

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Evolução de Buracos Negros Primordiais no Universo

Daniel Carrasco Guariento

Orientador: Prof. Dr. Jorge E. Horvath

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física para a obtenção do título de Doutor em Ciências

Comissão examinadora:

Prof. Dr. Jorge Ernesto Horvath (IAG-USP)
Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa (UNICAMP)
Prof.^a Dra. Cecilia Bertoni Martha Hadler Chirenti (UFABC)
Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho (IFUSP)
Prof. Dr. Sergio Eduardo de Carvalho Eyer Jorás (UFRJ)

São Paulo
2010

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Guariento, Daniel Carrasco

Evolução de Buracos Negros Primordiais no Universo.
São Paulo, 2010

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física

Orientador: Prof. Dr. Jorge Ernesto Horvath

Área de Concentração: Gravitação e Cosmologia

Unitermos: 1. Relatividade (Física); 2. Cosmologia;
3. Buracos Negros; 4. Termodinâmica.

USP/IF/SBI-046/2010

para meus pais

Agradecimentos

“In such cases men do not need much expression. A grip of the hand, the tightening of an arm over the shoulder, a sob in unison, are expressions of sympathy dear to a man’s heart.”

– Bram Stoker, *Dracula*

Muitas pessoas tiveram participação direta ou indireta na elaboração deste trabalho. Arriscando-me a injustamente negligenciar alguns nomes, dedico-lhes meus sinceros agradecimentos.

À minha família, em particular meus pais, meu irmão e meus avós, por propiciar o meu crescimento em um ambiente saudável e feliz.

Ao meu orientador Jorge Horvath, por me apresentar pacientemente às peculiaridades da vida acadêmica, sempre inspirando tranquilidade e segurança.

Aos membros da banca examinadora, pelas valiosas observações e discussões para a elaboração da versão final deste texto.

Às minhas professoras do ensino fundamental Carminha e Juçara, e aos meus professores do ensino médio Marilda, Rogério, Flávio, Beto e Kantor, por despertarem o interesse pela ciência e pelo conhecimento.

Aos *sifus* Serra e de Paula e aos *sihings* Cláudio, Gilvan e Roni pelas importantes lições de disciplina e perseverança.

Aos professores Luis Raul Weber Abramo, João Carlos Alves Barata, José Ademir Sales de Lima, Enos Picazzio, Alberto Saa e Walter Felipe Wreszinski pela orientação acadêmica e profissional.

Aos Tensores, em particular Timpa, Dudu, Elisa, Elton, Chico, Gabriel Weber, Yoshi, Leonardo, Rebeca, Renato, Wilson e Yair pela amizade e apoio, e pelas conversas e discussões acadêmicas (ou nem tanto) ao longo dos anos.

Aos amigos Renan, Marinho, Anderson, Vinicius, José Ernesto, Pedro Henrique, Rogério, Limão, Bertolla, e tantos outros que deixaram suas marcas e memórias, tornando o mundo um lugar mais interessante em que se existir.

À Gabi, pela companhia, carinho e amor que me impulsionam a ser uma pessoa melhor.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar a interação dos buracos negros primordiais com as principais espécies físicas exóticas de matéria e energia que foram teorizadas para explicar as observações cosmológicas da última década. A interação com diferentes formas de energia escura a partir de campos escalares, como a energia *phantom*, e modelos de quartessência, como o gás de Chaplygin, associada a modelos já existentes de interação com espécies físicas mais bem conhecidas, fornece resultados importantes e sugere comportamentos inesperados na trajetória dos buracos negros primordiais desde a sua formação até os dias de hoje.

Nossa análise abrange os aspectos dinâmicos e termodinâmicos da acreção e evaporação de buracos negros, explorando os limites de validade da teoria e estudando o comportamento sob as condições extremas que resultam desses novos modelos de matéria e energia.

Finalmente, o estudo prossegue na direção de um modelo de evolução a partir diretamente das equações de campo, em um espaço-tempo totalmente dinâmico em que buscamos paralelos com as descrições provenientes das hipóteses simplificadoras sobre que nos baseamos durante os estágios anteriores.

Os resultados permitem fazermos uma descrição unificada da evolução dos buracos negros, em que as relações entre todas as componentes são transparentes e suas contribuições individuais são facilmente identificadas. Associando-os à descrição termodinâmica, é possível traçar um quadro completo e abrangente do problema, capaz de acomodar novos modelos e prover uma compreensão profunda da interação dos buracos negros com o meio cosmológico.

Abstract

We study the interaction between primordial black holes and the exotic dark matter and dark energy components which have been modeled to explain cosmological observations within the last decade. The interaction with different forms of scalar field dark energy, such as phantom energy, and quartessence models as the Chaplygin gas, together with the well-known interaction with the ordinary forms of matter and energy, provides important results and suggests unexpected behaviors on primordial black holes since their formation until the present time.

Our analysis encompasses dynamical and thermodynamical aspects of black hole accretion and evaporation exploring the theory validity ranges and studying its behavior under the extreme conditions which arise from these new dark fluid models.

Finally, our study progresses towards an evolution model based solely on the field equations, within a fully dynamical space-time in which we seek parallel descriptions with previous models, which use simplifying hypotheses.

Our results provide a unified description of black hole evolution, in which the role of all components and their relation to each other are clear and easily identifiable. Along with the thermodynamical description, it is possible to make a comprehensive picture of the problem, capable of accommodating new models and furnish a deep understanding of black hole interaction with the cosmological environment.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	ix
Notação e convenções	xvii
1 Buracos negros	1
1.1 Estrelas congeladas	2
1.1.1 A métrica de Schwarzschild	2
1.1.2 Vetores de Killing	3
1.1.3 Gravidade superficial	4
1.2 Buracos negros primordiais	5
1.3 Interação de buracos negros com o meio	7
1.3.1 Acreção de Bondi	7
1.3.2 Acreção por captura de partículas	9
1.3.3 Acreção de radiação	12
1.3.4 Evaporação de Hawking	14
1.3.5 Competição entre acreção de radiação e evaporação de Hawking	16
2 Acreção quase-estacionária de fluidos perfeitos	19
2.1 A energia escura	19
2.2 Modelos de fluidos	21
2.3 Definição da variação da massa	23
2.4 Fluidos estáticos	26
2.5 Acreção de energia <i>phantom</i> em contexto	29
2.5.1 A equação completa de acreção	29
2.5.2 Evolução cosmológica da energia escura	30
2.5.3 Regimes de acreção	31

2.5.4	Comportamento da função de massa crítica	34
2.5.5	Competição entre acreção <i>phantom</i> e evaporação	35
2.6	Acreção de fluidos cosmológicos	38
2.6.1	Acreção no modelo Λ CDM	38
2.6.2	Acreção de um gás de Chaplygin generalizado	41
3	Termodinâmica da evolução de buracos negros	45
3.1	As leis da Termodinâmica de buracos negros	45
3.1.1	A segunda lei generalizada	47
3.2	Dedução termodinâmica da função de massa crítica	48
3.3	Acreção de energia <i>phantom</i> e a segunda massa crítica	50
3.3.1	Entropia <i>phantom</i> com temperatura negativa	51
3.3.2	Entropia <i>phantom</i> com potencial químico não nulo	53
4	Evaporação de Hawking e o princípio de incerteza generalizado	57
4.1	Evaporação de Hawking pelo princípio de incerteza	58
4.2	O princípio de incerteza generalizado	58
4.3	A métrica de Schwarzschild–de Sitter	60
4.4	Efeito do GUP estendido sobre a radiação de Hawking	61
4.4.1	Extensão do GUP	61
4.4.2	Entropia dos buracos negros no GUP estendido	63
4.4.3	Evolução no tempo	64
5	Acreção não estática e <i>back-reaction</i>	69
5.1	Métricas dependentes do tempo	70
5.2	A métrica de Vaidya	71
5.2.1	A métrica de Bonnor–Vaidya	72
5.3	Condições de contorno cosmológicas	73
5.3.1	A métrica de Vaidya–de Sitter	73
5.3.2	A métrica de Bonnor–Vaidya–de Sitter	74
5.4	A métrica de McVittie	76
5.4.1	Generalizações da métrica de McVittie	77
6	Conclusões	83
A	Dedução da métrica de Schwarzschild–de Sitter	87
B	Demonstrações das leis da Termodinâmica de buracos negros	89

C Condições de energia	95
C.1 A condição de energia fraca	95
C.2 A condição de energia nula	95
C.3 A condição de energia dominante	96
C.4 A condição de energia forte	96
Referências Bibliográficas	97
Índice Remissivo	110

Lista de Figuras

1.1	Diferença entre o horizonte de partículas e o horizonte futuro de eventos	6
1.2	Potencial efetivo entre dois corpos na gravitação newtoniana . . .	10
1.3	“Potenciais efetivos” para uma partícula na métrica de Schwarzschild	11
1.4	Pontos de retorno para uma partícula ultrarrelativística em função do parâmetro de impacto	13
1.5	Evolução da massa de buracos negros sujeitos a acreção de radiação e evaporação de Hawking na era da radiação	18
2.1	Variação no quadrimomento do volume contido no horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild pelo fluxo do tensor de energia-momento através da fronteira de área \mathcal{A}	25
2.2	Evolução das densidades de radiação, matéria e energia <i>phantom</i> com o fator de escala	32
2.3	Evolução da massa de buracos negros primordiais no cenário de acreção de matéria, radiação e energia <i>phantom</i>	37
2.4	Evolução de um buraco negro de massa inicial $m_i = 10^{-3}m_\odot$ nos três cenários discutidos na seção 2.6	41
2.5	Evolução da massa de um buraco negro com $m_0 = m_\odot$ acretando um gás de Chaplygin generalizado	43
4.1	Incerteza no momento como função do raio gravitacional em unidades de Planck com e sem constante cosmológica	63
4.2	Comparação entre a entropia convencional do buraco negro, a entropia calculada pelo GUP e a entropia pelo GUP estendido	65
4.3	Razão entre a evaporação de Hawking pelo GUP modificado e a evaporação de Hawking convencional, comparada com a mesma razão para a evaporação pelo GUP	66
4.4	Evolução de buracos negros nos cenários de Hawking, GUP e GUP estendido	66

Notação e convenções

“I am firm; you are obstinate; he is a pig-headed fool.”

– Bertrand Russel

A gravitação é uma área da Física em que não há consenso na determinação dos sinais durante a formulação da teoria. Ao contrário do Eletromagnetismo, que em princípio também permite uma ambiguidade na definição dos sinais, mas em que é indiscutivelmente unânime a convenção do sinal das cargas elétricas, a Relatividade Geral sofre de níveis variados de heterogeneidade nas preferências de adoção de sinais na métrica, no tensor de Riemann e no tensor de Einstein, além de não existir também consenso sobre que tipo de alfabeto denota tipos diferentes de índices^[1].

Neste trabalho são adotadas as seguintes convenções de sinal e notações.

- A coordenada temporal é colocada na posição x^0 , enquanto as coordenadas espaciais são x^i , $i = 1, 2, 3$.
- Índices gregos percorrem as quatro coordenadas do espaço-tempo, enquanto índices latinos percorrem apenas as coordenadas espaciais.
- A assinatura da métrica é do tipo $(+, -, -, -)$ ^[2;3].
- O tensor de Ricci tem o mesmo sinal do tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}.$$

- O sinal das equações de Einstein é positivo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}.$$

- A massa solar é representada por $m_{\odot} = 1,9884(2) \times 10^{30} \text{ kg}$ ^[4].

- Derivadas parciais na direção radial são denotadas com uma linha sobrecrita ($'$), enquanto derivadas na direção temporal são denotadas com um ponto diacrítico ($\dot{}$).

Exceto quando explicitado no texto, o sistema de unidades adotado neste trabalho é o das unidades de Planck, que utiliza a seguinte normalização

$$c = \hbar = G = k_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1.$$

Capítulo 1

Buracos negros

*“Then something happened which unleashed the power of our imagination:
We learned to talk.”*

– Pink Floyd, *Keep Talking*
falado por Stephen Hawking

A teoria da Relatividade Geral, com sua interpretação do espaço e do tempo como uma única entidade dinâmica, constitui um dos pilares da Física contemporânea. Seus resultados carregam implicações para o estudo dos corpos celestes e do Universo como um todo.

Um dos resultados mais fundamentais da Relatividade Geral, e que não é previsto pela gravitação newtoniana, é a existência de *buracos negros*. Em termos físicos, um buraco negro é uma região do espaço em que a gravidade é tão forte que nada consegue escapar^[5]. Tudo o que acontece no interior dessa região é incapaz de afetar os eventos na região externa. Em outras palavras, o buraco negro é uma região *causalmente desconectada* do espaço externo. A fronteira entre a região exterior do espaço-tempo e o buraco negro é o chamado *horizonte de eventos*.

Diversas observações indiretas confirmam a existência de buracos negros. Em particular, a observação das órbitas de estrelas no centro da Via Láctea é uma forte evidência da existência de um buraco negro supermassivo naquela região^[6].

Sendo objetos tão exóticos, os buracos negros dão origem a muitos fenômenos contra-intuitivos, e a física nos arredores de suas fronteiras, no que diz respeito a efeitos quânticos, ainda não é bem compreendida, devido à falta de uma teoria definitiva de gravitação quântica. Assim, a física de buracos negros, sob os pontos de vista termodinâmico, quântico e clássico, é uma intensa área de pesquisa e um terreno pouco explorado pelo conhecimento humano, sobre o qual muitos avanços e descobertas têm sido feitos ao longo das últimas décadas.

1.1 Estrelas congeladas

A origem astrofísica mais comum dos buracos negros provém dos estágios finais da evolução estelar. O colapso gravitacional, quando não há mais mecanismos hidrodinâmicos capazes de manter a estabilidade da estrela, poderá, se a massa for grande o suficiente, concentrar a matéria em uma região do espaço suficientemente compacta para que a região se caracterize como um buraco negro. Esse processo depende do referencial do observador. Para um observador distante, o colapso nunca parecerá terminar, e a camada exterior de matéria levará um tempo infinito para atravessar a fronteira do horizonte de eventos. Eventualmente, a estrela, que se torna mais avermelhada e escura, parecerá ter congelado. Um observador comóvel com a matéria em colapso, no entanto, observa a formação do buraco negro em um tempo finito^[7]. Algumas soluções exibem a formação do buraco negro em tempo finito mesmo para um observador distante, dadas as devidas condições sobre as cascas de matéria em colapso^[8].

No nosso estudo, nos concentramos em buracos negros já formados, ou seja, em que a fase de colapso não é mais importante. Essa hipótese se justifica fisicamente no caso de buracos negros primordiais, em que o colapso não se dá no vácuo, ou no caso de buracos negros que não estão em um espaço de todo vazio e possuem algum tipo de interação com o meio. Isso pode ser entendido como a situação real, em que a poeira e o gás interestelar, além da radiação de fundo e outros tipos de matéria e energia, permeiam o Universo. Como esses fluidos são muito rarefeitos durante a maior parte da história do Universo, a sua presença pode ser ignorada em uma primeira aproximação.

1.1.1 A métrica de Schwarzschild

Partimos portanto da solução mais simples possível para as equações de Einstein que contém um buraco negro, que corresponde a uma massa puntiforme no espaço vazio. Trata-se da métrica de Schwarzschild^[9]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (1.1)$$

dada em coordenadas esféricas de curvatura.

Pelo princípio da equivalência, essa solução representa o espaço-tempo ao redor de um objeto de massa m na origem do sistema de coordenadas, e corresponde à solução da gravitação de Newton para distâncias grandes em coordenadas euclidianas esféricas^[10].

Ao nos aproximarmos do objeto central, podemos observar mais claramente os desvios dessa solução em relação à gravitação newtoniana. Além das diferenças

nas trajetórias de partículas ao redor da massa central, que estudamos na seção 1.3.2, há também uma singularidade em $r = r_G = 2m$.

Essa singularidade, que corresponde ao horizonte de eventos do buraco negro de Schwarzschild, não é uma singularidade real no espaço-tempo, no entanto, mas é um artefato resultante de uma má escolha do sistema de coordenadas. De fato, se fizermos a seguinte mudança de coordenadas^[3]

$$t \rightarrow \bar{t} = t + 2m \ln(r - 2m) \quad (1.2)$$

então a métrica (1.1) assume a forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r} d\bar{t}dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (1.3)$$

conhecida como coordenadas de Eddington–Finkelstein^[3]. Essa solução é analítica para todo $r > 0$. Analisando a trajetória de partículas nesse espaço-tempo, vemos que partículas que atravessam a fronteira $r = 2m$, independentemente de sua velocidade (suposta $v \leq 1$), são inexoravelmente levadas até a singularidade no centro do sistema de coordenadas (essa, sim, uma singularidade verdadeira do espaço-tempo). Devido a essa propriedade, o objeto central é chamado de *buraco negro*, e a fronteira r_G é chamada de *horizonte de eventos*, por demarcar duas regiões do espaço-tempo desconectadas causalmente uma da outra^[10].

1.1.2 Vetores de Killing

Os vetores de Killing estão associados às simetrias do espaço-tempo. Seja uma métrica $g_{\mu\nu}$ independente de uma das coordenadas x^K , de forma que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^K} = 0. \quad (1.4)$$

Geometricamente, isso significa que, se tomarmos uma curva ao longo das coordenadas x^μ , com $\mu \neq K$, então o comprimento da curva é preservado por translações ao longo da direção x^K ^[1].

O vetor dual

$$\xi_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^K} \quad (1.5)$$

que corresponde à 1-forma associada a essas translações locais, é chamado de *vetor de Killing*. Vetores da forma (1.5) satisfazem a chamada *equação de Killing*

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0. \quad (1.6)$$

Uma propriedade importante dos vetores de Killing é que, se γ é uma geodésica, com tangente u^μ , então $\xi_\alpha u^\alpha$ é constante ao longo da γ . Podemos interpretar esse fato como que cada família de simetrias dá origem a uma quantidade conservada para partículas e raios de luz^[11].

A equação de Killing (1.6) pode ser reescrita como^[12]

$$(\xi^2)_{;\alpha} \xi^\alpha \equiv 2\xi_{\beta;\alpha} \xi^\beta \xi^\alpha = 0 \quad (1.7)$$

o que significa que a grandeza ξ^2 é constante ao longo do vetor de Killing. Portanto, podemos classificar vetores de Killing como tipo espaço, tipo tempo ou tipo luz (nulo), de acordo com o sinal ou desaparecimento de ξ^2 .

Uma maneira alternativa de escrevermos o vetor de Killing envolve o uso da definição do tensor de curvatura de Riemann $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$. Lembramos que o tensor de Riemann está relacionado com o fato de um vetor não voltar ao seu estado inicial se for transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada. Ou seja, para um vetor qualquer ω^μ vale^[11]

$$\omega_{\alpha;\beta;\gamma} - \omega_{\alpha;\gamma\beta} = R_{\beta\gamma\alpha}{}^\delta \omega_\delta. \quad (1.8)$$

Se escrevermos (1.8) para um vetor de Killing ξ^μ e aplicarmos a equação de Killing (1.6), temos

$$\xi_{\alpha;\beta;\gamma} + \xi_{\gamma;\alpha;\beta} = R_{\beta\gamma\alpha}{}^\delta \xi_\delta. \quad (1.9)$$

Escrevendo a mesma equação com permutações cíclicas dos índices e somando-as com sinais convenientes, pelas simetrias do tensor de Riemann chegamos finalmente a uma expressão para o vetor de Killing em função do tensor de curvatura

$$\xi_{\alpha;\beta;\gamma} = -R_{\gamma\alpha\beta}{}^\delta \xi_\delta. \quad (1.10)$$

1.1.3 Gravidade superficial

A gravidade superficial de um buraco negro pode ser interpretada fisicamente como a força, exercida por um observador no infinito, necessária para manter uma partícula-teste em repouso sobre o horizonte de eventos. Se ξ^μ for um vetor de Killing tipo tempo, a gravidade superficial κ é definida como^[11]

$$\xi^\alpha{}_{;\beta} \xi^\beta = \kappa \xi^\alpha. \quad (1.11)$$

No caso de um buraco negro de Schwarzschild, a gravidade superficial é $\kappa = \frac{1}{4m}$.

1.2 Buracos negros primordiais

Embora normalmente se pense em buracos negros como sendo o produto do colapso de estrelas massivas, é bem conhecida a possibilidade de as inhomogeneidades iniciais do Universo terem também gerado pequenas regiões cuja atração gravitacional superasse a expansão, provocando o colapso em um buraco negro^[13]. Buracos negros gerados dessa forma são conhecidos como *primordiais*^[14].

Há muitos mecanismos diferentes formulados por hipóteses cosmológicas^[15] ou novas teorias físicas^[16;17] que podem ter levado à formação de buracos negros primordiais, mas a sua existência até hoje ainda não foi observada. No entanto, se de fato esses objetos existirem, suas propriedades os tornam excelentes fontes para o estudo de várias áreas da Física, como o colapso gravitacional, a Física de Altas Energias, o Universo jovem e a Gravitação Quântica^[18]. Da mesma forma, a não existência de buracos negros primordiais pode também nos fornecer limites para as teorias cosmológicas.

Uma região de raio R contendo matéria a uma densidade ρ , formada por partículas de massa μ a uma temperatura T , pode ter a energia térmica vencida pela atração gravitacional e colapsar se seu raio for maior que o comprimento de Jeans λ_J ^[19]

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{15T}{4\pi\mu\rho}}. \quad (1.12)$$

O colapso gravitacional de uma tal região do Universo primordial está limitado, portanto, pelo valor da densidade da região na época t ^[14]. Para que a formação do buraco negro respeite os limites da causalidade, um buraco negro primordial não deve ter ao se formar uma massa maior que da ordem da massa contida no horizonte de partículas na época de sua formação, se ela tiver ocorrido durante a inflação, ou no horizonte de Hubble se o buraco negro tiver se formado depois^[20] (ver figura 1.1). Ou seja, comparando-se a massa contida no horizonte, em função da densidade, com o valor da massa m de um buraco negro de mesmo raio^[21],

$$m \approx t \approx 10^{15} \left(\frac{t}{10^{-23}\text{s}} \right). \quad (1.13)$$

Assim, podemos ter um espectro de massas muito grande para os buracos negros primordiais, desde os que se formaram após a época de Planck, com $m \sim 10^{-5}$ g, até por exemplo os que se formaram após 1 s, que podem ter até $m \sim 10^5 m_\odot$. Até o final da era da radiação, um eventual buraco negro contendo toda a massa do horizonte poderia chegar até a $m \sim 10^{17} m_\odot$. Como não há evidên-

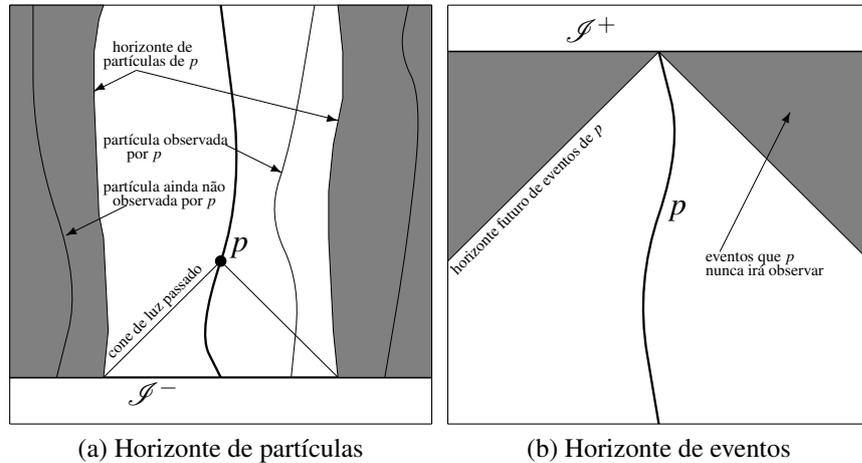


Figura 1.1: Diferença entre o horizonte de partículas e o horizonte futuro de eventos^[22]. Um observador p sobre a sua linha de mundo pode observar a cada instante uma fração das partículas no espaço-tempo se o infinito passado \mathcal{S}^- for tipo espaço (a). Se o infinito futuro \mathcal{S}^+ for também tipo espaço, então haverá eventos que nunca serão observáveis por p , o que constitui um horizonte de eventos cosmológico (b).

cia que suporte a existência de objetos tão grandes¹, que deveriam em princípio existir estatisticamente, por algum tempo se generalizou a suposição de que buracos negros primordiais nunca se formassem. No entanto, essas massas enormes só são possíveis em uma análise de acreção que despreze a expansão do Universo, o que é impreciso quando a massa do buraco negro se aproxima da massa do horizonte.

A densidade elevada é uma condição necessária para a formação de buracos negros primordiais, mas não é suficiente. É necessário que as flutuações de densidade sejam grandes o suficiente. Fortes candidatas a esse papel são as flutuações quânticas resultantes de algumas hipóteses inflacionárias^[24]. A abundância de buracos negros observada hoje pode, portanto, servir como critério de exclusão para esses modelos inflacionários^[25].

Um efeito importante da presença dos buracos negros primordiais sobre o seu ambiente vem de consequências do comportamento quântico devido às suas baixas massas e tamanhos, como a evaporação de Hawking, que estudamos na seção 1.3.4. A evaporação pode terminar em um processo explosivo, que deve deixar assinaturas observáveis na forma de raios cósmicos ou surtos de raios gama

¹Por exemplo, a evidência observacional é de que a massa escura no aglomerado de Virgem não pode estar em buracos negros de massa maior que $10^{10}m_{\odot}$ pela não observação de efeitos de maré^[23;14].

(GRBs²)^[26], ou ser interrompida na escala da massa de Planck por outros argumentos de Gravitação Quântica, como apontamos no capítulo 4. Nesse caso, os remanescentes de buracos negros primordiais também podem ser candidatos a constituintes da matéria escura^[18].

Os limites observacionais para a abundância de buracos negros primordiais de diferentes espectros de massa podem ser obtidos pela observação da radiação cósmica de fundo, que por exemplo limita a densidade de buracos negros que evaporariam hoje (10^{15} g) a um máximo de 10^{-8} vezes a densidade crítica do Universo^[24]. As medidas da época da reionização indicam também que a contribuição na radiação proveniente da evaporação de buracos negros é pequena na época da formação de estruturas^[15]. No entanto, buracos negros com massas maiores que esse valor podem, em princípio, sobreviver até hoje e constituir parte da matéria escura na forma de WIMPs³ ou, no caso de massas mais elevadas, MACHOs⁴.

De fato, em alguns cenários não convencionais de Inflação^[27], os buracos negros primordiais podem *crescer* substancialmente durante as fases iniciais da Inflação, e assim gerar uma população que evolui até a era da radiação sem necessariamente evaporar. Vários trabalhos têm estudado o problema da acreção de radiação e outros campos de matéria pelos buracos negros^[28]. Um resultado de relevância para esta proposta foi a existência de uma ampla faixa entre a massa do horizonte e a massa que começa a evaporar imediatamente (chamada na literatura de *massa crítica*^[29]), que pode ser ocupada por buracos negros que crescem a expensas do ambiente, embora o façam, em geral, muito devagar. Descrevemos esse efeito em detalhe na seção 1.3.5.

Nas seções e capítulos seguintes, não nos preocupamos em estudar os mecanismos de formação dos buracos negros primordiais, mas nos apoiamos em (1.13) para gerar um espectro amplo de massas iniciais. Esses objetos evoluem ao longo da história do Universo de acordo com a sua interação com o ambiente, por acreção, evaporação e *back-reaction*. Este trabalho se dedica principalmente a estudar os aspectos teóricos de alguns dos componentes dominantes dessa evolução.

1.3 Interação de buracos negros com o meio

1.3.1 Acreção de Bondi

A forma principal de interação de um buraco negro com o meio é através da captura do material ao redor devida à atração gravitacional. Esse mecanismo,

²*Gamma ray bursts.*

³*Weakly interacting massive particles.*

⁴*Massive astrophysical compact halo objects.*

conhecido como *acrecção*, foi primeiramente caracterizado por Hoyle e Lyttleton^[30;31;32], como parte do estudo da estrutura e evolução estelar, e depois analisado em detalhe e enunciado precisamente por Bondi^[33;34], para algumas configurações particulares de gases sob a ação gravitacional de uma estrela.

Em toda análise de acreção, o objetivo principal do estudo é encontrar uma expressão para a massa do objeto em questão como função do tempo, em termos das densidades e pressões do material circundante, tipicamente tomado como um fluido ou gás. O problema da acreção de um material em repouso distribuído por todo o espaço por um objeto compacto esfericamente simétrico é conhecido na literatura como acreção de Bondi–Hoyle–Lyttleton, ou, mais frequentemente, *acrecção de Bondi*.

O primeiro dos casos particulares estudados por Bondi constitui o problema da acreção de matéria por um objeto que se move através de uma nuvem de gás sem pressão a uma certa velocidade^[33]. O segundo consiste em um objeto em repouso em relação à matéria circundante^[34], o que permite que os efeitos da pressão do gás sejam levados em conta em detrimento dos efeitos dinâmicos decorrentes do movimento do objeto relativamente à nuvem. Concentramo-nos em particular no segundo caso, considerando um gás cuja pressão p é uma função da densidade ρ , dada em toda parte pela *equação de estado*

$$p = w\rho^\gamma \quad (1.14)$$

com w e γ constantes. Um gás com tal relação entre a pressão e a densidade é chamado de *gás politrópico*. A constante γ é dada por^[35]

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n} \quad (1.15)$$

em que n é chamado de índice politrópico do gás. No caso de um gás ideal isentrópico, γ é o chamado expoente adiabático, dado pela razão entre os calores específicos do fluido a pressão e volume constantes. O caso $\gamma = 1$ ($n \rightarrow \infty$), que corresponde a uma esfera isotérmica de gás autogravitante^[36], chamado de gás barotrópico, é o mais comum para modelar fluidos na Cosmologia. Nesse contexto, a própria constante w é tipicamente referida como a equação de estado do material, em vez da expressão (1.14).

Consideremos um gás com a pressão dada por (1.14), sendo acretado por um objeto de massa m em repouso localizado no centro do referencial. Utilizamos coordenadas esféricas, em que r é a coordenada radial e t é a coordenada temporal, e definimos v como a velocidade radial do fluido na direção do objeto central. As equações clássicas que governam o problema são a equação de continuidade

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi r^2 \rho v \quad (1.16)$$

e algum vínculo sobre a velocidade do gás acretado, como por exemplo a equação de Bernoulli

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} - \frac{m}{r} = (\text{constante}) = 0. \quad (1.17)$$

em que p_∞ e ρ_∞ são a pressão e a densidade do fluido no infinito, ou seja, longe da influência gravitacional do objeto. A constante é igual a zero devido às condições de contorno para o fluido no infinito.

