



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Trabajo de Tesis Doctoral:

**Amplitudes de dispersión desde
teoría cuántica de campos y teorías
de supercuerdas**

Tesista: Lic. Martín Parlanti

Director: Dr. Martín Schvellinger

Año 2026

Agradecimientos

En primer lugar agradecer al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata por darme el lugar apropiado para cursar las respectivas materias de mi doctorado en mi etapa formativa. Por supuesto también en pleno agradecimiento con el Instituto de Física La Plata, IFLP (UNLP-CONICET) por el lugar espectacular donde pude desarrollar mi trabajo. Todo ésto fue posible gracias al financiamiento a través de la Beca interna doctoral que me otorgó el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

Infinitamente agradecido a mi director de tesis, Dr. Martín Schvellinger por su total dedicación para conmigo y por su paciencia por cada momento de dificultad que se presentó en cada trabajo que nos disponíamos a enfrentar. Gracias por su actitud siempre motivadora, dándome siempre ánimo en situaciones en las que se presentaba alguna complicación. Agradezco también a mi colega Lucas Martin por su colaboración. Gracias también a la Dra. Carmen Nuñez y al Dr. David Jorrín por sus comentarios de gran utilidad y por su siempre buena disposición.

Esta tesis no hubiera podido ser posible sin el apoyo incondicional de mi madre, Patricia Banco, de mi padre, Carlos Parlanti y de mi hermano, Andrés Parlanti. Fueron mi sostén en cada momento difícil y me hicieron sentir su orgullo por cada logro. Gracias por siempre apoyarme en todo lo que hago. Gracias a mi tía, Cecilia Banco, por siempre visitarme mientras yo estudiaba, preguntándome que significaba lo escrito en mi pizarra. Por último, agradezco a mis perros, Geo y Hachico, por ser mi compañía silenciosa e incondicional durante largas horas de trabajo.

Resumen

En esta tesis se han estudiado las amplitudes de dispersión de los siguientes procesos elásticos $2 \rightarrow 2$:

$$\mathbf{glueball} + \mathbf{glueball} \rightarrow \mathbf{glueball} + \mathbf{glueball} \quad (1)$$

$$\mathbf{fermión}_{1/2} + \mathbf{fermión}_{1/2} \rightarrow \mathbf{fermión}_{1/2} + \mathbf{fermión}_{1/2} \quad (2)$$

$$\mathbf{glueball} + \mathbf{fermión}_{1/2} \rightarrow \mathbf{glueball} + \mathbf{fermión}_{1/2} \quad (3)$$

Todos estos son procesos *exclusivos* y de dispersión *dura* (*Hard Scattering* en inglés), y donde han sido analizados en dos regímenes de altas energías: ángulo fijo y límite de Regge. Aclararemos todas estas características de los procesos de dispersión durante el transcurrir de los capítulos.

El interés de estudiar este tipo de procesos de dispersión en esta tesis es que son analizados en el régimen de *acoplamiento fuerte* para la constante de acoplamiento de la teoría de gauge que corresponda. Esta teoría de campos es una teoría muy particular, la teoría $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills con grupo de gauge $SU(N_c)$, siendo N_c el rango del grupo de gauge. Mediante la dualidad AdS/CFT (o Conjetura de Maldacena) se llegan a las correspondientes amplitudes de dispersión en la teoría de gauge, partiendo desde otro tipo muy distinto de amplitudes, las amplitudes de dispersión en una teoría de supercuerdas de tipo IIB en diez dimensiones.

El modo de vincular ambos tipos de amplitudes de dispersión es con el *ansatz* propuesto por Joseph Polchinski y Matthew Strassler [1], desarrollado en el año 2002. Esta propuesta incorpora una *integración coherente* sobre seis coordenadas transversales (r, Ω_5) al espacio de Minkowski₄, ya que la teoría de supercuerdas que usaremos se encontrará definida sobre un fondo curvo, en particular sobre el espacio $AdS_5 \times S^5$.

Como dijimos anteriormente, las amplitudes de dispersión en la teoría de supercuerdas será un objeto instrumental para llegar a nuestros resultados en cuatro dimensiones. El proceso (1) está vinculado a la amplitud de dispersión de cuatro dilatones, el proceso (2) vinculado con la amplitud de dispersión de cuatro dilatinos y por último, el proceso (3) estará relacionado con la amplitud de dispersión dilatón/dilatino; todas estas amplitudes vistas desde la perspectiva de las teorías de supercuerdas de tipo II. Las dos últimas amplitudes de dispersión en teorías de supercuerdas vinculadas a los procesos (2) y (3) se calcularon desde cero, por lo tanto siendo también resultados de esta tesis.

Índice general

Agradecimientos	1
Resumen	2
1. Introducción y motivación	6
2. Límite planar en Teorías Cuánticas de Campos y la Dualidad AdS/CFT	11
2.1. Límite de 't Hooft	11
2.2. Teoría $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills $SU(N_c)$ en $3 + 1$ dimensiones	17
2.3. Correspondencia AdS/CFT	20
2.3.1. La geometría AdS y la correspondencia entre estados/operadores	20
2.3.2. La dualidad AdS/CFT desde dos perspectivas: cuerdas abiertas y cuerdas cerradas	22
2.3.3. Perspectiva 1: cuerdas abiertas	26
2.3.4. Perspectiva 2: cuerdas cerradas	27
3. Procesos exclusivos en la física de altas energías	31
4. Amplitudes de dispersión en teorías de cuerdas	36
4.1. Cuerdas abiertas bosónicas	37
4.1.1. Construcción de las amplitudes a nivel árbol	38
4.1.2. Dualidad	40
4.1.3. Simetría cíclica	43
4.2. Cuerdas cerradas bosónicas	49
4.2.1. Construcción de las amplitudes a nivel árbol	49
4.3. Relación entre cuerdas abiertas y cerradas: Las relaciones KLT	53
4.4. Supercuerdas en la formulación RNS	55
4.4.1. Amplitudes de cuerdas abiertas a nivel árbol para el sector bosó- nico de la supercuerda	55
4.4.2. Ejemplos	60
4.5. Supercuerdas en la formulación supersimétrica de Green-Schwarz (GS)	63

5. Nuevos resultados para la dispersión de cuerdas cerradas con fermiones	70
5.1. Amplitudes de dispersión en teorías de supercuerdas del tipo II	72
5.1.1. Amplitud de dispersión de 4 dilatones	74
5.1.2. Amplitud de dispersión de 4 dilatinos	77
5.1.3. Amplitud de dispersión de dilatón-dilatino	86
6. Hard scattering de cuatro fermiones de espín 1/2 desde la teoría de cuerdas	97
6.1. El Ansatz de Polchinski-Strassler y el Hard scattering de 4 glueballs . .	97
6.1.1. Integrales angulares en la S^5	103
6.1.2. Límite de Regge para proceso exclusivo de 4 glueballs	105
6.2. Hard scattering de 4 fermiones de espín 1/2	107
6.2.1. Límite de Regge para un proceso exclusivo de 4 fermiones de espín 1/2	115
7. Hard scattering para la dispersión fermión-glueball	120
7.1. Límite de Regge para proceso exclusivo fermión/glueball	129
8. Conclusiones y trabajos a futuro	132
A. Amplitud de dispersión de 4 cuerdas abiertas (vectores de masa nula)	141
B. Los 30 productos tensoriales que contribuyen a la amplitud de dispersión de 4 dilatinos	159
C. Desarrollo explícito de los 30 términos que contribuyen a $K_c^{4\text{-dilatinos}}$	164
D. Los términos de $K_c^{4\text{-Dilatinos}}$	191
E. Los términos de $K_c^{2\text{dilatones}-2\text{dilatinos}}$	196
F. Armónicos esféricos sobre la S^5	201

Esta tesis está construida en base a los siguientes artículos publicados durante la estancia doctoral:

- [2] L. Martin, M. Parlanti and M. Schwelling, “Fermions hard scattering from superstrings,” *Phys. Rev. D* **111** (2025) no.6, 066004 doi:10.1103/PhysRevD.111.066004 [arXiv:2412.08425 [hep-th]].
- [3] L. Martin, M. Parlanti and M. Schwelling, “Four-dilatino superstring theory scattering amplitude and its Regge behavior,” *Phys. Rev. D* **112** (2025) no.6, 066009 doi:10.1103/4hcr-5b57 [arXiv:2503.19150 [hep-th]].
- [4] L. Martin, M. Parlanti and M. Schwelling, “SYM theory hard scattering from the dilaton-dilatino superstring scattering amplitude,” *Phys. Rev. D* **112** (2025) no.8, 086003 doi:10.1103/8qc2-5cqq.
- [5] L. Martin, M. Parlanti and M. Schwelling, “Dilaton-dilatino superstring theory scattering amplitude and its Regge behavior,” [arXiv:2506.16472 [hep-th]].

Capítulo 1

Introducción y motivación

En los años de la década de 1960, la física de las interacciones entre partículas fue un gran enigma al aparecer una gran cantidad de partículas (bariones y mesones) que interactúan mediante la fuerza fuerte y por lo tanto se buscaba poder describir estos fenómenos mediante un marco teórico apropiado. Sin embargo, las teorías cuánticas de campos (TCC) disponibles en esta década no alcanzaban para explicar estos comportamientos de física de interacciones fuertes. A principio de los 60's, J.Chew y S.Frauschi [6] propusieron una representación gráfica J - M_J^2 , siendo J el momento angular de las partículas y M_J^2 la masa al cuadrado. Realizaron este gráfico tanto para mesones como para bariones, y suponiendo que el momento angular J aumentaba linealmente con la M_J^2 ; por lo que luego ajustaron muy bien los datos de la fenomenología con estas líneas rectas de pendiente positiva. Para todas las partículas se obtenían las rectas $J = \alpha' M_J^2 + \alpha_0$ con la misma pendiente $\alpha' \sim 1\text{GeV}^{-2}$. Esto dio lugar a pensar que todos los mesones y bariones eran partículas compuestas y además eran estados ligados mediante la misma fuerza fuerte, por lo que a este concepto se lo llamó la *democracia de partículas* (*nuclear democracy* en inglés). Se desarrolló la idea de la llamada teoría de cuerdas *hadrónica* para describir estos fenómenos, usando un modelo de resonancias (*trayectorias de Regge*). Al considerar que estas trayectorias de Regge no tenían una cota superior para los momentos angulares J , se conseguía para las amplitudes de dispersión (por ejemplo para $\pi+\pi \rightarrow \pi+\pi$) la dualidad s - t (*crossing symmetry*), surgiendo la idea de que se propagaban objetos unidimensionales como cuerdas. A estos modelos de física de partículas de interacción fuerte se los conoció entonces como *modelos duales*.

También se empezó a utilizar el formalismo de la matriz S , ya que se carecía de un lagrangiano que pudiera describir las interacciones fuertes. Este formalismo impulsó los modelos *Bootstrap*, donde se establecían las interacciones entre partículas a partir del espectro de partículas ligadas y viceversa, ya que estas interacciones estaban controladas por las mismas fuerzas entre las partículas constituyentes de cada hadrón. Estos modelos se podían construir mediante los postulados de Relatividad especial, unitarie-

dad y analiticidad de las amplitudes de dispersión. Con analiticidad nos referimos a que se respete la dualidad s - t , las relaciones de dispersión y causalidad, fijando de esta forma las interacciones. De estos postulados surgen las *trayectorias de Regge*. En 1968, Gabriele Veneziano formula la amplitud de Veneziano [7] inspirada en la dualidad s - t , la cual describe la dispersión de 2 cuerdas abiertas a 2 cuerdas abiertas mediante la fórmula:

$$\mathcal{A}(s, t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))}, \quad (1.1)$$

con $\alpha(x) = \alpha' \cdot x + \alpha_0$ con $x = s, t$ son las variables de Mandelstam en cuatro dimensiones espacio-temporales. Al tomar el límite de altas energías para esta amplitud, es decir $s, |t| \gg 1$ se obtiene un decaimiento exponencial (comportamiento *soft* de la amplitud) de s con t de la forma $\mathcal{A}(s, t) \sim s^{-\alpha' \cdot |t|}$ en contraste con lo que se observaba en la fenomenología de partículas. Es decir que la teoría de cuerdas hadrónica, en particular la amplitud que propone Veneziano para cuerdas abiertas y luego Virasoro-Shapiro [8, 9] para cuerdas cerradas, no tienen el comportamiento en potencias de s esperado para altas energías, por lo que se abandona la teoría de cuerdas para describir las interacciones fuertes de la física hadrónica, ya que la misma se encuentra descrita por el lagrangiano de QCD (*Quantum Chromodynamics* en inglés) [12].

En esta tesis se estudia amplitudes de dispersión usando como base instrumental la llamada Conjetura de Maldacena o también conocida como la correspondencia AdS/CFT. Se estudiarán amplitudes de dispersión tanto en diez dimensiones, con variables de Mandelstam $\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}$, como también resultados de amplitudes de dispersión en cuatro dimensiones, con las variables de Mandelstam s, t, u (sin tildes).

Las teorías de gauge, las cuales son Teorías Cuánticas de Campos, son el marco teórico con el cual entendemos tres de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza. Por un lado, la electrodinámica cuántica, la cual nos permite entender las interacciones electromagnéticas entre partículas cargadas eléctricamente como consecuencia de la propagación de un campo de gauge $U(1)$, el fotón. Para las interacciones fuertes entre quarks, constituyentes de los hadrones, contamos con la QCD, teoría de Yang Mills (en adelante YM) con libertad asintótica en el ultravioleta (UV) y fuertemente acoplada a bajas energías (IR), por lo que en este límite no son aplicables las técnicas de la teoría de perturbaciones de la TCC. Es aquí donde la dualidad puede hacer un trabajo importante mediante la teoría de supercuerdas para la descripción de propiedades de los hadrones en regímenes donde la teoría QCD perturbativa no es aplicable. Otra forma de decir lo anterior es que QCD es un teoría confinante en el IR alrededor de la escala de energía Λ_{QCD} , por lo que la teoría no se puede analizar con métodos perturbativos mediante diagramas de Feynman. Cálculos en este régimen de energías son llevados a cabo mediante simulaciones en *Lattice QCD*.

El objetivo principal de esta tesis es el estudio de procesos de dispersión *dura* llamados *Hard Scattering* (en inglés). Es decir, procesos de física de altas energías donde la dispersión de partículas se lleva a cabo a escalas de energías mucho mayor a $\Lambda_{\text{QCD}} \approx 1\text{GeV}$, siendo entonces procesos que exploran distancias del Fermi ($1\text{fermi} = 10^{-15}m$). Una característica de estos procesos de tipo *hard* es su comportamiento en potencias en la energía al cuadrado de centro de masa (cm) s (siendo \sqrt{s} la energía de cm).

Fue Gerard 't Hooft quien en 1973 [13] propuso un método para poder estudiar teorías de gauge no Abelianas en su régimen no perturbativo introduciendo un parámetro de expansión que es directamente proporcional a N_c (el rango del grupo de gauge $SU(N_c)$) y por lo tanto también al número de "colores" $N_c^2 - 1$. Estas son las teorías de N_c grande (*large N_c*) donde entre todos los diagramas de doble línea de la teoría la contribución principal proviene de los diagramas planares, por lo que $N_c \rightarrow \infty$ se conoce como límite planar de las teorías de Yang-Mills, definiendo una constante de acoplamiento de 't Hooft, $\lambda = g_{YM}^2 N_c$, con λ fijo y mucho menor a uno y con $N_c \gg 1$ (límite de 't Hooft). Dando como resultado una teoría cuya expansión en diagramas en el rango de N_c grande tiene cierta similitudes a la expansión en género de las superficies de Riemann bidimensionales que constituyen las hojas de mundo de cuerdas en interacción.

La principal herramienta llevada a cabo en esta tesis es el ansatz propuesto por Polchinski y Strassler [1], el cual permite obtener un comportamiento *hard* en una teoría de gauge confinante en cuatro dimensiones (la cual en capítulos posteriores explicamos en detalle) partiendo de una teoría de cuerdas; la cual por sí sola y en un espacio de Minkowski de diez dimensiones, no tiene un comportamiento *hard*, sino más bien un decaimiento exponencial (comportamiento *soft*) para altas energías. Para entender este ansatz y su posterior aplicación, es necesario ser conocedor de varias ramas de la física teórica. Partiendo por supuesto del conocimiento de TCC no abelianas, y así de esta forma poder entrar en contacto con teorías de gauge con grupo de simetría $SU(N_c)$ con gran número de colores ($N_c^2 - 1 \gg 1$). También necesitamos saber de teoría de cuerdas, en particular de teorías de supercuerdas, es decir, teorías de cuerdas con supersimetría y con 10 dimensiones espacio-temporales¹.

La tesis se organiza de la forma siguiente: en el capítulo 2 describimos el límite planar en teorías de gauge y la dualidad AdS/CFT. En el capítulo 3 nos interesamos en los procesos exclusivos en la física de altas energías desde la perspectiva de TCC. El capítulo 4 se focaliza en amplitudes de dispersión en teorías de cuerdas, bosónicas primero, y luego supersimétricas. En el capítulo 5 comienza el material original de esta tesis, en particular, un capítulo dedicado totalmente al cálculo de amplitudes de dispersión en teoría de supercuerdas de tipo II para procesos que no han sido calculados previamente.

¹En esta tesis se usará la signatura mayormente positiva tanto para las métricas en cuatro dimensiones $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$, como para la métrica en diez dimensiones $\eta_{MN} = \text{diag}(-, +, \dots, +)$.

Lo hacemos de forma explícita, escribiendo el resultado de las amplitudes de 4 dilatinos [3] y de dilatón-dilatino [5]. Estos cálculos son inéditos y han sido publicados en [3] y en [5], demandando un esfuerzo técnico muy considerable y constituyen en sí mismo un aporte original al conocimiento de amplitudes de dispersión en teorías de supercuerdas en espacio de Minkowski de diez dimensiones, válidos en principio tanto para teorías de supercuerdas de tipo IIA y IIB. En el capítulo 6 se desarrolla otro de los resultados importantes de esta tesis, el *Hard Scattering* de cuatro fermiones de espín 1/2 [2] (cuyo punto de partida es [3]) en una teoría de gauge fuertemente acoplada con un *cut-off* IR Λ . En el capítulo 7 se utilizan los resultados de [5] para de esa forma calcular el *Hard Scattering* de fermión + glueball \rightarrow fermión + glueball [4]; procesos que no se han calculados antes por algún otro método. Finalmente en el capítulo 8 se presentan las conclusiones y los posibles trabajos a futuro que se desprenden de esta tesis.

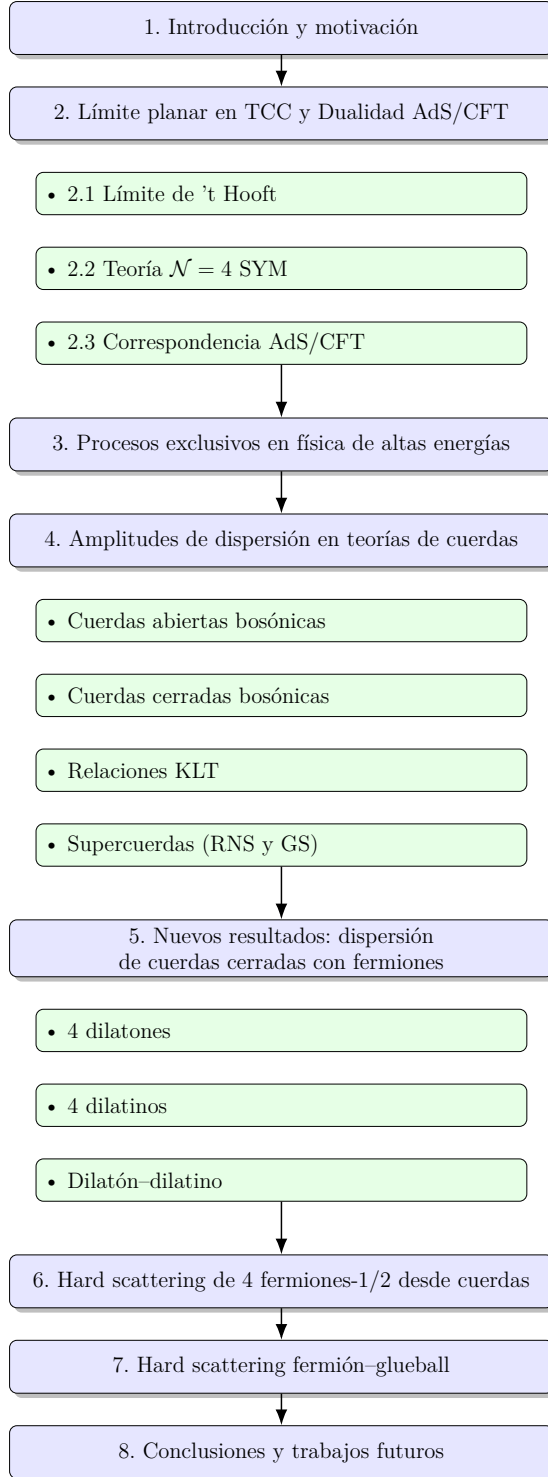


Figura 1.1: Esquema de la tesis.

Capítulo 2

Límite planar en Teorías Cuánticas de Campos y la Dualidad AdS/CFT

2.1. Límite de 't Hooft

La teoría de cuerdas fue originalmente desarrollada para que sea una teoría con la capacidad de describir las interacciones fuertes, esto debido a varios aspectos "cuerdiles" de este tipo de interacciones, tales como el confinamiento y el comportamiento de Regge. Luego se encontró que la correcta descripción de tales interacciones es en términos de una teoría de gauge con grupo de simetría $SU(3)$ (QCD), lo cual es consistente con todos los datos fenomenológicos. Mientras que la descripción en términos de una teoría de gauge es exitosa para el estudio del comportamiento a altas energías de las interacciones fuertes, es bastante difícil de utilizar para el análisis de fenómenos de bajas energías, tales como el confinamiento y la ruptura de simetría quiral. Existen varios ejemplos de un fenómeno conocido como "dualidad", en el cual una teoría tiene al menos dos descripciones diferentes, tal que cuando una descripción está acoplada débilmente, la otra se encuentra fuertemente acoplada y viceversa. Uno podría esperar que exista un fenómeno similar para las interacciones fuertes, y que una descripción "dual" de QCD exista, y por lo tanto sea la forma más apropiada para estudiar el régimen de bajas energías donde la descripción en términos de la teoría de gauge está fuertemente acoplada.

Han habido varios indicios de que la descripción "dual" podría ser una teoría de cuerdas. QCD tiene objetos que se parecen a "cuerdas", como por ejemplo, los tubos de flujo cromoelectrónicos o las líneas de Wilson. Si se tratara de separar un quark de un anti-quark, un tubo de flujo se formaría entre ellos (si ψ es un campo de quark, el operador $\bar{\psi}(0)\psi(x)$ no es invariante de gauge pero el operador $\bar{\psi}(0)P \exp(i \int_0^x A_\mu dx^\mu)\psi(x)$ lo es). estos tubos de flujo se comportan como cuerdas y por lo tanto han habido intentos para desarrollar una teoría de cuerdas que pueda describir las interacciones fuertes, donde estos tubos de flujo serían los objetos básicos. El caso más claro y directo en el cual se

describe una teoría de gauge en términos de una teoría de cuerdas proviene del límite de 't Hooft, con N_c grande, el rango del grupo de gauge.

Las teorías de Yang-Mills (YM) en cuatro dimensiones no tienen parámetros adimensionales, ya que la constante de acoplamiento es dimensionalmente trasmutada en la escala de energía Λ_{QCD} . Entonces no hay una expansión perturbativa que podamos hacer para aprender acerca de la física alrededor de la escala Λ_{QCD} . Sin embargo, en teorías de gauge con grupo de simetría $SU(N_c)$ tenemos un parámetro dado por un número natural, N_c , y podría esperarse que la teoría pueda simplificarse para grandes valores de N_c , y de esta manera tener una expansión perturbativa en términos del parámetro $1/N_c$. Esto fue demostrado por 't Hooft [13].

Entendamos primero cómo escala la constante de acoplamiento g_{YM} a medida que tomamos $N_c \rightarrow \infty$ [14]. En teorías con libertad asintótica, como la teoría de YM pura, es natural escalar g_{YM} tal que Λ_{QCD} se mantenga constante en el límite de N_c grande. La función beta para una teoría de YM pura $SU(N_c)$ es

$$\beta(\mu) = \mu \frac{dg_{YM}}{d\mu} = -\frac{11}{3}N_c \frac{g_{YM}^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g_{YM}^5) \quad (2.1)$$

donde los términos dominantes son del mismo orden para grandes valores de N_c , siempre que tomemos $N_c \rightarrow \infty$ manteniendo fijo el parámetro de 't Hooft $\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c$. Este es conocido como el límite de 't Hooft. Si la teoría es conforme (como es el caso de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM) no sería obvio que el límite de λ constante sea el único que tenga sentido, ya que otros límites, como el límite $\lambda \gg 1$ (límite de Maldacena) también son posibles.

Consideremos una teoría genérica la cual contiene campos Φ_i^a , donde a es un índice en la representación adjunta de $SU(N_c)$ y donde i es un índice que hace referencia al tipo de campo. Suponiendo que el vértice de tres puntos de todos los campos es proporcional a g_{YM} , y que la función de cuatro puntos a g_{YM}^2 , entonces el lagrangiano será de la forma:

$$\mathcal{L} \sim Tr(d\Phi_i d\Phi_i) + g_{YM} c^{ijk} Tr(\Phi_i \Phi_j \Phi_k) + g_{YM}^2 d^{ijkl} Tr(\Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_l) \quad (2.2)$$

para ciertas constantes c^{ijk} , d^{ijkl} . Reescalando los campos como $\tilde{\Phi}_i \equiv g_{YM} \Phi$, el lagrangiano toma la forma:

$$\mathcal{L} \sim \frac{1}{g_{YM}^2} [Tr(d\tilde{\Phi}_i d\tilde{\Phi}_i) + g_{YM} c^{ijk} Tr(\tilde{\Phi}_i \tilde{\Phi}_j \tilde{\Phi}_k) + g_{YM}^2 d^{ijkl} Tr(\tilde{\Phi}_i \tilde{\Phi}_j \tilde{\Phi}_k \tilde{\Phi}_l)] \quad (2.3)$$

siendo $1/g_{YM}^2 = N_c/\lambda$.

Ahora uno podría analizar qué sucede con las funciones de correlación en el límite de N_c grande con λ constante. A primera vista, pareciera que nos encontramos en un límite clásico, donde el coeficiente adelante del lagrangiano diverge; pero esto no es verdad, ya que en este límite el número de componentes de los campos también tiende a

infinito ($a = 1, \dots, N_c^2 - 1$), compensando dicha divergencia. Derivando los diagramas de Feynman de este lagrangiano obtenemos una notación de doble línea, ya que los campos Φ^a están en la representación adjunta de $SU(N_c)$, por lo que están representados como el producto directo de un campo en la fundamental y anti-fundamental dado por Φ_i^j . Para una teoría $SU(N_c)$ se tiene un propagador de la forma [14]

$$\langle \Phi_j^i \Phi_l^k \rangle \sim (\delta_l^i \delta_k^j - \frac{1}{N_c} \delta_j^i \delta_l^k) \quad (2.4)$$

donde para el límite de N_c muy grande se desprecia el segundo término y tenemos un par fundamental/anti-fundamental para el propagador de los campos en la representación adjunta. Entonces cualquier diagrama de Feynman para estos campos en la representación adjunta puede ser visto como un sistema de dobles líneas como en la Figura 2.1. Veamos cuáles serán las potencias de N_c y λ asociadas para algún diagrama de Feynman. Del lagrangiano se puede ver fácilmente que cada vértice lleva un coeficiente proporcional a N_c/λ , mientras que los propagadores son proporcionales a λ/N_c . Potencias adicionales provienen de la suma sobre los índices en los *loops*, lo cual da un factor N_c por cada loop en el diagrama (cada índice tiene N_c posibles valores). Luego, un diagrama con V vértices, E propagadores y F *loops* viene con un coeficiente proporcional a

$$N_c^{V-E+F} \lambda^{E-V} = N_c^\chi \lambda^{E-V} \quad (2.5)$$

donde $\chi \equiv V - E + F$ es la característica de Euler de una superficie de Riemann de dos dimensiones correspondiente al diagrama. Para superficies cerradas orientables, se obtiene $\chi = 2 - 2g$ donde g es el *genus* (el número de manijas) de la superficie. Entonces podemos escribir la expansión perturbativa en diagramas de Feynman en la teoría de campos como una doble expansión de la forma

$$\sum_{g=0}^{\infty} N_c^{2-2g} \sum_{i=0}^{\infty} c_{g,i} \lambda^i = \sum_{g=0}^{\infty} N_c^{2-2g} f_g(\lambda) \quad (2.6)$$

Notemos que en el límite de grandes valores de N_c dominarán las superficies de máximo χ o mínimo *genus*, lo cual serán superficies con la topología de una esfera. Estos diagramas, llamados diagramas planares, darán una contribución del orden de N_c^2 , mientras que el resto de diagramas darán supresiones del orden de $1/N_c^2$. La expansión de la forma (2.6) es del mismo tipo que la expansión perturbativa con cuerdas cerradas orientadas si identificáramos $1/N_c$ con la constante de acoplamiento de la cuerda. Esta analogía de (2.6) con una teoría de cuerdas perturbativa es la motivación más fuerte para pensar que las teorías de campos y las teorías de cuerdas están relacionadas y que esta relación sería más visible para grandes valores del parámetro de la teoría de gauge, N_c , donde la teoría de cuerdas dual estaría debilmente acoplada.²

²Hemos derivado el comportamiento de (2.6) solo para diagramas de vacío, pero este comportamiento se mantiene para cualquier función de correlación de productos de campos invariantes de gauge $\langle \prod_{j=1}^n G_j \rangle$ tal que G_i es de la forma $1/N_c \text{Tr}(\prod_i \Phi_i)$.

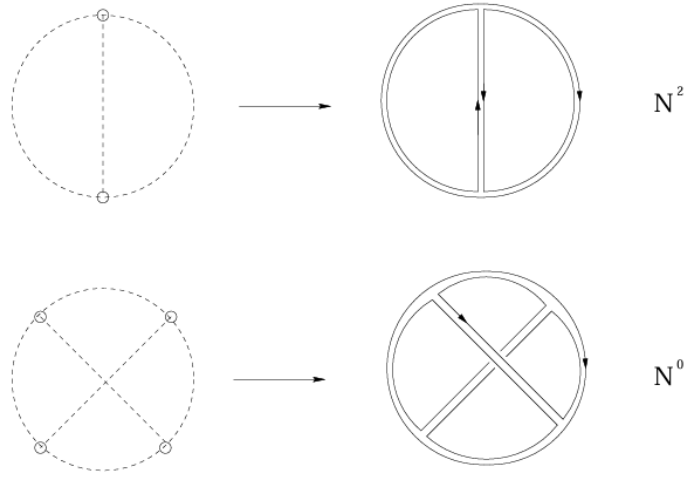


Figura 2.1: Diagramas de una teoría de campos con campos en la representación adjunta, en la representación estándar (a izquierda) y en la representación de doble línea (a derecha). Las líneas discontinuas son los propagadores de los campos adjuntos, los círculos pequeños representan los vértices de interacción y las líneas sólidas llevan índices en la representación fundamental. Figura extraída de [14].

A continuación veremos el desarrollo anterior partiendo desde el punto de vista de la teoría de cuerdas, en particular cuerdas abiertas. Las cuerdas abiertas tienen sus extremos en hipersuperficies llamadas Dp -branas (D por las condiciones de Dirichlet sobre las $10 - p - 1$ direcciones perpendiculares a las Dp -branas). Desde esta perspectiva queremos demostrar lo siguiente: hay un límite $N_c \rightarrow \infty$ donde la constante de acoplamiento relevante no es g_{YM} sino la constante de 't Hooft $\lambda = g_{YM}^2 N_c$, la cual es finita; todo ello para una teoría de gauge $SU(N_c)$ con grandes valores de N_c y con una constante de acoplamiento adimensional g_{YM} que controla la fuerza de interacción entre los bosones de gauge.

Para probar esto debemos considerar un sistema de N_c Dp -branas coincidentes, siendo cada Dp -brana identificada con un índice $i, j, k, \dots = 1, \dots, N_c$. La fuerza de interacción entre las cuerdas abiertas está controlada por la constante de acoplamiento de la cuerda abierta g_o . En el límite de bajas energías se descubre una teoría de gauge $SU(N_c)$ y una teoría $U(1)$ que desacopla. Si consideramos que los bosones de gauge se representan como cuerdas abiertas, entonces la constante de acoplamiento de la teoría de gauge coincidirá con la constante de acoplamiento de la cuerda abierta, es decir, $g_{YM} \equiv g_o$. Consideremos la propagación de una cuerda abierta cuyos extremos viven en las branas i y j respectivamente, con $i \neq j$. Queremos obtener las dependencias en g_{YM} y N_c para las distintas amplitudes de esta cuerda propagándose.

Empezando por el caso más sencillo, es decir, la cuerda abierta propagándose libremente formando una hoja de mundo con forma de cinta cuyos bordes están etiquetados por las Dp -branas i y j , como se muestra en la Figura 2.2. Este diagrama no ten-

drá ninguna interacción y ninguna dependencia en N_c , por lo que le asociamos una amplitud:

$$\mathcal{A}_0 = c_0, \quad (2.7)$$

siendo c_0 una constante independiente de g_{YM} y de N_c .

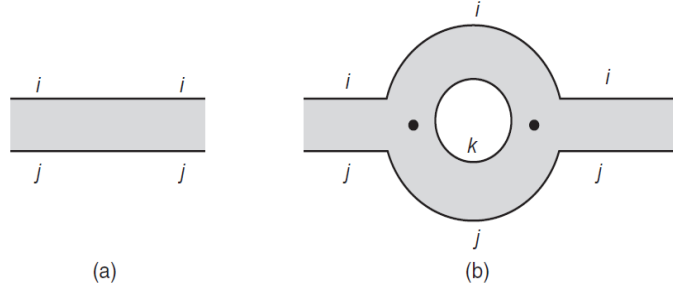


Figura 2.2: En (a) una cuerda abierta propagándose describiendo una cinta como hoja de mundo, cuyos extremos se encuentran en las Dp -branas i, j . En (b) se observa el primer tipo de interacción de una cuerda abierta, donde ésta se separa en otras dos cuerdas abiertas, para luego volverse a juntar en una sola. Figura extraída de [15].

Lo próximo que la cuerda puede hacer es separarse en otras dos cuerdas abiertas (*split*) para luego volverse a juntar en una sola cuerda, dando lugar a dos interacciones, por lo que este tipo de diagrama da como resultado un factor g_{YM}^2 . El borde interno del diagrama con índice k , indica que la cuerda tuvo el *split* sobre la Dp -brana k , la cual puede ser cualquiera de las N_c Dp -branas disponibles, y sabiendo que debemos sumar sobre todas las posibilidades, este diagrama tendrá también un factor N_c dando lugar a la siguiente amplitud:

$$\mathcal{A}_1 = c_1 g_{YM}^2 N_c \quad (2.8)$$

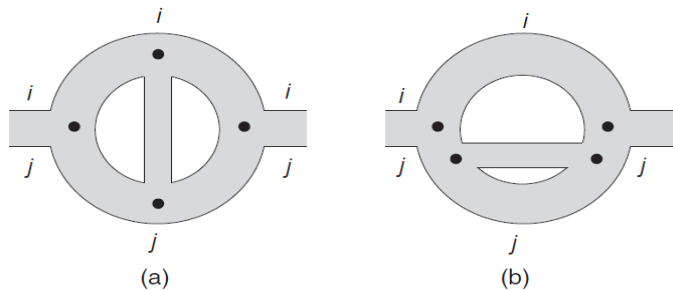


Figura 2.3: Dos diagramas con cuatro interacciones. Obtenidos al sumarle una cinta a los diagramas planares. Figura extraída de [15].

Podemos notar que surge un patrón: cada borde de una línea cerrada produce un factor N_c , representando el extremo de una cuerda abierta el cual puede estar contenido en cualquiera de las N_c Dp -branas. Si introdujéramos una nueva cinta como se muestra en la Figura 2.3, tendríamos dos nuevas interacciones al diagrama anterior creando un nuevo borde, por lo que tendremos otro factor $g_{YM}^2 N_c$ en la amplitud, dando como resultado:

$$\mathcal{A}_2 = c_2 (g_{YM}^2 N_c)^2 \quad (2.9)$$

A medida que incluimos cintas a los diagramas que crean nuevos bordes, obtenemos amplitudes de la forma:

$$\mathcal{A}_M = c_M (g_{YM}^2 N_c)^M \quad (2.10)$$

siendo la amplitud total la suma de todas las contribuciones anteriores:

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (g_{YM}^2 N_c)^n \quad (2.11)$$

por lo que ahora vemos cómo emerge la constante de acoplamiento de 't Hooft, definida como

$$\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c \quad (2.12)$$

por lo que

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n = f_0(\lambda) \quad (2.13)$$

La amplitud completa se obtendría sumando a la amplitud anterior las contribuciones provenientes de agregar cintas al diagrama pero sin crear nuevos bordes. En la Figura 2.4 se han introducido dos nuevas interacciones pero el número de bordes ha sido reducido por uno. Lo que antes eran dos bordes internos, ahora se han convertido en uno solo, dando por resultado a los llamados diagramas *no planares*. Entonces siempre que se agregue una cinta que disminuya el número de bordes, obtendremos un factor de g_{YM}^2/N_c o equivalentemente, λ/N_c^2 . Entonces la amplitud total será de la forma siguiente

$$\mathcal{A} = f_0(\lambda) + f_2(\lambda) \cdot \frac{1}{N_c^2} + f_4(\lambda) \cdot \frac{1}{N_c^4} + \dots \quad (2.14)$$

siendo ésto una expansión en el parámetro pequeño $1/N_c^2$ para N_c grande y λ fijo, requiriendo $g_{YM} \rightarrow 0$. En este límite solo el primer término contribuye.

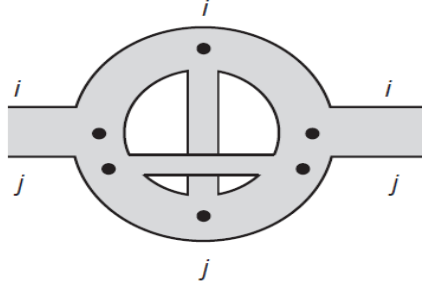


Figura 2.4: Diagrama no planar obtenido al sumar una cinta a los diagramas planares. Notar que solo hay un borde interno. Figura extraída de [15].

2.2. Teoría $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills $SU(N_c)$ en 3 + 1 dimensiones

En esta sección nos proponemos describir la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM en 4 dimensiones con grupo de gauge no abeliano $SU(N_c)$, siendo N_c el rango del grupo de gauge [16]. El lagrangiano de esta teoría es de la forma [17]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathcal{N}=4} = & \text{tr} \left\{ -\frac{1}{2g_{\text{YM}}^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\Theta_I}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \sum_a i \bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda_a - \sum_i D_\mu X^i D^\mu X^i \right. \\
& \left. + \sum_{a,b,i} g_{\text{YM}} C_i^{ab} \lambda_a [X^i, \lambda_b] + \sum_{a,b,i} g_{\text{YM}} \bar{C}_{iab} \bar{\lambda}^a [X^i, \bar{\lambda}^b] + \frac{g_{\text{YM}}^2}{2} \sum_{i,j} [X^i, X^j]^2 \right\}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

donde la traza en (2.15) se encuentra en la representación adjunta de $SU(N_c)$. Además, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $a = 1, \dots, 4$, $i = 1, \dots, 6$ y las constantes C_i^{ab} y C_{iab} están relacionadas con las matrices de Dirac del álgebra de Clifford de $SO(6)_R \sim SU(4)_R$. Este lagrangiano está compuesto por los campos del *Multiplete de gauge* ($A_\mu, \lambda_\alpha^a, X^i$), siendo λ_α^a fermiones de Weyl izquierdos y los X^i son seis escalares reales. Bajo el grupo de simetría $SU(4)_R$, A_μ es un singlete, λ_α^a está en la representación **4** y los escalares X^i forman un tensor de rango 2 antisimétrico en la representación **6**. Las transformaciones de supersimetría que dejan invariantes al lagrangiano $\mathcal{L}_{\mathcal{N}=4}$ son

$$\begin{aligned}
\delta X^i &= [Q_\alpha^a, X^i] = C^{iab} \lambda_{ab} \\
\delta \lambda_b &= \{Q_\alpha^a, \lambda_{\beta b}\} = F_{\mu\nu}^+ (\sigma^{\mu\nu})_\beta^\alpha \delta_b^a + [X^i, X^j] \epsilon_{\alpha\beta} (C_{ij})_b^a \\
\delta \bar{\lambda}_\beta^b &= \{Q_\alpha^a, \bar{\lambda}_\beta^b\} = C_i^{ab} \bar{\sigma}_{\alpha\dot{\beta}} D_\mu X^i \\
\delta A_\mu &= [Q_\alpha^a, A_\mu] = (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\lambda}_\beta^a
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Podemos ver fácilmente que $\mathcal{L}_{\mathcal{N}=4}$ es invariante de escala (a nivel clásico). Para ello basta observar las dimensiones de masa de los campos; siendo de dimensión uno

los campos bosónicos (A_μ y X^i), de dimensión 3/2 los campos fermiónicos (λ_a) y de dimensión nula las constantes (g y Θ_I). Luego la invarianza de escala en cuatro dimensiones se observa inmediatamente. En TCC, el grupo conforme $SO(2,4) \sim SU(2,2)$, está compuesto por el grupo de Poincaré $SO(1,3)$ junto con la invarianza de escala. La combinación de estas simetrías con la supersimetría de Poincaré $\mathcal{N} = 4$, dan lugar al grupo $SU(2,2|4)$.

Al ser la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM una teoría de campos conforme, su función beta es nula, por lo que no existe ninguna escala de renormalización durante el proceso de renormalización. Es decir, esta teoría no presenta anomalías a nivel cuántico bajo el grupo de simetría $SU(2,2|4)$.

De (2.15), es fácil ver que cualquier estado de vacío de la teoría tiene la forma:

$$[X^i, X^j] = 0 \tag{2.17}$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: una *fase superconforme* con $\langle X^i \rangle = 0$ para todo $i = 1, \dots, 6$; o una *fase de Coulomb* con $\langle X^i \rangle \neq 0$ para al menos un i . Para el primer caso tenemos que los estados y los operadores son invariantes de gauge y la simetría superconforme $SU(2,2|4)$ no se rompe. En cambio, para el segundo caso la simetría superconforme se rompe espontáneamente, ya que los valores de expectación de vacío no nulos $\langle X^i \rangle$ fijan una escala. En esta tesis siempre estaremos en la *fase superconforme* de la teoría SYM.³

Para ver de una forma más explícita cómo el grupo de simetrías continuas globales de $\mathcal{N} = 4$ está dado por el grupo $SU(2,2|4)$, juntemos los siguientes ingredientes: la simetría conforme generada por los generadores de traslaciones P^μ , las transformaciones de Lorentz $L_{\mu\nu}$, las dilataciones D y por las transformaciones conformes especiales K^μ ; luego otro ingrediente es la simetría R, dada por el grupo $SO(6)_R \sim SU(4)_R$, con los respectivos generadores T^A , $A = 1, \dots, 15$; luego la supersimetría de Poincaré, generada por las supercargas Q_α^a y su complejo conjugado $\bar{Q}_{\dot{\alpha}a}$, con $a = 1, \dots, 4$, $\alpha = 1, 2$ y $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$; y por último, la supersimetría conforme, generada por las supercargas $S_{\alpha a}$ y su complejo conjugado $\bar{S}_{\dot{\alpha} \dot{a}}$. Esta última emerge del hecho que los generadores de supersimetría de Poincaré y los generadores de las transformaciones conformes especiales K^μ no conmutan entre ellos. Si ambos son simetrías, su conmutador también lo debe ser, y de aquí surgen los generadores S .

Ahora uno quisiera construirse operadores locales invariantes de gauge de la teoría. En el contexto de la dualidad AdS/CFT, estos operadores serán los que irán insertos en el borde del espacio AdS (en los diagramas de Witten), induciendo ellos fluctuaciones del *bulk* de los campos de la teoría de supercuerdas de tipo IIB. Estos operadores serán polinomios en los campos del *Multiplete de gauge*, y se construyen a partir de objetos covariantes de gauge, tales como X^i , λ_a , $F_{\mu\nu}^\pm$ y la derivada covariante D_μ .

³En capítulos posteriores emplearemos un *cut-off* IR para inducir confinamiento de color en la forma estándar en el contexto de la dualidad AdS/CFT.

Debido a que las supercargas conformes S tienen dimensión $-1/2$, al aplicar sucesivamente este generador a cualquier operador, en algún punto generaríamos operadores de dimensión negativa, lo cual no es admisible para una representación unitaria. Definimos un operador *primario superconforme* \mathcal{O} , tal que cumple

$$[S, \mathcal{O}]_{\pm} = 0 \quad \mathcal{O} \neq 0 \quad (2.18)$$

Luego decimos que un operador \mathcal{O} es *descendiente* de un operador \mathcal{O}' cuando es de la forma

$$\mathcal{O} = [Q, \mathcal{O}']_{\pm} \quad (2.19)$$

siendo \mathcal{O}' un operador local polinómico e invariante de gauge con $\Delta_{\mathcal{O}} = \Delta_{\mathcal{O}'} + 1/2$, por lo que el operador \mathcal{O} nunca podrá ser un operador conforme primario (existe al menos un operador \mathcal{O}' en el mismo multiplete que tiene dimensión más baja que \mathcal{O}).

Para determinar la forma de un operador primario superconforme en la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM usamos el hecho de que este tipo de operadores no puede ser el conmutador de Q con otro operador. Entonces es necesario conocer las transformaciones inducidas por Q sobre los campos canónicos de la teoría. Esquemáticamente tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \{Q, \lambda\} &= F^+ + [X, X] \\ [Q, X] &= \lambda \\ \{Q, \bar{\lambda}\} &= DX \\ [Q, F] &= D\lambda \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde fácilmente vemos que un operador primario no puede contener gauginos λ , ni al campo F^{\pm} , ni derivadas de X y tampoco a los conmutadores de los X 's. Concluimos entonces que un operador superconforme primario estará compuesto por los escalares X 's en una forma simetrizada. Los más sencillos de ellos son los operadores de traza única:

$$str \left(X^{i_1} X^{i_2} \dots X^{i_n} \right) \quad (2.21)$$

donde los índices $i_j, j = 1, \dots, n$ están en la representación fundamental de $SO(6)_R$ y *str* significa que la traza está simetrizada. Siendo que $tr X^i = 0$; los operadores más simples son de la forma:

$$\begin{aligned} \sum_i tr X^i X^i & \text{ Multiplete de Konishi} \\ tr X^{\{i} X^{j\}} & \text{ Multiplete de supergravedad} \end{aligned} \quad (2.22)$$

para esta tesis siempre nos referiremos a los operadores de la teoría de SYM que pertenecen al Multiplete de supergravedad. En particular los operadores que siempre tendremos en mente en la tesis son los operadores $\mathcal{O}^{(8)}$ y $\mathcal{O}^{(6)}$ de la página 50 de [16].

Sabemos que la composición del grupo correspondiente al álgebra superconforme es: $SU(2, 2|4) \sim SO(1, 3) \times SO(1, 1) \times SU(4)_R$, donde cada grupo de este producto está caracterizado por los números cuánticos (s_+, s_-) , Δ y $[r_1, r_2, r_3]$ respectivamente. Donde s_{\pm} es algún número fraccionario o cero, Δ es la dimensión conforme, la cual es un número positivo o cero, y por último $[r_1, r_2, r_3]$ son los números de Dynkin para la representación de $SU(4)_R$.

Asimismo puede definirse el *twist* τ_i de un operador \mathcal{O}_i como:

$$\tau_i = \Delta_i - s_i \quad (2.23)$$

donde Δ_i y s_i son la dimensión conforme y el espín respectivamente de \mathcal{O}_i . Esta definición será importante a lo largo de la presente tesis.

2.3. Correspondencia AdS/CFT

2.3.1. La geometría AdS y la correspondencia entre estados/operadores

Antes de describir la conjetura de Maldacena, debemos clarificar la estructura del espacio-tiempo de Anti de-Sitter (AdS). En una signatura Lorentziana el espacio AdS_{d+1} puede ser definido en \mathbb{R}^{d+1} con coordenadas $(X_{-1}, X_0, X_1, \dots, X_d)$ como un hiperboloide $d+1$ dimensional con isometría $SO(d, 2)$ dado por

$$-X_{-1}^2 - X_0^2 + X_1^2 + \dots + X_d^2 = -R \quad (2.24)$$

es decir, embebimos el espacio AdS_{d+1} en un espacio plano \mathbb{R}^{d+2} introduciendo una dimensión extra, X_{-1} . Este tipo de espacio-tiempo es una solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa. En particular para el espacio AdS_5 , podemos definir una coordenada $r \in [0, \infty)$, la cual no cubre la totalidad del espacio, sino solamente una región llamada parche de Poincaré. Este espacio está caracterizado por el hecho de que cualquier punto de su borde se encuentra a una distancia infinita de cualquier punto de su interior, pero aún así las geodésicas nulas pueden conectar estos dos puntos a un tiempo finito. Como veremos, en las coordenadas de Poincaré la métrica toma la forma:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2) \quad (2.25)$$

con $z \equiv R^2/r$. Con estas coordenadas el borde del espacio AdS_5 estará en $z = 0$ y su origen en $z \rightarrow \infty$. Notamos que el elemento de longitud (2.25) diverge en $z = 0$, ya que el factor de escala crece rápidamente en ese valor de z . Este factor de escala debe ser removido mediante un reescalo de Weyl de la métrica, pero tal reescalo no es

único. Un único borde de AdS_5 bien definido puede existir solo si la teoría del borde es invariante de escala. Para valores finitos de $z > 0$, la geometría mantendrá la invarianza de Poincaré en cuatro dimensiones y no necesita ser invariante de escala.

La teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM es invariante de escala y entonces puede estar consistentemente en el borde del espacio AdS_5 . Los observables dinámicos de $\mathcal{N} = 4$ SYM son operadores locales invariantes de gauge como los descritos al final de la sección 2.2, los cuales viven en el borde del espacio AdS_5 y están caracterizados por su dimensión conforme Δ , por el grupo de Lorentz $SO(1, 3)$, y por los números cuánticos del grupo $SU(4)_R$.

Desde el lado del AdS (*bulk*) se procede a descomponer los campos en torres de Kaluza-Klein sobre la S^5 , tal que todos los campos $\phi_\Delta(z, x^\mu)$ están efectivamente sobre el AdS_5 y están etiquetados por su dimensión Δ . Lejos de la región de interacción del *bulk*, se asume que los campos en el AdS_5 son asintóticamente libres. Los campos libres cumplen la ecuación $(\square + m_\Delta^2)\phi_\Delta^0 = 0$ con $m_\Delta^2 = \Delta(\Delta - 4)$ para escalares. Las dos soluciones independientes se caracterizan por el siguiente comportamiento asintótico para cuando $z \rightarrow 0$,

$$\phi_{1,\Delta}^0(z, x^\mu) \sim z^\Delta \quad \text{y} \quad \phi_{2,\Delta}^0(z, x^\mu) \sim z^{4-\Delta} \quad (2.26)$$

siendo $\phi_{1,\Delta}^0(z)$ y $\phi_{2,\Delta}^0(z)$ las soluciones normalizables y no normalizables respectivamente. Los modos normalizables determinan los valores de expectación de vacío de los operadores con la dimensión y números cuánticos asociados. Por otro lado, las soluciones no normalizables no corresponden a excitaciones del *bulk* porque no son de cuadrado integrable. Estas soluciones no normalizables definen campos de borde $\bar{\phi}_\Delta$ de la siguiente manera:

$$\bar{\phi}_\Delta(x^\mu) = \lim_{z \rightarrow 0} \phi_\Delta(z, x^\mu) z^{4-\Delta} \quad (2.27)$$

donde $\phi_\Delta(z, x^\mu)$ se encuentra en el *bulk* y está multiplicado por $z^{4-\Delta}$ para extraer los modos no normalizables. Dado un campo de borde $\bar{\phi}_\Delta(x^\mu)$, se asume que existe una solución completa y única en la teoría de cuerdas, la cual la denotamos como ϕ_Δ .

El mapeo entre los correladores de la teoría de SYM y la dinámica de la teoría de cuerdas se explica mediante el ansatz GKPW (por Gubser, Klebanov, Polyakov y Witten) [18, 19]. Dada una funcional generatriz $\Gamma_{\text{CFT}}[\bar{\phi}_\Delta]$ para todos los correladores de operadores de traza única \mathcal{O}_Δ de la teoría de SYM, los cuales tienen como fuente los campos de borde $\bar{\phi}_\Delta$, se tiene el siguiente ansatz:

$$\exp\{\Gamma_{\text{CFT}}[\bar{\phi}_\Delta]\} \equiv \langle \exp\left\{ \int_{\partial\text{AdS}_5} \bar{\phi}_\Delta \mathcal{O}_\Delta \right\} \rangle \quad (2.28)$$

Se espera que esta expresión se mantenga a todo orden en la expansión perturbativa en el número de campos $\bar{\phi}_\Delta$. Desde el punto de vista del *bulk*, tenemos la acción

$S_{\text{IIB}}^{\text{AdS}_5}[\phi_\Delta]$ que resume la dinámica de la teoría de cuerdas de tipo IIB en el espacio AdS_5 , es decir, $S_{\text{IIB}}^{\text{AdS}_5}[\phi_\Delta]$ es la acción de supergravedad de tipo IIB en ese fondo curvo. Si quisiéramos una aproximación más allá de supergravedad, debemos tener en cuenta las correcciones en α' debidas a los efectos de las cuerdas masivas. El ansatz implica que:

$$\Gamma_{\text{CFT}}[\bar{\phi}_\Delta] = S_{\text{IIB}}^{\text{AdS}_5}[\bar{\phi}_\Delta] \quad (2.29)$$

Es decir, la propuesta de GKPW es la identificación de la funcional generatriz de la teoría SYM con la acción gravitatoria evaluada en la solución ϕ_Δ .

2.3.2. La dualidad AdS/CFT desde dos perspectivas: cuerdas abiertas y cuerdas cerradas

Ahora sí nos dedicamos a describir la principal herramienta para llevar a cabo nuestros cálculos, la correspondencia AdS/CFT o también conocida como Conjetura de Maldacena [20]. Esta conjetura establece un diccionario entre dos teorías en principio muy distintas, por un lado una teoría de gauge y por el otro una teoría gravitatoria; por lo que también a esta conjetura es parte de las llamadas dualidades gauge/gravedad. Estas dualidades hacen uso del *principio holográfico*, por lo que también se las conoce como *holografía*. Este principio holográfico establece que toda la información de una teoría cuántica de la gravedad contenida en un volumen dado (llamado *bulk*) puede ser codificada por una teoría efectiva que vive en el borde de este volumen. Es decir, la teoría del borde con sus grados de libertad de borde puede codificar toda la información de la teoría con los grados de libertad en el *bulk* y viceversa.

La teoría de cuerdas brinda sus características para que el principio holográfico pueda ser realizado. La teoría de cuerdas en sí misma cuenta con bastantes ejemplos de *dualidades*, es decir, cuando una teoría física tiene formulaciones distintas pero equivalentes y por lo tanto se dicen que son duales entre sí. Dos formulaciones distintas de una misma teoría se dicen que son equivalentes si existe un mapeo uno a uno entre los estados de cada formulación, correspondiendo todos a la misma dinámica. El concepto de dualidad es útil cuando se quieren calcular determinados observables difíciles de obtener en una de las formulaciones pero fáciles de obtener en la otra. Un ejemplo de ello es el mapeo entre dos formulaciones equivalentes las cuales cada una se encuentra en un régimen distinto de la constante de acoplamiento. La dualidad gauge/gravedad en cierto límite mapea una teoría de gauge fuertemente acoplada, la cual es difícil de manejar, en una teoría de gravedad débilmente acoplada donde los cálculos son más directos.

De las dualidades gauge/gravedad la más entendida hasta el momento es la correspondencia AdS/CFT, propuesta por Maldacena en 1997. La abreviatura "AdS" es por

el espacio Anti-de Sitter (*Anti-de Sitter space*) y "CFT" por teoría de campos conforme (*conformal field theory*). En la correspondencia AdS/CFT tanto la teoría de campos como la teoría de gravedad contienen supersimetría y simetría conforme. Las simetrías presentes en la TCC se traducen en la teoría gravitatoria como isometrías del *bulk*. La teoría cuántica de campos superconforme $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills (SYM) en 4 dimensiones es el ejemplo más claro y trabajado en la correspondencia AdS/CFT. Este desarrollo es muy útil para poder abordar procesos que se encuentran fuertemente acoplados, por lo que no se los puede analizar con teoría de perturbaciones. Muchos fenómenos en acoplamiento fuerte han sido abordados mediante la dualidad AdS/CFT, como por ejemplo teorías relacionadas a QCD o para teorías de gauge SYM confinadas en el IR (como es el caso de esta tesis). Cabe señalar que mediante esta correspondencia se ha podido estudiar aplicaciones a la física del plasma de quarks y gluones, un estado de la materia fuertemente acoplado que se encuentra a temperaturas por arriba de la temperatura de desconfinamiento de QCD [21]. Resultados que entran con un muy buen acuerdo con el experimento, como lo es el cociente entre la viscosidad y la entropía, η/s para este tipo de sistemas de plasma fuertemente acoplados [21]. También se ha logrado ajustar una gran cantidad de datos con muy pocos parámetros para procesos de DIS (*Deep Inelastic Scattering*), por ejemplo usando el pomerón BPST [22] fue posible ajustar 280 datos con solo 4 parámetros libres con un $\chi_{\text{d.o.f}}^2 = 1.086$ para un parámetro de Bjorken $x_B \lesssim 0.01$ y con un impulso al cuadrado del fotón virtual en el rango $0.1\text{GeV}^2 \lesssim Q^2 \lesssim 400\text{GeV}^2$ para la función de estructura simétrica F_2 del protón, el cuál es dispersado por un electrón [23]. También mediante el pomerón A_4 [24, 23] ajustar 55 datos con 1 parámetro libre con un $\chi_{\text{d.o.f}}^2 = 1,14$ [23] con $x_B \lesssim 0.01$ y $0.062\text{GeV}^2 \lesssim Q^2 \lesssim 2.14\text{GeV}^2$ para la función g_1 relacionada con la estructura de espín del protón. Todas estas aplicaciones exitosas de la correspondencia AdS/CFT son ejemplos de *universalidad*, es decir, ciertos detalles de los grados de libertad microscópicos en la teoría de gauge son irrelevantes para describir la dinámica. Se puede pensar entonces que la *universalidad* de la teoría de gauge es heredada de la teoría dual, la teoría gravitatoria (por ejemplo una teoría de cuerdas).

Veamos qué nos dice la correspondencia AdS/CFT en su versión más general posible. La teoría $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills (SYM) con grupo de gauge $SU(N_c)$ y constante de acoplamiento de Yang-Mills g_{YM} en 4d es equivalente a una teoría de supercuerdas del tipo IIB con una longitud de la cuerda $l_s = \sqrt{\alpha'}$ y constante de acoplamiento g_s sobre un fondo $\text{AdS}_5 \times S^5$ con un radio de curvatura R y N_c unidades de flujo de una 5-forma F_5 sobre la S^5 .

El diccionario que proporciona la dualidad AdS/CFT entre los parámetros libres (g_{YM} y N_c en la TCC) de cada una de las teorías es el siguiente:

$$g_{\text{YM}}^2 = 4\pi g_s, \quad g_{\text{YM}}^2 N_c = R^4 / \alpha'^2 \quad (2.30)$$

Notar que en la segunda ecuación está presente la constante de 't Hooft $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N_c$. Esta conjetura de Maldacena nos dice que ambas teorías son equivalentes y por lo tanto describen la misma física desde dos perspectivas muy distintas. En principio podríamos mapear una teoría de gravedad cuántica (teoría de cuerdas de tipo IIB) en una teoría de campos sin ningún grado de libertad gravitatorio. Como señalamos anteriormente, esta dualidad es una realización del *principio holográfico* donde la información de una teoría en 5 dimensiones obtenida luego de una reducción de Kaluza-Klein de la teoría de cuerdas de tipo IIB sobre la S^5 se mapea a una teoría en 4 dimensiones que vive en el borde del AdS_5 .

Es conveniente tomar ciertos límites en los parámetros de la correspondencia AdS/CFT para poder calcular observables de forma más concreta, y de esta forma quizás poder describir una teoría fuertemente acoplada desde una teoría débilmente acoplada. Siendo que la teoría de cuerdas es mejor entendida mediante su expansión perturbativa, tomamos $g_s \ll 1$, manteniendo $R/\sqrt{\alpha'}$ constante, por lo que del lado del 'AdS' tenemos una teoría clásica de cuerdas a orden dominante en g_s en el sentido que solo nos quedamos con los diagramas a nivel árbol. Del lado de 'CFT' implicaría tomar $g_{\text{YM}} \ll 1$ con $g_{\text{YM}}^2 N_c$ fijo por lo que debemos considerar $N_c \rightarrow \infty$. Recordando lo explicado en la sección anterior, estamos en el límite de 't Hooft (λ fijo) el cual implica el límite planar en la teoría de gauge. Podemos concluir que la correspondencia AdS/CFT es una realización de la idea de 't Hooft, donde una TCC en el límite planar es una teoría de cuerdas. Correcciones $1/N_c$ en la teoría de gauge corresponderá a una expansión en genus en la teoría de cuerdas ya que $g_s \sim 1/N_c$ para λ fijo.

Si estamos interesados en trabajar y analizar observables en una teoría de gauge en su régimen fuertemente acoplada, deberíamos considerar en la dualidad AdS/CFT el límite $\lambda \gg 1$ implicando que $R/\sqrt{\alpha'} \gg 1$, es decir, el radio de curvatura del espacio AdS es mucho mayor a la longitud de la cuerda (como se muestra en la Figura 2.5), por lo que en el *bulk* se propagan objetos puntuales, sin dimensiones. Éste es el límite de Maldacena, donde la dinámica en el *bulk* se describe por la teoría de supergravedad de tipo IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$ en lugar de la teoría de spuerdas de tipo IIB con el mismo fondo.

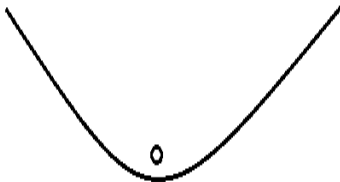


Figura 2.5: Comparación entre la longitud de la cuerda $\sqrt{\alpha'}$ con el radio de curvatura R del AdS en el límite $R/\sqrt{\alpha'} \gg 1$, por lo que podemos considerar a la cuerda cerrada que se propaga en el *bulk* como puntual.

Repasando, en este límite de Maldacena nos encontramos con una dualidad fuerte/débil (*strong/weak duality*) donde la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM se encuentra fuertemente acoplada y es dual a la teoría de SUGRA IIB en un fondo curvo $\text{AdS}_5 \times S^5$. Veamos los rangos paramétricos en los que se puede encontrar la teoría de SYM y qué teoría en el *bulk* emerge en consecuencia (y viceversa):

- $\mathcal{N} = 4$ SYM para cualquier N_c y $\lambda \quad \Leftrightarrow$ Teoría de Cuerdas Cuántica IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$ para todo orden de expansión en g_s .
- $\mathcal{N} = 4$ SYM para $N_c \rightarrow \infty$ y λ fijo $\quad \Leftrightarrow$ Teoría de Cuerdas Clásica IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$ con $g_s \rightarrow 0$.
- $\mathcal{N} = 4$ SYM para $N_c \rightarrow \infty$ y $\lambda \gg 1 \quad \Leftrightarrow$ SUGRA IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$ con $g_s \rightarrow 0$ y $R/\sqrt{\alpha'} \gg 1$.

A continuación realizaremos una deducción de la dualidad AdS/CFT desde la perspectiva de la teoría de supercuerdas. Sabemos que esta teoría contiene tanto cuerdas cerradas como también cuerdas abiertas ya que la teoría contiene objetos solitónicos no perturbativos llamados Dp -branas. Estos objetos pueden ser analizados desde dos perspectivas, cuerdas cerradas o cuerdas abiertas. Por este motivo, a la dualidad AdS/CFT también se la conoce como dualidad entre cuerdas abiertas/cerradas.

Consideremos un conjunto de N_c $D3$ -branas como en la Figura 2.6 que se extienden a lo largo de las direcciones espacio-temporales x^0, x^1, x^2, x^3 (direcciones sujetas a condiciones de Neumann) y son transversas a las direcciones x^4, \dots, x^9 (direcciones sujetas a condiciones de Dirichlet). Sin pérdida de generalidad podemos ubicar estas $D3$ -branas en $x^4, \dots, x^9 = 0$.

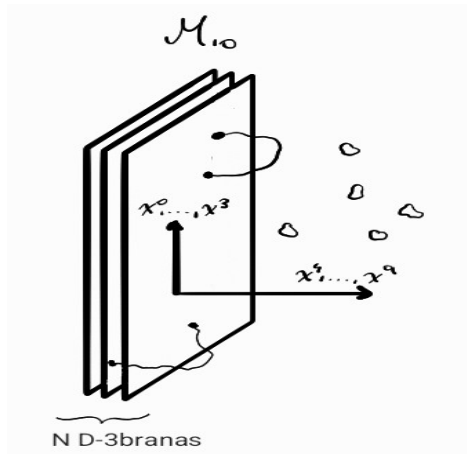


Figura 2.6: N_c $D3$ -branas embebidas en un espacio-tiempo de Minkowski de 10 dimensiones. Las cuerdas abiertas tendrán sus extremos sobre las $D3$ -branas, mientras que las cuerdas cerradas se propagarán libres en el *bulk*.

Estudiemos por separado cada una de las perspectivas, para que al combinarlas al final de la sección, notemos como surge la dualidad AdS/CFT.

2.3.3. Perspectiva 1: cuerdas abiertas

Como punto de partida tenemos una teoría de supercuerdas de tipo IIB sobre el espacio plano \mathcal{M}_{10} , por lo que tenemos cuerdas cerradas propagándose libremente en este espacio. Luego insertamos un conjunto de N_c *D3-branas* coincidentes. Consideremos a las cuerdas abiertas como objetos perturbativos con sus extremos sobre estas *D3-branas*. Tomando el límite de bajas energías, es decir, energías del orden $E \ll \alpha'^{-1/2}$ sobre la *D3-brana* (por lo que no consideramos cuerdas masivas) tenemos entonces sobre el volumen de mundo de la *Dp-brana* una teoría de gauge supersimétrica. El campo de gauge A_μ corresponde a fluctuaciones de las cuerdas abiertas que son paralelas a la *D3-brana*, mientras que las fluctuaciones perpendiculares a la *D3-brana* corresponderán a campos escalares desde el punto de vista del volumen de mundo de la *D3-brana*. Como mostramos en Figura 2.6, estamos considerando un sistema de N_c *D3-branas* coincidentes, por lo que tendremos un grupo de gauge $U(N_c)$ y una constante de acoplamiento efectiva $g_s N_c$.

Escribamos la acción efectiva para nuestro sistema de *D3-branas* y cuerdas cerradas:

$$S^{\text{eff}} = S_{\text{SUGRA IIB}}^{10d} + \left(\alpha'^3 S^{(1)} + \alpha'^5 S^{(2)} + \dots \right) + S_{N_c D3\text{-branas}}^{\text{eff}} + S_{\text{int}}^{\text{eff}} \quad (2.31)$$

donde $S_{\text{int}}^{\text{eff}}$ describe la interacción entre las cuerdas abiertas y cerradas. Estamos en el límite de bajas energías, $\alpha' \rightarrow 0$, por lo que ya no contamos con cuerdas, sino con modos puntuales que se propagan por el *bulk* e interaccionan con 3-branas (sin el D de Dirichlet ya que no tenemos cuerdas) los cuales son objetos de supergravidad. Los segundos términos de nuestra acción efectiva corresponden a correcciones en α' provenientes de la teoría de supercuerdas, los cuales no consideraremos en este límite de bajas energías. Analicemos ahora las acciones $S_{N_c D3\text{-branas}}^{\text{eff}}$ y $S_{\text{int}}^{\text{eff}}$ las cuales pueden ser derivadas de la acción de Dirac Born-Infeld que describe una *D3-brana*:

$$S_{\text{DBI}} = -T_3 \int d^4 \zeta \sqrt{-\det(\mathcal{P}[g] + e^{\sqrt{\alpha'} \Phi} 2\pi \alpha' F)} \quad (2.32)$$

siendo T_3 la tensión del volumen de mundo de la *D3-brana*, ζ las coordenadas de la misma, \mathcal{P} el pullback sobre la métrica del \mathcal{M}_{10} y Φ el dilatón (cuerda cerrada). Expandiendo en potencias de α' :

$$S_{\text{DBI}} \sim -T_3 \frac{(2\pi\alpha')^2}{4} \sqrt{-g} \text{Tr}(F^2) - T_3 (2\pi\alpha')^4 \sqrt{-g} \text{Tr}(F^4) - \dots \quad (2.33)$$

como $T_3 = \frac{1}{(2\pi)^3 g_s \alpha'^2}$, el primer término de la expansión domina en el límite $\alpha' \rightarrow 0$. Se puede probar que este término es similar a la acción de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM mediante

la identificación ⁴ $g_s \equiv g_{\text{YM}}^2/4\pi$. Notemos que al expandir $e^{\sqrt{\alpha'}\Phi}$ en (2.32) tendremos potencias positivas en α' por lo que las interacciones entre cuerdas cerradas y abiertas en el límite de bajas energías desaparece. Concluimos que nuestro sistema en el límite de bajas energías, $\alpha' \rightarrow 0$, en esta perspectiva 1 de cuerdas abiertas, tiene como acción efectiva:

$$S^{\text{eff}} = S_{\text{SUGRA IIB}}^{10d} + S_{\mathcal{N}=4 \text{ SYM}}^{4d} \quad (2.34)$$

Es decir, en el límite de bajas energías las cuerdas abiertas y cerradas desacoplan. Para este límite, la dinámica de las cuerdas abiertas proporcionan la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM, mientras que las cuerdas cerradas están descritas efectivamente por la supergravedad en $9 + 1$ dimensiones planas espacio-temporales.

