigma+\nu_1}}{(p^2)^{\frac{D}{2}}} \frac{(\nu_1)_{-\frac{D}{2}} (\nu_2)_{-\frac{D}{2}}}{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}$	$1, \frac{D}{2}; 1 + \frac{D}{2} - \nu_1, 1 + \frac{D}{2} - \nu_2$	$-\frac{m_1^2}{p^2}, -\frac{m_2^2}{p^2}$

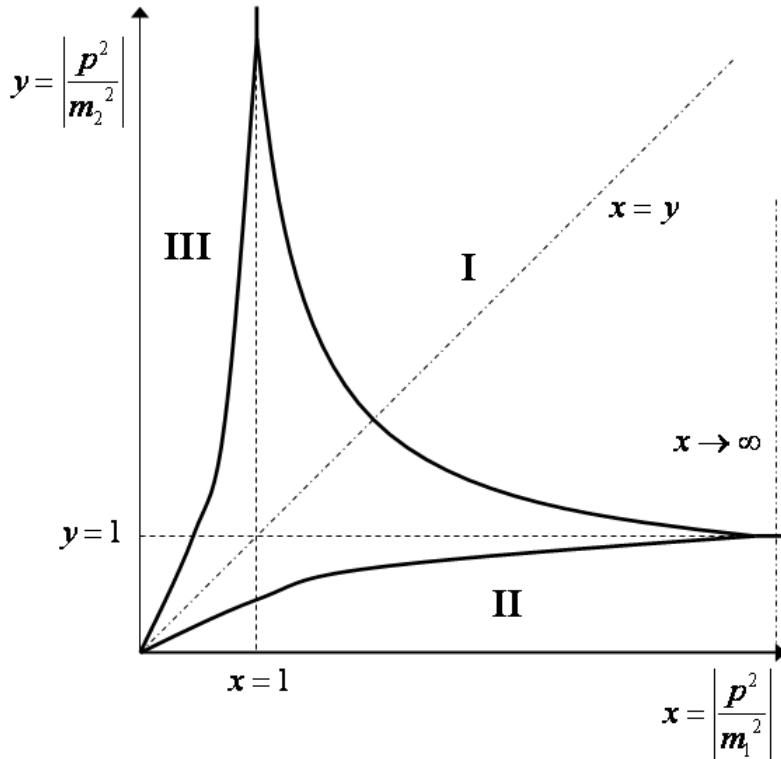


Figura 2.2: Regiões de convergência da integral  $\mathcal{F}_{\text{bub.}}$ . A superfície de Landau está indicada com uma linha sólida. Também ilustram-se os casos particulares  $\mathcal{F}_{\text{bub.}}^A$  e  $\mathcal{F}_{\text{bub.}}^B$ , que correspondem a  $x = y$  e  $x \rightarrow \infty$  respectivamente.

## 2.2 Diagrama tipo *triângulo*

Na escala de complexidade, a seguinte integral a 1-loop corresponde ao diagrama mostrado na figura 2.3. Este diagrama contribuiria para a correção radiativa a primeira ordem da função de correlação de 3-pontos. Esta integral logo revela uma riqueza muito maior que aquela do diagrama tipo *bolha*. Ignorando de novo constantes de proporcionalidade, a integral de Feynman neste caso é,

$$\mathcal{F}_{\text{tri.}}(p_i, m_i; D, \nu_i) = \int \frac{d^D q (2\pi)^{-D}}{\left[q^2 + m_1^2\right]^{\nu_1} \left[(q - p_2)^2 + m_2^2\right]^{\nu_2} \left[(q - p_1)^2 + m_3^2\right]^{\nu_3}}. \quad (2.27)$$

Antes de aplicar a expansão em série da representação de Schwinger, a integral (2.27) aparece como,

$$\mathcal{F}_{\text{tri.}} = \int D\vec{x} \frac{\exp\left\{-\frac{x_1 x_3 p_1^2 + x_1 x_2 p_2^2 + x_2 x_3 p_3^2}{x_1 + x_2 + x_3} - \sum_{j=1}^3 x_j m_j^2\right\}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} (x_1 + x_2 + x_3)^{\frac{D}{2}}}; \quad (2.28)$$

e após a expansão da exponencial e a expansão multinomial tem-se,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{tri.}} &= \frac{\int D\vec{x}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n_1, \dots, n_9} (-1)^{n_1 + \dots + n_6} \frac{x_1^{n_1 + n_2 + n_4 + n_7} x_2^{n_2 + n_3 + n_5 + n_8} x_3^{n_1 + n_3 + n_6 + n_9}}{\Gamma(n_1 + 1) \dots \Gamma(n_9 + 1)} \delta_{\Theta(n_s, D), 0} \times \\ &\quad \Gamma(1 - n_1 - n_2 - n_3 - \frac{D}{2}) (p_1^2)^{n_1} (p_2^2)^{n_2} (p_3^2)^{n_3} (m_1^2)^{n_4} (m_2^2)^{n_5} (m_3^2)^{n_6}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde,

$$\Theta(n_s, D) = n_1 + n_2 + n_3 + n_7 + n_8 + n_9 + \frac{D}{2}. \quad (2.30)$$

Após usar o NDIM, a solução de (2.27) é,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{tri.}} &= (-4\pi)^{-\frac{D}{2}} \sum_{n_1, \dots, n_9} \frac{\Gamma(1 - \nu_1) \Gamma(1 - \nu_2) \Gamma(1 - \nu_3) \Gamma(1 - n_1 - n_2 - n_3 - \frac{D}{2})}{\Gamma(n_1 + 1) \dots \Gamma(n_9 + 1)} \times \\ &\quad (p_1^2)^{n_1} (p_2^2)^{n_2} (p_3^2)^{n_3} (m_1^2)^{n_4} (m_2^2)^{n_5} (m_3^2)^{n_6} \Delta(n_s, D), \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde  $\Delta(n_s, D)$  significa os quatro vínculos lineares,

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_4 + n_7 &= -\nu_1, \\ n_2 + n_3 + n_5 + n_8 &= -\nu_2, \\ n_1 + n_3 + n_6 + n_9 &= -\nu_3, \\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 &= \sigma, \end{aligned} \quad (2.32)$$

e neste caso  $\sigma = \frac{D}{2} - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3$ .

Em princípio, o número de soluções diferentes da integral geral (2.27) ascenderia a  $\binom{9}{5} = 126$ . Mas devido ao sistema de equações não existe solução para 45 escolhas dos índices da somatória e outras 12 soluções cancelam-se em forma similar à solução  $\mathcal{F}_{\text{bub.}}[n_4, n_5]$ . Neste trabalho não serão expostas as 69 soluções restantes, as quais estão presentes nas referências [11] e [13]. Estas soluções são em geral séries hipergeométricas de cinco variáveis e a forma delas, dada a simetria do diagrama, se repete segundo as 6 permutações possíveis dos índices  $j \in \{1, 2, 3\}$  nas massas  $m_j$ ,

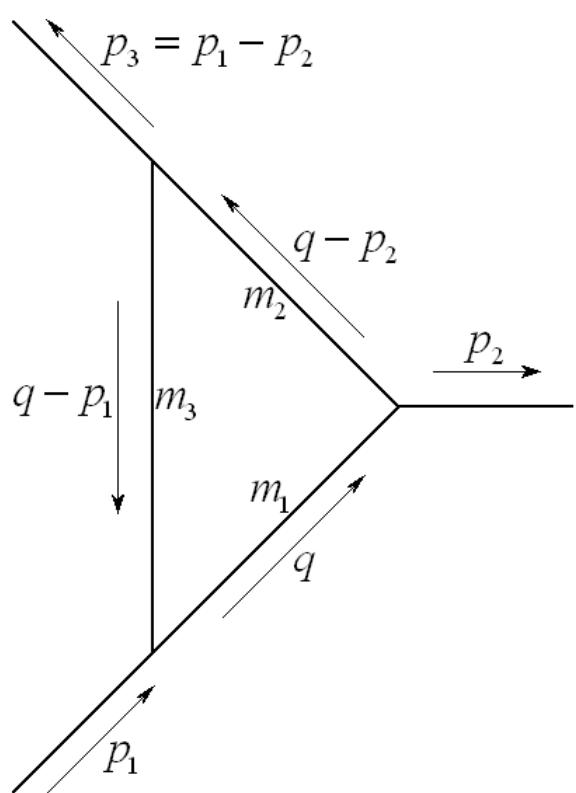


Figura 2.3: Diagrama tipo triângulo.

os momentos  $p_j$  e os expoentes  $\nu_j$ . Esta seção se limitará a apresentar resultados da integral (2.27) para valores restritos nas massas e nos momentos.

A primeira restrição de (2.27) que será considerada é quando duas massas são idênticas ( $m_1 = m_2 = m$ ) e a terceira é nula ( $m_3 = 0$ ). Com essa restrição, a representação de Schwinger (2.28) se reduz a,

$$\mathcal{F}_{\text{tri.}}^A = \frac{\int D\vec{x}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} (x_1 + x_2 + x_3)^{-\frac{D}{2}} \exp \left\{ -\frac{x_1 x_3 p_1^2 + x_1 x_2 p_2^2 + x_2 x_3 p_3^2}{x_1 + x_2 + x_3} - (x_1 + x_2) m^2 \right\}. \quad (2.33)$$

Este é o momento adequado de explicar a otimização do NDIM feita por I. González e I. Schmidt [15]. A otimização minimiza o número de índices  $n_i$  na expansão de multiregiões e ao mesmo tempo maximiza o número de vínculos. Esta melhora consiste em manter os multinômios que se repetem dentro da exponencial da representação de Schwinger até que eles se juntarem em um só termo, e só depois disso se procede a expandi-los. Se a otimização não for feita, a solução consistiria em fazer nulo o índice  $n_6$  nos vínculos (2.32) pois ele corresponde à massa nula  $m_3$ . Isto daria um sistema com oito índices e quatro vínculos, deixando outros quatro vínculos independentes e em princípio uma multiplicidade de  $\binom{8}{4} = 70$  soluções. O número real de soluções pelo método não otimizado é 32 [13]. Pelo contrário, após a otimização obtém-se a solução,

$$\mathcal{F}_{\text{tri.}}^A = \frac{1}{(-4\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n_1, \dots, n_8} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{D}{2} - n_1 - n_2 - n_3\right) \Gamma(1 + n_4 + n_5) \Gamma(1 - \nu_1) \Gamma(1 - \nu_2) \Gamma(1 - \nu_3)}{\Gamma(n_1 + 1) \dots \Gamma(n_8 + 1)} \times \\ (p_1^2)^{n_1} (p_2^2)^{n_2} (p_3^2)^{n_3} (m^2)^{n_4} \Delta(n_s, D), \quad (2.34)$$

com  $\Delta(n_s, D)$  asinalando os vínculos,

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_7 &= -\nu_1, \\ n_2 + n_3 + n_8 &= -\nu_2, \\ n_1 + n_3 + n_6 &= -\nu_3, \\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 &= \sigma, \\ n_4 + n_5 - n_7 - n_8 &= 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

O número de índices continua sendo oito, mas o número de vínculos aumentou a cinco e em princípio a multiplicidade diminuiu a  $\binom{8}{5} = 56$ . Na verdade, o número total de soluções diferentes é 28. Nas tabelas 2.2e 2.3 mostram-se os argumentos de certas soluções, as quais têm a forma geral,

$$\mathcal{F}_{\text{tri.}N}^A = \frac{G_N}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n_1, n_2, n_3} A_N(n_1, n_2, n_3) \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} z_3^{n_3}}{n_1! n_2! n_3!}, \quad (2.36)$$

com  $N \in \{1, 2, \dots, 16\}$ . Não foram mostradas as soluções que podem ser obtidas pela permutação  $p_1 \leftrightarrow p_3$ ,  $\nu_1 \leftrightarrow \nu_2$ ; assim que as outras doze soluções diferentes podem ser extraídas permutando estes momentos e expoentes na solução com  $N = 2$  e as que vão desde  $N = 5$  até  $N = 15$ . A melhora nesta solução respeito à da referência [13] não consiste somente em que diminuiu o número de soluções, mas também em que se obtiveram séries hipergeométricas de apenas três variáveis. A grande maioria

Tabela 2.2: Soluções para o diagrama tipo triângulo, primeira parte.

$N$	$G_N$	$z_1, z_2, z_3$
<b>1</b>	$(m^2)^\sigma \left(\frac{D}{2}\right)_{-\nu_3} (\nu_1 + \nu_2)_{\nu_3 - \frac{D}{2}}$	$\frac{-p_1^2}{m^2}, \frac{-p_2^2}{m^2}, \frac{-p_3^2}{m^2}$
<b>2</b>	$(p_3^2)^\sigma (\nu_2)_\sigma (\nu_3)_\sigma (\sigma + \frac{D}{2})_{-2\sigma - \frac{D}{2}}$	$\frac{p_1^2}{p_3^2}, \frac{p_2^2}{p_3^2}, \frac{m^2}{p_3^2}$
<b>3</b>	$(p_2^2)^\sigma (\nu_1)_\sigma (\nu_2)_\sigma (\sigma + \frac{D}{2})_{-2\sigma - \frac{D}{2}}$	$\frac{p_1^2}{p_2^2}, \frac{p_3^2}{p_2^2}, \frac{-m^2}{p_2^2}$
<b>4</b>	$(m^2)^{\sigma + \frac{D}{2} - \nu_3} (p_2^2)^{\nu_3 - \frac{D}{2}} (\nu_3)_{\frac{D}{2} - 2\nu_3} (\nu_2)_{-\sigma - 2\nu_2} (\nu_1)_{-\sigma - 2\nu_1}$	$\frac{p_1^2}{m^2}, \frac{p_3^2}{m^2}, \frac{m^2}{p_3^2}$
<b>5</b>	$(p_3^2)^{-\nu_3} (m^2)^{\sigma + \nu_3} (\nu_2 - \nu_3)_{\nu_1} (\nu_2)_{\nu_1 - \frac{D}{2}}$	$\frac{p_1^2}{p_3^2}, \frac{-p_2^2}{m^2}, \frac{-m^2}{p_3^2}$
<b>6</b>	$(p_2^2)^{\sigma + \nu_3} (p_3^2)^{-\nu_3} (\sigma + \frac{D}{2})_{\nu_2 - \frac{D}{2}} (\nu_1)_{\nu_2 - \frac{D}{2}} (\nu_2)_{\frac{D}{2} - 2\nu_2}$	$\frac{p_1^2}{p_2^2}, \frac{-m^2}{p_2^2}, \frac{p_2^2}{p_3^2}$
<b>7</b>	$(p_2^2)^{-\nu_1} (m^2)^{\sigma + \nu_1} (\nu_2)_\sigma (\frac{D}{2} - \nu_1)_{-\frac{D}{2} - \sigma}$	$\frac{p_1^2}{p_2^2}, \frac{p_3^2}{m^2}, \frac{m^2}{p_2^2}$
<b>8</b>	$(p_1^2)^{-\nu_1} (m^2)^{\sigma + \nu_1} (\frac{D}{2} - \nu_1)_{\nu_3 - \frac{D}{2}} (\nu_2)_{\nu_3 - \frac{D}{2}} (\nu_3)_{\frac{D}{2} - 2\nu_3}$	$\frac{p_2^2}{p_1^2}, \frac{-p_3^2}{m^2}, \frac{-m^2}{p_1^2}$
<b>9</b>	$(p_2^2)^{-\nu_1} (p_3^2)^{\sigma + \nu_1} (\frac{D}{2} + \sigma)_{-\sigma - \nu_2} (\nu_2)_\sigma (\nu_3)_{\nu_2 - \frac{D}{2}}$	$\frac{p_1^2}{p_2^2}, \frac{-m^2}{p_3^2}, \frac{p_3^2}{p_2^2}$
<b>10</b>	$(p_1^2)^{-\nu_1} (p_3^2)^{\sigma + \nu_1} (\nu_2)_{\nu_3 - \frac{D}{2}} (\frac{D}{2} + \sigma)_{-\nu_3 - \sigma} (\nu_3)_\sigma$	$\frac{p_2^2}{p_1^2}, \frac{m^2}{p_3^2}, \frac{p_2^2}{p_1^2}$
<b>11</b>	$(p_1^2)^{\sigma + \nu_2} (p_2^2)^{\nu_3 - \frac{D}{2}} (m^2)^{\sigma + \nu_1} (\nu_1)_{-\sigma - 2\nu_1} (\nu_2)_{-\sigma - 2\nu_2} (\nu_3)_{\frac{D}{2} - 2\nu_3}$	$\frac{p_3^2}{m^2}, \frac{p_1^2}{p_2^2}, \frac{m^2}{p_1^2}$
<b>12</b>	$(p_2^2)^{-\nu_1} (p_3^2)^{-\nu_3} (m^2)^{\sigma + \nu_1 + \nu_3} (\nu_2)_{-\frac{D}{2}}$	$\frac{m^2 p_1^2}{p_3^2 p_2^2}, \frac{-m^2}{p_3^2}, \frac{-m^2}{p_2^2}$
<b>13</b>	$(p_1^2)^{-\nu_1} (p_3^2)^{\nu_1 - \nu_3} (m^2)^{\sigma + \nu_3} (\nu_2)_{\nu_1 - \frac{D}{2}} (\nu_3)_{-\nu_1}$	$\frac{-p_3^2 p_3^2}{p_1^2 m^2}, \frac{-m^2}{p_3^2}, \frac{p_3^2}{p_1^2}$
<b>14</b>	$(p_1^2)^{-\nu_3} (p_2^2)^{\nu_3 - \nu_1} (m^2)^{\sigma + \nu_1} (\nu_2)_{\nu_3 - \frac{D}{2}} (\nu_1)_{-\nu_3}$	$\frac{-p_3^2 p_2^2}{p_1^2 m^2}, \frac{p_2^2}{p_1^2}, \frac{-m^2}{p_2^2}$
<b>15</b>	$(p_1^2)^{\nu_2 - \frac{D}{2}} (p_2^2)^{\sigma + \nu_3} (p_3^2)^{\sigma + \nu_1} (\nu_1)_{-\sigma - 2\nu_1} (\nu_3)_{-\sigma - 2\nu_3} (\nu_2)_{\frac{D}{2} - 2\nu_2}$	$\frac{-m^2 p_1^2}{p_2^2 p_3^2}, \frac{-p_2^2}{p_1^2}, \frac{-p_3^2}{p_1^2}$
<b>16</b>	$(p_1^2)^{\sigma + \nu_2} (p_2^2)^{\nu_3 - \frac{D}{2}} (p_3^2)^{\sigma + \nu_1} (\nu_1)_{-\sigma - 2\nu_1} (\nu_2)_{-\sigma - 2\nu_2} (\nu_3)_{\frac{D}{2} - 2\nu_3}$	$\frac{-p_2^2 m^2}{p_1^2 p_3^2}, \frac{-p_3^2}{p_2^2}, \frac{-p_1^2}{p_2^2}$

das soluções em [13] são funções hipergeométricas de quatro variáveis. Infortunadamente, inclusive no caso de funções hipergeométricas de três variáveis, não se dispõe de um método simples para obter uma solução global como a das equações (2.14) em que se agrupam as soluções segundo a região de convergência. A dificuldade de analisar séries hipergeométricas de mais de duas variáveis é uma das grandes limitações do NDIM.