Podemos reescrever as equações em termos da velocidade do som no fluido no infinito

$$c_s^2 = \gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty}. \quad (1.18)$$

O resultado da manipulação de (1.16) e (1.17) com o uso de (1.18) é que a taxa de acreção $\frac{dm}{dt}$ não pode ser superior a

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi\lambda_c \frac{m^2}{c_s^3} \rho_\infty \quad (1.19)$$

com λ_c dado por

$$\lambda_c = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma+1)}} \left(\frac{5-3\gamma}{4}\right)^{-\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}}. \quad (1.20)$$

Problemas típicos de acreção de Bondi consistem, portanto, em se encontrar uma solução ou comportamento geral para o sistema formado pelas equações (1.14), (1.16) e algum equivalente à equação (1.17), que depende das características do sistema considerado.

1.3.2 Acreção por captura de partículas

A acreção de Bondi se baseia na gravitação newtoniana. Apesar de desprezar os efeitos relativísticos, o tratamento ainda é adequado para estudar acreção sobre estrelas e até objetos compactos de baixa massa, como anãs brancas. No entanto, quando consideramos casos mais extremos como estrelas de nêutrons ou buracos negros, a análise clássica não é mais adequada, devido aos efeitos decorrentes da gravitação de Einstein ao entrarmos muito profundamente no potencial gravitacional.

Uma análise mais precisa da acreção sobre buracos negros deve levar em conta as equações dinâmicas da Relatividade Geral, portanto. Uma primeira aproximação para esse problema, no caso esfericamente simétrico, consiste em modelarmos

o material acretado como sendo uma coleção de partículas-teste se movendo em torno de um objeto central que é o responsável pelo campo gravitacional.

Para compreender o problema, recordemos o potencial efetivo de um sistema de duas partículas na gravitação newtoniana^[37]

$$U_{\text{eff}} = -\frac{m_p}{r} + \frac{a^2}{2mr^2} \quad (1.21)$$

em que m_p é a massa da partícula-teste, m é a massa da partícula central e $a = m_p r^2 \dot{\phi}$ é o momento angular da partícula-teste.

No potencial (1.21) a captura de uma partícula por outra apenas pela ação gravitacional é impossível se $a \neq 0$ (a menos de colisões com a superfície), devido ao infinito em $r = 0$, como pode ser visto na figura 1.2.

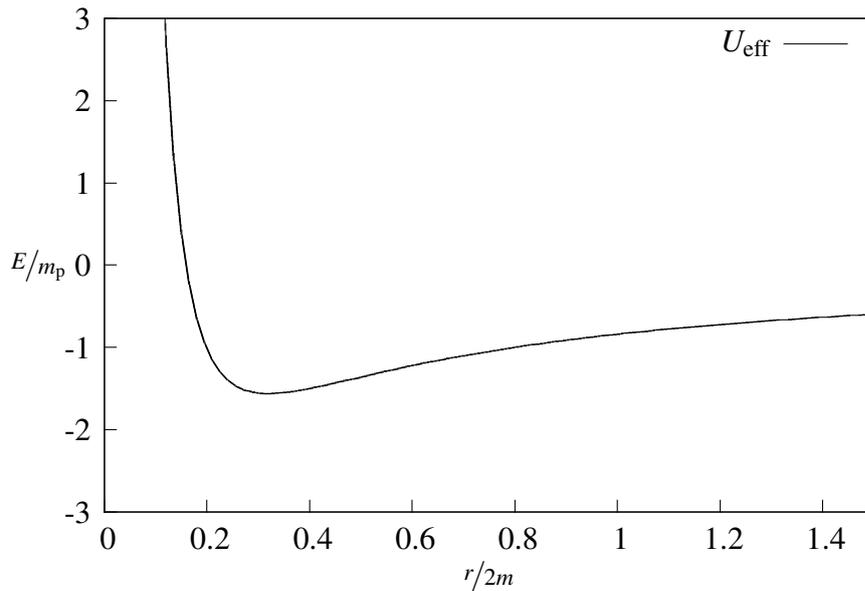


Figura 1.2: Potencial efetivo entre dois corpos na gravitação newtoniana^[38]

Consideremos agora partículas que se movem em torno de um objeto central segundo as equações da geodésica sobre a métrica de Schwarzschild (1.1).

Sabendo que o movimento orbital é planar, e escolhendo para a coordenada θ o valor $\theta = \pi/2$, as equações da geodésica para uma partícula-teste na métrica de Schwarzschild são, em coordenadas adimensionais,^[39]

$$\left(\frac{dx}{d\bar{\tau}}\right)^2 = \frac{1}{E^2} \left[E^2 - 1 + \frac{1}{\bar{r}} - \frac{a^2}{\bar{r}^2} + \frac{a^2}{\bar{r}^3} \right] \quad (1.22)$$

$$\left(\frac{d\phi}{d\bar{\tau}}\right)^2 = \frac{a^2}{E^2 \bar{r}^4} \left(1 - \frac{1}{\bar{r}} \right) \quad (1.23)$$

em que $\bar{r} = r/r_G$ e $\bar{\tau} = \tau/r_G$ estão em unidades do raio do horizonte de eventos $r_G = 2m$, o elemento de distância radial é $dx = dr\sqrt{1 - 1/\bar{r}}$, m_p é a massa da partícula-teste, $a = r^2 dr/d\tau$ faz o papel de momento angular da partícula em unidades de $m_p r_G$ e E é a energia da partícula no espaço assintoticamente plano em unidades de m_p incluindo a energia de repouso, de forma que uma partícula em repouso no infinito tenha $E = 1$.

Pode-se definir uma espécie de potencial efetivo para uma partícula não-relativística cuja velocidade longe do objeto central v_∞ seja baixa ($v_\infty \ll 1$), o que também significa $E \simeq 1$. Algumas curvas de “potencial efetivo” (que no caso relativístico não se trata de um potencial de fato por não podermos definir a energia mecânica propriamente dita⁵) para diversos valores do momento angular a são mostradas na figura 1.3.

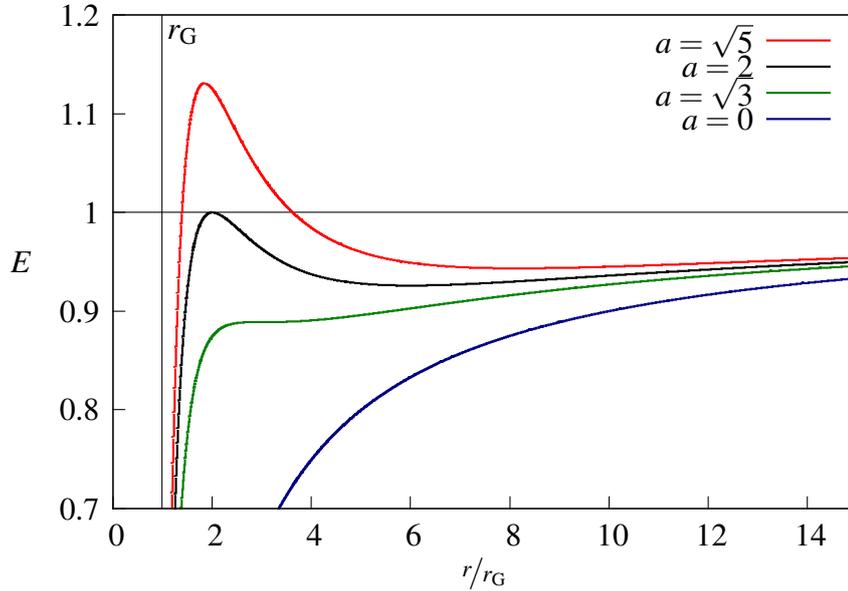


Figura 1.3: “Potenciais efetivos” para uma partícula na métrica de Schwarzschild^[39]

⁵Não podemos definir a invariância por translações temporais da mesma maneira que no caso clássico, exceto em métricas assintoticamente planas.

Uma análise do máximo local do potencial, como pode ser visto no gráfico da figura 1.3, nos mostra que partículas em velocidades baixas no infinito ($E = 1$) devem ser inexoravelmente capturadas pelo objeto central se tiverem momento angular $a \leq 2$.

Podemos expressar essa afirmação em termos do parâmetro de impacto da partícula e de sua velocidade ao se aproximar do infinito

$$b \simeq r \sin(\varphi - \varphi_\infty) \simeq r(\varphi - \varphi_\infty) \quad (1.24)$$

$$v_\infty = - \simeq \frac{d}{dt} [r \cos(\varphi - \varphi_\infty)] \quad (1.25)$$

em que φ_∞ é a direção de incidência da partícula.

Inserindo as definições (1.24) e (1.25) em (1.22) e (1.23), podemos expressar o parâmetro de impacto em termos do momento angular da partícula^[10]

$$b = m_p r_G \frac{a}{v_\infty^2}. \quad (1.26)$$

É conveniente expressar o problema em termos de uma seção de choque. Podemos defini-la como a área do círculo cujo raio corresponde ao parâmetro de impacto da órbita mais próxima.

$$\sigma = 4\pi b_{\min}^2. \quad (1.27)$$

Assim, uma partícula se aproximando do infinito será capturada se incidir dentro do círculo cujo raio é dado por (1.26) para $a = 2$. Temos assim a seção de choque de acreção de partículas frias por um buraco negro^[39]

$$\sigma_M = 4\pi \left(\frac{r_G}{v_\infty} \right)^2. \quad (1.28)$$

1.3.3 Acreção de radiação

Um caso importante é a acreção das chamadas partículas ultrarrelativísticas⁶, cuja velocidade é da ordem da velocidade da luz, como a radiação ou os neutrinos. Para analisá-la, podemos escrever o sistema formado por (1.22) e (1.23) para uma partícula ultrarrelativística com $v_\infty \rightarrow 1$. Nesse caso, devido à normalização utilizada, $E \rightarrow \infty$ e $a \rightarrow \infty$, mas, definindo $l \equiv \frac{b}{r_G}$, por (1.26), $a/E \rightarrow l$. O sistema fica

⁶O termo “ultrarrelativístico” não se refere a partículas com velocidade superior à da luz (táquions).

$$\left(\frac{dx}{d\bar{\tau}}\right)^2 = 1 - \frac{l^2}{\bar{r}^2} + l^2\bar{r}^3 \quad (1.29)$$

$$\left(\frac{d\phi}{d\bar{\tau}}\right)^2 = \frac{l^2}{\bar{r}^4} \left(1 - \frac{1}{\bar{r}}\right). \quad (1.30)$$

Podemos assim encontrar a relação entre a distância de maior aproximação e o parâmetro de impacto^[10]

$$b = r_{\min} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2m}{r_{\min}}}}. \quad (1.31)$$

O menor valor do parâmetro de impacto para que (1.31) apresente uma solução de ponto de retorno r_{\min} é $l = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ (ver figura 1.4).

Uma partícula se aproximando do infinito será capturada se incidir dentro do círculo de raio $\frac{3}{2}\sqrt{3}$. A seção de choque para a acreção de uma partícula ultrarrelativística é, usando (1.27) e (1.31), portanto,

$$\sigma_R = \frac{27}{4} \pi r_G^2 = 27\pi m^2. \quad (1.32)$$

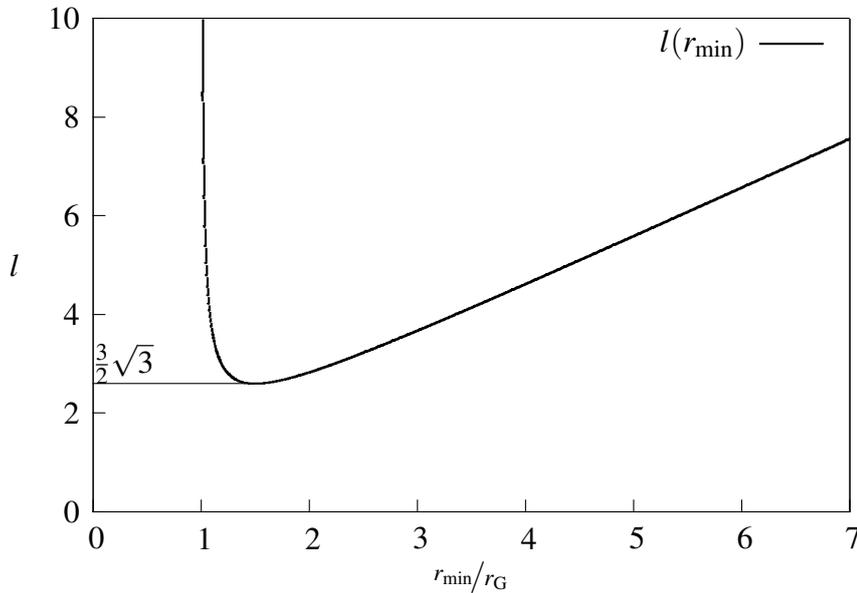


Figura 1.4: Pontos de retorno para uma partícula ultrarrelativística em função do parâmetro de impacto^[39]

Através da equação da continuidade (1.16), podemos então calcular a equação para a variação da massa do buraco negro ao acretar radiação de um banho uniforme de densidade ρ_{rad} como sendo a energia que atravessa a área da seção de choque (1.32)^[40]

$$\frac{dm}{dt} = 27\pi\rho_{\text{rad}}m^2. \quad (1.33)$$

É possível fazer uma análise da acreção de radiação como um problema de espalhamento de uma partícula que satisfaz a equação de Schrödinger independente do tempo^[41]. Nesse caso, devem-se incluir na equação da variação de massa fatores de correção que levam em conta a radiação refletida pelo horizonte de eventos. Essa primeira aproximação para levar em conta o caráter ondulatório das partículas incidentes não é considerada neste trabalho.

1.3.4 Evaporação de Hawking

O tratamento clássico de buracos negros estabelece que nenhuma partícula pode ser emitida pelo objeto central e escapar do horizonte de eventos. No entanto, efeitos quânticos na vizinhança do horizonte de eventos podem fazer com que a emissão de partículas seja possível. A abordagem feita por Hawking^[42] utiliza a aproximação da Mecânica Quântica em espaços curvos, em que os campos de matéria e radiação obedecem às equações de onda da Mecânica Quântica, mas em uma métrica clássica $g_{\mu\nu}$.

A derivação original^[42] da evaporação de Hawking consiste na decomposição espectral de um campo escalar ϕ , utilizando como base os operadores de criação e aniquilação. Num espaço curvo, no entanto, essa decomposição não fixa univocamente o espaço das soluções, o que gera uma imprecisão na determinação do estado fundamental. A largura associada a essa incerteza pode ser relacionada com a criação de partículas.

Os efeitos de criação de partículas pelo campo gravitacional são muito fracos localmente, e são desprezíveis em um espaço-tempo plano. Mas na vizinhança do horizonte de eventos de um buraco negro, devido às assimetrias locais na direção radial do espaço-tempo decorrentes da curvatura, o efeito global é que o buraco negro aparenta emitir partículas como um corpo negro cuja temperatura é^[42]

$$T_{\text{H}} = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (1.34)$$

em que κ é a gravidade superficial do buraco negro definida em (1.11). Tomando um buraco negro de Schwarzschild, a temperatura de emissão de partículas é então

$$T_{\text{H}} = \frac{1}{8\pi m}. \quad (1.35)$$

Para calcular a variação na massa do buraco negro decorrente da emissão de partículas, utilizamos a lei de Stefan–Boltzmann⁷

$$\frac{dE}{dt} = \mathcal{A}\sigma T^4 \quad (1.36)$$

em que E é a energia emitida pela emissão de partículas, $\sigma = \frac{\pi^2}{60}$ é a constante de Stefan–Boltzmann e \mathcal{A} é a área do horizonte de eventos do buraco negro. No caso de Schwarzschild⁸, $\mathcal{A} = 16\pi m^2$.

Inserindo a temperatura (1.35) na expressão (1.36) chegamos à taxa de variação na massa de um buraco negro devido à evaporação de Hawking

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{15360\pi} \frac{1}{m^2}. \quad (1.37)$$

É fácil verificar que um buraco negro cuja massa varia com (1.37) tem sua massa diminuída até zero em um tempo finito. Podemos escrever a massa de um buraco negro cuja massa inicial é m_i no instante t_i em função do tempo

$$m(t) = \left[m_i^3 - \frac{1}{5120\pi} (t - t_i) \right]^{1/3}. \quad (1.38)$$

O tempo decorrido entre o instante inicial e o momento em que a massa do buraco negro chega a zero, ou seja, o intervalo até a evaporação, pode ser então escrito como

$$t_{\text{evap}} = 5120\pi m_i^3. \quad (1.39)$$

Generalizando o cálculo do campo escalar, é possível obter a potência de emissão especificamente para cada tipo de partícula^[43]. A equação para a variação na massa do buraco negro (1.37) pode então ser generalizada, ficando

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\alpha(m)}{m^2} \quad (1.40)$$

em que $\alpha(m)$ é chamada de *running constant*^[44], que conta os graus de liberdade das partículas emitidas por radiação Hawking. O fator $\alpha(m)$ depende do modelo de física de partículas utilizado no cálculo. Considerando o modelo padrão (sem contar o bóson de Higgs ou o gráviton^[45]), em unidades CGS, $\alpha(m) = 7,8 \times 10^{26} \text{ g}^3/\text{s}$ para buracos negros evaporando hoje^[46].

A solução geral de (1.40) é

$$m(t) = \left[m_i^3 - 3\alpha(m) (t - t_i) \right]^{1/3}. \quad (1.41)$$

⁷Supomos a lei de Stefan–Boltzmann válida pelo princípio da equivalência.

⁸Ver capítulo 2 para uma discussão.

Podemos assim calcular a massa inicial de um buraco negro primordial que evaporaria hoje ($t = t_0$) se estivesse sujeito apenas à emissão de radiação Hawking. Esse valor da massa, que chamamos m_{Haw} , ajustado aos dados, é aproximadamente^[47] $m_{\text{Haw}} \sim 10^{15}$ g. Dessa forma, podemos comparar o tempo de evaporação t^* de um buraco negro de massa m em termos de m_{Haw} através da solução de (1.40)

$$t^*(m) \sim t_0 \left(\frac{m}{m_{\text{Haw}}} \right)^3. \quad (1.42)$$

1.3.5 Competição entre acreção de radiação e evaporação de Hawking

A suposição de que buracos negros sejam objetos termodinâmicos com temperatura T_{H} dada por (1.35) inspira um estudo sobre a interação desses objetos com um ambiente preenchido por um banho térmico de radiação. Na natureza, tal ambiente pôde ser encontrado durante a era da radiação, em que as demais componentes eram desprezíveis⁹. A acreção de radiação por buracos negros de baixa massa gerados antes dessas épocas (ver seção 1.2) pode ter competido com o mecanismo de evaporação de maneira a retardar o seu desaparecimento.

Para analisarmos o comportamento da massa de um buraco negro durante a era da radiação, escrevemos uma equação para a evolução da massa de um buraco negro sujeito à acreção de radiação e à evaporação Hawking. Juntando as contribuições de (1.33) e (1.40), e supondo-as independentes inicialmente, chegamos a uma expressão para a massa^[47]

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\alpha(m)}{m^2} + 27\pi\rho_{\text{rad}}(t)m^2 \quad (1.43)$$

em que t agora corresponde ao tempo cosmológico da métrica de Friedmann–Robertson–Walker, e a densidade de radiação pode então ser calculada pelas equações de Friedmann.

A equação (1.43) apresenta um ponto de equilíbrio em que $\frac{dm}{dt} = 0$. A massa de um buraco negro em equilíbrio pode ser encontrada resolvendo-se a equação para m . Esse problema foi tratado pela primeira vez por Barrow *et al.*^[48]. O resultado é^[28]

$$m_c = \left(\frac{\alpha(m)}{27\pi\rho} \right)^{1/4}. \quad (1.44)$$

Chamamos m_c de *massa crítica*, pois ela representa um ponto de transição de regimes. Para $m > m_c$ predomina a acreção de radiação, enquanto para $m < m_c$

⁹Ver ilustração na figura 2.2.

predomina a evaporação de Hawking. De fato, se calcularmos a razão $\zeta(m)$ entre as contribuições de cada termo na equação (1.43), encontramos^[47]

$$\zeta(m) = \frac{\dot{m}_{\text{rad}}}{\dot{m}_{\text{evap}}} = \left(\frac{m}{m_c} \right)^4 \quad (1.45)$$

em que \dot{m}_{rad} é o termo de acreção de radiação (1.33) e \dot{m}_{evap} é o termo de evaporação (1.40). A equação (1.45) indica uma rápida transição entre os regimes de acreção e evaporação, uma vez que a massa crítica é atingida. Cabe-nos agora verificar se ela pode ser de fato atingida.

Suponhamos um buraco negro com massa inicial $m_i > m_c$, sujeito portanto à acreção de radiação ambiente. A densidade de radiação $\rho_{\text{rad}}(t)$ evolui segundo as equações de Friedmann, e na era da radiação a solução é^[49]

$$\rho(t) \propto \frac{1}{t^2}. \quad (1.46)$$

Inserindo essa dependência explicitamente na equação (1.43) e desprezando o termo de evaporação, a solução analítica para a evolução de um buraco negro com massa inicial m_i no instante t_i , e em que a densidade de radiação é dada pela equação (1.46) com o valor inicial ρ_i , pode ser escrita na forma^[47]

$$m(t) = \frac{m_i}{1 + 27\pi\rho_i m_i \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_i} \right)}. \quad (1.47)$$

É fácil verificarmos que a massa do buraco negro atinge um valor de saturação para $t \gg t_i$. Para valores realísticos da densidade de radiação e de massas iniciais dos buracos negros, esse valor é muito próximo da massa inicial^[47] e a massa permanece praticamente constante durante toda a fase de dominância da acreção.

No entanto, ao inserirmos a dependência da radiação com o tempo (1.46) na massa crítica (1.45), verificamos que a massa crítica é uma função crescente do tempo.

Inserindo os valores numéricos para a densidade inicial da radiação, podemos escrever a dependência da função de massa crítica com o tempo em função de m_{Haw} .

$$m_c(t) \propto m_{\text{Haw}} \sqrt{t}. \quad (1.48)$$

Assim, é fácil verificar que a massa de um buraco negro sujeito a acreção de radiação sempre cruza a fronteira da massa crítica e começa a evaporar, supondo que as condições de dominância de radiação se mantenham por tempo suficiente¹⁰.

A figura 1.5 ilustra os efeitos descritos nesta seção.

¹⁰Ver Custódio e Horvath^[47] para uma discussão detalhada.

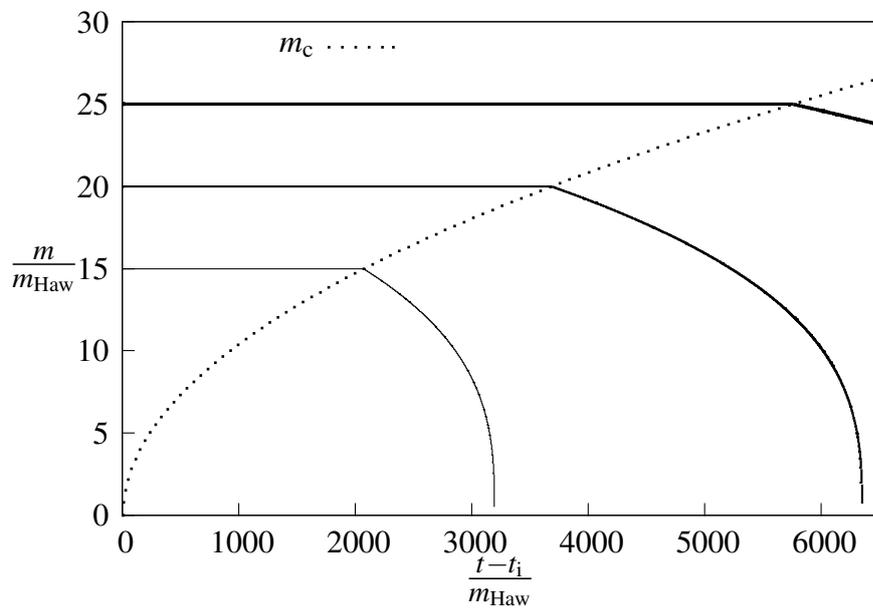


Figura 1.5: Evolução de buracos negros sujeitos a acreção de radiação e evaporação de Hawking na era da radiação^[47]

Capítulo 2

Acreção quase-estacionária de fluidos perfeitos

*“Glaciers melting in the dead of night,
And the superstars sucked into the supermassive.”*

– Muse, *Supermassive Black Hole*

A produção de buracos negros no Universo primordial é um evento esperado no marco de vários modelos cosmológicos atuais, e sua formação pode ocorrer a partir de diversos modelos, como vimos na seção 1.2. O destino dos buracos negros primordiais, em particular a sua sobrevivência ou não até a época atual, apresenta implicações que afetam o modelo cosmológico como um todo, e deve ser examinado de perto.

A interação de buracos negros de baixa massa com diferentes tipos de matéria e energia no Universo é o objeto contínuo de diversos estudos, assim como a sua interação com condições de contorno cosmológicas^[50;51;52]. O estudo da interação com as componentes de matéria dominantes no Universo ao longo de sua história pode fornecer limites teóricos para as observações e também pode ajudar a suportar ou descartar cenários de interação de buracos negros primordiais com o Universo. Em particular, a componente dominante no Universo hoje, e a mais exótica, pode provocar efeitos inesperados na evolução desses objetos.

2.1 A energia escura

A expansão acelerada do Universo em sua história recente, extensivamente suportada pelas observações^[53], ainda carece de uma explicação completa. Várias possibilidades de interpretação desse efeito foram e ainda são estudadas, desde

modelos conservadores até outros não usuais, que requerem nova física. Uma das hipóteses mais econômicas, que recebe grande atenção^[54], é a dominância recente de um fluido com uma equação de estado anômala, uma espécie de análogo às propostas inflacionárias, mas em uma escala de energias mais baixas, a assim chamada *energia escura*.

A exemplo das espécies físicas bem conhecidas presentes no Universo, como a matéria fria ($p_{\text{DM}} = 0$) e a matéria ultrarrelativística, sob a forma de radiação ($p_{\text{rad}} = \frac{1}{3}\rho_{\text{rad}}$) ou neutrinos, modelamos tipicamente a energia escura como um fluido perfeito com uma equação de estado na forma (1.14) com $\gamma = 1$, ou seja,

$$p = w\rho. \quad (2.1)$$

Para que a solução exiba uma expansão acelerada, é necessário $w < -1/3$.

Diversos experimentos têm sido propostos para estabelecer limites mais precisos para os parâmetros da energia escura. Em particular, a colaboração *Dark Energy Survey*^[55] busca restringir os valores de w e \dot{w} através da observação de galáxias, aglomerados e supernovas.

Fluidos com essa característica violam certas condições de energia¹ sobre campos comóveis de matéria^[20]. A condição de energia forte, que garante que a gravidade seja atrativa para qualquer campo de matéria, é violada pela simples construção $w < -1/3$.

A energia *phantom*

Apesar de valores de $w \geq -1$ serem normalmente considerados em modelos de energia escura, com ênfase maior no caso particular $w = -1$, ou constante cosmológica, alguns trabalhos têm levantado a possibilidade de que a energia escura seja caracterizada por um fluido com uma equação de estado com $w < -1$, conhecida na literatura como a *energia phantom*^[56].

A equação de estado *phantom* viola outras condições de energia. A condição de energia dominante, cujo significado é que a massa e a energia não podem fluir mais rápido que a velocidade da luz, exigiria $-\rho \leq p \leq \rho$. A condição de energia fraca, que garante que um observador tipo tempo sempre meça uma densidade positiva de energia, exigiria $p + \rho \geq 0$.

Há muitas consequências físicas de tal componente *phantom* sobre uma variedade de espécies físicas presentes no Universo^[57], mais notavelmente a singularidade tipo espaço conhecida como *Big Rip*^[58;56], ou até algumas possibilidades mais fabulosas, como o *Big Trip*^[59;60]. Algum esforço tem sido feito para remover a singularidade do *Big Rip*^[61], mas ainda é prematuro descartar ou suportar definitivamente qualquer cenário.

¹Ver Apêndice C para uma descrição detalhada das condições de energia.

Apesar de todas as dificuldades introduzidas, permitir valores na região $w < -1$ melhora o ajuste dos dados provenientes das observações de supernovas tipo Ia, como o *Supernova Legacy Survey* e o *gold sample*^[62]. Algumas hipóteses de modelos de energia escura argumentam que a equação de estado *phantom* pode ser resultado de processos físicos convencionais, sem que uma nova Física seja necessária para a descrição do fluido. Pode-se mostrar que a equação de estado $w < -1$ pode ser obtida a partir de um fluido viscoso, em que o termo de viscosidade volumar produz propriedades análogas à de um fluido *phantom*, sem a necessidade de mais suposições exóticas sobre o fluido^[63].

Há também modelos que supõem um termo de interação entre a energia escura e outras componentes, como por exemplo a matéria escura^[64;65]. Alguns modelos interagentes propõem o decaimento da energia *phantom* em outros tipos de matéria, como férmions, o que pode evitar a singularidade do *Big Rip*^[66]. Outros modelos propõem o surgimento da energia escura a partir do decaimento da matéria escura ordinária^[67].

Foi descoberto recentemente que a energia *phantom*, sendo uma espécie tão exótica, pode também afetar o regime de acreção sobre buracos negros^[68]. Neste capítulo, investigamos a influência da acreção de energia *phantom* sobre buracos negros primordiais juntamente com a acreção de radiação e matéria e com a evaporação, já previamente tratadas na literatura^[28;47;69] e cujos efeitos combinados foram descritos na seção 1.3.5.

Especificamente, concentramo-nos em fundamentar e explorar as novas características de acreção introduzidas especificamente pela era *phantom*, que já foram tratados isoladamente^[70]. Complementamos o panorama mostrado na figura 1.5, que descreve o comportamento de buracos negros nas eras da radiação e da matéria (ou seja, bem antes de a componente *phantom* se tornar importante) adicionando uma descrição mais completa das fases finais da evolução das massas.

Tentativas anteriores de atacar esse problema têm se limitado à consideração de buracos negros em um fluido *phantom* apenas^[70], embora haja uma interação mais sutil entre as componentes quando a acreção de radiação e de matéria também são consideradas, como será mostrado a seguir.