Supongamos que en este análisis hubieramos comenzado con un sistema de $N_c + 1$ $D3$ -branas en un espacio-tiempo de $9 + 1$ dimensiones planas y procedemos a alejar una de las $D3$ -branas de las otras N_c $D3$ -branas coincidentes en la dirección x^9 . Entonces las N_c $D3$ -branas se encuentran todas juntas en la posición $x^9 = 0$ y la otra brana en la posición $x^9 = r$. Luego los modos no masivos estarán descritos por una teoría de gauge $U(N_c) \times U(1)$. Este sistema puede ser visto como si estuviera en una fase de Higgs caracterizada por $\langle \phi^9 \rangle = r/(2\pi\alpha')$. En el límite de desacoplamiento $\alpha' \rightarrow 0$ debemos mantener todas las cantidades de la teoría de gauge fijas, en particular $\langle \phi^9 \rangle$. Entonces el límite de desacoplamiento correcto en el límite de Maldacena será tomando:

$$\alpha' \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0, \quad u = \frac{r}{\alpha'} \quad (2.35)$$

con u fijo.

A continuación analizaremos una forma complementaria de ver este sistema pero desde el punto de vista de solamente cuerdas cerradas.

2.3.4. Perspectiva 2: cuerdas cerradas

Consideremos la teoría de supergravedad de tipo IIB, la cual solamente contiene cuerdas cerradas de masa nula propagándose libremente en un espacio plano de $9 + 1$ dimensiones. Una 3-brana es una solución BPS de esta supergravedad que preserva 16 supercargas de Poincaré Q_α de las 32 presentes en este fondo. Una 3-brana en 10 dimensiones tiene la simetría $R^{3,1} \times SO(3,1) \times SO(6)$. Un ansatz que resuelve las ecuaciones de movimiento de supergravedad IIB es el siguiente

$$\begin{aligned} ds^2 &= f(r)^{-1/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + f(r)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \\ e^\Phi &= g_s, \\ C_4 &= (1 + f(r)^{-1}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \dots, \end{aligned} \quad (2.36)$$

⁴Esta identificación entre las constantes de acoplamiento de la teoría de YM y la teoría de cuerdas es parte de la conjetura AdS/CFT.

donde $\mu = 0, 1, 2, 3$ y $r^2 = \sum_{i=4}^9 x_i^2$. Los ... en la definicion de C_4 es por los términos que aseguran la autodualidad de la 5-forma $F_5 = dC_4$. Reemplazando el ansatz (2.36) en las ecuaciones de movimiento de SUGRA IIB tenemos que $f(r)$ debe ser una función armónica, por lo que

$$f(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4} \quad (2.37)$$

donde R es una constante que no puede ser determinada usando supergravedad. Desde la teoría de cuerdas sabemos que el flujo de la 5-forma F_5 a través de la S^5 debe estar cuantizado, siendo que este flujo cuenta el número de $D3$ -branas coincidentes, es decir:

$$\mathcal{Q} = \int_{S^5} F_5 * \quad (2.38)$$

siendo $*$ el dual de Hodge. Resolviendo el lado derecho de (2.38) y tomando $\mathcal{Q} = N_c$ llegamos a

$$R^4 = 4\pi g_s N_c \alpha'^2 \quad (2.39)$$

Analizando la función armónica $f(r)$ podemos notar que el fondo se divide en dos regiones. Para valores $r \gg R$ la métrica (2.36) se reduce al espacio-tiempo de Minkowski en 10 dimensiones. En valores $r \ll R$ nos encontramos en el llamado *horizonte cercano* por el cual $f(r) \sim R^4/r^4$. Entonces nuestra métrica se convierte en

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2 \quad (2.40)$$

haciendo el cambio de variable $z = \frac{R^2}{r}$,

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2) + R^2 d\Omega_5^2 \quad (2.41)$$

obteniendo así el elemento de longitud del espacio $\text{AdS}_5 \times S^5$. Entonces tenemos cuerdas cerradas propagándose en un espacio plano $9 + 1$ dimensional, luego cuerdas cerradas que se propagan en el fondo $\text{AdS}_5 \times S^5$ y también cuerdas excitadas que se propagan en la *garganta*, espacio intermedio entre $r \ll R$ y $r \gg R$. En el límite de bajas energías, $\alpha' \rightarrow 0$, las cuerdas cerradas que se propagan en la *garganta* desacoplan de la dinámica total del sistema. Consideremos una cuerda en una posición r con una energía $\sqrt{\alpha'} E_r$ en unidades de longitud de la cuerda. En principio una cuerda en una posición r de la *garganta* puede tener una energía muy grande con $\sqrt{\alpha'} E_r \gg 1$. Si bien estamos en el límite de bajas energías, estos estados de altas energías no se desprecian ya que la energía E_∞ medida por un observador en el infinito está dada por

$$E_\infty = \sqrt{-g_{00}} E_r = f(r)^{-1/4} E_r \quad (2.42)$$

Siendo que estamos considerando una cuerda cerrada en una región cada vez más cercana a $r \ll R$ tenemos que $f(r) \sim R^4/r^4$. Notemos que aunque la energía E_r puede ser suficientemente grande, E_∞ es muy pequeño ya que:

$$\sqrt{\alpha'} E_\infty = \frac{r}{R} \sqrt{\alpha'} E_r \rightarrow 0 \quad (2.43)$$

con $r \ll R$ y $\sqrt{\alpha'} E_r$ fijo. Siendo que la sección eficaz de absorción de una cuerda cerrada que interacciona con una 3-brana es proporcional a E_∞^3 , tenemos que para un observador en el infinito dicha sección eficaz se anula. Si consideramos ahora modos excitados en la *garganta* que se propagan en el sentido de $r \gg R$ notamos rápidamente que dichos modos deberán superar un potencial gravitacional con una profundidad infinita, por lo que les costaría una energía infinita para llegar a la región del Minkowski 10 dimensional. Concluimos que los modos en la *garganta* desacoplan de la dinámica de bajas energías, quedando todos ellos confinados en la región descrita por $f(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4}$. Luego nuestra acción efectiva para este sistema es

$$S^{\text{eff}} = S_{\text{SUGRA IIB}}^{10d} + S_{\text{SUGRA IIB}}^{\text{AdS}_5 \times S^5} \quad (2.44)$$

Comparando (2.34) con (2.44) podemos concluir que

$$S_{\mathcal{N}=4 \text{ SYM}}^{4d} = S_{\text{SUGRA IIB}}^{\text{AdS}_5 \times S^5} \quad (2.45)$$

Llegando de esta manera a la forma débil de la conjetura de Maldacena, por la cual la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM en cuatro dimensiones es equivalente a la teoría de Supergravedad de tipo IIB sobre $\text{AdS}_5 \times S^5$ con grados de libertad muy distintos entre sí en cada teoría. Relajando la condición de bajas energías, la conjetura nos dice que la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM en cuatro dimensiones es equivalente a la teoría de Supercuerdas de tipo IIB sobre $\text{AdS}_5 \times S^5$.

Se pueden hacer algunos chequeos de la conjetura mediante el análisis de las simetrías. Esperamos que si ambas teorías son equivalentes entonces deben tener las mismas simetrías. Recordamos que la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM es una teoría conforme, por lo que su función beta es nula. El grupo conforme en cuatro dimensiones es $SO(4, 2)$. La teoría preserva $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías por lo que hay 16 supercargas de Poincaré agrupadas en cuatro espinores Q_α^a , con $\alpha = 1, \dots, 4$ y $a = 1, \dots, 4$. Además la teoría es conforme, por lo que tenemos otras 16 supercargas superconformes S_α^a . Todas estas simetrías forman el supergrupo $PSU(2, 2|4)$ por el cual la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM es invariante. El subgrupo bosónico de $PSU(2, 2|4)$ es $SU(2, 2) \sim SO(4, 2)$ y $SU(4) \sim SO(6)$. La parte fermiónica de $PSU(2, 2|4)$ será generada por las supercargas Q_α^a y S_α^a .

Ahora veamos cómo se traducen las simetrías presentes en la teoría de gauge para la teoría de cuerdas en el fondo $\text{AdS}_5 \times S^5$. A nivel geométrico, la teoría deberá ser invariante bajo los grupos de isometrías del AdS_5 y de la S^5 , los cuales son $SO(4, 2)$ y $SO(6)$ respectivamente. Esto coincide con los subgrupos bosónicos del grupo $PSU(2, 2|4)$. En

10 dimensiones las condiciones de Majorana y las condiciones de Weyl son compatibles, por lo que un espinor en estas dimensiones tendrá $2^{D/2} = 2^5 = 32$ componentes reales, pero las condición de Weyl las reduce a 16 componentes, quedando entonces un espinor de Majorana-Weyl. Como estamos en una teoría de cuerdas de tipo IIB tenemos dos supersimetrías, por lo que los grados de libertad fermiónicos se duplican, quedando $2 \times 16 = 32$ supercargas. Las $D3$ -branas son objetos 1/2-BPS, por lo que una sola $D3$ -brana en un espacio \mathcal{M}_{10} preserva la mitad de supersimetrías, quedando como resultado 16 supercargas. La dualidad AdS/CFT cuenta con un sistema de N_c $D3$ -branas y esto provoca que se vuelva a duplicar el número de supercargas, quedando como resultado neto 32 supercargas. Entonces estas 32 supercargas del lado de la teoría de cuerdas son duales a las 32 supercargas dadas por los generadores Q_α^a y S_α^a en la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM.

Capítulo 3

Procesos exclusivos en la física de altas energías

Veamos algunos aspectos importantes respecto a las leyes de escaleo para procesos de altas energías. Se entiende por procesos *exclusivos* a las dispersiones entre partículas en las cuales tanto los estados iniciales y finales son medidos, por ejemplo, por un calorímetro. Esto está en claro contraste con los llamados procesos *inclusivos*, en los cuales solo se miden algunas de las partículas finales.

En los 70's se sabía que las interacciones fuertes que resultaban de los procesos con grandes impulsos transversales transferidos entre las partículas, podían otorgar nuevos conocimientos acerca de la estructura interna de los hadrones. En [25] se derivan leyes de escaleo por simple conteo dimensional aplicado a estados ligados de partículas puntuales para procesos de dispersión electromagnéticos y hadrónicos para ángulo fijo (θ) de centro de masa. Se obtienen algunas leyes de escaleo para las secciones eficaces diferenciales de varios procesos de dispersión, asumiendo siempre que los constituyentes son quarks. Esta es la llamada aproximación de Born, con sus respectivos diagramas de Born. Algunas de las predicciones de [25] para $s \rightarrow \infty$ y t/s fijo son: $(d\sigma/dt)_{\pi p \rightarrow \pi p} \sim s^{-8}$, $(d\sigma/dt)_{pp \rightarrow pp} \sim s^{-10}$, $(d\sigma/dt)_{\gamma p \rightarrow \pi p} \sim s^{-7}$ y $(d\sigma/dt)_{\gamma p \rightarrow \gamma p} \sim s^{-6}$.

Luego en [27] se obtuvo que bajo ciertas restricciones cinemáticas, a saber:

$$s \gtrsim 15(\text{GeV})^2 \quad |t| \gtrsim 2,5(\text{GeV})^2 \quad (3.1)$$

los datos experimentales parecen estar de acuerdo con la expresión [25, 26, 27]:

$$d\sigma/dt = s^{-n+2} f(\theta) \quad (3.2)$$

donde n representa el número total de leptones, fotones y quarks, tanto de los estados iniciales como de los finales.

En [27] se grafica $\log(d\sigma/dt)$ vs $\log(s)$ para el proceso *exclusivo protón+protón* \rightarrow *protón+protón* ($pp \rightarrow pp$), para varios valores de ángulo fijo de dispersión θ , con datos

de [29, 30, 31, 32, 33], obteniendo un valor para la potencia en (3.2) de $n - 2 \approx 9,7$ con un error de $\pm 0,5$.

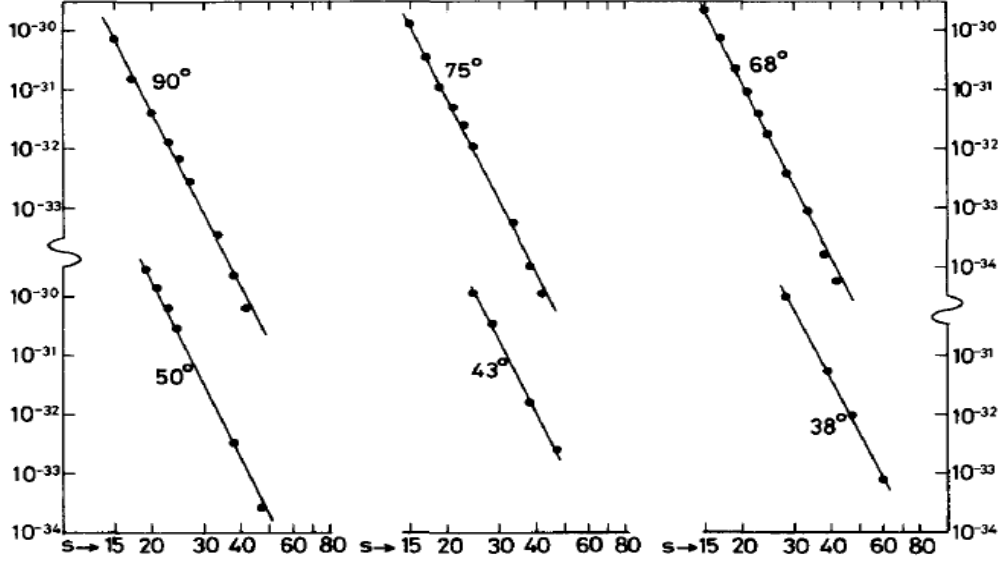


Figura 3.1: Plot de datos para $\log(d\sigma/dt)$ vs $\log(s)$ para varios ángulos de dispersión. Figura extraída de [27].

También en [27] obtienen un gráfico de $\log(f(\theta))$ vs $\log(\sin \theta)$, por lo que llegan a la siguiente conclusión para la sección eficaz diferencial,

$$d\sigma/dt \sim s^{-9,7} \cdot (\sin \theta)^{-14} \quad (3.3)$$

Se hace hincapié en [27] que la condición $|t| \gtrsim 2,5(\text{GeV})^2$ es vital, ya que para valores menores, la ecuación (3.2) no vale. Aún más, los valores de $|t|$ cercanos a $2,5(\text{GeV})^2$ definen la región de transición donde la ecuación (3.2) vale, y la región de valores más chicos de $|t|$ donde se espera un comportamiento de Regge de la forma:

$$d\sigma/dt = \beta(t)s^{2\alpha(t)-2} \quad (3.4)$$

Como se explica en [25], podemos considerar que un hadrón es un estado ligado de n_H constituyentes, llevando cada uno de ellos una fracción del momento total del hadrón. Entonces, podemos pensar que la amplitud del sistema hadrónico, \mathcal{A} , es igual a la amplitud de la dispersión de sus constituyentes (quarks), \mathcal{A}_n (también llamada amplitud de Born), y luego integrado sobre los posibles valores de los momentos de estos constituyentes, con la condición de que la suma total de los impulsos de cada uno de ellos sea igual al momento del hadrón. Al ser integrados estos impulsos, no se podrá introducir ninguna otra dependencia en s adicional. Luego, la amplitud \mathcal{A} tiene el mismo

comportamiento asintótico que \mathcal{A}_n , la amplitud de quarks libres en la aproximación de Born.

En [25] obtienen por análisis dimensional que la amplitud de n campos debe comportarse como $[\mathcal{A}_n] \sim (\text{longitud})^{n_i+n_f-4}$, con la usual normalización $\langle p|p' \rangle = 2E\delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$. Si todos los invariantes son grandes comparados a las masas y son proporcionales a s , se tiene:

$$\mathcal{A}_{n_i \rightarrow n_f} \sim s^{-(n_i+n_f)/2+2} \quad (3.5)$$

siendo n_i y n_f el número total de partones iniciales y finales respectivamente.

Las claves del análisis dimensional para las leyes de escaleo son: (a) el reemplazo efectivo de un hadrón por sus constituyentes, donde cada uno lleva una fracción del momento del hadrón, y (b) la ausencia de cualquier escala de masa en la amplitud \mathcal{A}_n . En [26] se argumenta que este comportamiento de escaleo puede surgir de teorías renormalizables, siendo que estas teorías solamente introducen una escala de masa en los estados externos y en los propagadores, a diferencia de las teorías no renormalizables, las cuales contienen una escala en la constante de acoplamiento, alterando al escaleo en s . En [26] se analizan los estados ligados mediante el formalismo de Bethe-Salpeter, el cual permite separar el comportamiento de diagramas individuales que surgen de la resumación infinita de diagramas para formar estos estados ligados. Por definición la amplitud hadrónica está dada por la convolución de funciones hadrónicas ψ_{BS} sobre una amplitud de n partículas \mathcal{A}_n , integrada sobre los impulsos k_i^μ [25],

$$\mathcal{A} = \int \psi_{BS}^\dagger \psi_{BS}^\dagger \mathcal{A}_n \psi_{BS} \psi_{BS} \prod_i d^4 k_i \quad (3.6)$$

siendo \mathcal{A}_n la amplitud que surge de las correcciones en *loops* a los diagramas irreducibles de Born (en el modelo de quarks) de n partículas, como se muestra en la Figura 3.2(a). En estos diagramas irreducibles se permite la interacción entre quarks de distintos hadrones.

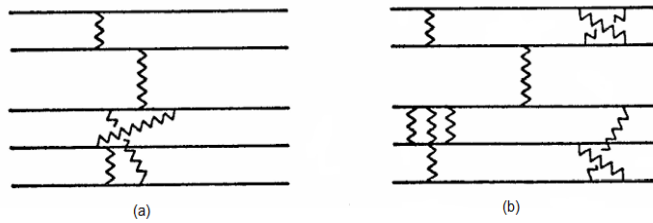


Figura 3.2: En (a) diagrama irreducible que representa el tipo de correcciones a orden *loop* para la amplitud de Born \mathcal{A}_n . Este diagrama permite interacciones entre quarks de diferentes hadrones, siendo no PR (particle reducible en inglés) en las patas del mesón (o barión). En (b) tenemos un diagrama reducible, el cual permite órdenes más altos en las interacciones entre quarks del mismo hadrón. Figura extraída de [25].

Estas teorías renormalizables tendrán estas leyes de escaleo de (3.5) para altas energías ($s, |t| \rightarrow \infty$) siempre que cumplan las siguientes condiciones dinámicas:

- Los mesones y bariones se pueden interpretar como estados ligados de Bethe-Salpeter de dos y tres quarks respectivamente, tal que sus funciones de onda son finitas para quarks con una separación nula y tiendan a cero para una separación infinita entre ellos. Para mesones:

$$\int d^4k \psi_M(k) = \psi_M(x=0) < \infty \quad (3.7)$$

- Las interacciones entre los constituyentes son asintóticamente invariantes de escala.
- Las interacciones múltiples ($2 \leq L$) entre constituyentes de diferentes hadrones se pueden despreciar, siendo L el número de pares interactuantes entre estos hadrones.

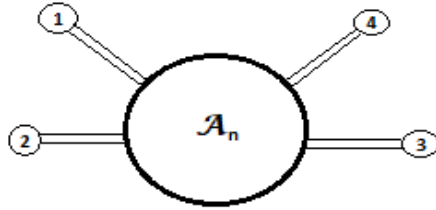


Figura 3.3: Representación esquemática de una amplitud de dispersión mesón-mesón en términos de las funciones de onda Bethe-Salpeter ψ y de la amplitud irreducible \mathcal{A}_n .

La primera condición es necesaria para limitar las correcciones debidas a los vínculos entre los constituyentes. Es decir, que el cálculo de \mathcal{A}_n involucra la dispersión obtenida por reemplazar cada hadrón por una colección de quarks de espín apropiado, cada cual llevando una fracción del momento del hadrón, siendo el momento de cada quark $p_i = x_i p_H$ con $x_i = m_i/m_H$. Esta condición implica que no hay campos elementales con los mismos números cuánticos del hadrón. También se asegura la convergencia de (3.6), y que el escaleo para ángulo fijo de \mathcal{A} esté dado por el escaleo de \mathcal{A}_n , multiplicado por ciertos coeficientes finitos de orden $\psi(x=0)$.

Por otro lado, las otras dos suposiciones son necesarias para asegurar el escaleo $\mathcal{A}_n \sim s^{2-n/2}$, ya que no tendríamos este comportamiento si consideráramos contribuciones a \mathcal{A}_n de diagramas desconectados como se muestra en la Figura 3.4.

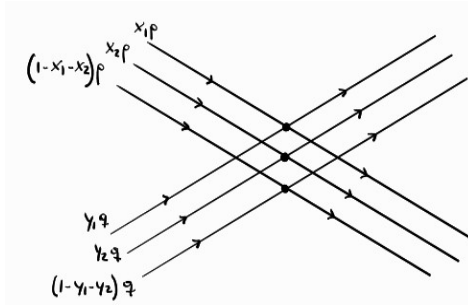


Figura 3.4: Diagrama desconectado para la dispersión $pp \rightarrow pp$ para ángulo grande. Con p simbolizamos el momento de un protón y con q el del otro protón, con las respectivas fracciones de impulso $x_{1,2}$ e $y_{1,2}$.

En un trabajo de Landshoff [28] se ha hecho la observación de que $\mathcal{A}_n \neq s^{2-n/2}$ siempre que se tenga que cada constituyente de un hadrón es dispersado elásticamente e independientemente y con un ángulo grande de dispersión, por el constituyente de otro hadrón. Para este caso se estima que

$$\mathcal{A}_n \sim s^{2-n/2} s^{L/2-1/2} \quad (3.8)$$

siendo L el número de pares de constituyentes de diferentes hadrones que interaccionan entre sí, a un ángulo de dispersión grande. Por evidencias directas e indirectas se cree que el mecanismo de Landshoff no es aplicable en el régimen de energías en las que estamos haciendo el análisis. La evidencia directa de ésto es que en procesos de $pp \rightarrow pp$ tenemos $d\sigma/dt \sim s^{-9,7 \pm 0,5} f(t/s)$, más que s^{-8} , como sería si el mecanismo de Landshoff aplicara para un $L = 3$.

En los capítulos 6 y 7 abordaremos las amplitudes de dispersión para los procesos *exclusivos* $\text{fermión}_{1/2} + \text{fermión}_{1/2} \rightarrow \text{fermión}_{1/2} + \text{fermión}_{1/2}$ y $\text{glueball} + \text{fermión}_{1/2} \rightarrow \text{glueball} + \text{fermión}_{1/2}$ respectivamente para la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM con confinamiento en el IR [2, 4]. Haremos los análisis correspondientes los cuales estarán basados en los resultados que se llevaron a cabo en [25, 26, 27] y que fueron resumados en este capítulo. Si bien nuestros resultados no corresponden a QCD, porque no tenemos quarks en la representación fundamental de $SU(3)$, ni tampoco contamos con la noción de partones, ya que nuestra teoría de gauge estará en un régimen de acoplamiento fuerte, y además esta teoría SYM cuenta con fermiones en una representación adjunta de $SU(4)_R$, aún así, obtenemos resultados comparables a la dinámica de procesos de dispersión de $pp \rightarrow pp$ y podemos extraer conclusiones del comportamiento de (3.8) para el proceso exclusivo $\text{fermión}_{1/2}$ -glueball. Esta conexión con la física de partículas puede ser atribuida a la mencionada *universalidad* en las características de escaleo en las amplitudes, la cual es heredada de una teoría de cuerdas, que es dual a la teoría de SYM.

Capítulo 4

Amplitudes de dispersión en teorías de cuerdas

A la hora de estudiar interacciones de partículas puntuales, es decir, objetos de dimensión cero, vemos que cada partícula genera una línea de mundo a medida que se propaga en el tiempo. Al agregarle una dimensión (como una cuerda) a los objetos que se propagan, en lugar de una línea de mundo, describirán una *hoja de mundo* (*worldsheet* en inglés), es decir, una superficie bidimensional. Esta es la forma de visualizar la propagación de un objeto en la teoría de cuerdas. Entonces notamos que los diagramas de Feynman que podemos dibujar en teoría de cuerdas se corresponden con diversas hojas de mundo que describen la historia espacio-temporal de cuerdas que se juntan y se separan. Los diferentes diagramas son clasificados por su topología. De esta manera, el orden que le corresponderá a cada diagrama en el desarrollo perturbativo de la teoría estará determinado por el número de agujeros y de líneas externas presentes. De este modo, el término más relevante para cada proceso es aquél que se da a nivel árbol. Una vez que conocemos la aproximación a nivel árbol, la cual se corresponde con una Teoría de Campos Clásica, podemos dejar establecida la teoría cuántica completa basándonos únicamente en unitariedad. Dicha teoría cuántica está contenida completamente en el estudio de la matriz S .

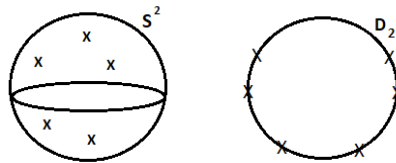


Figura 4.1: A izquierda se muestra la esfera de Riemann S^2 donde se insertan los operadores de vértices de las cuerdas cerradas, y a derecha el disco D_2 donde los operadores de vértices de cuerdas abiertas se insertan en su borde.

Las amplitudes de dispersión de M estados *on-shell* (en la capa de masa) de cuerdas

cerradas están descritas a nivel árbol por una hoja de mundo que es topológicamente equivalente a una esfera S^2 , como la de la Figura 4.1, con M partículas externas adosadas en M puntos específicos z_i de la superficie de Riemann. En principio deberíamos integrar sobre todas las geometrías posibles para dicha topología y también sobre todos los valores que pueden tomar los z_i , teniendo en cuenta la invariancia conforme. A nivel árbol, cualquier superficie es equivalente topológicamente a la esfera S^2 , la cual (a menos de un punto) puede ser proyectada en el plano complejo \mathbf{C} y además es invariante frente al subgrupo $SL(2, \mathbf{C})$ del grupo de simetría conforme. Utilizando esto, no debemos considerar ninguna integral y podemos fijar tres de los z_i en tres puntos cualesquiera del plano \mathbf{C} . Es fácil notar que, para el caso de la esfera, no hay un orden natural de las partículas (como sí lo hay en el caso del disco). En teoría de cuerdas tenemos solamente un diagrama para cada orden en la expansión perturbativa de la amplitud.

Para el caso de las cuerdas abiertas la hoja de mundo presenta bordes, y es allí en donde se adosan los operadores de vértice que representan estados de cuerdas abiertas emitidos. Es decir, a nivel árbol, la hoja de mundo será el disco D_2 (Figura 4.1). Aquí, a diferencia del caso de las cuerdas cerradas, el ordenamiento cíclico entre las partículas del borde es relevante y debe ser tenido en cuenta. La herramienta que tenemos a disposición es la simetría de Yang-Mills, la cual otorgará un peso a cada ordenamiento cíclico no equivalente mediante factores de grupos.

Daremos paso ahora a describir cómo se construyen las amplitudes a nivel árbol. Para ello utilizaremos el método de operadores, el cuál es muy útil a la hora de volver evidente aspectos como la unitariedad.

4.1. Cuerdas abiertas bosónicas

En teoría de cuerdas aún no se posee la capacidad de establecer un Lagrangiano fundacional del cual se puedan deducir reglas de Feynman con los diagramas correspondientes, los cuales darían lugar a la expansión en *loops* de la formulación cuántica completa de la teoría. Sabemos que una manera de construir las amplitudes de dispersión en teoría de cuerdas se consigue a partir de sumar sobre todas las geometrías intrínsecas para la hoja de mundo, definidas a menos de una equivalencia conforme. Es decir, una amplitud de M cuerdas tendría la forma [40]:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\zeta_1, k_1; \zeta_2, k_2; \dots; \zeta_M, k_M) &= \kappa^{M-2} \int DX(\sigma, \tau) Dh_{\alpha, \beta}(\sigma, \tau) \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \right] &\prod_{i=1}^M V_{\zeta_i}(k_i) \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde las ζ_i 's son las polarizaciones que nos dan cuenta del tipo de partículas que se dispersan, k_i 's los impulsos correspondientes; luego κ es la constante de gravitación de

Newton, X^μ las coordenadas espacio temporales como funciones de los dos parámetros de la hoja de mundo, σ y τ , donde $\mu = 0, 1, \dots, 25$ en la teoría de cuerdas bosónicas; $h_{\alpha\beta}$ la métrica de la hoja de mundo, y por último los V_{ζ_i} 's, los cuales son los operadores de vértices que están insertos en la superficie de la misma.

Una manera alternativa de obtener amplitudes de dispersión en teorías de cuerdas, es postular una cierta cantidad de reglas para construir los diagramas en términos de vértices y propagadores. Debemos verificar, al realizar este procedimiento, que las amplitudes de dispersión obtenidas presentan todas las propiedades necesarias para un buen comportamiento de la teoría cuántica en cuestión. Esta prescripción resulta útil únicamente para el caso de la matriz S , conformada por estados *on-shell*, por lo que resulta extremadamente complicado ir hacia atrás y escribir una acción de la teoría de campos de cuerdas (*string field theory* en inglés) de la cual se puedan derivar estas reglas. A su vez, resulta muy complicado realizar la extensión para diferentes niveles en la expansión en *loops*, ya que esas amplitudes presentan elementos no triviales. El método de operadores que utilizaremos, sin embargo, tiene la virtud de hacer explícita la unitariedad, especialmente a nivel árbol y a un *loop*.

4.1.1. Construcción de las amplitudes a nivel árbol

En una TCC, los dos elementos fundamentales a la hora de construir diagramas son: vértices y propagadores. Por ejemplo, para un campo bosónico escalar ϕ de masa cuadrado m^2 , que obedezca la ecuación de Klein-Gordon [40]

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0 \tag{4.2}$$

su propagador de Feynman estándar resulta ser simplemente

$$(\partial^2 + m^2)^{-1} \tag{4.3}$$

es decir, la inversa del operador de Klein-Gordon. Lo más parecido a un operador tipo Klein-Gordon que tenemos a disposición para cuerdas abiertas es la condición de masa, dada por

$$(L_0 - 1)|\phi\rangle = 0 \tag{4.4}$$

la cual podemos interpretar como una generalización de la ecuación de Klein-Gordon para la teoría de cuerdas. Por lo tanto, resulta razonable considerar como propagador a

$$\Delta = (L_0 - 1)^{-1} = \int_0^1 z^{L_0-2} dz \tag{4.5}$$

siendo z la coordenada del plano complejo C o equivalentemente, los puntos sobre la superficie de la esfera de Riemann S^2 .

Como ya dijimos, el otro componente esencial para construir diagramas de cuerdas es un objeto que funcione como vértice de interacción. A nivel árbol y a 1-loop, cada diagrama de cuerdas puede ser representado de manera tal que cada vértice de interacción está acoplado con, al menos, una pata externa del diagrama, la cual a su vez deberá estar *on-shell* para estados físicos. Es por ello que debemos hallar un vértice de interacción para la emisión (y absorción) de un estado externo por una línea interna del diagrama. Estos operadores de vértice serán operadores locales en la teoría cuántica y gobernarán la propagación de la cuerda. Para un estado ζ con momento k^μ tenemos asociado el operador de vértice dado por

$$V_\zeta(k, \tau) = e^{i\tau L_0} V_\zeta(k, 0) e^{-i\tau L_0} \quad (4.6)$$

el cual describe la emisión de un estado ζ desde el final de una cuerda abierta, $\sigma = 0$, a un tiempo propio τ . Resulta conveniente definir

$$z = e^{i\tau} \quad (4.7)$$

A su vez, este operador (4.6) debe tener dimensión conforme $J = 1$, de manera tal que cumple

$$[L_m; V_\zeta(k, z)] = \left((m+1)z^m + z^{m+1}\partial_z \right) V_\zeta(k, z) \quad (4.8)$$

donde L_m son los modos de Fourier del tensor de energía-impulso de la teoría 2-dimensional sobre la hoja de mundo de la cuerda, también llamados los operadores de Virasoro definidos como

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n \quad (4.9)$$

Estos operadores de vértice se construyen a partir de expresiones ordenadas normalmente y con

$$X^\mu(z) = x^\mu - ip^\mu \ln z + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu z^{-n} \quad (4.10)$$

y sus derivadas, donde los α_n^μ son las componentes de Fourier, interpretadas como los coeficientes de la parte oscilatoria de la cuerda, mientras que x^μ y p^μ son las coordenadas y el impulso respectivamente de centro de masa de la cuerda⁵. Por ejemplo, tenemos que el vértice del taquión está dado por

$$V_0(k, z) =: e^{ik \cdot X(z)} : \quad (4.11)$$

⁵Tomamos $\alpha' = 1/2$ a lo largo de este capítulo. En capítulos posteriores retomamos las expresiones con el α' explícito.

con $k^2 = 2$ y $::$ simboliza el orden normal. De manera análoga, se define el operador para una partícula vectorial, sin masa, con momento k^μ y polarización $\zeta^\mu(k)$:

$$V(\zeta, k, z) = \zeta \cdot \dot{X}(z) e^{ik \cdot X(z)} \quad (4.12)$$

con $k^2 = 0$ y $\zeta \cdot k = 0$, es decir, polarización transversal.

Si nos inspiramos en una teoría cuántica de campos ordinaria, la amplitud a nivel árbol para M estados de cuerdas abiertas estará dada por la siguiente secuencia de operadores de vértice y propagadores

$$\mathcal{A}_M = g^{M-2} \langle \phi_1 | V_2(k_2) \Delta V_3(k_3) \Delta \dots \Delta V_{M-1}(k_{M-1}) | \phi_M \rangle \quad (4.13)$$

lo cual constituye un análogo de un diagrama de Feynman a nivel árbol, donde los operadores de vértice tienen el rol de un vértice de interacción *on-shell*, siendo la constante de acoplamiento g la que controla la intensidad de estas interacciones. Esta expresión presenta ciertas características destacables, como por ejemplo que algunos aspectos de la unitariedad, a nivel árbol, están explícitamente manifiestos. La ecuación (4.13) presenta polos debido a los propagadores, los cuales son la inversa de $(L_0 - 1)$, por lo que los polos surgen cuando se cumple $(L_0 - 1)|\phi\rangle = 0$, es decir, los estados se encuentran *on-shell*. Si bien (4.13) nace a partir del análisis de un diagrama en particular, haciendo una analogía con una teoría cuántica de campos, uno esperaría tener que generalizar esta expresión para diferentes diagramas. Resulta ser que en teoría de cuerdas, ésta es la única expresión a estudiar. Terminamos de este modo con una única expresión para una amplitud a nivel árbol en teoría de cuerdas.

4.1.2. Dualidad

Notemos que (4.13) es simétrica bajo permutaciones cíclicas de las partículas externas, surgiendo así la propiedad de *dualidad* en la amplitud de dispersión. Vamos a analizar más cuidadosamente cómo aparece este fenómeno. Históricamente, la teoría de cuerdas comenzó buscando teorías que presentaran esta dualidad en sus fórmulas. Supongamos que en (4.13), los estados inicial y final son taquiones con momentos k_1 y k_M respectivamente. A priori podríamos pensar que para realizar el cálculo es necesario evaluar la forma explícita de las funciones de onda de estos estados. Sin embargo, si bien ese es un camino posible, el formalismo de integral de camino de Feynman nos brinda una manera alternativa de describir los estados de energía más bajos de un sistema cuántico. Por ejemplo, la función de onda del estado fundamental $|0; 0\rangle$ se puede representar como una integral de camino sobre una *cinta* semi-infinita. Como se suele hacer en este formalismo, realizando una rotación de Wick podemos interpretar la *cinta* como parte de una hoja de mundo euclídea de signatura positiva. Si uno buscara la función de onda de un estado diferente al fundamental debería insertar en el pasado un operador con los números cuánticos correspondientes.

Por ejemplo, para obtener el estado taquiónico con momento k dado por $|0; k\rangle$ es necesario insertar en el pasado un operador de vértice taquiónico, con momento k^μ , dado por $V_0(k) =: e^{ik \cdot X} \text{ :}$. En general, para describir cualquier estado físico $|\zeta; k\rangle$ debemos insertar en el pasado un operador de vértice $V_\zeta(k)$. Por lo tanto tenemos que [40]

$$|\zeta; k\rangle = \lim_{\tau \rightarrow +i\infty} e^{-i\tau} V_\zeta(k; \tau) |0; 0\rangle \quad (4.14)$$

donde la integral de camino se realiza sobre una hoja de mundo euclídea de tiempo imaginario τ . De una manera similar, para representar un estado final como una integral de camino en una *cinta* semi-infinita que se extiende hasta el $\tau = -i\infty$, debemos considerar una expresión del tipo

$$\langle \Lambda; k| = \lim_{\tau \rightarrow -i\infty} e^{i\tau} \langle 0; 0| V_\Lambda(k; \tau) \quad (4.15)$$

Los factores de $z^{-1} = e^{-i\tau}$ y $z = e^{i\tau}$ son necesarios para compensar aquellos factores que surgen de

$$Z_0 |0; 0\rangle = e^{ik \cdot x} z^{k \cdot p + 1} |0; 0\rangle = z |0; k\rangle \quad (4.16)$$

y

$$\langle 0; 0| Z_0 = \langle 0; 0| z^{k \cdot p - 1} e^{ik \cdot x} = z^{-1} \langle 0; k| \quad (4.17)$$

donde podemos escribir el operador de vértice del taquión como:

$$V_0 = W_0 Z_0 \quad (4.18)$$

con

$$W_0 = \exp \left(k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-n} z^n \right) \exp \left(-k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n z^{-n} \right) \quad (4.19)$$

$$Z_0 = \exp (ik \cdot x + k \cdot p \ln(z)) \quad (4.20)$$

En (4.13), además de los estados inicial y final, tenemos propagadores de la forma

$$\Delta = (L_0 - 1)^{-1} = \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(L_0 - 1)} \quad (4.21)$$

Como $(L_0 - 1)$ es el hamiltoniano que gobierna la propagación de una cuerda, $e^{-\tau(L_0 - 1)}$ es el operador que propaga una cuerda abierta a través de un tiempo imaginario τ , y por lo tanto crea una *cinta* de ancho π y largo τ .

Ahora bien, la integral que estamos considerando se realiza en una *cinta* infinita de ancho π . Además, tenemos M operadores de vértice insertados en dicha *cinta*. Dos de ellos se encuentran en el pasado y en el futuro (estados inicial y final) y $M - 2$ se

encuentran insertos en tiempos finitos $0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{M-1}$ como se muestra en la Figura 4.2, y luego debemos integrar sobre todos los valores de τ_i .

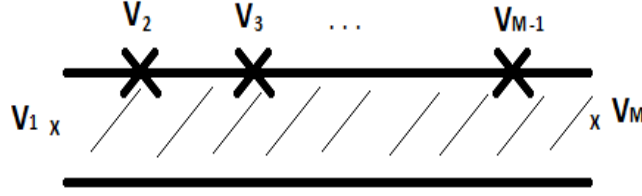


Figura 4.2: A nivel árbol tenemos la expresión $\langle 1|V_2(L_0 - 1)^{-1}V_3\dots V_{M-1}|M\rangle$, la cual es entendida en términos de una integral sobre una cinta infinita, siendo $|M\rangle$ y $\langle 1|$ los estados finales e iniciales.

El primer *mapeo* conforme que se suele realizar mapea la *cinta* en el semi-plano positivo \mathcal{H}^+ :

$$u = \sigma + i\tau \longrightarrow v = e^{iu} = e^{i\sigma} e^{-\tau} \quad (4.22)$$

$$v = e^{-\tau}[\cos(\sigma) + i \sin(\sigma)] \quad (4.23)$$

con $\sigma \in [0; \pi]$.

El siguiente mapeo conforme que se realiza *mapea* el semi-plano \mathcal{H}^+ en el disco D_2 . Ambos *mapeos* son posibles debido a que ambas son simetrías de la teoría debido a la invariancia conforme. Una transformación de Möbius es de la forma

$$v \longrightarrow \phi(v) = \frac{av + b}{cv + d}, \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbf{R} \quad (4.24)$$

y constituyen el grupo de transformaciones globales $GL(2, \mathbf{C})$, dado que una composición de dos transformaciones de Möbius da por resultado una transformación de Möbius.

Una transformación de este tipo puede mapear una recta en un círculo. Siendo \mathcal{H}^+ el semi-plano positivo de v , es decir $\text{Im}(v) > 0$, tenemos que una transformación de la forma

$$\phi : v \longrightarrow \frac{v - i}{v + i} \quad (4.25)$$

puede llevar el semi-plano \mathcal{H}^+ al disco $D(0, 1)$ si

$$\phi : v \longrightarrow e^{i\theta} \frac{v - a}{v - \bar{a}}. \quad (4.26)$$

Para el caso específico de $\text{Im}(a) = 0$, esta transformación *mapea* la recta real a la circunferencia de radio 1.

En el primer *mapeo* que realizamos, obtenemos como resultado que los operadores de vértice quedan en el eje real. Pero ahora, los operadores de vértice quedan en el borde del disco con una simetría cíclica explícita.

4.1.3. Simetría cíclica

En la expresión para las amplitudes de dispersión, la cual recordaremos una vez más

$$\mathcal{A}_M = g^{M-2} \langle \phi_1 | V_2(k_2) \Delta V_3(k_3) \Delta \dots \Delta V_{M-1}(k_{M-1}) | \phi_M \rangle \quad (4.27)$$

presenta una propiedad conocida como *dualidad*, la cual no se encuentra en TCC para partículas puntuales. Esto es posible porque la expresión (4.27) presenta polos en otros canales además de aquellos en los cuales los propagadores se encuentran expresados explícitamente. Estos polos surgen debido a las divergencias en las sumas infinitas que están implícitas en la multiplicación de operadores. Estos polos extras hacen posible que la amplitud sea invariante frente a una transformación cíclica de las M partículas externas $(1, 2, \dots, M) \rightarrow (M, 1, \dots, M-1)$. Esta propiedad es evidencia de que la hoja de mundo es equivalente conforme a un disco con M partículas insertadas en su borde en un determinado orden cíclico. Esta propiedad es crucial, ya que por esta simetría el conteo de diagramas en cada orden de la expansión perturbativa es muy diferente a las expansiones perturbativa en las TCC. Por ejemplo, en las teorías de cuerdas cerradas orientadas sólo existe un único diagrama en cada orden en la expansión perturbativa. Para tratar de probar la validez de esta simetría comenzaremos evaluando (4.27). Además, utilizaremos las ecuaciones

$$\Delta = (L_0 - 1)^{-1} = \int_0^1 z^{L_0-2} dz \quad (4.28)$$

y

$$V_\Lambda(k, \tau) = e^{i\tau L_0} V_\Lambda(k, 0) e^{-i\tau L_0} \quad (4.29)$$

Usaremos también que los estados inicial y final satisfacen

$$(L_0 - 1) | \phi_1 \rangle = (L_0 - 1) | \phi_M \rangle = 0. \quad (4.30)$$

Reemplazando en (4.27) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_M &= g^{M-2} \langle \phi_1 | V(k_2, z_2) \int_0^1 dz_3 z_3^{L_0-2} V(k_3, z_3) \dots \int_0^1 dz_{M-1} z_{M-1}^{L_0-2} V(k_{M-1}, z_{M-1}) | \phi_M \rangle \\ &= g^{M-2} \langle \phi_1 | \int_0^1 dz_3 \dots \int_0^1 dz_{M-1} V(k_2, z_2) z_3^{L_0-2} V(k_3, z_3) \dots z_{M-1}^{L_0-2} V(k_{M-1}, z_{M-1}) | \phi_M \rangle \end{aligned} \quad (4.31)$$

fijando $z_2 = 1$ y escribiendo las z_i 's de la siguiente manera:

$$\mathcal{A}_M = g^{M-2} \langle \phi_1 | \int_0^1 dz_3 \dots \int_0^1 dz_{M-1} V(k_2, 1) \frac{z_3^{L_0-1}}{z_3} V(k_3, z_3) \dots \frac{z_{M-1}^{L_0-1}}{z_{M-1}} V(k_{M-1}, z_{M-1}) | \phi_M \rangle \quad (4.32)$$

y siendo que L_0 actuando sobre un estado físico tiene autovalor 1, tenemos que

$$A_M = g^{M-2} \langle \phi_1 | \int_0^1 dz_3 \dots \int_0^1 dz_{M-1} V(k_2, 1) \frac{1}{z_3} V(k_3, z_3) \dots \frac{1}{z_{M-1}} V(k_{M-1}, z_{M-1}) | \phi_M \rangle \quad (4.33)$$

El siguiente paso que realizaremos consistirá en efectuar un cambio de variable. Pasaremos a unas coordenadas y_i de la forma

$$\begin{aligned} z_3 &\longrightarrow y_3 = z_3 \\ z_4 &\longrightarrow y_4 = z_3 z_4 \\ z_5 &\longrightarrow y_5 = z_3 z_4 z_5 \\ &\dots \\ z_{M-1} &\longrightarrow y_{M-1} = z_3 z_4 z_5 \dots z_{M-1} \end{aligned} \quad (4.34)$$

por lo que el Jacobiano de la transformación resulta

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{dy_3}{dz_3} & \frac{dy_4}{dz_3} & \dots & \frac{dy_{M-1}}{dz_3} \\ \frac{dy_3}{dz_4} & \frac{dy_4}{dz_4} & \dots & \frac{dy_{M-1}}{dz_4} \\ \frac{dy_3}{dz_{M-1}} & \frac{dy_4}{dz_{M-1}} & \dots & \frac{dy_{M-1}}{dz_{M-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_4 & z_4 z_5 & \dots & z_4 z_5 \dots z_{M-1} \\ 0 & z_3 & z_3 z_5 & \dots & z_3 z_5 \dots z_{M-1} \\ 0 & 0 & z_3 z_4 & \dots & z_3 z_4 z_6 \dots z_{M-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z_3 z_4 z_5 \dots z_{M-2} \end{bmatrix} = \prod_{i=3}^{M-2} y_i$$

entonces la amplitud nos queda expresada de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_M &= g^{M-2} \langle \phi_1 | \int_0^1 dy_3 \frac{\int_0^1 dy_4}{z_3} \dots \frac{\int_0^1 dy_{M-1}}{z_3 \dots z_{M-2}} \frac{V(k_2, 1) V(k_3, y_3) \dots V(k_{M-1}, y_{M-1})}{z_3 \dots z_{M-1}} | \phi_M \rangle \\ &= g^{M-2} \langle \phi_1 | \int_0^1 dy_3 \frac{\int_0^1 dy_4}{y_3} \dots \frac{\int_0^1 dy_{M-1}}{y_{M-2}} \frac{V(k_2, 1) V(k_3, y_3) \dots V(k_{M-1}, y_{M-1})}{y_{M-1}} | \phi_M \rangle \end{aligned} \quad (4.35)$$

finalmente tenemos

$$\mathcal{A}_M = g^{M-2} \int_0^1 \left(\prod_{i=3}^{M-1} \Theta(y_{i-1} - y_i) \frac{dy_i}{y_i} \right) \langle \phi_1 | V(k_2, y_2) V(k_3, y_3) \dots V(k_{M-1}, y_{M-1}) | \phi_M \rangle \quad (4.36)$$

donde hemos usado la función Θ de Heavyside, debido a que $0 < z_i < 1$, lo cual implica que $y_{i-1} > y_i$.

Hasta este punto podemos ver que nuestra expresión no trata a todas las M partículas de manera simétrica, debido a la diferencia que hace para con los estados inicial y final. Una manera de solucionar ésto es reemplazar

$$|\phi_M\rangle = \lim_{y_M \rightarrow 0} y_M^{-1} V(k_M, y_M) |0; 0\rangle \quad (4.37)$$

y

$$\langle \phi_1 | = \lim_{y_1 \rightarrow +\infty} \langle 0; 0 | y_1 V(k_1, y_1) \quad (4.38)$$

en nuestra expresión anterior. Tener en cuenta que el estado fundamental del espacio de Fock con momento cero, que hemos nombrado $|0; 0\rangle$, es el vacío de la teoría 2-dimensional que describe la propagación de la cuerda bosónica abierta. Este estado no es un estado físico, debido a que no es anulado por el operador $(L_0 - 1)$ sino que es aniquilado simplemente por el operador L_0 . Además, es el único estado de todo el espacio de Fock que es aniquilado por los generadores del álgebra del grupo $SL(2, R)$, L_{-1}, L_0, L_{-1} . Esta álgebra, si bien es una sub-álgebra finito-dimensional del álgebra de Virasoro (infinita), juega un rol muy especial porque no es afectado por el término central del álgebra de Virasoro. De esta manera es una verdadera simetría y aniquila el estado fundamental. Es decir, el grupo $SL(2, R)$ no es anómalo y deja al vacío de la teoría invariante, por lo que este grupo representa una simetría de la teoría de campos 2-dimensional.

A nivel infinitesimal, el operador L_m genera una transformación dada por $\delta y \sim y^{m+1}$. Esto puede verse en la ya conocida expresión

$$[L_m, V_\Lambda(k, z)] = \left(z^{m+1} \frac{d}{dz} + (m+1)z^m \right) V_\Lambda(k, z) \quad (4.39)$$

donde el primer término del paréntesis estará presente cuando el operador L_m actúe sobre un campo de cualquier dimensión conforme, mientras que el segundo término del paréntesis está presente debido a que el operador de vértice tiene dimensión conforme $J = 1$.

Una transformación infinitesimal arbitraria del grupo $SL(2, R)$ se puede escribir como

$$y \longrightarrow y' = y + \lambda_{-1} + \lambda_0 y + \lambda_1 y^2 \quad (4.40)$$

donde los λ_m son parámetros pequeños arbitrarios. De esta manera, al exponenciar la acción del operador L_m obtendremos que

$$e^{\lambda_1 L_1} : y \longrightarrow y' = \frac{y}{1 - \lambda_1 y}, \quad (4.41)$$

$$e^{\lambda_0 L_0} : y \longrightarrow y' = e^{\lambda_0} y, \quad (4.42)$$

$$e^{\lambda_{-1} L_{-1}} : y \longrightarrow y' = y + \lambda_{-1}, \quad (4.43)$$

donde ahora los λ_m son finitos. Al combinar estas expresiones obtenemos la forma general de una transformación debida a la acción del grupo $SL(2, R)$, la cual está dada por

$$y \longrightarrow y' = \frac{ay + b}{cy + d} \quad (4.44)$$

con 3 parámetros y no 4, ya uno de ellos se puede absorber en un re-escalo general de a, b, c y d . Es por ello que se suele tomar $ad - bc = 1$, de manera de agruparlos en matrices reales de 2×2 de determinante 1.

Con todo esto, tenemos que al actuar con los operadores del álgebra del grupo $SL(2, R)$, la transformación $y \longrightarrow y' = e^{\lambda_n L_n} y$, para $n = -1, 0, 1$ satisface

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^{n+1} = (cy + d)^{-2} = (a - cy)^2 \quad (4.45)$$

para determinados a, b, c, d . Para probar (4.45) damos valores a n . Para $n = 1$ tenemos

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^{n+1} = \left(\frac{y}{1 - \lambda_1 y}\right)^2 = (1 - \lambda_1 y)^{-2} \quad (4.46)$$

para $n = 0$ tenemos

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^{n+1} = \left(\frac{e^{\lambda_0 y}}{y}\right)^1 = e^{\lambda_0} \quad (4.47)$$

y finalmente para $n = -1$

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^{n+1} = \left(\frac{y + \lambda_{-1}}{y}\right)^0 = 1, \quad (4.48)$$

por lo que estas transformaciones tienen la forma (4.45) para ciertos valores de a, c y d .

De esta manera, al tomar la expresión exponencial para los operadores de vértice tenemos que

$$e^{\lambda L_n} y^n V(k, y) e^{-\lambda L_n} = (y')^n V(k, y'), \quad (4.49)$$

y si dividimos por y^{n+1} tenemos que, para cualquier transformación del grupo $SL(2, R)$,

$$\Lambda(T) \frac{V(k, y)}{y} \Lambda^{-1}(T) = (a - cy')^2 \frac{V(k, y')}{y'}. \quad (4.50)$$

Usando la invariancia del estado fundamental frente a la acción del grupo $SL(2, R)$ dada por

$$\Lambda(T)|0; 0\rangle = 0, \quad (4.51)$$

podemos ver que

$$I_M(K, y) = \langle 0; 0 | \frac{V(k_1, y_1)}{y_1} \dots \frac{V(k_M, y_M)}{y_M} | 0; 0 \rangle \quad (4.52)$$

transforma frente a la acción de dicho grupo como

$$I_M(k; y) = I_M(k; y') \prod_{i=1}^M (a - cy'_i)^2 \quad (4.53)$$

y nuestra amplitud de dispersión es de la forma

$$\mathcal{A}_M = \int d\mu_M(y) I_M(k; y) \quad (4.54)$$

Nuestro siguiente paso será trabajar para expresar la medida de integración $d\mu_M(y)$ de una manera más simétrica a la que hemos utilizado anteriormente.

Comenzaremos considerando un único diferencial dy_i , el cual transforma según

$$dy'_i = d \left(\frac{ay_i + b}{cy_i + d} \right) = \frac{(ad - bc)dy_i}{(cy_i + d)^2} = \frac{dy_i}{(cy_i + d)^2} \quad (4.55)$$

o

$$dy_i = (ay_i + b)^{-2} dy'_i \quad (4.56)$$

Si tuviéramos que adivinar una expresión para nuestra medida de integración diríamos que

$$d\mu_M(y) \sim \prod dy_i \quad (4.57)$$

la cual cumple con ser invariante frente a la acción del grupo $SL(2, R)$. Sin embargo, para que funcione correctamente en nuestra expresión para las amplitudes de dispersión debemos agregarle algunos elementos.

El primer aspecto a considerar es que en nuestra expresión para la amplitud las coordenadas y_i están ordenadas en el borde de la hoja de mundo. La manera de solucionar esto es agregar un producto de funciones escalón $\prod_i \theta(y_{i-1} - y_i)$.

El segundo aspecto es que debido a la invariancia frente a el grupo $SL(2, R)$ el factor $\prod dy_i$ sobrecuenta configuraciones equivalentes, lo que se traduce en un factor divergente, provocado por el volumen del grupo $SL(2, R)$, el cual es no compacto. Para solucionar este inconveniente debemos seleccionar únicamente una configuración representativa de cada clase de equivalencia conforme. El grupo $SL(2, R)$ tiene tres parámetros reales, por lo que podemos fijar tres variables y_i , digamos y_A, y_B, y_C , en tres valores particulares, y_A^0, y_B^0, y_C^0 . El factor divergente que pesa el volumen del grupo puede ser removido simplemente no integrando en las variables y_A, y_B, y_C . Para ello, debemos

incluir algo análogo al determinante de Fadeev-Popov, que cancelará los factores $(a - cy'_i)^2$ para las coordenadas que no serán integradas.

El Jacobiano de la transformación resulta

$$\frac{\partial(y_A, y_B, y_C)}{\partial(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_A}{\partial \lambda_{-1}} & \frac{\partial y_B}{\partial \lambda_{-1}} & \frac{\partial y_C}{\partial \lambda_{-1}} \\ \frac{\partial y_A}{\partial \lambda_0} & \frac{\partial y_B}{\partial \lambda_0} & \frac{\partial y_C}{\partial \lambda_0} \\ \frac{\partial y_A}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial y_B}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial y_C}{\partial \lambda_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_A & y_B & y_C \\ y_A^2 & y_B^2 & y_C^2 \end{vmatrix} \quad (4.58)$$

con determinante

$$(y_A - y_B)(y_B - y_C)(y_A - y_C) \quad (4.59)$$

el cual transforma de la manera correcta debido a que

$$y_A - y_B = \frac{y'_A - y'_B}{(a - cy'_A)(a - cy'_B)}. \quad (4.60)$$

Con todo ésto podemos ver que el elemento de volúmen deseado es

$$\begin{aligned} d\mu_M(y) &= \delta(y_A - y_A^0)\delta(y_B - y_B^0)\delta(y_C - y_C^0)(y_A - y_B)(y_B - y_C)(y_A - y_C) \\ &\times \prod_{i=2}^M \theta(y_{i-1} - y_i) \prod_{j=1}^M dy_j \end{aligned} \quad (4.61)$$

Una transformación arbitraria del grupo $SL(2, R)$ *mapea* el eje real en sí mismo preservando el orden cíclico de las coordenadas y_i . Sin embargo, se pueden elegir transformaciones que lleven el último operador de vértice al $+\infty$, de manera tal que regrese en el $-\infty$ y se convierta en el primer operador. Es decir, esta propiedad cíclica implica que

$$V(1)V(2)\dots V(M) = V(M)V(1)V(2)\dots V(M-1). \quad (4.62)$$

Vamos a ver explícitamente cómo funciona estudiando el caso de los vértices taquiónicos. Para dos vértices taquiónicos tenemos

$$V_0(k_1, y_1)V_0(k_2, y_2) = V_0(k_2, y_2)V_0(k_1, y_1)e^{\pi i k_1 \cdot k_2 \times \text{signo}(y_1 - y_2)}. \quad (4.63)$$

la cual se demuestra con las siguiente identidad:

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A, B]} \quad (4.64)$$

donde

$$[ik_1 \cdot X(y_1), ik_2 \cdot X(y_2)] = i\pi k_1 \cdot k_2 \epsilon(y_1 - y_2) \quad (4.65)$$

con $\epsilon(x)$ igual a $+1$ para $x > 0$, y -1 para $x < 0$. La expresión (4.63) es lo que necesitamos para llegar a (4.62), donde debemos pasar el operador $V(M)$ hacia la dirección $y_1 > y_2 > \dots > y_M$ dando una fase de la forma

$$\exp\left[i\pi k_M \cdot \sum_1^{M-1} k_i\right] = \exp(-i\pi k_M^2) = 1 \quad (4.66)$$

habiendo usado la conservación de impulso y la condición de capa de masa. Esto prueba la simetría cíclica.

4.2. Cuerdas cerradas bosónicas

Estudiaremos ahora las amplitudes de dispersión para cuerdas cerradas bosónicas, un paso más hacia nuestro objetivo principal en este capítulo, es decir las cuerdas cerradas supersimétricas. A nivel árbol, la topología del diagrama correspondiente a la dispersión de cuerdas cerradas es una esfera S^2 . Mediante una transformación conforme se puede *mapear* (mediante una proyección estereográfica) en el plano complejo completo. Debido a que tenemos modos derechos (*right-moving*) y modos izquierdos (*left-moving*) en este tipo de cuerdas, en lugar de tener algo de la forma

$$\int dy f(y) \quad (4.67)$$

como en el caso de cuerdas abiertas, vamos a tener algo de la forma

$$\int d^2z f_R(z) f_L(\bar{z}), \quad (4.68)$$

donde tenemos funciones para los modos derechos (R) e izquierdos (L). La integración se realiza sobre todo el plano complejo z .

4.2.1. Construcción de las amplitudes a nivel árbol

Sabemos que las coordenadas $X^\mu(\sigma, \tau)$ del espacio ambiente en el cual se propaga una cuerda cerrada se descomponen en partes *left* y *right* de la forma

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma) \quad (4.69)$$

y ambas partes tienen dos expansiones en modos, en términos de los osciladores $\{\alpha_m^\mu\}$ y $\{\tilde{\alpha}_m^\mu\}$, independientes entre sí. Podemos ver que cada conjunto de osciladores individualmente describe el espacio de Fock de estados de cuerdas abiertas, por lo que el espacio de Fock para estados de cuerdas cerradas se describe como el producto directo de estados de cuerdas abiertas. La única restricción que se debe satisfacer es

$$L_0 = \tilde{L}_0, \quad (4.70)$$

la cual implica que ambos sectores contribuyen de igual manera al valor de la masa.

Vamos a construir ahora el operador de vértice asociado al taqui6n. Dado que dicha part6cula solo posee como n6mero cu6ntico a su momento, y teniendo en cuenta que debemos considerar el aporte de los modos *left* y *right*, podemos escribir

$$V(\sigma, \tau) = \tilde{V}_R(\tau - \sigma)V_L(\tau + \sigma) \quad (4.71)$$

donde los factores que aparecen funcionan individualmente como v6rtices de emisi6n de cuerdas abiertas

$$\begin{aligned} V_L &= e^{ik \cdot X_L}, \\ \tilde{V}_R &= e^{ik \cdot X_R}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Adem6s, debemos recordar que para cuerdas abiertas tenemos que

$$\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \frac{1}{2}p^\mu, \quad (4.73)$$

de manera que la mitad del momento de la cuerda es llevado por los modos *left* y la otra por los modos *right*.

La factorizaci6n que aparece en (4.71) no es s6lo exclusiva de los estados taqui6nicos. El espacio de Fock de las cuerdas cerradas se construye mediante un producto tensorial de espacios de Fock *left* y *right* de cuerdas abiertas. De esta manera, ya que cada operador V_L y \tilde{V}_R tiene dimensi6n conforme igual a 1, el producto de ambos tiene dimensi6n conforme igual a 2 como debe ser para el caso de cuerdas cerradas bos6nicas.

A diferencia del caso de las cuerdas abiertas, donde necesariamente la emisi6n deb6a ocurrir en el borde de la hoja de mundo, en el caso de las cuerdas cerradas las emisiones ocurren en la superficie de la hoja de mundo. F6sicamente, el operador de v6rtice

$$V(k, \tau, \sigma) = V_R\left(\frac{1}{2}k, \sigma - \tau\right)V_L\left(\frac{1}{2}k, \sigma + \tau\right) \quad (4.74)$$

describe la emisi6n desde un punto de la hoja de mundo con coordenadas σ y τ . Sin embargo, en el formalismo de operadores, para construir la amplitud debemos considerar un tiempo τ espec6fico e integrar sobre todos los posibles valores de σ . Por lo que nuestros operadores de v6rtice para cuerdas cerradas deber6n ser de la forma

$$\begin{aligned} V_c(k, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma V_R\left(\frac{1}{2}k, \sigma - \tau\right)V_L\left(\frac{1}{2}k, \sigma + \tau\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma e^{-2i\sigma(L_0 - \tilde{L}_0)} V_R\left(\frac{1}{2}k, \tau\right)V_L\left(\frac{1}{2}k, \tau\right) e^{2i\sigma(L_0 - \tilde{L}_0)} \end{aligned} \quad (4.75)$$

An6logamente al procedimiento que hemos desarrollado para cuerdas abiertas debemos definir el propagador

$$\Delta = \frac{1}{2}(L_0 + \tilde{L}_0 - 2)^{-1} = \frac{1}{2} \int_0^1 d\rho \rho^{L_0 + \tilde{L}_0 - 3} \quad (4.76)$$

y definir, entonces, la amplitud de dispersión a nivel árbol como

$$\mathcal{A}_M = \kappa^{M-2} \langle \phi_1 | V_2 \Delta V_3 \dots \Delta V_{M-1} | \phi_M \rangle + \text{permutación de índices.} \quad (4.77)$$

Estas fórmulas son muy similares a las empleadas para el caso de cuerdas abiertas y tienen la ventaja de que la unitariedad se manifiesta explícitamente, al menos en los canales exhibidos. Una diferencia trascendente con el caso de las cuerdas abiertas es que aquí no hay un orden bien definido para las $M - 2$ partículas emitidas, y la amplitud de dispersión requiere sumar sobre todas las permutaciones de sus vértices. Debido a la integración en σ , esta suma también incluye todos los posibles ordenamientos para los M estados externos. Los estados de cuerdas cerradas deben satisfacer el vínculo

$$(L_0 - \tilde{L}_0)|\phi\rangle = 0. \quad (4.78)$$

Sin embargo, el propagador que hemos definido (4.76) propaga estados que no satisfacen este vínculo. Por éso debemos modificarlo de la forma

$$\Delta = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{4\pi} \rho^{L_0 + \tilde{L}_0 - 3} e^{i\phi(L_0 - \tilde{L}_0)}. \quad (4.79)$$

Como en nuestra expresión para la amplitud (4.77) los estados inicial y final son aniquilados por $L_0 - \tilde{L}_0$ y los operadores de vértice conmutan con $L_0 - \tilde{L}_0$. Es conveniente introducir la variable

$$z = \rho e^{i\phi} \quad (4.80)$$

de manera tal de que

$$dzd\bar{z} = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial \rho} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial \phi} \end{pmatrix} \right| d\rho d\phi = \left| \begin{pmatrix} e^{i\phi} & i\rho e^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & -i\rho e^{-i\phi} \end{pmatrix} \right| d\rho d\phi = 2\rho d\rho d\phi \quad (4.81)$$

por lo que

$$\rho d\rho d\phi = \frac{dzd\bar{z}}{2} \quad (4.82)$$

y planteando

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{4\pi} \rho^{L_0 + \tilde{L}_0 - 4} e^{i\phi(L_0 - \tilde{L}_0)} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dzd\bar{z}}{4\pi} z^{L_0} \bar{z}^{\tilde{L}_0} \rho^{-4} = \frac{1}{2} \int \frac{dzd\bar{z}}{4\pi} \frac{z^{L_0-1}}{z} \frac{\bar{z}^{\tilde{L}_0-1}}{\bar{z}} \end{aligned} \quad (4.83)$$

dado que

$$ze^{-i\phi} = \rho = \bar{z}e^{i\phi} \longrightarrow \rho^2 = z\bar{z} \longrightarrow \rho^{-4} = (z\bar{z})^{-2} \quad (4.84)$$

Redefiniendo el espacio de integración podemos reescribir al propagador como

$$\Delta = \frac{1}{4\pi} \int_{|z|<1} \frac{dzd\tilde{z}}{z\tilde{z}} z^{L_0-1} \tilde{z}^{\tilde{L}_0-1}. \quad (4.85)$$

obteniendo de este modo el propagador correspondiente a la dispersión de cuerdas cerradas de la teoría de cuerdas bosónica. Consideremos el ejemplo para una función de tres puntos. Tomamos el estado de cuerda cerrada ϕ como el producto de un estado λ para el modo izquierdo por un estado ρ para el modo derecho. Traducido en términos del operador de vértice

$$V_2(k_2) = V(\phi_2, k_2) = V_R(\rho_2, k_2/2) V_L(\lambda_2, k_2/2) \quad (4.86)$$

evaluado en $z = 1$. Debido a que $L_0 = \tilde{L}_0$ para los estados ϕ_1 y ϕ_M que multiplican al vértice podemos obviar la integral en (4.75). Podemos representar estos estados para el caso de la función de tres puntos como

$$\langle \phi_1 | = \langle \rho_1 |_R \otimes \langle \lambda_1 |_L, \quad | \phi_3 \rangle = | \rho_3 \rangle_R \otimes | \lambda_3 \rangle_L \quad (4.87)$$

por lo que la amplitud se puede factorizar de la siguiente forma:

$$\mathcal{A}_{3,c}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \mathcal{A}_{3,ab}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \times \mathcal{A}_{3,ab}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (4.88)$$

donde los estados ρ_i y λ_i llevarán la mitad del impulso k_i correspondiente al estado de cuerda cerrada, es decir, cada estado de cuerda abierta tendrá el impulso $k_i/2$.

Para el caso de la función de cuatro puntos debemos sumar las permutaciones de los vértices, es decir:

$$\mathcal{A}_{3,c} = \kappa^2 \langle k_1 | V_2(k_2) \Delta V_3(k_3) | k_4 \rangle + \kappa^2 \langle k_1 | V_3(k_3) \Delta V_2(k_2) | k_4 \rangle \quad (4.89)$$

Una amplitud de dispersión de M cuerdas cerradas tendrá la forma:

$$\mathcal{A}_{M,c} = \kappa^{M-2} \int d\mu_M(z) I_M^R \left(\frac{k}{2}, z \right) I_M^L \left(\frac{k}{2}, \bar{z} \right) \quad (4.90)$$

la cual es análoga a la expresión (4.54) para cuerdas abiertas. Al igual a como se hizo para entender la dualidad para el caso de la cuerda abierta, donde la simetría $SL(2, R)$ tenía un importante rol; veamos cuál es esta simetría residual para la cuerda cerrada.

En la cuantización de cuerda en la representación Hamiltoniana con una signatura $(-, +)$ para la métrica de la hoja de mundo, se ve que el estado fundamental $|0; 0\rangle$ es invariante bajo los seis parámetros del grupo $SL(2, R) \times SL(2, R)$ con los respectivos generadores L_1, L_0, L_{-1} y $\tilde{L}_1, \tilde{L}_0, \tilde{L}_{-1}$ para cada factor de $SL(2, R)$. Con una signatura euclídea $(+, +)$ para la hoja de mundo, el grupo de simetría $SL(2, R) \times SL(2, R)$ es

reemplazado por el grupo $SL(2, C)$ de matrices complejas de 2×2 y determinante uno. Bajo este grupo z transforma como

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad (4.91)$$

donde $SL(2, C)$ tiene el doble de grados de libertad de $SL(2, R)$. Como consecuencia y en analogía a la ecuación (4.53) tenemos

$$\begin{aligned} I_M^R \left(\frac{k}{2}, z \right) &= I_M^R \left(\frac{k}{2}, z' \right) \prod_i (a - cz'_i)^2 \\ I_M^L \left(\frac{k}{2}, \bar{z} \right) &= I_M^R \left(\frac{k}{2}, \bar{z}' \right) \prod_i (\bar{a} - \bar{c}\bar{z}'_i)^2 \end{aligned} \quad (4.92)$$

De nuevo, nuestra medida de integración en la amplitud de dispersión de M cuerdas cerradas bosónicas debería incluir un factor de grupo infinito correspondiente al volumen del grupo $SL(2, C)$. Usando la simetría $SL(2, C)$ para fijar tres de las coordenadas z_i , z_A, z_B, z_C en los valores z_A^0, z_B^0, z_C^0 . Entonces la medida de integración debe transformar como sigue

$$d\mu_M(z) = d\mu_M(z') \prod_{i=1}^M |a - cz'_i|^{-4} \quad (4.93)$$

por lo que la amplitud es invariante bajo el grupo $SL(2, C)$. Una coorrecta elección de la medida de integración es

$$\begin{aligned} d\mu_M(z) &= |z_A - z_B|^2 |z_A - z_C|^2 |z_B - z_C|^2 \\ &\times \delta^2(z_A - z_A^0) \delta^2(z_B - z_B^0) \delta^2(z_C - z_C^0) \prod_{i=1}^M d^2 z_i \end{aligned} \quad (4.94)$$

Tomando $M = 4$ con $z_1 = \infty$, $z_2 = 1$, $z_3 = z$ y $z_4 = 0$ para cuatro taquiones obtenemos la fórmula de Virasoro, la cual será la base para nuestras amplitudes de dispersión generadas a partir de la teoría de supercuerdas, la cual deberá ir multiplicada por el conocido factor cinemático $K_c(k_1, k_2, k_3, k_3)$, el cual dará cuenta de los impulsos y polarizaciones de las especies dispersadas.

