

双链超导量子电路中的拓扑非平庸节点

关欣 陈刚

Topological nonmediocre nodes on two-leg superconducting quantum circuits

Guan Xin Chen Gang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 140301 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230152

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230152>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

利用超导量子电路模拟拓扑量子材料

Topological quantum material simulated with superconducting quantum circuits

物理学报. 2018, 67(22): 220302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181857>

量子点-Su-Schrieffer-Heeger原子链系统的电子输运特性

Electron transport through a quantum-dot-Su-Schrieffer-Heeger-chain system

物理学报. 2020, 69(7): 077301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191871>

自旋轨道耦合Su-Schrieffer-Heeger原子链系统的电子输运特性

Electron transport through Su-Schrieffer-Heeger chain with spin-orbit coupling

物理学报. 2021, 70(8): 087301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201742>

基于金刚石氮-空位色心自旋系综与超导量子电路混合系统的量子节点纠缠

Entanglement of quantum node based on hybrid system of diamond nitrogen-vacancy center spin ensembles and superconducting quantum circuits

物理学报. 2018, 67(7): 070302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172634>

无序非厄米Su-Schrieffer-Heeger中的趋肤效应

Skin effect in disordered non-Hermitian Su-Schrieffer-Heeger

物理学报. 2022, 71(22): 227402 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221151>

一维对称非厄米自旋轨道耦合Su-Schrieffer-Heeger模型的拓扑性质

Topological properties of the one-dimensional γ -symmetric non-Hermitian spin-orbit-coupled Su-Schrieffer-Heeger model

物理学报. 2022, 71(17): 177302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220796>

双链超导量子电路中的拓扑非平庸节点*

关欣^{1)†} 陈刚²⁾³⁾⁴⁾

1) (太原学院材料与化学工程系, 太原 030032)

2) (山西大学激光光谱研究所, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 太原 030006)

3) (山西大学极端光学协同创新中心, 太原 030006)

4) (郑州大学物理学院, 郑州 450001)

(2023 年 2 月 7 日收到; 2023 年 5 月 13 日收到修改稿)

拓扑无能隙系统作为不同量子相的连接, 目前已经成为备受关注的前沿科学. 超导量子电路作为一个重要的全固态量子器件是宏观调控量子效应的优秀平台. 本文在超导量子电路中构建了双链的 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型并发现了拓扑非平庸的节点. 首先设计了电容耦合的双链 transmon 比特, 之后用两个交流微波驱动每一个 transmon 比特, 从而实现比特间耦合强度的独立调控, 最后通过选择比特间合适的耦合参数实现交错的双链 SSH 模型. 接下来探索了交错双链 SSH 模型的拓朴性质, 首先计算了 k 空间中双链 SSH 模型的本征能量, 并发现了两种类型的相边界. 之后在参数空间中画出了拓扑相图, 发现了两类拓扑绝缘相, 其拓扑数分别为 1 和 -1, 对应有两类边界态. 拓扑相图也进一步给出了两类相边界的分布以及它们两侧拓扑数的值. 最后分析了两类相边界的拓朴性质, 发现其中一类拓扑相边界对应的能带有两个拓扑非平庸的节点. 本文的工作为探索链条型物理系统、拓朴物态以及节点型拓朴半金属提供了新的途径.

关键词: 超导量子电路, 双链 Su-Schrieffer-Heeger 模型, 节点

PACS: 03.67.Ac, 05.30.Rt, 85.25.Cp, 71.10.-w

DOI: 10.7498/aps.72.20230152

1 引言

随着拓朴能带理论的发展, 拓朴量子相^[1,2]已经成为了凝聚态物理中备受关注的领域. 目前拓朴量子材料的前沿科学已经从具有能隙的拓朴绝缘体扩展到了无能隙的拓朴半金属^[3-6]. 拓朴无能隙系统作为两个量子相的连接, 其能带在动量空间中有接触点, 这些接触点称为节点^[4,7-18]. 节点通常以辅助向量场的拓朴缺陷的形式出现. 由于这些点受到对称性保护, 因此它们是不会消失的, 除非一对点相遇之后湮灭. 典型的节点有狄拉克点^[7-9]和外尔点^[10-12]. 狄拉克点是四重简并线性能带的交叉点, 其低能态具有四分量子旋量形式. 狄拉克点通

常受到一些特殊的对称性保护, 例如时间反演对称性、反演对称性和晶格对称性. 外尔点通常是一对双重简并的线性交叉点, 外尔点的出现意味着系统打破了时间反演对称性或反演对称性. 这些典型的节点通常只能出现在二维或三维空间中. 本文提供了一个介于一维和二维之间的两链模型, 并在这一模型中发现了拓扑非平庸的节点.

近年来, 微纳米技术的快速发展使得全固态量子器件超导量子电路成为了量子信息^[19-22]、量子计算^[23-26]以及量子模拟^[27-34]的优秀平台. 相比于其他量子平台, 超导量子电路系统在扩展性、集成性、调控性等方面都具有更大的优势^[35-38]. 基于这些优势, 大量的量子模拟工作已经在超导量子电路系统中实现, 如多体局域化^[28]、动力学量子相变^[27]、

* 山西省自然科学基金青年项目 (批准号: 202103021223010) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: guanxin810712@163.com

磁性物理^[29,30]、量子行走^[39]以及拓扑材料^[31,32]等. 最近, 实验^[40]上已经实现了由 24 个最近邻耦合的 transmon 比特构造的双链结构, 并模拟出了双链玻色-哈伯德模型, 进一步探索了系统中单激发和双激发的动力学特性. 同时, 实验^[41,42]中实现了 transmon 比特之间耦合强度的独立可调, 并且模拟出了单链的 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型, 进一步观测到了拓扑非平庸的磁子绝缘体^[31]. 因此, 基于目前的实验现状, 可以通过改变双链 transmon 比特间的耦合强度在超导量子电路中实现双链 SSH 模型.

基于以上的实验及理论工作, 本文提出了利用 transmon 比特实现耦合强度独立可调的双链 SSH 模型的可行性实验方案, 并在这一模型中发现了拓扑非平庸的节点. 本文首先设计了电容耦合的双链 transmon 比特, 然后用两个交流微波驱动每一个 transmon 比特, 从而实现比特间耦合强度的独立调控, 最后通过改变比特间耦合参数实现交错耦合的双链 SSH 模型. 接下来探索双链 SSH 模型的拓扑性质, 首先计算 k 空间中双链 SSH 模型

的本征能量, 并发现了两种类型的相边界. 之后在参数空间中画出拓扑相图, 发现了两类拓扑绝缘相, 拓扑数分别为 1 和 -1, 对应有两类边界态. 拓扑相图也进一步给出了两类相边界的分布以及它们两侧拓扑数的值. 最后分析了两类相边界的拓扑性质, 将布洛赫态映射为 k 空间的矢量场, 发现第一类相边界对应能带的节点处, 矢量场存在两个扭结. 两个节点有相反的拓扑荷分别为 1 和 -1, 并且受到平移和反转对称性的保护. 另外, 本文发现第二类相边界的能带节点是拓扑平庸的. 本文的工作为探索链型物理系统、拓扑物态以及节点型拓扑半金属提供了新的途径.

2 理论模型

目前, 双链耦合的超导量子比特链已经在实验上实现^[40]. 基于这一实验, 本文用 transmon 比特设计了双链的 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型. 如图 1(a) 所示, 两条比特链中所有最近邻比特

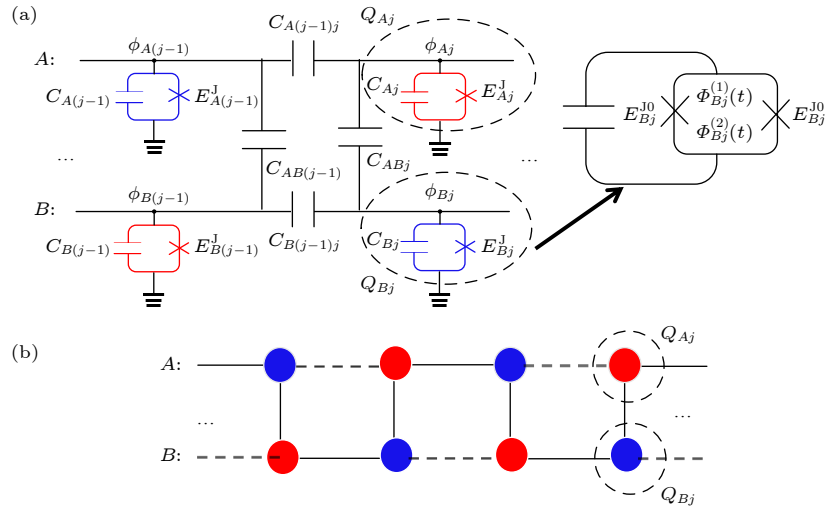


图 1 双链 SSH 模型 (a) 两条 transmon 比特链分别标记为 A 和 B . 每个 transmon 比特都与其最近邻比特两两耦合. 这里所有的耦合器均为电容. $Q_{\nu j}$ 表示的是第 ν 条链上的第 j 个比特. $C_{\nu j}$ 和 $E_{\nu j}^J$ 分别是第 ν 条链上, 第 j 个比特的有效电容和约瑟夫森能. $C_{\nu i j}$ 是耦合第 ν 条链上, 第 i 和第 j 个比特的电容. C_{ABj} 表示 A, B 两条链上第 j 个比特之间耦合的电容. $\phi_{\nu j}$ 是第 ν 条链上, 第 j 个比特的约瑟夫森结的相位. 本文中 transmon 比特的约瑟夫森结由超导量子干涉仪 (SQUID) 形成, $E_{\nu j}^{J0}$ 是 SQUID 中每个约瑟夫森结的能量. 每个比特都受到两个外加磁通 $\Phi_{\nu j}^{(1)}(t)$ 和 $\Phi_{\nu j}^{(2)}(t)$ 的调制. (b) 双链 SSH 模型示意图, 图中红色和蓝色的实心球表示 SSH 模型中一个原胞的两种比特