A segunda restrição de (2.27) que será considerada é a que consiste em fazer todas as massas nulas ( $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ ). Este caso não massivo é relativamente fácil de analisar fazendo  $m = 0$  nas soluções  $\mathcal{F}_{\text{tri},N}^A$  da primeira restrição. A partir da tabela 2.2, se deduz que as soluções  $\mathcal{F}_{\text{tri},N}^A$  que resistem à restrição  $m = 0$  são as que correspondem a  $N = 2, 3, 6, 9, 10, 15, 16$ ; e portanto o número total de soluções para o triângulo não massivo é doze. Dado o alto degrau de simetria do triângulo não massivo, estas doze soluções podem ser classificadas em apenas três formas básicas,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{tri.}}^{B(a)} \left( \begin{matrix} p_1, p_2, p_3 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3 \end{matrix}; D \right) &= \frac{(\nu_2)_\sigma (\nu_3)_\sigma}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} (-\sigma)_{2\sigma+\frac{D}{2}}} (p_3^2)^\sigma \times \\ &F_4 \left( -\sigma, \nu_1; 1 - \nu_2 - \sigma, 1 - \nu_3 - \sigma; \frac{p_1^2}{p_3^2}, \frac{p_2^2}{p_3^2} \right); \quad (2.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{tri.}}^{B(b)} \left( \begin{matrix} p_1, p_2, p_3 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3 \end{matrix}; D \right) &= \frac{(\nu_2)_{-\sigma-2\nu_2} (\nu_3)_{-\sigma-2\nu_3}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} (\frac{D}{2} - \nu_1)_{2\nu_1-\frac{D}{2}}} (p_3^2)^{\nu_1-\frac{D}{2}} (p_2^2)^{\sigma+\nu_3} (p_1^2)^{\sigma+\nu_2} \times \\ &F_4 \left( \sigma + \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - \nu_1; 1 + \sigma + \nu_2, 1 + \sigma + \nu_3; \frac{p_1^2}{p_3^2}, \frac{p_2^2}{p_3^2} \right); \quad (2.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{tri.}}^{B(c)} \left( \begin{matrix} p_1, p_2, p_3 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3 \end{matrix}; D \right) &= \frac{(\nu_1)_{\nu_2-\frac{D}{2}} (\nu_2)_{\frac{D}{2}-2\nu_2}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} (\sigma + \nu_2)_{\frac{D}{2}-\nu_2}} (p_2^2)^{\sigma+\nu_3} (p_3^2)^{-\nu_3} \times \\ &F_4 \left( \frac{D}{2} - \nu_2, \nu_3; 1 - \sigma - \nu_2, 1 + \sigma + \nu_2; \frac{p_1^2}{p_3^2}, \frac{p_2^2}{p_3^2} \right). \quad (2.39) \end{aligned}$$

O conjunto completo de doze soluções é extraído de permutações adequadas das soluções (2.37-2.39) nos momentos  $p_i$  e nos expoentes  $\nu_i$ . Conforme à região de convergência da função de Appell  $F_4$ , a solução do diagrama triangular não massivo divide-se em três soluções diferentes, cada uma conectada com a outra através de continuação analítica. A solução em diferentes regiões é então,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{tri.}I}^B &= \mathcal{F}_{\text{tri.}}^{B(a)} \left( \begin{matrix} p_1, p_2, p_3 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3 \end{matrix}; D \right) + \mathcal{F}_{\text{tri.}}^{B(b)} \left( \begin{matrix} p_1, p_2, p_3 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3 \end{matrix}; D \right) + \mathcal{F}_{\text{tri.}}^{B(c)} \left( \begin{matrix} p_1, p_2, p_3 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3 \end{matrix}; D \right) \\ &+ \mathcal{F}_{\text{tri.}}^{B(c)} \left( \begin{matrix} p_2, p_1, p_3 \\ \nu_1, \nu_3, \nu_2 \end{matrix}; D \right), \quad \text{para } \left| \frac{p_1^2}{p_3^2} \right|^{\frac{1}{2}} + \left| \frac{p_2^2}{p_3^2} \right|^{\frac{1}{2}} < 1; \quad (2.40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{tri.}II}^B &= \mathcal{F}_{\text{tri.}}^{B(a)} \left( \begin{matrix} p_1, p_3, p_2 \\ \nu_3, \nu_2, \nu_1 \end{matrix}; D \right) + \mathcal{F}_{\text{tri.}}^{B(b)} \left( \begin{matrix} p_1, p_3, p_2 \\ \nu_3, \nu_2, \nu_1 \end{matrix}; D \right) + \mathcal{F}_{\text{tri.}}^{B(c)} \left( \begin{matrix} p_1, p_3, p_2 \\ \nu_3, \nu_2, \nu_1 \end{matrix}; D \right) \\ &+ \mathcal{F}_{\text{tri.}}^{B(c)} \left( \begin{matrix} p_3, p_1, p_2 \\ \nu_3, \nu_1, \nu_2 \end{matrix}; D \right), \quad \text{para } \left| \frac{p_1^2}{p_2^2} \right|^{\frac{1}{2}} + \left| \frac{p_3^2}{p_2^2} \right|^{\frac{1}{2}} < 1; \quad (2.41) \end{aligned}$$

Tabela 2.3: Soluções para o diagrama tipo triângulo, segunda parte.

$N$	$A_N(n_1, n_2, n_3)$
<b>1</b>	$\frac{\left(\frac{D}{2}-\nu_3\right)_{n_2}(\nu_3)_{n_1+n_3}(\nu_2)_{n_1+n_2}(\nu_1)_{n_2+n_3}(-\sigma)_{n_1+n_2+n_3}}{\left(\frac{D}{2}\right)_{n_1+n_2+n_3}(\nu_1+\nu_2)_{n_1+2n_2+n_3}}$
<b>2</b>	$\frac{\left(1-\sigma-\frac{D}{2}\right)_{n_3}(\nu_1)_{n_1+n_2}\left(\frac{D}{2}-\nu_3\right)_{n_2}(-\sigma)_{n_1+n_2+n_3}}{(1-\nu_3-\sigma)_{n_2+n_3}(1-\nu_2-\sigma)_{n_1+n_4}\left(\frac{D}{2}-\nu_3\right)_{n_2-n_3}}$
<b>3</b>	$\frac{\left(1-\sigma-\frac{D}{2}\right)_{n_3}\left(1-\nu_1-\nu_2-2\sigma\right)_{n_1+n_2+2n_3}(-\sigma)_{n_1+n_2+n_3}(\nu_3)_{n_1+n_2}}{(1-\nu_1-\nu_2-2\sigma)_{n_1+n_2+n_3}(1-\nu_1-\sigma)_{n_2+n_3}(1-\nu_2-\sigma)_{n_1+n_2}}$
<b>4</b>	$\frac{(1+2\sigma+\nu_1+\nu_2)_{2n_3-n_1-n_2}\left(\frac{D}{2}-\nu_3\right)_{n_3}(\nu_3)_{n_1+n_2}}{(1+2\sigma+\nu_1+\nu_2)_{n_3-n_1-n_2}(1+\sigma+\nu_2)_{n_3-n_1}(1+\sigma+\nu_1)_{n_3-n_2}(\nu_3)_{n_1+n_2-n_3}}$
<b>5</b>	$\frac{(\nu_3)_{n_1+n_3}(\nu_1)_{n_1+n_2}\left(\frac{D}{2}-\nu_3\right)_{n_2}}{(1+\sigma+\nu_3)_{n_3-n_2}(1+\nu_3-\nu_2)_{n_3+n_1-n_2}(\nu_1+\nu_2-\nu_3)_{2n_2-n_3}\left(\frac{D}{2}-\nu_3\right)_{n_2-n_3}}$
<b>6</b>	$\frac{\left(\frac{D}{2}-\nu_2\right)_{n_3+n_1-n_2}(\nu_3)_{n_1+n_3}\left(1-\sigma-\frac{D}{2}\right)_{n_2}\left(1-\sigma-\frac{D}{2}\right)_{2n_2-n_3}}{(1+\sigma+\nu_3)_{n_3-n_2}(1-\sigma-\nu_2)_{n_1+n_2}\left(1-\sigma-\frac{D}{2}\right)_{n_2-n_3}}$
<b>7</b>	$\frac{(1+\nu_1-\nu_2)_{2n_3+n_1-n_2}(\nu_1)_{n_1+n_3}(\nu_3)_{n_1+n_2}}{(1+\nu_1-\nu_2)_{n_3+n_1-n_2}(1-\nu_2-\sigma)_{n_3+n_1}(1+\sigma+\nu_1)_{n_3-n_2}\left(\frac{D}{2}-\nu_1\right)_{n_2-n_3}}$
<b>8</b>	$\frac{\left(\frac{D}{2}-\nu_3\right)_{n_1}(\nu_1)_{n_1+n_3}(\nu_2)_{n_1+n_2}}{(1+\sigma+\nu_1)_{n_3-n_2}(1+\nu_1-\nu_3)_{n_3+n_1-n_2}(\nu_2)_{n_1+n_2-n_3}\left(\frac{D}{2}-\nu_1\right)_{n_2-n_3}}$
<b>9</b>	$\frac{(1-\sigma-\nu_2)_{n_1+n_2+n_3}(\nu_1)_{n_1+n_3}\left(\frac{D}{2}-\nu_2\right)_{n_1+n_3-n_2}\left(1-\sigma-\frac{D}{2}\right)_{n_2}}{(1+\sigma+\nu_1)_{n_3-n_2}\Gamma(1-\sigma-\nu_2)_{n_1+n_3}(1-\nu_2-\sigma)_{n_1+n_2}}$
<b>10</b>	$\frac{(\nu_1)_{n_1+n_3}\left(\frac{D}{2}-\nu_3\right)_{n_1}\left(\frac{D}{2}-\nu_3\right)_{n_1+n_3-n_2}\left(1-\sigma-\frac{D}{2}\right)_{n_2}}{(1+\sigma+\nu_1)_{n_3-n_2}(1-\sigma-\nu_3)_{n_1+n_2}\left(\frac{D}{2}-\nu_3\right)_{n_1-n_2}}$
<b>11</b>	$\frac{(1+\sigma+\nu_1)_{n_2+n_3-n_1}\left(\frac{D}{2}-\nu_1\right)_{n_2+n_1-n_3}\left(\frac{D}{2}-\nu_3\right)_{n_2}}{(1+\sigma+\nu_2)_{n_2-n_3}(1+\sigma+\nu_1)_{n_3-n_1}(1+\sigma+\nu_1)_{n_2-n_1}\left(\frac{D}{2}-\nu_1\right)_{n_1-n_3}}$
<b>12</b>	$\frac{(1-\sigma-\nu_2)_{n_1+n_3+n_2}(1+\nu_1+\nu_3-\nu_2)_{2n_1+2n_3+n_2}(\nu_3)_{n_1+n_2}(\nu_1)_{n_1+n_3}}{(1+\frac{D}{2}-\nu_2)_{n_1+n_2+n_3}(1-\sigma-\nu_2)_{n_1+n_3}(1+\nu_1+\nu_3-\nu_2)_{2n_1+n_3+n_2}}$
<b>13</b>	$\frac{\left(\frac{D}{2}-\nu_3\right)_{n_1}(\nu_1)_{n_1+n_3}(\nu_1+\nu_2-\nu_3)_{2n_1+n_3-n_2}}{(1+\nu_1-\nu_3)_{n_1+n_3-n_2}(1+\sigma+\nu_3)_{n_2-n_1}\left(\frac{D}{2}-\nu_3\right)_{n_1-n_2}(\nu_1+\nu_2-\nu_3)_{2n_1-n_2}}$
<b>14</b>	$\frac{(\nu_3)_{n_1+n_2}\left(\frac{D}{2}-\nu_1\right)_{n_1+n_2-n_3}(\nu_2+\nu_3-\nu_1)_{2n_1+n_2-n_3}}{(1+\nu_3-\nu_1)_{n_1+n_2-n_3}(1+\sigma+\nu_1)_{n_3-n_1}\left(\frac{D}{2}-\nu_1\right)_{n_1-n_3}(\nu_2+\nu_3-\nu_1)_{2n_1+n_2-2n_3}}$
<b>15</b>	$\frac{\left(1-\frac{D}{2}-\sigma\right)_{n_1}\left(1-\frac{D}{2}-\sigma\right)_{2n_1-n_2}\left(\frac{D}{2}-\nu_2\right)_{n_3+n_2-n_1}}{(1+\sigma+\nu_3)_{n_2-n_1}(1+\sigma+\nu_1)_{n_3-n_1}\left(1-\frac{D}{2}-\sigma\right)_{n_1-n_2}\left(1-\frac{D}{2}-\sigma\right)_{2n_1-n_2-n_3}}$
<b>16</b>	$\frac{(1)_{n_2+n_3}\left(1-\frac{D}{2}-\sigma\right)_{n_1}\left(\frac{D}{2}-\nu_3\right)_{n_3+n_2-n_1}}{(1)_{n_2+n_3-n_1}\left(1-\sigma-\frac{D}{2}\right)_{2n_1-n_2-n_3}(1+\sigma+\nu_2)_{n_3-n_1}(1+\sigma+\nu_1)_{n_2-n_1}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{tri.}III}^B = & \mathcal{F}_{\text{tri.}}^{B(a)} \left( \begin{array}{c} p_3, p_2, p_1 \\ \nu_2, \nu_1, \nu_3 \end{array}; D \right) + \mathcal{F}_{\text{tri.}}^{B(b)} \left( \begin{array}{c} p_3, p_2, p_1 \\ \nu_2, \nu_1, \nu_3 \end{array}; D \right) + \mathcal{F}_{\text{tri.}}^{B(c)} \left( \begin{array}{c} p_3, p_2, p_1 \\ \nu_2, \nu_1, \nu_3 \end{array}; D \right) \\ & + \mathcal{F}_{\text{tri.}}^{B(c)} \left( \begin{array}{c} p_2, p_3, p_1 \\ \nu_2, \nu_3, \nu_1 \end{array}; D \right), \quad \text{para } \left| \frac{p_2^2}{p_1^2} \right|^{\frac{1}{2}} + \left| \frac{p_3^2}{p_1^2} \right|^{\frac{1}{2}} < 1. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Embora não seja comprovado explicitamente aqui; a grande similaridade das regiões de convergência precedentes com aquelas da solução (2.14) sugerem que a superfície de Landau do diagrama tipo triângulo não massivo possui uma equação idêntica a (2.26) mas com  $m_1$  e  $m_2$  substituído por  $p_3$  e  $p_1$ .

A última restrição de (2.27) que será analisada é o caso em que  $m_1 = m_3 = m$ ,  $m_2 = 0$  mas com as pernas externas  $p_1$  e  $p_3$  sobre a camada de massa (*on-shell*), ou seja,  $p_1^2 = p_3^2 = -m^2$ . Este resultado obtém-se mais facilmente aplicando o NDIM desde o início mas lembrando a otimização descrita no caso da primeira restrição  $\mathcal{F}_{\text{tri.}}^A$ . A solução maximamente simplificada é,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{tri.}}^C = & \frac{(1 - \sigma - \frac{D}{2} + \nu_3)_{-\nu_3}}{(-4\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n_1, \dots, n_4} \frac{\Gamma(1 - \nu_1)\Gamma(1 - \nu_2)\Gamma(1 + n_3 + n_4)}{\Gamma(n_1 + 1)\dots\Gamma(n_4 + 1)} \times \\ & (m^2)^{n_1} (p_2^2)^{n_2} \delta_{n_2+n_3, -\nu_1} \delta_{n_2+n_4, -\nu_2} \delta_{n_1+n_2, \sigma}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

A partir de (2.43) surgem quatro soluções diferentes, ou seja, uma para cada índice. A solução para o índice  $n_2$  é,

$$\mathcal{F}_{\text{tri.}[n_2]}^C = \frac{(m^2)^\sigma (\sigma + \frac{D}{2})_{-\nu_3}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} (-\sigma)_{\frac{D}{2} - \nu_3}} {}_3F_2 \left( \nu_1, \nu_2, -\sigma; \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}, \frac{1 + \nu_1 + \nu_2}{2}; \frac{-p_2^2}{4m^2} \right). \quad (2.44)$$

A solução para o índice  $n_1$  é,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{tri.}[n_1]}^C = & \frac{(p_2^2)^\sigma (\nu_1)_\sigma (\nu_2)_\sigma}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} (-\sigma)_{2\sigma + \frac{D}{2}}} \times \\ & {}_3F_2 \left( -\sigma, \frac{2-D-2\sigma+2\nu_3}{2}, \frac{4-D-2\sigma+2\nu_3}{2}; 1 - \sigma - \nu_1, 1 - \sigma - \nu_2; \frac{-4m^2}{p_2^2} \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

A solução para o índice  $n_3$  é,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{tri.}[n_3]}^C = & \frac{(p_2^2)^{-\nu_1} (m^2)^{\sigma+\nu_1}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} (\nu_2)_{\nu_3 - \frac{D}{2}} (\sigma + \frac{D}{2})_{-\nu_3} \times \\ & {}_3F_2 \left( \nu_1, \frac{1+\nu_1-\nu_2}{2}, \frac{2+\nu_1-\nu_2}{2}; 1 + \sigma + \nu_1, 1 + \nu_1 - \nu_2; \frac{-4m^2}{p_2^2} \right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

A solução para o índice  $n_4$  tem a mesma forma que  $\mathcal{F}_{\text{tri.}[n_3]}^C$  exceto que sob a permutação  $\nu_1 \leftrightarrow \nu_2$ . Segundo a região de convergência, as soluções com respeito a  $n_1$ ,  $n_3$  e  $n_4$  serão somadas como combinação linear para quando  $|4m^2| < |p_2^2|$ . A solução com respeito a  $n_2$  será deixada sozinha na região cinemática:  $|p_2^2| < |4m^2|$ .