4.3. Relación entre cuerdas abiertas y cerradas: Las relaciones KLT

Una relación entre las amplitudes de cuerdas abiertas y cerradas para una función de tres puntos está dada por

$$\mathcal{A}_{3,c} \sim \mathcal{A}_{3,R} \mathcal{A}_{3,L} \quad (4.95)$$

la cual puede ser generalizada para una amplitud de M cuerdas cerradas [36]. En decir, la amplitud de M cuerdas cerradas puede ser expresada como la suma de productos de amplitudes de dispersión de M puntos correspondientes a cuerdas abiertas. Este resultado es una consecuencia directa de las propiedades de integrales sobre la hoja de mundo. Esta relación se expresa como

$$\mathcal{A}_{M,c} \sim \kappa^{M-2} \sum_{P,P'} e^{i\pi F(P,P')} \mathcal{A}_{M,ab}(P) \bar{\mathcal{A}}_{M,ab}(P') \quad (4.96)$$

donde $\mathcal{A}_{M,ab}(P)$ es la amplitud de dispersión de M cuerdas abiertas para cierto orden P de los estados externos. Esta amplitud es bosónica (o supersimétrica) dependiendo si los modos izquierdos de la cuerda cerrada son bosónicos (o supersimétricos). Similarmente, $\bar{\mathcal{A}}_{M,ab}(P')$ es la amplitud para los modos derechos de la cuerda cerrada. Por ejemplo, para una teoría de cuerdas heterótica, $\mathcal{A}_{M,ab}(P)$ es una amplitud de cuerdas abiertas bosónicas y $\bar{\mathcal{A}}_{M,ab}(P')$ una amplitud para cuerdas supersimétricas. La suma doble recorre sobre todas las permutaciones no cíclicas P y P' . El factor $F(P, P')$ es totalmente independiente de que tipo de teoría de cuerdas estamos considerando. El número de términos en la suma de (4.96) está dado por

$$(M-3)! \left(\frac{1}{2}(M-3)\right)! \left(\frac{1}{2}(M-3)\right)! \quad (4.97)$$

para M impar, y

$$(M-3)! \left(\frac{1}{2}(M-2)\right)! \left(\frac{1}{2}(M-4)\right)! \quad (4.98)$$

para M par. Notemos que para $M = 3$ no habrá integración sobre ninguna de las llamadas variables de Koba-Nielsen [37]. En esta tesis tendremos siempre $M = 4$, por lo que nuestras amplitudes de teoría de cuerdas factorizarán como

$$\mathcal{A}_{4,c} \sim -\pi\kappa^2 \mathcal{A}_{4,ab}(\alpha's/4, \alpha't/4) \bar{\mathcal{A}}_{4,ab}(\alpha't/4, \alpha'u/4) \quad (4.99)$$

Para una amplitud de cuatro puntos involucrando estados arbitrarios, la integral en el plano complejo está dada por

$$\begin{aligned} I(n_1, n_2, n_3, n_4) &= \int d^2 z z^{k_3 \cdot k_4 / 4 + n_1} (1-z)^{k_2 \cdot k_3 / 4 + n_2} \\ &\times \bar{z}^{k_3 \cdot k_4 / 4 + n_3} (1-\bar{z})^{k_2 \cdot k_3 / 4 + n_4} \end{aligned} \quad (4.100)$$

si expresamos $z = x + iy$, entonces el integrando en (4.100) es una función analítica en y con cuatro puntos de ramificación (*branching points* en inglés) $\pm ix, \pm i(1-x)$. Deformando la integración a lo largo de un contorno C_1 a lo largo del eje real a un contorno C_2 a lo largo del eje imaginario e introduciendo las siguientes variables

$$\zeta = x + iy, \quad \eta = x - iy \quad (4.101)$$

se puede demostrar que (4.100) toma la forma:

$$\begin{aligned}
I(n_1, n_2, n_3, n_4) &\sim \int_0^1 d\zeta \zeta^{k_3 \cdot k_4 / 4 + n_1} (1 - \zeta)^{k_2 \cdot k_3 / 4 + n_2} \\
&\times \int_1^\infty d\eta \eta^{k_3 \cdot k_4 / 4 + n_3} (1 - \eta)^{k_2 \cdot k_3 / 4 + n_4}
\end{aligned} \tag{4.102}$$

Ésto es precisamente el producto de una amplitud de cuerda abierta en el canal (s, t) por una amplitud de cuerda abierta en el canal (t, u) . Entonces la amplitud para cuatro cuerdas cerradas puede expresarse como (4.99) con $s = -(k_1 + k_2)^2$, $t = -(k_1 + k_4)^2$ y $u = -(k_1 + k_3)^2$. En capítulos posteriores tomaremos para la constante gravitacional de Newton κ en 10 dimensiones la normalización $\kappa = 2\pi g_s \alpha'^2$, siendo g_s y α' la constante de acoplamiento de la cuerda cerrada y la longitud al cuadrado de la cuerda respectivamente.

4.4. Supercuerdas en la formulación RNS

En las secciones anteriores se analizaron las amplitudes de dispersión junto con sus características para la teoría de cuerdas bosónica. Pero el objetivo último de esta tesis es poder describir procesos de dispersión dura (*Hard Scattering* en inglés) de partículas de materia, es decir, fermiones. Por lo tanto, la teoría de cuerdas bosónica no alcanza para lograr nuestro propósito, y entonces debemos recurrir a la teoría de supercuerdas, la cual contiene fermiones. Además esta tesis presentará resultados finales de amplitudes de dispersión en cuatro dimensiones mediante el uso de la conjetura de Maldacena, considerando en particular la supercuerda de tipo IIB. Veremos en esta sección la formulación de RNS (*Ramond-Neveu-Schwarz*) [38, 39], es decir, la formulación por la cual la supersimetría es manifiesta en la hoja de mundo de la cuerda. Comenzaremos discutiendo la formulación para cuerdas abiertas.

4.4.1. Amplitudes de cuerdas abiertas a nivel árbol para el sector bosónico de la supercuerda

Es en este sector en donde existen más analogías entre la teoría de cuerdas bosónicas de 26 dimensiones y la teoría de supercuerdas en 10 dimensiones. Sin embargo, existen nuevos aspectos a discutir debido a las simetría de gauge, la cual aparece debido a la supersimetría de la hoja de mundo.

Tal y como en el caso 26-dimensional, podemos proponer una amplitud a nivel árbol de la forma

$$\mathcal{A}_M = g^{M-2} \langle \phi_1 | V(2) \Delta V(3) \dots \Delta V(M-1) | \phi_M \rangle \tag{4.103}$$

y luego basta con lograr demostrar que satisface unitariedad a nivel árbol y que presenta simetría cíclica, para las definiciones adecuadas de V , Δ y $|\phi\rangle$. En este caso, pedir

unitariedad a nivel árbol requiere que los polos de los estados intermedios satisfagan no sólo las condiciones de vínculo asociadas a los generadores de Virasoro L_n sino también aquellas asociadas a los generadores *superconformes* G_r . Sin embargo, resulta oportuno repasar algunos aspectos teóricos de los estados físicos que vamos a utilizar.

En esta formulación se agregan a la hoja de mundo estados fermiónicos, representados por espinores de Majorana $\Psi^\mu(\sigma, \tau)$, cuya acción es

$$S_F = \frac{i}{\pi} \int d\sigma^+ d\sigma^- (\Psi_- \partial_+ \Psi_- + \Psi_+ \partial_- \Psi_+) \quad (4.104)$$

con $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$, y se cumple que

$$\partial_+ \Psi_-^\mu = 0 = \partial_- \Psi_+^\mu \quad (4.105)$$

Variando la acción obtenemos

$$\delta S_F = \frac{i}{\pi} \int d\sigma^+ d\sigma^- [\delta\Psi_- \partial_+ \Psi_- + \Psi_- \partial_+ \delta\Psi_- + \delta\Psi_+ \partial_- \Psi_+ + \Psi_+ \partial_- \delta\Psi_+] \quad (4.106)$$

donde al integrar por partes el segundo y el último término, obtenemos términos de borde

$$\frac{i}{\pi} \int d\sigma^- \Psi_- \delta\Psi_- + \frac{i}{\pi} \int d\sigma^+ \Psi_+ \delta\Psi_+ \quad (4.107)$$

Para lograr anularlo debemos plantear

$$\int_0^\pi d\sigma (\Psi_- \delta\Psi_- - \Psi_+ \delta\Psi_+) \longrightarrow \Psi_+ \delta\Psi_+ \Big|_0^\pi = \Psi_+ \delta\Psi_+ \Big|_0^\pi \quad (4.108)$$

por lo que

$$\Psi_+ = \pm \Psi_-, \quad \delta\Psi_+ = \pm \delta\Psi_- \quad (4.109)$$

Para el caso $\sigma = 0$ se satisface trivialmente que $\Psi_+^\mu(0, \tau) = \Psi_-^\mu(0, \tau)$. Debemos tener más cuidado para el caso $\sigma = \pi$. Podemos elegir

$$\Psi_+^\mu(\pi, \tau) = \Psi_-^\mu(\pi, \tau), \quad (4.110)$$

conocida como la condición de *Ramond* (R), y obtener

$$\Psi_-(\tau, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad (4.111)$$

$$\Psi_+(\tau, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}. \quad (4.112)$$

o también podríamos establecer

$$\Psi_+^\mu(\pi, \tau) = -\Psi_-^\mu(\pi, \tau) \quad (4.113)$$

conocida como la condición de *Neveu-Schwarz* (NS), y obtener

$$\Psi_-(\tau, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbf{Z}} b_r^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad (4.114)$$

$$\Psi_+(\tau, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbf{Z}} b_r^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}. \quad (4.115)$$

Para la cuerda cerrada se toma $|\phi\rangle_{closed} = |\rho\rangle_{open} \otimes |\chi\rangle_{open}$, dando lugar a las llamadas condiciones de R-R, NS-NS, R-NS y NS-R.

Los modos de Fourier de los vínculos serán:

$$L_n \propto T_{++}, \quad \tilde{L}_n \propto T_{--}, \quad (4.116)$$

$$F_n \propto J_+, \quad \tilde{F}_n \propto J_-, \quad \text{en el caso de Ramond} \quad (4.117)$$

$$G_r \propto J_+, \quad \tilde{G}_r \propto J_-, \quad \text{en el caso de Neveu-Schwarz}, \quad (4.118)$$

donde

$$J_\pm = \frac{J_0 \pm J_1}{2} \quad (4.119)$$

son las supercorrientes derivadas de la corriente $J_\alpha = \frac{1}{2} \rho^B \rho_\alpha \Psi_B^\mu \partial_\mu X$ conservada por supersimetría.

Los modos de la cuerda satisfacen

$$\{b_r^\mu, b_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r+s,0}, \quad (4.120)$$

$$\{d_m^\mu, d_n^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}, \quad (4.121)$$

dando lugar al álgebra de Clifford $\{d_0^\mu, d_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}$ y es por ello que el sector fermionico del espacio tiempo está dictaminado por las condiciones de Ramond.

Ahora trabajaremos con la super-álgebra de Virasoro, que cuenta con los siguientes generadores bosónicos:

$$L_m^{(a)} = \frac{1}{2} \sum_n : \alpha_{-n} \cdot \alpha_{n+m} :, \quad (4.122)$$

$$L_m^{(b)} = \frac{1}{2} \sum_r (r + \frac{1}{2}m) : b_{-r} \cdot b_{r+m} :, \quad (4.123)$$

$$L_m^{(c)} = \frac{1}{2} \sum_n (n + \frac{1}{2}m) : d_{-n} \cdot b_{m+n} :, \quad (4.124)$$

y en el sector fermiónico tenemos

$$G_r = \sum \alpha_{-m} \cdot b_{r+m}, \quad NS \quad (4.125)$$

$$F_n = \sum \alpha_{-m} \cdot d_{n+m}, \quad R. \quad (4.126)$$

Existen dos posibilidades para analizar las cosas, F_1 y F_2 , donde la primera es más adecuada para estudiar la simetría cíclica y la segunda para analizar que todos los polos sean estados físicos.

La formulación desde la perspectiva F_2 nos lleva a tener una ecuación de onda

$$(L_0 - 1/2)|\phi\rangle = 0 \quad (4.127)$$

donde $a = 1/2$ separa el espacio de Fock en estados de norma positiva y negativa. Luego las condiciones para los estados físicos resultan

$$G_r|\phi\rangle = 0, \quad \forall r > 0, \quad (4.128)$$

la cual implica a su vez

$$L_n|\phi\rangle = 0, \quad \forall n > 0. \quad (4.129)$$

con el primer estado excitado dado por $G_{-1/2}|\phi\rangle$. En total analogía con lo planteado anteriormente para el caso bosónico, resulta razonable plantear un propagador de la forma

$$\Delta = (L_0 - 1/2)^{-1}. \quad (4.130)$$

Las condiciones dadas por G_r implican que los estados deberán ser restringidos aún más. Ésto resulta en la existencia, para cada V , de un operador W de dimensión $J = 1/2$, de manera tal que se satisfaga:

$$V(0) = [G_r, W(0)] \quad (4.131)$$

con V fermiónico. Si W es fermiónico entonces

$$V(0) = \{G_r; W(0)\}, \quad \forall r \quad (4.132)$$

con V siendo bosónico en la hoja de mundo. Ésto implica directamente que V tiene dimensión conforme $J = 1$, por lo que se satisfacen automáticamente las condiciones de L_n .

Consideremos ahora el operador de vértice para la emisión del taquión, el cual es de la forma:

$$W_T =: e^{ik \cdot X} : \quad (4.133)$$

por lo que

$$V_T(k) = [G_r; : e^{ik \cdot X} :] = k \cdot \psi : e^{ik \cdot X} : \quad (4.134)$$

La condición de masa para el taquión, $k^2 = 1$, asegura que W_T tiene $J = 1/2$. Si bien este operador mantiene todas las (super)condiciones de Virasoro, no describe un

proceso físico, ya que se trata de una emisión de un estado con G impar, lo que viola las condiciones GSO⁶. De esta forma, una emisión física de un estado bosónico debe estar dada por un operador bosónico, cosa que no cumple V_T . El primer estado bosónico físico en el espectro, con la correcta paridad frente a G , es el vector sin masa. Su operador de vértice es de la forma

$$V(\zeta, k) = \left\{ G_r, \zeta \cdot \psi e^{ik \cdot X} \right\} = \left(\zeta \cdot \dot{X} - \zeta \cdot \psi k \cdot \psi \right) e^{ik \cdot X} \quad (4.135)$$

sobre el cual debemos requerir

$$k^2 = 0 = \zeta \cdot k \quad (4.136)$$

es decir, masa cero y polarización transversal, siendo ζ la polarización de la partícula vectorial. El problema para realizar una prueba de la simetría cíclica análoga a la realizada en el caso de la cuerda bosónica, en el esquema F_2 , es que tenemos

$$|\phi_M\rangle = \lim_{y_M \rightarrow 0} y_M^{-1/2} W(k_M, y_M) |0; 0\rangle, \quad (4.137)$$

$$\langle \phi_1 | = \lim_{y_1 \rightarrow \infty} \langle 0; 0 | y_1^{1/2} W(k_1, y_1) \quad (4.138)$$

lo cual implica que $M - 2$ estados están descritos por operadores V mientras que los 2 restantes resultan descritos por operadores W . Es por ello que resulta mucho más conveniente trabajar en F_1 , donde todos los estados resultarán descritos por operadores V .

Para pasar a F_1 planteamos que

$$\langle \phi | G_{1/2} G_{-1/2} = \langle \phi | \quad (4.139)$$

dado que

$$\begin{aligned} G_{1/2} G_{-1/2} &= 2L_0 - G_{-1/2} G_{1/2} \\ \langle \phi | G_{1/2} G_{-1/2} &= \langle \phi | 2L_0 = \langle \phi | \end{aligned} \quad (4.140)$$

Por lo tanto, la amplitud se puede escribir de la manera

$$\mathcal{A}_M = g^{M-2} \langle \phi_1 | G_{1/2} G_{-1/2} V(2) \Delta \dots \Delta V(M-1) | \phi_M \rangle \quad (4.141)$$

Recordemos que un estado espurio $|\psi\rangle$ se define como una estado que cumple la condición *on-shell* $(L_0 - a)|\psi\rangle = 0$ pero es ortogonal a todo estado físico $|\phi\rangle$, por lo que puede ser expresado como $|\psi\rangle = \sum_{n>0} L_{-n} |\chi_n\rangle$, haciendo un poco de álgebra se llega a $(L_0 - a + n)|\chi_n\rangle = 0$. Volviendo a nuestro caso, un estado espurio puede ser $\langle \phi | G_r = \langle \tilde{\phi} |$, entonces

$$\langle \tilde{\phi} | G_{-r} V(2) \tilde{\Delta} \dots \tilde{\Delta} V(M-1) | \tilde{\phi}_M \rangle = 0 \quad (4.142)$$

⁶Gliozzi, Scherk, Olive [41].

donde $|\tilde{\phi}\rangle$ es aniquilado por $L_0 - 1/2 + r$. Usando el superálgebra de Virasoro se puede demostrar que

$$G_r \frac{1}{L_0 - 1/2} = \frac{1}{L_0 + r - 1/2} \quad (4.143)$$

por lo que podemos expresar la amplitud como

$$\mathcal{A}_M = g^{M-2} \langle \tilde{\phi}_1 | V(2) \tilde{\Delta} \dots \tilde{\Delta} V(M-1) | \tilde{\phi}_M \rangle, \quad (4.144)$$

donde

$$|\tilde{\phi}\rangle = G_{-1/2} |\phi\rangle \quad (4.145)$$

y

$$\tilde{\Delta} = (L_0 - 1)^{-1} \quad (4.146)$$

por lo que la ecuación de onda resulta

$$(L_0 - 1) |\tilde{\phi}\rangle = 0 \quad (4.147)$$

De esta manera en F_1 tenemos que

$$|\tilde{\phi}_M\rangle = G_{-1/2} \lim_{y_M \rightarrow 0} y_M^{-1/2} W(y_M) |0; 0\rangle = \lim_{y_M \rightarrow 0} y_M^{-1} V(k_M, y_M) |0; 0\rangle \quad (4.148)$$

y

$$\langle \tilde{\phi}_1 | = \lim_{y_1 \rightarrow \infty} \langle 0; 0 | y_1^{1/2} W(y_1) G_{1/2} = \lim_{y_1 \rightarrow \infty} \langle 0; 0 | y_1 V(k_1, y_1) \quad (4.149)$$

donde usamos que $G_{1/2}$ y $G_{-1/2}$ aniquilan al estado de vacío. De esta manera obtenemos una formulación que es invariante frente al grupo de simetría $SL(2, R)$

$$\mathcal{A}_M = g^{M-2} \int d\mu_M(y) \left(\prod y_i \right)^{-1} \langle 0; 0 | V(k_1, y_1) \dots V(k_M, y_M) | 0; 0 \rangle \quad (4.150)$$

4.4.2. Ejemplos

Amplitud de dispersión de M taquiones

Estamos en condiciones de construir amplitudes de dispersión a nivel árbol y calcularlas. Es de utilidad exponenciar el factor $k \cdot \psi$ de manera tal de factorizar la dependencia en los diversos osciladores. Como ψ es fermiónico, debe estar multiplicado por un parámetro fermiónico en la exponencial. De esta manera, deberemos introducir una representación en variables de Grassmann, θ , dada por

$$\frac{1}{\sqrt{y}} V_T(y) = \int d\theta e^{ik \cdot X(y) + \theta k \cdot \psi(y) / \sqrt{y}} \quad (4.151)$$

y resulta útil debido a que tenemos que

$$\langle 0 | \frac{\psi^\mu(y_i)}{\sqrt{y_i}} \frac{\psi^\nu(y_j)}{\sqrt{y_j}} | 0 \rangle = \frac{1}{y_i - y_j} \eta^{\mu\nu}. \quad (4.152)$$

Teniendo en cuenta la función de correlación,

$$\langle 0 | X^\mu(y_i) X^\nu(y_j) | 0 \rangle = -\eta^{\mu\nu} \ln(y_j - y_i) \quad (4.153)$$

y la identidad

$$\langle : e^{A_1} :: e^{A_2} : \dots : e^{A_N} : \rangle = \exp\left(\sum \langle A_i A_j \rangle\right) \quad (4.154)$$

podemos plantear

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{V_T(y_i)}{\sqrt{y_i}} \frac{V_T(y_j)}{\sqrt{y_j}} \right\rangle &= \int d\theta_i d\theta_j \langle \exp\left(ik_i \cdot X(y_i) + \theta_i k_i \frac{\Psi(y_i)}{\sqrt{y_i}}\right) \rangle \langle \exp\left(ik_j \cdot X(y_j) + \theta_j k_j \frac{\Psi(y_j)}{\sqrt{y_j}}\right) \rangle \\ &= \int d\theta_i d\theta_j \exp\left(-k_i \cdot k_j \langle X(y_i) X(y_j) \rangle - k_i \cdot k_j \theta_i \theta_j \left\langle \frac{\Psi(y_i)}{\sqrt{y_i}} \frac{\Psi(y_j)}{\sqrt{y_j}} \right\rangle\right) \\ &= \int d\theta_i d\theta_j e^{k_i \cdot k_j (\ln(y_i - y_j) - \frac{\theta_i \theta_j}{y_i - y_j})} \\ &= \int d\theta_i d\theta_j e^{k_i \cdot k_j (\ln(y_i - y_j - \theta_i \theta_j))} \end{aligned} \quad (4.155)$$

como se trata de variables de Grassmann, la expresión sólo puede ser lineal en esas variables. Hemos usado el desarrollo en serie de Taylor, obteniendo

$$\ln(y_i - y_j - \theta_i \theta_j) = \ln(y_i - y_j) + \frac{(-1)}{y_i - y_j - \theta_i \theta_j} \Big|_{\theta_i \theta_j = 0} (\theta_i \theta_j) = \ln(y_i - y_j) - \frac{\theta_i \theta_j}{y_i - y_j} \quad (4.156)$$

De esta manera, podemos generalizar esta expresión para una amplitud de M taquiones de la forma

$$\mathcal{A}_M = \int d\mu_M(y) I_M(k, y), \quad (4.157)$$

donde

$$I_M(k, y) = \langle 0 | \frac{V(k_1, y_1)}{\sqrt{y_1}} \dots \frac{V(k_M, y_M)}{\sqrt{y_M}} | 0 \rangle = \int \left(\prod_{i < j} d\theta_i \right) \prod_{i < j} (y_i - y_j - \theta_i \theta_j)^{k_i \cdot k_j}. \quad (4.158)$$

Amplitud de dispersión de M campos vectoriales

Ahora podemos considerar el caso de M campos vectoriales sin masa, los cuales satisfacen las condiciones GSO, por lo que son físicamente más relevantes. Nuevamente, expresamos el operador vértice de la forma

$$\frac{1}{y} V(\zeta, k, y) = \int d\phi d\theta e^{ik \cdot X + \theta \phi \zeta \cdot \dot{X} / y + \theta k \cdot \psi / \sqrt{y} - \phi \zeta \cdot \psi / \sqrt{y}} \quad (4.159)$$

y ahora podemos calcular la amplitud usando las identidades

$$\langle 0|X^\mu(y_i)\dot{X}^\nu(y_j)/y_j|0\rangle = \frac{i}{y_i - y_j}\eta^{\mu\nu}, \quad (4.160)$$

$$\langle 0|\dot{X}^\mu(y_i)/y_i\dot{X}^\nu(y_j)/y_j|0\rangle = \frac{1}{(y_i - y_j)^2}\eta^{\mu\nu} \quad (4.161)$$

Entonces, podemos plantear

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{V(\zeta_1, k_1, y_1)}{y_1} \dots \frac{V(\zeta_M, k_M, y_M)}{y_M} \right\rangle = \int \prod d\theta_i \prod d\phi_i \\ & \times \exp \left(ik_i X(y_i) + \theta_i \phi_i \zeta_i \frac{\dot{X}(y_i)}{y_i} + \theta_i k_i \frac{\Psi(y_i)}{\sqrt{y_i}} - \phi_i \zeta_i \frac{\Psi(y_i)}{\sqrt{y_i}} \right) \\ & \times \exp \left(ik_j X(y_j) + \theta_j \phi_j \zeta_j \frac{\dot{X}(y_j)}{y_j} + \theta_j k_j \frac{\Psi(y_j)}{\sqrt{y_j}} - \phi_j \zeta_j \frac{\Psi(y_j)}{\sqrt{y_j}} \right) \\ & = \int \prod d\theta_i \prod d\phi_i \\ & \times \exp \left[\sum_{i<j} \left(\langle -k_i k_j X(y_i) X(y_j) \rangle + k_i \theta_j \phi_j \zeta_j \langle X(y_i) \frac{\dot{X}(y_j)}{y_j} \rangle - \theta_i \theta_j k_i k_j \langle \frac{\Psi(y_i)}{\sqrt{y_i}} \frac{\Psi(y_j)}{\sqrt{y_j}} \rangle \right. \right. \\ & + i\theta_i \phi_i \zeta_i k_j \langle \frac{\dot{X}(y_i)}{y_i} X(y_j) \rangle + \theta_i \phi_i \theta_j \phi_j \zeta_i \zeta_j \left\langle \frac{\dot{X}(y_i)}{y_i} \frac{\dot{X}(y_j)}{y_j} \right\rangle + \theta_i \theta_j k_i \zeta_j \left\langle \frac{\Psi(y_i)}{\sqrt{y_i}} \frac{\Psi(y_j)}{\sqrt{y_j}} \right\rangle \\ & \left. \left. + \phi_i \zeta_i \theta_j k_j \left\langle \frac{\Psi(y_i)}{\sqrt{y_i}} \frac{\Psi(y_j)}{\sqrt{y_j}} \right\rangle - \phi_i \phi_j \zeta_i \zeta_j \left\langle \frac{\Psi(y_i)}{\sqrt{y_i}} \frac{\Psi(y_j)}{\sqrt{y_j}} \right\rangle \right) \right] \\ & = \int \prod d\theta_i \prod d\phi_i \exp \left(\sum_{i<j} \left[k_j \ln(y_i - y_j) - k_i \theta_j \phi_j \zeta_j \left(\frac{1}{y_i - y_j} \right) \right. \right. \\ & - \theta_i \theta_j k_i \cdot k_j \left(\frac{1}{y_i - y_j} \right) + \theta_i \phi_j k_i \zeta_j \left(\frac{1}{y_i - y_j} \right) + \theta_i \zeta_i \theta_j k_j \left(\frac{1}{y_i - y_j} \right) \\ & \left. \left. - \phi_i \phi_j \zeta_i \cdot \zeta_j \left(\frac{1}{y_i - y_j} \right) + \theta_i \phi_i \zeta_i k_j \left(\frac{1}{y_i - y_j} \right) - \theta_i \theta_j \phi_i \phi_j \zeta_i \zeta_j \left(\frac{1}{y_i - y_j} \right)^2 \right] \right) \quad (4.162) \end{aligned}$$

por lo que obtenemos

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{V(\zeta_1, k_1, y_1)}{y_1} \dots \frac{V(\zeta_M, k_M, y_M)}{y_M} \right\rangle = \int \prod d\theta_i \prod_{i<j} (y_i - y_j - \theta_i \theta_j)^{k_i \cdot k_j} \\ & \times \int \prod d\phi_i \prod_{i<j} \exp \left[\frac{(\theta_i - \theta_j)(\phi_i \zeta_i \cdot k_j + \phi_j \zeta_j \cdot k_i)}{y_i - y_j} - \frac{\phi_i \phi_j \zeta_i \cdot \zeta_j}{y_i - y_j} - \frac{\theta_i \theta_j \phi_i \phi_j \zeta_i \cdot \zeta_j}{(y_i - y_j)^2} \right] \quad (4.163) \end{aligned}$$

4.5. Supercuerdas en la formulación supersimétrica de Green-Schwarz (GS)

En esta sección abordamos la teoría de supercuerdas pero con una perspectiva distinta a la sección anterior, en vez de una supersimetría explícita en la hoja de mundo de la cuerda, ahora será explícita en el espacio en el cual esta misma hoja de mundo se encuentra embebida [42, 43]. Esto se hará en el gauge de cono de luz (*light cone gauge* en inglés), por lo que la invarianza de Lorentz no será explícita.

Antes de abordar la cuantización de la supercuerda en el espacio de diez dimensiones, conviene considerar el problema para una superpartícula para discutir algunas ideas de forma más simple. La acción de una superpartícula propagándose en el superspacio con coordenadas bosónicas y fermiónicas (x^μ, θ) es

$$S = \frac{1}{2} \int e^{-1} (\dot{x}^\mu - i\bar{\theta}^A \gamma^\mu \dot{\theta}^A)^2 d\tau \quad (4.164)$$

siendo e el *veilbein*. Notar que (4.164) es invariante frente a transformaciones del grupo de Poincaré y de supersimetría, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} \delta\theta^A &= \epsilon^A, & \delta x^\mu &= i\bar{\epsilon}^A \gamma^\mu \theta^A \\ \delta\bar{\theta}^A &= \bar{\epsilon}^A, & \delta\epsilon &= 0 \end{aligned} \quad (4.165)$$

además de una simetría fermiónica local remanente, llamada simetría *kappa*, con N parámetros de Grassmann $\kappa^{Aa}(\tau)$, $A = 1\dots N$, dada por las transformaciones

$$\begin{aligned} \delta\theta^A &= i\gamma \cdot \rho k^A, \\ \delta x^\mu &= i\bar{\theta} \gamma^\mu \delta\theta^A, \\ \delta\epsilon &= \epsilon \bar{\theta}^A k^A. \end{aligned} \quad (4.166)$$

Generalizando para la acción de una cuerda supersimétrica obtenemos

$$S_T = S_{bos} + S_1 + S_2 \quad (4.167)$$

con

$$\begin{aligned} S_{bos} &= -\frac{1}{2\pi} \int d\theta^2 \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \partial_\beta X \\ S_1 &= -\frac{1}{2\pi} \int d\theta^2 \sqrt{h} h^{\alpha\beta} (\partial_\alpha X^\mu - i\bar{\theta}^A \gamma^\mu \partial_\alpha \theta^A)^2 \\ S_2 &= \frac{1}{\pi} \int d\theta^2 \left[-i\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu (\bar{\theta}^1 \gamma_\mu \partial_\beta \theta^1 - \bar{\theta}^2 \gamma_\mu \partial_\beta \theta^2) + \epsilon^{\alpha\beta} \bar{\theta}^1 \gamma_\mu \partial_\alpha \theta^1 \bar{\theta}^2 \gamma_\mu \partial_\beta \theta^2 \right] \end{aligned} \quad (4.168)$$

S_{bos} y S_1 presentan simetría frente a reparametrizaciones locales y \mathcal{N} supersimetrías globales, pero no así la simetría *kappa*. Para recuperar la simetría (local) *kappa* es

necesario introducir la S_2 y tener $\mathcal{N} \leq 2$ (a diferencia del caso de la superpartícula que es válido para cualquier \mathcal{N}).

Ahora analizaremos más en profundidad el fermión de 10 dimensiones. Un espinor de Dirac en d dimensiones tiene $2^{d/2}$ componentes, por lo que para $d = 10$ tenemos que el espinor de Dirac en 10 dimensiones tiene $2^5 = 32$ componentes, y satisface naturalmente la ecuación de Dirac

$$\Gamma^M \partial_M \Psi = 0 \quad (4.169)$$

con $M = 0, 1, \dots, 9$. Podemos elegir una representación de las matrices Γ^M tal que sean puramente imaginarias, resultando que Ψ tenga componentes puramente reales, llamado espinor de Majorana. Para lograr ello debemos construir matrices de 32×32 mediante el producto tensorial de matrices de Pauli de 2×2 y matrices de 16×16 , las cuales son de la forma [40]:

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &= \sigma_2 \otimes \mathbf{1}_{16} \\ \Gamma^i &= i\sigma_1 \otimes \gamma^i, \quad \text{con } i=1\dots 8 \\ \Gamma^9 &= i\sigma_3 \otimes \mathbf{1}_{16} \end{aligned} \quad (4.170)$$

las cuales satisfacen el álgebra de Clifford:

$$\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = -2\eta^{MN} \quad (4.171)$$

en 10 dimensiones. Análogamente a la matriz γ^5 de cuatro dimensiones, podemos definir para diez dimensiones

$$\Gamma^{11} = \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^9 \quad (4.172)$$

que satisface

$$\{\Gamma^{11}, \Gamma^M\} = 0 \quad (4.173)$$

y

$$(\Gamma^{11})^2 = 1 \quad (4.174)$$

Se definen espinores de quiralidad positiva o negativa según

$$\Gamma_{11} \Psi = \pm \Psi \quad (4.175)$$

por lo que se puede definir naturalmente el operador de proyección $\frac{1 \pm \Gamma_{11}}{2}$. A los espinores con quiralidad definida se los llama espinores de Weyl. Como Γ_{11} es real, si χ es un espinor real también lo es $\frac{1 + \Gamma_{11}}{2} \chi$, por lo que se pueden satisfacer simultáneamente las

condiciones de Majorana y de Weyl, dando lugar a los llamados espinores de Majorana-Weyl, los cuales tienen 16 componentes reales. Pero además, tenemos que

$$\Gamma \cdot \partial_\chi = 0 \quad (4.176)$$

por lo que se reducen a 8 componentes independientes. De esta manera el fermión sin masa en 10 dimensiones debe ser de Majorana-Weyl para formar el supermultiplete con los vectores sin masa A^M , dejando explícita la supersimetría.

Discutiremos ahora la cuantización en el cono de luz. Trabajaremos en 10 dimensiones y con los espinores de Majorana-Weyl θ^1 y θ^2 . Tenemos a disposición la invariancia ante reparametrizaciones locales, la invariancia de Weyl y la simetría fermiónica local $kappa$, las cuales nos permiten hacer varias elecciones de gauge. Con la simetría $kappa$ establecemos

$$\Gamma^+ \theta^1 = 0 = \Gamma^+ \theta^2 \quad (4.177)$$

con

$$\Gamma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma^0 \pm \Gamma^1) \quad (4.178)$$

donde

$$(\Gamma^+)^2 = 0 = (\Gamma^-)^2 \quad (4.179)$$

y utilizando la simetría conforme elegimos

$$X^+ = x^+ + p^+ \tau, \quad \alpha_n^+ = 0, \quad n \neq 0 \quad (4.180)$$

Como se mencionó anteriormente, la condición de Majorana hace que los espinores sean reales y la de Weyl pone la mitad de sus componentes en cero, dejando solo a 16 componentes reales. En el gauge de cono de luz se reduce a la mitad este número de componentes, quedando 8 componentes reales para cada espinor. La única simetría manifiesta en este gauge es la invarianza rotacional de estas ocho dimensiones transversales a las direcciones x^0 y x^9 . Entonces, las ocho componentes de cada θ forman una representación espinorial ocho dimensional del grupo $SO(8)$, el cual contiene tres representaciones irreducibles. Una de las representaciones es la vectorial, $\mathbf{8}_v$, y dos representaciones espinoriales, $\mathbf{8}_s$ y $\mathbf{8}_c$. Se usan las letras i, j, k para los índices de $\mathbf{8}_v$, a, b, c para los índices de $\mathbf{8}_s$ y $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$ para los de $\mathbf{8}_c$.

Usamos la nomenclatura S^1 y S^2 para las ocho componentes de θ que sobreviven en el gauge de cono de luz. Es decir,

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho^+} \theta^1 &\rightarrow S^{1a} \text{ o } S^{1\dot{a}}, \\ \sqrt{\rho^+} \theta^2 &\rightarrow S^{2a} \text{ o } S^{2\dot{a}}; \end{aligned} \quad (4.181)$$

tendremos la representación $\mathfrak{8}_s$ o $\mathfrak{8}_c$ dependiendo de la quiralidad del correspondiente θ en diez dimensiones. Se suele tomar a S^1 en la representación $\mathfrak{8}_s$ como convención. Por lo que, si S^2 está en la $\mathfrak{8}_s$, estaremos en teorías de tipo I y IIB, pero si S^2 está en la representación $\mathfrak{8}_c$ estaremos en teorías de tipo IIA. Se puede probar que las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} (\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2) X^i &= 0, \\ \partial_+ S^{1a} &= 0, \\ \partial_- S^{2a} &= 0, \end{aligned} \tag{4.182}$$

las cuales son idénticas a las ecuaciones de movimiento de X^i , ψ_-^i y ψ_+^i en el gauge de cono de luz pero para el formalismo RNS. En el formalismo de esta sección, las coordenadas fermiónicas se encuentran en una representación espinorial de $SO(8)$ en lugar de una representación vectorial. Estas ecuaciones de movimiento se pueden deducir de la acción del cono de luz

$$S_{c.l.} = -\frac{1}{2} \int d\sigma^2 \left(\tau \partial_\alpha X^i \partial^\alpha X^i - \frac{i}{\pi} \bar{S}^a \rho^\alpha \partial_\alpha S^a \right) \tag{4.183}$$

con $S^a = \begin{pmatrix} S^{1a} \\ S^{2a} \end{pmatrix}$, de manera tal que S^{1a} y S^{2a} se pueden interpretar como espinores de Majorana-Weyl que describen modos de oscilación izquierdos y derechos respectivamente. Podemos imponer las condiciones de cuantización para los S ,

$$\{S^{Aa}(\sigma, \tau), S^{Bb}(\sigma', \tau)\} = \pi \delta^{ab} \delta^{AB} \delta(\sigma - \sigma') \tag{4.184}$$

junto con las condiciones de contorno para la cuerda abierta supersimétrica

$$\begin{aligned} S^{1a}(0, \tau) &= S^{2a}(0, \tau), \\ S^{1a}(\pi, \tau) &= S^{2a}(\pi, \tau). \end{aligned} \tag{4.185}$$

Debido a la transformación de supersimetría global, dada por $\delta\theta^A = \epsilon^A$, debemos requerir $\epsilon^1 = \epsilon^2$, con lo cual tenemos cuerdas de tipo I ($\mathcal{N} = 1$), de manera tal de que S^1 y S^2 están en la misma representación espinorial.

Realizando la expansión en modos para los S 's tenemos

$$\begin{aligned} S^{1a}(\sigma, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum S_n^a e^{-in(\tau-\sigma)}, \\ S^{2a}(\sigma, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum S_n^a e^{-in(\tau+\sigma)}, \end{aligned} \tag{4.186}$$

con $S_{-n}^a = (S_n^a)^\dagger$. De manera tal que tenemos

$$\{S_m^a, S_n^b\} = \delta^{ab} \delta_{m+n} \tag{4.187}$$

Para la cuerda cerrada tendremos la expansión en modos:

$$\begin{aligned} S^{1a}(\sigma, \tau) &= \sum S_n^a e^{-2in(\tau-\sigma)}, \\ S^{2a}(\sigma, \tau) &= \sum \tilde{S}_n^a e^{-2in(\tau+\sigma)}. \end{aligned} \quad (4.188)$$

Si S^1 y S^2 están en representaciones distintas, por ejemplo en la $\mathbf{8}_s$ y $\mathbf{8}_c$ respectivamente, estamos en la teoría de supercuerdas de tipo IIA, la cual tiene cuerdas orientables. De otro modo, estaremos describiendo una teoría de supercuerdas de tipo IIB, si las cuerdas son orientables, o una teoría de cuerdas cerradas de tipo I si son no orientables. Las formulaciones RNS y GS son equivalentes mediante un proceso de bosonización y de re-fermionización de los fermiones de la hoja de mundo, ψ^i . Recordamos la acción supersimétrica para los fermiones en la hoja de mundo dada por

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d\sigma^2 \left(\partial_\alpha X^i \partial^\alpha X^i - i\psi^i \rho^\alpha \partial_\alpha \psi^i \right), \quad (4.189)$$

donde los espinores S^a están en una representación $\mathbf{8}_s$ de $SO(8)$, mientras que los espinores ψ^i están en la representación vectorial $\mathbf{8}_v$ del mismo grupo.

Derivaremos ahora los operadores de vértice para estados de cuerdas abiertas (vectoriales y espinoriales). El formalismo en el que nos basaremos utiliza operadores de vértice en el cono de luz, de manera tal que el momento de las partículas emitidas satisfice $k^+ = 0$.

La cuantización de la cuerda en este formalismo da lugar a dos series de modos, α_n^i y S_n^a , que satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} [\alpha_m^i, \alpha_n^j] &= m\delta_{m+n}\delta^{ij}, \\ \{S_m^a, S_n^b\} &= \delta_{m+n}\delta^{ab}. \end{aligned} \quad (4.190)$$

Nuestro objetivo es construir operadores de vértice para los estados $|u\rangle$ y $|\zeta\rangle$ que satisfagan las relaciones de supersimetría apropiadas. Estas adoptan una forma más sencilla debido a la restricción de $k^+ = 0$. Tenemos la condición de masa para el estado fundamental:

$$(k^i)^2 = 2k^+k^- \quad (4.191)$$

lo cual nos obliga a pedir que k adopte valores imaginarios para que no se anule idénticamente. Las componentes del espinor sin masa están relacionadas mediante

$$u^a = -\frac{1}{k^+} \gamma_{a\dot{a}}^i u^{\dot{a}} \quad (4.192)$$

Cuando $k^+ = 0$ es conveniente elegir

$$\gamma_{a\dot{a}}^i k^i u^{\dot{a}} = 0 \quad (4.193)$$

de manera tal que u^a resulte finito.

Llamaremos $V_B(k, \zeta)$ al operador de vértice asociado a la emisión de un estado fundamental bosónico con polarización ζ^i y momento k^μ (con $k^+ = 0$). A su vez, llamaremos $V_F(k, u)$ al operador de vértice asociado a la emisión de un fermión sin masa con función de onda $u^{\dot{a}}$ y momento k . Los cuales son de la forma

$$V_B(\zeta, k) = \zeta \cdot B e^{ik \cdot X} = (\zeta^i B^i - \zeta^- B^+) e^{ik \cdot X}, \quad (4.194)$$

$$V_F(u, k) = u F e^{ik \cdot X} = (u^a F^a + u^{\dot{a}} F^{\dot{a}}) e^{ik \cdot X}. \quad (4.195)$$

y la clave será encontrar qué forma deben tener B^i y $F^{\dot{a}}$. Obtendremos ésto al pedir que un operador transforme en el otro bajo una transformación de supersimetría, es decir:

$$[\eta^a Q^a, V_F(u, k)] \sim V_B(\tilde{\zeta}, k), \quad (4.196)$$

$$[\eta^a Q^a, V_B(\zeta, k)] \sim V_F(\tilde{u}, k), \quad (4.197)$$

$$[\epsilon^{\dot{a}} Q^{\dot{a}}, V_F(\tilde{u}, k)] \sim V_B(\tilde{\zeta}, k), \quad (4.198)$$

$$[\epsilon^{\dot{a}} Q^{\dot{a}}, V_B(\tilde{\zeta}, k)] \sim V_F(\tilde{u}, k), \quad (4.199)$$

donde $\tilde{\zeta}$, \tilde{u} son las funciones de onda transformadas bajo la acción de η^a , y $\tilde{\zeta}$, \tilde{u} son las funciones de onda transformadas bajo la acción de $\epsilon^{\dot{a}}$, con

$$\begin{aligned} Q^a &= (2p^+)^{1/2} S_0^a, \\ Q^{\dot{a}} &= (p^+)^{-1/2} \gamma_{a\dot{a}}^i \sum S_{-n}^a \alpha_n^i. \end{aligned} \quad (4.200)$$

Se puede probar que las soluciones de (4.196-4.199) resultan ser

$$B^+ = p^+, \quad (4.201)$$

$$B^i = \dot{X}^i - R^{ij} k^j, \quad (4.202)$$

$$F^{\dot{a}} = (2p^+)^{-1/2} [(\gamma \cdot \dot{X} S)^{\dot{a}} + \frac{1}{3} (\gamma^i S)^{\dot{a}} R^{ij} k^j], \quad (4.203)$$

$$F^a = (p^+/2)^{1/2} S^a. \quad (4.204)$$

con

$$R^{ij}(\tau) = iK^{ij}(\tau) = \gamma_{ab}^{ij} S^a(\tau) S^b(\tau) = \gamma_{ab}^{ij} \sum_n S_n^a e^{-in \cdot \tau} \cdot \sum_m S_m^b e^{-im \cdot \tau} z^{-n} z^{-m} \quad (4.205)$$

donde

$$S^a(\tau) = \sum S_n^a e^{-in(\tau-\sigma)} \quad (4.206)$$

En el Apéndice A mostraremos el cálculo en detalle de la amplitud de dispersión de cuatro cuerdas abiertas supersimétricas vectoriales sin masa a nivel árbol. Es decir, se calcula

$$\langle k_1 | V_B(\zeta_2, k_2) \Delta V_B(\zeta_3, k_3) | k_4 \rangle \quad (4.207)$$

siendo el propagador

$$\Delta = \left(\frac{1}{2} p^2 + N \right)^{-1} \quad (4.208)$$

y donde N es el operador número dado por:

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + n S_{-n}^a S_n^a) \quad (4.209)$$

Esta amplitud es instrumental para esta tesis, ya que aparecerá siempre en la construcción de amplitudes de dispersión de cuerdas cerradas supersimétricas para las teorías de supercuerdas de tipo II. Es decir, necesitaremos el factor cinemático de esta amplitud tanto para el cálculo de la amplitud de dispersión de cuatro dilatones [44], de cuatro dilatinos [3], y también para la amplitud dilatón/dilatino [5].

Capítulo 5

Nuevos resultados para la dispersión de cuerdas cerradas con fermiones

En 1985 Kawai, Lewellen y Tye (KLT) propusieron una fórmula general para calcular cualquier amplitud de cuerdas cerradas como una suma de productos de ciertas amplitudes de dispersión de cuerdas abiertas a nivel árbol [36]. En este capítulo desarrollaremos varias realizaciones de estas relaciones KLT, principalmente para los casos de cuatro dilatinos y de dos dilatones y dos dilatinos en teorías de supercuerdas de tipo II. Pero antes de obtener estas dos amplitudes fundamentales para los próximos capítulos de la tesis, mostraremos el cálculo de la amplitud de dispersión de cuatro dilatones para teorías de supercuerdas de tipo II, obteniendo de esa forma la amplitud de Green, Schwarz y Brink [44]. Con este ejercicio ganamos mayor control sobre los cálculos a realizar posteriormente en este capítulo.

La construcción de operadores de vértices para la emisión de fermiones y el cálculo de amplitudes de dispersión de fermión-fermión para cuerdas abiertas fue desarrollado en varios artículos. En particular, el operador de vértice fermiónico fue desarrollado en [45, 46, 47]. Condiciones de gauge para el vértice de emisión dual⁷ fermiónico fue estudiado en [48], y en [49] se construyeron las amplitudes de dispersión con cuatro fermiones externos representados por cuerdas abiertas (con alto grado de consistencia interna basada en la invarianza de Lorentz y en el teorema *no-ghost*), aunque los autores no evaluaron explícitamente las amplitudes. Mandelstam en [50] extendió el formalismo de cuerdas-interactuantes (*interacting-string formalism*) a los modelos de Neveu-Schwarz y Ramond, donde amplitudes con cualquier número de fermiones externos podían ser construidas. En este artículo se mostró que las amplitudes de dispersión fermiónicas eran libres de *ghosts*. Luego, Schwarz y Wu evaluaron amplitudes de dispersión de estados fundamentales fermiónicos en el contexto de los modelos de resonancia

⁷Dual aquí se refiere a la antigua teoría hadrónica de cuerdas de fines de los años 60's.

duales para fermiones y mesones en el formalismo de operadores [51, 52]. Corrigan *et al.* en [53] calcularon la amplitud de dispersión de cuatro fermiones en el formalismo de operadores mostrando que sus resultados estaban de acuerdo con los resultados de Mandelstam [50], donde la misma amplitud fue derivada usando el formalismo de cuerda abierta [54, 55]. Las amplitudes obtenidas en [50, 53] no son explícitamente invariantes bajo la *crossing symmetry* [53], simetría que consiste en la invarianza de las amplitudes de dispersión frente al intercambio de las variables de Mandelstam $s \rightarrow t$. Como indica Schwarz en [56], los cálculos de las amplitudes de dispersión de fermión-fermión en el formalismo RNS llevados a cabo en los comienzos de 1970, demandaron un enorme trabajo. Aunque la cuantización en el cono de luz fue muy importante para la formulación de la teoría y para ciertos cálculos [54], la cuantización covariante en teorías de supercuerdas estableció un entendimiento más profundo. La cuantización covariante fue desarrollada en el contexto de teorías de campos conformes y la cuantización de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST) [57]. La construcción de los operadores de vértices fermiónicos covariantes con el modelo de RNS fue llevado a cabo en [58]. El cálculo de la amplitud de dispersión de cuatro cuerdas abiertas fermiónicas en el modelo de RNS fue realizado en [59] usando la cuantización covariante, dando lugar a una expresión concisa (también presentada en [40]). Además la amplitud de dispersión fermiónica covariante fue obtenida por Knizhnik [60]. Amplitudes para tres y cuatro cuerdas sin masa para la teoría de cuerdas heterótica fueron obtenidas por Gross *et al.* [61, 62, 63].

Haremos algunos comentarios sobre las diferencias entre nuestro trabajo y el llevado a cabo por Atick y Sen [64]. Ellos usaron la formulación de RNS para calcular la amplitud de dispersión de cuerdas cerradas de dos fermiones a dos bosones y de cuatro fermiones a 1-loop para las teorías heterótica y las teorías de supercuerdas de tipo II, usando vértices fermiónicos covariantes. Sus resultados están en concordancia con las amplitudes obtenidas en el gauge de cono de luz en la formulación de Green-Schwarz. Pero su resultado para el caso de cuatro fermiones es expresado en términos del producto de un factor cinemático de cuerda abierta de cuatro fermiones, el cual llamaron como $K(u_{(1)}, u_{(2)}, u_{(3)}, u_{(4)}; k_i)$, dado por su ecuación (3.67), por una integral, la cual depende de la contribución proveniente del sector antianalítico. Debemos señalar que, ellos no dieron una expresión explícita para la amplitud de dispersión de cuatro fermiones. Sin embargo, nosotros obtuvimos la forma explícita de la amplitud de dispersión de cuatro cuerdas cerradas sin masa que representan fermiones de espín 1/2, es decir, cuatro dilatinos en teorías de supercuerdas de tipo IIA y IIB. En este capítulo damos una forma explícita de la amplitud de dispersión de cuatro cuerdas cerradas fermiónicas de espín 1/2 (cuatro dilatinos), y también para cuatro cuerdas cerradas representando a dos bosones y dos fermiones (dilatón/dilatino). Estas dos amplitudes las expresamos en términos del ángulo de dispersión θ y de las variables de Mandelstam en diez dimensiones, las cuales a partir de este punto las indicaremos con tildes ($\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}$) con el fin de distinguirlas en los próximos capítulos de las variables de Mandelstam en cuatro

dimensiones que designamos como (s, t, u) sin tildes. Para ambas amplitudes obtenemos también el comportamiento de Regge ($\tilde{s} \gg |\tilde{t}|$).

Es importante mencionar que en [65] se obtienen amplitudes de dispersión a nivel árbol de tres, cuatro y cinco puntos en el formalismo de RNS para cuerdas abiertas. Luego usando las relaciones KLT, estos autores investigan las amplitudes de dispersión de cuerdas cerradas de dos y cuatro gravitinos. Sin embargo, por ejemplo en sus expresiones (6.22) y (6.23) correspondientes a dos campos de NS-NS y dos gravitinos NS-R, no dan una expresión explícita, lo cual es un trabajo extremadamente laborioso. En este artículo [65] los dilatinos no fueron estudiados.

Durante los últimos 25 años, se estuvo desarrollando a partir de un trabajo pionero de Berkovits [66], la formulación de espinores puros para las supercuerdas. En [67] se probó que para la dispersión a nivel árbol de cuerdas abiertas de un número arbitrario de bosones sin masa y para más de cuatro fermiones sin masa, la amplitud de dispersión se corresponde con las obtenidas en el formalismo de RNS [57]. Luego la equivalencia con el formalismo RNS fue extendido para las amplitudes de dispersión a nivel árbol de más de cuatro fermiones para la teoría de cuerdas de tipo I [68]. El formalismo de espinores puros de alguna forma simplifica los cálculos de amplitudes de dispersión de multipartículas y multiloop. Este formalismo también se puede usar más allá de espacios planos, permitiendo la descripción en fondos con campos de Ramond-Ramond. Para desarrollos recientes de este formalismo se sugiere al lector interesado ver la referencia [69]. La derivación de amplitudes de dispersión de supercuerdas a nivel árbol para partículas sin masa en el formalismo de espinores puros se puede ver en el trabajo de Mafra y Shlotterer [70].

Hay importantes extensiones de las relaciones KLT. Por ejemplo, para amplitudes de dispersión en teorías de cuerdas a 1-loop, tanto para cuerdas abiertas como para cuerdas cerradas, expresada como una suma sobre amplitudes de solamente cuerdas abiertas [71]. Una relación entre amplitudes a 1-loop para cuerdas cerradas y abiertas que generaliza las relaciones KLT para amplitudes de dispersión en teorías de cuerdas a 1-loop fue propuesto por Stieberger [72].

5.1. Amplitudes de dispersión en teorías de supercuerdas del tipo II

En secciones anteriores describimos la base teórica de las amplitudes de dispersión en teorías de cuerdas, tanto para cuerdas bosónicas como para la supercuerda, y para esta última, los dos tipos de formalismos, con supersimetría en la hoja de mundo de la cuerda (formalismo de RNS), y el formalismo con la supersimetría explícita en el espacio tiempo (formalismo de GS). Todos los resultados obtenidos para cuerdas abiertas. Ahora es el turno de las cuerdas cerradas, en particular, cuerdas cerradas supersimétricas.

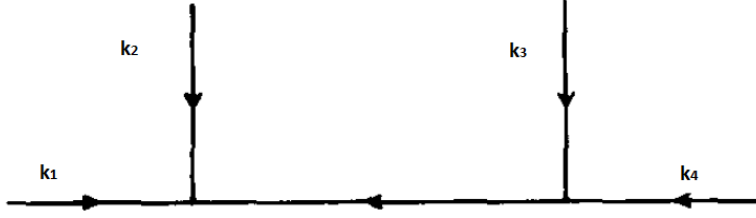


Figura 5.1: Diagrama que muestra la cinemática que se usará en la construcción de las amplitudes de dispersión en diez dimensiones, con $\tilde{s} = -(k_1 + k_2)^2$, $\tilde{t} = -(k_1 + k_4)^2$ y $\tilde{u} = -(k_1 + k_3)^2$.

Las amplitudes de dispersión para cuerdas cerradas a nivel árbol se calculan mediante unas relaciones muy útiles que utilizan como sus elementos básicos los factores cinemáticos de las cuerdas abiertas. Estas son las llamadas relaciones KLT [36], por los autores Kawai, Lewellen y Tye. Básicamente estas relaciones nos dicen que una amplitud de dispersión de cuerdas cerradas de M puntos a nivel árbol puede ser expresada como la suma de los productos directos entre amplitudes de dispersión de M puntos correspondientes a cuerdas abiertas. Es decir, dada la amplitud de cuatro cuerdas abiertas supersimétricas es la forma:

$$\mathcal{A}_{\text{ab}}(1, 2, 3, 4) = \frac{1}{2} g K_{\text{ab}}(1, 2, 3, 4) \frac{\Gamma(-\alpha' \tilde{s}/4) \Gamma(-\alpha' \tilde{t}/4)}{\Gamma(1 - \alpha' \tilde{s}/4 - \alpha' \tilde{t}/4)} \quad (5.1)$$

siendo g la constante de acoplamiento de la cuerda abierta y $K_{\text{ab}}(1, 2, 3, 4)$ el factor cinemático de la amplitud, el cual contiene la dependencia de los momentos y las polarizaciones de las especies que se dispersan. Luego este factor cinemático debe ser multiplicado por la correspondiente estructura de funciones gamas de Euler características de una amplitud de Veneziano de cuerdas abiertas. La cinemática que usaremos se muestra en la Figura 5.1. Por otro lado, una amplitud de dispersión de cuerdas cerradas para una teoría de supercuerdas en espacio de Minkowski de 10 dimensiones puede ser escrita como:

$$\mathcal{A}_{\text{cuerdas}}^{10d}(\tilde{p}) = 4g_s^2 \alpha'^3 F(\tilde{p}\sqrt{\alpha'}) \quad (5.2)$$

siendo g_s la constante de acoplamiento de la cuerda cerrada, α' la longitud al cuadrado de la cuerda y $F(\tilde{p}\sqrt{\alpha'})$ una función que contiene la estructura de polos de la amplitud de dispersión, así como también el factor $K(\tilde{p}\sqrt{\alpha'})$:

$$F(\tilde{p}\sqrt{\alpha'}) = \prod_{\chi=\tilde{s},\tilde{t},\tilde{u}} \frac{\Gamma(-\alpha' \chi/4)}{\Gamma(1 + \alpha' \chi/4)} K(\tilde{p}\sqrt{\alpha'}) \quad (5.3)$$

donde la función $K(\tilde{p}\sqrt{\alpha'})$ esta definida en términos del factor cinemático de la cuerda cerrada $K_c(k_1, k_2, k_3, k_4)$ como sigue

$$K(\tilde{p}\sqrt{\alpha'}) = -\pi \alpha'^4 K_c(k_1, k_2, k_3, k_4) \quad (5.4)$$

Entonces las relaciones KLT nos dicen que podemos expresar cualquiera amplitud de cuerdas cerradas ⁸ de cuatro puntos como

$$K_c(k_1, k_2, k_3, k_4) = K_{ab}(k_1/2, k_2/2, k_3/2, k_4/2) \otimes \widetilde{K}_{ab}(k_1/2, k_2/2, k_4/2, k_3/2) \quad (5.5)$$

siendo K_{ab} y \widetilde{K}_{ab} los correspondientes factores cinemáticos de cuerda abierta para los modos izquierda y derecha respectivamente de la cuerda cerrada. Notar que el segundo factor cinemático tiene permutadas las últimas dos partículas, como es requerido por las relaciones KLT. También es necesario multiplicar cada impulso presente en los factores cinemáticos de la cuerda abierta por $1/2$, ya que cada cuerda abierta lleva la mitad del momento de la correspondiente cuerda cerrada. Haciendo la notación más simple, definimos:

$$K_c(k_1, k_2, k_3, k_4) \equiv K_c(1, 2, 3, 4) = \frac{K_{ab}(1, 2, 3, 4)}{L} \otimes \frac{\widetilde{K}_{ab}(1, 2, 4, 3)}{R} \quad (5.6)$$

donde cada k_i es el impulso de la i -ésima cuerda cerrada. L y R son los respectivos factores que surgen de multiplicar los impulsos k_i de la cuerda cerrada por $1/2$ para los impulsos presentes en los factores cinemáticos de cuerdas abiertas.

5.1.1. Amplitud de dispersión de 4 dilatones

En esta sección presentamos el cálculo de la amplitud de dispersión de Virasoro-Shapiro-Green-Schwarz-Brink [44] para cuatro campos de dilatones en teoría de supercuerdas de tipo II. Los dilatones son unos de los estados presentes en el multiplete de supergravedad de tipo II y por supuesto son estados de cuerdas cerradas de masa cero. Dentro de este multiplete de supergravedad tenemos los campos bosónicos siguientes: el gravitón (G_{MN}), el cual es un tensor simétrico de rango 2; el campo antisimétrico de Kalb-Ramond (B_{MN}) y el dilatón (Φ), el cual es un escalar. Para el cálculo de la amplitud recurriremos a las relaciones KLT antes mencionadas, es decir, escribiremos el factor cinemático de cuatro cuerdas cerradas bosónicas como:

$$K_c^{\text{bos}}(1, 2, 3, 4) = \frac{1}{16} K_{ab}^{\text{bos}}(1, 2, 3, 4) \otimes \frac{1}{16} K_{ab}^{\text{bos}}(1, 2, 4, 3) \quad (5.7)$$

donde el factor $\frac{1}{16}$ proviene de considerar en cada K_{ab} el momento $k_i/2$, es decir, la mitad del momento k_i de la cuerda cerrada. Siendo el factor cinemático bosónico de

⁸Las relaciones KLT son aplicables tanto para teorías de tipo II como para la cuerda heterótica.

cuatro cuerdas abiertas vectoriales [40]:

$$\begin{aligned}
K_{\text{ab}}^{\text{bos}}(1, 2, 3, 4) &= -\frac{1}{4}(\tilde{s}\tilde{t}\zeta_1 \cdot \zeta_3\zeta_2 \cdot \zeta_4 + \tilde{s}\tilde{u}\zeta_2 \cdot \zeta_3\zeta_1 \cdot \zeta_4 + \tilde{t}\tilde{u}\zeta_1 \cdot \zeta_2\zeta_3 \cdot \zeta_4) \\
&+ \frac{1}{2}\tilde{s}(\zeta_1 \cdot k_3\zeta_4 \cdot k_2\zeta_2 \cdot \zeta_3 + \zeta_2 \cdot k_4\zeta_3 \cdot k_1\zeta_1 \cdot \zeta_4 + \zeta_1 \cdot k_4\zeta_3 \cdot k_2\zeta_2 \cdot \zeta_4 + \zeta_2 \cdot k_3\zeta_4 \cdot k_1\zeta_1 \cdot \zeta_3) \\
&+ \frac{1}{2}\tilde{u}(\zeta_3 \cdot k_4\zeta_2 \cdot k_1\zeta_1 \cdot \zeta_4 + \zeta_1 \cdot k_2\zeta_4 \cdot k_3\zeta_3 \cdot \zeta_2 + \zeta_1 \cdot k_4\zeta_2 \cdot k_3\zeta_3 \cdot \zeta_4 + \zeta_3 \cdot k_2\zeta_4 \cdot k_1\zeta_1 \cdot \zeta_2) \\
&+ \frac{1}{2}\tilde{t}(\zeta_3 \cdot k_4\zeta_1 \cdot k_2\zeta_2 \cdot \zeta_4 + \zeta_2 \cdot k_1\zeta_4 \cdot k_3\zeta_3 \cdot \zeta_1 + \zeta_2 \cdot k_4\zeta_1 \cdot k_3\zeta_3 \cdot \zeta_4 + \zeta_3 \cdot k_1\zeta_4 \cdot k_2\zeta_2 \cdot \zeta_1)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

el cual es el factor cinemático de cuatro cuerdas abiertas vectoriales de masa cero que es calculado en detalle en el Apéndice A, siendo los ζ_i , con $i = 1, 2, 3, 4$, las polarizaciones de cada una de estas cuatro partículas vectoriales sin masa. Siendo los dilatones campos de masa cero tenemos que $\tilde{s} + \tilde{t} + \tilde{u} = 0$. Ahora debemos efectuar el producto tensorial (5.7) para obtener el respectivo factor cinemático de las cuatro cuerdas cerradas bosónicas:

$$\begin{aligned}
K_c^{\text{bos}}(1, 2, 3, 4) &= -\frac{1}{64}(\tilde{s}\tilde{t}\zeta_1 \cdot \zeta_3\zeta_2 \cdot \zeta_4 + \tilde{s}\tilde{u}\zeta_2 \cdot \zeta_3\zeta_1 \cdot \zeta_4 + \tilde{t}\tilde{u}\zeta_1 \cdot \zeta_2\zeta_3 \cdot \zeta_4) \\
&+ \frac{\tilde{s}}{32}(\zeta_1 \cdot k_3\zeta_4 \cdot k_2\zeta_2 \cdot \zeta_3 + \zeta_2 \cdot k_4\zeta_3 \cdot k_1\zeta_1 \cdot \zeta_4 + \zeta_1 \cdot k_4\zeta_3 \cdot k_2\zeta_2 \cdot \zeta_4 + \zeta_2 \cdot k_3\zeta_4 \cdot k_1\zeta_1 \cdot \zeta_3) \\
&+ \frac{\tilde{u}}{32}(\zeta_3 \cdot k_4\zeta_2 \cdot k_1\zeta_1 \cdot \zeta_4 + \zeta_1 \cdot k_2\zeta_4 \cdot k_3\zeta_3 \cdot \zeta_2 + \zeta_1 \cdot k_4\zeta_2 \cdot k_3\zeta_3 \cdot \zeta_4 + \zeta_3 \cdot k_2\zeta_4 \cdot k_1\zeta_1 \cdot \zeta_2) \\
&+ \frac{\tilde{t}}{32}(\zeta_3 \cdot k_4\zeta_1 \cdot k_2\zeta_2 \cdot \zeta_4 + \zeta_2 \cdot k_1\zeta_4 \cdot k_3\zeta_3 \cdot \zeta_1 + \zeta_2 \cdot k_4\zeta_1 \cdot k_3\zeta_3 \cdot \zeta_4 + \zeta_3 \cdot k_1\zeta_4 \cdot k_2\zeta_2 \cdot \zeta_1) \\
&\otimes -\frac{1}{64}(\tilde{s}\tilde{u}\zeta_1 \cdot \zeta_4\zeta_2 \cdot \zeta_3 + \tilde{s}\tilde{t}\zeta_1 \cdot \zeta_3\zeta_4 \cdot \zeta_2 + \tilde{t}\tilde{u}\zeta_1 \cdot \zeta_2\zeta_3 \cdot \zeta_4) \\
&+ \frac{\tilde{s}}{32}(\zeta_1 \cdot k_4\zeta_3 \cdot k_2\zeta_4 \cdot \zeta_2 + \zeta_2 \cdot k_3\zeta_4 \cdot k_1\zeta_1 \cdot \zeta_3 + \zeta_1 \cdot k_3\zeta_4 \cdot k_2\zeta_3 \cdot \zeta_2 + \zeta_2 \cdot k_4\zeta_3 \cdot k_1\zeta_1 \cdot \zeta_4) \\
&+ \frac{\tilde{t}}{32}(\zeta_2 \cdot k_1\zeta_4 \cdot k_3\zeta_3 \cdot \zeta_1 + \zeta_3 \cdot k_4\zeta_1 \cdot k_2\zeta_2 \cdot \zeta_4 + \zeta_2 \cdot k_4\zeta_1 \cdot k_3\zeta_4 \cdot \zeta_3 + \zeta_3 \cdot k_1\zeta_4 \cdot k_2\zeta_2 \cdot \zeta_1) \\
&+ \frac{\tilde{u}}{32}(\zeta_1 \cdot k_2\zeta_4 \cdot k_3\zeta_3 \cdot \zeta_2 + \zeta_3 \cdot k_4\zeta_2 \cdot k_1\zeta_1 \cdot \zeta_4 + \zeta_1 \cdot k_4\zeta_2 \cdot k_3\zeta_3 \cdot \zeta_4 + \zeta_3 \cdot k_2\zeta_4 \cdot k_1\zeta_1 \cdot \zeta_2)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Vale acalarar que llevar a cabo este cálculo es sumamente tedioso, pero de igual forma fue llevado a cabo como punto de partida inicial para el aprendizaje del cálculo de amplitudes de dispersión de cuerdas cerradas supersimétricas. En este producto tenemos en principio 225 términos de los cuales solo 120 son independientes. Este producto directo involucra el producto de dos polarizaciones vectoriales de la forma $\zeta_i^M \otimes \zeta_i^{M'}$, correspondientes a los modos izquierdos y derechos del tensor de polarización $\Theta_i^{MM'}$ de la cuerda cerrada. Los subíndices i etiquetan a cada uno de los cuatro dilatones

Φ_i involucrados en la dispersión. Entonces debemos reemplazar el producto de las dos polarizaciones vectoriales por el tensor de rango 2 como sigue

$$\zeta_i^M \otimes \zeta_i^{M'} \rightarrow \Theta_i^{MM'} \quad (5.10)$$

donde la parte diagonal transversa corresponde a la polarización del dilatón

$$\Theta_i^{MM'} = \sqrt{\frac{1}{8}} \hat{\Phi}_i \left(\eta^{MM'} - k_i^M \bar{k}_i^{M'} - k_i^{M'} \bar{k}_i^M \right) \quad (5.11)$$

donde se introduce la variable auxiliar \bar{k}_i para garantizar polarización transversal del dilatón, con $k_i \cdot \bar{k}_i = 1$ y $\bar{k}_i \cdot \bar{k}_i = 0$ [89]. Usando este tensor de polarización para el dilatón, cada uno de los 120 términos mencionados anteriormente contiene el producto de cuatro factores de la forma de la polarización del dilatón. Entonces desarrollando explícitamente (5.7) usando las ecuaciones (5.10) y (5.11) tenemos 9720 términos que contribuyen al factor cinemático de la amplitud de dispersión de cuatro dilatones. Luego de un cálculo simple pero tedioso, el cual hemos hecho manualmente, se llega a:

$$\begin{aligned} K_c^{\text{bos}}(1, 2, 3, 4) &= \frac{1}{128 \cdot 16^2} [6\tilde{s}^4 - 15\tilde{s}^3(\tilde{t} + \tilde{u}) + \tilde{s}^2(30\tilde{t}^2 + 28\tilde{t}\tilde{u} + 30\tilde{u}^2) \\ &- \tilde{s}(\tilde{t} + \tilde{u})(15\tilde{t}^2 - 43\tilde{t}\tilde{u} + 15\tilde{u}^2) + 3(2\tilde{t}^4 - 5\tilde{t}^3\tilde{u} + 10\tilde{t}^2\tilde{u}^2 - 5\tilde{t}\tilde{u}^3 + 2\tilde{u}^4)] \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 \end{aligned} \quad (5.12)$$

y como $\tilde{u} = -\tilde{s} - \tilde{t}$, la ecuación (5.12) se reduce a:

$$K_c^{\text{bos}}(1, 2, 3, 4) = \frac{9}{16^3} (\tilde{s}^2 + \tilde{s}\tilde{t} + \tilde{t}^2)^2 \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 \quad (5.13)$$

Además sabemos que

$$\tilde{t} = -\frac{\tilde{s}}{2}(1 - \cos \theta), \quad \tilde{u} = -\frac{\tilde{s}}{2}(1 + \cos \theta) \quad (5.14)$$

por lo que el factor cinemático para cuatro dilatones queda como ⁹

$$K_c^{\text{bos}}(1, 2, 3, 4) = \frac{9\tilde{s}^4(\cos(2\theta) + 7)^2}{16^2 1024} \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 \quad (5.15)$$

siendo θ el ángulo de dispersión, luego:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_c^{4\text{-dilatones}}(1, 2, 3, 4) &= -4\pi g_s^2 \alpha'^4 \alpha'^3 \prod_{\chi=\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}} \frac{\Gamma(-\alpha'\chi/4)}{\Gamma(1 + \alpha'\chi/4)} K_{cl}(1, 2, 3, 4) \\ &= -\pi g_s^2 \alpha'^3 \frac{9(\alpha'\tilde{s})^4(\cos(2\theta) + 7)^2}{65536} \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 \prod_{\chi=\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}} \frac{\Gamma(-\alpha'\chi/4)}{\Gamma(1 + \alpha'\chi/4)} \end{aligned} \quad (5.16)$$

⁹El mismo resultado se obtiene de la expresión $\frac{9}{2 \cdot 16^3} (\tilde{s}^4 + \tilde{t}^4 + \tilde{u}^4) \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4$. Este factor cinemático es el asociado a la amplitud de dispersión de cuerdas cerradas de Virasoro-Shapiro-Green-Schwarz-Brink.

