

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-D.003/02

Interação Nucleon-Nucleon Devida à Troca de Três Píons

e

Produção de Um Píon Devida à Troca de Dois Píons.

Joel César Pupin

Orientador

Manoel Roberto Robilotta

Fevereiro de 2002

Agradecimentos

Ao Prof. Manoel Roberto Robilotta pela orientação, ao FINPE pelo apoio e a todos aqueles que, direta ou indiretamente, me ajudaram neste trabalho.

Finalmente, à FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Utilizando a simetria quiral, calculamos a contribuição dominante ao potencial nucleon-nucleon (NN) devido à troca de três píons não correlacionados. Esta contribuição é isovetorial com as componentes pseudoescalar e axial. A pseudoescalar é dominante, tem um alcance de 1.0 fm e contribui no canal do píon.

No mesmo contexto, estudamos a produção de um píon na interação nucleon-nucleon devida à troca de dois píons. O termo dominante do kernel da produção é construído a partir da mesma interação básica usada no potencial NN devido à troca de três píons. Relacionamos este termo à componente central do potencial NN devido à troca de dois píons e mostramos que esta, por sua vez, é dominada pelo fator de forma escalar píon-nucleon. O kernel obtido foi aplicado para o limiar da produção e na construção de um potencial de três nucleons. Os resultados foram generalizados para um potencial NN central qualquer e comparados ao potencial de Argonne e àquele devido à troca de um méson escalar ...ctício.

Palavras Chave: interação nucleon-nucleon; produção de píon; simetria quiral.

Números PACS: 13.75.Cs; 13.60.Le; 13.75.Gx; 12.39.Fe; 11.30.Rd.

Abstract

Using the chiral symmetry, we calculated the dominant contribution to the nucleon-nucleon (NN) potential due to the exchange of three non-correlated pions (3½). This contribution is isovector with pseudoscalar and axial components. The pseudoscalar component is dominant, it has a range of 1.0 fm and it contributes in the pion channel.

In the same context, we studied the pion production in the nucleon-nucleon interaction due to the exchange of two pions (2½). The dominant term of the production kernel is built from the same basic interaction used in the 3½-exchange NN potential. We related this term to the central component of the 2½-exchange NN potential and we showed that the latter, on its turn, is dominated by the pion-nucleon scalar form factor. The obtained kernel was applied at the threshold and in the construction of a three-nucleon potential. The results were generalized for a central NN potential of any kind and compared to the potentials of Argonne and to that due to the exchange of one ..ctitious scalar meson.

Key words: nucleon-nucleon interaction; pion production; chiral symmetry.

PACS numbers: 13.75.Cs; 13.60.Le; 13.75.Gx; 12.39.Fe; 11.30.Rd.

Índice

CAPÍTULO 1	Introdução	1
CAPÍTULO 2	Simetrias e Lagrangianas	7
2.1	Formalismo Lagrangiano	8
2.2	Simetria Unitária e Lei de Conservação	9
2.3	Simetria Quiral	13
2.4	Realização Linear	23
2.5	Realização Não-Linear	32
2.6	Regras de Feynman	38
CAPÍTULO 3	Processos Intermediários	43
3.1	Espalhamento Píon-Píon	44
3.2	Espalhamento Píon-Nucleon	46
3.3	Produção de Um Píon	51
CAPÍTULO 4	Espalhamento NN	63
4.1	Potencial	66
4.2	Trocas de Um Píon e Um Méson a_1	72
4.3	Troca de Três Píons Não Correlacionados	76
CAPÍTULO 5	Produção de Píon no Espalhamento NN	89

5.1 Espalhamento NN Devido à Troca de Dois Píons	92
5.2 Produção de Um Píon Devido à Troca de Dois Píons	99
5.3 Kernel da Produção	105
5.4 Generalização	108
5.5 Produção no Limiar	110
5.6 Potencial de Três Nucleons	113
CAPÍTULO 6 Conclusões e Perspectivas	121
APÊNDICE A Notação e Convenções	125
A.1 Notações Relativísticas	125
A.2 Equações de Onda Relativísticas	126
A.3 Convenções	129
APÊNDICE B Cálculos com Spinores	131
B.1 Sanduíches	131
B.2 Produtos com Sanduíches	134
APÊNDICE C Integrais	137
C.1 Quadridimensionais	137
C.2 Tridimensionais	142
C.3 Unidimensionais	144
BIBLIOGRAFIA	149

Capítulo 1

Introdução

A cromodinâmica quântica (QCD) é a teoria fundamental das interações fortes. A liberdade assintótica dos quarks, proveniente do caráter não abeliano da QCD, restringe o uso da teoria de perturbação a energias altas. Em energias baixas, métodos não perturbativos, tais como cálculos na rede e regras de soma, podem ser empregados em casos como espectroscopia hadrônica e larguras de decaimento. Uma outra forma de contornar esta dificuldade é usar teorias de campos efetivas, em que os estados ligados de quarks são tratados como hadrons, bárions ou mésons.

Atualmente são conhecidos seis quarks, mas nas interações hadrônicas a baixas energias e, em particular, nas forças nucleares os quarks mais leves dominam. Estes quarks leves, o u (up) e o d (down), têm massas da ordem de 10 MeV, muito menores que a escala da QCD, $\alpha_{\text{QCD}} = 1 \text{ GeV}$.

Interações de férmions sem massa foram inicialmente estudadas no contexto das interações fracas, no qual se percebeu que as lagrangianas apropriadas são invariantes pelo grupo de transformações quirais. Por isso, é natural pensar que o setor da QCD envolvendo os quarks leves u e d seja aproximadamente invariante por transformações quirais $SU(2) - SU(2)$. Este fato é da maior relevância para a construção de uma teoria de campos efetiva (EFT). O propósito de uma teoria efetiva da QCD é substituir os detalhes microscópicos das interações de quarks e glúons por processos macroscópicos mais simples. Logo, para que a teoria efetiva seja aceitável, é preciso que ela partilhe as simetrias da teoria fundamental. Isso deve acontecer tanto com as simetrias de Poincaré, associadas às propriedades do espaço-tempo, quanto para as simetrias dinâmicas, como isospin e simetria quiral. No caso de sistemas de nucleons e píons, portanto, é muito importante descrever a dinâmica por meio de lagrangianas efetivas aproximadamente invariantes pelo grupo quiral $SU(2) - SU(2)$.

A simetria quiral é realizada no modo de Nambu-Goldstone e o vácuo, preenchido com um condensado, permite excitações de estados coletivos sem massa, identificados com os píons. A quebra da simetria, devida às massas dos quarks no nível fundamental, é associada às massas pequenas dos píons nas teorias efetivas. Por isso, o cálculo de amplitudes em energias baixas requer o emprego de uma teoria que trate as interações hadrônicas como sendo aproximadamente invariantes por transformações quirais. Existem várias maneiras de construir lagrangianas com simetria quiral, mas duas delas são especialmente importantes, porque refletem pontos de vista diferentes para o significado da simetria. Uma delas é a realização linear do modelo sigma e a outra é a realização não-linear, com o acoplamento píon-nucleon derivativo.

A formulação sistemática de uma teoria de campos efetiva para as interações fortes, que incorpore a simetria quiral, depende da expansão da lagrangiana em relação ao campo do píon. No caso das interações píon-nucleon, esta expansão produz uma amplitude na forma de uma série convergente em potências dos trimomentos externos e da massa do píon [Wei 79]. A simetria quiral faz com que, em energias baixas, o termo dominante desta série seja determinado por f_{π} , a constante de decaimento do píon, e por g_A , o elemento de matriz nucleônico da carga axial. A formulação sistemática da EFT é conhecida como teoria da perturbação quiral (ChPT) [GL 84] [GL 85]. Em processos envolvendo somente mésons, o tratamento relativístico fornece um procedimento de contagem de potências bem definido. Quando bárions também estão presentes, a contagem quiral de potências torna-se problemática [GSS 88]. Um modo de superar esta dificuldade consiste em supor que os nucleons são muito pesados em comparação aos momentos envolvidos e efetuar a aproximação

não-relativística do setor bariônico das lagrangianas [Wei 90] [Wei 91] [JM 91]. Neste caso, a expansão da lagrangiana quiral é feita, também, em potências do inverso da massa do bárion. Esta abordagem, conhecida como teoria de perturbação quiral para bárions pesados (HBChPT), produz bons resultados para muitos processos, embora a convergência da série que representa a amplitude não seja assegurada. Recentemente, foi proposta uma abordagem alternativa para o problema, totalmente relativística, que assegura a contagem quiral de potências para processos que envolvem bárions [BL 99].

Para sistemas contendo apenas um nucleon, as duas abordagens são consistentes somente se a escala da regularização dimensional for ...xada igual à massa do nucleon [BKKM 92]. Já com dois nucleons, os dois procedimentos parecem não ser consistentes. No espalhamento nucleon-nucleon devido à troca de dois píons, as predições dos cálculos relativísticos para a contribuição dominante diferem de 25% dos baseados no HBChPT em primeira ordem. A introdução de correções de ordem superior diminui esta diferença, mas não consegue eliminá-la totalmente [Rob 01].

A importância da simetria quiral depende fortemente do processo considerado. Nos processos puramente mesônicos, como o espalhamento píon-píon ($\pi\pi$) [GL 84] [BCEGS 97], os termos dominantes da amplitude são determinadas pela simetria quiral. Nos processos méson-nucleon, a ação da simetria parece depender do número de píons envolvidos. No espalhamento píon-nucleon (πN) [OO 75] [GSS 88] [Pup 95] [FMS 98], ela dá origem a cancelamentos entre os diagramas, de modo que a amplitude πN se anula no limite quiral, quando a massa do píon tende a zero. Já para a produção de um píon no espalhamento πN [OT 68] [Ber 92] [BKM 94], a simetria quiral não contribui para o termo dominante da amplitude. Na fotoprodução de píons [NL 90] [BKLM 94] [Pup 94], ela é dominante apenas para a produção de dois píons. No caso de processos envolvendo dois nucleons, tais como o espalhamento nucleon-nucleon elástico ou a produção de píons, a avaliação da importância da simetria se torna mais complicada, pois as interações envolvem estados intermediários com diferentes números de píons, em que a simetria quiral pode ou não ser relevante. Como esses estados intermediários geralmente estão associados à distância entre os nucleons, o papel da simetria pode, também, ser relacionado com esta distância.

No espalhamento NN , a atuação da simetria quiral é bem entendida apenas nas trocas de um e dois píons. A troca de um píon, responsável pela parte de longo alcance da interação, independe da simetria quiral, pois todas as lagrangianas, simétricas ou não, produzem o mesmo vértice básico πN . Isso mostra que a simetria quiral é compatível e, ao mesmo tempo, irrelevante para esse processo. Na troca de dois píons, por outro lado, a simetria é crucial, pois o potencial NN

desaparece no limite quiral. Essa importância decorre de ela gerar cancelamentos nas amplitudes $\frac{1}{4}N$ intermediárias, que descrevem os acoplamentos entre o sistema de dois píons e um nucleon. O próximo passo para o entendimento da interação NN a menores distâncias, seria determinar a intensidade da troca de três píons e a relevância da simetria quiral neste processo. Apesar desse passo ser, em princípio, “natural”, ele somente foi dado em 1999, quando da publicação de um trabalho de nossa autoria [PR 99]. A troca de três píons relativística é descrita no capítulo 4, para uma classe de diagramas baseados nos resultados de Olsson e Turner para o processo $\frac{1}{4}N + \frac{1}{4}N \rightarrow \frac{1}{4}N$ [OT 68] [OT 69] [OT 77]. Atualmente, extensões deste cálculo estão sendo realizados em HBChPT [Kai 01].

No caso da produção de um píon no espalhamento NN, a importância da simetria quiral ainda não está bem estabelecida. Espera-se que a contribuição de longo alcance seja descrita pela simples emissão de um píon, conhecida como aproximação de impulso, e pelo reespalhamento do píon trocado entre os nucleons. A simetria quiral é relevante apenas no segundo caso, pois o reespalhamento envolve a amplitude $\frac{1}{4}N$ elástica. Entretanto, cálculos efetuados apenas com os termos de impulso e de reespalhamento subestimam os dados experimentais [CFMK 96] [KMR 96]. A inclusão dos deltas no termo de reespalhamento também produz contribuições pequenas [RMK 99] [PRS 99]. A explicação dos resultados experimentais deve estar associada à troca de mais píons. Esta idéia foi confirmada com o estudo da contribuição de um méson escalar quiral isotrópico [CPR 95] [MR 99], que simula a componente escalar-isoescalar da troca de dois píons. Contudo, cálculos realizados com HBChPT [DKMS 99] e ChPT [BKM 99] mostraram que cancelamentos também estão presentes na troca de dois píons. Para tentar compreender este problema, estudamos, no capítulo 5, a produção devida à troca de dois píons não correlacionados. Inicialmente, consideramos apenas a componente dominante do potencial NN, em seguida, estabelecemos a relação desta interação com o processo de produção. Deste modo, identificamos com mais transparência a dinâmica quiral da contribuição dominante da produção devida à troca de dois píons. Essa relação, apresentada num trabalho de nossa autoria [MPR 00], é nova e não trivial uma vez que a dinâmica da produção é mais complexa, envolve mais cancelamentos e não pode ser reduzida à dinâmica do espalhamento NN.

No capítulo 5, também demos atenção ao potencial de três nucleons devido à troca de três píons, que envolve a amplitude de produção como um processo intermediário do espalhamento de três nucleons. A realização desta contribuição através da dinâmica quiral é uma novidade entre os potenciais existentes. Este resultado permite, também, compreender a diferença entre os poten-

ciais de Tucson-Melbourne [CSB 75] [CSMBBM 79] [CG 81] e do Brasil [CDR 83] [RICD 85] [RC 86].

Este trabalho consiste de seis capítulos e três apêndices. No capítulo 2, introduzimos alguns conceitos do formalismo lagrangiano e das simetrias unitárias. Mostramos a relação entre estas simetrias e leis de conservação neste formalismo. Apresentamos a simetria quiral e suas realizações linear e não-linear. Mostramos as regras de Feynman, decorrentes de tais realizações, necessárias para o cálculo das amplitudes dos processos estudados neste trabalho. No capítulo 3, estudamos três processos intermediários do espalhamento nucleon-nucleon, $\frac{1}{4}\bar{N} ! \frac{1}{4}\bar{N}$, $\frac{1}{4}N ! \frac{1}{4}N$ e $\frac{1}{4}N ! \frac{1}{4}\bar{N}$. No capítulo 4, calculamos o potencial NN devido à troca de três píons não correlacionados. No capítulo 5, obtemos o kernel da produção de um píon no espalhamento NN devido à troca de dois píons não correlacionados. Finalmente, no capítulo 6, apresentamos nossas conclusões e possíveis extensões deste trabalho. Os apêndices são dedicados à notação, cálculos de sanduíches spinoriais e de integrais.

Capítulo 2

Simetrias e Lagrangianas

A teoria de campos quânticos costuma ser escrita no formalismo lagrangiano. Uma das grandes vantagens desse formalismo é a existência de quantidades conservadas devido às simetrias da lagrangiana. Nesse formalismo, por exemplo, as conservações total da corrente vetorial e parcial da corrente axial nas interações fortes decorre de uma simetria aproximada da QCD, a simetria quiral. Embora esta simetria seja exata apenas no limite em que as massas dos quarks desaparecem, ela pode ser considerada aproximada nas interações fortes envolvendo os quarks leves up e down, pois suas massas de 2 a 15 MeV são consideravelmente menores que a escala de energia hadrônica de 200 MeV. Outra grande vantagem deste formalismo é a construção de amplitudes de uma forma muito mais simples e intuitiva, através das regras de Feynman derivadas da lagrangiana.

2.1 Formalismo Lagrangiano

A formulação lagrangiana fornece um procedimento conveniente e sistemático para a obtenção de equações de movimento.

Na mecânica clássica, a lagrangiana L de um sistema, em coordenadas generalizadas $q_i(t)$, é dada pela diferença entre as energias cinética T e potencial V ,

$$L(q_i; \dot{q}_i) = T - V; \quad (2.1)$$

onde \dot{q}_i denota a derivada temporal de q_i .¹

O comportamento do sistema é dado pelas equações de movimento de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0; \quad (2.2)$$

obtidas através do princípio variacional de Hamilton, que consiste na variação da ação

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i; \dot{q}_i); \quad (2.3)$$

de modo que esta tenha um valor estacionário sobre um caminho arbitrário $q_i(t)$ com $\dot{q}_i(0) = \dot{q}_i(t)$. A hamiltoniana H do sistema é introduzida pela transformada de Legendre de $L(q_i; \dot{q}_i)$,

$$H(q_i; \dot{q}_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i; \dot{q}_i); \quad (2.4)$$

onde p_i é o momento generalizado conjugado a q_i ,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}; \quad (2.5)$$

Na mecânica quântica, cada observável físico torna-se um operador hermitiano no espaço de Hilbert. A quantização do sistema é obtida fazendo com que os operadores $q_i(t)$ e $p_i(t)$ obedeçam as relações canônicas de comutação,

$$[q_i(t); p_j(t)]_{t^0=t} = i\delta_{ij} \quad \text{e} \quad [q_i(t); q_j(t)]_{t^0=t} = [p_i(t); p_j(t)]_{t^0=t} = 0; \quad (2.6)$$

Na teoria de campos clássicos, a lagrangiana é dada como uma extensão da expressão (2.1), no limite em que o número de graus de liberdade torna-se infinito e contínuo [Sak 67]. A

¹ L é um escalar de Lorentz.

lagrangiana é dada pela integral de uma função L , a densidade de lagrangiana, que depende dos campos $\dot{A}_i(x; t)$ e das suas derivadas $\partial_1 \dot{A}_i$, isto é,

$$L = \int d^3x L(\dot{A}_i; \partial_1 \dot{A}_i); \quad (2.7)$$

onde

$$L = T - V; \quad (2.8)$$

O princípio variacional torna-se

$$\int d^4x \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i} \dot{A}_i + \frac{\partial L}{\partial (\partial_1 \dot{A}_i)} \partial_1 \dot{A}_i \right] = 0 \quad \int d^4x \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i} \dot{A}_i + \frac{\partial L}{\partial (\partial_1 \dot{A}_i)} \partial_1 \dot{A}_i \right] = 0; \quad (2.9)$$

onde a integração por partes no último termo é possível desde que $\dot{A}_i = 0$ em x_1^1 e x_2^1 . Com isso, as equações de movimento tomam a forma

$$\partial_1 \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_1 \dot{A}_i)} \right] + \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i} = 0; \quad (2.10)$$

A hamiltoniana também passa a ser a integral de uma densidade de hamiltoniana, denida por

$$H(\dot{A}_i; \dot{\eta}_i) = \dot{\eta}_i(x; t) \dot{A}_i(x; t) - L(\dot{A}_i; \partial_1 \dot{A}_i); \quad (2.11)$$

onde $\dot{\eta}_i(x; t)$ são os momentos conjugados a $\dot{A}_i(x; t)$,

$$\dot{\eta}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i}; \quad (2.12)$$

Em teoria de campos sempre trabalhamos com densidades de lagrangiana ou hamiltoniana e, daqui em diante, vamos omitir a palavra densidade, deixando-a implícita nestas expressões.

2.2 Simetria Unitária e Lei de Conservação

Na física, e especialmente na física de partículas, as simetrias têm papel muito importante. Em muitos casos, existem leis de conservação que podem ser atribuídas aos princípios de simetria.

Segundo Lee [Lee 81], as simetrias de maior importância na física podem ser agrupadas em quatro tipos: permutação, discretas, contínuas externas e contínuas internas. As simetrias de permutação são baseadas nas estatísticas de Bose-Einstein e de Fermi-Dirac, as discretas, nas invariâncias por conjugação de carga, reflexão espacial (ou operação de paridade) e reversão temporal, as contínuas externas, nas invariâncias por transformações de translação, de rotação, de Lorentz e de Poincaré (translação, rotação e mudanças de referencial) e as contínuas internas, nas invariâncias por transformações de fase, de isospin, quiral, de sabor, de cor.

As simetrias de permutação, as contínuas externas e algumas das contínuas internas, como a de fase e, talvez, a de cor, parecem ser exatas, enquanto que as demais parecem ser quebradas.

As simetrias contínuas estão associadas às invariâncias de um sistema sob transformações contínuas que preservam a norma dos vetores de estado. As matrizes com parâmetros reais e contínuos que realizam estas transformações ou são ortogonais ($A = A^i i$), quando os vetores são reais, ou unitárias ($A^y = A^i i$), quando os vetores são complexos. O determinante dessas matrizes tem uma fase arbitrária, $\det A = e^{i\mu}$, que pode ser ...xada impondo-se $\mu = 0$. Neste caso, as matrizes são ditas unimodulares ou especiais. As matrizes $n \in n$ unimodulares ortogonal e unitária formam, respectivamente, os grupos de Lie $SO(n)$ e $SU(n)$. Estes grupos são compactos, pois seus parâmetros variam em intervalos fechados, $[0; \frac{1}{2}]$ para $O(n)$ e $[0; 2\frac{1}{2}]$ para $SU(n)$. Um grupo de Lie compacto pode ser representado por operadores unitários na forma exponencial complexa

$$U(x) = e^{i \sum_a x_a F_a}; \quad (2.13)$$

onde x_a são os parâmetros reais e contínuos das transformações e F_a são operadores que geram o grupo matemático, pois de...nem a álgebra do grupo [Arf 85]. A relação dos parâmetros das transformações com o espaço-tempo divide as simetrias contínuas internas em dois níveis: global e local. Quando x_a não depende de x , temos uma simetria global, pois estamos supondo que o sistema é transformado pela mesma quantidade em diferentes pontos do espaço-tempo. Para uma escolha mais geral, $x_a = x_a(x)$, o sistema só é transformado pela mesma quantidade num mesmo ponto do espaço-tempo, ou seja, a simetria é local.

A álgebra de um grupo de Lie compacto consiste nas relações de comutação de seus geradores, sendo representada genericamente por

$$[F_a; F_b] = i c_{abc} F_c; \quad (2.14)$$

cujas constantes de estrutura c_{abc} são co...cientes reais totalmente antissimétricos. A condição de unitariedade da transformação faz com que esses geradores sejam hermitianos ($F^y = F$) e a

imposição $\det \mathbf{A} = 1$ faz com que tenham traço nulo ($\text{tr } \mathbf{F} = 0$). O número de geradores é igual ao número de parâmetros independentes no grupo, assim, temos $n(n-1)/2$ geradores para $\text{SO}(n)$ e n^2-1 para $\text{SU}(n)$.

No formalismo lagrangiano da teoria de campo, as simetrias de um sistema são relacionadas às leis de conservação pelo teorema de Noether. Neste teorema, a invariância da lagrangiana sob um grupo de transformações contínuas corresponde a uma quantidade conservada [Sak 64]. No caso de uma simetria contínua interna, a quantidade conservada é, como veremos a seguir, a densidade de corrente.

A ação de um grupo de transformações infinitesimais ($\delta_1, \delta_2, \delta_3$) sobre os campos, sem translação e rotação ($\delta x^i = 0$), é dada por

$$\tilde{A}_i^0(x) = U^y \tilde{A}_i(x) U \cong (1 + i \delta_1 a F_a) \tilde{A}_i(x) (1 + i \delta_2 a F_a) = \tilde{A}_i(x) + \delta \tilde{A}_i(x); \quad (2.15)$$

onde

$$\delta \tilde{A}_i = i \delta_1 a [F_a; \tilde{A}_i] + O(\delta_2^2); \quad (2.16)$$

Estas modificações nos campos geram a seguinte variação infinitesimal da lagrangiana:

$$L(\tilde{A}_i^0; \partial_1 \tilde{A}_i^0) \cong L(\tilde{A}_i; \partial_1 \tilde{A}_i) + \delta L; \quad (2.17)$$

onde

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \tilde{A}_i} \delta \tilde{A}_i + \frac{\partial L}{\partial (\partial_1 \tilde{A}_i)} \partial_1 (\delta \tilde{A}_i); \quad (2.18)$$

Usando a equação de movimento (2.10), podemos reescrever esta expressão como

$$\delta L = \partial_1 \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_1 \tilde{A}_i)} \right) \delta \tilde{A}_i + \frac{\partial L}{\partial (\partial_1 \tilde{A}_i)} \partial_1 (\delta \tilde{A}_i) = \partial_1 \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_1 \tilde{A}_i)} \right) \delta \tilde{A}_i; \quad (2.19)$$

Explicitando as variações dos campos, temos que

$$\delta L = \partial_1 \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_1 \tilde{A}_i)} \right) i [F_a; \tilde{A}_i] \delta a = \partial_1 \left(i \frac{\partial L}{\partial (\partial_1 \tilde{A}_i)} [F_a; \tilde{A}_i] \right) \delta a + i \frac{\partial L}{\partial (\partial_1 \tilde{A}_i)} [F_a; \tilde{A}_i] \partial_1 (\delta a); \quad (2.20)$$

Definindo as densidades de corrente do sistema pelos quadrvetores

$$j_a^1(x) \stackrel{.}{=} i \frac{\partial L}{\partial (\partial_1 \tilde{A}_i)} [F_a; \tilde{A}_i]; \quad (2.21)$$

podemos reescrever essa variação infinitesimal como

$$\delta L = \partial_1 j_a^1 \delta a + j_a^1 \partial_1 (\delta a); \quad (2.22)$$

Comparando-a com a variação infinitesimal geral

$$\pm L = \frac{\partial L(\bar{A}_i^0; \partial_1 \bar{A}_i^0)}{\partial_{s,a}} \pm_{s,a} + \frac{\partial L(\bar{A}_i^0; \partial_1 \bar{A}_i^0)}{\partial_{(\partial_1 s,a)}} \pm_{(\partial_1 s,a)} \quad (2.23)$$

e usando o fato de a variação infinitesimal comutar com a quadridivergência, podemos expressar tanto as densidades de corrente do sistema como as suas quadridivergências através das derivadas parciais

$$j_a^1 = \frac{\partial L(\bar{A}_i^0; \partial_1 \bar{A}_i^0)}{\partial_{(\partial_1 s,a)}} \quad \text{e} \quad \partial_1 j_a^1 = \frac{\partial L(\bar{A}_i^0; \partial_1 \bar{A}_i^0)}{\partial_{s,a}}; \quad (2.24)$$

conhecidas como equações de Gell-Mann e Lévy [GL 60].

Se a variação infinitesimal da lagrangiana for nula ($\pm L = 0$) e as transformações forem globais ($s = \text{cte}$), a equação (2.22) se reduz às equações de conservação das densidades de corrente,

$$\partial_1 j_a^1 = 0; \quad (2.25)$$

Integrando essas equações sobre todo o espaço e usando o Teorema de Gauss, temos

$$\int_V d^3x \partial_1 j_a^1 = 0 \quad \int_V d^3x (\partial_t \psi_a + \mathbf{r} \cdot \mathbf{j}_a) = 0 \quad \int_V d^3x \psi_a + \int_S d\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \mathbf{t} \mathbf{j}_a = 0; \quad (2.26)$$

onde ψ_a são as densidades de carga e \mathbf{j}_a as densidades de corrente-vetor. A integral de superfície corresponde a um fluxo através da fronteira de todo o espaço. Logo, esta integral pode ser desprezada para correntes vetoriais que caem suficientemente rápidas no infinito, isto é,

$$\lim_{S \rightarrow 1} \int_S d\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \mathbf{t} \mathbf{j}_a = 0; \quad (2.27)$$

Assim, a expressão (2.26) restringe-se às conservações das cargas

$$\partial_t Q_a = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_a = \text{cte}; \quad (2.28)$$

onde as cargas

$$Q_a \stackrel{def}{=} \int_V d^3x \psi_a(x) = i \int_V d^3x \frac{\partial L}{\partial (\partial_t \bar{A}_i)} [F_a; \bar{A}_i(x)] = i \int_V d^3x \psi_i(x) [F_a; \bar{A}_i(x)] \quad (2.29)$$

correspondem aos geradores do grupo ($Q_a \in F_a$), pois

$$\begin{aligned} [Q_a; \bar{A}_i(x)] &= i \int_V d^3x^0 [\psi_j(x^0) [F_a; \bar{A}_j(x^0)]; \bar{A}_k(x)] \\ &= i \int_V d^3x^0 (j_i - i) \pm_{ij} \pm^3(x^0 j_i - x) [F_a; \bar{A}_j(x^0)] = [F_a; \bar{A}_i(x)]; \end{aligned} \quad (2.30)$$

As simetrias contínuas internas globais manifestam-se de dois modos diferentes na natureza: Wigner-Weyl e Nambu-Goldstone.

No modo de Wigner-Weyl, as partículas formam multipletos que correspondem às representações do grupo de simetria da lagrangiana. Em particular, o auto-estado mais baixo da hamiltoniana, o vácuo, é invariante sob o grupo de simetria. Um exemplo típico deste modo é a simetria de isospin $SU(2)$. No limite em que essa simetria é exata, a comutação da hamiltoniana com as cargas de isospin - geradores do grupo $SU(2)$ - permite a classificação do espectro dos estados em multipletos de mesma massa, que correspondem às representações desse grupo. Assim, na simetria de isospin, o próton e o nêutron com aproximadamente a mesma massa formam um duploto de isospin, a representação fundamental do grupo $SU(2)$, e os píons um triplete de isospin, a representação adjunta do grupo $SU(2)$.

No modo de Nambu-Goldstone, as partículas formam multipletos que correspondem às representações de um único subgrupo do grupo de simetria da lagrangiana. Neste caso, o vácuo é invariante sob o subgrupo, mas não sob o grupo todo. Sob as transformações de simetria restantes, que não formam subgrupo, o vácuo associa-se aos bósons sem massa e com spin zero, conhecidos como bósons de Goldstone [Gol 61]. Este modo é referido algumas vezes como quebra espontânea da simetria ou simetria escondida. Um exemplo importante deste modo é a simetria quiral associada ao grupo $SU(2)_L - SU(2)_R$, que se manifesta na natureza somente através de multipletos de isospin, uma vez que multipletos de paridade não são encontrados. No limite em que a simetria quiral $SU(2)_L - SU(2)_R$ é exata, os píons são os bósons de Goldstone.

2.3 Simetria Quiral

Apesar da simetria quiral, nos dias de hoje, desempenhar um papel fundamental no entendimento das interações hadrônicas, sua idéia surgiu nos anos 50 no contexto das interações fracas.

No começo dos anos 30, a interação fraca restringia-se ao decaimento- $^-$, descrito pelo processo

$$n \rightarrow p + e^+ + \nu : \quad (2.31)$$

O primeiro passo para a formulação de uma teoria para o decaimento- $^-$ foi dado por Fermi em 1934. Baseando-se na existência do neutrino, postulada por Pauli em 1931, Fermi propôs que o decaimento- $^-$ seria uma interação puntiforme de quatro férmions similar à interação eletromagnética

sem mediação de fótons. A lagrangiana de interação para o decaimento- $^-$ seria, então, o acoplamento vetorial de duas correntes uma associada à transição do nêutron em próton e outra associada à criação do elétron e do antineutrino, isto é,

$$L_{int} = C_V J_{hadrônica}^1 J_1^{leptônica}, \quad (2.32)$$

onde o coe...ciente C_V de dimensão $[M]^{1/2}$ é a medida da intensidade do acoplamento entre as correntes fracas

$$J_{hadrônica}^1 = \tilde{A}_p \circ^1 \tilde{A}_n \quad \text{e} \quad J_1^{leptônica} = \tilde{A}_e \circ_1 \tilde{A}_o : \quad (2.33)$$

Em seguida, essa lagrangiana foi generalizada para todos os acoplamentos invariantes de Lorentz, por reversão temporal, conjugação de carga e reflexão espacial (paridade). Assim,

$$L_{int} = \prod_{k=1}^{\infty} C_k i \tilde{A}_p i^k \tilde{A}_n \not{ } i \tilde{A}_e i_k \tilde{A}_o \not{ } ; \quad (2.34)$$

onde C_k são as constantes de acoplamento de cada invariante de Lorentz e i_k representa as possíveis interações da tabela (2.1).

Tabela 2.1: Estruturas de Lorentz de uma interação.

Invariantes de Lorentz	k	i
escalar	S	1
pseudoescalar	PS	\circ_5
vetorial	V	\circ_1
pseudovetorial (axial)	PV (A)	$\circ^1 \circ_5$
tensorial	T	$\frac{3}{4} \circ^1 \circ_5$

No decaimento- $^-$ de um núcleo, a aproximação não relativística é razoável, porque os momentos dos nucleons são normalmente muito pequenos. Nesta aproximação, restam apenas duas transições permitidas [Gas 66]: a de Fermi, associada a C_S e C_V , e a de Gamow-Teller, associada a C_A e C_T . O termo proporcional a C_P desaparece e os termos cruzados em cada uma dessas transições são praticamente nulos ($C_S C_V \approx 0$ e $C_A C_T \approx 0$), pois possuem uma forte dependência com a energia, que não é observada experimentalmente. Os primeiros resultados experimentais revelaram

que os acoplamentos da transição de Fermi, denotados genericamente por G_F eram próximos aos da transição de Gamow-Teller, denotados genericamente por G_{GT} ,

$$jG_{GT}j = (1:2 \pm 0:5) jG_Fj : \quad (2.35)$$

Esta proximidade levou à idéia da universalidade das interações fracas, ou seja, de que a forma e as constantes de acoplamento da lagrangiana (2.34) seriam as mesmas para os diversos decaimentos.

As descobertas do mûon em 1936 e do píon em 1947 reforçaram esta idéia. Tanto o decaimento do mûon

$$^1i \rightarrow e^i + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_1 \quad (2.36)$$

e sua captura nuclear

$$^1i + (Z; A) \rightarrow (Z-1; A) + \bar{\nu}_1 ; \quad (2.37)$$

como os decaimentos do píon

$$\frac{1}{4}i \rightarrow e^i + \bar{\nu}_e \rightarrow e \rightarrow \frac{1}{4}i \rightarrow ^1i + \bar{\nu}_1 ; \quad (2.38)$$

podiam ser descritos por uma interação similar e com aproximadamente a mesma intensidade a do decaimento- $^-$, isto é, por uma lagrangiana de interação universal

$$L_{int} = G \sum_{k=1}^{\infty} i \bar{A}_{i^k} \bar{A}^{\dagger(1)} i \bar{A}_{i^k} \bar{A}^{\dagger(2)} ; \quad (2.39)$$

onde os índices 1 e 2 distinguem os pares fermionicos.

Embora houvesse boas evidências da conservação da paridade nas interações fortes e eletromagnéticas, nenhum experimento tinha sido realizado, até então, para testar esta conservação nas interações fracas. Em 1956, Lee e Yang [LY 56] propuseram a não conservação da paridade nas interações fracas, para resolver o paradoxo $\mu \rightarrow e$, onde μ e e seriam partículas com os mesmos números quânticos, mas que decaiam nos diferentes processos

$$\mu^{\pm} \rightarrow \frac{1}{4}e^{\pm} + \frac{1}{4}e^0 \rightarrow e \rightarrow \bar{e}^{\pm} \rightarrow \frac{1}{4}e^{\pm} + \frac{1}{4}e^+ + \frac{1}{4}e^0 : \quad (2.40)$$

Através do estudo do decaimento do píon seguido do decaimento do mûon em cadeia

$$\frac{1}{4}i \rightarrow ^1i \rightarrow \bar{e}^i + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_1 \quad (2.41)$$

$$\bar{e}^i \rightarrow e^i + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_1$$

sugeriram que a não conservação da paridade poderia ser verificada correlacionando-se a helicidade do muon, medida no decaimento do pion, com a helicidade do elétron, medida no decaimento do muon. Se houvesse conservação da paridade, existiriam dois esquemas para estes decaimentos compatíveis com as conservações da carga elétrica, do momento angular e do número leptônico: o esquema (a) da figura (2.1) e, sua reflexão espacial, o esquema (b) da mesma figura. Os experimentos mostraram que somente o esquema (a) acontece na natureza, negando, assim, a conservação da paridade. Medidas de outros decaimentos confirmaram a inexistência de neutrinos com helicidade positiva e antineutrinos com helicidade negativa, indicando também a não conservação da paridade.

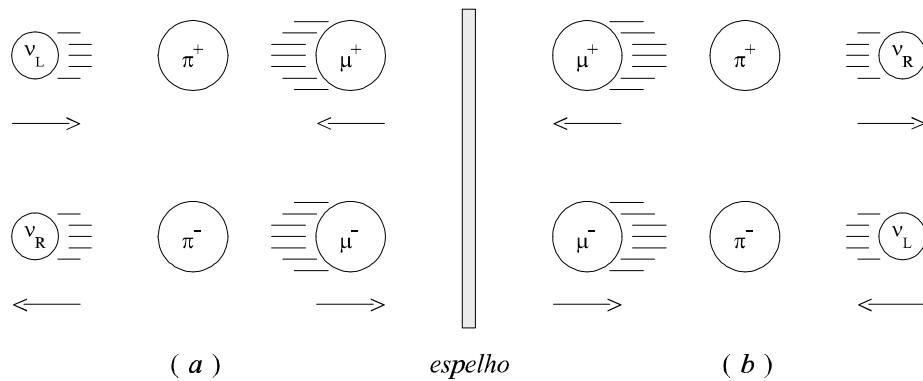


Figura 2.1: Possíveis esquemas do decaimento de $\frac{1}{4}\bar{S}$, impostos pela conservação da paridade. As helicidades das partículas, representadas pelas setas, devem ser sempre as mesmas para conservar o momento angular.

Os neutrinos são partículas que obedecem a equação de Dirac sem massa. No espaço dos momentos, esta equação tem a forma

$$\not{p} u(p) = 0; \quad (2.42)$$

cuja solução é o spinor

$$u(p) = \lim_{m!0} \frac{1}{p - \frac{E + m}{\not{p}}} \not{p} \not{E} + m \not{A}_{1=2}^{m_s} = \frac{\not{p}}{j \not{p} j} \not{p} \not{I} \not{A}_{1=2}^{m_s}; \quad (2.43)$$

onde

$$\lim_{m!0} E = \lim_{m!0} \frac{\not{p}}{\not{p}^2 + m^2} = j \not{p} j; \quad (2.44)$$

O spinor de um neutrino com helicidade negativa

$$u_L(p) = \frac{\not{p}}{j \not{p} j} \not{p} \not{I} \not{j} \not{\not{p}} \not{I} \not{A}_{1=2}^{m_s} \quad (2.45)$$

e o spinor de um antineutrino com helicidade positiva

$$u_R(p) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{p}}{j \cdot p} \begin{pmatrix} \mu & 1 + \frac{3}{4} \epsilon \cdot \hat{\mathbf{p}} & \eta \\ \frac{3}{4} \epsilon \cdot \hat{\mathbf{p}} + 1 & \hat{A}_{1=2}^{m_s} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

podem ser obtidos a partir do operador helicidade

$$\hat{S} \stackrel{+}{=} \begin{pmatrix} \mu & \frac{3}{4} \epsilon \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 & \eta \\ 0 & \frac{3}{4} \epsilon \cdot \hat{\mathbf{p}} & ; \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

impondo-se

$$\hat{S} u_L(p) = + u_L(p) \quad \text{e} \quad \hat{S} u_R(p) = + u_R(p); \quad (2.48)$$

Alternativamente, a partir do operador quiralidade

$$\stackrel{+}{\circ}_5 \stackrel{+}{=} \begin{pmatrix} \mu & 0 & 1 & \eta \\ 0 & 1 & 0 & ; \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

pode-se obter

$$u_L(p) = \frac{1}{2} (1 \stackrel{+}{\circ}_5) u(p) \quad \text{e} \quad u_R(p) = \frac{1}{2} (1 + \stackrel{+}{\circ}_5) u(p); \quad (2.50)$$

de modo que

$$\stackrel{+}{\circ}_5 u_L(p) = + u_L(p) \quad \text{e} \quad \stackrel{+}{\circ}_5 u_R(p) = + u_R(p); \quad (2.51)$$

A coincidência entre os operadores de helicidade, equação (2.48), e os operadores de quiralidade, equação (2.51), resulta do fato dos neutrinos terem helicidade bem definida, pois, movendo-se com a velocidade da luz, a projeção do spin do neutrino ao longo da direção do seu movimento é independente do referencial. No caso de fermions massivos, esses operadores deixam de ser coincidentes, pois a helicidade passa a depender do referencial, enquanto a quiralidade permanece bem definida.

Para incorporar a não conservação da paridade na lagrangiana de interação de Fermi, equação (2.34), é necessário discriminar a quiralidade nos campos dos neutrinos e antineutrinos, lembrando que $\tilde{u}(p) = u^y(p) \stackrel{+}{\circ}_0$ e $f^{\circ}_0 \cdot \stackrel{+}{\circ}_5 g = 0$. O uso dessas combinações define, automaticamente, a quiralidade do lepton associado a este neutrino, pois

$$\tilde{A}_L \stackrel{+}{\circ}_k \tilde{A}_L = \tilde{A}_R \stackrel{+}{\circ}_k \tilde{A}_R = 0 \quad \text{para } k = 1; 2; 5 \quad (2.52)$$

e

$$\tilde{A}_L \stackrel{+}{\circ}_k \tilde{A}_R = \tilde{A}_R \stackrel{+}{\circ}_k \tilde{A}_L = 0 \quad \text{para } k = 3; 4; \quad (2.53)$$

No caso do decaimento $^1i \rightarrow e^i + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_1$, verificou-se que a interação direta corrente-corrente produzia melhores resultados. Assim, a lagrangiana generalizada de Fermi foi restringida a

$$L_{int} = G_1 J_{muônica}^{\circ} J_{eletrônica}^{\circ} ; \quad (2.54)$$

onde o co...ciente $G_1 = G_F = \frac{p}{2}$ é a constante de acoplamento entre as correntes fracas

$$\begin{aligned} J_{muônica}^{\circ} &= \hat{A}_L^{\text{neutrino}} \tilde{A}_L^{\text{muônica}} = \hat{A}^{\text{neutrino}} (1 + \gamma_5) \circ (1 \bar{i} \gamma_5) \tilde{A}^{\text{muônica}} \\ &= \begin{array}{c} \hat{A}^{\text{neutrino}} \circ \tilde{A}^{\text{muônica}} \\ \hline \{z\} \end{array} i \begin{array}{c} \hat{A}^{\text{neutrino}} \circ \tilde{A}^{\text{muônica}} \\ \hline \{z \gamma_5\} \end{array} \\ &\quad V^{\circ} \qquad \qquad \qquad A^{\circ} \end{aligned} \quad (2.55)$$

e

$$\begin{aligned} J_{eletrônica}^{\circ} &= \hat{A}_L^{\text{eletrônico}} \tilde{A}_L^{\text{neutrino}} = \hat{A}^{\text{eletrônico}} (1 + \gamma_5) \circ (1 \bar{i} \gamma_5) \tilde{A}^{\text{neutrino}} \\ &= \begin{array}{c} \hat{A}^{\text{eletrônico}} \circ \tilde{A}^{\text{neutrino}} \\ \hline \{z\} \end{array} i \begin{array}{c} \hat{A}^{\text{eletrônico}} \circ \tilde{A}^{\text{neutrino}} \\ \hline \{z \gamma_5\} \end{array} \\ &\quad V_{\circ} \qquad \qquad \qquad A_{\circ} \end{aligned} \quad (2.56)$$

ambas compostas de uma parte vetorial V e outra axial A .

A estrutura dessa lagrangiana, conhecida como $V-A$, foi estendida para o decaimento $^-$, supondo que a parte hadrônica tivesse a mesma estrutura da parte leptônica. Deste modo, a lagrangiana de Fermi para o decaimento $n \rightarrow p + e^i + \bar{\nu}_e$ assumiu a forma

$$L_{int} = [C_V V^{\circ} i C_A A^{\circ}]_{\text{hadrônica}} [G_1 (V_{\circ} i A_{\circ})]^{\text{leptônica}} ; \quad (2.57)$$

onde as correntes hadrônicas são

$$V^{\circ} = \hat{A}^{\text{proton}} \circ \tilde{A}^{\text{nêutron}} \quad e \quad A^{\circ} = \hat{A}^{\text{proton}} \circ \tilde{A}^{\text{nêutron}}_5 \quad (2.58)$$

e as correntes leptônicas

$$V_{\circ} = \hat{A}^{\text{eletrônico}} \circ \tilde{A}^{\text{neutrino}} \quad e \quad A_{\circ} = \hat{A}^{\text{eletrônico}} \circ \tilde{A}^{\text{neutrino}}_5 ; \quad (2.59)$$

A constante de acoplamento vetorial

$$C_V \cong 1:01 \times 10^5 = m_{\text{proton}}^2 \quad (2.60)$$

é determinada através do decaimento do O^{14} em N^{14*} e a axial

$$C_A \cong 1:26 C_V \quad (2.61)$$

a partir do tempo de vida do nêutron [Cam 78].

A con...rmação dessa extensão, obtida de detalhadas medidas de polarização, indicou que as interações fracas envolvendo hadrons também podem ser descritas por lagrangianas com estrutura $V-A$ e, inesperadamente, que $C_V = G_1$. Esta igualdade mostra que a constante de acoplamento vetorial é a mesma para hadrons e léptons, analogamente ao que acontece com a constante de acoplamento eletromagnética e . Essa igualdade sugeriu, então, que a corrente fraca associada a C_V deveria ser conservada,

$$\partial_\mu V^\mu = 0; \quad (2.62)$$

em analogia à corrente eletromagnética associada a e . Além disso, a corrente vetorial hadrônica no decaimento- $^-$, expressão (2.58), seria a corrente de isospin do espalhamento elétron-nucleon. Essas duas características levaram à hipótese da conservação da corrente vetorial (CVC) nas interações fracas [FG 58]. Nesta hipótese, a corrente vetorial hadrônica fraca é identificada como sendo a corrente de isospin, conservada nas interações fortes e cujas componentes carregadas são dadas pelas combinações

$$V_+^\mu = V_1^\mu + V_2^\mu; \quad V_i^\mu = V_1^\mu - V_2^\mu \quad \text{e} \quad V_0^\mu = V_3^\mu; \quad (2.63)$$

Por outro lado, a constante de acoplamento axial C_A não é exatamente a mesma para hadrons e léptons, como mostra a expressão (2.61). Essa pequena diferença levou à idéia de que a corrente fraca associada a C_A seria parcialmente conservada,

$$\partial_\mu A^\mu \cong 0; \quad (2.64)$$

A formalização desta idéia foi realizada por Gell-Mann e Lévy em 1960 através do decaimento do píon negativo [GL 60],

$$\frac{1}{4} i \bar{p} \gamma^\mu p + \Phi_1; \quad (2.65)$$

que pode ser descrito pelo elemento de matriz

$$h^{\Phi} \bar{p} \gamma^\mu p \bar{p} \gamma^\mu p - h^0 \bar{p} \gamma^\mu p \bar{p} \gamma^\mu p (1 \bar{p} \gamma^\mu p) \nu_{\text{neutrino}}; \quad (2.66)$$

onde o píon que tem paridade negativa está ligado ao vácuo que tem paridade positiva. Devido à conservação de paridade nas interações fortes, somente a corrente axial pode contribuir para o setor hadrônico deste decaimento. A invariância de Lorentz e a ausência de spin no píon fazem com que este elemento de matriz deva ser da forma

$$\hbar 0 j A_a^{\circ}(0) j \frac{1}{4} b(k) i = i \pm_{ab} k^{\circ} f_{\frac{1}{4}}; \quad (2.67)$$

onde o k° é o quadrimomento do píon, $f_{\frac{1}{4}}$ é a constante do seu decaimento, a e b são índices de isospin. No espaço dos momentos, a divergência de uma corrente equivale multiplicá-la por " $i \cdot i$ " e pelo quadrimomento transferido, o que nos permite escrever

$$\hbar 0 j @_o A_a^{\circ}(0) j \frac{1}{4} b(k) i = i \cdot i k^{\circ} \hbar 0 j A_a^{\circ}(0) j \frac{1}{4} b(k) i = f_{\frac{1}{4}} m^2 \pm_{ab}; \quad (2.68)$$

onde m é a massa do píon. Assim, o decaimento do píon implica na não conservação da corrente axial, pois sua quadridivergência está relacionada à massa do píon e à constante que descreve o seu decaimento.

Como o píon tem massa muito pequena quando comparada com a de qualquer outro hadrôn, o resultado acima sugere a conservação parcial da corrente axial (PCAC). Esta hipótese pode ser reescrita através da identidade de operadores

$$@_o A_a^{\circ} = f_{\frac{1}{4}} m^2 \frac{1}{4} a; \quad (2.69)$$

É de se esperar, então, que exista uma simetria global interna aproximada nas interações fracas, para guiar a construção de lagrangianas com a estrutura V-A, de modo que produzam PCAC e CVC via teorema de Noether. A simetria que cumpre este papel é a simetria quiral, que corresponde à invariância de um sistema sob o grupo de transformações quirais $SU(2)_L - SU(2)_R$. Essas transformações são implementadas por operadores unitários da forma

$$U^V(\mathbb{R}) = e^{i \mathbb{R}_a Q_a^V} \quad \text{e} \quad U^A(-) = e^{i -_a Q_a^A}; \quad (2.70)$$

de modo que as variações quirais infinitesimais dos campos dividem-se em vetoriais e axiais, respectivamente

$$\pm^V \dot{A}_i = i \pm^{\mathbb{R}_a} [Q_a^V; \dot{A}_i] \quad \text{e} \quad \pm^A \dot{A}_i = i \pm^{-}_a [Q_a^A; \dot{A}_i]; \quad (2.71)$$

onde

$$Q_a^V = \int d^3x V_0^a(x; t) \quad \text{e} \quad Q_a^A = \int d^3x A_0^a(x; t); \quad (2.72)$$

Segundo a hipótese de CVC, as cargas associadas às correntes vetoriais são os geradores das transformações de isospin, que satisfazem a álgebra de Lie do grupo $SU(2)$,

$$[Q_a^V; Q_b^V] = i^2_{abc} Q_c^V; \quad (2.73)$$

idêntica à relação de comutação dos operadores do momento angular. As cargas associadas às correntes axiais transformam-se como vetores sob rotações de isospin, o que leva às relações de comutação

$$[Q_a^V; Q_b^A] = i^2_{abc} Q_c^A; \quad (2.74)$$

O fechamento deste grupo quiral foi proposto por Gell-Mann [Gel 62] [Gel 64], sem introduzir novas cargas, através das relações de comutação

$$[Q_a^A; Q_b^A] = i^2_{abc} Q_c^V; \quad (2.75)$$

As relações de comutação, dadas pelas expressões (2.73, 2.74 e 2.75), descrevem implicitamente a álgebra do grupo $SU(2)_L - SU(2)_R$. A primeira relação descreve a álgebra do subgrupo $SU(2)$ de isospin e as demais não descrevem independentemente a álgebra de qualquer subgrupo.

De...nindo as combinações

$$Q_a^L \doteq \frac{1}{2}(Q_a^V - Q_a^A) \quad \text{e} \quad Q_a^R \doteq \frac{1}{2}(Q_a^V + Q_a^A); \quad (2.76)$$

as relações de comutação das cargas, equações (2.73), (2.74) e (2.75), passam a explicitar, concomitantemente, dois grupos de simetria independentes,

$$\underbrace{[Q_a^L; Q_b^L]}_{SU(2)_L} \doteq i^2_{abc} Q_c^L; \quad \underbrace{[Q_a^R; Q_b^R]}_{SU(2)_R} \doteq i^2_{abc} Q_c^R \quad \text{e} \quad \underbrace{[Q_a^L; Q_b^R]}_{\text{desacoplamento}} = 0; \quad (2.77)$$

Essas relações de comutação descrevem explicitamente a álgebra de Lie do grupo $SU(2)_L - SU(2)_R$, denominado grupo quiral, devido à simetria direita-esquerda.

A versão diferencial das relações de comutação das cargas, conhecida como álgebra de cor-

rentes, corresponde a

$$\begin{aligned}
 [V_a^0(x); V_b^{\circ}(y)]_{x_0=y_0} &= i^2_{abc} V_c^{\circ}(x) \pm^3(x \mid y); \\
 [V_a^0(x); A_b^{\circ}(y)]_{x_0=y_0} &= i^2_{abc} A_c^{\circ}(x) \pm^3(x \mid y); \\
 [A_a^0(x); V_b^{\circ}(y)]_{x_0=y_0} &= i^2_{abc} V_c^{\circ}(x) \pm^3(x \mid y); \\
 [A_a^0(x); A_b^{\circ}(y)]_{x_0=y_0} &= i^2_{abc} A_c^{\circ}(x) \pm^3(x \mid y);
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

onde os termos de *Schwinger* foram omitidos. Sua estrutura pode ser vista como um reflexo da simetria quiral aproximada nas interações fracas.

A viabilidade dessa simetria no mundo real foi reforçada pela validade empírica da relação de *Goldberger-Treiman* [GT 58], que relaciona a constante de acoplamento píon-nucleon g às constantes de acoplamento axial C_A e vetorial C_V do decaimento- π^- através de

$$g f_{\pi} \cong m g_A; \tag{2.79}$$

onde m é a massa do nucleon, f_{π} é a constante de decaimento do píon e $g_A = j C_A = C_V j$. Esta relação decorre naturalmente da idéia de PCAC e da dominância do pólo do píon, na qual as interações envolvendo correntes axiais são sempre mediadas por píons com quadrimomento pequeno.

Os valores atuais de g são 13:4 § 0:1 para o grupo de Karlsruhe [KA 85], 13:18 § 0:12 para Matsinos [Mat 97] e 13:13 § 0:03 para o grupo de Virginia [SP 98]. Para as demais constantes, há um certo consenso, $g_A = 1:26$, $m = 938:27$ MeV, $f_{\pi} = 92:4$ MeV e $1 = 139:57$ MeV.

A conservação da corrente de isospin tanto nas interações fortes como nas fracas indica que a corrente axial, parcialmente conservada nas interações fracas, também deve ser-la nas fortes. Todas essas “conservações” estão relacionadas pelo teorema de *Noether* à simetria quiral aproximada nessas interações.

Embora as primeiras tentativas de incluir essa idéia tenham sido formuladas em termos de lagrangianas, a que obteve maior destaque no início dos anos 60 foi um método não perturbativo que combinava as fórmulas de redução de *Lehmann, Symanzik e Zimmermann* [LSZ 55] com a álgebra de correntes e a hipótese de PCAC. Excetuando o modelo de *Skyrme* [Sky 62], o formalismo

lagrangiano está vinculado à linguagem perturbativa que parecia não funcionar para as interações hadrônicas, uma vez que suas constantes de acoplamento são grandes.

Supondo apenas que o píon é mole ($q = 0$ e $1 \neq 0$), compatível com o fato da massa do píon ser muito pequena na escala hadrônica, o método da álgebra de correntes gerou, sem usar qualquer teoria das interações fortes, um conjunto de vínculos úteis para espalhamentos de píons perto do limiar sobre um alvo hadrônico. Esses vínculos, usualmente conhecidos como teoremas de baixas energias, concordaram muito bem com os experimentos e até hoje representam uma referência para muitas descrições teóricas da física hadrônica [AFFR 73]. Assim, o conhecimento dessa “álgebra” permite-nos derivar “teoremas” a baixas energias sem o conhecimento dos detalhes da dinâmica de um processo.

Apesar da vantagem desse método não envolver teoria de perturbação, na prática ele é restrito aos espalhamentos de poucos píons moles por um hadrônico qualquer, pois o procedimento torna-se muito trabalhoso à medida que o número de píons moles emitidos e absorvidos aumenta. Além disso, por ser essencialmente algébrico, este método dificulta o entendimento da dinâmica da interação. Para remediar isso, Weinberg sugeriu em 1967 [Wei 67] o uso do formalismo lagrangiano apenas para o nível árvore, através da construção de lagrangianas efetivas com simetria quiral, que reproduzissem os resultados na forma ditada pela álgebra de correntes. Com essas lagrangianas, as implicações dinâmicas de um processo seriam explícitas e os teoremas a baixas energias seriam obtidos via diagramas de Feynman de uma forma mais intuitiva e simples.

As lagrangianas quirais efetivas podem ser divididas quanto à maneira de realizar a simetria. No modelo sigma-linear, a simetria é realizada inteiramente por meio de transformações lineares. Isto é conseguido com a introdução de uma partícula com os mesmos números quânticos do vácuo, denominada sigma. Nos modelos não-lineares, esta partícula é substituída por uma função não-linear do campo do píon, de modo que as transformações axiais passam, também, a ser não-lineares.

2.4 Realização Linear

O primeiro modelo para hadrões que incorporou a simetria quiral foi denominado sigma-linear, devido à introdução de um méson, denominado sigma, e às propriedades lineares de transformações dos campos. Este modelo, desenvolvido muito antes da QCD ser estabelecida como a teoria

fundamental das interações fortes, é o exemplo mais simples de uma lagrangiana quiral efetiva. Ele foi criado por Schwinger em 1957 [Sch 57] e formulado no contexto de PCAC três anos mais tarde, por Gell-Mann and Lévy [GL 60], incorporando os dogmas da álgebra de correntes.