## 2.3 Diagrama tipo *pôr de sol*

Até agora foram considerados diagramas a um loop que envolviam só vértices triplos, os quais corresponderiam a correções radiativas de primeira ordem de uma teoria

de campos escalares, com possíveis massas diferentes, cuja densidade lagrangiana contém um termo de interação do tipo  $\phi^3$ . Mas também é possível considerar diagramas que envolvam vértices quádruplos, como os de uma teoria escalar com interação do tipo  $\phi^4$ . Em esta teoria, a primeira correção radiativa ao propagador aparece a dois loops, e corresponde ao diagrama tipo *pôr de sol* (*sunset diagram*) que se ilustra na figura 2.4. Por razões de simplicidade, não se começará com o caso em que as três linhas internas têm massas diferentes e não nulas. Os valores particulares das massas foram escolhidos pela importância que a integral associada a eles têm para ser aplicada a outros diagramas e outras teorias. Por exemplo, diagramas complexos como o *loop master* (importante em correções radiativas de polarização do vácuo) podem ser decompostos em diagramas mais simples pelo método de integração por partes e o *sunset diagram* da figura 2.4 está presente nessa decomposição [13, pp. 7-9]. A integral que será resolvida é,

$$\mathcal{F}_{\text{sun.}}(p, m; D, \nu_i) = \int \frac{dq_1}{(2\pi)^D} \int \frac{dq_2}{(2\pi)^D} \frac{1}{[q_1^2 + m^2]^{\nu_1} [q_2^2 + m^2]^{\nu_2} [(p - q_1 - q_2)^2]^{\nu_3}}. \quad (2.47)$$

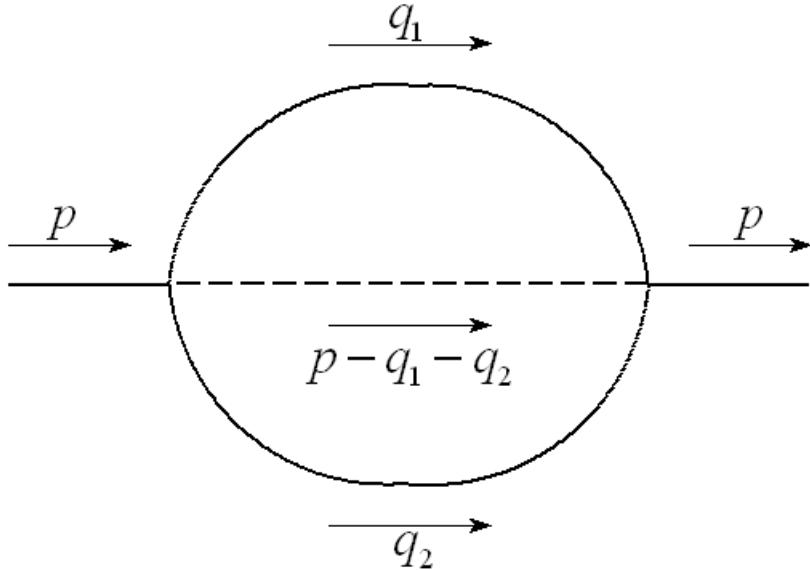


Figura 2.4: *Sunset diagram* ou *pôr de sol*.

Para achar a representação de Schwinger de (2.47), a notação de matrizes introduzida na equação (1.22) resulta útil,

$$\mathcal{F}_{\text{sun.}} = \int \frac{dq_1}{(2\pi)^D} \int \frac{dq_2}{(2\pi)^D} \int D\vec{x} \exp \left\{ -\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q} + 2p \mathbf{B} \mathbf{q} - x_3 p^2 - (x_1 + x_2) m^2 \right\}, \quad (2.48)$$

onde  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & -x_3 \\ -x_3 & x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ , e  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x_3 & x_3 \end{pmatrix}$ . Sem ter que passar pelos detalhes algébricos, rapidamente pode-se aplicar a fórmula (1.27) e simplificar

até obter,

$$\mathcal{F}_{\text{sun.}} = \int D\vec{x} \frac{1}{\phi^{\frac{D}{2}} (4\pi)^D} \exp \left\{ -\frac{x_1 x_2 x_3 p^2}{\phi} - (x_1 + x_2) m^2 \right\}, \quad (2.49)$$

onde  $\phi = \det \mathbf{A} = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$ . Após a expansão das exponenciais e a aplicação do NDIM otimizado chega-se à solução,

$$\mathcal{F}_{\text{sun.}} = \frac{1}{(-4\pi)^D} \sum_{n_1, \dots, n_6} \frac{\Gamma(1-\nu_1)\Gamma(1-\nu_3)\Gamma(1-\nu_3)\Gamma(1-n_1-\frac{D}{2})\Gamma(1+n_2+n_4)}{\Gamma(1+n_1)\dots\Gamma(1+n_6)} (p^2)^{n_1} (m^2)^{n_2} \Delta(n_s, D); \quad (2.50)$$

onde desta vez  $\Delta(n_s, D)$  representa os vínculos<sup>†</sup>,

$$\begin{aligned} n_1 + n_3 + n_5 &= -\nu_1 \\ n_1 + n_3 + n_6 &= -\nu_2 \\ n_1 + n_4 &= -\nu_3 \\ n_1 + n_2 &= \sigma \\ n_5 + n_6 &= n_2 + n_4. \end{aligned}$$

Da equação (2.50) surgem 5 soluções diferentes, correspondendo aos seis índices  $n_s$  com exceção de  $n_3$ . A solução para  $n_1$  é,

$$\mathcal{F}_{\text{sun.}[n_1]} = \frac{(m^2)^\sigma}{(4\pi)^D} \frac{(\frac{D}{2})_{-\nu_3} (-\sigma)_{-\nu_3}}{(\nu_1)_{\frac{D}{2}-\nu_3} (\nu_2)_{\frac{D}{2}-\nu_3}} \times {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -\sigma, \nu_3, \nu_1 + \nu_3 - \frac{D}{2}, \nu_2 + \nu_3 - \frac{D}{2} \\ \frac{D}{2}, \frac{\nu_3-\sigma}{2}, \frac{\nu_3-\sigma+1}{2} \end{matrix}; -\frac{p^2}{4m^2} \right), \quad (2.51)$$

onde é usada a notação  ${}_mF_n \left( \begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_m \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{matrix}; z \right) \equiv {}_mF_n(\alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_n; z)$ . A solução para  $n_2$  é,

$$\mathcal{F}_{\text{sun.}[n_2]} = \frac{(p^2)^\sigma}{(4\pi)^D} \frac{(\nu_1)_{\frac{D}{2}-2\nu_1} (\nu_2)_{\frac{D}{2}-2\nu_2} (\nu_3)_{\frac{D}{2}-2\nu_3}}{(-\sigma)_{\frac{D}{2}+2\sigma}} \times {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -\sigma, 1-\sigma - \frac{D}{2}, \frac{1-\nu_3-\sigma}{2}, \frac{2-\nu_3-\sigma}{2} \\ 1-\nu_3-\sigma, 1+\nu_1-\frac{D}{2}, 1+\nu_2-\frac{D}{2} \end{matrix}; -\frac{4m^2}{p^2} \right). \quad (2.52)$$

A solução para  $n_4$  é,

$$\mathcal{F}_{\text{sun.}[n_4]} = \frac{(p^2)^{-\nu_3} (m^2)^{\sigma+\nu_3}}{(4\pi)^D} (\nu_1)_{-\frac{D}{2}} (\nu_2)_{-\frac{D}{2}} \times {}_4F_3 \left( \begin{matrix} \nu_3, 1+\nu_3 - \frac{D}{2}, \frac{1+\nu_3+\sigma}{2}, \frac{2+\nu_3+\sigma}{2} \\ 1+\sigma+\nu_3, 1+\frac{D}{2}-\nu_1, 1+\frac{D}{2}-\nu_2 \end{matrix}; -\frac{4m^2}{p^2} \right). \quad (2.53)$$

A solução para  $n_5$  é,

$$\mathcal{F}_{\text{sun.}[n_5]} = \frac{(p^2)^{\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_3} (m^2)^{\frac{D}{2}-\nu_2}}{(4\pi)^D} \frac{(1+\sigma+\nu_2-\frac{D}{2})_{\frac{D}{2}-2\sigma-2\nu_2} (\nu_2)_{-\frac{D}{2}}}{(\frac{D}{2}-\nu_1)_{2\nu_1-\frac{D}{2}} (\frac{D}{2}-\nu_3)_{2\nu_3-\frac{D}{2}}} \times {}_4F_3 \left( \begin{matrix} \nu_1+\nu_3 + \frac{D}{2}, 1-\nu_2-\sigma, \frac{1+\nu_1-\nu_2}{2}, \frac{2+\nu_1-\nu_2}{2} \\ 1+\nu_1-\frac{D}{2}, 1+\nu_3-\frac{D}{2}, 1+\frac{D}{2}-\nu_2 \end{matrix}; -\frac{4m^2}{p^2} \right). \quad (2.54)$$

---

<sup>†</sup>Neste caso  $\sigma = D - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3$ . Note-se que em cada diagrama tem se usado uma definição de  $\sigma$  diferente. Porém, pode induzir-se a fórmula geral  $\sigma = L \frac{D}{2} - \sum_j \nu_j$ , onde  $L$  é o número de loops do diagrama e  $D$  a dimensão.

Finalmente,  $\mathcal{F}_{\text{sun.}[n_6]}$  é igual a  $\mathcal{F}_{\text{sun.}[n_5]}$  mas com a permutação  $\nu_1 \leftrightarrow \nu_2$ . Segundo a região de convergência das séries hipergeométricas, a solução geral do diagrama *pôr de sol* é,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\text{sun.}I} &= \mathcal{F}_{\text{sun.}[n_2]} + \mathcal{F}_{\text{sun.}[n_4]} + \mathcal{F}_{\text{sun.}[n_5]} + \mathcal{F}_{\text{sun.}[n_6]}, \quad \left| \frac{4m^2}{p^2} \right| < 1; \\ \mathcal{F}_{\text{sun.}II} &= \mathcal{F}_{\text{sun.}[n_1]}, \quad \left| \frac{p^2}{4m^2} \right| > 1.\end{aligned}\quad (2.55)$$

O caso não massivo do diagrama *pôr de sol* é particularmente simples pois não envolve nenhuma função hipergeométrica. Ele é extraído facilmente da solução  $\mathcal{F}_{\text{sun.}[n_2]}$ , que é a única que sobrevive ao limite  $m \rightarrow 0$ ,

$$\mathcal{F}_{\text{sun.}[n_2]}^{m=0} = \frac{(p^2)^\sigma}{(4\pi)^D} \frac{(\nu_1)_{\frac{D}{2}-2\nu_1} (\nu_2)_{\frac{D}{2}-2\nu_2} (\nu_3)_{\frac{D}{2}-2\nu_3}}{(-\sigma)_{\frac{D}{2}+2\sigma}}. \quad (2.56)$$

## 2.4 Diagrama triangular a dois loops

Quando é possível misturar vértices triplos e vértices quádruplos, a teoria é autenticamente do tipo  $\phi^3 \oplus \phi^4$ . O diagrama a três pontos e dois loops da figura 2.5 é um exemplo dessa mistura de vértices. Para evitar complicações prolongadas, tal como já foi visto em alguns dos exemplos precedentes, assume-se que o diagrama é não massivo. Portanto, a integral que será calculada é,

$$\mathcal{F}_{\text{D.Tr.}}(p_i; D, \nu_i) = \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^D} \frac{1}{[q_1^2]^{\nu_1} [(q_1 - p_1)^2]^{\nu_2} [(q_1 + q_2 - p_2)^2]^{\nu_3} [q_2^2]^{\nu_4}}. \quad (2.57)$$

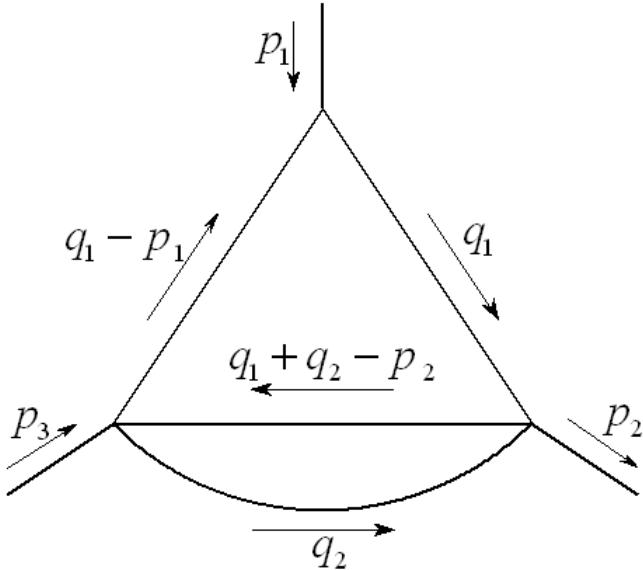


Figura 2.5: Diagrama triangular a dois loops.

Poderia aplicar-se o NDIM ilustrado nos exemplos precedentes para solucionar (2.57). Mas esta integral tem uma forma de solução bastante mais simples [16].

Ao examinar a estrutura do denominador, nota-se que a integral com respeito a  $q_2$  sozinha envolve uma integral tipo *bolha* não massiva, tal como na equação (2.23), mas com  $p = p_2 - q_1$ . Dessa forma tem-se,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{D.Tr.}}(p_i; D, \nu_i) &= \frac{(\nu_3)^{\frac{D}{2}-\nu_3-\nu_4} (\nu_4)^{\frac{D}{2}-\nu_3-\nu_4}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} (\nu_3 + \nu_4 - \frac{D}{2})^{\frac{3D}{2}-2\nu_3-2\nu_4}} \times \\ &\quad \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^D} \frac{1}{[q_1^2]^{\nu_1} [(q_1 - p_1)^2]^{\nu_2} [(q_1 - p_2)^2]^{\nu_3+\nu_4-\frac{D}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Mas aqui encontra-se de novo uma forma conhecida. Trata-se da integral triangular a um loop não massiva, tal como nas equações (2.40-2.42), mas com o expoente  $\nu_3$  modificado e a permutação  $p_1 \leftrightarrow p_2$ . Em conclusão, a solução de (2.57) é,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{D.Tr.}}(p_i; D, \nu_i) &= \frac{(\nu_4)^{\frac{D}{2}-2\nu_4} (\nu_3)^{\frac{D}{2}-2\nu_3}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} (\nu_3 + \nu_4 - \frac{D}{2})^{\frac{3D}{2}-2\nu_3-2\nu_4}} \times \\ &\quad \mathcal{F}_{\text{tri.}}^B(p_1 \leftrightarrow p_2, p_3; \nu_1, \nu_2, \nu_3 + \nu_4 - \frac{D}{2}; D). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Em conclusão, há 12 soluções diferentes, pois essa é a multiplicidade da soluções no triângulo a um loop não massivo.

Se o NDIM completo fosse utilizado, após a integração nos momentos internos da representação de Schwinger de (2.57) se chegaria a,

$$\mathcal{F}_{\text{D.Tr.}}(p_i; D, \nu_i) = \frac{\int D\vec{x}}{(4\pi)^D \phi^{\frac{D}{2}}} \exp \left\{ -\phi^{-1} [x_1 x_2 (x_3 + x_4) p_1^2 + x_1 x_3 x_4 p_2^2 + x_2 x_3 x_4 p_3^2] \right\}, \quad (2.60)$$

com  $\phi = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_4 x_3$ . A solução em série otimizada de (2.57) através do NDIM seria então,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{D.Tr.}}(p_i; D, \nu_i) &= (-4\pi)^{-D} \sum_{n_1, \dots, n_9} \frac{\Gamma(1 - \nu_1) \dots \Gamma(1 - \nu_4) \Gamma(1 + n_1 + n_9) \Gamma(1 + n_9 + n_5)}{\Gamma(1 + n_1) \dots \Gamma(1 + n_8)} \times \\ &\quad (p_1^2)^{n_1} (p_2^2)^{n_2} (p_3^2)^{n_3} \Delta(n_s, D), \end{aligned} \quad (2.61)$$

onde  $\Delta(n_s, D)$  representa os sete vínculos,

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_6 &= -\nu_1 \\ n_1 + n_3 + n_7 &= -\nu_2 \\ n_2 + n_3 + n_5 + n_8 &= -\nu_3 \\ n_2 + n_3 + n_5 + n_4 &= -\nu_4 \\ n_1 + n_2 + n_3 &= \sigma \\ n_6 + n_7 &= n_9 \\ n_8 + n_4 &= n_1 + n_9. \end{aligned} \quad (2.62)$$

O sistema de equações lineares precedente oferece exatamente 12 soluções diferentes e não nulas e todas coincidem com as doze soluções implícitas na fórmula (2.59). A completa igualdade entre as soluções (2.59) e (2.61) é um bom exemplo da coerência

interna do NDIM. Aliás, o diagrama triangular a dois loops não massivo é também uma ilustração dramática da vantagem de usar o NDIM otimizado. Sem o procedimento da fatorização dos parâmetros de Schwinger, o NDIM oferece 81 soluções não triviais, muitas delas em termos de funções hipergeométricas de três e quatro variáveis [7]. A otimização do método reduz os resultados a 12 soluções em termos de funções de Appel de duas variáveis.

# Capítulo 3

---

## Aplicação à QED a um loop

Como aplicação simples de algumas das integrais achadas no capítulo anterior vamos considerar as integrais a um loop que aparecem no processo de renormalização da eletrodinâmica quântica (QED). O numerador das integrais na QED costuma ter estrutura tensorial e para a sua manipulação é útil considerar a álgebra das matrizes de Dirac em uma dimensão generalizada,

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}I; \quad (3.1)$$

de onde surgem as identidades,

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= \eta^\mu_\mu = 2\omega; \\ \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_\mu &= 2(1-\omega) \gamma^\alpha; \\ \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu &= 4\eta^{\alpha\beta} + 2(\omega-2) \gamma^\alpha \gamma^\beta; \\ \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma_\mu &= 2(2-\omega) \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta - 2\gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\alpha. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Também é útil considerar as identidades dos traços,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta) &= 2^\omega \eta_{\mu\nu}; \\ \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\nu) &= 0; \\ \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\mu) &= 2^\omega [\eta_{\alpha\beta} \eta_{\nu\mu} - \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} + \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu}]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Neste capítulo serão usadas as integrais gaussianas,

$$\int \frac{d^{2\omega}Q}{(2\pi)^{2\omega}} e^{-Q^2} = \frac{1}{(4\pi)^\omega}; \quad (3.4a)$$

$$\int \frac{d^{2\omega}Q}{(2\pi)^{2\omega}} e^{-Q^2} Q^\mu = 0; \quad (3.4b)$$

$$\int \frac{d^{2\omega}Q}{(2\pi)^{2\omega}} e^{-Q^2} Q^\mu Q^\nu = \frac{\eta^{\mu\nu}}{2(4\pi)^\omega}. \quad (3.4c)$$

Durante o processo de regularização dimensional da QED costuma-se escrever  $e\mu^{2-\omega}$  em vez de  $e$  para fazer que a constante de acoplamento seja adimensional independentemente do parâmetro de dimensão  $\omega$ . A variável  $\mu$  chama-se fator de massa

e é um parâmetro que indica a energia à qual está sendo testada a teoria. Neste capítulo este fator de massa será negligenciado na maioria das expressões. Em geral, as integrais serão feitas no espaço euclidiano mas os sinais estão calibrados de tal forma que para voltar aos resultados finais no espaço de Minkowski só se precisam fazer as transformações inversas a (1.9a-1.9c).