Ahora consideremos el límite de Regge ($\tilde{s} \gg |\tilde{t}|$) para esta amplitud de dispersión:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_c^{4\text{-dilatones Regge}}(1, 2, 3, 4) &= 4\pi g_s^2 \alpha'^7 K_c^{4\text{-dilatones Regge}}(1, 2, 3, 4) \times \\
&\frac{\sin[\frac{\pi\alpha'}{4}(\tilde{s} + \tilde{t})]}{\sin(\frac{\pi\alpha'\tilde{s}}{4})} \left(\frac{\alpha'\tilde{s}}{4}\right)^{-2+\frac{\alpha'\tilde{t}}{2}} e^{2-\frac{\alpha'\tilde{t}}{2}} \frac{\Gamma(-\alpha'\tilde{t}/4)}{\Gamma(1+\alpha'\tilde{t}/4)} \\
&= \frac{9}{64}\pi g_s^2 \alpha'^3 2^{-\alpha'\tilde{t}} \frac{\sin[\frac{\pi\alpha'}{4}(\tilde{s} + \tilde{t})]}{\sin(\frac{\pi\alpha'\tilde{s}}{4})} (\alpha'\tilde{s})^{2+\frac{\alpha'\tilde{t}}{2}} e^{2-\frac{\alpha'\tilde{t}}{2}} \frac{\Gamma(-\alpha'\tilde{t}/4)}{\Gamma(1+\alpha'\tilde{t}/4)} \Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4
\end{aligned} \tag{5.17}$$

donde hemos usado la aproximación de Stirling para aproximar las funciones gamas de Euler en este límite.

5.1.2. Amplitud de dispersión de 4 dilatinos

Para poder abordar el *Hard Scattering* de cuatro fermiones de espín 1/2 en una teoría de gauge confinante en el IR y fuertemente acoplada, antes (por motivos que quedarán claros en las secciones posteriores) debemos calcular la amplitud de dispersión de cuatro dilatinos en una teoría de supercuerdas de tipo II. Esta amplitud de dispersión no ha sido calculada anteriormente en forma explícita, por lo que en esta sección comenzamos con nuestro primer resultado original de esta tesis.

Los dilatinos son los compañeros supersimétricos de los dilatones en el multiplete de supergravedad de tipo II en 10 dimensiones, por lo que ellos también poseen masa nula. Debido a que también son cuerdas cerradas, podemos calcular la amplitud de dispersión de cuatro dilatinos mediante la utilización de las relaciones KLT.

El factor cinemático correspondiente a la amplitud de dispersión de cuatro dilatinos, es decir de cuatro cuerdas cerradas fermiónicas de espín 1/2 de la teoría de supercuerdas del tipo II, está dado por

$$K_c^{4\text{-dilatinos}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) = K_{\text{ab}}^{\text{fer}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) \otimes \frac{1}{16} K_{\text{ab}}^{\text{bos}}(1, 2, 4, 3) \tag{5.18}$$

donde el factor $K_{\text{ab}}^{\text{bos}}(1, 2, 4, 3)$ está dado por la ecuación (5.8), y las variables de Mandelstam ya han sido definidas anteriormente. Con el fin de distinguir fermiones de bosones en los factores cinemáticos, los impulsos de los dilatinos son $\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}$ que representan a los momentos en 10 dimensiones $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3$ y \tilde{k}_4 . Como en el caso bosónico descrito en la sección anterior, solo consideramos cuerdas cerradas sin masa, por lo que $\tilde{s} + \tilde{t} + \tilde{u} = 0$. Notemos que para el segundo factor cinemático de la ecuación (5.18) las cuerdas 3 y 4 han sido intercambiadas, como lo es requerido por las relaciones KLT. El orden de los dos factores cinemáticos de la ecuación (5.18) está asociado a que calculamos la amplitud de dispersión de cuatro dilatinos R-NS. Es interesante señalar que

de esta ecuación se podría calcular la amplitud de dispersión de cuatro gravitinos. El factor cinemático $K_{\text{ab}}^{\text{fer}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4})$ está dado por [40, 43, 56]:

$$K_{\text{ab}}^{\text{fer}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) = -\frac{\tilde{s}}{8}\bar{u}_2\Gamma^{M'}u_3\bar{u}_1\Gamma_{M'}u_4 + \frac{\tilde{t}}{8}\bar{u}_1\Gamma^{M'}u_2\bar{u}_4\Gamma_{M'}u_3 \quad (5.19)$$

donde u_i representa polarizaciones espinoriales, mientras que las matrices de Dirac Γ^M en diez dimensiones satisfacen el algebra de Clifford

$$\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = -2\eta^{MN} \quad (5.20)$$

Es decir, las matrices gama en 10 dimensiones tienen 32×32 componentes totalmente imaginarias ya que estamos en la representacion de Majorana, en la cual los espinores u_i son totalmente reales [40]. Como vimos en la sección 4.5, estas matrices tienen la forma:

$$\Gamma^0 = \sigma^2 \otimes 1_{16}, \quad (5.21)$$

$$\Gamma^i = i\sigma^1 \otimes \gamma^i, i = 1, \dots, 8 \quad (5.22)$$

$$\Gamma^9 = i\sigma^3 \otimes 1_{16}. \quad (5.23)$$

donde las matrices de Pauli estan definidas como:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Ahora, insertando los factores cinemáticos (5.8) y (5.19) en la ecuación (5.18) obtenemos en principio 30 términos. estos términos contienen el producto directo de las polarizaciones espinoriales y vectoriales, es decir, $u_i^\alpha \otimes \zeta_i^M$. Ésto nos permite definir el dilatino como [73]¹⁰:

$$u_i^\alpha \otimes \zeta_i^M = i(\Gamma^M)_\beta^\alpha \lambda_i^\beta \quad (5.25)$$

y

$$\zeta_i^M \otimes \bar{u}_i^\alpha = -i\bar{\lambda}_i^\beta (\Gamma^M)_\beta^\alpha \quad (5.26)$$

donde los índices fermiónicos α and β corren de 1 a 32, mientras que los subíndices i caracterizan a cada uno de los cuatro dilatinos λ_i^β . Escribimos nuestro factor cinemático de cuatro dilatinos en la siguiente forma

$$K_c^{4\text{-dilatinos}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) = \sum_{j=1}^{15} (\mathcal{T}_{1,j} + \mathcal{T}_{2,j}) \quad (5.27)$$

¹⁰Notar que en las definición (5.25) del dilatino hemos agregado una unidad imaginaria respecto a la definición de [73], ya que nuestras matrices Γ 's son imaginarias puras y los espinores u 's son reales y buscamos preservar que los dilatinos λ 's sean reales. Al haber siempre dos λ 's y dos $\bar{\lambda}$'s esta unidad imaginaria no tiene ningún efecto en el resultado final ya que $i^4 = 1$.

donde $\mathcal{T}_{1,j}$ representa el producto directo del primer término de (5.19) con el i -th término de la ecuación (5.8). En total, esto deja a los primeros 15 términos de $K_c^{4\text{-dilatinos}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4})$ en la ecuación (5.18). De la misma manera $\mathcal{T}_{2,j}$ representa 15 términos dados por el producto tensorial del segundo término de la ecuación (5.19) con el i -th término de (5.8). Algunos ejemplos de los primeros términos se muestran a continuación.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{1,1} &= \left(-\frac{1}{8}\tilde{s}\tilde{u}_2\Gamma^{M'}u_3\bar{u}_1\Gamma_{M'}u_4\right) \otimes \left(-\frac{1}{16\cdot 4}\tilde{s}\tilde{t}\zeta_1^M\zeta_{3,M}\zeta_4^Q\zeta_{2,Q}\right) \\ &= \frac{\tilde{s}^2\tilde{t}}{512}\bar{\lambda}_2\Gamma_N\Gamma_P\Gamma_M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^M\Gamma^P\Gamma^M\lambda_4\end{aligned}\quad (5.28)$$

el segundo producto tensorial es

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{1,2} &= \left(-\frac{1}{8}\tilde{s}\tilde{u}_2\Gamma^{M'}u_3\bar{u}_1\Gamma_{M'}u_4\right) \otimes \left(-\frac{1}{16\cdot 4}\tilde{s}\tilde{u}\zeta_1^M\zeta_{4,M}\zeta_3^P\zeta_{2,P}\right) \\ &= \frac{1}{8}\tilde{s}^2\tilde{u}\bar{\lambda}_2\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\lambda_4\end{aligned}\quad (5.29)$$

La lista de los 30 términos se encuentran en detalle en el apéndice B. Al sumar todos los términos, como es requerido por la ecuación (5.27), se obtiene una expresión en la que es explícita la dualidad heredada de la ecuación (5.19). Una vez insertada la cinemática del proceso de dispersión, ésta dualidad no se podrá apreciar a simple vista y quedará implícita. Ésta suma da lugar a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}K_c^{4\text{-dilatinos}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) &= \\ &\frac{\tilde{s}^2\tilde{t}}{512}\bar{\lambda}_2\Gamma_N\Gamma_P\Gamma_M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^M\Gamma^P\Gamma^N\lambda_4 - \frac{\tilde{s}\tilde{t}^2}{512}\bar{\lambda}_1\Gamma^M\Gamma^P\Gamma^N\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_N\Gamma_P\Gamma_M\lambda_3 \\ &+ \frac{1}{8}\tilde{s}^2\tilde{u}\bar{\lambda}_2\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\lambda_4 - \frac{1}{8}\tilde{t}^2\tilde{u}\bar{\lambda}_1\Gamma^M\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_M\lambda_3 + \frac{\tilde{s}\tilde{t}\tilde{u}}{512}\bar{\lambda}_2\Gamma_M\Gamma_P\Gamma_N\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^M\Gamma^P\Gamma^N\lambda_4 \\ &- \frac{\tilde{s}\tilde{t}\tilde{u}}{512}\bar{\lambda}_1\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^P\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_P\lambda_3 - \frac{\tilde{s}^2}{32}\bar{\lambda}_2\Gamma_M\lambda_3\bar{\lambda}_1(k_3\cdot\Gamma)\Gamma^M(k_2\cdot\Gamma)\lambda_4 \\ &+ \frac{\tilde{t}^2}{32}\bar{\lambda}_1(k_3\cdot\Gamma)\Gamma^M(k_4\cdot\Gamma)\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_M\lambda_3 - \frac{\tilde{s}^2}{32}\bar{\lambda}_2(k_4\cdot\Gamma)\Gamma^M(k_1\cdot\Gamma)\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\lambda_4 \\ &+ \frac{\tilde{t}^2}{32}\bar{\lambda}_1\Gamma_M\lambda_2\bar{\lambda}_4(k_2\cdot\Gamma)\Gamma^M(k_1\cdot\Gamma)\lambda_3 - \frac{\tilde{s}^2}{16}k_2^{[M}\bar{\lambda}_2\Gamma^{N]}\lambda_3k_{4[M}\bar{\lambda}_1\Gamma_{N]}\lambda_4 \\ &+ \frac{\tilde{t}^2}{16}k_2^{[N}\bar{\lambda}_1\Gamma^{M]}\lambda_2k_{4[N}\bar{\lambda}_4\Gamma_{M]}\lambda_3 - \frac{\tilde{s}^2}{16}k_{3[M}\bar{\lambda}_2\Gamma_{N]}\lambda_3k_1^{[M}\bar{\lambda}_1\Gamma^{N]}\lambda_4 + \frac{\tilde{t}^2}{16}k_1^{[N}\bar{\lambda}_1\Gamma^{M]}\lambda_2k_{3[N}\bar{\lambda}_4\Gamma_{M]}\lambda_3 \\ &- \frac{\tilde{s}\tilde{u}}{32}\bar{\lambda}_2(k_1\cdot\Gamma)\Gamma^M(k_4\cdot\Gamma)\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\lambda_4 + \frac{\tilde{t}\tilde{u}}{32}\bar{\lambda}_1\Gamma_M\lambda_2\bar{\lambda}_4(k_1\cdot\Gamma)\Gamma^M(k_2\cdot\Gamma)\lambda_3 \\ &- \frac{\tilde{s}\tilde{u}}{32}\bar{\lambda}_2\Gamma_M\lambda_3\bar{\lambda}_1(k_2\cdot\Gamma)\Gamma^M(k_3\cdot\Gamma)\lambda_4 + \frac{\tilde{t}\tilde{u}}{32}\bar{\lambda}_1(k_4\cdot\Gamma)\Gamma^M(k_3\cdot\Gamma)\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_M\lambda_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\tilde{s}\tilde{u}}{16} k_3^{[N} \bar{\lambda}_2 \Gamma^M] \lambda_3 k_4^{[N} \bar{\lambda}_1 \Gamma_M] \lambda_4 + \frac{\tilde{t}\tilde{u}}{16} k_2^{[N} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M] \lambda_2 k_3^{[N} \bar{\lambda}_4 \Gamma_M] \lambda_3 - \frac{\tilde{s}\tilde{u}}{16} k_2^{[M} \bar{\lambda}_2 \Gamma^N] \lambda_3 k_1^{[M} \bar{\lambda}_1 \Gamma_N] \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{t}\tilde{u}}{16} k_1^{[N} \bar{\lambda}_1 \Gamma_M] \lambda_2 k_4^{[N} \bar{\lambda}_4 \Gamma^M] \lambda_3 - \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N (k_4 \cdot \Gamma) \lambda_3 \bar{\lambda}_1 (k_2 \cdot \Gamma) \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_1 (k_4 \cdot \Gamma) \Gamma_M \Gamma_N \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^N \Gamma^M (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_3 - \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_2 (k_1 \cdot \Gamma) \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_2 \bar{\lambda}_4 (k_1 \cdot \Gamma) \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 - \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_2 (k_4 \cdot \Gamma) \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 (k_3 \cdot \Gamma) \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_1 (k_3 \cdot \Gamma) \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 (k_2 \cdot \Gamma) \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 - \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N (k_1 \cdot \Gamma) \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N (k_4 \cdot \Gamma) \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N (k_1 \cdot \Gamma) \lambda_3
\end{aligned} \tag{5.30}$$

En el apéndice B mostraremos explícitamente los términos que al ser sumados dan la ecuación (5.30), y luego en el apéndice C desarrollamos los términos a partir de $\mathcal{T}_{1,4}$ y $\mathcal{T}_{2,4}$, ya que a partir de ellos aparecen los impulsos k_i , que luego harán aparecer las variables de Mandelstam. En (5.30) se ha hecho uso de la ecuación de Dirac en 10 dimensiones:

$$(\Gamma \cdot k_i) \lambda_i = 0 \tag{5.31}$$

y similarmente para $\bar{\lambda}_i$. Ahora consideramos la cinemática desde un sistema de centro de masa para nuestro proceso de dispersión (recordando que todas las partículas son entrantes):

$$\begin{aligned}
k_1 &= \left(\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, \frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, 0, \dots, 0 \right) \\
k_2 &= \left(\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, -\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, 0, \dots, 0 \right) \\
k_3 &= \left(-\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, \frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2} \cos \theta, \frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2} \sin \theta, 0, \dots, 0 \right) \\
k_4 &= \left(-\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, -\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2} \cos \theta, -\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2} \sin \theta, 0, \dots, 0 \right)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Usando esta cinemática en nuestra expresión (5.30), y luego de un cálculo algebraico muy extenso, el cual estará desarrollado en mayor detalle en el apéndice D; tenemos una expresión muy larga la cual puede ser escrita en una forma mas compacta agrupando algunos términos y dejándola expresada en las tres variables de Mandelstam $\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}$, ya que si se dejara expresada solamente en las variables \tilde{s} y θ (las dos variables independientes de todo proceso de dispersión) la expresión es mucho mas larga y compleja.

Obtenemos entonces

$$\begin{aligned}
K_c^{4\text{-dilatados}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) &= \frac{\tilde{s}}{64}(7\tilde{s}\tilde{u} - \tilde{s}^2 \cos \theta - 2\tilde{u}^2)\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 \\
&+ \frac{\tilde{t}}{64}(\tilde{s}\tilde{t} \cos \theta - \tilde{s}\tilde{u} \cos \theta - 8\tilde{t}\tilde{u})\bar{\lambda}_1\Gamma^0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\lambda_3 \\
&+ \frac{\tilde{s}}{64}(11\tilde{s}\tilde{u} - \tilde{s}^2 + 2\tilde{u}^2 + \frac{\tilde{s}\tilde{u}}{2} \sin^2 \theta)\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 \\
&- \frac{\tilde{t}}{64}(\tilde{s}^2 \cos^2 \theta + 8\tilde{t}\tilde{u})\bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{128}(16\tilde{s}\tilde{u} - 4\tilde{t}^2 + 7\tilde{s}\tilde{u} + \tilde{s}\tilde{u} \cos^2 \theta)\bar{\lambda}_2\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 \\
&+ \frac{\tilde{t}}{128}(2\tilde{s}^2 \cos^2 \theta - \tilde{s}\tilde{t} + \tilde{s}\tilde{t} \cos \theta - 22\tilde{t}\tilde{u} - 2\tilde{s}\tilde{u})\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_2\lambda_3 \\
&+ \frac{\tilde{s}^2}{64}(12\tilde{u} + 2\tilde{t})\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_4 - \frac{\tilde{t}}{64}(2\tilde{s}\tilde{t} + 8\tilde{t}\tilde{u} - \tilde{u}^2)\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>2}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_{i>2}\lambda_3 \\
&+ \frac{\tilde{s}^2}{128}(1 + \cos \theta)(\tilde{u} - \tilde{s})(\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4) \\
&+ \frac{\tilde{s}^2}{128} \sin \theta(\tilde{u} - \tilde{s})(\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4) \\
&+ \frac{\tilde{s}^2}{128}(-2\tilde{s} + \sin \theta(\tilde{s} - 2\tilde{u} - \tilde{u} \cos \theta))\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 - \frac{\tilde{s}^2\tilde{t}}{64} \sin \theta \cos \theta \bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_2\lambda_3 \\
&- \frac{\tilde{s}^2}{128} \sin \theta(\tilde{s} + 2\tilde{u} + \tilde{u} \cos \theta)\bar{\lambda}_2\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 + \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{64} \sin \theta(\tilde{u} - \tilde{t}(1 - \cos \theta))\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\lambda_3 \\
&+ \frac{\tilde{s}^2}{128} \sin \theta(\tilde{s} - \tilde{u})(\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4) \\
&+ \frac{\tilde{s}^2\tilde{t}}{128} \sin \theta \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\lambda_4 + \frac{\tilde{s}^2}{128} \sin \theta(\tilde{s} - \tilde{u})\bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 \\
&+ \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{64} \sin \theta(\tilde{u} - \tilde{t})\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\lambda_3 + \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{64}(\tilde{u} - \tilde{s})\bar{\lambda}_2\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\lambda_4 \\
&+ \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{64}(\tilde{u} - \tilde{t})\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\lambda_3 + \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{64}(\tilde{u} - \tilde{s})\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_{i>2}\lambda_4 \\
&+ \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{64}(\tilde{u} - \tilde{t})\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>2}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_{i>2}\lambda_3 + \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{64}(\tilde{u} - \tilde{s})\bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^{i>1}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>1}\lambda_4 \\
&+ \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{64} \cos \theta(\tilde{t} - \tilde{u})\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^{i>1}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_{i>1}\lambda_3 + \frac{\tilde{s}^2}{128} \sin \theta(\tilde{u} - \tilde{s})\bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^2\Gamma^{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_4 \\
&+ \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{64} \sin \theta(\tilde{t} - \tilde{u})\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^2\Gamma^{i>2}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_{i>2}\lambda_3 + \frac{\tilde{s}^2}{128} \sin \theta(\tilde{s} - \tilde{u})\bar{\lambda}_2\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_4 \\
&+ \frac{\tilde{s}^2\tilde{t}}{512}\bar{\lambda}_2\Gamma^N\Gamma^P\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\Gamma_P\Gamma_N\lambda_4 - \frac{\tilde{s}\tilde{t}^2}{512}\bar{\lambda}_1\Gamma^M\Gamma^P\Gamma^N\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_N\Gamma_P\Gamma_M\lambda_3 \\
&+ \frac{\tilde{s}\tilde{t}\tilde{u}}{512}(\bar{\lambda}_2\Gamma^M\Gamma^P\Gamma^N\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\Gamma_P\Gamma_N\lambda_4 - \bar{\lambda}_1\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^P\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_P\lambda_3) \\
&+ \frac{\tilde{s}^2\tilde{t}}{1024}[-\bar{\lambda}_2\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^M\Gamma^N\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 + \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 \\
& + \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 - \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 \\
& - \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4 + \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 \\
& + \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4 \\
& - \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 - \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_4 \\
& + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 + \cos^2 \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 \\
& - \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 - \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 \\
& - \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 + \sin \theta \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 \\
& - \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 + \sin \theta \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 \\
& + \sin^2 \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4 \\
& + \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 - \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 \\
& - \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4 + \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
& - \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
& - \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
& - \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_3 \\
& + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_3 - \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_3 \\
& + \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3 - \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3 \\
& - \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3 + \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_3 \\
& - \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3 - \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_3 \\
& + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3 - \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_3 \\
& + \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3 + \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
& + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
& + \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
& + \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3] \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Luego multiplicando por las correspondientes constantes y funciones gamas de Euler obtenemos la amplitud de dispersión de cuatro dilatinos en teoría de supercuerdas de tipo II:

$$\mathcal{A}_c^{4\text{-dilatinos}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) = -4\pi g_s^2 \alpha'^7 K_c^{4\text{-dilatinos}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) \prod_{\chi=\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}} \frac{\Gamma(-\alpha' \chi/4)}{\Gamma(1 + \alpha' \chi/4)} \tag{5.34}$$

Como se mencionó anteriormente, se redujo el tamaño de la expresión al dejar expresada la amplitud en función de las tres variables de Mandelstam, pero como sabemos la amplitud tiene solo dos variables independientes (\tilde{s}, θ) . Ejemplificamos esto con algún término. Consideremos el término $\mathcal{T}_{1,5}$ en términos de \tilde{s} y del ángulo de dispersión:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,5} &= -\frac{\tilde{s}^2}{32}\bar{\lambda}_2(k_4 \cdot \Gamma)\Gamma^M(k_1 \cdot \Gamma)\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\lambda_4 \\
&= -\frac{\tilde{s}^2}{32}\left[-\frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 \right. \\
&\quad - \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 \\
&\quad + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_2\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_4 \\
&\quad - \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_4 \\
&\quad - \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_4 \\
&\quad + \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_4 \\
&\quad - \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^2\Gamma^{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_4 \\
&\quad \left. + \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_4\right]
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Notamos que $\mathcal{T}_{1,5}$ contiene 24 términos, pero si lo dejamos expresado en las tres variables de Mandelstam queda como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,5} &= -\frac{\tilde{s}^2}{32}\left[\frac{\tilde{u}}{2}(\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4) \right. \\
&\quad + \frac{\tilde{t}}{2}(-\bar{\lambda}_2\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 \\
&\quad + \bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_4) + \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta(\bar{\lambda}_2\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 \\
&\quad - \bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^2\Gamma^{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_4 \\
&\quad \left. + \bar{\lambda}_2\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_4)\right],
\end{aligned} \tag{5.36}$$

el cual tiene 16 términos. En la suma total de todos los productos tensoriales de la forma $\mathcal{T}_{i,j}$ este efecto de simplificación es notable.

Consideremos ahora el límite de Regge $\tilde{s} \gg |\tilde{t}|$. Los términos relevantes en este límite de altas energías son los siguientes:

$$\mathcal{T}_{1,2}^{\text{Regge}} = \frac{1}{8}\tilde{s}^2\tilde{u}\bar{\lambda}_2\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\lambda_4, \tag{5.37}$$

$$\mathcal{T}_{1,4}^{\text{Regge}} = \frac{\tilde{s}^3}{64}[\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4], \tag{5.38}$$

$$\mathcal{T}_{1,5}^{\text{Regge}} = \frac{\tilde{s}^3}{64} [\bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4], \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,6}^{\text{Regge}} &= -\frac{\tilde{s}^3}{128} [\bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\ &+ 2\bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>1} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>1} \lambda_4], \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,7}^{\text{Regge}} &= -\frac{\tilde{s}^3}{128} [\bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\ &+ 2\bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>1} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>1} \lambda_4], \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\mathcal{T}_{1,8}^{\text{Regge}} = -\frac{\tilde{s}^3}{64} [\bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4], \quad (5.42)$$

$$\mathcal{T}_{1,9}^{\text{Regge}} = \frac{\tilde{s}^3}{64} [-\bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 - \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4], \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,10}^{\text{Regge}} &= -\frac{\tilde{s}^3}{128} [\bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\ &+ 2\bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>1} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>1} \lambda_4], \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,11}^{\text{Regge}} &= -\frac{\tilde{s}^3}{128} [\bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\ &+ 2\bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>1} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>1} \lambda_4]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Notar que los términos con Γ^9 se anularán si consideramos que los dilatinos son de quiralidad derecha. Sumando todos los términos que contribuyen al límite de Regge obtenemos:

$$\begin{aligned} K_c^{4\text{-dilatinos-Regge}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) &= -\frac{\tilde{s}^3}{32} [5(\bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4) \\ &+ \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + 6\bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>1} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>1} \lambda_4] \end{aligned} \quad (5.46)$$

Por lo que la correspondiente amplitud de dispersión de cuatro dilatinos en el límite de Regge es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_c^{4\text{-dilatinos-Regge}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) &= -4\pi g_s^2 \alpha'^7 K_c^{4\text{-dilatinos-Regge}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) \times \\
&\quad \frac{\sin[\frac{\pi\alpha'}{4}(\tilde{s} + \tilde{t})]}{\sin(\frac{\pi\alpha'\tilde{s}}{4})} \left(\frac{\alpha'\tilde{s}}{4}\right)^{-2+\frac{\alpha'\tilde{t}}{2}} e^{2-\frac{\alpha'\tilde{t}}{2}} \frac{\Gamma(-\alpha'\tilde{t}/4)}{\Gamma(1+\alpha'\tilde{t}/4)} \\
&= \frac{\pi g_s^2 \alpha'^4}{8} (\alpha'\tilde{s})^3 [5(\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4) \\
&+ \bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 + 6\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>1}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>1}\lambda_4] \frac{\sin[\frac{\pi\alpha'}{4}(\tilde{s} + \tilde{t})]}{\sin(\frac{\pi\alpha'\tilde{s}}{4})} \left(\frac{\alpha'\tilde{s}}{4}\right)^{-2+\frac{\alpha'\tilde{t}}{2}} \\
&\times e^{2-\frac{\alpha'\tilde{t}}{2}} \frac{\Gamma(-\alpha'\tilde{t}/4)}{\Gamma(1+\alpha'\tilde{t}/4)} \tag{5.47}
\end{aligned}$$

obteniendo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_c^{4\text{-dilatinos-Regge}}\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) &= 2^{1-\alpha'\tilde{t}} \pi g_s^2 \alpha'^4 (\alpha'\tilde{s})^{1+\frac{\alpha'\tilde{t}}{2}} [5(\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4) \\
&+ \bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 + 6\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>1}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>1}\lambda_4] \frac{\sin[\frac{\pi\alpha'}{4}(\tilde{s} + \tilde{t})]}{\sin(\frac{\pi\alpha'\tilde{s}}{4})} e^{2-\frac{\alpha'\tilde{t}}{2}} \frac{\Gamma(-\alpha'\tilde{t}/4)}{\Gamma(1+\alpha'\tilde{t}/4)} \tag{5.48}
\end{aligned}$$

A primera vista pareciera que vemos la propagación de un modo de espín uno en el límite de Regge para la amplitud de dispersión de cuatro dilatinos. Pero en realidad debemos analizar mejor las funciones de onda de los dilatinos. En particular un factor \tilde{s} extra proviene de los términos

$$[5(\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4) + \bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 + 6\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>1}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>1}\lambda_4]$$

Recordemos que en el formalismo de Green-Schwarz los operadores de vértices correspondientes a estados de cuerdas de masa cero han sido derivados en el gauge de cono de luz. En particular, como se vió en la sección 4.5, el operador de vértice para la emisión de una cuerda fermiónica con función de onda $u^{\dot{a}}$ e impulso k^μ está dado por [40]

$$V_F(u, k) = u F e^{ik \cdot X} = (u^a F^a + u^{\dot{a}} F^{\dot{a}}) e^{ik \cdot X}, \tag{5.49}$$

con

$$F^a = (p^+/2)^{1/2} S^a \tag{5.50}$$

donde el prefactor de $F^{\dot{a}}$ es $(2p^+)^{-1/2}$, con $p^+ \propto \tilde{s}^{1/2}$. Además, los S^a 's son adimensionales, ya que satisfacen el álgebra:

$$\{S_m^a, S_n^b\} = \delta_{m+n} \delta^{ab} \tag{5.51}$$

Entonces, por cada operador de vértice de cuerda abierta fermiónica hay un factor $\tilde{s}^{1/4}$ que proviene de F^a , por lo que para cuatro fermiones deja como resultado un factor proporcional a \tilde{s} . Cada función de onda de dilatino aporta un factor $\tilde{s}^{1/4}$, por lo que para cuatro dilatinos tenemos un factor \tilde{s} . Estos factores provienen de (5.49). Al usar las relaciones KLT, el factor cinemático bosónico da un factor \tilde{s}^2 . Multiplicando todos estos factores tenemos como resultado $(\alpha'\tilde{s})^{2+\frac{\alpha'\tilde{t}}{2}}$ en el límite de Regge. Esto es crucial porque confirma lo esperado en una teoría con cuerdas cerradas que es que lo que Reggeiza es un gravitón, a diferencia del factor naive $(\alpha'\tilde{s})^{1+\frac{\alpha'\tilde{t}}{2}}$, que de no mediar el análisis aquí desarrollado, indicaría erróneamente la Reggeización de un campo vectorial de espín 1, sólo posible en el contexto de dispersión de cuerdas abiertas, que no es nuestro caso.

Nuestra conclusión después de tener en cuenta todos estos elementos es que tanto $\mathcal{A}_c^{4\text{-dilatones-Regge}}(1, 2, 3, 4)$ como $\mathcal{A}_c^{4\text{-dilatinos-Regge}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4})$ tienen el mismo comportamiento en el escaleo de la variable \tilde{s} , es decir, va como $(\alpha'\tilde{s})^{2+\frac{\alpha'\tilde{t}}{2}}$ en el límite de Regge. Por lo que la trayectoria $J(\tilde{t}) = 2 + \frac{\alpha'\tilde{t}}{2}$ muestra la Reggeización de un gravitón en ambos casos.

Una vez obtenida nuestra amplitud de dispersión para cuatro dilatinos de una teoría de supercuerdas tipo II estamos en condiciones, mediante el ansatz propuesto por Polchinski y Strassler [1] el cual explicamos en detalle en próximos capítulos, de obtener la sección eficaz diferencial para cuatro fermiones de espín 1/2 de una teoría dual de gauge confinante en cuatro dimensiones.¹¹

5.1.3. Amplitud de dispersión de dilatón-dilatino

Los procesos de dispersión protón-protón (pp) y protón-antiprotón ($p\bar{p}$) han sido ampliamente estudiados tanto a nivel teórico como experimental; siendo procesos que hoy en día se siguen produciendo en los grandes colisionadores de partículas, como por ejemplo en el LHC (*Large Hadron Collider*)¹². Al estudiar a nivel teórico procesos de dispersión de cuatro fermiones de espín 1/2 en cuatro dimensiones, mediante una teoría dual en diez dimensiones, es obvio que estos fermiones no corresponderán a protones de QCD, pero aún así, en cierta instancia, es posible intentar comparar con la fenomenología, suponiendo que estos resultados tienen cierta *universalidad*, la cual es heredada de la teoría de cuerdas. El estudio de procesos de *Hard Scattering* elásticos de $pp \rightarrow pp$ y de $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$ mediante métodos duales de AdS/QCD también ha sido llevado a cabo [76, 77].

En esta tesis también nos interesamos en un proceso poco estudiado (o quizás nada),

¹¹La amplitud de dispersión de cuatro dilatinos obtenida en esta sección es aplicable tanto para teorías de supercuerdas del tipo IIA como para también del tipo IIB, dependiendo de las quiralidades que elijamos para nuestros dilatinos. En el ansatz consideramos la teoría de supercuerdas del tipo IIB, la cual según la dualidad gauge/gravedad, es dual a cierta teoría de gauge conforme.

¹²En el LHC el proceso es la dispersión de Drell-Yang, que es muy distinto al caso estudiado en esta tesis.

la dispersión de fermión_{1/2}-glueball, para una teoría de gauge confinante. Si bien no es un proceso de dispersión protón-glueball, es al menos una primera aproximación para este tipo de sistemas de fermiones de espín 1/2 y glueballs. Para el estudio, mediante la dualidad AdS/CFT, del *Hard Scattering* para una dispersión fermión_{1/2}-fermión_{1/2}, necesitaremos la amplitud de dispersión de cuatro dilatinos de una teoría de supercuerdas, la cual fue obtenida en nuestro trabajo [3] y desarrollamos en la sección 5.1.2; similarmente, para el estudio del proceso fermión_{1/2}-glueball, necesitaremos la amplitud de dispersión dilatón-dilatino correspondiente a una teoría de supercuerdas del tipo II (en particular IIB), la cual fue obtenida en [5]. Procedemos como hicimos antes, con las relaciones KLT para obtener la amplitud de cuatro cuerdas cerradas supersimétricas. Para este caso en particular tenemos

$$K_c^2 \text{ dilatones-2 dilatinos}(\tilde{1}, 2, 3, \tilde{4}) = \frac{1}{16} K_{ab}^{\text{bos}}(1, 2, 3, 4) \otimes \frac{1}{8} K_{ab}^{\text{fer}}(\tilde{1}, 2, \tilde{4}, 3), \quad (5.52)$$

donde los factores numéricos corresponden a las definiciones:

$$\frac{1}{16} K_{ab}^{\text{bos}}(1, 2, 3, 4) = K_{ab}^{\text{bos}}(k_1/2, k_2/2, k_3/2, k_4/2), \quad (5.53)$$

$$\frac{1}{8} K_{ab}^{\text{fer}}(\tilde{1}, 2, 3, \tilde{4}) = K_{ab}^{\text{fer}}(k_1/2, k_2/2, k_4/2, k_3/2) \quad (5.54)$$

siendo $K_{ab}^{\text{bos}}(1, 2, 3, 4)$ ya definido en (5.8). Ahora debemos considerar un nuevo factor cinemático de cuerdas abiertas. Uno que contenga dos bosones y dos fermiones [40]:

$$\begin{aligned} K_{ab}^{\text{fer}}(\tilde{1}, 2, \tilde{4}, 3) &= \frac{\tilde{u}}{2} \tilde{u}_1 \Gamma \cdot \zeta_2 \Gamma \cdot (k_3 + k_4) \Gamma \cdot \zeta_3 u_4 \\ &+ \frac{\tilde{s}}{2} \tilde{u}_1 \Gamma \cdot \zeta_3 \Gamma \cdot (k_2 + k_4) \Gamma \cdot \zeta_2 u_4 \end{aligned} \quad (5.55)$$

El uso del factor cinemático (5.55), el cual es análogo a la fórmula (7.4.47) de [40], ofrece dos ventajas sobre el factor cinemático (7.4.46) de la misma referencia. Primero el factor (7.4.47) es explícitamente \tilde{s} - \tilde{t} dual, o en nuestro caso la ecuación (5.55) es \tilde{s} - \tilde{u} dual si nosotros usamos la partícula 3 en lugar de la 4 y viceversa. Por otro lado, notar que el factor cinemático (7.4.46) no es explícitamente \tilde{s} - \tilde{t} dual. La segunda razón de usar el factor cinemático (5.55) es su aplicación más directa cuando al segundo factor cinemático del producto directo de $K_c^2 \text{ dilatones-2 dilatinos}$ en la ecuación (5.52) debe tener las últimas dos partículas intercambiadas, $K_{ab}^{\text{fer}}(\tilde{1}, 2, \tilde{4}, 3)$, como las relaciones KLT lo requieren. Escribimos nuestro factor cinemático $K_c^2 \text{ dilatones-2 dilatinos}(\tilde{1}, 2, 3, \tilde{4})$ en la forma:

$$K_c^2 \text{ dilatones-2 dilatinos}(\tilde{1}, 2, 3, \tilde{4}) = \sum_{i=1}^{15} (\mathcal{T}_{i,1} + \mathcal{T}_{i,2}) \quad (5.56)$$

expresión proveniente de los productos tensoriales de los factores cinemáticos bosónicos y fermiónicos de cuerdas abiertas, dando un total de $15_{\text{bos}} \times 2_{\text{fer}} = 30$ términos. Para

cada producto $\zeta_i^M \otimes \zeta_i^{M'}$ hay tres términos (para cada dilatón Φ_i), como se indica en la fórmula (5.11). Si tenemos dos dilatones que intervienen en la amplitud de dispersión, entonces aportan 3×3 términos a la amplitud. Luego tenemos $30 \times 9 = 270$ términos individuales a calcular en total, todos ellos conteniendo 2 dilatones, 2 dilatinos, y las correspondientes matrices de Dirac en 10 dimensiones.

En el cálculo usamos varias veces las ecuaciones de Dirac en 10 dimensiones para fermiones de espín 1/2 y de masa nula:

$$(k_4 \cdot \Gamma)\lambda_4 = 0, \quad (5.57)$$

$$\bar{\lambda}_1(k_1 \cdot \Gamma) = 0. \quad (5.58)$$

y la conservación del impulso:

$$k_1^M + k_2^M + k_3^M + k_4^M = 0 \quad (5.59)$$

por lo que, juntando (5.58) y (5.59) se cumple

$$\bar{\lambda}_1\Phi_2\Phi_3(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 = -\bar{\lambda}_1\Phi_2\Phi_3(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \quad (5.60)$$

Esto nos permitirá escribir el factor cinemático de cuatro cuerdas cerradas correspondiente a la amplitud de dispersión de dilatón-dilatino para los términos de una sola gama de Dirac en una forma simétrica, en función de las dos variables cinemáticas, a saber, k_2 y k_3 , el cual es el momento en diez dimensiones del dilatón Φ_2 y Φ_3 respectivamente.

En el cálculo también nos encontraremos con términos que contienen tres matrices gamas de Dirac. Estos términos pueden ser reducidos usando la conservación del impulso (5.59), con lo que muchos términos de éste tipo pueden ser escritos en la forma:

$$\tilde{s}^2(k_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma) \quad (5.61)$$

Usando el álgebra de Clifford (5.20) y el hecho que los dilatones y los dilatinos son no masivos ($k_i \cdot k_i = 0$), tenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{s}^2(k_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma) &= \tilde{s}^2 k_{2M} k_{2N} k_{3P} \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^P \\ &= -\tilde{s}^2 k_{2M} k_{2N} k_{3P} \left[-2\eta^{MN} \Gamma^P + \Gamma^N \Gamma^M \Gamma^P \right] \\ &= -\tilde{s}^2 \left[-2k_2 \cdot k_2 k_3 \cdot \Gamma + (k_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma) \right] \\ &= -\tilde{s}^2 (k_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma) \end{aligned} \quad (5.62)$$

por lo que términos del estilo $(k_i \cdot \Gamma)(k_j \cdot \Gamma)(k_j \cdot \Gamma)$ se anularán. También, el álgebra de Clifford (5.20) nos permite escribir términos que contienen el producto de tres gamas de Dirac como términos de una sola gama de Dirac. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1\Phi_2\Phi_3(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 &= -2k_2 \cdot k_3 \bar{\lambda}_1\Phi_2\Phi_3(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\ &\quad -\bar{\lambda}_1\Phi_2\Phi_3(k_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\ &= -2k_2 \cdot k_3 \bar{\lambda}_1\Phi_2\Phi_3(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\ &= \tilde{t} \bar{\lambda}_1\Phi_2\Phi_3(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\ &= -\tilde{t} \bar{\lambda}_1\Phi_2\Phi_3(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Ésto simplificará considerablemente los cálculos, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned}
& \bar{\lambda}_1 \Phi_2 \Phi_3 (k_4 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 - k_3) \cdot \Gamma \lambda_4 \\
= & \bar{\lambda}_1 \Phi_2 \Phi_3 (-k_1 - k_2 - k_3) \cdot \Gamma(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 - k_3) \cdot \Gamma \lambda_4 \\
= & -\bar{\lambda}_1 \Phi_2 \Phi_3 (k_2 + k_3) \cdot \Gamma(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 - k_3) \cdot \Gamma \lambda_4 \\
= & \bar{\lambda}_1 \Phi_2 \Phi_3 (k_2 + k_3) \cdot \Gamma(k_3 \cdot \Gamma)(k_3 - k_2) \cdot \Gamma \lambda_4 \\
= & \bar{\lambda}_1 \Phi_2 \Phi_3 (k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - \bar{\lambda}_1 \Phi_2 \Phi_3 (k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
& + \bar{\lambda}_1 \Phi_2 \Phi_3 (k_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - \bar{\lambda}_1 \Phi_2 \Phi_3 (k_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
= & -\bar{\lambda}_1 \Phi_2 \Phi_3 (k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
= & 2k_2 \cdot k_3 \bar{\lambda}_1 \Phi_2 \Phi_3 (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 + \bar{\lambda}_1 \Phi_2 \Phi_3 (k_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
= & -\tilde{t} \bar{\lambda}_1 \Phi_2 \Phi_3 (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 = \tilde{t} \bar{\lambda}_1 \Phi_2 \Phi_3 (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4. \tag{5.64}
\end{aligned}$$

El detalle de los resultados de los 30 términos de K_c^2 dilatones-2 dilatinos $(\tilde{1}, 2, 3, \tilde{4})$ se presentarán en el apéndice E. Desarrollando y sumando estos 30 términos obtenemos:

$$\begin{aligned}
K_c^2 \text{ dilatones-2 dilatinos } (\tilde{1}, 2, 3, \tilde{4}) &= \frac{\Phi_2 \Phi_3}{8192} \left\{ \tilde{u} \left[\tilde{s} \tilde{t} \left(\tilde{s} \left(2\bar{\lambda}_1 (\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \left((\bar{k}_3 \cdot k_1) - 3(\bar{k}_3 \cdot k_2) - 2 \right) \right. \right. \right. \right. \\
&- \bar{\lambda}_1 (\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 + \bar{\lambda}_1 (\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + 2\bar{\lambda}_1 (\bar{k}_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \left((\bar{k}_2 \cdot k_1) \right. \\
&+ \left. \left. \left. 7(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 1 \right) - \bar{\lambda}_1 (\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 + 3\bar{\lambda}_1 (\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right) \right. \\
&+ \left. 2\bar{\lambda}_1 (\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \left((\bar{k}_3 \cdot k_1) + 3(\bar{k}_3 \cdot k_2) - 3 \right) + 2\bar{\lambda}_1 (\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \left((\bar{k}_2 \cdot k_1) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left. 3(\bar{k}_2 \cdot k_3) - 3 \right) - 2\bar{\lambda}_1 (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \left(2((\bar{k}_2 \cdot k_1) - 2)(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 2(\bar{k}_2 \cdot k_3)(2(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 5) + 4(\bar{k}_3 \cdot k_1) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left. 9 \right) - 2\bar{\lambda}_1 (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \left(2(\bar{k}_3 \cdot k_4)((\bar{k}_2 \cdot k_1) - 2(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 7) + 4(\bar{k}_2 \cdot k_1) + 2(\bar{k}_2 \cdot k_3)(\bar{k}_3 \cdot k_1) \right. \right. \\
&- \left. \left. \left. 4(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 10(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 9 \right) - 2((\bar{k}_2 \cdot k_3) + 2)\bar{\lambda}_1 (\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right) \right. \\
&+ \left. \tilde{t}^2 \left(\tilde{s} \left(2\bar{\lambda}_1 (\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \left((\bar{k}_3 \cdot k_4) + 3 \right) + \bar{\lambda}_1 (\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + 6\bar{\lambda}_1 (\bar{k}_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right. \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left. \bar{\lambda}_1 (\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right) - 4\bar{\lambda}_1 (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \left((\bar{k}_2 \cdot k_1)(\bar{k}_3 \cdot k_4) + (\bar{k}_2 \cdot k_1) - 4(\bar{k}_3 \cdot k_1) \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\bar{k}_3 \cdot k_4) \Big) + 2\tilde{s}^3 \left(\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_1) + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + (\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2)\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 3\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right. \\
& - \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \Big) + 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4\tilde{s} \left(((\bar{k}_3 \cdot k_2) + 1)\tilde{s} - ((\bar{k}_3 \cdot k_2) + 2)\tilde{t} \right) \\
& - 2\tilde{s}^2 \left(\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(2(\bar{k}_3 \cdot k_1) - (\bar{k}_3 \cdot k_2) + 2(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 2 \right) \right. \\
& + 2\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left((\bar{k}_3 \cdot k_4)(-2(\bar{k}_2 \cdot k_1) + 2(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 3) - (\bar{k}_2 \cdot k_1)(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 3(\bar{k}_2 \cdot k_3)(\bar{k}_3 \cdot k_1) \right. \\
& + 3(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 7(\bar{k}_3 \cdot k_1) + (\bar{k}_3 \cdot k_2) + 20 \Big) + ((\bar{k}_2 \cdot k_3) + 2)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
& \left. + ((\bar{k}_2 \cdot k_3) - 1)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \Big) \right] \\
& - \tilde{u}^2 \left[\tilde{t} \left(\tilde{s} \left(-2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left((\bar{k}_3 \cdot k_1) + 7(\bar{k}_3 \cdot k_2) - (\bar{k}_3 \cdot k_4) + 1 \right) - 3\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right. \right. \right. \\
& + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(-2(\bar{k}_2 \cdot k_1) + 6(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 4 \right) \\
& - 4(\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2)(\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4) - \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
& \left. + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right) + 4\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left((\bar{k}_2 \cdot k_1) - 5(\bar{k}_2 \cdot k_3) + (\bar{k}_3 \cdot k_2) + 7(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 32 \right) \\
& + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(4 - 10(\bar{k}_3 \cdot k_4) \right) \Big) + 2\tilde{s} \left(\tilde{s} \left(\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right. \right. \\
& + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left((\bar{k}_3 \cdot k_1) + 5(\bar{k}_3 \cdot k_4) \right) \\
& + (\bar{k}_2 \cdot k_1)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \Big) + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left((\bar{k}_3 \cdot k_2) + 1 \right) \\
& + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(2(\bar{k}_2 \cdot k_1) - (\bar{k}_2 \cdot k_3) + 1 \right) \\
& + 2\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(7(\bar{k}_2 \cdot k_1) - (\bar{k}_2 \cdot k_3)(\bar{k}_3 \cdot k_1) + (\bar{k}_2 \cdot k_3) + 20 \right) \\
& + 6((\bar{k}_2 \cdot k_1) + 1)(\bar{k}_3 \cdot k_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 2(3(\bar{k}_2 \cdot k_1) + 1)(\bar{k}_3 \cdot k_4)\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
& \left. + 4(3(\bar{k}_2 \cdot k_1) + 2)(\bar{k}_3 \cdot k_4)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - ((\bar{k}_2 \cdot k_3) + 1)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\tilde{s}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left((\bar{k}_3 \cdot k_2) - 1 \right) + 4\tilde{t}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left((\bar{k}_3 \cdot k_4) + 1 \right) \Big] \\
& + 2\tilde{u}^3 \left[\tilde{s} \left(-3\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4((\bar{k}_3 \cdot k_4) + 1) - \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right. \right. \\
& + \left. \left. (\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right) + (\bar{k}_2 \cdot k_1) \left(\tilde{s}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 2(\bar{k}_3 \cdot k_4)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right) \right] \\
& + 4\tilde{s}\tilde{t} \left[\tilde{s} \left(-\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 - \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left((\bar{k}_2 \cdot k_3) + (\bar{k}_3 \cdot k_1) - 5(\bar{k}_3 \cdot k_2) - 4(\bar{k}_3 \cdot k_4) \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. 32 \right) - \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right) + \tilde{t}\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(4(\bar{k}_2 \cdot k_1) - (\bar{k}_3 \cdot k_1) + 4(\bar{k}_3 \cdot k_4) \right) \Big] \\
& + 2(\bar{k}_2 \cdot k_4) \left[\tilde{s} \left(\tilde{s}\tilde{t} \left(5\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 14\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right) \right) \right. \\
& + \left. 2\tilde{s}^2(\bar{k}_3 \cdot k_1)\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 2\tilde{t}^2((\bar{k}_3 \cdot k_1) + 1)\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right) \\
& + \tilde{u}^2 \left(- \left(\tilde{s} \left(5\tilde{s}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(-4(\bar{k}_3 \cdot k_1) \right. \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. 4(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 4(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 6 \right) \right) - 8\tilde{t}\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right) \right) - \tilde{u} \left(\tilde{s}\tilde{t} \left(\tilde{s}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right. \right. \\
& + \left. \left. 2\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left((\bar{k}_3 \cdot k_1) - 2(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 7 \right) + 4(\bar{k}_3 \cdot k_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right) \right) \\
& + \left. \tilde{s}^2 \left(3\tilde{s}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 4\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(3(\bar{k}_3 \cdot k_1) + (\bar{k}_3 \cdot k_4) + 2) + (6(\bar{k}_3 \cdot k_1) + 2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right) \right. \\
& \left. - \tilde{t}^2 \left(\tilde{s}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 8\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right) \right) \Big] \Big\}, \tag{5.65}
\end{aligned}$$

usando que $\tilde{t} = -\tilde{s} - \tilde{u}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
K_c^2 \text{ dilatones-2 dilatinos}(\tilde{1}, 2, 3, \tilde{4}) &= \frac{\Phi_2\Phi_3}{8192} \left[\tilde{s}^3 \left(4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right. \right. \\
& - 10\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_4) + 4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_4) \\
& + 4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 16\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_1) + 4\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_3) \\
& + \left. \left. 24\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_4) - 20\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 128\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{s}^3 \tilde{u} \left(12\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_1) \right. \\
& - 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_4) - 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 3\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 6\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_2) \\
& \left. + 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_4) - 2\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot \bar{k}_3) - 14\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_3) \right) \\
& + \frac{\tilde{s}^2 \tilde{u}^2}{2} \left(12\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 6\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_1) \right. \\
& - 4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_4) + 12\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 2(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma) - 6\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_1) \\
& \left. - 8\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_2) - 4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_4) - 8\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_3) \right) \\
& + \tilde{s}^2 \tilde{u} \left(6\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 6\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right. \\
& - 10\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_4) - 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_1) \\
& - 8\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
& + 4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_4) + 10\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
& - 6\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_1) \\
& + 4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_2) - 4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_2) \\
& - 4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 32\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_1) + 12\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_3) \\
& + 32\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_4) - 12\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_3)(\bar{k}_3 \cdot k_1) - 28\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_4)(\bar{k}_3 \cdot k_1) \\
& - 24\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_1) + 8\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_1)(\bar{k}_3 \cdot k_2) - 8\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_4)(\bar{k}_3 \cdot k_2) \\
& - 32\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 8\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_1)(\bar{k}_3 \cdot k_4) - 8\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_4)(\bar{k}_3 \cdot k_4) \\
& + 4\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 66\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 4\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_1) - 8\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_3) \\
& + 12\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_4) + 4\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_3)(\bar{k}_3 \cdot k_1) - 12\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_4)(\bar{k}_3 \cdot k_1) \\
& + 16\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_1) + 8\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_4)(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 20\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_2) \\
& \left. - 8\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_3)(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 24\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 18\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right) \\
& + \left(\tilde{s} \leftrightarrow \tilde{u}, k_2 \leftrightarrow k_3, \bar{k}_2 \leftrightarrow \bar{k}_3 \right). \tag{5.66}
\end{aligned}$$

Dejando expresada esta fórmula en función de las dos variables cinemáticas independientes, \tilde{s} y θ mediante el uso de las relaciones (5.14), tenemos

$$\begin{aligned}
K_c^2 \text{ dilatons-2 dilatinos}(\tilde{1}, 2, 3, \tilde{4}) &= \frac{\tilde{s}^3 \Phi_2 \Phi_3}{262144} \left\{ -\cos(\theta) \left[\tilde{s} \left(2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(33(\bar{k}_3 \cdot k_1) + 7(\bar{k}_3 \cdot k_2) \right. \right. \right. \\
&+ 33(\bar{k}_3 \cdot k_4) - 15) + 3\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(64(\bar{k}_2 \cdot k_1) - 6(\bar{k}_2 \cdot k_3) \\
&+ 62(\bar{k}_2 \cdot k_4) - 44) - 2(\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2)(63\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 64\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4) - \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left. \right. \\
&+ \left. \left. \left. \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(64(\bar{k}_3 \cdot k_2) - 4((\bar{k}_3 \cdot k_4) + 1) \right) \right) \right. \right. \\
&- \left. \left. \left. 32\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(5(\bar{k}_2 \cdot k_4) + 2(\bar{k}_3 \cdot k_1) - 2(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 2(\bar{k}_3 \cdot k_4) - 1 \right) \right) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left. 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(32(\bar{k}_2 \cdot k_1) - 32(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 32(\bar{k}_2 \cdot k_4) + 5(\bar{k}_3 \cdot k_4) - 18 \right) \right) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left. 64 \left(\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left((\bar{k}_2 \cdot k_1)((\bar{k}_3 \cdot k_2) + 5(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 4) - 2(\bar{k}_3 \cdot k_4)((\bar{k}_2 \cdot k_3) + (\bar{k}_2 \cdot k_4) + 1) \right) \right. \right. \right. \\
&- \left. \left. \left. 3(\bar{k}_2 \cdot k_3)(\bar{k}_3 \cdot k_1) - 2(\bar{k}_2 \cdot k_3) - 7(\bar{k}_2 \cdot k_4)(\bar{k}_3 \cdot k_1) + 2(\bar{k}_2 \cdot k_4) - 7(\bar{k}_3 \cdot k_1) - 6(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 12 \right) \right) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left. \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(-(\bar{k}_2 \cdot k_3) + (\bar{k}_2 \cdot k_4) + 1 \right) \right) \right) \right. \\
&+ \left. \left. \left. 4\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(16(\bar{k}_2 \cdot k_1)(3(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 7(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 7) + (\bar{k}_2 \cdot k_3)(21 - 16(\bar{k}_3 \cdot k_1)) \right) \right. \right. \right. \\
&- \left. \left. \left. 80(\bar{k}_2 \cdot k_4)(\bar{k}_3 \cdot k_1) + 32(\bar{k}_2 \cdot k_4)((\bar{k}_3 \cdot k_2) + (\bar{k}_3 \cdot k_4) + 1) - 4(\bar{k}_3 \cdot k_1) + 47(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 58(\bar{k}_3 \cdot k_4) \right. \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left. 288 \right) \right) \right. \\
&- \left. \left. \left. 2\cos(2\theta) \left[\tilde{s} \left(2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(3(\bar{k}_3 \cdot k_1) - 13(\bar{k}_3 \cdot k_2) + (\bar{k}_3 \cdot k_4) - 15 \right) \right) \right. \right. \right. \\
&- \left. \left. \left. 5\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(6(\bar{k}_2 \cdot k_1) + 17(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 7(\bar{k}_2 \cdot k_4) + 6 \right) \right) \right. \right. \\
&- \left. \left. \left. 6(\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2) \left(3\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 2\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right) + 7\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left. 4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left((\bar{k}_3 \cdot k_4) - 2 \right) \right) \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left((\bar{k}_3 \cdot k_1) + 4(\bar{k}_3 \cdot k_2) - 2 \right) \\
& + 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(6(\bar{k}_2 \cdot k_1) + 4(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 4(\bar{k}_2 \cdot k_4) - 5(\bar{k}_3 \cdot k_4) - 2 \right) \\
& - 8\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left((\bar{k}_3 \cdot k_4)(-3(\bar{k}_2 \cdot k_1) + 2(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 3) + (\bar{k}_3 \cdot k_2)((\bar{k}_2 \cdot k_1) \right. \\
& - 2((\bar{k}_2 \cdot k_4) + 1)) + (\bar{k}_3 \cdot k_1) \left. \right) + 4\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(6(\bar{k}_2 \cdot k_1)((\bar{k}_3 \cdot k_2) + 2) + 14(\bar{k}_2 \cdot k_1)(\bar{k}_3 \cdot k_4) \right. \\
& - 4(\bar{k}_3 \cdot k_1)((\bar{k}_2 \cdot k_3) + (\bar{k}_2 \cdot k_4)) + 4(\bar{k}_3 \cdot k_4)((\bar{k}_2 \cdot k_3) + (\bar{k}_2 \cdot k_4)) + (\bar{k}_2 \cdot k_3) \\
& - 2(\bar{k}_2 \cdot k_4) - 4(\bar{k}_3 \cdot k_1) - 3(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 2(\bar{k}_3 \cdot k_4) \left. \right) - 4\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(8(\bar{k}_2 \cdot k_1) + 10(\bar{k}_2 \cdot k_3) \right. \\
& + 12(\bar{k}_2 \cdot k_4) + 9 \left. \right) - 4(2(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 3)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 252\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left. \right] \\
& - \cos(3\theta) \left[\tilde{s} \left(-2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left((\bar{k}_3 \cdot k_1) + 7(\bar{k}_3 \cdot k_2) + (\bar{k}_3 \cdot k_4) + 1 \right) \right. \right. \\
& - 3\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(3(\bar{k}_2 \cdot k_3) + (\bar{k}_2 \cdot k_4) + 6 \right) \\
& - 2(\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2)\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left. \right) \\
& + 4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left((\bar{k}_3 \cdot k_4) + 1 \right) + 4\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(-5(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 4(\bar{k}_3 \cdot k_1) \right. \\
& + (\bar{k}_3 \cdot k_2) + 6(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 32 \left. \right) + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(4 - 10(\bar{k}_3 \cdot k_4) \right) \left. \right] \\
& + 2 \left[\tilde{s} \left(-26\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4((\bar{k}_3 \cdot k_1) + (\bar{k}_3 \cdot k_2)) - 30\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_4) - 20(\bar{k}_2 \cdot k_1)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right. \right. \\
& + 34(\bar{k}_2 \cdot k_3)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 18(\bar{k}_2 \cdot k_4)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 46(\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2)\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
& + 52(\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 7\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 14\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
& - 5\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 28\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left. \right) + 4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(-8(\bar{k}_3 \cdot k_2) \right. \\
& + (\bar{k}_3 \cdot k_4) - 2 \left. \right) + 4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(-20(\bar{k}_2 \cdot k_4) + 9(\bar{k}_3 \cdot k_1) - 4(\bar{k}_3 \cdot k_2) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 10) + 4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(-5(\bar{k}_2 \cdot k_1) + 10(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 3 \right) \\
& - 4\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(2(\bar{k}_2 \cdot k_1)(9(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 21(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 22) + (\bar{k}_2 \cdot k_3)(-4(\bar{k}_3 \cdot k_1) - 4(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 7) \right. \\
& + 4(\bar{k}_3 \cdot k_1) + 27(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 30(\bar{k}_3 \cdot k_4) \left. \right) + 8(\bar{k}_3 \cdot k_4)\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(-17(\bar{k}_2 \cdot k_1) + 6(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 5 \right) \\
& - 8(5(\bar{k}_2 \cdot k_1) + 14)(\bar{k}_3 \cdot k_2)\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 96(\bar{k}_2 \cdot k_1)\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
& + 4(6(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 5)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
& + 24(4(\bar{k}_2 \cdot k_3) + 9)(\bar{k}_3 \cdot k_1)\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 88(\bar{k}_2 \cdot k_3)\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
& - 8(\bar{k}_2 \cdot k_4) \left(3\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right. \\
& - 2\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(14(\bar{k}_3 \cdot k_1) + (\bar{k}_3 \cdot k_2) + 4(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 17) + \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(-18(\bar{k}_3 \cdot k_1) + 8(\bar{k}_3 \cdot k_2) \\
& + 6(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 9) \left. \right) - 10\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 1628\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
& - 388\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left. \right\}. \tag{5.67}
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando el límite $\tilde{s} \gg |\tilde{t}|$ obtenemos el comportamiento de Regge para la amplitud de dispersión:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{c, \text{Regge}}^{2 \text{ dilatones-2 dilatinos}}(\tilde{1}, 2, 3, \tilde{4}) &= \pi\kappa^2 K_{c, \text{Regge}}^2 \text{ dilatones-2 dilatinos}(\tilde{1}, 2, 3, \tilde{4}) \frac{\sin\left[\frac{\pi\alpha'}{4}(\tilde{s} + \tilde{t})\right]}{\sin\left(\frac{\pi\alpha'\tilde{s}}{4}\right)} \\
&\times \left(\frac{\alpha'\tilde{s}}{4}\right)^{-2+\frac{\alpha'\tilde{t}}{2}} e^{2-\frac{\alpha'\tilde{t}}{2}} \frac{\Gamma(-\alpha'\tilde{t}/4)}{\Gamma(1+\alpha'\tilde{t}/4)}
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
K_{c, \text{Regge}}^2 \text{ dilatones-2 dilatinos} &= \frac{\tilde{s}^3 \Phi_2 \Phi_3}{4096} \left[\tilde{s} \left(-2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_1) - 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_4) \right. \right. \\
& + \left. \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_1) - 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_4) + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right) \\
& + 2 \left(-\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_2) + \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left(-(\bar{k}_2 \cdot k_1)(\bar{k}_3 \cdot k_2) - 5(\bar{k}_2 \cdot k_1)(\bar{k}_3 \cdot k_4) \right. \right. \\
& + \left. \left. (\bar{k}_2 \cdot k_4)(7(\bar{k}_3 \cdot k_1) + 2(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 4) + 7(\bar{k}_3 \cdot k_1) + (\bar{k}_3 \cdot k_2) + 2(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 20 \right) \right. \\
& \left. - \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \left((\bar{k}_2 \cdot k_1)(3(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 7(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 7) - 5(\bar{k}_2 \cdot k_4)(\bar{k}_3 \cdot k_1) + 2(\bar{k}_2 \cdot k_4)((\bar{k}_3 \cdot k_2) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\bar{k}_3 \cdot k_4) + 1) + 3(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 4(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 20) + (\bar{k}_2 \cdot k_3) \left(\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right. \\
& + \left. \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 (3(\bar{k}_3 \cdot k_1) + 2(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 3) + ((\bar{k}_3 \cdot k_1) - 1) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right) \\
& + \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \left(2(\bar{k}_3 \cdot k_1) - 2(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 2(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 1 \right) \\
& + \left. \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \left(-2(\bar{k}_2 \cdot k_1) + 2(\bar{k}_2 \cdot k_3) - 2(\bar{k}_2 \cdot k_4) + 1 \right) \right]. \quad (5.68)
\end{aligned}$$

Notar que podríamos insertar una cinemática en las expresiones (5.65), (5.66), (5.67), (5.68), como por ejemplo la cinemática de centro de masa dada por:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \left(\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, \frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, 0, \dots, 0 \right), \\
k_2 &= \left(\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, -\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, 0, \dots, 0 \right), \\
k_3 &= \left(-\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, \frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2} \cos \theta, \frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2} \sin \theta, 0, \dots, 0 \right), \\
k_4 &= \left(-\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, -\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2} \cos \theta, -\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2} \sin \theta, 0, \dots, 0 \right). \quad (5.69)
\end{aligned}$$

y para los impulsos auxiliares:

$$\begin{aligned}
\bar{k}_2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{\tilde{s}}}, -\frac{1}{\sqrt{\tilde{s}}}, 0, \dots, 0 \right), \\
\bar{k}_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{s}}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{\tilde{s}}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{\tilde{s}}}, 0, \dots, 0 \right). \quad (5.70)
\end{aligned}$$

de tal forma que se cumplan las condiciones $\bar{k}_2 \cdot k_2 = \bar{k}_3 \cdot k_3 = 1$ and $\bar{k}_2 \cdot \bar{k}_2 = \bar{k}_3 \cdot \bar{k}_3 = 0$.

Como se razonó en la sección anterior para el límite de Regge de la amplitud de dispersión de cuatro dilatinos, en (5.68) también podemos concluir que tenemos la propagación de un gravitón Reggeizado correspondiente a la trayectoria de Regge que tenemos en el exponente de $(\alpha' \tilde{s})^{2 + \frac{\alpha' \tilde{t}}{2}}$. Esto es fácil de ver al ser consideradas las dimensiones de energía de las funciones de onda de los dilatinos, y tomando alguna cinemática para la cual $k_i \sim \tilde{s}^{1/2}$ y $\bar{k}_i \sim \tilde{s}^{-1/2}$.

Capítulo 6

Hard scattering de cuatro fermiones de espín 1/2 desde la teoría de cuerdas

Luego de haber calculado las amplitudes de dispersión de cuatro dilatones, de cuatro dilatinos y para dilatón-dilatino en teoría de supercuerdas de tipo II, por fin estamos en condiciones de calcular las respectivas amplitudes de dispersión para una teoría de gauge confinante en cuatro dimensiones. Para ello, nos serviremos de la dualidad AdS/CFT, la cual, como se explicó en la sección 2.3, relaciona la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM en 4 dimensiones para acoplamiento fuerte ($\lambda_{\text{t Hooft}} \gg 1$) con la teoría de supercuerdas de tipo IIB en un fondo $\text{AdS}_5 \times S^5$. Por motivos instructivos, a continuación veremos en detalle el cálculo llevado a cabo en [1], es decir, el *Hard Scattering* del proceso de dispersión exclusivo y elástico $glueball+glueball \rightarrow glueball+glueball$, para luego así afrontar el cálculo respectivo para la dispersión de cuatro fermiones $_{1/2}$. Además de presentar un resultado con todos los factores que acompañan a la amplitud de dispersión de cuatro glueballs, también se consideró resolver las integrales angulares de los armónicos esféricos escalares en la esfera S^5 ; cálculo que no fue considerado en [1]. Ésto nos permitirá encontrar reglas de selección, las cuales establecerán cuáles estados pueden intervenir en este proceso de dispersión y cuáles estados no. También discutiremos nuestros resultados en relación a la acción efectiva en cinco dimensiones obtenida luego de la reducción dimensional de la supergravedad de tipo IIB en la S^5 .

6.1. El Ansatz de Polchinski-Strassler y el Hard scattering de 4 glueballs

En el artículo pionero de Polchinski y Strassler [1] se estudia el límite de altas energías para ángulo fijo para un proceso de $2 \rightarrow m$ glueballs en una teoría de gauge

confinante en el marco de la dualidad AdS/CFT. Se muestra que para una cuerda propagándose en cierto espacio curvo, se llega a una ley de potencia para la amplitud de dispersión como función de la energía de centro de masa \sqrt{s} (siendo s la variable de Mandelstam correspondiente en 4 dimensiones). Se obtiene el comportamiento *hard* típico de los procesos exclusivos en QCD [25, 26], como fue descrito en el capítulo 3. También se llega al comportamiento de Regge para otro rango de energías.

Como sabemos, la teoría $SU(N_c)$ $\mathcal{N} = 4$ SYM es una teoría conforme, es decir, su función beta se anula para todo el rango de energías. Para imitar una teoría confinante, debemos deformar la teoría conforme introduciendo una escala de energía Λ en el IR. Se asocia esta escala de energía Λ con la masa del glueball más liviano. Desde el punto de vista de la teoría dual, una teoría de cuerdas en un fondo $\text{AdS}_5 \times S^5$, la escala Λ corresponde a un *cut-off* de la coordenada radial del espacio AdS, es decir: $r_0 \sim \Lambda R^2 \leq r$, con $R^4 = 4\pi g_s N_c \alpha'^2$. El elemento de longitud para este espacio $\text{AdS}_5 \times S^5$ es

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2 \quad (6.1)$$

Siendo el cuadrimomento de la teoría de gauge dual $p_\mu = -i\partial_\mu$. Un observador inercial localizado en la posición r del interior del AdS_5 (*bulk*) tendrá un momento en diez dimensiones \tilde{p}^μ dado por

$$\tilde{p}^\mu = \frac{R}{r} p^\mu, \quad (6.2)$$

Al considerar que las escalas de energías en el *bulk* son del orden $\tilde{p} \sim R^{-1}$, debido al factor de corrimiento al rojo inducido por el factor g_{00} de la métrica (6.1) tenemos que las escalas de energías en la teoría de gauge son del orden

$$p \sim \frac{r}{R^2} \quad (6.3)$$

mediante esta fórmula notamos cómo está codificada la teoría de gauge de una forma holográfica: procesos de bajas energías de la teoría de gauge corresponden a valores pequeños de r y procesos de altas energías corresponden a grandes valores de r . Es decir, fijando una escala de energía \tilde{p} en el *bulk*, surgen diferentes escalas de energía en la teoría de gauge para los diferentes valores de la coordenada r . Estos efectos de *corrimientos al rojo* se deben a este g_{00} que provee la métrica del AdS.

