

# SUR QUELQUES EFFETS DE COURBURE DANS LE SYNCHROTRON À PROTONS DU CERN\*

E. REGENSTREIF

CERN, Genève

## Résumé

L'on considère l'assemblage des blocs magnétiques rectilignes utilisé dans le montage de la machine et l'on calcule la déviation de l'orbite fermée ainsi que la répercussion sur  $\cos\mu$  résultant de cette disposition.

## Introduction

Bien que le synchrotron à protons se présente essentiellement sous forme d'une machine circulaire, le projet de l'aimant ne comporte pas l'utilisation d'éléments courbes. En fait, des blocs magnétiques rectilignes sont assemblés « en éventail » (fig. 1) pour former des unités magnétiques. Le rapport entre la longueur d'un bloc et le rayon de la machine étant très faible, on pourrait admettre que les écarts par rapport aux conditions idéales (éléments magnétiques circulaires) sont également faibles. Il a semblé toutefois indiqué de procéder à une analyse plus détaillée de la situation réelle de manière à pouvoir chiffrer les effets.

Par suite du remplacement des unités magnétiques circulaires par un assemblage de blocs rectilignes les particules seront soumises à une perturbation du type  $n$  : en effet, le chemin parcouru par une particule différera en longueur du chemin idéal et en outre, le gradient du champ ne sera plus perpendiculaire à l'orbite mais plutôt au bloc considéré. Les particules subiront également une perturbation du type  $f$  due au fait que les blocs sont localement déplacés et inclinés par rapport à l'orbite idéale.

## Équations du mouvement

### (a) Dans un bloc rectiligne

L'axe des abscisses sera pris suivant l'axe magnétique du bloc défini par  $B_z = B_0$ ,  $B_y = 0$ . L'origine des coordonnées sera placée à l'extrémité du bloc. Seul, le plan horizontal sera considéré.

Les équations cartésiennes du mouvement seront alors

$$\ddot{x} = e B_z \dot{y} / m \quad (1)$$

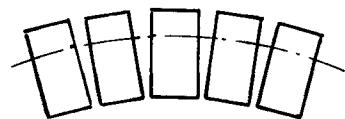


Fig. 1.

$$\ddot{y} = -e B_z \dot{x} / m ,$$

le champ étant donné par

$$B_z = B_0 (1 + n \cdot y / r_0) \quad (2)$$

où  $r_0$  est le rayon magnétique de la machine.

En prenant  $x$  comme variable indépendante et en utilisant le principe de la conservation de l'énergie on trouve pour l'équation du mouvement dans un bloc rectiligne

$$r_0 y'' + (1 + y'^2)^{3/2} (1 + n \cdot y / r_0) = 0, \quad (3)$$

$n$  étant positif dans un bloc focalisant et négatif dans un bloc défocalisant.

### (b) Dans la région de transition entre deux blocs

Nous admettrons que dans le coin formé par deux blocs adjacents le champ magnétique possède une symétrie

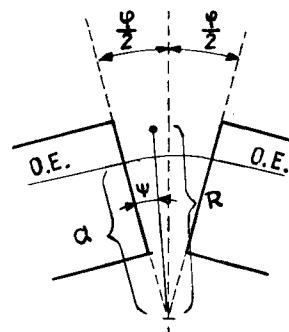


Fig. 2.

\* Cette communication n'a pas figuré au programme des discussions.

cylindrique dont l'axe coincide avec l'intersection des faces terminales des blocs. Un système de coordonnées curvilignes  $R, \psi$  (fig. 2) paraît indiqué ici pour exprimer d'une manière simple les conditions de passage et la forme du champ. Celui-ci s'écrit en effet

$$B_z = B_0 \left( 1 + n \frac{R-a}{r_0} \right) \quad (4)$$

Dans le système de coordonnées considéré, l'équation du mouvement est

$$m \ddot{R} = m R \dot{\psi}^2 - e R \dot{\psi} B_z \quad (5)$$

En prenant  $\psi$  comme variable indépendante et en écrivant encore la conservation de l'énergie on trouve pour l'équation différentielle de la trajectoire dans la région de transition entre deux blocs

$$R'' - 2 \frac{R^2}{R} - R + \frac{R'^2}{r_0} \left( 1 + \frac{R'^2}{R^2} \right)^{3/2} \left( 1 + n \cdot \frac{R-a}{r_0} \right) = 0; \quad (6)$$

$n$  sera encore pris positif dans la région située entre deux blocs focalisants et négatif dans le coin compris entre deux blocs défocalisants. La région de transition se trouvant entre un bloc focalisant et un bloc défocalisant sera partagée en une moitié focalisante et une moitié défocalisante.