### 3.1 Autoenergia do elétron

A primeira integral divergente é a autonergia do elétron,

$$\Sigma(p, 2\omega) = -e^2 \frac{\int d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\gamma_\mu [i(\gamma \cdot p - \gamma \cdot q) - m] \gamma^\mu}{[q^2]^{\nu_1} [(p-q)^2 + m^2]^{\nu_2}}, \quad (3.5)$$

onde a dimensão é parametrizada como  $D = 2\omega$  e os expoentes dos propagadores estão generalizados, embora se saiba que  $\nu_1 = \nu_2 = 1$ . A integral apresentada corresponde ao diagrama da figura 3.1. O denominador tem claramente a estrutura da integral do diagrama tipo *bolha* no caso especial  $\mathcal{F}_{\text{bub}}^B$ . Contudo, o numerador tem que ser levado a conta durante o processo de integração com respeito aos momentos internos tal como se mostra na equação (1.25). De fato, aplicando a fórmula (1.25) tem-se,

$$\begin{aligned} \Sigma(p, 2\omega) &= -e^2 \frac{\int d^{2\omega} Q}{(2\pi)^{2\omega}} \int D\vec{x} \frac{e^{-\frac{x_1 x_2 p^2}{x_1 + x_2} - x_2 m^2}}{(x_1 + x_2)^\omega} e^{-Q^2} \\ &\quad \gamma_\mu \left[ i \left( \gamma \cdot p \left( 1 - \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right) - (x_1 + x_2)^{-\frac{1}{2}} \gamma \cdot Q \right) - m \right] \gamma^\mu. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Usando (3.4a) e (3.4b), a solução neste caso é somente,

$$\Sigma(p, 2\omega) = \frac{-e^2}{(4\pi)^\omega} \int D\vec{x} \frac{e^{-\frac{x_1 x_2 p^2}{x_1 + x_2} - x_2 m^2}}{(x_1 + x_2)^\omega} \gamma_\mu \left[ i \gamma \cdot p \left( 1 - \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right) - m \right] \gamma^\mu. \quad (3.7)$$

O único termo que é diferente com respeito à integral escalar normal é o quociente  $\frac{x_2}{x_1 + x_2}$ . Mas ele tem uma interpretação simples de acordo com a representação de Schwinger. Ao lembrar que na abreviação  $\int D\vec{x}$  existe um fator  $x_2^{\nu_2-1}$ , o fator  $x_2$  no numerador pode ser visto somente como uma mudança no expoente ( $\nu_2 \rightarrow \nu_2 + 1$ ). Por outro lado, visto que há um fator  $(x_1 + x_2)^{-\omega}$  na representação da integral escalar normal, o fator  $(x_1 + x_2)$  no denominador sugere que se trata da mesma integral escalar mas com a dimensão aumentada  $\omega \rightarrow \omega + 1^*$ . Desta forma, e tal como foi antecipado na seção 1.5, a integral tensorial foi reduzida a uma combinação linear de integrais escalares, todas elas com a mesma estrutura no denominador mas com os expoentes e a dimensão diferentes. A combinação linear é,

$$\Sigma(p, 2\omega) = \frac{-2e^2}{(4\pi)^\omega} \{ [i(1-\omega) \gamma \cdot p - m\omega] f_1 - i(1-\omega) \gamma \cdot p f_2 \}, \quad (3.8)$$

onde foi usada uma das fórmulas (3.2) e  $f_1$  e  $f_2$  representam as integrais escalares,

$$f_1 = (4\pi)^\omega \mathcal{F}_{\text{bub}}^B(p, m; \nu_1 = 1, \nu_2 = 1, D = 2\omega); \quad (3.9a)$$

$$f_2 = (4\pi)^{\omega+1} \mathcal{F}_{\text{bub}}^B(p, m; \nu_1 = 1, \nu_2 = 2, D = 2\omega + 2). \quad (3.9b)$$

---

\*Contudo, deve ser lembrado que no símbolo  $\int D\vec{x}$  estão contidas funções gamma dependentes das  $\nu_j$ . Por isso, devem ser introduzidos fatores do tipo  $(\nu_j)_s$  por cada fator  $x_j^s$  no interior da integral.

Por simplicidade, escolhe-se a região de convergência de  $\mathcal{F}_{\text{bub},II}^B$  de (2.22) para obter,

$$f_1(p, 2\omega) = (m^2)^{\omega-2} \frac{\Gamma(2-\omega)}{\omega-1} {}_2F_1(1, 2-\omega; \omega; -p^2/m^2); \quad (3.10a)$$

$$f_2(p, 2\omega) = (m^2)^{\omega-2} \frac{\Gamma(2-\omega)}{\omega} {}_2F_1(1, 2-\omega; \omega+1; -p^2/m^2). \quad (3.10b)$$

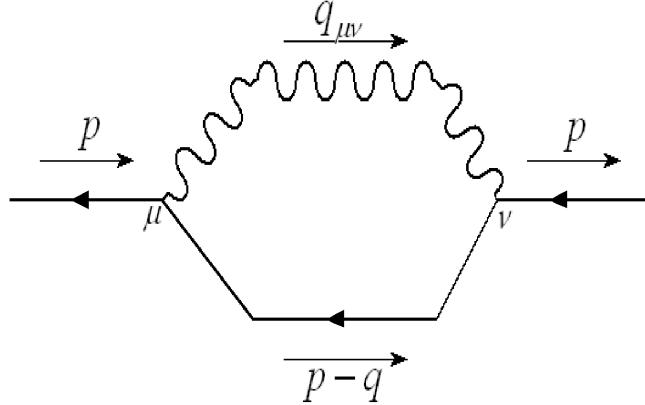


Figura 3.1: Diagrama a um loop da correção ao propagador do elétron.

No esquema de renormalização usual [20], costuma-se exprimir (3.8) como,

$$\Sigma(p, 2\omega) = A(\omega) + (ip \cdot \gamma + m) B(\omega) + \Sigma_f(p, 2\omega), \quad (3.11)$$

onde espera-se que os termos  $A(\omega)$  e  $B(\omega)$  independam de  $p$  e sejam os únicos que contenham divergências ultravioletas. O subíndice no termo  $\Sigma_f(p, 2\omega)$  indica que é finito com respeito às divergências ultravioletas, mas pode conter ainda eventuais divergências infravermelhas. Para extrair os termos  $A(\omega)$  e  $B(\omega)$  enxerga-se (3.8) como uma série de Taylor com respeito a  $i\cancel{p}$  ao redor de  $i\cancel{p} = -m$ , e só se precisa encontrar os dois primeiros termos da série. Desta forma,

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \Sigma(p, 2\omega)|_{i\gamma \cdot p = -m} \\ &= \frac{2e^2 m}{(4\pi)^\omega} \left[ f_1|_{i\gamma \cdot p = -m} - (1-\omega) f_2|_{i\gamma \cdot p = -m} \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

e,

$$\begin{aligned} B(\omega) &= \frac{\partial \Sigma(p, 2\omega)}{\partial(i\cancel{p})} \Big|_{i\gamma \cdot p = -m} \\ &= \frac{2e^2}{(4\pi)^\omega} \left[ (\omega-1) \left( f_1|_{i\gamma \cdot p = -m} - f_2|_{i\gamma \cdot p = -m} \right) + \right. \\ &\quad \left. m \frac{\partial f_1}{\partial(i\cancel{p})} \Big|_{i\gamma \cdot p = -m} + m(\omega-1) \frac{\partial f_2}{\partial(i\cancel{p})} \Big|_{i\gamma \cdot p = -m} \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Deve lembrar-se que  $\not{p}^2 = p^2$  e que nas derivadas  $\frac{\partial}{\partial(i\not{p})} = -2i\not{p}\frac{\partial}{\partial p^2}$ . Com isto em mente e aplicando (C.12) e (C.14), obtém-se,

$$\begin{aligned} f_1|_{i\gamma\cdot p=-m} &= m^{2\omega-4} \frac{\Gamma(2-\omega)}{(2\omega-3)}; \\ f_2|_{i\gamma\cdot p=-m} &= m^{2\omega-4} \frac{\Gamma(2-\omega)}{(2\omega-2)}; \\ \left. \frac{\partial f_1}{\partial(i\not{p})} \right|_{i\gamma\cdot p=-m} &= \frac{m^{2\omega-5} \Gamma(2-\omega)}{(2\omega-3)}; \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial(i\not{p})} \right|_{i\gamma\cdot p=-m} &= \frac{m^{2\omega-5} \Gamma(2-\omega)(\omega-2)}{(\omega-1)(2\omega-3)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Que ao serem introduzidos em (3.12) e (3.13) chega-se a,

$$A(\omega) = \frac{e^2 m^{2\omega-3} (2\omega-1)}{(4\pi)^\omega (2\omega-3)} \Gamma(2-\omega), \quad (3.15)$$

e,

$$B(\omega) = \frac{e^2 m^{2\omega-4} (2\omega-1)}{(4\pi)^\omega (2\omega-3)} \Gamma(2-\omega). \quad (3.16)$$

É interessante conferir em que sentido  $\Sigma_f(p, 2\omega)$  é finito. Para isso, utilizam-se os resultados precedentes, combinando (3.8), (3.10a) e (3.10b); chegando-se à expressão,

$$\begin{aligned} \Sigma_f(p, 2\omega) &= \frac{e^2 m^{2\omega-3} \Gamma(2-\omega)}{(4\pi)^\omega} \left[ \left( \frac{2H_1}{\omega-1} + \frac{2(\omega-1)H_2}{\omega} - \frac{2\omega-1}{2\omega-3} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{(i\not{p}+m)}{m} \left( 2H_1 - \frac{2(\omega-1)H_2}{\omega} - \frac{2\omega-1}{2\omega-3} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde  $H_1$  e  $H_2$  representam as funções hipergeométricas em  $f_1$  e  $f_2$  respectivamente. Em particular,

$$\begin{aligned} H_1 &= 1 + \frac{2-\omega}{\omega} \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) + \frac{(2-\omega)(3-\omega)}{\omega(\omega+1)} \left( \frac{-p^2}{m^2} \right)^2 + \mathcal{O} \left[ \left( \frac{-p^2}{m^2} \right)^3 \right]; \\ H_2 &= 1 + \frac{2-\omega}{\omega+1} \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) + \frac{(2-\omega)(3-\omega)}{(\omega+1)(\omega+2)} \left( \frac{-p^2}{m^2} \right)^2 + \mathcal{O} \left[ \left( \frac{-p^2}{m^2} \right)^3 \right]. \end{aligned}$$

Percebe-se que se a ordem zero é ignorada, existe sempre um fator  $(2-\omega)$  acompanhando os termos das séries hipergeométricas  $H_1$  e  $H_2$ . Se fosse possível fatorizar este  $(2-\omega)$  fora dos parênteses, ele ficaria multiplicando à função  $\Gamma(2-\omega)$ . Visto que perto do valor da dimensão física de interesse ( $\omega \rightarrow 2$ ), a divergência só existe na função  $\Gamma(2-\omega)$ ; a fórmula (C.2) indica que a fatorização de  $(2-\omega)$  faria que a expressão fosse finita no limite  $\omega = 2$ ; isto é,  $\Sigma_f$  ficaria renormalizado. Para saber se a fatorização é possível, só deve ser analisada a ordem zero nas séries  $H_1$  e  $H_2$ . A ordem zero de (3.17) é,

$$\begin{aligned} \Sigma_f(p, 2\omega) &= -\frac{e^2 m^{2\omega-3} \Gamma(2-\omega)}{(4\pi)^\omega \omega (2\omega-3)} \left[ \frac{(2-\omega)(2\omega^2-3\omega+3)}{\omega-1} + \right. \\ &\quad \left. \frac{(i\not{p}+m)}{m} (2\omega^2-5\omega+6) \right] + \mathcal{O} \left( \frac{-p^2}{m^2} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Destes resultados conclui-se que a fatorização de  $(2 - \omega)$  só é possível no termo que independe de  $(i\cancel{p} + m)$ . Este termo corresponde à parte de  $\Sigma_f$  renormalizada por  $A(\omega)$ . O termo que depende de  $(i\cancel{p} + m)$  corresponde à parte renormalizada por  $B(\omega)$ . Esta parte não ficou finita devido a uma divergência infravermelha causada pelo fato de que a linha interna que corresponde ao fóton tem massa nula. Todos estes resultados (inclusive a localização da divergência infravermelha) concordam perfeitamente com os obtidos na referência [20] onde este exemplo foi resolvido pelos métodos usuais de integração usando a representação de Feynman.

### 3.2 Polarização do vácuo

A segunda integral divergente a um loop da QED é a polarização do vácuo,

$$\Pi_{\mu\nu}(p^2; 2\omega) = -e^2 \text{Tr} \frac{\int d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\gamma_\mu (i\gamma \cdot q - m) \gamma_\nu [i\gamma \cdot (q - p) - m]}{[q^2 + m^2]^{\nu_1} [(q - p)^2 + m^2]^{\nu_2}}. \quad (3.19)$$

A topologia do diagrama continua sendo do tipo bolha; mas desta vez a estrutura do denominador revela-se como a do caso  $\mathcal{F}_{\text{bub.}}^A$ , cuja solução está nas equações (2.15-2.17). O numerador tem que ser levado a conta de novo. Antes da integração com respeito a  $q$ ,

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(p^2; 2\omega) &= -e^2 \frac{\int d^{2\omega}Q}{(2\pi)^{2\omega}} \int D\vec{x} \phi^{2\omega} e^{-\frac{x_1 x_2 p^2}{x_1 + x_2} - (x_1 + x_2)m^2} e^{-Q^2} \times \\ &\quad \text{Tr} \gamma_\mu [i\gamma \cdot (\phi Q + \phi^2 x_2 p) - m] \gamma_\nu [i\gamma \cdot (\phi Q - \phi^2 x_1 p) - m] \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde  $\phi = (x_1 + x_2)^{-\frac{1}{2}}$ . Após um pouco de manipulação com as fórmulas (3.3) tem-se,

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(p^2; 2\omega) &= -e^2 \frac{\int d^{2\omega}Q}{(2\pi)^{2\omega}} \int D\vec{x} \frac{e^{-\frac{x_1 x_2 p^2}{x_1 + x_2} - (x_1 + x_2)m^2}}{(x_1 + x_2)^\omega} e^{-Q^2} \times \\ &\quad 2^\omega [\phi^2 (\eta_{\mu\nu} Q^2 - 2Q_\mu Q_\nu) + \phi^4 x_2 x_1 (2p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) + m^2 \eta_{\mu\nu}], \end{aligned}$$

onde foram ignorados os termos lineares com respeito a  $Q$  pois eles são nulos segundo (3.4b). Dadas (3.4a-3.4c), tem-se finalmente,

$$\Pi_{\mu\nu}(p^2; 2\omega) = \frac{-e^2}{(2\pi)^\omega} \{ \eta_{\mu\nu} [m^2 f_1 + (\omega - 1) f_2] + (2p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) f_3 \}; \quad (3.21)$$

onde,

$$f_1 = (4\pi)^\omega \mathcal{F}_{\text{bub.}}^A(p, m; \nu_1 = 1, \nu_2 = 1, D = 2\omega); \quad (3.22a)$$

$$f_2 = (4\pi)^{\omega+1} \mathcal{F}_{\text{bub.}}^A(p, m; \nu_1 = 1, \nu_2 = 1, D = 2\omega + 2); \quad (3.22b)$$

$$f_3 = (4\pi)^{\omega+2} \mathcal{F}_{\text{bub.}}^A(p, m; \nu_1 = 2, \nu_2 = 2, D = 2\omega + 4). \quad (3.22c)$$

Visto que na renormalização interessa o limite  $p \rightarrow 0$ , toma-se a região de convergência de  $\mathcal{F}_{\text{bub.}II}^A$  tal como é mostrada em (2.18),

$$f_1 = (m^2)^{\omega-2} \Gamma(2 - \omega) {}_2F_1 \left( 1, 2 - \omega; \frac{3}{2}; \frac{-p^2}{4m^2} \right); \quad (3.23a)$$

$$f_2 = (m^2)^{\omega-1} \Gamma(1 - \omega) {}_2F_1 \left( 1, 1 - \omega; \frac{3}{2}; \frac{-p^2}{4m^2} \right); \quad (3.23b)$$

$$f_3 = \frac{1}{6} (m^2)^{\omega-2} \Gamma(2 - \omega) {}_2F_1 \left( 2, 2 - \omega; \frac{5}{2}; \frac{-p^2}{4m^2} \right). \quad (3.23c)$$

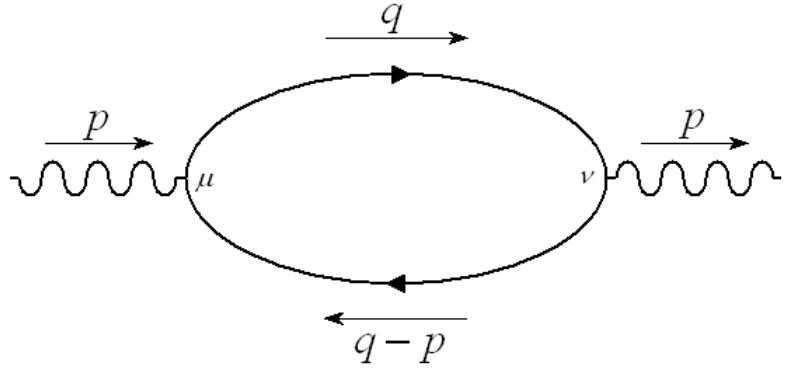


Figura 3.2: Diagrama da polarização do vácuo a um loop.