Se define el cuadrado de la longitud efectiva de la cuerda desde la teoría de gauge como $\hat{\alpha}' \equiv 1/(\lambda_{\text{t Hooft}}^{1/2} \Lambda^2)$, con la constante de acoplamiento de 't Hooft definida como antes $\lambda_{\text{t Hooft}} = g_{YM}^2 N_c \equiv 4\pi g_s N_c$. Tenemos que se cumple

$$\sqrt{\alpha'} \tilde{p} = \sqrt{\hat{\alpha}'} p \frac{r_0}{r} \leq \sqrt{\hat{\alpha}'} p \quad (6.4)$$

Como se mencionó al comienzo de la sección, por motivos instructivos, se procederá a realizar el cálculo para la dispersión de 2 a 2 glueballs, los cuales son estados asociados a

la teoría $SU(N_c)$ $\mathcal{N} = 4$ SYM con una deformación en el IR para inducir confinamiento. Estos glueballs de la teoría de gauge corresponden a cuerdas cerradas, en particular, al dilatón; todo esto entendido desde la dualidad AdS/CFT. La función de onda del dilatón en el $AdS_5 \times S^5$ está dada por la siguiente descomposición de Kaluza-Klein:

$$\Phi(x, r, \Omega) = e^{ip \cdot x} \psi(r, \Omega). \quad (6.5)$$

Notamos que la exponencial depende de la coordenada r a través de $p \sim r/R^2$, por lo que la onda plana $e^{ip \cdot x}$ varía con esta coordenada radial del *bulk*. Por otro lado, sabemos que la dualidad AdS/CFT es aplicable en particular para $N_c \gg \lambda_{\text{t Hooft}}^{1/2} \gg 1$, por lo que la variación de la función $\psi(r, \Omega)$ es pequeña, implicando que la dispersión de las cuerdas cerradas ocurra en algún lugar del *bulk* con coordenadas (r, Ω_5) , por lo que la amplitud de dispersión de la teoría de gauge puede obtenerse mediante una integración coherente sobre estas coordenadas transversas al $Minkowski_4$, a partir de la amplitud de dispersión en la teoría de cuerdas. Es decir, se propone:

$$\mathcal{A}_{\text{TCC}}^{4d}(p) = \int_{r_0}^{\infty} dr \int_{S^5} d\Omega_5 \sqrt{-g} \mathcal{A}_{\text{cuerdas}}^{10d}(\tilde{p}) \quad (6.6)$$

Este es el ansatz de Polchinski y Strassler [1]. La amplitud $\mathcal{A}_{\text{cuerdas}}^{10d}(\tilde{p})$ es la amplitud de dispersión del lado de la teoría de cuerdas en espacio plano de $Minkowski_{10}$, g es el determinante de la métrica del espacio $AdS_5 \times S^5$ y r_0 el *cut-off* definido anteriormente inducido por la escala Λ de la teoría de gauge. Se le llama *aproximación ultralocal*, cuando se considera que el proceso de dispersión del *bulk* está ocurriendo en un espacio plano, despreciando de ese modo, toda curvatura del espacio circundante, es decir, del AdS. Por ello se parte de una amplitud de dispersión de teoría de cuerdas en espacio plano de 10 dimensiones. Ésto es una consecuencia directa de estar en un régimen de acoplamiento fuerte, es decir, $\lambda_{\text{t Hooft}} \sim R/\sqrt{\alpha'} \gg 1$, por lo que el radio del AdS es mucho más grande que la longitud de la cuerda. Esto deja una descripción efectiva basada en una integración coherente sobre todas las posibles localizaciones (r, Ω_5) en el *bulk*. Para poder efectuar esta integral sobre $\mathcal{A}_{\text{cuerdas}}^{10d}(\tilde{p})$, debemos realizar las descomposiciones de Kaluza-Klein sobre el $AdS_5 \times S^5$. Usamos los resultados de la sección 4.5.1, donde la amplitud de cuatro dilatones en la teoría de supercuerdas del tipo II es de la forma:

$$\mathcal{A}_{\text{cuerdas}}^{10d,4\text{-dilatones}}(\tilde{p}) = -4\pi g_s^2 \alpha'^3 \frac{9(\alpha' \tilde{s})^4 (\cos(2\theta) + 7)^2}{16^2 1024} \prod_{\chi=\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}} \frac{\Gamma(-\alpha' \chi/4)}{\Gamma(1 + \alpha' \chi/4)} \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 \quad (6.7)$$

Veamos la forma explícita de las funciones de onda Φ_i 's. Estamos en el límite de altas energías para las amplitudes de dispersión, es decir en el UV de la teoría de gauge, por lo que, por la fórmula (6.3) notamos que necesitamos considerar grandes valores

para la coordenada radial r . Para grandes valores de r , la función de onda escalar (6.5) tiene el comportamiento asintótico:

$$\psi_{\Delta_i}(r, \Omega) \approx \frac{c_i}{R^4 \Lambda} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\Delta_i} Y_{\Delta_i}(\Omega), \quad (6.8)$$

siendo c_i una constante de normalización, $Y_{\Delta_i}(\Omega)$ un armónico esférico escalar sobre la S^5 , y Δ_i es la dimensión conforme del operador dual de la teoría de SYM [16], el cual crea el correspondiente estado de glueball $\mathcal{O}_k^{(8)}(x) \sim \text{Tr}_{\text{Adj}}(F_+^2 X_I^{k_i})(x)$, donde F_+ es la parte autodual del tensor $F_{\mu\nu}^a$ asociado al campo de gauge no abeliano A_μ^a del multiplete de gauge de $\mathcal{N} = 4$ SYM, y X_I es uno de los 6 campos escalares reales de dicho multiplete. Notar la relación $\Delta_i = k_i + 4$. Si el espín asociado a $\mathcal{O}_k^{(8)}(x)$ es cero, el twist de este operador $\tau_i = \Delta_i - s_i = \Delta_i$. Es decir, los glueballs son los estados duales de las excitaciones escalares representadas por cuerdas cerradas (dilatones) del *bulk*. Esta función de onda cumple con la condición de ortonormalización:

$$\int_{r_0}^{\infty} dr \int_{S^5} d\Omega_5 \sqrt{g_\perp} \frac{r^2}{R^2} \psi_{\Delta_i}^*(r, \Omega) \psi_{\Delta_j}(r, \Omega) = \delta_{\Delta_i \Delta_j} \quad (6.9)$$

con $\sqrt{g_\perp} = \frac{R^6}{r}$. La condición de ortonormalización para los armónicos esféricos escalares está dada por

$$\delta_{\Delta_i \Delta_j} = \int d\Omega_5 \sqrt{\hat{g}_{S^5}} Y_{\Delta_i}^*(\Omega) Y_{\Delta_j}(\Omega) \quad (6.10)$$

siendo la esfera de radio unitario $\sqrt{\hat{g}_{S^5}} = 1$ y $\sqrt{g_{S^5}} = R^5$, por lo que

$$R^4 \int_{r_0}^{\infty} dr r \frac{|c_i|^2}{R^8 \Lambda^2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2\Delta_i} = 1 \quad (6.11)$$

fijando la constante de normalización en el valor $|c_i| = \sqrt{2(\Delta_i - 1)}$. Por lo que la amplitud (6.6) queda como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^{4d} \text{ glueballs}(p) &= -144\pi \frac{(\cos(2\theta) + 7)^2}{16^2 1024} \frac{g_s^2 \alpha'^3}{R^6 r_0^{4-\Delta}} I_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4} \left(\prod_{i=1}^4 (\Delta_i - 1)^{1/2} \right) \times \\ &\int_{r_0}^{\infty} dr r^{3-\Delta} (\alpha' \tilde{s})^4 \prod_{\chi=\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}} \frac{\Gamma(-\alpha' \chi/4)}{\Gamma(1 + \alpha' \chi/4)} \end{aligned} \quad (6.12)$$

donde $\Delta = \sum_{i=1}^4 \Delta_i$. La integral angular para los cuatro armónicos esféricos escalares sobre la S^5 es

$$I_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4} = \int d\Omega_5 \sqrt{\hat{g}_{S^5}} Y_{\Delta_1}^*(\Omega) Y_{\Delta_2}(\Omega) Y_{\Delta_3}^*(\Omega) Y_{\Delta_4}(\Omega) \quad (6.13)$$

En primer lugar consideraremos la integral radial en la amplitud (6.12). Luego volveremos a la integral angular sobre la S^5 de la ecuación (6.13), la cual nos proveerá

ciertas reglas de selección. Es fácil ver que si la escala de energía en el *bulk* es del orden $\tilde{p} \sim 1/\sqrt{\alpha'}$, entonces la amplitud (6.12) estará dominada por el radio de dispersión $r_{\text{scat}} \sim R\sqrt{\alpha'}p \sim r_0\sqrt{\hat{\alpha}'}p$, siendo donde efectivamente la dispersión de las cuerdas cerradas ocurre. Para estudiar la integral radial en el límite de ángulo fijo, consideramos $\alpha'\tilde{s}/4 \gg 1$ (con $\alpha'|\tilde{t}|$ and $\alpha'|\tilde{u}| \gg 1$), siempre usando la relación cinemática $\tilde{s} + \tilde{t} + \tilde{u} = 0$. Podemos usar la representación asintótica de las funciones gamas de Euler para grandes valores de $|z|$, $\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z}(1 + 1/(12z) + \dots)$ [78], teniendo la siguiente aproximación,

$$\prod_{\chi=\tilde{s},\tilde{t},\tilde{u}} \frac{\Gamma(-\alpha'\chi/4)}{\Gamma(1 + \alpha'\chi/4)} = (-1)^{\alpha'\tilde{s}/2+1} \frac{128 e^2 \sin\left(\frac{\pi\alpha'\tilde{t}}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi\alpha'\tilde{u}}{4}\right) e^{-2\beta_{\tilde{s}\tilde{t}\tilde{u}}}}{\alpha'^3 \sin\left(\frac{\pi\alpha'\tilde{s}}{4}\right) \tilde{s}\tilde{t}\tilde{u}} \quad (6.14)$$

siendo e el número de Euler, y

$$\beta_{\tilde{s}\tilde{t}\tilde{u}} = \frac{\alpha'\tilde{s}}{4} \log\left(\frac{\alpha'\tilde{s}}{4}\right) + \frac{\alpha'\tilde{t}}{4} \log\left(\frac{\alpha'\tilde{t}}{4}\right) + \frac{\alpha'\tilde{u}}{4} \log\left(\frac{\alpha'\tilde{u}}{4}\right) \quad (6.15)$$

Usando las relaciones cinemáticas (5.14) tenemos

$$\beta_{\tilde{s}\tilde{t}\tilde{u}} = -\frac{\alpha'\tilde{s}}{4} \left(i\pi + \frac{(1 - \cos\theta)}{2} \log\left(\frac{1 - \cos\theta}{2}\right) + \frac{(1 + \cos\theta)}{2} \log\left(\frac{1 + \cos\theta}{2}\right) \right) \quad (6.16)$$

Considerando las relaciones entre las variables de Mandelstam en cuatro y diez dimensiones,

$$\tilde{s} = \frac{R^2}{r^2} s \quad (6.17)$$

la amplitud $\mathcal{A}_{4\text{-glueballs}}^{4d}(p)$ puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{4\text{-glueballs}}^{4d}(p) \approx & 72\pi \frac{(\cos(2\theta) + 7)^2}{16^2 \sin^2\theta} \frac{g_s^2 \alpha'^3 e^2}{R^6 r_0^{4-\Delta}} I_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4} \left(\prod_{i=1}^4 (\Delta_i - 1)^{1/2} \right) \times \\ & \int_{r_0}^{\infty} dr r^{3-\Delta} \left(\alpha' \frac{R^2 s}{r^2} \right) (-1)^{\frac{\alpha' R^2 s}{2r^2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi\alpha'\tilde{t}}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi\alpha'\tilde{u}}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\alpha'\tilde{s}}{4}\right)} e^{-2\beta_{\tilde{s}\tilde{t}\tilde{u}}} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Notar que también tenemos una función oscilatoria en el integrando,

$$(-1)^{\frac{\alpha' R^2 s}{2r^2}} \sin\left(\frac{\pi\alpha' R^2 s(1 - \cos\theta)}{8r^2}\right) \sin\left(\frac{\pi\alpha' R^2 s(1 + \cos\theta)}{8r^2}\right) \sin^{-1}\left(\frac{\pi\alpha' R^2 s}{4r^2}\right) \quad (6.19)$$

la cual contiene los ceros y polos de la amplitud de dispersión. Al integrar en la coordenada radial surge un factor que promedia la amplitud de dispersión para altas energías

[79]. Esta función para valores fijos en las variables s, t, u y para grandes valores de r depende solamente del ángulo de dispersión θ , por lo que no hay contribución en la potencia de las variables de Mandelstam. Sin embargo, este factor proporcionará la parte imaginaria de la amplitud de dispersión (6.21), la cual está relacionada con la sección eficaz total (6.26). Entonces nos concentramos en resolver la integral radial como se hizo en [79],

$$I_r = \int_{r_0}^{\infty} dr r^{3-\Delta} \left(\alpha' \frac{R^2 s}{r^2} \right) e^{-2\beta_{\tilde{s}\tilde{u}}} \quad (6.20)$$

Realizando la integral obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^{4d} \text{ glueballs}(p) &\approx 72e^2\pi \frac{(\cos(2\theta) + 7)^2}{16^2 \sin^2 \theta} \frac{g_s^2 \alpha'^3}{R^6} I_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4} \left(\prod_{i=1}^4 (\Delta_i - 1)^{1/2} \right) \times \\ &(-1)^{1-\Delta/2} 2^{\Delta-3} \left(\frac{\alpha'}{\Lambda^2 R^2} \right)^{2-\Delta/2} f(\theta)^{1-\Delta/2} s^{2-\Delta/2} \times \\ &\left\{ \Gamma\left(\frac{\Delta-2}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{\Delta-2}{2}, -\frac{\alpha' s}{4\Lambda^2 R^2} f(\theta)\right) \right\} \end{aligned} \quad (6.21)$$

donde las funciones gamas así como las funciones gamas de Euler incompletas provienen de la integral radial, y hemos definido

$$f(\theta) = 2\pi i + (1 + \cos \theta) \log[\cos^2(\theta/2)] + (1 - \cos \theta) \log[\sin^2(\theta/2)]. \quad (6.22)$$

Las funciones gamas incompletas pueden ser asintóticamente expandidas como sigue (ecuación (6.5.32) de [92])

$$\Gamma(a, z) \equiv \int_z^{\infty} dt t^{a-1} e^{-z} \approx z^{a-1} e^{-z} \left[1 + \frac{a-1}{z} + \frac{(a-1)(a-2)}{z^2} + \dots \right] \quad (6.23)$$

para $z \rightarrow \infty$ y $|\arg(z)| < 3\pi/2$. Notemos que para el límite de altas energías este término desaparece

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Gamma\left(\frac{\Delta-2}{2}, -\frac{\alpha' s}{4\Lambda^2 R^2} f(\theta)\right) = 0 \quad (6.24)$$

Luego, la amplitud de dispersión de 2 a 2 glueballs en el límite de altas energías es

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^{4d} \text{ glueballs}(p) &\approx \frac{9 e^2}{2\pi} \frac{(\cos(2\theta) + 7)^2}{16^2 \sin^2 \theta} \frac{(4\pi g_s N_c)^{\frac{\Delta-2}{4}}}{N_c^2} I_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4} \left(\prod_{i=1}^4 (\Delta_i - 1)^{1/2} \right) \times \\ &(-1)^{1-\Delta/2} 2^{\Delta-3} f(\theta)^{1-\Delta/2} \Gamma\left(\frac{\Delta-2}{2}\right) \left(\frac{s}{\Lambda^2}\right)^{2-\Delta/2}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

La sección eficaz total para este proceso exclusivo para grandes valores de s y ángulo de dispersión fijo es

$$\sigma_{\text{Total}} = \frac{1}{s} \text{Im} \mathcal{A}_{4 \text{ glueballs}}^{4d}(p) \propto \left(\frac{s}{\Lambda^2} \right)^{1-\Delta/2} \quad (6.26)$$

donde se ha omitido la dependencia angular. Éste resultado es fundamental porque muestra cómo el factor g_{00} de la métrica del AdS_5 a través de la relación entre p_μ y \tilde{p}_μ hace que la σ_{Total} del proceso dual de *Hard Scattering* en la teoría cuántica de campos tenga una dependencia en potencias de la energía de centro de masa como se espera en este tipo de teorías. Además dicha potencia depende del twist de los operadores que crean los estados, es decir, depende de $\tau = \Delta - s$, con $s = 0$ para el operador que crea el estado de glueball y donde $\Delta = \sum_{i=1}^4 \Delta_i$.

Se menciona en [27] de la posible presencia de un término multiplicativo a la potencia de s en $d\sigma/dt$ de la forma $\log(s/s_0)^2$, pero no determinable mediante data experimental, ni tampoco por análisis dimensional, como es mencionado en [26]. De la función $f(\theta)$ presente en (6.25) se puede ver que surge un término cuyo aporte a la sección eficaz diferencial de dispersión para cuatro glueballs es de la forma:

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim s^{2-\Delta} \cdot \log \left(\frac{4t}{\hat{\alpha}' \sqrt{\lambda_t \text{Hooft}} s^2} \right)^{2-\Delta} \quad (6.27)$$

Por lo que concluimos, que mediante este método de Polchinski-Strassler [1] se logra obtener un término logarítmico en el cociente de invariantes, obteniendo la potencia 2 en el logaritmo como se sugiere en [27]; y quizás una corrección a esa potencia de la forma $\log(s/s_0)^{2-n}$, como lo sugiere la ecuación (6.27) con la identificación $\Delta \equiv n$.

6.1.1. Integrales angulares en la S^5

En esta subsección nos concentraremos en el cálculo de las integrales angulares de los cuatro armónicos esféricos escalares sobre la S^5 (6.13), tarea que no ha sido llevada a cabo anteriormente en [1]. Los armónicos esféricos sobre la S^5 están etiquetados con cinco números enteros positivos $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)$, los cuales satisfacen $l_5 \geq l_4 \geq l_3 \geq l_2 \geq l_1 \geq 0$. Tomaremos $l_5 \equiv k$. La relación entre la dimensión conforme Δ y k para escalares es $\Delta = k + 4$ con $k \geq 0$. La construcción explícita de los armónicos esféricos se presenta en el apéndice F.

A modo de ilustración veamos algunos ejemplos de cálculo de estas integrales angulares. Primero que nada consideremos la representación irreducible de $SU(4)$ con $k = 0$. Esto deja a un solo armónico esférico¹³

$$Y_{(0,0,0,0,0)}^{(s)}(\Omega) = \pi^{-3/2} \quad (6.28)$$

¹³Usamos una notación en la cual hacemos explícitos a los enteros $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)$. Usamos el índice (s) para los armónicos esféricos escalares.

y el resultado de la integral (6.13) con cuatro $Y_{(0,0,0,0,0)}^{(s)}(\Omega)$'s es π^{-3} como se muestra en la tabla 6.1. Este caso del límite de altas energías describe la amplitud de dispersión de cuatro escalares en la representación irreducible $[0, 0, 0]$ del grupo $SU(4)_R$ de simetría R de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM $SU(N_c)$; es decir todas las dimensiones conformes son $\Delta_i = 4$, con $I_{4,4,4,4}$, y $\Delta = 16$.

Consideremos ahora el límite de altas energías para un proceso de dispersión 2 a 2 para escalares en la representación $[0, 1, 0]$ de $SU(4)_R$, con $\Delta_i = 5$. Tenemos ahora no uno, sino 6 posibles armónicos esféricos escalares sobre la S^5 , es decir: $Y_{(1,0,0,0,0)}^{(s)}(\Omega)$, $Y_{(1,1,0,0,0)}^{(s)}(\Omega)$, $Y_{(1,1,1,0,0)}^{(s)}(\Omega)$, $Y_{(1,1,1,1,0)}^{(s)}(\Omega)$ y $Y_{(1,1,1,1,-1)}^{(s)}(\Omega)$, por lo que habrán muchas combinaciones posibles para los armónicos esféricos escalares en esta representación. Tendremos 6 casos donde los cuatro escalares tienen el mismo set de los l_i 's, es decir:

$$I_1 = \int d\Omega_5 Y_{(1,0,0,0,0)}^{(s)*}(\Omega) Y_{(1,0,0,0,0)}^{(s)*}(\Omega) Y_{(1,0,0,0,0)}^{(s)}(\Omega) Y_{(1,0,0,0,0)}^{(s)}(\Omega) = \frac{9}{4\pi^3}, \quad (6.29)$$

$$I_2 = \int d\Omega_5 Y_{(1,1,0,0,0)}^{(s)*}(\Omega) Y_{(1,1,0,0,0)}^{(s)*}(\Omega) Y_{(1,1,0,0,0)}^{(s)}(\Omega) Y_{(1,1,0,0,0)}^{(s)}(\Omega) = \frac{9}{4\pi^3}, \quad (6.30)$$

$$I_3 = \int d\Omega_5 Y_{(1,1,1,0,0)}^{(s)*}(\Omega) Y_{(1,1,1,0,0)}^{(s)*}(\Omega) Y_{(1,1,1,0,0)}^{(s)}(\Omega) Y_{(1,1,1,0,0)}^{(s)}(\Omega) = \frac{9}{4\pi^3}, \quad (6.31)$$

$$I_4 = \int d\Omega_5 Y_{(1,1,1,1,0)}^{(s)*}(\Omega) Y_{(1,1,1,1,0)}^{(s)*}(\Omega) Y_{(1,1,1,1,0)}^{(s)}(\Omega) Y_{(1,1,1,1,0)}^{(s)}(\Omega) = \frac{9}{4\pi^3}, \quad (6.32)$$

$$I_5 = \int d\Omega_5 Y_{(1,1,1,1,1)}^{(s)*}(\Omega) Y_{(1,1,1,1,1)}^{(s)*}(\Omega) Y_{(1,1,1,1,1)}^{(s)}(\Omega) Y_{(1,1,1,1,1)}^{(s)}(\Omega) = \frac{3}{2\pi^3}, \quad (6.33)$$

$$I_6 = \int d\Omega_5 Y_{(1,1,1,1,-1)}^{(s)*}(\Omega) Y_{(1,1,1,1,-1)}^{(s)*}(\Omega) Y_{(1,1,1,1,-1)}^{(s)}(\Omega) Y_{(1,1,1,1,-1)}^{(s)}(\Omega) = \frac{3}{2\pi^3}. \quad (6.34)$$

Luego la amplitud de dispersión correspondiente estará dada por la expresión genérica:

$$\mathcal{A}_4^{4d} \text{ glueballs}(p) \propto I_i \left(\frac{\Lambda}{p} \right)^{16} \quad (6.35)$$

teniendo las integrales I_i 's con $i = 1, \dots, 6$ los resultados dados en las ecuaciones (6.29) a (6.34) respectivamente. La potencia 16 proviene de considerar $\Delta = 4 \times 5$ y de escribir s como p^2 .

Evidentemente hay muchas posibilidades para los estados intervinientes, ya sea que se encuentren en las mismas o distintas representaciones irreducibles de $SU(4)_R$ para éste proceso de dispersión 2 a 2.

La integral (6.13) provee reglas de selección para los estados permitidos en este proceso de dispersión. Damos algunos ejemplos mostrados en la tabla 6.1 para este tipo de integrales.

	$Y_{(0,0,0,0,0)}^{(s)} Y_{(0,0,0,0,0)}^{(s)}$	$Y_{(1,0,0,0,0)}^{(s)} Y_{(1,0,0,0,0)}^{(s)}$	$Y_{(1,1,0,0,0)}^{(s)} Y_{(1,1,0,0,0)}^{(s)}$
$Y_{(0,0,0,0,0)}^{(s)*} Y_{(0,0,0,0,0)}^{(s)*}$	$1/\pi^3$	$1/\pi^3$	$1/\pi^3$
$Y_{(1,0,0,0,0)}^{(s)*} Y_{(1,0,0,0,0)}^{(s)*}$	$1/\pi^3$	$9/(4\pi^3)$	$3/(4\pi^3)$
$Y_{(1,1,0,0,0)}^{(s)*} Y_{(1,1,0,0,0)}^{(s)*}$	$1/\pi^3$	$3/(4\pi^3)$	$9/(4\pi^3)$
$Y_{(1,1,1,0,0)}^{(s)*} Y_{(1,1,1,0,0)}^{(s)*}$	$1/\pi^3$	$3/(4\pi^3)$	$3/(4\pi^3)$
$Y_{(1,1,1,1,0)}^{(s)*} Y_{(1,1,1,1,0)}^{(s)*}$	$1/\pi^3$	$3/(4\pi^3)$	$3/(4\pi^3)$
$Y_{(1,1,1,1,1)}^{(s)*} Y_{(1,1,1,1,1)}^{(s)*}$	0	0	0
$Y_{(1,1,1,1,-1)}^{(s)*} Y_{(1,1,1,1,-1)}^{(s)*}$	0	0	0

Cuadro 6.1: Algunos ejemplos de la integral (6.13) para cuatro armónicos esféricos escalares sobre la S^5 , dejando como resultado reglas de selección.

6.1.2. Límite de Regge para proceso exclusivo de 4 glueballs

En esta sección abordaremos como el límite de Regge $\tilde{s} \gg |\tilde{t}|$ y $\tilde{s} \sim -\tilde{u}$ de las variables en 10 dimensiones afecta a la amplitud final de la teoría de gauge dual para el proceso de dispersión de 2 a 2 glueballs. De (5.15) tomamos $\theta \rightarrow 0$, entonces

$$K_c^{\text{Regge}}(1, 2, 3, 4) = \frac{9}{16^3} \tilde{s}^4 \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 \quad (6.36)$$

dando por resultado la amplitud de dispersión (5.17) para cuatro dilatones. Insertando esta amplitud en el ansatz con las funciones de onda (6.8) ya explícitas:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{4\text{-glueballs}}^{4d \text{ Regge}}(p) &= \frac{9}{16^2} \pi \frac{g_s^2 \alpha^3}{R^6 r_0^{4-\Delta}} I_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4} \left(\prod_{i=1}^4 (\Delta_i - 1)^{1/2} \right) \times \\ &\int_{r_0}^{\infty} dr r^{3-\Delta} (\alpha' \tilde{s})^4 \left(\frac{\alpha' \tilde{s}}{4} \right)^{-2+\alpha' \tilde{t}/2} e^{2-\alpha' \tilde{t}/2} \frac{\Gamma(-\alpha' \tilde{t}/4)}{\Gamma(1+\alpha' \tilde{t}/4)} \end{aligned} \quad (6.37)$$

En este límite tendremos $\tilde{t} \leq 0$, por lo que definimos $\tilde{t} = -|\tilde{t}|$. Para $|\tilde{t}| \ll 1$ el cociente de funciones gamas se aproxima a $1/|\tilde{t}|$. Entonces debemos resolver la integral radial:

$$I_r \approx \int_{r_0}^{\infty} dr r^{5-\Delta} \left(\frac{\alpha' R^2 s}{r^2} \right)^{2+\frac{1}{2}\alpha' R^2 t/r^2} (4e)^{2-\frac{1}{2}\alpha' R^2 t/r^2} \left(\frac{4}{\alpha' R^2 |\tilde{t}|} \right), \quad (6.38)$$

La cual resolveremos por el método de *saddle-point* o punto de ensilladura. Por conveniencia escribimos la integral como sigue

$$I_r \approx \int_{r_0}^{\infty} dr \exp[h(r)] \quad (6.39)$$

donde definimos

$$h(r) = \log \left(r^{5-\Delta} \left(\frac{\alpha' R^2 s}{r^2} \right)^{2+\frac{1}{2}\alpha' R^2 t/r^2} (4e)^{2-\frac{1}{2}\alpha' R^2 t/r^2} \left(\frac{4}{\alpha' R^2 |t|} \right) \right) \quad (6.40)$$

La condición de *saddle-point* $dh(r^*)/r = 0$ se cumple para el *saddle point* r^* ,

$$r^* = R\sqrt{\alpha'|t|} \sqrt{\frac{\log\left(\frac{s}{|t|}\right) + \log\left(\frac{\Delta-1}{4}\right)}{\Delta-1}} \quad (6.41)$$

El valor dominante para la coordenada radial será el que cumpla la condición:

$$r' = \max(\Lambda R^2, r^*) \quad (6.42)$$

obteniendo un comportamiento de Regge solo si se cumple la condición

$$\sqrt{\hat{\alpha}'|t|} \sqrt{\frac{\log\left(\frac{s}{|t|}\right) + \log\left(\frac{\Delta-1}{4}\right)}{\Delta-1}} < 1 \quad (6.43)$$

Luego la ecuación (6.37) es

$$\mathcal{A}_{4\text{-glueballs}}^{4d \text{ Regge}}(p) \approx \frac{36\sqrt{4\pi g_s N_c}}{16^2 \pi^{1/2} N_c^2} I_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4} \left(\prod_{i=1}^4 (\Delta_i - 1)^{1/2} \right) \times \frac{2^{\frac{1}{2}+\hat{\alpha}'|t|} e^{2+\frac{\hat{\alpha}'}{2}|t|} (\hat{\alpha}'s)^{2+\frac{\hat{\alpha}'}{2}t}}{\hat{\alpha}'|t| \sqrt{|\Delta-1 + \hat{\alpha}'|t|(3\log 4 - 2) - 3\hat{\alpha}'|t|\log(\hat{\alpha}'s)|}} \quad (6.44)$$

Si consideramos que $\hat{\alpha}'|t| \approx 1$, como lo sugieren los datos de QCD según [1], obtenemos

$$\mathcal{A}_{4\text{-glueballs}}^{4d \text{ Regge}}(p) \approx \frac{36 \cdot 2^{3/2} \sqrt{4\pi g_s N_c} e^{5/2}}{16^2 \pi^{1/2} N_c^2} I_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4} \left(\prod_{i=1}^4 (\Delta_i - 1)^{1/2} \right) \times \frac{(\hat{\alpha}'s)^{2+\frac{\hat{\alpha}'}{2}t}}{\sqrt{|\Delta-1 + (3\log 4 - 2) - 3\log(\hat{\alpha}'s)|}} \quad (6.45)$$

El factor $(\hat{\alpha}'s)^{2+\frac{\hat{\alpha}'}{2}t}$ se interpreta como la trayectoria de Regge $j(t) = 2 + \frac{\hat{\alpha}'t}{2} = 2 + \frac{t}{2\sqrt{\lambda}\Lambda^2}$ correspondiente a la Reggeización de un gravitón (desde el punto de vista de la teoría dual en 10d) propagándose entre los dos glueballs en el canal t .

Notemos que el resultado (6.45) es presentado por primera vez en forma completa. Si bien el resultado de la propagación de un gravitón Reggeizado ya había sido obtenido en [1], nosotros presentamos el resultado total, con todos los factores correspondientes. Se procedió de igual forma que en [79], pero ellos ignoran también los factores y además en este límite de Regge, no dan el resultado (6.45) aquí presentado, sino que dan un resultado erróneo para este límite.¹⁴

¹⁴En [79] se da un resultado erróneo en su fórmula (4.41), el cual es comparable con la fórmula (23) de [1].

6.2. Hard scattering de 4 fermiones de espín 1/2

Ésta es una de las secciones más importantes de esta tesis, ya que aquí se encontrarán los principales resultados originales de la misma. El cálculo de la amplitud de dispersión de cuatro dilatinos en teorías de supercuerdas de tipo II [3] fue instrumental para llevar a cabo el cálculo de la presente sección. Aquí se llevará a cabo el cálculo de la amplitud de dispersión de cuatro fermiones de espín 1/2 en la teoría dual de SYM, considerando primero el caso de dispersión a ángulo fijo, y luego para el límite de Regge.

Repasemos algunos puntos importantes de la sección 5.1.2. El punto de partida en [2] son las relaciones KLT [36]. Como se vió antes, el factor cinemático para la amplitud de dispersión de cuatro dilatinos

$$K_c^{4\text{-dilatinos}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) = K_{\text{ab}}^{\text{fer}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) \otimes \frac{1}{16} K_{\text{ab}}^{\text{bos}}(1, 2, 4, 3). \quad (6.46)$$

donde recordemos que $K_{\text{ab}}^{\text{bos}}(1, 2, 4, 3) \equiv K_{\text{ab}}^{\text{bos}}(k_1, k_2, k_4, k_3)$ está dado por (5.8) y el correspondiente factor cinemático de cuatro cuerdas abiertas fermiónicas (5.19). Recordamos la definición del dilatino [73]

$$u_i^\alpha \otimes \zeta_i^M = i(\Gamma^M)^\alpha_\beta \lambda_i^\beta \quad (6.47)$$

Por simplicidad tomamos algunos términos representativos del factor cinemático de cuatro dilatinos para calcular el comportamiento de altas energías para la amplitud de cuatro fermiones de espín 1/2 en la teoría de gauge dual. Estos términos proporcionarán un comportamiento dominante y subdominante en potencias de s . Consideremos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} K_c^{4\text{-dilatinos}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) &= \frac{\tilde{s}^2 \tilde{t}}{512} \bar{\lambda}_2 \Gamma^N \Gamma^P \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_P \Gamma_N \lambda_4 \\ &\quad - \frac{\tilde{s} \tilde{t}^2}{512} \bar{\lambda}_1 \Gamma^N \Gamma^P \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_P \Gamma_N \lambda_3 + \dots \end{aligned} \quad (6.48)$$

Procediendo con algunos cálculos algebraicos, obtenemos

$$\begin{aligned} K_c^{4\text{-dilatinos}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) &= \frac{\tilde{s}^2 \tilde{t}}{512} [15 \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^{N(\neq M \neq P)} \Gamma^{P(\neq M \neq N)} \Gamma^{M(\neq N \neq P)} \lambda_3 \\ &\quad \times \bar{\lambda}_1 \Gamma_{M(\neq N \neq P)} \Gamma_{P(\neq M \neq N)} \Gamma_{N(\neq M \neq P)} \lambda_4] \\ &\quad - \frac{\tilde{s} \tilde{t}^2}{512} [15 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \lambda_3 + \bar{\lambda}_1 \Gamma^{N(\neq M \neq P)} \Gamma^{P(\neq M \neq N)} \Gamma^{M(\neq N \neq P)} \lambda_2 \\ &\quad \times \bar{\lambda}_4 \Gamma_{M(\neq N \neq P)} \Gamma_{P(\neq M \neq N)} \Gamma_{N(\neq M \neq P)} \lambda_3] + \dots \end{aligned} \quad (6.49)$$

donde $N(\neq M \neq P)$ solamente significa que el índice de Lorentz en diez dimensiones N no puede ser igual a M ni a P . Si queremos calcular la amplitud de dispersión en

la teoría de gauge dual, debemos realizar la integración sobre la coordenada radial y sobre las coordenadas angulares, es decir, sobre las coordenadas del espacio producto $\text{AdS}_5 \times S^5$. Por conveniencia expresamos la métrica de AdS_5 como

$$ds^2 = R^2 \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2}{z^2} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + g_{zz} dz^2 = g_{ab} dx^a dx^b \quad (6.50)$$

donde $a, b, c = 0, \dots, 4$ están sobre el espacio AdS_5 . Por otro lado, la coordenada z $0 \leq z \leq z_0$, siendo z_0 el *cut-off* en el IR. Las relaciones entre las coordenadas en espacio plano y espacio curvo en cinco dimensiones son

$$\eta_{\hat{a}\hat{b}} e_{\hat{a}}^a e_{\hat{b}}^b = g_{ab}, \quad \text{con} \quad e_{\hat{a}}^a = \sqrt{g_{aa}} \delta_{\hat{a}}^a \quad \text{y} \quad e_{\hat{a}}^a = \frac{1}{\sqrt{g_{\hat{a}\hat{a}}}} \delta_{\hat{a}}^a \quad (6.51)$$

donde $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} = 0, 1, 2, 3, 4$ son los índices en espacio plano de cinco dimensiones. Para mayor simplicidad nos enfocamos solamente en el espacio AdS_5 . Entonces estudiamos términos de la siguiente forma, los cuales tienen coordenadas del tipo $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$,

$$\begin{aligned} K_c^{4\text{-dilatinos}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) &= \frac{\tilde{s}^2 \tilde{t}}{512} [15 \bar{\lambda}_2 \Gamma^{\hat{a}} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{\hat{a}} \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^{\hat{b}(\neq \hat{a} \neq \hat{c})} \Gamma^{\hat{c}(\neq \hat{a} \neq \hat{b})} \Gamma^{\hat{a}(\neq \hat{b} \neq \hat{c})} \lambda_3 \\ &\times \bar{\lambda}_1 \Gamma_{\hat{a}(\neq \hat{b} \neq \hat{c})} \Gamma_{\hat{c}(\neq \hat{a} \neq \hat{b})} \Gamma_{\hat{b}(\neq \hat{a} \neq \hat{c})} \lambda_4] \\ &- \frac{\tilde{s} \tilde{t}^2}{512} [15 \bar{\lambda}_1 \Gamma^{\hat{a}} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{\hat{a}} \lambda_3 + \bar{\lambda}_1 \Gamma^{\hat{b}(\neq \hat{a} \neq \hat{c})} \Gamma^{\hat{c}(\neq \hat{a} \neq \hat{b})} \Gamma^{\hat{a}(\neq \hat{b} \neq \hat{c})} \lambda_2 \\ &\times \bar{\lambda}_4 \Gamma_{\hat{a}(\neq \hat{b} \neq \hat{c})} \Gamma_{\hat{c}(\neq \hat{a} \neq \hat{b})} \Gamma_{\hat{b}(\neq \hat{a} \neq \hat{c})} \lambda_3] + \dots \end{aligned} \quad (6.52)$$

El próximo paso es volver al ansatz de Polchinski y Strassler (6.6) para el caso de cuatro dilatinos, obteniendo por lo tanto, la amplitud de dispersión $\mathcal{A}_{4\text{-fermiones espín-1/2}}^{4d}(p)$ (luego de haber reemplazado $r = R^2/z$). Para ello debemos considerar las funciones de onda de los dilatinos $\lambda_j(y, \Omega)$ en el fondo $\text{AdS}_5 \times S^5$. Nuestro factor cinemático en este espacio curvo será

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_c^{4\text{-dilatinos}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) &= \frac{\tilde{s}^2 \tilde{t}}{512} [15 \bar{\lambda}_2(y, \Omega) \tilde{\Gamma}^a \lambda_3(y, \Omega) \bar{\lambda}_1(y, \Omega) \tilde{\Gamma}_a \lambda_4(y, \Omega) \\ &+ \bar{\lambda}_2(y, \Omega) \tilde{\Gamma}^{b(\neq a \neq c)} \tilde{\Gamma}^{c(\neq a \neq b)} \tilde{\Gamma}^{a(\neq b \neq c)} \lambda_3(y, \Omega) \\ &\times \bar{\lambda}_1(y, \Omega) \tilde{\Gamma}_{a(\neq b \neq c)} \tilde{\Gamma}_{c(\neq a \neq b)} \tilde{\Gamma}_{b(\neq a \neq c)} \lambda_4(y, \Omega)] \\ &- \frac{\tilde{s} \tilde{t}^2}{512} [15 \bar{\lambda}_1(y, \Omega) \tilde{\Gamma}^a \lambda_2(y, \Omega) \bar{\lambda}_4(y, \Omega) \tilde{\Gamma}_a \lambda_3(y, \Omega) \\ &+ \bar{\lambda}_1(y, \Omega) \tilde{\Gamma}^{b(\neq a \neq c)} \tilde{\Gamma}^{c(\neq a \neq b)} \tilde{\Gamma}^{a(\neq b \neq c)} \lambda_2(y, \Omega) \bar{\lambda}_4(y, \Omega) \\ &\times \tilde{\Gamma}_{a(\neq b \neq c)} \tilde{\Gamma}_{c(\neq a \neq b)} \tilde{\Gamma}_{b(\neq a \neq c)} \lambda_3(y, \Omega)] + \dots \end{aligned} \quad (6.53)$$

es decir, $\widetilde{K}_c^{4\text{-dilatinos}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4})$ indica que esto es un ansatz usando la aproximación local, análogamente a como se hizo para los cuatro dilatones. Notar que $y = (r, x^\mu)$ y Ω_5

son las coordenadas en la S^5 . Las $\tilde{\Gamma}_a$'s son las matrices gamas de Dirac en el fondo $\text{AdS}_5 \times S^5$ en la siguiente representación [95]

$$\tilde{\Gamma}^a = \sigma^1 \otimes I_4 \otimes \tilde{\gamma}^a \quad (6.54)$$

donde $\tilde{\gamma}^a$ son las matrices de Dirac en AdS_5 . Las matrices gamas de Dirac en espacio plano cumplen

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho = \eta^{\mu\nu} \gamma^\rho + \eta^{\nu\rho} \gamma^\mu - \eta^{\mu\rho} \gamma^\nu - i\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} \gamma_\sigma \gamma^5 \quad (6.55)$$

con $\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} \epsilon_{\alpha\mu\nu\rho} = 6 \delta_\alpha^\sigma$ y donde $\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$.

Consideramos la siguiente representación,

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^\mu \\ -i\bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (6.56)$$

con la usual forma de las matrices de Pauli ya vistas anteriormente.

El veilbein relaciona las matrices de Dirac en espacio plano y curvo,

$$\tilde{\gamma}_a = e_{\hat{a}}^a \gamma_{\hat{a}} = \sqrt{g_{a\hat{a}}} \gamma_{\hat{a}} = \frac{R}{z} \gamma_{\hat{a}} \quad (6.57)$$

y

$$\tilde{\gamma}^a = e_{\hat{a}}^a \gamma^{\hat{a}} = \frac{1}{\sqrt{g^{\hat{a}\hat{a}}}} \gamma^{\hat{a}} = \frac{z}{R} \gamma^{\hat{a}} \quad (6.58)$$

El dilatino es un espinor en diez dimensiones con quiralidad derecha, por lo que tiene 16 componentes no nulas y entonces lo podemos escribir como

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda' \end{pmatrix} \quad (6.59)$$

bajo una descomposición de Kaluza-Klein en $\text{AdS}_5 \times S^5$ tenemos

$$\lambda'_i(y, \Omega) = \lambda_i(y) \otimes Y_i(\Omega) \quad (6.60)$$

donde $\lambda_i(y)$ es un espinor de cuatro componentes en el AdS_5 y $Y_i(\Omega)$ es un armónico esférico espinorial en la S^5 . Luego, el factor cinemático para cuatro dilatinos en espacio curvo es:

$$\begin{aligned} & \widetilde{K}_c^{4\text{-dilatinos}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) = \\ & \frac{\tilde{s}^2 \tilde{t}}{512} [15 \overline{\lambda_2(y) \otimes Y_2(\Omega)} (I_4 \otimes \tilde{\gamma}^a) \lambda_3(y) \otimes Y_3(\Omega) \overline{\lambda_1(y) \otimes Y_1(\Omega)} (I_4 \otimes \tilde{\gamma}_a) \lambda_4(y) \otimes Y_4(\Omega) \\ & + \overline{\lambda_2(y) \otimes Y_2(\Omega)} (I_4 \otimes \tilde{\gamma}^{b(\neq a \neq c)}) (I_4 \otimes \tilde{\gamma}^{c(\neq a \neq b)}) (I_4 \otimes \tilde{\gamma}^{a(\neq b \neq c)}) \lambda_3(y) \otimes Y_3(\Omega) \\ & \times \overline{\lambda_1(y) \otimes Y_1(\Omega)} (I_4 \otimes \tilde{\gamma}_{a(\neq b \neq c)}) (I_4 \otimes \tilde{\gamma}_{c(\neq a \neq b)}) (I_4 \otimes \tilde{\gamma}_{b(\neq a \neq c)}) \lambda_4(y) \otimes Y_4(\Omega)] \\ & - \frac{\tilde{s} \tilde{t}^2}{512} [15 \overline{\lambda_1(y) \otimes Y_1(\Omega)} (I_4 \otimes \tilde{\gamma}^a) \lambda_2(y) \otimes Y_2(\Omega) \overline{\lambda_4(y) \otimes Y_4(\Omega)} (I_4 \otimes \tilde{\gamma}_a) \lambda_3(y) \otimes Y_3(\Omega) \\ & + \overline{\lambda_1(y) \otimes Y_1(\Omega)} (I_4 \otimes \tilde{\gamma}^{b(\neq a \neq c)}) (I_4 \otimes \tilde{\gamma}^{c(\neq a \neq b)}) (I_4 \otimes \tilde{\gamma}^{a(\neq b \neq c)}) \lambda_2(y) \otimes Y_2(\Omega) \\ & \times \overline{\lambda_4(y) \otimes Y_4(\Omega)} (I_4 \otimes \tilde{\gamma}_{a(\neq b \neq c)}) (I_4 \otimes \tilde{\gamma}_{c(\neq a \neq b)}) (I_4 \otimes \tilde{\gamma}_{b(\neq a \neq c)}) \lambda_3(y) \otimes Y_3(\Omega)] + \dots \end{aligned} \quad (6.61)$$

Debido a que nos interesa solamente el comportamiento en las potencias de s para altas energías en la amplitud de dispersión en cuatro dimensiones, podemos no considerar el producto de los cuatro armónicos esféricos espinoriales presentes en cada término de la expresión anterior, lo cual permite reducir bastante la expresión (6.61)¹⁵:

$$\begin{aligned}
& \widetilde{K}_c^{4\text{-dilatino}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) \approx \\
& \frac{\tilde{s}^2 \tilde{t}}{512} [15 \bar{\lambda}_2(y) \tilde{\gamma}^a \lambda_3(y) \bar{\lambda}_1(y) \tilde{\gamma}_a \lambda_4(y) \\
& + \bar{\lambda}_2(y) (\tilde{\gamma}^{b(\neq a \neq c)}) (\tilde{\gamma}^{c(\neq a \neq b)}) (\tilde{\gamma}^{a(\neq b \neq c)}) \lambda_3(y) \bar{\lambda}_1(y) (\tilde{\gamma}_{a(\neq b \neq c)}) (\tilde{\gamma}_{c(\neq a \neq b)}) (\tilde{\gamma}_{b(\neq a \neq c)}) \lambda_4(y)] \\
& - \frac{\tilde{s} \tilde{t}^2}{512} [15 \bar{\lambda}_1(y) \tilde{\gamma}^a \lambda_2(y) \bar{\lambda}_4(y) \tilde{\gamma}_a \lambda_3(y) + \bar{\lambda}_1(y) (\tilde{\gamma}^{b(\neq a \neq c)}) (\tilde{\gamma}^{c(\neq a \neq b)}) (\tilde{\gamma}^{a(\neq b \neq c)}) \lambda_2(y) \\
& \times \bar{\lambda}_4(y) (\tilde{\gamma}_{a(\neq b \neq c)}) (\tilde{\gamma}_{c(\neq a \neq b)}) (\tilde{\gamma}_{b(\neq a \neq c)}) \lambda_3(y)] + \dots \tag{6.62}
\end{aligned}$$

Se puede ver fácilmente que las matrices gamas en espacio plano y espacio curvo dejan al mismo factor cinemático para cuatro fermiones, debido a la cancelación entre los factores que surgen de los vielbien. Usando las propiedades (6.55), la amplitud de dispersión en diez dimensiones para cuatro dilatino en espacio curvo es

$$\begin{aligned}
& \widetilde{\mathcal{A}}_{\text{cuerdas (curvo)} }^{10d,4\text{-dilatino}}(\tilde{p}) \approx -\pi \kappa^2 \alpha'^3 \widetilde{K}_c^{4\text{-dilatino}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) \prod_{\chi=\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}} \frac{\Gamma(-\alpha' \chi/4)}{\Gamma(1 + \alpha' \chi/4)} \\
& = \frac{\pi g_s^2 \alpha'^4 (\alpha' \tilde{s})^3 (1 - \cos \theta)}{256} \{ [15 \bar{\lambda}_2(y) \gamma^\mu \lambda_3(y) \bar{\lambda}_1(y) \gamma_\mu \lambda_4(y) \\
& + 15 \bar{\lambda}_2(y) \gamma^5 \lambda_3(y) \bar{\lambda}_1(y) \gamma^5 \lambda_4(y) + 6 \bar{\lambda}_2(y) \gamma_\sigma \gamma^5 \lambda_3(y) \bar{\lambda}_1(y) \gamma^\sigma \gamma^5 \lambda_4(y) \\
& + \bar{\lambda}_2(y) (\gamma^{\nu(\neq \rho)}) (\gamma^{\rho(\neq z \neq \nu)}) \gamma^z \lambda_3(y) \bar{\lambda}_1(y) \gamma^5 (\gamma_{\rho(\neq \nu)}) (\gamma_{\nu(\neq \rho)}) \lambda_4(y) \\
& + \bar{\lambda}_2(y) \gamma^5 (\gamma^{\rho(\neq \mu)}) (\gamma^{\mu(\neq \rho)}) \lambda_3(y) \bar{\lambda}_1(y) (\gamma_{\mu(\neq \rho)}) (\gamma_{\rho(\neq \mu)}) \gamma^5 \lambda_4(y) \\
& + \bar{\lambda}_2(y) (\gamma^{\nu(\neq \mu)}) \gamma^5 (\gamma^{\mu(\neq \nu)}) \lambda_3(y) \bar{\lambda}_1(y) (\gamma_{\mu(\neq \nu)}) \gamma^5 (\gamma_{\nu(\neq \mu)}) \lambda_4(y)] \\
& + \frac{(1 - \cos \theta)}{2} [15 \bar{\lambda}_1(y) \gamma^\mu \lambda_2(y) \bar{\lambda}_4(y) \gamma_\mu \lambda_3(y) + 15 \bar{\lambda}_1(y) \gamma^5 \lambda_2(y) \bar{\lambda}_4(y) \gamma^5 \lambda_3(y) \\
& + 6 \bar{\lambda}_1(y) \gamma_\sigma \gamma^5 \lambda_2(y) \bar{\lambda}_4(y) \gamma^\sigma \gamma^5 \lambda_3(y) \\
& + \bar{\lambda}_1(y) (\gamma^{\nu(\neq \rho)}) (\gamma^{\rho(\neq \nu)}) \gamma^5 \lambda_2(y) \bar{\lambda}_4(y) \gamma^5 (\gamma_{\rho(\neq \nu)}) (\gamma_{\nu(\neq \rho)}) \lambda_3(y) \\
& + \bar{\lambda}_1(y) \gamma^5 (\gamma^{\rho(\neq \mu)}) (\gamma^{\mu(\neq \rho)}) \lambda_2(y) \bar{\lambda}_4(y) (\gamma_{\mu(\neq \rho)}) (\gamma_{\rho(\neq \mu)}) \gamma^5 \lambda_3(y) \\
& + \bar{\lambda}_1(y) (\gamma^{\nu(\neq \mu)}) \gamma^5 (\gamma^{\mu(\neq \nu)}) \lambda_2(y) \bar{\lambda}_4(y) (\gamma_{\mu(\neq \nu)}) \gamma^5 (\gamma_{\nu(\neq \mu)}) \lambda_3(y)] + \dots \} \\
& \times \prod_{\chi=\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}} \frac{\Gamma(-\alpha' \chi/4)}{\Gamma(1 + \alpha' \chi/4)} \tag{6.63}
\end{aligned}$$

Donde usamos $\gamma^z \equiv \gamma^5$. El ansatz (6.6) para este caso queda como

$$\mathcal{A}_{4\text{-fermiones}}^{4d}(p) = \int_{r_0}^{\infty} dr \int_{S^5} d\Omega_5 \sqrt{-g} \widetilde{\mathcal{A}}_{\text{cuerdas (curvo)} }^{10d,4\text{-dilatino}}(\tilde{p}) \tag{6.64}$$

¹⁵El lector interesado puede ver sobre la construcción y el uso de armónicos esféricos espinoriales sobre S^5 en [34, 35, 97, 98]

Como se hizo para el caso de los glueballs, si estamos interesados en el comportamiento de altas energías para la teoría de gauge dual, será suficiente considerar el comportamiento asintótico de la función de onda del dilatino. La solución general de un dilatino de 16 componentes tiene la forma (6.60), donde el dilatino $\lambda_i(y)$ de cuatro componentes cumple la ecuación de Dirac en AdS_5

$$(z\gamma^m\partial_m - 2\gamma^5 + m_k)\lambda_i(y) = 0 \quad (6.65)$$

donde $m_k = k + \frac{3}{2}$, y el cual tiene la siguiente solución genérica

$$\lambda_i(y) = Ce^{iP\cdot x} z^{5/2} [a^+(P)J_{mR-1/2}(Mz) + a^-(P)J_{mR+1/2}(Mz)] \quad (6.66)$$

De los espinores de Dirac en cinco dimensiones a_\pm podemos construir los espinores de Dirac en cuatro dimensiones u_σ que cumplen la ecuación de Dirac $i\gamma^\mu P_\mu u_\sigma = Mu_\sigma$ y la relación de dispersión $P^2 = -M^2$. También tenemos los proyectores usuales $P_\pm = \frac{(1\pm\gamma^5)}{2}$. Actuando con P_+ ambos lados de $i\gamma^\mu P_\mu u_\sigma = Mu_\sigma$ tenemos

$$a_+ = \frac{i\gamma^\mu P_\mu}{M} a_- \quad (6.67)$$

La solución (6.66) se puede reescribir como

$$\lambda_i(y) = Ce^{iP\cdot x} z^{5/2} [P_+ J_{mR-1/2}(Mz) + P_- J_{mR+1/2}(Mz)] u_\sigma \quad (6.68)$$

Al estar interesados en el comportamiento de altas energías para la amplitud de dispersión, debemos tomar grandes valores de la coordenada radial r , ya que recordemos que $r = R^2/z$ y $p \sim \sqrt{s} \sim \frac{r}{R^2}$ debe ser grande.

Analizando el argumento de las funciones Bessel $J(Mz) = J(M\frac{R^2}{r}) \sim J(\frac{M}{\sqrt{s}})$, tenemos que para valores pequeños de su argumento:

$$J_{mR-1/2}(Mz) = \frac{(Mz)^{mR-1/2}}{2^{mR-1/2}(mR-1/2)!} \quad (6.69)$$

y de igual forma para $J_{m+1/2}(Mz)$. Luego (6.68) expresada en términos de la coordenada r :

$$\lambda_i^\sigma(y) \approx e^{iP\cdot x} \frac{c_i}{R^{9/2}\Lambda^{3/2}(\Delta_i - 5/2)!} (r/r_0)^{-\Delta_i} \left[P_+ + \frac{M_i R^2}{2r(\Delta_i - 3/2)} P_- \right] u_i^\sigma \quad (6.70)$$

y

$$\bar{\lambda}_i^\sigma(y) \approx e^{-iP\cdot x} \frac{c_i^*}{R^{9/2}\Lambda^{3/2}(\Delta_i - 5/2)!} (r/r_0)^{-\Delta_i} \bar{u}_i^\sigma \left[P_- + \frac{M_i R^2}{2r(\Delta_i - 3/2)} P_+ \right] \quad (6.71)$$

Recordemos que los espinores $\lambda_i^\sigma(y)$ surgen luego de una compactificación de Kaluza-Klein de los espinores de Majorana-Weyl de 32 componentes después de la compactificación espontánea de supergravedad de tipo IIB en el fondo $\text{AdS}_5 \times S^5$. Como en el

caso de los glueballs, los cuales son duales a los operadores $\mathcal{O}_k^{(8)}(x)$ de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM; los dilatinos son duales a los operadores $\mathcal{O}_k^{(6)}(x) \sim Tr_{\text{Adj}}(F_+ \lambda X_I^k)$, donde λ son los espinores de Weyl izquierdos de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM. El twist τ de tales operadores están definido como $\tau = \Delta - 1/2 = mR + 3/2$, con $\Delta = k + 7/2$. La constante de normalización c_i se obtiene con la condición (6.9),

$$c_i = \sqrt{2\Lambda R(\Delta_i - 1)} (\Delta_i - 5/2)! \quad (6.72)$$

Hasta el momento la amplitud de dispersión de cuatro fermiones de espín 1/2 (6.64) va como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{4\text{-fermiones}}^{4d}(p) &\approx - \left(\frac{128e^2}{\alpha'^3} \right) \frac{\pi g_s^2 R^2 \alpha'^4 (1 - \cos \theta)}{256} \\ &\times \int_{r_0}^{\infty} dr r^3 (-1)^{\alpha' \tilde{s}/2} (\alpha' \tilde{s})^3 \{ [15 \bar{\lambda}_2(y) \gamma^\mu \lambda_3(y) \bar{\lambda}_1(y) \gamma_\mu \lambda_4(y) \\ &+ 15 \bar{\lambda}_2(y) \gamma^5 \lambda_3(y) \bar{\lambda}_1(y) \gamma^5 \lambda_4(y) + 6 \bar{\lambda}_2(y) \gamma_\sigma \gamma^5 \lambda_3(y) \bar{\lambda}_1(y) \gamma^\sigma \gamma^5 \lambda_4(y) \\ &+ \bar{\lambda}_2(y) \gamma^{\nu(\neq \rho)} \gamma^{\rho(\neq z \neq \nu)} \gamma^z \lambda_3(y) \bar{\lambda}_1(y) \gamma^5 \gamma_{\rho(\neq \nu)} \gamma_{\nu(\neq \rho)} \lambda_4(y) \\ &+ \bar{\lambda}_2(y) \gamma^5 \gamma^{\rho(\neq \mu)} \gamma^{\mu(\neq \rho)} \lambda_3(y) \bar{\lambda}_1(y) \gamma_{\mu(\neq \rho)} \gamma_{\rho(\neq \mu)} \gamma^5 \lambda_4(y) \\ &+ \bar{\lambda}_2(y) \gamma^{\nu(\neq \mu)} \gamma^5 \gamma^{\mu(\neq \nu)} \lambda_3(y) \bar{\lambda}_1(y) \gamma_{\mu(\neq \nu)} \gamma^5 \gamma_{\nu(\neq \mu)} \lambda_4(y)] \\ &+ \frac{(1 - \cos \theta)}{2} [15 \bar{\lambda}_1(y) \gamma^\mu \lambda_2(y) \bar{\lambda}_4(y) \gamma_\mu \lambda_3(y) + 15 \bar{\lambda}_1(y) \gamma^5 \lambda_2(y) \bar{\lambda}_4(y) \gamma^5 \lambda_3(y) \\ &+ 6 \bar{\lambda}_1(y) \gamma_\sigma \gamma^5 \lambda_2(y) \bar{\lambda}_4(y) \gamma^\sigma \gamma^5 \lambda_3(y) \\ &+ \bar{\lambda}_1(y) \gamma^{\nu(\neq \rho)} \gamma^{\rho(\neq \nu)} \gamma^5 \lambda_2(y) \bar{\lambda}_4(y) \gamma^5 \gamma_{\rho(\neq \nu)} \gamma_{\nu(\neq \rho)} \lambda_3(y) \\ &+ \bar{\lambda}_1(y) \gamma^5 \gamma^{\rho(\neq \mu)} \gamma^{\mu(\neq \rho)} \lambda_2(y) \bar{\lambda}_4(y) \gamma_{\mu(\neq \rho)} \gamma_{\rho(\neq \mu)} \gamma^5 \lambda_3(y) \\ &+ \bar{\lambda}_1(y) \gamma^{\nu(\neq \mu)} \gamma^5 \gamma^{\mu(\neq \nu)} \lambda_2(y) \bar{\lambda}_4(y) \gamma_{\mu(\neq \nu)} \gamma^5 \gamma_{\nu(\neq \mu)} \lambda_3(y)] + \dots \} \\ &\times \frac{\sin\left(\frac{\pi \alpha' \tilde{t}}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi \alpha' \tilde{u}}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi \alpha' \tilde{s}}{4}\right)} \frac{(\alpha' \tilde{s}/4)^{-\alpha' \tilde{s}/2} (\alpha' \tilde{t}/4)^{\alpha' \tilde{t}/2} (\alpha' \tilde{u}/4)^{\alpha' \tilde{u}/2}}{\tilde{s}^3 \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{4}} \end{aligned} \quad (6.73)$$

donde se usó la aproximación (6.14) para el producto de las funciones gamas. Ahora necesitamos la forma explícita de las funciones de onda fermiónicas en AdS_5 , las cuales están en función de los espinores de Dirac en cuatro dimensiones planas $u_i(p)$ dados por [93]:

$$u(p) = \begin{pmatrix} u_L^s(p) \\ u_R^s(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \zeta^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \zeta^s \end{pmatrix} \quad (6.74)$$

con $s = 1, 2$. Notemos que en (6.73) los términos con solo γ^5 desaparecen. Ya que estamos interesados en el comportamiento de altas energías, solo trabajaremos con el primer término de (6.73) sin pérdida de generalidad para las potencias en la variable s .

Trabajando el primer término tenemos

$$\begin{aligned}
& 15\bar{\lambda}_2(y)\gamma^\mu\lambda_3(y)\bar{\lambda}_1(y)\gamma_\mu\lambda_4(y) = -15\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\Delta}\frac{\Lambda^2R^2(\Delta/2-2)^2}{R^{18}\Lambda^6} \\
& \times [u_{2,R}^\dagger\sigma^\mu u_{3,R}u_{1,R}^\dagger\sigma_\mu u_{4,R} + \frac{M^2R^4}{4r^2(\Delta_i-3/2)^2}u_{2,L}^\dagger\bar{\sigma}^\mu u_{3,L}u_{1,R}^\dagger\sigma_\mu u_{4,R} \\
& + \frac{M^2R^4}{4r^2(\Delta_i-3/2)^2}u_{2,R}^\dagger\sigma^\mu u_{3,R}u_{1,L}^\dagger\bar{\sigma}_\mu u_{4,L} + \frac{M^4R^8}{16r^4(\Delta_i-3/2)^4}u_{2,L}^\dagger\bar{\sigma}^\mu u_{3,L}u_{1,L}^\dagger\bar{\sigma}_\mu u_{4,L}]
\end{aligned} \tag{6.75}$$

donde $\Delta = 4\Delta_i$, al considerar cuatro fermiones idénticos. Tomando un sistema de referencia de centro de masa, los cuadrimentos de cada uno de los fermiones de la teoría de gauge dual son

$$\begin{aligned}
p_1^\mu &= \left(\frac{\sqrt{s}}{2}, \sqrt{\frac{s}{4}-M^2}, 0, 0\right), \\
p_2^\mu &= \left(\frac{\sqrt{s}}{2}, -\sqrt{\frac{s}{4}-M^2}, 0, 0\right), \\
p_3^\mu &= \left(-\frac{\sqrt{s}}{2}, \sqrt{\frac{s}{4}-M^2}\cos\theta, \sqrt{\frac{s}{4}-M^2}\sin\theta, 0\right), \\
p_4^\mu &= \left(-\frac{\sqrt{s}}{2}, -\sqrt{\frac{s}{4}-M^2}\cos\theta, -\sqrt{\frac{s}{4}-M^2}\sin\theta, 0\right).
\end{aligned} \tag{6.76}$$

siendo s la variable de Mandelstam en cuatro dimensiones. Usando esta cinemática, la raíces cuadradas en los momentos de los espinores (6.74) quedan como

$$\begin{aligned}
\sqrt{p_1 \cdot \sigma} &= \sqrt{p_2 \cdot \bar{\sigma}} = \left(\frac{1}{\sqrt{s+2M}}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{s}}{2} + M & \sqrt{\frac{s}{4}-M^2} \\ \sqrt{\frac{s}{4}-M^2} & -\frac{\sqrt{s}}{2} + M \end{pmatrix}, \\
\sqrt{p_2 \cdot \sigma} &= \sqrt{p_1 \cdot \bar{\sigma}} = \left(\frac{1}{\sqrt{s+2M}}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{s}}{2} + M & -\sqrt{\frac{s}{4}-M^2} \\ -\sqrt{\frac{s}{4}-M^2} & -\frac{\sqrt{s}}{2} + M \end{pmatrix}, \\
\sqrt{p_3 \cdot \sigma} &= \sqrt{p_4 \cdot \bar{\sigma}} = \left(\frac{1}{-\sqrt{s+2M}}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{s}}{2} + M & \sqrt{\frac{s}{4}-M^2}e^{-i\theta} \\ \sqrt{\frac{s}{4}-M^2}e^{i\theta} & \frac{\sqrt{s}}{2} + M \end{pmatrix}, \\
\sqrt{p_4 \cdot \sigma} &= \sqrt{p_3 \cdot \bar{\sigma}} = \left(\frac{1}{-\sqrt{s+2M}}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{s}}{2} + M & -\sqrt{\frac{s}{4}-M^2}e^{-i\theta} \\ -\sqrt{\frac{s}{4}-M^2}e^{i\theta} & \frac{\sqrt{s}}{2} + M \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.77}$$

Por simplicidad consideramos solamente una de las polarizaciones,

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.78}$$

Luego el término (6.75) está dado por

$$\begin{aligned}
15\bar{\lambda}_2(y)\gamma^\mu\lambda_3(y)\bar{\lambda}_1(y)\gamma_\mu\lambda_4(y) &= -30\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\Delta}\frac{\Lambda^2R^2(\Delta/2-2)^2}{R^{18}\Lambda^6} \\
\times (s-4M^2)\left(e^{2i\theta}+\frac{1}{8}e^{i\theta}+1\right) &\left(1+\frac{M^2R^4}{2r^2(\Delta_i-3/2)^2}+\frac{M^4R^8}{16r^4(\Delta_i-3/2)^4}\right)
\end{aligned} \tag{6.79}$$

Este término contribuye en tres integrales radiales distintas a la amplitud de dispersión,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{4\text{-fermiones}}^{4d}(p) &\approx \frac{60e^2\pi g_s^2\alpha^4(1-\cos\theta)}{R^{14-2\Delta}\Lambda^{4-\Delta}\sin^2\theta}(\Delta/2-2)^2(s-4M^2) \\
&\times \left(e^{2i\theta}+\frac{1}{8}e^{i\theta}+1\right)\int_{r_0}^{\infty}dr\left(r^{3-\Delta}+r^{1-\Delta}\frac{M^2R^4}{2(\Delta/4-3/2)^2}\right. \\
&\left.+r^{-1-\Delta}\frac{M^4R^8}{16(\Delta/4-3/2)^4}\right)e^{-2\beta_{s\tilde{t}\tilde{u}}}
\end{aligned} \tag{6.80}$$

como se procedió en el caso de los glueballs, aquí también no tendremos en cuenta el factor oscilatorio en las variables de Mandelstam, ya que este no modificará las potencias de s en la amplitud. La función $\beta_{s\tilde{t}\tilde{u}}$ ya fue definida en (6.16). Como se hizo antes para los glueballs, cambiamos la variable de integración a $u = r/r_0$, teniendo siempre en cuenta que $\tilde{s} = (R^2/r^2)s$. Al integrar obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{4\text{-fermiones}}^{4d}(p) &\approx \frac{60e^2\pi\alpha'(g_s N_c)^{1/2}(1-\cos\theta)}{N_c^2\sin^2\theta}(\Delta/2-2)^2\left(e^{2i\theta}+\frac{1}{8}e^{i\theta}+1\right)\times \\
&\left(2^{\Delta-5}(s^{2-\tau/2}-4M^2s^{1-\tau/2})\left(-\frac{\Lambda^2R^2}{\alpha'f(\theta)}\right)^{\Delta/2-2}\left[\Gamma\left(\frac{\Delta-4}{2}\right)-\Gamma\left(\frac{\Delta-4}{2},-\frac{\alpha'sf(\theta)}{4\Lambda^2R^2}\right)\right]\right. \\
&+\frac{2^{\Delta-3}(s^{1-\tau/2}-4M^2s^{-\tau/2})}{2(\Delta/4-3/2)^2}\left(-\frac{\Lambda^2R^2}{\alpha'f(\theta)}\right)^{\Delta/2-1}\left[\Gamma\left(\frac{\Delta-2}{2}\right)-\Gamma\left(\frac{\Delta-2}{2},-\frac{\alpha'sf(\theta)}{4\Lambda^2R^2}\right)\right] \\
&+\left.\frac{2^{\Delta-1}(s^{-\tau/2}-4M^2s^{-1-\tau/2})}{16(\Delta/4-3/2)^4}\left(-\frac{\Lambda^2R^2}{\alpha'f(\theta)}\right)^{\Delta/2}\left[\Gamma\left(\frac{\Delta}{2}\right)-\Gamma\left(\frac{\Delta}{2},-\frac{\alpha'sf(\theta)}{4\Lambda^2R^2}\right)\right]\right)
\end{aligned} \tag{6.81}$$

con el twist total $\tau = \sum_{i=1}^4\tau_i = \sum_{i=1}^4(\Delta_i - s_i) = \Delta - 4 \times 1/2 = \Delta - 2 \rightarrow \Delta = \tau + 2$. Como se anticipó, en la amplitud de dispersión recién obtenida tenemos un término dominante que va como $(\alpha's)^{2-\tau/2}$, y un término subdominante que va como $(\alpha's)^{1-\tau/2}$. Tomando un rango paramétrico que sea $\Lambda \approx M \approx 1$ GeV y para grandes valores de s , concluimos que la sección eficaz total para un proceso exclusivo de cuatro fermiones de espín 1/2 para s muy grande y ángulo de dispersión fijo dada por

$$\sigma_{\text{Total}} = \frac{1}{s} \text{Im}\mathcal{A}_{4\text{-fermiones}}^{4d}(p) \tag{6.82}$$

la cual presenta una contribución dominante que va como $(s/\Lambda^2)^{2-\tau/2}$, siendo τ el número mínimo de campos elementales que llevan una fracción del impulso total del proceso exclusivo. Como se explicará en el capítulo 7, la contribución dominante $s^{2-\tau/2}$ indica la interacción de un solo par de constituyentes ($L = 1$) presentes cada uno en cada fermión $_{1/2}$. Notar que la ecuación (6.81) contiene además contribuciones subdominantes, a saber, $s^{1-\tau/2}$ y $\Lambda^2 s^{-\tau/2}$, las cuales son obtenibles a partir del estudio del cálculo puntual en el límite de acoplamiento fuerte de la teoría de gauge y no son derivables a partir de cálculos perturbativos de la teoría cuántica de campos, es decir, la capacidad de correcciones subdominantes son efectos nuevos que podemos obtener. Podemos atribuir las correcciones subdominantes a un resultado que no se puede obtener a partir de un conteo de potencias *naive* sobre las interacciones de la teoría de gauge [25, 26]. Por otro lado, para el caso de partículas escalares, es decir, en la dispersión de cuatro glueballs, vemos que en (6.25) solo aparece el término $s^{2-\Delta/2}$, el cual es el comportamiento completamente análogo al esperado desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos.