2.2 Modelos de fluidos

Muitos modelos de fluido são capazes de obter a energia escura. Devido às restrições impostas pelas condições de energia, no entanto, a energia *phantom* é excluída da maior parte das considerações. Ainda assim, diversos mecanismos são capazes de gerar um fluido escuro com características *phantom* sem que suposições muito exóticas precisem ser feitas.

O modelo de energia escura que utilizamos a seguir é muito simplificado, e

parte inicialmente da Lagrangiana de um campo escalar^[45], similar à quintessência, mas com um termo modificado de energia cinética, dada por^[56]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi) = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (2.2)$$

Modelos de campo escalar com uma modificação geral no termo de energia cinética são uma classe de energia escura conhecida na literatura como *K-essência*^[71].

O tensor de energia-momento desse campo escalar é dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \mathcal{L}g_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Para identificarmos as componentes com as de um fluido perfeito em um referencial comóvel

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p) \quad (2.4)$$

com $p = p(\tau)$ e $\rho = \rho(\tau)$, fazemos as seguintes identificações

$$\rho_\phi = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad (2.5)$$

$$p_\phi = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \quad (2.6)$$

Essa identificação também garante a condição $w < -1$. Para obtermos a equação de estado constante, escolhemos especificamente um potencial $V(\phi)$ da forma²

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = \frac{3}{2}(1+w) \left[\dot{H} - \frac{3}{2}H^2(1+w) \right] \quad (2.7)$$

em que H é o parâmetro de Hubble \dot{a}/a , sendo a o fator de escala na métrica de Friedmann–Robertson–Walker, e o ponto corresponde à derivada em relação ao tempo cosmológico (ver seção 2.5.2).

As equações de movimento do campo (2.2) ficam, então

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = +\frac{dV}{d\phi} \quad (2.8)$$

o que significa que a densidade da energia *phantom* aumenta com o tempo (ver figura 2.2).

²O potencial (2.7) evita instabilidades em larga escala produzidas pela energia *phantom*. Ver Caldwell^[56] para uma discussão.

Observe-se que é possível utilizar a densidade de energia dada por (2.5) em um modelo de acreção de Bondi, pela equação (1.16). No entanto, alguns autores argumentam^[72] que essa descrição exige que apenas o termo relativo à energia cinética em (2.5) seja levado em consideração para a determinação da densidade de energia que de fato causaria uma alteração na massa do buraco negro. Parte do argumento se baseia no fato de que a acreção de energia escura não modifica a massa do buraco negro³.

O modelo de acreção que introduzimos na seção 2.3 não faz uso das suposições da acreção de Bondi, e, portanto, não dá origem aos argumentos para que consideremos apenas a parte cinética da energia durante a acreção para o cálculo da variação da massa do buraco negro.

2.3 Definição da variação da massa

“You’re just not thinking fourth dimensionally!”

– ‘Doc’ Brown, *Back to the Future Part III*

Uma vez munidos de um fluido escuro com as propriedades da energia *phantom*, estudamos sua interação com um buraco negro através do tensor de energia-momento (2.4). No entanto, o modelo de acreção de Bondi da seção 1.3.1, embora apropriado para descrever a acreção sobre objetos extensos como estrelas, falha ao atingir distâncias próximas ao horizonte de eventos, devido aos efeitos da Relatividade Geral discutidos na seção 1.3.2, em particular a diferença entre o raio do horizonte de eventos e o raio da última órbita circular, evidente na figura 1.3.

Também não é conveniente modelarmos a acreção de energia escura como foi feito na seção 1.3.2, pois isso exigiria que fizéssemos suposições sobre as partículas constituintes da energia escura. Para manter as nossas suposições sobre o fluido escuro em um mínimo, estudamos a acreção da energia escura como o fluido definido na seção 2.2 do ponto de vista relativístico.

Em um cenário aproximado, pode-se supor a energia escura suficientemente rarefeita para podermos tratar a métrica local como uma solução de vácuo. No entanto, as propriedades desejadas da energia escura vêm justamente de seus efeitos quando colocada como termo de fonte nas equações de Einstein. Dessa forma, não podemos utilizar consistentemente as equações de campo para determinar completamente o comportamento do sistema. Em vez disso, a aproximação consiste em nos utilizarmos de ferramentas independentes da métrica, como a definição e as propriedades do tensor de energia-momento.

³Ver Apêndice A para uma dedução formal.

Seja um elemento orientado de hipersuperfície, ou 1-forma de volume $d^3\Sigma_v$, parametrizado por coordenadas a , b e c ^[1]. Esse elemento pode ser escrito nas coordenadas do espaço-tempo como

$$d^3\Sigma_v = \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial a} \frac{\partial x^\beta}{\partial b} \frac{\partial x^\gamma}{\partial c} da db dc. \quad (2.9)$$

O quadrimomento contido em um objeto de tal 3-volume é dado pelo valor do tensor de energia-momento que atravessa esse volume do passado para o futuro em um dado evento. Então

$$p^\mu = \int_V T^{\mu\nu} d^3\Sigma_v. \quad (2.10)$$

Se tomarmos como V o valor do volume do objeto, e u^μ sua quadrivelocidade no referencial em que o objeto está em repouso, então pela integral da equação (2.9) o volume orientado nesse referencial é dado por

$$\Sigma_v = Vu_\nu \quad (2.11)$$

o que nos permite escrever a equação (2.10) como

$$p^\mu = VT^{\mu\nu} u_\nu. \quad (2.12)$$

A energia contida no volume V , medida no seu referencial de repouso, é o valor da projeção do quadrimomento sobre a quadrivelocidade

$$E = VT^{\mu\nu} u_\mu u_\nu. \quad (2.13)$$

Se houver um fluxo de material através de uma superfície limitante desse volume, durante um período de tempo próprio $\Delta\tau$, a variação de quadrimomento é dada pelo valor do tensor de energia-momento que atravessa o volume da hipersuperfície formada pela área da superfície de interface e o intervalo de tempo próprio, ou seja, o “volume-mundo” da superfície durante o intervalo $\Delta\tau$. A construção desse volume é ilustrada na figura 2.1.

Assim, o volume orientado, pela equação (2.9), de uma superfície de área \mathcal{A} durante um intervalo de tempo próprio $\Delta\tau$ é dado por

$$\Sigma_v^{\text{BH}} = \mathcal{A}\Delta\tau\sigma_\nu \quad (2.14)$$

em que σ_ν é uma 1-forma unitária orientada na direção ortogonal à superfície e ao tempo. Essa orientação resulta do produto do tensor de Levi-Civita $\varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma}$ com o tempo e com as 1-formas tangentes à superfície.

Assim, a variação de quadrimomento no objeto é

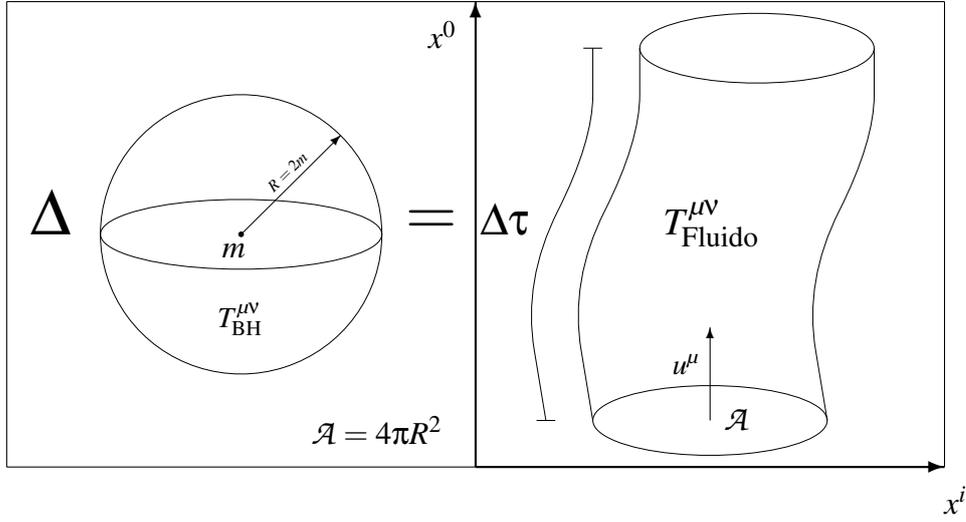


Figura 2.1: Variação no quadrimomento do volume contido no horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild pelo fluxo do tensor de energia-momento através da fronteira de área \mathcal{A} .

$$\Delta p^\mu = \mathcal{A} \Delta \tau T^{\mu\nu} \sigma_\nu \quad (2.15)$$

e a variação na energia no referencial de repouso é, como em (2.13),

$$\Delta E = \mathcal{A} \Delta \tau T^{\mu\nu} u_\mu \sigma_\nu. \quad (2.16)$$

O tensor de energia-momento de uma massa central no vácuo, como por exemplo um buraco negro de Schwarzschild, pode, sem prejuízo da solução final, ser escrito no interior do horizonte de eventos como

$$T_{\text{Sch}}^{\mu\nu} = m \delta(r) \delta_0^\mu \delta_0^\nu = \begin{cases} m \delta(r) & \mu = \nu = 0, \\ 0 & \mu, \nu \neq 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Tomando como referencial um observador em repouso em relação à massa central, a energia contida na esfera de volume definido pelo raio do horizonte de eventos é, por (2.13) e (2.17),

$$E_{\text{BH}} = \int_V T_{\text{Sch}}^{\mu\nu} u_\mu d^3 \Sigma_\nu^{\text{BH}} = m. \quad (2.18)$$

Suponhamos agora que o exterior do horizonte esteja preenchido por um fluido-teste perfeito, que flui lenta e radialmente para dentro do buraco negro através da superfície do horizonte. Assim, definimos o volume de (2.14) como sendo a

área \mathcal{A} do horizonte de eventos multiplicada por um intervalo de tempo próprio $d\tau$. A variação na energia (2.16) é então

$$\frac{dE}{d\tau} = \mathcal{A} T^{\mu\nu} u_\mu \sigma_\nu. \quad (2.19)$$

Igualando a variação da energia dentro do horizonte à variação provocada pelo fluxo de matéria através da superfície do horizonte, temos

$$\frac{dm}{d\tau} = \mathcal{A} T^{\mu\nu} u_\mu \sigma_\nu. \quad (2.20)$$

Supomos agora que a métrica em que trabalhamos seja diagonal (como é o caso da métrica de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas e de curvatura). Também supomos que a massa central seja função apenas do tempo, para evitar inconsistências com a métrica de Schwarzschild exatamente estática. Assim, podemos escrever o lado esquerdo de (2.20) no referencial de repouso como

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{dm}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dm}{dt} \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (2.21)$$

Tomamos $\sigma_\mu = (0, 1, 0, 0)$ e a normalização da quadrivelocidade no referencial de repouso $u^\mu u_\mu = 1$, que por sua vez resulta em

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}, 0, 0, 0 \right); \quad u_\mu = (\sqrt{g_{00}}, 0, 0, 0). \quad (2.22)$$

Podemos então reescrever a equação (2.20) como

$$\frac{dm}{dt} = g_{00} \mathcal{A} T^{01} \quad (2.23)$$

que, pela nossa suposição de métrica diagonal, pode finalmente ser expresso como^[70]

$$\frac{dm}{dt} = \mathcal{A} T_0^1. \quad (2.24)$$

Essa forma para a taxa de acreção pode ser entendida como uma primeira aproximação para uma forma totalmente relativística da acreção de Bondi, substituindo a equação (1.16).

2.4 Fluidos estáticos

Consideramos inicialmente um buraco negro esfericamente simétrico e estático no vácuo. Supomos o espaço ao redor preenchido por um fluido-teste não autogravitante, de maneira que continue valendo a solução de vácuo, modelado

como na seção 2.2, e consideramos que a acreção desse fluido pelo buraco negro se dê lentamente (quase-estaticamente), o que nos permite desconsiderar os efeitos da variação de massa sobre a métrica (*back-reaction*) por ora.

Seguindo os trabalhos de Babichev *et al.* [68], partimos da conservação do tensor de energia-momento e do quadrimomento, dado pela projeção de $T^{\mu\nu}$ sobre a quadri-velocidade^[1]

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (2.25)$$

$$v_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (2.26)$$

Escrevemos (2.25) e (2.26) explicitamente na métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.27)$$

e supomos o espaço-tempo preenchido por um fluido perfeito, com o tensor de energia-momento (2.4) agora escrito no referencial não comóvel

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \quad (2.28)$$

com $\rho = \rho(r, t)$, $p = p(r, t)$ e u^μ a quadri-velocidade do fluido.

A hipótese de acreção estacionária nos permite considerar apenas as componentes com $v = 0$ das equações (2.25) e (2.26), uma vez que as demais componentes são trivialmente satisfeitas.

Devido às hipóteses de simetria esférica e fluxo radial de matéria, as únicas componentes não nulas da quadri-velocidade do fluido u^μ são u^0 e u^1 . Supondo que o fluido seja massivo, e utilizando a notação $u^1 \equiv u$, a normalização da quadri-velocidade $u^\mu u_\mu = 1$ fornece a relação

$$u^0 = \frac{\sqrt{1 - \frac{2m}{r} + u^2}}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}. \quad (2.29)$$

Reescrevemos a derivada covariante^[2] como

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} T^{\mu\nu})}{\partial x^\nu} \quad (2.30)$$

Assim, a única componente não trivial da equação (2.25) é

$$\frac{\partial}{\partial r} [\sqrt{-g} (\rho + p) u^0 u^1] = 0. \quad (2.31)$$

Utilizando a normalização (2.29) e integrando em r , a solução é

$$(\rho + p) \left(1 - \frac{2m}{r} + u^2\right)^{1/2} \left(\frac{r}{m}\right)^2 u = C_1. \quad (2.32)$$

A equação (2.26), na métrica (2.27), é escrita como

$$(\rho + p) u^{\nu}_{;\nu} + u^{\nu} \rho_{;\nu} = 0 \quad (2.33)$$

Utilizando a relação (2.30) aplicada à quadrivelocidade^[2]

$$u^{\nu}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} u^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \quad (2.34)$$

a única componente não trivial de (2.33) fica escrita como

$$(\rho + p) \left[\frac{2u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right] + u \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0 \quad (2.35)$$

A solução é dada pela integral

$$u \left(\frac{r}{m}\right)^2 e^{\int_{\rho_{\infty}}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho' + p(\rho')}} = -A \quad (2.36)$$

Isolando o termo $u(r/m)^2$ de (2.32) e inserindo-o em (2.36) chegamos a

$$(\rho + p) \left(1 - \frac{2m}{r} + u^2\right)^{1/2} e^{\int_{\rho_{\infty}}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho' + p(\rho')}} = -\frac{C_1}{A} = \rho_{\infty} + p(\rho_{\infty}). \quad (2.37)$$

com $\rho_{\infty} + p(\rho_{\infty})$ as condições de contorno do fluido no infinito.

A equação (2.37) fornece a relação necessária para escrever a equação de acreção em termos das condições de contorno p_{∞} e ρ_{∞} de qualquer fluido cosmológico perfeito.

A taxa de variação na massa do buraco negro, como visto na seção 2.3, para um valor arbitrário do raio da esfera de área superficial \mathcal{A} da equação (2.24) (ver figura 2.1), é

$$\frac{dm}{dt} = -4\pi r^2 T_0^{-1}. \quad (2.38)$$

Inserindo o tensor de energia-momento da forma (2.28), e utilizando a condição de normalização (2.29), a equação (2.38) fica

$$\frac{dm}{dt} = -4\pi (\rho + p) \left(1 - \frac{2m}{r} + u^2\right)^{1/2} u r^2 \quad (2.39)$$

e é válida para todo fluido perfeito.

Inserindo agora (2.32) e (2.36) em (2.39), a solução fica

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi Am^2 [\rho_\infty + p(\rho_\infty)] \quad (2.40)$$

Na seção 2.2 vimos que a energia escura modelada por um campo escalar tem a densidade e a pressão dadas por (2.5) e (2.6) respectivamente. Como o lado direito da equação (2.40) depende do fluido unicamente através do termo $\rho + p$, isso significa, que, somando a densidade e a pressão do campo escalar, ficamos com um termo de acreção igual a duas vezes a parte cinética do campo, e a contribuição da parte potencial é automaticamente descartada, sem a necessidade de suposições adicionais.

2.5 Acreção de energia *phantom* em contexto

Munidos da equação (2.40) para descrever a interação de um buraco negro com a energia escura, estudamos agora a interação de um buraco negro em um meio preenchido por radiação e energia *phantom*, e as diversas sutilezas decorrentes dessa associação^[73].

Combinamos o efeito da acreção de energia escura à evaporação de Hawking e à acreção de radiação modelada por Custódio e Horvath^[47] e discutida na seção 1.3.5. Os resultados^[73] levam a um quadro completo da evolução dos buracos negros primordiais e astrofísicos ao longo de toda a história do Universo, em função das suas massas iniciais.

2.5.1 A equação completa de acreção

Em um Universo em que a energia *phantom* também é presente, a acreção dessa espécie exótica deve ser levada em conta juntamente com os efeitos já conhecidos. Babichev *et al.*^[68] deduziram a equação diferencial (2.40) para um buraco negro acretando energia *phantom* apenas, pelo método descrito na seção 2.4, obtendo o resultado contra-intuitivo de que a acreção de energia *phantom* *diminui* a massa total do buraco negro.

A expressão que utilizamos é similar ao termo de acreção de (1.43), e é dada por (2.40) com um valor fixo para a constante de integração e com a escolha do valor de contorno para a pressão e densidade da energia *phantom*

$$\frac{dm}{dt} = 16\pi m^2 [\rho_{\text{ph}} + p(\rho_{\text{ph}})]. \quad (2.41)$$

A escolha $A = 4$ na equação (2.40) representa a propriedade de que a velocidade do som no fluido acretado é ultrarrelativística⁴.

Considerando os termos de acreção de radiação e evaporação da equação (1.43) juntamente com o novo termo de acreção de energia *phantom* de (2.41), e supondo nenhuma interação entre as duas diferentes componentes, a equação completa para a acreção dos dois tipos de energia pelo buraco negro é simplesmente

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\alpha(m)}{m^2} + [27\pi\rho_{\text{rad}} + 16\pi(\rho_{\text{ph}} + p(\rho_{\text{ph}}))] m^2. \quad (2.42)$$

Aplicando a equação de estado (2.1) para a energia *phantom* $p(\rho) = w\rho$, com $w < -1$, a componente *phantom* da equação de acreção pode ser escrita como

$$\rho_{\text{ph}} + p(\rho_{\text{ph}}) = (1 + w)\rho_{\text{ph}} \quad (2.43)$$

e a equação completa de acreção se torna

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\alpha(m)}{m^2} + [27\pi\rho_{\text{rad}} + 16\pi(1 + w)\rho_{\text{ph}}] m^2. \quad (2.44)$$

2.5.2 Evolução cosmológica da energia escura

Suponhamos que a escala de evolução do fluido por efeitos cosmológicos seja muito lenta em comparação à escala de tempo da variação da massa de um buraco negro por (2.44). Assim, é possível resolver (2.44) supondo as densidades de radiação e energia *phantom* constantes, e depois inserir na solução a dependência das densidades com o tempo.

A dependência das densidades de radiação e energia escura com o tempo pode ser calculada exatamente a distâncias grandes do buraco negro, em que sua influência pode ser desprezada. Esses valores no infinito podem ser introduzidos diretamente sobre a solução de (2.44) graças ao resultado obtido nas seções 1.3.3 e 2.4 de que a variação na massa do buraco negro depende apenas da densidade dos fluidos no infinito.

Partimos então da suposição de que suficientemente longe do buraco negro valham as hipóteses clássicas da Cosmologia. A métrica do espaço-tempo corresponde à métrica de Friedmann–Robertson–Walker plana

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (2.45)$$

em que $a(t)$ é o fator de escala da métrica.

⁴Ver Babichev *et al.* [70] para uma discussão.

As equações de Einstein aplicadas à métrica (2.45) preenchida por um fluido perfeito comóvel, como em (2.4), tornam-se as equações de Friedmann^[49]

$$3H^2 = 8\pi\rho \quad (2.46)$$

em que $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$ é chamado de parâmetro de Hubble. A equação de conservação (2.25) do tensor de energia-momento desse fluido na métrica (2.45) fica

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (2.47)$$

Combinando (2.46) com (2.47), podemos escrever a relação

$$\rho + p = -\dot{\rho}/3H. \quad (2.48)$$

Também é possível, através de (2.46), escrevermos diretamente a dependência do parâmetro de Hubble com a densidade do fluido

$$H = \left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/2} \rho^{1/2}. \quad (2.49)$$

Dada a equação de estado w do fluido, é possível encontrar $\rho(a)$ através de (2.47) e inserir a solução em (2.49) para encontrar $a(t)$ ^[49].

2.5.3 Regimes de acreção

A equação de Friedmann (2.46) pode ser resolvida para seguir a evolução cosmológica da energia *phantom*^[49;56], com o resultado de que a densidade de energia *phantom* aumenta com o tempo

$$|\rho + p| \propto a^{-3(1+w)} \quad (2.50)$$

desprezando todas as demais contribuições^[68]. As densidades dos termos de radiação, matéria escura fria e energia *phantom* evoluem de acordo com (2.46) como representado no gráfico da figura 2.2.

Conforme o esperado, há uma época em que os termos de acreção de radiação e energia *phantom* da equação (2.44) se tornam comparáveis. Chamamos tal época de *tempo phantom*, ou t_{ph} .

Deve ser notado que essa época é distinta daquela em que as linhas da figura 2.2 se cruzam, devido aos fatores que multiplicam cada termo em (2.44). O fator que multiplica o termo da acreção de radiação é proveniente da seção de choque de acreção de radiação e o da acreção *phantom* vem da escolha $A = 4$.

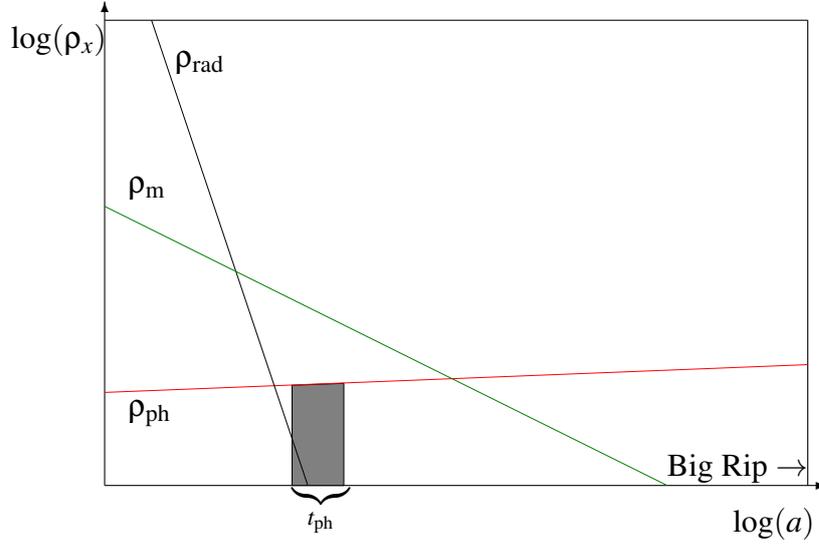


Figura 2.2: Evolução das densidades de radiação, matéria e energia *phantom* com o fator de escala. A localização da época t_{ph} é estimada qualitativamente, representada pela região cinza; a sua posição exata depende das densidades e da equação de estado da radiação e da energia *phantom* (ver (2.55)).

O tempo *phantom* representa o instante cosmológico a partir do qual o termo de acreção de energia *phantom* domina sobre o termo de radiação, mudando drasticamente a dinâmica da evolução do buraco negro. Podemos calcular o valor desse instante como uma função dos valores atuais das densidades de radiação e energia *phantom*.

A densidade de radiação como função do fator de escala é dada pela equação de Friedmann^[49] (2.46), $\rho_{\text{rad}} = \rho_{\text{rad}}^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4$. Durante a era da matéria, o fator de escala como função do tempo é dado por

$$\frac{a(t)}{a_0} = \left(\frac{3H_0 t}{2}\right)^{2/3}. \quad (2.51)$$

Portanto, a densidade de radiação evolui na era da matéria como

$$\rho_{\text{rad}} = \rho_{\text{rad}}^0 \left(\frac{3H_0 t}{2}\right)^{-8/3}. \quad (2.52)$$

Similarmente, com a energia *phantom* da equação (2.43) evoluindo de acordo com (2.50), e com a dependência temporal do fator de escala evoluindo como na equação (2.51), a densidade da energia *phantom* como função do tempo é

$$\rho_{\text{ph}} = \frac{\rho_{\text{ph}}^0}{|1+w|} \left(\frac{3H_0 t}{2} \right)^{-2(1+w)}. \quad (2.53)$$

A época em que a acreção de energia *phantom* é tão importante quanto a de radiação é o instante em que os dois termos de acreção da equação (2.44) se igualam

$$\rho_{\text{rad}} = -\frac{16}{27}(1+w)\rho_{\text{ph}}. \quad (2.54)$$

Inserindo as dependências temporais calculadas nas equações (2.52) e (2.53), a equação (2.54) fornece o *tempo phantom*, que, se tomarmos os valores das densidades e do parâmetro de Hubble no final da era da matéria, fornece o valor (em segundos)

$$\frac{t_{\text{ph}}}{1 \text{ s}} = \frac{2}{3H_0} \left(\frac{16 \rho_{\text{ph}}^0}{27 \rho_{\text{rad}}^0} \right)^{\frac{8}{3}-2(1+w)} \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ Mpc} \cdot 1 \text{ s}} \quad (2.55)$$

em que H_0 é o valor de parâmetro de Hubble, expressado em $\frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$ e, assim como os valores iniciais ρ_{ph}^0 e ρ_{rad}^0 , calculado no final da era da matéria. A razão para essa escolha de valores iniciais se deve ao fato de que, ao entrarmos na era da energia escura, o comportamento das funções muda devido à transição de regime. Torna-se mais conveniente estabelecermos como a época zero um instante dentro do regime em que o tempo *phantom* ocorre.

Podemos expressar esse instante de transição em termos do *redshift*, usando a equação (2.54), com as condições iniciais $\rho_{\text{rad}}^0 = 8,12 \times 10^{-13} \text{ erg/cm}^3$ e $\rho_{\text{ph}}^0 = 1,79 \times 10^{-8} \text{ erg/cm}^3$ medidas hoje^[4], e o valor numérico da equação de estado *phantom* $w = -1,12$ ^[53], finalmente chegando ao valor

$$z_{\text{ph}} \simeq 3,1. \quad (2.56)$$

A incerteza nesse valor é dominada pelo erro na determinação da equação de estado w , mas a época permanece dentro da era da matéria.

Como mostramos que a transição entre a acreção de radiação e a evaporação Hawking que discutimos na seção 1.3.5 ocorre rapidamente, pela equação (1.45), é razoável supor que a transição entre a acreção de radiação e de energia *phantom* também seja praticamente instantânea devido à rápida transição provocada pela razão entre as acreções, que pode facilmente ser vista reescrevendo-se a equação (2.55) para uma época arbitrária.

$$\frac{\rho_{\text{rad}}}{\rho_{\text{ph}}} = \frac{\rho_{\text{rad}}^0}{\rho_{\text{ph}}^0} |1+w| \left(\frac{3H_0 t}{2} \right)^{-\frac{8}{3}+2(1+w)}. \quad (2.57)$$

A densidade de radiação rapidamente se torna desprezível comparada à energia *phantom*. Quanto mais alto $|w|$, mais rápida se torna a transição.

2.5.4 Comportamento da função de massa crítica

Com a expressão (2.55) para o tempo, podemos calcular o valor da massa crítica m_c da equação (1.44) no instante t_{ph} . Segundo Custódio e Horvath^[47], podemos escrever a massa crítica em função da massa inicial de um buraco negro primordial que evaporaria hoje, m_{Haw} , como em (1.48), com os fatores de proporcionalidade ajustados pelas medidas

$$\frac{m_c(t)}{1\text{g}} \sim 10 \frac{m_{\text{Haw}}}{1\text{g}} \left(\frac{t}{1\text{s}} \right)^{1/2}. \quad (2.58)$$

Durante a era final, em que a acreção de energia *phantom* é dominante, essa função massa crítica não tem significado, uma vez que não há mais um mecanismo relevante de acréscimo de massa. Assim, o maior valor atingível pela massa crítica em um Universo preenchido apenas por radiação e energia *phantom* é

$$\frac{m_c^{\text{max}}}{1\text{g}} \sim 10 \frac{m_{\text{Haw}}}{1\text{g}} \frac{2}{3H_0} \left(\frac{16 \rho_{\text{ph}}^0}{27 \rho_{\text{rad}}^0} \right)^{\frac{8}{3}-2(1+w)}. \quad (2.59)$$

Após esse instante, a evaporação de Hawking não mais é um mecanismo relevante para a diminuição da massa do buraco negro, até que sua massa atinja o valor de transição que será discutido na seção 2.5.5.

Alguns buracos negros jamais chegarão a atingir a era da acreção de energia escura, pois terão evaporado completamente antes de t_{ph} . É possível calcular a massa inicial do buraco negro que desaparece exatamente em t_{ph} . Para tal propósito, é suficiente considerar apenas o termo de evaporação de Hawking na equação (1.43), que fornece a bem conhecida solução (1.42), ou, em termos da *running constant*

$$t^* = \frac{1}{3\alpha(m)} m_i^3 \quad (2.60)$$

em que t^* é a escala de tempo de evaporação. Em termos da massa solar m_{\odot} , t^* é dado por

$$t^* \sim 10^{71} \left(\frac{m_i}{m_{\odot}} \right)^3. \quad (2.61)$$

Combinando a equação (2.58) com (2.60), encontramos uma equação de terceiro grau em m_c , cuja solução é a massa crítica do buraco negro que evapora *completamente* e desaparece exatamente em $t^* = t_{\text{ph}}$

$$\frac{m_c^3}{3\alpha(m)} + \frac{m_c^2}{100m_{\text{Haw}}^2} = t_{\text{ph}}. \quad (2.62)$$

Utilizamos os valores numéricos para $\alpha(m) = 7,8 \times 10^{26} \text{g}^3/\text{s}^{[47]}$ e $m_{\text{Haw}} \approx 10^{15} \text{g}$, assim como os valores numéricos de ρ_{ph} , ρ_{rad} , w e H_0 necessários para computar t_{ph} . O resultado é

$$m_c^{\text{ph}} \simeq 2,8 \times 10^{-2} \text{g}. \quad (2.63)$$

Esse valor representa o valor no início da era da matéria da massa de um buraco negro que evapora completamente na época t_{ph} . O instante em que a massa crítica assume esse valor pode ser encontrado pela inversão da equação (2.58).