Segundo um análise que pode ser feito entre funções hipergeométricas contiguas [32, p. 103], pode mostrar-se que,

$${}_2F_1\left(1, 2 - \omega; \frac{3}{2}; \frac{-p^2}{4m^2}\right) - {}_2F_1\left(1, 1 - \omega; \frac{3}{2}; \frac{-p^2}{4m^2}\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{-p^2}{4m^2}\right) {}_2F_1\left(2, 2 - \omega; \frac{5}{2}; \frac{-p^2}{4m^2}\right), \quad (3.24)$$

o qual é equivalente a dizer que  $m^2 f_1 + (\omega - 1) f_2 = -p^2 f_3$ . Isto simplifica o resultado à expressão compacta,

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(p^2; 2\omega) &= \Pi(p^2; 2\omega) (p^2 \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \\ &= \frac{e^2 (m^2)^{\omega-2} \Gamma(2-\omega)}{3(2\pi)^\omega} {}_2F_1\left(2, 2 - \omega; \frac{5}{2}; \frac{-p^2}{4m^2}\right) (p^2 \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu). \end{aligned}$$

A possibilidade de fatorizar o tensor  $(p^2 \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)$  que independe do parâmetro regularizador  $\omega$  é uma vantagem notável do método da regularização dimensional. Esta fatorização corresponde à transversalidade do fóton (invariança de Gauge do tensor de polarização) e é uma simetria que a RD conserva. Com este resultado, a identidade invariante-Gauge  $p^\mu \Pi_{\mu\nu}(p^2; 2\omega) = 0$  é válida independentemente da regularização. O fato de que estas simetrias se conservem após a regularização (e após a renormalização) garante a unitariedade da matriz de espalhamento termo por termo na expansão perturbativa. No momento de renormalizar só será necessário introduzir um contratermo  $\Pi(0; 2\omega)$  na parte escalar,

$$\Pi_f(p^2; 2\omega) = \Pi(p^2; 2\omega) - \Pi(0; 2\omega). \quad (3.25)$$

A finitude de  $\Pi_f$  para qualquer valor de  $\omega$  é fácil de conferir, inclusive o limite  $\omega \rightarrow 2$  não envolve nenhuma divergência. As divergências infravermelhas estão descartadas pois o diagrama da fig. 3.2 não contém linhas internas de massa nula. De novo, os resultados concordam com aqueles obtidos na referência [20].

### 3.3 Correção ao vértice

A última e mais complexa correção a um loop da QED é a correção ao vértice cujo diagrama é mostrado na figura 3.3. Este diagrama costuma ser calculado com as

pernas externas  $p_1$  e  $p_3$  *on-shell*, satisfazendo-se as equações de Dirac (em espaço euclidiano),

$$\bar{u}(p_3)(i\cancel{p}_3 + m) = (i\cancel{p}_1 + m)u(p_1) = 0. \quad (3.26)$$

A integral correspondente é então,

$$\Lambda^\mu(p_2, m; 2\omega) = -e^2 \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\bar{u}(p_3)\gamma^\alpha [i(q-p_2)\cdot\gamma - m]\gamma^\mu [iq\cdot\gamma - m]\gamma_\alpha u(p_1)}{[q^2 + m^2]^{\nu_1} [(q-p_2)^2 + m^2]^{\nu_2} [(q-p_1)^2]^{\nu_3}}, \quad (3.27)$$

cujo denominador é o caso particular  $\mathcal{F}_{\text{tri.}}^C$  em (2.43). Devido à complexidade da integral, desde o início é útil antecipar a estrutura da solução. Usando argumentos de covariança de Lorentz, e inclusive a identidade Gordon,

$$\bar{u}(p_3)(p_1^\mu + p_3^\mu)u(p_1) = \bar{u}(p_3)\left[\frac{1}{2}(\cancel{p}_2\gamma^\mu - \gamma^\mu\cancel{p}_2) + 2im\gamma^\mu\right]u(p_1), \quad (3.28)$$

espera-se que  $\Lambda^\mu$  possa ser expressa segundo os famosos *fatores de forma* [23, 22],

$$\Lambda^\mu(p_2, m; 2\omega) = \bar{u}(p_3)\left[\gamma^\mu F_1(p_2^2, m; 2\omega) - \frac{m}{2}(p_2)_\nu \sigma^{\mu\nu} F_2(p_2^2, m; 2\omega)\right]u(p_1), \quad (3.29)$$

onde  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ , e  $F_1$  e  $F_2$  são funções escalares.

Apesar de saber já a estrutura final de  $\Lambda^\mu$ , ainda fica um caminho árduo para obter os fatores de forma a partir da integral (3.27). Após a parametrização de Schwinger e a mudança de variável  $q = \phi Q + x_2 p_2 + x_3 p_1$ , é possível realizar a integração gaussiana com respeito a  $Q$ , e o numerador adquire a forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = & \bar{u}(p_3)\gamma^\alpha \left[ -\frac{1}{2}\phi^2\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma_\beta - \phi^4(x_3\cancel{p}_3 - x_1\cancel{p}_2)\gamma^\mu(x_2\cancel{p}_2 + x_3\cancel{p}_1) + \right. \\ & \left. + im\phi^2(x_1\cancel{p}_2\gamma^\mu - x_3\cancel{p}_3\gamma^\mu - x_2\gamma^\mu\cancel{p}_2 - x_3\gamma^\mu\cancel{p}_1) + m^2\gamma^\mu \right] \gamma_\alpha u(p_1), \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde  $\phi = (x_1 + x_2 + x_3)^{-\frac{1}{2}}$ . Como nos casos precedentes, é claro que foi obtida uma combinação linear de integrais escalares (neste caso do tipo  $\mathcal{F}_{\text{tri.}}^C$ ) com os parâmetros de dimensão  $\omega$  e os expoentes  $\nu_j$  modificados.

O seguinte passo envolve uma intrincada manipulação algébrica do numerador; incluindo a álgebra das matrizes de Dirac, e as equações (3.26) e (3.28). Também é muito importante aproveitar a simetria do diagrama, a qual permite identificar os produtos dos parâmetros de Schwinger,  $\phi^2 x_1 \equiv \phi^2 x_2$ ,  $\phi^4 x_3 x_1 \equiv \phi^4 x_3 x_2$ . Igualmente é útil considerar as identidades  $1 = \phi^2(x_1 + x_2 + x_3)$ ,  $\phi^2 x_3 = \phi^4 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)$ . Se estas simplificações não fossem levadas a conta, o número de integrais escalares diferentes mostradas no numerador pareceria ascender a nove; mas com as simetrias este número se reduz a cinco. Portanto, a partir de (2.44) escolhem-se as seguintes cinco funções particulares,

$$\begin{aligned} f_1[1] &= (m^2)^{\omega-3} \frac{\Gamma(3-\omega)}{(2\omega-4)} {}_2F_1\left(1, 3-\omega; \frac{3}{2}; \frac{-p_2^2}{4m^2}\right); \\ f_2[\phi^2] &= (m^2)^{\omega-2} \frac{\Gamma(2-\omega)}{(2\omega-2)} {}_2F_1\left(1, 2-\omega; \frac{3}{2}; \frac{-p_2^2}{4m^2}\right); \\ f_3[\phi^2 x_1] &= (m^2)^{\omega-3} \frac{\Gamma(3-\omega)}{2(2\omega-3)} {}_2F_1\left(1, 3-\omega; \frac{3}{2}; \frac{-p_2^2}{4m^2}\right); \\ f_4[\phi^2 x_1 x_3] &= (m^2)^{\omega-3} \frac{\Gamma(3-\omega)}{2(2\omega-2)(2\omega-3)} {}_2F_1\left(1, 3-\omega; \frac{3}{2}; \frac{-p_2^2}{4m^2}\right); \\ f_5[\phi^2 x_1 x_2] &= (m^2)^{\omega-3} \frac{\Gamma(3-\omega)}{(2\omega-2)6} {}_2F_1\left(2, 3-\omega; \frac{5}{2}; \frac{-p_2^2}{4m^2}\right); \end{aligned}$$

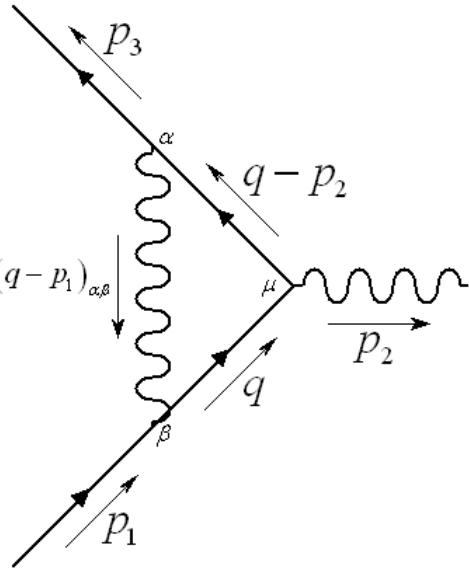


Figura 3.3: Diagrama de correção ao vértice da QED a um loop.

onde nos parânteses quadrados foi indicada a combinação de parâmetros de Feynman que altera a integral escalar original. Depois de que toda a tediosa manipulação algébrica é feita, o fator de forma  $F_2$  fica,

$$\begin{aligned} F_2(p_2^2, m; 2\omega) &= \frac{8m^2e^2}{(4\pi)^\omega} [(2-\omega)f_3 + (\omega-1)f_4] \\ &= \frac{e^2m^{2\omega-4}}{(4\pi)^\omega} \frac{(10-4\omega)}{(2\omega-3)} \Gamma(3-\omega) {}_2F_1\left(1, 3-\omega; \frac{3}{2}; \frac{-p_2^2}{4m^2}\right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

O valor particular  $F_2(p_2^2 = 0, 2\omega = 4) = \frac{e^2}{8\pi^2} = \frac{\alpha}{2\pi}$  é muito famoso por ser a correção a primeira ordem da razão giromagnética que explica o momento anómalo do elétron. Este fator de forma permanece finito independentemente da dimensão. Pelo contrário, o fator de forma  $F_1$  contém divergências tanto infravermelhas como ultravioletas,

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{2e^2}{(4\pi)^\omega} \left\{ f_1(2m^2 + p_2^2) - f_3[2(\omega+1)m^2 + 2p_2^2] + \right. \\ &\quad \left. f_4[2(\omega-1)m^2] + (\omega-1)p_2^2f_5 - (1-\omega)^2f_2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Na expressão anterior só existem divergências quando  $\omega \rightarrow 2$  nas funções  $f_1$  e  $f_2$ . Todavia, cada uma delas tem um caráter diferente. A divergência em  $f_2$  pode ser eliminada substraindo um contratermo do tipo  $\frac{\alpha}{4\pi(2-\omega)}(e\gamma^\mu)$  e é devida a uma divergência ultravioleta. Esta divergência ultravioleta coincide com o valor encontrado na literatura. A divergência em  $f_1$  é do tipo infravermelho e está associada à massa nula do fóton.

A solução geral de (3.27) encontrada nesta seção é difícil de comparar através dos resultados de outros autores pois não foi possível encontrar na literatura uma expressão completa da integral com a dimensão generalizada tal como é apresentada

aqui. Contudo, são conhecidas expressões para limites particulares dos argumentos. O fato de ter-se encontrado a correção adequada à razão giromagnética e o contratermo à divergência ultravioleta correto já é um indício da validade dos resultados. Também poderia comparar-se com o limite de transferência nula ( $\not{p}_2 = p_2^2 = 0$ ),

$$\Lambda^\mu (\not{p}_2 = 0; 2\omega) = \bar{u}_3(p_3) \gamma^\mu u_1(p_1) \frac{\alpha}{4\pi} (4\pi\mu^2/m^2)^{2-\omega} \frac{\Gamma(2-\omega)(2\omega-1)}{(2\omega-3)}, \quad (3.33)$$

onde foi incluído o fator de massa  $\mu$ . No limite em que  $\epsilon = 2 - \omega \rightarrow 0$ , e usando a expansão (C.2), obtém-se,

$$\Lambda^\mu (\not{p}_2 = 0; \epsilon) = \bar{u}_3(p_3) \gamma^\mu u_1(p_1) \frac{\alpha}{4\pi} \left[ \frac{3}{\epsilon} + 4 - 3\gamma_E + 3 \ln(4\pi\mu^2/m^2) + \mathcal{O}(\epsilon) \right]. \quad (3.34)$$

Do termo divergente  $\frac{3}{\epsilon}$ , dois terços correspondem à divergência infravermelha e só um terço corresponde à divergência ultravioleta. Este é o mesmo resultado obtido na referência [22, p. 373].

### 3.4 Renormalização

Até o momento pode ser dito que foram calculados alguns diagramas da QED a um loop com os *parâmetros nus*. Estes parâmetros precisam ser *vestidos* para eles absorverem as divergências ultravioletas no processo conhecido como renormalização. Antes de prosseguir é útil resumir as divergências ultravioletas (no espaço de Minkowski e com  $\epsilon \equiv 2 - \omega$ ) encontradas nas integrais precedentes,

$$\Sigma_{\text{UV}}(p; \epsilon) = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon} (-\not{p} + 4m); \quad (3.35a)$$

$$\Pi_{\text{UV}}^{\mu\nu}(p; \epsilon) = \frac{\alpha}{3\pi\epsilon} (p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}); \quad (3.35b)$$

$$\Lambda_{\text{UV}}^\mu(p; \epsilon) = \gamma^\mu \frac{\alpha}{4\pi\epsilon}. \quad (3.35c)$$

A igualdade dos fatores  $\frac{\alpha}{4\pi}$  em (3.35a) e (3.35c) é consequência da identidade de Ward a um loop,

$$\Lambda^\mu(p_1 = p_3) = \frac{\partial \Sigma}{\partial p_\mu}, \quad (3.36)$$

e mostra de novo que a regularização dimensional preserva a simetria de Gauge da QED ordem por ordem na perturbação. As partes divergentes (3.35a-3.35c) coincidem com as que são encontradas amplamente na literatura, como por exemplo em [26, p. 337]. A renormalização é efetuada comparando a densidade lagrangiana nua da QED,

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi - e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A^\mu, \quad (3.37)$$

quando são somados a ela os contratermos,

$$\mathcal{L}_{\text{counter.}} = \bar{\psi} (i\delta_2 \not{\partial} - \delta_m) \psi - \frac{1}{4} \delta_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e \mu^\epsilon \delta_1 \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu, \quad (3.38)$$

onde  $e$  é a *carga renormalizada*. As variáveis  $\delta_i$  e  $\delta_m$  reescalaram os parâmetros da densidade lagrangiana (massa, constante de acoplamento e constantes de normalização)

dos campos fermiônicos e fotônicos) de tal forma que eles absorvem as divergências ultravioletas e deixam as integrais das seções precedentes *renormalizadas* (isto é, livres de divergências UV). Isto acontece porque os contratermos geram diagramas adicionais que *contarrestam os infinitos*. Os primeiros parâmetros que podem ser comparados diretamente entre (3.38) e (3.35a-3.35c) são as constantes de normalização, ou seja,

$$\delta_2 = -\frac{\alpha}{4\pi\epsilon}; \quad (3.39)$$

$$\delta_3 = -\frac{\alpha}{3\pi\epsilon}. \quad (3.40)$$

Depois, define-se o rescalamento da carga nua  $e_B$  como,

$$e_B (1 + \delta_2) (1 + \delta_3)^{1/2} = e \mu^\epsilon (1 + \delta_1), \quad (3.41)$$

para assim comparar diretamente com (3.35c) e obter,

$$\delta_3 = \delta_2 = -\frac{\alpha}{4\pi\epsilon}. \quad (3.42)$$

Com isto tem-se que a correção da carga a primeira ordem é,

$$e_B = e(\mu, \epsilon) \mu^\epsilon \left(1 + \frac{\alpha}{6\pi\epsilon}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (3.43)$$

Por definição, a carga nua independe de  $\mu$  ( $\frac{\partial e_B}{\partial \mu} = 0$ ); desta forma, pode calcular-se a função  $\beta(\mu; e)$ ,

$$\beta(\mu; e) = \mu \frac{\partial e}{\partial \mu} = -\epsilon e + \frac{\alpha}{3\pi} + \mathcal{O}(e^3). \quad (3.44)$$

De forma similar pode ser definido o rescalamento da massa nua,

$$(1 + \delta_2) m_B = m + \delta_m, \quad (3.45)$$

com,

$$\delta_m = -\frac{\alpha}{\pi\epsilon}. \quad (3.46)$$

Com isto, a correção à carga a primeira ordem é,

$$m_B = m \left(1 - \frac{3\alpha}{4\pi\epsilon}\right) + \mathcal{O}(e^3). \quad (3.47)$$

Com isto conclui-se a renormalização da QED a um loop. Todos estes resultados são bem conhecidos e nesta seção só se teve que reproduzir a metodologia padrão. A novidade reside em que eles foram obtidos a partir de integrais achadas pelo NDIM, o qual caracteriza-se por não precisar das aproximações tradicionais quando se tenta integrar segundo os parâmetros de Feynman. Em particular, resultados tão gerais como (3.31) e (3.32) não são encontrados na literatura.

# Capítulo 4

---

## Discussão

O NDIM é aplicável em geral a qualquer diagrama de Feynman escalar independentemente da sua topologia ou do número de massas internas. Contudo, a possível complexidade dos resultados finais faz com que nem sempre seja otimamente vantajoso usá-lo. Um exemplo disso são os resultados  $\mathcal{F}_{\text{tri}}^A$  mostrados nas tabelas **2.2-a** e **2.2-b**, os quais, apesar de mostrar soluções exatas da integral, não são muito úteis enquanto não se tenha uma classificação das soluções em regiões de convergência (tarefa que resulta muito difícil). Isto significa que uma das dificuldades do NDIM se apresenta quando aparecem nas soluções funções hipergeométricas de mais de duas variáveis; quanto mais variáveis houver na função hipergeométrica, mais complexos serão os resultados. Outra fonte de dificuldade no método é o número de soluções independentes extraídos de diferentes escolhas do conjunto de índices livres  $\{n_i\}$  na expansão em série (1.35); quanto maior for esse número de soluções diferentes, mais difícil será a sua classificação e mais tediosa será a construção da solução final. Finalmente, uma última fonte de dificuldades é o número total de símbolos de Pochhammer não reduzíveis na série hipergeométrica final, assim como no coeficiente externo da solução; por exemplo, uma função do tipo  $\mathcal{F} \propto (a)_b {}_2F_1$  é evidentemente mais simples do que uma do tipo  $\mathcal{F} \propto (a)_b (c)_d {}_3F_2$ . Para poder avaliar a utilidade e a pertinência do NDIM é necessário revisar o seu algoritmo completo e examinar sob quais condições surgem estas complicações. O algoritmo do NDIM resume-se em:

1. Encontra-se a parametrização de Schwinger (1.20) da integral de Feynman geral (1.1) no caso escalar ( $\mathcal{N}^{\{\mu\}} = 1$ ) e de preferência após a rotação de Wick. O diagrama de Feynman correspondente se caracteriza por ter  $M$  massas diferentes nas suas linhas internas,  $E$  linhas externas,  $N$  linhas internas e  $L$  loops. Em geral  $M \leq N$ .
2. Após a integração nos momentos internos (1.27), minimiza-se o número de termos no argumento da exponencial procurando que esta fique na forma,

$$\exp \left\{ \mathbf{p}^T \mathbf{D} \mathbf{p} - \sum_{j=1}^N x_j m_j^2 \right\} = \exp \left\{ - \sum_{r=1}^R \frac{K_r(x_j)}{\det(\mathbf{A})} k_r^2 - \sum_{j=1}^N x_j m_j^2 \right\}, \quad (4.1)$$

onde os  $k_r$  são  $R = \frac{N(N-1)}{2}$  combinações lineares independentes dos momentos externos  $p_i$  e os  $K_r(x_j)$  são multinômios dos parâmetros de Feynman de grau  $L + 1$ . Com isto se deduz que o número de escalas de energia envolvidas no diagrama é  $R + M$ . Na referência [14] expõe-se um método recursivo para achar os coeficientes  $K_r(x_j)$ .