Fig. 1. Two-leg SSH model: (a) Two-leg (labeled respectively by A and B) superconducting circuits with transmon qubits. The qubits are coupled with their nearest-neighbor sites. All couplers are capacitors. $C_{\nu j}$ and $E_{\nu j}^J$ are the effective capacitance and the Josephson energy of the qubit at the j th site on the ν th leg. $C_{\nu i j}$ and C_{ABj} are the capacitors to couple the qubits at the j th site on the ν th leg with its nearest-neighbor sites along each leg and between the legs, respectively. $\phi_{\nu j}$ is the phase of the Josephson junction of the qubit at the j th site on the ν th leg. The Josephson junction of the transmon qubit is a superconducting quantum interference device (SQUID). $E_{\nu j}^{J0}$ is the Josephson energy of SQUID. Each qubit is modulate by two external magnetic fluxes $\Phi_{\nu j}^{(1)}(t)$ and $\Phi_{\nu j}^{(2)}(t)$.

之间都通过电容进行耦合, 相应的拉氏量表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{\nu,j} \left[\frac{C_{\nu j}}{2} \dot{\phi}_{\nu j}^2 + E_{\nu j}^J \cos \left(\frac{\phi_{\nu j}}{\phi_0} \right) \right] \\ & + \sum_{\nu, \langle i,j \rangle} \left[\frac{C_{\nu ij}}{2} (\dot{\phi}_{\nu i} - \dot{\phi}_{\nu j})^2 \right] \\ & + \sum_j \left[\frac{C_{ABj}}{2} (\dot{\phi}_{Aj} - \dot{\phi}_{Bj})^2 \right], \quad (1) \end{aligned}$$

式中, 每条链上比特的位置用 j 标记, 不同的链用 $\nu = A/B$ 来标记. 第 ν 条链上, 第 j 个比特的电容用 $C_{\nu j}$ 来表示. 第 ν 条链上, 第 j 个比特的约瑟夫森能用 $E_{\nu j}^J$ 表示. 第 ν 条链上, 第 i 和第 j 个比特之间耦合的电容用 $C_{\nu ij}$ 表示. A, B 两条链上第 j 个比特之间耦合的电容用 C_{ABj} 表示. 第 ν 条链上, 第 j 个比特中约瑟夫森结的相位用 $\phi_{\nu j}$ 表示, $\phi_0 = 1/(2e)$ 是其量子化单位. $\langle i, j \rangle$ 是每条链上最近邻比特的求和. 如果选择 $\hat{\phi}_{\nu j}$ 为正则坐标, 相应的正则动量可以表示为

$$\begin{aligned} \hat{q}_{\nu j} &= \partial L / \partial \dot{\phi}_{\nu j} \\ &= C_{\nu j} \dot{\phi}_{\nu j} + \sum_{j \langle i \rangle} C_{\nu j} (\dot{\phi}_{\nu j} - \dot{\phi}_{\nu j \langle i \rangle}) \\ &\quad + C_{\nu \nu' j} (\dot{\phi}_{\nu i} - \dot{\phi}_{\nu' i}), \quad (2) \end{aligned}$$

式中, $j \langle i \rangle$ 表示对第 j 个 transmon 比特的最近邻比特的求和, ν 与 ν' 取不同的值. 实验上有 $C_{\nu j} \gg \{C_{\nu(j-1)j}, C_{\nu j(j+1)}, C_{ABj}\}$ [43], 因此本文正则动量 $\hat{q}_{\nu j}$ 可以近似地表示为 $\hat{q}_{\nu j} \approx C_{\nu j} \dot{\phi}_{\nu j}$. 利用勒让德变换, 哈密顿量可以表示为

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_J + \hat{H}_R, \quad (3)$$

其中

$$\hat{H}_0 = \sum_{\nu,j} \left(\frac{\hat{q}_{\nu j}^2}{2C_{\nu j}} + \frac{\hat{\phi}_{\nu j}^2}{2L_{\nu j}^J} - \frac{E_{\nu j}^J}{24\phi_0^4} \hat{\phi}_{\nu j}^4 \right), \quad (4)$$

$$\hat{H}_J = \sum_{\nu, \langle i,j \rangle} \frac{C_{\nu ij}}{C_{\nu i} C_{\nu j}} \hat{q}_{\nu i} \hat{q}_{\nu j}, \quad (5)$$

$$\hat{H}_R = \sum_j \frac{C_{ABj}}{C_{Aj} C_{Bj}} \hat{q}_{Ai} \hat{q}_{Bi}, \quad (6)$$

式中, $\frac{1}{\tilde{C}_{\nu j}} = \frac{1}{C_{\nu j}^2} (C_{\nu j} - C_{ABj} - C_{\nu(j-1)j} - C_{\nu j(j+1)})$, $\frac{1}{L_{\nu j}^J} = \frac{E_{\nu j}^J}{\phi_0^2}$. 之后, 引入如下的玻色产生湮灭算符:

$$\hat{a}_{\nu j} = \sqrt{\frac{\tilde{C}_{\nu j} \omega_{\nu j}^0}{2}} \hat{\phi}_{\nu j} + i \sqrt{\frac{1}{2\tilde{C}_{\nu j} \omega_{\nu j}^0}} \hat{q}_{\nu j}, \quad (7)$$

$$\hat{a}_{\nu j}^\dagger = \sqrt{\frac{\tilde{C}_{\nu j} \omega_{\nu j}^0}{2}} \hat{\phi}_{\nu j} - i \sqrt{\frac{1}{2\tilde{C}_{\nu j} \omega_{\nu j}^0}} \hat{q}_{\nu j}, \quad (8)$$

算符满足 $[\hat{a}_{\nu j}, \hat{a}_{\nu' j'}^\dagger] = \delta_{\nu, \nu'} \delta_{j, j'}$. $\omega_{\nu j}^0 = \sqrt{8E_{\nu j}^C E_{\nu j}^J}$ 是第 ν 条链上, 第 j 个比特的频率, 其中 $E_{\nu j}^C = e^2/(2\tilde{C}_{\nu j})$. 考虑旋波近似之后, 得到如下双链耦合的 Bose-Hubbard 模型:

$$\hat{H}_0 = \sum_{\nu,j} \omega_{\nu j}^0 \hat{a}_{\nu j}^\dagger \hat{a}_{\nu j} + \frac{1}{2} V_{\nu j} \hat{n}_{\nu j} (\hat{n}_{\nu j} - 1), \quad (9)$$

$$\hat{H}_J = \sum_{\nu,j} g_{\nu j} \hat{a}_{\nu(j-1)}^\dagger \hat{a}_{\nu j} + \text{H.c.}, \quad (10)$$

$$\hat{H}_R = \sum_j \tilde{g}_{ABj} \hat{a}_{Aj}^\dagger \hat{a}_{Bj} + \text{H.c.}, \quad (11)$$

其中 H.c. 表示厄米共轭. $\hat{n}_{\nu j} = \hat{a}_{\nu j}^\dagger \hat{a}_{\nu j}$ 是粒子数算符. $V_{\nu j} = -E_{\nu j}^C$ 表示第 ν 条链上, 第 j 个比特的非谐性强度.

$$g_{\nu j} = C_{\nu(j-1)j} \sqrt{\omega_{\nu(j-1)}^0 \omega_{\nu j}^0} / (2\sqrt{C_{\nu(j-1)} C_{\nu j}})$$

表示第 ν 条链上第 j 个比特与第 $j-1$ 个比特之间的耦合强度. $\tilde{g}_{ABj} = C_{ABj} \sqrt{\omega_{Aj}^0 \omega_{Bj}^0} / (2\sqrt{C_{Aj} C_{Bj}})$ 表示 A, B 两链上第 j 个比特之间的耦合强度. 为了方便讨论, 下文中的参数设置为 $g_{\nu j} = \tilde{g}_{ABj} = g_0$. 由于本文选用的是 transmon 比特 [43], 因此 $E_{\nu j}^C \ll E_{\nu j}^J$. 如果选择 $E_{\nu j}^J/E_{\nu j}^C = 50$, 并将电容值设定为 $\{C_{\nu(j-1)j}, C_{\nu j(j+1)}, C_{ABj}\} \approx 0.5$ fF 以及 $C_{\nu j} \approx 100$ fF. 之后, 通过计算得到 $V_{\nu j}/(2\pi) \approx 200$ MHz, $g_0/(2\pi) \approx 10$ MHz. 显然模型中比特的非谐性远远大于比特间的耦合强度, 即 $V_{\nu j} \gg g_0$ [40]. 由哈密顿量 (9)—(11) 式知, transmon 比特在这种很强的非谐性下只能激发一个玻色子, 也就是说, 玻色算符满足 $\hat{a}_{\nu j}^\dagger |0\rangle_{\nu j} = |1\rangle_{\nu j}$, $\hat{a}_{\nu j}^\dagger |1\rangle_{\nu j} = 0$, $\hat{a}_{\nu j} |0\rangle_{\nu j} = 0$ 以及 $\hat{a}_{\nu j} |1\rangle_{\nu j} = |0\rangle_{\nu j}$. 这时哈密顿量 (9) 式中的第二项满足 $V_{\nu j} \hat{n}_{\nu j} (\hat{n}_{\nu j} - 1)/2 \equiv 0$. 考虑这一条件后, 哈密顿量 (9)—(11) 式可以表示为