Uma vez que o ganho de massa por acreção de radiação não é substancial, como vimos na seção 1.3.3^[47], todos os buracos negros que chegam à era da matéria com $m_i \lesssim m_c(t_{\text{ph}} - t^*) \equiv m_c^{\text{ph}}$, que atingem a massa crítica em $t \lesssim t_{\text{ph}} - t^*(m_i)$, desaparecerão antes de t_{ph} e nunca chegarão à era *phantom*.

2.5.5 Competição entre acreção *phantom* e evaporação

Conforme mostrado na seção 2.5.3, uma vez que após t_{ph} não há mecanismo eficiente que possa aumentar a massa dos buracos negros, não há mais uma função de massa crítica. No entanto, devido à presença do campo *phantom*, há agora *dois* regimes distintos de decréscimo de massa, cuja importância relativa depende da massa de um dado buraco negro ao entrar na era *phantom*.

Tomando a equação (2.44) e desprezando o termo de radiação, podemos descrever a evolução das massas dos buracos negros durante a era *phantom*. Definimos ξ a razão entre os dois termos restantes

$$\xi(m) = \frac{\dot{m}_{\text{ph}}}{\dot{m}_{\text{Haw}}} = \frac{16\pi(1+w)\rho_{\text{ph}}}{\alpha(m)} m^4 \quad (2.64)$$

Podemos definir a razão ξ em termos de uma *massa de transição*

$$\xi(m) = \left(\frac{m}{m_t} \right)^4 \quad (2.65)$$

com

$$m_t = \left[\frac{1}{16\pi(1+w)\rho_{\text{ph}}} \alpha(m) \right]^{1/4}. \quad (2.66)$$

Substituindo valores numéricos para as constantes, obtemos uma expressão para m_t em termos da densidade do campo *phantom*

$$\frac{m_t}{1g} \simeq 5,5 \times 10^{17} [(1+w)\rho_{\text{ph}}]^{-1/4}. \quad (2.67)$$

com ρ_{ph} dado em g/cm^3 .

Como ambos regimes são de *decréscimo* de massa, a massa do buraco negro diminui principalmente devido a acreção *phantom* até sua massa atingir m_t . Após isso, o efeito predominante será a radiação de Hawking, uma vez que a equação (2.65) mostra que a mudança de regimes é suficientemente abrupta para que façamos essa aproximação, da mesma forma que a equação (1.45) na seção 1.3.5 nos permite supor instantânea a transição entre acreção de radiação e evaporação Hawking.

Para encontrar a dependência temporal da massa de transição, primeiro devemos conhecer a evolução da densidade *phantom*. De acordo com as equações de Friedmann para o campo *phantom*, obtemos^[68]

$$(\rho_{\text{ph}})^{-1/2} = (\rho_{\text{ph}}^0)^{-1/2} + \frac{3(1+w)}{2} \left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/2} t \quad (2.68)$$

em que ρ_{ph}^0 é a densidade atual do campo *phantom*. Inserindo esse resultado na equação (2.67), a dependência temporal de m_t é obtida como

$$\frac{m_t}{1g} \simeq \frac{8,29 \times 10^{21}}{(1+w)^{1/4}} \left[(\rho_{\text{ph}}^0)^{-1/2} + \frac{3(1+w)}{2} \left(\frac{8\pi}{3}\right) t \right]^{1/2}. \quad (2.69)$$

O valor inicial da massa de transição depende tanto do valor inicial da densidade *phantom* quanto de w . Vale ressaltar que essa massa de transição não tem significado no regime de acreção de radiação.

As diferenças entre os três regimes estão representadas na figura 2.3⁵.

É importante enfatizar que a evaporação de Hawking não se torna desprezível após t_{ph} se levada em conta como um processo independente. No entanto, as massas para as quais ela se torna importante ($m < m_t$) caem por um fator 10^5 após a transição, como é ilustrado na figura 2.3. Isso leva muitos buracos negros, mas não todos, repentinamente ao novo regime.

Quando, porém, os buracos negros atingem a massa de Planck, uma análise completa por gravitação quântica se torna necessária para determinar seu destino apropriadamente, uma vez que a descrição da seção 1.3.4 para a radiação de Hawking não é mais válida em tais escalas^[69;74]. Uma discussão mais aprofundada desse fenômeno pode ser encontrada no capítulo 4.

⁵Para detalhes do comportamento do gráfico na era da matéria, ver a discussão em Guariento *et al.*^[73].

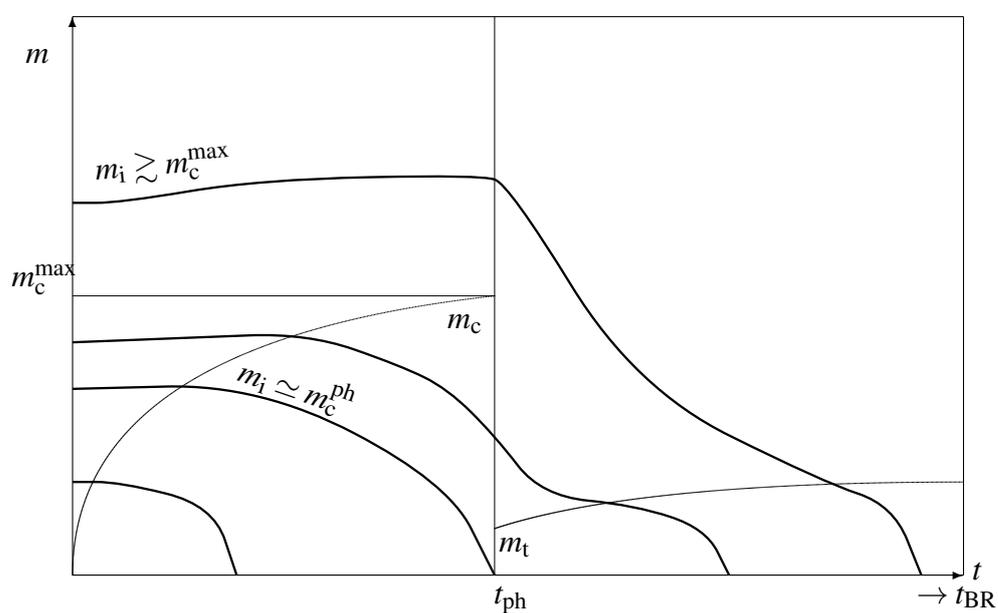


Figura 2.3: Evolução da massa de buracos negros primordiais no cenário de acreção de matéria, radiação e energia *phantom*. As linhas grossas representam as diferentes trajetórias de buracos negros de diferentes massas iniciais. A singularidade Big Rip ocorre em t_{BR} .

2.6 Acreção de fluidos cosmológicos

Na seção 2.4, a dedução da variação da massa do buraco negro com o tempo é calculada desacoplada da evolução cosmológica do fluido acretado, que é suposto estático no que se refere à solução da equação (2.44). Inserimos a dependência da densidade com o tempo depois que a solução foi obtida, o que pode ser justificado pela aproximação de fluido estático.

Ao abandonarmos essa suposição, ainda é possível resolver a equação de acreção (2.40), através do seu acoplamento com as equações de Friedmann (2.49) e (2.47) para o fluido^[75].

2.6.1 Acreção no modelo Λ CDM

O modelo cosmológico que tem tido o maior sucesso em confirmar as observações^[54] é o chamado Λ CDM, que descreve o Universo atual como preenchido predominantemente por apenas dois fluidos:

- Matéria escura fria, um fluido sem pressão cuja densidade denotamos por ρ_{DM} , e cuja equação de estado, dada por (2.1), fornece $w_{\text{DM}} = 0$;
- Energia escura com densidade constante ao longo do tempo, ou *constante cosmológica*, cuja densidade denotamos por ρ_{Λ} , e cuja equação de estado (2.1), para satisfazer $\dot{\rho}_{\Lambda} = 0$ em (2.47), fornece $w_{\Lambda} = -1$.

A equação (2.40) mostra que um buraco negro acretando somente um fluido tipo constante cosmológica deve manter a sua massa constante. Esse resultado é consistente com a solução exata das equações de Einstein com um termo de constante cosmológica para uma massa central em um espaço vazio, a chamada métrica de Schwarzschild–de Sitter⁶.

Para encontrar a solução, inserimos no sistema formado por (2.40), (2.47) e (2.49) uma combinação de matéria escura fria e energia escura consistente com o modelo Λ CDM, com densidade de energia dada por $\rho_t = \rho_c + \rho_{\Lambda}$. A equação (2.47) para essa combinação fornece

$$\rho_t = \rho_c^0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \rho_{\Lambda}. \quad (2.70)$$

A equação de Friedmann (2.49) para essa combinação resulta em

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_{\text{DM}} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \Omega_{\Lambda} \right] \quad (2.71)$$

⁶Ver Apêndice A para o cálculo da solução de Schwarzschild–de Sitter.

em que Ω_{DM} e Ω_{Λ} são as densidades fracionárias de cada componente em relação à densidade crítica^[49], definidas como

$$\rho_{\text{DM}}^0 \equiv \frac{3H_0^2 \Omega_{\text{DM}}}{8\pi}, \quad \rho_{\Lambda}^0 \equiv \frac{3H_0^2 \Omega_{\Lambda}}{8\pi}. \quad (2.72)$$

A solução é

$$a = a_0 \left[\frac{\sinh\left(\frac{3}{2}H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda}t}\right)}{\sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_c}}}\right]^{2/3}. \quad (2.73)$$

Para estudar a acreção, inicialmente reescrevemos a equação (2.40) em termos da densidade através de uma mudança de variáveis

$$\frac{dm}{d\rho} \dot{\rho} = 4\pi A m^2 (\rho + p). \quad (2.74)$$

Após substituírmos o termo $(\rho + p)$ de (2.47) em (2.74), encontramos

$$\frac{dm}{d\rho} \dot{\rho} = -\frac{4\pi A m^2 \dot{\rho}}{3H} \quad (2.75)$$

e inserindo esse resultado em (2.75) encontramos a integral

$$\int \frac{dm}{m^2} = - \int \frac{4\pi A}{3\left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/2} \rho^{1/2}} d\rho \quad (2.76)$$

cuja solução é

$$-\frac{1}{m} = -\left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/2} \rho^{1/2} + C. \quad (2.77)$$

Para encontrar a constante de integração, ajustamos o valor inicial da massa do buraco negro m_i no instante em que a densidade inicial do fluido é ρ_i

$$C = \left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/2} A \rho_i^{1/2} - \frac{1}{m_i}. \quad (2.78)$$

Inserindo o valor da constante em (2.77) obtemos a massa do buraco negro como função da densidade do fundo^[76;77]

$$m(\rho) = \frac{m_i}{1 + m_i \sqrt{\frac{8\pi}{3}} A^2 \left(\rho^{1/2} - \rho_i^{1/2}\right)}. \quad (2.79)$$

Podemos inverter (2.79) para obter o valor da massa inicial de um buraco negro em função de sua massa atual m_0 , supondo que é conhecido o valor da densidade inicial do fluido acretado

$$m_i = \frac{m_0}{1 - m_0 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} A^2 (\rho_0^{1/2} - \rho_i^{1/2})}. \quad (2.80)$$

Inserindo explicitamente a dependência temporal das componentes isoladas do modelo Λ CDM em (2.79), podemos descrever casos particulares da evolução de buracos negros levando em conta apenas a evolução das densidades individuais com o tempo.

Para um Universo preenchido apenas com matéria não-relativística, $\rho_{\text{DM}} \propto a^{-3}$, obtemos a densidade de Einstein–de Sitter

$$\rho_{\text{DM}} = \rho_{\text{DM}}^i \left(\frac{t_i}{t}\right)^2. \quad (2.81)$$

Um buraco negro acretando matéria escura nesse cenário evolui como

$$m_{\text{DM}}(t) = \frac{m_i}{1 + m_i \sqrt{\frac{8\pi}{3}} A^2 \rho_{\text{DM}}^i \left[\frac{t_i}{t} - 1\right]}. \quad (2.82)$$

Esse comportamento parece levar a consequências não físicas, pois a massa cresce muito rapidamente. No entanto, já foi mostrado^[14;78] que esse resultado é um artefato da aproximação de fluido teste, que não leva em conta a *back-reaction* sobre a métrica. De fato, pela utilização do modelo de acreção de Bondi, o crescimento da massa é, na prática, rapidamente anulado pela evolução da componente de matéria escura, nunca se tornando importante^[73].

Um Universo preenchido com constante cosmológica evolui de acordo com o modelo de de Sitter, $a \propto e^{Ht}$. Tal componente com uma equação de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ tem densidade de energia constante, como pode ser visto em (2.47). Portanto, de acordo com (2.79), um buraco negro imerso em tal fluido mantém a sua massa constante m_Λ . Esse resultado já é evidente ao observarmos a equação (2.44).

Esse resultado é consistente com os resultados de Babichev *et al.*^[68] e corresponde ao parâmetro de massa constante usado na métrica de Schwarzschild–de Sitter^[79], como esperado.

Agora analisamos o efeito das duas componentes combinadas. Em um Universo com um fator de escala evoluindo como (2.73), um buraco negro acreta a energia total, e é necessário utilizar $\rho_{\text{tot}} = \rho_{\text{DM}} + \rho_\Lambda$ em (2.79). Portanto, a densidade total evolui como

$$\rho_{\text{DM}} = \rho_{\text{DM}}^i \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{\text{DM}}} \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{3}{2}H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}t\right)} \quad (2.83)$$

e a densidade de energia escura se mantém constante, de maneira que a massa é dada pela seguinte função do tempo

$$m_{\text{tot}}(t) = \frac{m_i}{1 + m_i \sqrt{\frac{8\pi}{3G}A^2} \left\{ [\rho_\Lambda + \rho_{\text{DM}}^i]^{1/2} - \left[\rho_\Lambda + \rho_{\text{DM}}^i \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{\text{DM}}} \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{3}{2}H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}t\right)} \right]^{1/2} \right\}}. \quad (2.84)$$

A figura 2.4 mostra a evolução da massa de um buraco negro nos cenários discutidos acima.

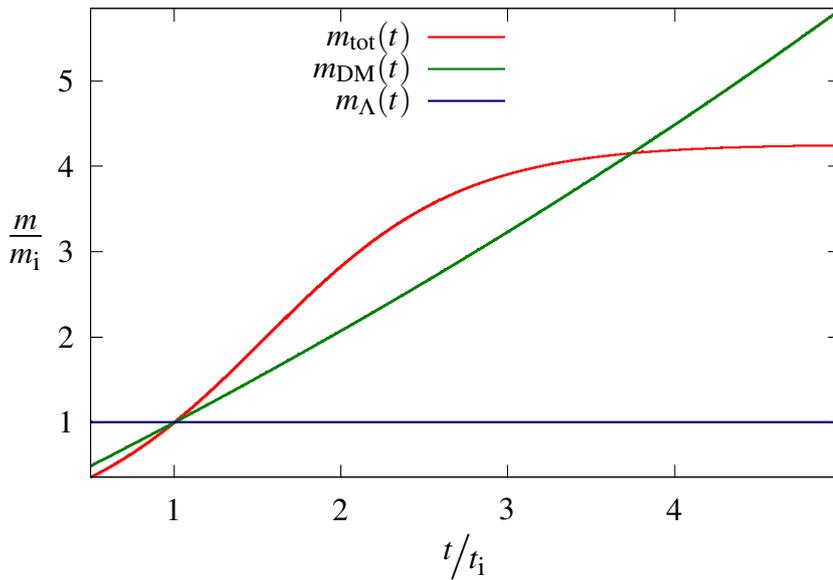


Figura 2.4: Evolução de um buraco negro de massa inicial $m_i = 10^{-3}m_\odot$ nos três cenários discutidos na seção 2.6. Observe que a variação de massa eventualmente é interrompida no caso $m_{\text{tot}}(t)$ quando a energia escura passa a dominar.

2.6.2 Acreção de um gás de Chaplygin generalizado

Podemos acoplar às equações de acreção diversos modelos de fluidos, uma vez que a dedução de (2.40) independe do modelo utilizado para produzir o fluido perfeito. Uma possibilidade que podemos explorar é inserir um modelo de *quartessência*, que consiste em um fluido cuja equação de estado w varia com o tempo

de maneira a produzir comportamentos diferentes em diferentes épocas da história do Universo. Modelos de quartessência são utilizados como tentativas de se unificar a matéria escura e a energia escura como um único fluido^[80].

O modelo mais conhecido de quartessência é o gás de Chaplygin generalizado^[81;82], cuja equação de estado é

$$p_c = -\frac{\Gamma}{\rho_c^\alpha}. \quad (2.85)$$

Nesta análise utilizamos uma versão simplificada do modelo (2.85), que reduz para um o número de parâmetros livres, de forma a evitar a degenerescência durante a comparação com as observações cosmológicas.

Para analisar o comportamento do gás de Chaplygin generalizado, seguimos a parametrização usada por Lima *et al.*^[80]

$$p_c = -\alpha \rho_c^0 \left(\frac{\rho_c^0}{\rho_c} \right)^\alpha. \quad (2.86)$$

Inserimos essa equação de estado em (2.47) e (2.49) para obtermos a evolução do gás

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 \quad (2.87)$$

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{a}}{a} (\rho + p) \quad (2.88)$$

A equação (2.87) pode ser resolvida analiticamente para uma equação de estado da forma (2.85), e o resultado é

$$\rho_c = \left(\Gamma + \frac{B}{a^{3(\alpha+1)}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \quad (2.89)$$

que está de acordo com o resultado apresentado por Gong^[83]. B é uma constante de integração que depende das condições iniciais: $B = (\rho_{c0}^{\alpha+1} - \Gamma) a_0^{3(\alpha+1)}$.

A equação (2.89) possui uma assíntota para valores grandes de a , que são atingidos durante a era da energia escura

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \rho = \Gamma^{\frac{1}{\alpha+1}} \quad (2.90)$$

ou seja, em um estado avançado da evolução cosmológica, o gás de Chaplygin se comporta como uma constante cosmológica, com densidade constante com o tempo. Dessa mesma forma, a sua contribuição com a massa do buraco negro

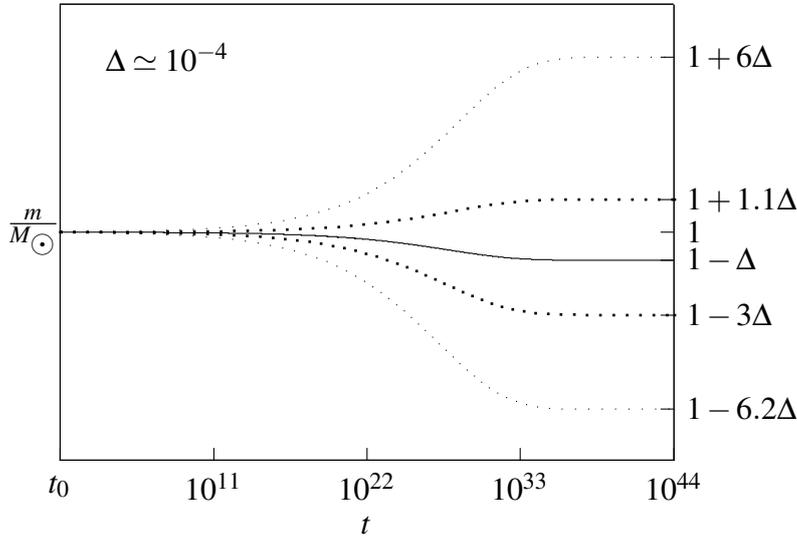


Figura 2.5: Evolução da massa de um buraco negro com $m_0 = m_\odot$ acretando um gás de Chaplygin generalizado. A linha sólida indica a evolução com os valores médios de α e ρ , a região escura é produzida por uma variação de 1σ na média e a região clara é resultado de uma variação de 3σ .

deve desaparecer, uma vez que a constante cosmológica não produz alterações na massa.

Inserindo a densidade de energia (2.89) em (2.74), chegamos a um regime de acreção variável. A equação diferencial resultante pode ser resolvida numericamente. Utilizamos o método de Runge–Kutta de quarta ordem para obter a solução da massa em função do tempo.

A figura 2.5 mostra as possíveis trajetórias de evolução da massa do buraco negro a partir de hoje, em que usamos como parâmetros os dados medidos pelo WMAP^[84], calculados através de um modelo Λ CDM, que não faz suposições sobre a constância da equação de estado da energia escura. Também colocamos no gráfico as trajetórias permitidas pelas incertezas nos dados medidos.

Na figura 2.5, um buraco negro com massa inicial $m_0 = M_\odot = 1.12 \times 10^{57}$ GeV acretando o gás de Chaplygin atinge uma massa m_1 antes de a sua variação na massa parar, o que é um reflexo de o fluido se aproximar do limite (2.90). Os resultados numéricos preveem uma variação na massa de $\Delta m = m_1 - m_0 = -1 \times 10^{-4} m_0$ devida à acreção de um fluido com a densidade média extraída dos dados do WMAP-5.

Podemos ver pelos valores da simulação que as incertezas permitem que o processo de acreção tanto aumente quanto diminua a massa do buraco negro. Essa variedade de comportamentos é consequência de que a energia *phantom* ainda

não pode ser totalmente descartada dos modelos cosmológicos pelas observações. O resultado também é consistente com as demais análises feitas ao longo deste capítulo.

Também podemos ver pelos dados da simulação que a variação na massa do buraco negro é extremamente baixa, considerando a evolução a partir da época atual. No entanto, a solução da variação da massa para tempos anteriores sofre dos mesmos problemas que a solução no modelo Λ CDM, produzindo acreções muito violentas e buracos negros que envolveriam todo o Universo muito rapidamente. Devemos, portanto admitir que a análise feita até aqui somente se aplica a variações baixas na massa e fluidos muito rarefeitos. Uma análise do problema quando abandonamos essas suposições será feita no capítulo 5.

Capítulo 3

Termodinâmica da evolução de buracos negros

“In this house, we obey the laws of thermodynamics!”

– Homer Simpson, *The Simpsons*

A Física de buracos negros, descrita pelos teoremas que regem o comportamento das singularidades e dos horizontes, e a generalidade das soluções de colapso gravitacional^[85:42:22], pode ser também descrita como um conjunto de leis que se assemelham às quatro leis da Termodinâmica^[86:87].

Essa abordagem é diferente da construção de uma teoria cinética em um espaço curvo^[88:89], pois, em vez de nos focarmos em escrever as leis da Termodinâmica clássica da matéria em um cenário relativístico, encontramos nas particularidades do próprio espaço-tempo alguns padrões que sugerem que os buracos negros (e mesmo alguns tipos de horizonte cosmológico^[90]) sejam um sistema termodinâmico em seu próprio mérito.

3.1 As leis da Termodinâmica de buracos negros

O grande poder das leis da Termodinâmica vem principalmente do fato de que a forma das leis não depende de características dinâmicas microscópicas de um sistema particular, e por isso as leis têm uma validade universal, pelo menos para uma classe muito ampla de sistemas^[91].

Escrevemos a seguir os enunciados e um resumo do significado das leis da Termodinâmica de buracos negros¹.

¹Um esboço das demonstrações das leis 0, 1 e 2 pode ser visto no apêndice B.

Lei 0. *A gravidade superficial κ de um buraco negro é constante sobre o horizonte de eventos.*

A lei 0 estabelece uma analogia direta entre a gravidade superficial do buraco negro e a temperatura termodinâmica. No entanto, de acordo com a relatividade geral clássica, a temperatura física de um buraco negro deveria ser o zero absoluto, uma vez que o buraco negro jamais entraria em equilíbrio com a radiação de um corpo negro a uma temperatura diferente de zero, já que não há mecanismos clássicos para o buraco negro emitir radiação^[86].

No entanto, a descoberta de Hawking^[42] de que o buraco negro emite radiação, pelos efeitos quânticos que descrevemos na seção 1.3.4, como um corpo negro a temperatura dada por (1.34), confirma que $\kappa/2\pi$ é de fato a temperatura física do buraco negro.

Lei 1. *Quaisquer dois estados vizinhos de equilíbrio de um buraco negro axialmente simétrico de massa m , gravidade superficial κ , velocidade angular ω e momento angular J estão relacionados por*

$$dm = \frac{\kappa}{8\pi} d\mathcal{A} + \omega dJ. \quad (3.1)$$

A lei 1 estabelece uma correspondência imediata com a primeira lei da Termodinâmica clássica^[92]

$$dU = T dS - p dV. \quad (3.2)$$

Em particular, associamos a entropia S à quantidade proporcional à área $\mathcal{A}/4$ do horizonte de eventos e a temperatura T à gravidade superficial $\kappa/2\pi$, como já havíamos visto na lei 0.

Lei 2. *A área \mathcal{A} do horizonte de eventos de um buraco negro não decresce com o tempo, ou seja*

$$\Delta\mathcal{A} \geq 0. \quad (3.3)$$

A lei 2, como a segunda lei da Termodinâmica clássica, explicita a irreversibilidade inerente ao sistema como um todo, e assim define a direção da seta do tempo. No caso dos buracos negros, a lei 2 diz que a energia interna contida no buraco negro que não pode ser extraída cresce com o tempo. Assim como na Termodinâmica clássica, a entropia do buraco negro está relacionada com a impossibilidade de extrairmos informação sobre o seu interior e estrutura^[12].

Lei 3. *É impossível por qualquer procedimento, não importa o quão idealizado, reduzir κ a zero por um número finito de operações.*

Há demonstrações para diversas versões da lei 3^[12], mas a forma em que a enunciamos aqui^[86] pode ser entendida como uma consequência da conjectura da censura cósmica: a única maneira de levar κ a zero é em um buraco negro extremo, com carga elétrica q e momento angular J de forma que $m^2 = J^2 + q^2$. Pode-se argumentar que um tal buraco negro extremo não possa ser produzido por processos físicos. Em alguns exemplos específicos^[93] a análise mostra que, conforme o buraco negro se aproximasse do estado extremo, mais restritivas ficariam as condições para se executar o próximo passo.

3.1.1 A segunda lei generalizada

“There is no such thing as a free lunch.”

– Milton Friedman

Como vimos nas seções 1.3.4 e 2.5, efeitos quânticos e tipos extremos de energia escura violam as condições em que a lei 2 pode ser aplicada. Em particular, a radiação, quando tratada quanticamente, não satisfaz a condição de energia nula^[91] que é necessária na sua demonstração, enquanto a energia *phantom* viola todas as condições de energia. Além disso, a segunda lei da Termodinâmica clássica é violada na presença de buracos negros: quando alguma matéria cai no buraco negro, toda a informação sobre a sua entropia desaparece na singularidade central sem um mecanismo que aumente a entropia ordinária, o que diminuiria a entropia total.

Por outro lado, a emissão de radiação por buracos negros é um processo térmico, e a evaporação é um mecanismo que aumenta a entropia do espaço ao redor devido à criação de partículas^[12]. Da mesma forma, quando matéria cai no buraco negro, há necessariamente um aumento na entropia do buraco negro.

Podemos assim definir a *entropia generalizada*, como sendo a soma da entropia do buraco negro $S_{\text{BH}} = \mathcal{A}/4$ com a entropia do material S_{m} no seu exterior.

Lei 2a (Segunda Lei Generalizada). *Em qualquer processo físico envolvendo buracos negros, a entropia generalizada \tilde{S} não decresce^[85]*

$$\Delta\tilde{S} \equiv \Delta S_{\text{BH}} + \Delta S_{\text{m}} \geq 0. \quad (3.4)$$

Muitas análises reforçam a validade da lei 2a em contextos clássicos^[94] e quânticos^[95]. Essa identificação da entropia de um buraco negro com a entropia termodinâmica completa a fusão das leis da Termodinâmica de buracos negros com as leis da Termodinâmica clássica.

No entanto, essa fusão apresenta uma série de dificuldades quando tentamos determinar a origem física da entropia de um buraco negro. Uma ilustração dessa

dificuldade é representada pela diferença na demonstração das leis da Termodinâmica clássica e da Termodinâmica de buracos negros, e nos mostra o quanto nosso entendimento de uma teoria quântica da gravidade é rudimentar^[96].

3.2 Dedução termodinâmica da função de massa crítica

A dedução da massa crítica m_c da equação (1.44) foi feita na seção 1.3.5 através da análise da taxa de variação (1.43) na massa de um buraco negro sujeito a acreção de radiação e evaporação Hawking. A equação (1.43) apresenta um ponto de equilíbrio instável que corresponde à fronteira entre os regimes de acreção e evaporação.

Uma derivação termodinâmica para a função massa crítica $m_c(t)$ pode ser feita no limite de variação da entropia generalizada \tilde{S} , que neste caso corresponde à soma da entropia do buraco negro dada pela lei 2 com a entropia da radiação ao redor.

Para escrever a entropia do banho de radiação, consideramos inicialmente apenas a radiação em um contexto cosmológico, sem levar em conta a presença do buraco negro.

Seja um fluido genérico que está em equilíbrio térmico em toda parte, o que significa que a entropia contida em um volume comóvel é constante^[49]. Assim, pela primeira lei da Termodinâmica, a variação na entropia (cuja densidade é s) da matéria contida em um volume V é regida por

$$dS = d(sV) = \frac{1}{T} [d(\rho V) + p dV]. \quad (3.5)$$

Igualando os coeficientes do termo em dV pela hipótese de equilíbrio, temos

$$s = \frac{\rho + p}{T}. \quad (3.6)$$

Da mesma forma, igualando os coeficientes de VdT em (3.5) e usando (3.6), chegamos à conservação de energia

$$T \frac{dp}{dT} = \rho + p. \quad (3.7)$$

No caso específico da radiação, temos $p = \rho/3$, de forma que a equação (3.7) resulte na lei de Stefan–Boltzmann (1.36)²

$$\rho_{\text{rad}} = \sigma T^4. \quad (3.8)$$

²A constante de Stefan–Boltzmann σ não pode ser determinada somente pela Termodinâmica.

Inserindo esse resultado na equação (3.6), chegamos à densidade de entropia da radiação

$$s_{\text{rad}} = \frac{4\sigma}{3} T^3. \quad (3.9)$$

Podemos escrever a variação da entropia (3.9) em termos da energia (3.8) calculando δs_{rad} e $\delta \rho_{\text{rad}}$ pela regra da cadeia

$$\delta s_{\text{rad}} = \frac{3}{4} \frac{s_{\text{rad}}}{\rho_{\text{rad}}} \delta \rho_{\text{rad}}. \quad (3.10)$$

A hipótese de equilíbrio nos permite escrever a variação na entropia total de (3.10) como a variação na densidade de entropia multiplicada pelo volume comóvel $V = a^3$.