### Equations des trajectoires

#### (a) Dans un bloc rectiligne

L'équation (3) peut être intégrée complètement à l'aide de fonctions elliptiques. Si l'on néglige toutefois  $y'^2$  (qui est de l'ordre de  $10^{-6}$  dans la machine du CERN) par rapport à l'unité, l'équation linéaire qui subsiste

$$r \cdot y'' + n \frac{y}{r_0} + 1 = 0 \quad (7)$$

peut être résolue très facilement et l'on trouve

$$y = y_0 \cos \frac{\sqrt{n} x}{r_0} + \frac{r_0}{\sqrt{n}} y'_0 \sin \frac{\sqrt{n} x}{r_0} + \frac{r_0}{n} \left( \cos \frac{\sqrt{n} x}{r_0} - 1 \right) \quad (8)$$

pour un bloc focalisant et

$$y = y_0 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{n} x}{r_0} + \frac{r_0}{\sqrt{n}} y'_0 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{n} x}{r_0} + \frac{r_0}{n} \left( 1 - \operatorname{ch} \frac{\sqrt{n} x}{r_0} \right) \quad (9)$$

pour un bloc défocalisant.

#### (b) Dans la région de transition

Il ne paraît pas possible de résoudre l'équation (6) dans le cas général.

En posant (fig. 2)

$$R = a + y \quad (10)$$

nous la mettrons sous la forme

$$y'' - \frac{2 y'^2}{a + y} - (a + y) + \frac{(a + y)^2}{r_0} \left[ 1 + \frac{y'^2}{(a + y)^2} \right]^{3/2} \times (1 + n \frac{y}{r_0}) = 0 \quad (11)$$

et essaierons de représenter la solution par un développement en série.

On trouve alors en se limitant aux termes du second ordre

$$y = y_0 + y'_0 \psi + \frac{1}{2(a + y_0)} \left\{ 2 y_0'^2 + (a + y_0)^2 - \frac{[(a + y_0)^2 + y_0'^2]^{3/2}}{r_0} (1 + n \frac{y_0}{r_0}) \right\} \psi^2 \quad (12)$$

La nécessité de pousser la solution jusqu'au second ordre résulte du fait qu'en négligeant le terme en  $\psi^2$  dans l'équation (12) le champ et son gradient disparaîtraient de la solution, ce qui conduirait à des absurdités.

Dans l'équation (12) les dérivées sont prises par rapport à  $\psi$  tandis que dans les formules (8) et (9) donnant le vecteur  $y$  à la sortie d'un bloc en fonction de ses valeurs à l'entrée, les dérivées sont prises par rapport à  $x$ .

Pour n'avoir affaire qu'à une seule variable, nous utiliserons la transformation

$$\frac{dy}{d\psi} = (a + y) \frac{dy}{dx} \quad (13)$$

En substituant dans (12) on trouve pour le vecteur  $y$  représentant l'excursion de la trajectoire à la sortie de la région de transition en fonction des données à l'entrée

$$y = y_0 + (a + y_0) y'_0 \varphi + \frac{a + y_0}{2} \left[ 1 - \frac{a + y_0}{r_0} (1 + n \frac{y_0}{r_0}) \right] \varphi^2 \quad (14)$$

$$y' = y'_0 + \left[ 1 - \frac{a + y_0}{r_0} (1 + n \frac{y_0}{r_0}) \right] \varphi \quad (15)$$

Ici les dérivées sont prises par rapport à  $x$  si bien que le passage du bloc magnétique au coin intermédiaire peut se faire immédiatement. Dans les relations (14) et (15) nous avons négligé  $y'^2$  par rapport à l'unité comme nous l'avons déjà fait dans le cas du bloc rectiligne.

### Déviation de l'orbite fermée

Considérons un espace formé par la moitié d'un coin de transition et la moitié d'un bloc magnétique. Une trajectoire qui à l'incidence et à l'émergence est parallèle à l'axe de l'espace considéré peut constituer une portion de l'orbite fermée. Nous allons donc introduire ces conditions dans les équations des trajectoires.

Si l'espace considéré est focalisant nous avons, en portant la condition  $y_0' = 0$  dans (14) et (15) et en remplaçant  $y_0$  par  $y_E$  (valeur à l'entrée)

$$y_{\varphi/2} = y_E + \frac{a + y_E}{8} \left[ 1 - \frac{a + y_E}{r_0} \left( 1 - n \frac{y_E}{r_0} \right) \right] \varphi^2 \quad (16)$$

$$y'_{\varphi/2} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{a + y_E}{r_0} \left( 1 + n \frac{y_E}{r_0} \right) \right] \varphi \quad (17)$$

$\varphi$  étant l'ouverture angulaire de la région de transition.