Sua lagrangiana é construída com simetria quiral global, de modo a reproduzir, via o teorema de Noether, as hipóteses de CVC e PCAC. Isto é feito, de...nindo o comportamento dos campos sob as transformações desta simetria. No caso dos píons, usa-se o isomor...smo entre o grupo quiral $SU(2)_L - SU(2)_R$ e o de rotações no espaço euclidiano quadridimensional $O(4)$, o que nos permite escrever

$$Q_a^V = i \frac{1}{2} \epsilon_{abc} L_{bc} \quad \text{e} \quad Q_a^A = L_{4a} \quad \text{para } a, b, c = 1, 2, 3; \quad (2.80)$$

onde L_{ij} ($L_{ij} = i L_{ji}$ e $\text{tr } L = 0$, com $i = 1, 2, 3, 4$) são os geradores do grupo $O(4)$. A maneira mais simples de introduzir o píon neste grupo interno, é considerar o quadrivetor $P_i \stackrel{\cdot}{=} (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, em que $\frac{1}{4}$ representa um campo escalar extra e $\frac{1}{4}$, as três componentes de isospin do píon, $(\frac{1}{4}_1, \frac{1}{4}_2, \frac{1}{4}_3)$. Usando a álgebra do grupo $O(4)$,

$$[L_{ij}; P_k] = i (P_i \pm_j k \quad i \quad P_j \pm_i k); \quad (2.81)$$

e as igualdades de (2.80), determinamos as relações de comutação das cargas vetoriais e axiais com os campos mesônicos

$$\begin{aligned} [Q_a^V; \frac{1}{4}] &= 0; & [Q_a^V; \frac{1}{4}_b] &= i \epsilon_{abc} \frac{1}{4}_c; \\ [Q_a^A; \frac{1}{4}] &= i \frac{1}{4}_a; & [Q_a^A; \frac{1}{4}_b] &= i \epsilon_{ab} \frac{1}{4}; \end{aligned} \quad (2.82)$$

Com isso, as variações quirais in...nitesimais dos campos, dadas em (2.71), são lineares,

$$\boxed{\begin{aligned} \pm^V \frac{1}{4} &= 0 & \pm^V \frac{1}{4} &= \pm^R \wedge \frac{1}{4} \\ \pm^A \frac{1}{4} &= \pm^- \frac{1}{4} & \pm^A \frac{1}{4} &= i \pm^- \frac{1}{4} \end{aligned}}: \quad (2.83)$$

O termo cinético da lagrangiana mesônica deve ser

$$T(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} (@_1 \frac{1}{4} @^1 \frac{1}{4} + @_1 \frac{1}{4} @^1 \frac{1}{4}); \quad (2.84)$$

para que a equação de movimento de cada bóson, equação de Euler-Lagrange (2.10), seja uma equação de Klein-Gordon. Sob transformações quirais, temos

$$\pm^V T = @_1 \frac{i}{\pm^V \frac{1}{4}} @_^1 \frac{1}{4} + @_1 \frac{i}{\pm^V \frac{1}{4}} @_^1 \frac{1}{4} = (\pm^R \wedge @_1 \frac{1}{4}) @_^1 \frac{1}{4} = 0 \quad (2.85)$$

e

$$\pm^A T = \pm^A \frac{1}{4} \pm^A \frac{1}{4} + \pm^A \frac{1}{4} \pm^A \frac{1}{4} = \pm^A \left(\pm^A \frac{1}{4} \pm^A \frac{1}{4} \right) = 0; \quad (2.86)$$

Já o termo potencial da lagrangiana pode ser escrito através das combinações

$$(\frac{1}{4}^2 + \frac{1}{4}^2)^n; \quad (2.87)$$

que também são invariantes sob transformações quirais,

$$\pm^V \frac{1}{4}^2 + \frac{1}{4}^2 = 2 \frac{1}{4} \pm^V \frac{1}{4} + 2 \frac{1}{4} \pm^V \frac{1}{4} = 2 \frac{1}{4} \left(\pm^V \frac{1}{4} \right) = 0 \quad (2.88)$$

e

$$\pm^A \frac{1}{4}^2 + \frac{1}{4}^2 = 2 \frac{1}{4} \pm^A \frac{1}{4} + 2 \frac{1}{4} \pm^A \frac{1}{4} = 2 \left(\frac{1}{4} \pm^A \frac{1}{4} \right) = 0; \quad (2.89)$$

No modelo $\frac{1}{4}$ -linear simétrico, o potencial é dado por

$$V(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}) = \frac{f}{4} \frac{1}{4}^2 + \frac{1}{4}^2 \frac{1}{4} c^2 \frac{1}{4}^2 + \frac{1}{4}^2; \quad (2.90)$$

onde $f > 0$ é a constante de acoplamento e c uma constante a ser determinada. A configuração de menor energia é determinada pelo sistema de equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \frac{1}{4}} &= 0 \quad \left(\frac{1}{4}^2 + \frac{1}{4}^2 \right) \frac{1}{4} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \frac{1}{4}} &= 0 \quad \left(\frac{1}{4}^2 + \frac{1}{4}^2 \right) \frac{1}{4} = 0 \end{aligned} \quad ; \quad (2.91)$$

onde $\frac{1}{4} = j \frac{1}{4} j$.

Para $c^2 = 0$, esse potencial corresponde ao parabolóide da figura (2.2.a) com um único estado de menor energia, onde os valores esperados dos campos são iguais a zero. Para $c^2 > 0$, ao sombrinho da figura (2.2.b), onde a circunferência formada pelo vale corresponde a estados degenerados de menor energia.

Como vimos na seção anterior, o PCAC reflete a ocorrência do decaimento do píon na natureza. Para reproduzir o PCAC, acrescentamos um termo nesse potencial que quebre sutilmente a simetria quiral. A forma mais simples é

$$V_{SB} = j^{-\frac{1}{4}}; \quad (2.92)$$

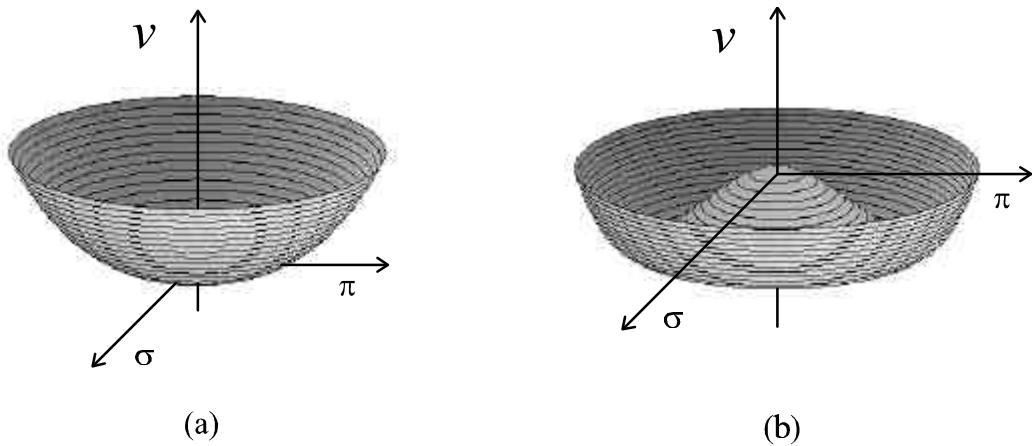


Figura 2.2: Potencial do modelo $\frac{3}{4}$ -linear simétrico: (a) $c^2 = 0$ e (b) $c^2 > 0$.

onde a constante pequena $\eta > 0$ é o parâmetro que regula a intensidade da quebra. Com isso, o potencial passa a ser dado por

$$V(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}) = \frac{1}{4} \mathbf{f} \mathbf{i}^{\frac{3}{4}2} + \frac{1}{4} \mathbf{f}^{\frac{3}{4}2} \mathbf{i}^{\frac{1}{4}2} + \frac{1}{4} c^4 \eta^{\frac{3}{4}} : \quad (2.93)$$

Esse termo de quebra produz, através da equação (2.24), uma corrente axial que não é conservada, isto é,

$$@_1 \mathbf{A}^1 = \eta \frac{1}{4} : \quad (2.94)$$

Comparando este resultado com a expressão (2.69) do PCAC, verificamos que

$$\eta = f_{\frac{1}{4}}^{-1} : \quad (2.95)$$

Isto vincula a quebra explícita da simetria quiral à massa do píon e ao seu decaimento.

O vácuo, o estado fundamental do sistema, corresponde à configuração de menor energia, com paridade positiva e todos os números quânticos nulos. Logo, o valor esperado do campo do píon no vácuo é igual a zero, pois ele tem paridade negativa e isospin não-nulo. Por outro lado, como o sigma tem paridade positiva e todos os demais números quânticos nulos, o seu campo pode ter um valor esperado no vácuo diferente de zero. Portanto, a minimização do potencial, expressão (2.93), restringe-se à solução da primeira equação do sistema dado em (2.91) com a adição da constante η ,

$$\frac{dV}{d\frac{3}{4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad v^3 + c^2 v \eta = 0 ; \quad (2.96)$$

onde v é o valor de $\frac{3}{4}$ nos pontos extremos.

As soluções aproximadas em torno de $\eta = 0$ são dadas por

$$\begin{aligned} v_+ &= c + \frac{\eta}{2s c^2} + \dots; \\ v_0 &= \frac{\eta}{s c^2} + \dots; \\ v_i &= i c + \frac{\eta}{2s c^2} + \dots; \end{aligned} \tag{2.97}$$

A escolha $c^2 = 0$ corresponde à configuração (2.3.a) com

$$V(0; v_0) = 0 + \dots; \tag{2.98}$$

onde o vácuo é dado pelo ponto

$$(\eta = 0; v_0 = v_0); \tag{2.99}$$

Neste caso, a simetria quiral manifesta-se através de multipletos de isospin e de paridade, modo Wigner-Weyl. Como multipletos de paridade não são encontrados na natureza, esta escolha não tem respaldo fenomenológico.

A escolha $c^2 > 0$ está associada à configuração (2.3.b) com

$$\begin{aligned} V(0; v_+) &= i \frac{\dot{c}}{4} c^4 i \eta c + \dots; \\ V(0; v_0) &= 0 + \dots; \\ V(0; v_i) &= i \frac{\dot{c}}{4} c^4 + \eta c + \dots; \end{aligned} \tag{2.100}$$

onde o vácuo é dado pelo ponto ²

$$(\eta = 0; v_+ = v_+); \tag{2.101}$$

Esta configuração corresponde à quebra “espontânea” da simetria quiral, pois este vácuo não é invariante quiral. Para distingui-lo do vácuo trivial $j_0 i$, ele é denotado por j_{v_i} . Nesta situação, a simetria quiral manifesta-se no modo Nambu-Goldstone com os píons sendo os bósons de Goldstone. No limite em que a simetria quiral é exata ($\eta = 0$), o píon tem massa nula, pois a configuração pseudoescalar do vácuo (pequenas oscilações ao longo do vale) não custa qualquer energia.

²Na linguagem mais fundamental da QCD, um estado com $h_0 j_0 i \neq 0$ corresponde a um condensado escalar quark-antiquark, $h_0 q \bar{q} j_0 i$.

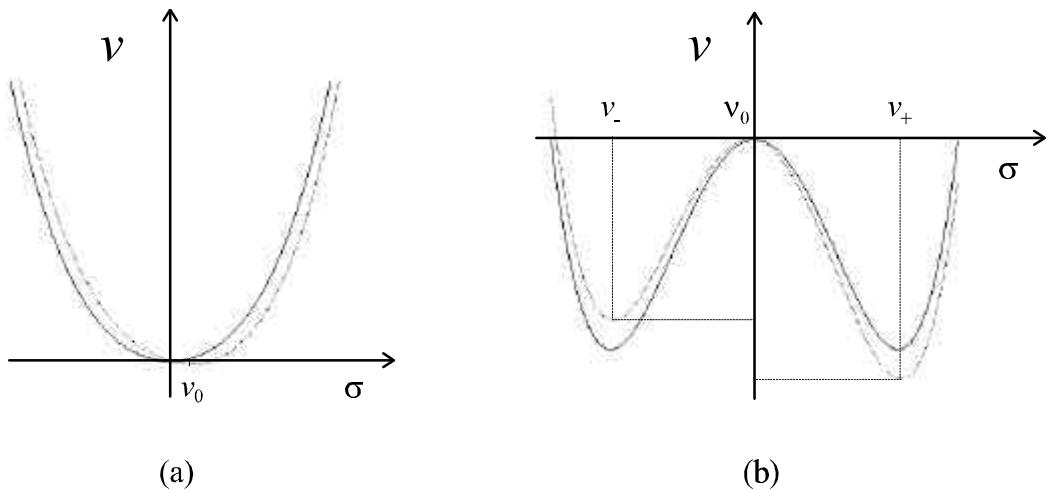


Figura 2.3: Potencial do modelo $\frac{3}{4}$ -linear simétrico sem (linha contínua) e com quebra explícita da simetria quiral (linha pontilhada): (a) $c^2 = 0$ e (b) $c^2 > 0$.

Quando há quebra espontânea de simetria, é conveniente reexpressar o campo do sigma pela soma

$$\frac{3}{4} \dot{\sigma} = s + v_+ ; \quad (2.102)$$

onde s representa a fluctuação escalar do vácuo, ou seja, pequenas oscilações na direção do eixo $\frac{3}{4}$, de modo que

$$\hbar v_j s_j v_i = 0 ; \quad (2.103)$$

Com isso, o potencial passa a ser escrito na forma

$$V\left(\frac{3}{4}; s + v_+\right) = \frac{1}{4} s^2 + \frac{1}{4} c^2 v_+^2 + \frac{1}{2} m_{\frac{3}{4}}^2 s^2 + \frac{1}{2} c^2 v_+^2 + V(0; v_+); \quad (2.104)$$

onde³

$$c^2 \doteq \frac{1}{2} v_+^2 + \frac{m_{\frac{3}{4}}^2}{c^2} = \frac{v_+^2}{v_+} ; \quad (2.105)$$

$$m_{\frac{3}{4}}^2 \doteq \frac{1}{2} 3v_+^2 + \frac{c^2}{2} = 2v_+^2 + c^2 ; \quad (2.106)$$

e

$$V(0; v_+) \doteq \frac{1}{4} v_+^2 + \frac{c^2}{2} v_+^2 + \frac{m_{\frac{3}{4}}^2}{4} v_+^2 ; \quad (2.107)$$

³Como podemos observar, a quebra explícita da simetria quiral gera a massa do píon e, consequentemente, aumenta a do sigma.

Comparando as expressões (2.105) e (2.95), observamos que

$$V_+ = f_{1/4} : \quad (2.108)$$

Desta forma, ...xamos

$$\omega = \frac{m_{3/4}^2 i^{-1/2}}{2 f_{1/4}^2} \quad \text{e} \quad c^2 = f_{1/4}^2 \frac{m_{3/4}^2 i^{-3/2}}{m_{3/4}^2 i^{-1/2}} : \quad (2.109)$$

Assim, o setor mesônico da lagrangiana que incorpora CVC e PCAC pode ser escrito como

$$L^M = \frac{1}{2} (\partial_1 \partial_1 \partial_1 \partial_1 + \partial_1 \partial_1 \partial_1 \partial_1) + \frac{c^2}{2} i_{3/4}^2 + \frac{1}{4} i_{3/4}^2 + \frac{1}{4} i_{3/4}^2 + f_{1/4}^2 i_{3/4}^2 : \quad (2.110)$$

ou, alternativamente, como

$$L^M = \frac{1}{2} i_{1/4} s_{1/4} s_{1/4} + \frac{1}{2} i_{1/4} s_{1/4} s_{1/4} i_{1/4}^2 + f_{1/4} i_{1/4} s_{1/4}^2 + \frac{1}{4} i_{1/4} s_{1/4}^2 + \frac{1}{4} i_{1/4}^2 : \quad (2.111)$$

Na segunda versão, os dois primeiros termos são associados aos mésons livres e os dois últimos, às suas interações. O termo $V(0; v_+)$ é constante e foi eliminado, por não influir na dinâmica.

Podemos ampliar a lagrangiana mesônica, de...nindo os comportamentos de outras partículas sob as transformações da simetria quiral. No caso dos nucleons, isso é feito em analogia aos neutrinos, equação (2.50). Caracterizando os nucleons pelo campo,

$$N = N_L + N_R : \quad (2.112)$$

onde

$$N_L(x) = \frac{1}{2}(1 i^5) N(x) \quad \text{e} \quad N_R(x) = \frac{1}{2}(1 + i^5) N(x) : \quad (2.113)$$

e usando as definições das cargas esquerda e direita (2.76), desacoplamos as relações de comutação entre cargas e campos, produzindo expressões idênticas às do grupo de isospin $SU(2)$,

$$[Q_a^L; N_L] = i \frac{\epsilon_a}{2} N_L ; \quad [Q_a^R; N_R] = i \frac{\epsilon_a}{2} N_R \quad \text{e} \quad [Q_a^R; N_L] = [Q_a^L; N_R] = 0 : \quad (2.114)$$

Com isso, deduzimos que as relações de comutação das cargas vetoriais e axiais com os campos nucleônicos são dadas por

$$[Q_a^V; N] = i \frac{\epsilon_a}{2} N \quad \text{e} \quad [Q_a^A; N] = \frac{\epsilon_a}{2} i^5 N : \quad (2.115)$$

Logo, as variações quirais infinitesimais dos campos, dadas em (2.71), são lineares,

$$\boxed{\begin{aligned}\pm^V N &= i \pm^R \not{e} \frac{i}{2} N & \pm^V \bar{N} &= i \not{i} \bar{N} \pm^R \not{e} \frac{i}{2} \\ \pm^A N &= i \not{i} \pm^- \not{e} \frac{i}{2} \circ_5 N & \pm^A \bar{N} &= i \not{i} \bar{N} \circ_5 \pm^- \not{e} \frac{i}{2}\end{aligned}}; \quad (2.116)$$

onde usamos $\not{N} = N^y \circ_0$ e $f^y \circ_0; \circ_5 g = 0$.

Segundo essas variações quirais, a lagrangiana nucleônica simétrica restringe-se ao termo cinético

$$i \not{N} \not{\partial} N; \quad (2.117)$$

pois

$$\pm^V i \not{i} \not{N} \not{\partial} N^{\not{c}} = i \pm^V \not{N} \not{\partial} N + i \not{N} \not{\partial} \pm^V N = \not{N} \pm^R \not{e} N \not{i} \not{N} \not{\partial} (\pm^R) \not{e} \frac{i}{2} N = 0 \quad (2.118)$$

e

$$\pm^A i \not{i} \not{N} \not{\partial} N^{\not{c}} = i \pm^A \not{N} \not{\partial} N + i \not{N} \not{\partial} \pm^A N = \not{N} \circ_5 \pm^- \not{e} N \not{\partial} N + \not{N} \not{\partial} (\pm^-) \not{e} \frac{i}{2} \circ_5 N = 0; \quad (2.119)$$

onde utilizamos a notação $\not{\partial} \dot{=} \circ^1 \not{\partial}_1$ e a relação de anticomutação entre \circ_5 e \circ^1 .

Um termo de massa, da forma “ $i m \not{N} N$ ”, quebra a simetria quiral. Este termo é invariante pela transformação vetorial,

$$\pm^V i \not{N} N^{\not{c}} = \pm^V \not{N} N + \not{N} \pm^V N = i \not{i} \not{N} \pm^R \not{e} \frac{i}{2} N + i \not{N} \pm^R \not{e} \frac{i}{2} N = 0; \quad (2.120)$$

mas não o é pela transformação axial,

$$\pm^A i \not{N} N^{\not{c}} = \pm^A \not{N} N + \not{N} \pm^A N = i \not{i} \not{N} \pm^- \not{e} \frac{i}{2} \circ_5 N \not{i} \not{N} \circ_5 \pm^- \not{e} \frac{i}{2} N = i \not{i} \not{N} \pm^- \not{e} \frac{i}{2} \circ_5 N; \quad (2.121)$$

Por isso, no modelo linear com simetria quiral, o nucleon não pode ter massa.

A variação axial acima mostra que o quadrivetor $a_i \dot{=} i \not{i} \not{N} \not{\partial} \circ_5 N; \not{N} N^{\not{c}}$ é um elemento do grupo SO(4). Logo, se o multiplicarmos escalarmente pelo quadrivetor $P_i \dot{=} (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, obtemos o escalar

$$a \not{e} P = \not{N} N \frac{3}{4} + i \not{N} \not{\partial} \circ_5 N \not{e} \frac{1}{4}; \quad (2.122)$$

invariante sob transformações quirais. Então, admitindo que o acoplamento do píon com o nucleon seja o usual, a parte da lagrangiana geral que descreve a interação entre sigma, píons e nucleons é dada por

$$i g^a \not{P} = i g \not{N} (\not{\gamma}_4 + i \not{\epsilon} \not{\gamma}_4 \not{\gamma}_5) N = i g v_+ \not{N} N i g \not{N} (s + i \not{\epsilon} \not{\gamma}_4 \not{\gamma}_5) N ; \quad (2.123)$$

onde g é a constante de acoplamento méson-nucleon e o sinal é negativo por convenção.

O termo de interação entre o vácuo e o campo nucleônico pode ser identificado com o termo de massa do nucleon,

$$m = g v_+ ; \quad (2.124)$$

o que corresponde à relação de Goldberger-Treiman (2.79) com a aproximação $g_A \gg 1$.

Esta identificação permite interpretar a massa do nucleon como

$$m \cong \hat{m} + \pm m_{SB} ; \quad (2.125)$$

onde \hat{m} corresponde à massa decorrente da quebra espontânea da simetria quiral,

$$\hat{m} = g c ; \quad (2.126)$$

e $\pm m_{SB}$, ao acréscimo de massa decorrente da quebra explícita da simetria quiral [Cam 78],

$$\pm m_{SB} = g \frac{\not{c}}{2 \not{s} \not{c}^2} = g f_{\not{\gamma}_4} \frac{\not{m}^2}{\not{m}_{\not{\gamma}_4}^2} ; \quad (2.127)$$

Medidas provenientes do espalhamento píon-nucleon [Hoh 83] levam a crer que este acréscimo, conhecido como termo sigma píon-nucleon, deve ser de 35 ± 5 MeV, o que implicaria numa massa de aproximadamente 829 MeV para o méson $\not{\gamma}_4$.

Assim, a lagrangiana para o sistema píon-nucleon pode ser expressa por duas formas alternativas

$$L^N = i \not{N} \not{\epsilon} N i g \not{N} (\not{\gamma}_4 + i \not{\epsilon} \not{\gamma}_4 \not{\gamma}_5) N \quad (2.128)$$

ou

$$L^N = \not{N} (i \not{\epsilon} i m) N i g \not{N} (s + i \not{\epsilon} \not{\gamma}_4 \not{\gamma}_5) N ; \quad (2.129)$$

Na última expressão, o primeiro termo está associado ao nucleon livre, com a massa gerada dinamicamente, e o segundo, à interação entre os campos, com o acoplamento $\not{\gamma}_4 N$ pseudoescalar (PS).

A lagrangiana geral, $L = L^N + L^M$, reproduz as hipóteses de CVC e PCAC, pois as quadridivergências das correntes vetoriais e axiais, obtidas da segunda igualdade de (2.24) com as variações infinitesimais (2.83) e (2.116), correspondem a

$$@_1 V^1 = i \frac{\partial L(\frac{1}{4}^0; \frac{3}{4}^0)}{\partial (@_1)} = 0 \quad \text{e} \quad @_1 A^1 = i \frac{\partial L(\frac{1}{4}^0; \frac{3}{4}^0)}{\partial (@_1^-)} = 1^2 f_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} : \quad (2.130)$$

As correntes vetoriais,

$$V^1 = i \frac{\partial L(\frac{1}{4}^0; \frac{3}{4}^0)}{\partial (@_1)} = N^1 \circ^1 \frac{i}{2} N + \frac{1}{4} \wedge @_1 \frac{1}{4} ; \quad (2.131)$$

e axiais,

$$A^1 = i \frac{\partial L(\frac{1}{4}^0; \frac{3}{4}^0)}{\partial (@_1^-)} = N^1 \circ^1 \circ^5 \frac{i}{2} N + \frac{1}{4} @_1 \frac{1}{4} i \frac{3}{4} @_1 \frac{1}{4} ; \quad (2.132)$$

são obtidas da primeira igualdade de (2.24).

Além disso, com a contagem de potências ou com a simples constatação de que g é adimensional, mostra-se que a lagrangiana geral é renormalizável para todas as ordens em teoria de perturbação.

2.5 Realização Não-Linear

Para se obter uma lagrangiana quiral sem a discutível partícula sigma do modelo $\frac{3}{4}$ -linear é necessário redenominar o campo $\frac{1}{4}$, de modo que a transformação axial do novo campo piônico \bar{A} seja não-linear. A forma mais simples de realizar isso é através da troca do $\frac{3}{4}$, nas lagrangianas (2.110) e (2.128), pela função não-linear $\frac{p}{f_{\frac{1}{4}}^2 i \bar{A}^2}$ [GL 60]. Assim,

$$L^M = \frac{1}{2} @_1 \frac{\mu}{f_{\frac{1}{4}}^2 i \bar{A}^2} @_1 \frac{q}{f_{\frac{1}{4}}^2 i \bar{A}^2} + @_1 \bar{A} @_1 \bar{A} + f_{\frac{1}{4}}^{-1} @_1 \frac{q}{f_{\frac{1}{4}}^2 i \bar{A}^2} \quad (2.133)$$

e

$$L^N = i N^1 \circ N + g N^1 \frac{\mu q}{f_{\frac{1}{4}}^2 i \bar{A}^2} + i \frac{q}{f_{\frac{1}{4}}^2 i \bar{A}^2} N : \quad (2.134)$$

Com esse procedimento, as funções $\frac{p}{f_{\frac{1}{4}}^2 i \bar{A}^2}$ e \bar{A} transformam-se do mesmo modo que os campos $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$ do modelo linear, mas com um grau de liberdade a menos, pois a transformação escalar do vácuo é eliminada.

Expandindo $\mathbf{P}_{f_{\frac{1}{4}}^2 i \tilde{\mathbf{A}}^2}$ em torno de $\tilde{\mathbf{A}}^2 = 0$, o modelo $\frac{3}{4}$ -não-linear corresponde, então, às lagrangianas

$$L^M = \frac{1}{2} i @_1 \tilde{\mathbf{A}} @^1 \tilde{\mathbf{A}} @^2 \tilde{\mathbf{A}}^2 + \frac{1}{8f_{\frac{1}{4}}^2} i @_1 \tilde{\mathbf{A}}^2 @^1 \tilde{\mathbf{A}}^2 @^2 \tilde{\mathbf{A}}^4 + \frac{1}{16f_{\frac{1}{4}}^4} i @_1 \tilde{\mathbf{A}}^2 @^1 \tilde{\mathbf{A}}^4 @^2 \tilde{\mathbf{A}}^6 + \dots \quad (2.135)$$

e

$$L^N = N (i @_1 m) N @_1 i g N @^1 \tilde{\mathbf{A}} + \frac{g}{2f_{\frac{1}{4}}} N N @^2 \tilde{\mathbf{A}}^2 + \frac{\tilde{\mathbf{A}}^4}{4f_{\frac{1}{4}}^2} + \frac{\tilde{\mathbf{A}}^6}{8f_{\frac{1}{4}}^4} + \dots ; \quad (2.136)$$

onde $m = g f_{\frac{1}{4}}$ e as reticências indicam termos de ordem mais alta no campo do píon. O modelo quiral construído com esta realização tem, como conteúdo principal, a capacidade de relacionar processos envolvendo diferentes números de píons.

A generalização deste modelo foi feita por Weinberg. Em 1967, ele propôs uma aproximação dinâmica para a álgebra de correntes, baseada na rede...nição dos campos do modelo $\frac{3}{4}$ -linear. Com esta rede...nição, a transformação axial do novo campo piônico passou a ser não-linear e o acoplamento $\frac{1}{4}N$, pseudovetorial (PV) [Wei 67].

Um ano mais tarde, Weinberg elaborou uma realização não-linear generalizada da simetria quiral, de...nindo um novo comportamento dos campos sob transformações axiais. Nesta realização, a simetria é assegurada pela introdução de derivadas covariantes, que resultam num acoplamento $\frac{1}{4}N$ pseudovetorial (PV) [Wei 68].

Nesta abordagem, as relações de comutação das cargas vetoriais com os campos piônico e nucleônico são as mesmas da realização linear. Denotando o campo do píon por $\tilde{\mathbf{A}}(x)$ e do nucleon por $\tilde{\mathbf{A}}(x)$, tem-se

$$[Q_a^V; \tilde{\mathbf{A}}] = i t_a \tilde{\mathbf{A}} \quad \text{e} \quad [Q_a^V; \tilde{\mathbf{A}}] = i \frac{\dot{t}_a}{2} \tilde{\mathbf{A}} ; \quad (2.137)$$

onde t_a é a representação 3×3 dos geradores do grupo $SU(2)$ ⁴. Com isso, as variações vetoriais são dadas por

$$\pm^V \tilde{\mathbf{A}} = i \pm^R \wedge \tilde{\mathbf{A}} \quad (2.138)$$

e

$$\pm^V \tilde{\mathbf{A}} = i \frac{1}{2} \pm^R \wedge \tilde{\mathbf{A}} : \quad (2.139)$$

⁴Na forma matricial, temos $(t_a)_{bc} = i \epsilon_{abc}$.

Para as variações axiais não-lineares dos campos, Weinberg propôs as relações de comutação⁵

$$[Q_a^A; \tilde{A}_b] = i \pm_{ab} f(\tilde{A}^2) + i \tilde{A}_a \tilde{A}_b g(\tilde{A}^2) \quad (2.140)$$

e

$$[Q_a^A; \tilde{A}] = i v(\tilde{A}^2) \epsilon_{abc} \frac{i}{2} \tilde{A}_c \tilde{A} ; \quad (2.141)$$

onde $f(\tilde{A}^2)$ é uma função real arbitrária,

$$g(\tilde{A}^2) = \frac{1 + 2f(\tilde{A}^2) f^0(\tilde{A}^2)}{f(\tilde{A}^2) + 2\tilde{A}^2 f^0(\tilde{A}^2)} \quad (2.142)$$

e

$$v(\tilde{A}^2) = \frac{1}{f(\tilde{A}^2) + \frac{f^2(\tilde{A}^2) + \tilde{A}^2}{f^2(\tilde{A}^2) + \tilde{A}^2}} : \quad (2.143)$$

As variações axiais dos campos são, então, dadas por

$$\boxed{\pm^A \tilde{A} = f(\tilde{A}^2) \pm^- + g(\tilde{A}^2) \pm^- \epsilon \tilde{A} \tilde{A}} \quad (2.144)$$

e

$$\boxed{\pm^A \tilde{A} = \frac{i}{2} v(\tilde{A}^2) \pm^- \epsilon (\tilde{A} \wedge \tilde{A}) \tilde{A} :} \quad (2.145)$$

Na abordagem não-linear, é impossível construir lagrangianas quirais envolvendo apenas o campo do píon. Contudo, invariantes podem ser construídos com o auxílio da derivada covariante deste campo, com a forma geral

$$D_1 \tilde{A} = K \boxed{4 \epsilon \frac{1}{f^2(\tilde{A}^2) + \tilde{A}^2} \partial_1 \tilde{A} + \frac{f^0(\tilde{A}^2) + v(\tilde{A}^2) = 2}{f^2(\tilde{A}^2) + \tilde{A}^2} \tilde{A} \partial_1 \tilde{A}^2} \quad (2.146)$$

onde K é uma constante. Deste modo, as relações de comutação das cargas com esta derivada covariante passam a ser semelhantes às do campo nucleônico, isto é,

$$[Q_a^V; D_1 \tilde{A}] = i t_a D_1 \tilde{A} \quad \text{e} \quad [Q_a^A; D_1 \tilde{A}] = i v(\tilde{A}^2) \epsilon_{abc} t_b \tilde{A}_c D_1 \tilde{A} ; \quad (2.147)$$

⁵O comutador entre a carga axial e o campo piônico (nucleônico) tem paridade positiva (negativa), porque, como visto na seção 2.2, a carga axial muda a paridade.

e as variações infinitesimais tomam a forma

$$\boxed{\pm^V (D_1 \tilde{A}) = i \pm^R \wedge D_1 \tilde{A} \quad \pm^A (D_1 \tilde{A}) = v(\tilde{A}^2) (\pm^- \wedge \tilde{A}) \wedge D_1 \tilde{A}} : \quad (2.148)$$

Assim, por construção, o escalar

$$\frac{1}{2} D_1 \tilde{A} \cdot D^1 \tilde{A} = \frac{1}{2} \frac{K^2}{f^2(0)} \tilde{A} \cdot \tilde{A} + \dots \quad (2.149)$$

é invariante sob transformações quirais. Para que o campo do píon tenha a normalização usual, toma-se $K = f(0)$.

A massa do píon provém de um termo na lagrangiana que quebra a simetria quiral, dado por uma função $h(\tilde{A}^2)$, de modo que o segundo coeficiente da série de Taylor desta função resulte no termo de massa, isto é,

$$\frac{dh}{d(\tilde{A}^2)} \Big|_{\tilde{A}^2=0} = i \frac{1}{2} \tilde{A}^2 : \quad (2.150)$$

Através da equação (2.24), temos que a divergência da corrente axial em $\tilde{A}^2 = 0$ é dada por

$$[\partial_1 A^1]_{\tilde{A}^2=0} = i 2 \frac{dh}{d(\tilde{A}^2)} \Big|_{\tilde{A}^2=0} \tilde{A}^2 + \tilde{A}^2 g(\tilde{A}^2) \tilde{A}^2 \Big|_{\tilde{A}^2=0} = i^2 f(0) \tilde{A}^2 : \quad (2.151)$$

Comparando com a hipótese de PCAC, temos

$$f(0) = f_{\eta} : \quad (2.152)$$

No caso do nucleon, as variações quirais (2.139) e (2.145) fazem com que o termo de massa,

$$i m \tilde{A} \tilde{A} : \quad (2.153)$$

passe a ser um invariante quiral, pois

$$\pm^V i \tilde{A} \tilde{A} = i \pm^V \tilde{A} \tilde{A} + \tilde{A} i \pm^V \tilde{A} = i \frac{1}{2} \tilde{A} \pm^R \cdot \tilde{A} i \frac{1}{2} \tilde{A} \pm^R \cdot \tilde{A} = 0 \quad (2.154)$$

e

$$\pm^A i \tilde{A} \tilde{A} = i \pm^A \tilde{A} \tilde{A} + \tilde{A} i \pm^A \tilde{A} = i \frac{1}{2} v(\tilde{A}^2) \tilde{A} \pm^- \cdot (\tilde{A} \wedge \tilde{A}) \tilde{A} + \frac{1}{2} v(\tilde{A}^2) \tilde{A} \pm^- \cdot (\tilde{A} \wedge \tilde{A}) \tilde{A} = 0 : \quad (2.155)$$

Para assegurar a simetria quiral do termo cinético, é preciso trocar a derivada comum do campo nucleônico por uma derivada covariante. Neste caso, a escolha particular

$$D_1 \tilde{A} = \partial_1 \tilde{A} + \epsilon_{ijk} \frac{i}{2} \tilde{A}_j \partial_1 \tilde{A}_k - \frac{v(\tilde{A}^2)}{\tilde{A}^2 + f^2(\tilde{A}^2)} \tilde{A} \quad (2.156)$$

leva a

$$[Q_a^V; D_1 \tilde{A}] = i \frac{\dot{\epsilon}_a}{2} D_1 \tilde{A} \quad \text{e} \quad [Q_a^A; D_1 \tilde{A}] = i v(\tilde{A}^2) \epsilon_{abc} \frac{\dot{\epsilon}_b}{2} \tilde{A}_c D_1 \tilde{A}; \quad (2.157)$$

o que implica em

$\pm^V (D_1 \tilde{A}) = \frac{i}{2} \pm^R \epsilon \tilde{A} \quad \text{e} \quad \pm^A (D_1 \tilde{A}) = \frac{i}{2} v(\tilde{A}^2) \pm^- \epsilon (\tilde{A} \wedge \tilde{A}) D_1 \tilde{A}$

(2.158)

A substituição da derivada comum no termo cinético por esta derivada covariante produz o invariante quiral

$$\tilde{A} (i \not{D} + m) \tilde{A}; \quad (2.159)$$

que inclui o nucleon livre,

$$\tilde{A} (i \not{\partial} + m) \tilde{A}; \quad (2.160)$$

e a interação do nucleon com um número par de píons ⁶,

$$\frac{i}{2} \not{A} \frac{v(\tilde{A}^2)}{f^2(\tilde{A}^2) + \tilde{A}^2} \tilde{A} \circ^1 \epsilon \tilde{A} \not{\epsilon} (\tilde{A} \wedge \not{\epsilon} \tilde{A}); \quad (2.161)$$

A interação entre um número ímpar de píons e o nucleon, no entanto, é dada pelo invariante quiral ⁷

$$\frac{g_A}{2f_{1/4}} \not{A} \circ^1 \circ^5 \epsilon \tilde{A} \not{\epsilon} D_1 \tilde{A}; \quad (2.162)$$

Além das interações já mencionadas, é possível obter muitas outras, através das derivadas covariantes, como, por exemplo, a interação isoescalar entre um número par de píons e o nucleon. Ela é obtida multiplicando-se dois invariantes: o termo de massa do nucleon e o termo cinético do píon,

$$G \not{A} \tilde{A} D_1 \tilde{A} \not{\epsilon} D^1 \tilde{A}; \quad (2.163)$$

onde G é a constante de acoplamento isoescalar.

⁶O acoplamento, neste caso, é isovetorial e vetorial (V).

⁷O acoplamento, neste caso, é isovetorial e pseudovetorial (PV).

Em geral, os resultados não devem depender da forma de $f(\bar{A}^2)$, [Haa 58] e [CWZ 69]. Por isto, neste trabalho, adotamos a forma correspondente ao modelo $\frac{3}{4}$ -não-linear,

$$f(\bar{A}^2) = \frac{q}{f_{\frac{3}{4}}^2 i \bar{A}^2}; \quad (2.164)$$

que torna $g(\bar{A}^2) = 0$ e, consequentemente, $\pm^A \bar{A} = \pm^- f(\bar{A}^2)$.

Com isso, a derivada covariante do nucleon, equação (2.156), resume-se a

$$D_1 \bar{A} = @_1 \bar{A} + \frac{3}{2f_{\frac{3}{4}}} \frac{i}{f_{\frac{3}{4}}^2 i \bar{A}^2} \dot{\zeta} \cdot (\bar{A} \wedge @_1 \bar{A}) \bar{A} \quad (2.165)$$

e a do píon, equação (2.146), a

$$D_1 \bar{A} = @_1 \bar{A} + \frac{1}{2} \frac{p}{f_{\frac{3}{4}}^2 i \bar{A}^2} \frac{3}{f_{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{p} \frac{1}{f_{\frac{3}{4}}^2 i \bar{A}^2} \bar{A} @_1 \bar{A}^2: \quad (2.166)$$

Neste caso, a expressão (2.149) corresponde ao termo cinético usual e às interações entre números pares de píons do modelo $\frac{3}{4}$ -não-linear com simetria quiral, isto é,

$$D_1 \bar{A} \cdot D^1 \bar{A} = @_1 \bar{A} \cdot @_1 \bar{A} + @_1 \frac{q}{f_{\frac{3}{4}}^2 i \bar{A}^2} @_1 \frac{q}{f_{\frac{3}{4}}^2 i \bar{A}^2}: \quad (2.167)$$

A forma mais simples para o termo de quebra da simetria quiral, que satisfaz a equação (2.151) com esta escolha de $f(\bar{A}^2)$, é

$$h(\bar{A}^2) = f_{\frac{3}{4}}^{-1} \frac{q}{f_{\frac{3}{4}}^2 i \bar{A}^2}; \quad (2.168)$$

que é idêntico ao do modelo $\frac{3}{4}$ -não-linear.

Logo, temos duas alternativas para lagrangianas não-lineares:

$$L^{PS} = L^M + L^N \quad \text{e} \quad L^{PV} = L^M + L^{\bar{A}}; \quad (2.169)$$

onde

$$L_M = \frac{1}{2} @_1 \frac{\mu}{f_{\frac{3}{4}}^2 i \bar{A}^2} @_1 \frac{q}{f_{\frac{3}{4}}^2 i \bar{A}^2} + @_1 \bar{A} \cdot @_1 \bar{A} + f_{\frac{3}{4}}^{-1} \frac{q}{f_{\frac{3}{4}}^2 i \bar{A}^2}; \quad (2.170)$$

$$L_N = i \bar{N} \otimes N + g \bar{N} \frac{\mu q}{f_{\frac{3}{4}}^2 i \bar{A}^2} + i \dot{\zeta} \cdot \bar{A} \circ_5 N; \quad (2.171)$$

$$L_{\bar{A}} = \bar{A} (i \bar{\partial} + m) \bar{A} + \frac{g_A}{2f_{\frac{3}{4}}} \bar{A} \circ_1 \circ_5 \dot{\zeta} \cdot \bar{A} \cdot D_1 \bar{A}: \quad (2.172)$$

Nos espalhamentos $\gamma\gamma$, γN e NN , nas fotoproduções de um e dois píons no nível árvore [Pup 94], assim como no espalhamento γN com um loop [PR 97] e no espalhamento NN devido à troca de dois píons [Roc 93], verificou-se explicitamente que, para $g_A = 1$, os dois modelos não-lineares são equivalentes. No caso $g_A \neq 1$, a equivalência entre as duas abordagens requer modificações na lagrangiana (2.171).

Em 1979, Weinberg [Wei 79] postulou que a lagrangiana efetiva mais geral, que incluísse todos os termos consistentes com analiticidade, unitariedade e simetrias da teoria, produziria via regras de Feynman e numa dada ordem de teoria de perturbação a amplitude mais geral consistente com as simetrias assumidas. Com isso, ele retirou a necessidade dos píons serem moles, estendendo a teoria de campos efetiva para além da álgebra de correntes. O desenvolvimento mais rigoroso dessa proposição para os mésons, realizado por Leutwyler em 1994 [Leu 94], deu origem a moderna teoria de perturbação quiral (ChPT). Recentemente ele estendeu a ChPT para os bárions [BL 99].

2.6 Regras de Feynman

Na linguagem perturbativa, a amplitude de transição de um processo consiste na série monotonicamente convergente

$$T = T^{(0)} + T^{(1)} + T^{(2)} + \dots + T^{(n)} + \dots ; \quad (2.173)$$

onde $T^{(n)}$ é a amplitude de ordem n , relacionada com um conjunto de diagramas, conhecidos como diagramas de Feynman, que representa a dinâmica do processo nesta ordem. Esta amplitude é dada, então, pela soma

$$T^{(n)} = T_1^{(n)} + T_2^{(n)} + T_3^{(n)} + \dots + T_m^{(n)} ; \quad (2.174)$$

onde $T_m^{(n)}$ é a amplitude do diagrama m do conjunto de ordem n . No contexto da simetria quiral, estes conjuntos são formados por grupos de diagramas de Feynman.

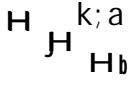
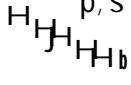
Os diagramas de Feynman são divididos em três componentes básicas: linhas externas, linhas internas e vértices. Essas componentes são relacionadas às expressões matemáticas por meio de um conjunto de prescrições no espaço dos momentos, denominadas regras de Feynman, que permitem obter as amplitudes desses diagramas de uma forma prática e intuitiva.

As linhas externas e internas representam, respectivamente, partículas reais e virtuais. As partículas reais correspondem às soluções das equações de movimento e as virtuais às propagações dessas soluções, sendo, por isso, chamadas também de propagadores. Em geral, as lagrangianas livres são as mesmas em todos os modelos e isto também acontece com as expressões matemáticas associadas às linhas externas e internas.

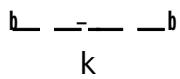
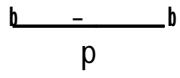
Os vértices representam as interações entre as partículas. Suas expressões matemáticas são derivadas da lagrangiana de interação e, portanto, dependem do modelo empregado.

Neste trabalho, os píons são representados por linhas tracejadas e os nucleons, por linhas contínuas.

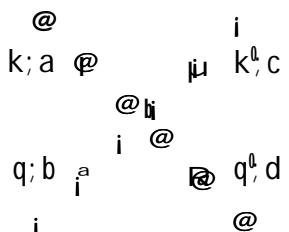
1. Linhas Externas:

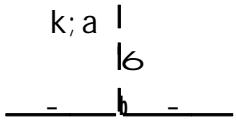
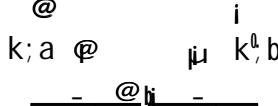
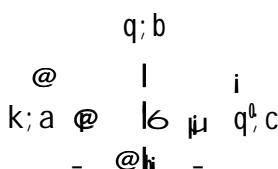
L_M	$\frac{1}{2} i \bar{A} \gamma^\mu A - \frac{1}{12} \bar{A}^2$
	1
	1
$L_{\bar{A}}; L_N$	$\bar{A} (i \gamma^\mu - m) A; N (i \gamma^\mu - m) N$
	$u^s(p) = \frac{1}{E + m} \gamma^\mu (E + m - \frac{1}{2} p^\mu) \bar{A}_s$
	$u^{s^0}(p^0) = \frac{1}{E^0 + m} \bar{A}_{s^0}^y (E^0 + m; i \gamma^\mu p^0)$

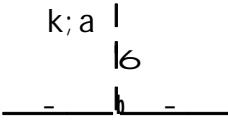
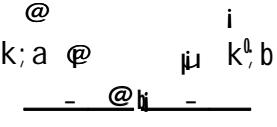
2. Linhas Internas:

L_M	$\frac{1}{2} i \partial_1 A^2 \partial^1 A^2 i^{-12} A^2 \epsilon$
	$i \Phi(k) = \frac{i}{k^2 i^{-12}}$
$L_A; L_N$	$\bar{A} (i \epsilon_{ijm} m) A; \bar{N} (i \epsilon_{ijm} m) N$
	$i S(p) = \frac{i}{\Phi i^{-12} m} + i \frac{\Phi + m}{p^2 i^{-12} m^2}$

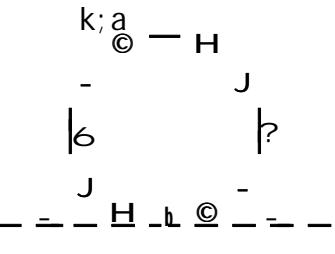
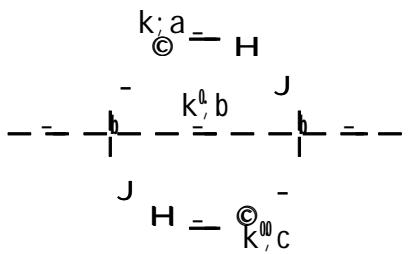
3. Vértices:

L_M	$\frac{1}{8f_{\eta}^2} i \partial_1 A^2 \partial^1 A^2 i^{-12} A^4 \epsilon$
	$i \frac{i}{f_{\eta}^2} f_{\pm ab \pm cd} [(k + q) \epsilon (k^0 + q^0) + 1^2]$ $+ \pm_{ac} \pm_{bd} [(k + k^0) \epsilon (q + q^0) + 1^2]$ $+ \pm_{ad} \pm_{bc} [(k + q^0) \epsilon (q + k^0) + 1^2] g$

$L_{\tilde{A}}$	$\frac{g_A}{2f_{\frac{1}{4}}} \tilde{A} \circ^1 \circ_5 \not{\epsilon} \tilde{A} \not{\epsilon} @_1 \tilde{A}$
	$i \frac{g_A}{2f_{\frac{1}{4}}} \not{\epsilon}_a \not{b} \circ_5$
$L_{\tilde{A}}$	$i \frac{1}{4f_{\frac{1}{4}}^2} \tilde{A} \circ^1 \not{\epsilon} \tilde{A} \not{\epsilon} (\tilde{A} \wedge @_1 \tilde{A})$
	$i \frac{1}{4f_{\frac{1}{4}}^2} \epsilon_{abc} \not{\epsilon}_c (\not{b}_i \not{b}^0)$
$L_{\tilde{A}}$	$\frac{g_A}{8f_{\frac{1}{4}}^3} \tilde{A} \circ^1 \circ_5 \not{\epsilon} \tilde{A} \not{\epsilon} \tilde{A} @_1 \tilde{A}^2$
	$i \frac{g_A}{4f_{\frac{1}{4}}^3} [\pm_{cb} \not{\epsilon}_a (\not{b} + \not{b}^0) + \pm_{ac} \not{\epsilon}_b (\not{b}^0_i \not{b}) + \pm_{ba} \not{\epsilon}_c (\not{b}_i \not{b})] \circ_5$

L_N	$i \bar{g} N^1 \bar{\zeta} N \zeta A$
$k; a$ 	$g \zeta a^0 \zeta$
L_N	$\frac{g}{2f_{1/4}} N N A^2$
$@$ $k; a$ $\bar{\mu}$ $\bar{\mu}^i$ $k^0 b$ 	$i \frac{m g_A}{f_{1/4}^2} \zeta_{ab}$

4. Loops:

$k; a$ 	$\frac{1}{2!} R \frac{d^4 k}{(2^{1/4})^4}$
$k; a$ 	$\frac{1}{3!} R \frac{d^4 k}{(2^{1/4})^4} R \frac{d^4 k^0}{(2^{1/4})^4}$

Capítulo 3

Processos Intermediários

A dinâmica da interação NN , mediada pela troca de píons virtuais não correlacionados, pode ser analisada por meio de subprocessos básicos. As trocas de um, dois e três píons no espalhamento NN são baseadas nas interações $N \rightarrow \frac{1}{2}N, \frac{1}{2}N \rightarrow \frac{1}{2}N$ e $\frac{1}{2}N \rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{2}N$. Já a produção de um píon na interação NN devida às trocas de um e dois píons depende, respectivamente, das combinações de $N \rightarrow \frac{1}{2}N$ com $\frac{1}{2}N \rightarrow \frac{1}{2}N$ e de $\frac{1}{2}N \rightarrow \frac{1}{2}N$ com $\frac{1}{2}N \rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{2}N$. Essas composições facilitam os cálculos, pois as amplitudes desses processos intermediários são tomadas como subamplitudes e usadas como vértices em regras de Feynman compostas.

Uma parte da dinâmica do processo $\frac{1}{2}N \rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{2}N$ está associada ao espalhamento $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ elástico e, por isso, é conveniente considerar também a amplitude deste espalhamento como sendo um vértice efetivo nas regras de Feynman.

3.1 Espalhamento Píon-Píon

O espalhamento de píons é o processo mais básico da QCD a baixas energias. Ele é ideal para estudar o mecanismo de quebra espontânea da simetria quiral pois, como envolve somente bósons de Goldstone pseudoescalares, espera-se que a expansão de sua amplitude convirja rapidamente.

O espalhamento elástico consiste no processo $\gamma_a(k) \gamma_b(q) \rightarrow \gamma_c(k^0) \gamma_d(q^0)$, onde os índices romanos representam as terceiras componentes de isospin e os quadrimomentos obedecem à conservação de energia-momento

$$k + q = k^0 + q^0 : \quad (3.1)$$

A forma geral da amplitude de transição é

$$T_{dcba} = \pm_{ab} \pm_{cd} A(s) + \pm_{ac} \pm_{bd} A(t) + \pm_{ad} \pm_{bc} A(u); \quad (3.2)$$

onde A é uma função escalar, dependente das variáveis de Mandelstam

$$s = (k + q)^2 = (k^0 + q^0)^2; \quad t = (k - k^0)^2 = (q^0 - q)^2; \quad u = (k - q^0)^2 = (k^0 - q)^2; \quad (3.3)$$

com o vínculo $s + t + u = 4^2$, para píons na camada de massa.

Uma vez que o momento angular e o isospin totais, $J (= L)$ e I , são conservados, é conveniente a análise dos dados experimentais em ondas parciais com isospin bem definido. A decomposição da amplitude em ondas parciais permite expressá-la em termos de defasagens reais e, perto do limiar ($s \geq 4^2$ e $t \geq u \geq 0$), em termos do comprimento de espalhamento e do alcance efetivo. A conservação do isospin possibilita reescrever a amplitude no canal s como

$$T_{dcba} = \sum_{I=0;1;2} T^I P_{dcba}^I; \quad (3.4)$$

onde

$$P_{dcba}^0 = \frac{1}{3} \pm_{ab} \pm_{cd}; \quad P_{dcba}^1 = \frac{1}{2} (\pm_{ac} \pm_{bd} + \pm_{ad} \pm_{bc}); \quad P_{dcba}^2 = \frac{1}{2} (\pm_{ac} \pm_{bd} + \pm_{ad} \pm_{bc}) + \frac{1}{3} \pm_{ab} \pm_{cd} \quad (3.5)$$

são os operadores de projeção de isospin e

$$T^0 = 3A(s) + A(t) + A(u); \quad T^1 = A(t) - A(u); \quad T^2 = A(t) + A(u) \quad (3.6)$$

são as amplitudes para cada canal de isospin.

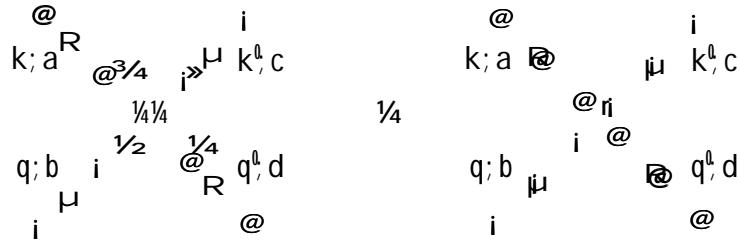


Figura 3.1: Dinâmica do espalhamento $1/4$ para os modelos não-lineares no nível árvore.

Nos modelos quirais não-lineares, a dinâmica da interação $1/4$, em primeira ordem de perturbação, é descrita por apenas um diagrama de Feynman do tipo árvore, o da figura (3.1). A amplitude resume-se ao vértice de quatro píons dado no capítulo 2,

$$T_{dcba} = i \frac{1}{f_{1/4}^2} \epsilon_{ab} \epsilon_{cd} \frac{f}{(i \cdot k \cdot i \cdot q) \cdot (k^0 + q^0) + i^2} + \epsilon_{ac} \epsilon_{bd} \frac{f}{(i \cdot k + k^0) \cdot (i \cdot q + q^0) + i^2} + \epsilon_{ad} \epsilon_{bc} \frac{f}{(i \cdot k + q^0) \cdot (i \cdot q + k^0) + i^2} : \quad (3.7)$$

Usando as equações (3.1) e (3.3) na expressão (3.2), obtemos

$$A(s) = \frac{1}{f_{1/4}^2} i s i^{-1/2} ; \quad A(t) = \frac{1}{f_{1/4}^2} i t i^{-1/2} \quad \text{e} \quad A(u) = \frac{1}{f_{1/4}^2} i u i^{-1/2} : \quad (3.8)$$

COMPORTAMENTO A BAIXAS ENERGIAS

A amplitude T^1 em primeira ordem, expressão (3.6) com (3.8), corresponde aos valores do comprimento de espalhamento e alcance efetivo preditos por Weinberg para píons moles [Wei 67],

$$a_0^0 = \frac{7}{4} \cdot 1 \cdot L ; \quad b_0^0 = 2 \cdot 1 \cdot L ; \quad a_0^2 = i \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot L ; \quad b_0^2 = i \cdot 1 \cdot L \quad \text{e} \quad a_1^1 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot L ; \quad (3.9)$$

onde

$$L \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{8 \cdot \frac{1}{4} f_{1/4}^2} \stackrel{\cong}{=} \frac{0.089}{1} \quad (3.10)$$

é o comprimento de espalhamento universal. Estes resultados reproduzem os da álgebra de corrente [Wei 66b], com apenas dois parâmetros livres, $f_{1/4}$ e 1 .

Na tabela (3.1), vemos que esses resultados são menores do que os valores experimentais, principalmente para a onda S com isospin nulo (a_0^0). Esses parâmetros são particularmente sensíveis

à quebra explícita da simetria quiral na QCD, pois todos desaparecem no limite quiral ($1 \neq 0$). A expansão quiral até segunda ordem, realizada por Gasser e Leutwyler [GL 83b] [GL 84], corrige o valor de a_0^0 em 25% e adiciona quatro novos parâmetros livres, por causa da não renormalizabilidade da lagrangiana. Os trabalhos atuais em ChPT [BGS 94] [KMSF 96] [BCEGS 97] [Wan 97] envolvem mais seis parâmetros livres, decorrentes da expansão quiral em 2 loops, mas não obtém uma correção significativa. Resultados equivalentes são obtidos no programa de unitarização da álgebra de correntes [Bor 84] [BBT 98].

Tabela 3.1: Parâmetros do limiar em unidades de 1 [BCEGS 97].

	Árvore	1 Loop	2 Loops		Experimento [KA 82]
			ajuste 1	ajuste 2	
a_0^0	0:16	0:20	0:217	0:206	0:26 § 0:05
b_0^0	0:18	0:25	0:275	0:249	0:25 § 0:03
a_0^2	i 0:045	i 0:042	i 0:0413	i 0:0443	i 0:028 § 0:012
b_0^2	i 0:091	i 0:073	i 0:072	i 0:080	i 0:082 § 0:008
a_1^1	0:03	0:037	0:040	0:038	0:038 § 0:002
b_1^1	0	0:0048	0:0079	0:0054	—
a_2^0	0	0:0018	0:0027	input	0:0017 § 0:003
a_2^2	0	0:00021	0:00023	input	0:00013 § 0:0003

3.2 Espalhamento Píon-Nucleon

O espalhamento píon-nucleon (πN) é dado pelo processo $\pi_a(k)N(p) \rightarrow \pi_b(k')N(p')$, onde os índices a e b representam o isospin dos píons e os quadrimomentos obedecem à relação de conservação de energia-momento,

$$p + k = p' + k': \quad (3.11)$$

As variáveis de Mandelstam deste espalhamento são

$$s = (p + k)^2 = (p^0 + k^0)^2; \quad t = (k \cdot k')^2 = (p^0 \cdot p')^2; \quad u = (p \cdot k')^2 = (p^0 \cdot k')^2: \quad (3.12)$$

Além destas variáveis, é conveniente o uso das combinações antissimétricas

$$\sigma = \frac{s - u}{4m} = \frac{(p + p') \cdot (k + k')}{4m} \quad (3.13)$$

e simétrica

$${}^o_B = \frac{2m^2 i s i u}{4m} = \frac{t i 2^{12}}{4m} = i \frac{k \ell k^0}{2m}; \quad (3.14)$$

A amplitude de transição pode ser separada, quanto à troca dos índices a e b, em uma parte simétrica T^+ e uma antissimétrica T^i ,

$$T_{ba} = \pm_{ab} T^+ + i^2_{bac} \dot{\epsilon}_c T^i; \quad (3.15)$$

A conservação do isospin total, por sua vez, produz

$$T_{ba} = T^{1=2}(s; t; u) \hat{P}_{ba}^{1=2} + T^{3=2}(s; t; u) \hat{P}_{ba}^{3=2}; \quad (3.16)$$

onde

$$\hat{P}_{ba}^{1=2} = \frac{1}{3} (\pm_{ba} + i^2_{bac} \dot{\epsilon}_c) \quad \text{e} \quad \hat{P}_{ba}^{3=2} = \frac{1}{3} (2\pm_{ba} i - i^2_{bac} \dot{\epsilon}_c) \quad (3.17)$$

são os operadores de projeção de isospin e

$$T^{1=2}(s; t; u) = T^+ + 2T^i \quad \text{e} \quad T^{3=2}(s; t; u) = T^+ i - T^i \quad (3.18)$$

são as amplitudes nos canais de isospin.

As conservações de paridade e energia-momento, para nucleons na camada de massa, fornecem a estrutura geral

$$T^S = \dot{u}(p^0) A^S + \frac{1}{2} (k^0 + k) B^S \dot{u}(p); \quad (3.19)$$

onde A^S e B^S são funções escalares das variáveis de Mandelstam. Pela decomposição de Gordon, podemos reescrever as amplitudes T^S na forma alternativa

$$T^S = \dot{u}(p^0) D^S i \frac{1}{4m} [k^0; k] B^S \dot{u}(p); \quad (3.20)$$

onde $D^S = A^S + {}^o B^S$. A expressão (3.19) pode, também, ser escrita como

$$T^S = \frac{\hat{p}^y}{E^0 + m} (E^0 + m; i^{\frac{3}{4}} \ell p^0) \frac{\mu}{\frac{3}{4} \ell k B^S} \frac{A^S + i B^S}{A^S i - i B^S} \frac{\pi \mu}{\frac{3}{4} \ell p} \frac{E + m}{\hat{p}^y} \frac{\pi}{E + m}; \quad (3.21)$$

A conservação do momento angular total J ($= L + S$), neste caso, implica na existência de duas amplitudes para cada autovalor de L , que descrevem os espalhamentos com e sem troca

de sentido de spin do nucleon emergente, relativamente ao incidente. Com isso, as defasagens, os comprimentos de espalhamento e os alcances efetivos são expressos em termos de I § 1=2.