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\nu,j} \omega_{\nu j}^0 \hat{a}_{\nu j}^\dagger \hat{a}_{\nu j} + \sum_{\nu,j} \left(g_0 \hat{a}_{\nu(j-1)}^\dagger \hat{a}_{\nu j} + \text{H.c.} \right) \\ & + \sum_j \left(g_0 \hat{a}_{Aj}^\dagger \hat{a}_{Bj} + \text{H.c.} \right). \quad (12) \end{aligned}$$

为了实现双链 SSH 模型, 需要调节比特间的耦合强度, 本文利用两个交流微波对每个 transmon 比特进行驱动. 实验上可以通过磁通偏置线实现这种驱动^[41,42]. 如图 1(a) 所示, 将 transmon 比特的约瑟夫森结替换成超导量子干涉仪 (SQUID). 将两个独立可控的交流磁通设置在 SQUID 的回路中

$$\Phi_{\nu j}^{(1)}(t) = \delta_{\nu j}^{(1)} \cos(p_{\nu j}^{(1)} t + \phi_{\nu j}^{(1)}),$$

$$\Phi_{\nu j}^{(2)}(t) = \delta_{\nu j}^{(2)} \cos(p_{\nu j}^{(2)} t + \phi_{\nu j}^{(2)}),$$

其中 $\{\delta_{\nu j}^{(1)}, \delta_{\nu j}^{(2)}\} \ll \omega_{\nu j}^0$ 是两个磁通的振幅. $p_{\nu j}^{(1)}$ 和 $p_{\nu j}^{(2)}$ 以及 $\phi_{\nu j}^{(1)}$ 和 $\phi_{\nu j}^{(2)}$ 分别为两个磁通的频率和相位. 此时, transmon 比特的势能变为

$$\begin{aligned} V_{\nu j}^p &= E_{\nu j}^{J_0} \cos\left(\varphi + \frac{\Phi_{\nu j}^{(1)}(t) + \Phi_{\nu j}^{(2)}(t)}{2}\right) \\ &\quad + E_{\nu j}^{J_0} \cos\left(\varphi - \frac{\Phi_{\nu j}^{(1)}(t) + \Phi_{\nu j}^{(2)}(t)}{2}\right) \\ &= 2E_{\nu j}^{J_0} \left[\cos(\varphi) \cos\left(\frac{\Phi_{\nu j}^{(1)}(t) + \Phi_{\nu j}^{(2)}(t)}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

比特的有效约瑟夫森能变为

$$E_{\nu j}^{J_{\text{eff}}} = E_{\nu j}^{J_0} \cos\left(\frac{\Phi_{\nu j}^{(1)}(t) + \Phi_{\nu j}^{(2)}(t)}{2}\right). \quad (14)$$

根据上文中比特频率的定义, 比特的频率此时变为

$$\omega_{\nu j}(t) = \omega_{\nu j}^0 \sqrt{\cos\left(\frac{\Phi_{\nu j}^{(1)}(t) + \Phi_{\nu j}^{(2)}(t)}{2}\right)}. \quad (15)$$

将 $\omega(t)$ 在 $\Phi_{\nu j}^{(1)}(t) = 0$ 和 $\Phi_{\nu j}^{(2)}(t) = 0$ 处泰勒展开, 保留到 2 阶可得

$$\begin{aligned} \omega_{\nu j} &= \omega_{\nu j}^0 + \varepsilon_{\nu j}^{(1)} \cos(u_{\nu j}^{(1)} t + \varphi_{\nu j}^{(1)}) \\ &\quad + \varepsilon_{\nu j}^{(2)} \cos(u_{\nu j}^{(2)} t + \varphi_{\nu j}^{(2)}) \\ &\quad + \varepsilon_{\nu j}^{(3)} \cos(u_{\nu j}^{(3)} t + \varphi_{\nu j}^{(3)}) \\ &\quad + \varepsilon_{\nu j}^{(4)} \cos(u_{\nu j}^{(4)} t + \varphi_{\nu j}^{(4)}), \end{aligned} \quad (16)$$

其中参数 $\varepsilon_{\nu j}^{(1)} = \omega_{\nu j}^0 \delta_{\nu j}^{(1)2}/32$, $\varepsilon_{\nu j}^{(2)} = \omega_{\nu j}^0 \delta_{\nu j}^{(2)2}/32$ 和 $\varepsilon_{\nu j}^{(3)} = \varepsilon_{\nu j}^{(4)} = \omega_{\nu j}^0 \delta_{\nu j}^{(1)} \delta_{\nu j}^{(2)}/16$ 为外加偏置磁通的有效振幅; $u_{\nu j}^{(1)} = 2p_{\nu j}^{(1)}$, $u_{\nu j}^{(2)} = 2p_{\nu j}^{(2)}$, $u_{\nu j}^{(3)} = p_{\nu j}^{(1)} + p_{\nu j}^{(2)}$ 和 $u_{\nu j}^{(4)} = p_{\nu j}^{(1)} - p_{\nu j}^{(2)}$ 为外加偏置磁通的有效频率; $\varphi_{\nu j}^{(1)} = 2\phi_{\nu j}^{(1)} + \pi$, $\varphi_{\nu j}^{(2)} = 2\phi_{\nu j}^{(2)} + \pi$, $\varphi_{\nu j}^{(3)} = \phi_{\nu j}^{(1)} + \phi_{\nu j}^{(2)} + \pi$ 和 $\varphi_{\nu j}^{(4)} = \phi_{\nu j}^{(1)} - \phi_{\nu j}^{(2)} + \pi$ 为外加偏置磁通的有效相位.

之后, 利用如下么正算符对哈密顿量 (12) 式进行么正变换:

$$\hat{U} = \hat{U}_1 \times \hat{U}_2, \quad (17)$$

其中

$$\hat{U}_1 = \exp\left[-i \sum_{j=1}^N \sum_{\nu=A,B} \omega_{\nu j}^0 \hat{a}_{\nu j}^\dagger \hat{a}_{\nu j} t\right], \quad (18)$$

$$\hat{U}_2 = \exp\left[i \sum_{d=1}^4 \sum_{j=1}^N \sum_{\nu=A,B} \alpha_{\nu j}^{(d)} \hat{a}_{\nu j}^\dagger \hat{a}_{\nu j} \cos(u_{\nu j}^{(d)} t + \varphi_{\nu j}^{(d)})\right], \quad (19)$$

式中, $\alpha_{\nu j}^{(d)} = \varepsilon_{\nu j}^{(d)}/u_{\nu j}^{(d)}$ ($d = 1, 2, 3, 4$). 么正变换之后, 系统的哈密顿量可以写为

$$\hat{H} = \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} + i \frac{d\hat{U}}{dt} \hat{U} = \hat{H}_E + \hat{H}_I, \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{H}_E &= \sum_{\nu=A,B} g_0 \left\{ \hat{a}_{\nu 1}^\dagger \hat{a}_{\nu 2} e^{-i\Delta_{\nu 2} t} \exp\left[\sum_{d=1}^4 -i\alpha_{\nu 1}^{(d)} \cos(u_{\nu 1}^{(d)} t + \varphi_{\nu 1}^{(d)}) + i\alpha_{\nu 2}^{(d)} \cos(u_{\nu 2}^{(d)} t + \varphi_{\nu 2}^{(d)})\right] + \text{H.c.} \right\} \\ &\quad + g_0 \left\{ \hat{a}_{\nu 2}^\dagger \hat{a}_{\nu 3} e^{-i\Delta_{\nu 3} t} \exp\left[\sum_{d=1}^4 -i\alpha_{\nu 2}^{(d)} \cos(u_{\nu 2}^{(d)} t + \varphi_{\nu 2}^{(d)}) + i\alpha_{\nu 3}^{(d)} \cos(u_{\nu 3}^{(d)} t + \varphi_{\nu 3}^{(d)})\right] + \text{H.c.} \right\} + \dots, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= g_0 \left\{ \hat{a}_{A1}^\dagger \hat{a}_{B1} e^{-\Delta_{AB1} t} \exp\left[\sum_{d=1}^4 -i\alpha_{A1}^{(d)} \cos(u_{A1}^{(d)} t + \varphi_{A1}^{(d)}) + i\alpha_{B1}^{(d)} \cos(u_{B1}^{(d)} t + \varphi_{B1}^{(d)})\right] + \text{H.c.} \right\} \\ &\quad + g_0 \left\{ \hat{a}_{A2}^\dagger \hat{a}_{B2} e^{-\Delta_{AB2} t} \exp\left[\sum_{d=1}^4 -i\alpha_{A2}^{(d)} \cos(u_{A2}^{(d)} t + \varphi_{A2}^{(d)}) + i\alpha_{B2}^{(d)} \cos(u_{B2}^{(d)} t + \varphi_{B2}^{(d)})\right] + \text{H.c.} \right\} + \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