Em termos da temperatura, a variação da entropia é, portanto

$$\delta S_{\text{rad}} = a^3 \frac{\delta \rho_{\text{rad}}}{T}. \quad (3.11)$$

Por outro lado, a entropia do buraco negro é dada pela lei 2, que no caso de um buraco negro de Schwarzschild vale

$$S_{\text{BH}} = \frac{\mathcal{A}}{4} = 4\pi m^2 \quad (3.12)$$

$$\delta S_{\text{BH}} = \frac{2S_{\text{BH}}}{m} \delta m. \quad (3.13)$$

Pela lei 2a, a variação global da entropia deve satisfazer a desigualdade (3.4), o que no caso do banho de radiação é

$$\delta \tilde{S} = \delta(S_{\text{BH}} + S_{\text{rad}}) \geq 0. \quad (3.14)$$

Se igualarmos a variação na massa do buraco negro à variação na energia da radiação, ou seja, se supusermos que toda a variação na energia da radiação se deva à acreção ou à evaporação do buraco negro, $\delta m = -a^3 \delta \rho_{\text{rad}}$, podemos expressar $\delta \tilde{S}$ em função da massa do buraco negro m e da temperatura da radiação T

$$\delta m \left(8\pi m - \frac{1}{T} \right) \geq 0. \quad (3.15)$$

No estado de equilíbrio, quando $\delta \tilde{S} = 0$, (3.14) fornece o valor da massa crítica m_c em função da temperatura

$$m_c = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{T}. \quad (3.16)$$

Inserindo a dependência da temperatura com o tempo cosmológico, através de (1.46) e (3.8), obtemos o valor da massa crítica em função do tempo

$$m_c \propto \frac{1}{8\pi} t^{1/2} \quad (3.17)$$

que depende apenas da densidade do banho de radiação ao longo da era da radiação e de constantes fundamentais.

Para que a segunda lei generalizada seja satisfeita, portanto, é necessária uma transição entre um regime de acreção de radiação e um regime de evaporação. Para um buraco negro de massa $m > m_c$ a equação (3.15) exige $\delta m > 0$, ou seja, um regime de acreção. Se tivermos $m < m_c$, devemos ter necessariamente $\delta m < 0$, ou seja, um regime de evaporação.

Observe que esse resultado é consistente com a expressão (1.48) para a massa crítica, tendo sido obtido de maneira completamente independente das considerações das seções 1.3.3 e 1.3.4.

Se levarmos em conta a evolução na massa do buraco negro por acreção de partículas que descrevemos na seção 1.3.5, concluímos que alguns buracos negros devem obrigatoriamente atingir o valor da massa crítica, se estiverem dentro do intervalo de massas varrido por m_c na era da radiação, como é ilustrado na figura 2.3.

3.3 Acreção de energia *phantom* e a segunda massa crítica

A exemplo da seção 3.2, a interação de um buraco negro com a energia *phantom* pode ser analisada de um ponto de vista termodinâmico. Para isso, é necessário que adotemos algum modelo para a entropia da energia *phantom*. Sendo uma forma de energia tão exótica, que viola todas as condições de energia, algumas das hipóteses necessárias para a validade da lei 2 não podem mais ser garantidas, mas ainda assim é possível utilizarmos a lei 2a para ao menos estabelecermos limites em que o processo de acreção é permitido.

Dessa forma, buscamos a seguir uma expressão para a fronteira de massa que separa os regimes de acreção e evaporação, análoga à dedução da massa crítica da seção 3.2. Utilizamos para isso dois modelos distintos para a entropia do fluido *phantom*.

3.3.1 Entropia *phantom* com temperatura negativa

Uma primeira aproximação para escrevermos a entropia da energia *phantom* consiste simplesmente em escrevermos a primeira lei da Termodinâmica para um elemento de volume comóvel V preenchido por um fluido com a equação de estado (2.1) com $w < -1$ constante, sem hipóteses adicionais. Temos então^[97]

$$T dS = d(\rho V) + p dV = V \frac{d\rho}{dT} dT + (1+w)\rho V. \quad (3.18)$$

A entropia então satisfaz as seguintes condições

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{1+w}{T} \rho. \quad (3.20)$$

Usando a condição de integrabilidade para a entropia, que é uma função de estado, e portanto dS é um diferencial exato^[98], chegamos a

$$\frac{d\rho}{dT} = \frac{(1+w)}{w} \frac{\rho}{T}. \quad (3.21)$$

Em uma cosmologia *phantom*, como $\rho + p < 0$, a relação de Euler $Ts = p + \rho$ permite duas alternativas: ou a entropia é negativa e a temperatura positiva, ou a entropia é positiva e o fluido tem uma temperatura negativa. A entropia é definida em vários contextos como uma quantidade positiva, como por exemplo a entropia de Boltzmann da Mecânica Estatística, que é o logaritmo do número de estados acessíveis ao sistema^[99] e corresponde à entropia de von Neumann em sistemas quânticos, e a entropia de Shannon da teoria da informação, definida pela incerteza associada a uma variável aleatória. Além disso, um fluido *phantom* com entropia negativa em interação com um buraco negro viola expressamente a segunda lei generalizada^[100]. Assim, escolhemos a descrição que atribui uma entropia positiva ao fluido *phantom*.

Supondo então uma temperatura negativa para o fluido, sua entropia pode ser expressa como^[97]

$$S_{\text{ph}} = \kappa \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{1+w}} V \quad (3.22)$$

em que κ é uma constante de integração positiva arbitrária.

Supondo válida uma relação análoga a (3.11) para o fluido *phantom*, a variação da entropia pode ser escrita da mesma forma que a variação na entropia da radiação

$$\delta S_{\text{ph}} = \frac{\kappa}{1+w} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\frac{w}{1+w}} V \delta \rho_{\text{ph}}. \quad (3.23)$$

Utilizando a equação (3.12) para a entropia do buraco negro, e desprezando outros efeitos, como os discutidos no final da seção 3.1.1, chegamos a uma expressão para a variação da entropia total \tilde{S}

$$\delta \tilde{S} = 8\pi m \delta m + \frac{\kappa}{1+w} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\frac{w}{1+w}} V \delta \rho_{\text{ph}} \geq 0. \quad (3.24)$$

Relacionamos δm e $\delta \rho_{\text{ph}}$ através da equação (2.40), supondo a conservação da energia total contida no volume comóvel V . Por falta de uma expressão completamente covariante para a variação de energia-momento do fluido no meio devida à acreção, utilizamos uma expressão que leva em conta apenas a parte cinética do campo escalar^[97]

$$\delta m = -\frac{1}{2}(1+w)\delta \rho_{\text{ph}}V. \quad (3.25)$$

Essa aproximação pode ser justificada pelo princípio da equivalência, supondo que suficientemente longe do buraco negro a acreção deva ter um comportamento equivalente à acreção de Bondi.

A negatividade da variação da energia *phantom* é, portanto, uma consequência do fato de o termo cinético em (2.2) ser negativo. Inserindo a equação (3.25) em (3.24), escrevemos a variação total na entropia generalizada \tilde{S} em função da variação na massa m do buraco negro

$$\delta \tilde{S} = \left[4\pi m - \frac{\kappa}{(1+w)^2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\frac{w}{1+w}} \right] \delta m \geq 0. \quad (3.26)$$

Definimos então uma espécie de massa crítica *phantom*, atingida no equilíbrio, quando $\delta \tilde{S} = 0$

$$m_{\text{c}}^{\text{ph}} = \frac{\kappa}{4\pi(1+w)^2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\frac{w}{1+w}}. \quad (3.27)$$

Para encontrarmos a região em que a acreção *phantom* é permitida, fazemos uma análise similar à do final da seção 3.2, mas agora devemos levar em conta que a acreção de energia *phantom* diminui a massa do buraco negro, como mostrado em (3.25). Portanto, $\delta m < 0$ e $\delta \rho < 0$ simultaneamente em um regime de acreção.

Analisando a equação (3.26), chegamos à conclusão de que, para que a segunda lei generalizada seja satisfeita, apenas buracos negros de massas *menores*

que m_c^{ph} podem acretar energia *phantom*. O comportamento da densidade da energia *phantom*, dado por (2.53), indica que a densidade do fluido aumenta com o tempo, e, portanto o valor de m_c^{ph} sempre diminui.

Note-se que nesta argumentação usamos uma temperatura negativa para a energia *phantom*. Esse conceito, embora incomum em Física, possui um significado preciso na Termodinâmica. A temperatura, definida em termos da função de estado, é dada por^[98]

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V. \quad (3.28)$$

Pode ser observado em alguns sistemas quânticos^[101] que a energia interna decresce com um aumento na entropia. Tais sistemas possuiriam, portanto, uma temperatura negativa. Podemos concluir, por (3.28), que a temperatura negativa é uma consequência do fato de que a entropia não é uma função monotonicamente crescente da energia. Esse fato é observado na equação (3.22), em que podemos constatar que

$$\frac{1}{T_{\text{ph}}} = \frac{\partial S_{\text{ph}}}{\partial \rho_{\text{ph}}} \propto \frac{\rho_{\text{ph}}^{-\frac{w}{1+w}}}{1+w} < 0. \quad (3.29)$$

Para um sistema exibir temperatura negativa, é necessário que exista um limite superior finito para a energia. De outra forma, se a fronteira $\frac{\partial S}{\partial U} = 0$ (que corresponde a temperatura infinita) ocorrer em um sistema sem um limite superior para a energia, a temperatura negativa significaria energia infinita. Pelo mesmo motivo, temperatura negativa corresponde a energia mais alta que temperatura positiva. Quando um sistema a temperatura negativa entrar em contato com um sistema a temperatura positiva, a energia flui da configuração com temperatura negativa à configuração com temperatura positiva, ou seja, temperaturas negativas são *mais quentes* que temperaturas positivas^[102].

3.3.2 Entropia *phantom* com potencial químico não nulo

Existem outras possibilidades para modelar a entropia *phantom*, sem que uma temperatura negativa seja necessária na sua construção. O modelo que descrevemos a seguir^[103;104] pode fornecer novos parâmetros para a caracterização do processo completo de acreção *phantom*.

Consideremos um fluido *phantom* relativístico, caracterizado por um tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ dado por (2.28), uma corrente de partículas $N^\mu = nu^\mu$, com densidade de partículas dada por n , e uma corrente de entropia $S^\mu = su^\mu$, com densidade de entropia dada por s , que satisfazem as seguintes equações de conservação

$$N^\mu{}_{;\mu} = 0 \quad (3.30)$$

$$S^\mu{}_{;\mu} = 0. \quad (3.31)$$

Em uma métrica de Friedmann–Robertson–Walker, as equações de conservação para s e n podem ser escritas como

$$\dot{n} + 3n\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad n = n_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \quad (3.32)$$

$$\dot{s} + 3s\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = s_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3. \quad (3.33)$$

A segunda lei da Termodinâmica para um fluido relativístico dá a variação na densidade de entropia como^[105]

$$Tds = d\left(\frac{\rho}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left[d\rho - \frac{\rho + p}{n} dn \right]. \quad (3.34)$$

Como ds deve ser um diferencial exato, a equação (3.34) leva à identidade termodinâmica

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_n = \rho + p - n \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_T. \quad (3.35)$$

Combinando (3.35) com as equações de conservação (3.32) e (3.33), podemos mostrar que a temperatura satisfaz, para $w \neq 0$,

$$\frac{\dot{T}}{T} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_n \frac{\dot{n}}{n} = -3w\frac{\dot{a}}{a} \quad (3.36)$$

$$T = T_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3w}. \quad (3.37)$$

A temperatura em (3.37) é sempre positiva. Em particular, introduzindo a expressão (3.37) para a temperatura na equação de conservação de energia (2.47) obtemos a densidade de energia em função da temperatura

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1+w}{w}} \quad (3.38)$$

que, no caso da radiação, que possui equação de estado^[49] $w = 1/3$, é consistente com a lei de Stefan–Boltzmann (3.8).

Pra determinar o potencial químico do fluido, utilizamos a relação de Euler, agora considerando a densidade de partículas

$$Ts = p + \rho - \mu n. \quad (3.39)$$

Combinando agora (3.39) com (3.32), (3.33) e (3.37), chegamos a uma expressão para o potencial químico μ

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3w} = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right) \quad (3.40)$$

$$\mu_0 = \frac{1}{n_0} [(1+w)\rho_0 - T_0 s_0]. \quad (3.41)$$

Podemos ver por (3.41) que μ é negativo para a energia *phantom*, e por (3.40) que o valor absoluto de μ aumenta com o tempo, uma vez que a temperatura da energia *phantom* é crescente, como pode ser visto ao considerarmos (3.38) e (2.50). Em particular, podemos escrever a dependência do valor mínimo do potencial químico em função da equação de estado para que a entropia se mantenha positiva

$$w \geq -1 + \frac{\mu_0 n_0}{\rho_0}. \quad (3.42)$$

Finalmente podemos definir a entropia do fluido *phantom* no volume comóvel V utilizando (3.33), escrevendo a/a_0 em função de T através de (3.37) e escrevendo s_0 através de (3.41). O resultado é

$$S = \left[\frac{(1+w)\rho_0 - \mu_0 n_0}{T_0} \right] \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{w}} V. \quad (3.43)$$

Assim, a entropia generalizada de um sistema que consiste em um buraco negro de Schwarzschild e o fluido *phantom* é dada por^[104]

$$\tilde{S} = 4\pi m^2 + \left[\frac{(1+w)\rho_0 - \mu_0 n_0}{T_0} \right] \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{1+w}} V. \quad (3.44)$$

Devido ao processo de acreção, em um dado intervalo de tempo a massa do buraco negro varia de δm e a energia do fluido *phantom* varia de $\delta \rho$. Portanto, a variação total de entropia é da forma

$$\delta \tilde{S} = 8\pi m \delta m + \frac{1}{(1+w)} \left[\frac{(1+w)\rho_0 - \mu_0 n_0}{T_0 \rho_0} \right] \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\frac{w}{1+w}} V \delta \rho. \quad (3.45)$$

Novamente relacionamos a variação na massa do buraco negro à energia do fluido por (3.25), pelo mesmo argumento que apresentamos na seção 3.3.1^[104]. Inserindo (3.25) em (3.45), obtemos uma expressão para a variação total de entropia do sistema

$$\delta\tilde{S} = \left\{ 4\pi m - \frac{1}{(1+w)^2} \left[\frac{(1+w)\rho_0 - \mu_0 n_0}{T_0 \rho_0} \right] \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\frac{w}{1+w}} \right\} \delta m. \quad (3.46)$$

No equilíbrio, quando $\delta\tilde{S} = 0$, temos a expressão para a massa crítica neste cenário

$$m_c^{\text{ph}} = \frac{1}{4\pi(1+w)^2} \left[(1+w) - \frac{\mu_0 n_0}{\rho_0} \right] \frac{1}{T_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\frac{w}{1+w}}. \quad (3.47)$$

Como discutimos na seção 3.3.1, o regime de acreção *phantom* decresce a massa do buraco negro, o que significa que apenas buracos negros de massa $m < m_c^{\text{ph}}$ podem acretar energia escura.

Comparando as expressões (3.27) e (3.47) para a massa crítica, verificamos que elas são compatíveis a menos da constante de integração desconhecida κ , cuja única restrição é a condição de positividade. Para que as duas descrições do problema sejam equivalentes, basta que tenhamos $\kappa = s_0$, ou seja, supondo que (3.42) seja satisfeita,

$$\kappa = s_0 = \frac{1}{T_0} [(1+w)\rho_0 - n_0\mu_0]. \quad (3.48)$$

Portanto, nas duas descrições termodinâmicas que fazemos do fluido neste capítulo, a sua entropia possui o mesmo comportamento, embora tenhamos partido de hipóteses muito diferentes. No entanto, para termos uma descrição única e completamente consistente da Termodinâmica do fluido *phantom*, é necessário estabelecermos um modelo cinético sobre as partículas que o compõem, para a partir daí encontrarmos o seu comportamento macroscópico^[89].

De fato, a hipótese de potencial químico negativo permite que consideremos a energia *phantom* como um campo escalar de fato, por não termos as restrições sobre os graus de liberdade característicos de sistemas com temperatura negativa, que discutimos na seção 3.3.1.

Capítulo 4

Evaporação de Hawking e o princípio de incerteza generalizado

*“’Twas brillig, and the slithy toves
Did gyre and gimble in the wabe;
All mimsy were the borogoves,
And the mome raths outgrabe.”*

– Lewis Carroll, *Through the Looking-Glass*

A dedução do processo de evaporação de Hawking é feita por suposições semi-clássicas. Quando a massa do buraco negro é muito pequena, essa descrição não é mais adequada para o problema, e os efeitos quânticos começam a ficar importantes. Esse é o caso com buracos negros com massas da ordem da massa de Planck. Como vimos na seção 1.3.4, o comportamento de buracos negros com massas nessa escala constitui uma limitação da atual descrição dos estágios finais da evaporação. O princípio de incerteza generalizado fornece uma primeira aproximação para inserir um limite inferior na validade do processo de evaporação de Hawking.

Para levar em conta a influência da energia escura, um modelo bidimensional para a evaporação de buracos negros em uma métrica de Schwarzschild–de Sitter foi construída por Bousso e Hawking^[106] a partir de uma análise quântica. Uma mudança no comportamento da evaporação dos buracos negros implica um processo inteiramente diferente de evolução desses objetos, assim como sua influência sobre as demais componentes do Universo.

Neste capítulo investigamos como esse cenário de energia escura influencia o comportamento de buracos negros de massa pequena e primordiais, através de um cálculo aproximado dos parâmetros de evolução por uma extensão do princípio de incerteza inspirada pelo comprimento característico que a constante cosmológica introduz no Universo.

4.1 Evaporação de Hawking pelo princípio de incerteza

A evaporação de Hawking pode ser obtida de uma maneira heurística simples^[107] pelo uso do princípio de incerteza convencional e pelas propriedades gerais de buracos negros, discutidas nos capítulos 1 e 3.

Assim como na seção 1.3.4, interpretamos o vácuo quântico como uma coleção de partículas virtuais que não podem ser observadas sem que a conservação de energia seja violada. No entanto, a influência da vizinhança do horizonte de eventos sobre essas partículas produz o efeito de emissão de partículas com o espectro de energia de um corpo negro.

A energia característica E de um fóton emitido por um buraco negro pode ser estimada pelo princípio de incerteza convencional. Estimamos a incerteza na posição de qualquer partícula como sendo o diâmetro do horizonte de eventos $2r_G$. Assim, a incerteza no momento, e portanto na energia, é¹

$$\Delta p = \frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{4m}. \quad (4.1)$$

Identificamos Δp como a energia característica do fóton emitido, que corresponde à temperatura de Hawking (1.35) a menos de um fator 2π , que é incluído como um termo de calibração^[74].

$$T_H = \frac{1}{8\pi m}. \quad (1.35)$$

Não há, no entanto, uma maneira heurística de argumentar que o espectro dos fótons emitidos corresponda ao de um corpo negro.

Podemos utilizar essa abordagem em versões modificadas do princípio de incerteza, como forma de estimar o comportamento dos buracos negros de massa na escala de Planck em uma primeira aproximação para os efeitos quânticos na gravitação.

4.2 O princípio de incerteza generalizado

Uma primeira tentativa de incorporar as flutuações na gravitação na escala de Planck é o chamado princípio de incerteza generalizado (GUP²), que pode ser justificado com base em argumentos provenientes da teoria das supercordas ou de

¹O fator $1/2$ proveniente dos resultados exatos para os comutadores de posição e momento está ausente nesta relação de incerteza, mas pode ser absorvido na calibração heurística para a temperatura de Hawking.

²*Generalized uncertainty principle.*

teorias da gravitação em várias dimensões^[108]. O GUP, como apresentado por Adler *et al.* e suas referências^[107], diz

$$\Delta x \geq \frac{1}{\Delta p} + L_P^2 \Delta p \quad (4.2)$$

em que L_P é o comprimento de Planck, dado por $L_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1$ nas nossas unidades.

A expressão (4.2) é construída como a soma de duas contribuições para a incerteza: a incerteza proveniente do princípio de incerteza convencional Δx_H e a contribuição gravitacional Δx_G , de forma que tenhamos $\Delta x = \Delta x_H + \Delta x_G$ ^[69]. Podemos justificar esse termo adicional com argumentos dimensionais. A incerteza convencional na posição do fóton pode ter adicionado um termo proveniente da interação gravitacional entre partículas. Esse termo deve ser proporcional à energia do fóton p , que deve ser da ordem da incerteza sobre o momento da partícula interagente Δp .

Podemos reescrever (4.2) de maneira que o lado esquerdo pareça mais familiar, como

$$\Delta x \Delta p \geq 1 + L_P^2 \Delta p^2 \quad (4.3)$$

de onde podemos observar que a incerteza na posição Δx tem como valor mínimo o comprimento de Planck L_P , o que torna essa distância uma escala mínima fundamental de comprimento.

Da mesma forma que na seção 4.1, podemos estimar a temperatura de Hawking de um buraco negro fazendo uso do GUP e resolvendo (4.3) para a incerteza no momento Δp . Assim,

$$\Delta p = \frac{\Delta x}{2L_P^2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4L_P^2}{\Delta x^2}} \right]. \quad (4.4)$$

Supondo que as partículas emitidas sejam fótons com energia dada por Δp , então, com o fator de calibração 2π , e escolhendo o sinal negativo na expressão (4.4) para recuperarmos a temperatura dada por (1.35) para $m \gg m_P$, em que $m_P = 1$ é a massa de Planck, a temperatura de Hawking estimada pelo GUP é

$$T_{\text{GUP}} = \frac{m}{2\pi} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{m_P^2}{m^2}} \right]. \quad (4.5)$$

Essa expressão se torna imaginária para $m < m_P$.

Podemos então calcular a entropia de um buraco negro com temperatura dada por (4.5). A entropia S_{BH} de um buraco negro de Schwarzschild pode, pela lei 1,

ser escrita como uma função da sua massa e temperatura T_{BH} , através da integral da equação (3.1)

$$S_{\text{BH}} = \int T_{\text{BH}} dm. \quad (4.6)$$

Inserindo a temperatura (4.5) em (4.6), temos a entropia de um buraco negro com temperatura dada pelo GUP, normalizada para que seja igual a zero quando $m = m_{\text{P}}$ ^[107]

$$S_{\text{GUP}} = 2\pi \left[\frac{m^2}{m_{\text{P}}^2} \left(1 - \frac{m_{\text{P}}^2}{m^2} + \sqrt{1 - \frac{m_{\text{P}}^2}{m^2}} \right) - \log \left(\frac{m + \sqrt{m^2 - m_{\text{P}}^2}}{m_{\text{P}}} \right) \right]. \quad (4.7)$$

Também é possível calcular a taxa de variação da massa de um buraco negro com temperatura (4.5) através da lei de Stefan–Boltzmann (1.36).

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m^6}{60\pi^2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{m_{\text{P}}^2}{m^2}} \right]^4. \quad (4.8)$$

Assim, um buraco negro sob essas condições evaporaria até atingir a massa de Planck, tornando-se em seguida um remanescente inerte, capaz apenas de interações gravitacionais. Tais remanescentes podem ter existido desde muito cedo na história do universo, e são candidatos a constituintes da matéria escura na forma de WIMPs^[107]. Os limites mínimos de abundância de remanescentes podem também servir para ajustar alguns modelos inflacionários, se supusermos que esses objetos sejam a fonte principal de matéria escura^[109].

4.3 A métrica de Schwarzschild–de Sitter

Os efeitos calculados na seção 4.2 podem ser modificados na presença de um horizonte cosmológico, que representa a introdução de um segundo comprimento característico no Universo. Inicialmente, apresentamos a métrica mais simples que representa um buraco negro imerso em um espaço-tempo com um horizonte cosmológico.

A solução das equações de Einstein para um espaço-tempo esfericamente simétrico com constante cosmológica Λ é dada pela métrica de Schwarzschild–de Sitter^[79]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (4.9)$$

A métrica (4.9) possui um horizonte de eventos interno r_{SdS}^h e um horizonte cosmológico externo r_{SdS}^c , nas coordenadas^[110]

$$r_{\text{SdS}}^h \equiv r_{\text{SdS}} = m \frac{1}{\sqrt{3y}} \cos \frac{\pi + \xi}{3} \quad (4.10)$$

$$r_{\text{SdS}}^c = m \frac{1}{\sqrt{3y}} \cos \frac{\pi - \xi}{3} \quad (4.11)$$

com $y = \Lambda m^2/3$ e $\xi = \arccos(3\sqrt{3y})$.

Os dois horizontes colapsam um sobre o outro para o valor crítico $y_{\text{crit}} = 1/27$, que corresponde a $m = \frac{1}{3\sqrt{\Lambda}}$. A solução possui esses dois horizontes para todo m abaixo desse valor crítico.

4.4 Efeito do GUP estendido sobre a radiação de Hawking

4.4.1 Extensão do GUP

Uma possível extensão do GUP^[111], justificada por efeitos previstos pela *Loop Quantum Gravity*^[112], insere um termo dependente da constante cosmológica em (4.3), que corresponde a um comprimento cósmico característico no Universo, dado pelo horizonte cosmológico na métrica de de Sitter $L_\Lambda = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$. O GUP estendido em unidades de Planck pode ser escrito como

$$\Delta x \Delta p \geq 1 + \alpha L_P^2 \Delta p^2 + \beta \frac{\Delta x^2}{L_\Lambda^2}. \quad (4.12)$$

Podemos interpretar esse termo adicional como o estabelecimento de um valor mínimo para o momento de qualquer partícula no universo, como consequência da expansão, da mesma forma que o GUP (4.2) significa a existência de uma escala de comprimento mínima.

Nesta seção, discutimos a influência que esse termo adicional tem sobre a evaporação de Hawking, e investigamos se esse termo modifica o comportamento da entropia e da temperatura de Hawking para buracos negros primordiais de massa pequena. Supomos que cada buraco negro se forme instantaneamente, já mergulhado no espaço de de Sitter, e comece a evaporar imediatamente. Também consideramos apenas buracos negros de raios menores que r_{SdS}^c , o que é consistente com o fato de que, em qualquer época, buracos negros primordiais só podem se formar com raios menores que o do horizonte³.

³Ver seção 1.2.

Seguindo um procedimento similar ao feito nas seções 4.1 e 4.2, tomamos o valor da incerteza na posição como sendo o diâmetro do horizonte de eventos interno (4.10) do buraco negro. O efeito sobre a radiação de Hawking vai ser a nova temperatura de Hawking quando

$$\Delta x \Delta p \approx 1 + \alpha L_P^2 \Delta p^2 + \beta \frac{\Delta x^2}{L_\Lambda^2}. \quad (4.13)$$

Resolvendo para Δp , temos

$$\Delta p = \frac{\Delta x \pm \sqrt{\Delta x^2 - 4\alpha L_P^2 \left(1 + \beta \frac{\Delta x^2}{L_\Lambda^2}\right)}}{2\alpha L_P^2} \quad (4.14)$$

que, fazendo $\Delta x = r_{\text{SdS}}$, resulta em

$$\Delta p = \frac{r_{\text{SdS}}}{2\alpha L_P^2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha L_P^2}{r_{\text{SdS}}^2} \left(1 + \beta \frac{r_{\text{SdS}}^2}{L_\Lambda^2}\right)} \right]. \quad (4.15)$$

De acordo com a identificação proposta na seção 4.1, a temperatura de Hawking é

$$T_H = \frac{\Delta p}{2\pi}. \quad (4.16)$$

Uma análise do domínio da função Δp em (4.15) implica o fato de que a temperatura de Hawking só é definida para um buraco negro cujo raio gravitacional satisfaça

$$r \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4\alpha L_P^2} - \frac{\beta}{L_\Lambda^2}}}. \quad (4.17)$$

O GUP convencional (4.4) pode ser obtido fazendo $\beta = 0$, e uma vez que o fator L_Λ é de ordem 10^{-123} em unidades de Planck^[53;113], a diferença entre o GUP estendido e o convencional é muito pequena, mesmo para raios grandes.

Como a figura 4.1 mostra, em que foi utilizada uma constante cosmológica muito exagerada por clareza ($\sim 10^{-1}$), há um desvio horizontal muito pequeno na incerteza no momento devido ao fator β/L_Λ^2 da equação(4.17). Para raios maiores, a diferença aumenta entre as soluções de vácuo e preenchidas por constante cosmológica.

Reescrevendo (4.10) explicitamente em termos da massa do buraco negro de Schwarzschild–de Sitter, obtemos

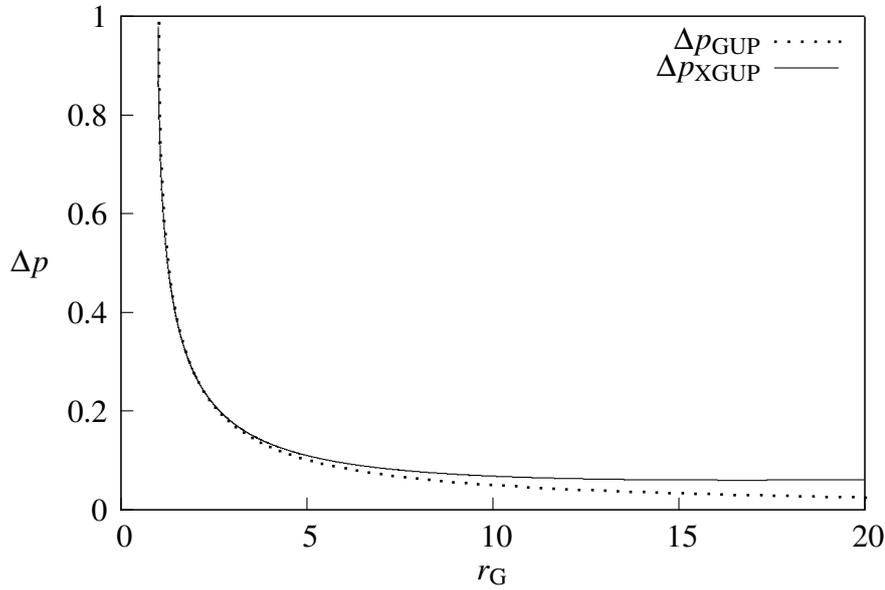


Figura 4.1: Incerteza no momento como função do raio gravitacional em unidades de Planck com (Δp_{XGUP}) e sem (Δp_{GUP}) constante cosmológica

$$r_{\text{SdS}}^{\text{h}} = \frac{Gm}{c^2} \frac{\cos \left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{\sqrt{3}\Lambda m^2 G^3}{c^6} \right) \right]}{\sqrt{\frac{\Lambda G m^2}{c^6}}}. \quad (4.18)$$

Assim, podemos escrever a temperatura de Hawking, conforme dada por (4.15) e (4.16), em termos da massa do buraco negro m .