Nos cálculos teóricos, as amplitudes invariantes A^S e B^S são determinadas a partir da dinâmica do espalhamento. Em ordem mais baixa de perturbação e segundo os modelos quirais não-lineares do capítulo 2, esta dinâmica é descrita pelos diagramas da figura (3.2), que correspondem à realização mínima da simetria nesta ordem.

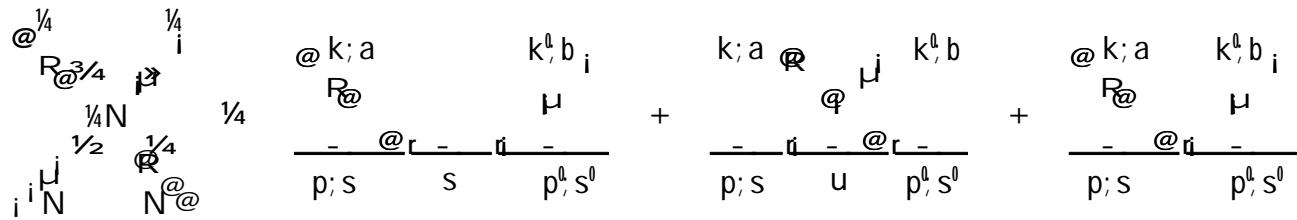


Figura 3.2: Dinâmica do espalhamento $\frac{1}{4}N$ para os modelos não-lineares no nível árvore.

No modelo não-linear com acoplamento $\frac{1}{4}N$ pseudovetorial (PV), temos

$$T_{ba} = \frac{g_A^2}{4f_{1/4}^2} \bar{u} \cdot i \cdot \gamma_b \gamma_a \not{k} + \frac{\not{p}_i \not{k} \not{p}_j m}{s_i m^2} \not{k} \cdot \gamma_a \gamma_b \not{k} + \frac{\not{p}_i \not{k} \not{p}_j m}{u_i m^2} \not{k} \cdot u + \frac{1}{4f_{1/4}^2} \bar{u} [i \cdot i^2 \gamma_{abc} \gamma_c (\not{k} + \not{k}^0)] u : \quad (3.22)$$

Simplificando a parte spinorial por meio da expressão (3.11) e da equação de Dirac, podemos reescrever a amplitude como

$$T_{ba} = \frac{\mu m g_A}{f_{1/4}} \bar{u} \cdot \gamma_{\pm ba} \frac{\mu}{m} i \cdot \frac{\not{k}}{s_i m^2} + \frac{\not{k}}{u_i m^2} \not{p} + i^2 \gamma_{bac} \gamma_c \not{i} \cdot \frac{\not{k}}{s_i m^2} i \cdot \frac{\not{k}}{u_i m^2} \not{p} + i \frac{g_A^2 i}{2f_{1/4}^2} \bar{u} [i^2 \gamma_{bac} \gamma_c \not{k}] u : \quad (3.23)$$

Nesta expressão, percebemos que os diagramas com propagadores nucleônicos no modelo PV contêm, além das contribuições do pólo do nucleon, termos parecidos aos produzidos por diagramas de contato.

O cálculo da amplitude $\frac{1}{4}N$ no contexto do modelo com acoplamento PS é totalmente análogo e produz um sanduíche spinorial idêntico ao primeiro da expressão (3.23), multiplicado por g^2 ao invés de $(mg_A = f_{1/4})^2$. Com a ajuda da relação de Goldberger-Treiman podemos, então, escrever

$$T_{ba} = \frac{\mu m g_A}{f_{1/4}} \not{p}_2 \frac{T_{ba}^{PS}}{g^2} + i g_A^2 i \not{1} \not{\gamma} \not{\pm} T_{ba} : \quad (3.24)$$

O termo $1=m$ na parte isoscalar da expressão (3.23) corresponde a uma interação de contato e, no modelo não-linear PS, é derivado da função $f = (f_{1/4}^2 i / \Lambda^2)^{1/2}$. Portanto, este termo representa a assinatura da simetria quiral e, para estudar o seu papel em outras amplitudes, passamos a rotulá-lo por um parâmetro, o μ .

A comparação entre as expressões (3.23) e (3.15) fornece

$$A^+ = \frac{\mu}{f_{1/4}} \frac{m g_A}{m} \frac{\Pi_2}{m} \frac{1}{m}; \quad B^+ = \frac{\mu}{f_{1/4}} \frac{m g_A}{m} \frac{\Pi_2 \mu}{m} i \frac{1}{s i m^2} + \frac{1}{u i m^2} \frac{\Pi}{m} = \frac{m g_A^2}{f_{1/4}^2} \frac{\circ_B}{\circ_B^2 i \circ^2} ;$$

$$A^i = 0; \quad B^i = \frac{\mu}{f_{1/4}} \frac{m g_A}{m} \frac{\Pi_2 \mu}{m} i \frac{1}{s i m^2} i \frac{1}{u i m^2} \frac{\Pi}{m} i \frac{g_A^2 i}{2 f_{1/4}^2} = \frac{m g_A^2}{f_{1/4}^2} \frac{\circ_B}{\circ_B^2 i \circ^2} i \frac{g_A^2 i}{2 f_{1/4}^2} .$$
(3.25)

COMPORTAMENTO A BAIXAS ENERGIAS

Considerando os píons na camada de massa e tomando o referencial no centro de massa do sistema (cm), temos

$$p^{\text{cm}}(E; k); \quad k^{\text{cm}}(l; i \cdot k); \quad p^0 \stackrel{\text{cm}}{=} (E; k^0); \quad k^0 \stackrel{\text{cm}}{=} (l; i \cdot k^0) \quad (3.26)$$

e

$$s = (E + l)^2; \quad t = i \cdot 2 j k j^2 (1 i \cdot x); \quad u = i \cdot s i \cdot t + 2m^2 + 2^1 2^2; \quad (3.27)$$

onde $x = \cos \mu = k^0 / k^2 = k^0 / k^2$.

Neste caso, é conveniente escrever a expressão (3.21) na forma

$$T^S = 8/4 P_S i \hat{A}^y F^S \hat{A}^y; \quad \text{com} \quad F^S = G^S + i^{1/4} \hat{e} \wedge H^S; \quad (3.28)$$

onde

$$G^S = (E + m) \frac{f}{A^S} + i P_S i \cdot m \frac{f}{B^S} \frac{\hat{e}}{i} (E i \cdot m) \frac{f}{A^S} i \cdot i P_S + m \frac{f}{B^S} \frac{\hat{e}}{i} \cos \mu; \quad (3.29)$$

$$H^S = i \cdot (E i \cdot m) \frac{f}{A^S} i \cdot i P_S + m \frac{f}{B^S} \frac{\hat{e}}{i} \sin \mu$$

e $\hat{e} \wedge = (k^0 \wedge k) = (k^2 \sin \mu)$.

O limiar ($k^0 \neq 0$), no espalhamento $\frac{1}{4}N$, corresponde a $p_S^- \geq (m + 1)$, $\sigma \geq 1$ e $\sigma_B \geq i^{-1/2} = 2m$. Neste limite, temos que $H^S = 0$,

$$G^+ = \frac{\mu mg_A}{f_{1/4}} \frac{\Pi_2}{2} \frac{\mu}{i^{3/4}} i^{-\frac{4m^2}{4m^2 i^{-1/2}}} \quad \text{e} \quad G^i = \frac{\mu mg_A}{f_{1/4}} \frac{\Pi_2}{m} \frac{\mu}{i^{-1/2}} i^{-1 + \frac{1}{g_A^2}} : \quad (3.30)$$

A expansão de G^S , em torno de $i = 1 = m$, fornece

$$G^+ = \frac{\mu mg_A}{f_{1/4}} \frac{\Pi_2}{2} \frac{\mu}{(3/4 i - 1)} i^{-\frac{1}{2} i^2} + \dots \quad \text{e} \quad G^i = \frac{\mu mg_A}{f_{1/4}} \frac{\Pi_2}{m} \frac{\mu}{g_A^2} i^{-\frac{1}{4} i^3} + \dots : \quad (3.31)$$

Estes resultados indicam que, no limiar, a ausência da simetria quiral, representada por $\frac{1}{4} = 0$, produz um termo dominante em G^+ que é cerca de 200 vezes maior do que o da ordem seguinte. Por outro lado, a simetria não afeta G^i e H^S no limiar.

Os valores do comprimento de espalhamento e do alcance efetivo para o modelo PV no nível árvore com $\frac{1}{4} = 1$, derivados de G^S no limiar, e um loop na abordagem HBChPT, dados na referência [FMS 98], são apresentados na tabela (3.2). Os três conjuntos de valores empíricos deve-se à dependência de hipóteses teóricas usadas nas análises dos dados experimentais. Além de princípios teóricos gerais, como causalidade, unitariedade, invariâncias de Lorentz, reflexão temporal, conjugação de carga e paridade, empregam-se também a analiticidade de Mandelstam e a invariância de isospin.

Nesta tabela, é possível constatar que as previsões para o canal positivo são ruins, mas que os resultados podem melhorar sensivelmente com um loop piônico ou, simplesmente, com a inclusão do termo sigma e das ressonâncias $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$ no nível árvore [Men 85]. O papel da simetria quiral é fundamental no espalhamento $\frac{1}{4}N$, pois a sua ausência total implicaria na inexistência do diagrama de contato do modelo PS e, consequentemente, em $A^+ = 0$, mudando o comprimento de espalhamento por um fator de 200.

A informação experimental do espalhamento $\frac{1}{4}N$ pode ser extendida para a região abaixo do limiar via relações de dispersão. Usando as propriedades de unitariedade, analiticidade e simetria de cruzamento ($s \leftrightarrow u$) da amplitude de espalhamento, as partes reais e imaginárias das amplitudes invariantes A^S e B^S podem ser relacionadas pelo teorema de Cauchy,

Tabela 3.2: Parâmetros do limiar das ondas S e P em unidades de 10^{i-2} fm^{-1} [FMS 98].

Árvore	1 Loop			Experimento	Experimento	Experimento
	ajuste 1	ajuste 2	ajuste 3	[KA 85]	[Mat 97]	[SP 98]
a_0^+	i 1:03	i 0:97	0:49	0:25	i 0:83	0:41 § 0:09
b_0^+	1:20	i 4:77	i 5:23	i 6:33	i 4:40	i 4:46
a_0^i	0:08	9:05	7:72	8:72	9:17	7:73 § 0:06
b_0^i	i 2:10	1:26	1:62	0:82	0:77	1:56
a_{1+}^+	i 10:57	i 5:52	i 5:38	i 4:90	i 5:53	i 5:46 § 0:10
a_{1+}^+	5:29	13:97	13:66	14:21	13:27	13:13 § 0:13
a_{1+}^i	i 4:65	i 1:36	i 1:25	i 0:98	i 1:13	i 1:19 § 0:08
a_{1+}^i	i 4:66	i 8:44	i 8:40	i 8:16	i 8:13	i 8:22 § 0:07

$$\begin{aligned} \text{Re } A^S(\theta; t) &= \frac{1}{\frac{1}{4}} P \int_{\theta_{th}}^{\theta} d\theta' \text{Im } A^S(\theta'; t) \frac{\mu}{\theta' - \theta} \frac{1}{\theta' + \theta} \frac{1}{\theta' + \theta} \\ \text{Re } B^S(\theta; t) &= \frac{g^2}{2m} \frac{\mu}{\theta_B - \theta} \dots \frac{1}{\theta_B + \theta} + \frac{1}{\frac{1}{4}} P \int_{\theta_{th}}^{\theta} d\theta' \text{Im } B^S(\theta'; t) \frac{\mu}{\theta' - \theta} \dots \frac{1}{\theta' + \theta} \frac{1}{\theta' + \theta} ; \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde $\theta_{th} = \theta_0 + t = (4m)$. Os integrandos podem ser calculados através dos dados experimentais disponíveis, pois o intervalo de integração está restrito ao domínio físico de θ ($\theta > \theta_{th}$). Como essas relações de dispersão são válidas para quaisquer θ e t , as amplitudes invariantes podem ser extrapoladas para o domínio não físico de θ ($0 < \theta < \theta_{th}$) [Hoh 83]. Retirando das amplitudes T^S as contribuições do pólo do nucleon T_N^S , obtemos amplitudes restantes T_R^S que variam suavemente nessa região sublimiar, isto é,

$$T^S = T_N^S + T_R^S ; \quad (3.33)$$

com

$$T_N^S = \frac{1}{2} (k^0 + k) B_N^S \quad \text{e} \quad T_R^S = \frac{1}{2} (k^0 + k) B_R^S ; \quad (3.34)$$

de modo que A_R^S e B_R^S possam ser expandidas em torno do ponto da simetria de cruzamento ($\theta = t = 0$). Devido à simetria de cruzamento, essas expansões podem ser escritas como

$$X(\theta; t) = \sum_{m, n} x_{mn} \theta^{2m} t^n ; \quad \text{para} \quad X \approx A_R^+ ; \frac{B_R^+}{\theta} ; B_R^i ; \quad (3.35)$$

Os valores empíricos dos coeficientes x_{mn} , obtidos por Höhler, Jakob e Strauss [HJS 72], são mostrados na tabela (3.3).

Tabela 3.3: Coe...cientes HJS em unidades de 10^4 , com $g = 13:4$, $1 = 139:57$ MeV e $m = 6:7227$ ¹.

$(m; n)$	$(0; 0)$	$(0; 1)$	$(0; 2)$	$(1; 0)$	$(1; 1)$	$(2; 0)$
a_{mn}^+	$i 1:46 \pm 0:10$	$1:14 \pm 0:02$	$0:036 \pm 0:003$	$4:66$	$i 0:01$	$1:20 \pm 0:02$
b_{mn}^+	$i 3:54 \pm 0:06$	$0:18 \pm 0:01$	$i 0:01$	$i 1:00 \pm 0:02$	$0:08 \pm 0:01$	$i 0:31 \pm 0:02$
a_{mn}^i	$i 8:83 \pm 0:10$	$i 0:37 \pm 0:02$	$i 0:015 \pm 0:002$	$i 1:25 \pm 0:05$	$0:013 \pm 0:006$	$i 0:33 \pm 0:02$
b_{mn}^i	$8:37 \pm 0:10$	$0:24 \pm 0:01$	$0:025 \pm 0:002$	$1:08 \pm 0:05$	$i 0:055 \pm 0:005$	$0:29 \pm 0:02$

3.3 Produção de Um Píon

A produção de um píon no espalhamento $\frac{1}{2}N$ consiste no processo $\frac{1}{2}a(k)N(p) \rightarrow \frac{1}{2}b(q) \frac{1}{2}c(q^0)N(p^0)$, onde o isospin dos píons são representados pelos índices romanos e os quadrimomentos são relacionados por

$$p + k = p^0 + q + q^0 : \quad (3.36)$$

Nesse processo, existem nove variáveis de Mandelstam,

$$\begin{aligned} s &= (p + k)^2 ; & s^0 &= (p^0 + q)^2 ; & s^{00} &= (p^0 + q^0)^2 ; \\ t &= (p^0 - p)^2 ; & t^0 &= (q - k)^2 ; & t^{00} &= (q^0 - k)^2 ; \\ u &= (p^0 - k)^2 ; & u^0 &= (p - q)^2 ; & u^{00} &= (p - q^0)^2 ; \end{aligned} \quad (3.37)$$

Partindo das conservações de paridade e energia-momento, a amplitude de transição tem a seguinte estrutura¹ :

$$T_{cba} = \pm_{bc} \zeta_a T_A + \pm_{ac} \zeta_b T_B + \pm_{ba} \zeta_c T_C + i^2 \zeta_{ba} T_D ; \quad (3.38)$$

com

$$T_k = i [\bar{u}(p^0) \circ_5 (A_k + \bar{b} B_k + \bar{b}^0 C_k + \bar{b} \bar{b}^0 D_k) u(p)] ; \quad (3.39)$$

onde os coe...cientes A_k , B_k , C_k e D_k são funções escalares das variáveis de Mandelstam. A relação das amplitudes T_k com os processos especí...cos é dada na tabela (3.4). Cinco são acessíveis experimentalmente, mas somente quatro canais de isospin são independentes.

¹Esta estrutura é idêntica às das referências [Ber 92] e [JM 97].

Tabela 3.4: Processos $\frac{1}{2}N \rightarrow \frac{1}{2}\bar{N}$ especiais com o isospin total do sistema $\frac{1}{2}N$ inicial e o isospin do sistema $\frac{1}{2}\bar{N}$ final.

Reação	$I_{\frac{1}{4}a N}$	$I_{\frac{1}{4}b \frac{1}{4}c}$	Amplitude
$\frac{1}{4}i p + \frac{1}{4}i n$	1=2	0	$T = \frac{p^2}{2}(T_A + T_B)$
$\frac{1}{4}i p + \frac{1}{4}0 \frac{1}{4}0 n$	1=2	0	$T = \frac{p^2}{2}T_A$
$\frac{1}{4}i p + \frac{1}{4}0 \frac{1}{4}i p$	1=2	1	$T = T_B + T_D$
$\frac{1}{4}+ p + \frac{1}{4}0 p$	3=2	1	$T = \frac{p^2}{2}(T_C + T_D)$
$\frac{1}{4}+ p + \frac{1}{4}+ n$	3=2	2	$T = \frac{p^2}{2}(T_B + T_C)$

Em ordem mais baixa de perturbação, a realização mínima da simetria quiral no modelo PV é representada pelos quatorze diagramas do tipo árvore indicados na figura (3.3). No modelo não-linear PS, temos os mesmos diagramas exceto o último, o de contato de três píons.

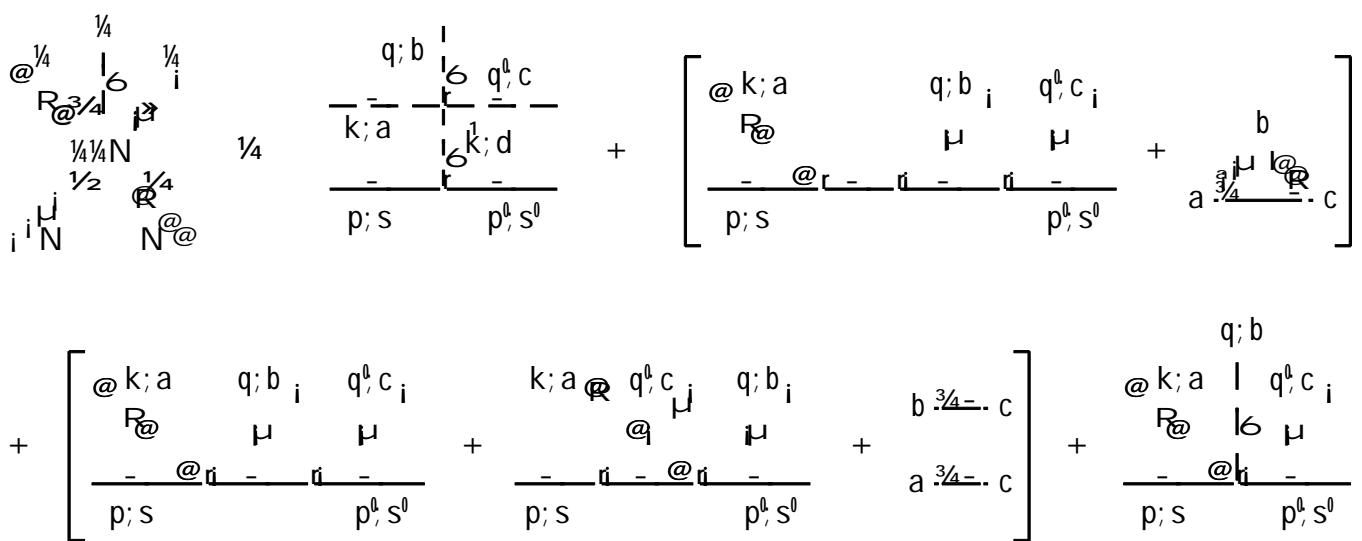


Figura 3.3: Dinâmica do processo $\frac{1}{4}N \rightarrow \frac{1}{4}N$ para o modelo não-linear PV no nível árvore.

O primeiro diagrama corresponde à contribuição do pólo do píon,

$$T_{cba}^{\frac{1}{4}} = i \frac{g_A}{2f_{\frac{1}{4}}} \frac{T_{dcba}^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}}{t_i^{12}} \mathfrak{U} \circ \underset{5}{\underset{d}{\mathfrak{f}}} \underset{6}{\underset{d}{\mathfrak{g}}} \underset{7}{\underset{u}{\mathfrak{h}}} \quad (3.40)$$

onde

$$T_{dcba}^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}} = \frac{1}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{n}{\pm ad \pm bc} \frac{h}{(q + q^0)^2} i^{-1/2} + \frac{\pm ac \pm bd}{(q^0 i - k)^2} i^{-1/2} + \frac{\pm ab \pm cd}{(q i - k)^2} i^{-1/2} \mathbf{o} : \quad (3.41)$$

Substituindo o quadrimomento \vec{k} por $(p_i - p^0)$ na amplitude $T_{cba}^{\frac{1}{4}}$ e usando a equação de Dirac, obtemos

$$T_{cba}^{\frac{1}{4}} = i \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{h}{\pm_{bc} \zeta_a} (q + q^0)^2 i^{-12} i + \pm_{ac} \zeta_b (q^0 i - k)^2 i^{-12} i + \pm_{ab} \zeta_c (q i - k)^2 i^{-12} i^{\frac{3}{4}} \frac{1}{t i^{-12}} \mathbf{u}^{\circ} \mathbf{u} : \quad (3.42)$$

Este resultado relaciona-se ao do modelo não-linear PS por

$$T_{cba}^{\frac{1}{4}} = \frac{\mu mg_A}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{\eta}{T_{cba}^{\frac{1}{4} PS}} : \quad (3.43)$$

Baseados apenas na unitariedade, Dashen e Weinstein [DW 69] mostraram que, no canal t, o resíduo do termo do pólo do píon deve fatorar no produto da amplitude do espalhamento $\frac{1}{4}\frac{1}{4}$ na camada de massa pela função do vértice $\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}NN$. Com isso, a amplitude $T_{cba}^{\frac{1}{4}}$ pode ser relacionada diretamente às defasagens do espalhamento $\frac{1}{4}\frac{1}{4}$, apesar do píon trocado no primeiro diagrama da figura (3.3) estar fora da camada de massa.

O cálculo dos demais diagramas produz

A amplitude T_{cba} pode ser simplificada através do cancelamento entre os quadrimomentos presentes nos vértices $\frac{1}{4}N$ e os propagadores nucleônicos. Usando a equação (3.36) no vértice central,

a equação de Dirac e a relação de anticomutação entre as matrizes γ^1 e γ_5 , obtemos

$$\begin{aligned}
 T_{cba} = & i \frac{\mu}{f_{1/4}} \frac{mg_A}{f_{1/4}} \gamma_3 \cdot \gamma^1 \gamma_5 \frac{\gamma^1 \gamma^1}{\gamma^1 \gamma^1} \frac{\gamma^1 \gamma^1}{\gamma^1 \gamma^1} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{\gamma^1 \gamma^1} \frac{\gamma^1 \gamma^1}{\gamma^1 \gamma^1} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(s^0 i / m^2)(s_i / m^2)} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(s^0 i / m^2)(u^0 i / m^2)} \\
 & + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(u_i / m^2)(u^0 i / m^2)} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(s^0 i / m^2)(s_i / m^2)} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(s^0 i / m^2)(u^0 i / m^2)} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(u_i / m^2)(u^0 i / m^2)} \\
 & + \frac{\mu}{\pm_{abc}} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{s^0 i / m^2} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{u^0 i / m^2} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(s^0 i / m^2)(s_i / m^2)} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(s^0 i / m^2)(u^0 i / m^2)} \\
 & + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(u_i / m^2)(u^0 i / m^2)} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(s^0 i / m^2)(s_i / m^2)} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(s^0 i / m^2)(u^0 i / m^2)} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(u_i / m^2)(u^0 i / m^2)} \\
 & + \frac{\mu}{\pm_{abc}} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{s^0 i / m^2} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{u^0 i / m^2} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(s^0 i / m^2)(s_i / m^2)} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(s^0 i / m^2)(u^0 i / m^2)} \\
 & i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(u_i / m^2)(u^0 i / m^2)} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(s^0 i / m^2)(s_i / m^2)} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(s^0 i / m^2)(u^0 i / m^2)} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(u_i / m^2)(u^0 i / m^2)} \\
 & + i^2 \frac{\mu}{\pm_{cba}} \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(s^0 i / m^2)(s_i / m^2)} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(s^0 i / m^2)(u^0 i / m^2)} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(u_i / m^2)(u^0 i / m^2)} \\
 & i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(s^0 i / m^2)(s_i / m^2)} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(s^0 i / m^2)(u^0 i / m^2)} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{(u_i / m^2)(u^0 i / m^2)} u \\
 & i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{i g_A^2 i} 1 \frac{\gamma^1 \gamma^1}{2 f_{1/4}^3} \gamma^1 \gamma_5 \frac{\gamma^1 \gamma^1}{\pm_{abc}} \frac{\gamma^1 \gamma^1}{m} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{m} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{s^0 i / m^2} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{u^0 i / m^2} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{s^0 i / m^2} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{u^0 i / m^2} \\
 & + \frac{\mu}{\pm_{abc}} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{1 i} \frac{\gamma^1 \gamma^1}{m} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{s^0 i / m^2} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{u^0 i / m^2} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{s^0 i / m^2} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{u^0 i / m^2} \\
 & + \frac{\mu}{\pm_{abc}} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{1 i} \frac{\gamma^1 \gamma^1}{m} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{s^0 i / m^2} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{u^0 i / m^2} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{s^0 i / m^2} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{u^0 i / m^2} \\
 & + i^2 \frac{\mu}{\pm_{cba}} \frac{\gamma^1 \gamma^1}{1 i} \frac{\gamma^1 \gamma^1}{s^0 i / m^2} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{u^0 i / m^2} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{s^0 i / m^2} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{u^0 i / m^2} + \frac{\gamma^1 \gamma^1}{s^0 i / m^2} i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{u^0 i / m^2} u: \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

O termo proporcional a $(mg_A = f_{1/4})^3$ corresponde à amplitude do modelo não-linear PS, com $(mg_A = f_{1/4})^3$ no lugar de g^3 . Assim, temos

$$T_{cba} = \frac{\mu}{f_{1/4}} \frac{mg_A}{f_{1/4}} \gamma_3 \frac{T_{cba}^{\text{PS}}}{g^3} + i g_A^2 i \frac{\gamma^1 \gamma^1}{1} \pm T_{cba} : \quad (3.46)$$

No modelo PS, os termos provenientes dos diagramas com o vértice $\frac{1}{4}\gamma_4 NN$, derivado da função $f = (f_{1/4}^2 i / A^2)^{1/2}$, correspondem à assinatura da simetria quiral e, como na seção anterior,

são rotulados com $\frac{\partial}{\partial t}$. Com isso, os coeficientes dinâmicos da equação (3.39) podem ser expressos na forma compacta

$$A_{A;B;C;D}^{\frac{1}{4}} = \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \left[\frac{(q + q^0)^2}{t} i^{-12} \right]_{(+1;0;0;0)} + \left[\frac{(q^0 i - k)^2}{t} i^{-12} \right]_{(0;+1;0;0)} + \left[\frac{(q i - k)^2}{t} i^{-12} \right]_{(0;0;+1;0)} ;$$

$$B_{A;B;C;D}^{\frac{1}{4}} = C_{A;B;C;D}^{\frac{1}{4}} = D_{A;B;C;D}^{\frac{1}{4}} = 0 \quad (3.47)$$

e

$$\begin{aligned}
A_{A,B,C,D} = & \frac{\mu mg_A}{f_{\gamma_4}} \cdot \frac{\eta_3 \cdot}{s_i m^2} + \frac{(2;0;0;0)}{u_i m^2} + \frac{(j_1;1;1;+1;+1)(q^2 + 2q\dot{c}p^0)}{(s_i m^2)(s^0_i m^2)} + \frac{(j_1;1;1;+1;+1)(q^2 i - 2q\dot{c}(p_i - q^0))}{(u_i m^2)(u^0_i m^2)} \\
& + \frac{(j_1;+1;1;1;1)(q^{02} + 2q^{0\dot{c}}(p^0 + q))}{(s_i m^2)(s^{00}_i m^2)} + \frac{(j_1;+1;1;1;+1)(q^{02} i - 2q^{0\dot{c}}p)}{(u_i m^2)(u^{00}_i m^2)} + \frac{(j_1;+1;+1;+1;1)(2q\dot{c}q^0)}{(s^{00}_i m^2)(u^0_i m^2)} \\
& - i \frac{i g_A^2}{2f_{\gamma_4}^3} \cdot \frac{\dot{c} mg_A}{(0;1;1;1;+1)} + \frac{(0;+1;1;1;1)(q^2 + 2q\dot{c}p^0)}{s_i m^2} + \frac{(0;1;+1;1;1)(q^{02} i - 2q^{0\dot{c}}p)}{u_i m^2} \\
& + \frac{(+1;0;1;1;+1)(2q\dot{c}q^0)}{u^0_i m^2} + \frac{(+1;1;0;+1)(2q\dot{c}q^0)}{s^{00}_i m^2} ;
\end{aligned}$$

$$B_{A;B;C;D} = \frac{\mu}{f_{\nu_4}} \frac{m g_A}{m} \frac{\Psi_3}{m} \cdot \frac{(i \ 1;0;0;0)}{s \ i \ m^2} + \frac{(i \ 1;0;0;0)}{u \ i \ m^2} + \frac{(0;+1;0;0)}{s^0 \ i \ m^2} + \frac{(0;+1;0;0)}{u^0 \ i \ m^2} \cdot i \ i g_A^2 i \ 1 \frac{\epsilon \ m g_A}{2f_{\nu_4}^3} \frac{h}{m} \ i ;$$

$$C_{A;B;C;D} = \frac{\mu}{f_{\nu}} \frac{mg_A}{m} \frac{\Pi_3}{m} \cdot \frac{(i-1;0;0;0)}{s_i m^2} + \frac{(i-1;0;0;0)}{u_i m^2} + \frac{(0;0;+1;0)}{s^{00} i m^2} + \frac{(0;0;+1;0)}{u^{00} i m^2} \cdot i \cdot i g_A^2 i \cdot 1 \frac{\epsilon}{2f_{\nu}^3} \frac{h_{(+1;0;i-1;0)}}{m} i ;$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{D}_{A;B;C;D} = & \frac{\mu mg_A}{f_{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_3 \cdot (i-1;i-1;+1;+1)}{(s^0 i \cdot m^2) (s^{00} i \cdot m^2)} + \frac{(+1;i-1;+1;+1)}{(s i \cdot m^2) (s^{00} i \cdot m^2)} + \frac{(+1;+1;i-1;+1)}{(u i \cdot m^2) (u^{00} i \cdot m^2)} \\
 & + \frac{(i-1;+1;i-1;+1)}{(u i \cdot m^2) (u^{00} i \cdot m^2)} + \frac{(+1;i-1;i-1;+1)}{(s^{00} i \cdot m^2) (u^0 i \cdot m^2)} + \frac{(i-1;+1;+1;+1)}{(s^0 i \cdot m^2) (u^{00} i \cdot m^2)} \\
 & + \frac{i g_A^2}{2f_{\frac{1}{4}}^3} \cdot \frac{(0;i-1;+1;+1)}{s i \cdot m^2} + \frac{(0;+1;i-1;+1)}{u i \cdot m^2} + \frac{(i-1;0;+1;+1)}{s^0 i \cdot m^2} + \frac{(+1;0;i-1;+1)}{u^0 i \cdot m^2} + \frac{(+1;i-1;0;+1)}{s^{00} i \cdot m^2} + \frac{(i-1;+1;0;+1)}{u^{00} i \cdot m^2} : (3.48)
 \end{aligned}$$

Como podemos ver, somente os coeficientes $B_{A;B;C;D}$ e $C_{A;B;C;D}$ estão relacionadas com a assinatura da simetria quiral.

APROXIMAÇÃO DE OLSSON E TURNER

No contexto da lagrangiana não-linear PV, Olsson e Turner [OT 68] [OT 69] [OT 77] [OMKB 95] mostraram que, próximo do limiar, a contribuição dominante de T_{cba}^1 vem do diagrama de contato de três píons, o último da figura (3.3). Este diagrama de contato gera a amplitude

$$T_{cba}^{ct} = i \bar{i} \frac{g_A}{4f_{\frac{1}{4}}^3} \bar{h} \circ_5 \pm_{cb} \zeta_a (\bar{\epsilon} + \epsilon^0) + \pm_{ac} \zeta_b (2m_i \bar{\epsilon}) + \pm_{ba} \zeta_c (2m_i \bar{\epsilon}^0) \bar{u}^i ; \quad (3.49)$$

última linha da equação (3.44), que corresponde aos coeficientes dinâmicos

$$A_{A;B;C;D}^{ct} = \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{(0;1;1;1;0)}{2} ; \quad B_{A;B;C;D}^{ct} = \frac{g_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{(1;1;+1;0;0)}{4} ; \quad C_{A;B;C;D}^{ct} = \frac{g_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{(1;0;+1;0)}{4} ; \quad D_{A;B;C;D}^{ct} = 0 \quad (3.50)$$

muito mais simples do que os coeficientes (3.48).

Usando a equação (3.39), obtemos as contribuições dominantes das amplitudes de isospin

$$T_{A;B;C;D}^{OT} = T_{A;B;C;D}^{\frac{1}{4}} + T_{A;B;C;D}^{ct} ; \quad (3.51)$$

onde

$$T_A^{\frac{1}{4}} = i \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1 + \frac{k^2 + 2k\epsilon(p_i - p^0)}{t_i^{-1/2}}}{[u \circ_5 u]} ; \quad (3.52)$$

$$T_B^{\frac{1}{4}} = i \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1 + \frac{q^2 i - 2q\epsilon(p_i - p^0)}{t_i^{-1/2}}}{[u \circ_5 u]} ; \quad (3.53)$$

$$T_C^{\frac{1}{4}} = i \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1 + \frac{q^{02} i - 2q^0\epsilon(p_i - p^0)}{t_i^{-1/2}}}{[u \circ_5 u]} ; \quad (3.54)$$

$$T_D^{\frac{1}{4}} = 0 \quad (3.55)$$

e

$$T_A^{ct} = i \bar{i} \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1}{4m} [\bar{u} \circ_5 (\bar{\epsilon} + \epsilon^0) u] ; \quad (3.56)$$

$$T_B^{ct} = i \bar{i} \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1}{2} [\bar{u} \circ_5 u] i \frac{1}{4m} [\bar{u} \circ_5 \bar{\epsilon} u]^{3/4} ; \quad (3.57)$$

$$T_C^{ct} = i \bar{i} \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1}{2} [\bar{u} \circ_5 u] i \frac{1}{4m} [\bar{u} \circ_5 \bar{\epsilon}^0 u]^{3/4} ; \quad (3.58)$$

$$T_D^{ct} = 0 ; \quad (3.59)$$

COMPORTAMENTO A BAIXAS ENERGIAS

Se considerarmos os píons na camada de massa, a produção de um píon tem um limiar de energia para ocorrer. No centro de massa (cm) do sistema, este limiar corresponde a

$$p^{\text{cm}}(E; k) ; \quad k^{\text{cm}}(1; i \cdot k) ; \quad p^0 \text{cm}(m; 0) ; \quad q^{\text{cm}}(1; 0) ; \quad q^0 \text{cm}(1; 0) \quad (3.60)$$

e

$$\begin{aligned} s &= m^2 + 4^1(1 + m) ; & s^0 &= s^{\text{cm}} = m^2 + 1(1 + 2m) ; \\ t &= 1^2 + 4^1(1 \cdot i \cdot 1) ; & t^0 &= t^{\text{cm}} = 1^2 + 1(1 \cdot i \cdot 2^1) ; \\ u &= m^2 + 4^1(1 \cdot i \cdot E) ; & u^0 &= u^{\text{cm}} = m^2 + 2(1 + m)(1 \cdot i \cdot 1) ; \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde

$$1 = 1 \frac{4m + 5^1}{2m + 4^1} \quad \text{e} \quad E = m + 2^1 \cdot i \cdot 1 : \quad (3.62)$$

Neste limite, devemos ter $T_B = T_C = 0$. Logo,

$$T_{cba} = \pm_{bc} \zeta_a T_A + (\pm_{ac} \zeta_b + \pm_{ba} \zeta_c) T_B ; \quad (3.63)$$

onde

$$T_k = i \hat{u}(0) \circ_5^{\text{nf}} A_k + 1^2 D_k \circ_5^{\text{nf}} + \circ_0^1 [B_k + C_k] \circ_0^{\text{o}} u(k) : \quad (3.64)$$

Como

$$i \hat{u}(0) \circ_5^{\text{nf}} u(k) = \hat{u}(0) \circ_5^{\text{nf}} u(k) = \frac{r}{\frac{2m}{E + m}} \hat{A}^y(3/4 \cdot k) \hat{A} \quad (3.65)$$

então,

$$T_k = i \hat{A}^y(3/4 \cdot k) \hat{A} L_k ; \quad (3.66)$$

onde

$$L_k = \frac{\text{nf}}{2m} A_k + 1^2 D_k \circ_5^{\text{nf}} i \circ_1^1 [B_k + C_k] \circ_0^{\text{o}} \frac{r}{\frac{2m}{E + m}} \quad (3.67)$$

são as amplitudes do limiar.

Essas amplitudes estão relacionadas às da referência [BKM 94] por ²

$$D_1 = \frac{L_B}{2m} \quad \text{e} \quad D_2 = \frac{L_A}{2m} \quad (3.68)$$

²O fator 2m é devido à normalização empregada.

e estas, por sua vez, às amplitudes mais usuais $A_{2I_{1/2} 1_{1/2}}$ por

$$A_{32} = \frac{p_{10}}{10} D_1 \quad \text{e} \quad A_{10} = |2D_1| - 3D_2 : \quad (3.69)$$

No limiar e no centro de massa do sistema, os coe...cientes dinâmicos são dados por

$$A_{A;B;C;D}^{\frac{1}{4}} = \frac{g}{f_{\frac{1}{4}}^2} \cdot \frac{(+3; i_1; i_1; 0)^1}{4(1; i_1!)^1} + \frac{(0; +1; +1; 0)^1}{2} ; \quad B_{A;B;C;D}^{\frac{1}{4}} = C_{A;B;C;D}^{\frac{1}{4}} = D_{A;B;C;D}^{\frac{1}{4}} = 0 \quad (3.70)$$

e

$$\begin{aligned} A_{A;B;C;D} &= \frac{\mu}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{mg_A}{2} \frac{\Pi_3}{\frac{(1; 0; 0; 0)}{2^1(1; i_1 E)} + \frac{(i_1; +1; i_1; 1)}{2(1+m)(1+2m)} + \frac{(i_1; 0; 0; 0)}{2(1+m)(1; i_1!)}} \\ &+ \frac{(0; i_1; +1; +1; i_1; 1)^1}{4(1+m)(1; i_1!)(1; i_1 E)} + \frac{(i_1; +1; +1; i_1; 1)^1}{(1+m)(1+2m)(1; i_1!)} \\ & i_1 g_A^2 i_1^1 \frac{mg_A}{2f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{\Pi_3}{(0; i_1; 1; i_1; 0)^1 + \frac{(0; i_1; +1; +1)^1}{4(1+m)} + \frac{(0; +1; i_1; +1)^1}{4(1; i_1 E)} + \frac{(+2; i_1; 2; 0; +2)^1}{(1+2m)} + \frac{(+2; 0; i_1; 2; +2)^1}{2(1+m)(1; i_1!)}} ; \\ B_{A;B;C;D} + C_{A;B;C;D} &= \frac{\mu}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{mg_A}{m} \frac{\Pi_3}{\frac{(i_1; 0; 0; 0)}{2^1(1+m)} + \frac{(i_1; 0; 0; 0)}{2^1(1; i_1 E)} + \frac{(0; +1; +1; 0)}{1(1+2m)} + \frac{(0; +1; +1; 0)}{2(1+m)(1; i_1!)}} \\ & i_1 g_A^2 i_1^1 \frac{mg_A}{2f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{h}{m} ; \\ D_{A;B;C;D} &= \frac{\mu}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{mg_A}{2^1(1+m)(1+2m)} \frac{\Pi_3}{\frac{(0; i_1; +1; +1)^1}{4^1(1+m)(1; i_1!)(1; i_1 E)} + \frac{(0; +1; i_1; +1)^1}{4^1(1+m)(1+2m)(1; i_1!)}} + \frac{(0; 0; 0; +1)^1}{1(1+m)(1+2m)(1; i_1!)} \\ & i_1 g_A^2 i_1^1 \frac{mg_A}{2f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{\Pi_3}{\frac{(0; +1; i_1; 1; i_1; 1)^1}{4^1(1+m)} + \frac{(0; i_1; +1; +1; i_1; 1)^1}{4^1(1; i_1 E)} + \frac{(0; +1; i_1; 1; i_1; 2)^1}{1(1+2m)} + \frac{(0; i_1; 1; +1; i_1; 2)^1}{2(1+m)(1; i_1!)}} ; \quad (3.71) \end{aligned}$$

Através da expressão (3.67), obtemos

$$L_{A;B;C;D}^{\frac{1}{4}} = \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{\Pi_3}{\frac{(+3; i_1; i_1; 0)^1}{4(1; i_1!)^1} + \frac{(0; +1; +1; 0)^1}{2}} \frac{r}{\frac{2m}{E+m}} \quad (3.72)$$

e

$$\begin{aligned}
 L_{A;B;C;D} &= \frac{\mu}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{\Pi_3}{2^1(1+iE)} + \frac{(i1;0;0;0)}{2(1+m)(1+2m)} + \frac{(i1;0;0;0)}{2(1+m)(1+i!)^1} + \frac{(i1;+1;+1;0)}{(1+m)(1+2m)(1+i!)^1} \\
 &+ \frac{\frac{3}{4}\mu}{m} \frac{(+1;0;0;0)}{2(1+m)} + \frac{(+1;0;0;0)}{2(1+iE)} + \frac{(0;i1;i1;0)}{(1+2m)} + \frac{(0;i1;i1;0)}{2(1+m)(1+i!)^1} \frac{\Pi_3 r}{2m} \frac{2m}{E+m} \\
 & i \frac{i}{g_A^2} \frac{1}{1} \frac{\frac{\mu}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}} (0;i1;i1;0)}{2f_{\frac{1}{4}}^3} + \frac{(i2;+1;+1;0)}{m}^1 + \frac{(+2;i1;i1;0)}{(1+2m)}^1 + \frac{(+2;i1;i1;0)}{2(1+m)(1+i!)^1}^{12} \frac{r}{2m} \frac{2m}{E+m} ;
 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Expandindo estes resultados em torno de " $= 1 = m$ ", temos

$$L_A = i \frac{mg_A}{4f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1}{3} + \frac{9}{2} " i \frac{27}{8} "^2 + \dots ; \quad (3.74)$$

$$L_B = \frac{mg_A}{4f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1}{3} + \frac{3}{2} " i \frac{15}{8} "^2 + \dots ;$$

e

$$\begin{aligned}
 L_A &= i \frac{\mu}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{\Pi_3}{4m^2} \frac{1}{4m^2} \frac{\mu}{4^{\frac{3}{4}}} " + (3i3^{\frac{3}{4}}) "^2 + \dots + i \frac{g_A^2}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{\mu}{4f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{\mu}{4^{\frac{3}{4}}} 4" + 2"^2 + \dots ;
 \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$L_B = i \frac{\mu}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{\Pi_3}{4m^2} \frac{1}{2} i \frac{2^{\frac{3}{4}}}{2} " + \frac{\mu}{3^{\frac{3}{4}}} i \frac{13}{4} \frac{\Pi}{4} "^2 + \dots + i \frac{g_A^2}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{\mu}{4f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{1}{2} i \frac{2}{4} " i \frac{7}{4} "^2 + \dots ;$$

Logo,

$$\frac{L_A}{2m} = i \frac{g_A}{8f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1}{3} + \frac{17}{2} i \frac{g_A^2}{f_{\frac{1}{4}}^3} (1i^{\frac{3}{4}}) " i \frac{11}{8} i \frac{g_A^2}{f_{\frac{1}{4}}^3} (1i^{\frac{3}{4}}) "^2 + \dots \frac{3}{4} \quad (3.76)$$

e

$$\frac{L_B}{2m} = \frac{g_A}{8f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1}{1} + \frac{7}{2} i \frac{2g_A^2}{f_{\frac{1}{4}}^3} (1i^{\frac{3}{4}}) " i \frac{1}{2} \frac{1}{4} i \frac{g_A^2}{f_{\frac{1}{4}}^3} (3i^{\frac{3}{4}}) "^2 + \dots \frac{3}{4} \quad (3.77)$$

Este resultado, com $\frac{3}{4} = 1$, coincide com as previsões no nível árvore de ChPT [Ber 92] e HBChPT [BKM 94]-[BKM 95b],

$$D_1 = \frac{g_A}{8f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1}{1} + \frac{7}{2} " + \dots \quad \text{e} \quad D_2 = i \frac{g_A}{8f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1}{3} + \frac{17}{2} " + \dots ; \quad (3.78)$$

Uma lagrangiana sem simetria quiral, contendo apenas uma interação $\frac{1}{4}N$ pseudoescalar, implicaria na ausência dos diagramas com apenas um propagador nucleônico, isto é, sobrariam o diagrama com propagador piônico e os com dois propagadores nucleônicos. Esta possibilidade, representada por $\frac{1}{4} = 0$, produziria

$$D_1 = \frac{g_A}{8f_{\frac{1}{4}}^3} \cdot \frac{\mu_7}{1 + \frac{2g_A^2}{2} i} \stackrel{\frac{1}{4}=0}{\cancel{}} \quad \text{e} \quad D_2 = i \frac{g_A}{8f_{\frac{1}{4}}^3} \cdot \frac{\mu_{17}}{3 + \frac{g_A^2}{2} i} \stackrel{\frac{1}{4}=0}{\cancel{}} \quad ; \quad (3.79)$$

indicando que os termos dominantes independem da simetria quiral. Portanto, na produção de píons, a simetria quiral não tem um papel tão relevante quanto no caso do espalhamento $\frac{1}{4}N$.

No limiar, os canais com $I_{\frac{1}{4}b\frac{1}{4}c} = 1$ da tabela (3.4) desaparecem, pois os píons produzidos estão num estado s, que resulta em $I_{\frac{1}{4}b\frac{1}{4}c}$ par. Assim, os valores empíricos de D_1 e D_2 são obtidos do primeiro e último processos dessa tabela,

$$T_{\frac{1}{4}i \ p! \ \frac{1}{4}+ \frac{1}{4}i \ n} = i \frac{p}{2} \stackrel{\frac{1}{4} \cancel{}}{k} D_1 \quad \text{e} \quad T_{\frac{1}{4}+p! \ \frac{1}{4}+ \frac{1}{4}+ n} = i \frac{p}{2} \stackrel{\frac{1}{4} \cancel{}}{k} (D_1 + D_2) : \quad (3.80)$$

Os resultados numéricos para as subamplitudes, tabela (3.5), mostram que as previsões do modelo quiral mínimo no nível árvore estão próximas dos valores empíricos [BL 91], principalmente para D_1 . A correção de um loop e a inclusão da excitação Roper³, realizada com HBChPT [BKM 95b], melhorou D_2 sem alterar D_1 .

Tabela 3.5: Amplitudes D_1 e D_2 em unidades de i^3 .

	Árvore ($\frac{1}{4} = 0$)	Árvore ($\frac{1}{4} = 1$)	1 Loop + N ^a	Experimento
$D_1^{\frac{1}{4}}$	1:81	1:81	i	i
D_1^1	i 1:22	i 0:96	i	i
D_1^0	0:59	0:85	0:94 \pm 0:08	0:80 \pm 0:04
$D_2^{\frac{1}{4}}$	i 2:06	i 2:06	i	i
D_2^1	i 0:19	i 0:33	i	i
D_2^0	i 2:25	i 2:39	i 3:21 \pm 0:37	i 3:20 \pm 0:13

É importante comparar estas previsões com as de Olsson e Turner, que são muito mais simples. Neste modelo, a contribuição dominante da expressão (3.73) é dada por

$$L_{A;B;C;D}^{ct} = \frac{mg_A}{4f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{h}{(0;i \ 2;i \ 2;0)} + \frac{(+2;i \ 1;i \ 1;0)}{m} \stackrel{1}{i} \stackrel{r}{\cancel{}} \frac{2m}{E + m} ; \quad (3.81)$$

³Outras excitações nucleônicas e as trocas mesônicas desaparecem no limiar.

cuja expansão em torno de $" = 1 = m$ produz

$$L_A^{ct} = \frac{mg_A}{4f_{1/4}^3} \frac{h}{i} 2" + 0"^2 + \dots \quad \text{e} \quad L_B^{ct} = i \frac{mg_A}{4f_{1/4}^3} \frac{h}{i} 2" + i \frac{3}{4} "^2 + \dots \quad (3.82)$$

Com a contribuição do pólo do píon, equação (3.74), obtemos

$$D_1^{OT} = \frac{L_B^{1/4} + L_B^{ct}}{2m} = \frac{g_A}{8f_{1/4}^3} \left[1 + \frac{1}{2} i \frac{9}{8} "^2 + \dots \right] \quad (3.83)$$

e

$$D_2^{OT} = \frac{L_A^{1/4} + L_A^{ct}}{2m} = i \frac{g_A}{8f_{1/4}^3} \left[3 + \frac{5}{2} " i \frac{27}{8} "^2 + \dots \right] \quad (3.84)$$

Logo, os resultados de Olsson e Turner reproduzem corretamente os termos dominantes no limiar, restando a relevância dos diagramas de troca do píon e contato de três píons. No limiar, a fatoração do diagrama de troca do píon, mostrada por Dashen e Weinstein, pode ser explicitada através das amplitudes $A_{21_{1/4}N_{1/4}}$, escrevendo-se

$$A_{32} = i^{2/4} \frac{p}{10} \frac{g_A}{f_{1/4}} \frac{\mu}{a_0^{1/2}} + d_2 \quad \text{e} \quad A_{10} = 4^{1/4} \frac{g_A}{f_{1/4}} \frac{\mu}{a_0^{1/2}} + d_0 \quad ; \quad (3.85)$$

onde a_0^0 e a_0^2 são dadas pelas equações (3.9) e as correções d_0 e d_2 , por

$$d_2 = i \frac{L}{1} \frac{7}{4} i g_A^2 (1 i^{3/4}) " + \dots \quad \text{e} \quad d_0 = \frac{L}{1} \frac{37}{8} + \frac{1}{4} g_A^2 (1 i^{3/4}) " + \dots \quad (3.86)$$

Na formulação original de Olsson e Turner, os comprimentos de espalhamento $1/4$ para a onda S (a_0^0 e a_0^2) contêm um parâmetro, α , que descreve o padrão de quebra da simetria quiral. Atualmente, sabe-se que apenas o valor $\alpha = 0$ é consistente com a QCD [OMKB 95] e condizente com a expressão (3.9). Portanto, os resultados de Olsson e Turner, com $\alpha = 0$, podem ser usado na obtenção dos termos dominantes de processos com vértices $1/4 1/4 NN$ a baixas energias.

Capítulo 4

Espalhamento NN

Atualmente, os modelos dinâmicos existentes para a interação NN incorporam vários processos mesônicos, mas a troca de três píons ainda não foi devidamente considerada. Além das componentes isoescalar e isovetorial, esta interação se decompõe numa parte pseudoescalar e noutra axial. O sistema de três píons tem uma massa ao redor de 417 MeV, sugerindo que seus efeitos na região de médio alcance do potencial podem ser comparáveis aos produzidos nos modelos com mésons vetoriais. A existência dessa lacuna decorre do fato deste processo ser bastante complexo, envolvendo grande número de diagramas, todos com dois loops.

Apresentamos aqui uma estimativa desta componente da interação e calculamos a troca de três píons não correlacionados, tomando como base os resultados de Olsson e Turner para o processo $\frac{1}{4}N + \frac{1}{4}N \rightarrow \frac{1}{4}N$. O sistema resultante não tem a componente isoescalar e, por isso, comparamos os nossos resultados com as contribuições do píon (isovetorial e pseudoescalar) e do méson a_1 (isovetorial e axial).

A interação nucleon-nucleon (NN) vem sendo estudada desde o estabelecimento da teoria mesônica de Yukawa [Yuk 35] e da subsequente deteção do píon [LOP 47]. Entretanto, muitas décadas depois, ela ainda não está completamente entendida. Segundo o programa de pesquisa, proposto por Taketani, Nakamura e Sasaki por volta de 1950 [TNS 51], a interação NN pode ser dividida em três regiões: curto ($r < 1\text{ fm}$), médio ($1\text{ fm} < r < 2\text{ fm}$) e longo ($r > 2\text{ fm}$) alcances. Atualmente sabemos que a região de curto alcance, onde ocorre a sobreposição dos dois nucleons, deve ser descrita explicitamente por quarks e glúons. As demais regiões, no entanto, podem ser descritas efetivamente por trocas mesônicas, cujo alcance é determinado pela massa trocada no canal t . Quanto menor esta massa maior o alcance ¹.

O potencial gerado pela troca de um píon, o sistema mais leve, é importante para grandes distâncias e domina as ondas com $L > 5$. Esta dominância na região de longo alcance do OPEP (one-pion exchange potential), como é conhecido este potencial, tornou-se um consenso na década de 60 [HJ 62] [LHRMB 62] [NT 65] [Rei 68].

A medida que encurtamos a distância entre os nucleons, a complexidade da interação aumenta. Na interface das regiões de médio e longo alcance, a maior contribuição do potencial é devido à troca de dois píons, o segundo sistema mais leve. Seu conteúdo dinâmico está intimamente relacionado à amplitude $\frac{1}{4}N$ intermediária [CM 63]. Este potencial, conhecido como TPEP (two-pion exchange potential), foi estudado detalhadamente, junto com trocas mais pesadas, nas décadas de 70 e 80 pelos grupos de Paris [CLLRV 73] [LLRVCPT 80] e Bonn [MHE 87]. A descrição do TPEP no potencial de Paris não é dinâmica, pois ele é calculado por meio de relações de dispersão, que extrapolam a amplitude $\frac{1}{4}N$ para píons virtuais. No potencial de Bonn, o conteúdo dinâmico do TPEP é dado pelas trocas de píons independentes ou correlacionados e pela troca de um $\frac{1}{2}$, ressonância de dois píons. Este potencial é uma generalização dos trabalhos de Partovi e Lomon [PL 70], onde o acoplamento $\frac{1}{4}N$ é pseudoescalar, e de Zuilhof e Tjon [ZT 82], com acoplamento $\frac{1}{4}N$ pseudovetorial. Nestes trabalhos, o potencial é derivado da teoria de campos e a dinâmica é descrita por apenas dois diagramas de Feynman, o box e o cruzado. A substituição do TPEP pela troca de um méson ...ctício no potencial de Bonn resulta no potencial devido às trocas de um bóson, conhecido como OBEP (one-boson exchange potential). Como seu conteúdo dinâmico é mais simples e menos trabalhoso, o uso do OBEP em cálculos de estrutura nuclear é mais conveniente.

A troca de três píons, o terceiro sistema mais leve, foi estudada explicitamente por Vinh Mau e Heitzmann [HV 79] através do acoplamento do vértice $\frac{1}{4}N$ com as relações de dispersão

¹Além da característica espacial, existe uma forte dependência da interação NN nos canais de spin e isospin.

$\frac{1}{4}N$. Nos potenciais de Paris e Bonn, ela é considerada de modo efetivo, por meio de sistemas mais pesados, como as trocas de um ! (Paris e Bonn) e da combinação de um $\frac{1}{2}$ com um $\frac{1}{4}$ (Bonn). No OBEP, esta combinação também é simulada pela troca de um méson a_1 [DSBJ 77] [DBS 84], tabela (4.1) ².

Tabela 4.1: Trocas mesônicas consideradas nos potenciais existentes.

Trocas	OBEP	Massa	g_{1NN}	$g_{1N\phi}$	I^G	J^P	Interação
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	139:08	13:4	0:49		$1^i (0^i)$	PS
$2\frac{1}{4}$	—	278:16			$[1^i (0^i)] - [1^i (0^i)]$		S-V
‘	‘	547:45	$i 4:77$	$i 5:23$		$0^+ (0^i)$	PS
—	$\frac{3}{4} (2\frac{1}{4})$	550	10:75	7:72		$0^+ (0^+)$	S
$\frac{1}{2} (2\frac{1}{4})$	$\frac{1}{2} (2\frac{1}{4})$	769:9	1:26	1:62		$1^+ (1^i)$	V
! $(3\frac{1}{4})$! $(3\frac{1}{4})$	781:94	$i 5:52$	$i 5:38$		$0^i (1^i)$	V
‘ $\frac{1}{4}$	—	685:48			$[0^+ (0^i)] - [1^i (0^i)]$		S
$\frac{1}{2}\frac{1}{4}$	—	907:93			$[1^+ (1^i)] - [1^i (0^i)]$		PV
! $\frac{1}{4}$	—	919:97			$[0^i (1^i)] - [1^i (0^i)]$		PV
—	$a_0 (‘ \frac{1}{4})$	982:4	13:97	13:66		$1^i (0^+)$	S
—	$a_1 (3\frac{1}{4})$	1230	9:6			$1^i (1^+)$	PV

Na década passada, a inclusão sistemática da simetria quiral no estudo do TPEP tornou a sua descrição mais precisa. A simetria quiral é muito importante no espalhamento NN devido à troca de dois píons [BD 71], porque ela cria vínculos na amplitude $\frac{1}{4}N$ intermediária. Em energias baixas e intermediárias, a amplitude $\frac{1}{4}N$ é determinada pelas contribuições do pólo do nucleon e de um fundo estável [Hoh 83]. Esta simetria é responsável, diretamente, por grandes cancelamentos dentro da contribuição do pólo do nucleon, ...xando a escala do problema e ampliando o papel do fundo. Este último é muito importante, uma vez que a contribuição quiral do pólo do nucleon, sozinha, não basta para explicar os dados experimentais provenientes do espalhamento $\frac{1}{4}N$.

A construção do TPEP no contexto da dinâmica quiral começou com o trabalho de Ordóñez e van Kolck [OK 92], que considera um sistema contendo apenas píons e nucleons. Vários trabalhos, que se seguiram lidaram com aspectos complementares do problema [CPS 92] [FC 94] [RR 94] [Bir 94] [KBW 97]. Os potenciais desses trabalhos não reproduzem a dominância da atração escalar-isoescalar na região intermediária, constatada nos modelos fenomenológicos. Isso acontece porque um sistema contendo apenas píons e nucleons não pode explicar os dados experimentais do espalhamento $\frac{1}{4}N$ [Hoh 83], necessitando de outros graus de liberdade, especialmente os associados

²Alguns mésons não foram levados em conta, porque suas constantes de acoplamento são muito pequenas.