Ces quantités constituent les valeurs initiales pour un demi-bloc focalisant, nous avons en vertu de (8) et (9)

$$y_s = y_{\varphi/2} \cos \frac{\gamma}{2} + \frac{r_0}{\sqrt{n}} y'_{\varphi/2} \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{r_0}{n} \left( \cos \frac{\gamma}{2} - 1 \right) \quad (18)$$

$$y_s' = -y_{\varphi/2} \frac{\sqrt{n}}{r_0} \sin \frac{\gamma}{2} + y'_{\varphi/2} \cos \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\gamma}{2} \quad (19)$$

Ici l'indice S se rapporte à la sortie,  $\gamma = \frac{2l\sqrt{n}}{r_0}$  et  $2l$

représente la longueur d'un bloc.

La condition  $y_s' = 0$  devient alors

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \left( 1 + \frac{na}{r_0} \right) \frac{\varphi}{2\sqrt{n}} \cot \frac{\gamma}{2} + \left[ \frac{1}{8} - \frac{a}{4r_0} \left( 1 + \frac{na}{2r_0} \right) \right] \varphi^2 \right\} y_E \\ & + \frac{\varphi}{r_0} \left[ \frac{\sqrt{n}}{2} \cot \frac{\gamma}{2} - \frac{\varphi}{8} \left( 1 + \frac{2na}{r_0} \right) \right] y_E^2 - \frac{1}{8} \frac{n}{r_0^2} y_E^3 \varphi^2 = \\ & - \frac{r_0}{n} + \frac{r_0}{n} \left( 1 - \frac{a}{r_0} \right) \frac{\varphi\sqrt{n}}{2} \cot \frac{\gamma}{2} - \frac{a\varphi^2}{8} \left( 1 - \frac{a}{r_0} \right) \quad (20) \end{aligned}$$

C'est une équation de la forme

$$(1 + \alpha\varphi + \beta\varphi^2) y + (\gamma\varphi + \delta\varphi^2) y^2 + \varepsilon\varphi^2 y^3 = a + b\varphi + c\varphi^2 \quad (21)$$

dont la solution s'écrit, en négligeant les termes en  $\varphi$  d'ordre supérieur à 2,

$$y = a + (b - a\alpha - a^2\gamma) \varphi + [c - b\alpha + a(\alpha^2 - \beta) - a^2(\delta - \alpha\gamma) - 2a\gamma(b - a\alpha - a^2\gamma) - \varepsilon a^3] \varphi^2 \quad (22)$$

En remplaçant les coefficients, on trouve,

$$y_E = \frac{r_0}{n} \left[ -1 + \frac{\varphi\sqrt{n}}{2} \cot \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{an}{r_0} \right) \left( 1 + 2 \cot^2 \frac{\gamma}{2} \right) \varphi^2 \right] \quad (23)$$

$$y_s = \frac{r_0}{n} \left[ -1 + \frac{\varphi\sqrt{n}}{2\sin\gamma/2} \left( 1 + \frac{r_0 - na}{2\sqrt{n}r_0} \varphi \cot \frac{\gamma}{2} \right) \right] \quad (24)$$

pour l'excursion d'une orbite parallèle à l'axe à l'entrée et à la sortie de l'espace considéré.

Si l'on considère un espace défocalisant, un calcul analogue conduit aux relations

$$y_E = \frac{r_0}{n} \left[ 1 - \frac{\varphi\sqrt{n}}{2} \coth \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{na}{r_0} \right) \left( 1 - 2 \coth^2 \frac{\gamma}{2} \right) \varphi^2 \right] \quad (25)$$

$$y_s = \frac{r_0}{n} \left[ 1 - \frac{\varphi\sqrt{n}}{2\sinh\gamma/2} \left( 1 - \frac{r_0 + na}{2\sqrt{n}r_0} \varphi \coth \frac{\gamma}{2} \right) \right] \quad (26)$$

Le projet de la machine comporte 5 blocs par demi-unité et les données numériques sont  $r_0 = 7007.89$  cm,  $n = 282$ ,  $\varphi = 2\pi/1000$ ,  $a = 123.75$  cm. La relation entre  $l$  (demi-longueur d'un bloc) et  $\varphi$  est donnée par (fig. 3).

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{l}{r_0 - a - l^2/4r_0} \quad (27)$$

On trouve  $l = 21.62$  cm.

En portant ces données dans les équations précédentes on trouve pour un espace focalisant  $y_E = 0.06$  cm,  $y_s = 0.10$  cm et pour un espace défocalisant  $y_E = 0.07$  cm,  $y_s = 0.11$  cm.