Al igual que en la dispersión de cuatro glueballs, aquí también tenemos no una (como lo fué para los glueballs), sino tres potencias distintas de $f(\theta)$ en (6.81). A orden dominante tenemos

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim s^{2-\tau} \cdot \log \left(\frac{4t}{\hat{\alpha}' \sqrt{\lambda'_{\text{t Hooft}} s^2}} \right)^{2-\tau} \quad (6.83)$$

con la respectiva identificación $\tau \equiv n$.

6.2.1. Límite de Regge para un proceso exclusivo de 4 fermiones de espín 1/2

En la sección 6.1.2 analizamos el límite de Regge, ya visto en [1], pero en su forma más completa y con los comentarios necesarios respecto a estos resultados antes obtenidos. Ahora abordamos el mismo problema, pero para la dispersión de estos 4 fermiones de espín 1/2. Veremos que para este caso llegaremos a una conclusión más interesante, que podrá ser analizada desde el punto de vista de una acción efectiva de supergravedad de tipo IIB, luego de una compactificación sobre la S^5 .

El límite de Regge $\tilde{s} \gg |\tilde{t}|$ para la dispersión de cuatro dilatinos en teorías de supercuerdas de tipo II [3] fue estudiado al final de la sección 5.1.2. Luego, para obtener la amplitud de dispersión en la teoría de gauge dual en este límite, debemos introducir la ecuación (5.48) en el ansatz de Polchinski y Strassler. Para hacer los cálculos más

sencillos y sin pérdida de generalidad, nos enfocaremos en el primer término de (5.48),

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}_{4\text{-fermiones}}^{4d \text{ Regge}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) \approx \\
& 10e^2 \pi g_s^2 \alpha'^4 \int_{r_0}^{\infty} dr (r^3 R^2) (\alpha' \tilde{s})^{1+\frac{\alpha' \tilde{t}}{2}} \lambda_2^\dagger(y) \lambda_3(y) \lambda_1^\dagger(y) \lambda_4(y) \frac{\Gamma(-\alpha' \tilde{t}/4)}{\Gamma(1+\alpha' \tilde{t}/4)} \\
& = \frac{10e^2 \pi g_s^2 (\Delta/2 - 2)^2 \alpha'^4 (s - 4M^2) (e^{i\theta} - 1)^2}{R^{14-2\Delta} \Lambda^{4-\Delta}} \left(\int_{r_0}^{\infty} dr \frac{r^{5-\Delta}}{\alpha' R^2 |t|} (\alpha' R^2 s/r^2)^{1+\frac{\alpha' R^2 t/r^2}{2}} \right. \\
& + \frac{M^2 R^4}{2(\Delta/4 - 3/2)^2} \int_{r_0}^{\infty} dr \frac{r^{3-\Delta}}{\alpha' R^2 |t|} (\alpha' R^2 s/r^2)^{1+\frac{\alpha' R^2 t/r^2}{2}} \\
& \left. + \frac{M^4 R^8}{16(\Delta/4 - 3/2)^4} \int_{r_0}^{\infty} dr \frac{r^{1-\Delta}}{\alpha' R^2 |t|} (\alpha' R^2 s/r^2)^{1+\frac{\alpha' R^2 t/r^2}{2}} \right) + \dots \tag{6.84}
\end{aligned}$$

con $\bar{\lambda}_i = \lambda_i^\dagger \Gamma^0$. Como se hizo para los glueballs en el límite de Regge, aquí también resolveremos estas tres integrales por el método del punto de ensilladura, por lo que es conveniente expresar $\mathcal{A}_{4\text{-fermiones}}^{4d \text{ Regge}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4})$ como sigue

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}_{4\text{-fermiones}}^{4d \text{ Regge}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) \approx \frac{10e^2 \pi g_s^2 (\Delta/2 - 2)^2 \alpha'^4 (s - 4M^2) (e^{i\theta} - 1)^2}{R^{14-2\Delta} \Lambda^{4-\Delta}} \\
& \times \left(\int_{r_0}^{\infty} dr \exp \left[\log \left(\frac{r^{5-\Delta}}{\alpha' R^2 |t|} (\alpha' R^2 s/r^2)^{1+\frac{\alpha' R^2 t/r^2}{2}} \right) \right] + \frac{M^2 R^4}{2(\Delta/4 - 3/2)^2} \int_{r_0}^{\infty} dr \right. \\
& \times \exp \left[\log \left(\frac{r^{3-\Delta}}{\alpha' R^2 |t|} (\alpha' R^2 s/r^2)^{1+\frac{\alpha' R^2 t/r^2}{2}} \right) \right] + \frac{M^4 R^8}{16(\Delta/4 - 3/2)^4} \int_{r_0}^{\infty} dr \\
& \left. \times \exp \left[\log \left(\frac{r^{1-\Delta}}{\alpha' R^2 |t|} (\alpha' R^2 s/r^2)^{1+\frac{\alpha' R^2 t/r^2}{2}} \right) \right] \right) \tag{6.85}
\end{aligned}$$

Definiendo las funciones

$$f_1(r) = \log \left(\frac{r^{5-\Delta}}{\alpha' R^2 |t|} (\alpha' R^2 s/r^2)^{1+\frac{\alpha' R^2 t/r^2}{2}} \right), \tag{6.86}$$

$$f_2(r) = \log \left(\frac{r^{3-\Delta}}{\alpha' R^2 |t|} (\alpha' R^2 s/r^2)^{1+\frac{\alpha' R^2 t/r^2}{2}} \right), \tag{6.87}$$

$$f_3(r) = \log \left(\frac{r^{1-\Delta}}{\alpha' R^2 |t|} (\alpha' R^2 s/r^2)^{1+\frac{\alpha' R^2 t/r^2}{2}} \right). \tag{6.88}$$

con las condiciones del punto de ensilladura correspondientes para cada una de ellas:

$$\frac{df_1(r_1^*)}{dr} = \frac{df_2(r_2^*)}{dr} = \frac{df_3(r_3^*)}{dr} = 0 \tag{6.89}$$

obteniendo los siguientes tres puntos de ensilladura para cada integral,

$$r_1^* \approx R \sqrt{\frac{\alpha' |t| \log(s/|t|)}{\Delta - 3}}, \quad (6.90)$$

$$r_2^* \approx R \sqrt{\frac{\alpha' |t| \log(s/|t|)}{\Delta - 1}}, \quad (6.91)$$

$$r_3^* \approx R \sqrt{\frac{\alpha' |t| \log(s/|t|)}{\Delta + 1}}. \quad (6.92)$$

siendo el valor dominante de r para cada una:

$$r'_1 = \text{máx} \left(\Lambda R^2, \Lambda R^2 \sqrt{\frac{\hat{\alpha}' |t| \log\left(\frac{s}{|t|}\right)}{\Delta - 3}} \right), \quad (6.93)$$

$$r'_2 = \text{máx} \left(\Lambda R^2, \Lambda R^2 \sqrt{\frac{\hat{\alpha}' |t| \log\left(\frac{s}{|t|}\right)}{\Delta - 1}} \right), \quad (6.94)$$

$$r'_3 = \text{máx} \left(\Lambda R^2, \Lambda R^2 \sqrt{\frac{\hat{\alpha}' |t| \log\left(\frac{s}{|t|}\right)}{\Delta + 1}} \right). \quad (6.95)$$

Por lo tanto, obtendremos el comportamiento de Regge para la amplitud de dispersión correspondiente siempre que se satisfagan las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\hat{\alpha}' |t| \log\left(\frac{s}{|t|}\right)}{\Delta - 3}} &< 1, \\ \sqrt{\frac{\hat{\alpha}' |t| \log\left(\frac{s}{|t|}\right)}{\Delta - 1}} &< 1, \\ \sqrt{\frac{\hat{\alpha}' |t| \log\left(\frac{s}{|t|}\right)}{\Delta + 1}} &< 1. \end{aligned} \quad (6.96)$$

Llegando finalmente a la amplitud:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}_{4\text{-fermiones}}^{4d \text{ Regge}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) \approx \frac{5g_s^2 e^2 \pi^2 \Lambda R^2}{16\hat{\alpha}'|t|} \alpha'^4 (\Delta - 4)^2 (-1 + e^{i\theta})^2 \\
& \times \Lambda^{\Delta+1} R^{2(\Delta-4)} (\Lambda R^2)^{-\Delta} \left(\sqrt{4\pi g_s N_c} (\hat{\alpha}'s)^{2+\frac{\alpha't}{2}} - 4(\hat{\alpha}'s)^{1+\frac{\alpha't}{2}} \right) \\
& \times \left(\frac{256}{(\Delta - 6)^4 \sqrt{\left| -3\hat{\alpha}'|t| \log(\hat{\alpha}'s) - 5\hat{\alpha}'|t| + (\Delta + 1) \right|}} \right. \\
& + \frac{128}{(\Delta - 6)^2 \sqrt{\left| -3\hat{\alpha}'|t| \log(\hat{\alpha}'s) - 5\hat{\alpha}'|t| + (\Delta - 1) \right|}} \\
& \left. + \frac{16}{\sqrt{\left| -3\hat{\alpha}'|t| \log(\hat{\alpha}'s) - 5\hat{\alpha}'|t| + (\Delta - 3) \right|}} \right) \tag{6.97}
\end{aligned}$$

donde hemos considerado que $\Lambda \sim M$. Tomando $\hat{\alpha}'|t| \sim 1$,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}_{4\text{-fermiones}}^{4d \text{ Regge}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) \approx \frac{5e^2 \pi^{1/2} \alpha' \Lambda^2 \sqrt{4\pi g_s N_c}}{128N_c^2} (\Delta - 4)^2 (-1 + e^{i\theta})^2 \\
& \times \left(\sqrt{g_s N_c} (\hat{\alpha}'s)^{2+\frac{\alpha't}{2}} - 4(\hat{\alpha}'s)^{1+\frac{\alpha't}{2}} \right) \left[\frac{256}{(\Delta - 6)^4 \sqrt{\left| \Delta - 4 - 3 \log(\hat{\alpha}'s) \right|}} \right. \\
& \left. + \frac{128}{(\Delta - 6)^2 \sqrt{\left| \Delta - 6 - 3 \log(\hat{\alpha}'s) \right|}} + \frac{16}{\sqrt{\left| \Delta - 8 - 3 \log(\hat{\alpha}'s) \right|}} \right] \tag{6.98}
\end{aligned}$$

Notemos algunos puntos importantes de la amplitud recién obtenida:

- Tenemos dos contribuciones en $\mathcal{A}_{4\text{-fermiones}}^{4d \text{ Regge}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4})$, una dominante y otra subdominante.
- La amplitud $\mathcal{A}_{\text{cuerdas}}^{4\text{-dilatinos Regge}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4})$ en (5.48) es el resultado completo, con todos los términos correspondientes para la amplitud en 10d en teoría de supercuerdas de tipo II para 4 dilatinos en el límite de Regge [3].
- La contribución dominante en (6.98), la cual esta acompañada por un factor que es la raíz cuadrada de las constante de 't Hooft, es proporcional a $(\hat{\alpha}'s)^{2+\frac{\alpha't}{2}}$;

habiendo una trayectoria de Regge $j(t) = 2 + \frac{\hat{\alpha}'t}{2} = 2 + \frac{t}{2\sqrt{\lambda\Lambda^2}}$, la cual se entiende como la Reggeización de un gravitón (en la teoría dual en 10d) propagándose entre dos fermiones de espín 1/2.

- La contribución subdominante corresponde a la trayectoria de Regge $j(t) = 1 + \frac{\hat{\alpha}'t}{2} = 1 + \frac{t}{2\sqrt{\lambda\Lambda^2}}$, la cual surge de la Reggeización de un campo vectorial B_μ^1 , el cual es la combinación lineal de un gravifotón $h_{\mu\alpha}$ y de una 4-forma de Ramond-Ramond $A_{\mu\alpha\beta\delta}$ [23, 24], con el índice μ en el AdS_5 y los índices α, β, δ en la S^5 .

Capítulo 7

Hard scattering para la dispersión fermión-glueball

Hasta el momento hemos calculado amplitudes de dispersión entre partículas de la misma especie (4 glueballs y 4 fermiones de espín $1/2$) en 4d para procesos exclusivos de una teoría de gauge SYM fuertemente acoplada con una deformación en el IR. Lo que haremos en este capítulo es aprovechar esta tecnología para calcular una amplitud de dispersión "combinada" de las dos anteriores, es decir, la dispersión de $fermi\acute{o}n_{1/2} + glueball \rightarrow fermi\acute{o}n_{1/2} + glueball$ [4], la cual no ha sido calculada, ni en QCD (es decir la dispersión de $prot\acute{o}n + glueball \rightarrow prot\acute{o}n + glueball$), ni para alguna otra teoría fuertemente acoplada con glueballs y fermiones de espín $1/2$ en alguna representación.

Una vez obtenida la amplitud de dispersión, haremos un análisis sobre el comportamiento *hard* para este tipo de procesos exclusivos desde la perspectiva del capítulo 3 [25, 26, 27], llegando a una conclusión interesante para nuestra dispersión glueball/fermión. También daremos algún ejemplo para las integrales angulares, las cuales ahora involucran a dos armónicos esféricos escalares y a dos espinoriales, todos ellos sobre la S^5 .

Desde la perspectiva holográfica, sabemos que los estados de glueballs y de los fermiones de espín $1/2$ de la teoría de gauge $\mathcal{N} = 4$ SYM en 4d corresponden a modos de masa cero en 10d de supergravedad de tipo IIB, a saber, dilatones y dilatinos respectivamente (7.1). Por lo que, si queremos calcular la amplitud de dispersión glueball/fermión, antes debemos tener la amplitud de dispersión dilatón/dilatino en 10d de la teoría de supercuerdas de tipo IIB en espacio plano, para luego poder insertarla en el ansatz de Polchinski y Strassler. Esta amplitud la obtuvimos en [5] (ya que no había sido calculada antes) para luego usarla en el cálculo que se presenta en este capítulo [4].

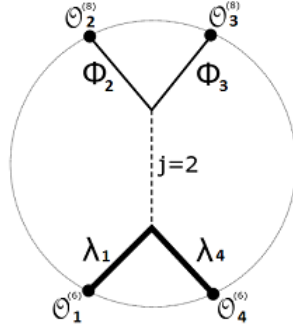


Figura 7.1: Diagrama de Witten en el cual se muestra la dispersión de dilatón/dilatino en el canal \tilde{t} en el *bulk*; junto con los operadores duales de la teoría de SYM ubicados en el borde del AdS_5 . Aquí vemos la propagación de un gravitón Reggeizado desde el punto de vista de supergravedad IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$ para la dispersión en el límite de Regge $\tilde{s} \gg |\tilde{t}|$.

La amplitud de dispersión dilatón/dilatino para teoría de supercuerdas de tipo II obtenida en la sección 5.1.3 es bastante extensa y compleja de manejar, por lo que procederemos a tomar solo una porción de ella. Consideraremos solo los términos de la amplitud que son de la forma $\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4$. Al sumarlos obtenemos una expresión bastante más reducida, la cual expresada en función de \tilde{s} y el ángulo de dispersión θ queda como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_c^2 \text{dilatones-2 dilatinos}(\tilde{1}, 2, 3, \tilde{4}) &\approx \pi \kappa^2 \frac{(\alpha' \tilde{s})^3 (49 \cos(3\theta) + 162(7 + \cos(2\theta)) - 321 \cos(\theta))}{65536} \\ &\times \bar{\lambda}_1 \Phi_2 \Phi_3(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \prod_{\chi=\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}} \frac{\Gamma(-\alpha' \chi/4)}{\Gamma(1 - \alpha' \chi/4)} \end{aligned} \quad (7.1)$$

la cual deberá ir en el integrando del ansatz:

$$\mathcal{A}_4^{\text{4d,glueball-fermión}}(p) = \int_{r_0}^{\infty} dr \int_{S^5} d\Omega_5 \sqrt{-g} \tilde{\mathcal{A}}_{\text{cuerdas}(\text{curvo})}^{10\text{d},2 \text{dilatones-2 dilatinos}}(\tilde{p}) \quad (7.2)$$

siendo $\mathcal{A}_4^{\text{4d,glueball-fermión}}(p)$ la amplitud de dispersión en 4D de la teoría de SYM. Recordemos que $\mathcal{A}_c^2 \text{dilatones-2 dilatinos}$ y $\tilde{\mathcal{A}}_{\text{cuerda}(\text{curvo})}^{10\text{d},2 \text{dilatones-2 dilatinos}}$ se diferencian en que la primera amplitud está en espacio plano \mathcal{M}_{10} y en la segunda uno procede a realizar la descomposición de Kaluza-Klein de los campos Φ 's y λ 's, cubre la matriz gama Γ a la matriz gama $\tilde{\Gamma}$ en $\text{AdS}_5 \times S^5$, y también usa que $\tilde{s} \rightarrow \tilde{s}(r) = \frac{R}{r} s$, donde no se escribe explícitamente el argumento r para \tilde{s} , pero se entiende que depende del mismo. Juntando todo

tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4^{\text{4d,glueball-fermion}}(p) &\approx \frac{4\pi g_s^2 \alpha'^4 (49 \cos(3\theta) + 162(7 + \cos(2\theta)) - 321 \cos(\theta))}{65536} \times \\
&\int_{r_0}^{\infty} dr \int_{S^5} d\Omega_5 r^3 R^2 (\alpha' \tilde{s})^3 \bar{\lambda}_1(y, \Omega_5) \Phi_2(y, \Omega_5) \Phi_3(y, \Omega_5) (g_{MN} k_3^M \tilde{\Gamma}^N) \lambda_4(y, \Omega_5) \\
&\times \prod_{\chi=\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}} \frac{\Gamma(-\alpha' \chi/4)}{\Gamma(1 + \alpha' \chi/4)}
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Donde recordamos que $\lambda_1(y, \Omega_5)$ y $\lambda_4(y, \Omega_5)$ son espinores de Majorana-Weyl de 32 componentes con quiralidad derecha de la supergravedad de tipo IIB en el fondo $\text{AdS}_5 \times S^5$. Las matrices gamas $\tilde{\Gamma}$ en espacio curvo son las mismas que las consideradas en la sección 6.2 en la ecuación (6.54), así como las matrices gamas en 5d y 4d, y también las matrices de Pauli.

Analicemos el factor:

$$\bar{\lambda}_1(y, \Omega_5) \Phi_2(y, \Omega_5) \Phi_3(y, \Omega_5) (g_{MN} k_3^M \tilde{\Gamma}^N) \lambda_4(y, \Omega_5) \tag{7.4}$$

Considerando (6.59) y (6.60) tenemos

$$\begin{aligned}
&(0, \tilde{\lambda}_1^\dagger(y) \otimes Y_{\tilde{\Delta}_1}^{(1/2)\dagger}(\Omega_5)) \tilde{\Gamma}^0 \tilde{\Gamma}^N \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\lambda}_4(y) \otimes Y_{\tilde{\Delta}_4}^{(1/2)}(\Omega_5) \end{pmatrix} = \\
&(0, \tilde{\lambda}_1^\dagger(y) \otimes Y_{\tilde{\Delta}_1}^{(1/2)\dagger}(\Omega_5)) \begin{pmatrix} 0 & 1_4 \otimes \tilde{\gamma}^0 \\ 1_4 \otimes \tilde{\gamma}^0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_4 \otimes \tilde{\gamma}^b \\ 1_4 \otimes \tilde{\gamma}^b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\lambda}_4(y) \otimes Y_{\tilde{\Delta}_4}^{(1/2)}(\Omega_5) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

dejando a

$$\tilde{\lambda}_1^\dagger(y) \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^b \tilde{\lambda}_4(y) \otimes Y_{\tilde{\Delta}_1}^{(1/2)\dagger}(\Omega_5) Y_{\tilde{\Delta}_4}^{(1/2)}(\Omega_5) \tag{7.6}$$

Notar que hemos usado *tildes* en las dimensiones conformes correspondientes a los espinores ($\tilde{\Delta}_1$ y $\tilde{\Delta}_4$) para diferenciar de las dimensiones conformes de los escalares (Δ_2 y Δ_3). Los armónicos esféricos espinoriales están bien identificados, con una etiqueta (1/2) para entender que corresponden a espinores y con su debida etiqueta para las dimensiones conformes $\tilde{\Delta}_i$ que representan. El primer factor en (7.6) se encuentra en AdS_5 y el segundo factor en la S^5 .

La cinemática en 10 dimensiones para una colisión *head-on* de cuerdas cerradas es:

$$\begin{aligned}
k_1^M &= \left(\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, \frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, 0, \dots, 0 \right), \\
k_2^M &= \left(\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, -\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, 0, \dots, 0 \right), \\
k_3^M &= \left(-\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, \frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2} \cos \theta, \frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2} \sin \theta, 0, \dots, 0 \right), \\
k_4^M &= \left(-\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2}, -\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2} \cos \theta, -\frac{\sqrt{\tilde{s}}}{2} \sin \theta, 0, \dots, 0 \right).
\end{aligned} \tag{7.7}$$

con $\tilde{s} = -(k_1 + k_2)^2$, $\tilde{t} = -(k_1 + k_4)^2$ y $\tilde{u} = -(k_1 + k_3)^2$. Entonces los índices de Lorentz N se reducen a $b = 0, 1, 2$. Luego en (7.4) queda la integral angular:

$$I_{\tilde{\Delta}_1, \Delta_2, \Delta_3, \tilde{\Delta}_4} = \int_{S^5} d\Omega_5 \sqrt{\hat{g}_{S^5}} Y_{\Delta_2}^{(0)*}(\Omega_5) Y_{\Delta_3}^{(0)}(\Omega_5) Y_{\tilde{\Delta}_1}^{(1/2)\dagger}(\Omega_5) Y_{\tilde{\Delta}_4}^{(1/2)}(\Omega_5) \tag{7.8}$$

Los impulsos en cuatro dimensiones de las partículas intervinientes en la dispersión son

$$\begin{aligned}
p_1^\mu &= \left(\frac{\sqrt{s}}{2}, \sqrt{\frac{s}{4} - M_{\text{fermión}}^2}, 0, 0 \right), \\
p_2^\mu &= \left(\frac{\sqrt{s}}{2}, -\sqrt{\frac{s}{4} - M_{\text{glueball}}^2}, 0, 0 \right), \\
p_3^\mu &= \left(-\frac{\sqrt{s}}{2}, \sqrt{\frac{s}{4} - M_{\text{glueball}}^2} \cos \theta, \sqrt{\frac{s}{4} - M_{\text{glueball}}^2} \sin \theta, 0 \right), \\
p_4^\mu &= \left(-\frac{\sqrt{s}}{2}, -\sqrt{\frac{s}{4} - M_{\text{fermión}}^2} \cos \theta, -\sqrt{\frac{s}{4} - M_{\text{fermión}}^2} \sin \theta, 0 \right).
\end{aligned} \tag{7.9}$$

donde las partículas 2 y 3 tienen una masa de glueball $M_{\text{glueball}} \simeq 1$ GeV, mientras que las partículas 1 y 4 son fermiones de espín 1/2 con masa $M_{\text{fermión}} \simeq 1$ GeV. Entonces de ahora en adelante asumiremos que $M_{\text{glueball}} \simeq M_{\text{fermión}} \simeq M \simeq 1$ GeV, por lo que (7.9) es idéntica a (6.76). Hasta el momento nuestra amplitud tiene la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4^{\text{glueball-fermion}}(p) &\approx \frac{2\pi g_s^2 \alpha'^4 (49 \cos(3\theta) + 162(7 + \cos(2\theta)) - 321 \cos(\theta))}{65536} \\
&\times I_{\tilde{\Delta}_1, \Delta_2, \Delta_3, \tilde{\Delta}_4} \int_{r_0}^{\infty} dr r^4 R (\alpha' \tilde{s}(r))^3 \sqrt{\tilde{s}(r)} \frac{c_2^* c_3}{R^8 \Lambda^2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\Delta_2 + \Delta_3} \\
&\times \tilde{\lambda}_1(y) (\gamma^0 + \cos \theta \gamma^1 + \sin \theta \gamma^2) \tilde{\lambda}_4(y) \prod_{\chi = \tilde{s}(r), \tilde{t}(r), \tilde{u}(r)} \frac{\Gamma(-\alpha' \chi / 4)}{\Gamma(1 - \alpha' \chi / 4)}
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Notemos que hemos hecho el reemplazo de las funciones de onda solamente para los escalares Φ 's, dejando las funciones de onda λ 's aún sin reemplazar por su forma asintótica para grandes valores de r . Recordemos que los espinores de Dirac en 4D tienen la forma:

$$u_i = \begin{pmatrix} \sqrt{p_i \cdot \sigma} \zeta^s \\ \sqrt{p_i \cdot \bar{\sigma}} \bar{\zeta}^s \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

donde $s = 1, 2$, con

$$\zeta^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Para los fermiones 1 y 4 debemos considerar las expresiones:

$$\sqrt{p \cdot \sigma} = \frac{p \cdot \sigma + M}{\sqrt{2(p^0 + M)}} \quad (7.13)$$

y la correspondiente para $\bar{\sigma}$. Con la cinemática (7.9) tenemos:

$$\sqrt{p_1 \cdot \sigma} = \left(\frac{1}{\sqrt{s} + 2M} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{s}}{2} + M & \sqrt{\frac{s}{4} - M^2} \\ \sqrt{\frac{s}{4} - M^2} & -\frac{\sqrt{s}}{2} + M \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

y

$$\sqrt{p_1 \cdot \bar{\sigma}} = \left(\frac{1}{\sqrt{s} + 2M} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{s}}{2} + M & -\sqrt{\frac{s}{4} - M^2} \\ -\sqrt{\frac{s}{4} - M^2} & -\frac{\sqrt{s}}{2} + M \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

para el primer fermión, y

$$\sqrt{p_4 \cdot \sigma} = \left(\frac{1}{-\sqrt{s} + 2M} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{s}}{2} + M & -\sqrt{\frac{s}{4} - M^2} e^{-i\theta} \\ -\sqrt{\frac{s}{4} - M^2} e^{i\theta} & \frac{\sqrt{s}}{2} + M \end{pmatrix}, \quad (7.16)$$

y

$$\sqrt{p_4 \cdot \bar{\sigma}} = \left(\frac{1}{-\sqrt{s} + 2M} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{s}}{2} + M & \sqrt{\frac{s}{4} - M^2} e^{-i\theta} \\ \sqrt{\frac{s}{4} - M^2} e^{i\theta} & \frac{\sqrt{s}}{2} + M \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

para el cuarto fermión.

Como estamos interesados en procesos de altas energías para ángulo fijo, consideramos las tres variables de Mandelstam en 10 dimensiones con valores grandes. Por lo que tomamos la misma aproximación (6.14) para el cociente de los productos de funciones gamas de Euler. También tomamos las mismas definiciones (6.15), (6.16), las funciones

de onda de los dilatinos para grandes valores de r , y al ser todas partículas sin masa también usamos $\tilde{s} + \tilde{t} + \tilde{u} = 0$, llegando a

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4^{\text{glueball-fermión}}(p) &= \frac{512 i e^2 \pi g_s^2 \alpha'^4 (\Delta - 2) (\tilde{\Delta} - 2)}{65536 \Lambda^{4-(\Delta+\tilde{\Delta})} R^{14-2(\Delta+\tilde{\Delta})}} I_{\tilde{\Delta}_1, \Delta_2, \Delta_3, \tilde{\Delta}_4} \times \\
&\frac{(49 \cos(3\theta) + 162(7 + \cos(2\theta)) - 321 \cos(\theta))}{\sin^2 \theta} \\
&\times \int_{r_0}^{\infty} dr e^{-2\beta_{\tilde{s}(r)\tilde{t}(r)\tilde{u}(r)}} r^{3-(\Delta+\tilde{\Delta})} \sqrt{s} \left(1 + \frac{M^2 R^4}{r^2 (\tilde{\Delta} - 3)^2} \right) \\
&\times \left[\sqrt{s - 4M^2(1 + \cos \theta)} + \cos \theta [\sqrt{s}(1 + \cos \theta) + 2M(1 - \cos \theta)] + \sin^2 \theta (\sqrt{s} - 2M) \right]
\end{aligned} \tag{7.18}$$

También usamos la relación conocida $\tilde{s} = R^2 s / r^2$. Ya que se trata de una dispersión elástica, podemos considerar $\Delta = 2\Delta_i$ y $\tilde{\Delta} = 2\tilde{\Delta}_i$. Procediendo a realizar el cambio de variable $\rho = \frac{r}{r_0}$ con $r_0 = \Lambda R^2$ y considerando $\Lambda \sim M$ llegamos a que la ecuación (7.18) toma la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4^{\text{glueball-fermión}}(p) &= \frac{512 i e^2 \pi g_s^2 \alpha'^4 (\Delta - 2) (\tilde{\Delta} - 2)}{65536 R^6} \times \\
&\frac{(49 \cos(3\theta) + 162(7 + \cos(2\theta)) - 321 \cos(\theta))}{\sin^2 \theta} \\
&\times \int_1^{\infty} d\rho e^{\frac{\alpha' s}{2\Lambda^2 R^2 \rho^2} (i\pi + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \log(\frac{1 - \cos \theta}{2}) + \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \log(\frac{1 + \cos \theta}{2}))} \rho^{3-(\Delta+\tilde{\Delta})} \sqrt{s} \left(1 + \frac{1}{\rho^2 (\tilde{\Delta} - 3)^2} \right) \\
&\times \left[\sqrt{s - 4\Lambda^2(1 + \cos \theta)} + \cos \theta [\sqrt{s}(1 + \cos \theta) + 2\Lambda(1 - \cos \theta)] \right. \\
&\left. + \sin^2 \theta (\sqrt{s} - 2\Lambda) \right] I_{\tilde{\Delta}_1, \Delta_2, \Delta_3, \tilde{\Delta}_4}
\end{aligned} \tag{7.19}$$

Ahora sí podemos resolver analíticamente la integral en la variable ρ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4^{\text{glueball-fermión}}(p) &= \frac{i e^2 \pi g_s^2 \alpha'^{5-\frac{\Delta+\tilde{\Delta}}{2}} (\Delta - 2) (\tilde{\Delta} - 2)}{128 R^6 (\tilde{\Delta} - 3)^2} \\
&\times \frac{(49 \cos(3\theta) + 162(7 + \cos(2\theta)) - 321 \cos(\theta))}{\sin^2 \theta} 2^{\Delta+\tilde{\Delta}-5} \left(-\frac{\Lambda^2 R^2}{f(\theta)} \right)^{\frac{1}{2}(\Delta+\tilde{\Delta}-2)} \\
&\times \left\{ \frac{1}{\Lambda^2 R^2} \Gamma \left[\frac{1}{2}(\Delta + \tilde{\Delta} - 4) \right] \left(-\alpha' (\tilde{\Delta} - 3)^2 f(\theta) + 2 \frac{\Lambda^2 R^2}{s} (\Delta + \tilde{\Delta} - 4) \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha'(\tilde{\Delta} - 3)^2}{\Lambda^2 R^2} f(\theta) \Gamma \left[\frac{1}{2}(\Delta + \tilde{\Delta} - 4), \frac{-\alpha' s f(\theta)}{4\Lambda^2 R^2} \right] - \frac{4}{s} \Gamma \left[\frac{1}{2}(\Delta + \tilde{\Delta} - 2), \frac{-\alpha' s f(\theta)}{4\Lambda^2 R^2} \right] \Big\} \\
& \times \left[\left(s^{3-\frac{\Delta+\tilde{\Delta}}{2}} - 2\Lambda^2 s^{2-\frac{\Delta+\tilde{\Delta}}{2}} - 2\Lambda^4 s^{1-\frac{\Delta+\tilde{\Delta}}{2}} - \dots \right) (1 + \cos \theta) + \cos \theta [s^{3-\frac{\Delta+\tilde{\Delta}}{2}} (1 + \cos \theta) \right. \\
& \left. + 2\Lambda s^{5/2-\frac{\Delta+\tilde{\Delta}}{2}} (1 - \cos \theta)] + \sin^2 \theta (s^{3-\frac{\Delta+\tilde{\Delta}}{2}} - 2\Lambda s^{5/2-\frac{\Delta+\tilde{\Delta}}{2}}) \right] I_{\tilde{\Delta}_1, \Delta_2, \Delta_3, \tilde{\Delta}_4} \quad (7.20)
\end{aligned}$$

con la misma definición usada en los capítulos anteriores para $f(\theta)$:

$$f(\theta) = 2i\pi + (1 + \cos(\theta)) \log \left(\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + (1 - \cos(\theta)) \log \left(\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (7.21)$$

En (7.20) hemos usado la expansión de Taylor para $s \gg 4\Lambda^2$, dejando:

$$\sqrt{s - 4\Lambda^2} = \sqrt{s} \sqrt{1 - \frac{4\Lambda^2}{s}} \sim \sqrt{s} \left(1 - \frac{2\Lambda^2}{s} - \frac{2\Lambda^4}{s^2} - \dots \right) \quad (7.22)$$

Escribiendo la amplitud en términos de los twists de los operadores que crean los estados de la teoría de gauge confinante, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4^{\text{glueball-fermion}}(p) &= \frac{i e^2 \pi g_s^2 \alpha'^{\frac{\mathcal{T}-\tilde{\mathcal{T}}}{2}} (\tau - 2)(\tilde{\tau} - 1)}{64 R^6 (\tilde{\tau} - 2)^2} \times \\
& \frac{(49 \cos(3\theta) + 162(7 + \cos(2\theta)) - 321 \cos(\theta))}{\sin^2 \theta} 2^{\mathcal{T}-4} \left(-\frac{\Lambda^2 R^2}{f(\theta)} \right)^{\frac{1}{2}(\mathcal{T}-1)} \times \\
& \left\{ \frac{1}{\Lambda^2 R^2} \Gamma \left[\frac{1}{2}(\mathcal{T} - 3) \right] \left(-\alpha'(\tilde{\tau} - 2)^2 f(\theta) + 2\frac{\Lambda^2 R^2}{s}(\mathcal{T} - 3) \right) + \right. \\
& \left. \frac{\alpha'(\tilde{\tau} - 2)^2}{\Lambda^2 R^2} f(\theta) \Gamma \left[\frac{1}{2}(\mathcal{T} - 3), \frac{-\alpha' s f(\theta)}{4\Lambda^2 R^2} \right] - \frac{4}{s} \Gamma \left[\frac{1}{2}(\mathcal{T} - 1), \frac{-\alpha' s f(\theta)}{4\Lambda^2 R^2} \right] \right\} \times \\
& \left[s^{5/2-\mathcal{T}/2} (1 + \cos \theta) + \Lambda s^{2-\mathcal{T}/2} (\cos \theta - 1) - \Lambda^2 s^{3/2-\mathcal{T}/2} - \Lambda^4 s^{1/2-\mathcal{T}/2} + \dots \right] I_{\tilde{\tau}_1, \tau_2, \tau_3, \tilde{\tau}_4} \quad (7.23)
\end{aligned}$$

donde se ha expresado las potencias de s en término de los twists correspondientes $\tau = \Delta = 2\Delta_i$ y $\tilde{\tau} = \tilde{\Delta} - 1 = 2(\tilde{\Delta}_i - \frac{1}{2})$, siendo el twist total $\mathcal{T} = \tau + \tilde{\tau}$. Este comportamiento se espera para teorías cuánticas de campos confinantes, ya que (como se explicó en el capítulo 3) a partir de un análisis de las leyes de escalo para procesos exclusivos con un gran impulso transferido, en ángulo fijo y con interacciones independientes entre los constituyentes hadrónicos [26], tenemos

$$\mathcal{A} \propto s^{2-n/2} \cdot s^{L/2-1/2} \quad (7.24)$$

donde recordamos que L es el número de pares de constituyentes de los diferentes hadrones que interactúan entre sí, con un ángulo grande y $n \equiv \mathcal{T}$ es el twist total de los hadrones que intervienen en el proceso. Comparando (7.24) con (7.23) obtenemos el comportamiento dominante para altas energías de la ecuación (7.23) con $L = 2$:

$$\mathcal{A} \propto s^{5/2-\mathcal{T}/2} \quad (7.25)$$

ya que este cálculo no se ha llevado a cabo por ningún otro método ni teoría, nos encontramos con un resultado de tipo predictivo para una teoría de gauge confinante, a saber: para un proceso de dispersión elástica/exclusivo $fermi\acute{o}n_{1/2}+glueball \rightarrow fermi\acute{o}n_{1/2}+glueball$ en altas energías y ángulo de dispersión fijo, se encuentra un comportamiento dominante del tipo $s^{5/2-n/2}$ en la amplitud de dispersión, implicando la interacción de 2 constituyentes independientes en cada hadrón, siendo n el número total de partones presentes en todos los hadrones. Si bien en nuestros cálculos no contamos con partones, ya que estamos en un régimen de acoplamiento fuerte ($\lambda \gg 1$) de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM con un *cut-off* IR, este resultado puede ser interpretado como que una teoría de cuerdas (en cierto fondo curvo y en el contexto de la dualidad AdS/CFT) tiene la capacidad de reproducir las leyes de escaleo mencionadas anteriormente, independientemente de la intensidad en la constante de acoplamiento de la teoría de gauge dual.

Consideremos los operadores fermiónicos de espín $1/2$ $\mathcal{O}_k^{(6)}(x)$ y los operadores de glueballs $\mathcal{O}_k^{(8)}(x)$ de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM y tomemos la dimensión conforme menor, es decir, para un $k = 0$, tenemos $\tilde{\Delta}^{(6)} = 7/2$ y $\Delta^{(8)} = 4$ respectivamente. Luego $\mathcal{T} = \tau + \tilde{\tau} = 8 + 6 = 14$, por lo que la sección eficaz diferencial para el proceso elástico en altas energías y ángulo fijo es:

$$\frac{d\sigma}{dt} \propto s^{-11} f(|t|/s) \quad (7.26)$$

el cual también es un resultado predictivo. De nuestros cálculos podemos notar que en (7.23) se observa una expansión decreciente para las potencias en s y creciente para las potencias en la escala de confinamiento Λ :

$$s^{5/2-\mathcal{T}/2}(1 + \cos \theta) + \Lambda s^{2-\mathcal{T}/2}(\cos \theta - 1) - \Lambda^2 s^{3/2-\mathcal{T}/2} - \Lambda^4 s^{1/2-\mathcal{T}/2} + \dots \quad (7.27)$$

Si $\Lambda \equiv 1/(\hat{\alpha}'^{1/2} \lambda_{\text{t Hooft}}^{1/4})$ y $1 \ll \lambda_{\text{t Hooft}} \ll N_c$ (recordemos que $\hat{\alpha}'$ está relacionada con la tensión de la cuerda en la teoría de gauge dual), la expansión (7.27) toma la forma:

$$\begin{aligned} & s^{5/2-\mathcal{T}/2}(1 + \cos \theta) + \frac{1}{\hat{\alpha}'^{1/2} \lambda_{\text{t Hooft}}^{1/4}} s^{2-\mathcal{T}/2}(\cos \theta - 1) - \frac{1}{\hat{\alpha}' \lambda_{\text{t Hooft}}^{1/2}} s^{3/2-\mathcal{T}/2} \\ & - \frac{1}{\hat{\alpha}'^2 \lambda_{\text{t Hooft}}^2} s^{1/2-\mathcal{T}/2} + \dots \end{aligned} \quad (7.28)$$

por lo que tenemos una expansión en correcciones para acoplamiento fuerte (*strong coupling expansion*) heredada de la teoría de cuerdas dual para el cálculo de la amplitud

de dispersión en la teoría de gauge para ángulo fijo en el límite planar. Notar que el término proporcional a $s^{5/2-\mathcal{T}/2}$ domina la expansión, a excepción para la dispersión *backward*, por lo que para ángulos cercanos a π el término proporcional a $s^{2-\mathcal{T}/2}$ domina la expansión en acoplamiento fuerte. Podemos atribuir este fenómeno a la estructura de acoplamiento fuerte que emerge de los cálculos de la teoría de cuerdas dual; resultado que no se puede anticipar de un conteo de potencias *naive* más ciertas consideraciones acerca de las interacciones en la teoría de gauge, como hicieron los autores de [25, 26].

Recordemos que nuestro cálculos en esta sección se basaron en solamente considerar términos de la forma $\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4$ para la amplitud de dispersión dilatón/dilatino. Se puede probar que los términos de esta misma amplitud que son de la forma $\bar{s}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4$ (o $\bar{s}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4$) aportarían las mismas potencias en s como se muestra en (7.23), ya que los términos de la forma $\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4$ o $\bar{s}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4$ ambos aportan en el integrando de (7.19) la potencia $\rho^{3-(\Delta+\tilde{\Delta})}$. Pero recordemos que en nuestra amplitud de dispersión de dilatón/dilatino también tenemos términos de tres gamas de Dirac en espacio plano de 10d, los cuales son de la forma $\bar{\lambda}_1(\bar{k} \cdot \Gamma)(k \cdot \Gamma)(k \cdot \Gamma)\lambda_4$ y también de la forma $\bar{s}\bar{\lambda}_1(\bar{k} \cdot \Gamma)(\bar{k} \cdot \Gamma)(k \cdot \Gamma)\lambda_4$. Es decir, que a la hora de tener en cuenta estos términos en el *ansatz* (7.2), se deberán considerar las gamas de Dirac en el espacio $\text{AdS}_5 \times S^5$, y al haber tres gamas, nos aportarán otra potencia distinta en el integrando de (7.19), en particular de la forma $\rho^{5-(\Delta+\tilde{\Delta})}$. Esta nueva integral radial nos dará otras dos nuevas potencias con términos de la forma:

$$\hat{\alpha}' s^{7/2-\mathcal{T}/2} \quad (7.29)$$

y

$$\frac{\alpha'^2}{\hat{\alpha}'^{3/2} \lambda_{\text{t Hooft}}^{1/4}} s^{3-\mathcal{T}/2} \quad (7.30)$$

donde $\hat{\alpha}' = \frac{1}{\Lambda^2 \sqrt{\lambda_{\text{t Hooft}}}}$. Notar que (7.29) y (7.30) corresponden a $L = 4$ y $L = 3$ respectivamente, pero están suprimidos en comparación al término dominante $s^{5/2-\mathcal{T}/2}$ en (7.23). Esto quiere decir que en este caso glueball/fermión $_{1/2}$ el proceso dominante implica una interacción entre dos compotentes ($L = 2$) de cada uno de los hadrones que intervienen (fermión $_{1/2}$ y glueball), y los procesos con tres y cuatro partones interactuantes en cada hadrón quedan suprimidos por potencias extras en α' y por la inversa de $\lambda_{\text{t Hooft}}^{1/2}$.

Analizando la función $f(\theta)$ en (7.23) tenemos que a orden dominante la dependencia logarítmica es de la forma:

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim s^{3-\mathcal{T}} \cdot \log \left(\frac{4t}{\hat{\alpha}' \sqrt{\lambda_{\text{t Hooft}} s^2}} \right)^{3-\mathcal{T}} \quad (7.31)$$

obteniendo una potencia distinta de la esperada según Brodsky y Farrar [25, 26], es decir, $d\sigma/dt \sim s^{2-\mathcal{T}}$, debido a la interacción de dos pares ($L = 2$) de constituyentes de

los hadrones intervinientes en el proceso. En (7.31) también identificamos $\mathcal{T} \equiv n$, el número total de constituyentes de los hadrones intervinientes.

7.1. Límite de Regge para proceso exclusivo fermión/glueball

Por completitud, nos dedicamos en esta sección a calcular el límite de Regge para el proceso de dispersión fermión/glueball en 4 dimensiones [4] de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM. Es de esperarse que para este proceso se observe la propagación de un gravitón Reggeizado (7.1), ya que para la dispersión de 4 glueballs y luego de 4 fermiones de espín 1/2 se obtuvo un gravitón Reggeizado en este límite, por lo que para el proceso que combina ambas especies de partículas también se espera que se propague dicho gravitón. En la ecuación (5.68) obtuvimos el factor cinemático correspondiente a la amplitud de dispersión en el límite de Regge para el proceso dilatón/dilatino de una teoría de supercuerdas de tipo II en espacio plano \mathcal{M}_{10} . Si queremos obtener la amplitud dual en 4 dimensiones debemos realizar el siguiente ansatz:

$$\begin{aligned} K_{\text{c-Regge}}^{\text{dilatón-dilatino}}(\tilde{1}, 2, 3, \tilde{4}) &\rightarrow \tilde{K}_{\text{c-Regge}}^{\text{dilatón-dilatino}}(\tilde{1}, 2, 3, \tilde{4}) \\ &= -\frac{\tilde{s}^3(r)}{64} \tilde{\lambda}_1(y, \Omega_5) \Phi_2(y, \Omega_5) \Phi_3(y, \Omega_5) (g_{MN} k_3^M \tilde{\Gamma}^N) \lambda_4(y, \Omega_5) \end{aligned} \quad (7.32)$$

donde $y = (r, x^\mu)$ y $\tilde{\Gamma}$ son las matrices gamas en $\text{AdS}_5 \times S^5$ definidas en capítulos anteriores. Luego la amplitud de dispersión en el límite de Regge para la teoría de SYM correspondiente al proceso glueball-fermión tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{4\text{-Regge}}^{\text{glueball-fermión}}(s, t) &= \frac{\pi g_s^2 \alpha'^4}{128} I_{\tilde{\Delta}_1, \Delta_2, \Delta_3, \tilde{\Delta}_4} \int_{r_0}^{\infty} dr r^4 R (\alpha' \tilde{s})^3 \sqrt{\tilde{s}} \frac{c_2^* c_3}{R^8 \Lambda^2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\Delta_2 + \Delta_3} \\ &\times \tilde{\lambda}_1(y) (\gamma^0 + \gamma^1) \tilde{\lambda}_4(y) \frac{\sin[\frac{\pi \alpha'}{4}(\tilde{s} + \tilde{t})]}{\sin(\pi \alpha' \tilde{s}/4)} \left(\frac{\alpha' \tilde{s}}{4}\right)^{-2 + \alpha' \tilde{t}/2} e^{2 - \alpha' \tilde{t}/2} \frac{\Gamma(-\alpha' \tilde{t}/4)}{\Gamma(1 + \alpha' \tilde{t}/4)} \end{aligned} \quad (7.33)$$

donde se entiende que las variables de Mandelstam tildes son funciones de la coordenada radial r . Sustituyendo las correspondientes funciones de onda de los dilatones y de los dilatinos para grandes valores de r ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{4\text{-Regge}}^{\text{glueball-fermión}}(s, t) &\approx \frac{i\pi g_s^2 \alpha'^4 (\Delta - 2)(\tilde{\Delta} - 2)}{128 \Lambda^{4 - (\Delta + \tilde{\Delta})} R^{14 - 2(\Delta + \tilde{\Delta})}} I_{\tilde{\Delta}_1, \Delta_2, \Delta_3, \tilde{\Delta}_4} \int_{r_0}^{\infty} dr 4^{-\alpha' \tilde{t}/2} r^{3 - (\Delta + \tilde{\Delta})} \\ &\times \sqrt{\tilde{s}} \left(1 + \frac{M^2 R^4}{r^2 (\tilde{\Delta} - 3)^2}\right) (\sqrt{s - 4M^2} + \sqrt{s}) (\alpha' \tilde{s})^{1 + \alpha' \tilde{t}/2} e^{2 - \alpha' \tilde{t}/2} \frac{\Gamma(-\alpha' \tilde{t}/4)}{\Gamma(1 + \alpha' \tilde{t}/4)} \end{aligned} \quad (7.34)$$

Considerando $s \gg M^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{4\text{-Regge}}^{\text{glueball-fermión}}(s, t) &\approx \frac{i\pi g_s^2 \alpha'^4 (\Delta - 2)(\tilde{\Delta} - 2)}{64\Lambda^{4-(\Delta+\tilde{\Delta})} R^{14-2(\Delta+\tilde{\Delta})}} I_{\tilde{\Delta}_1, \Delta_2, \Delta_3, \tilde{\Delta}_4} \int_{r_0}^{\infty} dr 4^{-\alpha' R^2 t/2r^2} r^{3-(\Delta+\tilde{\Delta})} \\ &\times s \left(1 + \frac{M^2 R^4}{r^2(\tilde{\Delta} - 3)^2} \right) (\alpha' R^2 s/r^2)^{1+\alpha' R^2 t/2r^2} e^{2-\alpha' R^2 t/2r^2} \frac{4r^2}{\alpha' R^2 |t|} \end{aligned} \quad (7.35)$$

Procedemos como siempre para este límite, resolvemos la integral por el método del punto de ensilladura; por lo que es conveniente expresar la integral en la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{4\text{-Regge}}^{\text{glueball-fermión}}(s, t) &\approx \frac{i\pi g_s^2 \alpha'^3 (\Delta - 2)(\tilde{\Delta} - 2)s}{16\Lambda^{4-(\Delta+\tilde{\Delta})} R^{16-2(\Delta+\tilde{\Delta})} |t|} I_{\tilde{\Delta}_1, \Delta_2, \Delta_3, \tilde{\Delta}_4} \times \\ &\int_{r_0}^{\infty} dr \exp \left[\log \left(4^{-\alpha' R^2 t/2r^2} r^{5-(\Delta+\tilde{\Delta})} \left(1 + \frac{M^2 R^4}{r^2(\tilde{\Delta} - 3)^2} \right) (\alpha' R^2 s/r^2)^{1+\alpha' R^2 t/2r^2} \right. \right. \\ &\left. \left. \times e^{2-\alpha' R^2 t/2r^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.36)$$

Por lo que la función a la que debemos aplicar la condición del punto de ensilladura es

$$h(r) = \log \left(4^{-\alpha' R^2 t/2r^2} r^{5-(\Delta+\tilde{\Delta})} (\alpha' R^2 s/r^2)^{1+\alpha' R^2 t/2r^2} \left(1 + \frac{M^2 R^4}{r^2(\tilde{\Delta} - 3)^2} \right) e^{2-\alpha' R^2 t/2r^2} \right)$$

Notemos la siguiente desigualdad:

$$\frac{M^2 R^4}{r^2(\tilde{\Delta} - 3)^2} < \frac{M^2 R^4}{r_0^2(\tilde{\Delta} - 3)^2} = \frac{M^2 R^4}{\Lambda^2 R^4 (\tilde{\Delta} - 3)^2} \quad (7.37)$$

Recordemos que $\Lambda \sim M$ y $\tilde{\Delta} \equiv 2 \times \tilde{\Delta}^{(6)} = 2 \times 7/2 = 7$, lo cual corresponde a la suma de las dimensiones conformes de dos operadores $\mathcal{O}_k^{(6)}(x)$, con $k = 0$ el twist mínimo es $\tilde{\tau} = 3$ para la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM. Luego tenemos

$$\frac{M^2 R^4}{r^2(\tilde{\Delta} - 3)^2} < \frac{1}{16} \quad (7.38)$$

Entonces es lógico tomar la aproximación:

$$h(r) \approx \log \left(4^{-\alpha' R^2 t/2r^2} r^{5-(\Delta+\tilde{\Delta})} (\alpha' R^2 s/r^2)^{1+\alpha' R^2 t/2r^2} e^{2-\alpha' R^2 t/2r^2} \right) \quad (7.39)$$

La condición del punto de ensilladura $\frac{dh(r^*)}{dr} = 0$ implica:

$$r^* \approx \sqrt{\frac{\alpha' |t| R^2 \log(s/|t|)}{\Delta + \tilde{\Delta} - 3}} \quad (7.40)$$

Por lo que el valor dominante de la coordenada radial será:

$$r' = \text{máx} \left(\Lambda R^2, \sqrt{\frac{\alpha'|t|R^2 \log(s/|t|)}{\Delta + \tilde{\Delta} - 3}} \right) \quad (7.41)$$

por lo que tendremos el comportamiento de Regge siempre que

$$\sqrt{\frac{\hat{\alpha}'|t| \log(s/|t|)}{\Delta + \tilde{\Delta} - 3}} < 1 \quad (7.42)$$

llegando a la amplitud

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{4\text{-Regge}}^{\text{glueball-fermión}}(s, t) &\approx \frac{i\pi^{3/2}\alpha'^3 g_s^2 (\Lambda R^2)^{5-(\Delta+\tilde{\Delta})} (\Delta-2)(\tilde{\Delta}-2)}{16\Lambda^{4-(\Delta+\tilde{\Delta})} R^{16-2(\Delta+\tilde{\Delta})} |t|} I_{\tilde{\Delta}_1, \Delta_2, \Delta_3, \tilde{\Delta}_4} \\ &\times \frac{2^{1/2 - \frac{\alpha't}{\Lambda^2 R^2}} e^{2 - \frac{\alpha't}{2\Lambda^2 R^2}} s \left(\frac{\alpha's}{\Lambda^2 R^2} \right)^{1 + \frac{\alpha't}{2\Lambda^2 R^2}}}{\sqrt{\left| \frac{3\alpha't \log\left(\frac{\alpha's}{\Lambda^2 R^2}\right) + \alpha't(2-3 \log 4) + \Lambda^2 R^2 (\Delta + \tilde{\Delta} - 3)}{\Lambda^4 R^6} \right|}} \end{aligned} \quad (7.43)$$

considerando $\hat{\alpha}' = \frac{1}{\sqrt{4\pi g_s N_c} \Lambda^2} = \frac{\alpha'}{\Lambda^2 R^2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{4\text{-Regge}}^{\text{glueball-fermión}}(s, t) &\approx \frac{i\pi^{3/2} \Lambda^3 \alpha'^{3/2} (4\pi g_s N_c)^{5/4} (\Delta-2)(\tilde{\Delta}-2)}{(16\pi)^2 N_c^2 \hat{\alpha}' |t|} I_{\tilde{\Delta}_1, \Delta_2, \Delta_3, \tilde{\Delta}_4} \\ &\times \frac{2^{\hat{\alpha}'|t| + \frac{1}{2}} e^{2 + \frac{\hat{\alpha}'|t|}{2}} (\hat{\alpha}' s)^{2 + \frac{\hat{\alpha}'t}{2}}}{\sqrt{\left| -3\hat{\alpha}'|t| \log(\hat{\alpha}' s) - \hat{\alpha}'|t|(2-3 \log 4) + \Delta + \tilde{\Delta} - 3 \right|}} \end{aligned} \quad (7.44)$$

Al tener que fenomenológicamente $\hat{\alpha}'|t| \sim 1$ [1], tenemos la forma final de la amplitud de dispersión en 4 dimensiones para glueball-fermion:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{4\text{-Regge}}^{\text{glueball-fermión}}(s, t) &\approx \frac{i\Lambda^3 \alpha'^{3/2} (4\pi g_s N_c)^{5/4} (\Delta-2)(\tilde{\Delta}-2) 2^{3/2} e^{5/2} (\hat{\alpha}' s)^{2 + \frac{\hat{\alpha}'t}{2}}}{256 \sqrt{\pi} N_c^2 \sqrt{\left| -3 \log(\hat{\alpha}' s) - (2-3 \log 4) + \Delta + \tilde{\Delta} - 3 \right|}} \\ &\times I_{\tilde{\Delta}_1, \Delta_2, \Delta_3, \tilde{\Delta}_4} \end{aligned} \quad (7.45)$$

Como se había anticipado, la potencia $2 + \hat{\alpha}'t/2$ en s proviene de la propagación de un gravitón Reggeizado en la teoría dual en el *bulk*.

Capítulo 8

Conclusiones y trabajos a futuro

A lo largo de la tesis se han recorrido los capítulos de forma constructiva y lógica, desarrollando en cada uno de ellos el material necesario para comprender el capítulo que le sigue, tal es así que los trabajos innovadores de la tesis comienzan con cálculos de amplitudes de dispersión desde las teorías de supercuerdas de tipo II, es decir, amplitudes de supercuerdas válidas en principio tanto para teorías de tipo IIA y IIB. Tener calculadas de forma explícita estas amplitudes fue instrumental para llevar a cabo nuestras amplitudes *duras* (*hard*) y *exclusivas* para procesos elásticos $2 \rightarrow 2$ en cuatro dimensiones para una teoría de gauge SYM fuertemente acoplada.

Una vez obtenidas estas amplitudes en diez dimensiones, se procede a explicar y dar un ejemplo claro (ya calculado en [1]) del proceso *glueball-glueball* mediante el *ansatz* propuesto en [1]. Si bien reprodujimos los resultados ya obtenidos en [1], lo hicimos con mucho más detalle, explicitando todos los factores multiplicativos correspondientes para la amplitud de dispersión, y luego dar un conjunto de reglas de selección para este proceso, las cuales emergen luego de calcular las integrales angulares de los cuatro armónicos esféricos escalares en la S^5 . Entonces también para este proceso *glueball-glueball* se introdujeron nuevos aportes. De esta forma se fué más didáctico a la hora de explicar la aplicación de este *ansatz* para procesos más complejos (obviamente no calculados anteriormente) de *fermión-fermión* y luego de *glueball-fermión*, obteniendo también las correspondientes amplitudes de dispersión con todos los factores multiplicativos correspondientes y luego mostrando algunas reglas de selección.

Sabemos que la sección eficaz diferencial para un proceso exclusivo para grandes valores de s y valores fijos de t/s está dada por [25, 26]:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi s^2} |\mathcal{A}_{2 \rightarrow 2}^{4d}(s, t)|^2 \sim s^{2-\tau} f(t/s) \quad (8.1)$$

siendo $f(t/s)$ una función del ángulo de dispersión. En el caso de dos a dos glueballs obtuvimos,

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim \left(\frac{s}{\Lambda^2} \right)^{2-\Delta} f_{4\text{-glueballs}}(t/s) \quad (8.2)$$

siendo $\tau = \Delta = \sum_{i=1}^4 \Delta_i$, ya que el espín de los operadores duales es cero y $f_{4\text{-glueballs}}(t/s)$ puede ser extraído de la ecuación (6.25). Por otro lado, uno puede estudiar la acción efectiva de supergravedad como el límite de bajas energías de la teoría de supercuerdas de tipo IIB. Para este caso el término relevante de la acción efectiva es [80]

$$S_{\text{efectiva}}^{\text{dilatones}} = \int d^{10}x \sqrt{g_{10}} A^m v^j \partial_m \phi \partial_j \phi \quad (8.3)$$

siendo el dilatón ϕ un autoestado de carga, con carga \mathcal{Q} , y donde el vector de Killing v^j satisface la ecuación

$$v^j \partial_j Y^{(s)}(\Omega) = i\mathcal{Q}Y^{(s)}(\Omega) \quad (8.4)$$

La acción (8.3) puede ser derivada desde la acción de supergravedad de tipo IIB al considerar una perturbación de la métrica no-diagonal $\delta g_{mj} = A_m(y)v_j(\Omega)$. Entonces, la interacción entre los dos dilatones y el gravifotón A_m no puede cambiar la dimensión conforme de los operadores de espín cero $\mathcal{O}_k^{(8)}(x)$, dados por la combinación lineal de los operadores de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM de la forma $\text{Tr}(F_+^2 X^k)$ con $\Delta = k + 4$ (con $k \geq 0$). Por lo que, en un proceso de dispersión exclusivo de dos a dos glueballs, hay dos posibilidades para las dimensiones conformes: $\Delta_1 = \Delta_2$ y $\Delta_3 = \Delta_4$, o $\Delta_1 = \Delta_4$ y $\Delta_2 = \Delta_3$, mientras que la condición obvia para un proceso elástico es $\Delta_1 = \Delta_4$ y $\Delta_2 = \Delta_3$. En el primer caso se intercambia un gravifotón en el canal s , mientras que en los otros dos casos hay un intercambio de un gravifotón en el canal t de la teoría de supergravedad de tipo IIB. Este análisis adiciona algunas restricciones a las reglas de selección que emergen de las integrales angulares de los armónicos esféricos escalares sobre la S^5 . Para este mismo proceso pero en el límite de Regge, tenemos que el exponente del factor $(\hat{\alpha}'s)^{2+\frac{\hat{\alpha}'t}{2}}$ ha sido interpretado como la trayectoria de Regge $j(t) = 2 + \frac{\hat{\alpha}'t}{2} = 2 + \frac{t}{2\sqrt{\lambda\Lambda^2}}$, obtenida de la Reggeización de un gravitón (desde el punto de vista de la teoría en el *bulk*) propagándose entre los dos glueballs en el canal t .

Por otro lado, también comparamos nuestros resultados de la dispersión de cuatro fermiones de espín 1/2 con las leyes de momento transversal grande obtenidas por Brodsky y Farrar [25, 26]. Para $s \gg M^2$, la contribución dominante a la amplitud de dispersión se puede ver en (6.81) y está dada por

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim \left(\frac{s}{\Lambda^2}\right)^{2-\tau} f_{4\text{-fermiones}}(t/s) \quad (8.5)$$

donde $\tau = \sum_{i=1}^4 \tau_i$. La función $f_{4\text{-fermiones}}(t/s)$ también se puede extraer de (6.81). Consideremos el operador de mínimo twist de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM de la forma $\mathcal{O}_k^{(6)}(x)$ que puede ser expresado como una combinación lineal de operadores de la forma $\text{Tr}(F_+ \lambda_{\mathcal{N}=4} X^k)$, donde $\lambda_{\mathcal{N}=4}$ son los gauginos del supermultiplete de gauge de la teoría $\mathcal{N} = 4$. El mínimo twist de cada operador es $\tau_i = 3$ (para $k = 0$), por lo que el twist total es $\tau = 4 \times \tau_i = 12$, entonces,

$$\left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{\text{twist mínimo}} \sim \left(\frac{s}{\Lambda^2}\right)^{-10} f_{4\text{-fermiones}}(t/s) \quad (8.6)$$

Este resultado da exactamente el mismo escaleo en s para la sección eficaz diferencial obtenida en [25, 26] para la dispersión de protón-protón, pero la dependencia angular es bastante diferente en comparación con la obtenida en [27]. Esto es esperado, ya que el operador $\text{Tr}(F_+ \lambda_{\mathcal{N}=4})$ evidentemente no representa a un protón. Es decir, aunque nuestro resultado y el obtenido en estas referencias da el mismo escaleo en s , debemos enfatizar que el operador fermiónico $\text{Tr}(F_+ \lambda_{\mathcal{N}=4} X^k)$ de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM obviamente no representa a un protón, ya que esta teoría no contiene quarks. Recordamos que el twist cuenta el número mínimo de los constituyentes internos que participan en el proceso de dispersión, donde en un protón tenemos tres quarks de valencia. En QCD el concepto de partones está asociado con la teoría de perturbaciones, mientras que en la descripción desde la dualidad AdS/CFT, es la teoría de cuerdas la que es perturbativa y en cambio la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM se encuentra fuertemente acoplada. Notemos que las ecuaciones (6.81) y (6.98) son completamente nuevas y originales con una dependencia en el twist consistente con el número total de partones según [1, 25, 26].

Podemos estudiar los términos de la acción efectiva de supergravedad que contienen a los dilatinos como el límite de bajas energías de la teoría de supercuerdas de tipo IIB. En [34, 35] los términos que contienen las interacciones de los dilatino se derivaron de la acción de supergravedad de tipo IIB a partir de la reducción dimensional sobre la S^5 , dejando como resultado:

$$S_{\text{efectiva}}^{\text{dilatinos}} = K \int dz d^4 x \sqrt{-g_{\text{AdS}_5}} \left(i \frac{\mathcal{Q}}{3} \bar{\lambda}_k^- \tilde{\gamma}^a B_a^1 \lambda_k^- + i \frac{b_{1kl}^-}{12} \bar{\lambda}_j^- F^{ab} \tilde{\Sigma}_{ab} \lambda_k^- + i \frac{b_{1kj}^{+-}}{12} \bar{\lambda}_j^+ F^{ab} \tilde{\Sigma}_{ab} \lambda_k^- \right) \quad (8.7)$$

con

$$b_{1kj}^{\pm,-} = \left(1 + 2 \left(k \mp j + \frac{5}{2} \mp \frac{5}{2} \right) \right) \int d\Omega_5 (\Theta_j^\pm)^\dagger \tau_a v^a \Theta_k + 4\mathcal{Q} \int d\Omega_5 (\Theta_j^\pm)^\dagger \Theta_k^- \quad (8.8)$$

donde K es una constante de normalización. El campo vectorial B_a^1 , el cual es un campo sin masa de Maxwell-Einstein en el AdS_5 definido como una combinación lineal de las fluctuaciones fuera de la diagonal de la métrica y las fluctuaciones vectoriales de la cuatro forma de Ramond-Ramond,

$$B_a^1(y) \equiv A_a^1(y) - 16\Phi_a^1(y) \quad (8.9)$$

donde $A_a^1(y)$ es la fluctuación de la métrica dada por

$$h_{a\alpha} = \sum_{I_5} A_a^{I_5}(y) Y_\alpha^{I_5}(\Omega) \quad (8.10)$$

mientras que el campo $\Phi_a^1(y)$ surge de

$$a_{a\alpha\beta\gamma} = \sum_{I_5} \Phi_a^{I_5}(y) \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} \nabla^\delta Y^{I_5\epsilon}(\Omega) \quad (8.11)$$

con $F_{ab} = \nabla_a B_b^1 - \nabla_b B_a^1$ y $\tilde{\Sigma}_{ab} = \frac{1}{4}(\tilde{\gamma}_a \tilde{\gamma}_b - \tilde{\gamma}_b \tilde{\gamma}_a)$. Notar que I_5 es una notación compacta para el conjunto de números $(l_5, l_4, l_3, l_2, l_1)$ que etiquetan a $Y^{I_5 \epsilon}(\Omega)$, el armónico esférico vectorial sobre la S^5 y donde $B_a^1(y)$ son los 15 campos de Yang-Mills de la representación irreducible **15** de $SU(4) \sim SO(6)$. Para el dilatino de quiralidad derecha sobre el $AdS_5 \times S^5$ tenemos

$$\lambda(y, \Omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda'(y, \Omega) \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

donde

$$\lambda'(y, \Omega) = \sum_k (\lambda_k^+(y) \Theta_k^+(\Omega) + \lambda_k^-(y) \Theta_k^-(\Omega)) \quad (8.13)$$

siendo $\Theta_k^+(\Omega)$ y $\Theta_k^-(\Omega)$ armónicos esféricos espinoriales sobre la S^5 . Hay dos torres de masas asociadas con la representaciones irreducibles **4***, **20***, **60***, ...(-), o **4**, **20**, **60**, ...(+), del grupo de isometría $SO(6)$ sobre la S^5 , las cuales están etiquetadas como λ_k^\pm sobre el AdS_5 .

El primer término en (8.7) corresponde al acoplamiento mínimo, el cual está relacionado con el término dominante $s^{2-\tau/2}$ de la amplitud de dispersión $\mathcal{A}_{4\text{-fermiones}}^{4d}$ y éste está asociado con el intercambio de un gravifotón. Los otros términos en (8.7) están relacionados con el intercambio de un campo vectorial entre dos dilatinos en la supergravedad de tipo IIB en el $AdS_5 \times S^5$, y está asociado con el término subdominante $s^{1-\tau/2}$ en la amplitud de dispersión $\mathcal{A}_{4\text{-fermiones}}^{4d}$. La Reggeización de estos campos, el gravifotón y el campo vectorial, deja como resultado las trayectorias de Regge $j(t) = 2 + \frac{\hat{\alpha}' t}{2}$ y $j(t) = 1 + \frac{\hat{\alpha}' t}{2}$ respectivamente. Además de las restricciones dadas por las reglas de selección que pueden ser derivadas de las integrales angulares de cuatro armónicos esféricos espinoriales, hay también restricciones provenientes de los distintos términos de interacción de (8.7). Notamos que el primer término preserva la dimensión conforme de los operadores de $\mathcal{N} = 4$ SYM, mientras que los otros permiten cierta mezcla entre ellas.

También en esta tesis se obtuvo la amplitud de dispersión en cuatro dimensiones del proceso *glueball-fermión* para fermiones de espín 1/2 en el límite de altas energías, considerando los comportamientos para ángulo fijo y en el límite de Regge. Este es el primer cálculo para la dispersión elástica glueball/fermión en el marco de la dualidad AdS/CFT. Para llevar a cabo dicho cálculo, primero se debió obtener la amplitud de dispersión de dos dilatones y dos dilatinos para teorías de supercuerdas de tipo II [5].