3. Através de fatorizações adequadas nos multinômios  $W_r$  e no determinante  $\det(\mathbf{A})$ , é encontrada uma expansão em série otimizada da exponencial (1.35) que envolve  $S$  índices de soma  $n_s$ . Durante o processo são feitas expansões em multi-regiões do tipo (B.8). Por cada uma dessas expansões aparece um vínculo linear nos índices  $\{n_s\}$ . Seja  $Y$  o número total dessas expansões. A otimização resume-se em minimizar  $S$  e maximizar  $Y$ .
4. Usa-se a fórmula (1.38) para integrar com respeito aos parâmetros de Schwinger. Este processo deixa um vínculo linear sobre os índices  $\{n_s\}$  por cada linha externa do diagrama. Portanto, o número total de vínculos lineares sobre os  $\{n_s\}$  é  $Y + N$ .
5. Procuram-se soluções em forma de série hipergeométrica para cada uma das combinações de índices livres  $\{n_f\} \subseteq \{n_s\}$ . O número total de índices livres (e portanto o número de variáveis na série hipergeométrica) é  $U = S - Y - N$  e portanto haverá em princípio  $V = \binom{S}{S-Y-N} = \frac{S!}{(Y+N)!(S-Y-N)!}$  soluções diferentes. Dado que o número de escalas de energia envolvidas é  $R + M$  e que as variáveis das funções hipergeométricas são quocientes entre estas escalas, espera-se que o número de variáveis das funções hipergeométricas satisfaça a desigualdade,

$$U = S - Y - N \geq R + M - 1.$$

Se diz que o NDIM é *aplicável de maneira ótima* se a desigualdade anterior vira uma igualdade [15]. O número de símbolos de Pochhammer presentes tanto na função hipergeométrica como no coeficiente externo pode estimar-se segundo o número de funções gamma não independentes no denominador de (1.37); esse número é  $W = Y + N$ .

6. Finalmente, as soluções são agrupadas segundo a região de convergência das séries hipergeométricas fazendo combinações lineares de soluções linearmente independentes por cada uma das regiões cinemáticas definidas. Estas regiões surgem naturalmente dos limites impostos pela superfície de Landau tal como é ilustrado na figura 2.2.

Na parte 5 do algoritmo precedente levam-se em conta as possíveis formas de complexidade nas soluções fornecidas pelo NDIM discutidas no início do capítulo. Estas complicações são condensadas nos três números  $U$ ,  $V$  e  $W$ . Para falar apropriadamente, estes números definem cotas superiores da complexidade das soluções pois, tal como foi visto no capítulo 2, sempre existe a possibilidade de que eventualmente a solução final seja mais simples: algum dos índices  $n_s$  pode acabar sendo dependente ou definindo uma função hipergeométrica redutível, o número de soluções

relevantes pode ser significativamente menor que  $V$ , as funções gamma no numerador de (1.37) podem ser tais que não é necessário adicionar termos no coeficiente externo, etc. Contudo, estes parâmetros ilustram a grosso modo como o tipo de diagrama afeta a complexidade das soluções obtidas pelo NDIM. Uma das conclusões mais surpreendentes que podem ser extraídas da análise precedente é que o número de loops  $L$  do diagrama pode ser relativamente irrelevante para a complexidade dos resultados do NDIM. Certamente o número de loops afeta o grau e a extensão dos multinômios  $W_r$  e  $\det(A)$  (isto pode aumentar os parâmetros  $S$  e  $Y$ ), mas sempre que estiverem dadas as condições de aplicabilidade ótima o número  $U$  permanecerá inalterado e o número  $V$  resultará minimamente afetado. Outra conclusão curiosa é que se observa é uma espécie de compensação da minimização dos números  $U$  e  $V$  com respeito ao número  $W$ . Isto significa que parte da complexidade removida pelo método de otimização do NDIM é transferida ao número de símbolos de Pochhammer na função hipergeométrica. Essa transferência é todavia vantajosa enquanto é mais fácil manipular funções hipergeométricas de menos variáveis embora elas envolvam mais símbolos de Pochhammer.

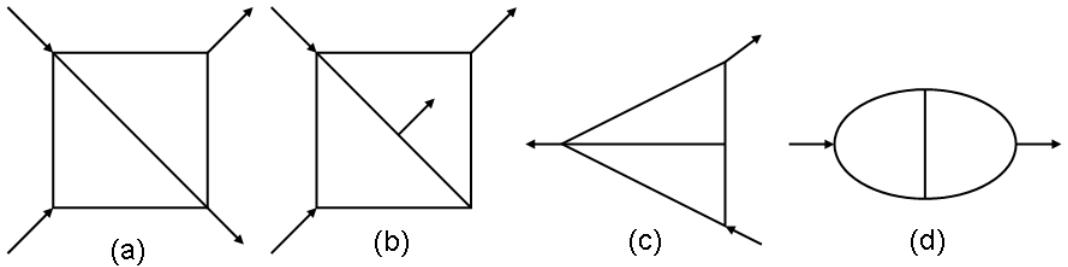


Figura 4.1: Diversas topologias de diagramas de Feynman a um loop. Os diagramas (a), (b) e (c) permitem a aplicação ótima do NDIM [15]. O *loop master* em (d) é um exemplo clássico para o qual não é possível a aplicação ótima do NDIM [13] (para ele  $S = 13$  e  $Y = 3$ ).

Para completar a análise da aplicabilidade do NDIM falta ainda um elo referente às condições sob as quais o NDIM é aplicável de maneira ótima. Até o momento não se conhece uma resposta geral e *a priori* de como surgem  $S$  e  $Y$  a partir de um diagrama específico; sabe-se somente que estes números dependem profundamente da topologia do diagrama (veja-se figura 4.1). Apesar de que não se saiba em geral quando um diagrama poderá ser resolvido de maneira ótima pelo NDIM, existem algumas tendências gerais sobre a extendibilidade do método a outros diagramas a partir de um diagrama não massivo que se sabe que é ótimo para o NDIM. Um exemplo é a possibilidade de adicionar mais loops ao diagrama de tal forma que estes loops são ainda *redutíveis* (veja-se figura 4.2). O diagrama da seção 2.4 foi um exemplo dessa redutibilidade. A outra opção é a de adicionar massas ao diagrama. A adição de uma variável de massa em uma ou várias linhas do diagrama supõe em princípio aumentar o número de escalas de energia em uma unidade. Contudo, isso não garante que a multiplicidade  $U$  das soluções aumente na mesma quantidade a menos que o diagrama mantenha a aplicabilidade ótima do NDIM. Como regra geral, sabe-se que a

aplicabilidade ótima é conservada só se a massa é adicionada às linhas de um único loop [15]. Se a mesma massa é adicionada a linhas de loops diferentes, a aplicabilidade ótima é quebrada. Em definitiva, o NDIM é vantajoso para diagramas com poucas linhas externas (ou várias destas linhas *on-shell*), com poucos parâmetros de massa internos e de determinadas topologias. Agora que já se sabem as limitações, cabe perguntar: quais são, no final, as vantagens do NDIM? Algumas das vantagens mais destacáveis são,

- O NDIM permite resolver integrais de Feynman escalares com a sua dimensão e expoentes nos propagadores generalizados. Isto significa que é particularmente útil nas aplicações da regularização dimensional e também permite a sua extensão direta a integrais com estrutura tensorial enquanto estas são sempre reduzíveis a uma combinação linear de integrais escalares. Vale a pena esclarecer que o NDIM não faz nenhuma aproximação no momento de obter resultados em dimensões gerais e por isso resulta útil para comparar teorias com densidades lagrangianas equivalentes mas com dimensões espaciais diferentes.
- Deixando do lado a justificação relativamente técnica do cálculo fraccional, a matemática envolvida no método (integrais gaussianas, manipulação algébrica de séries de potências e polinômios, função gamma, sistemas lineares de equações) é relativamente elementar. Além disso, os passos do método são notavelmente gerais e diretos como para permitir que várias de suas fases sejam programáveis computacionalmente. O mesmo caráter elementar das matemáticas envolvidas faz com que as ferramentas computacionais necessárias sejam amplamente acessíveis.
- Os resultados finais em termos de funções hipergeométricas são analiticamente confortáveis. Por exemplo, estas funções são de fácil diferenciação. Também, a sua apresentação em forma de séries de potências básicas facilita o seu cálculo numérico pois a convergência costuma ser rápida. Igualmente, no caso em que  $U \leq 2$ , as funções hipergeométricas que se apresentam estão muito bem estudadas matematicamente (muito melhor que por exemplo os dilogaritmos usados em outros métodos [18]). Também não é desprezível o fato que o método recolhe intrinsecamente fenômenos da estrutura formal das integrais de Feynman como a sua ramificação através de superfícies de Landau e a extendibilidade analítica. Isto permite mais segurança no momento de aplicar o resultado adequado em cada uma das regiões cinemáticas envolvidas. Contudo, as funções hipergeométricas não são absolutamente confortáveis. Por exemplo, reduções destas funções como (C.18) e (C.19) contêm sutilezas, assim como uma soma do tipo (3.24). De qualquer forma, já se conhecem maneiras de passar da representação em funções hipergeométricas a outras representações [19].

A vantagem com respeito a extendibilidade do NDIM a integrais com estrutura tensorial precisa de um comentário a mais. No capítulo 3 observou-se que as integrais tensoriais envolvidas podem ser bastante mais complicadas do que as integrais

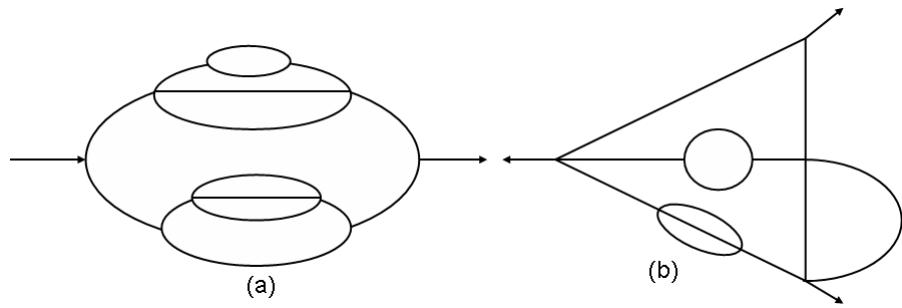


Figura 4.2: Diagramas redutíveis loop por loop baseados em uma topologia básica para a qual o NDIM é aplicável otimamente. O diagrama (a) está baseado no diagrama tipo *burbulha*. O diagrama (b) basea-se no diagrama (c) da figura 4.1.

escalares subjacentes. Estas complicações parecem depender muito do tipo de teoria de campos que está sendo analizada e não fica claro até que ponto a busca de uma solução completa e exata continua sendo razoável. Também não parece existir uma forma simples de fazer a decomposição de integrais tensoriais em escalares quando se supera o nível de um loop ( $L = 1$ ); pelo menos não da mesma forma do capítulo 3. Os termos do tipo  $\frac{(\mathbf{O}\mathbf{Q})_k}{\lambda_k^{1/2}}$  em (1.25) são não triviais quando  $L \geq 2$  (para um loop  $\mathbf{O} = 1$  e  $\lambda_k = \det(\mathbf{A})$ ).

# Capítulo 5

---

## Conclusão e perspectivas futuras

Neste trabalho foi explicado o método de integração em dimensão negativa desde o contexto da parametrização de Schwinger e a expansão em série de Taylor-Riemann (B.6). O NDIM caracteriza-se por ser um método que soluciona integrais de Feynman em função de combinações lineares de séries hipergeométricas definidas em domínios cinemáticos específicos. Cada solução definida em um domínio está relacionada com as outras soluções por meio de continuações analíticas. Outra característica notável do NDIM é que o método permite resolver as integrais com a dimensão e os expoentes dos propagadores generalizados; propriedade útil para a sua extendibilidade a integrais com estrutura tensorial. Também foram explicados detalhes da estrutura analítica das integrais de Feynman como a forma de tratar as divergências no integrando e a extendibilidade analítica das soluções. Com respeito a esta última análise, foi incluída uma discussão sobre a possível ramificação das integrais de Feynman a través das superfícies de Landau e mostrou-se como estas propriedades aparecem naturalmente no NDIM nas regiões cinemáticas definidas pelas regiões de convergência das séries hipergeométricas. Foram calculadas várias integrais de Feynman particulares a um e dois loops. Apesar de certas sutilezas no momento de reduzir funções hipergeométricas, mostrou-se que muitos casos particulares das integrais (massas iguais ou nulas, pernas externas *on-shell*) são relativamente fáceis de encontrar a partir dos resultados gerais e que o método preserva uma grande coerência nesse processo. Alguns resultados particulares ilustraram a vantagem da otimização do NDIM proposta em [15]. Provou-se a aplicabilidade do NDIM à estrutura das integrais divergentes da QED a um loop. Esta aplicação ilustrou também a extendibilidade do NDIM a integrais com estrutura tensorial. Os resultados correspondentes à correção ao vértice destacam por não estarem expostos na literatura com a generalidade e exatidão com que foram apresentados neste trabalho. Finalmente, foi feita uma discussão das limitações e as vantagens do NDIM desde um enfoque atualizado. Com vista nestes resultados, propõem-se as seguintes extensões e complementos em trabalhos futuros:

- O NDIM está muito limitado pela dificuldade de manipular funções hipergeo-

métricas de mais de duas variáveis. Todavia, seria interessante analisar este tipo de resultados apesar das complicações e avaliar quantas propriedades vantajosas ainda sobrevivem a estes casos difíceis. Também é importante examinar se é possível sistematizar a construção e classificação desses resultados.

- Em uma direção diferente, se deve consolidar a utilização harmônica do NDIM (iniciada na referência [13]) com outros métodos de integração (tais como a integração por partes e a representação de Mellin Barnes) que sobrelevem as dificuldades intrínsecas de NDIM. Também é necessário provar a possibilidade concreta de decompor integrais tensorias em escalares quando se passa do nível de um loop.
- O NDIM possui uma linha de processos quase completamente algorítmica. Isto sugere que é provável que NDIM seja automatizável computacionalmente na sua totalidade e seria muito importante avaliar esta possibilidade. Talvez para conseguir este objetivo terão que ser conseguidos resultados nas linhas explicadas anteriormente.
- Precisa-se extender a aplicabilidade do NDIM a casos mais complexos em teorias quânticas de campos de alta importância física como a cromodinâmica quântica (QCD) e inclusive a mesma QED a níveis de mais de um loop. Em vista dos resultados do capítulo 3, também seria útil observar como as divergências infravermelhas (as quais não são controladas pela regularização dimensional) são realmente inofensivas nos resultados achados por NDIM\*. Novamente, é possível que o progresso destes objetivos dependa parcialmente das perspectivas precedentes.
- Finalmente, deve mencionar-se a procura de aplicações do NDIM a integrais diferentes às contempladas neste trabalho. Inclusive pode ser que existam aplicações além do processo de integração. Em este sentido deve ressaltar-se uma grande omisão que foi feita neste trabalho. Já existe uma boa quantidade de resultados muito prometedores que exploram a aplicabilidade do NDIM a integrais de Feynman nos Gauges não covariantes; especialmente o cone-de-luz [9].

---

\*Nos exemplos do capítulo 3 foi relativamente fácil separar as divergências infravermelhas porque eram conhecidas com antecedência. Ainda permanece a pergunta de como reconhecê-las sem acudir a este tipo de conhecimentos prévios.

# Apêndice A

---

## Continuação analítica

Uma função (real ou complexa)  $f$  é *analítica* em um ponto  $z_0$  se existe uma vizinhança que contém  $z_0$  na qual é possível representar a função  $f$  como uma série de Taylor ao redor de  $z_0$ . Em análise matemática de uma ou várias variáveis complexas, esta propriedade é equivalente a ser diferenciável numa vizinhança ao redor de  $z_0$  (*holomorfa* ou *regular*), o que também implica infinita diferenciabilidade. Para provar que uma função de várias variáveis complexas é analítica basta provar que a função é analítica em cada uma das suas variáveis mantendo as demais fixas. Estas relações não são válidas na análise de variáveis reais e demonstram o grande alcance da análise complexa. A técnica de continuação analítica se baséia no seguinte teorema [30], no qual o termo *domínio* é usado no sentido topológico de um conjunto aberto e conexo:

**Teorema 1** *Seja uma função complexa  $w_1(z)$  analítica em um domínio  $G_1 \subset \mathbb{C}$ . Seja também uma função  $w_2(z)$  analítica em outro domínio  $G_2$ . Suponha-se que a intersecção  $G_1 \cap G_2$  é conexa e não vazia. Se existe um conjunto aberto não vazio  $S$  que pertence a  $G_1 \cap G_2$  tal que as funções  $w_1$  e  $w_2$  coincidem em  $S$  ( $z \in S \Rightarrow w_1(z) = w_2(z)$ ), então as funções  $w_1$  e  $w_2$  restritas à intersecção  $G_1 \cap G_2$  têm que ser equivalentes ( $z \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow w_1(z) = w_2(z)$ ). Além disso, a extensão\* dessas funções no domínio estendido  $G_1 \cup G_2$  é a única extensão possível que é analítica em todo o domínio  $G_1 \cup G_2$ . Esta única extensão é conhecida como **continuação analítica**.*

O teorema é igualmente válido no caso de funções de várias variáveis complexas, mas nesse caso entende-se  $z$  e  $G_i$  respectivamente como um ponto e um domínio do espaço  $\mathbb{C}^n$ . A continuação analítica é especialmente útil quando se possuim desenvolvimentos em série ou representações integrais de uma função. Tanto as séries como as representações integrais costumam ter um domínio restrito no qual elas têm um bom comportamento e representam funções analíticas. A pergunta fundamental é se é possível extender esse domínio no qual a função é analítica. O domínio máximo em que a função pode ser continuada analiticamente é conhecido como *domínio natural*. As integrais de Feynman são no fundo representações integrais de termos per-

---

\*Por extensão da função entende-se a função que em cada domínio particular  $G_i$  coincide com  $w_i$ .

turbativos no cálculo de amplitudes de probabilidade da matriz de espalhamento. Em consequência, o problema da continuação analítica emerge naturalmente no cálculo dessas integrais. Por outro lado, o caso da rotação de Wick ou a regularização dimensional proporcionam outra forma de aplicar a continuação analítica nas integrais de Feynman. Se uma expressão apresenta um comportamento difícil de analisar (como no caso das integrais de Feynman no espaço de Minkowski) ou inclusive patológico (como os diagramas divergentes que precisam de regularização), a continuação analítica serve como uma ferramenta na qual se procura uma extensão adequada dos parâmetros da expressão até um domínio no qual as dificuldades não se apresentem. Devido à unicidade da extensão, os resultados no novo domínio e o caminho de volta ao domínio original de interesse estão garantidos. Contudo, as condições nas quais a extensão é possível devem ser entendidas.