Pour que l'orbite soit réellement fermée il faut que les quantités  $y_E$  correspondant à un espace focalisant et défocalisant soit égales. Ceci ne peut avoir lieu que pour

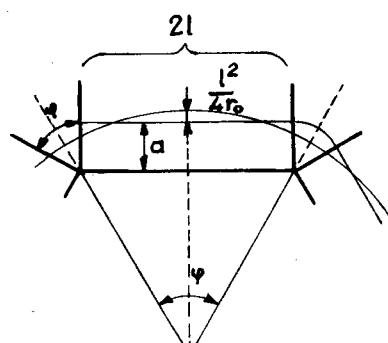


Fig. 3.

une particule dont la quantité de mouvement est légèrement différente de la quantité de mouvement de la particule cheminant le long de l'orbite idéale d'une machine composée d'éléments courbes. Pour trouver la quantité de mouvement correspondant à l'orbite fermée nous remplacerons dans toutes les relations qui précèdent — à l'exception de (27) qui représente la géométrie intrinsèque de la machine — la quantité  $r_o$  par  $\rho_o$  et nous écrirons que pour cette valeur  $\rho_o$  les deux quantités  $y_E$  tirées de (23) et (25) sont égales. On est alors conduit à l'équation transcendante

$$2 - \frac{\varphi \sqrt{n}}{2} \left( \cot \frac{\gamma}{2} + \coth \frac{\gamma}{2} \right) - \frac{\varphi^2}{2} \times \left[ 1 + \cot^2 \frac{\gamma}{2} - \coth^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{na}{\rho_o} \left( \cot^2 \frac{\gamma}{2} + \coth^2 \frac{\gamma}{2} \right) \right] = 0 \quad (28)$$

dont la solution est  $\rho_o = 7010.10$  cm. La différence relative de la quantité de mouvement est donc  $\frac{\Delta p}{p} = \frac{\rho_o - r_o}{r_o} \approx 3.1 \times 10^{-4}$  et l'on trouve alors  $y_E = 0.07$  cm.,  $y_s = 0.10$  cm. Ce sont ces quantités qui représentent la déviation de l'orbite fermée par rapport à l'orbite fermée d'une machine composée d'éléments courbes.

Dans un projet comportant 1 bloc par demi-unité magnétique, on aurait  $\varphi = \pi/100$ ,  $a = 85.55$  cm,  $l = 108.74$  cm et l'on trouverait pour la déviation de l'orbite fermée 0.5 cm.

L'adjonction de sections sans champ ne modifie pas ce résultat.

### Calcul de $\cos\mu$

Pour le calcul de  $\cos\mu$  nous utiliserons les eq. (14) et (15) sous leur forme simplifiée

$$y = y_o + a\varphi \cdot y_o' \quad (29)$$

$$y' = -\frac{1}{r_o} \left( 1 + n \frac{a}{r_o} \right) \varphi \cdot y_o + y_o' + \left( 1 - \frac{a}{r_o} \right) \varphi \quad (30)$$

Si l'on désigne maintenant par  $S$  la matrice de transfert d'une région sans champ, par  $M(\bar{M})$  la matrice de transfert d'un bloc focalisant (défocalisant) et par  $m(\bar{m})$  la matrice de transfert d'un espace angulaire focalisant (défocalisant), la matrice de transfert pour la période totale s'écrit

$$M = S^{1/2} (\bar{M} \bar{m})^{k-1} \bar{M} \bar{m}^{1/2} m^{1/2} M (mM)^{k-1} S^{1/2} \quad (31)$$

$k$  étant le nombre de blocs par demi-unité.

Dans le cas général les calculs sont longs et fastidieux. Nous nous bornerons ici au cas où une unité est composée de deux blocs.

L'éq. (31) devient alors

$$M = S^{1/2} \bar{M} \bar{m}^{1/2} m^{1/2} M S^{1/2} \quad (32)$$

et l'on trouve pour  $\cos\mu$  l'expression

$$\begin{aligned} \cos\mu = & \cos 2\gamma \operatorname{ch} 2\gamma + \frac{2L\sqrt{n}}{r_o} \cos \gamma \operatorname{ch} \gamma (\cos \gamma \operatorname{sh} \gamma - \sin \gamma \operatorname{ch} \gamma) + \frac{L^2 n}{2r_o^2} (\cos \gamma \operatorname{sh} \gamma - \sin \gamma \operatorname{ch} \gamma)^2 \\ & + \left[ \frac{a\sqrt{n}}{r_o} (\cos 2\gamma \operatorname{sh} 2\gamma - \sin 2\gamma \operatorname{ch} 2\gamma) - \frac{1}{\sqrt{n}} (\cos 2\gamma \operatorname{sh} 2\gamma + \sin 2\gamma \operatorname{ch} 2\gamma) \right] \varphi \\ & + \left[ \frac{an}{r_o^2} (\operatorname{ch} 2\gamma - \cos 2\gamma - 2\sin 2\gamma \operatorname{sh} 2\gamma) - \frac{1}{r_o} (\operatorname{ch} 2\gamma + \cos 2\gamma + 2\cos 2\gamma \operatorname{ch} 2\gamma) \right] \frac{L\varphi}{2} \\ & + \left( \frac{an}{r_o^2} \sin \gamma \operatorname{sh} \gamma + \frac{1}{r_o} \cos \gamma \operatorname{ch} \gamma \right) (\sin \gamma \operatorname{ch} \gamma - \cos \gamma \operatorname{sh} \gamma) \frac{L^2 \sqrt{n}}{r_o} \varphi \end{aligned} \quad (33)$$