El resultado en el límite de altas energías y para ángulo fijo dado por la ecuación (7.23) contiene contribuciones dominantes y subdominantes. La contribución dominante es de la forma

$$s^{5/2-\mathcal{T}/2}(1 + \cos \theta) \quad (8.14)$$

la cual domina la amplitud de dispersión para cualquier ángulo con la excepción del proceso de dispersión *backward*. La contribución (8.14) corresponde a la situación donde la amplitud de dispersión se comporta como $\mathcal{A} \propto s^{2-n/2} s^{L/2-1/2}$, con $n = \mathcal{T}$ y $L = 2$ donde, como se comentó en el capítulo 2, L indica el número de pares de constituyentes correspondientes a distintos hadrones que interaccionan con un ángulo grande y una interacción invariante de escala. Siempre debemos tener presente que éste es un resultado para la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM en acoplamiento fuerte. Desde el punto de vista de los cálculos en teorías de gauge no abelianas como se refiere en [25, 26], $L > 1$ es interpretado como una dispersión múltiple de varios pares de constituyentes, dejando contribuciones no planares asociadas al mecanismo de Landshoff [28]. La contribución subdominante a la amplitud de dispersión glueball-fermión tiene la forma

$$\frac{1}{\hat{\alpha}'^{1/2} \lambda_{\text{t Hooft}}^{1/4}} s^{2-\mathcal{T}/2} (\cos \theta - 1) \quad (8.15)$$

Para este caso tenemos $L = 1$, lo que significa en el contexto partónico de la amplitud de dispersión glueball-fermión a que solo un par de constituyentes están interactuando, correspondiendo uno de los constituyentes al glueball y el otro constituyente al fermión de espín 1/2. Sin embargo, hay una sutileza, la cual proviene del hecho que para un ángulo de dispersión cercano a π , el factor $(\cos \theta + 1)$ de la ecuación (8.14) se aproxima a cero. Entonces, en el límite de la dispersión *backward* el término proporcional a $s^{2-\mathcal{T}/2}$ se vuelve dominante. Notar la supresión debida al factor $\lambda_{\text{t Hooft}}^{-1/4}$. Este comportamiento corresponde a la teoría de gauge fuertemente acoplada. Al final de la primera sección del capítulo 7 aclaramos que también tenemos nuevas potencias en s en la amplitud fermión_{1/2}/glueball en 4d que surgen del análisis de los términos que contienen tres gamas de Dirac presentes en la amplitud dilatón/dilatino en 10d. Dichos términos nuevos aportan $L = 3$ y $L = 4$, pero son términos subdominantes en comparación al término que teníamos antes con $L = 2$.

Podemos considerar que en la dispersión de glueballs con fermiones de espín 1/2 los estados son creados por operadores de traza única de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM con el mínimo twist posible. Estos operadores son $\mathcal{O}_0^{(8)}(x)$ de la forma $\text{Tr}(F_+^2)$ con twist $\tau = \Delta_{\text{glueball}} = 4$ y $\mathcal{O}_0^{(6)}(x)$ de la forma $\text{Tr}(F_+ \lambda_{\mathcal{N}=4})$ con twist $\tau = \Delta_{\text{fermión}} - 1/2 = 3$ [16]. La traza de estos operadores es tomada en la representación adjunta del grupo de gauge $SU(N_c)$. Estos son operadores invariantes de gauge contruidos a partir del multiplete de gauge $(A_\mu^a, \lambda_{\mathcal{N}=4}, X_I)$ de $\mathcal{N} = 4$ SYM, compuesto de campos de gauge A_μ^a (con índices de Lorentz en cuatro dimensiones $\mu = 0, \dots, 3$ y los índices del grupo de gauge no abeliano $a = 1, \dots, N_c^2 - 1$), fermiones de Weyl $\lambda_{\mathcal{N}=4}$, y 6 escalares reales X_I (con $I = 1, \dots, 6$).

La integral angular en (7.23) es $I_{\tilde{\Delta}_1, \Delta_2, \Delta_3, \tilde{\Delta}_4} \equiv I_{7/2, 4, 4, 7/2}$, la cual podemos calcular

considerando la ecuación:

$$I_{7/2,4,4,7/2} = \int_{S^5} d\Omega_5 \sqrt{\hat{g}_{S^5}} Y_{(0,0,0,0,0)}^{(0)*}(\Omega_5) Y_{(0,0,0,0,0)}^{(0)}(\Omega_5) Y_{(0,0,0,0,0)}^{(1/2)\dagger}(\Omega_5) Y_{(0,0,0,0,0)}^{(1/2)}(\Omega_5) \quad (8.16)$$

donde $\sqrt{\hat{g}_{S^5}} = \sin^4 \theta_5 \sin^3 \theta_4 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2$ para la parametrización usual de la S^5 . El armónico esférico espinorial es [2]:

$$Y_{(0,0,0,0,0)}^{(0)}(\Omega_5) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \quad (8.17)$$

donde la notación $(0, 0, 0, 0, 0) = (l_5, l_4, l_3, l_2, l_1)$ con $l_5 \geq l_4 \geq l_3 \geq l_2 \geq l_1$, y $l_5 = k$, donde k cuenta el número de campos escalares reales del operador $\text{Tr}(F_+^2 X_I^k)$ [34, 35]. En el caso del operador $\mathcal{O}_{k=0}^{(8)}$ tenemos $\Delta = \tau = 4$.

Los armónicos esféricos espinoriales sobre S^5 fueron explícitamente obtenidos en [34, 35] siguiendo el formalismo desarrollado en [98]. Este armónico esférico con mínimo twist tiene una degeneración cuatro, lo cual está relacionado con la representación irreducible mas baja $[1, 0, 0]$ del grupo de simetría $R SU(4)_R$ en la teoría de gauge dual. Entonces hay cuatro modos fermiónicos $\lambda_{0_a}^-$ de espín $1/2$ con $a = 1, 2, 3, 4$ [34, 35]. Se ha revisado que el resultado final no depende de la elección de si el estado inicial se encuentra en alguno de los cuatro modos fermiónicos que viven en la representación irreducible $[1, 0, 0]$ de $SU(4)_R$. Sin pérdida de generalidad podemos considerar el armónico esférico con el twist más bajo ($\tau = 3$):

$$Y_{(0,0,0,0,0)_{a=1}}^{(1/2)} = \frac{e^{-i\mathcal{Q}\theta_1}}{\pi^{3/2}} \begin{bmatrix} e^{-i\frac{1}{2}(\theta_3-\theta_5)} \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \\ -e^{i\frac{1}{2}(\theta_3+\theta_5)} \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \\ -e^{-i\frac{1}{2}(\theta_3+\theta_5)} \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \\ e^{-i\frac{1}{2}(-\theta_3+\theta_5)} \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

El armónico esférico espinorial tiene una carga $\mathcal{Q} = \frac{1}{2}$. Tomamos $a = 1$. Es fácil mostrar que $Y_{(0,0,0,0,0)}^{(1/2)\dagger}(\Omega_5) Y_{(0,0,0,0,0)}^{(1/2)}(\Omega_5) = 1/\pi^3$ y entonces la integral (8.16) da

$$I_{7/2,4,4,7/2} = \frac{1}{\pi^3} \quad (8.19)$$

También podemos considerar el caso de $\mathcal{O}_1^{(8)}(x)$ de la forma $\text{Tr}(F_+^2 X_I)$ con twist $\tau = \Delta_{\text{scalar}} = 5$ y tomamos otra vez $\mathcal{O}_0^{(6)}(x)$ de la forma $\text{Tr}(F_+ \lambda_{\mathcal{N}=4})$ con twist $\tau = \Delta_{\text{fermion}} - 1/2 = 3$. Entonces, la integral angular a resolver es $I_{\tilde{\Delta}_1, \Delta_2, \Delta_3, \tilde{\Delta}_4} \equiv I_{7/2,5,5,7/2}$.

Para este caso tenemos los siguientes 6 armónicos esféricos escalares ortonormalizados:

$$Y_{(1,0,0,0,0)}^{(0)} = \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \cos \theta_5 \quad (8.20)$$

$$Y_{(1,1,0,0,0)}^{(0)} = \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \cos \theta_4 \sin \theta_5 \quad (8.21)$$

$$Y_{(1,1,1,0,0)}^{(0)} = \frac{2\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \frac{\cos \theta_3 \sin \theta_4 \sin^2\left(\frac{\theta_5}{2}\right) (1 + \cos \theta_5)}{\sin \theta_5} \quad (8.22)$$

$$Y_{(1,1,1,1,0)}^{(0)} = \frac{2\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \frac{\cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin^2\left(\frac{\theta_5}{2}\right) (1 + \cos \theta_5)}{\sin \theta_5} \quad (8.23)$$

$$Y_{(1,1,1,1,1)}^{(0)} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^{3/2}} e^{-i\theta_1} \frac{\sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin^2\left(\frac{\theta_5}{2}\right) (1 + \cos \theta_5)}{\sin \theta_5} \quad (8.24)$$

$$Y_{(1,1,1,1,-1)}^{(0)} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^{3/2}} e^{i\theta_1} \frac{\sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin^2\left(\frac{\theta_5}{2}\right) (1 + \cos \theta_5)}{\sin \theta_5} \quad (8.25)$$

El resultado de las integrales angulares para todos estos casos también da $1/\pi^3$. La contribución dominante a la sección eficaz diferencial para ángulo fijo es:

$$\frac{d\sigma}{dt} \propto s^{-13} f(|t|/s) \quad (8.26)$$

donde aquí también tenemos $L = 2$. De la ortogonalidad de los armónicos esféricos es posible derivar reglas de selección para la dispersión elástica de los estados de $\mathcal{N} = 4$ SYM creados por los operadores fermiónicos $\mathcal{O}_0^{(6)}(x)$ con algún operador escalar $\mathcal{O}_k^{(8)}(x)$ con $k \geq 0$, preservando el valor de k de los escalares.

En la sección 7.1 obtuvimos el límite de Regge para la amplitud de dispersión glueball-fermión dejando como resultado el intercambio de un gravitón Reggeizado en la descripción de la teoría de cuerdas dual. Por comparación, recordemos que en el caso de los cuatro glueballs también se obtuvo la propagación de un gravitón Reggeizado en el límite de Regge. Para el caso de los cuatro fermiones de espín 1/2 se obtuvo la Reggeización de un gravitón, y también una contribución subdominante que corresponde a la Reggeización de un campo vectorial, el cual puede ser expresado como la combinación lineal de las fluctuaciones de la parte no diagonal de la métrica y las fluctuaciones vectoriales de la cuatro forma del campo de potencial Ramond-Ramond.

Un próximo paso en la dirección del trabajo llevado a cabo en esta tesis es considerar el proceso de dispersión dura y elástica de cuatro glueballs, pero a orden de *1-loop*, correspondiendo al cálculo dual de la amplitud de dispersión que surge de la inserción de cuatro operadores de vértices de dilatones insertados sobre la superficie de un toro $T = S^1 \times S^1$, para la teoría de supercuerdas de tipo IIB, así luego poder usar este resultado como integrando en el ansatz de Polchinski y Strassler. Es decir, se debería proponer:

$$\mathcal{A}_{4d}^{1\text{-loop}}(p) = \int_{r_0}^{\infty} dr \int_{S^5} d\Omega_5 \sqrt{-g} \tilde{\mathcal{A}}_{\text{cuerdas}}^{1\text{-loop}}(\tilde{p}) \quad (8.27)$$

donde el tilde en $\tilde{\mathcal{A}}_{\text{cuerdas}}^{1\text{-loop}}(\tilde{p})$ es la amplitud en teoría de cuerdas a 1-loop en el fondo $\text{AdS}_5 \times S^5$. Analizando esta amplitud en espacio plano tenemos en principio $\mathcal{A}_{\text{cuerdas}}^{1\text{-loop}} \equiv \mathcal{A}_c(1, 2, 3, 4)$, siendo esta última:

$$\mathcal{A}_c(1, 2, 3, 4) = (\pi\kappa)^4 K_c(1, 2, 3, 4) \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{(\text{Im}\tau)^2} F_c(\tau) \quad (8.28)$$

donde τ aquí se refiere al parámetro que caracteriza al toro y $K_c(1, 2, 3, 4)$ es el factor cinemático de la amplitud de dispersión a nivel árbol de cuatro dilatones, el cual fue obtenido en la subsección 5.1.1. Además \mathcal{F} denota la region fundamental de $SL(2, Z)$,

$$\mathcal{F} = \{|\text{Re}(\tau)| \leq 1/2, |\tau|^2 \geq 1\} \quad (8.29)$$

y donde además debemos integrar sobre las posiciones $\nu_r = \nu_{1,r} + i\nu_{2,r}$ de los cuatro operadores de vértices de dilatones sobre el toro

$$\begin{aligned} F_c(\tau) &= \frac{1}{(\text{Im}\tau)^3} \int_{\mathcal{I}} \prod_{r=1}^3 d^2\nu_r \prod_{r<s} (\chi_{rs})^{k_r \cdot k_s / 2} \\ &= \frac{1}{(\text{Im}\tau)^3} \int_{\mathcal{I}} \prod_{r=1}^3 d^2\nu_r (\chi_{12}\chi_{34})^{-\tilde{s}/4} (\chi_{23}\chi_{14})^{-\tilde{t}/4} (\chi_{24}\chi_{13})^{-\tilde{u}/4} \end{aligned} \quad (8.30)$$

donde $d^2\nu_r \equiv d\nu_{1,r} d\nu_{2,r}, \nu_4 \equiv \tau$ y

$$\chi(\nu, \tau) = 2\pi \exp \left[\frac{-\pi(\text{Im}\nu)^2}{\text{Im}\tau} \right] \left| \frac{\theta_1(\nu|\tau)}{\theta_1(0|\tau)} \right| \quad (8.31)$$

siendo $\theta_1(\nu|\tau), \theta_1'(0|\tau)$ la función de Jacobi y su primera derivada respectivamente. La función de Green sobre el toro es:

$$G_\tau(\nu_{rs}) = -\ln \chi(\nu_{rs}|\tau) = \pi \frac{\text{Im}^2(\nu_{rs})}{\text{Im}\tau} - \ln \left| \frac{\theta_1(\nu_{rs}|\tau)}{\theta_1'(0|\tau)/2\pi} \right| \quad (8.32)$$

Se cumple que:

$$\chi(\nu + 1, \tau) = \chi(\nu + \tau, \tau) = \chi(\nu, \tau) \quad (8.33)$$

Es decir, para un valor fijo de τ , la función $\chi(\nu, \tau)$ es una función doblemente periódica de ν con períodos 1 y τ . Esto significa que el plano complejo ν puede ser dividido en paralelogramos desplazados unos de otros por un múltiplo entero de 1 y τ , cada uno dando una copia de la misma función. Entonces la función χ puede pensarse como viviendo en uno solo de estos paralelogramos con los bordes opuestos identificados, es decir, un toro. Podemos elegir la ubicación de las partículas (los operadores de vértices)

en las posiciones ν_i y $\nu_i + n + m\tau$, con m, n enteros. Eligiendo $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = \tau/2$, $\nu_3 = \frac{\tau+1}{2}$ y $\nu_4 = 1/2$. Por lo que la función doblemente periódica toma los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \chi\left(\frac{1}{2}\middle|\tau\right) &= 2\pi \left| \frac{\theta_2(0|\tau)}{\theta_1'(0|\tau)} \right|, \quad \chi\left(\frac{\tau}{2}\middle|\tau\right) = 2\pi e^{-\pi(Im\tau)/4} \left| \frac{\theta_4(0|\tau)}{\theta_1'(0|\tau)} \right|, \\ \chi\left(\frac{\tau+1}{2}\middle|\tau\right) &= 2\pi e^{-\pi(Im\tau)/4} \left| \frac{\theta_3(0|\tau)}{\theta_1'(0|\tau)} \right| \end{aligned} \tag{8.34}$$

Sabemos que para hacer uso del ansatz (8.27) deberíamos tener en cuenta la curvatura del espacio $AdS_5 \times S^5$, por lo que se debe tomar la amplitud $\tilde{\mathcal{A}}_{\text{cuerdas}}^{1\text{-loop}}(\tilde{p})$, la cual contiene las respectivas funciones de onda y variables cinemáticas en este espacio-tiempo. El propósito de hacer este cálculo a un *loop* es conocer el escaleo en potencias de la energía de centro de masa \sqrt{s} , y el comportamiento en potencias del factor $1/N_c$ que acompaña a la amplitud de dispersión en la teoría de gauge dual, y por lo tanto conocer la corrección a un *loop* desde la teoría de SYM fuertemente acoplada. De (8.28) notamos que en vez de κ^2 , como en el caso de la amplitud a nivel árbol, ahora tenemos κ^4 y por lo tanto tendremos que $\kappa^4 \sim g_s^4 \alpha'^8 \sim 1/N_c^4$.

Apéndice A

Amplitud de dispersión de 4 cuerdas abiertas (vectores de masa nula)

En esta tesis se usa una expresión crucial, el factor cinemático de cuatro cuerdas abiertas supersimétricas representando a partículas vectoriales, por lo que es un ejercicio interesante su demostración.

Lo que queremos calcular es

$$\langle k_1 | V_B(\zeta_2, k_2) \Delta V_B(\zeta_3, k_3) | k_4 \rangle \quad (\text{A.1})$$

donde

$$V_B(\zeta_i, k_i) = \left(\zeta^i \dot{X}^i - \zeta^i R^{ij} k^j \right) e^{ik \cdot X} \quad (\text{A.2})$$

con

$$\begin{aligned} X^\mu(z) &= x^\mu - ip^\mu \ln z + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu z^{-n}}{n} = x^\mu + \tau p^\mu + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-i(\tau - \sigma)} \\ \rightarrow \dot{X}(\tau) &= p^\mu + \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu z^{-n} = p^\mu + \sum_{n=1} \left(\alpha_n^\mu z^{-n} + \alpha_{-n}^\mu z^n \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

recordemos la factorización del operador $e^{ik \cdot X(z)}$

$$e^{ik \cdot X(z)} = e^{ik \cdot x + k \cdot p \cdot \ln z - k \cdot \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}} = Z \cdot W \quad (\text{A.4})$$

con

$$Z = \exp(i \cdot k \cdot x + k \cdot p \cdot \ln z) = e^{i \cdot k \cdot x + k \cdot p \cdot \ln z + \frac{i}{2} [k \cdot x, k \cdot p] \ln z} \quad (\text{A.5})$$

como $k^2 = 0$,

$$Z = e^{ik \cdot x} \cdot z^{k \cdot p} \quad (\text{A.6})$$

y

$$W = \exp\left(-k \cdot \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) = \exp\left(\sum_{n=1} k \cdot \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n=1} k \cdot \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) \quad (\text{A.7})$$

Se define el propagador como

$$\Delta = \frac{\alpha'}{L_0} = \frac{1}{2} L_0^{-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^2 + N\right)^{-1} = \frac{1}{2} \int_0^1 dz z^{p^2/2+N-1} \quad (\text{A.8})$$

por lo que

$$\begin{aligned} \langle k_1 | V_B(\zeta_2, k_2) \Delta V_B(\zeta_3, k_3) | k_4 \rangle &= (\zeta_2^i \dot{X}^i - \zeta_2^i R^{ij} k_2^j) e^{ik_2 X(1)} \Delta (\zeta_3^k \dot{X}^k - \zeta_3^k R^{kl} k_3^l) e^{ik_3 X(z)} | k_4 \rangle \\ &= (\zeta_2^i \dot{X}^i - \zeta_2^i R^{ij} k_2^j) e^{ik_2 x} \exp\left(\sum_{n=1} k_2 \cdot \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \exp\left(-\sum_{n=1} k_2 \cdot \frac{\alpha_n}{n}\right) \Delta \\ &\quad (\zeta_3^k \dot{X}^k - \zeta_3^k R^{kl} k_3^l) e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp\left(\sum_{n=1} k_3 \cdot \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n=1} k_3 \cdot \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) | k_4 \rangle \\ &= \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | \left[\zeta_2^i \cdot p^i + \zeta_2^i \cdot \sum_{n=1} \alpha_n^i + \sum_{n=1} \alpha_{-n}^i - \zeta_2^i \gamma_{ab}^{ij} \sum \sum S_n^a S_m^b k_2^j \right] e^{ik_2 x} \exp\left(\sum_{n=1} k_2 \cdot \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\sum_{n=1} k_2 \cdot \frac{\alpha_n}{n}\right) \left[\zeta_3^k \cdot p^k + \zeta_3^k \cdot \sum_{n=1} \alpha_n^k + \sum_{n=1} \alpha_{-n}^k - \zeta_3^k \gamma_{cd}^{kl} \sum \sum S_r^c S_t^d z^{-r} z^{-t} k_3^l \right] \\ &\quad \times e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot x} \exp\left(\sum_{n=1} k_3 \cdot \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n=1} k_3 \cdot \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) | k_4 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

donde usaremos

$$\begin{aligned} [\alpha_n^i, \alpha_m^j] &= n \delta_{m+n,0} \delta^{ij} \\ \{S_m^a, S_n^b\} &= \delta^{ab} \delta_{m+n,0} \\ [S_m^a, \alpha_n^i] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

y $|k_4\rangle, \langle k_1|$ son estados fundamentales aniquilados por α_n y S_n con $n > 0$ (y para el estado bra con $n < 0$). Ahora debemos conmutar los α 's con las $\exp(..\alpha)$.

Obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_n^k \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}^l}{n} z^n\right) &= \alpha_n^k \left[1 + k_3^l \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}^l}{n} z^n + \frac{1}{2} \left(k_3^l \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}^l}{n} z^n\right) k_3^s \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}^s}{n} z^n + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!} \left(k_3^l \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}^l}{n} z^n\right) \left(k_3^s \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}^s}{n} z^n\right) \left(k_3^r \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}^r}{n} z^n\right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha_n^k \alpha_{-n}^l k_3^l &= n \delta^{kl} k_3^l + \alpha_{-n}^l \alpha_n^k k_3^l = n k_3^k + \alpha_{-n}^l \alpha_n^k k_3^l = (\alpha_{-n} \cdot k_3) \alpha_n^k + n k_3^k \\
\alpha_n^k \alpha_{-n}^l \alpha_{-n}^s k_3^l k_3^s &= \alpha_{-n}^l \alpha_n^k \alpha_{-n}^s k_3^l k_3^s + n \delta^{kl} \alpha_{-n}^s k_3^l k_3^s \\
&= \alpha_{-n}^l \alpha_{-n}^s \alpha_n^k k_3^l k_3^s + n k_3^l k_3^k \alpha_{-n}^l + \alpha_{-n}^s k_3^k k_3^s = (\alpha_{-n} \cdot k_3)^2 \alpha_n^k \\
&\quad + 2n((\alpha_{-n} \cdot k_3) k_3^k \\
\alpha_n^k \alpha_{-n}^l \alpha_{-n}^s \alpha_{-n}^r k_3^l k_3^s k_3^r &= \alpha_{-n}^l \alpha_n^k \alpha_{-n}^s \alpha_{-n}^r k_3^l k_3^s k_3^r n \alpha_{-n}^s \alpha_{-n}^r k_3^l k_3^s k_3^r \\
&= \alpha_{-n}^l \alpha_{-n}^s \alpha_n^k \alpha_{-n}^r k_3^l k_3^s k_3^r + n k_3^l k_3^k k_3^r \alpha_{-n}^l \alpha_{-n}^r + n \alpha_{-n}^s \alpha_{-n}^r k_3^k k_3^s k_3^r \\
&= \alpha_{-n}^l \alpha_{-n}^s \alpha_{-n}^r \alpha_n^k k_3^l k_3^s k_3^r + n \alpha_{-n}^l \alpha_{-n}^s k_3^l k_3^s k_3^r + 2n(k_3 \cdot \alpha_{-n})^2 k_3^k \\
&= (\alpha_{-n} \cdot k_3)^3 \alpha_n^k + 3n((\alpha_{-n} \cdot k_3)^2 k_3^k
\end{aligned} \tag{A.12}$$

luego

$$\begin{aligned}
\alpha_n^k \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) &= \alpha_n^k + \sum_{n=1} \frac{z^n}{n} (\alpha_{-n} \cdot k_3) \alpha_n^k + \sum_{n=1} \frac{z^n}{n} \frac{k_3^k}{n} + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1} \frac{z^n}{n} \alpha_{-n} \cdot k_3\right)^2 \alpha_n^k \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1} \frac{z^n}{n}\right)^2 2n(\alpha_{-n} \cdot k_3) k_3^k + \frac{1}{3!} \left(\sum_{n=1} \frac{z^n}{n} \alpha_{-n} \cdot k_3\right)^3 \alpha_n^k + \\
&\quad + \frac{1}{3!} \left(\sum_{n=1} \frac{z^n}{n}\right)^3 3n(\alpha_{-n} \cdot k_3)^2 k_3^k + \dots + \frac{1}{N!} \left(\sum_{n=1} \frac{z^n}{n} \alpha_{-n} \cdot k_3\right)^N \alpha_n^k + \\
&\quad + \frac{1}{(N-1)!} \left(\sum_{n=1} \frac{z^n}{n}\right)^N n(\alpha_{-n} \cdot k_3)^{N-1} k_3^k \\
&= \sum_{N=0} \left\{ \frac{1}{N!} \left(\sum_{n=1} \frac{z^n}{n} \alpha_{-n} \cdot k_3\right)^N \alpha_n^k + \frac{1}{(N-1)!} \left(\sum_{n=1} \frac{z^n}{n}\right)^N n(\alpha_{-n} \cdot k_3)^{N-1} k_3^k \right\} \\
&= \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \alpha_n^k + \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \sum_{n=1} z^n k_3^k
\end{aligned} \tag{A.13}$$

donde el primer término anulará al *ket* y el segundo término se anula al contraerse k_3^k con el vector de polarización ζ_3^k . Procediendo de forma análoga para cada producto de un α con una $\exp(..\alpha)$ siempre obtendremos dos términos: uno con el α conmutado más otro término que irá como $\exp(..\alpha)$ por un k_2^i , k_3^i , k_3^k o k_3^i , dependiendo si la α que conmuta tiene índice *i* o *k* respectivamente.

Entonces, si el argumento de $\exp(..\alpha)$ contiene una $\sum_{n=1} z^n$ o $\sum_{n=1} z^{-n}$, también bajará la suma junto a los k 's. Es decir,

$$\alpha_n^i \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) = \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \alpha_n^i + \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \sum_{n=1} z^n k_3^i \tag{A.14}$$

donde

$$\sum_{n=1} z^n = \frac{z}{1-z}. \tag{A.15}$$

Es decir, que este término contribuirá a cierta función beta. También tendremos

$$\exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) \alpha_{-n}^k = \alpha_{-n}^k \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) - \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \sum_{n=1} k_2^k \quad (\text{A.16})$$

otro será de la forma

$$\exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \alpha_n^k = \alpha_n^k \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) - \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) \sum_{n=1} k_2^k \quad (\text{A.17})$$

luego otro irá como

$$\alpha_{-n}^i \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^{-n}\right) = \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^{-n}\right) \alpha_{-n}^i + \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^{-n}\right) \sum_{n=1} z^{-n} k_3^i \quad (\text{A.18})$$

el siguiente de la forma

$$\alpha_n^i \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) = \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \alpha_n^i + \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) k_2^i \quad (\text{A.19})$$

luego uno de la forma

$$\alpha_{-n}^i \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) = \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) \alpha_{-n}^i + \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) k_2^i \quad (\text{A.20})$$

y por último

$$\alpha_{-n}^k \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) = \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) \alpha_{-n}^k + \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) \sum_{n=1} z^{-n} k_3^k \quad (\text{A.21})$$

En (A.9) hacemos distributiva para cada uno de los términos de $V_B(\zeta_2, k_2)$ y $V_B(\zeta_3, k_3)$ por lo que tendremos términos como por ejemplo $\boxed{1-3}$ lo que quiere decir que multiplicamos el primer término del primer vértice con el tercer término del segundo vértice. Luego usando la conservación del momento, tenemos $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$ y las variables de Mandelstam

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= -(k_1 + k_2)^2, \\ \tilde{t} &= -(k_1 + k_4)^2, \\ \tilde{u} &= -(k_1 + k_3)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

y $\tilde{s} + \tilde{t} + \tilde{u} = 0$, ya que $k^2 = 0$.

Empecemos con cada producto, para el primer término tenemos

$$\boxed{1-1} = \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | \zeta_2^i p^i e^{ik_2 x} \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) \zeta_3^k p^k e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \\ \times \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) |k_4 \rangle$$

donde $\langle k_1 | p^i = \langle k_1 | k_1^i$ y $p^k |k_4 \rangle = k_4^k |k_4 \rangle$, entonces

$$\boxed{1-1} = -\frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \zeta_2^i k_1^i \zeta_3^k k_4^k \langle k_1 | e^{ik_2 x} \times \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) \\ \times e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) |k_4 \rangle$$

donde vimos que lo del *braket* da $z^{k_3 \cdot k_4} (1-z)^{k_2 \cdot k_3} = z^{-\tilde{s}/2} (1-z)^{-\tilde{t}/2}$, entonces

$$\boxed{1-1} = -\frac{1}{2}g^2 \int_0^1 dz \zeta_2 \cdot k_1 \zeta_3 \cdot k_4 z^{-\tilde{s}/2-1} (1-z)^{-\tilde{t}/2} \\ = \boxed{-\frac{1}{2}g^2 \zeta_2 \cdot k_1 \zeta_3 \cdot k_4 B\left(-\tilde{s}/2, 1 - \tilde{t}/2\right)}. \quad (\text{A.23})$$

Miramos el término

$$\boxed{1-2} = \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | \zeta_2^i p^i e^{ik_2 x} \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \\ \times \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) \sum_{n=1} z^{-n} \zeta_3^k \alpha_n^k e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \\ \times \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) |k_4 \rangle = 0 \quad (\text{A.24})$$

el cual no contribuye ya que al pasar α_n^k hacia la derecha bajará un k_3^k que al contraerse con ζ_3^k se anulará, más un término con el α_n^k actuando sobre el ket por lo que también se anula.

Pasamos al siguiente

$$\boxed{1-3} = \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | \zeta_2^i p^i e^{ik_2 x} \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \\ \times \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) \sum_{n=1} z^n \zeta_3^k \alpha_{-n}^k e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \\ \times \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) |k_4 \rangle$$

donde $\langle k_1|p^i = \langle k_1|k_1^i$ y ahora pasamos el α_{-n}^k hacia la izquierda porque este anula al bra, entonces

$$\begin{aligned}
\boxed{1-3} &= \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \zeta_2^i k_1^i \zeta_3^k k_2^k \left(\sum_{n=1} z^n \right) \langle k_1| e^{ik_2x} \exp \left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} \right) \\
&\times \exp \left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} \right) e^{ik_3x} z^{k_3 \cdot p} \exp \left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n \right) \exp \left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n} \right) |k_4\rangle \\
&= \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \zeta_2 \cdot k_1 \zeta_3 \cdot k_2 z^{-\tilde{s}/2} (1-z)^{-\tilde{t}/2-1} = \boxed{\frac{1}{2}g^2 \zeta_2 \cdot k_1 \zeta_3 \cdot k_2 B \left(1 - \tilde{s}/2, -\tilde{t}/2 \right)}
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Los términos de los operadores de vértice que contienen la $\gamma_{ab}^{ij} \sum_m \sum_n S_n^a S_m^b$, tomando $m = n = 0$, tenemos $R_0^{ij} = \gamma_{ab}^{ij} S_0^a S_0^b$, entonces

$$\begin{aligned}
\boxed{1-4} &= -\frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1| \zeta_2^i p^i e^{ik_2x} \exp \left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} \right) \\
&\times \exp \left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} \right) \zeta_3^k R_0^{kl} k_3^l e^{ik_3x} z^{k_3 \cdot p} \exp \left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n \right) \\
&\times \exp \left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n} \right) |k_4\rangle \\
&= -\frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \zeta_2 \cdot k_1 \zeta_3^k R_0^{kl} k_3^l \langle k_1| e^{ik_2x} \exp \left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} \right) \\
&\times \exp \left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} \right) e^{ik_3x} z^{k_3 \cdot p} \exp \left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n \right) \exp \left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n} \right) |k_4\rangle \\
&= -\frac{1}{2}g^2 \zeta_2 \cdot k_1 \zeta_3^k R_0^{kl} k_3^l \int_0^1 dz z^{-\tilde{s}/2-1} (1-z)^{-\tilde{t}/2} \\
&= \boxed{-\frac{1}{2}g^2 R_0^{ij} \zeta_2 \cdot k_1 \zeta_3^i k_3^j B \left(-\tilde{s}/2, 1 - \tilde{t}/2 \right)}
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Pasando al siguiente término, tenemos

$$\begin{aligned}
\boxed{1-5} &= -\frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1| \zeta_2^i p^i e^{ik_2x} \exp \left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} \right) \\
&\times \exp \left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} \right) \zeta_3^k \gamma_{cd}^{kl} \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} S_n^c S_m^d z^{-n} z^{-m} e^{ik_3x} z^{k_3 \cdot p} \exp \left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n \right) \\
&\times \exp \left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n} \right) |k_4\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}g^2\zeta_2 \cdot k_1 \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | e^{ik_2x} \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \\
&\times \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) \zeta_3^k \gamma_{cd}^{kl} \sum_{n=1} \sum_{m=1} \delta^{cd} \delta_{n-m,0} z^{-n} z^{-m} e^{ik_3x} z^{k_3 \cdot p} \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \\
&\times \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) |k_4\rangle \tag{A.27}
\end{aligned}$$

con lo que obtenemos una γ_{cc}^{kl} , donde $\gamma_{ab}^{ij} = \frac{1}{2} (\gamma_{a\dot{a}}^i \gamma_{\dot{a}b}^j - \gamma_{a\dot{a}}^j \gamma_{\dot{a}b}^i)$, pero si $a = b$, $\gamma_{aa}^{ij} = \frac{1}{2} (\gamma_{a\dot{a}}^i \gamma_{\dot{a}a}^j - \gamma_{a\dot{a}}^j \gamma_{\dot{a}a}^i)$, donde el subíndice $a = 1, \dots, 8$ es un índice espinorial del grupo $SO(8)$ bajo la representación 8_s y $\dot{a} = 1, \dots, 8$ también un índices espinorial de otra representación espinorial 8_c de $SO(8)$, con lo que estas γ 's son matrices 8×8 . Notamos que si $i = j$ en γ_{aa}^{ij} entonces $\gamma_{aa}^{ii} = 0$. Estas matrices cumplen un álgebra de Clifford

$$\gamma_{a\dot{a}}^i \gamma_{\dot{a}b}^j + \gamma_{a\dot{a}}^j \gamma_{\dot{a}b}^i = 2\delta^{ij} \delta_{ab} \rightarrow \gamma_{a\dot{a}}^i \gamma_{\dot{a}a}^j + \gamma_{a\dot{a}}^j \gamma_{\dot{a}a}^i = 2\delta^{ij} \tag{A.28}$$

donde las γ^i son el producto directo de tres matrices de Pauli, las cuales están dadas por

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, i\tau_2 = \epsilon = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.29}$$

donde por ejemplo para $i = 1$ y $j = 2$,

$$\gamma_{a\dot{a}}^1 = \epsilon \times \epsilon \times \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.30}$$

$$\gamma_{a\dot{a}}^2 = 1 \times \tau_1 \times \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.31}$$

entonces $\gamma_{aa}^{12} = \frac{1}{2} (\gamma_{aa}^1 \gamma_{aa}^2 - \gamma_{aa}^2 \gamma_{aa}^1) = \frac{1}{2} (\gamma^1 \gamma^{2T} - \gamma^2 \gamma^{1T})$, dando

$$\gamma_{aa}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

por lo que

$$\zeta_2^i \gamma_{aa}^{ij} k_2^j = \zeta_2^1 \gamma_{aa}^{12} k_2^2 + \dots = (\zeta_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \gamma_{aa}^{12} (0, k_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T + \dots \quad (\text{A.33})$$

dando esto cero. Solo mostramos aquí para el caso $i = 1$ y $j = 2$. Entonces los términos que contengan al quinto término de algún vértice no contribuirán. Veremos más adelante que sólo contribuye el término $\boxed{5-5}$.

Seguimos con el siguiente término. Tenemos

$$\begin{aligned} \boxed{2-1} &= \frac{1}{2} g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | \zeta_2^i \sum_{n=1} \alpha_n^i e^{ik_2 x} \exp \left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} \right) \\ &\times \exp \left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} \right) \zeta_3^k p^k e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp \left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n \right) \\ &\times \exp \left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n} \right) |k_4 \rangle \end{aligned}$$

y usando (A.14) obtenemos

$$\begin{aligned} \boxed{2-1} &= \frac{1}{2} g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \frac{z}{1-z} \langle k_1 | \zeta_2^i e^{ik_2 x} \exp \left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} \right) \\ &\times \exp \left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} \right) \zeta_3^k k_4^k k_3^i e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp \left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n \right) \\ &\times \exp \left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n} \right) |k_4 \rangle \\ &= \boxed{\frac{1}{2} g^2 \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot k_4 B(1 - \tilde{s}/2, -\tilde{t}/2)} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Pasando al siguiente, tenemos

$$\begin{aligned} \boxed{2-2} &= \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | \zeta_2^i \sum_{n=1} \alpha_n^i e^{ik_2 x} \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) \zeta_3^k \sum_{n=1} \alpha_n^k z^{-n} e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \\ &\quad \times \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) |k_4 \rangle \end{aligned}$$

donde usando (A.17) y (A.14) obtenemos

$$\begin{aligned} \boxed{2-2} &= -\frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | \zeta_2^i k_2^k e^{ik_2 x} \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) \sum_{n=1} z^n \zeta_3^k k_3^i \sum_{n=1} z^{-n} e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \\ &\quad \times \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) |k_4 \rangle \end{aligned}$$

Por lo que tenemos finalmente

$$\boxed{2-2} = -\frac{1}{2}g^2 \int_0^1 dz \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot k_2 z^{-\tilde{s}/2} (1-z)^{-\tilde{t}/2-1} = \boxed{\frac{1}{2}g^2 \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot k_2 B(1-\tilde{s}/2, -\tilde{t}/2)} \quad (\text{A.35})$$

Pasando al siguiente término,

$$\begin{aligned} \boxed{2-3} &= \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | \zeta_2^i \sum_{n=1} \alpha_n^i e^{ik_2 x} \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) \zeta_3^k \sum_{n=1} \alpha_{-n}^k z^n e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \\ &\quad \times \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) |k_4 \rangle \\ &= \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | \zeta_2^i \zeta_3^k \sum_{n=1} z^n (n\delta^{ik} + \alpha_{-n}^k \alpha_n^i) e^{ik_2 x} \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) |k_4 \rangle \\ &= \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \zeta_2 \cdot \zeta_3 \left(\sum_{n=1} n z^n\right) z^{-\tilde{s}/2} (1-z)^{-\tilde{t}/2} \\ &\quad + \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \zeta_2 \cdot \zeta_3 \langle k_1 | e^{ik_2 x} e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \sum_{n=1} z^n \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \exp\left(k_3 \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) |k_4 \rangle \end{aligned}$$

donde usando (A.16) y (A.14) obtenemos

$$\begin{aligned}
\boxed{2-3} &= \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 dz \zeta_2 \cdot \zeta_3 \left(\sum_{n=1} n z^{n-1} \right) z^{-\tilde{s}/2} (1-z)^{-\tilde{t}/2} \\
&+ \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \zeta_2 \cdot \zeta_3 \left(\sum_{n=1} z^n \right) \left(\sum_{n=1} z^n \right) k_2^i k_3^j \langle k_1 | e^{ik_2 x} e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp \left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} \right) \\
&\times \exp \left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} \right) \exp \left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n \right) \exp \left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n} \right) |k_4 \rangle \\
&= \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 dz \zeta_2 \cdot \zeta_3 \left(z^{-\tilde{s}/2} (1-z)^{-\tilde{t}/2-2} - \frac{k_2 \cdot k_3}{(1-z)^2} z^{-\tilde{s}/2} (1-z)^{-\tilde{t}/2} \right) \\
&= \boxed{\frac{1}{2}g^2 \zeta_2 \cdot \zeta_3 (1 + \tilde{t}/2) B \left(1 - \tilde{s}/2, -1 - \tilde{t}/2 \right)}. \tag{A.36}
\end{aligned}$$

Pasando al siguiente término,

$$\begin{aligned}
\boxed{2-4} &= \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | \zeta_2^i \sum_{n=1} \alpha_n^i e^{ik_2 \cdot x} \exp \left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} \right) \exp \left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} \right) \\
&\times \zeta_3^{kl} R_0^{kl} k_3^l e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp \left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} \right) \exp \left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} \right) \\
&\times \exp \left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n \right) \exp \left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n} \right) |k_4 \rangle
\end{aligned} \tag{A.37}$$

donde usando (A.14),

$$\begin{aligned}
\boxed{2-4} &= \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | \zeta_2^i \zeta_3^{kl} R_0^{kl} k_3^l e^{ik_2 x} e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp \left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} \right) \exp \left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} \right) \\
&\times k_3^i \left(\sum_{n=1} z^n \right) \exp \left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n \right) \exp \left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n} \right) |k_4 \rangle \\
&= \frac{1}{2}g^2 R_0^{ij} \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_3^i k_3^j \int_0^1 dz \left(\sum_{n=0} z^n \right) \langle k_1 | e^{ik_2 x} e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp \left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} \right) \\
&\times \exp \left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} \right) \exp \left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n \right) \exp \left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n} \right) |k_4 \rangle \\
&= \frac{1}{2}g^2 R_0^{ij} \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_3^i k_3^j \int_0^1 dz z^{-\tilde{s}/2} (1-z)^{-\tilde{t}/2-1} \\
&= \boxed{\frac{1}{2}g^2 R_0^{ij} \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_3^i k_3^j B \left(1 - \tilde{s}/2, -\tilde{t}/2 \right)} \tag{A.38}
\end{aligned}$$

Ahora, recordamos que $\boxed{2-5}$ se anulará por la misma razón que $\boxed{1-5}$. Los términos $\boxed{3-1}$, $\boxed{3-2}$, $\boxed{3-3}$, $\boxed{3-4}$, $\boxed{3-5}$ no contribuyen ya que son proporcionales a

$\langle k_1 | \alpha_{-n}^i$ con $n > 0$. Nos resta plantear

$$\begin{aligned}
\boxed{4-1} &= \frac{1}{2} g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | \zeta_2^i R_0^{ij} k_2^j e^{ik_2 x} e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) \\
&\times \zeta_3^k p^k \left(\sum_{n=1} z^n\right) \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) |k_4\rangle \\
&= \frac{1}{2} g^2 R_0^{ij} \zeta_2^i k_2^j \zeta_3 \cdot k_4 \int_0^1 dz z^{-\tilde{s}/2-1} (1-z)^{-\tilde{t}/2} \\
&= \boxed{\frac{1}{2} g^2 R_0^{ij} \zeta_2^i k_2^j \zeta_3 \cdot k_4 B\left(-\tilde{s}/2, 1 - \tilde{t}/2\right)}. \tag{A.39}
\end{aligned}$$

El siguiente término no nulo resulta ser

$$\begin{aligned}
\boxed{4-3} &= -\frac{1}{2} g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | \zeta_2^i R_0^{ij} k_2^j e^{ik_2 x} e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) \\
&\times \zeta_3^k \sum_{n=1} \alpha_{-n}^k z^n \left(\sum_{n=1} z^n\right) \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) |k_4\rangle
\end{aligned}$$

y usando (A.16) obtenemos

$$\begin{aligned}
\boxed{4-3} &= \frac{1}{2} g^2 \zeta_2^i R_0^{ij} k_2^j \zeta_3 \cdot k_2 \sum_{n=1} z^n \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | e^{ik_2 x} e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \\
&\times \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) |k_4\rangle \\
&= \frac{1}{2} g^2 \zeta_2^i R_0^{ij} k_2^j \zeta_3 \cdot k_2 \int_0^1 dz z^{-\tilde{s}/2} (1-z)^{-\tilde{t}/2-1} \\
&= \boxed{\frac{1}{2} g^2 R_0^{ij} \zeta_2^i k_2^j \zeta_3 \cdot k_2 B\left(1 - \tilde{s}/2, -\tilde{t}/2\right)}. \tag{A.40}
\end{aligned}$$

El siguiente término es

$$\begin{aligned}
\boxed{4-4} &= \frac{1}{2} g^2 \zeta_2^i R_0^{ij} k_2^j \zeta_3^k R_0^{kl} k_3^l \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | e^{ik_2 x} e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp\left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n}\right) \exp\left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n}\right) \\
&\times \exp\left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n\right) \exp\left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right) |k_4\rangle \\
&= \boxed{\frac{1}{2} g^2 \zeta_2^i R_0^{ij} k_2^j \zeta_3^k R_0^{kl} k_3^l B\left(-\tilde{s}/2, 1 - \tilde{t}/2\right)}. \tag{A.41}
\end{aligned}$$

Los términos de la forma $\boxed{1-5}$, $\boxed{2-5}$, $\boxed{3-5}$, $\boxed{4-5}$, $\boxed{5-1}$, $\boxed{5-2}$, $\boxed{5-3}$, $\boxed{5-4}$ no contribuyen ya que se obtiene algo proporcional a γ_{aa}^{ij} y al multiplicarlos

por los vectores $\zeta^i k_2^j$ o $\zeta_3^k k_3^l$ da cero, pero $\boxed{5-5}$ sí nos da términos no nulos, tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\boxed{5-5} &= \frac{1}{2} g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \langle k_1 | \zeta_2^i \gamma_{ab}^{ij} \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} S_n^a S_m^b k_2^j e^{ik_2 x} \exp \left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} \right) \exp \left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} \right) \\
&\times \zeta_3^k \gamma_{cd}^{kl} \sum_{r \neq 0} \sum_{t \neq 0} S_t^c S_r^d z^{-t} z^{-r} k_3^l e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp \left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n \right) \\
&\times \exp \left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n} \right) |k_4 \rangle \\
&= \frac{1}{2} g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \zeta_2^i \gamma_{ab}^{ij} k_2^j \zeta_3^k \gamma_{cd}^{kl} k_3^l \langle k_1 | \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} S_n^a S_m^b e^{ik_2 x} \exp \left(k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} \right) \\
&\times \exp \left(-k_2 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} \right) e^{ik_3 x} z^{k_3 \cdot p} \exp \left(k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n \right) \\
&\times \exp \left(-k_3 \cdot \sum_{n=1} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n} \right) \sum_{r \neq 0} \sum_{t \neq 0} S_t^c S_r^d z^{-t} z^{-r} |k_4 \rangle \tag{A.42}
\end{aligned}$$

donde $[S_m, \alpha_n] = 0$ y tenemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} S_n^a S_m^b \sum_{r \neq 0} \sum_{t \neq 0} S_t^c S_r^d z^{-t} z^{-r} |0 \rangle = \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} \sum_{r=1} \sum_{t \neq 0} S_n^a S_m^b S_t^c S_{-r}^d z^{-t} z^r |0 \rangle \\
&= \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} \sum_{r=1} \sum_{t \neq 0} S_n^a \left(\delta^{bc} \delta_{m+n,0} - S_t^c S_m^b \right) S_{-r}^d z^r z^{-t} |0 \rangle \\
&\sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} \sum_{r=1} \sum_{t \neq 0} S_n^a \delta^{bc} \delta_{m+n,0} S_{-r}^d z^r z^{-t} |0 \rangle - \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} \sum_{r=1} \sum_{t \neq 0} S_n^a S_t^c S_m^b S_{-r}^d z^r z^{-t} |0 \rangle \\
&= \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} \sum_{r=1} S_n^a \delta^{bc} S_m^d z^r z^m |0 \rangle - \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} \sum_{r=1} S_n^a S_{-m}^c S_m^b S_{-r}^d z^r z^m \\
&\sum_{n \neq 0} \sum_{m=1} \sum_{r=1} S_n^a \delta^{bc} S_{-m}^d z^r z^{-m} |0 \rangle - \sum_{n \neq 0} \sum_{m=1} \sum_{r=1} S_n^a S_{-m}^c S_m^b S_{-r}^d z^r z^m \\
&= \sum_{n \neq 0} \sum_{m=1} \sum_{r=1} \delta^{bc} \left(\delta_{m-n,0} \delta^{ad} - S_d^{-m} S_n^a \right) z^r z^{-m} |0 \rangle - \sum_{n \neq 0} \sum_{m=1} \sum_{r=1} S_n^a \left(\delta^{bc} - S_m^b S_{-m}^c \right) S_{-r}^d z^r z^m |0 \rangle \\
&= \sum_{m=1} \sum_{r=1} \delta^{bc} \delta^{ad} z^r z^{-m} |0 \rangle - (\sim \sum_{m=1} \sum_{r=1} z^r z^m = \sum_{m=0} \sum_{r=0} z^2 z^r z^m \rightarrow 0) = \delta^{bc} \delta^{ad} \frac{z}{1-z} \tag{A.43}
\end{aligned}$$

el segundo término tiende a cero ya que $|z| < 1$. Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
\gamma_{ab}^{ij}\gamma_{cd}^{kl}\delta^{bc}\delta^{ad} &= \gamma_{db}^{ij}\gamma_{bd}^{kl} = \frac{1}{4}\left(\gamma_{dd}^i\gamma_{db}^j - \gamma_{dd}^j\gamma_{db}^i\right)\left(\gamma_{bb}^k\gamma_{bd}^l - \gamma_{bb}^l\gamma_{bd}^k\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\gamma_{dd}^i\gamma_{db}^j\gamma_{bb}^k\gamma_{bd}^l - \gamma_{dd}^i\gamma_{db}^j\gamma_{bb}^l\gamma_{bd}^k - \gamma_{dd}^j\gamma_{db}^i\gamma_{bb}^k\gamma_{bd}^l + \gamma_{dd}^j\gamma_{db}^i\gamma_{bb}^l\gamma_{bd}^k\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[\gamma_{dd}^i(2\delta^{jk}\delta_{db} - \gamma_{db}^k\gamma_{bb}^j)\gamma_{bd}^l - \gamma_{dd}^i(2\delta^{lj}\delta_{db} - \gamma_{db}^l\gamma_{bb}^j)\gamma_{bd}^k - \gamma_{dd}^j(2\delta^{ik}\delta_{db} \right. \\
&\quad \left. - \gamma_{db}^k\gamma_{bb}^i)\gamma_{bd}^l + \gamma_{dd}^j(2\delta^{il}\delta_{db} - \gamma_{db}^l\gamma_{bb}^i)\gamma_{bd}^k\right] \\
&\sim \frac{1}{2}\left(\delta^{jk}\gamma_{dd}^i\gamma_{bd}^l - \delta^{lj}\gamma_{dd}^i\gamma_{bd}^k - \delta^{ik}\gamma_{dd}^j\gamma_{bd}^l + \delta^{il}\gamma_{dd}^j\gamma_{bd}^k\right)\delta_{db}
\end{aligned} \tag{A.44}$$

multiplicando por $\zeta_2^i k_2^j \zeta_3^k k_3^l$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(k_2 \cdot \zeta_3 \zeta_2^i k_3^l \gamma_{dd}^i \gamma_{bd}^l - k_2 \cdot k_3 \zeta_2^i \zeta_3^k \gamma_{dd}^i \gamma_{bd}^k - \zeta_2 \cdot \zeta_3 k_2^j k_3^l \gamma_{dd}^j \gamma_{bd}^l + \zeta_2 \cdot k_3 k_2^j \zeta_3^k \gamma_{dd}^j \gamma_{bd}^k\right)\delta_{db} \\
&= \frac{1}{2}\left(k_2 \cdot \zeta_3 \zeta_2^i k_3^j - k_2 \cdot k_3 \zeta_2^i \zeta_3^j - \zeta_2 \cdot \zeta_3 k_2^i k_3^j + \zeta_2 \cdot k_3 k_2^i \zeta_3^j\right)\gamma_{dd}^i \gamma_{bd}^j \delta_{db} \\
&= \left(k_2 \cdot \zeta_3 \zeta_2^i k_3^j - k_2 \cdot k_3 \zeta_2^i \zeta_3^j - \zeta_2 \cdot \zeta_3 k_2^i k_3^j + \zeta_2 \cdot k_3 k_2^i \zeta_3^j\right)\gamma_{db}^{ij} S_0^d S_0^b \\
&= \left(k_2 \cdot \zeta_3 \zeta_2^i k_3^j - k_2 \cdot k_3 \zeta_2^i \zeta_3^j - \zeta_2 \cdot \zeta_3 k_2^i k_3^j + \zeta_2 \cdot k_3 k_2^i \zeta_3^j\right) R_0^{ij}
\end{aligned} \tag{A.45}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\boxed{5-5} &= -\frac{1}{2}g^2 \int_0^1 \frac{dz}{z} \left(\frac{z}{1-z}\right) z^{-s/2} (1-z)^{-t/2} \left(k_2 \cdot \zeta_3 \zeta_2^i k_3^j - k_2 \cdot k_3 \zeta_2^i \zeta_3^j \right. \\
&\quad \left. - \zeta_2 \cdot \zeta_3 k_2^i k_3^j + \zeta_2 \cdot k_3 k_2^i \zeta_3^j\right) R_0^{ij} \\
&= \boxed{\frac{1}{2}g^2 \left(-k_2 \cdot \zeta_3 \zeta_2^i k_3^j + k_2 \cdot k_3 \zeta_2^i \zeta_3^j + \zeta_2 \cdot \zeta_3 k_2^i k_3^j - \zeta_2 \cdot k_3 k_2^i \zeta_3^j\right) B\left(1 - \tilde{s}/2, -\tilde{t}/2\right)}
\end{aligned} \tag{A.46}$$

Juntando todo tenemos

$$\begin{aligned}
\langle k_1 | V_B(\zeta_2, k_2) \Delta V_B(\zeta_3, k_3) | k_4 \rangle &= \frac{1}{2}g^2 \left(1 + \tilde{t}/2\right) \zeta_2 \cdot \zeta_3 B\left(1 - \tilde{s}/2, -1 - \tilde{t}/2\right) \\
&+ \frac{1}{2}g^2 \left[-\zeta_2 \cdot k_1 \zeta_3 \cdot k_4 + R_0^{ij} \left(\zeta_2^i k_2^j \zeta_3 \cdot k_4 - \zeta_3^i k_3^j \zeta_2 \cdot k_1\right) + R_0^{ij} R_0^{kl} \zeta_2^i k_2^j \zeta_3^k k_3^l\right] B\left(-\tilde{s}/2, 1 - \tilde{t}/2\right) \\
&+ \frac{1}{2}g^2 \left[\zeta_2 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot k_4 + \zeta_2 \cdot k_1 \zeta_3 \cdot k_2 + \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot k_2 + R_0^{ij} \left(-\zeta_2^i k_2^j \zeta_3 \cdot k_2 + \zeta_3^i k_3^j \zeta_2 \cdot k_3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - k_2 \cdot \zeta_3 \zeta_2^i k_3^j + k_2 \cdot k_3 \zeta_2^i \zeta_3^j + \zeta_2 \cdot \zeta_3 k_2^i k_3^j - \zeta_2 \cdot k_3 k_2^i \zeta_3^j\right)\right] B\left(1 - \tilde{s}/2, -\tilde{t}/2\right)
\end{aligned} \tag{A.47}$$

Ahora podemos hacer *sandwich* con un par de vectores sin masa $\langle \zeta_1 |$, $| \zeta_4 \rangle$. Sabiendo que $R_0^{ij} | k_4 \rangle = \delta^{jk} | i \rangle - \delta^{ik} | j \rangle$, donde el estado vectorial lo definimos por $| \zeta_4 \rangle = | i \rangle \zeta^i(k)$

con $\langle i||j\rangle = \delta^{ij}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\langle \zeta_1 || \zeta_4 \rangle &= \langle i | \zeta_1^i \zeta_4^j | j \rangle = \zeta_1^i \zeta_4^j \delta^{ij} \zeta_1 \cdot \zeta_4 \\
\langle \zeta_1 | R_0^{ij} | \zeta_4 \rangle &= \langle l | \zeta_1^l R_0^{ij} \zeta_4^k | k \rangle = \zeta_1^l \zeta_4^k \langle l | R_0^{ij} | k \rangle \\
&= \zeta_1^l \zeta_4^k \langle l | (-\delta^{kj} | i \rangle + \delta^{ki} | j \rangle) \rangle = \zeta_1^l \zeta_4^k \delta^{ki} \delta^{jl} - \zeta_1^l \zeta_4^k \delta^{kj} \delta^{il} = \zeta_1^j \zeta_4^i - \zeta_1^i \zeta_4^j \\
\langle \zeta_1 | R_0^{ij} R_0^{kl} | \zeta_4 \rangle &= \langle r | \zeta_1^r | R_0^{ij} R_0^{kl} \zeta_4^s | s \rangle = \langle r | \zeta_1^r | \zeta_1^r \zeta_4^s \delta^{ls} R_0^{ij} | k \rangle - \langle r | \zeta_1^r | \zeta_1^r \zeta_4^s \delta^{ks} R_0^{ij} | l \rangle \\
&= \langle r | \zeta_1^r | \zeta_1^r \zeta_4^s \delta^{ls} (\delta^{jk} | i \rangle - \delta^{ik} | j \rangle) \rangle - \langle r | \zeta_1^r | \zeta_1^r \zeta_4^s \delta^{ks} (\delta^{jl} | i \rangle - \delta^{il} | j \rangle) \rangle \\
&= \langle r | \zeta_1^r | \zeta_1^r \zeta_4^s \delta^{ls} \delta^{jk} | i \rangle - \langle r | \zeta_1^r | \zeta_1^r \zeta_4^s \delta^{ls} \delta^{ik} | j \rangle - \langle r | \zeta_1^r | \zeta_1^r \zeta_4^s \delta^{ks} \delta^{jl} | i \rangle \\
&\quad + \langle r | \zeta_1^r | \zeta_1^r \zeta_4^s \delta^{ks} \delta^{il} | j \rangle \\
&= \zeta_1^i \zeta_4^l \delta^{jk} - \zeta_1^j \zeta_4^l \delta^{ik} - \zeta_1^i \zeta_4^k \delta^{jl} + \zeta_1^j \zeta_4^k \delta^{il}
\end{aligned} \tag{A.48}$$

Expresamos (A.47) de una forma más factorizada, para ellos buscamos expresar las tres distintas funciones beta como una sola, es decir

$$B\left(1 - \tilde{s}/2, -1 - \tilde{t}/2\right) = \frac{\Gamma(1 - \tilde{s}/2)\Gamma(-1 - \tilde{t}/2)}{\Gamma(-\tilde{s}/2 - \tilde{t}/2)} = \frac{-\tilde{s}/2\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1 - \tilde{s}/2 - \tilde{t}/2)(-1 - \tilde{t}/2)} \left(-\frac{\tilde{s}}{2} - \frac{\tilde{t}}{2}\right) \tag{A.49}$$

donde usamos la propiedad de la función gama de Euler: $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ con $Re(z) > 0$,

$$\Gamma(1 - \tilde{s}/2) = -\frac{\tilde{s}}{2}\Gamma(-\tilde{s}/2), \tag{A.50}$$

$$\Gamma(-\tilde{t}/2) = \Gamma(1 - 1 - \tilde{t}/2) = \left(-1 - \frac{\tilde{t}}{2}\right)\Gamma(-1 - \tilde{t}/2), \tag{A.51}$$

$$\Gamma(1 - \tilde{s}/2 - \tilde{t}/2) = \left(-\frac{\tilde{s}}{2} - \frac{\tilde{t}}{2}\right)\Gamma(-\tilde{s}/2 - \tilde{t}/2). \tag{A.52}$$

entonces

$$\begin{aligned}
B\left(1 - \tilde{s}/2, -1 - \tilde{t}/2\right) &= \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1 - \tilde{s}/2 - \tilde{t}/2)} \frac{(\tilde{s}/2)(\tilde{s}/2 + \tilde{t}/2)}{1 + \tilde{t}/2} \\
&= -\frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1 - \tilde{s}/2 - \tilde{t}/2)} \frac{(\tilde{s}/2)(\tilde{s} + \tilde{t})}{2 + \tilde{t}} \sim \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1 - \tilde{s}/2 - \tilde{t}/2)} \frac{\tilde{s}\tilde{u}}{4}
\end{aligned} \tag{A.53}$$

con $\tilde{s} + \tilde{t} + \tilde{u} = 0$ (vectores de masa nula)

$$\begin{aligned}
B\left(-\tilde{s}/2, 1 - \tilde{t}/2\right) &= \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(1 - \tilde{t}/2)}{\Gamma(1 - \tilde{s}/2 - \tilde{t}/2)} = \frac{(-\tilde{t}/2)\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1 - \tilde{s}/2 - \tilde{t}/2)} = -\frac{\tilde{t}}{2} \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1 - \tilde{s}/2 - \tilde{t}/2)} \\
B\left(1 - \tilde{s}/2, -\tilde{t}/2\right) &= \frac{\Gamma(1 - \tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1 - \tilde{s}/2 - \tilde{t}/2)} = \frac{\tilde{s}}{2} \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1 - \tilde{s}/2 - \tilde{t}/2)}
\end{aligned} \tag{A.54}$$

Veamos como queda cada término de (A.47) al expresar la amplitud con una sola función beta, a saber $B(-\tilde{s}/2, -\tilde{t}/2) = \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)}$. Los términos recuadrados son términos que quedarán en la amplitud final tal cual como están. Indicaremos que términos se suman de a pares entre sí (dando a la expresión final de la amplitud un término proporcional a la variable de Mandelstam u), y cuales se cancelan de a pares.

$$\begin{aligned}
\boxed{1-1} &= -\frac{1}{2}g^2 \langle k_1 \cdot \zeta_2 k_4 \cdot \zeta_3 \rangle B(-\tilde{s}/2, 1-\tilde{t}/2) = \frac{1}{2} \frac{\tilde{t}}{2} g^2 \zeta_1 \cdot \zeta_4 k_1 \cdot \zeta_2 k_4 \cdot \zeta_3 \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
\boxed{1-3} &= -\frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{s}}{2} \zeta_1 \cdot \zeta_4 k_1 \cdot \zeta_2 k_2 \cdot \zeta_3 \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
\boxed{1-4} &= \frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{t}}{2} \zeta_3^i k_3^j k_1 \cdot \zeta_2 \langle R_0^{ij} \rangle k_2 \cdot \zeta_3 \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} = \frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{t}}{2} \zeta_3^i k_3^j k_1 \cdot \zeta_2 (\zeta_1^j \zeta_4^i - \zeta_1^i \zeta_4^j) \\
&= \left(\boxed{-\frac{\tilde{t}}{2} \zeta_1 \cdot \zeta_3 k_3 \cdot \zeta_4 k_1 \cdot \zeta_2} + \frac{\tilde{t}}{2} \zeta_3 \cdot \zeta_4 k_3 \cdot \zeta_1 k_1 \cdot \zeta_2 \right) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
\boxed{2-1} &= -\frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{s}}{2} \zeta_1 \cdot \zeta_4 k_3 \cdot \zeta_2 k_2 \cdot \zeta_3 \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= \frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{s}}{2} (\zeta_1 \cdot \zeta_4 k_1 \cdot \zeta_2 k_4 \cdot \zeta_3 + \frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{s}}{2} \zeta_1 \cdot \zeta_4 k_4 \cdot \zeta_2 k_4 \cdot \zeta_3) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
\boxed{2-2} &= -\frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{s}}{2} \zeta_1 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot k_2 \zeta_1 \cdot \zeta_4 \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= -\frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{s}}{2} (-\zeta_2 \cdot k_4 \zeta_3 \cdot k_2 \zeta_1 \cdot \zeta_4 - \zeta_2 \cdot k_1 \zeta_3 \cdot k_2 \zeta_1 \cdot \zeta_4) \\
&= -\frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{s}}{2} \left(\boxed{\zeta_2 \cdot k_4 \zeta_3 \cdot k_1 \zeta_1 \cdot \zeta_4} + \zeta_2 \cdot k_4 \zeta_3 \cdot k_4 \zeta_1 \cdot \zeta_4 - \zeta_2 \cdot k_1 \zeta_3 \cdot k_2 \zeta_1 \cdot \zeta_4 \right) \\
\boxed{2-3} &= \frac{1}{2}g^2 (1+\tilde{t}/2) \zeta_2 \cdot \zeta_3 \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \frac{\tilde{s}\tilde{u}}{4} \zeta_1 \cdot \zeta_4 \\
&= \left(\boxed{\frac{1}{2}g^2 \zeta_1 \cdot \zeta_4 \zeta_2 \cdot \zeta_3 \frac{\tilde{s}\tilde{u}}{4}} + \frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{t}}{2} \zeta_1 \cdot \zeta_4 \zeta_2 \cdot \zeta_3 \frac{\tilde{s}\tilde{u}}{4} \right) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
\boxed{2-4} &= -\frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{s}}{2} \zeta_3^i k_3^j k_3 \cdot \zeta_2 (\zeta_1^j \zeta_4^i - \zeta_1^i \zeta_4^j) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= -\frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{s}}{2} (-\zeta_4 \cdot k_3 \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_1 \cdot \zeta_3 + \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_1 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_4) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= -\frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{s}}{2} \left(\boxed{\zeta_4 \cdot k_1 \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_1 \cdot \zeta_3} + \zeta_4 \cdot k_2 \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_1 \cdot \zeta_3 + \zeta_1 \cdot k_3 \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_4 \right) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{4-1} &= \frac{1}{2}g^2 \langle R_0^{ij} \zeta_2^i k_2^j \zeta_3 \cdot k_4 \rangle (-\tilde{t}/2) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= \frac{1}{2}g^2 \zeta_2^i k_2^j \zeta_3 \cdot k_4 (-t/2) (\zeta_1^j \zeta_4^i - \zeta_1^i \zeta_4^j) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= \frac{1}{2}g^2 \left(\boxed{-\zeta_2 \cdot \zeta_4 k_2 \cdot \zeta_1 \zeta_3 \cdot k_4} + \zeta_2 \cdot \zeta_1 k_2 \cdot \zeta_4 \zeta_3 \cdot k_4 \right) \frac{\tilde{t}}{2} \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
\boxed{4-3} &= -\frac{1}{2}g^2 \langle R_0^{ij} \zeta_2^i k_2^j \zeta_3 \cdot k_2 \rangle (-\tilde{s}/2) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= \frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{s}}{2} \zeta_2^i k_2^j \zeta_3 \cdot k_2 (\zeta_1^j \zeta_4^i - \zeta_1^i \zeta_4^j) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= \frac{1}{2}g^2 \frac{s}{2} (\zeta_2 \cdot \zeta_4 k_2 \cdot \zeta_1 \zeta_3 \cdot k_2 - \zeta_2 \cdot \zeta_1 k_2 \cdot \zeta_4 \zeta_3 \cdot k_2) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= \frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{s}}{2} \left(\zeta_1 \cdot \zeta_2 k_1 \cdot \zeta_4 \zeta_3 \cdot k_2 + \zeta_2 \cdot \zeta_1 k_3 \cdot \zeta_4 \zeta_3 \cdot k_2 + \zeta_1 \cdot k_2 \zeta_4 \cdot \zeta_2 \zeta_3 \cdot k_2 \right) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= \frac{1}{2}g^2 \frac{s}{2} \left(\zeta_1 \cdot \zeta_2 k_1 \cdot \zeta_4 \zeta_3 \cdot k_2 + \zeta_2 \cdot \zeta_1 k_3 \cdot \zeta_4 \zeta_3 \cdot k_2 - \boxed{\zeta_1 \cdot k_4 \zeta_4 \cdot \zeta_2 \zeta_3 \cdot k_2} \right. \\
&\quad \left. - \zeta_1 \cdot k_3 \zeta_4 \cdot \zeta_2 \zeta_3 \cdot k_2 \right) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
\boxed{4-4} &= \frac{1}{2}g^2 \langle R_0^{ij} R_0^{kl} \zeta_2^i k_2^j \zeta_3^k k_3^l \rangle (-\tilde{t}/2) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= -\frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{t}}{2} \zeta_2^i k_2^j \zeta_3^k k_3^l \left(\zeta_1^i \zeta_4^l \delta^{jk} - \zeta_1^j \zeta_4^l \delta^{ik} - \zeta_1^i \zeta_4^k \delta^{jl} + \zeta_1^j \zeta_4^k \delta^{il} \right) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= -\frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{t}}{2} (\zeta_2 \cdot \zeta_1 k_2 \cdot \zeta_3 k_3 \cdot \zeta_4 - \zeta_2 \cdot \zeta_3 k_2 \cdot \zeta_1 k_3 \cdot \zeta_4 - \zeta_2 \cdot \zeta_1 k_2 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_4 + \zeta_2 \cdot k_3 k_2 \cdot \zeta_1 \zeta_3 \cdot \zeta_4) \\
&\quad \times \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= -\frac{1}{2}g^2 \frac{\tilde{t}}{2} \left(\zeta_2 \cdot \zeta_1 k_2 \cdot \zeta_3 k_3 \cdot \zeta_4 - \zeta_2 \cdot \zeta_3 k_2 \cdot \zeta_1 k_3 \cdot \zeta_4 - \zeta_2 \cdot \zeta_1 k_2 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_4 - \zeta_2 \cdot k_3 k_3 \cdot \zeta_1 \zeta_3 \cdot \zeta_4 \right. \\
&\quad \left. - \zeta_2 \cdot k_3 k_4 \cdot \zeta_1 \zeta_3 \cdot \zeta_4 \right) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= -\frac{1}{2}g^2 \frac{t}{2} \left(\boxed{\zeta_2 \cdot \zeta_1 k_2 \cdot \zeta_4 k_1 \cdot \zeta_3} + \zeta_2 \cdot \zeta_1 k_2 \cdot \zeta_4 k_4 \cdot \zeta_3 - \zeta_2 \cdot \zeta_1 k_2 \cdot \zeta_3 k_1 \cdot \zeta_4 - \zeta_2 \cdot \zeta_3 k_2 \cdot \zeta_1 k_3 \cdot \zeta_4 \right. \\
&\quad \left. - \zeta_2 \cdot \zeta_1 k_3 \cdot k_2 \zeta_3 \cdot \zeta_4 + \boxed{\zeta_1 \cdot k_3 k_4 \cdot \zeta_2 \zeta_3 \cdot \zeta_4} - \zeta_1 \cdot k_4 \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_4 \right. \\
&\quad \left. + \zeta_1 \cdot k_3 k_1 \cdot \zeta_2 \zeta_3 \cdot \zeta_4 \right) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)}
\end{aligned}$$

Llamaremos $\boxed{5-5}_{a,b,c,d}$ al primer, segundo, tercer y cuarto término de $\boxed{5-5}$ respec-

tivamente,

$$\begin{aligned}
\boxed{5-5}_a &= \frac{1}{2}g^2(-\tilde{s}/2)\zeta_2 \cdot \zeta_3 k_2^i k_3^j \left(-\zeta_1^i \zeta_4^j + \zeta_1^j \zeta_4^i\right) = \frac{1}{2}g^2\left(\frac{\tilde{s}}{2}\zeta_2 \cdot \zeta_3 k_2 \cdot \zeta_1 k_3 \cdot \zeta_4\right. \\
&\quad \left.- \frac{\tilde{s}}{2}\zeta_2 \cdot \zeta_3 k_2 \cdot \zeta_4 k_3 \cdot \zeta_1\right) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
\boxed{5-5}_b &= \frac{1}{2}g^2(-\tilde{s}/2)\zeta_2^i \zeta_3^j k_2 \cdot k_3 \left(-\zeta_1^i \zeta_4^j + \zeta_1^j \zeta_4^i\right) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= \frac{1}{2}g^2\left(\frac{\tilde{s}}{2}\zeta_2 \cdot \zeta_1 k_2 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_4 - \frac{\tilde{s}}{2}\zeta_2 \cdot \zeta_4 \zeta_3 \cdot \zeta_1 k_2 \cdot k_3\right) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= \left(-\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{4}\zeta_2 \cdot \zeta_1 \zeta_3 \cdot \zeta_4 + \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{4}\zeta_2 \cdot \zeta_4 \zeta_3 \cdot \zeta_1\right) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= \frac{1}{2}g^2\left(\frac{\tilde{u}\tilde{t}}{4}\zeta_2 \cdot \zeta_1 \zeta_3 \cdot \zeta_4 + \frac{\tilde{t}^2}{2}\zeta_2 \cdot \zeta_1 \zeta_3 \cdot \zeta_4 + \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{4}\zeta_2 \cdot \zeta_4 \zeta_3 \cdot \zeta_1\right) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
\boxed{5-5}_c &= \frac{1}{2}g^2(-\tilde{s}/2)(-k_2^i \zeta_3^j \zeta_2 \cdot k_3) \left(-\zeta_1^i \zeta_4^j + \zeta_1^j \zeta_4^i\right) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= \frac{1}{2}g^2\frac{\tilde{s}}{2}(-k_2 \cdot \zeta_1 \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_4 + \zeta_2 \cdot k_3 k_2 \cdot \zeta_4 \zeta_3 \cdot \zeta_1) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
&= \frac{1}{2}g^2\frac{\tilde{s}}{2}\left(\zeta_1 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_4 \zeta_2 \cdot k_3 + \zeta_1 \cdot k_4 \zeta_3 \cdot \zeta_4 \zeta_2 \cdot k_3 + \zeta_1 \cdot \zeta_3 k_2 \cdot \zeta_4 \zeta_2 \cdot k_3\right) \\
&\quad \times \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} \\
\boxed{5-5}_d &= \frac{1}{2}g^2(-\tilde{s}/2)\left(-\zeta_1^i \zeta_4^j + \zeta_1^j \zeta_4^i\right) \zeta_2^i k_3^j \zeta_3 \cdot k_2 \\
&= \frac{1}{2}g^2\left(-\frac{\tilde{s}}{2}\zeta_1 \cdot \zeta_2 \zeta_4 \cdot k_3 k_2 \cdot \zeta_3 + \frac{\tilde{s}}{2}\zeta_1 \cdot k_3 \zeta_2 \cdot \zeta_4 \zeta_3 \cdot k_2\right) \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)}
\end{aligned}$$

Al sumar el primer término de $\boxed{5-5}_a$ con el cuarto término de $\boxed{4-4}$ obtenemos:

$$-\frac{1}{2}\tilde{u}(\zeta_1 \cdot k_2 \zeta_4 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_2). \text{ Si sumamos } \boxed{1-1} \text{ con } \boxed{2-2} \text{ tenemos: } -\frac{1}{2}\tilde{u}(\zeta_3 \cdot k_4 \zeta_2 \cdot k_1 \zeta_1 \cdot \zeta_4),$$

y al sumar el segundo término de $\boxed{5-5}_c$ con el segundo término de $\boxed{4-4}$ obtenemos

$$: -\frac{1}{2}\tilde{u}(\zeta_1 \cdot k_4 \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_4). \text{ Por último si sumamos el primer término de } \boxed{4-3} \text{ con el}$$

$$\text{tercer término de } \boxed{4-4} \text{ obtenemos: } -\frac{1}{2}\tilde{u}(\zeta_1 \cdot \zeta_2 \zeta_3 \cdot k_2 \zeta_4 \cdot k_1).$$

Ahora veamos los términos que se anulan de a pares:

- Se anula el término de $\boxed{1-3}$ con el tercer término de $\boxed{2-2}$
- Se anula el segundo término de $\boxed{1-4}$ con el octavo término de $\boxed{4-4}$

- Se anula el segundo término de $\boxed{2-1}$ con el segundo término de $\boxed{2-2}$
- Se anula el segundo término de $\boxed{2-4}$ con el tercer término de $\boxed{5-5}_c$
- Se anula el tercer término de $\boxed{2-4}$ con el primer término de $\boxed{5-5}_c$
- Se anula el segundo término de $\boxed{4-1}$ con el segundo término de $\boxed{4-4}$
- Se anula el segundo término de $\boxed{4-3}$ con el primer término de $\boxed{5-5}_d$
- Se anula el cuarto término de $\boxed{4-3}$ con el segundo término de $\boxed{5-5}_d$
- Se anula el quinto de término de $\boxed{4-4}$ con el segundo término de $\boxed{5-5}_b$

Entonces el resultado final es

$$\mathcal{A}_{4,ab}(1, 2, 3, 4) = -\frac{1}{2}g^2 \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} K_{ab}^{\text{bos}}(\zeta_1, k_1; \zeta_2, k_2; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4) \quad (\text{A.55})$$

siendo K_{ab}^{bos} el factor cinemático dada por

$$\begin{aligned} K_{ab}^{\text{bos}}(1, 2, 3, 4) &= -\frac{1}{4}(\tilde{s}\tilde{t}\zeta_1 \cdot \zeta_3\zeta_2 \cdot \zeta_4 + \tilde{s}\tilde{u}\zeta_2 \cdot \zeta_3\zeta_1 \cdot \zeta_4 + \tilde{t}\tilde{u}\zeta_1 \cdot \zeta_2\zeta_3 \cdot \zeta_4) \\ &+ \frac{1}{2}\tilde{s}(\zeta_1 \cdot k_3\zeta_4 \cdot k_2\zeta_2 \cdot \zeta_3 + \zeta_2 \cdot k_4\zeta_3 \cdot k_1\zeta_1 \cdot \zeta_4 + \zeta_1 \cdot k_4\zeta_3 \cdot k_2\zeta_2 \cdot \zeta_4 \\ &+ \zeta_2 \cdot k_3\zeta_4 \cdot k_1\zeta_1 \cdot \zeta_3) \\ &+ \frac{1}{2}\tilde{u}(\zeta_3 \cdot k_4\zeta_2 \cdot k_1\zeta_1 \cdot \zeta_4 + \zeta_1 \cdot k_2\zeta_4 \cdot k_3\zeta_3 \cdot \zeta_2 + \zeta_1 \cdot k_4\zeta_2 \cdot k_3\zeta_3 \cdot \zeta_4 \\ &+ \zeta_3 \cdot k_2\zeta_4 \cdot k_1\zeta_1 \cdot \zeta_2) \\ &+ \frac{1}{2}\tilde{t}(\zeta_3 \cdot k_4\zeta_1 \cdot k_2\zeta_2 \cdot \zeta_4 + \zeta_2 \cdot k_1\zeta_4 \cdot k_3\zeta_3 \cdot \zeta_1 + \zeta_2 \cdot k_4\zeta_1 \cdot k_3\zeta_3 \cdot \zeta_4 \\ &+ \zeta_3 \cdot k_1\zeta_4 \cdot k_2\zeta_2 \cdot \zeta_1) \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

con lo que finaliza el cálculo deseado.