às excitações delta e ao termo sigma $\frac{1}{4}N$. A inclusão dos deltas [ORK 94] [ORK 96] [KGW 98] ou de coe...cientes empíricos [Rob 95] [RR 97] [BRR 98] é su...ciente para explicar a cauda do potencial escalar-isoescalar ³. Este esforço baseado na simetria quiral levou a um re...namento importante da parte mais externa da região intermediária do potencial e trouxe vínculos teóricos para ondas com $L > 3$. Predições para os observáveis, baseadas na suposição que apenas o OPEP e o TPEP quiral representem a interação completa para distâncias maiores que 1,4 fm, estão em bom acordo com a experiência [RTFS 99].

Em 1999 publicamos um trabalho [PR 99] onde a troca de três píons entre dois nucleons era estudada por meio da simetria quiral. Este foi o primeiro trabalho a estudar esta classe de processos pois, até então, somente contribuições das trocas de um e dois píons haviam sido estudadas no contexto desta simetria. O nosso objetivo foi preencher uma lacuna na tabela (4.1) relativa à contribuição da troca de mais de dois mésons. Neste capítulo, descrevemos a componente do potencial NN devido à troca de três píons não correlacionados, usando os resultados de Olsson e Turner para o processo $\frac{1}{4}N + \frac{1}{4}N \rightarrow \frac{1}{4}N$.

4.1 Potencial

A representação da interação NN através de um potencial não-relativístico, obtido a partir de uma aproximação perturbativa da teoria de campos, é motivada por aplicações em problemas de estrutura nuclear. O uso desse potencial na equação de Schrödinger deve produzir uma amplitude de transição equivalente àquela derivada da teoria de campos na mesma ordem de aproximação. Na aproximação perturbativa da teoria de campos, a amplitude de transição relativística para um processo é dada, diretamente, pela expansão da matriz-S na constante de acoplamento. Cada ordem nesta expansão está associada a um conjunto de diagramas de Feynman irreduzíveis, que representa a dinâmica do processo na respectiva ordem.

Em espalhamentos elásticos, é conveniente partir da equação de Bethe-Salpeter [BS 51], que representa a amplitude de transição da teoria de campos numa forma covariante. Em termos de

³Nas referências [RR 94] [Rob 95] [RR 97] [BRR 98], o TPEP é tratado relativisticamente e dado ênfase à parte mais externa da região intermediária, que é determinada pela amplitude $\frac{1}{4}N$. Nas demais referências, o TPEP é baseado no HBChPT.

operadores, ela é dada por

$$\hat{T}(p^0; pjW) = \hat{K}(p^0; pjW) + \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \hat{K}(p^0; qjW) G(qjW) \hat{T}(q; pjW); \quad (4.1)$$

onde

$$W = p_1 + p_2 = p_1^0 + p_2^0; \quad p = (p_1 \ i \ p_2) = 2; \quad p^0 = (p_1^0 \ i \ p_2^0) = 2; \quad (4.2)$$

q é o quadrimomento relativo intermediário, \hat{K} é o kernel (núcleo) da interação e G , o propagador relativístico de duas partículas.

Devido à sua origem perturbativa, o kernel não é uma expressão fechada, o que torna a resolução dessa equação relativística muito difícil [FT 75]. Esta dificuldade aumenta ainda mais se as duas partículas forem fermions, mesmo considerando os diagramas irreduzíveis mais simples como as trocas de apenas um bóson [FT 80] [ZT 81]. Em energias baixas, é possível contornar esse problema através de reduções tridimensionais que satisfazem a condição relativística de unitariedade elástica e ...xam a componente temporal numa forma covariante, de modo que ela não apareça como uma variável separada no propagador. Geralmente, essas reduções são obtidas a partir da quebra da equação de Bethe-Salpeter nas duas equações

$$\hat{T} = \hat{K} + \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \hat{K} g \hat{T} \quad \text{e} \quad \hat{K} = \hat{K} + \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \hat{K} (G \ i \ g) \hat{K}; \quad (4.3)$$

onde \hat{K} é um kernel efetivo e g , um propagador não-relativístico que deve ter a mesma estrutura analítica de G na região física.

O kernel corresponde à soma de todos os diagramas conexos irreduzíveis. O kernel efetivo é dado pela série

$$\hat{K} = \frac{h \ i}{|\{z\}|} + \frac{\hat{K}_2}{|\{z\}|} + \frac{\hat{K}_4}{|\{z\}|} + \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \hat{K}_2 (G \ i \ g) \hat{K}_2 + \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \hat{K}_6 + \frac{d^4q^0}{(2\pi)^4} \hat{K}_2 (G \ i \ g) \hat{K}_2 (G \ i \ g) \hat{K}_2 + \dots$$

$$\hat{K}_2 \quad \hat{K}_4 \quad \hat{K}_6 \quad (4.4)$$

com os índices referindo-se à ordem da constante de acoplamento.

Identificando, nesta série, os termos da expansão perturbativa dos operadores de transição da teoria de campos, podemos reescrever o kernel efetivo como

$$\hat{K} = \frac{h \ i}{|\{z\}|} + \frac{\hat{T}_2 \ i}{|\{z\}|} + \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \hat{K}_2 g \hat{K}_2 + \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4q^0}{(2\pi)^4} \hat{K}_2 g \hat{K}_2 g \hat{K}_2 + \dots$$

$$\hat{K}_2 \quad \hat{K}_4 \quad \hat{K}_6 \quad (4.5)$$

com

$$\hat{T}_2 = \hat{K}_2; \quad \hat{T}_4 = \hat{K}_4 + \frac{Z}{(2\hbar)^4} \hat{K}_2 G \hat{K}_2; \quad \hat{T}_6 = \hat{K}_6 + \frac{Z}{(2\hbar)^4} \frac{d^4 q}{(2\hbar)^4} \hat{K}_2 G \hat{K}_2 G \hat{K}_2 \dots \quad (4.6)$$

Dentre as diversas escolhas possíveis para g , a mais utilizada é a de Blankenbecler e Sugars. Desenvolvida originalmente para partículas sem spin [BbS 66], ela associa g à propagação de partículas com energia positiva, de modo que “ $G \downarrow g$ ” propague partículas com energia negativa.

No caso do espalhamento NN, a escolha de Blankenbecler e Sugar [PL 70] produz

$$g(qjP) = \pm(q_0) \frac{1}{(2\hbar)^3} \frac{1}{4E_q} \frac{\alpha_+^{(1)}(q) \alpha_+^{(2)}(i-q)}{\frac{1}{4}P^2 i E_q^2 + i''}; \quad (4.7)$$

onde

$$\alpha_+^{(i)}(q) = \sum_{s_i} u_{s_i}(q) \bar{u}_{s_i}(q) = [\not{p} + m]^{(i)} \quad (4.8)$$

são os operadores de projeção de energia positiva para o núcleon i com momento q . Com isso, a amplitude de transição é obtida tomando-se o operador de transição entre spinores de energia positiva,

$$T(p^0; p) = \bar{u}^{(1)}(p^0) \bar{u}^{(2)}(i-p^0) \hat{T}(p^0; p) u^{(1)}(p) u^{(2)}(i-p); \quad (4.9)$$

Como o propagador relativístico de dois nucleons é dado por

$$G(qjP) = \frac{i^{\frac{1}{2}} \not{p} + \not{q} + m}{i^{\frac{1}{2}} P + q i m + i''} \frac{i^{\frac{1}{2}} \not{p} i \not{q} + m}{i^{\frac{1}{2}} P i q i m + i''}; \quad (4.10)$$

a equação integral para o espalhamento NN assume a forma

$$T(p^0; p) = K(p^0; p) + \frac{d^3 q}{(2\hbar)^3} K(p^0; q) \frac{1}{4E_q} \frac{1}{i^2 q^2 + i''} T(q; p) \quad (4.11)$$

com o kernel efetivo dado por

$$K(p^0; p) = \bar{u}^{(1)}(p^0) \bar{u}^{(2)}(i-p^0) \hat{K}(p^0; p) u^{(1)}(p) u^{(2)}(i-p); \quad (4.12)$$

Com isso, K é dado pela expansão da amplitude de transição da teoria de campos, sendo K_2 associado ao diagrama com troca de um píon, K_4 associado ao conjunto de diagramas com troca de dois píons, K_6 associado ao conjunto de diagramas com troca de três píons, ... É importante notar

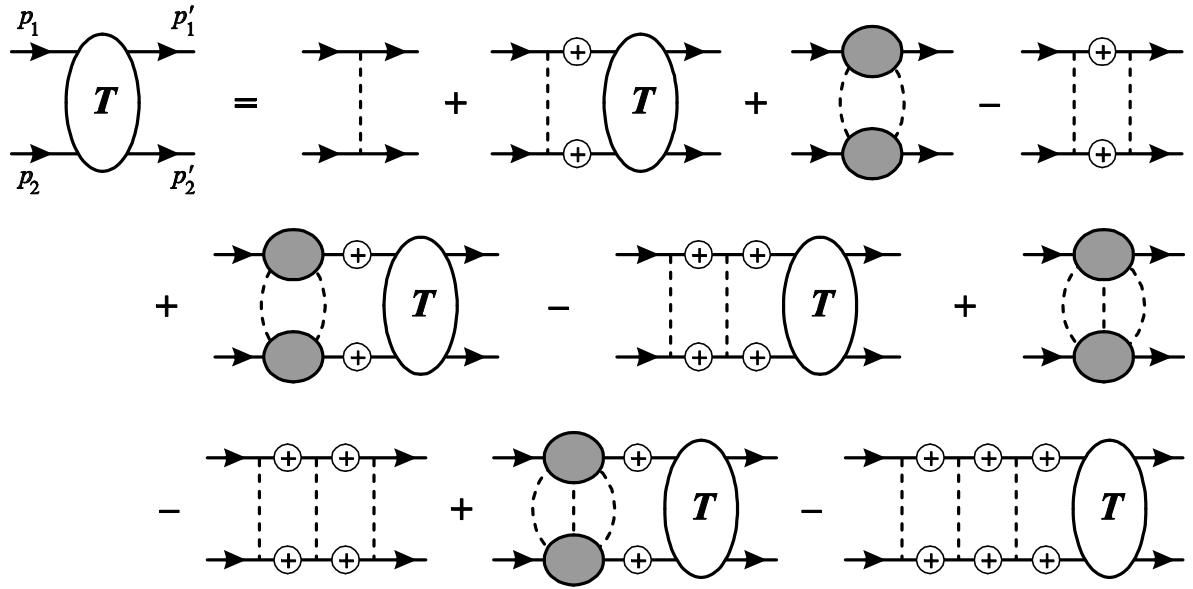


Figura 4.1: Representação diagramática da amplitude de transição segundo a equação de Bethe-Salpeter.

que nos kernels efetivos $K_{4,6,8,\dots}$ os propagadores nucleônicos de energia positiva contabilizados na iteração do OPEP são subtraídos para evitar dupla contagem, figura (4.1).

A amplitude de transição relativística é definida pela relação

$$S_{-^{\circ}} = \pm_{-^{\circ}} + i(2\hbar)^4 \pm^4 (p_1^0 + p_2^0) T_{-^{\circ}} \quad (4.13)$$

e a não-relativística (nr), por

$$S_{-^{\circ}} = \pm_{-^{\circ}} + i2\hbar \pm (E_1^0 + E_2^0) T_{-^{\circ}}^{\text{nr}} ; \quad (4.14)$$

onde

$$S_{-^{\circ}} = \frac{D}{-^{\circ}; t!} + 1 \frac{-^{\circ} -^{\circ}}{\$ -^{\circ}; t!} + 1 \frac{E}{= h^{\circ}; t!} + 1 j^{\circ}; t! + 1 i = \text{out} h^{\circ} j^{\circ} i_{\text{in}} : \quad (4.15)$$

As normalizações adotadas para os estados no espaço dos momentos são

$$\text{out} h p^0; -^{\circ} j p; ^{\circ} i_{\text{out}} = 2E (2\hbar)^3 \pm^3 (p^0 i \cdot p) \pm_{-^{\circ}} \quad \text{e} \quad \text{out} h p^0; -^{\circ} j p; ^{\circ} i_{\text{out}}^{\text{nr}} = (2\hbar)^3 \pm^3 (p^0 i \cdot p) \pm_{-^{\circ}} \quad (4.16)$$

e, consequentemente, os fatores de normalização das funções de onda são

$$N = \frac{1}{(2\hbar)^{3=2}} \frac{1}{p \frac{1}{2E_p}} \quad \text{e} \quad N_{\text{nr}} = \frac{1}{(2\hbar)^{3=2}} : \quad (4.17)$$

Assim, a relação entre as amplitudes é dada por

$$T_{nr} = i (2\pi)^3 \pm^3 (p_1^0 + p_2^0 i \cdot p_1 i \cdot p_2) t ; \quad (4.18)$$

com

$$t = \frac{1}{4 \pi^2 E_{p_1} E_{p_2} E_{p_1^0} E_{p_2^0}} T ; \quad (4.19)$$

Aplicando esta relação na equação (4.11), obtém-se uma equação integral,

$$T_{nr}(p^0; p) = K_{nr}(p^0; p) + \frac{Z}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} K_{nr}(p^0; q) \frac{m}{p^2 + q^2 + i\epsilon} T_{nr}(q; p) ; \quad (4.20)$$

equivalente à equação não-relativística de Lippmann-Schwinger para o espalhamento NN.

Em espalhamentos elásticos, podemos relacionar o operador de transição não-relativístico ao potencial, de modo que

$$\hat{V} j \bar{A} i = \hat{T}_{nr} j \bar{A} i ; \quad (4.21)$$

sendo os estados $j \bar{A} i$ e $j \bar{A} i$ determinados pelas equações

$$H_0 j \bar{A} i = E j \bar{A} i \quad \text{e} \quad (H_0 + V) j \bar{A} i = E j \bar{A} i ; \quad (4.22)$$

onde H_0 é a hamiltoniana livre. Portanto, no espaço de coordenadas, o potencial NN corresponde à transformada de Fourier da amplitude de transição não-relativística,

$$h r_1^0; r_2^0 j \hat{V} j r_1; r_2 i = \frac{Z}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_1^0}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2^0}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} e^{i(p_1^0 r_1^0 + p_2^0 r_2^0 - p_1 \cdot r_1 - p_2 \cdot r_2)} h p_1^0; p_2^0 j \hat{V} j p_1; p_2 i ; \quad (4.23)$$

onde

$$h p_1^0; p_2^0 j \hat{V} j p_1; p_2 i = i (2\pi)^3 \pm^3 (p_1^0 + p_2^0 i \cdot p_1 i \cdot p_2) t(p_1^0; p_2^0; p_1; p_2) ; \quad (4.24)$$

Usando as combinações

$$P = p^0 + p \quad \text{e} \quad \mathbb{C} = p_1^0 i \cdot p_1 = p_2 i \cdot p_2^0 = p^0 i \cdot p ; \quad (4.25)$$

sus relações inversas

$$p^0 = (P + \mathbb{C})/2 \quad \text{e} \quad p = (P - \mathbb{C})/2 ; \quad (4.26)$$

e a definição da variável W em (4.2), obtemos

$$p_1 = \frac{1}{2}(W + P_i + \Phi); \quad p_1^0 = \frac{1}{2}(W + P + \Phi); \quad p_2 = \frac{1}{2}(W_i + P + \Phi); \quad p_2^0 = \frac{1}{2}(W_i + P_i + \Phi); \quad (4.27)$$

Para os nucleons na camada de massa, temos os vínculos

$$W \cdot p^0 = W \cdot p = W \cdot P = W \cdot \Phi = P \cdot \Phi = 0; \quad (4.28)$$

Com isso,

$$V(r_1^0; r_2^0; r_1; r_2) = i \frac{Z}{(2\pi)^3} \frac{d^3W}{(2\pi)^3} \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \frac{d^3\Phi}{(2\pi)^3} e^{i \frac{1}{2} [W(r_1^0 + r_2^0) - r_1 \cdot r_2] - P(r_1^0 + r_2^0) - \Phi(r_1^0 + r_2^0)} t(P; \Phi; W); \quad (4.29)$$

onde $r \doteq r_2 - r_1$ e $r^0 \doteq r_2^0 - r_1^0$:

Tomando o referencial no centro de massa (cm) do sistema, temos

$$p_1 \stackrel{cm}{=} (E; p); \quad p_2 \stackrel{cm}{=} (E; i \cdot p); \quad p_1^0 \stackrel{cm}{=} (E; p^0); \quad p_2^0 \stackrel{cm}{=} (E; i \cdot p^0) \quad (4.30)$$

e, consequentemente,

$$W \stackrel{cm}{=} (2E; 0); \quad p \stackrel{cm}{=} (0; p); \quad p^0 \stackrel{cm}{=} (0; p^0); \quad P \stackrel{cm}{=} (0; p^0 + p); \quad \Phi \stackrel{cm}{=} (0; p^0 \cdot i \cdot p); \quad (4.31)$$

Com isso,

$$V(r^0; r) = i \frac{Z}{(2\pi)^3} \frac{d^3\Phi}{(2\pi)^3} \frac{d^3P}{(2\pi)^3} e^{i \frac{1}{2} [P(r^0 + r) + \Phi(r^0 + r)]} t(P; \Phi); \quad (4.32)$$

onde

$$t(P; \Phi) = \frac{1}{(2E)^2} [T(P; \Phi)]_{cm}; \quad (4.33)$$

Decompondo na estrutura de spin usual [PL 70], obtemos

$$t(P; \Phi) = t_C(\Phi) + \hat{\tau}_{ss} t_{ss}(\Phi) + \hat{\tau}_T t_T(\Phi) + \hat{\tau}_{so} t_{so}(\Phi) + \dots; \quad (4.34)$$

onde

$$\hat{\tau}_{ss} = \Phi^2 \frac{3}{4}^{(1)} \cdot \frac{3}{4}^{(2)}; \quad \hat{\tau}_T = \Phi^2 \frac{3}{4}^{(1)} \cdot \frac{3}{4}^{(2)} i \cdot 3 \frac{3}{4}^{(1)} \cdot \Phi \frac{3}{4}^{(2)} \cdot \Phi; \quad \hat{\tau}_{so} = \frac{i}{4} \cdot i \frac{3}{4}^{(1)} + \frac{3}{4}^{(2)} \cdot \Phi (\Phi \cdot P) \quad (4.35)$$

correspondem aos operadores central (C), spin-spin (SS), tensor (T) e spin-órbita (SO) no espaço de coordenadas.

Desprezando termos não-locais proporcionais a $P^2=m^2$ e usando a igualdade

$$\oint e^{i \cdot \Phi \cdot r} = i \cdot r \cdot e^{i \cdot \Phi \cdot r}; \quad (4.36)$$

obtemos

$$V(r) = V_C(r) + -_{SS} V_{SS}(r) + -_T V_T(r) + -_{SO} V_{SO}(r) + \dots; \quad (4.37)$$

onde

$$V_C(r) = i \cdot \frac{Z}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \Phi}{(2\pi)^3} e^{i \cdot \Phi \cdot r} t_C(\Phi); \quad (4.38)$$

$$V_{SS}(r) = \frac{\mu}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\pi Z}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \Phi}{(2\pi)^3} e^{i \cdot \Phi \cdot r} t_{SS}(\Phi); \quad (4.39)$$

$$V_T(r) = i \cdot \frac{\mu}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\pi Z}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \Phi}{(2\pi)^3} e^{i \cdot \Phi \cdot r} t_T(\Phi); \quad (4.40)$$

$$V_{SO}(r) = i \cdot \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\pi Z}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \Phi}{(2\pi)^3} e^{i \cdot \Phi \cdot r} t_{SO}(\Phi) \quad (4.41)$$

e

$$-_{SS} = \frac{3}{4}(1) \cdot \frac{3}{4}(2); \quad -_T = 3 \cdot \frac{3}{4}(1) \cdot \frac{3}{4}(2) + i \cdot \frac{3}{4}(1) \cdot \frac{3}{4}(2); \quad -_{SO} = \frac{1}{2} i \cdot \frac{3}{4}(1) + \frac{3}{4}(2) \cdot L; \quad (4.42)$$

com $L = r \wedge P$:

No espaço de isospin, a estrutura da amplitude é dada por uma componente isoescalar (+) e uma isovetorial (i),

$$T = T^+ + i^{(1)} \cdot i^{(2)} T^i; \quad (4.43)$$

Em termos de potencial, essa estrutura permanece a mesma,

$$V = V^+ + i^{(1)} \cdot i^{(2)} V^i; \quad (4.44)$$

4.2 Trocas de Um Píon e Um Méson a_1

As figuras (4.2.a) e (4.2.b) mostram, respectivamente, as trocas dos mésons pseudoescalar, o píon, e pseudovetorial, o $a_1(1260)$, no espalhamento NN. A cinemática dessas trocas obedece à conservação de energia-momento, equações (4.2) e (4.25), com os vínculos da equação (4.28) para nucleons na camada de massa.

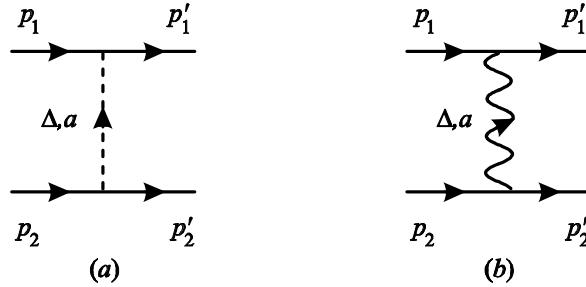


Figura 4.2: Espalhamento NN devido às trocas de: (a) um píon e (b) um méson a_1 .

A amplitude da troca de um píon é dada por ⁴

$$T_{\pi} = i \frac{1}{\Phi^2 i^{-12}} \not{u} \frac{g_A}{2f_\pi} \not{\epsilon}_a \not{\epsilon}^* \not{u}^{(1)} \not{u} \frac{g_A}{2f_\pi} \not{\epsilon}_a \not{\epsilon}^* \not{u}^{(2)} \quad (4.45)$$

e a do méson a_1 , por

$$T_{a_1} = i \frac{g^{(1)} \not{\epsilon} \not{\epsilon}^* m_{a_1}^2 \not{f}}{\Phi^2 i^{-12} m_{a_1}^2} \not{u} i g_{a_1} \not{\epsilon}_a \not{\epsilon}^* \not{u}^{(1)} [\not{u} i g_{a_1} \not{\epsilon}_a \not{\epsilon}^* \not{u}^{(2)}] ; \quad (4.46)$$

onde $g^{(1)} = 139:57$ MeV, $f_\pi = 93$ MeV, $g_A = 1:26$ [Hoh 83], $m_{a_1} = 1230$ MeV e $g_{a_1} = 9:6$ [GK 80].

A equação de Dirac implica na identidade

$$\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}^* [\not{u} \not{u}^{(1)}] [\not{u} \not{u}^{(2)}] = [\not{u} \not{u}^{(1)} (i - 2m) \not{u}] [\not{u} \not{u}^{(2)}] ; \quad (4.47)$$

que aplicada nas amplitudes acima resulta em

$$T_\pi = \not{\epsilon}^{(1)} \not{\epsilon}^{(2)} \frac{m^2 g_A^2}{\Phi^2 i^{-12}} [\not{u} \not{u}^{(1)}] [\not{u} \not{u}^{(2)}] \quad (4.48)$$

e

$$T_{a_1} = \not{\epsilon}^{(1)} \not{\epsilon}^{(2)} g_{a_1}^2 \frac{1}{\Phi^2 i^{-12} m_{a_1}^2} \frac{1}{m_{a_1}^2} [\not{u} \not{u}^{(1)}] [\not{u} \not{u}^{(2)}] + \frac{\not{f}}{\not{\epsilon} \not{\epsilon}^*} [\not{u} \not{u}^{(1)}] [\not{u} \not{u}^{(2)}] ; \quad (4.49)$$

⁴Estamos usando a notação $\not{\epsilon}_a = \not{\epsilon} \not{\epsilon}_a$.

O caráter isovetorial destas amplitudes resulta, em cada caso, da troca de um único méson isovetorial.

No centro de massa do sistema (cm), as amplitudes são dadas por

$$T_{\frac{1}{4}} \stackrel{\text{cm}}{=} i \not{\epsilon}^{(1)} \not{\epsilon}^{(2)} \frac{m^2 g_A^2}{f_{\frac{1}{4}}^2} \frac{1}{\not{\Phi}^2 + m^2} [\not{u}^{\circ}_5 u]^{(1)} [\not{u}^{\circ}_5 u]^{(2)} \quad (4.50)$$

e

$$T_{a_1} \stackrel{\text{cm}}{=} i \not{\epsilon}^{(1)} \not{\epsilon}^{(2)} g_{a_1}^2 \frac{1}{\not{\Phi}^2 + m_{a_1}^2} \frac{1}{m_{a_1}^2} \frac{4m^2}{[\not{u}^{\circ}_5 u]^{(1)} [\not{u}^{\circ}_5 u]^{(2)} + \frac{f}{\not{u}^{\circ}_1 \not{u}^{\circ}_5} u^{\frac{3}{4}(1)} [\not{u}^{\circ}_1 \not{u}^{\circ}_5 u]^{(2)}} ; \quad (4.51)$$

onde os sanduíches spinoriais, apresentados no apêndice A, assumem a forma

$$[\not{u}^{\circ}_5 u]^{(1)} [\not{u}^{\circ}_5 u]^{(2)} \stackrel{\text{cm}}{=} i^{\frac{3}{4}(1)} \not{\Phi}^{\frac{3}{4}(2)} \not{\Phi} \quad (4.52)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{f}{\not{u}^{\circ}_1 \not{u}^{\circ}_5} u^{\frac{3}{4}(1)} \frac{f}{\not{u}^{\circ}_1 \not{u}^{\circ}_5} u^{\frac{3}{4}(2)} &\stackrel{\text{cm}}{=} i^{\frac{3}{4}(1)} (p^0 + p) \frac{3}{4}(2) (p^0 + p) + (E + m)^{\frac{1}{2}} I^{(1)} I^{(2)} (p \wedge p)^2 \\ i^{\frac{3}{4}(1)} \not{\Phi}^{\frac{3}{4}(2)} \frac{f}{(E + m)^2} i^{\frac{1}{2}} p \not{p}^{\frac{3}{4}(2)} i^{\frac{1}{2}} &\not{p}^{\frac{3}{4}(1)} (p \wedge p)^2 + I^{(2)} \frac{3}{4}(1) (p \wedge p)^{\frac{3}{4}(2)} \\ \frac{f}{(E + m)^2} i^{\frac{1}{2}} p \not{p}^{\frac{3}{4}(1)} &\not{p}^{\frac{3}{4}(2)} i^{\frac{1}{2}} \not{p}^{\frac{3}{4}(2)} \not{p}^{\frac{3}{4}(1)} p^2 \\ i^{\frac{3}{4}(1)} \not{p}^{\frac{3}{4}(2)} \not{p}^{\frac{3}{4}(1)} p^0 + \frac{3}{4}(1) \not{p}^{\frac{3}{4}(2)} \not{p}^{\frac{3}{4}(1)} p^0 &\not{p}^{\frac{3}{4}(2)} \not{p}^{\frac{3}{4}(1)} p^2 ; \quad (4.53) \end{aligned}$$

com a notação

$$\frac{3}{4}^{(i)} = \frac{f}{\hat{A}^y} \frac{3}{4} \hat{A}^{\frac{3}{4}(i)} : \quad (4.54)$$

No limite estático, obtemos

$$[\not{u}^{\circ}_5 u]^{(1)} [\not{u}^{\circ}_5 u]^{(2)} \stackrel{\text{cm}}{=} \frac{E!}{m} i^{\frac{3}{4}(1)} \not{\Phi}^{\frac{3}{4}(2)} \not{\Phi} \quad (4.55)$$

e

$$\frac{f}{\not{u}^{\circ}_1 \not{u}^{\circ}_5} u^{\frac{3}{4}(1)} \frac{f}{\not{u}^{\circ}_1 \not{u}^{\circ}_5} u^{\frac{3}{4}(2)} \stackrel{\text{cm}}{=} \frac{E!}{m} i^{\frac{1}{2}} 4m^2 \frac{f}{\frac{3}{4}(1) \frac{3}{4}(2)} + O(p^2=m^2) + O(p^4=m^4) : \quad (4.56)$$

Logo, pela relação (4.33), temos

$$t_{\frac{1}{4}} = \frac{[T_{\frac{1}{4}}]_{\text{cm}}}{4m^2} = \not{\epsilon}^{(1)} \not{\epsilon}^{(2)} \frac{g_A^2}{4f_{\frac{1}{4}}^2} \frac{1}{\not{\Phi}^2 + m^2} \frac{3}{4}(1) \not{\Phi}^{\frac{3}{4}(2)} \not{\Phi} \quad (4.57)$$

e

$$t_{a_1} = \frac{[T_{a_1}]_{cm}}{4m^2} \cong \dot{\epsilon}^{(1)} \dot{\epsilon}^{(2)} g_{a_1}^2 \frac{1}{\Phi^2 + m_{a_1}^2} \overset{\mu}{=} \frac{1}{m_{a_1}^2} \frac{3}{4} \overset{(1)}{\epsilon} \overset{(2)}{\epsilon} + \frac{3}{4} \overset{(1)}{\epsilon} \overset{(2)}{\epsilon} : \quad (4.58)$$

Com a igualdade

$$\frac{3}{4} \overset{(1)}{\epsilon} \overset{(2)}{\epsilon} = \frac{1}{3} \overset{\mu}{=} \overset{ss}{\epsilon} + \frac{1}{3} \overset{\mu}{=} \overset{T}{\epsilon} ; \quad (4.59)$$

essas amplitudes podem ser decompostas em

$$t_{\frac{1}{4}} = \dot{\epsilon}^{(1)} \dot{\epsilon}^{(2)} \frac{g_A^2}{12f_{\frac{1}{4}}^2} \frac{1}{\Phi^2 + \frac{1}{12}} \overset{\mu}{=} \overset{ss}{\epsilon} + \overset{T}{\epsilon} : \quad (4.60)$$

e

$$t_{a_1} \cong \dot{\epsilon}^{(1)} \dot{\epsilon}^{(2)} \frac{g_{a_1}^2}{3m_{a_1}^2} \frac{1}{\Phi^2 + m_{a_1}^2} \overset{\mu}{=} \overset{ss}{\epsilon} + \overset{T}{\epsilon} + 3m_{a_1}^2 \frac{3}{4} \overset{(1)}{\epsilon} \overset{(2)}{\epsilon} : \quad (4.61)$$

No apêndice C, temos que

$$\int \frac{d^3\Phi}{(2\pi)^3} e^{i\Phi \cdot r} \frac{1}{\Phi^2 + \frac{1}{12}} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\frac{1}{12}r}}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\frac{1}{12}x}}{x} ; \quad (4.62)$$

onde $x = \frac{1}{12}r$ é adimensional, $\frac{1}{12} = 1$ para o píon e $\frac{1}{12} = m_{a_1}^{-1}$ para o méson a_1 :

Usando as equações (4.39) e (4.40), obtemos

$$U_{ss}(x) = \frac{\mu}{x^2} + \frac{2}{x} \frac{\mu}{x} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\frac{1}{12}x}}{x} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\frac{1}{12}x}}{x} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\frac{1}{12}x}}{x} ; \quad (4.63)$$

e

$$U_T(x) = i \frac{\mu}{x^2} i \frac{1}{x} \frac{\mu}{x} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\frac{1}{12}x}}{x} = i \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\frac{1}{12}x}}{x} = i \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\frac{1}{12}x}}{x} ; \quad (4.64)$$

Logo,

$$[V_{\frac{1}{4}}]_{ss} = \dot{\epsilon}^{(1)} \dot{\epsilon}^{(2)} \frac{g_A^2}{12f_{\frac{1}{4}}^2} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\frac{1}{12}x}}{x} ; \quad (4.65)$$

$$[V_{\frac{1}{4}}]_T = \dot{\epsilon}^{(1)} \dot{\epsilon}^{(2)} \frac{g_A^2}{12f_{\frac{1}{4}}^2} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\frac{1}{12}x}}{x} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} \right) \frac{e^{i\frac{1}{12}x}}{x} ; \quad (4.66)$$

$$[V_{a_1}]_{ss} = \dot{\epsilon}^{(1)} \dot{\epsilon}^{(2)} \frac{g_{a_1}^2}{3} \frac{1}{4\pi} (1 + 3) \frac{e^{i\frac{1}{12}x}}{x} ; \quad (4.67)$$

$$[V_{a_1}]_T = \dot{\epsilon}^{(1)} \dot{\epsilon}^{(2)} \frac{g_{a_1}^2}{3} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\frac{1}{12}x}}{x} \left(1 + \frac{1}{m_{a_1}} \frac{3}{x} + \frac{1}{m_{a_1}^2} \frac{3}{x^2} \right) \frac{e^{i\frac{1}{12}x}}{x} ; \quad (4.68)$$

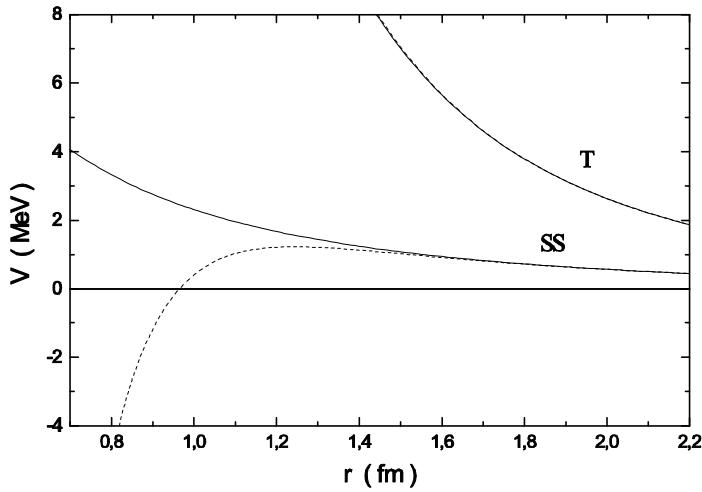


Figura 4.3: Componentes spin-spin (SS) e tensor (T) de $V_{1/2}$ (linha contínua) e $V_{1/2} + V_{a_1}$ (linha tracejada).

Na figura (4.3), podemos ver que a adição da troca do $a_1(1260)$ ao canal spin-spin do OPEP é relevante para distâncias inferiores a 1.5 fm. No canal tensor, não é possível distinguir esta soma porque a contribuição do méson a_1 é desprezível, quando comparado com o OPEP.

4.3 Troca de Três Píons Não Correlacionados

A forma geral da amplitude do espalhamento NN devido à troca de três píons não correlacionados é

$$T = \frac{1}{3!} \frac{Z}{(2^{1/4})^4} \frac{Z}{(2^{1/4})^4} \frac{d^4 Q}{(k^2 i^{-1/2})} \frac{d^4 Q^0}{(q^0 i^{-1/2})} \frac{T_{abc}^{(1)} T_{cba}^{(2)}}{(q^0 i^{-1/2})} ; \quad (4.69)$$

onde k , q e q^0 são os momentos dos píons intermediários, $Q = (q^0 + q + k) = 2$ e $Q^0 = (q^0 i - q) = 2$ são as variáveis de integração e

$$T_{cba}^{(2)} = \pm_{bc} \zeta_a T_A^{(2)} + \pm_{ac} \zeta_b T_B^{(2)} + \pm_{ba} \zeta_c T_C^{(2)} i \cdot i^2_{cba} T_D^{(2)} ; \quad (4.70)$$

a amplitude do processo $\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N \rightarrow \frac{1}{2}N$ no nucleon 2. O fator $\frac{1}{3!}$ corresponde à simetria de troca dos píons intermediários.

Neste processo, o momento externo transferido, equação (4.25), pode ser escrito como $\mathbb{C} = (q^0 + q) \downarrow k$: Com isso, as relações inversas são dadas por $q^0 = (Q + \mathbb{C}=2) = 2 \downarrow Q^0$; $q = (Q + \mathbb{C}=2) = 2 + Q^0$ e $k = Q \downarrow \mathbb{C}=2$:

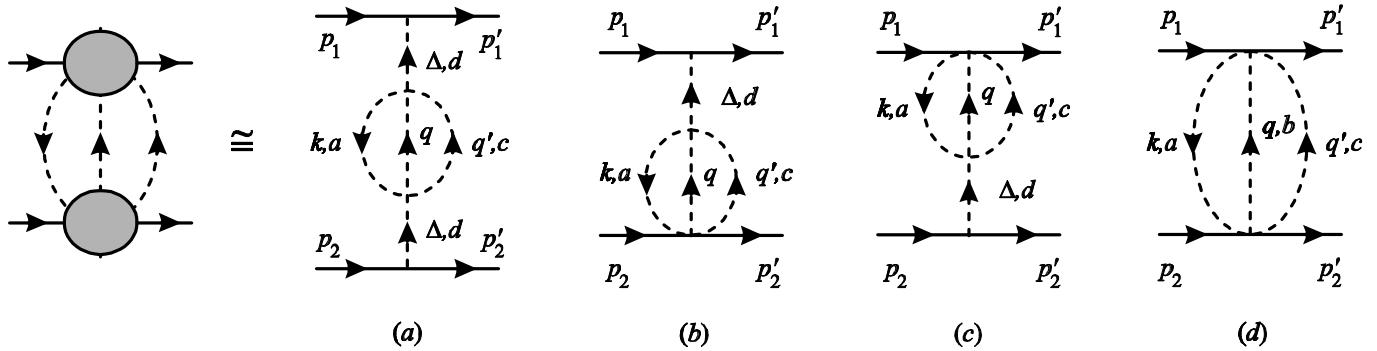


Figura 4.4: Espalhamento NN devido à troca de três píons não correlacionados.

A dinâmica quiral mínima do espalhamento NN devido à troca de três píons não correlacionados é representada, no modelo PV, por 45 diagramas com dois loops, envolvendo píons e nucleons. O cálculo exato deste processo é, portanto, bastante extenso. Para obtermos uma estimativa acerca desta interação, tomamos como base as contribuições dominantes do processo $\frac{1}{4}N \rightarrow \frac{1}{4}N$ perto do limiar, para cada nucleon do espalhamento, como mostra a figura (4.4). Usando a equação (3.51), temos para o nucleon 2

$$[T_{A;B;C;D}]^{(2)} = \frac{\mathbb{f}}{T_{A;B;C;D}^{(2)}} + \frac{\mathbb{f}}{T_{A;B;C;D}^{ct}} ; \quad (4.71)$$

com

$$T_A^{(2)} = i \frac{g_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{\mu}{m} \frac{1}{1 + \frac{k^2 + 2\mathbb{C} \downarrow k}{\mathbb{C}^2 \downarrow^{12}}} \frac{\mathbb{P}}{[\mathbb{U}^0 \downarrow^5 u]^{(2)}} \downarrow \frac{1}{4} \mathbb{q}_1 + q_1^0 \frac{\mathbb{C}}{[\mathbb{U}^0 \downarrow^5 u]^{(2)}}^{\frac{3}{4}} ; \quad (4.72)$$

$$T_B^{(2)} = i \frac{g_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{\mu}{m} \frac{1}{2} + \frac{q^2 \downarrow 2\mathbb{C} \downarrow q}{\mathbb{C}^2 \downarrow^{12}} \frac{\mathbb{P}}{[\mathbb{U}^0 \downarrow^5 u]^{(2)}} + \frac{1}{4} q_1 \frac{\mathbb{C}}{[\mathbb{U}^0 \downarrow^5 u]^{(2)}}^{\frac{3}{4}} ; \quad (4.73)$$

$$T_C^{(2)} = i \frac{g_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{\mu}{m} \frac{1}{2} + \frac{q^0 \downarrow 2\mathbb{C} \downarrow q^0}{\mathbb{C}^2 \downarrow^{12}} \frac{\mathbb{P}}{[\mathbb{U}^0 \downarrow^5 u]^{(2)}} + \frac{1}{4} q_1^0 \frac{\mathbb{C}}{[\mathbb{U}^0 \downarrow^5 u]^{(2)}}^{\frac{3}{4}} ; \quad (4.74)$$

$$T_D^{(2)} = 0 ; \quad (4.75)$$

As expressões para o nucleon 1 são obtidas com as trocas $k \downarrow \downarrow k$; $q \downarrow \downarrow q$; $q^0 \downarrow \downarrow q^0$ e $\mathbb{C} \downarrow \downarrow \mathbb{C}$:

Assim, a estrutura de isospin provém de

$$\begin{aligned}
 T_{cba}^{(1)} T_{cba}^{(2)} &= i 2 T_D^{(1)} T_D^{(2)} + \not{\epsilon}^{(1)} \not{\epsilon}^{(2)} 2 \not{T}_A^{(1)} \not{T}_A^{(2)} + \not{T}_B^{(1)} \not{T}_B^{(2)} + \not{T}_C^{(1)} \not{T}_C^{(2)} \\
 &+ \not{T}_A^{(1)} + \not{T}_B^{(1)} + \not{T}_C^{(1)} \not{T}_A^{(2)} + \not{T}_B^{(2)} + \not{T}_C^{(2)} : \quad (4.76)
 \end{aligned}$$

Os diagramas (a), (b) e (c) da figura (4.4), associados ao pólo do píon, também contribuem para a troca de um píon, renormalizando a massa do píon e a constante de acoplamento $\frac{1}{4}N$. Como estamos trabalhando com a massa do píon física m e a constante de acoplamento física $g_{\frac{1}{4}N}$, estes efeitos já foram levados em conta na troca de um píon, calculada na seção anterior. Com isso, subtraindo a contribuição dada em (4.48), as contribuições da expressão (4.76) se resumem a

$$\begin{aligned}
 2 \not{T}_A^{(1)} \not{T}_A^{(2)} + \not{T}_B^{(1)} \not{T}_B^{(2)} + \not{T}_C^{(1)} \not{T}_C^{(2)} &= \frac{g_A^2}{f_{\frac{1}{4}}^6} \frac{1}{m^2} \not{1}_i \frac{4 \not{\epsilon} \not{k} \not{i} 4^{12}}{(\not{c}^2 \not{i}^{12})^2} \not{i} \frac{8(\not{\epsilon} \not{k})^2 + 8(\not{\epsilon} \not{q})^2 + 8(\not{\epsilon} \not{q}^0)^2}{(\not{c}^2 \not{i}^{12})^2} \not{2}^{14} \\
 \not{\epsilon} [\not{u}^{\circ 5} u]^{(1)} [\not{u}^{\circ 5} u]^{(2)} + \frac{m}{4} \not{1} \not{\mu} &1 + \frac{4 \not{\epsilon} \not{k} + 4 \not{\epsilon} \not{q}}{\not{c}^2 \not{i}^{12}} \not{q}_1 + \not{1} + \frac{4 \not{\epsilon} \not{k} + 4 \not{\epsilon} \not{q}^0}{\not{c}^2 \not{i}^{12}} \not{q}_1^0 \not{3} [\not{u}^{\circ 5} u]^{(1)} [\not{u}^{\circ 5} \circ^1 u]^{(2)} \\
 &+ \not{i} [\not{u}^{\circ 5} \circ^1 u]^{(1)} [\not{u}^{\circ 5} u]^{(2)} + \frac{1}{8} \not{\epsilon} \not{i} \not{q}_1 + \not{q}_1^0 \not{c} (\not{q}^{\circ} + \not{q}^0) + \not{q}_1 \not{q}^{\circ} + \not{q}_1^0 \not{q}^0 \not{u}^{\circ 5} \circ^1 u]^{(1)} [\not{u}^{\circ 5} \circ^0 u]^{(2)} \quad (4.77)
 \end{aligned}$$

e

$$\not{T}_A^{(1)} + \not{T}_B^{(1)} + \not{T}_C^{(1)} \not{T}_A^{(2)} + \not{T}_B^{(2)} + \not{T}_C^{(2)} = i \frac{g_A^2}{f_{\frac{1}{4}}^6} \frac{m^2 \not{1}^4}{(\not{c}^2 \not{i}^{12})^2} [\not{u}^{\circ 5} u]^{(1)} [\not{u}^{\circ 5} u]^{(2)} : \quad (4.78)$$

A amplitude é, então, dada apenas por sua parte isovetorial

$$\begin{aligned}
 T &= \not{\epsilon}^{(1)} \not{\epsilon}^{(2)} \frac{g_A^2}{8 f_{\frac{1}{4}}^6} \frac{1}{3!} \not{Z} \frac{d^4 Q}{(2 \not{c})^4} \not{Z} \frac{d^4 Q^0}{(2 \not{c})^4} \not{\epsilon}(\not{k}) \not{\epsilon}(\not{q}) \not{\epsilon}(\not{q}^0) \not{4m^2} \not{2} \not{i} \frac{8 \not{\epsilon} \not{k} \not{i} 8^{12}}{(\not{c}^2 \not{i}^{12})^2} \\
 &i \frac{16(\not{\epsilon} \not{k})^2 + 16(\not{\epsilon} \not{q})^2 + 16(\not{\epsilon} \not{q}^0)^2}{(\not{c}^2 \not{i}^{12})^2} \not{2}^{14} \not{u}^{\circ 5} u]^{(1)} [\not{u}^{\circ 5} u]^{(2)} \\
 &+ 2m \not{1} \not{\mu} \not{1} + \frac{4 \not{\epsilon} \not{k} + 4 \not{\epsilon} \not{q}}{\not{c}^2 \not{i}^{12}} \not{q}_1 + \not{1} + \frac{4 \not{\epsilon} \not{k} + 4 \not{\epsilon} \not{q}^0}{\not{c}^2 \not{i}^{12}} \not{q}_1^0 \not{3} \\
 \not{\epsilon} [\not{u}^{\circ 5} u]^{(1)} [\not{u}^{\circ 5} \circ^1 u]^{(2)} &\not{i} [\not{u}^{\circ 5} \circ^1 u]^{(1)} [\not{u}^{\circ 5} u]^{(2)} \\
 &+ \not{\epsilon} \not{i} \not{q}_1 + \not{q}_1^0 \not{c} (\not{q}^{\circ} + \not{q}^0) + \not{q}_1 \not{q}^{\circ} + \not{q}_1^0 \not{q}^0 \not{u}^{\circ 5} \circ^1 u]^{(1)} [\not{u}^{\circ 5} \circ^0 u]^{(2)} \not{3/4} : \quad (4.79)
 \end{aligned}$$

Usando a equação (4.47), podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned}
 T &= \zeta^{(1)} \zeta^{(2)} \frac{g_A^2}{8f_{1/4}^6} [\bar{u}^{\circ 5 \circ 1} u]^{(1)} [\bar{u}^{\circ 5 \circ 0} u]^{(2)} \frac{1}{3!} \frac{Z}{(2^{1/4})^4} \frac{d^4 Q}{(2^{1/4})^4} \Phi(k) \Phi(q) \Phi(q^0) \\
 &\in \frac{1}{2} \frac{8\Phi \Phi k i^{1/2}}{\Phi^2 i^{-1/2}} i^{-2} + \frac{16(\Phi \Phi k)^2 + 16(\Phi \Phi q)^2 + 16(\Phi \Phi q^0)^2}{(\Phi^2 i^{-1/2})^2} \Phi_1 \Phi_0 \\
 &\cdot \frac{\mu}{1 + \frac{4\Phi \Phi k + 4\Phi \Phi q}{\Phi^2 i^{-1/2}}} \frac{1}{q^{1/2}} + \frac{\mu}{1 + \frac{4\Phi \Phi k + 4\Phi \Phi q^0}{\Phi^2 i^{-1/2}}} \frac{1}{q^{0/2}} (\Phi_1 g_{0/2} + \Phi_0 g_{1/2}) \\
 &+ \frac{i}{q_1 + q_1^0} \frac{\Phi}{(q_1 + q_1^0)} + q_1 q_0 + q_1^0 q_0^0
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

Eliminando as variáveis k , q e q^0 em termos de Φ , Q e Q^0 , obtemos a expressão geral

$$T = \frac{\mu}{8f_{1/4}^3} \zeta^{(1)} \zeta^{(2)} [\bar{u}^{\circ 5 \circ 1} u]^{(1)} [\bar{u}^{\circ 5 \circ 0} u]^{(2)} I_{10}; \tag{4.81}$$

onde

$$I_{10} = \frac{1}{3!} \frac{Z}{(2^{1/4})^4} \frac{d^4 Q}{(Q i^{-1/2})^2} \frac{I_{10}^0}{i^{-1/2}} \tag{4.82}$$

com

$$\begin{aligned}
 I_{10}^0 &= \frac{Z}{(2^{1/4})^4} \frac{d^4 Q^0}{(Q=2 + \Phi=4 + Q^0)^2} \frac{1}{i^{-1/2}} \frac{1}{(Q=2 + \Phi=4 + Q^0)^2} \frac{1}{i^{-1/2}} \\
 &\in \frac{1}{32\Phi_1 \Phi_0} \frac{6\Phi \Phi Q \Phi \Phi Q i^{-2/2} \Phi \Phi Q + i^{-4} + 8\Phi_1 \Phi_0 Q^{1/2} Q^{0/2}}{(\Phi^2 i^{-1/2})^2} \\
 &\cdot \frac{6\Phi \Phi Q Q^{1/2} + 3\Phi \Phi Q \Phi^{1/2} i^{-1/2} Q^{1/2} i^{-1/2} \Phi^{1/2}}{\Phi^2 i^{-1/2}} = 2 + 8\Phi_0 Q^{1/2} Q^{0/2} \\
 &+ 12Q_1 Q_0 + 6\Phi_0 Q_1 + 6\Phi_1 Q_0 + 3\Phi_1 \Phi_0 + 16g_{1/2} g_{0/2} Q^{1/2} Q^{0/2} \quad :
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

Para resolvemos essas integrais, usamos as funções X deduzidas no apêndice C,

$$\begin{aligned}
 X(K; 1; \gg) &= \frac{d^4 Q}{(2^{1/4})^4} \frac{1}{(Q i^{-1/2})^2} \frac{1}{i^{-1/2}} \frac{1}{(Q + K=2)^2} \frac{1}{i^{-1/2} \gg^2} \\
 &= i \frac{i}{(4^{1/4})^2} \int_0^1 \frac{d^{\otimes}}{d K^2} \int_0^1 \frac{d^-}{d K^2} \frac{1}{i^{-1/2} \gg^2} ;
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

$$\begin{aligned}
 X_1(K; 1; \gg) &= \frac{d^4 Q}{(2^{1/4})^4} \frac{1}{(Q i^{-1/2})^2} \frac{Q_1=1}{i^{-1/2}} \frac{1}{(Q + K=2)^2} \frac{1}{i^{-1/2} \gg^2} \\
 &= + \frac{i}{(4^{1/4})^2} \int_0^1 \frac{d^{\otimes}}{d K^2} \int_0^1 \frac{d^-}{d K^2} \frac{1}{i^{-1/2} \gg^2} (1 i^- 2^{\otimes}) \frac{K_1}{2^1} ;
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

$$X_{10}(K; 1; \gg) = \frac{Z}{(2\%)^4} \frac{d^4 Q}{(Q + K=2)^2} \frac{Q_1 Q_0 = 1^2}{i^{-12}} \frac{F}{(Q + K=2)^2} \frac{1}{i^{-12}} \frac{\gg^2}{(1 + K=2)^2} \frac{1}{i^{-12}} \quad (4.86)$$

$$= i \frac{i}{(4\%)^2} \frac{Z_1}{0} \frac{Z_1}{0} d^{\otimes} \frac{1^2 - 2 = -2}{K^2 i^{-12 - 2 = -}} \frac{\frac{1}{2}}{(1 + 2^{\otimes})^2} \frac{K_1 K_0}{4^{12}} \frac{F}{i^{-12}} \frac{1}{1} \frac{(1 + 2^{\otimes})^2}{(1 + 2^{\otimes})^2} \frac{1}{(1 + 2^{\otimes})^2} \frac{1}{8} g_{10}^{3/4};$$

com

$$\frac{1}{i^{-2}} = \frac{4 \frac{F}{(1 + 2^{\otimes})^2} + (1 + 2^{\otimes})^2}{1} \quad (4.87)$$

Escrevendo a integral I_{10}^0 através dessas funções, obtemos

$$I_{10}^0 = X(Q + \Phi=2; 1; 1) \frac{6 \Phi \otimes Q \Phi \otimes Q i^{-2} 1^2 \Phi \otimes Q + 1^4}{(\Phi^2 i^{-12})^2} + 12 Q_1 Q_0 + 6 \Phi_0 Q_1$$

$$+ 6 \Phi_1 Q_0 + 3 \Phi_1 \Phi_0 i^{-1} 8 (\Phi_1 g_{01/2} + \Phi_0 g_{11/2}) \frac{6 \Phi \otimes Q Q^{1/2} + 3 \Phi \otimes Q \Phi^{1/2} i^{-12} Q^{1/2} i^{-12} \Phi^{1/2} = 2}{\Phi^2 i^{-12}}^{3/4}$$

$$+ 16 1^2 X^{1/2/4} (Q + \Phi=2; 1; 1) \frac{16 \Phi_1 \Phi_0 \Phi_{1/2} \Phi_{3/4}}{(\Phi^2 i^{-12})^2} i^{-1} \frac{4 (\Phi_1 g_{01/2} + \Phi_0 g_{11/2}) \Phi_{3/4}}{\Phi^2 i^{-12}} + g_{11/2} g_{03/4} \quad (4.88)$$

Logo,

$$I_{10}^0 = i \frac{i}{(4\%)^2} \frac{Z_1}{0} \frac{Z_1}{0} d^{\otimes} \frac{1^2 - 2 = -2}{(Q + \Phi=2)^2} \frac{\frac{1}{2}}{i^{-12}} \frac{32 \Phi_1 \Phi_0}{\frac{6 \Phi \otimes Q \Phi \otimes Q i^{-2} 1^2 \Phi \otimes Q + 1^4}{(\Phi^2 i^{-12})^2}}$$

$$i^{-1} 8 (\Phi_1 g_{01/2} + \Phi_0 g_{11/2}) \frac{6 \Phi \otimes Q Q^{1/2} + 3 \Phi \otimes Q \Phi^{1/2} i^{-12} Q^{1/2} i^{-12} \Phi^{1/2} = 2}{\Phi^2 i^{-12}} + 12 Q_1 Q_0 + 6 \Phi_0 Q_1 + 6 \Phi_1 Q_0$$

$$+ 3 \Phi_1 \Phi_0 + 4 (1 + 2^{\otimes})^2 (Q^{1/2} + \Phi^{1/2} = 2) (Q^{3/4} + \Phi^{3/4} = 2) i^{-2} \frac{F}{1} \frac{1}{1} \frac{(1 + 2^{\otimes})^2}{(1 + 2^{\otimes})^2} \frac{1}{1} \frac{1^2}{2} g_{10}^{3/4} \quad (4.89)$$

onde

$$\frac{1}{i^{-2}} = \frac{1}{(1 + 2^{\otimes})^{-1}} \quad (4.90)$$

Com isso, a integral I_{10} assume a seguinte forma:

$$I_{10} = i \frac{i}{(4\%)^2} \frac{1^2}{3!} \frac{Z_1}{0} \frac{Z_1}{0} d^{\otimes} \frac{1^2}{-} \frac{Z}{(2\%)^4} \frac{d^4 Q}{(Q + \Phi=2)^2} \frac{1}{i^{-12}} \frac{F}{(Q + \Phi=2)^2} \frac{1}{i^{-12}} \frac{\gg^2}{(1 + \Phi=2)^2}$$

$$F \frac{32 1^4 \Phi_1 \Phi_0}{(\Phi^2 i^{-12})^2} + \frac{8 1^2 \Phi_1 \Phi_0}{\Phi^2 i^{-12}} + 3 \Phi_1 \Phi_0 + (1 + 2^{\otimes})^2 \Phi^{1/2} \Phi^{3/4} i^{-2} \frac{F}{1} \frac{1}{1} \frac{(1 + 2^{\otimes})^2}{(1 + 2^{\otimes})^2} \frac{1}{1} \frac{1^2}{2} g_{10}^{3/4}$$

$$F \frac{16 \Phi_1 \Phi_0 \Phi_{1/2} \Phi_{3/4}}{(\Phi^2 i^{-12})^2} i^{-1} \frac{4 (\Phi_1 g_{01/2} + \Phi_0 g_{11/2}) \Phi_{3/4}}{\Phi^2 i^{-12}} + g_{11/2} g_{03/4}$$

$$\begin{aligned}
& + Q^\mu \cdot i \frac{64^{1/2} \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0 \mathbb{C}_\mu}{(\mathbb{C}^2 i^{-1/2})^2} i \cdot 8 (\mathbb{C}_1 g_{0\mu} + \mathbb{C}_0 g_{1\mu}) \frac{3 \mathbb{C}^{\frac{1}{2}} \mathbb{C}_\mu i^{-1/2} g^{\frac{1}{2}\pm} g_{\pm\mu}}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2}} + 6 \mathbb{C}_0 g_{1\mu} + 6 \mathbb{C}_1 g_{0\mu} \\
& + 2 (1 i^{-2/2})^2 i g^{\frac{1}{2}\pm} \mathbb{C}^{\frac{1}{4}} + g^{\frac{1}{2}\pm} \mathbb{C}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathbb{C}}{g_{\pm\mu}} \frac{16 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0 \mathbb{C}_\mu \mathbb{C}_{\frac{1}{4}}}{(\mathbb{C}^2 i^{-1/2})^2} i \cdot \frac{4 (\mathbb{C}_1 g_{0\mu} + \mathbb{C}_0 g_{1\mu}) \mathbb{C}_{\frac{1}{4}}}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2}} + g_{1\mu} g_{0\frac{1}{4}} \\
& + Q^\mu Q^{\mu} \frac{192 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0 \mathbb{C}_\mu \mathbb{C}_{\frac{1}{4}}}{(\mathbb{C}^2 i^{-1/2})^2} i \cdot 48 (\mathbb{C}_1 g_{0\mu} + \mathbb{C}_0 g_{1\mu}) \frac{\mathbb{C}^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}\pm} g_{\pm\mu}}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2}} + 12 g_{1\mu} g_{0\mu} \\
& + 4 (1 i^{-2/2})^2 g^{\frac{1}{2}\pm} g_{\pm\mu} g^{\frac{1}{2}\pm} g_{\pm\mu} \frac{16 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0 \mathbb{C}_\mu \mathbb{C}_{\frac{1}{4}}}{(\mathbb{C}^2 i^{-1/2})^2} i \cdot \frac{4 (\mathbb{C}_1 g_{0\mu} + \mathbb{C}_0 g_{1\mu}) \mathbb{C}_{\frac{1}{4}}}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2}} + g_{1\mu} g_{0\frac{1}{4}} \quad : \quad (4.91)
\end{aligned}$$