Ceci est à comparer à la valeur de  $\cos\mu$  que l'on trouve pour une machine composée d'éléments strictement circulaires :

$$\cos\mu_o = \cos 2\Phi \operatorname{ch} 2\Phi + \frac{2L\sqrt{n}}{r_o} \cos \Phi \operatorname{ch} \Phi (\cos \Phi \operatorname{sh} \Phi - \sin \Phi \operatorname{ch} \Phi) + \frac{L^2 n}{2r_o^2} (\cos \Phi \operatorname{sh} \Phi - \sin \Phi \operatorname{ch} \Phi)^2 \quad (34)$$

En prenant  $r_0 = 7007.89$  cm,  $n = 282$ ,  $\varphi = \pi/100$ ,  $a = 85.55$  cm,  $l = 108.74$  cm,  $L = 160$  cm et  $\Phi = \sqrt{n} \varphi$ , on trouve

$$\cos\mu_0 = 0.7207$$

$$\cos\mu = 0.7219$$

### Conclusion

Une machine du type envisagé ici et dans laquelle on remplacerait une unité magnétique entière par un seul bloc rectiligne conduirait à une perte d'ouverture radiale de plus d'un centimètre.

Les avantages que procurerait un projet de ce genre ne semblent pas justifier son adoption.

Une machine où une demi-unité est constituée par un bloc rectiligne sera affectée d'un déplacement de l'orbite fermée de 5 mm.

Le projet de la machine du CERN comporte cinq blocs rectilignes par demi-unité magnétique; cette solution permet pratiquement de maintenir l'orbite fermée à sa position idéale.

Enfin, l'effet sur  $\cos\mu$  résultant de l'utilisation d'éléments non courbes reste faible.

Des discussions avec les membres de la section théorique et particulièrement avec M. A. Schoch ont facilité la rédaction de ce travail.

Les calculs numériques ont été effectués par Miss Ann Beard en collaboration avec Miss Monica Haney.

## DISCUSSION

*G. Ahier* : Jusqu'à présent, il semble bien que les non-linéarités sont surtout considérées comme génératrices de phénomènes parasites. Ce n'est pas étonnant puisque les théories ont toujours été établies en vue de réalisations de machines comportant des champs magnétiques linéaires (index  $n$  constant). Tout écart à la loi linéaire est donc une cause de perturbation, généralement défavorable.

On peut cependant se placer à un autre point de vue et chercher délibérément à provoquer de fortes non-linéarités. Par ce fait, on espère concentrer des forces de rappel dans un domaine restreint en lequel la particule serait puissamment rappelée. On pourrait ainsi diminuer les ouvertures des chambres des entrefers et partant les dimensions des machines elles-mêmes. D'autre part, on est en droit de penser que les petites non-linéarités qui s'introduisent involontairement de façon parasitaire seraient négligeables vis-à-vis de celles que l'on a volontairement introduites. Comme contre-partie, il est facile de démontrer que dans le cas d'un mouvement linéaire, si ce mouvement est stable, il est stable dans toutes les régions accessibles du plan; par contre, si un mouvement est non-linéaire, il sera très stable dans certaines régions du plan et absolument instable dans d'autres.

Certes, le problème paraît difficile à aborder dans toute sa généralité puisque, si les équations linéaires constituent une classe bien définie d'équations, par contre, les équations non-linéaires forment l'ensemble infini de toutes les autres équations. Cependant quelques restrictions doivent être formulées :

- a) Le champ magnétique doit obéir aux équations de Maxwell.
- b) Un certain nombre de conditions sont imposées par la symétrie : celle-ci est pratiquement cylindrique, il n'y a pas de composante azimutale du champ, il y a une surface médiane d'antisymétrie qui en première approximation est plane.
- c) Pour un synchrotron à protons  $dm/dt = 0$  et le rayonnement est négligeable.
- d) On peut supposer que l'énergie s'accroît adiabatiquement et qu'on peut ainsi supposer que durant un nombre appréciable de tours elle est constante, ceci pour l'étude des oscillations bétatroniques. Enfin, pour commencer par le cas le plus simple, on peut considérer le cas d'un cosmotron conventionnel et parfaitement circulaire. L'équation du mouvement  $d/dt (mv) = evxB$  rapportée à un trièdre mobile entraîné par la particule de référence se déplaçant sur le cercle médian se décompose en