式中, $\Delta_{\nu j} = \omega_{\nu j}^0 - \omega_{\nu(j-1)}^0$, $\Delta_{ABj} = \omega_{Bj}^0 - \omega_{Aj}^0$. 利用 Jacobi-Anger 等式 $\exp[i\alpha \cos(ut + \varphi)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(\alpha) \exp[im(ut + \varphi)]$ ($J_m(\alpha)$ 是第 m 阶第一类贝塞尔函数), 可以得到:

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_E = & \sum_{\nu,j} g_0 \hat{a}_{\nu(j-1)}^\dagger \hat{a}_{\nu j} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} (-i)^{m_1} J_{m_1}(\alpha_{\nu(j-1)}^{(1)}) \exp \left[-im_1 (u_{\nu(j-1)}^{(1)} t + \varphi_{\nu(j-1)}^{(1)}) \right] \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} i^{m_2} J_{m_2}(\alpha_{\nu j}^{(1)}) \\
 & \times \exp \left[i(m_2 u_{\nu j}^{(1)} - \Delta_{\nu j}) t + im_2 \varphi_{\nu j}^{(1)} \right] \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} (-i)^{m_3} J_{m_3}(\alpha_{\nu(j-1)}^{(2)}) \exp \left[-im_3 (u_{\nu(j-1)}^{(2)} t + \varphi_{\nu(j-1)}^{(2)}) \right] \\
 & \times \sum_{m_4=-\infty}^{\infty} i^{m_4} J_{m_4}(\alpha_{\nu j}^{(2)}) \exp \left[im_4 (u_{\nu j}^{(2)} t + \varphi_{\nu j}^{(2)}) \right] \sum_{m_5=-\infty}^{\infty} (-i)^{m_5} J_{m_5}(\alpha_{\nu(j-1)}^{(3)}) \\
 & \times \exp \left[-im_5 (u_{\nu(j-1)}^{(3)} t + \varphi_{\nu(j-1)}^{(3)}) \right] \sum_{m_6=-\infty}^{\infty} i^{m_6} J_{m_6}(\alpha_{\nu j}^{(3)}) \exp \left[im_6 (u_{\nu j}^{(3)} t + \varphi_{\nu j}^{(3)}) \right] \\
 & \times \sum_{m_7=-\infty}^{\infty} (-i)^{m_7} J_{m_7}(\alpha_{\nu(j-1)}^{(4)}) \exp \left[-im_7 (u_{\nu(j-1)}^{(4)} t + \varphi_{\nu(j-1)}^{(4)}) \right] \\
 & \times \sum_{m_8=-\infty}^{\infty} i^{m_8} J_{m_8}(\alpha_{\nu j}^{(4)}) \exp \left[im_8 (u_{\nu j}^{(4)} t + \varphi_{\nu j}^{(4)}) \right] + \text{H.c.}, \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_I = & \sum_j g_0 \hat{a}_{Aj}^\dagger \hat{a}_{Bj} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} (-i)^{m_1} J_{m_1}(\alpha_{Aj}^{(1)}) \exp \left[-im_1 (u_{Aj}^{(1)} t + \varphi_{Aj}^{(1)}) \right] \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} i^{m_2} J_{m_2}(\alpha_{Bj}^{(1)}) \\
 & \times \exp \left[im_2 (u_{Bj}^{(1)} t + \varphi_{Bj}^{(1)}) \right] \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} (-i)^{m_3} J_{m_3}(\alpha_{Aj}^{(2)}) \exp \left[-im_3 (u_{Aj}^{(2)} t + \varphi_{Aj}^{(2)}) \right] \\
 & \times \sum_{m_4=-\infty}^{\infty} i^{m_4} J_{m_4}(\alpha_{Bj}^{(2)}) \exp \left[i(m_4 u_{Bj}^{(2)} - \Delta_{ABj}) t + im_4 \varphi_{Bj}^{(2)} \right] \sum_{m_5=-\infty}^{\infty} (-i)^{m_5} J_{m_5}(\alpha_{Aj}^{(3)}) \\
 & \times \exp \left[-im_5 (u_{Aj}^{(3)} t + \varphi_{Aj}^{(3)}) \right] \sum_{m_6=-\infty}^{\infty} i^{m_6} J_{m_6}(\alpha_{Bj}^{(3)}) \exp \left[im_6 (u_{Bj}^{(3)} t + \varphi_{Bj}^{(3)}) \right] \sum_{m_7=-\infty}^{\infty} (-i)^{m_7} \\
 & \times J_{m_7}(\alpha_{Aj}^{(4)}) \exp \left[-im_7 (u_{Aj}^{(4)} t + \varphi_{Aj}^{(4)}) \right] \sum_{m_8=-\infty}^{\infty} i^{m_8} J_{m_8}(\alpha_{Bj}^{(4)}) \exp \left[im_8 (u_{Bj}^{(4)} t + \varphi_{Bj}^{(4)}) \right]. \quad (24)
 \end{aligned}$$

将参数设定为 $\Delta_{ABj} = u_{Bj}^{(2)}$. 对于 j 为奇数 (偶数) 的比特, 设定参数 $\Delta_{\nu j} = u_{\nu j}^{(1)}$ ($-u_{\nu j}^{(1)}$). 另外, 本文参数满足 $u_{\nu j}^{(d)} \gg \{g_{\nu j}, \tilde{g}_j\}$. 利用旋波近似, 可以忽略掉哈密顿量 (23) 式和 (24) 式中的振荡项. 最后可以得到如下哈密顿量:

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = & \sum_{\nu,j} \left(t_{\nu j} e^{i\tilde{\varphi}_{\nu j}} \hat{a}_{\nu(j-1)}^\dagger \hat{a}_{\nu j} + \text{H.c.} \right) \\
 & + \sum_j \left(\tilde{t}_{ABj} e^{i\tilde{\varphi}_{ABj}} \hat{a}_{Aj}^\dagger \hat{a}_{Bj} + \text{H.c.} \right), \quad (25)
 \end{aligned}$$

其中, 比特间的有效耦合强度为

$$\begin{aligned}
 t_{\nu j} = & g_0 J_1(\alpha_{\nu(j-1)}^{(1)}) \prod_{d=2}^4 J_0(\alpha_{\nu(j-1)}^{(d)}) \prod_{d=1}^4 J_0(\alpha_{\nu j}^{(d)}), \\
 \tilde{t}_{ABj} = & g_0 J_1(\alpha_{Bj}^{(2)}) \prod_{d=1}^4 J_0(\alpha_{Aj}^{(d)}) \prod_{d=1, d \neq 2}^4 J_0(\alpha_{Bj}^{(d)}). \quad (26)
 \end{aligned}$$

相位 $\tilde{\varphi}_{\nu j} = (-1)^{(j+1)} i(\pi/2 + \varphi_{\nu j}^{(1)})$, $\tilde{\varphi}_{ABj} = i(\pi/2 + \varphi_{Bj}^{(2)})$.

从 (26) 式可以看出, 参数 $t_{\nu j}$ 和 $\tilde{t}_{ABj}$ 是 $\alpha_{\nu j}^{(d)}$ 的函数. 如果本文中的双链超导量子电路一共有 $2N$ 个比特, 则比特之间有效耦合强度 $t_{\nu j}$ 和 $\tilde{t}_{ABj}$ 共有 $3N - 2$ 个, 相应地, 可以调控的参数 $\alpha_{\nu j}^{(d)}$ 一共有 $8N$ 个. 可以看出, 可调控参数的数量总是大于比特之间有效耦合强度的数量. 因此哈密顿量 (25) 式中的耦合强度 $t_{\nu j}$ 和 $\tilde{t}_{ABj}$ 是独立可调的. 那么, 本文可以通过选择合适的参数来实现两链 SSH 模型, 即当 j 为奇数时, 有 $t_{Aj} = t_1$ 及 $t_{Bj} = t_2$, 当 j 为偶数时, 有 $t_{Aj} = t_2$ 以及 $t_{Bj} = t_1$. 通过调节参数 $\alpha_{\nu j}^{(d)}$, 本文将链间比特的有效耦合强度设定为 $\tilde{t}_{ABj} = 1$. 之后, 将外加偏置磁通的有效相位均设置为 $-\pi/2$, 即相位 $\tilde{\varphi}_{\nu j} = \tilde{\varphi}_{ABj} = 0$. 此时, 在超导量子电路系

统中实现了两链 SSH 模型:

$$\hat{H} = \sum_j \left(t_1 \hat{b}_{(j)}^\dagger \hat{a}_{j+1} + t_2 \hat{a}_{(j)}^\dagger \hat{b}_{j+1} + \hat{a}_j^\dagger \hat{b}_j + \text{H.c.} \right). \quad (27)$$

为了讨论方便, 下文中用 $\hat{a}_j$ ($\hat{b}_j$) 表示 A 链中 j 为奇数 (偶数) 和 B 链中 j 为偶数 (奇数) 的玻色湮灭算符. 另外, 在接下来的讨论中, 只考虑单激发的情况.