Para analisar o efeito do GUP estendido e a temperatura como função da massa, primeiro devemos observar que o buraco negro de Schwarzschild–de Sitter é sensível à existência de um horizonte de eventos exterior, mas para massas pequenas se comporta como o buraco negro assintoticamente plano (1.1).

4.4.2 Entropia dos buracos negros no GUP estendido

A segunda lei generalizada da Termodinâmica (que chamamos lei 2a), que diz que a componente da entropia proveniente do buraco negro é proporcional à área do horizonte de eventos, nos permite colocar as soluções de vácuo e com constante cosmológica na mesma escala, como o que é mostrado na figura 4.1. Em outras palavras, para que a variação no raio do horizonte de eventos devida aos efeitos da métrica (4.9) não mude a descrição do problema, inserimos uma mudança de escala para m

$$\mu \equiv \frac{m}{2\sqrt{3}y} \cos \frac{\pi + \xi}{3} \quad (4.19)$$

de maneira que, para quaisquer valores de m e Λ dentro dos limites $y < y_{\text{crit}}$, vale

$$r_{\text{SDS}} = 2\mu. \quad (4.20)$$

Essa mudança de escala corresponde à chamada massa quase-local de Hawking—Hayward^[114], que significa que um observador local deve avaliar o horizonte de eventos como proveniente de um objeto central de massa μ em vez de m . Fazemos a mesma identificação da massa em outras métricas cosmológicas que contêm buracos negros, como a métrica de McVittie, no capítulo 5.

Assim, calculamos a entropia (4.6) em função desse novo parâmetro como

$$S = c^2 \int T_H(\mu) d\mu. \quad (4.21)$$

Inserindo o termo Δp da equação (4.15) em (4.21) e calculando a integral, obtemos

$$S_{\text{XGUP}} = \frac{4\pi}{\alpha L_P m_p} \left\{ \mu^2 - \left[\frac{\mu - m_p^2 \ln \left[2 \left(\zeta + \mu \sqrt{\zeta^2 \mu^2 - m_p^2} \right) \right]}{\zeta} \right] \right\} \quad (4.22)$$

em que $\zeta = \sqrt{1 + 4\beta \frac{L_P^2}{L_\Lambda^2}}$. Uma comparação entre a entropia convencional calculada pela lei 1 (3.1), a entropia modificada pelo GUP e a entropia modificada novamente pela equação (4.22) é mostrada no gráfico da figura 4.2.

4.4.3 Evolução no tempo

Aplicando a lei de Stefan–Boltzmann à temperatura do buraco negro (4.15), obtemos

$$\dot{\mu} = -\frac{\sigma}{16\pi^3} \mu^6 \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{m_p^2}{\mu^2} \left[1 - \beta \left(\frac{2\mu L_P}{L_\Lambda m_p} \right)^2 \right]} \right\}^4 \quad (4.23)$$

com $\sigma = \pi^2/60$ a constante de Stefan–Boltzmann em unidades de Planck.

Essa equação apresenta uma singularidade no ponto

$$\mu_{\text{Halt}} = \frac{L_\Lambda m_p}{2\sqrt{\beta} L_P} \quad (4.24)$$

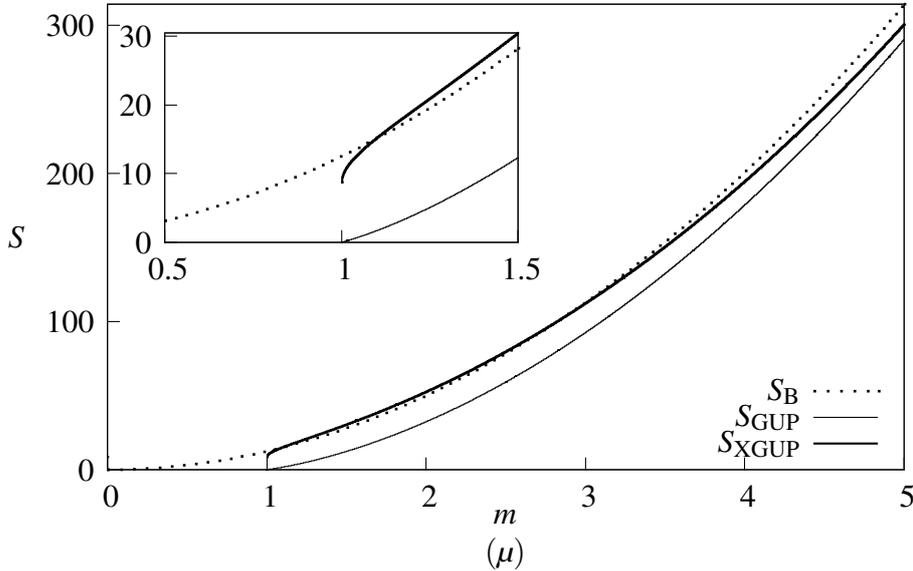


Figura 4.2: Comparação entre a entropia convencional do buraco negro S_{BH} , a entropia calculada pelo GUP S_{GUP} , ambas como funções de m , e a entropia pelo GUP estendido S_{XGUP} como função do parâmetro de massa μ

em que $\dot{\mu} = 0$ e a evaporação é interrompida. Para o valor atual da constante cosmológica, esse ponto se localiza em $\mu_{\text{Halt}} = 2,15 \times 10^{23} m_{\odot}$. Para massas maiores que esse limite, a evaporação modificada (4.23) se torna progressivamente mais rápida que a evaporação de Hawking. Para um valor grande de Λ , característico, por exemplo, de uma faixa de universos nos modelos de multiverso, o valor da fronteira μ_{Halt} é reduzido.

No entanto, para todos os valores de μ e Λ , μ_{Halt} está sempre localizado além do limite de massas para o qual há dois horizontes na métrica (4.9). Em outras palavras, o limite superior da massa do buraco negro é, segundo (4.10),

$$\mu_{\text{max}} = 1/4\Lambda < \mu_{\text{Halt}}. \quad (4.25)$$

No entanto, para buracos negros de massas grandes (aqueles de raio comparável ao horizonte) deve haver desvios significativos em relação à evaporação de Hawking convencional, diferentes dos previstos por modelos que utilizam o GUP, como pode ser visto na figura 4.3. A taxa de evaporação é diminuída a até um décimo da taxa convencional para esses buracos negros inicialmente grandes.

Uma análise numérica de (4.23) foi feita para comparar a evolução de buracos negros sob os diferentes tipos evaporação. A solução para massas pequenas pode ser vista na figura 4.4.

A solução da equação (4.23), quando comparada com a solução de Adler *et*

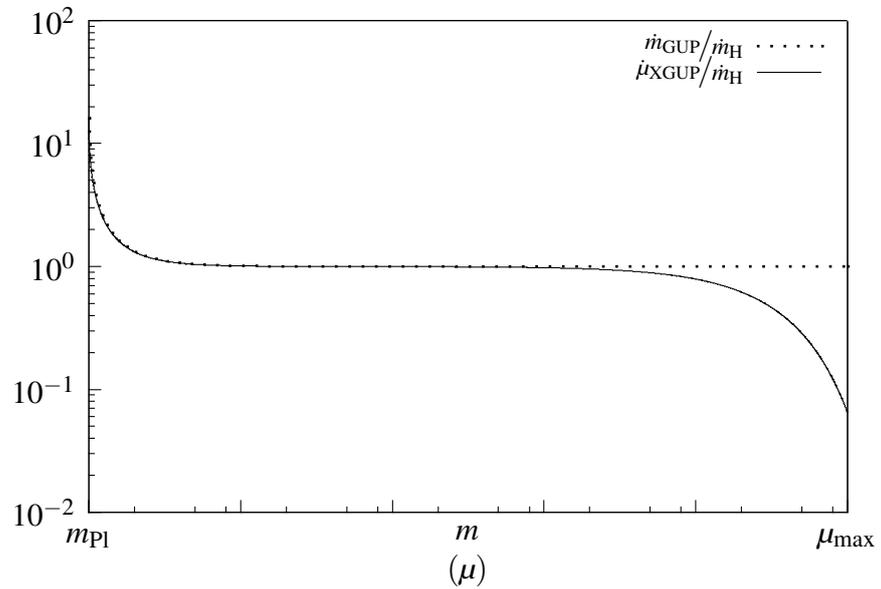


Figura 4.3: Razão entre a evaporação de Hawking pelo GUP modificado $\dot{\mu}_{\text{XGUP}}$ (4.23) com $\alpha = \beta = 1$ e a evaporação de Hawking convencional \dot{m}_{H} (1.40), comparada com a mesma razão para a evaporação pelo GUP \dot{m}_{GUP} (4.8). As semelhanças entre os dois regimes apenas se mantêm para massas pequenas.

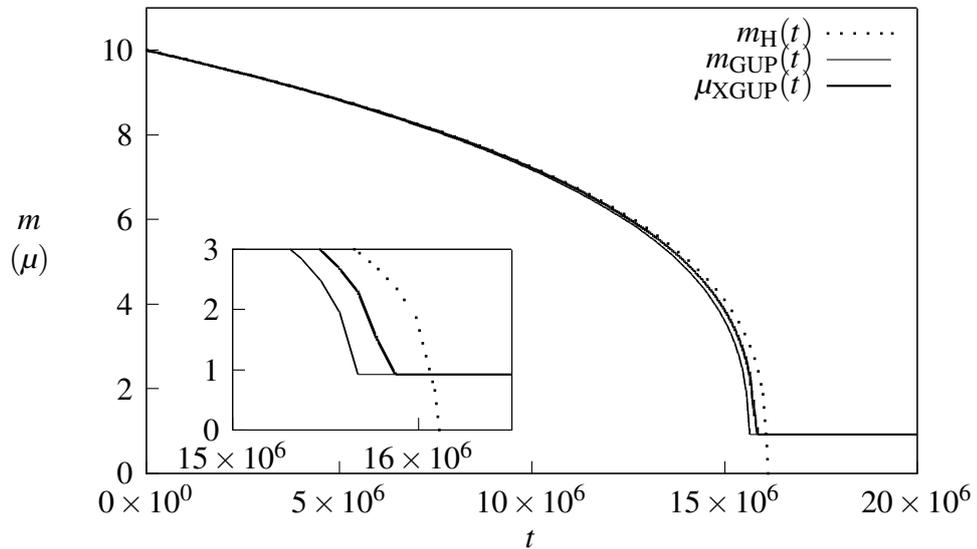


Figura 4.4: Evolução de buracos negros no cenário de Hawking (m_{H}), no cenário do GUP (m_{GUP}) e no cenário do GUP estendido (μ_{XGUP})

al.^[107], nos mostra um comportamento semelhante ao observado na figura 4.2: um pequeno desvio em relação ao caso do GUP convencional.

Esse resultado é bastante sensível a grandes valores da constante cosmológica Λ . Para a gama de valores atuais aceitos pela observação, ela apresenta o mesmo comportamento que o mostrado na figura 4.4, mas para valores grandes o suficiente de Λ de forma que m_{Halt} tenha da ordem de alguns milhares de massas de Planck, há uma mudança radical no destino final do buraco negro, e a sua evaporação pode ser reduzida se ele se aproximar do raio do horizonte cosmológico. Esse último resultado é diferente das considerações de Arraut *et al.*^[115], que não apresentam uma temperatura máxima durante a evaporação, exceto quando o buraco negro está muito próximo da massa de Planck. Além disso, temos um processo de evaporação fundamentalmente diferente do que consideramos antes no capítulo 2, em que a presença de um fluido escuro com equação de estado $w = -1$ não faz diferença na evolução do buraco negro e independe da sua massa inicial.

Outra consequência é que a taxa de evaporação (4.23) não se reduz à predição do GUP convencional (4.8) quando fazemos $\Lambda \rightarrow 0$. Isso pode ser interpretado como uma consequência do fato de que não há um homeomorfismo entre o grupo de Poincaré e o grupo de de Sitter, o que significa que não podemos esperar as mesmas propriedades de um sistema regido por simetrias diferentes^[116;117]. Essas implicações devem ser objeto de estudos futuros.

Capítulo 5

Acreção não estática e *back-reaction*

“I can’t change the laws of Physics!”

– Mr. Scott, *Star Trek*

A análise da interação dos buracos negros com o meio feita até aqui, apesar de todas as correções por efeitos relativísticos, ou mesmo das deduções mais rigorosas, está invariavelmente sujeita a uma forte aproximação: a suposição de que o fluido acretado seja um fluido teste, ou seja, que não contribua para o campo gravitacional. O único responsável pelo campo gravitacional é o objeto central em todas as abordagens que utilizamos.

Esse tipo de aproximação é frequentemente útil e, na maioria dos casos fornece uma descrição suficientemente precisa para os problemas em que é aplicado. Porém, há indícios de que uma aproximação de fluido teste possa levar a resultados imprecisos, ou que necessitariam de outros fatores externos para reproduzirem as observações¹.

Neste capítulo, buscamos escrever uma equação para a massa de um buraco negro em um cenário de acreção com a chamada *back-reaction*, ou seja, um buraco negro sujeito à acreção de um fluido autogravitante, que participa da geração do campo gravitacional e cujas mudanças na densidade e pressão introduzidas pelo buraco negro alteram de volta a métrica ao redor. Em particular, buscamos uma generalização dos resultados apresentados no capítulo 2 para a dependência da massa do buraco negro central com o tempo, em termos da densidade e da pressão do fluido, de acordo com os modelos de energia escura que estudamos.

¹Um exemplo é a discussão sobre a curva de rotação das galáxias e a necessidade da matéria escura quando um modelo relativístico para o disco é levado em conta^[118;119].

5.1 Métricas dependentes do tempo

O problema da acreção com *back-reaction* envolve a solução completa das equações de Einstein para um espaço-tempo preenchido por um fluido cujo tensor de energia-momento produza a métrica, que depois deve ser interpretada fisicamente. No entanto, não partimos de uma hipótese completamente livre para a métrica. As suposições de que partimos inicialmente são as seguintes.

- O tensor de energia-momento que utilizamos tem a forma de um fluido perfeito (2.28), com equação de estado dada por (2.1) com w constante.

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}. \quad (2.28)$$

- A métrica é esfericamente simétrica, o que fisicamente deve corresponder a um fluxo radial de matéria na direção do objeto central. Em termos do tensor de energia-momento, escolhemos um fluido cuja quadrivelocidade apresente apenas componentes nas direções temporal e radial

$$u^\mu = (u^0, u^1, 0, 0). \quad (5.1)$$

- Exigimos que a métrica possua um objeto central que possa ser interpretado como um buraco negro, pela presença de uma singularidade na origem de coordenadas e um horizonte de eventos que separe o espaço-tempo em regiões desconectadas causalmente.

Para buscar soluções para esse problema, utilizamos algumas métricas de buraco negro que possuem parâmetros livres como *Ansätze*. Através de alterações nos parâmetros das soluções, buscamos um conjunto de equações de Einstein autoconsistentes, que nos permitam isolar um termo proporcional à variação da massa central \dot{m} .

A forma específica das equações de Einstein neste problema é

$$G^{\mu\nu} = 8\pi\rho [(1+w)u^\mu u^\nu - wg^{\mu\nu}]. \quad (5.2)$$

Em geral, estamos interessados em um fluido que apresente pressão não nula, ou seja, $w \neq 0$. Com um tensor de energia-momento da forma (2.28) do lado direito das equações de Einstein (5.2), isso significa que deve haver um termo proporcional à métrica no tensor de Einstein do *Ansatz* que pretendemos analisar.

5.2 A métrica de Vaidya

O caso mais simples de métrica esfericamente simétrica dependente do tempo é a solução de Vaidya^[120], originalmente obtida para descrever o espaço-tempo ao redor de uma estrela radiante.

Em coordenadas de curvatura, a forma mais geral da métrica de Vaidya depende de duas funções arbitrárias $m(r, t)$ e $f(m)$, e corresponde ao elemento de linha dado por

$$ds^2 = \frac{\dot{m}^2}{f^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (5.3)$$

em que f satisfaz a seguinte relação

$$m' \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = f(m). \quad (5.4)$$

Podemos reescrever a métrica (5.3) sem a função f fazendo suposições sobre as condições de contorno e escolhendo um sistema de coordenadas conveniente. Supondo o espaço-tempo assintoticamente plano, e utilizando coordenadas avançadas² de Eddington–Finkelstein, podemos reescrever a métrica (5.3) como^[121]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m(v)}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\Omega^2. \quad (5.5)$$

em que $m(v)$ é uma função arbitrária do tempo avançado.

O tensor de Einstein para essa métrica é identicamente nulo, exceto pela componente

$$G_{00} = -\frac{2}{r^2} \frac{\partial m(v)}{\partial v}. \quad (5.6)$$

O tensor de energia-momento utilizado para a solução corresponde a um campo eletromagnético sem fontes^[120]

$$T^{\mu\nu} = \rho k^\mu k^\nu \quad (5.7)$$

em que k^μ é um vetor nulo, ou seja,

$$k^\mu k_\mu = 0 \quad (5.8)$$

o que corresponde à quadrivelocidade da radiação que é emitida pelo objeto central na direção radial.

²Essas coordenadas com essa combinação de sinais são também chamadas de *ingoing*.

É possível encontrar soluções analíticas para uma região esférica finita de matéria em colapso na direção do objeto central, com a condição de contorno de vácuo, através de modificações do elemento de linha (5.5)^[122]. No nosso caso, buscamos soluções de aplicação cosmológica, em que o fluido esteja presente em toda parte.

Podemos observar pelo tensor de Einstein (5.6) e pelo tensor de energia-momento (5.7) que um fluido com pressão não é consistente com a solução (5.5). A seguir, analisamos variações conhecidas da solução de Vaidya e a sua aplicabilidade ao problema.

5.2.1 A métrica de Bonnor–Vaidya

Uma possibilidade de modificação da métrica de Vaidya (5.5) é a chamada métrica de Bonnor–Vaidya, originalmente encontrada como solução das equações de Einstein para uma classe de tensores de Einstein esfericamente simétricos^[123], e mais tarde interpretada^[124] como solução das equações de Einstein–Maxwell para um objeto central esfericamente simétrico com carga elétrica emitindo um fluido nulo carregado. O elemento de linha é dado por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m(v)}{r} + \frac{h(v)}{r^2}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\Omega^2 \quad (5.9)$$

em que $h(v)$, em princípio uma função arbitrária, no caso das equações de Einstein acopladas às equações de Maxwell torna-se $h(v) = 4\pi [e(v)]^2$, em que e é a carga elétrica total do objeto central.

Se retirarmos a condição de que o sistema satisfaça às equações de Maxwell, podemos deixar a função $h(v)$ livre para assumir qualquer valor. Dessa forma, o tensor de Einstein tem as seguintes componentes.

$$G_0^0 = G_1^1 = -\frac{h(v)}{r^4} \quad (5.10)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = \frac{h(v)}{r^4} \quad (5.11)$$

$$G_0^1 = \frac{2}{r^2} \dot{m} - \frac{1}{r^3} \dot{h}. \quad (5.12)$$

As demais componentes são zero.

Supomos o espaço ao redor preenchido por um fluido perfeito. Escrevemos o tensor de energia-momento (2.28) de um tal fluido na forma mista

$$T_\mu^{\nu} = \rho [(1 + w)u_\mu u^\nu - w\delta_\mu^\nu]. \quad (5.13)$$

As equações de Einstein na presença de um fluido com tensor de energia-momento dado por (5.13) são, então

$$G_0^0 = -\frac{h}{r^4} = 8\pi\rho \left\{ (1+w) \left[\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{h}{r^2}\right) (u^0)^2 - u^0 u^1 \right] - w \right\} \quad (5.14)$$

$$G_0^1 = \frac{2}{r^2} \dot{m} - \frac{1}{r^3} \dot{h} = 8\pi\rho(1+w) \left[\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{h}{r^2}\right) u^0 u^1 - (u^1)^2 \right] \quad (5.15)$$

$$G_1^0 = 0 = -8\pi(1+w)(u^0)^2 \quad (5.16)$$

$$G_1^1 = -\frac{h}{r^4} = -8\pi\rho [(1+w)u^0 u^1 + w] \quad (5.17)$$

$$G_2^2 = \frac{h}{r^4} = -8\pi\rho w. \quad (5.18)$$

As equações (5.16), (5.17) e (5.18) revelam uma inconsistência na hipótese de fluido perfeito, pois exigiriam simultaneamente $u^0 = 0$ e $u^0 u^1 = -\frac{2w}{1+w}$. Isso significa que a métrica (5.9) não é um *Ansatz* adequado à análise da acreção de um fluido perfeito.

5.3 Condições de contorno cosmológicas

“*Oh gravity, thou art a heartless bitch.*”

– Sheldon, *The Big Bang Theory*

Os elementos de linha estudados na seção 5.2 têm em comum a propriedade de que representam espaços-tempo assintoticamente planos. No entanto, para considerarmos o problema da acreção de um fluido presente em todo o espaço, devemos levar em conta que as condições de contorno não devem ser necessariamente as de um espaço vazio. Na verdade, espera-se que a presença do fluido até o infinito traga consequências locais para o buraco negro central, como é o caso das métricas de Schwarzschild–de Sitter e McVittie em vários estudos.

A seguir, investigamos algumas das soluções de buracos negros imersos em espaços-tempo com condições de contorno cosmológicas, ou seja, assintoticamente homogêneos e isotrópicos. Obviamente, essas condições são violadas quando nos aproximamos do buraco negro, o que estudamos mais a fundo na seção 5.4 na métrica de McVittie e suas generalizações.

5.3.1 A métrica de Vaidya–de Sitter

Uma solução exata das equações de Einstein para um buraco negro emitindo radiação na presença de uma constante cosmológica é a chamada métrica de

Vaidya–de Sitter, ou Vaidya–Schwarzschild–de Sitter^[125]. Podemos obtê-la a partir da forma geral (5.3) supondo o espaço-tempo assintoticamente de Sitter. A solução é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m(v)}{r} - \alpha(v)r^2\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\Omega^2. \quad (5.19)$$

A constante α está relacionada com a constante cosmológica da mesma forma que na métrica de Schwarzschild–de Sitter.

Uma possibilidade de generalização dessa métrica consiste em supor α como uma quantidade dependente do tempo avançado v . Assim, o elemento de linha (5.19) modificado é dado por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m(v)}{r} - \alpha(v)r^2\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\Omega^2. \quad (5.20)$$

O tensor misto de Einstein da métrica modificada (5.20) é então

$$G_\mu{}^\nu = \begin{cases} -3\alpha(v) & \mu = \nu \\ \frac{2\dot{m}}{r^2} + \dot{\alpha}r & \mu = 0, \nu = 1 \\ 0 & \text{de outra forma.} \end{cases} \quad (5.21)$$

Escrevendo o tensor de energia-momento (2.28) na forma mista (5.13) e, escrevendo as componentes covariantes da quadrivelocidade em função das componentes contravariantes e dos termos da métrica, podemos ver que as equações de Einstein proíbem a variação de α com o tempo. Em particular, as equações

$$G_1{}^0 = 0 = -8\pi\rho(1+w)(u^0)^2 \quad (5.22)$$

$$G_1{}^1 = -3\alpha = -8\pi\rho[(1+w)u^0u^1 + w] \quad (5.23)$$

$$G_0{}^1 = \frac{2\dot{m}}{r^2} + \dot{\alpha}r = 8\pi\rho(1+w) \left[\left(1 - \frac{2m}{r} - \alpha r^2\right) u^0u^1 - (u^1)^2 \right] \quad (5.24)$$

exigem, por consistência, $w = -1$ e $\dot{m} = \dot{\alpha} = 0$, além de fixar o valor de $\alpha = -\frac{8\pi\rho}{3} \equiv \frac{\Lambda}{3}$, em que Λ é a constante cosmológica³. Ou seja, a única solução consistente de (5.20) com um tensor de energia-momento do tipo (2.28) é a métrica de Vaidya–de Sitter (5.19).

5.3.2 A métrica de Bonnor–Vaidya–de Sitter

A solução das equações de Einstein–Maxwell para uma partícula carregada radiante imersa em um Universo de de Sitter^[126] é conhecida na literatura como métrica de Bonnor–Vaidya–de Sitter, ou Vaidya–Bonnor–de Sitter.

³Seguindo a notação da seção 2.6.1, $\rho_\Lambda \equiv 8\pi\Lambda$.

Fazendo a mesma generalização que na seção 5.3.1, escrevemos o elemento de linha como uma combinação das funções $h(v)$ e $\alpha(v)$ introduzidas em (5.9) e (5.19), assumindo a forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m(v)}{r} + \frac{h(v)}{r^2} - \alpha(v)r^2\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\Omega^2. \quad (5.25)$$

O tensor de Einstein tem as seguintes componentes

$$G_{\mu}^{\nu} = \begin{cases} -\frac{h}{r^4} - 3\alpha & \mu = \nu = 0, 1 \\ \frac{h}{r^4} - 3\alpha & \mu = \nu = 2, 3 \\ \frac{2}{r^2}\dot{m} - \frac{1}{r^3}\dot{h} + r\dot{\alpha} & \mu = 0, \nu = 1 \\ 0 & \text{de outra forma.} \end{cases} \quad (5.26)$$

Na presença de um fluido com tensor de energia-momento (5.13), as equações de Einstein são

$$G_0^0 = -\frac{h}{r^4} - 3\alpha = 8\pi\rho \left\{ (1+w) \left[\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{h}{r^2} - \alpha r^2\right) (u^0)^2 - u^0 u^1 \right] - w \right\} \quad (5.27)$$

$$G_0^1 = \frac{2}{r^2}\dot{m} - \frac{1}{r^3}\dot{h} + r\dot{\alpha} = 8\pi\rho(1+w) \left[\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{h}{r^2} - \alpha r^2\right) u^0 u^1 - (u^1)^2 \right] \quad (5.28)$$

$$G_1^0 = 0 = -8\pi\rho(1+w)(u^0)^2 \quad (5.29)$$

$$G_1^1 = -\frac{h}{r^4} - 3\alpha = -8\pi\rho [(1+w)u^0 u^1 + w] \quad (5.30)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = \frac{h}{r^4} - 3\alpha = -8\pi\rho w. \quad (5.31)$$

Novamente as equações impedem qualquer solução diferente da assintoticamente de Sitter: a equação (5.29) força $w = -1$, e somando-se as equações (5.30) e (5.31) encontramos o mesmo valor de α fixo da métrica de Vaidya-de Sitter $\alpha \equiv \Lambda/3$.

Concluimos portanto que nenhuma solução esfericamente simétrica conhecida que descreva um fluxo radial de um fluido nulo na direção de um buraco negro, seja em um espaço-tempo assintoticamente plano ou em um espaço-tempo assintoticamente de Sitter é adequada para a formulação do problema com as condições que estabelecemos no início da seção 5.1. Na próxima seção, nos concentramos em uma métrica mais geral para tratar o problema.

5.4 A métrica de McVittie

As métricas consideradas na seção 5.3 foram construídas partindo da suposição inicial de que o Universo é assintoticamente de Sitter, e através de uma tentativa de relaxar essa suposição sem modificar a apresentação da métrica. Para termos acesso a uma classe mais geral de soluções, e, portanto, ter maior liberdade na escolha do tensor de energia-momento do material que deve preencher o espaço, devemos abandonar essa hipótese e encontrar soluções das equações de Einstein com condições de contorno cosmológicas genéricas.

Localmente, esperamos que a métrica seja semelhante à produzida por um objeto central no vácuo. Começamos portanto escrevendo a métrica de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{m}{2r}}{1 + \frac{m}{2r}} \right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{m}{2r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (5.32)$$

Exigimos que o espaço tenha assintoticamente a forma de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker no infinito

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (5.33)$$

Sob suposições cosmológicas, como homogeneidade e isotropia, a métrica mais geral que pode ser escrita é, em coordenadas cósmicas,

$$ds^2 = e^{\zeta(r,t)} dt^2 - e^{\nu(r,t)} (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (5.34)$$

Supondo o espaço-tempo preenchido por um fluido perfeito comóvel, ou seja, com tensor de energia-momento dado por (2.4), sem fluxo de matéria na direção radial, a solução das equações de Einstein para a métrica (5.34) com condição de contorno (5.33) é a chamada métrica de McVittie^[127]

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m_H}{2a(t)r} \right)^2}{\left(1 + \frac{m_H}{2a(t)r} \right)^2} dt^2 - a^2(t) \left(1 + \frac{m_H}{2a(t)r} \right)^4 (dr^2 + d\Omega^2) \quad (5.35)$$

com m_H constante. A quantidade fisicamente associada à massa é m_H , a massa quase-local de Hawking–Hayward, que independe das coordenadas, embora o análogo ao parâmetro da métrica que corresponde à massa na métrica de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas seja $m_H/a(t)$. As suposições envolvidas na obtenção original da métrica de McVittie também restringem o fluido de fundo à condição $\rho = \rho(r)$ ^[128].

5.4.1 Generalizações da métrica de McVittie

Uma generalização possível para a métrica de McVittie consiste em tomar m_H dependente do tempo. Assim, escrevemos a métrica (5.35) como^[52]

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m(t)}{2a(t)r}\right)^2}{\left(1 + \frac{m(t)}{2a(t)r}\right)^2} dt^2 - a^2(t) \left(1 + \frac{m(t)}{2a(t)r}\right)^4 (dr^2 + d\Omega^2). \quad (5.36)$$

Para essa métrica, os termos não nulos do tensor de Einstein misto são

$$G_0^0 = -\frac{3}{a^2 \left(1 - \frac{m}{2ar}\right)^2} \left[\dot{a} \left(1 - \frac{m}{2ar}\right) + \frac{\dot{m}}{r} \right]^2 \quad (5.37)$$

$$G_0^1 = \frac{4}{a^3 r^2} \frac{\dot{m}}{\left(1 + \frac{m}{2ar}\right)^5 \left(1 - \frac{m}{2ar}\right)} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 = & \\ = -\frac{1}{a^2 r \left(1 - \frac{m}{2ar}\right)} & \left\{ 2a \left(1 + \frac{m}{2ar}\right) \left[r\ddot{a} + \frac{\dot{m}}{1 - \frac{m}{2ar}} \right] + \right. \\ & \left. + \left[r \left(1 - \frac{m}{2ar}\right) - \frac{2m}{a} \right] \dot{a}^2 + 2 \left[2 - \frac{m \left(1 - \frac{m}{2ar} - 2\right)}{2ar \left(1 - \frac{m}{2ar}\right)^2} \right] \dot{a}\dot{m} \right\}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Se supusermos um fluido perfeito

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \quad (2.28)$$

então a equação (5.39) força sobre o fluido (2.28) a condição $p = -\rho$, o que reduz a métrica (5.36) à métrica de Schwarzschild–de Sitter^[52].