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} - r_0 \left( 1 - \frac{x}{r_0} - \frac{B_z}{B_0} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2x}{d\theta^2} - r_0 \frac{B_r}{B_0} = 0 \quad (1)$$

En dehors des sources du champ,  $B_z$  et  $B_r$  sont des fonctions entières de  $x$  et de  $z$ , qui ne sont pas absolument

indépendantes d'ailleurs car

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0 \text{ et } \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

Les équations (1) peuvent donc s'écrire

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \varphi(x, z) \quad \frac{d^2z}{d\theta^2} = \psi(x, z) \quad (3)$$

où les fonctions entières  $\varphi$  et  $\psi$  sont développables en séries entières de  $(x, z)$  dont tous les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  ne sont pas absolument indépendantes en vertu de (2). On peut cependant disposer de ceux qui restent arbitraires pour faire en sorte que les équations

$$\varphi(x, z) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x, z) = 0 \quad (4)$$

aient des solutions communes réelles  $(x_1, z_1), (x_2, z_2), \dots, (x_k, z_k)$ . Dans l'espace des phases si aux points  $(x_k, z_k)$  ont fait à l'origine  $(x_k')_0 = 0$  et  $(z_k')_0 = 0$  (5) on a affaire à une particule qui d'après (3) et (4) n'est soumise à aucune force, de sorte que d'après (5) elle décrit une droite d'univers (géodésique) dans (l'espace-phase, temps). Les particules  $P_k$  qui obéissent à (4) et (5) (et il y en a toujours d'après nos hypothèses sur les  $a_i$  et  $b_i$ ) ont donc pour images des points fixes dans l'espace des phases. Les particules voisines des  $P_k$  vont soit osciller autour des  $P_k$ , soit s'en éloigner peu à peu. Les  $P_k$  seront des points fixes stables ou instables; leur voisinage dans l'espace des phases sera entouré par des courbes fermées et ouvertes selon le cas et qui représentent l'évolution des particules voisines des  $P_k$ . Si les  $\varphi$  et  $\psi$  sont des séries infinies, il y aura une infinité de points fixes. Si ce sont des polynômes, il n'y en aura qu'un nombre fini. De toutes façons, l'espace des phases sera morcelé en régions de stabilité ou d'instabilité. C'est ainsi que l'on pourra s'efforcer de disposer

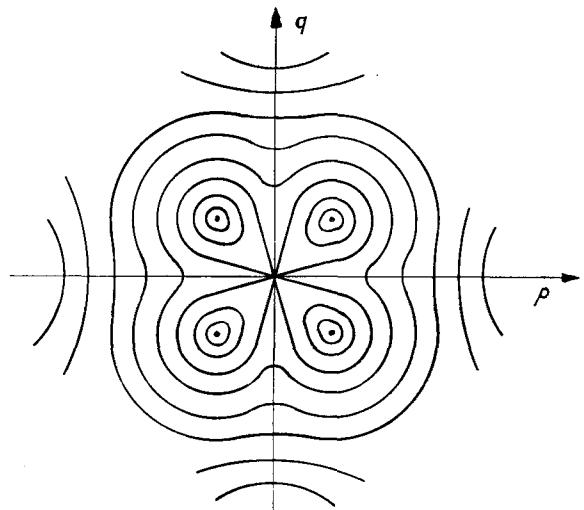


Fig. 1.

des  $a_i$  et  $b_i$  de telle façon qu'au voisinage de l'origine on observe dans toute coupure de l'espace des phases une figure telle que ci-contre (exemple non limitatif) où l'origine est instable et où 4 points fixes sont stables. Il existe une courbe limite qui encloit une aire de stabilité à ceci près que les particules peuvent permutez si elles passent par l'origine. On s'efforcera de rendre ce domaine aussi petit que possible. On aura alors 4 faisceaux très rapprochés dans un domaine qui peut être plus ramassé que celui qui correspondrait à un champ linéaire "anologue". Les sections droites et le G.A. compliquent le problème mais le laissent abordable. On peut se fixer à priori une distribution de ce genre dans l'espace des phases, en déduire les  $a_i$  et  $b_i$  donc le champ magnétique, donc le potentiel et finalement le profil au moins approximatif des pièces polaires, lesquelles peuvent, il est vrai, présenter alors des formes très compliquées ou nécessiter l'emploi d'enroulements correcteurs très spéciaux.

Mais on nous a, depuis le début de ce Symposium présenté des formes de pièces déjà si tourmentées, que, maintenant, je ne doute plus de rien !