3 拓扑相图

双链的 SSH 模型已经通过电容耦合的 transmon 比特建立. 本节将讨论双链 SSH 模型的拓扑相图. 考虑傅里叶变换 $\hat{a}_k = \sum_j e^{ikj} \hat{a}_j / \sqrt{N}$ 和 $\hat{b}_k = \sum_j e^{ikj} \hat{b}_j / \sqrt{N}$, 其中 k 取值为 $(-\pi, \pi]$. k 空间中哈密顿量 (27) 式可表示为 $\hat{H} = \sum_k (\hat{a}_k^\dagger, \hat{b}_k^\dagger) \hat{h}(k) \times \begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{b}_k \end{pmatrix}$, 其中

$$\hat{h}(k) = \varepsilon(k) \cdot \hat{\sigma}, \quad (28)$$

式中 $\varepsilon(k) = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$, 其中 $\varepsilon_x = (t_1 + t_2) \cos(k) + 1$, $\varepsilon_y = (t_1 - t_2) \sin(k)$, $\varepsilon_z = 0$. $\hat{\sigma}$ 是三维泡利算符. k 空间中的能谱可以通过对角化哈密顿量 (28) 式得到:

$$\varepsilon_{\pm} = \pm \sqrt{|t_1 e^{-ik} + t_2 e^{ik} + 1|^2}. \quad (29)$$

由 (29) 式可知, 能谱的两个能带会在 $\varepsilon_{\pm} = 0$ 时发生简并. 当 $\varepsilon_{\pm} = 0$ 时有:

$$(t_1 + t_2) \cos(k_c) + 1 = 0, \quad (30)$$

$$(t_1 - t_2) \sin(k_c) = 0, \quad (31)$$

其中 k_c 是能带简并点的波矢. 通常情况下, 参数空间中能带简并点两侧的拓扑性质会发生变化. 由

(30) 式和 (31) 式可知, 根据 k_c 的不同取值, 拓扑相边界可以分为两类. 第一类是当 $k_c \neq 0$ 时, 有 $t_1 = t_2$ 以及 $\cos(k_c) = -1/(2t_2)$. 第二类是当 $k_c = 0$ 时, 即 $\sin(k_c) = 0$ 时, 有 $\cos(k_c) = -1/(t_1 + t_2)$. 那么, 可以得到第一类相边界:

$$t_1 = t_2, \quad |2t_2| > 1, \quad (32)$$

以及第二类相边界:

$$t_1 + t_2 = \pm 1. \quad (33)$$

第一类相边界的能带有两个节点 $\pm k_c$. 第二类相边界的能带有一个节点 $k_c = \pi$ 或 $k_c = 0$. 两类相边界有两个交点, 为 $t_1 = t_2 = \pm 1/2$. 本文将两类相边界以及交点 $t_1 = t_2 = \pm 1/2$ 上对应的能带图画在了图 2 中, 可以更直观地看到第一类相边界对应能带的两个节点 (图 2(a)) 以及第二类相边界对应能带的一个节点 (图 2(b)). 另外, 第一类相边界能带的两个节点在相边界交点处相遇, 变为一个节点 (图 2(c)).

接下来, 进一步探索相边界两侧的拓扑性质. 首先需要计算拓扑不变量. 本文中, 由于哈密顿量 $\hat{h}(k)$ 有 PT 对称性, 因此根据 Altland-Zirnbauer 拓扑分类^[44], 能带的拓扑不变量为绕数:

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \mathbf{v} \times \partial_k \mathbf{v}, \quad (34)$$

其中, $\mathbf{v} = (\varepsilon_x(k), \varepsilon_y(k)) / \sqrt{\varepsilon_x^2(k) + \varepsilon_y^2(k)}$.

根据拓扑不变量 N 的分布, 图 3 给出了参数空间中的相图. 图中红色实线标记的是第一类相边界 ((32) 式), 发现相边界两侧的拓扑不变量分别为 -1 和 1 . 这表明第一类相边界的两侧区域中, 能带都是拓扑非平庸的, 并且两侧区域的拓扑不变量之差为 2. 黑色实线标记的是第二类相边界 ((33) 式), 边界两侧的拓扑不变量分别为 0 和 1 或 0 和 -1 . 这表明第二类相边界两侧中总有一侧是拓扑平庸的,

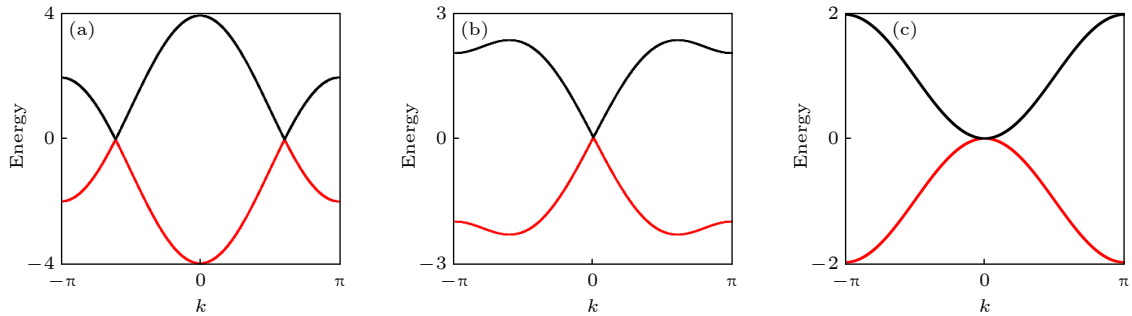


图 2 双链 SSH 模型的能谱图 (a) $t_1 = t_2 = 1.5$; (b) $t_1 = -1.5$ 和 $t_2 = 0.5$; (c) $t_1 = t_2 = -0.5$
Fig. 2. Energy bands of SSH model: (a) $t_1 = t_2 = 1.5$; (b) $t_1 = -1.5$ and $t_2 = 0.5$; (c) $t_1 = t_2 = -0.5$.

另一侧是拓扑非平庸的, 并且两侧区域的拓扑不变量之差为 1.

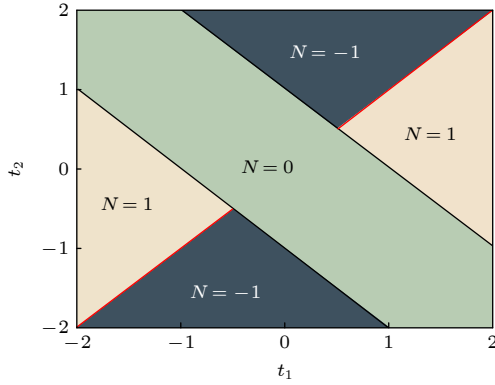


图 3 双链 SSH 模型在参数空间 t_1 - t_2 中的拓扑相图. 深绿色的区域是拓扑数 $N = -1$ 的区域, 浅咖色的区域是拓扑数 $N = 1$ 的区域, 浅绿色的区域是拓扑数 $N = 0$ 的区域; 红色的线标记的是第一类相边界, 黑色的线标记的是第二类相边界

Fig. 3. Topological phase diagram in the t_1 - t_2 plane. The bottle green, light coffee color and pale green areas indicate the areas with $N = -1$, $N = 1$ and $N = 0$ respectively. N denotes the winding number. The red and black lines indicate the first and second phase boundaries respectively.

接下来进一步讨论开边界条件下相图中不同区域的特性. 根据体边对应原理^[45,46], 当体态表现为拓扑非平庸时, 边界态是没有能隙的. 因此, 图 3 中的拓扑非平庸区域在开边界条件下其能带会出现准 0 能模. 为了证明这点, 图 4 给出了开边界

条件下的能带图以及相应的波函数. 图 4(a₁) 是 $N = 1$ 时对应的能带, 可以看出, 在能量 0 点处出现了两个简并的能隙闭合点. 相应的波函数 $\psi_\alpha(j)$ 画在图 4(b₁) 中, 可以看出其呈指数地局域在系统的边界上, 这正是拓扑相在开边界条件下的一个显著特征. 图 4(a₂) 和图 4(b₂) 是 $N = -1$ 时对应的能带及波函数, 它们与图 4(a₁) 和图 4(b₁) 有相同的特征. 图 4(a₃) 和图 4(b₃) 是 $N = 0$, 也就是拓扑平庸时对应的能带及波函数, 可以发现此时 0 能简并消失, 出现能隙, 并且波函数没有边界局域的特征.

4 节点的拓扑特性

由上文知, 系统存在两种类型的相边界. 可以发现, 这两类相边界最显著的不同是, 第一类相边界两侧的相区域都是拓扑非平庸的且拓扑数相差 2; 第二类相边界两侧的相区域总有一侧是拓扑平庸的, 另一侧拓扑非平庸且两侧拓扑数相差 1. 那么这两类相边界是否有不同的拓扑性质呢? 本节将讨论这个问题.