Usando novamente as funções X , temos

$$\begin{aligned}
I_{10} = & i \frac{i^{-1/2} \mathbb{Z}_1 \mathbb{Z}_1}{(4/4)^2 3!} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{0} \frac{d^{-\frac{1}{2}}}{0} X(\mathbb{C}; 1; \frac{1}{2}) \frac{32^{1/4} \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0}{(\mathbb{C}^2 i^{-1/2})^2} + \frac{8^{1/2} \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2}} + 3 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0 + (1 i^{-2/2})^2 \mathbb{C}^{\frac{1}{2}} \mathbb{C}^{\frac{1}{4}} \\
& i^{-2} \frac{\mathbb{C}}{1 i^{-1/2}} (1 i^{-2/2})^2 (1 i^{-1})^{-1/2} \frac{2 g^{\frac{1}{2}\pm}}{g_{\pm\mu}} \frac{16 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0 \mathbb{C}_\mu \mathbb{C}_{\frac{1}{4}}}{(\mathbb{C}^2 i^{-1/2})^2} i \cdot \frac{4 (\mathbb{C}_1 g_{0\mu} + \mathbb{C}_0 g_{1\mu}) \mathbb{C}_{\frac{1}{4}}}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2}} + g_{1\mu} g_{0\frac{1}{4}} \\
& + X^\mu(\mathbb{C}; 1; \frac{1}{2}) i \frac{64^{1/2} \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0 \mathbb{C}_\mu}{(\mathbb{C}^2 i^{-1/2})^2} i \cdot 8 (\mathbb{C}_1 g_{0\mu} + \mathbb{C}_0 g_{1\mu}) \frac{3 \mathbb{C}^{\frac{1}{2}} \mathbb{C}_\mu i^{-1/2} g^{\frac{1}{2}\pm} g_{\pm\mu}}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2}} + 6 \mathbb{C}_0 g_{1\mu} + 6 \mathbb{C}_1 g_{0\mu} \\
& + 2 (1 i^{-2/2})^2 i \mathbb{C}^{\frac{1}{4}} g^{\frac{1}{2}\pm} + \mathbb{C}^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}\pm} \frac{\mathbb{C}}{g_{\pm\mu}} \frac{16 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0 \mathbb{C}_\mu \mathbb{C}_{\frac{1}{4}}}{(\mathbb{C}^2 i^{-1/2})^2} i \cdot \frac{4 (\mathbb{C}_1 g_{0\mu} + \mathbb{C}_0 g_{1\mu}) \mathbb{C}_{\frac{1}{4}}}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2}} + g_{1\mu} g_{0\frac{1}{4}} \\
& + X^\mu(\mathbb{C}; 1; \frac{1}{2}) \frac{192 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0 \mathbb{C}_\mu \mathbb{C}_{\frac{1}{4}}}{(\mathbb{C}^2 i^{-1/2})^2} i \cdot 48 (\mathbb{C}_1 g_{0\mu} + \mathbb{C}_0 g_{1\mu}) \frac{\mathbb{C}^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}\pm} g_{\pm\mu}}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2}} + 12 g_{1\mu} g_{0\mu} \\
& + 4 (1 i^{-2/2})^2 g^{\frac{1}{2}\pm} g_{\pm\mu} g^{\frac{1}{2}\pm} g_{\pm\mu} \frac{16 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0 \mathbb{C}_\mu \mathbb{C}_{\frac{1}{4}}}{(\mathbb{C}^2 i^{-1/2})^2} i \cdot \frac{4 (\mathbb{C}_1 g_{0\mu} + \mathbb{C}_0 g_{1\mu}) \mathbb{C}_{\frac{1}{4}}}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2}} + g_{1\mu} g_{0\frac{1}{4}} \quad : \quad (4.92)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I_{10} = & \frac{i^2 i^{-1/2} \mathbb{Z}_1 \mathbb{Z}_1 \mathbb{Z}_1 \mathbb{Z}_1}{(4/4)^4 3!} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{0} \frac{d^{-\frac{1}{2}}}{0} \frac{d^0}{0} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{0} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{0} \frac{\mu^2 = 0}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2} \mu^2} \frac{32^{1/4} \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0}{(\mathbb{C}^2 i^{-1/2})^2} + \frac{8^{1/2} \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2}} + 3 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0 \\
& + (1 i^{-2/2})^2 \frac{\mathbb{C}}{(4/4)^2} \frac{16 \mathbb{C}^4 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0}{(\mathbb{C}^2 i^{-1/2})^2} i \cdot \frac{8 \mathbb{C}^2 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2}} + \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0 \frac{\mathbb{C}}{i^{-2}} (1 i^{-2/2})^2 (1 i^{-1})^{-1/2} \\
& \frac{\mathbb{C}}{(4/4)^2} \frac{16 \mathbb{C}^2 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0}{(\mathbb{C}^2 i^{-1/2})^2} i \cdot \frac{8 \mathbb{C}^2 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2}} + g_{10} \frac{\mathbb{C}}{(4/4)^2} + (1 i^{-2/2})^2 \frac{32^{1/2} \mathbb{C}^2 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0}{(\mathbb{C}^2 i^{-1/2})^2} + 8 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0 \frac{3 \mathbb{C}^2 i^{-1/2}}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2}} i \cdot 6 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0 \\
& i^{-2} (1 i^{-2/2})^2 \frac{\mathbb{C}}{(4/4)^2} \frac{16 \mathbb{C}^4 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0}{(\mathbb{C}^2 i^{-1/2})^2} i \cdot \frac{8 \mathbb{C}^2 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2}} + \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0 \frac{\mathbb{C}}{(4/4)^2} + (1 i^{-2/2})^2 \frac{48 \mathbb{C}^4 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0}{(\mathbb{C}^2 i^{-1/2})^2} i \cdot \frac{24 \mathbb{C}^2 \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_0}{\mathbb{C}^2 i^{-1/2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3\Phi_1\Phi_0 + (1_i 2^\otimes)^2 \frac{\mu}{(\Phi^2 i^{-12})^2} i \frac{8\Phi^2\Phi_1\Phi_0}{\Phi^2 i^{-12}} + \Phi_1\Phi_0 i \frac{\mathbb{E}}{1_i (1_i 2^\otimes)^2} (1_i^-) \frac{i^2 \mu^2}{2} \\
& \in \frac{48\Phi^2\Phi_1\Phi_0}{(\Phi^2 i^{-12})^2} i \frac{24\Phi_1\Phi_0}{\Phi^2 i^{-12}} + 3g_{1^\circ} + (1_i 2^\otimes)^2 \frac{\mu}{(\Phi^2 i^{-12})^2} i \frac{8\Phi_1\Phi_0}{\Phi^2 i^{-12}} + g_{1^\circ} \quad (4.93)
\end{aligned}$$

onde

$$\mu^2 = \frac{\circ + (1_i^\circ)^2}{\circ (1_i^\circ)^2} \quad (4.94)$$

Este resultado permite decompor a integral I_{1° numa parte pseudoescalar (P) e noutra axial (A):

$$I_{1^\circ} = \Phi_1\Phi_0^{-1} I^P(\Phi) + g_{1^\circ}^{-1} I^A(\Phi) \quad (4.95)$$

com

$$\begin{aligned}
I^P(\Phi) &= i \frac{1}{6} \frac{1}{(4\%)^4} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mu^2}{d'' \frac{2\mu^2}{d''}} \frac{1}{\Phi^2 i^{-12} \mu^2} \frac{\mathbb{E}_2}{(\Phi^2 i^{-12})^2} \frac{32 i^4}{(\Phi^2 i^{-12})^2} + \frac{8 i^2}{\Phi^2 i^{-12}} + 3 \\
& + (1_i 2^\otimes)^2 \frac{\mu}{(\Phi^2 i^{-12})^2} i \frac{8\Phi^2}{\Phi^2 i^{-12}} + 1 \frac{\mathbb{E}}{1_i 2^\otimes} (1_i 2^\otimes)^2 (1_i^-) \frac{\mu}{(\Phi^2 i^{-12})^2} i \frac{8\Phi^2}{\Phi^2 i^{-12}} \mathbb{E} \\
& + (1_i 2^\otimes) \frac{32 i^2 \Phi^2}{(\Phi^2 i^{-12})^2} + \frac{16 i^2}{\Phi^2 i^{-12}} + 18 i \frac{2(1_i 2^\otimes)^2}{(\Phi^2 i^{-12})^2} \frac{\mu}{(\Phi^2 i^{-12})^2} i \frac{8\Phi^2}{\Phi^2 i^{-12}} + 1 \\
& + (1_i 2^\otimes)^2 \frac{48\Phi^4}{(\Phi^2 i^{-12})^2} i \frac{24\Phi^2}{\Phi^2 i^{-12}} + 3 + (1_i 2^\otimes)^2 \frac{\mu}{(\Phi^2 i^{-12})^2} i \frac{8\Phi^2}{\Phi^2 i^{-12}} + 1 \quad (4.96) \\
& i \frac{\mathbb{E}}{1_i (1_i 2^\otimes)^2} (1_i^-) \mu^2 \frac{24 i^2 \Phi^2}{(\Phi^2 i^{-12})^2} i \frac{12 i^2}{\Phi^2 i^{-12}} + (1_i 2^\otimes)^2 \frac{\mu}{(\Phi^2 i^{-12})^2} i \frac{8 i^2 \Phi^2}{\Phi^2 i^{-12}} + 4 i^2 \mathbb{E}^{3/4}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I^A(\Phi) &= \frac{1}{12} \frac{1}{(4\%)^4} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mu^2}{d'' \frac{2\mu^2}{d''}} \frac{1}{\Phi^2 i^{-12} \mu^2} \\
& \in \frac{\mathbb{E}}{4} \frac{\mathbb{E}}{1_i (1_i 2^\otimes)^2} (1_i^-) \frac{\mu^2}{(\Phi^2 i^{-12})^2} + \frac{\mathbb{E}}{3} + (1_i 2^\otimes)^2 \frac{\mathbb{E}}{1_i (1_i 2^\otimes)^2} (1_i^-) \mu^2 \mathbb{O} \quad (4.97)
\end{aligned}$$

Através da fatorização de Φ^2 e Φ^4 com o propagador do píon externo à bolha,

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi^2}{\Phi^2 i^{-12}} &= \frac{i^2}{\Phi^2 i^{-12}} + 1; \\
\frac{i^2 \Phi^2}{(\Phi^2 i^{-12})^2} &= \frac{i^4}{(\Phi^2 i^{-12})^2} + \frac{i^2}{\Phi^2 i^{-12}}; \\
\frac{\Phi^4}{(\Phi^2 i^{-12})^2} &= \frac{\mu}{\Phi^2 i^{-12}} \frac{\mathbb{E}_2}{\Phi^2 i^{-12}} = \frac{i^4}{(\Phi^2 i^{-12})^2} + \frac{2 i^2}{\Phi^2 i^{-12}} + 1; \quad (4.98)
\end{aligned}$$

a parte pseudoescalar da integral $I_{1\circ}$ assume a forma

$$\begin{aligned}
 I^P(\Phi) = & i \frac{1}{6} \frac{1}{(4\frac{1}{4})^4} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{d^R}{d^-} \frac{d^o}{d^+} \frac{d''}{d''} \frac{2\mu^2}{\Phi^2 i^{-12}\mu^2} \frac{1}{\Phi^2 i^{-12}\mu^2} \frac{32^{14}}{(\Phi^2 i^{-12})^2} + \frac{8^{12}}{\Phi^2 i^{-12}} + 3 \\
 & + (1i^{-2})^2 \frac{16^{14}}{(\Phi^2 i^{-12})^2} + \frac{24^{12}}{\Phi^2 i^{-12}} + 9 \int_0^1 \int_0^1 (1i^{-2})^2 \frac{16^{14}}{(\Phi^2 i^{-12})^2} + \frac{8^{12}}{\Phi^2 i^{-12}} \\
 & + (1i^{-2})^2 \frac{32^{14}}{(\Phi^2 i^{-12})^2} + \frac{48^{12}}{\Phi^2 i^{-12}} + 18 \int_0^1 (1i^{-2})^2 \frac{16^{14}}{(\Phi^2 i^{-12})^2} + \frac{24^{12}}{\Phi^2 i^{-12}} + 9 \\
 & + (1i^{-2})^2 \frac{48^{14}}{(\Phi^2 i^{-12})^2} + \frac{72^{12}}{\Phi^2 i^{-12}} + 27 + (1i^{-2})^2 \frac{16^{14}}{(\Phi^2 i^{-12})^2} + \frac{24^{12}}{\Phi^2 i^{-12}} + 9 \\
 & i \int_0^1 (1i^{-2})^2 \frac{24^{14}}{(\Phi^2 i^{-12})^2} + \frac{12^{12}}{\Phi^2 i^{-12}} + (1i^{-2})^2 \frac{8^{14}}{(\Phi^2 i^{-12})^2} + \frac{4^{12}}{\Phi^2 i^{-12}} \quad (4.99)
 \end{aligned}$$

A parte axial não se altera.

TROCA DE TRÊS PÍONS

Os termos que não podem ser dissociados do pólo do píon estão relacionados às correções do vértice $\frac{1}{4}N$ e do propagador piônico, que contribuem para a troca de um píon. Como eles não contribuem para a troca de três píons, não serão mais considerados daqui em diante.

Usando a expressão (4.95) em (4.81) e a equação de Dirac, a amplitude devida à troca de três píons pode ser expressa na forma

$$T_{3\frac{1}{4}} = T_{3\frac{1}{4}}^P + T_{3\frac{1}{4}}^A; \quad (4.100)$$

onde

$$T_{3\frac{1}{4}}^P = \frac{\mu g_A}{8f_{\frac{1}{4}}^3} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{4m^2} \frac{\Phi}{[\bar{u}^0 \bar{u}^1]} \frac{1}{[\bar{u}^0 \bar{u}^1]} \frac{1}{[\bar{u}^0 \bar{u}^1]} I_{3\frac{1}{4}}^P(\Phi) \quad (4.101)$$

e

$$T_{3\frac{1}{4}}^A = \frac{\mu g_A}{8f_{\frac{1}{4}}^3} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{8m^2} \frac{\Phi}{[\bar{u}^0 \bar{u}^1]} \frac{1}{[\bar{u}^0 \bar{u}^1]} \frac{1}{[\bar{u}^0 \bar{u}^1]} I_{3\frac{1}{4}}^A(\Phi); \quad (4.102)$$

No centro de massa e no limite estático, podemos usar as equações (4.55) e (4.56) para obter

$$\begin{aligned}
 t_{3\frac{1}{4}}^P &= \frac{\mu T_{3\frac{1}{4}}^P c_m}{4m^2} = \frac{\mu g_A}{8f_{\frac{1}{4}}^3} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{4m^2} \frac{\Phi}{[\bar{u}^0 \bar{u}^1]} \frac{1}{[\bar{u}^0 \bar{u}^1]} \frac{1}{[\bar{u}^0 \bar{u}^1]} I_{3\frac{1}{4}}^P(\Phi) \\
 &= \frac{1}{3} \frac{\mu g_A}{8f_{\frac{1}{4}}^3} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{4m^2} \frac{\Phi}{[\bar{u}^0 \bar{u}^1]} \frac{1}{[\bar{u}^0 \bar{u}^1]} \frac{1}{[\bar{u}^0 \bar{u}^1]} I_{3\frac{1}{4}}^P(\Phi) \quad \stackrel{\Delta}{=} \text{ss} \quad \stackrel{\Delta}{=} \text{TT} \quad (4.103)
 \end{aligned}$$

e

$$t_{3/4}^A = \frac{\epsilon_{T_A} \cdot \mu}{4m^2} = i \cdot \frac{g_A}{8f_{3/4}^3} \cdot \Pi_2 \cdot 1^6 \cdot \zeta^{(1)} \cdot \zeta^{(2)} \cdot \zeta^{(1)} \cdot \zeta^{(2)} \cdot I_{3/4}^A(\Phi); \quad (4.104)$$

com

$$I_{3/4}^P(\Phi) = \frac{1}{6} \frac{1}{(4/4)^4} \cdot \frac{Z_1}{d^{\otimes}} \cdot \frac{Z_1}{d^-} \cdot \frac{Z_1}{d^{\circ}} \cdot \frac{Z_1}{d^{\prime\prime}} \cdot \frac{\zeta^2 \mu^2}{\Phi^2 + \mu^2 \cdot 1^2} \quad (4.105)$$

$$\epsilon \frac{n}{3} + 9(1i^2)^2 + 18(1i^2) \cdot \frac{\epsilon}{1i} \cdot (1i^2)^2 + 9(1i^2)^2 \cdot \frac{\epsilon}{3} + (1i^2)^2 \cdot \frac{\epsilon}{1i} \cdot (1i^2)^2 \cdot \frac{\epsilon}{1i} \cdot \mu^2 \cdot 1^2$$

e

$$I_{3/4}^A(\Phi) = i \cdot \frac{1}{12} \frac{1}{(4/4)^4} \cdot \frac{Z_1}{d^{\otimes}} \cdot \frac{Z_1}{d^-} \cdot \frac{Z_1}{d^{\circ}} \cdot \frac{Z_1}{d^{\prime\prime}} \cdot \frac{\zeta^2 \mu^2}{\Phi^2 + \mu^2 \cdot 1^2} \quad (4.106)$$

$$\epsilon \frac{n}{4} \cdot \frac{\epsilon}{1i} \cdot (1i^2)^2 \cdot (1i^-)^2 + \frac{\epsilon}{3} + (1i^2)^2 \cdot \frac{\epsilon}{1i} \cdot (1i^2)^2 \cdot (1i^-)^2 \cdot \mu^2 \cdot 1^2$$

Logo,

$$S_{3/4}^P(x) = \frac{Z}{(2/4)^3} \cdot \frac{d^3 \Phi}{e^{i \cdot \Phi}} \cdot I_{3/4}^P(\Phi) = \frac{8}{(4/4)^4} \cdot \frac{Z_1}{d^{\otimes}} \cdot \frac{Z_1}{d^-} \cdot \frac{Z_1}{d^{\circ}} \cdot \frac{Z_1}{d^{\prime\prime}} \cdot \frac{\zeta^2 \mu^2}{\Phi^2 + \mu^2} \cdot \frac{1}{4/4} \cdot \frac{e^{i \mu x}}{x}$$

$$\epsilon \frac{n}{1i} \cdot 3^{\circ} + 3^{\circ \cdot 2} [1i^{\otimes} (1i^{\otimes})] \cdot \frac{\epsilon}{1i} \cdot (1i^{\otimes}) \cdot (1i^-)^2 + [1i^{\otimes} (1i^{\otimes})]^{\circ} \cdot (1i^-)^{\circ} \cdot (1i^-)^2 \cdot \mu^2 \cdot 1^2 \quad (4.107)$$

e

$$S_{3/4}^A(x) = \frac{Z}{(2/4)^3} \cdot \frac{d^3 \Phi}{e^{i \cdot \Phi}} \cdot I_{3/4}^A(\Phi) = i \cdot \frac{4}{3} \frac{1}{(4/4)^4} \cdot \frac{Z_1}{d^{\otimes}} \cdot \frac{Z_1}{d^-} \cdot \frac{Z_1}{d^{\circ}} \cdot \frac{Z_1}{d^{\prime\prime}} \cdot \frac{\zeta^2 \mu^2}{\Phi^2 + \mu^2} \cdot \frac{1}{4/4} \cdot \frac{e^{i \mu x}}{x}$$

$$\epsilon \frac{n}{1i^{\otimes}} \cdot (1i^{\otimes}) \cdot (1i^-)^2 + [1i^{\otimes} (1i^{\otimes})]^{\circ} \cdot (1i^-)^{\circ} \cdot (1i^-)^2 \cdot \mu^2 \cdot 1^2 \quad (4.108)$$

As integrações em $^{\circ}$ e $^-$, efetuadas no apêndice C, produzem

$$S_{3/4}^P(x) = \frac{32}{(4/4)^4} \cdot \frac{1}{4/4} \cdot \frac{Z_1}{d^{\otimes}} \cdot \frac{Z_1}{d^{\circ}} \cdot \frac{n}{i^3} \cdot 3^{\circ \cdot 2} + 3^{\circ \cdot 3} [1i^{\otimes} (1i^{\otimes})] \cdot \frac{o}{a^2} \cdot \frac{\mu}{1 + \frac{3}{ax} + \frac{3}{a^2 x^2}} \cdot \frac{\Pi}{x^3} \quad (4.109)$$

e

$$S_{3/4}^A(x) = i \cdot \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{(4/4)^4} \cdot \frac{1}{4/4} \cdot \frac{Z_1}{d^{\otimes}} \cdot \frac{Z_1}{d^{\circ}} \cdot \frac{n}{i^{\circ 2}} \cdot i^{\circ 3} [1i^{\otimes} (1i^{\otimes})] \cdot \frac{o}{a^3} \cdot \frac{\mu}{1 + \frac{6}{ax} + \frac{15}{a^2 x^2} + \frac{15}{a^3 x^3}} \cdot \frac{\Pi}{x^4} \cdot \frac{e^{i \mu x}}{x^4} \quad (4.110)$$

onde

$$a = \frac{s}{\frac{1}{1i^{\circ}} + \frac{1}{i^{\otimes} (1i^{\otimes})^{\circ}}} \quad (4.111)$$

Usando as equações (4.39) e (4.40), obtemos

$$\mathbf{f}_{S_{3/4}^P} = \frac{32}{(4\pi)^4} \int_0^1 d^{\otimes} d^{\circ} \int_0^1 i^{-3/2} + 3^{1/2} [1 i^{-1/2} (1 i^{-1/2})] \frac{\partial}{\partial x} a^2 U_{SS}^P(x); \quad (4.112)$$

$$\mathbf{f}_{S_{3/4}^P} = \frac{32}{(4\pi)^4} \int_0^1 d^{\otimes} d^{\circ} \int_0^1 i^{-3/2} + 3^{1/2} [1 i^{-1/2} (1 i^{-1/2})] \frac{\partial}{\partial x} a^2 U_T^P(x); \quad (4.113)$$

$$\mathbf{f}_{S_{3/4}^A} = i \frac{32}{3} \frac{1}{(4\pi)^4} \int_0^1 d^{\otimes} d^{\circ} \int_0^1 i^{-1/2} [1 i^{-1/2} (1 i^{-1/2})] \frac{\partial}{\partial x} a^3 U_{SS}^A(x); \quad (4.114)$$

onde

$$\begin{aligned} U_{SS}^P(x) &= \frac{\mu}{x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\mu}{1 + \frac{3}{ax}} \right) + \frac{3}{a^2 x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{i ax}}{x^3} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\mu}{a^2} \left(1 + \frac{7}{ax} + \frac{27}{a^2 x^2} + \frac{60}{a^3 x^3} + \frac{60}{a^4 x^4} \right) \frac{e^{i ax}}{x^3}; \end{aligned} \quad (4.115)$$

$$\begin{aligned} U_T^P(x) &= i \frac{\mu}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\mu}{1 + \frac{3}{ax}} \right) \right) + \frac{3}{a^2 x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{i ax}}{x^3} \right) \\ &= i \frac{1}{4\pi} \frac{\mu}{a^2} \left(1 + \frac{10}{ax} + \frac{45}{a^2 x^2} + \frac{105}{a^3 x^3} + \frac{105}{a^4 x^4} \right) \frac{e^{i ax}}{x^3}; \end{aligned} \quad (4.116)$$

$$U_{SS}^A(x) = i \frac{1}{4\pi} \frac{\mu}{a^2} \left(1 + \frac{6}{ax} + \frac{15}{a^2 x^2} + \frac{15}{a^3 x^3} \right) \frac{e^{i ax}}{x^4}; \quad (4.117)$$

Assim, nos canais de spin, as nossas expressões das contribuições P e A ao potencial da troca de três píons não correlacionados são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{V_{3/4}^P} &= \frac{32}{3} \frac{\mu}{8f_{3/4}^3} \frac{\Pi_2}{(4\pi)^5} \int_0^1 d^{\otimes} d^{\circ} \int_0^1 i^{-3/2} + 3^{1/2} [1 i^{-1/2} (1 i^{-1/2})] \frac{\partial}{\partial x} a^4 \\ &\quad \frac{\mu}{1 + \frac{7}{ax} + \frac{27}{a^2 x^2} + \frac{60}{a^3 x^3} + \frac{60}{a^4 x^4}} \frac{e^{i ax}}{x^3}; \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{V_{3/4}^P} &= \frac{32}{3} \frac{\mu}{8f_{3/4}^3} \frac{\Pi_2}{(4\pi)^5} \int_0^1 d^{\otimes} d^{\circ} \int_0^1 i^{-3/2} + 3^{1/2} [1 i^{-1/2} (1 i^{-1/2})] \frac{\partial}{\partial x} a^4 \\ &\quad \frac{\mu}{1 + \frac{10}{ax} + \frac{45}{a^2 x^2} + \frac{105}{a^3 x^3} + \frac{105}{a^4 x^4}} \frac{e^{i ax}}{x^3}; \end{aligned} \quad (4.119)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{3\frac{1}{4} \text{ ss}}^A &= i \frac{32}{3} \frac{\mu}{8f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{g_A}{(4\frac{1}{4})^5} \zeta^{(1)} \zeta^{(2)} \frac{z_1}{d^0} \frac{z_1}{d^0} \frac{n}{i^0} i^0 [1 i^0 (1 i^0)]^0 \\
 &\in a^3 \frac{\mu}{1 + \frac{6}{ax} + \frac{15}{a^2 x^2} + \frac{15}{a^3 x^3}} \frac{\pi}{x^4} : \tag{4.120}
 \end{aligned}$$

Estes potenciais incorporam dois tipos de aproximações. O primeiro deles está associado com a aproximação de que a parte da lagrangiana PV, que gera o vértice $3\frac{1}{4}NN$, representa a contribuição dominante. A outra está relacionada ao limite estático. No cálculo da integral $I_{10}(\mathcal{C})$, não ...zemos aproximações, apenas desprezamos as correções do vértice $\frac{1}{4}N$ e do propagador do píon, que contribuem para o potencial devido à troca de um píon (OPEP).

Resolvendo as integrais numericamente, obtemos os gráficos da figura (4.5), onde é possível notar que todas as curvas divergem na origem, comportamento típico de potenciais não regularizados. Por este motivo, supomos que nossos resultados são realísticos para distâncias internucleônicas maiores que 0.7 fm, o raio da sacola usual. Observando a contribuição total para o canal spin-spin dessa figura, percebemos que o cancelamento entre as contribuições das interações pseudoescalar e axial não é desprezível e é dominada pela interação pseudoescalar.

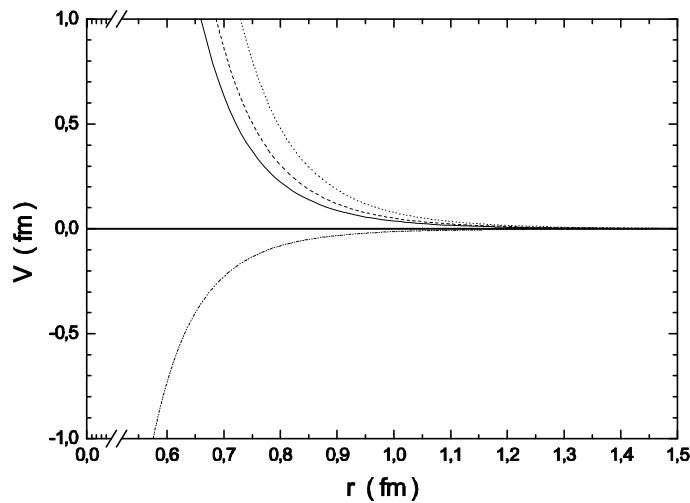


Figura 4.5: Potencial spin-spin devido às interações pseudoescalar (linha tracejada) e axial (linha tracejada-pontilhada) e potencial tensor devido à interação pseudoescalar (linha pontilhada). O potencial spin-spin total é representado pela linha contínua.

Nas ...guras (4.6) e (4.7), vemos que a troca de três píons gera uma contribuição para o OPEP razoavelmente menor do que a de um $a_1(1260)$, tanto no canal spin-spin como no tensor.

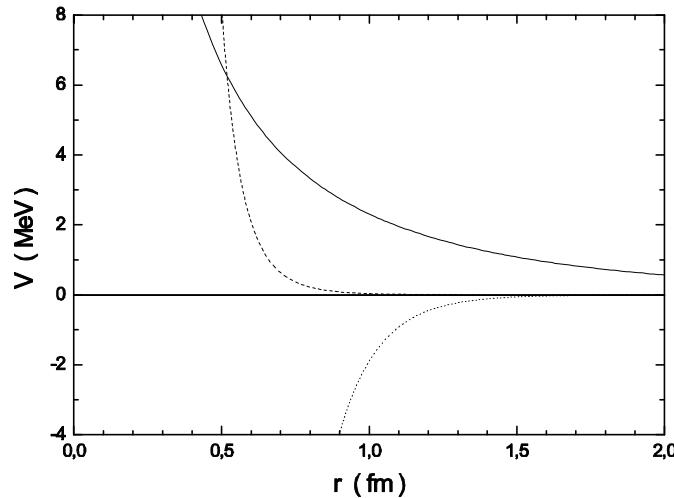


Figura 4.6: Potencial spin-spin isovetor devido à troca de um píon (linha contínua), um $a_1(1260)$ (linha pontilhada) e três píons (linha tracejada).

Na ...gura (4.8), observamos que a contribuição da troca de três píons ao canal spin-spin do OPEP é signi...cativa até 1.0 fm. No canal tensor, não é possível distinguir as curvas porque esta contribuição é desprezível frente ao OPEP. Logo, o potencial devido à troca de três píons não correlacionados começa a ser relevante a distâncias muito curtas, quando comparado ao OPEP.

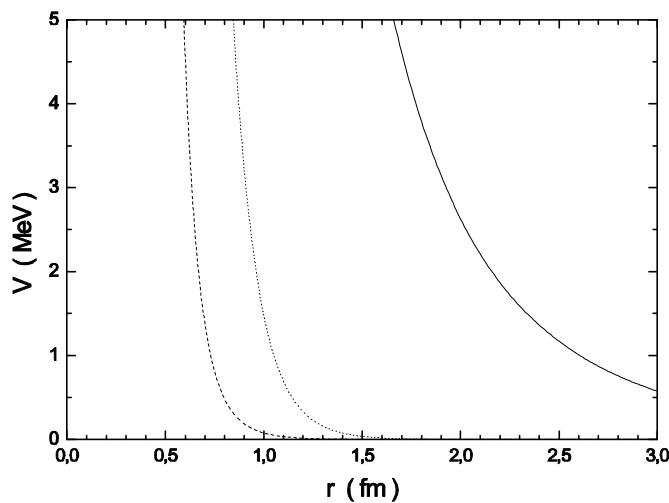


Figura 4.7: Potencial tensor isovetor devido à troca de um píon (linha contínua), um $a_1(1260)$ (linha pontilhada) e três píons (linha tracejada).

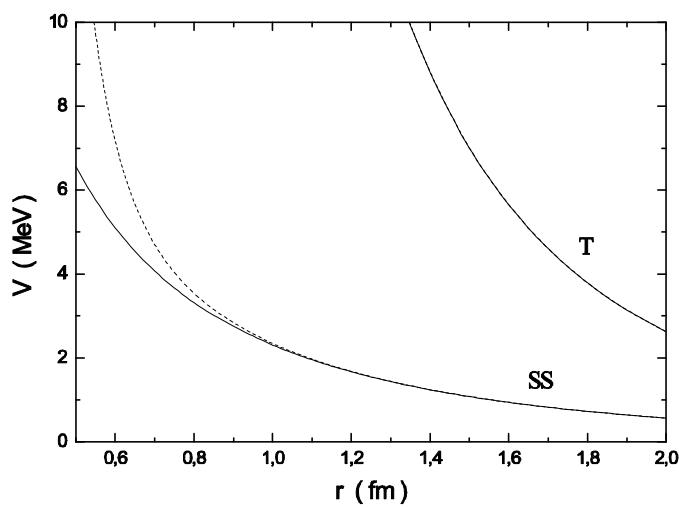


Figura 4.8: Componentes spin-spin (SS) e tensor (T) de $V_{1/4}$ (linha contínua) e $V_{1/4} + V_{3/4}$ (linha tracejada).

Capítulo 5

Produção de Píon no Espalhamento NN

A produção de um píon na interação nucleon-nucleon (NN) é um problema tradicional na física de hadrons. Sua importância deriva do fato de ela poder ser medida experimentalmente, no caso de um píon real e, também, de ser uma componente importante das forças de três nucleons, quando o píon for virtual.

Neste capítulo, discutimos a relação entre a componente escalar-isoescalar do potencial NN devido à troca de dois píons não correlacionados e o potencial NN gerado pela troca de um méson ...ctício com os mesmos números quânticos. Estudamos, também, o papel dos cancelamentos quirais no termo dominante da produção de um píon devido à troca de dois píons não correlacionados, a partir das subamplitudes $\frac{1}{4}N \rightarrow \frac{1}{4}N$ e $\frac{1}{4}N \rightarrow \frac{1}{4}\bar{N}$. Determinamos a dependência espacial da amplitude da produção e a comparamos com aquela gerada pela troca do méson escalar efetivo. Por ...m, para grandes distâncias internucleônicas, generalizamos o nosso resultado para um potencial nuclear qualquer.

A produção de um píon nas interações NN a baixas energias vem sendo estudada desde a década de 60. Recentemente, o interesse neste problema foi renovado, devido à existência de novos dados experimentais, bastante precisos, para as reações: $np \rightarrow d^{\frac{1}{2}0}$ [Hut+91], $pp \rightarrow pp^{\frac{1}{2}0}$ [Mey+92] [Bond+95], $pp \rightarrow d^{\frac{1}{2}+}$ [Droch+96] [Heimb+96] e $pp \rightarrow pn^{\frac{1}{2}+}$ [Daeh+95] [Har+97] [Fla+98]. Paralelamente, do ponto de vista teórico, os avanços da teoria de perturbação quiral (ChPT) permitiram tratar o problema de uma maneira sistemática. Entretanto, apesar destes progressos, existem problemas em aberto.

Há duas classes de interações envolvidas na produção de um píon, uma associada com as correlações dos nucleons e outra, com a emissão do píon externo. No procedimento desenvolvido por Koltun e Reitan [KR 66], essas interações estão incluídas, respectivamente, nas funções de onda inicial e ...nal e no kernel (núcleo) de interação. As primeiras correspondem a soluções da equação de Schrödinger com potenciais realistas, enquanto o kernel é descrito através de modelos baseados em diagramas de Feynman.

No que concerne ao kernel de interação, geralmente é possível distinguir entre contribuições de longo e curto alcances. As de longo alcance são mostradas na ...gura (5.1), onde o primeiro diagrama representa a aproximação de impulso e o segundo, o termo de reespalhamento do píon. Estes dois processos foram considerados por Koltun e Reitan [KR 66] na descrição do canal $\frac{1}{2}0$, mas a seção de choque era cinco vezes menor que os dados obtidos recentemente [MS 91]. O termo de reespalhamento usado naquele trabalho veio de amplitudes $\frac{1}{2}N$ na camada de massa, embora o píon trocado no diagrama (5.1.b) esteja fora da camada de massa. Modelos que levam em conta a virtualidade do píon aumentam a seção de choque e tendem a melhorar o acordo com os experimentos [HP 78] [EZO 90] [HO 95] [HHRSS 95] [HHS 96]. Cálculos com bárions pesados em ChPT [CFMK 96] [KMR 96] [RMK 99] também explicitam a importância desse termo de reespalhamento na ordem dominante. Entretanto, nestes trabalhos os termos de reespalhamento e impulso aparecem com sinais opostos, produzindo um saldo menor que o de cálculos fenomenológicos [HHHMS 98], indicando a necessidade de outros mecanismos.

Interações de alcance menor, envolvendo trocas de dois píons não correlacionados, são bastante complexas e, no caso da produção de um píon, estas componentes foram descritas através de trocas de mésons pesados efetivos. As contribuições destes correspondem ao último diagrama da ...gura (5.1), conhecido como grá...co z, visto que a propagação do nucleon de freqüência positiva, já incluída na função de onda, é subtraída. A inclusão dos mésons $\frac{1}{2}$, !, e $\frac{1}{2}$, de modo explícito [HHRSS 95] ou em uma densidade de corrente axial geral [LR 93], permitiu bons ajustes para

a seção de choque do processo $pp \rightarrow pp\pi^0$ no limiar. Contudo, o estudo dos efeitos relativísticos na produção do π^0 [ASPG 97] demonstrou que os efeitos do gráfico são pequenos e insuficientes para explicar as seções de choque. A extensão para os outros canais (π^+ e π^0), com inclusão de ressonâncias nucleônicas [RMK 99] [HHKS 98] [PRS 99], também não melhorou a situação.

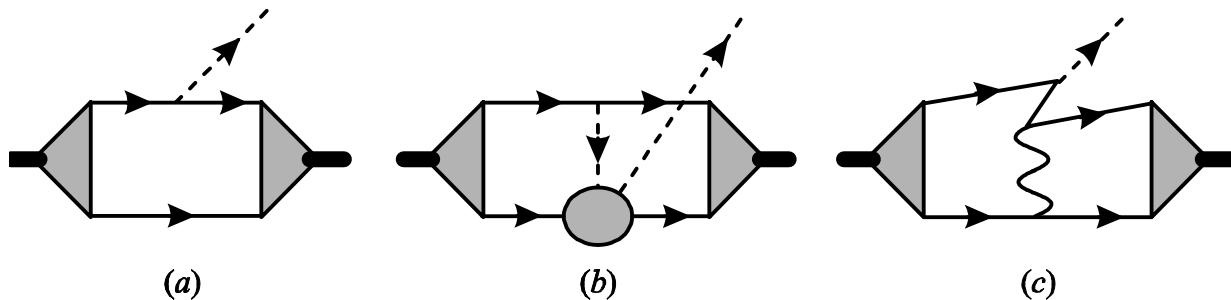


Figura 5.1: Contribuições para o processo $NN \rightarrow NN\pi^0$: (a) impulso, (b) reespalhamento e (c) gráfico Z ; nucleons, píons e mésons mais pesados são representados pelas linhas sólidas, tracejadas e onduladas.

Há algum tempo atrás, Coon, Peña e Riska [CPR 95] produziram um potencial de três corpos baseado nas trocas de um píon e um méson escalar, que foi capaz de melhorar o acordo entre teoria e experimento no caso da energia de ligação de três nucleons. Mais tarde, Maekawa e Robilotta [MR 98] obtiveram um resultado equivalente, usando uma lagrangiana não-linear com um campo escalar quiral s , que simula o potencial NN devido à troca de dois píons. Além do acoplamento direto deste méson efetivo com os nucleons, esta lagrangiana gera uma forte interação de contato $\pi s NN$. A troca de dois píons não correlacionados, formulada no contexto da simetria quiral e incorporando os deltas, explica muito bem a cauda do potencial NN escalar-isoescalar [ORK 94] [ORK 96] [Rob 95] [RR 97] [KBW 97] [KGW 98], não sendo necessário um méson escalar verdadeiro para descrever esse canal. Por outro lado, em problemas onde a simplicidade é mais importante do que o refinamento, pode ser útil simular todos os processos associados ao canal escalar-isoescalar por um único campo escalar quiral. Com este enfoque, a interação de contato $\pi s NN$ foi aplicada aos canais de produção π^0 e π^+ , produzindo resultados teóricos compatíveis com os experimentais [MR 99].

Cálculos com troca de dois píons, baseados nas teorias de perturbação quiral relativística [BKM 99] e de bárions pesados [DKMS 99], produziram novamente grandes contribuições que se cancelam.

Recentemente, contribuímos para o esclarecimento deste problema, apresentando uma de-

scrição dinâmica da produção devido à troca do méson escalar e relacionando a produção ao potencial NN central isoscalar [MPR 00].

5.1 Espalhamento NN Devido à Troca de Dois Píons

O potencial NN devido à troca de dois píons (TPEP) não correlacionados é obtido a partir da amplitude geral

$$T_{2\frac{1}{4}} = i \cdot i \frac{1}{2!} \frac{Z}{(2\frac{1}{4})^4} \frac{d^4 Q}{(k^2 i^{-12}) (k^0 i^{-12})} \frac{T_{ab}^{(1)} T_{ba}^{(2)}}{;}, \quad (5.1)$$

onde $\frac{1}{2!}$ é o fator de simetria da troca destes píons, k e k^0 são os momentos dos píons intermediários, i^1 é a massa do píon, $Q = (k^0 + k)^2 = 2$ é a variável de integração e

$$T_{ba}^{(2)} = \pm_{ab} \frac{f}{T^+} T^+ \frac{\pi^{(2)}}{+} + i^2_{bac} \frac{f}{T^i} T^i \frac{\pi^{(2)}}{+}; \quad (5.2)$$

a amplitude do espalhamento $\frac{1}{4}N$ no nucleon 2, com

$$T^{\frac{1}{4}N} = A^{\frac{1}{4}} [\bar{u} u]^{(2)} + B^{\frac{1}{4}} [\bar{u} \bar{Q} u]^{(2)}; \quad (5.3)$$

As expressões para o nucleon 1 são obtidas com as trocas a \$ b e Q ! i Q :

A parte isoscalar de $T_{2\frac{1}{4}}$ é dada por

$$T_{2\frac{1}{4}}^+ = i \cdot i \frac{1}{2} \frac{Z}{(2\frac{1}{4})^4} \frac{d^4 Q}{(k^2 i^{-12}) (k^0 i^{-12})} \frac{3 [T^+]^{(1)} [T^+]^{(2)}}{+}; \quad (5.4)$$

e a isovetorial, por

$$T_{2\frac{1}{4}}^i = i \cdot i \frac{1}{2} \frac{Z}{(2\frac{1}{4})^4} \frac{d^4 Q}{(k^2 i^{-12}) (k^0 i^{-12})} \frac{2 [T^i]^{(1)} [T^i]^{(2)}}{+}; \quad (5.5)$$

A interação obtida a partir da teoria de campos deve ser compatível com potenciais fenomenológicos, em que os dados experimentais são ajustados por meio de funções envolvendo parâmetros livres. Um desses potenciais, o de Argonne [WSA 84], ajusta a região intermediária (I) por funções da forma

$$V_A(x) = I^p \frac{\mu}{1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}} \frac{\Pi_2}{x^2} e^{i^2 x}; \quad (5.6)$$

que simulam a iteração do OPEP. Os parâmetros I^p são ajustados livremente, para os vários canais do potencial 1 . Os valores obtidos pelo grupo de Argonne, mostrados na tabela (5.1), enfatizam a conhecida dominância da componente escalar-isoescalar do potencial NN.

Tabela 5.1: Parâmetros Γ^p em MeV [WSA 84].

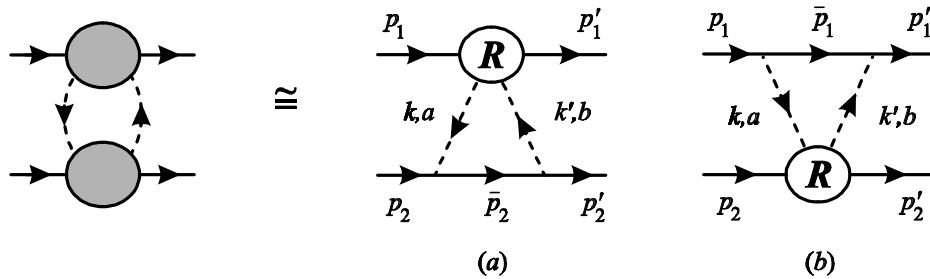
	1	$\dot{\epsilon}^{(1)} \dot{\epsilon}^{(2)}$
C	$i 4; 801125$	$0; 798925$
SS	$1; 189325$	$0; 182875$
T	$i 0; 1575$	$i 0; 7525$
SO	$0; 5625$	$0; 0475$
Q	$0; 070625$	$i 0; 148125$

As realizações mínimas da simetria quiral envolvem apenas píons e nucleons. Potenciais baseados nestas realizações mínimas [OK 92] [CPS 92] [FC 94] [RR 94] [Bir 94] subestimam a componente escalar-isoescalar do potencial, devido a grandes cancelamentos que ocorrem entre os diagramas. A inclusão dos deltas na descrição da interação NN [ORK 94] melhorou consideravelmente as previsões.

Uma outra forma de se obter um potencial compatível com os dados é incorporar, por meio de coe...cientes empíricos, as informações do espalhamento $\frac{1}{4}N$ na região cinemática abaixo do limiar [Rob 95]. Separando $T_{ba}^{(i)}$ em uma contribuição $T_N^{(i)}$, contendo somente interações píon-nucleon, e um resto $T_R^{(i)}$, envolvendo outros graus de liberdade, o potencial passa a ser proporcional a

$$f_{T_{ba}^{(i)}} = f_{T_N^{(i)}} f_{T_R^{(i)}} + \frac{1}{2} f_{T_N^{(i)}} f_{T_R^{(i)}} + f_{T_R^{(i)}} f_{T_N^{(i)}}^{\frac{3}{4}} + f_{T_R^{(i)}} f_{T_R^{(i)}} : \quad (5.7)$$

Assim, a dinâmica dominante da interação NN pode ser representada por diagramas contendo apenas nucleons num lado e demais graus de liberdade no outro, mostrados na ...gura (5.2).

Figura 5.2: Contribuições dominantes para o processo $NN \rightarrow NN$.

¹Canais de spin central (C), spin-spin (SS), tensor (T), spin-órbita (SO), spin-órbita quadrático (Q) etc, para os isospins escalar (1) e vetorial ($\dot{\epsilon}^{(1)} \dot{\epsilon}^{(2)}$).

O estudo numérico desta amplitude [RR 97] [BRR 98] mostra que o primeiro termo, que corresponde à realização quiral mínima, é muito pequeno e que a contribuição mais importante vem dos produtos entre chaves no canal isoescalar. As funções relevantes da equação (5.3), para $\frac{f}{T_N^+} \pi^{(2)}$, são

$$A_N^+ = \frac{g^2}{m}; \quad B_N^+ = g^2 \cdot i \frac{1}{(p+k)^2 i m^2} + \frac{1}{(p_i k^0)^2 i m^2} \quad (5.8)$$

e, para $\frac{f}{T_R^+} \pi^{(1)}$,

$$A_R^+ = \sum_{m,n} a_{mn}^+ \circ^{2m} t^n; \quad B_R^+ \cong 0; \quad (5.9)$$

onde os coe...cientes a_{mn}^+ são obtidos a partir do espalhamento $\frac{1}{4}N$ elástico [Hoh 83].

As correções associadas às potências mais altas de \circ e t , na expansão da subamplitude A_R^+ , são muito pequenas em energias baixas. Assim, para distâncias grandes, a contribuição principal vem da região ao redor de $\circ \approx 0$ e $t \approx 4^{1/2}$, isto é,

$$A_R^+(\circ = 0; t = 4^{1/2}) = \circ_{00}^+ = 1; \quad (5.10)$$

onde

$$\circ_{00}^+ = 1 a_{00}^+ + 4^{1/2} a_{01}^+ + 16^{1/4} a_{02}^+; \quad (5.11)$$

Com isso, o termo dominante da amplitude pode ser expresso por

$$T_{2^{1/4}} \cong 3 \frac{\circ_{00}^+}{1} [\bar{u} u]^{(1)} \frac{f}{T_N^+} \pi^{(2)} + (1) \$ (2); \quad (5.12)$$

onde

$$\frac{f}{T_N^+} \pi^{(2)} = i \frac{1}{2} \frac{Z}{(2^{1/4})^4} \frac{d^4 Q}{(k^2 i^{-1/2})(k^{0/2} i^{-1/2})} \frac{f}{T_N^+} \pi^{(2)}; \quad (5.13)$$

A simetria da função B_N^+ , em relação à troca $k \leftrightarrow k^0$, permite escrever

$$\frac{f}{T_N^+} \pi^{(2)} = i \frac{1}{2} \frac{g^2}{m} \frac{Z}{(2^{1/4})^4} \frac{1}{(k^2 i^{-1/2})(k^{0/2} i^{-1/2})} \frac{1}{2} [\bar{u} u]^{(2)} i \frac{2m}{(p+k)^2 i m^2} [\bar{u} \bar{Q} u]^{(2)}; \quad (5.14)$$

Usando o momento externo transferido $\bar{Q} = k^0 i \bar{k}$ e as relações inversas $k^0 = Q + \bar{Q} = 2$ e $k = Q_i \bar{Q} = 2$, temos

$$\frac{f}{T_N^+} \pi^{(2)} = i \frac{1}{2} \frac{g^2}{m} \frac{Z}{(2^{1/4})^4} \frac{1}{[(Q_i \bar{Q} = 2)^2 i^{-1/2}][(Q + \bar{Q} = 2)^2 i^{-1/2}]} \frac{1}{[(Q + \bar{Q} = 2)^2 i^{-1/2}]} \frac{2m}{(p+k)^2 i m^2} [\bar{u} \bar{Q} u]^{(2)}; \quad (5.15)$$

$$i [\bar{u} \circ^1 u]^{(2)} \frac{Z}{(2^{1/4})^4} \frac{2m}{[(Q_i \bar{Q} = 2)^2 i^{-1/2}][(Q + \bar{Q} = 2)^2 i^{-1/2}]} \frac{2m Q_i}{[Q^2 + 2mV \bar{Q} Q_i \bar{Q}^2 = 4]};$$

onde $V = (p_1^0 + p_2^0) = 2m$. Reescrevendo as integrais através das funções X e Y do apêndice C, obtemos

$$\mathbf{f}_{i_N^+}^{(2)} = i \frac{i g^2}{2m} \frac{1}{2} [i u]^{(2)} X(\Phi; 1; 1) + [i u]^{(2)} Y_1(\Phi; 1; 1) ; \quad (5.16)$$

onde

$$X(\Phi; 1; 1) = \frac{Z}{(2\frac{1}{4})^4} \frac{d^4 Q}{(Q - \Phi = 2)^2 i^{-12}} \frac{1}{(Q + \Phi = 2)^2 i^{-12}} = i \frac{i}{(4\frac{1}{4})^2} \frac{Z}{0} \frac{Z}{0} \frac{d^{\otimes}}{d^{-}} \frac{i^2}{\Phi^2 i^{-12}} ; \quad (5.17)$$

com

$$i^{-2} = \frac{1}{(1 i^{\otimes})^{-}} ; \quad (5.18)$$

e

$$Y_1(\Phi; 1; 1) = \frac{Z}{(2\frac{1}{4})^4} \frac{d^4 Q}{(Q - \Phi = 2)^2 i^{-12}} \frac{2m Q^1}{(Q + \Phi = 2)^2 i^{-12}} \frac{1}{[Q^2 + 2mV \Phi Q - \Phi^2 = 4]} \quad (5.19) \\ = i \frac{i}{(4\frac{1}{4})^2} \frac{Z}{0} \frac{d^{\otimes}}{d^{-}} \frac{1 i^{\otimes}}{i^{\otimes}} \frac{Z}{0} \frac{1 i^{-}}{d^{-}} \frac{i^{-12}}{2mV_1} + \frac{1 i^{\otimes}}{(1 i^{\otimes})(1 i^{-})} i^{-1} \frac{i^{-\frac{1}{2}}}{\Phi} \frac{m}{\Phi^2 i^{-12}} ;$$

com

$$i^{-2} = \frac{(1 i^{\otimes})^2 (1 i^{-})^2 (m=1)^2}{(1 i^{\otimes})^{-}} i^{-1} (1 i^{\otimes}) (1 i^{-}) + 1 ; \quad (5.20)$$

As igualdades

$$[i \not{u} u]^{(i)} = 0 \quad \text{e} \quad [i \not{u} u]^{(i)} = [i u]^{(i)} ; \quad (5.21)$$

produzidas pela equação de Dirac, implicam em

$$\mathbf{f}_{i_N^+}^{(2)} = i \frac{g^2}{2m} [i u]^{(2)} \frac{1}{(4\frac{1}{4})^2} \frac{Z}{0} \frac{Z}{0} \frac{d^{\otimes}}{d^{-}} \frac{1}{t} \frac{i^{-12}}{i^{-12}} i^{-1} \frac{i^{\otimes}}{i^{\otimes}} \frac{1 i^{-}}{d^{-}} \frac{2m^2}{t} \frac{1}{i^{-12}} ; \quad (5.22)$$

onde $t = \Phi^2$.

A função $[i_N^+]$ está relacionada ao fator de forma escalar $\frac{1}{4}(t)$, denido por

$$\hbar p^0 j L_{sb} j p i = i^{\frac{1}{4}}(t) [i u] ; \quad (5.23)$$

onde L_{sb} é o termo da lagrangiana que quebra a simetria quiral. A estrutura de longo alcance de $\frac{1}{4}(t)$ foi discutida por Gasser, Sainio e Švarc [GSS 88] e está relacionada à função $[i_N^+]$ por

$$3^{-12} \mathbf{f}_{i_N^+}^{(2)} = \frac{1}{4}(t) [i u] ; \quad (5.24)$$

Com isso, a contribuição assintótica da amplitude isoescalar pode ser escrita como

$$T_{2/4} \cong 2 \frac{\mathbb{R}_{00}^+}{1} \frac{\frac{3}{4}(t)}{12} [\bar{u} u]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} ; \quad (5.25)$$

Esta expressão é interessante porque informa acerca da estrutura da interação. Ela retrata um nucleon, que age como uma fonte escalar, perturbando a nuvem piônica do outro. O fator de forma escalar é relacionado ao termo sigma do nucleon por $\frac{3}{4}(0) = \frac{3}{4}_N$: O valor do fator de forma escalar pode ser obtido, no ponto de Cheng-Dashen ($t = 2^{12}$), a partir de dados experimentais e, em $t = 0$; por meio de extrapolações.

No centro de massa do sistema (cm), a expressão (5.22) é dada por

$$\frac{g^2}{2m} [\bar{u} u]^{(2)} \stackrel{cm}{=} \frac{1}{(4\frac{3}{4})^2} \int_0^{\infty} d^{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} d^- \frac{\mu_1}{\frac{1}{\mathbb{C}^2 + \frac{12}{12}^2}} \int \frac{1}{\mathbb{C}^2 + \frac{12}{12}^2} \frac{1}{\mathbb{C}^2 + \frac{12}{12}^2} \frac{2m^2}{\mathbb{C}^2 + \frac{12}{12}^2} \quad (5.26)$$

e o produto de sanduíches spinoriais, por

$$[\bar{u} u]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} \stackrel{cm}{=} (E + m)^2 \int \frac{(p^0 \not{p})^2}{(E + m)^2} \int \int \frac{\frac{3}{4}^{(2)} + \frac{3}{4}^{(1)} \not{p} (p^0 \wedge \not{p})}{E + m} \int \frac{p^0 \not{p}}{(E + m)^2} \quad (5.27)$$

Fazendo o limite estático

$$[\bar{u} u]^{(1)} [\bar{u} u]^{(2)} \cong 4m^2 \quad (5.28)$$

e usando a relação (4.33), podemos escrever a amplitude como

$$t_{2/4}(\mathbb{C}) \stackrel{cm}{=} \frac{\mathbb{R}_{2/4}}{4m^2} \cong 2 \frac{\mathbb{R}_{00}^+}{13} \frac{3}{4}(\mathbb{C}^2) ; \quad (5.29)$$

onde

$$\frac{3}{4}(\mathbb{C}^2) = \frac{g^2}{2m} \frac{3}{(4\frac{3}{4})^2} \int_0^{\infty} d^{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} d^- \frac{\mu_1}{\frac{1}{\mathbb{C}^2 + \frac{12}{12}^2}} \int \frac{1}{\mathbb{C}^2 + \frac{12}{12}^2} \frac{1}{\mathbb{C}^2 + \frac{12}{12}^2} \frac{2m^2}{\mathbb{C}^2 + \frac{12}{12}^2} ; \quad (5.30)$$

Passando para o espaço de configuração via transformada de Fourier, obtemos nossa expressão ...nal para a parte dominante do potencial devido à troca de dois píons não correlacionados,²

$$V_{2/4}(x) = \int 2 \frac{\mathbb{R}_{00}^+}{13} \frac{d^3 \mathbb{C}}{(2/4)^3} e^{i \mathbb{C} \cdot x} \frac{3}{4}(\mathbb{C}^2) = \int 2 \frac{\mathbb{R}_{00}^+}{13} \frac{3}{4}(x) ; \quad (5.31)$$

²O sinal “ i ” na frente da integral surge da diferença entre as amplitudes de transição relativística e não-relativística.

onde

$$\frac{3}{4}(x) = \frac{g^2}{2m} \frac{3^{1/4}}{(4^{1/4})^2} \frac{1}{4^{1/4}} \frac{\hbar}{S_{cc}(x) + S_{sc}(x)} \frac{i}{\hbar} ; \quad (5.32)$$

com

$$S_{cc}(x) = \frac{Z_1}{d^{1/2}} \frac{Z_1}{d^{-1/2}} \frac{e^{i\sqrt{s}x}}{x} \quad \text{e} \quad S_{sc}(x) = \frac{2m^2}{12} \frac{Z_1}{d^{1/2}} \frac{1}{d^{1/2}} \frac{i}{d^{-1/2}} \frac{e^{i\sqrt{s}x}}{x} ; \quad (5.33)$$

Antes de concluir esta seção, convém notar que, em algumas situações, pode ser útil parametrizar $\frac{3}{4}(t)$ por meio de funções simples. Neste caso, a dependência de t na expressão (5.22) sugere a parametrização

$$\frac{3}{4}(t) \approx \frac{c}{t + m_s^2} ; \quad (5.34)$$

onde os parâmetros livres m_s e c podem ser escritos em função dos valores do fator de forma escalar em $t = 2^{1/2}$ e $t = 0$,

$$m_s^2 = \frac{2^{3/4}(2^{1/2})}{\frac{3}{4}(2^{1/2}) + \frac{3}{4}(0)} \quad \text{e} \quad c = \frac{3}{4}(0) m_s^2 ; \quad (5.35)$$

Comparando a amplitude isoescalar, expressão (5.25), com aquela devida à troca de um mésion escalar efetivo,³

$$T_s \approx \frac{g_s^2}{t + m_s^2} [u u]^{(1)} [u u]^{(2)} ; \quad (5.36)$$

obtemos a constante de acoplamento deste mésion com os nucleons,

$$g_s^2 \approx 2 \frac{m_s^2}{13} \frac{\frac{3}{4}(0)}{m_s^2} ; \quad (5.37)$$

No espaço de configuração, temos

$$V_s(x) = i g_s^2 \frac{1}{4^{1/4}} \frac{e^{i\sqrt{s}x}}{x} ; \quad (5.38)$$

Na tabela (5.2), apresentamos os valores de m_s e g_s , obtidos a partir de dados experimentais. Na maioria dos casos, a massa obtida para esse mésion escalar é próxima daquela usada no potencial de Bonn [MHE 87], porém a constante de acoplamento é menor.

³Este mésion não é equivalente ao do modelo $\frac{3}{4}$ -linear, uma vez que, ao contrário do que acontece com o $\frac{3}{4}$, sua constante de acoplamento desaparece no limite quiral.

Tabela 5.2: Valores de m_s , em MeV, e g_s , adimensional.