*J. D. Lawson*: The phenomenon of a "locked in" orbit described by Courant could also be seen very clearly on the weak focusing 30 Mev synchrotron built at Malvern by the A.E.R.E. group in 1948<sup>1)</sup>. At the end of the accelerating cycle the radio-frequency accelerating field was switched off, and the increasing magnetic field caused the particles to spiral in and strike an internal target. A pulse of X-rays was observed at the expected time after the turn off of the radio-frequency, but there also appeared another pulse earlier than was expected. This was interpreted as a locked in orbit closing after two turns, lying partly inside and partly outside the normal circular orbit, which would clearly strike the target earlier when its radius began to shrink. The conditions for the occurrence of such an orbit certainly existed in this machine, viz.  $n \sim 0.75$ , a very non-linear field, and azimuthal perturbations. Varying the latter altered the relative sizes of the two pulses, and perturbations could be found which would make either disappear. This phenomenon is described in more detail in<sup>2)</sup>.

*V.I. Veksler*: In the Moscow 30 Mev synchrotron a similar beam splitting was observed and explained in the same way.

*J.B. Adams*: Experimental confirmation of the results obtained with the CERN mechanical analogue can be supplemented by Baldwin's experiments in the States. He introduced non-linear field variations and non-linear perturbations in a conventional synchrotron and also observed subresonances. (As is known a C.G. machine behaves in this respect very much like an A.G. machine.)

*R. Wideröe*: We have had similar experience with betatrons and synchrotrons.

*W. McFarlane*: We have also obtained two  $\gamma$ -ray bunches on the 300 Mev synchrotron at Glasgow University.

*G. K. Green*: The half-integral lock shown on Courant's slide represents 20,000 revolutions with no other loss than that caused by gas scattering.

*V. V. Vladimirska*: Studies of non-linear motions have been carried out in our laboratories with the aim to use non-linearities to limit the build-up of amplitudes. We have not been successful however. Has anybody else?

*T. A. Welton*: Ahier's paper might give some answer to this question.

*B. D. McDaniel*: The old Cornell synchrotron had two beams but the new one has only one.

*L. Osborne*: The MIT synchrotron shows two beams in the betatron phase and one in the synchrotron phase.

*V. I. Veksler* (to *L. Osborne*): Did you measure the non-linearity of the field?

*L. Osborne*: Very small non-linearities suffice to give rise to two orbits. Our method of measurement was not sensitive enough to detect with safety non-linearities of this order.

*E. D. Courant*: Most classical machines work near  $n = 0.75$  and the beam would be destroyed quickly if there were no non-linearities in the magnetic field.

*D. W. Kerst*: I agree with Courant; about two dozen betatrons are working on the  $n = \frac{3}{4}$  (half integral) resonance region which is supposed to be very unstable. In all these beams, except for very fine grain effects, there is another strange effect e.g. the beam seems to remember its history.

If there are two acceptance points at injection, the orbits can remain separated and two pulses come out. This was observed on the 300 Mev betatron.

*G. K. Green*: In the Cosmotron the magnetic field changes relatively slowly with time and one can study those phenomena in greater detail than in the electron synchrotrons.

The magnetic field of the Cosmotron is quite non-linear at injection and saturation. Yet no non-linear effects were observed, but the non-linearity can shift the  $Q$  value into a linear resonance. The Cosmotrons weeps at least through three higher order resonances with no blow-up of the beam. Even at  $n = \frac{3}{4}$  the beam width does not increase by more than 10% as was measured by means of a paddle.

*N. F. Verster*: I understand from the lectures, that difference resonance should not be harmful. Still in the cyclotron one generally loses the beam at the point  $n = 0.2$  where we have  $2 Q_y - Q_x = 0$ . Is this some other kind of resonance?

*J. B. Adams*: This is not an instability but transfer of energy from the horizontal oscillations to the vertical

oscillation. The increased vertical amplitude causes particles to hit the upper and lower surfaces of the dee.

*T. A. Welton* (to K. R. Symon) : The resonance occurs at  $Q_r = 2 Q_v$ .

Your plot showed a line at  $Q_r = 3 Q_v$ , but off axis, hence off a median plane one can see immediately that nothing happens on this line.

*K. R. Symon* : I agree. As soon as we took more data it was obvious that the line  $Q_r = 2 Q_v$  gives the trouble.

*E. D. Courant* : Is the difficulty you find for  $Q_r = 2 Q_v$  a real instability or a blow-up expected from non-linear theory?

*K. R. Symon* : L. J. Laslett has not yet finished the numerical check. He found that for  $Q_r = 2 Q_v$  and with the smallest amplitude of  $r$  and  $z$ -oscillation that the digital computer can accept, the  $z$  amplitude becomes bigger than the biggest number the computer can give but the  $x$  amplitude does not change. There are however some cases where the  $z$  component grew exponentially and started oscillations around some big value of  $z$ . Even if it is not a theoretical instability it is a practical one.