Na presença de um fluido imperfeito com o termo de transporte de calor não nulo, a métrica (5.36) admite uma equação de estado mais livre para a pressão^[52], embora pareça haver uma confusão na literatura no que se refere ao sinal das equações de Einstein, o que leva Gao, Faraoni *et al.* a conclusões contraditórias na análise de acreção de um fluido *phantom* modelado dessa forma^[52;129].

Podemos supor a presença de dois fluidos perfeitos não interagentes. Sultana e Dyer^[51] demonstraram a existência de uma solução analítica para a métrica (5.36) ao impor $m(t)/a(t)$ constante na presença de dois fluidos perfeitos sem pressão. A solução obtida corresponde a um buraco negro imerso em um Universo de Einstein–de Sitter.

Estudamos agora o comportamento da métrica (5.36) na presença de dois fluidos não interagentes: um fluido nulo com pressão e um segundo fluido massivo sem pressão (poeira), o que nos dá o tensor de energia-momento

$$T^{\mu\nu} = (\rho_1 + p_1)k^\mu k^\nu - p_1 g^{\mu\nu} + \rho_2 u^\mu u^\nu \quad (5.40)$$

com as quadrivelocidades, orientadas radialmente devido à simetria esférica, podendo ser escritas como $k^\mu = (k^0, k^1, 0, 0)$ e $u^\mu = (u^0, u^1, 0, 0)$, o que corresponde a um fluxo radial de matéria.

As equações de Einstein correspondentes aos termos de (5.39) para o tensor de energia-momento (5.40) implicam a condição $T_1^1 = T_2^2$, que resulta em

$$(\rho_1 + p_1)(k^1)^2 + \rho_2(u^1)^2 = 0. \quad (5.41)$$

Supondo positivas ambas as densidades de energia para os fluidos, a equação (5.41) força uma equação de estado supernegativa $p < -\rho$ (*phantom*) sobre o fluido nulo.

Seguindo a suposição feita no capítulo 2 de que o fluido *phantom* é ultrarrelativístico, e supondo que o segundo fluido é matéria escura fria, restringimos as quadrivelocidades às condições $k^\alpha k_\alpha = 0$ e $u^\alpha u_\alpha = 1$. Os vínculos sobre as componentes não nulas das quadrivelocidades dos fluidos são, então

$$k^1 = \pm \frac{(1 - \frac{m}{2ar})}{a(1 + \frac{m}{2ar})^3} k^0 \quad (5.42)$$

$$u^1 = \pm \frac{1}{a(1 + \frac{m}{2ar})^3} \sqrt{(u^0)^2 \left(1 - \frac{m}{2ar}\right)^2 - \left(1 + \frac{m}{2ar}\right)^2}. \quad (5.43)$$

A escolha do sinal negativo em (5.42) e (5.43) corresponde a um fluxo de material orientado na direção do centro.

A equação de Einstein para o termo (5.38), utilizando as condições de normalização (5.42) e (5.43) e escolhendo o sinal negativo, fica escrita como

$$\begin{aligned} \dot{m} = -4\pi \left(1 - \frac{m}{2ar}\right)^3 a^2 r^2 \left[(\rho_1 + p_1) \left(1 - \frac{m}{2ar}\right) (k^0)^2 + \right. \\ \left. + \rho_2 u^0 \sqrt{(u^0)^2 \left(1 - \frac{m}{2ar}\right)^2 - \left(1 + \frac{m}{2ar}\right)^2} \right]. \quad (5.44) \end{aligned}$$

Substituindo u^0 através da equação (5.41), reescrevemos (5.44) como

$$\dot{m} = -4\pi \left(1 - \frac{m}{2ar}\right) a^2 r^2 \left[(\rho_1 + p_1) (k^0)^2 + \rho_2 \sqrt{(k^0)^4 \frac{(\rho_1 + p_1)^2}{\rho_2^2} - \frac{\left(1 + \frac{m}{2ar}\right)^2}{\left(1 - \frac{m}{2ar}\right)^2} (k^0)^2 \frac{(\rho_1 + p_1)}{\rho_2}} \right]. \quad (5.45)$$

Para podermos comparar essa expressão da variação da massa com a obtida para o caso do fluido-teste no capítulo 2, escrevemos (5.45) em termos de uma superfície esférica S de transferência de material de área dada por

$$\mathcal{A} = \iint_S \sqrt{g_{22}g_{33}} d\theta d\phi \Big|_{r=\frac{m}{2a}}. \quad (5.46)$$

Na métrica (5.36), a área do horizonte de eventos é, portanto,

$$\mathcal{A} = 4\pi a^2 r^2 \left(1 + \frac{m}{2ar}\right)^4. \quad (5.47)$$

Escrevendo (5.45) em termos da área (5.47), temos

$$\dot{m} = -\mathcal{A} \left(\frac{1 - \frac{m}{2ar}}{1 + \frac{m}{2ar}}\right)^4 \left[(\rho_1 + p_1) (k^0)^2 + \rho_2 \sqrt{(k^0)^4 \frac{(\rho_1 + p_1)^2}{\rho_2^2} - \frac{\left(1 + \frac{m}{2ar}\right)^2}{\left(1 - \frac{m}{2ar}\right)^2} (k^0)^2 \frac{(\rho_1 + p_1)}{\rho_2}} \right]. \quad (5.48)$$

Se fizéssemos a suposição de que $\dot{m} = \mathcal{A} T_0^1$, como no capítulo 2, o resultado seria

$$\dot{m}_B = -\mathcal{A} \frac{\left(1 - \frac{m}{2ar}\right)^3}{a \left(1 + \frac{m}{2ar}\right)^5} \left[(\rho_1 + p_1) (k^0)^2 + \rho_2 \sqrt{(k^0)^4 \frac{(\rho_1 + p_1)^2}{\rho_2^2} - \frac{\left(1 + \frac{m}{2ar}\right)^2}{\left(1 - \frac{m}{2ar}\right)^2} (k^0)^2 \frac{(\rho_1 + p_1)}{\rho_2}} \right]. \quad (5.49)$$

Assim, uma vez conhecido o comportamento dos fluidos no espaço, podemos ter um meio de comparação entre as duas descrições do problema.

A pressão do fluido nulo é dada pela equação de campo correspondente ao elemento G_2^2 em (5.39)

$$8\pi p_1 = \frac{1}{a^2 r \left(1 - \frac{m}{2ar}\right)} \left\{ 2a \left(1 + \frac{m}{2ar}\right) \left[r\ddot{a} + \frac{\dot{m}}{1 - \frac{m}{2ar}} \right] + \left[r \left(1 - \frac{m}{2ar}\right) - \frac{2m}{a} \right] \dot{a}^2 + 2 \left[2 - \frac{m \left(1 - \frac{m}{2ar} - 2\right)}{2ar \left(1 - \frac{m}{2ar}\right)^2} \right] \dot{a}\dot{m} \right\}. \quad (5.50)$$

Tomando o limite para $r \rightarrow \infty$, a equação fica

$$8\pi p_1 = 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2. \quad (5.51)$$

Utilizando o modelo de energia *phantom* a partir de um potencial escalar para o fluido nulo, ou seja, $p = w\rho$ com $w < -1$, o limite $r \rightarrow \infty$ fornece a solução para $a(t)$ em épocas posteriores à era da matéria ($t > t_m$), dominadas pela energia escura. A solução é^[56]

$$a(t) = a(t_m) [-w + (1+w)t/t_m]^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (5.52)$$

As condições de contorno para os fluidos também podem ser calculadas a partir do limite $r \rightarrow \infty$ na equação de Einstein para G_0^0 de (5.37).

$$\lim_{r \rightarrow \infty} G_0^0 = -3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2. \quad (5.53)$$

Tomamos os limites para a quadrivelocidade dos fluidos como

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u^0 = \pm \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} = 1 \quad (\text{sinal positivo aponta para o futuro}) \quad (5.54)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} k^1 = \pm \frac{k^0}{a} = \frac{1}{a} \quad (\text{se tomarmos } k^0 = 1). \quad (5.55)$$

Assim, no limite temos

$$-3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi [(\rho_1 + p_1) - p_1 + \rho_2]. \quad (5.56)$$

Temos portanto um sistema geral em que a massa do buraco negro varia segundo (5.45) sob as condições de contorno (5.52) e (5.56). Podemos analisar alguns casos limite desse sistema, para situações em que uma das duas componentes de matéria domina o meio na equação (5.45).

No caso em que a energia *phantom* é desprezível e a matéria escura domina, o sistema apresenta uma diminuição na massa do buraco negro, o que é consistente com a solução de Sultana–Dyer para um Universo de Einstein–de Sitter. No caso em que a energia *phantom* é dominante, e a matéria escura é desprezível, o sistema apresenta um aumento na massa do buraco negro. Esse resultado, embora contraditório aos resultados apresentados nos capítulos anteriores, é consistente com algumas análises de acreção com *back-reaction* sob suposições diferentes sobre a energia *phantom*^[129].

No caso geral, esse sistema pode ser analisado futuramente por meio de tratamentos numéricos^[130], com diferentes hipóteses sobre o fluido e o fluxo de matéria, bem como outras hipóteses simplificadoras que não discutimos neste trabalho.

Capítulo 6

Conclusões

“Don’t panic.”

– Douglas Adams, *The Hitchhiker’s Guide to the Galaxy*

Estudamos a interação de um buraco negro esfericamente simétrico com diversos tipos de matéria e energia em várias épocas da evolução do Universo e sob diferentes regimes de expansão. Os aspectos principalmente tratados foram a acreção de matéria, radiação e energia escura e a evaporação de Hawking.

Inicialmente, no capítulo 1, revisamos algumas propriedades básicas de buracos negros e descrevemos os modelos tradicionais de acreção de matéria e radiação, e de evaporação de Hawking. A acreção de radiação compete com a evaporação de Hawking por meio de uma massa crítica que estabelece uma fronteira entre os dois regimes e que depende da densidade de energia do banho de radiação.

No capítulo 2, tratamos a acreção de um fluido-teste sobre uma métrica de vácuo contendo um buraco negro. Utilizamos como modelo para o fluido um campo escalar com o termo de energia cinética modificado (K-essência). Calculamos a variação na massa do buraco negro através das propriedades geométricas do tensor de energia-momento, o que nos permitiu associar a variação na massa diretamente às componentes do tensor de energia-momento. Acoplando esse modelo às equações relativísticas de conservação do fluido, seguindo o modelo elaborado por Babichev *et al.*^[68], conseguimos uma descrição da acreção diferente do modelo de Bondi–Hoyle discutido no capítulo 1, que não exige que consideremos apenas a parte cinética do campo escalar na variação da massa. Essa propriedade do modelo de acreção de Babichev de fluidos escalares constitui um resultado novo^[131] cujas propriedades até então não eram bem compreendidas na literatura.

Associando a acreção de energia *phantom* às interações com radiação já conhecidas, e descritas no capítulo 1, elaboramos um quadro completo da evolução de buracos negros nas eras da radiação, matéria e energia escura. Em épocas anteriores à equivalência dos termos de acreção de radiação e energia *phantom*, os

buracos negros se comportam como se não houvesse energia escura. Nas épocas posteriores, a acreção *phantom* domina até a transição para a dominação da evaporação de Hawking. Esses resultados foram publicados^[73] e apresentados em congressos internacionais^[132;133;134;135]. A evolução cosmológica do fluido de fundo também pode ser inserida nas equações, o que acopla a evolução do buraco negro à cosmologia. Conseguimos resultados analíticos novos no modelo Λ CDM^[75] e numéricos no modelo de um gás de Chaplygin^[82].

Prosseguimos com a análise do ponto de vista termodinâmico no capítulo 3, em que, após brevemente recordarmos as leis da Termodinâmica de buracos negros e a sua procedência, estabelecemos regiões de validade para os resultados do capítulo 2. Mostramos que podemos, usando apenas argumentos termodinâmicos, recuperar a massa crítica de acreção de radiação e escrever fronteiras similares para a acreção de energia escura. Descobrimos a propriedade nova^[104] de que, para massas maiores que a massa crítica, a acreção é proibida pela segunda lei generalizada, tanto no caso de temperatura negativa quanto para um potencial químico negativo.

No capítulo 4, mudamos o ponto de vista da descrição física, utilizando modelos quânticos para obter as propriedades termodinâmicas dos buracos negros cujas massas são muito pequenas para que a evaporação de Hawking como é descrita no capítulo 1 valha. Inserindo termos de origem relativística na relação de incerteza, podemos obter heurísticamente a evaporação de Hawking modificada para levar em conta os efeitos quânticos da gravitação em uma primeira aproximação. Concluimos que a presença da constante cosmológica afeta o regime de evaporação, não só para buracos negros com massa próxima à massa de Planck, quanto também para buracos negros grandes, de raio comparável ao raio do horizonte. Essa primeira abordagem para os efeitos locais da cosmologia sobre um buraco negro rendeu os resultados novos descritos na seção 4.4^[136].

Por fim, no capítulo 5, apresentamos uma análise preliminar da acreção de fluidos perfeitos com *back-reaction*, ou retroação^[137], em que os efeitos da autogravitação do fluido são levados em conta para o cálculo da variação na massa do buraco negro. Através de uma análise exaustiva da métrica de Vaidya e suas variantes, não encontramos um meio de descrever um buraco negro em meio a uma solução cosmológica geral usando-as como *Ansätze*. Pela análise de uma generalização da métrica de McVittie proposta por Faraoni *et al.*^[52], escrevemos as equações que regem a acreção de dois fluidos perfeitos autogravitantes apenas a partir das equações de campo.

Muitos aspectos das análises mostradas neste trabalho ainda merecem ser explorados mais a fundo. O estudo termodinâmico no final da seção 3.3.2, comparado ao tratamento feito na seção 3.3.1 mostra que a Termodinâmica no contexto da Relatividade Geral não fornece uma única descrição possível para o fluido *phantom*. Como consequência, as propriedades termodinâmicas da matéria e

energia escuras ainda não são bem compreendidas, e não há uma formulação totalmente covariante para a variação de energia-momento da energia escura para substituir a expressão (3.25), que resulta de um tratamento clássico.

A estrutura e a autoconsistência das equações de acreção na seção 5.4.1 ainda não foram totalmente determinadas, o que pode significar a restrição a alguns modelos de fluido ou a necessidade de hipóteses adicionais sobre o sistema. O tratamento feito no final do capítulo 2 apresenta uma primeira aproximação para a ligação entre a Cosmologia e a acreção local, mas contém os mesmos problemas da análise ingênua clássica do capítulo 1, como a possibilidade de divergência na massa do buraco negro em tempo finito. Dessa forma, os resultados da seção 2.6 valem apenas para variações lentas na densidade de fundo e na massa do buraco negro, assim como o tratamento no restante do capítulo 2.

A descrição completa da evolução de buracos negros depende, portanto, da existência de soluções para o sistema de equações no final da seção 5.4.1 e de um tratamento termodinâmico consistente e abrangente. Nos regimes de baixas massas, que tratamos apenas superficialmente no capítulo 4, só será possível compreendermos completamente o problema em posse de uma teoria quântica da gravitação.

“All our science, measured against reality, is primitive and child-like — and yet it is the most precious thing we have.”

– Albert Einstein

Apêndice A

Dedução da métrica de Schwarzschild–de Sitter

Uma abordagem preliminar para o estudo da acreção não estática do capítulo 5 envolve a solução das equações (2.25) e (2.26) acopladas às equações de Einstein para uma métrica genérica esfericamente simétrica, para alguns tipos particulares de fluido.

O caso de relevância para a cosmologia em que é possível encontrar uma solução analítica para esse sistema consiste em um fluido dado por (2.28), regido pela equação de estado (2.1) $p = w\rho$, no caso particular em que esse fluido é a constante cosmológica, que tem $w = -1$. Assim, o tensor de energia-momento (2.28) é dado por

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = \rho g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.1})$$

O tensor métrico de onde partimos é aquele usado como base para todas as métricas esfericamente simétricas, como a solução de Vaidya e a de Schwarzschild.

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (\text{A.2})$$

com $\nu = \nu(r, t)$ e $\lambda = \lambda(r, t)$.

As equações de Einstein para esse fluido são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi\rho g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.3})$$

Os elementos não nulos do tensor de Einstein dessa métrica são dados por

$$G_{00} = -\frac{e^{\nu}(\lambda' r - 1 + e^{\lambda})}{r^2 e^{\lambda}} \quad (\text{A.4})$$

$$G_{01} = -\frac{\dot{\lambda}}{r} \quad (\text{A.5})$$

$$G_{11} = -\frac{v'r + 1 - e^\lambda}{r^2} \quad (\text{A.6})$$

$$G_{22} = \frac{1}{4} \frac{1}{e^{v+\lambda}} \left[r \left(2\lambda' e^v - 2v' e^v + 2r\ddot{\lambda} e^v - r(v')^2 e^v + \right. \right. \\ \left. \left. + r\dot{\lambda}^2 e^\lambda - 2rv'' e^v + rv' e^v \lambda' - r\dot{v}\dot{\lambda} e^\lambda \right) \right] \quad (\text{A.7})$$

$$G_{33} = -\frac{1}{4} \frac{1}{e^{v+\lambda}} \left\{ r \left[e^\lambda \cos^2 \theta \left(2r\ddot{\lambda} - 2rv'' + r\dot{\lambda}^2 - r\dot{v}\dot{\lambda} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + e^v \cos^2 \theta \left(2\lambda' - 2v' - r(v')^2 + rv'\lambda' \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + e^v \left(2v' + r(v')^2 + 2rv'' - rv'\lambda' - 2\lambda' \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + e^\lambda \left(r\dot{v}\dot{\lambda} - 2r\ddot{\lambda} - r\dot{\lambda}^2 \right) \right] \right\}. \quad (\text{A.8})$$

Pela equação (A.1), constatamos que o elemento G_{01} de (A.5) é nulo. Assim, escrevendo as equações em termos do tensor de Einstein, podemos resolver o sistema apenas pelas equações em G_{00} (A.4) e G_{11} (A.6).

$$\frac{e^v (\lambda' - 1 + e^\lambda)}{r^2 e^\lambda} = Ae^v \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{-v'r + 1 - e^\lambda}{r^2} = -Ae^\lambda \quad (\text{A.10})$$

com $A = 8\pi\rho$.

Assim, a solução de (A.9) é

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - r^2 \frac{A}{3} + \frac{R_0}{r}} \quad (\text{A.11})$$

com R_0 uma constante arbitrária. A solução de (A.10) é

$$e^v = \frac{1}{e^\lambda}. \quad (\text{A.12})$$

Inserindo essa solução na métrica (A.2), e fazendo as devidas identificações com as constantes da solução de Schwarzschild (1.1), obtemos precisamente a métrica de Schwarzschild–de Sitter (4.9), ou seja, o resultado esperado^[2]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (4.9)$$

Apêndice B

Esboço das demonstrações de algumas leis da Termodinâmica de buracos negros

A seguir, apresentamos um esboço das demonstrações das leis da Termodinâmica de buracos negros, para os casos em que existem demonstrações suficientemente gerais.

Para as demonstrações completas e rigorosas, remetemos o leitor às referências mencionadas ao longo do texto, de onde extraímos as partes julgadas mais relevantes.

Lei 0. *A gravidade superficial κ de um buraco negro é constante sobre o horizonte de eventos.*

Demonstração. Seja ξ^μ um vetor de Killing, que satisfaz a equação de Killing (1.7)

$$(\xi^2)_{;\alpha} \xi^\alpha \equiv 2\xi_{\beta;\alpha} \xi^\beta \xi^\alpha = 0. \quad (1.7)$$

Um *horizonte de Killing* é definido como uma superfície nula¹ que é perpendicular ao campo ξ^μ . Em princípio, essa definição é independente da noção de horizonte de eventos, mas os dois conceitos estão intimamente relacionados. De fato, em uma métrica assintoticamente plana que contém um buraco negro e que é uma solução das equações de Einstein com matéria que satisfaz as condições de hiperbolicidade, o horizonte de eventos do buraco negro é um horizonte de Killing².

¹Uma superfície é chamada *nula* se o vetor normal é tipo luz.

²Frolov & Novikov^[12], seção 6.3.1.

Lembremo-nos da definição da gravidade superficial (1.11) sobre o horizonte de Killing H feita na seção 1.1.3.

$$\xi^\alpha{}_{;\beta} \xi^\beta \stackrel{H}{=} \kappa \xi^\alpha. \quad (1.11)$$

Utilizando (1.7), a reescrevemos como^[12]

$$\kappa^2 \stackrel{H}{=} -\frac{1}{2} \xi_{\alpha;\beta} \xi^{\alpha;\beta}. \quad (B.1)$$

Podemos definir a trajetória de Killing $\xi^\mu(x)$ como sendo a curva integrada de um vetor de Killing sobre um parâmetro afim v

$$\frac{dx^\mu}{dv} = \xi^\mu(x). \quad (B.2)$$

A equação (1.11) mostra que os parâmetros v e V não coincidem sobre o horizonte de eventos. Substituindo (B.2) em (1.11) com o parâmetro da trajetória de Killing v do lado esquerdo e o parâmetro dos geradores do horizonte de Killing do lado direito, temos

$$V = e^{\kappa v}. \quad (B.3)$$

Escolhendo $V = 1$ para $v = 0$ e $V = 0$ para $v = -\infty$ para eliminarmos a ambiguidade na escolha do parâmetro afim, a equação (1.11) fica

$$\xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial v} = \kappa V \frac{\partial}{\partial V}. \quad (B.4)$$

Se o horizonte H é geodesicamente completo, ou seja, se puder ser representado por (B.2) em termos de um parâmetro afim V , com $-\infty < V < \infty$, então, se $\kappa \neq 0$, para todo valor dos parâmetros existe um ponto em que $\xi^\mu = 0$. O conjunto desses pontos forma uma superfície tipo espaço³ S , chamada de *bifurcação* do horizonte de Killing.

Seja agora s^μ o vetor normal a essa superfície. Então, derivando a equação (B.1) em uma direção tangente a S e usando (1.10), temos

$$\kappa s^\alpha \kappa_{;\alpha} = -\frac{1}{2} s^\gamma \xi_{\beta;\alpha} \xi^{\beta;\alpha} = \frac{1}{2} s^\gamma R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta \xi_\delta \xi^{\beta;\alpha} = 0. \quad (B.5)$$

Assim, como sobre S vale $\xi^\mu = 0$, se $\kappa \neq 0$ então obrigatoriamente $\kappa_{;\alpha} = 0$ e o valor da gravidade superficial não pode mudar de um gerador para outro. Portanto, κ é *globalmente constante* sobre o horizonte de eventos H ^[12].

□

³Uma superfície é chamada *tipo espaço* se o vetor normal é tipo espaço.

A demonstração da lei 0 que utilizamos não faz uso das equações de Einstein, exceto na identificação do horizonte de eventos com o horizonte de Killing. Se abandonarmos a condição de que o horizonte H seja geodesicamente completo, ainda podemos demonstrar que κ é constante sobre H , mas a demonstração requer que o termo de matéria nas equações de Einstein satisfaça a condição de energia dominante^[86].

Lei 1. *Quaisquer dois estados vizinhos de equilíbrio de um buraco negro axialmente simétrico de massa m , gravidade superficial κ , velocidade angular ω e momento angular J estão relacionados por*

$$dm = \frac{\kappa}{8\pi} d\mathcal{A} + \omega dJ. \quad (3.1)$$

Demonstração. Para um buraco negro que é estático ou axialmente simétrico, em que existe o campo de Killing tipo tempo (a que chamamos t^μ) e o associado às rotações em torno do eixo de simetria (a que chamamos φ^μ), pode-se mostrar^[91] que existe um campo de Killing ξ^μ da forma

$$\xi^\mu = t^\mu + \omega\varphi^\mu \quad (B.6)$$

perpendicular ao horizonte de eventos H . A constante ω é chamada de *velocidade angular* do horizonte. Um buraco negro estático (como o de Schwarzschild) tem $\omega = 0$.

Supomos que as equações de campo sejam provenientes de uma Lagrangiana \mathcal{L} covariante por difeomorfismos, dependente da métrica, do tensor de curvatura e suas derivadas e da coleção de todos os campos de matéria ψ . Suprimindo os índices de ψ , a Lagrangiana tem a forma^[91]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\alpha\beta}, R_{\nu\alpha\beta\gamma;\mu}, \dots, \psi, \psi_{;\mu}, \dots). \quad (B.7)$$

Denotando por ϕ a coleção completa de campos $(g_{\mu\nu}, \psi)$, a variação na Lagrangiana pode ser escrita na forma

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{E}(\phi)\delta\phi - d\vartheta(\phi, \delta\phi) \quad (B.8)$$

em que $\mathcal{E} = 0$ corresponde às equações de Euler–Lagrange e $d\vartheta$ é desprezado nas manipulações integrais das equações de movimento como termo de superfície.

Devido à covariância de \mathcal{L} por difeomorfismos, há uma simetria local da teoria associada ao difeomorfismo infinitesimal gerado por um vetor arbitrário η^μ . Associada a essa simetria há uma corrente de Noether j , que sempre pode ser escrita como

$$j = dQ + \eta^\alpha C_\alpha \quad (\text{B.9})$$

em que Q é a carga de Noether associada a j e $C_\alpha = 0$ onde valerem as equações de movimento. Uma consequência das identidades variacionais relacionadas a j é que, se existir uma Hamiltoniana \mathcal{H} conjugada a η^μ , então ela deve satisfazer

$$\delta\mathcal{H} = \int_\Sigma d[\delta Q - \eta \cdot \vartheta] \quad (\text{B.10})$$

em que Σ corresponde à região em que valem as equações de movimento, $C_\alpha = 0$. Assim, \mathcal{H} nessa região é dada apenas por termos de superfície.

Escolhendo agora $\eta^\mu = \xi^\mu$, sobre uma solução das equações de campo ($\mathcal{E} = 0$) segue imediatamente que

$$d[\delta Q - \eta \cdot \vartheta] = 0. \quad (\text{B.11})$$

Aplicando essa equação a um espaço-tempo que contém um buraco negro com um horizonte de Killing bifurcado, em que S é a superfície de bifurcação, e integrando-a desde o horizonte, em que $\xi^\mu = 0$, pois vale a lei 0, até o infinito, o resultado é

$$\delta\mathcal{H} = \delta \int_S Q. \quad (\text{B.12})$$

Como agora a Hamiltoniana está associada a ξ^μ dado por (B.6), \mathcal{H} pode ser interpretada como a energia conjugada a ξ^μ , que pode ser escrita como^[138]

$$\delta\mathcal{H} = \delta m - \omega \delta J + \dots \quad (\text{B.13})$$

em que podemos adicionar contribuições por campos de matéria.

Por outro lado, também é possível calcularmos explicitamente o valor de Q , que na Relatividade Geral no vácuo resulta em^[139]

$$\delta \int_S Q = \frac{\kappa}{2\pi} \delta \left(\frac{\mathcal{A}}{4} \right). \quad (\text{B.14})$$

Combinando (B.13) e (B.14), chegamos finalmente à primeira lei da Termodinâmica

$$dm = \frac{\kappa}{8\pi} d\mathcal{A} + \omega dJ. \quad (\text{3.1})$$

□

Lei 2. A área \mathcal{A} do horizonte de eventos de um buraco negro não decresce com o tempo, ou seja

$$\Delta\mathcal{A} \geq 0. \quad (3.3)$$

Demonstração. Normalizando o vetor de Killing dado por (B.6) pela condição local $\xi_{\alpha;\beta}\xi^{\alpha;\beta} = -2$ em H , podemos reescrever a equação (B.14) como

$$\mathcal{A} = 8\pi \int_S Q[\xi^\mu]. \quad (B.15)$$

Podemos substituir S por uma seção transversal σ de H , sem prejuízo para a validade de (B.15)^[91].

Consideremos um processo em que o buraco negro evolui a partir de um estado inicial estacionário através de uma fase não estacionária até um estado final também estacionário. Se ξ^μ coincidir com o campo de Killing (B.6) nos dois estados estacionários, as equações (B.9) e (B.15) resultam em

$$\Delta\mathcal{A} = 8\pi \int_{\sigma_1} Q[\xi^\mu] - 8\pi \int_{\sigma_0} Q[\xi^\mu] = 8\pi \int_H j[\xi^\mu] \quad (B.16)$$

em que σ_0 e σ_1 correspondem a seções transversais de H nos estados inicial e final, respectivamente.

Assim, a variação na área do buraco negro é proporcional ao fluxo total da corrente de Noether conjugada a ξ^μ através de H . Em muitas circunstâncias, a corrente de Noether conjugada a uma translação temporal pode ser interpretada como a densidade de energia-momento. Ou seja, a lei 2 vale em todas as teorias que possuem propriedades de positividade de energia. Em particular, na Relatividade Geral, a segunda lei vale se o tensor de energia-momento da matéria presente no espaço-tempo satisfizer a condição de energia nula $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$ para um vetor nulo k^μ ^[91].

□

Apêndice C

Condições de energia

“Nothing unreal exists.”

– Kiri-kin-tha’s First Law of Metaphysics, *Star Trek*

A seguir apresentamos um resumo^[20;11] das condições de energia para um campo de energia-momento dado por

$$T^{\mu}_{\nu} = \text{diag}(-\rho, -p_r, -p_t, -p_t) \quad (\text{C.1})$$

em que as interpretações físicas de ρ , p_r e p_t são respectivamente a densidade de energia, a pressão radial e a pressão tangencial.

C.1 A condição de energia fraca

Seja um vetor tipo tempo u^{μ} . A desigualdade

$$T_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} \geq 0 \quad (\text{C.2})$$

para qualquer u^{μ} é conhecida como a *condição de energia fraca*. Ela garante que um observador tipo tempo meça sempre uma densidade positiva de energia, e é satisfeita se e somente se $\rho \geq 0$, $\rho + p_r \geq 0$ e $\rho + p_t \geq 0$.

Se o tensor de energia-momento for dado por (2.4), então devemos ter $\rho + p \geq 0$.

C.2 A condição de energia nula

Se substituirmos o vetor u^{μ} em (C.2) por um vetor nulo orientado na direção futura, então (C.2) é chamada de *condição de energia nula*, e para que ela seja satisfeita podemos abandonar a condição de que $\rho \geq 0$.