${}^{\circ\circ}_{00}^{+}$	$\frac{3}{4}(2^{1/2})$	$\frac{3}{4}(2^{1/2})_i$	$\frac{3}{4}(0)$	m_s	g_s
3; 68 ^a	60 ^c	7; 3 ^b	564	7; 22	
3; 68 ^a	60 ^c	15 ^c	393	4; 36	
6; 74 ^d	88 ^d	15 ^c	478	9; 09	
4; 61 ^e	90 ^e	15 ^c	483	7; 71	

^a[Hoh 83], ^b[GSS 88], ^c[GLS 91], ^d[KH 99] e ^e[PASW 99].

Na ...gura (5.3), mostramos os potenciais isoescalares-escalares, equações (5.31), (5.6) e (5.38). É possível notar que a suas formas são semelhantes, embora quantitativamente diferentes. A relação de $V_{2/4}(x)$ e $V_s(x)$ com $V_A(x)$, ...gura (5.4), indica que as trocas de dois píons não correlacionados e de um méson escalar efetivo não são equivalentes. O comportamento de $V_{2/4}(x)$ tende a $V_A(x)$. Já isto não acontece com $V_s(x)$, porque a dependência de x no denominador envolve uma potência diferente de $V_A(x)$.

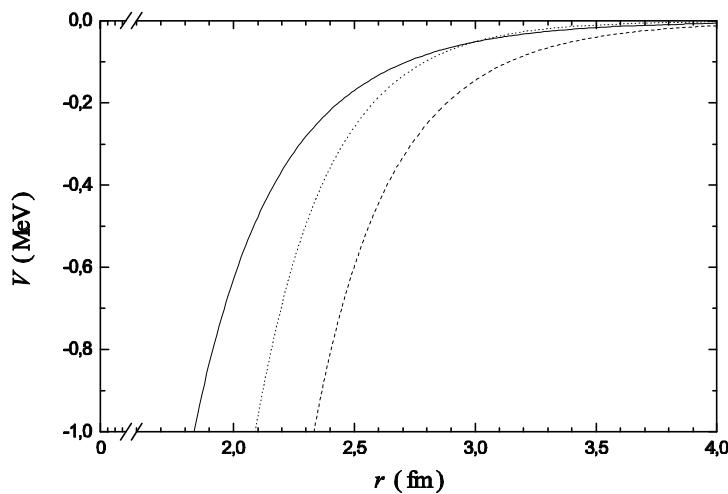


Figura 5.3: Potenciais $V_{2/4}(x)$ (linha contínua), $V_A(x)$ (linha tracejada) e $V_s(x)$ com ${}^{\circ\circ}_{00}^{+} = 4:61$, $g_s = 7:71$ e $m_s = 483$ MeV tomados da última linha da tabela 5.2 (linha pontilhada).

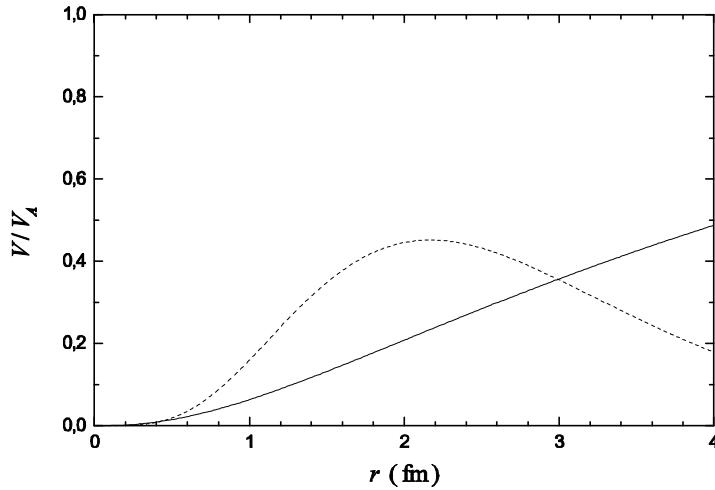


Figura 5.4: Razões $V_{2/4}(x)=V_A(x)$ (linha contínua) e $V_s(x)=V_A(x)$ (linha tracejada).

5.2 Produção de Um Píon Devido à Troca de Dois Píons

A amplitude da produção de um píon com momento q e isospin c , no espalhamento NN devido à troca de dois píons, é dada por

$$T_c = i \cdot i \frac{1}{2!} \sum \frac{d^4 Q}{(2/4)^4} \frac{T_{cba}^{(1)} T_{ba}^{(2)}}{(k^2 i^{-12})(k^0 i^{-12})} + (1 \$ 2); \quad (5.39)$$

onde as amplitudes intermediárias $T_{cba}^{(1)}$ e $T_{ba}^{(2)}$, apresentadas no capítulo 3, descrevem os processos $\frac{1}{4}N + \frac{1}{4}N \rightarrow \frac{1}{4}N + \frac{1}{4}N$. O momento externo transferido, neste caso, é escrito como $\Phi = k^0 i \cdot k = q \cdot i \cdot q^0 = q + p_1^0 i \cdot p_1 = p_2 i \cdot p_2^0$:

A estrutura geral de isospin é

$$T_c = \dot{\epsilon}_c^{(1)} T_1 + i (\dot{\epsilon}^{(1)} \wedge \dot{\epsilon}^{(2)})_c T_{12} + \dot{\epsilon}_c^{(2)} T_2 + (1 \$ 2); \quad (5.40)$$

com

$$T_1 = i \frac{1}{2} \frac{Z}{(2\frac{1}{4})^4} \frac{d^4 Q}{(k^2 i^{-12})(k^{12} i^{-12})} \frac{[T_A + T_B + 3T_C]^{(1)} [T^+]^{(2)}}{;} \quad (5.41)$$

$$T_{12} = i \frac{1}{2} \frac{Z}{(2\frac{1}{4})^4} \frac{d^4 Q}{(k^2 i^{-12})(k^{12} i^{-12})} \frac{[T_A i^{-12} T_B]^{(1)} [T^+]^{(2)}}{;} \quad (5.42)$$

$$T_2 = i \frac{1}{2} \frac{Z}{(2\frac{1}{4})^4} \frac{d^4 Q}{(k^2 i^{-12})(k^{12} i^{-12})} \frac{2 [T_D]^{(1)} [T^+]^{(2)}}{;} \quad (5.43)$$

A amplitude T_1 é dominante e apenas ela será considerada daqui em diante. Para calculá-la, usamos T_{abc} na aproximação de Olsson e Turner, discutida na seção 3 do capítulo 3, e o termo dominante da amplitude T_{ba} , discutido na seção anterior. Assim, a produção de um píon, no espalhamento NN devido à troca de dois píons, pode ser representada pelos diagramas da figura (5.5), que corresponde a

$$[T_A + T_B + 3T_C]^{(1)} \frac{f_{T^+}^{(2)}}{=} f_i T_A^{\frac{1}{4}} + T_A^{ct} \frac{f}{+} i T_B^{\frac{1}{4}} + T_B^{ct} \frac{f}{+} 3 i T_C^{\frac{1}{4}} + T_C^{ct} + T_C^Z \frac{f^{(1)}}{+} \frac{f_{T_N^+}^{(2)}}{;} \quad (5.44)$$

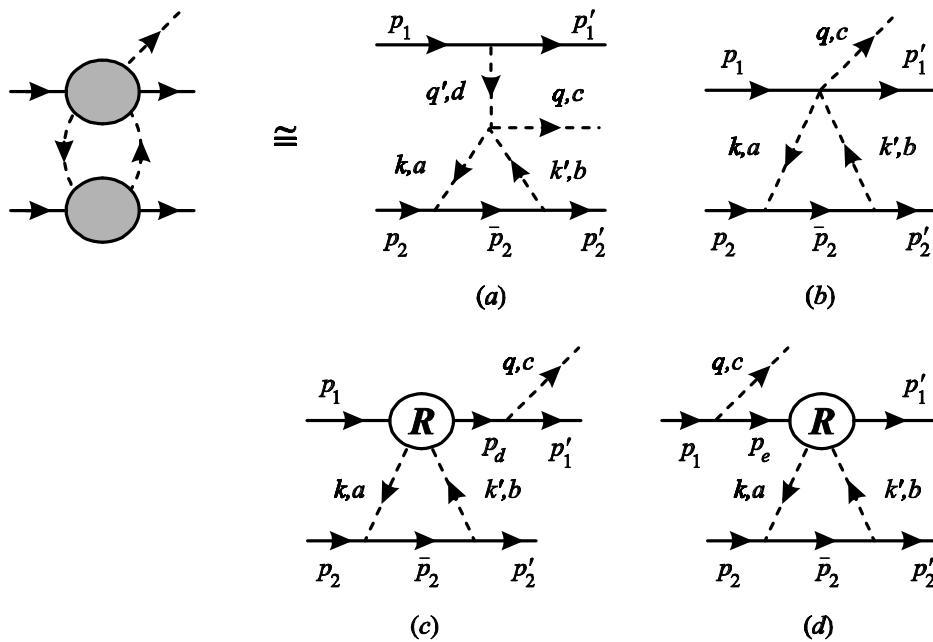


Figura 5.5: Contribuições para a amplitude NN ! $\frac{1}{4}NN$: (a) pólo do píon, (b) contato, (c) e (d) grá...cos z.

A partir de (3.51), as componentes da expressão (5.44) são

$$[T_A^{\frac{1}{4}}]^{(1)} = i \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \cdot 1 + \frac{k^2 i}{q^0 i} \frac{2k^0 q^0}{i^{12}} [\psi \circ_5 u]^{(1)} ; \quad (5.45)$$

$$[T_B^{\frac{1}{4}}]^{(1)} = i \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \cdot 1 + \frac{k^0 i}{q^0 i} \frac{2k^0 q^0}{i^{12}} [\psi \circ_5 u]^{(1)} ; \quad (5.46)$$

$$[T_C^{\frac{1}{4}}]^{(1)} = i \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \cdot 1 + \frac{q^2 i}{q^0 i} \frac{2q^0 q^0}{i^{12}} [\psi \circ_5 u]^{(1)} ; \quad (5.47)$$

$$\frac{\epsilon}{T_A^{ct}} \frac{\psi}{(1)} = i \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1}{4m} [\psi \circ_5 u]^{(1)} ; \quad (5.48)$$

$$\frac{\epsilon}{T_B^{ct}} \frac{\psi}{(1)} = i \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1}{2} [\psi \circ_5 u]^{(1)} i \frac{1}{4m} [\psi \circ_5 u]^{(1)} ; \quad (5.49)$$

$$\frac{\epsilon}{T_C^{ct}} \frac{\psi}{(1)} = i \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1}{2} [\psi \circ_5 u]^{(1)} + \frac{1}{4m} [\psi \circ_5 u]^{(1)} ; \quad (5.50)$$

$$[T_C^z]^{(1)} = i \frac{g_A}{2f_{\frac{1}{4}}} \frac{\psi}{(1)} \frac{1}{2} \frac{p_d + m}{p_d^2 i m^2} + \frac{p_e + m}{p_e^2 i m^2} \frac{1}{2} [\psi \circ_5 u]^{(1)} ; \quad (5.51)$$

com $p_d = p_1^0 + q$ e $p_e = p_1 i - q$:

Rearrajando os termos, obtemos

$$T_1 = i \frac{Z}{2} \frac{d^4 Q}{(2\frac{1}{4})^4} \frac{[(T_A^{\frac{1}{4}} + T_B^{\frac{1}{4}} + 3T_C^{\frac{1}{4}}) + (T_A^{ct} + T_B^{ct} + 3T_C^{ct}) + 3T_C^z]^{(1)} \frac{\epsilon}{T_N^+} \frac{\psi}{(2)}}{(k^2 i^{12}) (k^0 i^{12})} ; \quad (5.52)$$

com

$$[T_A^{\frac{1}{4}} + T_B^{\frac{1}{4}} + 3T_C^{\frac{1}{4}}]^{(1)} = i \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1}{3} + \frac{(k^2 i^{12}) + (k^0 i^{12}) + 3q^2 i}{q^0 i^{12}} \frac{4q^0 q^0}{i^{12}} [\psi \circ_5 u]^{(1)} ; \quad (5.53)$$

$$\frac{\epsilon}{T_A^{ct} + T_B^{ct} + 3T_C^{ct}} \frac{\psi}{(1)} = i \frac{2mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1}{2} [\psi \circ_5 u]^{(1)} + \frac{1}{4m} [\psi \circ_5 u]^{(1)} ; \quad (5.54)$$

$$[3T_C^z]^{(1)} = i \frac{3g_A}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{1}{2} \frac{p_d + m}{p_d^2 i m^2} + m \frac{p_e + m}{p_e^2 i m^2} \frac{1}{2} [\psi \circ_5 u]^{(1)} ; \quad (5.55)$$

É importante notar, na última equação, a existência de um termo de contato, que não é aparente na equação (5.51). Este termo, típico de sistemas com acoplamento PV, surge devido a fatores no numerador da expressão (5.51) que, devidamente manipulados, simplificam com o denominador que corresponde ao pólo do nucleon.

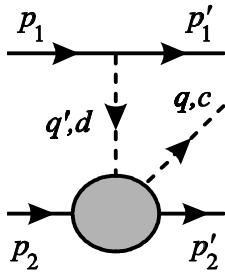


Figura 5.6: Reespalhamento do píon.

A expressão (5.53) está relacionada com o diagrama (5.5.a). Os termos proporcionais a $(k^2 i^{-12})$ e $(k^{02} i^{-12})$ desta expressão cancelam os propagadores piônicos do loop e, portanto, correspondem a efeitos de curto alcance, que não serão mais considerados. Assim, usando a equação (5.13), obtemos

$$T_1^{\frac{1}{4}} = i \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{1}{3 + \frac{3q^2 i^{-12}}{q^{02} i^{-12}} \frac{4q^0 q^{02}}{q^{02} i^{-12}}^{3/4}} [\bar{u} \circ_5 u]^{(1)} \frac{f}{i} \frac{f}{N}^{(2)} ; \quad (5.56)$$

onde $\frac{f}{i} \frac{f}{N}^{(2)}$ é dado pela equação (5.22).

Este resultado requer uma análise mais detalhada, pois nem todos os seus termos contribuem para o kernel da produção de um píon devido à troca de dois píons. Como discutiremos a seguir, uma parte desta expressão pode ser interpretada como o espalhamento do píon emitido em um dos nucleons pela nuvem piônica do outro. Este processo de reespalhamento, mostrado na figura (5.6), fornece

$$T_c^{\text{reesp}} = i \frac{g_A}{2f_{\frac{1}{4}}} \frac{1}{2} \frac{1}{q^{02} i^{-12}} T_{dc}^{(2)}(q^{02}; q^2) + (1) \$ (2) ; \quad (5.57)$$

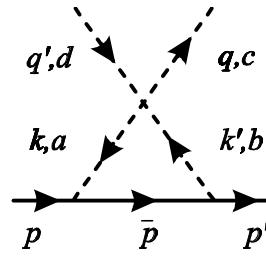
onde $T_{dc}^{(2)}(q^{02}; q^2)$ é a amplitude $\frac{1}{4}N$ no nucleon 2, para píons na camada de massa e fora dela. Com isso, a amplitude T_1 devido ao reespalhamento do píon é

$$T_1^{\text{reesp}} = i \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{1}{q^{02} i^{-12}} [\bar{u} \circ_5 u]^{(1)} \frac{f}{T^+(q^{02}; q^2)} \frac{f}{N}^{(2)} ; \quad (5.58)$$

No canal simétrico de isospin, a amplitude $\frac{1}{4}N$ intermediária satisfaz a identidade de Ward-Takahashi [BPP 71], dada por

$$T^+(q^{02}; q^2) = T_N^+ + \frac{q^{02} + q^2 i^{-12}}{f_{\frac{1}{4}}^2 i^{-12}} \frac{1}{4}(t) [\bar{u} u] + r^+ ; \quad (5.59)$$

onde T_N^+ e $\frac{1}{4}(t)$ são as funções discutidas anteriormente e r^+ é um resto que não inclui contribuições de ordem dominante. Esta amplitude pode ser reescrita destacando as contribuições dos píons na

Figura 5.7: Correção de um loop com amplitude $\frac{1}{4}$ intermediária para o espalhamento N .

camada de massa, $T^+(1^2; 1^2)$, e fora dela, $\pm T^+$, isto é,

$$T^+(q^0; q^2) = T^+(1^2; 1^2) + \pm T^+; \quad (5.60)$$

onde

$$T^+(1^2; 1^2) = T_N^+ + T_R^+; \quad \text{com} \quad T_R^+ = \frac{1}{f_{\frac{1}{4}}^2} \frac{1}{4}(t) [\mathbf{u} u] + r^+; \quad (5.61)$$

e

$$\pm T^+ = \frac{(q^0 i^{-1}) + (q^2 i^{-1})}{f_{\frac{1}{4}}^2} \frac{1}{4}(t) [\mathbf{u} u]; \quad (5.62)$$

No caso de píons na camada de massa, o diagrama da figura (5.7) fornece uma contribuição para T_R^+ ; dada por

$$T_R^+ \underset{(5.7)}{=} i \frac{i^Z}{2!} \frac{d^4 Q}{(2\frac{1}{4})^4} \frac{T^{\frac{1}{4}} T_N^+}{(k^2 i^{-1}) (k^0 i^{-1})} \quad (5.63)$$

com

$$\begin{aligned} T^{\frac{1}{4}} &= \frac{1}{f_{\frac{1}{4}}^2} \frac{n}{3} \frac{h}{(q i^{-1})^2 i^{-1}} + \frac{i}{(k^0 + q^0)^2 i^{-1}} + \frac{h}{(k i^{-1})^2 i^{-1}} \mathbf{io} \\ &= \frac{1}{f_{\frac{1}{4}}^2} \frac{1}{3} i^{-1} \frac{4 q \mathbf{t} q^0}{k^2 i^{-1}} + \frac{i}{k^2 i^{-1}} \mathbf{t} + \frac{i}{k^0 i^{-1}} \mathbf{t} \mathbf{io} \end{aligned} \quad (5.64)$$

Usando esta expressão na equação (5.58), obtemos ⁴

$$\begin{aligned} T_1^{\text{reesp}} \underset{(5.7)}{=} & i \frac{m g_A}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{1}{q^0 i^{-1}} [\mathbf{u} \circ_5 \mathbf{u}]^{(1)} - i \frac{1}{f_{\frac{1}{4}}^2} i^{-1} \frac{4 q \mathbf{t} q^0}{k^2 i^{-1}} \frac{i}{2} \frac{Z}{(2\frac{1}{4})^4} \frac{d^4 Q}{(k^2 i^{-1}) (k^0 i^{-1})} \frac{\mathbf{t} T_N^{\frac{1}{4}} \mathbf{t}^{(2)}}{k^2 i^{-1}} \\ & i \frac{i}{2f_{\frac{1}{4}}^2} \frac{Z}{(2\frac{1}{4})^4} \frac{\mathbf{t} T_N^{\frac{1}{4}} \mathbf{t}^{(2)}}{k^0 i^{-1}} i \frac{i}{2f_{\frac{1}{4}}^2} \frac{Z}{(2\frac{1}{4})^4} \frac{d^4 Q}{k^2 i^{-1}} \frac{\mathbf{t} T_N^{\frac{1}{4}} \mathbf{t}^{(2)}}{k^2 i^{-1}} \end{aligned} \quad (5.65)$$

⁴ Esta contribuição de $T^+(1^2; 1^2)$ pode, também, ser obtida a partir do coeficiente A_N^+ da equação (A.35) da referência [GSS 88], usando $\circ_B = i q \mathbf{t} q^0 = 2m$.

As duas últimas integrais desta expressão correspondem a correções de vértice, que representam efeitos de curto alcance. Desprezando estes efeitos e usando a equação (5.13), temos

$$T_1^{\text{reesp}} j_{(5.7)} = i \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{\frac{1}{2}}{q^0 i} \frac{3^{1/2} i}{q^0 i} \frac{4 q^0 q^0}{i^{1/2}} \frac{3/4}{[u \circ_5 u]^{(1)}} \frac{f}{i} \frac{u}{N} \frac{u}{(2)} : \quad (5.66)$$

A contribuição de $\pm T^+$, por outro lado, é obtida usando a equação (5.62) na (5.58) e produz

$$T_1^\pm = i \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{\frac{1}{2}}{3} + \frac{3 (q^2 i^{1/2})}{q^0 i^{1/2}} \frac{3/4}{[u \circ_5 u]^{(1)}} \frac{f}{i} \frac{u}{N} \frac{u}{(2)} \quad (5.67)$$

com a identidade (5.24).

Juntando as expressões (5.66) e (5.67), recuperamos o resultado (5.56), isto é,

$$T_1^{\frac{1}{4}} = T_1^{\text{reesp}} j_{(5.7)} + T_1^\pm : \quad (5.68)$$

Com isso, concluimos que T_1^\pm é a parte da amplitude $T_1^{\frac{1}{4}}$ que não contribui para o respalhamento de píons na camada de massa. Assim, para o kernel da produção de um píon devido à troca de dois píons, devemos fazer $T_1^{\frac{1}{4}} - T_1^\pm$:

A expressão (5.54), associada ao diagrama (5.5.b), é mais clara e produz

$$T_1^{\text{ct}} = i \frac{mg_A}{f_{\frac{1}{4}}^3} \frac{\frac{1}{2}}{2} [u \circ_5 u]^{(1)} + \frac{1}{2m} [u \circ_5 u]^{(1)} \frac{3/4}{[u \circ_5 u]^{(1)}} \frac{f}{i} \frac{u}{N} \frac{u}{(2)} : \quad (5.69)$$

Como podemos observar, a componente pseudoescalar desta amplitude cancela parcialmente a da amplitude (5.67)⁵. Usando a relação (5.24), podemos escrever a soma das amplitudes (5.67) e (5.69) como

$$T_1^\pm + T_1^{\text{ct}} = i \frac{g_A}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{\frac{1}{4}(t)}{i^{1/2}} \frac{\frac{1}{2}}{m} \frac{\mu}{3} + \frac{q^2 i^{1/2}}{q^0 i^{1/2}} \frac{\frac{1}{2}}{[u \circ_5 u]^{(1)}} i \frac{1}{6f_{\frac{1}{4}}^2} [u \circ_5 u]^{(1)} \frac{3/4}{[u u]^{(2)}} [u u]^{(2)} : \quad (5.70)$$

A expressão (5.55), diagramas (c) e (d) da figura (5.5), produz

$$\begin{aligned} T_1^z &= i \frac{3g_A}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{\frac{1}{2}}{i^{1/2}} \frac{\frac{1}{2}}{u \circ_5 u + m \circ_5 u} \frac{\frac{1}{2}}{(p^0 + q)^2 i} \frac{\frac{1}{2}}{m^2} + m \frac{\frac{1}{2} i}{(p i - q)^2 i} \frac{\frac{1}{2}}{m^2} \circ_5 u \frac{3/4}{[u \circ_5 u]^{(1)}} \frac{f}{i} \frac{u}{N} \frac{u}{(2)} \\ &= i \frac{g_A}{f_{\frac{1}{4}}} \frac{\frac{1}{4}(t)}{i^{1/2}} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{13}} [u \circ_5 u]^{(1)} i \frac{2m}{(p^0 + q)^2 i} \frac{3/4}{[u \circ_5 u]^{(1)}} [u u]^{(2)} ; \end{aligned} \quad (5.71)$$

onde usamos a equação de Dirac, a identidade (5.24) e a simetria pelas trocas $p_1 \leftrightarrow p_1^0$ e $q \leftrightarrow i q$.

⁵Este cancelamento nasce do mesmo mecanismo apresentado na seção 3 do capítulo 3.

Somando as equações (5.70) e (5.71), obtemos

$$T_1 = i \frac{g_A}{f_{1/4}} \frac{\frac{3}{4}(t)}{1^2} \frac{1}{f_{1/4}^2} \frac{\mu}{3} + \frac{q^2 i^{1/2}}{q^0 i^{1/2}} \frac{\Gamma}{1} [u^+ \bar{u}]^{(1)} i \cdot \frac{1}{6f_{1/4}^2} + \frac{2m \frac{\Gamma_{00}^+ = 1}{(p_1^0 + q)^2 i m^2}}{[u^+ \bar{u}]^{(1)} [u^+ \bar{u}]^{(2)}} \frac{\Gamma}{1} : (5.72)$$

Este resultado representa a contribuição dominante à amplitude do processo $N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$ e é válido para o caso de o píon externo ser real ($q^2 = 1^2$). No caso deste píon ser virtual, esta expressão deve ser usada com cautela, como discutiremos na seção 5.6.

5.3 Kernel da Produção

Para usar o resultado da seção anterior com funções de onda nucleares, é necessário deduzir um kernel não-relativístico a partir da amplitude T_1 . Esta amplitude inclui a propagação de estados de energia positiva (+) e negativa (i), incorporados no propagador covariante

$$\frac{\not{p} + m}{\not{p}^2 i m^2} = S_+(\not{p}) + S_i(\not{p}); \quad (5.73)$$

onde

$$S_+(\not{p}) = \frac{1}{2E} \frac{\not{p} u^s(\not{p}) \bar{u}^s(\not{p})}{\not{p}_0 i \not{E}} = \frac{1}{2E} \frac{\not{E} i \not{p} + m}{\not{p}_0 i \not{E}} = \frac{1}{2E} \frac{\mu \not{p} + m}{\not{p}_0 i \not{E}} i \not{E} \frac{\Gamma}{1} \quad (5.74)$$

e

$$S_i(\not{p}) = \frac{1}{2E} \frac{\not{p} v^s(i \not{p}) \bar{v}^s(i \not{p})}{\not{p}_0 + \not{E}} = \frac{1}{2E} \frac{\not{E} + \not{p} i m}{\not{p}_0 + \not{E}}; \quad (5.75)$$

com $\not{E} = \frac{\not{p}}{m^2 + \not{p}^2}$:

A propagação dos estados de energia positiva está incluída nas funções de onda nucleares e, por isso, deve ser subtraída da amplitude para evitar dupla contagem. Esta contribuição está contida em T_1^+ ; e a parte com energia negativa, $T_1^+ i$; é obtida substituindo os propagadores da equação (5.55) por⁶

$$S_i(\not{p}) = \frac{\not{p} + m}{\not{p}^2 i m^2} i \quad S_+(\not{p}) = \frac{1}{2E} \frac{\mu}{\not{p}_0 i} \frac{\not{p} + m}{\not{p}_0 + \not{E}} \frac{\Gamma}{1} \quad (5.76)$$

⁶Esta substituição não pode ser realizada na expressão (5.51) porque, como já dissemos, nela não é possível distinguir claramente propagadores e termos de contato.

com $\beta = p_d$ e $\beta = p_e$; isto é,

$$\begin{aligned}
 T_{1j_i}^z &= i \frac{3g_A}{f_{1/4}} \frac{\frac{\mu}{m} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1} \left(\frac{m}{2E_d} \right) \left(\frac{\mu}{p_d^0 + E_d} \right) \left(\frac{\mu}{p_e^0 + E_e} \right) \left(\frac{1}{5} \right)^{3/4} u^{(1)} \bar{u}^{(2)} \\
 &= i \frac{g_A}{f_{1/4}} \frac{\frac{1}{2}(t)}{12} \frac{\frac{\mu}{m} \cdot \frac{1}{2}}{1} \left[\left(\frac{m}{E_e} \right) \left(\frac{m}{E_d} \right) \left(\frac{\mu}{p_e^0 + E_e} \right) \left(\frac{\mu}{p_d^0 + E_d} \right) \left(\frac{1}{5} \right)^{3/4} u^{(1)} \bar{u}^{(2)} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{p_d^0 + q_0 + E_d} \right) \left(\frac{\mu}{p_e^0 + q_0 + E_e} \right) \left(\frac{1}{5} \right)^{3/4} u^{(1)} \bar{u}^{(2)} : \quad (5.77)
 \end{aligned}$$

O kernel corresponde à parte da amplitude T_1 , equação (5.72), com propagação de estados de energia negativa,

$$K_1 = T_1^{\pm} + T_1^{ct} + T_1^z j_i ; \quad (5.78)$$

logo

$$K_1 = i \frac{g_A}{f_{1/4}} \frac{3/4(t)}{12} \frac{\mu}{3f_{1/4}^2} + \frac{\mu_{00}^+}{1} [\psi^0 {}_5 u]^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{E_e} i \frac{m}{E_d} [\psi^0 {}_0 {}^{\circ} {}_5 u]^{(1)} \\ \cdot i \frac{1}{6f_{1/4}^2} i \frac{\mu_{00}^+}{2^1} \frac{m=E_d}{p_0^0 + q_0 + E_d} + \frac{m=E_e}{p_0 + q_0 + E_e} [\psi \phi^0 {}_5 u]^{(1)} [\psi u]^{(2)} : \quad (5.79)$$

No centro de massa e no limite estático, os elementos das matrizes são dados por

$$\begin{aligned}
 [\mathfrak{U} u]^{(2)} &\cong 2m; \\
 {}^o {}_5 u]^{(1)} &\cong {}^3/4 {}^{(1)}\mathfrak{C} (p_i - p^0); \tag{5.80} \\
 {}^o {}_5 u]^{(1)} &\cong {}^1 {}^3/4 {}^{(1)}\mathfrak{C} (p + p^0)_i - 2m {}^3/4 {}^{(1)}\mathfrak{C} q; \\
 {}^o {}_5 u]^{(1)} &\cong {}^1 {}^3/4 {}^{(1)}\mathfrak{C} (p_i - p^0)_i - 2m {}^3/4 {}^{(1)}\mathfrak{C} q;
 \end{aligned}$$

Com isso,⁷

$$\begin{aligned} \cdot 1 \stackrel{E!}{\stackrel{cm}{\equiv}} \frac{K_1}{4m^2} \gg i \frac{1}{4m^2} \frac{g_A}{f_{1/4}} \frac{\frac{3}{4}(t)}{1^2} \frac{\frac{1}{2}\mu}{3f_{1/4}^2} + \frac{\mathbb{R}_{00}^+}{1} \frac{\mathbb{P}}{\frac{3}{4}(1)} \frac{c}{(p_i - p^0)} \\ i \cdot \frac{1}{6f_{1/4}^2} i \frac{\mathbb{R}_{00}^+}{2^1} \frac{\mu}{\frac{1}{2m+1}} + \frac{1}{2m_i^{-1}} \frac{\mathbb{P}_s}{\frac{1}{3}(1)} \frac{f}{\frac{3}{4}(1)} \frac{c}{(p + p^0)} i \frac{2m}{2m} \frac{\frac{3}{4}(1)}{q} \frac{\mathbb{R}^{3/4}}{2m} : \end{aligned} \quad (5.81)$$

⁷O fator $4m^2$ surge da diferença entre as normalizações relativística e não-relativística dos nucleons, relação (4.33).

Desprezando pequenos termos, obtemos

$$\cdot_1 \geq i \frac{g_A}{2mf_{1/4}} \frac{3/4(t)}{12} \cdot \mu \frac{m}{3f_{1/4}^2} + \frac{^{(00)}\Pi}{1} \frac{3/4^{(1)}\Phi(p_1 \cdot p^0)}{1} + \frac{\mu}{3f_{1/4}^2} i \frac{^{(00)}\Pi}{1} \frac{3/4^{(1)}\Phi q}{1} ; \quad (5.82)$$

ou, alternativamente,

$$\cdot_1 \geq i \frac{g_A}{2mf_{1/4}} \frac{3/4(t)}{12} \cdot i \frac{\mu}{3f_{1/4}^2} \frac{m}{1} + \frac{^{(00)}\Pi}{1} \frac{3/4^{(1)}\Phi}{1} + \frac{2m}{3f_{1/4}^2} \frac{3/4^{(1)}\Phi q}{1} ; \quad (5.83)$$

onde $\Phi = q + p^0 \cdot p$:

Este kernel pode ser aplicado tanto ao estudo da produção de um píon no limiar da colisão entre dois nucleons como na construção de forças de três nucleons. No primeiro caso, $t \geq 1^2 = 4$ e Φ^2 e no segundo, $t \geq 1 \cdot \Phi^2$ [CPR 95] e [MR 98]. Para testar a influência destes valores diferentes de t sobre os resultados, mostramos na figura (5.8) a transformada de Fourier da função $3/4(t)$, que dita a dependência espacial do kernel nos dois casos. Este gráfico indica que a componente de energia do quadrimomento transferido tem pouca importância e, portanto, o resultado estático também pode ser aplicado ao kernel da produção. Isso é interessante, porque permite relacionar o kernel da produção diretamente ao potencial central isoescalar, expressão (5.31),

$$\cdot_1 \geq i \frac{g_A}{2mf_{1/4}} \cdot i \frac{m}{6^{(00)}\Pi f_{1/4}^2} + \frac{1}{2} \frac{3/4^{(1)}\Phi}{1} + \frac{m}{3^{(00)}\Pi f_{1/4}^2} \frac{3/4^{(1)}\Phi q}{1} t_{2/4}(\Phi) ; \quad (5.84)$$

Para estimar a importância relativa dos dois termos entre colchetes, colocamos na equação (5.84) os valores numéricos extremos para $^{(00)}\Pi$ encontrados na literatura, 3,68 [Hoh 83] e 6,74 [KH 99], e obtemos

$$\cdot_1 \geq i \frac{g_A}{2mf_{1/4}} \frac{h}{1; 18} \frac{3/4^{(1)}\Phi}{1} + 1; 37 \frac{3/4^{(1)}\Phi q}{1} t_{2/4}(\Phi) \quad (5.85)$$

ou

$$\cdot_1 \geq i \frac{g_A}{2mf_{1/4}} \frac{h}{0; 87} \frac{3/4^{(1)}\Phi}{1} + 0; 75 \frac{3/4^{(1)}\Phi q}{1} t_{2/4}(\Phi) ; \quad (5.86)$$

Estes resultados sugerem que, dentro das aproximações consideradas neste trabalho, podemos escrever

$$\cdot_1 \geq i \frac{g_A}{2mf_{1/4}} \frac{3/4^{(1)}\Phi(p_1 \cdot p^0)}{1} t_{2/4}(\Phi) ; \quad (5.87)$$

onde $p_1 \cdot p^0 = q \cdot \Phi$:

O kernel, tal como dado nas equações (5.84) e (5.87), constitui um dos principais resultados deste capítulo, e suas consequências são discutidas na próxima seção.

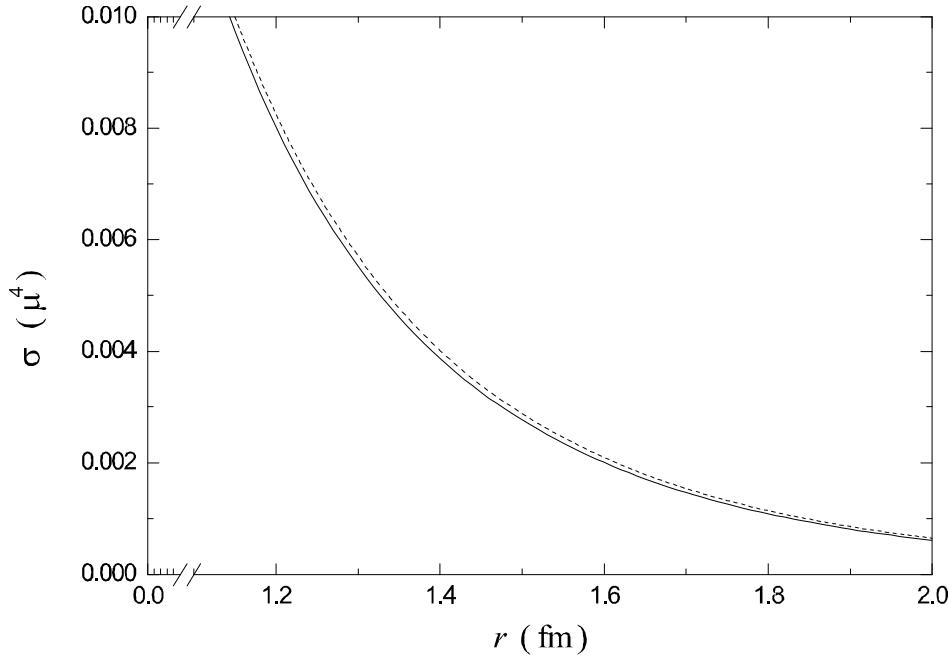


Figura 5.8: Transformada de Fourier de $\frac{3}{4}(i \Phi^2)$ para a força de três corpos (linha contínua) e de $\frac{3}{4}(1^2=4 i \Phi^2)$ para a produção de um píon no limiar (linha tracejada), em função da distância r .

5.4 Generalização

Os resultados, neste capítulo, foram obtidos no contexto de modelos quirais particulares, em que usamos apenas as principais contribuições dos processos intermediários. O modelo para a interação de dois corpos, representado na figura (5.2), produz uma amplitude isoescalar que corresponde, no espaço de configuração, à componente central isoescalar do potencial NN. Na produção do píon, o modelo adotado, figura (5.5), fornece uma expressão para o kernel, equação (5.84), proporcional à amplitude isoescalar da interação NN. A versão aproximada desta expressão, equação (5.87), é parecida com a obtida por Maekawa e Robilotta [MR 98] com um outro modelo quiral, baseado em um mésón escalar-isoescalar octíctico (s) e $g_A = 1$,

$$\cdot_s \cong i \frac{1}{2m f_\pi} \frac{3}{4} \frac{1}{(q \cdot \Phi)} t_s(\Phi) : \quad (5.88)$$

A semelhança qualitativa entre \cdot_1 e \cdot_s reflete uma característica comum nestes kernels, a de que ambos são proporcionais a uma amplitude NN escalar-isoescalar. Esta característica se deve à re-

lação entre a interação NN devida à troca de dois píons e a do méson ...ctício. A componente central do potencial NN devido à troca de dois píons não correlacionados pode ser expressa naturalmente em termos de $\frac{3}{4}(t)$, o fator de forma escalar. Esta função é relacionada ao termo sigma $\frac{1}{4}N$ e pode, se o desejarmos, ser parametrizada como uma troca de méson escalar efetivo.⁸

A proporcionalidade entre o kernel e a componente escalar-isoescalar do potencial NN não é uma particularidade dos modelos adotados neste trabalho e na referência [MR 98]. Ao contrário, ela deve ter validade bastante geral. A razão para essa generalidade deriva de uma constatação antiga de Nambu et al. [NL 62] [NS 62] e Weinberg [Wei 66] no contexto da álgebra de correntes, a de que, para dois estados genéricos A e B, a contribuição dominante do processo A ! $\frac{1}{4}B$ é obtida pela inserção do píon, com acoplamento derivativo, nas linhas externas do processo A ! B. No caso do processo NN ! $\frac{1}{4}NN$ devido à troca de dois píons, a contribuição dominante da amplitude deve, então, ser proporcional à componente escalar-isoescalar da amplitude do espalhamento NN devido à troca de dois píons. Isso corresponde claramente à relação não-relativística (5.84) ou, de forma menos explícita, à relação relativística (5.72), onde a componente escalar-isoescalar está associada ao fator de forma escalar.

Assim, podemos generalizar o kernel da produção para qualquer amplitude NN escalar-isoescalar. Para a relação (5.87), esta generalização é dada pela expressão

$$\cdot_1 \cong i \frac{g_A}{2m_{\frac{1}{4}}} \frac{3}{4}^{(1)}\mathbb{C}(q_i \cdot \Phi) t(\Phi); \quad (5.89)$$

onde $t(\Phi)$ representa uma interação escalar-isoescalar qualquer. Esta situação está esquematizada na ...gura (5.9).

No espaço de con...guração, a generalização implica, no caso da força de três nucleons, que kernel e potencial têm dependências espaciais semelhantes e, no caso da produção do píon no limiar, que esta relação também é aproximadamente válida. Estes resultados nos permitem produzir expressões que relacionem o kernel diretamente a um potencial escalar-isoescalar favorito, tal como o de Argonne. Para usar esse resultado nos cálculos de processos físicos é preciso avaliar o potencial numericamente e, em seguida, o sanduíche do kernel entre as funções de onda de dois nucleons. Uma vez que o kernel e o potencial central estão intimamente relacionados e, por consistência, podemos usar a mesma dinâmica na construção do operador \cdot_1 e das funções de onda.

⁸Como discutimos anteriormente, o acoplamento deste estado com nucleons desaparece no limite de quiral e, conseqüentemente, este méson escalar não corresponde àquele presente no modelo $\frac{3}{4}$ -linear. Com isso, a troca do méson ...ctício na interação NN pode ser vista como uma simplificação da troca de dois píons.

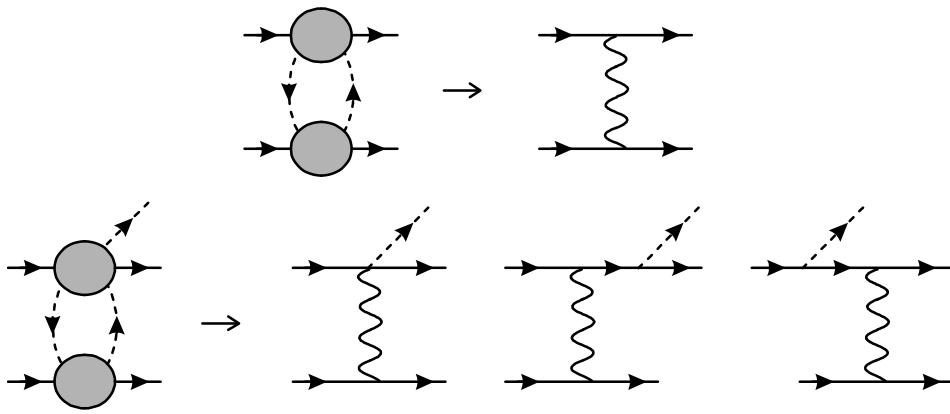


Figura 5.9: A figura superior indica a generalização da componente escalar-isoscalar do potencial NN: a dinâmica à esquerda é trocada pela componente equivalente de um potencial qualquer, indicado pela linha ondulada. A figura inferior representa o mesmo tipo de generalização para o kernel.

5.5 Produção no Limiar

No limiar da produção de um píon ($q \neq 0$), o kernel dado pela relação geral (5.89) assume a forma

$$\cdot_1(\Phi) \cong i \frac{g_A}{2m f_{\frac{1}{4}}} \frac{3}{4} \epsilon^{(1)} \Phi t(\Phi); \quad (5.90)$$

Fazendo a transformada de Fourier e usando a equação (4.36), obtemos o kernel no espaço de configuração,

$$\cdot_1(x) \cong \frac{g_A}{2f_{\frac{1}{4}}} \frac{1}{m} \frac{3}{4} \epsilon^{(1)} \epsilon r_x V(x); \quad (5.91)$$

onde o gradiente opera sobre a variável x e

$$V(x) = i \frac{d^3 \Phi}{(2\frac{1}{4})^3} e^{i x \cdot \Phi} t(\Phi); \quad (5.92)$$

A relação (5.91) é nova e interessante, pois permite obter o kernel da produção sem a necessidade do estudo da dinâmica da interação de dois corpos, que pode ser incorporada num potencial NN teórico ou fenomenológico bem estabelecido.

Para estudar as características de $\cdot_1(x)$, tomamos $V(x)$ como sendo o potencial desenvolvido na seção 5.1, dado por

$$V_{2\frac{1}{4}}(x) = i 2 \frac{\frac{g^2}{13}}{\frac{1}{13}} \frac{3}{4} \frac{1}{4} \frac{h}{4} S_{cc}(x) + S_{sc}(x) i^{3/4}; \quad (5.93)$$

com

$$S_{cc}(x) = \frac{Z_1}{d^0} \frac{Z_1}{d^0} \frac{e^{i \frac{x}{x}}}{x}; \quad S_{sc}(x) = \frac{2m^2}{12} \frac{Z_1}{d^0} \frac{Z_1}{d^0} \frac{(1 i^0)(1 i^-)}{(1 i^0)^-} \frac{e^{i \frac{x}{x}}}{x} \quad (5.94)$$

e

$$\frac{e^2}{x^2} = \frac{1}{(1 i^0)^-}; \quad \frac{e^2}{x^2} = \frac{(1 i^0)^2 (1 i^-)^2 (m^2)^2}{(1 i^0)^-} \frac{(1 i^0)(1 i^-) + 1}{(1 i^0)^-}; \quad (5.95)$$

Usando o gradiente da função de Yukawa em coordenadas esféricas

$$r_x \frac{\mu e^{i \frac{x}{x}}}{x} = i \hat{r} \frac{\mu}{x} + \frac{1}{x} \frac{\mu}{x} \frac{e^{i \frac{x}{x}}}{x}; \quad (5.96)$$

e escolhendo o potencial da equação (5.31), obtemos

$$\begin{aligned} \cdot_1(x) \cong & \frac{g_A}{2f_{1/4}} \frac{1}{m} \frac{3/4}{1} \frac{(1) \hat{r}}{x} - 2 \frac{2}{13} \frac{g^2}{2m} \frac{3}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{Z_1}{d^0} \frac{Z_1}{d^0} \frac{e^2}{x} + \frac{1}{x} \frac{\mu}{x} \frac{e^{i \frac{x}{x}}}{x} \\ & i \frac{2m^2}{12} \frac{Z_1}{d^0} \frac{Z_1}{d^0} \frac{(1 i^0)(1 i^-)}{(1 i^0)^-} \frac{\mu}{x} + \frac{1}{x} \frac{\mu}{x} \frac{e^{i \frac{x}{x}}}{x}^{3/4} \end{aligned} \quad (5.97)$$

Alternativamente, para o potencial devido à troca do méson escalar, temos

$$\cdot_s(x) \cong i \frac{g_A}{2f_{1/4}} \frac{1}{m} \frac{3/4}{1} \frac{(1) \hat{r}}{x} \frac{\mu}{m_s} + \frac{1}{x} \frac{\mu}{x} V_s(x); \quad (5.98)$$

onde

$$V_s(x) = i \frac{g_s^2}{4f_{1/4}} \frac{1}{x} \frac{e^{i \frac{x}{x}}}{x^{m_s-1}}; \quad (5.99)$$

e para o potencial de Argonne,

$$\cdot_A(x) \cong i \frac{g_A}{2f_{1/4}} \frac{1}{m} \frac{3/4}{1} \frac{(1) \hat{r}}{x} \frac{\mu}{x} \frac{6}{x} + \frac{2x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 3} \frac{\mu}{x} V_A(x); \quad (5.100)$$

onde

$$V_A(x) = I_C \frac{\mu}{1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}} \frac{\mu_2}{x^2} \frac{e^{i \frac{2x}{x}}}{x^2}; \quad (5.101)$$

com $I_C \cong i 4.8 \text{ MeV}$.

Os gráficos desses potenciais são apresentados na figura (5.10). As curvas dessas funções são semelhantes, sendo $V_{2/4}(x)$ e $V_s(x)$ mais próximas quanto à intensidade.

Uma característica interessante destes resultados é que todos eles são proporcionais a $1=m$; o que poderia sugerir que o kernel seria, de alguma forma, pequeno. Esta impressão é reforçada pelo

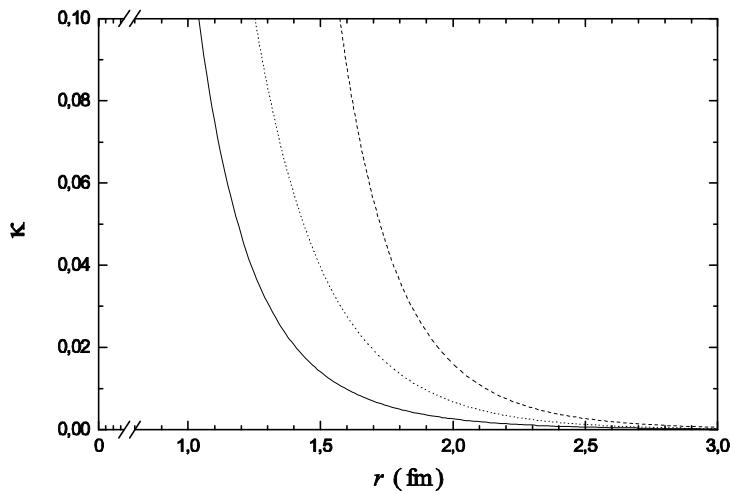


Figura 5.10: Kernels derivados dos potenciais $V_{2/4}(x)$ (linha contínua), $V_s(x)$ (linha pontilhada) e $V_A(x)$ (linha tracejada).

fato de que a expressão (5.90), no espaço dos momentos, contém o fator $j \cdot \nabla j = m$ que, ingenuamente, poderia ser tomado da ordem de $1/m$. A ...ura (5.11) mostra a razão adimensional

$$R = \frac{1}{m} j \cdot \nabla_x V(x) j = j V(x) j \quad (5.102)$$

para os três potenciais considerados. Inspecionando esta ...ura, podemos notar que esta razão é comparável a 1, indicando que o fator $1/m$ é, na verdade, compensado pela ação do gradiente sobre o potencial.

Esta indicação é con...rmada no trabalho de Maekawa e Rocha [MR 99], onde a aplicação do kernel com méson escalar aumenta a seção de choque dos processos $pp \rightarrow pp^{1/2}0$ e $pp \rightarrow pd^{1/2}+$, subestimada nos termos de impulso e reespalhamento, ajustando a escala dos resultados teóricos, como mostra a ...ura (5.12).

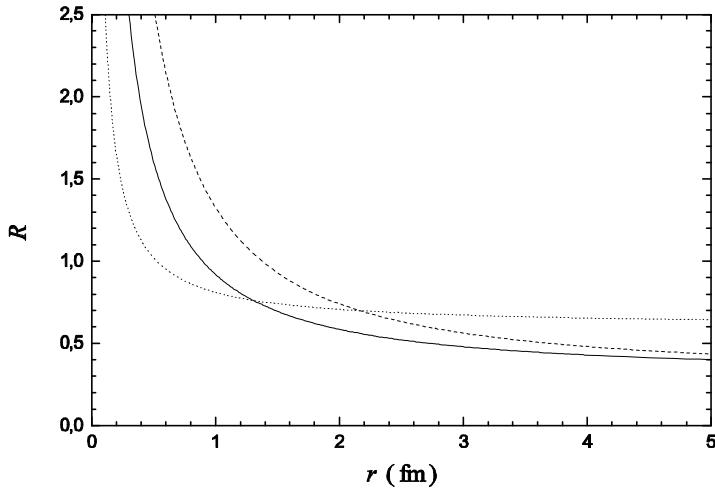


Figura 5.11: Gráfico de R , equação (razão), para $V = V_{2\frac{1}{4}}$ (linha contínua), $V = V_s$ (linha pontilhada) e $V = V_A$ (linha tracejada).

5.6 Potencial de Três Nucleons

No espaço de momentos, o potencial do espalhamento de três nucleons é dada pela relação

$$\hbar p_1^0; p_2^0; p_3^0 \hat{W} p_1; p_2; p_3 i_{cm} = i (2\frac{1}{4})^3 \pm (p_1^0 + p_2^0 + p_3^0 i p_1 i p_2 i p_3) t_{3N}; \quad (5.103)$$

com

$$t_{3N} \stackrel{cm}{=} \frac{1}{(2E)^3} T_{3N}; \quad (5.104)$$

onde T_{3N} corresponde à amplitude própria deste espalhamento.

A componente mais importante e de maior alcance do potencial de três nucleons é a devida à troca de dois píons ($2\frac{1}{4}$), dada pelo diagrama (a) da figura (5.13). O processo de ordem seguinte, na hierarquia de distâncias das interações nucleares, corresponde aos diagramas (b) e (c), envolvendo três píons ($3\frac{1}{4}$). Estes desenhos, sem ambiguidades aparentes, sugerem que o primeiro diagrama pode ser construído a partir da amplitude de espalhamento $\frac{1}{4}N$ e o segundo, a partir do kernel desenvolvido nas seções anteriores deste capítulo. Nesta seção, entretanto, mostramos que, de fato, esta interpretação pode envolver uma dupla contagem.

A bolha hachurada do diagrama (a) representa a amplitude de espalhamento elástico $\frac{1}{4}N$, cuja forma geral é dada pela identidade de Ward-Takahashi. No canal simétrico de isospin, este

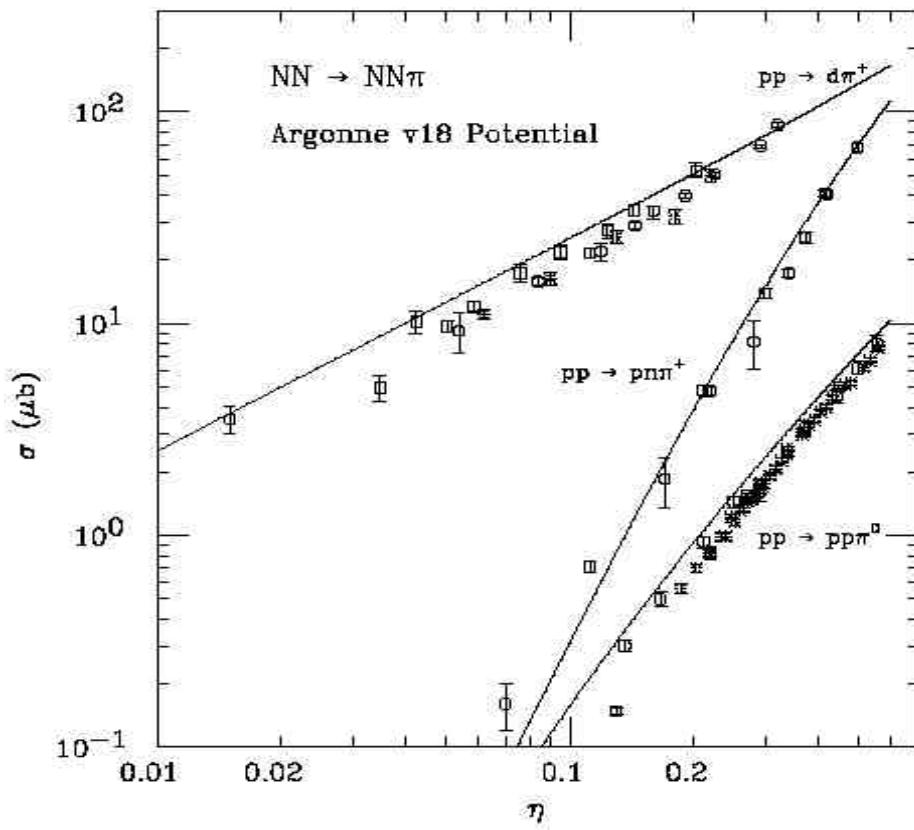


Figura 5.12: Seções de choque para as reações $pp \rightarrow pp\pi^0$ e $pp \rightarrow pp\pi^+$ em função do momento do píon $\vec{q} = \vec{q}^{-1}$ [MR 99].

diagrama corresponde a

$$\begin{aligned}
 T_{3N} &= \dot{\epsilon}^{(1)} \dot{\epsilon}^{(3)} \frac{\mu}{2f_{1/4}} \frac{\Pi_2}{[i \bar{u} \bar{\epsilon}^0 \bar{u}]} [i \bar{u} \bar{\epsilon}^0 \bar{u}]^{(1)} \frac{i}{q^2 i^{-12}} T^+(q^2, q^2) \frac{i}{q^2 i^{-12}} [i \bar{u} \bar{\epsilon}^0 \bar{u}]^{(3)} \\
 &= i \dot{\epsilon}^{(1)} \dot{\epsilon}^{(3)} \frac{\mu mg_A}{f_{1/4}} \frac{\Pi_2}{(q^2 i^{-12})(q^2 i^{-12})} [i \bar{u} \bar{\epsilon}^0 \bar{u}]^{(1)} T^+(1^2; 1^2) + \pm T^+(2^2) [i \bar{u} \bar{\epsilon}^0 \bar{u}]^{(3)}; \quad (5.105)
 \end{aligned}$$

onde $T^+(1^2; 1^2)$ e $\pm T^+(2^2)$ são as amplitudes $\frac{1}{4}N$ simétricas para píons na camada de massa e fora dela, dadas pelas equações (5.61) e (5.62).

O termo contendo a amplitude para píons na camada de massa gera, de fato, um potencial que envolve apenas dois píons virtuais [CDR 83] [RICD 85] [RC 86]. O termo proporcional aos píons fora da camada de massa, por outro lado, é ambíguo e pode ser escrito através da função dada em (5.62) como

$$\pm T_{3N} = i \dot{\epsilon}^{(1)} \dot{\epsilon}^{(3)} \frac{\mu mg_A}{f_{1/4}^2} \frac{\Pi_2}{q^2 i^{-12}} \frac{1}{q^2 i^{-12}} + \frac{1}{q^2 i^{-12}} \frac{\Pi}{[i \bar{u} \bar{\epsilon}^0 \bar{u}]^{(1)} [i \bar{u} \bar{\epsilon}^0 \bar{u}]^{(2)} [i \bar{u} \bar{\epsilon}^0 \bar{u}]^{(3)}}; \quad (5.106)$$

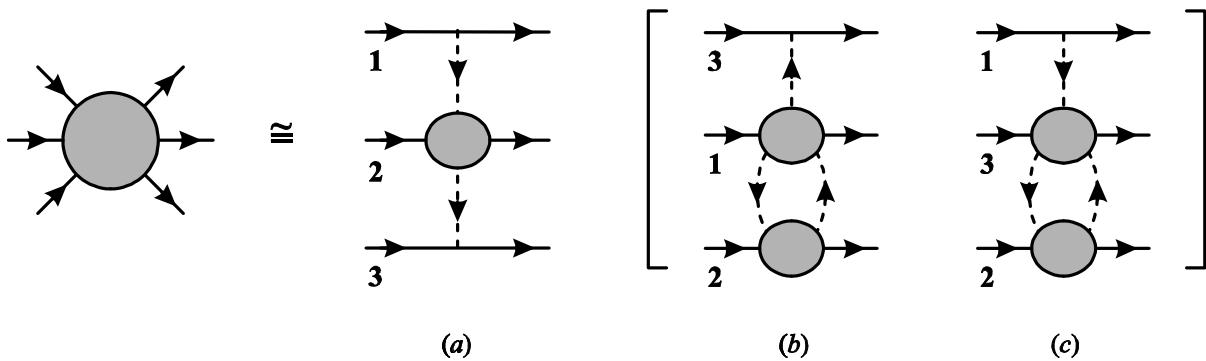


Figura 5.13: Contribuições da troca de dois píons, diagrama (a), e três píons, diagramas (b) e (c), para o espalhamento de três nucleons.

com $q = p_3^0 + p_3$; $q^0 = p_1 + p_1^0$ e $\Phi = p_2 + p_2^0$:

Passando para o formalismo não-relativístico e usando a equação (5.29), podemos escrever

$$\begin{aligned} \pm t_{3N} &= \mathcal{L}^{(1)} \mathcal{L}^{(3)} \frac{3^1}{2^0 (2m)^2} \frac{1}{f_{1/4}^3} \frac{mg_A}{f_{1/4}^3} \frac{1}{(p_1 + p_1^0)^2} t_{2/4}(\Phi) \frac{1}{q^2 + 1^2} \frac{mg_A}{f_{1/4}^3} \frac{1}{(p_3 + p_3^0)^2} \\ &+ \frac{mg_A}{f_{1/4}^3} \frac{1}{(p_1 + p_1^0)^2} \frac{1}{q^2 + 1^2} \frac{mg_A}{f_{1/4}^3} \frac{1}{(p_3 + p_3^0)^2} t_{2/4}(\Phi) \end{aligned} \quad (5.107)$$

Esses resultados mostram que o uso da amplitude $1/4N$ fora da camada de massa dá origem a contribuições que envolvem a troca de três píons.