由哈密顿量 (29) 知, ε 在布洛赫球的 x - y 平面上的轨迹为一个正椭圆:

$$\frac{(x-1)^2}{(t_1+t_2)^2} + \frac{y^2}{(t_1-t_2)^2} = 1. \quad (35)$$

对于第 3 节中拓扑数为 1 和 -1 的相区域, 该椭圆

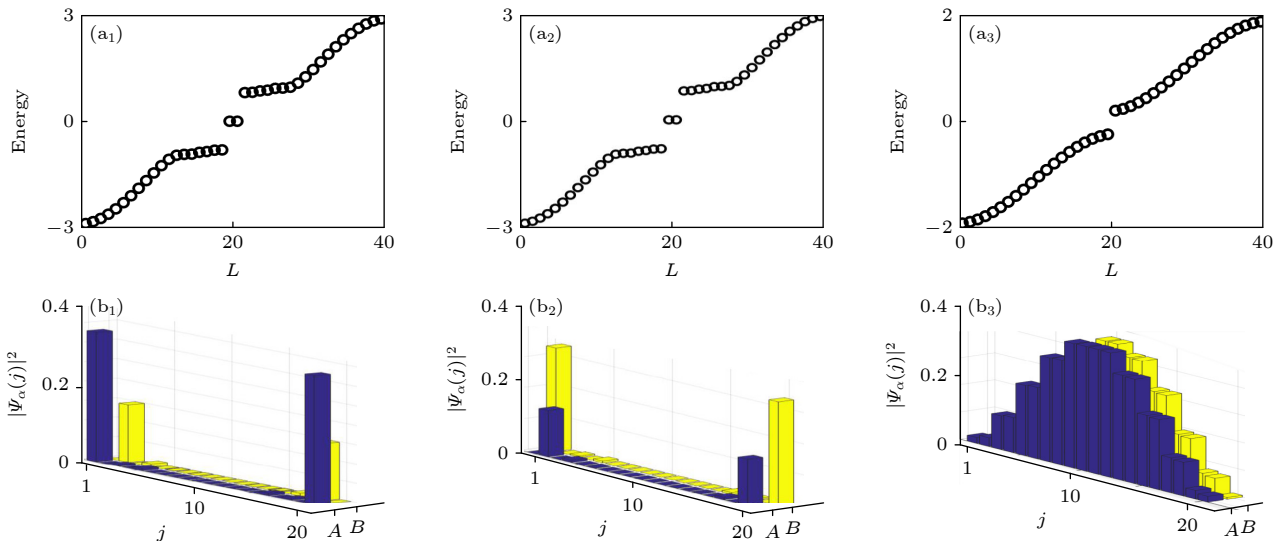


图 4 开边界能带和边界态 (a₁) $t_1 = 1.5$ 和 $t_2 = 0.5$; (a₂) $t_1 = 0.5$ 和 $t_2 = 1.5$; (a₃) $t_1 = 0.5$ 和 $t_2 = 0.3$. (b₁)—(b₃) 是 (a₁)—(a₃) 中第 20 个能带的波函数

Fig. 4. Energy bands with open boundary condition with (a₁) $t_1 = 1.5$ and $t_2 = 0.5$; (a₂) $t_1 = 0.5$ and $t_2 = 1.5$; (a₃) $t_1 = 0.5$ and $t_2 = 0.3$. The wave functions corresponding with the 20th energy bands of (a₁), (a₂), and (a₃) are plotted in (b₁), (b₂), and (b₃), respectively.

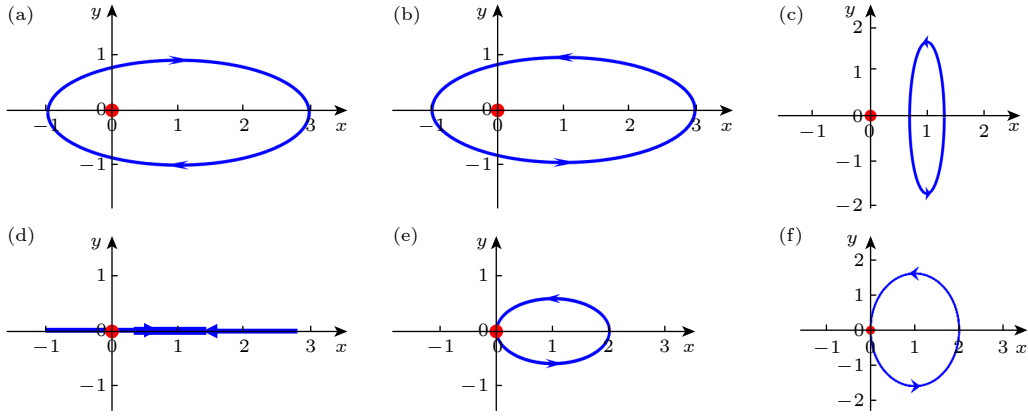


图 5 不同参数下 ϵ 在布洛赫球的 x - y 平面上的轨迹 (a) 拓扑数 $N = 1$ 时 ϵ 的轨迹, 参数设定为 $t_1 = 1.5$ 和 $t_2 = 0.5$; (b) 拓扑数 $N = -1$ 时 ϵ 的轨迹, 参数设定为 $t_1 = 0.5$ 和 $t_2 = 1.5$; (c) 拓扑数 $N = 0$ 时 ϵ 的轨迹, 参数设定为 $t_1 = 1$ 和 $t_2 = -0.7$; (d) 参数满足第一类相边界 $t_1 = t_2$ 时 ϵ 的轨迹, 参数设定为 $t_1 = t_2 = 1$; (e) 参数满足第二类相边界 $t_1 + t_2 = 1$ 时 ϵ 的轨迹, 参数设定为 $t_1 = 0.8$ 和 $t_2 = 0.2$; (f) 参数满足第二类相边界 $t_1 + t_2 = -1$ 时 ϵ 的轨迹, 参数设定为 $t_1 = -1.3$ 和 $t_2 = 0.3$. 图中红点表示原点, 箭头表示轨迹的运动方向

Fig. 5. The curve of the vector ϵ in x - y plane of the Bloch sphere with (a) $t_1 = 1.5$ and $t_2 = 0.5$; (b) $t_1 = 0.5$ and $t_2 = 1.5$; (c) $t_1 = 1$ and $t_2 = -0.7$; (d) $t_1 = t_2 = 1$; (e) $t_1 = 0.8$ and $t_2 = 0.2$; (f) $t_1 = -1.3$ and $t_2 = 0.3$. The red points and arrows indicate the origin points and direction of the curve respectively.

运动轨迹的旋转方向相反但均将原点 $(0, 0)$ 包含在椭圆内部 (图 5(a) 和图 5(b)). 而对于拓扑数为 0 的相区域, 该椭圆始终没有将原点 $(0, 0)$ 包含在椭圆内部 (图 5(c)). 布洛赫球上的原点正是上文中得到的能级简并点. 这与第 3 节得到的结论是一致的. 那么, 当参数取在相边界上时, 椭圆轨迹会有怎样的变化呢? 对于第一类相边界, 参数满足 (30) 式, 椭圆轨迹方程 (35) 变为布洛赫球 x 轴上的线段 (图 5(d)):

$$x = 2t_1 \cos(k) + 1, \quad y = 0. \quad (36)$$

显然, 这是一个以 $(1, 0)$ 为平衡位置, $4|t_1|$ 为振幅的简谐振动. 对于第二类相边界, 参数满足 (31) 式, 椭圆轨迹 (35) 式仍为一个正椭圆 (图 5(e), (f)):

$$(x - 1)^2 + \frac{y^2}{(2t_1 \pm 1)} = 1. \quad (37)$$

该椭圆的半轴长度分别为 1 和 $|2t_1 \pm 1|$, 并且可以注意到, 该椭圆会经过原点 $(0, 0)$. 至此可以看到, ϵ 在这两类相边界上有完全不同的运动轨迹. 最重要的是, 轨迹方程 (36) 在完成一个振动周期后会经过两次原点 $(0, 0)$, 并且两次运动轨迹的方向相反, 而轨迹方程 (37) 在完成一个运动周期后只经过了一次原点 $(0, 0)$. 从这里可以看出第一类相边界上的能带是拓扑非平庸的, 而第二类相边界上的能带是拓扑平庸的.

接下来, 分析拓扑相边界的另一些拓扑特性.

首先, 在 k 空间定义一个三维的矢量场 $\mathbf{F}(k)$:

$$\mathbf{F}(k) = (\langle \hat{\sigma}_x \rangle(k), \langle \hat{\sigma}_y \rangle(k), \langle \hat{\sigma}_z \rangle(k)), \quad (38)$$

其中 $\langle \hat{\sigma}_l \rangle(k) (l = x, y, z)$ 是哈密顿量 $\hat{h}_k$ 本征态 $|k\rangle$ 下 $\langle \hat{\sigma}_l \rangle(k)$ 的期待值. 考虑第一类相边界, 即 $t_1 = t_2$ 时, 可以得到场矢量为

$$\mathbf{F}(k) = (\text{sgn}(2t_1 \cos(k)) + 1, 0, 0), \quad (39)$$

其中 $\text{sgn}(\cdot)$ 是符号函数. 可以看出, 场 $\mathbf{F}$ 存在扭结, 扭结出现在 $k_c = \arccos(-1/2t_1)$ 的位置, 在第一布里渊区 $(-\pi, \pi]$ 中, k_c 有两个取值. 这两个扭结正是第一类相边界的能带简并点. 两个扭结的拓扑荷分别为 1 和 -1. 为了直观地看到场 $\mathbf{F}$ 的扭结, 图 6 给出了 (40) 式中自旋 $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$ 期待值随 k 的变化. 从这里也能够判断出, 第一类相边界上的两个能带简并点 (也称为节点) 是受到拓扑保护的.