A continuação analítica de uma função desde um domínio  $G_1$  até outro domínio  $G_2$  chama-se *direta* se ela é feita através da intersecção conexa não vazia  $G_1 \cap G_2$  na qual os domínios coincidem. Também é possível fazer uma continuação analítica indireta no sentido de que são usados vários domínios sucessivos  $G_1, G_2, \dots$  para os quais existe uma continuação direta entre um domínio e o seguinte. Aliás, dada uma função analítica  $f$  em um domínio  $G$ , se diz que  $f$  tem uma continuação analítica direta em um ponto  $p \in \partial G$  na fronteira de  $G$  se existe um domínio que contém  $p$  para o qual  $f$  tem uma continuação direta desde  $G$  até  $G_p$ . O caso da extendibilidade de funções definidas por séries de potências é especial para a continuação analítica pois a analiticidade é justamente definida segundo a existência de tais séries. O domínio das séries de potências costuma ser definido através do seu disco (ou poli-disco) de convergência. Define-se um *elemento da função*  $f$  à tripla  $f(z, K)$  onde  $f$  é representada através de uma série de potências cujo disco de convergência é o disco aberto  $K$  com centro em  $z$ . Dado que os discos abertos formam uma base topológica, a continuação analítica estuda-se facilmente através de elementos de função. Em particular, é especialmente importante estudar a *continuação analítica ao longo de uma curva*. Um elemento de função  $f_0(z_0, K_0)$  tem continuação analítica ao longo de uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^n$  se para todo  $t \in [0, 1]$ : existe um elemento de função  $f_t(z_t, K_t)$  com  $z_t = \gamma(t)$ , e existe um aberto não vazio  $B(t, \varepsilon_t) = \{t' \in [0, 1] : |t - t'| < \varepsilon_t \wedge \gamma(t') \in K_t\}$  tal que se  $t' \in B(t, \varepsilon_t)$  então as funções  $f_t$  e  $f_{t'}$  coincidem em  $K_t \cap K_{t'}$ . Na figura A.1 ilustra-se esse conceito. A continuação analítica ao longo de uma curva é única no sentido que se existem dois conjuntos de domínios e funções intermédias  $(f_t, K_t)$  e  $(g_t, J_t)$  definindo a continuação analítica ao longo de  $\gamma$ , as funções  $f_1$  e  $g_1$  coincidirão em  $K_t \cap J_t$ . Essa unicidade é o conteúdo fundamental do *teorema de monodromia*:

**Teorema 2** *Seja uma função  $f$  definida inicialmente num disco aberto  $U$ . Se existe um domínio  $W \supset U$  simplesmente conexo no qual a função pode ser continuada analiticamente ao longo de toda curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow W$ , então existe uma única extensão da função  $f$  em todo  $W$  tal que a função é analítica em todo o seu domínio.*

Do teorema surge uma pergunta óbvia: O que acontece se o domínio  $W$  é multiplamente conexo? A pergunta só é interessante se  $W$  é extendido suficientemente, no

sentido de que existe um conjunto fechado não vazio  $S$ , disjunto com respeito a  $W$ , tal que  $S \cup W$  forma um domínio simplesmente conexo, mas para o qual não existe continuação analítica ao longo de uma curva que vá desde o elemento de função definido por  $f$  e  $U$  até qualquer ponto da fronteira de  $S$ . O conjunto  $S$  merece o nome de *conjunto singular*<sup>†</sup>. Os tipos possíveis de conjunto singular dependem profundamente da dimensionalidade complexa  $n$  (ao falar do espaço  $\mathbb{C}^n$ ). Para o caso  $n \geq 2$ , os conjuntos singulares não podem ser compactos (limitados e fechados), resultado conhecido como *lema de Hartogs*. Nas condições assim descritas, a continuação analítica ao longo de curvas no interior de um domínio  $W$  multiplamente conexo pode dar lugar ao que se conhece como *ramificação* e às confusamente chamadas *funções multivaloradas*. Isto significa que a função na vizinhança do ponto final  $\gamma(1)$  pode depender da curva  $\gamma(t)$  e de como ela *rodeia* o conjunto singular  $S$ . Se diz que a função é multivalorada no sentido de que se  $\gamma$  fosse um laço fechado ( $\gamma(0) = \gamma(1)$ ), após a continuação analítica o fenômeno de ramificação poderia resultar em uma função totalmente diferente na vizinhança do ponto inicial. Devido ao fenômeno de ramificação, o domínio natural das funções obtidas por continuação analítica costuma ser estudado através de uma *variedade complexa*  $n$ -dimensional e não através de um conjunto aberto de  $\mathbb{C}^n$ . Dentro da variedade complexa, os elementos de função extraídos por continuação analítica ao longo das curvas são juntados apesar de que eles podem representar funções complexas diferentes na vizinhança de um mesmo ponto, como se a variedade complexa fosse um domínio complexo de  $\mathbb{C}^n$  com vários andares.

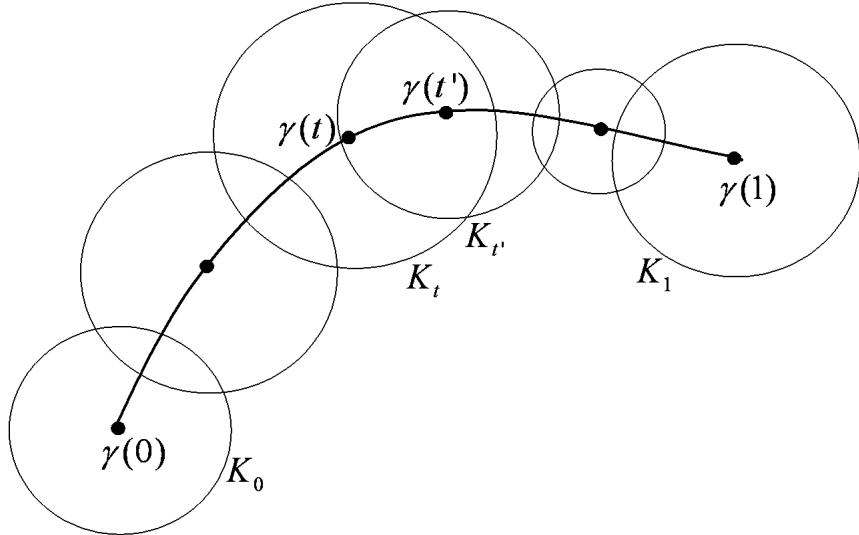


Figura A.1: Ilustração da continuação analítica ao longo de uma curva.

Contudo, é possível que haja um conjunto singular não vazio  $S$  ao redor do qual não há ramificação. Um exemplo típico dessa situação acontece em uma variável complexa quando em todo o domínio multiplamente conexo  $W \subset \mathbb{C}$  a função  $f$  é analítica (e portanto univvalorada) e  $S$  é um conjunto discreto composto de singula-

<sup>†</sup>Note-se que na definição de conjunto singular não se requereu que existisse propriamente uma função  $f$  analítica em todo o domínio multiplamente conexo  $W$ . O importante aqui é a possibilidade de continuação analítica do elemento de função  $(f, U)$ .

ridades isoladas  $s_i \in S$ , tal que para cada  $s_i$  existe uma vizinhança  $U_i$  que contém  $s_i$  e  $U_i - \{s_i\} \subset W$ , isto é,  $U_i$  pertence a  $W$  com a exceção do ponto  $s_i$ . Os pontos  $s_i$  são conhecidos como *singularidades isoladas*. Ao redor dos  $s_i$  não é possível representar a função como uma série de Taylor, mas ao redor delas sempre é possível representar a função como uma série de Laurent. Se a série de Laurent tem um número finito de termos não nulos com potências negativas, a singularidade é um *polo*. Se o número de termos não nulos com potência negativa é infinito, a singularidade isolada chama-se *essencial*. Se dentro de um domínio  $U$  de uma variável complexa a função só tem pontos onde é analítica ou tem polos então a função chama-se *meromórfica* em  $U$ . Finalmente, se o conjunto  $S$  é um ponto isolado (mas não uma singularidade isolada) de  $\mathbb{C}$  tal que ao redor dele a função não pode ser univalorada, então a singularidade é chamada *ponto de ramificação*. Os pontos de ramificação são classificados de acordo com a multiplicidade que toma a função ao redor deles; se a multiplicidade é finita o ponto de ramificação é *algebrico*, se não, *logarítmico*.

A classificação dos conjuntos singulares é muito mais difícil no caso de várias variáveis complexas. De fato, o lema de Hartogs garante que não existem singularidades isoladas para o caso  $n \geq 2$ . Contudo, no caso de integrais de Feynman, ao analisar a representação (1.4), o físico soviético Lev Landau encontrou uma condição necessária para que aconteça a ramificação [37, 22]. O único comportamento grave do integrando em (1.4) acontece quando o caminho de integração definido pelas variáveis  $\{q_k^\mu, x_j\}$  encontra à hipersuperfície  $\Omega$  na qual o denominador,

$$T = \sum_{j=1}^N x_j [r_j^2(p, q) - m_j^2] + i\epsilon, \quad (\text{A.1})$$

é zero. Esse comportamento não é suficientemente grave a menos que a hipersuperfície forme um *ponto de belisco* (pinch point) no caminho de integração. O ponto de belisco pode ser pensado da seguinte forma: Imagine-se que é escolhida uma das variáveis em  $\{q_k^\mu, x_j\}$  e é designada como  $\zeta$ , e todas as demais variáveis (incluídas as  $m_j$  e  $p_i^\mu$ ) são codificadas na variável  $z$ . Sendo assim, o possível comportamento patológico de (1.4) ao longo do caminho de integração de  $\zeta$  se reduz à análise de uma integral da forma,

$$I(z) = \int_C \frac{d\zeta}{F(\zeta, z)}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $F(\zeta, z)$  é um polinômio com respeito a  $\zeta$  cujo grau máximo é dois, e  $C$  é um contorno que vai desde  $\zeta = \zeta_A$  até  $\zeta = \zeta_B$ . Em estas condições, se descarta a possibilidade de que  $F(\zeta, z)$  independa de  $\zeta$  pois isso significaria que o contorno  $C$  é tangente à hiper-superfície  $\Omega$  e portanto um pequeno deslocamento nas outras variáveis poderia para evitar o comportamento singular e a ramificação (o caminho de  $\zeta$  poderia *rodear* analiticamente ao redor de  $\Omega$ ). Daqui se deduz que a intersecção de  $\Omega$  com o plano  $\zeta$  consiste basicamente dos zeros de  $F(\zeta, z)$  (para  $z$  fixo, o número máximo de zeros é dois) que, possivelmente, se deslocam continuamente ao longo de uma curva no plano  $\zeta$  segundo as variações de  $z$ . Chame-se a estes zeros  $\zeta_1(z)$  e  $\zeta_2(z)$ . Se cada uma das curvas  $\zeta_1(z)$  e  $\zeta_2(z)$  cortasse separadamente o contorno  $C$  não haveria ramificação

pois a unicidade seria ainda possível através de deformações adequadas do contorno  $C$ . Só pode acontecer ramificação se os zeros cortam o contorno  $C$  simultaneamente ou passam pelos pontos extremos do contorno (Veja-se figura A.2). Em tal caso se produz o ponto de belisco pois o contorno fica *encerrado* por  $\Omega$ . Sabendo já o que significa um ponto de belisco se procederá a examinar a possibilidade que ele surja em uma integral como (1.4). O denominador (A.1) depende de  $q_k^\mu$  só se existe um  $j'$  para o qual  $x_{j'} \neq 0$ . Para todo  $x_{j'} \neq 0$  o fato de estar em  $\Omega$  significa que a linha  $j'$  deverá estar *on-shell* ( $r_{j'}^2 = m_{j'}^2$ ) a menos que a análise tenha que ser feita no contorno de  $x_{j'}$ . Nestas condições, para que a integral de contorno em  $q_k^\mu$  fique *encarcerada* em  $\Omega$ , precisa-se que as raízes da equação quadrática com respeito a  $q_k^\mu$  no denominador  $T$  tenha os seus zeros degenerados. Isto se garante se,

$$\frac{\partial T}{\partial q_k^\mu} = 2 \sum_{j \in J} \xi_{jk} x_j r_j^\mu = 0, \quad j \in J \Rightarrow r_j^2 = m_j^2; \quad (\text{A.3})$$

onde o conjunto  $J$  corresponde às linhas internas no loop  $k$  que estão *on-shell*. Para qualquer linha que estiver *off-shell*, a única condição possível é que  $x_j = 0$ ,

$$r_j^2 \neq m_j^2 \Rightarrow x_j = 0. \quad (\text{A.4})$$

As equações (A.3) e (A.4) chamam-se *equações de Landau*. Elas definem uma profunda restrição em  $\Omega$  que termina definindo uma hipersuperfície nas variáveis externas  $m_j$  e  $p_i$  conhecida como *superfície de Landau* através da qual pode haver ramificação (mas não é necessário que seja assim pois se trata de uma condição necessária mas não suficiente).

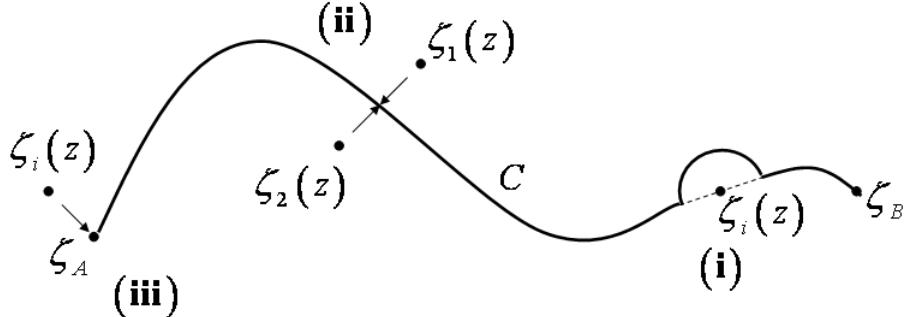


Figura A.2: Ilustração da formação de um *ponto de belisco* (pinch point) no contorno  $C$ . (i) Se o ponto singular corta o contorno separadamente sempre é possível evitar a singularidade através de uma deformação infinitesimal do contorno. A singularidade não é evitável se: (ii) dois pontos singulares cortam  $C$  simultaneamente ou (iii) o ponto singular toca um extremo de  $C$ .

## Apêndice B

---

### Fundamentos matemáticos do NDIM

Neste apêndice procura-se justificar a interpretação da equação (1.30) e em especial a natureza da expansão em série (1.29). A validade da dedução do NDIM requer que os índices  $n$  na somatória possam tomar valores negativos e inclusive, para que haja consistência com a regularização dimensional, eles deveriam poder ser números complexos perto de um número inteiro. Como já foi dito, as técnicas do cálculo fraccional são as que justificam estas condições. O cálculo fraccional começa como uma extensão do procedimento de achar a integral indefinida de uma função de variável real. Comece-se então com a integral fraccional de Riemann-Liouville, a qual não é mais que uma extensão da fórmula integral de Cauchy,

$$D_{x-c}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_c^x dt \frac{f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}, \quad (\text{B.1})$$

onde  $c \in \mathbb{R}$  e  $\alpha$  pode ser qualquer número complexo com  $\operatorname{Re}\{\alpha\} < 0$ . Para os interesses particulares desta seção, basta considerar a integral fraccional de Liouville ou de Weyl, que corresponde ao limite  $c \rightarrow -\infty$ , e daqui para frente será escrito simplesmente  $D_x^{\alpha}$  em vez de  $D_{x+\infty}^{\alpha}$ . Pode provar-se que quando  $\alpha$  é um inteiro negativo a fórmula (B.1) corresponde ao processo de integrar repetidas vezes a função  $f(x)$ . Embora (B.1) não esteja definida adequadamente para quando  $\operatorname{Re}\{\alpha\} \geq 0$ , existe uma forma de fazer uma continuação analítica para todo o plano complexo de  $\alpha$  sempre que a função  $f(x)$  seja bem comportada. Se  $\alpha \in (0, \infty)$ , o operador  $D_x^{\alpha}$  é conhecido como derivada fraccional. O operador geral  $D_x^{\alpha}$  é conhecido como *difer-integral*. Na semireta real positiva,  $\alpha \in [0, \infty)$ , este operador se resume na seguinte expressão,

$$D_x^{\alpha} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} [D_x^{m-\alpha} f(x)] & 0 \leq m-1 \leq \alpha < m, \quad m \in \mathbb{Z} \\ \frac{d^m}{dx^m} f(x) & \alpha \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \geq 0 \end{cases}. \quad (\text{B.2})$$

Naturalmente, se percebe que quando  $\alpha = 0$  o operador difer-integral não é mais do que a identidade ( $D_x^0 = 1$ ). As difer-integrais de Liouville (ou de Weyl) são úteis para a justificação do NDIM porque apresentam a seguinte fórmula simples para a difer-integral da exponencial [27, 28],

$$D_x^{\alpha} \exp(\beta x) = \beta^{\alpha} \exp(\beta x). \quad (\text{B.3})$$

Os métodos do cálculo fraccional são diretamente extensíveis a funções complexas, de tal forma que os números  $c$  e  $x$  em (B.1) podem ser complexos e a integral é entendida ao longo da curva reta que conecta  $c$  com  $x$ . A expansão em série usada no NDIM, conhecida como expansão de Taylor-Riemann, baseia-se no seguinte teorema devido a Osler [29],

**Teorema 3** *Seja  $f(z) = (z - b)^\sigma h(z)$ , onde  $\sigma > -1$ , e  $h(z)$  é uma função que é analítica em certo domínio  $U$  que contém o disco  $D$  com centro em  $z_0$  e raio  $r > 0$ . Suponha-se que  $b \in D$ . Se  $z \neq b$  pertence ao círculo  $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - b| = |z - z_0|\}$  então, para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , a seguinte expansão em série existe e é única,*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{[D_{z-b}^{n+\alpha} f(z)]_{z=z_0}}{\Gamma(1+n+\alpha)} (z - z_0)^{n+\alpha}. \quad (\text{B.4})$$

Onde no lado direito se escolhe o ramo de  $(z - z_0)^{n+\alpha}$  no qual  $\arg(b - z_0) < \arg(z - z_0) < \arg(b - a) + 2\pi$  e fixa-se  $\arg(b - a) \in [-\pi, \pi]$ .