Note que a condição de energia fraca implica a condição de energia nula.

C.3 A condição de energia dominante

A condição de que $T^{\mu\nu}u_\nu$ seja um vetor não tipo espaço orientado para o futuro para todo vetor não tipo espaço u^μ é chamada de *condição de energia dominante*. Ela significa que a energia da matéria nunca pode viajar mais rápido que a luz, e é equivalente a dizer que $\rho \geq 0$, $\rho \geq |p_r|$ e $\rho \geq |p_t|$.

Se o tensor de energia-momento for dado por (2.4), então devemos ter $\rho \geq |p|$. Note que a condição de energia dominante implica a condição de energia fraca.

C.4 A condição de energia forte

A chamada condição de convergência tipo tempo, dada pela expressão

$$R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0 \quad (\text{C.3})$$

garante que, se não existir constante cosmológica, a gravidade é uma força essencialmente atrativa. Aplicando a equação de Einstein a (C.3), obtemos

$$R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 8\pi (T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T^\alpha_\alpha) u^\mu u^\nu. \quad (\text{C.4})$$

Assim, aplicando a desigualdade de (C.3) sobre o lado direito de (C.4), obtemos a chamada *condição de energia forte*

$$(T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T^\alpha_\alpha) u^\mu u^\nu \geq 0 \quad (\text{C.5})$$

que é equivalente a $\rho + p_r \geq 0$, $\rho + p_t \geq 0$ e $\rho + p_r + 2p_t \geq 0$.

Se o tensor de energia-momento for dado por (2.4), então devemos ter $\rho + p \geq 0$ e $\rho + 3p \geq 0$.

Note que a condição de energia forte implica a condição de energia nula, mas não implica a condição de energia fraca. Ela é “forte” no que significa que (C.5) corresponde a uma exigência física mais forte do que (C.2).

Referências Bibliográficas

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, New York (1970). xvii, 3, 24, 27
- [2] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*, volume 2 de *Course of Theoretical Physics*. Elsevier, 4ª edição (1975). xvii, 27, 28, 88
- [3] R. d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press, Oxford (1992). xvii, 3
- [4] C. Amsler, M. Doser, M. Antonelli, D. Asner, *et al.* Review of particle physics. *Physics Letters B* **667**(1) (2008). xvii, 33
- [5] R. M. Wald. The thermodynamics of black holes. *Living Reviews in Relativity* **4**(6) (2001). URL <http://www.livingreviews.org/lrr-2001-6>. 1
- [6] R. Schödel, T. Ott, R. Genzel, R. Hofmann, M. Lehnert, A. Eckart, N. Mouawad, T. Alexander, M. J. Reid, R. Lenzen, M. Hartung, F. Lacombe, D. Rouan, E. Gendron, G. Rousset, A.-M. Lagrange, W. Brandner, N. Ageorges, C. Lidman, A. F. M. Moorwood, J. Spyromilio, N. Hubin, K. M. Menten. A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way. *Nature* **419**:694–696 (2002). 1
- [7] J. R. Oppenheimer, H. Snyder. On continued gravitational contraction. *Physical Review* **56**:455–459 (1939). 2
- [8] S. N. Zhang, Y. Liu. The exact dynamical solution for two dust shells collapsing towards a black hole. In Chakrabarti e Majumdar^[140]. 2
- [9] K. Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to Einstein’s theory. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* **1**:189–196 (1916). <http://www.arxiv.org/abs/physics/9905030>. 2

- [10] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley & Sons (1972). 2, 3, 12, 13
- [11] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago (1984). 4, 95
- [12] V. P. Frolov, I. D. Novikov. *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*, volume 96 de *Fundamental Theories of Physics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1998). 4, 46, 47, 89, 90
- [13] S. W. Hawking. Gravitationally collapsed objects of very low mass. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **152**:75 (1971). 5
- [14] B. J. Carr, S. W. Hawking. Black holes in the early universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **168**:399–415 (1974). 5, 6, 40
- [15] M. Y. Khlopov. Primordial black holes. In J. A. de Freitas Pacheco (editor), *Recent Advances on the Physics of Compact Objects and Gravitational Waves*. Research Signpost (2007). <http://www.arxiv.org/abs/0801.0116>. 5, 7
- [16] A. S. Majumdar. Domination of black hole accretion in brane cosmology. *Physical Review Letters* **90**(031303) (2003). <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0208048>. 5
- [17] A. S. Majumdar, N. Mukherjee. Braneworld black holes in cosmology and astrophysics. *International Journal of Modern Physics D* **14**(7):1095–1129 (2005). <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0503473>. 5
- [18] B. J. Carr. Primordial black holes as a probe of cosmology and high energy physics. In *Quantum Gravity*, volume 0631/2003 de *Lecture Notes in Physics*, páginas 301–321. Springer, Berlin; Heidelberg (2003). <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0310838>. 5, 7
- [19] J. H. Jeans. The stability of a spherical nebula. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* **199**:1–53 (1902). URL <http://www.jstor.org/stable/90845>. 5
- [20] B. J. Carr, T. Harada, H. Maeda. Can a primordial black hole or wormhole grow as fast as the universe? *Classical and Quantum Gravity* **27**(183101) (2010). <http://www.arxiv.org/abs/1003.3324>. 5, 20, 95

- [21] Y. B. Zel'dovich, I. D. Novikov. The hypothesis of cores retarded during expansion and the hot cosmological model. *Soviet Astronomy A. J.* **10**:602 (1967). 5
- [22] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, Cambridge (1973). 6, 45
- [23] S. van den Bergh. Collapsed objects in clusters of galaxies. *Nature* **224**:891 (1969). 6
- [24] B. J. Carr, K. Kohri, Y. Sendouda, J. Yokoyama. New cosmological constraints on primordial black holes. *Physical Review D* **81**(10):104.019 (2010). 6, 7
- [25] A. S. Josan, A. M. Green. Constraints from primordial black hole formation at the end of inflation (2010). <http://www.arxiv.org/abs/1004.5347>. 6
- [26] D. B. Cline, C. Matthey, S. Otwinowski. Evidence for a galactic origin of very short gamma ray bursts and primordial black hole sources. *Astroparticle Physics* **18**(5):531–538 (2003). <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0110276>. 7
- [27] D. Clancy, R. Guedens, A. R. Liddle. Primordial black holes in braneworld cosmologies: Astrophysical constraints. *Physical Review D* **68**(023507) (2003). <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0301568>. 7
- [28] P. S. Custódio, J. E. Horvath. Evolution of a primordial black hole population. *Physical Review D* **58**(023504) (1998). 7, 16, 21
- [29] P. S. Custódio, J. E. Horvath. Some results on the evolution of primordial black holes. *Brazilian Journal of Physics* **35**(4B):1210 (2005). 7
- [30] F. Hoyle, R. A. Lyttleton. The evolution of the stars. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **35**(4):592–609 (1939). http://journals.cambridge.org/article_S0305004100021368. 8
- [31] F. Hoyle, R. A. Lyttleton. On the accretion of interstellar matter by stars. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **36**(3):325–330 (1940). http://journals.cambridge.org/article_S0305004100017369. 8
- [32] F. Hoyle, R. A. Lyttleton. On the physical aspects of accretion by stars. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*

- 36**(4):424–437 (1940). http://journals.cambridge.org/article_S0305004100017461. 8
- [33] H. Bondi, F. Hoyle. On the mechanism of accretion by stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **104**:273–282 (1944). 8
- [34] H. Bondi. On spherically symmetrical accretion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **112**:195–204 (1951). 8
- [35] S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*. Wiley-VCH, Weinheim (2004). 8
- [36] M. Ricotti. Bondi accretion in the early universe. *The Astrophysical Journal* **662**:53–61 (2007). <http://www.arxiv.org/abs/0706.0864>. 8
- [37] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *Mechanics*, volume 1 de *Course of Theoretical Physics*. Elsevier, 3ª edição (1976). 10
- [38] S. T. Thornton, J. B. Marion. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Thomson Learning, Belmont, 5ª edição (2004). 10
- [39] Y. B. Zel’dovich, I. D. Novikov. *Relativistic Astrophysics*, volume 1: Stars and Relativity. The University of Chicago Press, Chicago (1971). 10, 11, 12, 13
- [40] P. S. Custódio. *Efeitos Astrofísicos da Matéria Escura: Evolução e Sobrevida de Buracos Negros*. Tese de Mestrado, Universidade de São Paulo, Instituto Astronômico e Geofísico, São Paulo (1997). 14
- [41] N. Sánchez. Wave scattering theory and the absorption problem for a black hole. *Physical Review D* **16**(4):937–945 (1977). 14
- [42] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics* **43**(3):199–220 (1975). 14, 45, 46
- [43] D. N. Page. Particle emission rates from a black hole: Massless particles from an uncharged, nonrotating hole. *Physical Review D* **13**(2):198–206 (1976). 15
- [44] D. B. Cline, D. A. Sanders, W. Hong. Further evidence for some gamma-ray bursts consistent with primordial black hole evaporation. *The Astrophysical Journal* **486**:179–178 (1997). 15
- [45] E. W. Kolb, M. S. Turner. *The Early Universe*. Addison-Wesley Publishing Company, California (1990). 15, 22

- [46] A. M. Green. Viability of primordial black holes as short period gamma-ray bursts. *Physical Review D* **65**(027301) (2001). 15
- [47] P. S. Custódio, J. E. Horvath. The evolution of primordial black hole masses in the radiation-dominated era. *General Relativity and Gravitation* **34**(11):1895–1907 (2002). 16, 17, 18, 21, 29, 34, 35
- [48] J. D. Barrow, E. J. Copeland, A. R. Liddle. The evolution of black holes in an expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **253**:675–682 (1991). 16
- [49] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press (2008). 17, 31, 32, 39, 48, 54
- [50] T. Harada, B. J. Carr. Growth of primordial black holes in a universe containing a massless scalar field. *Physical Review D* **71**(104010) (2005). <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0412135>. 19
- [51] J. Sultana, C. C. Dyer. Cosmological black holes: A black hole in the Einstein–de Sitter universe. *General Relativity and Gravitation* **37**(8):1349–1370 (2005). 19, 77
- [52] V. Faraoni, A. Jacques. Cosmological expansion and local physics. *Physical Review D* **76**(063510) (2007). 19, 77, 84
- [53] D. Larson, J. Dunkley, G. Hinshaw, E. Komatsu, M. R. Nolta, C. L. Bennett, B. Gold, M. Halpern, R. S. Hill, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, N. Odegard, L. Page, K. M. Smith, D. N. Spergel, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, E. L. Wright. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Power spectra and WMAP-derived parameters (2010). <http://www.arxiv.org/abs/1001.4635>. 19, 33, 62
- [54] E. Komatsu, K. M. Smith, J. Dunkley, C. L. Bennett, B. Gold, G. Hinshaw, N. Jarosik, D. Larson, M. R. Nolta, L. Page, D. N. Spergel, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, N. Odegard, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, E. L. Wright. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Cosmological interpretation (2010). <http://www.arxiv.org/abs/1001.4538>. 20, 38
- [55] Fermilab. The dark energy survey. <https://www.darkenergysurvey.org/> (2010). 20
- [56] R. R. Caldwell. A phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with a super-negative equation of state. *Physics Letters*

- B* **545**:23–29 (2002). <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/9908168>. 20, 22, 31, 80
- [57] A. Coley, S. Hervik, J. Latta. The phantom of the OPRA. *Modern Physics Letters A* **21**(14):1099–1106 (2006). <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0503169>. 20
- [58] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski, N. N. Weinberg. Phantom energy: Dark energy with $w < -1$ causes a cosmic doomsday. *Physical Review Letters* **91**(071301) (2003). 20
- [59] P. F. González-Díaz. Achronal cosmic future. *Physical Review Letters* **93**(071301) (2004). 20
- [60] P. F. González-Díaz. Some notes on the big trip. *Physics Letters B* **635**:1–6 (2006). <http://www.arxiv.org/abs/hep-th/0607137>. 20
- [61] E. M. Barboza Jr., N. A. Lemos. Does the big rip survive quantization? *General Relativity and Gravitation* **38**(11):1609–1622 (2006). <http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/0606084>. 20
- [62] J. A. S. Lima, J. S. Alcaniz, J. V. Cunha. A simplified approach to Chaplygin-type cosmologies. *Astroparticle Physics* **30**(4):196–199 (2008). 21
- [63] I. Brevik, O. Gorbonova. Dark energy and viscous cosmology. *General Relativity and Gravitation* **39**(12):2039–2045 (2005). 21
- [64] M. Quartin, M. O. Calvão, S. E. Jorás, R. R. R. Reis, I. Waga. Dark interactions and cosmological fine-tuning. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **05**(007) (2008). <http://www.arxiv.org/abs/0802.0546>. 21
- [65] J.-H. He, B. Wang, E. Abdalla. Stability of the curvature perturbation in dark sectors’ mutual interacting models. *Physics Letters B* **671**(1):139–145 (2008). 21
- [66] A. de la Macorra. Interacting dark energy: Decay into fermions. *Astroparticle Physics* **28**:196–204 (2007). 21
- [67] S. H. Pereira, J. F. Jesus. Can dark matter decay in dark energy? *Physical Review D* **79**(043517) (2009). 21

- [68] E. O. Babichev, V. I. Dokuchaev, Y. N. Eroshenko. Black hole mass decreasing due to phantom energy accretion. *Physical Review Letters* **93**(021102) (2004). <http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/0402089>. 21, 27, 29, 31, 36, 40, 83
- [69] P. S. Custódio, J. E. Horvath. The generalized uncertainty principle, entropy bounds and black-hole (non-)evaporation in a thermal bath. *Classical and Quantum Gravity* **20**(14):L197–L203(1) (2003). <http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/0305022>. 21, 36, 59
- [70] E. O. Babichev, V. I. Dokuchaev, Y. N. Eroshenko. The accretion of dark energy onto a black hole. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **100**(3):528–538 (2005). <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0505618>. 21, 26, 30
- [71] A. Vikman. *K-essence: cosmology, causality and emergent geometry*. Tese de Doutorado, Ludwig-Maximilians-Universität, München (2007). URL <http://edoc.ub.uni-muenchen.de/7761/>. 22
- [72] R. Bean, J. Magueijo. Could supermassive black holes be quintessential primordial black holes? *Physical Review D* **66**(6):063.505 (2002). 23
- [73] D. C. Guariento, J. E. Horvath, P. S. Custódio, J. E. de Freitas Pacheco. Evolution of primordial black holes in a radiation and phantom energy environment. *General Relativity and Gravitation* **40**(8):1593–1602 (2008). <http://www.arxiv.org/abs/0711.3641>. 29, 36, 40, 84
- [74] Y. S. Myung, Y.-W. Kim, Y.-J. Park. Black hole thermodynamics with generalized uncertainty principle. *Physics Letters B* **645**:393–397 (2006). <http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/0609031>. 36, 58
- [75] J. A. S. Lima, D. C. Guariento, J. E. Horvath. Analytical solutions of accreting black holes immersed in a Λ CDM model. *Physics Letters B* **693**(3):218–220 (2010). <http://www.arxiv.org/abs/1008.4333>. 38, 84
- [76] C.-Y. Sun. Phantom energy accretion onto black holes in a cyclic universe. *Physical Review D* **78**(064060) (2008). 39
- [77] P. M. Moruno. On the formalism of dark energy accretion onto black- and worm-holes. *Physics Letters B* **659**:40–44 (2008). 39
- [78] T. Harada, H. Maeda, B. J. Carr. Nonexistence of self-similar solutions containing a black hole in a universe with a stiff fluid or scalar field or quintessence. *Physical Review D* **74**(024024) (2006). 40

- [79] F. Kottler. Über die physicalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Annalen der Physik* **361**(14):401–462 (1918). 40, 60
- [80] J. A. S. Lima, J. V. Cunha, J. S. Alcaniz. Simplified quartessence cosmology. *Astroparticle Physics* **31**:233–236 (2009). 42
- [81] S. A. Chaplygin. On gas jets. *Sci. Mem. Moscow Univ. Math. Phys.* **21**(1) (1904). 42
- [82] D. C. Guariento, J. A. S. Lima, J. E. Horvath. Accretion of a Chaplygin gas onto a black hole. (*em preparação*) (2009). 42, 84
- [83] Y. Gong. Observational constraints on generalized Chaplygin gas model. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **03**(007) (2005). <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0411253v1>. 42
- [84] J. Dunkley, E. Komatsu, M. R. Nolta, D. N. Sperge, D. Larson, G. Hinshaw, L. Page, C. L. Bennett, B. Gold, N. Jarosik, J. L. Weiland, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, G. S. Tucker, Wollack, E. L. Wright. Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe observations: Likelihoods and parameters from the WMAP data. *The Astrophysical Journal Supplement Series* **180**(2):306–329 (2009). <http://www.arxiv.org/abs/0803.0586>. 43
- [85] J. D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D* **7**(8) (1973). 45, 47
- [86] J. M. Bardeen, B. Carter, S. W. Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Communications in Mathematical Physics* **31**:161–170 (1973). 45, 46, 47, 91
- [87] S. W. Hawking. Black holes and thermodynamics. *Physical Review D* **13**(2):191–197 (1976). 45
- [88] J. Ehlers. General relativity and kinetic theory. In R. K. Sachs (editor), *General Relativity and Cosmology: Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, Course 47*. Academic Press, London (1971). 45
- [89] J. Bernstein. *Kinetic Theory in the Expanding Universe*. Cambridge University Press, Cambridge (1988). 45, 56
- [90] B. Wang, T. Gong, E. Abdalla. Thermodynamics of an accelerated expanding universe. *Physical Review D* **74**(083520) (2006). 45

- [91] R. M. Wald. Black holes and thermodynamics. In R. M. Wald (editor), *Black Holes and Relativistic Stars: Proceedings of the Symposium dedicated to the memory of Subrahmanyan Chandrasekhar, held in Chicago, December 14–15, 1996*, páginas 155–176. University of Chicago Press, Chicago (1998). <http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/9702022>. 45, 47, 91, 93
- [92] W. F. Wreszinski. *Termodinâmica*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo (2003). 46
- [93] R. M. Wald. Gedanken experiments to destroy a black hole. *Annals of Physics* **82**(2):548–556 (1974). 47
- [94] W. G. Unruh, R. M. Wald. Acceleration radiation and the generalized second law of thermodynamics. *Physical Review D* **25**(4):942–958 (1982). 47
- [95] V. P. Frolov, D. N. Page. Proof of the generalized second law for quasistationary semiclassical black holes. *Physical Review Letters* **71**(24):3902–3905 (1993). 47
- [96] S. W. Hawking. Information loss in black holes. *Physical Review D* **72**(8):084.013 (2005). 48
- [97] J. A. de Freitas Pacheco, J. E. Horvath. Generalized second law and phantom cosmology. *Classical and Quantum Gravity* **24**(22):5427–5433 (2007). <http://www.arxiv.org/abs/0709.1240>. 51, 52
- [98] M. J. de Oliveira. *Termodinâmica*. Editora Livraria da Física, São Paulo (2005). 51, 53
- [99] S. R. A. Salinas. *Introdução à Física Estatística*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo (1997). 51
- [100] G. Izquierdo, D. Pavón. The generalized second law in phantom dominated universes in the presence of black holes. *Physics Letters B* **639**:1–4 (2006). <http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/0612092>. 51
- [101] E. M. Purcell, R. V. Pound. A nuclear spin system at negative temperature. *Physical Review* **81**(2):279–280 (1951). 53
- [102] C. Kittel, H. Kroemer. *Thermal Physics*. W. H. Freeman and Company, San Francisco (1980). 53

- [103] J. A. S. Lima, S. H. Pereira. Chemical potential and the nature of dark energy: The case of a phantom field. *Physical Review D* **78**(083504) (2008). <http://www.arxiv.org/abs/0801.0323>. 53
- [104] J. A. S. Lima, S. H. Pereira, J. E. Horvath, D. C. Guariento. Phantom accretion by black holes and the generalized second law of thermodynamics. *Astroparticle Physics* **33**(5-6):292–295 (2010). <http://www.arxiv.org/abs/0808.0860>. 53, 55, 56, 84
- [105] S. Weinberg. Entropy generation and the survival of proto-galaxies in an expanding universe. *The Astrophysical Journal* **168**:175–194 (1971). 54
- [106] R. Bousso, S. W. Hawking. (Anti-)evaporation of Schwarzschild–de Sitter black holes. *Physical Review D* **54**(4):2436–2442 (1998). 57
- [107] R. J. Adler, P. Chen, D. I. Santiago. The generalized uncertainty principle and black hole remnants. *General Relativity and Gravitation* **33**(12) (2001). 58, 59, 60, 67
- [108] G. Amelino-Camelia, M. Arzano, Y. Ling, G. Mandanici. Black-hole thermodynamics with modified dispersion relations and generalized uncertainty principles. *Classical and Quantum Gravity* **23**:2585–2606 (2006). <http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/0506110>. 59
- [109] P. Chen. Inflation induced Planck-sized black hole remnants as dark matter. *New Astronomy Reviews* **49**(2–6):233–239 (2005). <http://www.arxiv.org/abs/0406514>. 60
- [110] Z. Stuchlík, S. Hledík. Some properties of the Schwarzschild–de Sitter and Schwarzschild–anti-de Sitter spacetimes. *Physical Review D* **60**(044006) (1999). 61
- [111] C. Bambi, F. R. Urban. Natural extension of the generalised uncertainty principle. *Classical and Quantum Gravity* **25**(095006) (2008). <http://www.arxiv.org/abs/0709.1965>. 61
- [112] G. Amelino-Camelia, M. Arzano, A. Procaccini. Severe constraints on the loop-quantum-gravity energy-momentum dispersion relation from the black-hole area-entropy law. *Physical Review D* **70**(107501) (2004). <http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/0405084>. 61
- [113] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, San Diego, California (2003). 62

- [114] S. W. Hawking. Gravitational radiation in an expanding universe. *Journal of Mathematical Physics* **9**(4):598–604 (1968). 64
- [115] I. Arraut, D. Batic, M. Nowakowski. Comparing two approaches to Hawking radiation of Schwarzschild–de Sitter black holes. *Classical and Quantum Gravity* **26**(125006) (2009). <http://www.arxiv.org/abs/0810.5156>. 67
- [116] J. P. Gazeau, M. Novello. The question of mass in (anti-) de Sitter spacetimes. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **41**(30):304.008 (2008). 67
- [117] S. A. Pol’shin. Quantization of fields over de Sitter space by the method of generalized coherent states. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **33**(28):5077–5092 (2000). <http://www.arxiv.org/abs/hep-th/0007091>. 67
- [118] F. I. Cooperstock, S. Tieu. Galactic dynamics via general relativity: A compilation and new developments. *International Journal of Modern Physics A* **22**(13):2293–2325 (2007). <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0610370>. 69
- [119] F. I. Cooperstock, S. Tieu. General relativistic velocity: The alternative to dark matter. *Modern Physics Letters A* **23**(21):1745–1755 (2008). <http://www.arxiv.org/abs/0712.0019>. 69
- [120] P. C. Vaidya. The gravitational field of a radiating star. *Proc. Ind. Acad. Sci.* **A33**:264 (1951). 71
- [121] P. C. Vaidya. ‘Newtonian’ time in general relativity. *Nature* **171**:260 (1953). 71
- [122] P. C. Vaidya. Nonstatic solutions of Einstein’s field equations for spheres of fluids radiating energy. *Physical Review* **83**(1):10–17 (1951). 72
- [123] J. Plebanski, J. Stachel. Einstein tensor and spherical symmetry. *Journal of Mathematical Physics* **9**(2):269–283 (1968). 72
- [124] W. B. Bonnor, P. C. Vaidya. Spherically symmetric radiation of charge in Einstein–Maxwell theory. *General Relativity and Gravitation* **1**(2):127–130 (1970). 72
- [125] R. L. Mallett. Radiating Vaidya metric imbedded in de Sitter space. *Physical Review D* **31**(2):416–417 (1985). 74

- [126] A. Patino, H. Rago. A radiating charge embedded in a De Sitter universe. *Physics Letters A* **121**(7):329–330 (1987). 74
- [127] G. C. McVittie. The mass-particle in an expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **93**:325–339 (1933). 76
- [128] B. C. Nolan. A point mass in an isotropic universe: II. Global properties. *Classical and Quantum Gravity* **16**:1227–1254 (1999). 76
- [129] C. J. Gao, X. Chen, V. Faraoni, Y.-G. Shen. Does the mass of a black hole decrease due to the accretion of phantom energy? *Physical Review D* **78**(024008) (2008). <http://www.arxiv.org/abs/0802.1298>. 77, 81
- [130] C. E. Pellicer. *Perturbações de Sistemas Gravitacionais Dependentes do Tempo*. Tese de Mestrado, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, São Paulo (2007). 81
- [131] D. C. Guariento, J. E. Horvath. On the problem of mass variation of black holes accreting cosmological fluids. (*enviado para publicação*) (2010). 83
- [132] D. C. Guariento, J. E. Horvath. Evolution of primordial black holes in a universe with radiation and phantom energy. In Chakrabarti e Majumdar^[140]. 84
- [133] D. C. Guariento, J. E. Horvath. Accretion mechanisms onto primordial black holes. In H. Blas (editor), *Fifth International School on Field Theory and Gravitation*. Proceedings of Science (2009). 84
- [134] D. C. Guariento, J. E. Horvath. Dark energy accretion onto black holes. In T. Damour, R. T. Jantzen, R. Ruffini (editores), *Proceedings of the Twelfth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*. World Scientific Publishing, Singapore (2010). 84
- [135] D. C. Guariento, J. E. Horvath. Accretion mechanisms onto primordial black holes. *International Journal of Modern Physics D* **19**(8-10):1249–1252 (2010). Proceedings of the 4th International Workshop on Astronomy and Relativistic Astrophysics (IWARA09) Maresias, Brazil, 4-8 October 2009; Editors: Jorge E. Horvath, Manuel M. B. Malheiro de Oliveira, Bardo E. J. Bodmann, Cesar A. Z. Vasconcellos, Horst Stoecker and Walter Greiner. 84
- [136] D. C. Guariento, J. E. Horvath. Evaporation of a Schwarzschild–de Sitter black hole: Effects of a fundamental length using a generalized uncertainty principle. (*em preparação*) (2010). 84

-
- [137] J. de Oliveira. *Perturbação de spin zero no espaço-tempo de Kerr–Randall–Sundrum*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, São Paulo (2010). 84
- [138] D. Sudarsky, R. M. Wald. Extrema of mass, stationarity, and staticity, and solutions to the Einstein-Yang-Mills equations. *Physical Review D* **46**(4):1453–1474 (1992). 92
- [139] V. Iyer, R. M. Wald. Some properties of the Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy. *Physical Review D* **50**(2):846–864 (1994). 92
- [140] S. K. Chakrabarti, A. S. Majumdar (editores). volume 1053 de *AIP Conference Proceedings*. American Institute of Physics (2008). 97, 108

Índice Remissivo

- acrecção de Bondi, 8
- back-reaction*, 7, 27, 40
- Bernoulli
 - equação de, 9
- Big Rip*, 20
- Big Trip*, 20
- censura cósmica, 47
- Chaplygin
 - gás de, vii, 41–43
- condição de energia
 - dominante, 20, 91, 96
 - forte, 20, 96
 - fraca, 20, 95
 - nula, 47, 93, 95
- constante cosmológica, 38, 43
- continuidade
 - equação de, 8, 14
- coordenadas
 - avanzadas, 71
 - cósmicas, 76
 - de curvatura, 2, 26, 71
 - Eddington–Finkelstein, 3, 71
 - euclidianas, 2
 - isotrópicas, 26, 76
- curvatura
 - tensor de, 4, 90
- efeito Unruh, 48
- Einstein
 - equações de, 87
 - tensor de, 87
- Einstein–de Sitter, 40, 77
- Einstein–Maxwell
 - equações de, 72
- entropia
 - da radiação, 48–49
 - de um buraco negro, 46, 48–49, 63–64
 - generalizada, 47
- equação de estado
 - da radiação, 54
- era
 - da energia escura, 33
 - da matéria, 33
 - da radiação, 16, 50
- espectro de massas, 5
- Euler–Lagrange
 - equações de, 91
- fator de escala, 22, 30
- fluido perfeito, 22, 77
- Friedmann
 - equação de, 31
- gás
 - barotrópico, 8
 - isentrópico, 8
 - politrópico, 8
- geodésica
 - equação da, 10
- gravidade superficial, 4, 46, 89
- Hawking
 - evaporação de, 7, 14–17, 29, 57, 61–63
 - temperatura de, 14, 46, 58

horizonte

- cosmológico, 61
- de eventos, 3, 61
 - área, 15, 26, 79
 - futuro, 6
 - interior, 25
- de Killing, 89–90
- de partículas, 5

Hubble

- parâmetro de, 22, 31, 33

K-essência, 22

Killing

- equação de, 3
- horizonte de, *veja* horizonte
- trajetória de, 90
- vetores de, 3–4, 91

 Λ CDM, 38

linha de mundo, 6

MACHOs, 7

massa

- quase-local, 64, 76

matéria escura, 7, 38

métrica

- Bonnor–Vaidya, 72–73
- Bonnor–Vaidya–de Sitter, 74–75
- de Sitter, 40
- Friedmann–Robertson–Walker, 16, 22, 30
- McVittie, 76
- Schwarzschild, 2–3, 25, 27
- Schwarzschild–de Sitter, 38, 40, 60–61, 88
- Vaidya, 71–72
- Vaidya–de Sitter, 73–74

modelo padrão, 15

Noether

- carga de, 92
- corrente de, 91, 93

phantom

- energia, vii, 20, 29, 47, 78
- redshift, 33
- tempo, 32, 33

Planck

- comprimento de, 59
- massa de, 59
- princípio da equivalência, 2, 52
- princípio de incerteza, 58
 - generalizado, 58–60

quadrivetor

- nulo, 71

quartessência, 42

quintessência, 22

running constant, 15, 34

seção de choque, 12, 13

segunda lei generalizada, 47–48

Stefan–Boltzmann

- constante de, 15, 64
- lei de, 15, 48, 64

superfície

- nula, 89
- tipo espaço, 90

temperatura

- da radiação, 48–50
- de Hawking, *veja* Hawking

tempo próprio, 24

tensor de energia-momento

- campo eletromagnético no vácuo, 71
- fluido perfeito, 27

tensor de Riemann, *veja* curvatura

WIMPs, 7, 60

WMAP, 43