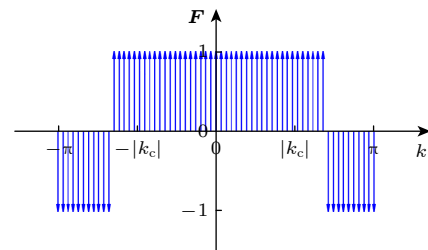


图 6 参数设定为 $t_1 = t_2 = 1$ (第一类相边界上) 时矢量 $\mathbf{F}(k)$ 随波矢 k 的变化. 图中箭头表示自旋的方向, k_c 为能级简并点处的波矢

Fig. 6. The variation of the vector $\mathbf{F}(k)$ as k changes with $t_1 = t_2 = 1$. The arrows and k_c indicate the direction of the spin and degenerate energy point respectively.

对于第二类相边界, 即参数满足 $|t_1 + t_2| = 1$ 时, 场矢量 $\mathbf{F}(k)$ 为

$$\mathbf{F}(k) = (\text{sgn}[1 \pm (t_1 + t_2)], 0, 0). \quad (40)$$

此时场矢量 $\mathbf{F}$ 与 k 无关, 也就是说这时不存在扭结. 因此, 这时的节点是拓扑平庸的.

至此, 了解到只有第一类相边界的能带节点是受到拓扑保护的, 因此在这一节点处一定有其独有的对称性. 接下来讨论这一问题. 当系统处在第一类相边界时, 参数满足 $t_1 = t_2$. 这时系统不再是双链 SSH 模型, 而变成了两条完全相同的比特链. 这时会出现两个双链 SSH 模型中没有的对称性. 这两个对称性分别用一步平移算符 $\hat{T}_1$ 和子格子反演算符 $\hat{P}$ 来刻画. 这两个算符的作用分别为

$$\hat{T}_1 \hat{a}_j \hat{T}_1^{-1} = \hat{b}_{j+1}, \quad \hat{T}_1 \hat{b}_j \hat{T}_1^{-1} = \hat{a}_{j+1}, \quad (41)$$

以及

$$\hat{P} \hat{a}_j \hat{P}^{-1} = \hat{b}_j, \quad \hat{P} \hat{b}_j \hat{P}^{-1} = \hat{a}_j. \quad (42)$$

$\hat{T}_1$ 的作用是沿着每条比特链移动一个格点. 当 $t_1 \neq t_2$ 时, $\hat{T}_1$ 和哈密顿量 (28) 式是不对易的. $\hat{P}$ 的作用是将 SSH 模型的两个子格子互换位置. 显然当 $t_1 \neq t_2$ 时, $\hat{T}_1$ 与哈密顿量 (28) 式也是不对易的. 当 $t_1 = t_2$ 时, 可以得到:

$$[\hat{H}, \hat{T}_1] = [\hat{H}, \hat{P}] = 0, \quad (43)$$

哈密顿量 $\hat{H}$ 、算符 $\hat{T}_1$ 和 $\hat{P}$ 拥有相同的本征态:

$$|\chi_{\pm}(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_j e^{-ikj} (\hat{b}_j^{\dagger} \pm \hat{a}_j^{\dagger}) |0\rangle, \quad (44)$$

相应的本征能量为

$$\varepsilon_k^{\pm} = \pm |2t_1 \cos(k) + 1|. \quad (45)$$

由 (45) 式得, 这些本征态满足:

$$\hat{T}_1 |\chi_k^{\pm}\rangle = \pm e^{ik} |\chi_k^{\pm}\rangle, \quad (46)$$

以及

$$\hat{P} |\chi_k^{\pm}\rangle = \pm |\chi_k^{\pm}\rangle. \quad (47)$$

由上文知, 节点出现在波矢为 k_c 的位置, 对应的能量简并本征态为

$$\begin{aligned} |\chi_{\pm}(k_c)^a\rangle &= \frac{1}{N} \sum_j e^{-ik_c j} \hat{a}_j^{\dagger} |0\rangle, \\ |\chi_{\pm}(k_c)^b\rangle &= \frac{1}{N} \sum_j e^{-ik_c j} \hat{b}_j^{\dagger} |0\rangle, \end{aligned} \quad (48)$$

这些本征态满足:

$$\hat{T}_1 |\chi_k^a\rangle = e^{ik_c} |\chi_k^b\rangle, \quad \hat{T}_1 |\chi_k^b\rangle = e^{ik_c} |\chi_k^a\rangle, \quad (49)$$

$$\hat{P} |\chi_k^a\rangle = |\chi_k^b\rangle, \quad \hat{P} |\chi_k^b\rangle = |\chi_k^a\rangle, \quad (50)$$

这说明本文第一类相边界的节点受到一步平移对称性和子格子反演对称性的保护.

5 结 论

本文提出了利用 transmon 比特实现耦合强度独立可调的双链 SSH 模型的可行性实验方案, 发现了拓扑绝缘体和两类不同拓扑性质的相边界. 构建模型时, 本文首先设计了电容耦合的双链 transmon 比特, 然后用两个交流微波驱动每一个 transmon 比特, 从而实现比特间耦合强度的独立调控, 最后通过改变比特间耦合参数实现交错的双链 SSH 模型. 双链 SSH 模型是探索拓扑物态的重要模型之一, 本文提供了一种构建双链 SSH 模型的新途径. 接下来探索了交错双链 SSH 模型的拓扑性质, 首先计算了 k 空间中双链 SSH 模型的本征能量, 并发现了两种类型的相边界. 之后在参数空间中画出了拓扑相图, 发现了两类拓扑绝缘相, 其拓扑数分别为 1 和 -1, 对应有两类边界态. 拓扑相图也进一步给出了两类相边界的分布以及它们两侧拓扑数的值. 最后分析了两类相边界的拓扑性质. 本文将布洛赫态映射为 k 空间的矢量场, 发现第一类相边界两个能带节点处的矢量场有两个扭结. 两个节点的拓扑荷分别为 1 和 -1, 并且受到平移和反转对称性的保护. 另外, 本文发现第二类相边界的能带节点处的矢量场不存在扭结, 节点是拓扑平庸的. 本文的结果填补了超导量子电路系统中实现双链 SSH 模型的空白, 并为探索链条型物理系统、拓扑物态以及节点型拓扑半金属提供了新的途径.

参考文献

- [1] Bansil A, Lin H, Das T 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 021004
- [2] Duncan F, Haldane M 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 040502
- [3] Burkov A A 2016 *Nat. Mater.* **15** 1145
- [4] Armitage N P, Mele E J, Vishwanath A 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 015001
- [5] Shi W J, Wieder B J, Meyerheim H L, Sun Y, Zhang Y, Li Y W, Shen L, Qi Y P, Yang L X, Jena J, Werner P, Koepf K, Parkin S, Chen Y L, Felser C, Bernevig B A, Wang Z J 2021 *Nat. Phys.* **17** 381