*R. L. Walker* : Would Symon give some numerical figures for the amplitude of the oscillations that can be held in the machine?

*K. R. Symon* : Kerst is in a better position to answer this. The general situation is as follows. We use small models, where the vertical aperture is a larger fraction of the radius than in the full-size machines. If we chose the parameters without special regard to the instability, the stability boundaries are small. Losing somewhat on the other parameters, we can however obtain a machine with very satisfactory stability boundaries.

*D. W. Kerst* : I shall discuss this problem in the lecture of tomorrow morning.

*J. B. Adams* (to K. R. Symon) : Did you make your calculation for a machine with or without non-linear perturbation? In the CERN machine one could allow 20% non-linearity if the machine were perfect and still have a stable system but only for 2% non-linearity if there are non-linear perturbations present.

*K. R. Symon* : All cases reported apply to perfect machines with large inherent non-linearities. Few computations exist for imperfect machines. They show that the stability boundaries are smaller but still reasonable.

*J. B. Adams* : Are you satisfied with the tolerances you find now from the engineering point of view?

*R. L. Walker* : From the calculations for a 20 Gev machine it appears that the amplitude of the radial oscillation can become 1 cm. before the instability occurs. Have you made numerical computations that agree with this result?

*D. W. Kerst* : One model was run realistically on a digital computer, putting in reasonable errors. Various field shapes were considered. For a sinusoidal machine the stability limits and the mechanical tolerance seem to be good.

*R. L. Walker* : Comparing this type of machine with the calculations made for a 20 Gev machine the tolerances seem to be tighter.

*K. R. Symon* : From my approximate formula one sees that a decrease of the flutter factor requires an increase of  $Q_1$ . The larger  $Q_1$ , the more serious are the non-linear effects. We think that the separate sector type gives larger flutter factors with smaller spiral angles and increase in stability limits.

*A. A. Kolomenski* : What value do you obtain for the circumference factor in a machine of the radial sector type?

*K. R. Symon* : It is at least 5 if the number of sectors is large.

*A. A. Kolomenski* : A circumference factor of about 2 should be possible if one does not work in the intersection of first stability regions, but in the intersection of the first and the second stability regions.

*L. W. Jones* : One could indeed get a circumference factor of 1.5-2 but there the spacing of the resonance lines in terms of  $n$  is much smaller.

*A. A. Kolomenski* : What is the tolerance on  $n$ ?

*L. W. Jones* : About a factor 10-100 times worse than in the ordinary A.G. machine.

*A. A. Kolomenski* : I think that in some cases it may be 10-20 times only.

*L. W. Jones* : We have given up this machine (which we called incidentally Mark III) and now concentrate on Mark V that has spiral sectors.

*A. A. Kolomenski* : Why do you consider only the variant with transition energy? This introduces additional complications, that could be avoided.

*K. R. Symon* : Crossing the transition energy can be avoided easily in the radial sector type but not in the spiral sector type. This crossing is not more difficult in a fixed field machine however, than in a pulsed field machine perhaps even easier.

*H. Bruck* : Is the condition  $g_1 + g_2 = 4$  to be considered as particularly dangerous in a machine with some azimuthal symmetry, e.g. in a machine with four straight sections as the Cosmotron and the Saclay machine?

*R. Hagedorn* : Not the equation  $g_1 + g_2 = 4$  produces any danger, but rather the equation  $g_1 Q_x + g_2 Q_y = 4$ . That is the case if you have some structure in the machine exhibiting a strong fourth Fourier component as for instance the machine with four straight sections. In a

conventional machine this might happen since  $Q_x$  and  $Q_y$  are of the order of unity. This however, because  $Q_x$  and  $Q_y$  both are less than one can be fulfilled only with  $g_1 + g_4 > 4$ , which according to theory will generally not lead to instabilities.

*A. A. Kolomenski*: Two remarks concerning Symon's paper on FFAG accelerators (radial sector type).

1. I should like to emphasize several advantages presented by a magnet system with a decreasing orbit radius

( $\alpha < 0$ ), namely the absence of transition energy and better conditions for the more important vertical focusing.

2. If we get more strict tolerances for magnetic field, we could avoid increasing the radius 5 to 6 times. For instance if the working cell (on the stability diagram) is chosen not at the intersection of the first stability region (as is usually done in a synchrotron), but, say, at the intersection of the first and second regions, then this factor decreases approximately to 2.

#### LIST OF REFERENCES

1. Fry, D. W. et al. 30-Mev electron synchrotron. *Nature* 161, p. 504-6, 1948.
2. Lawson, J. D. Double orbit in the 30 Mev synchrotron. *Nature*, 165, p. 109-10, 1950.