Para compreender melhor a origem deste problema, consideraremos as contribuições dos diagramas (b) e (c) da figura (5.13), associados à amplitude de produção de píons.

A principal contribuição para T_{3N} vem dos diagramas da figura (5.14), que envolvem tanto processos próprios (a), (b) e (c), incorporados nos propagadores dos píons como outros em que o OPEP e o TPEP são relacionados por um propagador de antinucleon (d), (e), (f) e (g).

O cálculo direto do diagrama (a) fornece

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{T_1^\pm}^{(3)} &= T_1^\pm \frac{i}{q^2 + 1^2} \frac{1}{2f_{1/4}} \frac{g_A}{f_{1/4}} \mathbf{\Phi}^\circ \mathbf{u}^{(3)} \\ &= i \frac{\mu}{f_{1/4}^2} \frac{mg_A}{f_{1/4}^2} \frac{\mathbf{\Pi}_2 \mathbf{\Pi}}{q^2 + 1^2} + \frac{3}{q^2 + 1^2} \frac{\mathbf{\Pi}}{3} [\mathbf{\Phi}^\circ \mathbf{u}]^{(1)} \mathbf{f}_{i_N^\pm}^{(2)} [\mathbf{\Phi}^\circ \mathbf{u}]^{(3)}; \end{aligned} \quad (5.108)$$

onde passamos a omitir os termos no espaço de isospin, $\mathcal{L}^{(1)} \mathcal{L}^{(3)}$.

Lembrando que $3^1 \mathbf{f}_{i_N^\pm}^{(2)} = \frac{3}{4}(\mathbf{t}) [\mathbf{\Phi} \mathbf{u}]$; notamos que esta amplitude é idêntica à expressão (5.106). Isso não é surpreendente, já que os kernels dos diagramas (5.13.b) e (5.13.c) já incluem

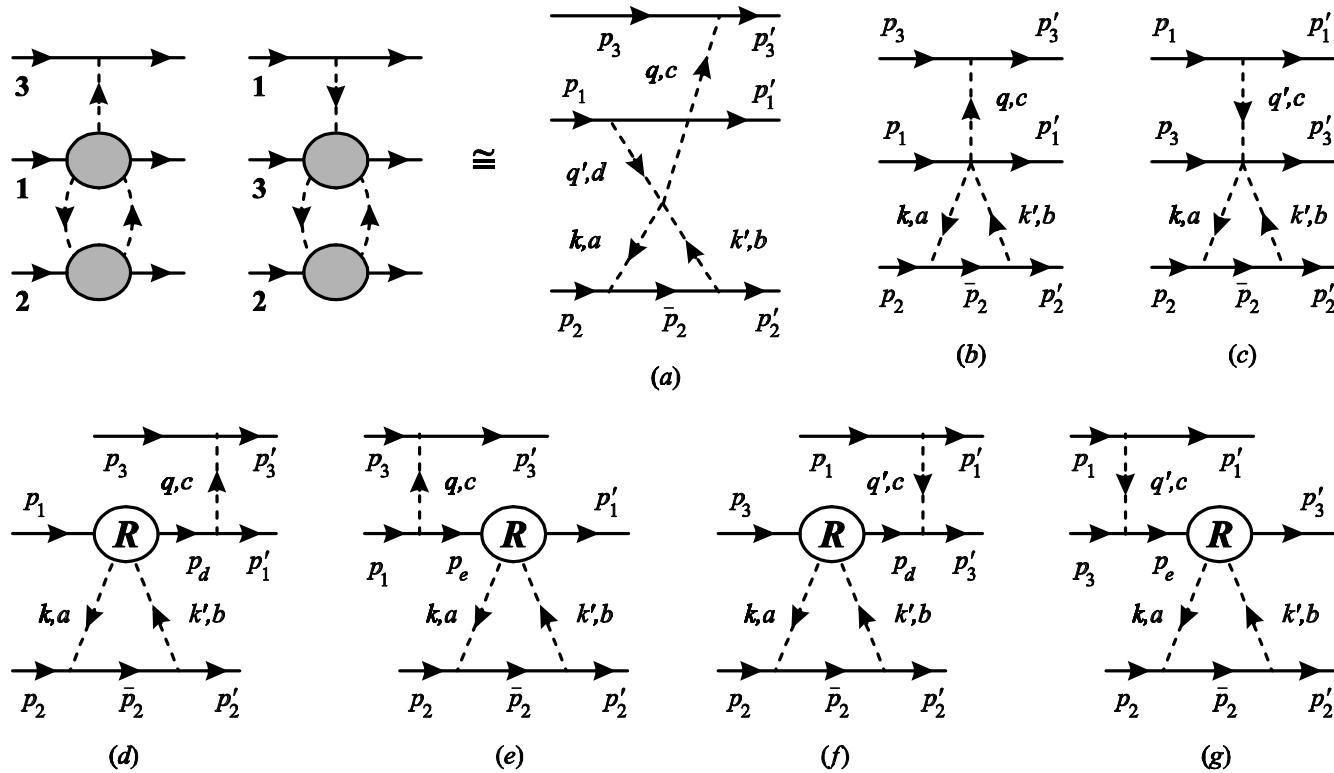


Figura 5.14: Contribuições para a amplitude do espalhamento de três nucleons devido à troca de três píons: (a) pólo do píon, (b) e (c) contatos, (d), (e), (f) e (g) grá...cos z e permutações cíclicas.

contribuições de $\pm T^+$. Este resultado indica, portanto, que a incorporação de efeitos fora da camada de massa no diagrama (5.13.a) e o cálculo do diagrama envolvendo o espalhamento $\frac{1}{4}\frac{1}{4}$ na figura (5.14) não devem ser efetuados simultaneamente, pois isto levaria a dupla contagem.

Em um cálculo completo, a contribuição de $T_1^{\pm \frac{1}{4}(3)}$ deve ser considerada apenas uma vez. Como ela envolve a troca de três píons, é mais natural incluí-la no cálculo dos diagramas da figura (5.13.b). Portanto, a força de três nucleons envolvendo a troca de dois píons ($2\frac{1}{4}$) deve ser baseada na amplitude $\frac{1}{4}N$ para píons na camada de massa.

Com este entendimento, passamos a calcular as demais contribuições envolvendo três píons virtuais.

Os diagramas (b) e (c) fornecem, respectivamente,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{T_1^{ct}} \mathbf{u}^{(3)} + \mathbf{f}_{T_3^{ct}} \mathbf{u}^{(1)} &= T_1^{ct} \frac{i}{q^2 i^{-12}} \mathbf{u} \frac{g_A}{2f_{1/4}} \mathbf{\phi}^{\circ} \mathbf{u}^{(3)} + i \mathbf{u} \frac{g_A}{2f_{1/4}} \mathbf{\phi}^{\circ} \mathbf{u}^{(1)} \frac{i}{q^2 i^{-12}} T_3^{ct} \\
 &= \frac{\mu}{f_{1/4}^2} \frac{\mathbf{\Pi}_2}{q^2 i^{-12}} \frac{1}{2} [\mathbf{u}^{\circ} \mathbf{u}]^{(1)} + \frac{1}{2m} [\mathbf{u} \mathbf{\phi}^{\circ} \mathbf{u}]^{(1)} \frac{3/4}{i_N^+} \mathbf{f}_{i_N^+} \mathbf{u}^{(2)} [\mathbf{u}^{\circ} \mathbf{u}]^{(3)} \\
 &+ \frac{\mu}{f_{1/4}^2} \frac{\mathbf{\Pi}_2}{q^2 i^{-12}} [\mathbf{u}^{\circ} \mathbf{u}]^{(1)} \frac{\mathbf{f}_{i_N^+} \mathbf{u}^{(2)}}{2} \frac{1}{2} [\mathbf{u}^{\circ} \mathbf{u}]^{(3)} i \frac{1}{2m} [\mathbf{u} \mathbf{\phi}^{\circ} \mathbf{u}]^{(3)} \quad (5.109)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 [T_1^z]^{(3)} + [T_3^z]^{(1)} &= T_1^z \frac{i}{q^2 i^{-12}} \mathbf{u} \frac{g_A}{2f_{1/4}} \mathbf{\phi}^{\circ} \mathbf{u}^{(3)} + i \mathbf{u} \frac{g_A}{2f_{1/4}} \mathbf{\phi}^{\circ} \mathbf{u}^{(1)} \frac{i}{q^2 i^{-12}} T_3^z \\
 &= i \frac{g_A}{f_{1/4}} \frac{\mathbf{\Pi}_2}{q^2 i^{-12}} \frac{1}{2} [\mathbf{u}^{\circ} \mathbf{u}]^{(1)} i \frac{2m}{(p_1^0 + q)^2 i m^2} [\mathbf{u} \mathbf{\phi}^{\circ} \mathbf{u}]^{(1)} \frac{3/4}{i_N^+} \mathbf{f}_{i_N^+} \mathbf{u}^{(2)} [\mathbf{u}^{\circ} \mathbf{u}]^{(3)} \\
 &+ i \frac{g_A}{f_{1/4}} \frac{\mathbf{\Pi}_2}{q^2 i^{-12}} \frac{1}{2} [\mathbf{u}^{\circ} \mathbf{u}]^{(1)} \frac{\mathbf{f}_{i_N^+} \mathbf{u}^{(2)}}{2} \frac{1}{2} [\mathbf{u}^{\circ} \mathbf{u}]^{(3)} + \frac{2m}{(p_3^0 + q)^2 i m^2} [\mathbf{u} \mathbf{\phi}^{\circ} \mathbf{u}]^{(3)} \quad (5.110)
 \end{aligned}$$

Somando essas amplitudes e usando a relação (5.24), obtemos a contribuição dominante

$$\begin{aligned}
 K_{3N} &= i m \frac{\mu}{f_{1/4}} \frac{\mathbf{\Pi}_2}{q^2 i^{-12}} \frac{1}{2} \mu \frac{m}{f_{1/4}^2} + \frac{3^{(00)}_{00}}{1} \frac{\mathbf{\Pi}}{[\mathbf{u}^{\circ} \mathbf{u}]^{(1)}} i \frac{1}{2f_{1/4}^2} + \frac{6m^{(00)}_{00}=1}{(p_1^0 + q)^2 i m^2} \frac{\mathbf{\Pi}}{[\mathbf{u} \mathbf{\phi}^{\circ} \mathbf{u}]^{(1)}} [\mathbf{u}^{\circ} \mathbf{u}]^{(3)} \\
 &+ \frac{1}{q^2 i^{-12}} [\mathbf{u}^{\circ} \mathbf{u}]^{(1)} \frac{\mathbf{\Pi}}{f_{1/4}^2} + \frac{3^{(00)}_{00}}{1} \frac{\mathbf{\Pi}}{[\mathbf{u}^{\circ} \mathbf{u}]^{(3)}} + \frac{1}{2f_{1/4}^2} + \frac{6m^{(00)}_{00}=1}{(p_3^0 + q)^2 i m^2} \frac{\mathbf{\Pi}}{[\mathbf{u} \mathbf{\phi}^{\circ} \mathbf{u}]^{(3)}} \frac{3/4}{i_N^+} \mathbf{f}_{i_N^+} \mathbf{u}^{(2)}: \quad (5.111)
 \end{aligned}$$

Esta expressão é simétrica pela troca $1 \leftrightarrow 3$; isto é, $p_1 \leftrightarrow p_3$; $p_1^0 \leftrightarrow p_3^0$; $q \leftrightarrow i$; q^0 : Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 K_{3N} &= i m \frac{\mu}{f_{1/4}} \frac{\mathbf{\Pi}_2}{q^2 i^{-12}} \frac{1}{2} \mu \frac{m}{f_{1/4}^2} + \frac{3^{(00)}_{00}}{1} \frac{\mathbf{\Pi}}{[\mathbf{u}^{\circ} \mathbf{u}]^{(1)}} i \frac{1}{2f_{1/4}^2} + \frac{6m^{(00)}_{00}=1}{(p_1^0 + q)^2 i m^2} \frac{\mathbf{\Pi}}{[\mathbf{u} \mathbf{\phi}^{\circ} \mathbf{u}]^{(1)}} \frac{3/4}{i_N^+} \mathbf{f}_{i_N^+} \mathbf{u}^{(2)} \\
 &+ \mathbf{f}_{i_N^+} \mathbf{u}^{(2)} [\mathbf{u}^{\circ} \mathbf{u}]^{(3)} + (1 \leftrightarrow 3) + \text{perm: clica:} \quad (5.112)
 \end{aligned}$$

É interessante notar que o mesmo resultado pode ser obtido usando o kernel da produção do píon na camada de massa,

$$K_{3N} = K_1 \frac{i}{q^2 i^{-12}} \frac{mg_A}{f_{1/4}} [\mathbf{u}^{\circ} \mathbf{u}]^{(3)} + (1 \leftrightarrow 3) + \text{perm: clica:} \quad (5.113)$$

onde K_1 é dado pela expressão (5.79).

No centro de massa e no limite estático, temos ⁹

$$\cdot_{3N}(\Phi; q) \stackrel{E! m}{\underset{(2E)^3}{\equiv}} \frac{K_{3N}(\Phi; q)}{(2E)^3} \geq \cdot_1(\Phi) \frac{1}{2m} \cdot \frac{mg_A}{f_{1/4}} \frac{i}{q^2 + 1^2} \frac{3/4^{(3)} \zeta q}{q^2 + 1^2} + (1 \$ 3) + \text{p: c:} \quad (5.114)$$

A passagem para o espaço de coordenadas é realizada pela transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \text{hr}_1^0; r_2^0; r_3^0 \hat{W} j r_1; r_2; r_3 i &= \frac{d^3 p_1^0}{(2/4)^3} \frac{d^3 p_2^0}{(2/4)^3} \frac{d^3 p_3^0}{(2/4)^3} \frac{d^3 p_1}{(2/4)^3} \frac{d^3 p_2}{(2/4)^3} \frac{d^3 p_3}{(2/4)^3} e^{i \cdot i (p_1^0 \cdot r_1^0 + p_2^0 \cdot r_2^0 + p_3^0 \cdot r_3^0 - p_1 \cdot r_1 i - p_2 \cdot r_2 i - p_3 \cdot r_3 i)} \\ &\in i \cdot (2/4)^3 \pm (p_1^0 + p_2^0 + p_3^0 i - p_1 i - p_2 i - p_3) \cdot_{3N}(\Phi; q); \end{aligned} \quad (5.115)$$

onde usamos a equação (5.103).

Repetindo os mesmos procedimentos da primeira seção do capítulo 4 para o espalhamento NN, obtemos

$$W(r) = i \cdot \frac{d^3 \Phi}{(2/4)^3} \frac{d^3 q}{(2/4)^3} e^{i \cdot i q \cdot r_{32}} e^{i \cdot i \Phi \cdot r_{21}} \cdot_{3N}(\Phi; q); \quad (5.116)$$

onde $r_{21} \doteq r_2 i - r_1$ e $r_{32} \doteq r_3 i - r_2$:

Com isso, o potencial pode ser escrito como

$$W(r) \cong \cdot_1(r_{21}) V(r_{32}) + (1 \$ 3) + \text{perm: cíclica}; \quad (5.117)$$

onde

$$\cdot_1(r_{21}) \cong \frac{g_A}{2m f_{1/4}} \frac{3/4^{(1)} \zeta}{(2/4)^3} r_{21} V(r_{21}) = \frac{g_A}{2f_{1/4}} \frac{1}{m} \frac{3/4^{(1)} \zeta}{(2/4)^3} r_{x_{21}} V(x_{21}) \quad (5.118)$$

foi calculado na seção anterior, equação (5.97), e

$$\begin{aligned} V(r_{32}) &= \frac{g_A}{2f_{1/4}} \frac{3/4^{(3)} \zeta}{(2/4)^3} r_{32} \frac{d^3 q}{(2/4)^3} e^{i \cdot i q \cdot r_{32}} \frac{1}{q^2 + 1^2} = \frac{g_A}{2f_{1/4}} \frac{1^2}{4/4} \frac{3/4^{(3)} \zeta}{(2/4)^3} r_{x_{32}} \frac{\mu}{x_{32}} \frac{e^{i \cdot x_{32}}}{x_{32}} \\ &= i \cdot \frac{g_A}{2f_{1/4}} \frac{1^2}{4/4} \mu \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{32}}} \frac{e^{i \cdot x_{32}}}{x_{32}} \frac{3/4^{(3)} \zeta}{(2/4)^3} r_{32}; \end{aligned} \quad (5.119)$$

Assim,

$$\begin{aligned} W(x) &\cong i \cdot \frac{3}{4} \frac{g_A}{4/4} \frac{3}{4} \frac{3}{4} \frac{1}{m} \frac{3/4^{(1)} \zeta}{(2/4)^3} r_{21} \frac{3/4^{(3)} \zeta}{(2/4)^3} r_{32} \cdot \frac{Z_1}{d^{(1)}} \frac{Z_1}{d^{(1)}} \frac{\mu}{x_{21}} + \frac{1}{x_{21}} \frac{\mu}{x_{21}} \\ &\quad i \cdot \frac{2m^2}{1^2} \frac{Z_1}{d^{(1)}} \frac{Z_1}{d^{(1)}} \frac{(1 i^{(1)})(1 i^{(1)})}{(2/4)^3} \mu + \frac{1}{x_{21}} \frac{\mu}{x_{21}} \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{32}}} \frac{\mu}{x_{32}} + \frac{1}{x_{32}} \frac{\mu}{x_{32}}; \end{aligned} \quad (5.120)$$

⁹O fator $\frac{1}{2m}$ vem do limite estático de $\frac{1}{(2E)^3}$, descontando o fator $\frac{1}{(2m)^2}$ já presente em \cdot_1 .

A influência do termo de contato no caso $\cdot = \cdot_s$ foi estudada por Maekawa e Robilotta [MR 98]. Este termo é característico da dinâmica quiral e os gráficos z, de uma dinâmica trivial. Comparando as figuras (5.15) e (5.16), vemos que simetria quiral é bastante relevante para o potencial de três nucleons, pois muda completamente as equipotenciais.

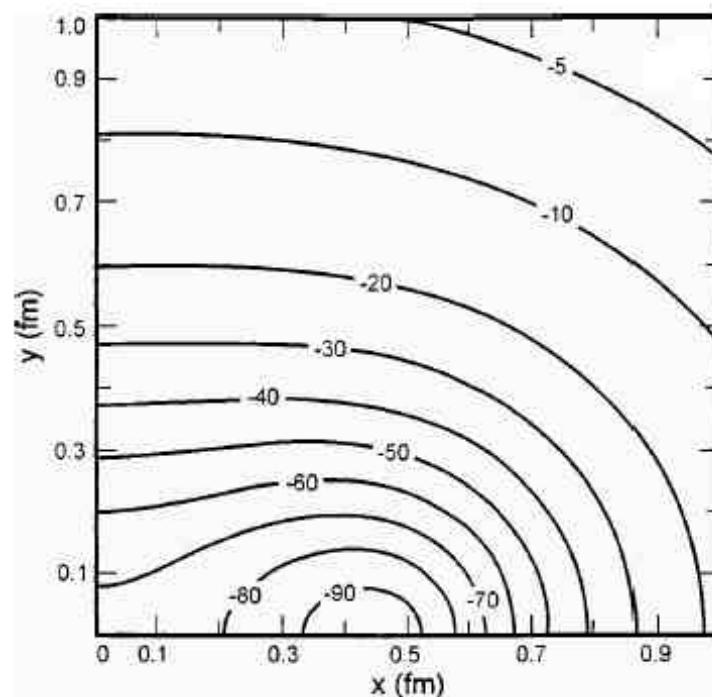


Figura 5.15: Contribuição proveniente dos gráficos z da referência [MR 98]. Um nucleon é fixo em $x = 0; 5$ fm, o outro em $x = 0; 5$ fm e o terceiro se move nas linhas equipotenciais.

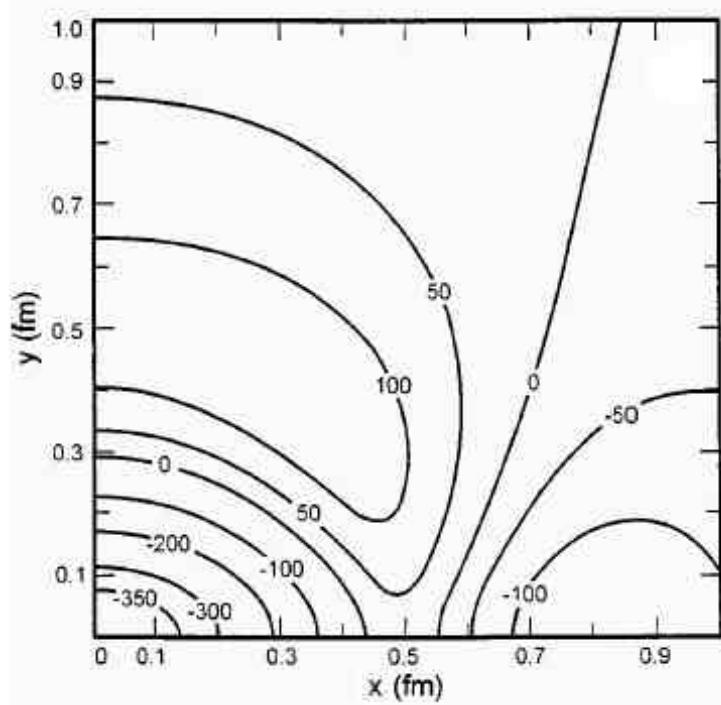


Figura 5.16: Contribuição proveniente do diagrama de contato e grá...cos z da referência [MR 98]. Um nucleon é ...xo em $x = 1/0.5$ fm, o outro em $x = 0.5$ fm e o terceiro se move nas linhas equipotenciais.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, obtivemos os termos dominantes do potencial NN devido à troca de três píons e do kernel para a produção de um píon no espalhamento NN. Em ambos os casos, os píons virtuais não estão correlacionados. Os cálculos são baseados nas amplitudes dos processos intermediários $\frac{1}{4}N + \frac{1}{4}N \rightarrow \frac{1}{4}N + \frac{1}{4}N$, obtidas por meio das regras de Feynman derivadas da lagrangiana quiral não-linear com acoplamento $\frac{1}{4}N$ pseudovetorial. A dinâmica do processo $\frac{1}{4}N + \frac{1}{4}N \rightarrow \frac{1}{4}N$, em particular, é bastante interessante, pois envolve o diagrama com vértice de quatro píons, que tem papel fundamental. Este vértice é parcialmente cancelado por um diagrama de contato pertencente à mesma subclasse de interações. Em processos contendo píons fora da camada de massa é necessário reunir todos os diagramas de uma dada subclasse quiral, para que os resultados independam da definição do campo do píon. No caso do processo $\frac{1}{4}N + \frac{1}{4}N \rightarrow \frac{1}{4}N$, a subclasse de diagramas que fornece a contribuição dominante a baixas energias contém apenas os diagramas com vértice $4\frac{1}{4}$ e de contato.

No estudo do espalhamento NN devido à troca de três píons não correlacionados, obtivemos uma interação isovetorial com uma componente pseudoscalar e outra axial. No canal spin-spin, a parte pseudoscalar, positiva, é um pouco maior do que a axial, negativa. A resultante tem um alcance de cerca de 1.0 fm, que é compatível com os resultados obtidos em cálculos recentes baseados em HBChPT. O potencial devido à troca de três píons é muito pequeno quando comparado ao resultante da troca de um píon, o que se deve, por um lado, ao cancelamento entre as componentes pseudoescalar e axial e, por outro, à simetria quiral, responsável pelo cancelamento parcial entre os diagramas de Feynman. O efeito obtido é, então, menor do que o produzido pela troca do méson a_1 .

O presente trabalho deixa vários problemas em aberto. Um deles, consiste em efetuar um cálculo relativístico completo de todos os diagramas contendo dois loops e envolvendo apenas píons e nucleons. Além disso, é preciso determinar as contribuições de outros graus de liberdade, em especial das excitações delta, que têm papel importante na troca de dois píons.

No caso da produção de um píon devida à troca de dois píons não correlacionados, o kernel relevante está associado a um número grande de diagramas. Para obter o termo dominante a grandes distâncias internucleônicas, empregamos os mesmos diagramas utilizados na troca de três píons, somados à contribuição da iteração de potenciais de dois corpos. Apesar da expressão ...nal também envolver o cancelamento parcial entre diagramas, o saldo ainda é importante.

Relacionamos, então, este kernel à componente central isoscalar do potencial NN devida à troca de dois píons não correlacionados, que pode ser expressa naturalmente em termos do fator de forma escalar $\frac{1}{4}N$. Estes resultados foram, em seguida, generalizados para o caso de um potencial central qualquer. Como o fator de forma escalar $\frac{1}{4}N$ pode ser simulado pela troca de um méson escalar efetivo, o mesmo vale para o potencial de dois corpos e para o kernel da produção.

Uma das possíveis extensões deste trabalho consiste em realizar um cálculo dinâmico mais completo, incluindo todos os membros de uma mesma família de diagramas quirais e, também, outros graus de liberdade. Deste modo, seria possível testar a generalidade da relação entre kernel e potencial de dois corpos.

O nosso kernel generalizado foi especializado para os casos da produção de píons no limiar do espalhamento NN e de interações próprias de três nucleons. Em ambos os casos, ele toma uma forma semelhante e de mesma ordem de grandeza do devido à troca do méson escalar ...ctício. Como este último foi testado fenomenologicamente com sucesso, podemos esperar que o mesmo venha a ocorrer

com o que obtivemos. Esta evidência precisa, entretanto, ser con...rmada por estudos detalhados deste tipo de reação.

Apêndice A

Notação e Convocações

A.1 Notações Relativísticas

Em geral, os cálculos relativísticos são realizados no espaço de Minkowski. Este espaço é caracterizado pelo tensor métrico

$$g^{1\circ} = g_{1\circ} = \begin{matrix} \text{O} & & & & 1 \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{matrix} & \end{matrix} \begin{matrix} \text{C} \\ \text{A} \end{matrix} : \quad (\text{A.1})$$

Com isso, os quadrivetores são expressos nas formas contravariante¹

$$a^1 = (a_0; a_1; a_2; a_3) = (a_0; a) \quad (\text{A.2})$$

¹Neste trabalho tomamos $c = 1$ e $\sim = 1$.

e na covariante

$$a_1 = g_{10} a^0 = (a_0; | a_1; | a_2; | a_3) = (a_0; | a) ; \quad (A.3)$$

de modo que o produto escalar seja

$$a \cdot b = a^1 b_1 = a_0 b_0 + a \cdot b ; \quad (A.4)$$

As respectivas derivadas são denvidas como

$$\partial^1 \doteq \frac{\partial}{\partial x_1} = (\partial_0; | \partial_i) \quad \text{e} \quad \partial_1 \doteq \frac{\partial}{\partial x^1} = (\partial_0; | \partial_i) ; \quad (A.5)$$

de modo que

$$\partial^1 a_1 = \partial_0 a_0 + \partial_i a_i = \frac{\partial}{\partial t} a_t + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} \quad \text{e} \quad \partial^1 \partial_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathbf{r}^2 \doteq \square ; \quad (A.6)$$

A.2 Equações de Onda Relativísticas

² BÓSONS

Um bóson livre é descrito pela equação de Klein-Gordon

$$\square \dot{A}_t^1(x) + m^2 \dot{A}_t^1(x) = 0 ; \quad (A.7)$$

onde $\dot{A}_t^1(x)$ representa o campo do bóson com grau de liberdade interna t e 1 , a sua massa. O campo que satisfaz esta equação tem a forma

$$\dot{A}_t^1(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{(2\pi)^3 2!}{(2\pi)^3 2!}}} \int \frac{d^3 k}{\hbar} a_k e^{i k t x} + a_k^* e^{i k t x} \dot{u}_t^1(k) ; \quad (A.8)$$

onde a_k e a_k^* são, respectivamente, os operadores de aniquilação e criação e $\dot{u}_t^1(k)$ é uma função com quatro componentes.

Como na relatividade o spin da partícula está acoplado ao seu movimento, a equação de movimento para uma partícula livre depende do spin dessa partícula. Assim, para que $\dot{u}_t^1(k)$ represente o spinor de bósons vetoriais com spin 1, deve-se introduzir um vínculo na equação de Klein-Gordon,

para que produza três estados de polarização independentes (spin 1), quando $\gamma^1 \neq 0$, e dois, quando $\gamma^1 = 0$. A escolha mais natural é a condição de Lorentz

$$\partial_\mu \hat{A}_t^1(x) = 0; \quad (A.9)$$

Para bósons escalares (spin 0), temos apenas um estado independente, logo $\gamma_t^1(k) = 1$: No caso de píons, t representa as componentes de seu isospin, de modo que

$$\gamma_4^+ = i \frac{1}{\not{p}} (\hat{A}_1 + i \hat{A}_2); \quad \gamma_4^0 = \hat{A}_3; \quad \gamma_4^- = i \frac{1}{\not{p}} (\hat{A}_1 - i \hat{A}_2); \quad (A.10)$$

A normalização adotada para os bósons é

$$\hbar k^0; \gamma^-; t! + 1 jk; \gamma^0; t! \gamma^- i = 2! (2\gamma)^3 \pm^3 (k^0 i \not{k}) \pm^- \gamma^0; \quad (A.11)$$

onde $t! = \sqrt{\not{p}^2 + m^2}$ é a energia relativística do bóson.

2 FÉRMIONS

A equação que descreve um férnion livre é a equação de Dirac,

$$(i \gamma^\mu \not{p} - m) \tilde{A}_s(x) = 0; \quad (A.12)$$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac, $\tilde{A}_s(x)$ representa o campo do férnion com grau de liberdade interna s e m , a sua massa. O campo que satisfaz esta equação tem a forma

$$\tilde{A}_s(x) = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\gamma)^3 2E_p} \not{p} \frac{d^3 p}{(2\gamma)^3 2E_p} \not{p} b_s(p) u_s(p) e^{i \not{p} \not{x}} + d_s(p) v_s(p) e^{i \not{k} \not{x}}; \quad (A.13)$$

onde os operadores $b_s(p)$ e $d_s(p)$ aniquilam e criam férnions e os spinores $u_s(p)$ e $v_s(p)$ são as funções que satisfazem as equações de Dirac no espaço dos momentos

$$(\not{p} - m) u_s(p) = 0 \quad \text{e} \quad (\not{p} + m) v_s(p) = 0; \quad (A.14)$$

onde

$$\not{p} = p^\mu \gamma^\mu; \quad (A.15)$$

Para um nucleon, o spinor de Dirac corresponde a

$$u_s(p) = \frac{1}{\not{p} + m} \not{p} \frac{E + m}{\not{p}^2} \not{A}_s \quad (A.16)$$

e, para um antinucleon, a

$$v_s(p) = i \gamma_1 \frac{1}{E + m} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \hat{A}_s; \quad (A.17)$$

onde γ_i são matrizes hermitianas 2×2 , conhecidas como matrizes de Pauli,

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \quad (A.18)$$

e \hat{A}_s são os spinores não-relativísticos

$$\hat{A}_{1=2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{A}_{i=1=2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (A.19)$$

No espaço de spin e isospin, um nucleon livre que chega com spin s , isospin t e momento p é representado por

$$N_s^t(p) = \gamma_t - u_s(p) \quad (A.20)$$

e o que sai, por

$$N_s^t(p) = \gamma_t - \bar{u}_s(p); \quad (A.21)$$

onde γ_t é seu isospinor e $\bar{u}_s(p) = u_s^y(p) \circ 0$.

Para o próton ($t = 1=2$), o isospinor corresponde a

$$\gamma_{1=2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.22)$$

e, para o nêutron ($t = i=1=2$), a

$$\gamma_{i=1=2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (A.23)$$

As matrizes de Dirac são matrizes 4×4 com traço nulo dadas por

$$\circ 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \circ k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (A.24)$$

A matriz usual $\circ 5$ corresponde à combinação

$$\circ 5 = i \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ 3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (A.25)$$

As relações de comutação e anticomutação das matrizes de Pauli são dadas por

$$\begin{aligned} [\not{q}_i; \not{q}_j] &= 2i^2 \not{q}_{ij} \not{q}_k & \& \not{q}_i \not{q}_j = \pm_{ij} + i^2 \not{q}_{ij} \not{q}_k \\ \not{f} \not{q}_i; \not{q}_j \not{g} &= 2 \pm_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

e das matrizes de Dirac, por

$$\begin{aligned} [\not{u}^1; \not{u}^0] &= i \not{u}^2 \not{u}^1 & \& \not{u}^1 \not{u}^0 = \not{g}^1 \not{u}^1 \\ \not{f} \not{u}^1; \not{u}^0 \not{g} &= 2 \not{g}^1 \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

As normalizações adotadas para os férmons são

$$\not{h} \not{p}^0; \not{t}^-; \not{t}^+ + 1 \not{p}^0; \not{t}^0; \not{t}^1 \not{i} = 2E (2\not{q})^3 \not{p}^0 \not{i} \not{p} \not{p}^0; \quad (\text{A.28})$$

onde $E = \sqrt{\not{p}^2 + m^2}$ é a energia relativística do férnion.

A.3 Convenções

² Variáveis do espalhamento NN devido à troca de três píons

$$\begin{aligned} W &= p_1 + p_2 = p_1^0 + p_2^0 & P &= \frac{1}{2} [(p_1 + p_1^0) \not{i} (p_2 + p_2^0)] \\ \not{C} &= p_1^0 \not{i} \not{p}_1 = p_2 \not{i} \not{p}_2^0 = (\not{q}^0 + \not{q}) \not{i} \not{k} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$Q = \frac{(\not{q}^0 + \not{q}) + \not{k}}{2} \quad Q^0 = \frac{\not{q}^0 \not{i} \not{q}}{2} \quad V = \frac{\not{p}_2^0 + \not{p}_2}{2m}$$

Os nucleons na camada de massa implicam no vínculo

$$W \not{t} P = W \not{t} \not{C} = P \not{t} \not{C} = 0 \quad (\text{A.30})$$

² Variáveis da produção de um píon no espalhamento NN devido à troca de dois píons

$$\begin{aligned} W &= p_1 + p_2 = p_1^0 + p_2^0 + \not{q} & Q &= \frac{\not{k}^0 + \not{k}}{2} \\ \not{C} &= \not{k}^0 \not{i} \not{k} = \not{q} \not{i} \not{q}^0 = \not{q} + \not{p}_1^0 \not{i} \not{p}_1 = \not{p}_2 \not{i} \not{p}_2^0 \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

² Amplitudes

$$T_{dcba} = \pm_{ac} \pm_{bd} A(s) + \pm_{ab} \pm_{cd} A(t) + \pm_{ad} \pm_{bc} A(u) \quad (A.32)$$

$$T_{ba} = \pm_{ab} T^+ + i^2_{bac} \zeta_c T^i \quad (A.33)$$

$$\text{com } T^S = A^S [\mathbf{u} u] + B^S [\mathbf{u} \mathbf{Q} u] \quad (A.34)$$

$$T_{cba} = \pm_{bc} \zeta_a T_A + \pm_{ac} \zeta_b T_B + \pm_{ba} \zeta_c T_C + i^2_{cba} T_D \quad (A.35)$$

$$\text{com } T_k = i [\mathbf{u} \circ_5 (A_k + \mathbf{B}_k + \mathbf{C}_k + \mathbf{D}_k) u] \quad (A.36)$$

onde A, B, C e D são funções invariantes de Lorentz provenientes da dinâmica do processo.

Apêndice B

Cálculos com Spinores

B.1 Sanduíches

Usando as notações

$$N = \frac{1}{E + m}; \quad N^0 = \frac{1}{E^0 + m}; \quad I^{(i)} \doteq \frac{e}{\hat{A}^y \hat{A}^{(i)}}; \quad \gamma_4^{(i)} \doteq \frac{e}{\hat{A}^y \gamma_4 \hat{A}^{(i)}}; \quad (B.1)$$

temos

$$\begin{aligned}
 {}^2 S_{ij} \bar{u} u &= N N^0 \hat{A}^y (E^0 + m; i \gamma_4 \bar{p}^0) \frac{\mu}{\gamma_4 \bar{p}} \frac{E + m}{\gamma_4 \bar{p}} \hat{A} \\
 &= N N^0 \hat{A}^y [(E^0 + m)(E + m) i \gamma_4 \gamma_j \bar{p}_i^0 p_j] \hat{A} = N N^0 \hat{A}^y [(E^0 + m)(E + m) i (\pm_{ij} + i^2 \epsilon_{ijk} \gamma_4) \bar{p}_i^0 p_j] \hat{A} \\
 &= N N^0 \hat{A}^y [(E^0 + m)(E + m) i \bar{p}^0 \epsilon p_i \bar{p}_i \gamma_4 \bar{p}^0 \wedge p] \hat{A} \\
 &= N N^0 \hat{A}^y \hat{A} [(E^0 + m)(E + m) i \bar{p}^0 \epsilon p] i N N^0 \hat{A}^y \gamma_4 \bar{A} \bar{p}^0 \wedge p; \quad (B.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& {}^2 \text{PS} \quad i ! \quad \psi^{\circ 5} u = N N^0 \hat{A}^y (E^0 + m; i^{-\frac{3}{4}} \not{p}^0) \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}} \frac{\not{\mu}}{\frac{E+m}{\frac{3}{4} \not{p}}} \hat{A} \\
& = N N^0 \hat{A}^y (i^{-\frac{3}{4}} \not{p}^0; E^0 + m) \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} E+m & \not{\mu} \\ \hline \frac{3}{4} \not{p} & \hat{A} \end{array}} = N N^0 \hat{A}^y \frac{3}{4} \hat{A} \not{c} [p (E^0 + m) i \not{p}^0 (E + m)] ; \quad (B.3)
\end{aligned}$$

$${}^2 \text{V} \quad i ! \quad \psi^{\circ 1} u = \psi (\circ_0; \circ_i) u = (\psi^{\circ 0} u; \psi^{\circ i} u)$$

$$\begin{aligned}
\psi^{\circ 0} u & = N N^0 \hat{A}^y (E^0 + m; i^{-\frac{3}{4}} \not{p}^0) \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & i \end{array}} \frac{\not{\mu}}{\frac{E+m}{\frac{3}{4} \not{p}}} \hat{A} = N N^0 \hat{A}^y (E^0 + m; \frac{3}{4} \not{p}^0) \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} E+m & \not{\mu} \\ \hline \frac{3}{4} \not{p} & \hat{A} \end{array}} \\
& = N N^0 \hat{A}^y [(E^0 + m) (E + m) + \frac{3}{4} i \frac{3}{4} j \not{p}_i^0 \not{p}_j] \hat{A} = N N^0 \hat{A}^y [(E^0 + m) (E + m) + (\pm_{ij} + i^2 \not{p}_i \not{p}_j) \not{p}_i^0 \not{p}_j] \hat{A} \\
& = N N^0 \hat{A}^y \hat{A} [(E^0 + m) (E + m) + \not{p}^0 \not{c} p] + i N N^0 \hat{A}^y \frac{3}{4} \hat{A} \not{c} (\not{p}^0 \wedge p) \quad (B.4)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\psi^{\circ i} u & = N N^0 \hat{A}^y (E^0 + m; i^{-\frac{3}{4}} \not{p}^0) \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} 0 & \frac{3}{4} i \\ \hline i^{-\frac{3}{4}} & 0 \end{array}} \frac{\not{\mu}}{\frac{E+m}{\frac{3}{4} \not{p}}} \hat{A} \\
& = N N^0 \hat{A}^y (\frac{3}{4} \not{p}^0 \frac{3}{4} i; (E^0 + m) \frac{3}{4} i) \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} E+m & \not{\mu} \\ \hline \frac{3}{4} \not{p} & \hat{A} \end{array}} = N N^0 \hat{A}^y \frac{3}{4} j \frac{3}{4} i (E + m) \not{p}_j^0 + \frac{3}{4} i \frac{3}{4} j (E^0 + m) \not{p}_j \not{A} \\
& = N N^0 \hat{A}^y \frac{3}{4} j (\pm_{ij} i - i^2 \not{p}_i \not{p}_j) (E + m) \not{p}_j^0 + (\pm_{ij} + i^2 \not{p}_i \not{p}_j) (E^0 + m) \not{p}_j \not{A} \\
& = N N^0 \hat{A}^y \frac{3}{4} j \not{p}_i^0 (E + m) i - i^2 \not{p}_i \not{p}_j \not{p}_j^0 (E + m) + \not{p}_i (E^0 + m) + i^2 \not{p}_i \not{p}_j \not{p}_j (E^0 + m) \not{A} \quad (B.5) \\
& = N N^0 \hat{A}^y \hat{A} [\not{p}_i^0 (E + m) + \not{p}_i (E^0 + m)] + i N N^0 \hat{A}^y \frac{3}{4} \hat{A} \not{c} \not{p}_j^0 (E^0 + m) i \not{p}_j^0 (E + m) \not{A} :
\end{aligned}$$

$${}^2 \text{PV} \quad i ! \quad \psi^{\circ 1} \circ_5 u = \psi (\circ_0; \circ_i) \circ_5 u = (\psi^{\circ 0} \circ_5 u; \psi^{\circ i} \circ_5 u)$$

$$\begin{aligned}
\psi^{\circ 0} \circ_5 u & = N N^0 \hat{A}^y (E^0 + m; i^{-\frac{3}{4}} \not{p}^0) \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & i \end{array}} \frac{\not{\mu}}{\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}} \frac{\not{\mu}}{\frac{E+m}{\frac{3}{4} \not{p}}} \hat{A} \\
& = N N^0 \hat{A}^y (E^0 + m; \frac{3}{4} \not{p}^0) \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} E+m & \not{\mu} \\ \hline \frac{3}{4} \not{p} & \hat{A} \end{array}} = N N^0 \hat{A}^y (\frac{3}{4} \not{p}^0; E^0 + m) \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} E+m & \not{\mu} \\ \hline \frac{3}{4} \not{p} & \hat{A} \end{array}} \\
& = N N^0 \hat{A}^y \frac{3}{4} \hat{A} \not{c} [\not{p}^0 (E + m) + p (E^0 + m)] \quad (B.6)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \mathbf{U}^{\circ} \circ_5 \mathbf{U} = \mathbf{N} \mathbf{N}^0 \hat{\mathbf{A}}^y (E^0 + m; i^{\frac{3}{4}} \mathbf{p}^0) \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} 0 & \frac{3}{4}i \\ i^{\frac{3}{4}i} & 0 \end{array}} \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}} \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} E + m & \frac{3}{4} \mathbf{p} \\ \frac{3}{4} \mathbf{p} & \hat{\mathbf{A}} \end{array}} \\
& = \mathbf{N} \mathbf{N}^0 \hat{\mathbf{A}}^y (\frac{3}{4} \mathbf{p}^0 \frac{3}{4}i; (E^0 + m) \frac{3}{4}i) \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}} \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} E + m & \frac{3}{4} \mathbf{p} \\ \frac{3}{4} \mathbf{p} & \hat{\mathbf{A}} \end{array}} \\
& = \mathbf{N} \mathbf{N}^0 \hat{\mathbf{A}}^y ((E^0 + m) \frac{3}{4}i; \frac{3}{4} \mathbf{p}^0 \frac{3}{4}i) \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} E + m & \frac{3}{4} \mathbf{p} \\ \frac{3}{4} \mathbf{p} & \hat{\mathbf{A}} \end{array}} \\
& = \mathbf{N} \mathbf{N}^0 \hat{\mathbf{A}}^y \frac{\mathbf{E}}{\frac{3}{4}i} (E^0 + m) (E + m) + \frac{3}{4} \mathbf{p}_j^0 \frac{3}{4}i \frac{3}{4} \mathbf{p}_k^0 \hat{\mathbf{A}} \quad (B.7) \\
& = \mathbf{N} \mathbf{N}^0 \hat{\mathbf{A}}^y \frac{\mathbf{E}}{\frac{3}{4}i} (E^0 + m) (E + m) + \frac{3}{4} \mathbf{p}_j^0 (\pm_{ik} + i^2_{ikm} \frac{3}{4}m) \mathbf{p}_k^0 \hat{\mathbf{A}} \\
& = \mathbf{N} \mathbf{N}^0 \hat{\mathbf{A}}^y \frac{\mathbf{E}}{\frac{3}{4}i} (E^0 + m) (E + m) + \frac{3}{4} \mathbf{p}^0 \mathbf{p}_i + i^2_{ikm} (\pm_{jm} + i^2_{jmn} \frac{3}{4}n) \mathbf{p}_j^0 \mathbf{p}_k^0 \hat{\mathbf{A}} \\
& = \mathbf{N} \mathbf{N}^0 \hat{\mathbf{A}}^y \frac{\mathbf{E}}{\frac{3}{4}i} (E^0 + m) (E + m) + \frac{3}{4} \mathbf{p}^0 \mathbf{p}_i + i^2_{ikj} \mathbf{p}_j^0 \mathbf{p}_k^0 + i^2_{ikm} i^2_{jnm} \frac{3}{4}n \mathbf{p}_j^0 \mathbf{p}_k^0 \hat{\mathbf{A}} \\
& = \mathbf{N} \mathbf{N}^0 \hat{\mathbf{A}}^y \frac{\mathbf{E}}{\frac{3}{4}i} (E^0 + m) (E + m) + \frac{3}{4} \mathbf{p}^0 \mathbf{p}_i + i (\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}^0)_i + (\pm_{ij} \pm_{kn} i \pm_{in} \pm_{kj}) \frac{3}{4}n \mathbf{p}_j^0 \mathbf{p}_k^0 \hat{\mathbf{A}} \\
& = i \mathbf{N} \mathbf{N}^0 \hat{\mathbf{A}}^y \hat{\mathbf{A}} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}^0)_i + \mathbf{N} \mathbf{N}^0 \hat{\mathbf{A}}^y \frac{3}{4} \hat{\mathbf{A}} [(E^0 + m) (E + m) i \mathbf{p} \mathbf{p}^0] + \mathbf{N} \mathbf{N}^0 \hat{\mathbf{A}}^y \frac{3}{4} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{p} (\mathbf{p}^0 \mathbf{p}_i + \mathbf{p} \mathbf{p}_i^0) :
\end{aligned}$$

No caso da contração deste sanduíche com um vetor \mathbf{q}_1 ; temos

$$\begin{aligned}
& \mathbf{U} \mathbf{q}^{\circ} \circ_5 \mathbf{U} = \mathbf{U}^{\circ 1} \circ_5 \mathbf{U} \mathbf{q}_1 = \mathbf{U}^{\circ 0} \circ_5 \mathbf{U} \mathbf{q}_0 i \mathbf{U}^{\circ 1} \circ_5 \mathbf{U} \mathbf{q}_1 \\
& = \mathbf{N} \mathbf{N}^0 \hat{\mathbf{A}}^y \frac{3}{4} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{p} [(E^0 + m) + \mathbf{p} (E^0 + m)] \mathbf{q}_0 i \mathbf{N} \mathbf{N}^0 \hat{\mathbf{A}}^y \hat{\mathbf{A}} \mathbf{q} \mathbf{p} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}^0) \\
& i \mathbf{N} \mathbf{N}^0 \hat{\mathbf{A}}^y \frac{3}{4} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{q} [(E^0 + m) (E + m) i \mathbf{p} \mathbf{p}^0] i \mathbf{N} \mathbf{N}^0 \hat{\mathbf{A}}^y \frac{3}{4} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{p} (\mathbf{p}^0 \mathbf{q} \mathbf{p} + \mathbf{p} \mathbf{q} \mathbf{p}^0) : \quad (B.8)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{U}^{\circ 1} \circ_5 \mathbf{U} = \mathbf{U} \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} \frac{3}{4}00 & \frac{3}{4}0j \\ \frac{3}{4}10 & \frac{3}{4}1j \end{array}} \mathbf{U} = \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} \mathbf{U}^{\frac{3}{4}00} & \mathbf{U}^{\frac{3}{4}0j} \\ \mathbf{U}^{\frac{3}{4}10} & \mathbf{U}^{\frac{3}{4}1j} \end{array}} \mathbf{U}$$

$$\mathbf{U}^{\frac{3}{4}00} \mathbf{U} = 0; \quad \mathbf{U}^{\frac{3}{4}k0} \mathbf{U} = i \mathbf{U}^{\frac{3}{4}0k} \mathbf{U} \quad \text{para } k = i \text{ ou } j; \quad (B.9)$$

$$\begin{aligned}
\Psi^{3/40k} u &= NN^0 \hat{A}^y (E^0 + m; i^{3/4} \not{p}^0) i \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} 0 & 3/4_k \\ \hline 3/4_k & 0 \end{array}} \not{\Gamma} \not{\mu} E + m \not{\Gamma} \hat{A} \\
&= NN^0 \hat{A}^y (i^{3/4} \not{p}^0 \not{\Gamma}_k; i (E^0 + m) \not{\Gamma}_k) \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} E + m & \not{\Gamma} \\ \hline 3/4 \not{p} & \not{\Gamma} \end{array}} \hat{A} \\
&= NN^0 \hat{A}^y [i^{3/4} \not{\Gamma}_k (E + m) \not{p}_i^0 + i^{3/4_k} \not{\Gamma}_j (E^0 + m) \not{p}_j] \hat{A} \quad (B.10) \\
&= NN^0 \hat{A}^y [i^{3/4} (\pm_{ik} + i^2 \not{p}_k \not{\Gamma}_m) (E + m) \not{p}_i^0 + i^{3/4} (\pm_{kj} + i^2 \not{p}_j \not{\Gamma}_n) (E^0 + m) \not{p}_j] \hat{A} \\
&= i NN^0 \hat{A}^y \hat{A} [\not{p}_k (E^0 + m) i^{3/4} \not{p}_k^0 (E + m)] i NN^0 \hat{A}^y \not{\Gamma}_m \not{\Gamma}_k \not{p}_i^0 (E + m) i NN^0 \hat{A}^y \not{\Gamma}_n \not{\Gamma}_j \not{p}_j (E^0 + m)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Psi^{3/4ij} u &= NN^0 \hat{A}^y (E^0 + m; i^{3/4} \not{p}^0) i^2 \not{\Gamma}_{ijk} \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} 3/4_k & 0 \\ \hline 0 & 3/4_k \end{array}} \not{\Gamma} \not{\mu} E + m \not{\Gamma} \hat{A} \\
&= NN^0 \hat{A}^y \not{\Gamma}_{ijk} ((E^0 + m) \not{\Gamma}_k; i^{3/4} \not{p}^0 \not{\Gamma}_k) \frac{\mu}{\begin{array}{c|c} E + m & \not{\Gamma} \\ \hline 3/4 \not{p} & \not{\Gamma} \end{array}} \hat{A} \\
&= NN^0 \hat{A}^y \not{\Gamma}_{ijk} [3/4_k (E^0 + m) (E + m) i^{3/4} \not{p}_m^0 \not{\Gamma}_k \not{\Gamma}_n \not{p}_n] \hat{A} \\
&= NN^0 \hat{A}^y [2 \not{\Gamma}_{ijk} \not{\Gamma}_k (E^0 + m) (E + m) i^{2 \not{\Gamma}_{ijk}} \not{\Gamma}_m (\pm_{kn} + i^2 \not{p}_n \not{\Gamma}_l) \not{p}_m^0 \not{p}_n] \hat{A} \\
&= NN^0 \hat{A}^y [2 \not{\Gamma}_{ijk} \not{\Gamma}_k (E^0 + m) (E + m) i^{2 \not{\Gamma}_{ijn}} \not{\Gamma}_m \not{p}_m^0 \not{p}_n i^{2 \not{\Gamma}_{ijm}} (\pm_{in} \pm_{jl} + i^2 \not{p}_l \not{\Gamma}_n) (\pm_{ml} + i^2 \not{p}_s \not{\Gamma}_s) \not{p}_m^0 \not{p}_n] \hat{A} \\
&= NN^0 \hat{A}^y \not{\Gamma}_{ijk} \not{\Gamma}_k (E^0 + m) (E + m) i^{2 \not{\Gamma}_{ijn}} \not{p}_n \not{\Gamma}_m \not{p}_m^0 i^{2 \not{\Gamma}_{ijm}} (\not{p}_i^0 \not{p}_j + i \not{p}_i^0 \not{p}_j) i^{2 \not{\Gamma}_{ims}} \not{p}_m^0 \not{\Gamma}_s + 2 \not{\Gamma}_{ims} \not{p}_j \not{p}_m^0 \not{\Gamma}_s \not{\Gamma} \hat{A} \\
&= i NN^0 \hat{A}^y \hat{A} \not{p}_i^0 \not{p}_j i^{2 \not{\Gamma}_{ijm}} \not{p}_i^0 + NN^0 \hat{A}^y \not{\Gamma}_k \not{\Gamma}_{ijk} \not{\Gamma}_{ijn} (E^0 + m) (E + m) i NN^0 \hat{A}^y \not{\Gamma}_m \not{\Gamma}_{ijn} \not{p}_n \not{p}_m^0 \\
&+ NN^0 \hat{A}^y \not{\Gamma}_s \not{\Gamma} (2 \not{\Gamma}_{ims} \not{p}_j \not{p}_m^0 i^{2 \not{\Gamma}_{jms}} \not{p}_i \not{p}_m^0) : \quad (B.11)
\end{aligned}$$

B.2 Produtos com Sanduíches

² Entre quadrivector e sanduíche

$$\begin{aligned}
& \Psi_5^{\alpha} = a_1 \Psi_5^{\alpha_1} = a_0 \Psi_5^{\alpha_0} \dots a_i \Psi_5^{\alpha_i} \\
& = N N^{\frac{1}{4}} [p^0(E + m) + p^1(E^0 + m)] a_0 \dots a_i N N^{\frac{1}{4}} (p^0 \wedge p^1) \\
& + N N^{\frac{1}{4}} a_i [(E^0 + m)(E + m) \wedge p^0 p^1] + N N^{\frac{1}{4}} (p^0 a_i p^1 + p^1 a_i p^0); \quad (B.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{u } a_1 b_0 \frac{1}{4} u = (a_0; i \ a_i) \frac{\mu}{\frac{1}{4} u} \frac{\mu}{\frac{1}{4} u} \frac{\mu}{\frac{1}{4} u} \frac{\mu}{\frac{1}{4} u} \\
 & = \frac{\mu}{\frac{a_0}{a_i} \frac{1}{4} u} \frac{\mu}{\frac{1}{4} u} \frac{\mu}{\frac{1}{4} u} \frac{\mu}{\frac{1}{4} u} = a_0 b_0 \frac{1}{4} u + (b_0 a_k \ i \ a_0 b_k) \frac{1}{4} u + a_i b_j \frac{1}{4} u \\
 & = i N N^0 \hat{A}^y (b_0 a_i \ a_0 b) \wedge [p^0 (E^0 + m) \ i \ p^0 (E + m)] \\
 & \quad + i N N^0 \hat{A}^y \frac{1}{4} f(b_0 a_i \ a_0 b) \wedge [p^0 (E + m) + p^0 (E^0 + m)] g \\
 & \quad + i N N^0 \hat{A}^y (a \wedge p^0 b \wedge p_i \ b \wedge p^0 a \wedge p) + N N^0 \hat{A}^y \frac{1}{4} (a \wedge b) (E^0 + m) (E + m) \\
 & \quad + i N N^0 \hat{A}^y \frac{1}{4} p^0 (a \wedge b) \wedge p + N N^0 \hat{A}^y \frac{1}{4} [(p^0 \wedge b) \ a \wedge p_i \ (p^0 \wedge a) \ b \wedge p] ; \quad (B.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{u66}^5 u = \mathcal{P} \frac{\hat{A}^y}{E^0 + m} (E^0 + m; i^{-\frac{3}{4}} \mathfrak{c} p^0) \frac{\mu}{\frac{b_0}{\frac{3}{4} \mathfrak{c} b} \mid i^{-\frac{3}{4}} \mathfrak{c} b}{\frac{a_0}{\frac{3}{4} \mathfrak{c} a} \mathfrak{c} p_i \ (E + m)^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} a} \frac{\pi}{\mathcal{P} \frac{\hat{A}}{E + m}} \\
&= \mathcal{P} \frac{\hat{A}^y}{E^0 + m} (E^0 + m; i^{-\frac{3}{4}} \mathfrak{c} p^0) \\
& \mathcal{E} \frac{\mu}{\frac{b_0 a_0}{a_0} \mathfrak{c} p_i \ b_0 (E + m)^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} a_i^{-\frac{3}{4}} \mathfrak{c} b^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} a^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} p + a_0 (E + m)^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} b}{\frac{a_0}{a_0} \mathfrak{c} b^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} p_i \ (E + m)^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} b^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} a_i^{-\frac{3}{4}} \mathfrak{c} a^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} p + b_0 a_0 (E + m)} \frac{\pi}{\mathcal{P} \frac{\hat{A}}{E + m}} \\
&= \mathcal{P} \frac{\hat{A}^y}{E^0 + m} \mathcal{P} \frac{\hat{A}^y}{E + m} \frac{\cdot}{\frac{b_0 a_0}{E + m} \mathfrak{c} p_i \ b_0^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} a_i^{-\frac{3}{4}} \mathfrak{c} b^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} a^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} p}{\frac{3}{4} \mathfrak{c} b^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} a^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} p}{E + m} + a_0^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} b \\
& \mathcal{I} \frac{\frac{a_0}{(E^0 + m) (E + m)} \frac{\mathfrak{c} p^0}{\mathfrak{c} b^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} a^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} p} + \frac{\frac{3}{4} \mathfrak{c} p^0}{E^0 + m} \frac{\mathfrak{c} b^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} a^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} a}{(E^0 + m) (E + m)} + \frac{b_0}{(E^0 + m) (E + m)} \frac{\mathfrak{c} p^0}{\mathfrak{c} a^{\frac{3}{4}} \mathfrak{c} p}}{(E^0 + m) (E + m)} \frac{\mathfrak{c} p^0}{E^0 + m} \hat{A}; \quad (B.15)
\end{aligned}$$

2 Entre sanduíches

$$\begin{aligned}
& i \mathbf{u}^{\circ_1} \mathbf{u}^{\circ_1} (\mathbf{u}^{\circ_1} \mathbf{u})^{(2)} = (\mathbf{u}^{\circ_0} \mathbf{u})^{(1)} (\mathbf{u}^{\circ_0} \mathbf{u})^{(2)} i \mathbf{u}^{\circ_1} (\mathbf{u}^{\circ_1} \mathbf{u})^{(1)} (\mathbf{u}^{\circ_1} \mathbf{u})^{(2)} \\
& = \stackrel{\circ}{N} N^0 \hat{A}^y \hat{A} [(E^0 + m)(E + m) + p^0 \not{p}] + i \stackrel{\circ}{N} N^0 \hat{A}^y \not{A} \not{p} (p^0 \wedge p)^{a(1)} \\
& \stackrel{\circ}{E} N^0 \hat{A}^y \hat{A} [(E^0 + m)(E + m) + p^0 \not{p}] + i \stackrel{\circ}{N} N^0 \hat{A}^y \not{A} \not{p} (p^0 \wedge p)^{a(2)} \\
& i \stackrel{\circ}{N} N^0 \hat{A}^y \hat{A} [p_i^0 (E + m) + p_i (E^0 + m)] + i \stackrel{\circ}{N} N^0 \hat{A}^y \not{A}^2_{ijk} \not{p}_j (E^0 + m) i \not{p}_j^0 (E + m)^{a(1)} \\
& \stackrel{\circ}{E} N^0 \hat{A}^y \hat{A} [p_i^0 (E + m) + p_i (E^0 + m)] + i \stackrel{\circ}{N} N^0 \hat{A}^y \not{A}^2_{ilm} [p_l (E^0 + m) i \not{p}_l^0 (E + m)]^{a(2)}; \\
\end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
& i \mathbf{u}^{\circ_1} \mathbf{u}^{\circ_5} \mathbf{u}^{\circ_1} (\mathbf{u}^{\circ_1} \mathbf{u}^{\circ_5})^{(2)} = (\mathbf{u}^{\circ_0} \mathbf{u}^{\circ_5})^{(1)} (\mathbf{u}^{\circ_0} \mathbf{u}^{\circ_5})^{(2)} i \mathbf{u}^{\circ_1} (\mathbf{u}^{\circ_1} \mathbf{u}^{\circ_5})^{(1)} (\mathbf{u}^{\circ_1} \mathbf{u}^{\circ_5})^{(2)} \\
& = \stackrel{\circ}{N} N^0 \hat{A}^y \not{A} \not{p} [p^0 (E + m) + p (E^0 + m)]^{a(1)} \stackrel{\circ}{N} N^0 \hat{A}^y \not{A} \not{p} [p^0 (E + m) + p (E^0 + m)]^{a(2)} \\
& i \stackrel{\circ}{i} N^0 \hat{A}^y \hat{A} (p \wedge p^0)_i + N^0 \hat{A}^y \not{A}^2_i \hat{A} [(E^0 + m)(E + m) i \not{p} \not{p}^0] + N^0 \hat{A}^y \not{A} \not{p} (p^0 p_i + p p_i^0)^{a(1)} \\
& \stackrel{\circ}{E} i \stackrel{\circ}{N} N^0 \hat{A}^y \hat{A} (p \wedge p^0)_i + N^0 \hat{A}^y \not{A}^2_i \hat{A} [(E^0 + m)(E + m) i \not{p} \not{p}^0] + N^0 \hat{A}^y \not{A} \not{p} (p^0 p_i + p p_i^0)^{a(2)}; \\
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Apêndice C

Integrais

C.1 Quadridimensionais

Usando a parametrização de Feynman,

$$\frac{1}{D_1 D_2} = i (2) \int_0^{\infty} d^R \frac{1}{[^R D_1 + (1 i^{-R}) D_2]^2}; \quad (C.1)$$

e

$$\frac{1}{D_1 D_2 D_3} = i (3) \int_0^{\infty} d^R (1 i^{-R}) \int_0^{\infty} d^- \frac{1}{[^R D_1 + (1 i^{-R})^- D_2 + (1 i^{-R}) (1 i^{-}) D_3]^3}; \quad (C.2)$$

nos denominadores das integrais

$$X(K; 1; \gg) = \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(Q_i - K=2)^2 i^{-12} \frac{1}{(Q + K=2)^2 i^{-12} \gg^2}}; \quad (C.3)$$

$$X_1(K; 1; \gg) = \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{Q_1 \frac{1}{i^{-12}}}{(Q_i - K=2)^2 i^{-12} \frac{1}{(Q + K=2)^2 i^{-12} \gg^2}}; \quad (C.4)$$

$$X_{1\circ}(K; 1; \gg) = \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{Q_1 Q_\circ \frac{1}{i^{-12}}}{(Q_i - K=2)^2 i^{-12} \frac{1}{(Q + K=2)^2 i^{-12} \gg^2}}; \quad (C.5)$$

$$Y_1(\Phi; 1; 1) = \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{2m Q_1}{(Q_i - \Phi=2)^2 i^{-12} \frac{1}{(Q + \Phi=2)^2 i^{-12} [Q^2 + 2mV \gg Q_i - \Phi^2=4]} }; \quad (C.6)$$

obtemos

$$\frac{1}{(Q_i - K=2)^2 i^{-12} \frac{1}{(Q + K=2)^2 i^{-12} \gg^2}} = i(2) \int_0^1 d^\circ \frac{1}{(Q^2 + 2P \gg Q_i - S^2)^2} \quad (C.7)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(Q_i - \Phi=2)^2 i^{-12} \frac{1}{(Q + \Phi=2)^2 i^{-12} [Q^2 + 2mV \gg Q_i - \Phi^2=4]}} \\ &= i(3) \int_0^1 d^\circ (1_i^{-\circ}) \int_0^1 d^- \frac{1}{(Q^2 + 2P^\circ \gg Q_i - S^{\circ 2})^3} \end{aligned} \quad (C.8)$$

onde

$$P = (1_i - 2^\circ) K=2;$$

$$S^2 = \frac{1}{i^{-\circ}} + (1_i^{-\circ}) \gg^2 i^{-12} i - K^2=4 = 1_i^{-\circ} (1_i^{-\circ}) i^{-1} \gg^2 i^{-12} i - K^2=4; \quad (C.9)$$

$$P^\circ = (1_i^{-\circ}) (1_i^-) mV_i [^\circ i (1_i^{-\circ})^-] \Phi=2 = (1_i^{-\circ}) (1_i^-) mV_i + [1_i^{-\circ} i (1_i^{-\circ}) (1_i^-)] \Phi=2;$$

$$S^{\circ 2} = [^\circ + (1_i^{-\circ})^-] i^{-12} i [2^\circ + 2(1_i^{-\circ})^- i - 1] \Phi^2=4 = [1_i^{-\circ} (1_i^{-\circ}) (1_i^-)] i^{-12} i [1_i^{-\circ} 2(1_i^{-\circ}) (1_i^-)] \Phi^2=4;$$

Para resolver as integrações do espaço de Minkowski, utilizamos as seguintes fórmulas de 't Hooft e Veltman:

$$\int \frac{d^{2!} Q}{(2\pi)^{2!}} \frac{1}{(Q^2 + 2P \gg Q_i - S^2)^A} = \frac{i(i-1)^A}{(4\pi)^2} \frac{1}{i(A)} \frac{i(A_i - 1)}{(P^2 + S^2)^{A_i - 1}}; \quad (C.10)$$

$$\int \frac{d^{2!} Q}{(2\pi)^{2!}} \frac{Q_1}{(Q^2 + 2P \gg Q_i - S^2)^A} = \frac{i(i-1)^{A_i - 1}}{(4\pi)^2} \frac{P_1}{i(A)} \frac{i(A_i - 1)}{(P^2 + S^2)^{A_i - 1}}; \quad (C.11)$$

$$\int \frac{d^{2!} Q}{(2\pi)^{2!}} \frac{Q_1 Q_\circ}{(Q^2 + 2P \gg Q_i - S^2)^A} = \frac{i(i-1)^A}{(4\pi)^2} \frac{P_1 P_\circ}{i(A)} \frac{i(A_i - 1)}{(P^2 + S^2)^{A_i - 1}} i^{-\circ} \frac{g_{1\circ}}{2i(A)} \frac{i(A_i - 1_i - 1)}{(P^2 + S^2)^{A_i - 1_i - 1}}; \quad (C.12)$$

A função gama, para valores positivos de n , é dada por

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n! \quad (C.13)$$

e, para valores negativos, pela expansão

$$\Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(1) + \frac{(-1)^{n+1}}{2} \Gamma(2) + \frac{(-1)^{n+2}}{3} \Gamma(3) + \dots + O(n^2) + \dots; \quad (C.14)$$

onde

$$\Gamma(1) = 1 = 0.5772 \dots \quad \Gamma(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad (C.15)$$

e

$$\Gamma(2) = \frac{1}{2}; \quad \Gamma(3) = \frac{1}{2} \Gamma(1) + \frac{1}{4} \Gamma(2); \quad (C.16)$$

Quando as integrais têm dimensão 4, ! é dado pelo limite ! ! ! 2 i ", com " ! 0 e " > 0.