- [6] Wei Q, Zhang X W, Deng W Y, Lu J Y, Huang X Q, Yan M, Chen G, Liu Zh Y, Jia S T 2021 *Nat. Mater.* **20** 812
- [7] Weng H, Wu Q, Dai X, Fang Z, Wang Z 2013 *Phys. Rev. B* **88** 125427
- [8] Liu Z K, Jiang J, Zhou B, Wang Z J, Zhang Y, Weng H M, Prabhakaran D, Mo S, Peng H, Dudin P, Kim T, Hoesch M, Fang Z, Dai X, Shen Z X, Feng D L, Hussain Z, Chen Y L 2014 *Nat. Mater.* **13** 677
- [9] Liu Z K, Zhou B, Zhang Y, Wang Z J, Weng H M, Prabhakaran D, Mo S K, Shen Z X, Fang Z, Dai X, Hussain Z, Chen Y L 2014 *Science* **343** 864
- [10] Lv B Q, Muff S, Qian T, Song Z D, Nie S M, Xu N, Richard P, Matt C E, Plumb N C, Zhao L X, Chen G F, Fang Z, Dai X, Dil J H, Mesot J, Shi M, Weng H M, Ding H 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 217601
- [11] Lv B Q, Weng H M, Fu B B, Wang X P, Miao H, Ma J, Richard P, Huang X C, Zhao L X, Chen G F, Fang Z, Dai X, Qian T, Ding H 2015 *Phys. Rev. X* **5** 031013
- [12] Wu S, Yan B, Sun Y 2015 *Phys. Rev. B* **92** 115428
- [13] Soluyanov A A, Gresch D, Wang Z, Wu Q, Troyer M, Dai X, Bernevig B A 2015 *Nature* **527** 495
- [14] Deng K, Wan G, Deng P, Zhang K, Ding S, Wang E, Yan M, Huang H, Zhang H, Xu Z, Denlinger J, Fedorov A, Yang H, Duan W, Yao H, Wu Y, Fan S, Zhang H, Chen X, Zhou S 2016 *Nat. Phys.* **12** 1105
- [15] Huang L, McCormick T M, Ochi M, Zhao Z, Suzuki M, Arita R, Wu Y, Mou D, Cao H, Yan J, Trivedi N, Kaminski A 2016 *Nat. Mater.* **15** 1155
- [16] Yan M, Huang H, Zhang K, Wang E, Yao W, Deng K, Wan G, Zhang H, Arita M, Yang H, Sun Z, Yao H, Wu Y, Fan S 2017 *Nat. Commun.* **8** 257
- [17] Li C, Lin S, Zhang G, Song Z 2017 *Phys. Rev. B* **96** 125418
- [18] Tan X Sh, Zhang D W, Liu Q, Xue G M, Yu H F, Zhu Y Q, Yan H, Zhu Sh L, Yu Y 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 130503
- [19] Devoret M H, Schoelkopf R J 2013 *Science* **339** 1169
- [20] Wendin G 2017 *Rep. Prog. Phys.* **80** 106001
- [21] Blok M S, Ramasesh V V, Schuster T, O'Brien K, Kreikebaum J M, Dahlen D, Morvan A, Yoshida B, Yao N Y, Siddiqi I 2021 *Phys. Rev. X* **11** 021010
- [22] Goss N, Morvan A, Marinelli B, Mitchell B K, Nguyen L B, Naik R K, Chen L, Jünger C, Kreikebaum J M, Santiago D I, Wallman J J, Siddiqi I 2022 *Nat. Commun.* **13** 7481
- [23] Brecht T, Pfaff W, Wang C, Chu Y, Frunzio L, Devoret M H, Schoelkopf R J 2016 *npj Quantum Inf.* **2** 16002
- [24] Barends R, Shabani A, Lamata L, Kelly J, Mezzacapo A, Heras U L, Babbush R, Fowler A G, Campbell B, Chen Y, Chen Z, Chiaro B, Dunsmworth A, Jeffrey E, Lucero E, Megrant A, Mutus J Y, Neeley M, Neill C, O'Malley P J J, Quintana C, Roushan P, Sank D, Vainsencher A, Wenner J, White T C, Solano E, Neven H, Martinis J M 2016 *Nature* **534** 222
- [25] Jurcevic P, Abhari A J, Bishop L S, Lauer I, Bogorin D F, Brink M, Capelluto L, Günlük O, Itoko T, Kanazawa N, Kandala A, Keefe G A, Krsulich K, Landers W, Lewandowski E P, McClure D T, Nannicini G, Narasgond A, Nayfeh H M, Pritchett E, Rothwell M B, Srinivasan S, Sundaresan N, Wang C, Wei K X, Wood C J, Yau J B, Zhang E J, Dial O E, Chow J M, Gambetta J M 2021 *Quantum Sci. Technol.* **6** 025020
- [26] Chenlu W, Li X, Xu H, Li Z, Wang J, Yang Z, Mi Z, Liang X, Su T, Yang C, Wang G, Wang W, Li Y, Chen M, Li C, Linghu K, Han J, Zhang Y, Feng Y, Song Y, Ma T, Zhang J, Wang R, Zhao P, Liu W, Xue G, Jin Y, Yu H 2022 *npj Quantum Inf.* **8** 3
- [27] Xu K, Sun Z H, Liu W, Zhang Y R, Li H K, Dong H, Ren W H, Zhang P F, Nori F, Zheng D N, Fan H, Wang H 2020 *Sci. Adv.* **6** eaba4935
- [28] Xu K, Chen J J, Zeng Y, Zhang Y R, Song C, Liu W X, Guo Q J, Zhang P F, Xu D, Deng H, Huang K Q, Wang H, Zhu X B, Zheng D N, Fan H 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 050507
- [29] Salathé Y, Mondal M, Oppliger M, Heinsoo J, Kurpiers P, Potočnik A, Mezzacapo A, Heras U L, Lamata L, Solano E, Filipp S, Wallraff A 2015 *Phys. Rev. X* **5** 021027
- [30] Kandala A, Mezzacapo A, Temme K, Takita M, Brink M, Chow J M, Gambetta J M 2017 *Nature* **549** 242
- [31] Cai W, Han J, Mei F, Xu Y, Ma Y, Li X, Wang H, Song Y P, Xue Z Y, Yin Z Q, Jia S T, Sun L Y 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 080501
- [32] Tan X S, Zhang D W, Yang Z, Chu J, Zhu Y Q, Li D Y, Yang X P, Song S Q, Han Z K, Li Z Y, Dong Y Q, Yu H F, Yan H, Zhu S L, Yu Y 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 159902
- [33] Ma R, Saxberg B, Owens C, Leung N, Lu Y, Simon J 2019 *Nature* **566** 51
- [34] Wang Z, Ge Z Y, Xiang Z, Song X, Huang R Z, Song P, Guo X Y, Su L, Xu K, Zheng D, Fan H 2022 *Phys. Rev. Res.* **4** L022060
- [35] Xiang Z L, Ashhab S, You J Q, Nori F 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 623
- [36] Gu X, Kockum A F, Miranowicz A, Liu Y, Nori F 2017 *Phys. Rep.* **718** 1
- [37] Yu X M, Tan X S, Yu H F, Yu Y 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 220302 (in Chinese) [喻祥敏, 谭新生, 于海峰, 于扬 2018 物理学报 **67** 220302]
- [38] Zhao S P, Liu Y X, Zheng D N 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 228501 (in Chinese) [赵士平, 刘玉玺, 郑东宁 2018 物理学报 **67** 228501]
- [39] Yan Z G, Zhang Y R, Gong M, Wu Y L, Zheng Y R, Li S W, Wang C, Liang F T, Lin J, Lin Y, Guo C, Sun L H, Peng C Z, Xia K Y, Deng H, Rong H, You J Q, Nori F, Fan H, Zhu X B, Pan J W 2019 *Science* **364** 753
- [40] Ye Y S, Ge Z Y, Wu Y L, Wang S Y, Ming G, Zhang Y R, Zhu Q L, Yang R, Li S W, Liang F T, Lin J, Xu Y, Guo C, Sun L H, Cheng C, Ma N, Meng Z Y, Deng H, Rong H, Lu C Y, Peng C Z, Fan H, Zhu X B, Pan J W 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 050502
- [41] Didier N, Sete E A, Silva M P D, Rigetti C 2018 *Phys. Rev. A* **97** 022330
- [42] Li X, Ma Y, Han J, Chen T, Xu Y, Cai W, Wang H, Song Y P, Xue Z Y, Yin Z Q, Sun L Y 2018 *Phys. Rev. Appl.* **10** 054009
- [43] Koch J, Yu T M, Gambetta J, Houck A A, Schuster D I, Majer J, Blais A, Devoret M H, Girvin S M, Schoelkopf R J 2007 *Phys. Rev. A* **76** 042319
- [44] Chiu C K, Teo J C Y, Schnyder A P, Ryu S 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 035005
- [45] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [46] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057

Topological nonmediocre nodes on two-leg superconducting quantum circuits^{*}

Guan Xin^{1)†} Chen Gang²⁾³⁾⁴⁾

1) (*Department of Materials and Chemical Engineering, Taiyuan University, Taiyuan 030032, China*)

2) (*State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Institute of Laser Spectroscopy, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

3) (*Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

4) (*School of Physics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China*)

(Received 7 February 2023; revised manuscript received 13 May 2023)

Abstract

Topological gapless systems, as the connection of the different topological quantum phases, have received much attention. Topological nonmediocre nodes are typically observed in two- or three-dimensional gapless systems. In this paper, we demonstrate that the topological nonmediocre nodes are existent in a model that lies between one dimension and two dimensions. Superconducting circuits, as essential all-solid state quantum devices, have offered a promising platform for studying the macro-controlling quantum effects. Recently, experimental achievements have enabled the realization of tunable coupling strengths between transmon qubits and the implementation of a one-dimensional Su-Schrieffer-Heeger (SSH) model [Li X *et al.* 2018 *Phys. Rev. Appl.* **10** 054009]. According to this work, herein we present a two-leg SSH model implemented in superconducting circuits and demonstrate the existence of topological nonmediocre nodes. Firstly, two-leg superconducting circuit with transmon qubits which are coupled with their nearest-neighbor sites by capacitors is designed. To construct the two-leg SSH model, we introduce two alternating-current magnetic fluxes to drive each transmon qubit. We discover two types of phase boundaries in the SSH model and obtain the corresponding energy spectra and phase diagram. We identify two distinct topological insulating phases characterized by winding number ± 1 , and the corresponding edge states exhibit distinct characteristics. Moreover, we discuss the topological properties of the two phase boundaries. By representing the Bloch states as a vector field in k space, we demonstrate the existence of two kinks of nonmediocre nodes with first-type phase boundaries. These two nonmediocrenodes possess distinct topological charges of 1 and -1 , respectively. On the other hand, the nonmediocre nodes with the second-type phase boundaries are topologically trivial. These results open the way for exploring novel topological states, ladder physical systems, and nodal point topological semimetals.

Keywords: superconducting circuits , two-leg Su-Schrieffer-Heeger model, nodal points

PACS: 03.67.Ac, 05.30.Rt, 85.25.Cp, 71.10.-w

DOI: 10.7498/aps.72.20230152