Quando o teorema é extendido é aplicado à função exponencial, obtém-se a expansão de Taylor-Riemann,

$$\exp(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [D_x^{n+\alpha} \exp(x)]_{x=0} \frac{x^{n+\alpha}}{\Gamma(1+n+\alpha)}, \quad (\text{B.5})$$

onde  $\alpha$  pode ser qualquer número complexo no disco unidade,  $\alpha \in \mathbb{C} \wedge |\alpha| < 1$ . Aplicando o resultado (B.3) e mudando um pouco os índices de somatória, chega-se a,

$$\exp(x) = \sum_{n=-\infty+\alpha}^{\infty+\alpha} \frac{x^n}{\Gamma(1+n)}, \quad (\text{B.6})$$

que é o resultado necessário para justificar o NDIM. Observe-se que o índice  $n$  agora pode ter os valores que se precisavam, ou seja,  $n$  nessa expansão pode ser um número complexo ao redor de um número inteiro. A série de Taylor usual é recuperada na transformação,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty+\alpha}^{\infty+\alpha} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}. \quad (\text{B.7})$$

Quando o NDIM é aplicado e deduzido neste trabalho, o símbolo  $\sum_{n_i}$  significa fundamentalmente o lado esquerdo de (B.7). Em termos algébricos e de manipulação, a diferença é uma simples sutileza; mas conceitualmente eliminam-se as objeções que podem ser tiradas do método. Além das já mencionadas, a diferença na expansão explica por que são usadas funções  $\Gamma(1+n)$  e não símbolos de fatoriais  $n!$ , ou o porquê da manipulação dos símbolos de Pochhammer apesar de que fórmulas como (C.8) exigem que  $n$  seja inteiro mas  $x$  não seja inteiro.

A expansão em série de Taylor-Riemann é também fundamental no momento de entender a expansão de polinômios em multi-regiões. Isto significa usar a identidade,

$$(A_1 + A_2 + \dots + A_n)^{-N} = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n} \frac{\Gamma(1-N)}{\Gamma(l_1+1)\Gamma(l_2+1)\dots\Gamma(l_n+1)} A_1^{l_1} A_2^{l_2} \dots A_n^{l_n} \delta_{\theta(l_i, N), 0}, \quad (\text{B.8})$$

onde  $\theta(l_i, n) = N + \sum_{s=1}^n l_s$  e  $N$  pode ser inclusive complexo. Esta identidade fundamenta-se na representação de Schwinger,

$$(A_1 + A_2 + \dots + A_n)^{-N} = \frac{1}{\Gamma(N)} \int_0^\infty dx x^{\nu-1} \left[ \prod_{s=1}^n \exp(-xA_s) \right], \quad (\text{B.9})$$

que, após expandir cada exponencial em uma série de Taylor-Riemann, e aplicar a fórmula (1.38), desemboca em (B.8)\*. Isto significa, que o tipo de símbolo somatório presente na fórmula de expansão em multi-regiões, também é análogo ao lado esquerdo de (B.7). Chama-se expansão em multi-regiões porque em (B.8) existem  $\binom{N}{1} = N$  formas diferentes de escolher o índice somatório  $l_k$ , cada um adequado para a região do espaço dos  $\{A_i\}$  na qual  $|A_k| > |A_i|$  para todo  $i \neq k$ .

O NDIM baseia-se tanto nas expansões de Taylor-Riemann, que I. González e I. Schmidt propuseram que o nome *Método de Integração por Expansão Fraccional* (IBFE pelas siglas em inglês) seria mais apropriado [15].

---

\*Não está se fazendo nenhum argumento circular no momento de usar (1.38) para justificar (B.8). Pois (1.38) pode ser obtida sem usar (B.8), partindo somente da parametrização de Schwinger, as séries de Taylor Riemann, e as integrais gaussianas.

# Apêndice C

---

## Funções hipergeométricas

Neste apêndice ilustram-se as definições e fórmulas matemáticas usadas neste trabalho relacionadas com as funções hipergeométricas. O ponto de partida é a função gamma  $\Gamma(x)$ , que satisfaz a relação funcional  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  e o valor particular  $\Gamma(n+1) = n!$  para  $n \in \mathbb{Z}^+$ . A representação integral usual da função  $\Gamma(x)$  é,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}\{x\} > 0. \quad (\text{C.1})$$

Com esta representação integral básica e a equação funcional  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , a função gamma pode ser extendida para todo o plano complexo com a exceção dos pontos em que  $x$  é um inteiro não positivo, nos quais ela forma polos simples. Dessa forma a função  $\Gamma$  vira um exemplo de função meromorfa em todo  $\mathbb{C}$ . Os polos simples são definidos facilmente pela expansão em série de Laurent ao redor de  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\text{C.2})$$

onde  $\gamma_E$  é um número irracional conhecido como constante de Euler-Mascheroni. Também é útil a representação integral da função beta,

$$B(x, y) = \int_0^\infty t^{x-1} (1+t)^{-y-x} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \operatorname{Re}\{x\} > 0, \operatorname{Re}\{y\} > 0. \quad (\text{C.3})$$

As funções hipergeométricas explicam-se melhor com a notação de símbolos de Pochhammer definidos como,

$$(x)_y \equiv \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}. \quad (\text{C.4})$$

Uma das propriedades da função  $\Gamma(x)$  é a fórmula de reflexão de Euler,

$$\sin(\pi x)\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \sin(\pi y)\Gamma(y)\Gamma(1-y) = \pi, \quad x, y \notin \mathbb{Z}. \quad (\text{C.5})$$

Esta fórmula pode ser escrita como,

$$\frac{\Gamma(y)}{\Gamma(-x)} = \frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1-y)} \frac{\sin(-\pi x)}{\sin(\pi y)}, \quad (\text{C.6})$$

ou usando os símbolos de Pochhammer,

$$\begin{aligned}
(-x)_{y+x} &= (1-y)_{y+x} \frac{\sin(-\pi x)}{\sin(\pi y)} \\
&= (1-y)_{y+x} \frac{\sin[\pi y - \pi(y+x)]}{\sin(\pi y)} \\
&= (1-y)_{y+x} \frac{\sin(\pi y) \cos[\pi(y+x)] - \cos(\pi y) \sin[\pi(y+x)]}{\sin(\pi y)}. \quad (\text{C.7})
\end{aligned}$$

Se  $y+x = n \in \mathbb{Z}$  obtém-se,

$$(-y)_n = (-1)^n (1+y-n)_n. \quad (\text{C.8})$$

Também, a partir de,

$$\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2}) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z), \quad (\text{C.9})$$

tem-se as fórmulas de duplicação,

$$(x)_{2n} = 4^n \left(\frac{x}{2}\right)_n \left(\frac{x+1}{2}\right)_n \quad (\text{C.10a})$$

$$(x)_{2n+1} = 2^{2n+1} \left(\frac{x}{2}\right)_{n+1} \left(\frac{x+1}{2}\right)_n. \quad (\text{C.10b})$$

A série hipergeométrica generalizada de uma variável define-se como,

$${}_mF_n(\alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_n; x) = \sum_s \frac{(\alpha_1)_s \dots (\alpha_m)_s}{(\beta_1)_s \dots (\beta_n)_s} \frac{x^s}{s!}. \quad (\text{C.11})$$

A derivada desta função é,

$$\frac{\partial}{\partial x} {}_mF_n(\alpha_s; \beta_t; x) = \frac{\prod_s \alpha_s}{\prod_t \beta_t} {}_mF_n(\alpha_s + 1; \beta_t + 1; 1). \quad (\text{C.12})$$

Em particular, é muito importante a função hipergeométrica de Gauss,

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_n \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (\text{C.13})$$

a qual converge para  $|x| < 1$  e no círculo unidade  $|x| = 1$  se  $\operatorname{Re}\{c - a - b\} > 0$ . Um resultado muito especial desta função é,

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \operatorname{Re}\{c - a - b\} > 0. \quad (\text{C.14})$$

A função hipergeométrica de duas variáveis conhecida como das quatro funções de Appell  $F_4$  é,

$$F_4(\alpha, \alpha'; \beta, \gamma; x, y) = \sum_{m,n} \frac{(\alpha)_{m+n} (\alpha')_{m+n}}{(\beta)_m (\gamma)_n} \frac{x^m y^n}{m! n!}, \quad (\text{C.15})$$

cuja região de convergência está definida por,

$$|x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}} < 1. \quad (\text{C.16})$$

A função de Appel  $F_4$  pode ser vista como o produto de dois funções hipergeométricas de Gauss,

$$\begin{aligned} F_4(\alpha, \alpha'; \beta, \gamma; x, y) &= \sum_m \frac{(\alpha)_m (\alpha')_m}{(\beta)_m} \frac{x^m}{m!} \sum_n \frac{(\alpha+m)_n (\alpha'+m)_n}{(\gamma)_n} \frac{y^n}{n!} \\ &= \sum_m \frac{(\alpha)_m (\alpha')_m}{(\beta)_m} \frac{x^m}{m!} {}_2F_1(\alpha+m, \alpha'+m; \gamma; y). \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Um caso particular de  $F_4$  acontece quando  $y = 1$ . Usando (C.17) e (C.14) conclui-se que,

$$F_4(\alpha, \alpha'; \beta, \gamma; x, 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \alpha')}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \alpha')} \sum_m \frac{(\alpha)_m (\alpha')_m (1 + \alpha - \gamma)_m (1 + \alpha' - \gamma)_m}{(\beta)_m \left(\frac{1+\alpha+\alpha'-\gamma'}{2}\right)_m \left(\frac{2+\alpha+\alpha'-\gamma'}{2}\right)_m} \frac{(x/4)^m}{m!}. \quad (\text{C.18})$$

Outra opção é que  $x = y$ . A "dedução" deste caso particular explica-se com certa extensão. Após a transformação de índices  $M = m + n$  e  $N = n$ ,

$$\begin{aligned} F_4(\alpha, \alpha'; \beta, \gamma; x, x) &= \sum_{M,N} \frac{(\alpha)_M (\alpha')_M}{(\beta)_{M-N} (\gamma)_N} \frac{x^M}{\Gamma(M-N+1) \Gamma(N+1)} \\ &= \sum_M \frac{(\alpha)_M (\alpha')_M x^M}{(\beta)_M \Gamma(M+1)} \sum_N \frac{(M-N+\beta)_N (M-N+1)_N}{(\gamma)_N \Gamma(N+1)} \\ &= \sum_M \frac{(\alpha)_M (\alpha')_M x^M}{(\beta)_M \Gamma(M+1)} \sum_N \frac{(1-\beta-M)_N (-M)_N}{(\gamma)_N \Gamma(N+1)} \\ &= \sum_M \frac{(\alpha)_M (\alpha')_M x^M}{(\beta)_M \Gamma(M+1)} {}_2F_1(1-\beta-M, -M; \gamma; 1) \\ &= \sum_M \frac{(\alpha)_M (\alpha')_M}{(\beta)_M} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma + \beta + 2M - 1)}{\Gamma(\gamma + M) \Gamma(\gamma + \beta + M - 1)} \frac{x^M}{M!} \\ &= \sum_M \frac{(\alpha)_M (\alpha')_M}{(\beta)_M} \frac{(\gamma + \beta - 1)_{2M}}{(\gamma)_M (\gamma + \beta - 1)_M} \frac{x^M}{M!}, \end{aligned}$$

e em conclusão,

$$F_4(\alpha, \alpha'; \beta, \gamma; x, x) = \sum_M \frac{(\alpha)_M (\alpha')_M \left(\frac{\gamma+\beta-1}{2}\right)_M \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)_M}{(\beta)_M (\gamma)_M (\gamma + \beta - 1)_M} \frac{(4x)^M}{M!}. \quad (\text{C.19})$$

As fórmulas (C.18) e (C.19) tem que ser olhadas com certa precaução. A fórmula (C.14) foi aplicada de forma muito ingênuas, sem contar com a restrição  $\operatorname{Re}\{c - a - b\} > 0$ . Estas fórmulas de redução possivelmente são válidas só para casos particulares dos valores  $\alpha, \alpha', \beta, \gamma$ . O estudo dessas condições não é trivial [33] e está fora do alcance deste trabalho. Porém, dada a coerência dos resultados, parece ser que o uso destas fórmulas neste trabalho está dentro do seu marco de validade.

---

## Referências Bibliográficas

- [1] I. G. Halliday, R. M. Ricotta, *Phys. Lett. B* **193**, 241 (1987).
- [2] I. G. Halliday, R. M. Ricotta, A. T. Suzuki, *Negative Dimensional Integration Method and Massive Feynman Diagrams*, Proceedings of the XVII ENFPC, Brazilian National Meeting on Particles and Fields, Serra Negra (1996).
- [3] A. T. Suzuki, A. G. M. Schmidt, *Negative Dimensional Integration for Massive Four-point Functions*, hep-th/9707187 (1997), hep-th/9709167 (1997).
- [4] A. T. Suzuki, A. G. M. Schmidt, *European J. Physics C* **5**, 175 (1998), hep-th/9709144 (1997).
- [5] A. G. M. Schmidt, *Integração em Dimensão Negativa em Teoria Quântica de Campos ao Nível de 1 e 2-loops*, Dissertação de Mestrado IFT-UNESP (1998).
- [6] C. Anastasiou, E. W. N. Glover, C. Oleari, *Nucl. Phys. B* **572**, 307 (2000), hep-ph/9907494 (1999).
- [7] A. T. Suzuki, A. G. M. Schmidt, *Solutions for a Massless Off-shell Two-loop Three-point Vertex*, hep-th/9712104 (1999); hep-th/9712108 (1997); hep-th/9709024 (1997).
- [8] A. T. Suzuki, A. G. M. Schmidt, R. Bentín, *Nucl. Phys. B* **53**, 549 (1999), hep-th/9807158.
- [9] A. T. Suzuki, A. G. M. Schmidt, *European J. Phys. C* **12**, 361 (2000), hep-th/9905022; A. T. Suzuki, R. Bentín, *Mod. Phys. Let. A* **16**, 1951 (2001), hep-th/0105022.
- [10] A. T. Suzuki, A. G. M. Schmidt, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 151 (2001), hep-th/0110047.
- [11] A. T. Suzuki, E. S. Santos, A. G. M. Schmidt, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 4465 (2003), hep-ph/0210148; A. T. Suzuki, E. S. Santos, A. G. M. Schmidt, *European J. Phys. C* **26**, 125 (2002), hep-th/0205158.
- [12] A. T. Suzuki, E. S. Santos, A. G. M. Schmidt, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 11859 (2003), hep-ph/0309080.

- [13] E. S. Santos, *Cálculos de Integrais de Feynman em Teorias de Campos*, Tese de Doutoramento IFT-UNESP (2003).
- [14] I. Gonzalez, I. Schmidt, *Phys. Rev. D* **72**, 106006 (2005), hep-th/0508013.
- [15] I. Gonzalez, I. Schmidt, *Nucl. Phys. B* **769**, 124 (2007).
- [16] A. T. Suzuki, A. G. M. Schmidt, J. D. Bolzan, *Gluing Feynman diagrams in NDIM: Insights into the three-point vertex*, hep-ph/08081496 (2008) .
- [17] E. E. Boss, A. I. Davydychev, *Theor. Math. Phys.* **89**, 1052 (1991); A. I. Davydychev, *J. Math. Phys.* **32**, 1052 (1991); A. I. Davydychev, *J. Math. Phys.* **33**, 358 (1992).
- [18] A. I. Davydychev, V. A. Smirnov, *Nucl. Phys. B* **554**, 391 (1999), hep-ph/9903328; A. I. Davydychev, V. A. Smirnov, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A* **502**, 621 (2002), hep-ph/021071.
- [19] M. A. Sanchis-Lozano, *On the connection between Generalized Hypergeometric Functions and Dilogarithms*, hep-ph/9511322 (1995); L. G. Cabral-Rosetti, M. A. Sanchis-Lozano, *J. Phys.: Conference Series* **37**, 82 (2006), hep-ph/0206081; A. I. Davydychev, *Standard and Hypergeometric Representations for Loop diagrams and the photon-photon Scattering*, hep-ph/9307323 (1993); A. I. Davydychev, M. Yu. Kalmykov, *Nucl. Phys. B* **699**, 3 (2005), hep-th/0303162.
- [20] G. Leibbrandt, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 849 (1975); S. Narison, *Phys. Rep.* **84**, 263 (1982).
- [21] G. 't Hooft., M. Veltman, *Diagrammar*, CERN 73-9 (1973); E.R. Speer, *J. Math. Phys.* **15**, 1 (1974).
- [22] G. Sterman, *An introduction to Quantum Field Theory* (Cambridge Univ. Press, 1993).
- [23] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, 1995).
- [24] M. Kaku, *Quantum Field Theory, A Modern approach* (Oxford Univ. Press 1993).
- [25] R. Casalbuoni, *Quantum Field Thoery*, Lectures at the Geneve Univ. 1997-1998.
- [26] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, (Cambridge Univ. Press 1996).
- [27] K. B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus, Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitray Order* (Academic Press 1974).
- [28] K.S. Miller, B. Ross, *An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential equations* (John Wiley& Sons 1993).
- [29] J. D. Munkhammar, *Rose-Hulman Undergrad. Math. J.* **6** (1), "Fractional Calculus and the Taylor-Riemann Series", 19 p. (2005).

- [30] R. Nevanlinna, V. Paatero, *Introduction to Complex Analysis* (Addison-Wesley 1969).
- [31] M. Field., *Several Complex Variables and Complex manifolds I* (Cambridge Univ. Press 1982); P. M. Gauthier, *Several complex variables*, Lecture notes 2006.
- [32] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. Tricomi, *Higher Transcendental Functions Vol. 1* (McGraw-Hill, 1953).
- [33] L.J. Slater, *Generalized Hypergeometric Functions*, (Cambridge Univ. Press 1966); W. N. Bailey, *Generalized Hypergeometric Series*, (Cambridge Univ. Press 1935).
- [34] O. V. Tarasov, *Phys. Rev. D* **54**, 6479 (1996), hep-th/9606018; O. V. Tarasov, *Nucl. Phys. B* **480**, 397 (1996); O. V. Tarasov, *Acta Phys. Polon. B* **29** 2655 (1998); J. Fleisher, F. Jegerlehner, O. V. Tarasov, *Algebraic Reduction of One-loop Feynman Graph Amplitudes*, hep-ph/9907327.
- [35] A. Denner, S. Dittmaier, *Nucl. Phys. B* **734**, 62 (2005), hep-ph/0509141; A. Denner, S. Dittmaier, *Reduction of One-loop Tensor 5-point Integrals*, hep-ph/0212259 (2002).
- [36] S. C. Woon, *Analytic Continuation of Operators; Operators acting Complex s-times*, hep-th/9707206 (1997).
- [37] L. D. Landau, *Nucl. Phys.* **13**, 181 (1959).
- [38] G. 't Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys. B* **44**, 189 (1972); C. G. Bollini, J.J. Giambiagi, *Nuovo Cim. B* **12**, 270 (1972).