Neste limite, temos, por exemplo,

$$\frac{i(3i!)^{\frac{1}{2}}}{(P^2 + S^2)^{3i!}} \rightarrow ! \rightarrow \frac{1}{P^2 + S^2}; \quad (C.17)$$

$$\frac{i(2i!)^{\frac{1}{2}}}{(P^2 + S^2)^{2i!}} \rightarrow ! \rightarrow c_0 i \ln i P^2 + S^2; \quad (C.18)$$

$$\frac{i(1i!)^{\frac{1}{2}}}{(P^2 + S^2)^{1i!}} \rightarrow ! \rightarrow i \ln i P^2 + S^2; \quad (C.19)$$

$$\frac{i(i!)^{\frac{1}{2}}}{(P^2 + S^2)^{i!}} \rightarrow ! \rightarrow \frac{1}{2} i \ln i P^2 + S^2; \quad (C.20)$$

onde

$$c_0 \stackrel{!}{=} 1 = + \Gamma(1); \quad c_1 \stackrel{!}{=} 1 = + \Gamma(2) = c_0 + 1; \quad c_2 \stackrel{!}{=} 1 = + \Gamma(3) = c_0 + 1 + \frac{1}{2}; \quad (C.21)$$

Para as integrais X , X_1 , X_{10} e Y_1 , temos

$$\begin{aligned} P^2 + S^2 &= (1i^{2\circ})^2 K^2 = 4 + \frac{1}{2} (1i^{2\circ})^2 i \ln i \rightarrow^2 i^2 K^2 = 4 \\ &= \frac{1}{2} (1i^{2\circ})^2 i \ln i \rightarrow^2 i^2 i^2 K^2 = (1i^{2\circ})^2 K^2 \\ &= \frac{1}{2} (1i^{2\circ})^2 i \ln i \rightarrow^2 i^2 i^2 \frac{(1i^{2\circ})^2 K^2}{(1i^{2\circ})^2 i^2} = \\ &= \frac{1}{2} (1i^{2\circ})^2 i \ln i \rightarrow^2 i^2 i^2 \frac{K^2}{(1i^{2\circ})^2 i^2} = \end{aligned} \quad (C.22)$$

que implica

$$\ln i P^2 + \frac{1}{S^2} = \ln \frac{1}{(1-i^2)^{1/2-2}} + \ln \frac{\mu}{1-i} \frac{K^2}{12-2} \quad ; \quad (C.23)$$

e

$$\begin{aligned} P^2 + \frac{1}{S^2} &= f(1-i^2)(1-i^{-2})mV + [1-i^2(1-i^2)(1-i^{-2})] \frac{1}{S^2} = 2g^2 + [1-i^2(1-i^2)(1-i^{-2})]^{1/2} \\ &= i^2 [1-i^2(1-i^2)(1-i^{-2})] \frac{1}{S^2} = 4 \\ &= (1-i^2)^2 (1-i^{-2})^2 m^2 V^2 + (1-i^2)(1-i^{-2}) [1-i^2(1-i^2)(1-i^{-2})] mV \frac{1}{S^2} \\ &+ [1-i^2(1-i^2)(1-i^{-2})]^2 \frac{1}{S^2} = 4 + [1-i^2(1-i^2)(1-i^{-2})]^{1/2} i^2 [1-i^2(1-i^2)(1-i^{-2})] \frac{1}{S^2} = 4 \\ &= (1-i^2)^2 (1-i^{-2})^2 m^2 \frac{\mu}{1-i} \frac{1}{4m^2} + [1-i^2(1-i^2)(1-i^{-2})]^{1/2} \\ &+ \frac{1}{S^2} [1-i^2(1-i^2)(1-i^{-2})]^2 \frac{\mu}{1-i} \frac{1}{4m^2} = 4 \\ &= (1-i^2)^2 (1-i^{-2})^2 m^2 + [1-i^2(1-i^2)(1-i^{-2})]^{1/2} i^2 (1-i^2)(1-i^{-2}) \frac{\mu}{1-i} \frac{1}{4m^2} = 4 \\ &= i^2 (1-i^2)^{-1} \frac{\mu}{1-i} \frac{1}{4m^2} ; \quad (C.24) \end{aligned}$$

que implica

$$\frac{1}{P^2 + \frac{1}{S^2}} = i^2 \frac{1}{(1-i^2)^{-1}} \frac{1}{\frac{\mu}{1-i} \frac{1}{4m^2}} \quad (C.25)$$

com as definições

$$\frac{1}{S^2} \stackrel{def}{=} \frac{1-i^2(1-i^2)(1-i^{-2})}{(1-i^2)^{-1}} \frac{i^2}{\frac{\mu}{1-i} \frac{1}{4m^2}} \quad (C.26)$$

e

$$\frac{1}{S^2} \stackrel{def}{=} \frac{(1-i^2)^2 (1-i^{-2})^2 (m=1)^2 i^2 (1-i^2)(1-i^{-2}) + 1}{(1-i^2)^{-1}} \quad (C.27)$$

Logo, pelas expressões (C.10, C.11 e C.12), essas integrais são dadas por

$$X(K; 1; \gg) = + \frac{i}{(4\gg)^2} \int_0^{\infty} d^{\gg} \frac{1}{2} \ln \frac{\mu}{1-i} \frac{K^2}{12-2} \quad ; \quad (C.28)$$

$$X_1(K; 1; \gg) = i \frac{1}{(4\gg)^2} \frac{K^2}{12-2} \int_0^{\infty} d^{\gg} \frac{1}{2} \ln \frac{\mu}{1-i} \frac{K^2}{12-2} \quad ; \quad (C.29)$$

$$\begin{aligned}
X_{1\circ}(K; 1; \gg) &= + \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{K_1 K_\circ}{12} \int_0^1 d^\circ \frac{\mu_{1i} 2^\circ}{2} \frac{\Pi_2}{\frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-i} \frac{K^2}{12-2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{g_{1\circ}}{2} \int_0^1 d^\circ \frac{1i (1i 2^\circ)^2}{4} \frac{\mu}{1i \frac{K^2}{12-2}} \frac{\Pi}{\frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-i} \frac{K^2}{12-2}} \right) \quad (C.30)
\end{aligned}$$

$$Y_1(\Phi; \mathbf{1}; \mathbf{1}) = \mathbf{i} \frac{\mathbf{i}}{(4\mathbf{i})^2} \sum_{0}^1 \sum_{0}^1 d^{\mathbb{R}} d^{-} \frac{(1\mathbf{i}^{\mathbb{R}})(1\mathbf{i}^{-})mV_1 + [1\mathbf{i}^{\mathbb{R}} 2^{\mathbb{R}} \mathbf{i}^{-} (1\mathbf{i}^{\mathbb{R}})(1\mathbf{i}^{-})] \Phi_1 = 2}{\mathbb{R}^{-}} \frac{2m}{\Phi^2 \mathbf{i}^{12-2}}; \quad (C.31)$$

onde

$$\frac{y_0}{y_1} \stackrel{.}{=} c_0 i \ln \frac{e}{(1-i)^{1/2-2}} \quad \text{and} \quad \frac{y_1}{y_2} \stackrel{.}{=} c_1 i \ln \frac{e}{(1-i)^{1/2-2}} : \quad (\text{C.32})$$

Usando a representação integral

$$\ln \frac{\mu}{1+i^{\frac{K^2}{12-2}}} = \frac{z_1 - \mu_1}{d} + \frac{z_2 - \mu_2}{K^2 i^{\frac{12-2}{2}}} ; \quad (C.33)$$

as integrais podem ser reescritas como

$$X(K; 1; \gg) = + \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 d^{\otimes} \frac{\mu}{\mu_0} i \int_0^1 d^{-} \frac{1}{-i} \int_0^1 d^{-} \frac{1}{K^2 i^{-12-2}} \frac{\eta}{\eta} ; \quad (C.34)$$

$$X_1(K; 1; \gg) = i \frac{i}{(4\%)^2} \frac{K_1}{1} \Big|_0^{\mathbf{Z}_1} d^{\otimes} \frac{1}{2} i^{2\%} \frac{\mu}{\%_0} i \Big|_0^{\mathbf{Z}_1} d^- \frac{1}{i} \Big|_0^{\mathbf{Z}_1} d^- \frac{1}{K^2} \frac{12-2=-2}{i^{12-2=-}} \frac{\eta}{\mathbf{Z}_1} ; \quad (C.35)$$

$$\begin{aligned}
X_{1\circ}(K; 1; \gg) &= + \frac{i}{(4\%)^2} \frac{K_1 K_0}{12} \frac{Z_1}{0} d^{\otimes} \frac{\mu_{1i} 2^{\otimes}}{2} \frac{\Pi_2 \mu}{\%_0 i} \frac{Z_1}{0} d^- \frac{1}{-i} \frac{Z_1}{0} d^- \frac{12-2=-2}{K^2 i 12-2=-} \Pi \\
&+ \frac{g_{1\circ}}{2} \frac{Z_1}{0} d^{\otimes} \frac{\mu}{(1i^{\otimes})-2} \frac{1i}{12-2} \frac{K^2 \Pi \mu}{\%_1 i} \frac{Z_1}{0} d^- \frac{1}{-i} \frac{Z_1}{0} d^- \frac{12-2=-2}{K^2 i 12-2=-} \Pi; \quad (C.36)
\end{aligned}$$

$$Y_1(\mathbb{C}; 1; 1) = i \frac{1}{(4\mathbb{C})^2} \int_0^1 d^{\mathbb{C}} \frac{1}{i^{\mathbb{C}}} \int_0^1 d^{-1} \frac{1}{i^{-1}} \cdot m V_1 + \frac{1}{(1 i^{\mathbb{C}})(1 i^{-1})} i^{-1} \frac{\mathbb{C}^{\frac{3}{4}}}{2} \frac{2m}{\mathbb{C}^2 i^{-12}} : \quad (C.37)$$

Na penúltima expressão, temos

$$\begin{aligned}
& i \frac{\mu}{1-i} \frac{K^2 \frac{\mathbb{P}}{\frac{12-2=-2}{K^2 i^{12-2=-}}}}{\frac{12-2=-2}{K^2 i^{12-2=-}}} = \frac{\mu K^2 \frac{\mathbb{S}}{\frac{12-2=-}{12-2=-}}}{\frac{12-2=-2}{K^2 i^{12-2=-}}} i \frac{\mathbb{P}}{\frac{12-2=-2}{K^2 i^{12-2=-}}} \\
& = \frac{1}{-2} + \frac{\frac{12-2=-3}{K^2 i^{12-2=-}}}{\frac{12-2=-2}{K^2 i^{12-2=-}}} i \frac{\frac{12-2=-2}{K^2 i^{12-2=-}}}{\frac{12-2=-2}{K^2 i^{12-2=-}}} = \frac{1}{-2} + \frac{1}{-} \frac{\frac{12-2=-2}{K^2 i^{12-2=-}}}{\frac{12-2=-2}{K^2 i^{12-2=-}}} : \quad (C.38)
\end{aligned}$$

As três primeiras expressões contêm constantes infinitas provenientes da regularização dimensional no limite $d \rightarrow 4$ e das integrais $\int_0^1 \frac{1}{1-d} d$ e $\int_0^1 \frac{1}{2-d} d$. Essas divergências são removidas por renormalização. Essas constantes serão negligenciadas porque têm alcance zero e sobrepõem a outros efeitos de curta distância não considerados neste trabalho. Assim,

$$X(K; 1; \infty) = i \frac{1}{(4/4)^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{d^{\otimes} d^-}{K^2 i} \frac{12-2=2}{12-2=2} ; \quad (C.39)$$

$$X_1(K; 1; \infty) = + \frac{1}{(4/4)^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{d^{\otimes} d^-}{K^2 i} \frac{12-2=2}{12-2=2} (1i^2) \frac{K_1}{2^1} ; \quad (C.40)$$

$$X_{10}(K; 1; \infty) = i \frac{1}{(4/4)^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{d^{\otimes} d^-}{K^2 i} \frac{12-2=2}{12-2=2} \cdot (1i^2)^2 \frac{K_1 K_0}{4^{12}} i^{\otimes} (1i^{\otimes}) (1i^-) \frac{-2}{2^-} g_{10} ; \quad (C.41)$$

$$Y_1(\Phi; 1; 1) = i \frac{1}{(4/4)^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{d^{\otimes} \frac{1}{i^{\otimes}}}{\Phi^2} \frac{Z_1}{Z_1} \frac{1}{d^-} \frac{1}{i^-} \frac{1}{2mV_1} + \frac{1}{(1i^{\otimes})(1i^-)} i^{\frac{3}{4}} \Phi^{\frac{3}{4}} \frac{m}{\Phi^2 i^{12-2}} ; \quad (C.42)$$

C.2 Tridimensionais

A integração da parte angular da integral

$$F(r) = \int \frac{d^3 \Phi}{(2/4)^3} \frac{e^{i \Phi \cdot r}}{\Phi^2 + \infty^2 12} \quad (C.43)$$

consiste em

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_0^1 \frac{d\Phi}{(2/4)^3} \frac{\Phi^2}{\Phi^2 + \infty^2 12} \int_{-1}^1 d(\cos \mu) \int_0^{2/4} d\lambda e^{i \Phi r \cos \mu} \\ &= \int_0^1 \frac{d\Phi}{(2/4)^2} \frac{\Phi^2}{\Phi^2 + \infty^2 12} \int_{-1}^1 d(\cos \mu) e^{i \Phi r \cos \mu} \\ &= \int_0^1 \frac{d\Phi}{(2/4)^2} \frac{\Phi^2}{\Phi^2 + \infty^2 12} \frac{\mu}{i} \frac{e^{i \Phi r}}{i \Phi r} \frac{e^{i \Phi r}}{i \Phi r} \frac{\pi}{\pi} \\ &= \frac{i}{r} \int_{-1}^1 \frac{d\Phi}{(2/4)^2} \frac{\Phi}{\Phi^2 + \infty^2 12} e^{i \Phi r} = i \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_{-1}^1 \frac{d\Phi}{(2/4)^2} \frac{e^{i \Phi r}}{\Phi^2 + \infty^2 12} ; \end{aligned} \quad (C.44)$$

onde a mudança de 0 para $|z| = 1$ no limite inferior de integração provém do fato do integrando ser simétrico pela troca $\zeta \rightarrow -\zeta$. A integral de $|z| = 1$ a $|z| = 1$ resultante pode ser feita por resíduos, pois o numerador é uma função analítica e o denominador tem um pólo em cada hemisfério do plano complexo, “ $|z| = 1$ ” no plano inferior e “ $|z| = 1$ ” no plano superior.

O resíduo é dado pelo primeiro termo da série de Laurent,

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (C.45)$$

onde z_0 é um pólo de ordem m . Quando há somente um pólo ou pólo simples, temos que $m = 1$ e a_{-1} passa a ser o primeiro termo da série,

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (C.46)$$

com

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]_{z=z_0} = [(z - z_0) f(z)]_{z=z_0} : \quad (C.47)$$

No plano inferior, o pólo é “ $|z| = 1$ ” e a integração é no sentido horário ($|z| = 1$ Res), logo a aplicação do teorema de resíduo neste hemisfério fornece

$$\lim_{L \rightarrow 1^-} \int_{|z|=L} f(\zeta) d\zeta + \lim_{L \rightarrow 1^-} \int_{|z|=L} f(L e^{i\mu}) e^{i\mu} L e^{i\mu} d\mu = \int f(z) dz = |z| = 1 \text{ Res (pólo)} : \quad (C.48)$$

Como no plano inferior temos apenas um pólo ($m = 1$), então

$$\text{Res}(|z| = 1) = (z + i)^{-1} \frac{e^{izr}}{z^2 + r^2} \Big|_{z=i} = \frac{e^{izr}}{z - i} \Big|_{z=i} = i \frac{e^{i\pi r}}{2i} : \quad (C.49)$$

A segunda integral do lado esquerdo desaparece pelo lema de Jordan, logo

$$\lim_{L \rightarrow 1^-} \int_{|z|=L} \frac{e^{izr}}{\zeta^2 + r^2} d\zeta = |z| = 1 \int_{|z|=1} \frac{e^{izr}}{2i} = \frac{1}{4} e^{i\pi r} ; \quad (C.50)$$

ou seja,

$$F(r) = i \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{1}{4} e^{i\pi r} = \frac{1}{4} U(x; r) ; \quad (C.51)$$

onde

$$U(x; r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{ix}}{x} \quad \text{com} \quad x \stackrel{\text{def}}{=} r : \quad (C.52)$$

C.3 Unidimensionais

As integrações em \bar{z} e \bar{w} das funções de Yukawa

$$U_{3/4}^P(x) = \frac{8}{(4/4)^4} \int_0^{\infty} dt^{\bar{z}} \int_0^{\infty} dw^{\bar{z}} \int_0^{\infty} dt^{\bar{w}} \int_0^{\infty} dw^{\bar{w}} \frac{e^{i\mu x} n}{x} \frac{1}{1_i^3 + 3^{\circ 2} [1_i^{\bar{z}} (1_i^{\bar{w}})]^{\circ}} \quad (C.53)$$

e

$$U_{3/4}^A(x) = i \frac{4}{3} \frac{1}{(4/4)^4} \int_0^{\infty} dt^{\bar{z}} \int_0^{\infty} dw^{\bar{z}} \int_0^{\infty} dt^{\bar{w}} \int_0^{\infty} dw^{\bar{w}} \frac{e^{i\mu x} n}{x} \frac{1}{1_i^{\bar{z}} (1_i^{\bar{w}})_{\bar{z}}^2 + [1_i^{\bar{z}} (1_i^{\bar{w}})]^{\circ} (1_i^{\bar{z}}) (1_i^{\bar{w}}) \mu^2} ; \quad (C.54)$$

onde

$$\bar{z}^2 \stackrel{\circ}{=} -\frac{4}{1_i (1_i - 2^{\circ})^2} = \frac{1}{(1_i^{\bar{z}})^{-}} \quad (C.55)$$

e

$$\mu^2 \stackrel{\circ}{=} \frac{4}{''} \frac{1}{1_i (1_i - 2^{\circ})^2} = \frac{'' + (1_i^{\circ})_{\bar{z}}^2}{'' (1_i^{\circ})} = \frac{1}{''} \frac{1}{1_i^{\circ}} + \frac{''}{''} \frac{\mu^2}{1_i^{\circ}} ; \quad (C.56)$$

podem ser obtidas analiticamente através da igualdade

$$\int_0^{\infty} dt^{\bar{t}} t^n e^{i k t} = \frac{i(n+1)}{k^{n+1}} ; \quad (C.57)$$

Essas funções de Yukawa podem ser reescritas como

$$U_{3/4}^P(x) = \frac{8}{(4/4)^4} \frac{1}{x} \int_0^{\infty} dt^{\bar{z}} \int_0^{\infty} dw^{\bar{z}} \int_0^{\infty} dt^{\bar{w}} \int_0^{\infty} dw^{\bar{w}} \frac{n}{x} \frac{1}{1_i^3 + 3^{\circ 2} [1_i^{\bar{z}} (1_i^{\bar{w}})]^{\circ}} f(x;^{\bar{z}};^{\bar{w}}) \quad (C.58)$$

e

$$U_{3/4}^A(x) = i \frac{4}{3} \frac{1}{(4/4)^4} \int_0^{\infty} dt^{\bar{z}} \int_0^{\infty} dw^{\bar{z}} \int_0^{\infty} dt^{\bar{w}} \int_0^{\infty} dw^{\bar{w}} \frac{e^{i\mu x} n}{x} \frac{1}{1_i^{\bar{z}} (1_i^{\bar{w}})_{\bar{z}}^2 + [1_i^{\bar{z}} (1_i^{\bar{w}})]^{\circ} (1_i^{\bar{z}}) \mu^2} \frac{1}{1_i^{\circ}} \frac{1}{1_i^{\circ}} \frac{1}{1_i^{\circ}} \frac{1}{1_i^{\circ}} + [1_i^{\bar{z}} (1_i^{\bar{w}})]^{\circ} (1_i^{\bar{z}}) \mu^2 \frac{1}{1_i^{\circ}} \frac{1}{1_i^{\circ}} \frac{1}{1_i^{\circ}} \frac{1}{1_i^{\circ}} + [1_i^{\bar{z}} (1_i^{\bar{w}})]^{\circ} (1_i^{\bar{z}}) \mu^2 \frac{1}{1_i^{\circ}} \frac{1}{1_i^{\circ}} \frac{1}{1_i^{\circ}} \frac{1}{1_i^{\circ}} + [1_i^{\bar{z}} (1_i^{\bar{w}})]^{\circ} (1_i^{\bar{z}}) \frac{1}{1_i^{\circ}} \frac{1}{1_i^{\circ}} \frac{1}{1_i^{\circ}} \frac{1}{1_i^{\circ}} f(x;^{\bar{z}};^{\bar{w}}) ; \quad (C.59)$$

onde

$$d_x^2 \doteq \frac{d^2}{dx^2} \quad \text{e} \quad f(x; \circ; \circ; \circ) = \int_0^1 d^{\circ} \frac{\mu^2}{\mu} e^{i \mu x} : \quad (C.60)$$

Realizando a mudança de variável

$$\mu = b + y \quad \mu^2 = (b + y)^2 \quad " = \frac{b^2}{(b + y)^2} \quad \frac{d^{\circ}}{dy} = \frac{i 2b^2}{(b + y)^3} \quad (C.61)$$

com

$$b = \mu^{\circ} = \frac{\circ + (1 i \circ)^2}{\circ (1 i \circ)} = \frac{1}{1 i \circ + \circ^2} ; \quad (C.62)$$

podemos usar a equação (C.57) na integral em " para obter

$$\begin{aligned} f(x; \circ; \circ; \circ) &= \int_1^0 dy \frac{i 2b^2}{(b + y)^3} \frac{(b + y)^2}{b^2} e^{i b x} e^{i y x} = 2 e^{i b x} \int_0^1 dy (b + y) e^{i y x} \\ &= 2 e^{i b x} \left[\frac{b i (1)}{x} + \frac{i (2)}{x^2} \right] = 2 (1 + b x) \frac{e^{i b x}}{x^2} \end{aligned} \quad (C.63)$$

e, consequentemente,

$$d_x^2 f(x; \circ; \circ; \circ) = 2 i 6 + 6bx + 3b^2x^2 + b^3x^3 \frac{e^{i b x}}{x^4} : \quad (C.64)$$

Então,

$$U_{3/4}^P(x) = \frac{16}{(4/4)^4} \frac{1}{x^3} \int_0^1 d^{\circ} \int_0^1 d^{\circ} \frac{n}{1 i \circ 3 \circ} + 3 \circ^2 [1 i \circ (1 i \circ)] \circ (1 i \circ x d_x) f(x; \circ; \circ) \quad (C.65)$$

e

$$\begin{aligned} U_{3/4}^A(x) &= i \frac{8}{3} \frac{1}{(4/4)^4} \frac{1}{x} \int_0^1 d^{\circ} \int_0^1 d^{\circ} \int_0^1 d^{\circ} \frac{\frac{1}{2}}{d^{\circ} (1 i \circ) \circ b^2 i} \frac{\mu}{1 i \circ} \frac{\Pi}{i 1} \\ &\quad + [1 i \circ (1 i \circ)] \circ (1 i \circ) i d_x^2 i b^2 \frac{e^{i b x}}{x^2} \\ &= i \frac{8}{3} \frac{1}{(4/4)^4} \frac{1}{x} \int_0^1 d^{\circ} \int_0^1 d^{\circ} \int_0^1 d^{\circ} \frac{\frac{1}{2}}{d^{\circ} (1 i \circ) \circ b^2 i} \frac{\mu}{1 i \circ} \frac{\Pi}{i 1} + \frac{1}{(1 i \circ)^2} \frac{\Pi}{(1 + b x) \frac{e^{i b x}}{x^2}} \\ &\quad + [1 i \circ (1 i \circ)] \circ (1 i \circ) i 6 + 6bx + 2b^2x^2 \frac{e^{i b x}}{x^4} \\ &= i \frac{8}{3} \frac{1}{(4/4)^4} \frac{1}{x^5} \int_0^1 d^{\circ} \int_0^1 d^{\circ} \frac{\frac{1}{2}}{d^{\circ} (1 i \circ) \circ x^2 d_x^2 i} \frac{\mu}{1 i \circ} \frac{\Pi}{i 1} + \frac{1}{(1 i \circ)^2} \frac{\Pi}{x^2 (1 i \circ x d_x)} \\ &\quad + [1 i \circ (1 i \circ)] \circ (1 i \circ) i 6 i 6 x d_x + 2x^2 d_x^2 \frac{e^{i b x}}{x^4} f(x; \circ; \circ) ; \end{aligned} \quad (C.66)$$

onde

$$z^2 = \frac{b^2}{1-i^0} \quad \text{e} \quad f(x; \circ; \circ) = \int_0^1 \frac{1}{(1-i^0)^2} e^{bx} \cdot \frac{1}{1-i^0} dz. \quad (C.67)$$

Seguindo o mesmo procedimento aplicado na resolução da integral em \circ , a mudança de variável

$$\begin{aligned} b = a + z \quad & \frac{1}{1-i^0} + \frac{1}{(1-i^0)^2} = (a+z)^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{(1-i^0)^2} = \frac{1}{(a+z)^2} \cdot \frac{1}{1-i^0} \\ & \frac{dz}{dz} = \frac{i^2 (a+z)}{(a+z)^2 i^2} \end{aligned} \quad (C.68)$$

com

$$a = b_{-1} = \frac{1-i^0 + (1-i^0)^2}{(1-i^0)^2 (1-i^0)} = \frac{1}{1-i^0} + \frac{1}{(1-i^0)^2}; \quad (C.69)$$

implica em

$$\begin{aligned} f(x; \circ; \circ) &= \int_0^1 dz \frac{i^2 (a+z)}{(a+z)^2 i^2} \frac{1}{1-i^0} e^{ax} e^{-zx} \\ &= 2^0 e^{ax} \int_0^1 dz (a+z) e^{-zx} = 2^0 e^{ax} \cdot \frac{a(1)}{x} + \frac{i(2)}{x^2} = 2^0 (1+ax) \frac{e^{ax}}{x^2} \quad (C.70) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x d_x f(x; \circ; \circ) &= i^2 2^0 \cdot 2ax + a^2 x^2 \frac{e^{ax}}{x^2}; \\ x^2 d_x^2 f(x; \circ; \circ) &= 2^0 i^6 6 + 6ax + 3a^2 x^2 + a^3 x^3 \frac{e^{ax}}{x^2}; \\ x^3 d_x^3 f(x; \circ; \circ) &= i^2 2^0 i^2 24 + 24ax + 12a^2 x^2 + 4a^3 x^3 + a^4 x^4 \frac{e^{ax}}{x^2}; \quad (C.71) \end{aligned}$$

Com isso,

$$U_{3/4}^P(x) = \frac{32}{(4/4)^4} \frac{1}{x^5} \int_0^1 d^0 \int_0^1 d^0 i^3 3^0 2 + 3^0 3 [1-i^0 (1-i^0)] \frac{e^{3+3ax+a^2 x^2}}{e^{ax}} \frac{e^{ax}}{x^2} \quad (C.72)$$

e

$$\begin{aligned}
 U_{3/4}^A(x) &= i \frac{16}{3} \frac{1}{(4/4)^4} \frac{1}{x^7} \int_0^1 \int_0^1 d^{\circ} \int_0^1 d^{\circ} (1-i^{\circ})^{\circ 2} e^{30+30ax+15a^2x^2+5a^3x^3+a^4x^4} \\
 &\quad i a^2 x^2 \int_0^1 3+3ax+a^2x^2 + [1-i^{\circ}(1-i^{\circ})]^{\circ 2} (1-i^{\circ})^{\circ 2} e^{30+30ax+12a^2x^2+2a^3x^3} e^{i ax} \\
 &= i \frac{16}{3} \frac{1}{(4/4)^4} \frac{1}{x^7} \int_0^1 \int_0^1 d^{\circ} \int_0^1 d^{\circ} (1-i^{\circ})^{\circ 2} + [1-i^{\circ}(1-i^{\circ})]^{\circ 2} (1-i^{\circ})^{\circ 2} \\
 &\quad e^{i 30+30ax+12a^2x^2+2a^3x^3} e^{i ax} \\
 &= i \frac{32}{3} \frac{1}{(4/4)^4} \frac{1}{x^7} \int_0^1 \int_0^1 d^{\circ} \int_0^1 d^{\circ} i [1-i^{\circ}(1-i^{\circ})]^{\circ 3} e^{i 15+15ax+6a^2x^2+a^3x^3} e^{i ax} ;
 \end{aligned} \tag{C.73}$$

As regiões de médio e longo alcance correspondem, respectivamente, a $140 < x < 280$ e $x > 280$ MeV fm. Nessas regiões, todo intervalo de integração é fortemente dominado pela exponencial. Em $\circ = 1=2$ e $\circ = 2=3$, a função a assume o valor mínimo $a = 3$, que corresponde à exponencial máxima $e^{i 3x}$. Distanciando-se deste ponto, a exponencial cai rapidamente a zero, pois a tende a infinito nos limites das integrais, como é mostrado nas figuras (C.1) e (C.2). Por isso, é razoável a aproximação dos integrandos através da expansão das demais funções em torno de $\circ = 1=2$ e $\circ = 2=3$.

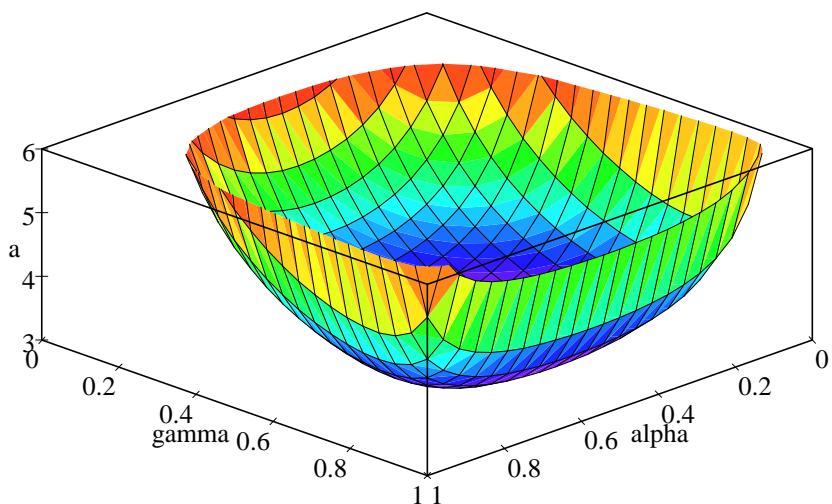


Figura C.1: Função a , equação (C.69), com $0 < \circ < 1$ e $0 < \circ < 1$.

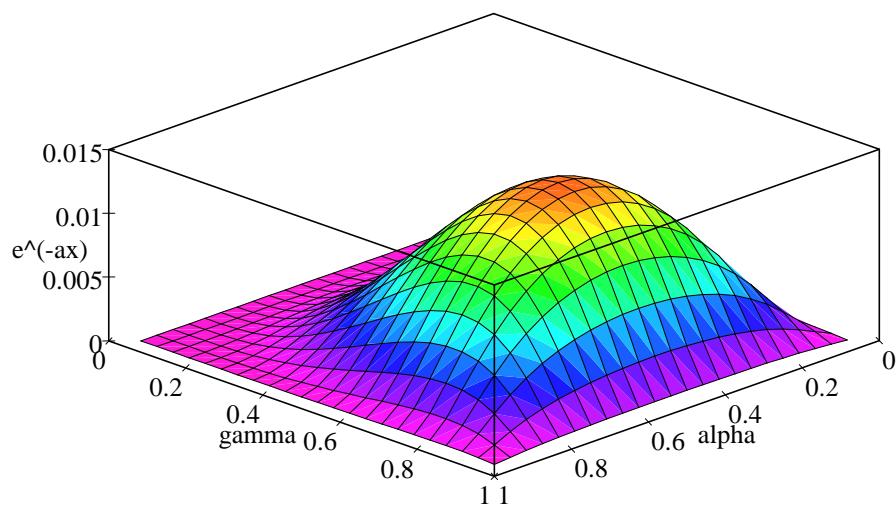


Figura C.2: Função $e^{i \alpha x}$ com $x = 2^1 = \sim c$ ($\sim c = 197.33$ MeV fm), $0 < \alpha < 1$ e $0 < \gamma < 1$.

Referências Bibliográficas

- [AFFR 73] V. Alfaro, S. Fubini, G. Furlan e C. Rossetti, *Currents in Hadron Physics*, North-Holland (1973).
- [Arf 85] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press 3^aed.(1985).
- [ASPG 97] J. Adam, A. Stadler, M. T. Peña e F. Gross, *Phys. Lett. B* 407 (1997) 97.
- [BbS 66] R. Blankenbecler, R. Sugar, *Phys. Rev.* 142 (1966) 1051.
- [BBT 98] J. Sá Borges, J. S. Barbosa e M. D. Tonasse, *Phys. Rev. D* 57 (1998) 4108.
- [BCEGS 97] J. Bijnens, G. Colangelo, G. Ecker, J. Gasser e M. E. Sainio, *Phys. Lett. B* 374 (1996) 210; *Nucl. Phys. B* 508 (1997) 263; Erratum *ibid. B* 517 (1998) 639.
- [BD 71] G. E. Brown e J. W. Durso, *Phys. Lett. B* 35 (1971) 120.
- [Ber 92] J. Beringer, *1/4N Newslett.* 7 (1992) 33.
- [BGS 94] S. Bellucci, J. Gasser e M. E. Sainio, *Nucl. Phys. B* 423 (1994) 80; Erratum *ibid. 431* (1994) 413.
- [Bir 94] M. C. Birse, *Phys. Rev. C* 49 (1994) 2212.
- [BKKM 92] V. Bernard, N. Kaiser, J. Kambor e Ulf-G. Meissner, *Nucl. Phys. B* 388 (1992) 315.
- [BKLM 94] V. Bernard, N. Kaiser, T.-S. H. Lee e Ulf-G. Mei β nner, *Phys. Rep.* 246 (1994) 315.
- [BKM 94] V. Bernard, N. Kaiser e Ulf-G. Mei β nner, *Phys. Lett. B* 332 (1994) 415. Erratum *ibid. 338* (1994) 520.
- [BKM 95b] V. Bernard, N. Kaiser e Ulf-G. Mei β nner, *Nucl. Phys. B* 457 (1995) 147.
- [BKM 99] V. Bernard, N. Kaiser e Ulf-G. Mei β nner, *Eur. Phys. J. A* 4 (1999) 259.
- [BL 91] H. Burkhardt e J. Lowe, *Phys. Rev. Lett.* 67 (1991) 2622.

- [BL 99] T. Becher e H. Leutwyler, Eur. Phys. J. C 9 (1999) 643.
- [Bond+95] A. Bondar et al., Phys. Lett. B 356 (1995) 8.
- [Bor 84] J. Sá Borges, Phys. Lett. B 149 (1984) 21.
- [BPP 71] L. S. Brown, W. J. Pardee e R. D. Peccei, Phys. Rev. D 4 (1971) 2801.
- [BRR 98] J-L. Ballot, M. R. Robilotta e C. A. da Rocha, Phys. Rev. C 57 (1998) 1574.
- [BS 51] E. E. Salpeter e H. A. Bethe, Phys. Rev. 84 (1951) 1232.
- [Cam 78] D. K. Campbell, Les Houches: Ions Lourds Et Mésons En Physique Nucléaire, R. Bailan, M. Rho e G. Ripka eds., North-Holland (1978).
- [CDR 83] H. T. Coelho, T. K. Das e M. R. Robilotta, Phys. Rev. C 28 (1983) 1812.
- [CFMK 96] T. D. Cohen, J. L. Friar, G. A. Miller e U. van Kolck, Phys. Rev. C 53 (1996) 2661.
- [CG 81] S. A. Coon e W. Glöckle, Phys. Rev. C 23 (1981) 1790.
- [CLLRV 73] W. N. Cottingham, M. Lacombe, B. Loiseau, J. M. Richard e R. Vinh Mau, Phys. Rev. D 8 (1973) 800.
- [CM 63] W. N. Cottingham e R. Vinh Mau, Phys. Rev. 130 (1963) 735.
- [CPR 95] S. A. Coon, M. T. Peña e D. O. Riska, Phys. Rev. C 52 (1995) 2925.
- [CPS 92] L. S. Celenza, A. Pantziris e C. M. Shakin, Phys. Rev. C 46 (1992) 2213.
- [CSB 75] S. A. Coon, M. S. Scadron e B. R. Barrett, Nucl. Phys. A 242 (1975) 467.
- [CSMBBM 79] S. A. Coon, M. S. Scadron, P. C. McNamee, B. R. Barrett, D. W. E. Blatt e B. H. J. McKellar, Nucl. Phys. A 317 (1979) 242.
- [CWZ 69] S. Coleman, J. Wess e B. Zumino, Phys. Rev. 177 (1969) 2239.
- [Daeh+95] W. W. Daehnick et al., Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 2913; Phys. Lett. B 423 (1998) 213.
- [DBS 84] J.W. Durso, G.E. Brown e M. Saarela, Nucl. Phys. A 430 (1984) 653.
- [DKMS 99] V. Dmitrašinović, K. Kubodera, F. Myhrer e T. Sato, Phys. Lett. B 465 (1999) 43.
- [Droch+96] M. Drochner et al., Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 454.

- [DSBJ 77] J. W. Durso, M. Saarela, G. E. Brown e A. D. Jackson, *Nucl. Phys. A* 278 (1977) 445.
- [DW 69] R. Dashen e M. Weinstein, *Phys. Rev.* 183 (1969) 1291.
- [EZO 90] V. P. Efrosinin, D. A. Zaikin e I. I. Osipchuk, *Z. Phys. A* 322 (1985) 573; *Phys. Lett. B* 246 (1990) 10.
- [FC 94] J. L. Friar e S. A. Coon, *Phys. Rev. C* 49 (1994) 1272.
- [FG 58] R. P. Feynman e M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* 109 (1958) 193.
- [Fla+98] R. W. Flammang et al., *Phys. Rev. C* 58 (1998) 916.
- [FMS 98] N. Fettes, Ulf-G. Meißner e S. Steininger, *Nucl. Phys. A* 640 (1998) 199.
- [FT 75] J. Fleischer e J. A. Tjon, *Nucl. Phys. B* 84 (1975) 375.
- [FT 80] J. Fleischer e J. A. Tjon, *Phys. Rev. D* 21 (1980) 87.
- [Gas 66] S. Gasiorowicz, *Elementary Particle Physics*, John Wiley & Sons (1966).
- [Gel 62] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* 125 (1962) 1067.
- [Gel 64] M. Gell-Mann, *Physics* 1 (1964) 63.
- [GK 80] W. Grein e P. Kroll, *Nucl. Phys. A* 338 (1980) 332.
- [GL 60] M. Gell-Mann e M. Lévy, *Nuovo Cimento* 16 (1960) 705.
- [GL 83b] J. Gasser e H. Leutwyler, *Phys. Lett. B* 125 (1983) 325.
- [GL 84] J. Gasser e H. Leutwyler, *Ann. Phys.* 158 (1984) 142.
- [GL 85] J. Gasser e H. Leutwyler, *Nucl. Phys. B* 250 (1985) 465.
- [GLS 91] J. Gasser, H. Leutwyler e M. E. Sainio, *Phys. Lett. B* 253 (1991) 252; *ibid. B* 253 (1991) 260.
- [Gol 61] J. Goldstone, *Nuovo Cimento* 19 (1961) 155.
- [Gol 80] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley (1980).
- [GSS 88] J. Gasser, M. E. Sainio e A. Švarc, *Nucl. Phys. B* 307 (1988) 779.
- [GT 58] M. L. Goldberger e S. B. Treiman, *Phys. Rev.* 111 (1958) 354.
- [Haa 58] R. Haag, *Phys. Rev.* 112 (1958) 669.

- [Har+97] J. G. Hardie et al., Phys. Rev. C 56 (1997) 20.
- [Heimb+96] P. Heimberg et al., Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 1012.
- [HHHMS 98] C. Hanhart, J. Haidenbauer, M. Hoßmann, Ulf-G. Meißner e J. Speth, Phys. Lett. B 424 (1998) 8.
- [HHKS 98] C. Hanhart, J. Haidenbauer, O. Krehl e J. Speth, Phys. Lett. B 444 (1998) 25.
- [HHRSS 95] C. Hanhart, J. Haidenbauer, A. Reuber, C. Schütz e J. Speth, Phys. Lett. B 358 (1995) 21.
- [HHS 96] J. Haidenbauer, C. Hanhart e J. Speth, Acta Phys. Pol. B 27 (1996) 2893.
- [HJ 62] T. Hamada e J. D. Johnston, Nucl. Phys. 34 (1962) 382.
- [HJS 72] G. Höhler, H. P. Jakob, R. Strauss, Nucl. Phys. B 39 (1972) 237.
- [HO 95] E. Hernández e E. Oset, Phys. Lett. B 350 (1995) 158.
- [Hoh 83] G. Höhler, Pion-Nucleon Scattering, group I, vol.9, subvol.b, part 2 of Landolt-Börnstein Numerical data and Functional Relationships in Science and Technology, Springer-Verlag, edited by H. Schopper (Berlin, 1983).
- [HP 78] F. Hachenberg e H. J. Pirner, Ann. Phys. (N.Y.) 112 (1978) 401.
- [Hut+91] D. A. Hutzler et al., Nucl. Phys. A 535 (1991) 618.
- [HV 79] J. Heitzmann, Tese de 3ème cycle apresentada à l'Université Pierre et Marie Curie (1979).
- [JM 91] E. Jenkins e A. V. Manohar, Phys. Lett. B 255 (1991) 558.
- [JM 97] T. S. Jensen e A. Miranda, Phys. Rev. C 55 (1997) 1039.
- [KA 82] O. Dumbräjs, R. Koch, H. Pilkuhn, G. C. Oades, H. Behrens, J. J. De Swart e P. Kroll, Nucl. Phys. B 216 (1983) 277.
- [KA 85] R. Koch, Nucl. Phys. A 448 (1986) 707.
- [Kai 01] N. Kaiser, Phys. Rev. C 61 (2000) 014003; ibid. C 62 (2000) 024001; ibid. C 63 (2001) 044010.
- [KBW 97] N. Kaiser, R. Brockman e W. Weise, Nucl. Phys. A 625 (1997) 758.
- [KGW 98] N. Kaiser, S. Gertendörfer e W. Weise, Nucl. Phys. A 637 (1998) 395.

- [KH 99] W. B. Kaufmann e G. E. Hite, *Phys. Rev. C* 60 (1999) 055204.
- [KMR 96] U. van Kolck, G. A. Miller e D. O. Riska, *Phys. Lett. B* 388 (1996) 679.
- [KMSF 96] M. Knecht, B. Moussallam, J. Stern e N. Fuchs, *Nucl. Phys. B* 457 (1995) 513; *ibid. B* 471 (1996) 445.
- [KR 66] D. S. Koltun e A. Reitan, *Phys. Rev.* 141 (1966) 1413; *Nucl. Phys. B* 4 (1968) 629.
- [Lee 81] T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Harwood Academic (1981).
- [Leu 94] H. Leutwyler, *Ann. Phys.* 235 (1994) 165.
- [Leu 99] H. Leutwyler e T. Becher, *Eur. Phys. J. C* 9 (1999) 643.
- [LHRMB 62] K. E. Lassila, M. H. Hull, H. M. Ruppel, F. A. MacDonald e G. E. Breit, *Phys. Rev.* 126 (1962) 881.
- [LLRVCPT 80] M. Lacombe, B. Loiseau, J. M. Richard, R. Vinh Mau, J. Coté, P. Pires e R. de Tourreil, *Phys. Rev. C* 21 (1980) 861.
- [LOP 47] C. M. G. Lattes, G. P. S. Occhialini e C. F. Powell, *Nature* 160 (1947) 486.
- [LR 93] T.-S. H. Lee e D. O. Riska, *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993) 2237.
- [LSZ 55] H. Lehmann, K. Symanzik e W. Zimmermann, *Nuovo Cimento* 12 (1955) 204.
- [LY 56] T. D. Lee e C. N. Yang, *Phys. Rev.* 104 (1956) 254.
- [Mat 97] E. Matsinos, *Phys. Rev. C* 56 (1997) 3014.
- [Men 85] A. M. M. Menezes, *dissertação de mestrado apresentada no Instituto de Física da USP (1985)*.
- [Mey+92] H. O. Meyer et al., *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990) 2846; *Nucl. Phys. A* 539 (1992) 633.
- [MHE 87] R. Machleidt, K. Holinde e Ch. Elster, *Phys. Lett. C* 149 (1987) 1.
- [MPR 00] C. M. Maekawa, J. C. Pupin e M. R. Robilotta, *Phys. Rev. C* 61 (2000) 064002.
- [MR 98] C. M. Maekawa e M. R. Robilotta, *Phys. Rev. C* 57 (1998) 2839.
- [MR 99] C. M. Maekawa e C. A. da Rocha, *nucl-th/9905052*.

- [MS 91] G. A. Miller e P. U. Sauer, Phys. Rev. C 44 (1991) 1725.
- [NL 62] Y. Nambu e D. Lurie, Phys. Rev. 125 (1962) 1429.
- [NL 90] S. Nozawa e T.-S. H. Lee, Nucl. Phys. A 513 (1990) 511, 544.
- [NS 62] Y. Nambu e E. Schrauner, Phys. Rev. 128 (1962) 862.
- [NT 65] Y. Nakamura e R. Tamagaki, Progr. Theor. Phys. 33 (1965) 769.
- [OK 92] C. Ordóñez e U. van Kolck, Phys. Lett. B 291 (1992) 459.
- [OMKB 95] M. G. Olsson, Ulf-G. Meißner, N. Kaiser e V. Bernard, *N Newslett.* No. 10 (1995) 201.
- [OO 75] M. G. Olsson e E. T. Osypowski, Nucl. Phys. B 101 (1975) 136.
- [ORK 94] C. Ordóñez, L. Ray e U. van Kolck, Phys. Rev. Lett. 72 (1994) 1982.
- [ORK 96] C. Ordóñez, L. Ray e U. van Kolck, Phys. Rev. C 53 (1996) 2086.
- [OT 68] M. G. Olsson e L. Turner, Phys. Rev. Let. 20 (1968) 1127.
- [OT 69] M. G. Olsson e L. Turner, Phys. Rev. 181 (1969) 2141.
- [OT 77] M. G. Olsson e L. Turner, Phys. Rev. Let. 38 (1977) 296.
- [PASW 99] M. M. Pavan, R. A. Arndt, I. I. Strakovsky e R. L. Workman, *N Newslett.* 15 (1999) 118.
- [PL 70] M. H. Partovi e E. Lomon, Phys. Rev. D 2 (1970) 1999.
- [PR 97] J. C. Pupin e M. R. Robilotta, proceedings of the International Workshop On Hadron Physics 96, World Scienti...c (Singapore, 1997) 421, edited by E. Ferreira, R. A. M. S. Nazareth, V. L. Baltar, J. de Sá Borges.
- [PR 99] J. C. Pupin e M. R. Robilotta, Phys. Rev. C 60 (1999) 014003.
- [PRS 99] M. T. Peña, D. O. Riska e A. Stadler, Phys. Rev. C 60 (1999) 045201.
- [Pup 94] J. C. Pupin, dissertação de mestrado apresentada no Instituto de Física Teórica da UNESP (1994).
- [Pup 95] J. C. Pupin e M. R. Robilotta, proceedings in Hadrons Physics 96 (1996).
- [RC 86] M. R. Robilotta e H. T. Coelho, Nucl. Phys. A 460 (1986) 645.

- [Rei 68] R. V. Reid, *Ann. Phys. (N.Y.)* 50 (1968) 411.
- [RICD 85] M. R. Robilotta, M. P. Isidro Filho, H. T. Coelho e T. K. Das, *Phys. Rev. C* 31 (1985) 646.
- [RMK 99] C. A. da Rocha, G. A. Miller e U. van Kolck, *Phys. Rev. C* 61 (2000) 034613.
- [Rob 95] M. R. Robilotta, *Nucl. Phys. A* 595 (1995) 171.
- [Rob 01] M. R. Robilotta, *Phys. Rev. C* 63 (2001) 044004.
- [Roc 93] C. A. Rocha, tese de doutorado apresentada no Instituto de Física da USP (1993).
- [RR 94] C. A. da Rocha e M. R. Robilotta, *Phys. Rev. C* 49 (1994) 1818.
- [RR 97] M. R. Robilotta e C. A. da Rocha, *Nucl. Phys. A* 615 (1997) 391.
- [RTFS 99] M. C. M. Rentmeester, R. G. E. Timmermans, J. L. Friar e J. J. de Swart, *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999) 4992.
- [Sak 64] J. J. Sakurai, *Invariance Principles and Elementary Particles*, Princeton University (1964).
- [Sak 67] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (1967).
- [Sch 57] J. Schwinger, *Ann. Phys.* 2 (1957) 407.
- [Sky 62] T. H. R. Skyrme, *Nucl. Phys.* 31 (1962) 556.
- [SP 98] R. A. Arndt, W. J. Briscoe, R. L. Workman e I. I. Strakovsky, SAID on-line program (Virginia Tech Partial-Wave Analysis Facility, 1998) <http://gwdac.phys.gwu.edu/>.
- [TNS 51] M. Taketani, S. Nakamura e M. Sasaki, *Progr. Theor. Phys.* VI (1951) 581.
- [Wan 97] G. Wanders, *Phys. Rev. D* 56 (1997) 4328; *Helv. Phys. Acta* 70 (1997) 287.
- [Wei 66] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 16 (1966) 879.
- [Wei 66b] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 17 (1966) 616.
- [Wei 67] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 18 (1967) 188.
- [Wei 68] S. Weinberg, *Phys. Rev.* 166 (1968) 1568.
- [Wei 79] S. Weinberg, *Physica A* 96 (1979) 327.

- [Wei 90] S. Weinberg, Phys. Lett. B 251 (1990) 288.
- [Wei 91] S. Weinberg, Nucl. Phys. B 363 (1991) 3.
- [WSA 84] R. B. Wiringa, R. A. Smith e T. L. Ainsworth, Phys. Rev. C 29 (1984) 1207.
- [Yuk 35] H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Japan 17 (1935) 48.
- [ZT 81] M. J. Zuilhof e J. A. Tjon, Phys. Rev. C 24 (1981) 736.
- [ZT 82] M. J. Zuilhof e J. A. Tjon, Phys. Rev. C 26 (1982) 1277.