Apéndice B

Los 30 productos tensoriales que contribuyen a la amplitud de dispersión de 4 dilatinos

A continuación mostramos explícitamente los 30 términos que provienen del producto tensorial $K_{ab}^{\text{fer}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) \otimes \frac{1}{16} K_{ab}^{\text{bos}}(1, 2, 4, 3)$ para la dispersión de cuatro dilatinos RNS.

Primero presentamos los términos de la forma $\mathcal{T}_{1,i}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,1} &= \left(-\frac{1}{8} \tilde{s} \bar{u}_2 \Gamma^{M'} u_3 \bar{u}_1 \Gamma_{M'} u_4 \right) \otimes \left(-\frac{1}{16 \cdot 4} \tilde{t} \zeta_1^M \zeta_{3,M} \zeta_4^Q \zeta_{2,Q} \right) \\ &= \frac{\tilde{s}^2 \tilde{t}}{512} \bar{\lambda}_2 \Gamma_N \Gamma_P \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^P \Gamma^M \lambda_4 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,2} &= \left(-\frac{1}{8} \tilde{s} \bar{u}_2 \Gamma^{M'} u_3 \bar{u}_1 \Gamma_{M'} u_4 \right) \otimes \left(-\frac{1}{16 \cdot 4} \tilde{s} \tilde{u} \zeta_1^M \zeta_{4,M} \zeta_3^P \zeta_{2,P} \right) \\ &= \frac{1}{8} \tilde{s}^2 \tilde{u} \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \lambda_4 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,3} &= \left(-\frac{1}{8} \tilde{s} \bar{u}_2 \Gamma^{M'} u_3 \bar{u}_1 \Gamma_{M'} u_4 \right) \otimes \left(-\frac{1}{16 \cdot 4} \tilde{t} \tilde{u} \zeta_1^M \zeta_{2,M} \zeta_3^P \zeta_{4,P} \right) \\ &= \frac{\tilde{s} \tilde{t} \tilde{u}}{512} \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_P \Gamma_N \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^P \Gamma^N \lambda_4 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,4} &= \left(-\frac{1}{8} \tilde{s} \bar{u}_2 \Gamma^{M'} u_3 \bar{u}_1 \Gamma_{M'} u_4 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{s} \zeta_1^M k_{3,M} \zeta_4^Q k_{2,Q} \zeta_3^P \zeta_{2,P} \right) \\ &= -\frac{\tilde{s}^2}{32} \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 (k_3 \cdot \Gamma) \Gamma^M (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,5} &= \left(-\frac{1}{8} \tilde{s} \bar{u}_2 \Gamma^{M'} u_3 \bar{u}_1 \Gamma_{M'} u_4 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{s} \zeta_2^N k_{4,N} \zeta_3^P k_{1,P} \zeta_1^M \zeta_{4,M} \right) \\
&= -\frac{\tilde{s}^2}{32} \bar{\lambda}_2 (k_4 \cdot \Gamma) \Gamma^M (k_1 \cdot \Gamma) \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \lambda_4
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,6} &= \left(-\frac{1}{8} \tilde{s} \bar{u}_2 \Gamma^{M'} u_3 \bar{u}_1 \Gamma_{M'} u_4 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{s} \zeta_1^M k_{4,M} \zeta_3^P k_{2,P} \zeta_4^Q \zeta_{2,Q} \right) \\
&= -\frac{\tilde{s}^2}{256} \bar{\lambda}_2 \Gamma^N \Gamma^M (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_3 \bar{\lambda}_1 (k_4 \cdot \Gamma) \Gamma_M \Gamma_N \lambda_4 \\
&= -\frac{\tilde{s}^2}{16} k_2^{[M} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{N]} \lambda_3 k_{4[M} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{N]} \lambda_4
\end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,7} &= \left(-\frac{1}{8} \tilde{s} \bar{u}_2 \Gamma^{M'} u_3 \bar{u}_1 \Gamma_{M'} u_4 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{s} \zeta_2^N k_{3,N} \zeta_4^Q k_{1,Q} \zeta_1^M \zeta_{3,M} \right) \\
&= -\frac{\tilde{s}^2}{256} \bar{\lambda}_2 (k_3 \cdot \Gamma) \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N (k_1 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&= -\frac{\tilde{s}^2}{16} k_{3[M} \bar{\lambda}_2 \Gamma_{N]} \lambda_3 k_1^{[M} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{N]} \lambda_4
\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,8} &= \left(-\frac{1}{8} \tilde{s} \bar{u}_2 \Gamma^{M'} u_3 \bar{u}_1 \Gamma_{M'} u_4 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{u} \zeta_2^N k_{1,N} \zeta_3^P k_{4,P} \zeta_4^Q \zeta_{1,Q} \right) \\
&= -\frac{\tilde{s} \tilde{u}}{32} \bar{\lambda}_2 (k_1 \cdot \Gamma) \Gamma^M (k_4 \cdot \Gamma) \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \lambda_4
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,9} &= \left(-\frac{1}{8} \tilde{s} \bar{u}_2 \Gamma^{M'} u_3 \bar{u}_1 \Gamma_{M'} u_4 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{u} \zeta_4^N k_{3,N} \zeta_1^M k_{2,M} \zeta_2^Q \zeta_{3,Q} \right) \\
&= -\frac{\tilde{s} \tilde{u}}{32} \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 (k_2 \cdot \Gamma) \Gamma^M (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,10} &= \left(-\frac{1}{8} \tilde{s} \bar{u}_2 \Gamma^{M'} u_3 \bar{u}_1 \Gamma_{M'} u_4 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{u} \zeta_2^N k_{3,N} \zeta_1^M k_{4,M} \zeta_4^Q \zeta_{3,Q} \right) \\
&= -\frac{\tilde{s} \tilde{u}}{256} \bar{\lambda}_2 (k_3 \cdot \Gamma) \Gamma^M \Gamma^N \lambda_3 \bar{\lambda}_1 (k_4 \cdot \Gamma) \Gamma_M \Gamma_N \lambda_4 \\
&= -\frac{\tilde{s} \tilde{u}}{16} k_3^{[N} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{M]} \lambda_3 k_{4[N} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{M]} \lambda_4
\end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,11} &= \left(-\frac{1}{8} \tilde{s} \bar{u}_2 \Gamma^{M'} u_3 \bar{u}_1 \Gamma_{M'} u_4 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{u} \zeta_4^Q k_{1,Q} \zeta_3^P k_{2,P} \zeta_2^N \zeta_{1,N} \right) \\
&= -\frac{\tilde{s} \tilde{u}}{256} \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N (k_1 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&= -\frac{\tilde{s} \tilde{u}}{16} k_2^{[M} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{N]} \lambda_3 k_{1[M} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{N]} \lambda_4
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,12} &= \left(-\frac{1}{8} \tilde{s} \bar{u}_2 \Gamma^{M'} u_3 \bar{u}_1 \Gamma_{M'} u_4 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{t} \zeta_1^M k_{2,M} \zeta_3^P k_{4,P} \zeta_4^Q \zeta_{2,Q} \right) \\
&= -\frac{\tilde{s} \tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N (k_4 \cdot \Gamma) \lambda_3 \bar{\lambda}_1 (k_2 \cdot \Gamma) \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4
\end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,13} &= \left(-\frac{1}{8} \tilde{s} \bar{u}_2 \Gamma^{M'} u_3 \bar{u}_1 \Gamma_{M'} u_4 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{t} \zeta_4^Q k_{3,Q} \zeta_2^N k_{1,N} \zeta_1^M \zeta_{3,M} \right) \\
&= -\frac{\tilde{s} \tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_2 (k_1 \cdot \Gamma) \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4
\end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,14} &= \left(-\frac{1}{8} \tilde{s} \bar{u}_2 \Gamma^{M'} u_3 \bar{u}_1 \Gamma_{M'} u_4 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{t} \zeta_1^M k_{3,M} \zeta_2^N k_{4,N} \zeta_4^Q \zeta_{3,Q} \right) \\
&= -\frac{\tilde{s} \tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_2 (k_4 \cdot \Gamma) \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 (k_3 \cdot \Gamma) \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4
\end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,15} &= \left(-\frac{1}{8} \tilde{s} \bar{u}_2 \Gamma^{M'} u_3 \bar{u}_1 \Gamma_{M'} u_4 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{t} \zeta_4^Q k_{2,Q} \zeta_3^P k_{1,P} \zeta_1^M \zeta_{2,M} \right) \\
&= -\frac{\tilde{s} \tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N (k_1 \cdot \Gamma) \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Ahora, los términos de la forma $\mathcal{T}_{2,i}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,1} &= \left(\frac{1}{8} \tilde{t} \bar{u}_1 \Gamma^{M'} u_2 \bar{u}_4 \Gamma_{M'} u_3 \right) \otimes \left(-\frac{1}{16 \cdot 4} \tilde{s} \zeta_1^M \zeta_{3,M} \zeta_4^Q \zeta_{2,Q} \right) \\
&= -\frac{\tilde{s} \tilde{t}^2}{512} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^P \Gamma^N \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_N \Gamma_P \Gamma_M \lambda_3
\end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,2} &= \left(\frac{1}{8} \tilde{t} \bar{u}_1 \Gamma^{M'} u_2 \bar{u}_4 \Gamma_{M'} u_3 \right) \otimes \left(-\frac{1}{16 \cdot 4} \tilde{s} \tilde{u} \zeta_1^M \zeta_{4,M} \zeta_3^P \zeta_{2,P} \right) \\
&= -\frac{\tilde{s} \tilde{t} \tilde{u}}{512} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^P \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_P \lambda_3
\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,3} &= \left(\frac{1}{8} \tilde{t} \bar{u}_1 \Gamma^{M'} u_2 \bar{u}_4 \Gamma_{M'} u_3 \right) \otimes \left(-\frac{1}{16 \cdot 4} \tilde{t} \tilde{u} \zeta_1^M \zeta_{2,M} \zeta_3^P \zeta_{4,P} \right) \\
&= -\frac{1}{8} \tilde{t}^2 \tilde{u} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \lambda_3
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,4} &= \left(\frac{1}{8} \tilde{t} \bar{u}_1 \Gamma^{M'} u_2 \bar{u}_4 \Gamma_{M'} u_3 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{s} \zeta_1^M k_{3,M} \zeta_4^Q k_{2,Q} \zeta_3^P \zeta_{2,P} \right) \\
&= \frac{\tilde{s} \tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_1 (k_3 \cdot \Gamma) \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 (k_2 \cdot \Gamma) \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3
\end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,5} &= \left(\frac{1}{8} \tilde{t} \bar{u}_1 \Gamma^{M'} u_2 \bar{u}_4 \Gamma_{M'} u_3 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{s} \zeta_2^N k_{4,N} \zeta_3^P k_{1,P} \zeta_1^M \zeta_{4,M} \right) \\
&= \frac{\tilde{s} \tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N (k_4 \cdot \Gamma) \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N (k_1 \cdot \Gamma) \lambda_3
\end{aligned} \tag{B.20}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,6} &= \left(\frac{1}{8} \tilde{t} \bar{u}_1 \Gamma^{M'} u_2 \bar{u}_4 \Gamma_{M'} u_3 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{s} \zeta_1^M k_{4,M} \zeta_3^P k_{2,P} \zeta_4^Q \zeta_{2,Q} \right) \\
&= \frac{\tilde{s} \tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_1 (k_4 \cdot \Gamma) \Gamma_M \Gamma_N \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^N \Gamma^M (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_3
\end{aligned} \tag{B.21}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,7} &= \left(\frac{1}{8} \tilde{t} \bar{u}_1 \Gamma^{M'} u_2 \bar{u}_4 \Gamma_{M'} u_3 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{s} \zeta_2^N k_{3,N} \zeta_4^Q k_{1,Q} \zeta_1^M \zeta_{3,M} \right) \\
&= \frac{\tilde{s} \tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_2 \bar{\lambda}_4 (k_1 \cdot \Gamma) \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3
\end{aligned} \tag{B.22}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,8} &= \left(\frac{1}{8} \tilde{t} \bar{u}_1 \Gamma^{M'} u_2 \bar{u}_4 \Gamma_{M'} u_3 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{u} \zeta_2^N k_{1,N} \zeta_3^P k_{4,P} \zeta_4^Q \zeta_{1,Q} \right) \\
&= \frac{\tilde{t} \tilde{u}}{256} \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N (k_1 \cdot \Gamma) \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^M \Gamma^N (k_4 \cdot \Gamma) \lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{t} \tilde{u}}{16} k_{1[N} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{M]} \lambda_2 k_4^{[N} \bar{\lambda}_4 \Gamma^{M]} \lambda_3
\end{aligned} \tag{B.23}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,9} &= \left(\frac{1}{8} \tilde{t} \bar{u}_1 \Gamma^{M'} u_2 \bar{u}_4 \Gamma_{M'} u_3 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{u} \zeta_4^Q k_{3,Q} \zeta_1^M k_{2,M} \zeta_2^N \zeta_{3,N} \right) \\
&= \frac{\tilde{t} \tilde{u}}{256} \bar{\lambda}_1 (k_2 \cdot \Gamma) \Gamma^M \Gamma^N \lambda_2 \bar{\lambda}_4 (k_3 \cdot \Gamma) \Gamma_M \Gamma_N \lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{t} \tilde{u}}{16} k_2^{[N} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{M]} \lambda_2 k_{3[N} \bar{\lambda}_4 \Gamma_{M]} \lambda_3
\end{aligned} \tag{B.24}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,10} &= \left(\frac{1}{8} \tilde{t} \bar{u}_1 \Gamma^{M'} u_2 \bar{u}_4 \Gamma_{M'} u_3 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{u} \zeta_2^N k_{3,N} \zeta_1^M k_{4,M} \zeta_4^Q \zeta_{3,Q} \right) \\
&= \frac{\tilde{t} \tilde{u}}{32} \bar{\lambda}_1 (k_4 \cdot \Gamma) \Gamma^M (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \lambda_3
\end{aligned} \tag{B.25}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,11} &= \left(\frac{1}{8} \tilde{t} \bar{u}_1 \Gamma^{M'} u_2 \bar{u}_4 \Gamma_{M'} u_3 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{u} \zeta_4^Q k_{1,Q} \zeta_3^P k_{2,P} \zeta_2^N \zeta_{1,N} \right) \\
&= \frac{\tilde{t} \tilde{u}}{32} \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 (k_1 \cdot \Gamma) \Gamma^M (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_3
\end{aligned} \tag{B.26}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,12} &= \left(\frac{1}{8} \tilde{t} \bar{u}_1 \Gamma^{M'} u_2 \bar{u}_4 \Gamma_{M'} u_3 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{t} \zeta_1^M k_{2,M} \zeta_3^P k_{4,P} \zeta_4^Q \zeta_{2,Q} \right) \\
&= \frac{\tilde{t}^2}{256} \bar{\lambda}_1 (k_2 \cdot \Gamma) \Gamma^M \Gamma^N \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_N \Gamma_M (k_4 \cdot \Gamma) \lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{t}^2}{16} k_2^{[N} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{M]} \lambda_2 k_{4[N} \bar{\lambda}_4 \Gamma_{M]} \lambda_3
\end{aligned} \tag{B.27}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,13} &= \left(\frac{1}{8} \tilde{t} \bar{u}_1 \Gamma^{M'} u_2 \bar{u}_4 \Gamma_{M'} u_3 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{t} \zeta_4^Q k_{3,Q} \zeta_2^N k_{1,N} \zeta_1^M \zeta_{3,M} \right) \\
&= \frac{\tilde{t}^2}{256} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N (k_1 \cdot \Gamma) \lambda_2 \bar{\lambda}_4 (k_3 \cdot \Gamma) \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{t}^2}{16} k_1^{[N} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{M]} \lambda_2 k_{3[N} \bar{\lambda}_4 \Gamma_{M]} \lambda_3
\end{aligned} \tag{B.28}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,14} &= \left(\frac{1}{8} \tilde{t} \bar{u}_1 \Gamma^{M'} u_2 \bar{u}_4 \Gamma_{M'} u_3 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{t} \zeta_1^M k_{3,M} \zeta_2^Q k_{4,Q} \zeta_4^N \zeta_{3,N} \right) \\
&= \frac{\tilde{t}^2}{32} \bar{\lambda}_1 (k_3 \cdot \Gamma) \Gamma^M (k_4 \cdot \Gamma) \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \lambda_3
\end{aligned} \tag{B.29}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,15} &= \left(\frac{1}{8} \tilde{t} \bar{u}_1 \Gamma^{M'} u_2 \bar{u}_4 \Gamma_{M'} u_3 \right) \otimes \left(\frac{1}{16 \cdot 2} \tilde{t} \zeta_4^Q k_{2,Q} \zeta_3^P k_{1,P} \zeta_1^M \zeta_{2,M} \right) \\
&= \frac{\tilde{t}^2}{32} \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 (k_2 \cdot \Gamma) \Gamma^M (k_1 \cdot \Gamma) \lambda_3
\end{aligned} \tag{B.30}$$

Al sumar todos estos términos obtenemos la ecuación (5.30). En el próximo apéndice abriremos estos términos uno por uno para hacer aparecer las variables de Mandelstam en todos ellos a partir de los impulsos k_i .

Apéndice C

Desarrollo explícito de los 30 términos que contribuyen a K_C^4 -dilatinos

En este apéndice haremos explícito el desarrollo de los términos en (5.30), empezando por el de la forma $\mathcal{T}_{1,4}$ y luego por el término $\mathcal{T}_{2,4}$ para el segundo grupo de términos, ya que a partir de estos términos tenemos los impulsos k_i en las expresiones. Comenzando,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,4} &= -\frac{\tilde{s}^2}{32} \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 (k_3 \cdot \Gamma) \Gamma^M (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&= -\frac{\tilde{s}^2}{32} k_{3,N} k_{2,P} [\bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^N \Gamma^0 \Gamma^P \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma_i \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^N \Gamma^i \Gamma^P \lambda_4] \\
&= -\frac{\tilde{s}^2}{32} [k_3^0 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^0 \Gamma^0 \lambda_4 - k_3^1 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^0 \Gamma^0 \lambda_4 - k_3^2 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^0 \Gamma^0 \lambda_4 \\
&\quad - k_3^0 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^0 \Gamma^1 \lambda_4 + k_3^1 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^0 \Gamma^1 \lambda_4 + k_3^2 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^0 \Gamma^1 \lambda_4 \\
&\quad + k_3^0 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_i \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^i \Gamma^0 \lambda_4 - k_3^1 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_i \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^i \Gamma^0 \lambda_4 - k_3^2 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_i \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^i \Gamma^0 \lambda_4 \\
&\quad - k_3^0 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_i \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^i \Gamma^1 \lambda_4 + k_3^1 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_i \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^i \Gamma^1 \lambda_4 + k_3^2 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_i \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^i \Gamma^1 \lambda_4] \\
&= -\frac{\tilde{s}^2}{32} [k_3^0 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 - k_3^1 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_4 - k_3^2 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_4 \\
&\quad - k_3^0 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_4 + k_3^1 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 + k_3^2 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^0 \Gamma^1 \lambda_4 - k_3^0 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_i \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^i \lambda_4 \\
&\quad - k_3^1 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_i \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^i \Gamma^0 \lambda_4 - k_3^2 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_i \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^i \Gamma^0 \lambda_4 - k_3^0 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_i \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^i \Gamma^1 \lambda_4 \\
&\quad + k_3^1 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_i \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^i \Gamma^1 \lambda_4 + k_3^2 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_i \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^i \Gamma^1 \lambda_4] \\
&= -\frac{\tilde{s}^2}{32} [k_3^0 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 - k_3^1 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_4 - k_3^2 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_4 - k_3^0 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_4 \\
&\quad + k_3^1 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 + k_3^2 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^0 \Gamma^1 \lambda_4 - k_3^0 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_i \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^i \lambda_4 + k_3^1 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_i \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 \\
&\quad - k_3^1 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^0 \lambda_4 - k_3^1 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^{i>2} \Gamma^0 \lambda_4 + k_3^2 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 \\
&\quad - k_3^1 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^0 \lambda_4 - k_3^1 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^{i>2} \Gamma^0 \lambda_4 + k_3^2 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - k_3^2 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^1 \Gamma^0 \lambda_4 - k_3^2 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^{i>2} \Gamma^0 \lambda_4 + k_3^0 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 \\
& - k_3^0 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^2 \Gamma^1 \lambda_4 - k_3^0 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^{i>2} \Gamma^1 \lambda_4 - k_3^1 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_4 \\
& + k_3^1 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_4 + k_3^1 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_4 + k_3^2 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^1 \Gamma^1 \lambda_4 \\
& + k_3^2 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^2 \Gamma^1 \lambda_4 + k_3^2 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^{i>2} \Gamma^1 \lambda_4] \\
& = -\frac{\tilde{s}^2}{32} \left[-\frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_4 \right. \\
& - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 \\
& - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 \\
& - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^2 \Gamma^{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_4 \\
& - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_4 \\
& \left. + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^{i>2} \lambda_4 \right] \\
& = -\frac{\tilde{s}^2}{32} \left[\frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 \right. \\
& - \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_2 \Gamma_{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 \\
& \left. + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_{i>2} \lambda_4 \right],
\end{aligned} \tag{C.1}$$

y en el límite de Regge

$$\mathcal{T}_{1,4}^{\text{Regge}} = \frac{\tilde{s}^3}{64} [\bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4]. \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\tilde{s}^2}{32} \left[\frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \right. \\
&- \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 - \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 \\
&+ \frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 \\
&- \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 \\
&\left. + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 \right], \quad (\text{C.3})
\end{aligned}$$

siendo en el límite de Regge:

$$\mathcal{T}_{1,5}^{\text{Regge}} = \frac{\tilde{s}^3}{64} [\bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4]. \quad (\text{C.4})$$

Veamos el siguiente

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,6} &= -\frac{\tilde{s}^2}{16} k_2^{[M} \bar{\lambda}_2 \Gamma^N] \lambda_3 k_{4[M} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{N]} \lambda_4 \\
&= -\frac{\tilde{s}^2}{16} [k_2^{[0} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1] \lambda_3 k_{4[0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{1]} \lambda_4 + k_2^{[0} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2] \lambda_3 k_{4[0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{2]} \lambda_4 + k_2^{[1} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0] \lambda_3 k_{4[1} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{0]} \lambda_4 \\
&+ k_2^{[1} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2] \lambda_3 k_{4[1} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{2]} \lambda_4 + k_2^{[2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0] \lambda_3 k_{4[2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{0]} \lambda_4 + k_2^{[2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1] \lambda_3 k_{4[2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{1]} \lambda_4 \\
&+ k_2^{[0} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2}] \lambda_3 k_{4[0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2]} \lambda_4 + k_2^{[1} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2}] \lambda_3 k_{4[1} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2]} \lambda_4 + k_2^{[2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2}] \lambda_3 k_{4[2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2]} \lambda_4 \\
&+ k_2^{[i>2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0] \lambda_3 k_{4[i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{0]} \lambda_4 + k_2^{[i>2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1] \lambda_3 k_{4[i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{1]} \lambda_4 + k_2^{[i>2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2] \lambda_3 k_{4[i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{2]} \lambda_4] \\
&= -\frac{\tilde{s}^2}{16} [k_2^{[0} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1] \lambda_3 k_{4[0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{1]} \lambda_4 + k_2^{[0} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2] \lambda_3 k_{4[0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{2]} \lambda_4 + k_2^{[1} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0] \lambda_3 k_{4[1} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{0]} \lambda_4 \\
&+ k_2^{[1} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2] \lambda_3 k_{4[1} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{2]} \lambda_4 + k_2^{[2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0] \lambda_3 k_{4[2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{0]} \lambda_4 + k_2^{[2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1] \lambda_3 k_{4[2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{1]} \lambda_4 \\
&- \frac{1}{8} k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 k_4^0 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 + \frac{1}{8} k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 k_4^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4] \\
&= -\frac{\tilde{s}^2}{16} \left[\frac{\tilde{s}}{16} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{16} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{16} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 \right. \\
&+ \frac{\tilde{s}}{16} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{16} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{16} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\
&+ \frac{\tilde{s}}{16} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{16} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{16} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\
&+ \frac{\tilde{s}}{16} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{16} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{16} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 \\
&+ \frac{\tilde{s}}{16} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{16} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{16} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 \\
&\left. + \frac{\tilde{s}}{16} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\tilde{s}^2}{16} \left[\frac{\tilde{s}}{8} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 \right. \\
&+ \frac{\tilde{s}}{8} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 \\
&- \left. \frac{\tilde{s}}{8} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 \right] \\
&= -\frac{\tilde{s}^2}{16} \left[\frac{\tilde{s}}{8} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 \right. \\
&+ \frac{\tilde{s}}{8} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{8} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 - \frac{\tilde{u}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>1} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>1} \lambda_4 \left. \right] \\
&= -\frac{\tilde{s}^3}{128} \left[\bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 \right. \\
&+ \left. \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 - 2 \frac{\tilde{u}}{\tilde{s}} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>1} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>1} \lambda_4 \right], \tag{C.5}
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,6}^{\text{Regge}} &= -\frac{\tilde{s}^3}{128} \left[\bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 \right. \\
&+ \left. \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + 2 \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>1} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>1} \lambda_4 \right]. \tag{C.6}
\end{aligned}$$

El siguiente término,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,7} &= -\frac{\tilde{s}^2}{16} k_3^{[M} \bar{\lambda}_2 \Gamma^N] \lambda_3 k_{1[M} \bar{\lambda}_1 \Gamma_N] \lambda_4 \\
&= -\frac{\tilde{s}^2}{16} \left[k_3^{[0} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1] \lambda_3 k_{1[0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_1] \lambda_4 + k_3^{[0} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2] \lambda_3 k_{1[0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_2] \lambda_4 + k_3^{[1} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0] \lambda_3 k_{1[1} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0] \lambda_4 \right. \\
&+ k_3^{[1} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2] \lambda_3 k_{1[1} \bar{\lambda}_1 \Gamma_2] \lambda_4 + k_3^{[2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0] \lambda_3 k_{1[2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0] \lambda_4 + k_3^{[2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1] \lambda_3 k_{1[2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_1] \lambda_4 \\
&+ k_3^{[0} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2}] \lambda_3 k_{1[0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2}] \lambda_4 + k_3^{[1} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2}] \lambda_3 k_{1[1} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2}] \lambda_4 \lambda_4 + k_3^{[2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2}] \lambda_3 k_{1[2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2}] \lambda_4 \\
&+ k_3^{[i>2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0] \lambda_3 k_{1[i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0] \lambda_4 + k_3^{[i>2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1] \lambda_3 k_{1[i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_1] \lambda_4 + k_3^{[i>2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2] \lambda_3 k_{1[i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_2] \lambda_4 \left. \right] \\
&= -\frac{\tilde{s}^2}{16} \left[\frac{\tilde{s}}{16} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{16} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{16} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 \right. \\
&+ \frac{\tilde{s}}{16} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{16} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{16} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 \\
&+ \frac{\tilde{s}}{16} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{16} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{16} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\
&+ \frac{\tilde{s}}{16} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{16} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{16} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 \\
&+ \left. \frac{\tilde{s}}{16} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{16} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{16} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\tilde{s}}{16} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4] \\
& = -\frac{\tilde{s}^2}{16} \left[\frac{\tilde{s}}{8} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 \right. \\
& + \frac{\tilde{s}}{8} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{s}}{8} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{8} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{u}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4] \\
& = -\frac{\tilde{s}^2}{16} \left[\frac{\tilde{s}}{8} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 \right. \\
& + \frac{\tilde{s}}{8} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{8} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{8} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 \\
& - \frac{\tilde{u}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>1} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>1} \lambda_4] \\
& = -\frac{\tilde{s}^3}{128} [\bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 \\
& + \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 \\
& - 2 \frac{\tilde{u}}{\tilde{s}} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>1} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>1} \lambda_4], \tag{C.7}
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,7}^{\text{Regge}} & = -\frac{\tilde{s}^3}{128} [\bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\
& + 2 \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>1} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>1} \lambda_4]. \tag{C.8}
\end{aligned}$$

El siguiente término,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,8} & = -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{32} \bar{\lambda}_2 (k_1 \cdot \Gamma) \Gamma^M (k_4 \cdot \Gamma) \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \lambda_4 \\
& = -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{32} [\bar{\lambda}_2 (k_1 \cdot \Gamma) \Gamma^0 (k_4 \cdot \Gamma) \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 (k_1 \cdot \Gamma) \Gamma^i (k_4 \cdot \Gamma) \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_i \lambda_4] \\
& = -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{32} [k_{1,M} k_{4,N} \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + k_{1,M} k_{4,N} \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^i \Gamma^N \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_i \lambda_4] \\
& = -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{32} [k_{1,0} k_{4,0} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^0 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + k_{1,0} k_{4,1} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^0 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\
& + k_{1,0} k_{4,2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^0 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + k_{1,1} k_{4,0} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^0 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + k_{1,1} k_{4,1} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^0 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\
& + k_{1,1} k_{4,2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^0 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + k_{1,0} k_{4,0} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^i \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_i \lambda_4 + k_{1,0} k_{4,1} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^i \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_i \lambda_4 \\
& + k_{1,0} k_{4,2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^i \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_i \lambda_4 + k_{1,1} k_{4,0} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^i \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_i \lambda_4 + k_{1,1} k_{4,1} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^i \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_i \lambda_4 \\
& + k_{1,1} k_{4,2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^i \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_i \lambda_4] \\
& = -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{32} [k_{1,0} k_{4,0} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + k_{1,0} k_{4,1} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + k_{1,0} k_{4,2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\
& + k_{1,1} k_{4,0} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + k_{1,1} k_{4,1} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + k_{1,1} k_{4,2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^0 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4
\end{aligned}$$

luego

$$\mathcal{T}_{1,8}^{\text{Regge}} = -\frac{\tilde{s}^3}{64}[\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4]. \quad (\text{C.10})$$

El siguiente término,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,9} &= -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{32}\bar{\lambda}_2\Gamma_M\lambda_3\bar{\lambda}_1(k_2\cdot\Gamma)\Gamma^M(k_3\cdot\Gamma)\lambda_4 \\ &= -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{32}k_{2,N}k_{3,P}[\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^N\Gamma^0\Gamma^P\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma_i\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^N\Gamma^i\Gamma^P\lambda_4] \\ &= -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{32}[k_{2,0}k_{3,0}\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^0\Gamma^0\lambda_4 + k_{2,0}k_{3,1}\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^0\Gamma^1\lambda_4 \\ &\quad + k_{2,0}k_{3,2}\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^0\Gamma^2\lambda_4 + k_{2,1}k_{3,0}\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\Gamma^0\Gamma^0\lambda_4 + k_{2,1}k_{3,1}\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\Gamma^0\Gamma^1\lambda_4 \\ &\quad + k_{2,1}k_{3,2}\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\Gamma^0\Gamma^2\lambda_4 + k_{2,0}k_{3,0}\bar{\lambda}_2\Gamma_i\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^i\Gamma^0\lambda_4 + k_{2,0}k_{3,1}\bar{\lambda}_2\Gamma_i\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^i\Gamma^1\lambda_4 \\ &\quad + k_{2,0}k_{3,2}\bar{\lambda}_2\Gamma_i\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^i\Gamma^2\lambda_4 + k_{2,1}k_{3,0}\bar{\lambda}_2\Gamma_i\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\Gamma^i\Gamma^0\lambda_4 + k_{2,1}k_{3,1}\bar{\lambda}_2\Gamma_i\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\Gamma^i\Gamma^1\lambda_4 \\ &\quad + k_{2,1}k_{3,2}\bar{\lambda}_2\Gamma_i\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\Gamma^i\Gamma^2\lambda_4] \\ &= -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{32}[k_{2,0}k_{3,0}\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\lambda_4 + k_{2,0}k_{3,1}\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_4 + k_{2,0}k_{3,2}\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_4 \\ &\quad + k_{2,1}k_{3,0}\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_4 + k_{2,1}k_{3,1}\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\lambda_4 - k_{2,1}k_{3,2}\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_4 \\ &\quad - k_{2,0}k_{3,0}\bar{\lambda}_2\Gamma_{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>2}\lambda_4 - k_{2,0}k_{3,0}\bar{\lambda}_2\Gamma_1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_4 - k_{2,0}k_{3,0}\bar{\lambda}_2\Gamma_2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_4 \\ &\quad + k_{2,0}k_{3,1}\bar{\lambda}_2\Gamma_{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^{i>2}\Gamma^1\lambda_4 + k_{2,0}k_{3,1}\bar{\lambda}_2\Gamma_1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^1\lambda_4 \\ &\quad + k_{2,0}k_{3,1}\bar{\lambda}_2\Gamma_2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^2\Gamma^1\lambda_4 + k_{2,0}k_{3,2}\bar{\lambda}_2\Gamma_{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^{i>2}\Gamma^2\lambda_4 \\ &\quad + k_{2,0}k_{3,2}\bar{\lambda}_2\Gamma_1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_4 + k_{2,0}k_{3,2}\bar{\lambda}_2\Gamma_2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^2\Gamma^2\lambda_4 \\ &\quad + k_{2,1}k_{3,0}\bar{\lambda}_2\Gamma_{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^{i>2}\lambda_4 + k_{2,1}k_{3,0}\bar{\lambda}_2\Gamma_1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^1\lambda_4 \\ &\quad + k_{2,1}k_{3,0}\bar{\lambda}_2\Gamma_2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_4 + k_{2,1}k_{3,1}\bar{\lambda}_2\Gamma_{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\Gamma^{i>2}\Gamma^1\lambda_4 \\ &\quad + k_{2,1}k_{3,1}\bar{\lambda}_2\Gamma_1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\Gamma^1\Gamma^1\lambda_4 + k_{2,1}k_{3,1}\bar{\lambda}_2\Gamma_2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^1\lambda_4 \\ &\quad + k_{2,1}k_{3,2}\bar{\lambda}_2\Gamma_{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\Gamma^{i>2}\Gamma^2\lambda_4 + k_{2,1}k_{3,2}\bar{\lambda}_2\Gamma_1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\Gamma^1\Gamma^2\lambda_4 \\ &\quad + k_{2,1}k_{3,2}\bar{\lambda}_2\Gamma_2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^2\lambda_4] \\ &= -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{32}[k_2^0k_3^0\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\lambda_4 - k_2^0k_3^1\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_4 - k_2^0k_3^2\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_4 \\ &\quad - k_2^1k_3^0\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_4 + k_2^1k_3^1\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\lambda_4 - k_2^1k_3^2\bar{\lambda}_2\Gamma_0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_4 \\ &\quad - k_2^0k_3^0\bar{\lambda}_2\Gamma_{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>2}\lambda_4 - k_2^0k_3^0\bar{\lambda}_2\Gamma_1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_4 - k_2^0k_3^0\bar{\lambda}_2\Gamma_2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_4 \\ &\quad + k_2^0k_3^1\bar{\lambda}_2\Gamma_{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^{i>2}\lambda_4 + k_2^0k_3^1\bar{\lambda}_2\Gamma_1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\lambda_4 + k_2^0k_3^1\bar{\lambda}_2\Gamma_2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_4 \\ &\quad + k_2^0k_3^2\bar{\lambda}_2\Gamma_{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^2\Gamma^{i>2}\lambda_4 - k_2^0k_3^2\bar{\lambda}_2\Gamma_1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_4 + k_2^0k_3^2\bar{\lambda}_2\Gamma_2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\lambda_4 \\ &\quad - k_2^1k_3^0\bar{\lambda}_2\Gamma_{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^{i>2}\lambda_4 + k_2^1k_3^0\bar{\lambda}_2\Gamma_1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\lambda_4 - k_2^1k_3^0\bar{\lambda}_2\Gamma_2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_4 \\ &\quad + k_2^1k_3^1\bar{\lambda}_2\Gamma_{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>2}\lambda_4 - k_2^1k_3^1\bar{\lambda}_2\Gamma_1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_4 + k_2^1k_3^1\bar{\lambda}_2\Gamma_2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - k_2^1 k_3^2 \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^{i>2} \lambda_4 - k_2^1 k_3^2 \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_4 - k_2^1 k_3^2 \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_4] \\
& = -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{32} \left[-\frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_4 \right. \\
& - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^2 \Gamma^{i>2} \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 \\
& - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_4 \\
& - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_4 \left. \right] \\
& = -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{32} \left[\frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 \right. \\
& + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 - \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 \\
& - \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 - \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \lambda_4 \\
& - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_2 \Gamma_{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 \left. \right], \\
\end{aligned} \tag{C.11}$$

luego

$$\mathcal{T}_{1,9}^{\text{Regge}} = \frac{\tilde{s}^3}{64} \left[-\bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 - \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \right]. \tag{C.12}$$

El siguiente término,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,10} & = -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{256} \bar{\lambda}_2 (k_3 \cdot \Gamma) \Gamma^M \Gamma^N \lambda_3 \bar{\lambda}_1 (k_4 \cdot \Gamma) \Gamma_M \Gamma_N \lambda_4 \\
& = -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{16} k_3^{[N} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{M]} \lambda_3 k_{4[N} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{M]} \lambda_4
\end{aligned}$$

mientras que en su límite de Regge da:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{1,10}^{\text{Regge}} &= -\frac{\tilde{s}^3}{128}[\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 \\ &+ \bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 + 2\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>1}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>1}\lambda_4].\end{aligned}\quad (\text{C.14})$$

Luego tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{1,11} &= -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{256}\bar{\lambda}_2\Gamma^M\Gamma^N(k_2\cdot\Gamma)\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\Gamma_N(k_1\cdot\Gamma)\lambda_4 \\ &= -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{16}k_2^{[N}\bar{\lambda}_2\Gamma^M]\lambda_3k_{1[N}\bar{\lambda}_1\Gamma_M]\lambda_4 \\ &= -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{16}[k_2^{[0}\bar{\lambda}_2\Gamma^1]\lambda_3k_{1[0}\bar{\lambda}_1\Gamma_1]\lambda_4 + k_2^{[0}\bar{\lambda}_2\Gamma^2]\lambda_3k_{1[0}\bar{\lambda}_1\Gamma_2]\lambda_4 + k_2^{[1}\bar{\lambda}_2\Gamma^0]\lambda_3k_{1[1}\bar{\lambda}_1\Gamma_0]\lambda_4 \\ &+ k_2^{[1}\bar{\lambda}_2\Gamma^2]\lambda_3k_{1[1}\bar{\lambda}_1\Gamma_2]\lambda_4 + k_2^{[2}\bar{\lambda}_2\Gamma^0]\lambda_3k_{1[2}\bar{\lambda}_1\Gamma_0]\lambda_4 + k_2^{[2}\bar{\lambda}_2\Gamma^1]\lambda_3k_{1[2}\bar{\lambda}_1\Gamma_1]\lambda_4 \\ &+ k_2^{[0}\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>2}]\lambda_3k_{1[0}\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}]\lambda_4 + k_2^{[1}\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>2}]\lambda_3k_{1[1}\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}]\lambda_4 + k_2^{[2}\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>2}]\lambda_3k_{1[2}\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}]\lambda_4 \\ &+ k_2^{[i>2}\bar{\lambda}_2\Gamma^0]\lambda_3k_{1[i>2}\bar{\lambda}_1\Gamma_0]\lambda_4 + k_2^{[i>2}\bar{\lambda}_2\Gamma^1]\lambda_3k_{1[i>2}\bar{\lambda}_1\Gamma_1]\lambda_4 + k_2^{[i>2}\bar{\lambda}_2\Gamma^2]\lambda_3k_{1[i>2}\bar{\lambda}_1\Gamma_2]\lambda_4] \\ &= -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{16}[k_2^{[0}\bar{\lambda}_2\Gamma^1]\lambda_3k_{1[0}\bar{\lambda}_1\Gamma_1]\lambda_4 + k_2^{[0}\bar{\lambda}_2\Gamma^2]\lambda_3k_{1[0}\bar{\lambda}_1\Gamma_2]\lambda_4 + k_2^{[1}\bar{\lambda}_2\Gamma^0]\lambda_3k_{1[1}\bar{\lambda}_1\Gamma_0]\lambda_4 \\ &+ k_2^{[1}\bar{\lambda}_2\Gamma^2]\lambda_3k_{1[1}\bar{\lambda}_1\Gamma_2]\lambda_4 + k_2^{[2}\bar{\lambda}_2\Gamma^0]\lambda_3k_{1[2}\bar{\lambda}_1\Gamma_0]\lambda_4 + k_2^{[2}\bar{\lambda}_2\Gamma^1]\lambda_3k_{1[2}\bar{\lambda}_1\Gamma_1]\lambda_4 \\ &- \frac{1}{2}k_2^{[0}\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>2}]\lambda_3k_{1[0}\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}]\lambda_4 + \frac{1}{2}k_2^{[1}\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>2}]\lambda_3k_{1[1}\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}]\lambda_4 + \frac{1}{2}k_2^{[2}\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>2}]\lambda_3k_{1[2}\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}]\lambda_4] \\ &= -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{16}[-\frac{\tilde{s}}{16}\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{16}\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{16}\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 \\ &- \frac{\tilde{s}}{16}\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{16}\bar{\lambda}_2\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{16}\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 \\ &- \frac{\tilde{s}}{16}\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{16}\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{16}\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 \\ &- \frac{\tilde{s}}{16}\bar{\lambda}_2\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{16}\bar{\lambda}_2\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{16}\bar{\lambda}_2\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>2}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_4] \\ &= -\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{16}[-\frac{\tilde{s}}{8}\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{8}\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{8}\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 \\ &- \frac{\tilde{s}}{8}\bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>1}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>1}\lambda_4] \\ &= -\frac{\tilde{s}^2\tilde{u}}{128}[-\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 \\ &- \bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - 2\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>1}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>1}\lambda_4],\end{aligned}\quad (\text{C.15})$$

luego

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{1,11}^{\text{Regge}} &= -\frac{\tilde{s}^3}{128}[\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 \\ &+ \bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 + 2\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>1}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>1}\lambda_4].\end{aligned}\quad (\text{C.16})$$

Con los términos $\mathcal{T}_{1,i=4,\dots,11}^{\text{Regge}}$ podemos obtener el factor cinemático en el límite de Regge:

$$K_c^{\text{Regge}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) = -\frac{\tilde{s}^3}{32} [5(\bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4) + \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 + 6\bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>1} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>1} \lambda_4] \quad (\text{C.17})$$

seguimos con los demás términos:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,12} &= -\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N (k_4 \cdot \Gamma) \lambda_3 \bar{\lambda}_1 (k_2 \cdot \Gamma) \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \\ &= -\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} k_4^P k_{2,P'} \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_P \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^{P'} \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \\ &= -\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} [-k_4^0 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 + k_4^0 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \\ &\quad + k_4^1 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 - k_4^1 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \\ &\quad - k_4^2 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 + k_4^2 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4] \\ &= -\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} [\frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \\ &\quad + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \\ &\quad + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4] \\ &= -\frac{\tilde{s}^2 \tilde{t}}{1024} [\bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 - \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 \\ &\quad + \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 - \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 \\ &\quad - \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 + \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4]. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

El siguiente término,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,13} &= -\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_2 (k_1 \cdot \Gamma) \Gamma_M \Gamma_N \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^N \Gamma^M (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\ &= -\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} k_{1,P} k_3^{P'} \bar{\lambda}_2 \Gamma^P \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_{P'} \lambda_4 \\ &= -\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} [-k_1^0 k_3^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4 - k_1^0 k_3^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 \\ &\quad - k_1^1 k_3^2 \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_4 - k_1^1 k_3^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4 \\ &\quad - k_1^1 k_3^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 - k_1^1 k_3^2 \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_4 \\ &\quad - k_1^2 k_3^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4 - k_1^2 k_3^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 \\ &\quad - k_1^2 k_3^2 \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + k_1^1 k_3^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 + k_1^1 k_3^2 \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_4] \\
& = -\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \left[\frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 \right. \\
& - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_4] \\
& = -\frac{\tilde{s}^2 \tilde{t}}{1024} \left[\bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4 - \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 \right. \\
& - \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_4 - \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4 \\
& + \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 + \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_4].
\end{aligned} \tag{C.19}$$

El siguiente término,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,14} & = -\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_2 (k_4 \cdot \Gamma) \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 (k_3 \cdot \Gamma) \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \\
& = -\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} k_4^P k_{3,P'} \bar{\lambda}_2 \Gamma_P \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^{P'} \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \\
& = -\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \left[-k_4^0 k_3^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 + k_4^1 k_3^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \right. \\
& + k_4^0 k_3^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 + k_4^0 k_3^2 \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \\
& - k_4^1 k_3^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 + k_4^1 k_3^2 \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \\
& - k_4^2 k_3^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 + k_4^2 k_3^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \\
& + \left. k_4^2 k_3^2 \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \right] \\
& = -\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \left[-\frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \cos^2 \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \right. \\
& - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \\
& - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \\
& - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \\
& - \left. \frac{\tilde{s}}{4} \sin^2 \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_4 \right] \\
& = -\frac{\tilde{s}^2 \tilde{t}}{1024} \left[-\bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 - \cos^2 \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 \right. \\
& + \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 + \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 \\
& + \left. \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 - \sin \theta \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 - \sin \theta \cos \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4 \\
& - \sin^2 \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_4].
\end{aligned} \tag{C.20}$$

El último término de la forma $\mathcal{T}_{1,i}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,15} &= -\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_2 \Gamma_M \Gamma_N (k_1 \cdot \Gamma) \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&= -\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} k_{1,P} k_2^{P'} \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^P \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_{P'} \lambda_4 \\
&= -\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} [-k_1^0 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4 + k_1^1 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 \\
&\quad - k_1^0 k_2^1 \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 + k_1^1 k_2^0 \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4] \\
&= -\frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} [-\frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 \\
&\quad + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4] \\
&= -\frac{\tilde{s}^2 \tilde{t}}{1024} [-\bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4 - \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 \\
&\quad + \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_4 + \bar{\lambda}_2 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_4].
\end{aligned} \tag{C.21}$$

Ahora desarrollamos los términos de la forma $\mathcal{T}_{2,i}$. Empezamos por el $\mathcal{T}_{2,4}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,4} &= \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_1 (k_3 \cdot \Gamma) \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 (k_2 \cdot \Gamma) \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} k_3^P k_{2,P'} \bar{\lambda}_1 \Gamma_P \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^{P'} \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} [k_3^0 k_{2,0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 + k_3^0 k_{2,1} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \\
&\quad + k_3^0 k_{2,2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 + k_3^0 k_{2,i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^{i>2} \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \\
&\quad + k_3^1 k_{2,0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 + k_3^1 k_{2,1} \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \\
&\quad + k_3^1 k_{2,2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 + k_3^1 k_{2,i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^{i>2} \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \\
&\quad + k_3^2 k_{2,0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 + k_3^2 k_{2,1} \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \\
&\quad + k_3^2 k_{2,2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 + k_3^2 k_{2,i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^{i>2} \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \\
&\quad + k_3^{i>2} k_{2,0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 + k_3^{i>2} k_{2,1} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \\
&\quad + k_3^{i>2} k_{2,2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 + k_3^{i>2} k_{2,i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^{i>2} \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} [-k_3^0 k_2^0 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 + k_3^0 k_2^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \\
&\quad - k_3^1 k_2^0 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 + k_3^1 k_2^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \\
&\quad - k_3^2 k_2^0 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 + k_3^2 k_2^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3] \\
&= \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \left[\frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \right. \\
&\quad - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \\
&\quad \left. - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_3 \right] \\
&= \frac{\tilde{s}^2 \tilde{t}}{1024} [\bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 - \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&\quad + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 - \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&\quad + \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 - \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \Gamma^N \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3]. \quad (C.22)
\end{aligned}$$

El siguiente término,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2-5} &= \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N (k_4 \cdot \Gamma) \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N (k_1 \cdot \Gamma) \lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} k_1^{P'} k_{4,P} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^P \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_{P'} \lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} [k_1^0 k_{4,0} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_3 + k_1^0 k_{4,1} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_3 \\
&\quad + k_1^0 k_{4,2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_3 + k_1^0 k_{4,i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_3 \\
&\quad + k_1^1 k_{4,0} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3 + k_1^1 k_{4,1} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3 \\
&\quad + k_1^1 k_{4,2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3 + k_1^1 k_{4,i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3 \\
&\quad + k_1^2 k_{4,0} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_3 + k_1^2 k_{4,1} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_3 \\
&\quad + k_1^2 k_{4,2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_3 + k_1^2 k_{4,i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_2 \lambda_3 \\
&\quad + k_1^{i>2} k_{4,0} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_{i>2} \lambda_3 + k_1^{i>2} k_{4,1} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_{i>2} \lambda_3 \\
&\quad + k_1^{i>2} k_{4,2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_{i>2} \lambda_3 + k_1^{i>2} k_{4,i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_{i>2} \lambda_3] \\
&= \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} [-k_1^0 k_4^0 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_3 + k_1^0 k_4^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_3 \\
&\quad + k_1^0 k_4^2 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_0 \lambda_3 - k_1^1 k_4^0 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3 \\
&\quad + k_1^1 k_4^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3 + k_1^1 k_4^2 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_M \Gamma_N \Gamma_1 \lambda_3]
\end{aligned}$$

El siguiente término,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,7} &= \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_2 \bar{\lambda}_4 (k_1 \cdot \Gamma) \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} k_1^{P'} k_{3,P} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^P \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{P'} \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} [k_1^0 k_{3,0} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + k_1^0 k_{3,1} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&\quad + k_1^0 k_{3,2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + k_1^0 k_{3,i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&\quad + k_1^1 k_{3,0} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + k_1^1 k_{3,1} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&\quad + k_1^1 k_{3,2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + k_1^1 k_{3,i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&\quad + k_1^2 k_{3,0} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + k_1^2 k_{3,1} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&\quad + k_1^2 k_{3,2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + k_1^2 k_{3,i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&\quad + k_1^{i>2} k_{3,0} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + k_1^{i>2} k_{3,1} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&\quad + k_1^{i>2} k_{3,2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + k_1^{i>2} k_{3,i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3] \\
&= \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} [-k_1^0 k_3^0 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + k_1^0 k_3^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&\quad + k_1^0 k_3^2 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 - k_1^1 k_3^0 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&\quad + k_1^1 k_3^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + k_1^1 k_3^2 \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3] \\
&= \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{256} [\frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&\quad + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&\quad + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3] \\
&= \frac{\tilde{s}^2 \tilde{t}}{1024} [\bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&\quad + \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&\quad + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3]. \quad (C.25)
\end{aligned}$$

El siguiente término,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,8} &= \frac{\tilde{t}\tilde{u}}{256} \bar{\lambda}_1 \Gamma_N \Gamma_M (k_1 \cdot \Gamma) \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^N \Gamma^M (k_4 \cdot \Gamma) \lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{t}\tilde{u}}{16} k_{1[N} \bar{\lambda}_1 \Gamma_M] \lambda_2 k_4^{[N} \bar{\lambda}_4 \Gamma^M] \lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{t}\tilde{u}}{16} k_{1[N} \bar{\lambda}_1 \Gamma_M] \lambda_2 k_4^{[N} \bar{\lambda}_4 \Gamma^M] \lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{t}\tilde{u}}{16} [k_{1[0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_1] \lambda_2 k_4^{[0} \bar{\lambda}_4 \Gamma^1] \lambda_3 + k_{1[0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_2] \lambda_2 k_4^{[0} \bar{\lambda}_4 \Gamma^2] \lambda_3 + k_{1[0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2}] \lambda_2 k_4^{[0} \bar{\lambda}_4 \Gamma^{i>2}] \lambda_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + k_{1[1}\bar{\lambda}_1\Gamma_0]\lambda_2k_4^{[1}\bar{\lambda}_4\Gamma^0]\lambda_3 + k_{1[1}\bar{\lambda}_1\Gamma_2]\lambda_2k_4^{[1}\bar{\lambda}_4\Gamma^2]\lambda_3 + k_{1[1}\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}]\lambda_2k_4^{[1}\bar{\lambda}_4\Gamma^{i>2}]\lambda_3 \\
& + k_{1[2}\bar{\lambda}_1\Gamma_0]\lambda_2k_4^{[2}\bar{\lambda}_4\Gamma^0]\lambda_3 + k_{1[2}\bar{\lambda}_1\Gamma_1]\lambda_2k_4^{[2}\bar{\lambda}_4\Gamma^1]\lambda_3 + k_{1[2}\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}]\lambda_2k_4^{[2}\bar{\lambda}_4\Gamma^{i>2}]\lambda_3 \\
& + k_{1[i>2}\bar{\lambda}_1\Gamma_0]\lambda_2k_4^{[i>2}\bar{\lambda}_4\Gamma^0]\lambda_3 + k_{1[i>2}\bar{\lambda}_1\Gamma_1]\lambda_2k_4^{[i>2}\bar{\lambda}_4\Gamma^1]\lambda_3 + k_{1[i>2}\bar{\lambda}_1\Gamma_2]\lambda_2k_4^{[i>2}\bar{\lambda}_4\Gamma^2]\lambda_3] \\
& = \frac{\tilde{t}\tilde{u}}{64}\left[\frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^1\lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^0\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^1\lambda_3 \right. \\
& - \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^0\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^2\lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^0\lambda_3 \\
& + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^{i>2}\lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^0\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^1\lambda_3 \\
& - \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^0\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^1\lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^2\lambda_3 \\
& + \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^1\lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^{i>2}\lambda_3 \\
& - \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^0\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^2\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^1\lambda_3 \\
& - \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^2\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^{i>2}\lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^{i>2}\lambda_3] \\
& = \frac{\tilde{t}\tilde{u}}{64}\left[\frac{\tilde{s}}{2}\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^1\lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{2}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^0\lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{2}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^0\lambda_3 \right. \\
& + \frac{\tilde{s}}{2}\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^1\lambda_3 - \tilde{t}\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^2\lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{2}\sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^0\lambda_3 \\
& + \frac{\tilde{s}}{2}\sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^1\lambda_3 - \tilde{t}\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^{i>2}\lambda_3] \\
& = \frac{\tilde{s}\tilde{t}\tilde{u}}{128}\left[\bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\lambda_3 - \cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\lambda_3 + \cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\lambda_3 \right. \\
& - \bar{\lambda}_1\Gamma^0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\lambda_3 + \sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\lambda_3 + \sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\lambda_3 - 2\frac{\tilde{t}}{\tilde{s}}\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>1}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_{i>1}\lambda_3].
\end{aligned} \tag{C.26}$$

El siguiente término,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,9} & = \frac{\tilde{t}\tilde{u}}{256}\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\Gamma^M\Gamma^N\lambda_2\bar{\lambda}_4(k_3 \cdot \Gamma)\Gamma_M\Gamma_N\lambda_3 \\
& = \frac{\tilde{t}\tilde{u}}{16}k_2^{[N}\bar{\lambda}_1\Gamma^M]\lambda_2k_{3[N}\bar{\lambda}_4\Gamma_M]\lambda_3 \\
& = \frac{\tilde{t}\tilde{u}}{16}\left[k_2^{[0}\bar{\lambda}_1\Gamma^1]\lambda_2k_{3[0}\bar{\lambda}_4\Gamma_1]\lambda_3 + k_2^{[0}\bar{\lambda}_1\Gamma^2]\lambda_2k_{3[0}\bar{\lambda}_4\Gamma_2]\lambda_3 + k_2^{[0}\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>2}]\lambda_2k_{3[0}\bar{\lambda}_4\Gamma_{i>2}]\lambda_3 \right. \\
& + k_2^{[1}\bar{\lambda}_1\Gamma^0]\lambda_2k_{3[1}\bar{\lambda}_4\Gamma_0]\lambda_3 + k_2^{[1}\bar{\lambda}_1\Gamma^2]\lambda_2k_{3[1}\bar{\lambda}_4\Gamma_2]\lambda_3 + k_2^{[1}\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>2}]\lambda_2k_{3[1}\bar{\lambda}_4\Gamma_{i>2}]\lambda_3 \\
& + k_2^{[2}\bar{\lambda}_1\Gamma^0]\lambda_2k_{3[2}\bar{\lambda}_4\Gamma_0]\lambda_3 + k_2^{[2}\bar{\lambda}_1\Gamma^1]\lambda_2k_{3[2}\bar{\lambda}_4\Gamma_1]\lambda_3 + k_2^{[2}\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>2}]\lambda_2k_{3[2}\bar{\lambda}_4\Gamma_{i>2}]\lambda_3 \\
& \left. + k_2^{[i>2}\bar{\lambda}_1\Gamma^0]\lambda_2k_{3[i>2}\bar{\lambda}_4\Gamma_0]\lambda_3 + k_2^{[i>2}\bar{\lambda}_1\Gamma^1]\lambda_2k_{3[i>2}\bar{\lambda}_4\Gamma_1]\lambda_3 + k_2^{[i>2}\bar{\lambda}_1\Gamma^2]\lambda_2k_{3[i>2}\bar{\lambda}_4\Gamma_2]\lambda_3\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\tilde{st}\tilde{u}}{64}[\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>1}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^{i>1}\lambda_3 + \bar{\lambda}_1\Gamma_{i>2}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^{i>2}\lambda_3 + \bar{\lambda}_1\Gamma_2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\lambda_3] \\
&= -\frac{\tilde{st}\tilde{u}}{64}[\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>1}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_{i>1}\lambda_3 - \bar{\lambda}_1\Gamma^{i>2}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_{i>2}\lambda_3 - \bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\lambda_3].
\end{aligned} \tag{C.29}$$

El siguiente término,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,12} &= \frac{\tilde{t}^2}{256}\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\Gamma^M\Gamma^N\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_N\Gamma_M(k_4 \cdot \Gamma)\lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{t}^2}{16}k_2^{[M}\bar{\lambda}_1\Gamma^{N]}\lambda_2k_{4[M}\bar{\lambda}_4\Gamma_{N]}\lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{t}^2}{16}[k_2^{[0}\bar{\lambda}_1\Gamma^1]\lambda_2k_{4[0}\bar{\lambda}_4\Gamma_1]\lambda_3 + k_2^{[0}\bar{\lambda}_1\Gamma^2]\lambda_2k_{4[0}\bar{\lambda}_4\Gamma_2]\lambda_3 + k_2^{[1}\bar{\lambda}_1\Gamma^0]\lambda_2k_{4[1}\bar{\lambda}_4\Gamma_0]\lambda_3 \\
&\quad + k_2^{[1}\bar{\lambda}_1\Gamma^2]\lambda_2k_{4[1}\bar{\lambda}_4\Gamma_2]\lambda_3 + k_2^{[2}\bar{\lambda}_1\Gamma^0]\lambda_2k_{4[2}\bar{\lambda}_4\Gamma_0]\lambda_3 + k_2^{[2}\bar{\lambda}_1\Gamma^1]\lambda_2k_{4[2}\bar{\lambda}_4\Gamma_1]\lambda_3 \\
&\quad + k_2^{[0}\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>2}]\lambda_2k_{4[0}\bar{\lambda}_4\Gamma_{i>2}]\lambda_3 + k_2^{[1}\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>2}]\lambda_2k_{4[1}\bar{\lambda}_4\Gamma_{i>2}]\lambda_3 + k_2^{[2}\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>2}]\lambda_2k_{4[2}\bar{\lambda}_4\Gamma_{i>2}]\lambda_3] \\
&\quad + k_2^{[i>2}\bar{\lambda}_1\Gamma^0]\lambda_2k_{4[i>2}\bar{\lambda}_4\Gamma_0]\lambda_3 + k_2^{[i>2}\bar{\lambda}_1\Gamma^1]\lambda_2k_{4[i>2}\bar{\lambda}_4\Gamma_1]\lambda_3 + k_2^{[i>2}\bar{\lambda}_1\Gamma^2]\lambda_2k_{4[i>2}\bar{\lambda}_4\Gamma_2]\lambda_3] \\
&= \frac{\tilde{t}^2}{64}[\frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_1\Gamma^0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\lambda_3 \\
&\quad + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_2\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\lambda_3 \\
&\quad + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_1\Gamma^0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\lambda_3 \\
&\quad + \frac{\tilde{s}}{16}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_2\lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\lambda_3 \\
&\quad + \frac{\tilde{s}}{16}\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_2\lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4}\sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_2\lambda_3 \\
&\quad + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>2}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_{i>2}\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>2}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_{i>2}\lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4}\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>2}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_{i>2}\lambda_3 \\
&\quad + \frac{\tilde{s}}{4}\cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>2}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_{i>2}\lambda_3] \\
&= \frac{\tilde{st}^2}{128}[\bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\lambda_3 + \cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\lambda_3 + \bar{\lambda}_1\Gamma^0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\lambda_3 + \sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\lambda_3 \\
&\quad + \cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\lambda_3 - \sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\lambda_3 - 2\frac{\tilde{u}}{\tilde{s}}\bar{\lambda}_1\Gamma^{i>1}\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_{i>1}\lambda_3].
\end{aligned} \tag{C.30}$$

El siguiente término,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,13} &= \frac{\tilde{t}^2}{256} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N (k_1 \cdot \Gamma) \lambda_2 \bar{\lambda}_4 (k_3 \cdot \Gamma) \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{t}^2}{16} k_1^{[N} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{M]} \lambda_2 k_{3[N} \bar{\lambda}_4 \Gamma_{M]} \lambda_3 \\
&= \frac{\tilde{t}^2}{16} [k_1^{[0} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{1]} \lambda_2 k_{3[0} \bar{\lambda}_4 \Gamma_{1]} \lambda_3 + k_1^{[0} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{2]} \lambda_2 k_{3[0} \bar{\lambda}_4 \Gamma_{2]} \lambda_3 + k_1^{[0} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2]} \lambda_2 k_{3[0} \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2]} \lambda_3 \\
&\quad + k_1^{[1} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{0]} \lambda_2 k_{3[1} \bar{\lambda}_4 \Gamma_{0]} \lambda_3 + k_1^{[1} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{2]} \lambda_2 k_{3[1} \bar{\lambda}_4 \Gamma_{2]} \lambda_3 + k_1^{[1} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2]} \lambda_2 k_{3[1} \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2]} \lambda_3 \\
&\quad + k_1^{[2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2]} \lambda_2 k_{3[2} \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2]} \lambda_3 + k_1^{[2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{0]} \lambda_2 k_{3[2} \bar{\lambda}_4 \Gamma_{0]} \lambda_3 + k_1^{[2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{1]} \lambda_2 k_{3[2} \bar{\lambda}_4 \Gamma_{1]} \lambda_3 \\
&\quad + k_1^{[i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{0]} \lambda_2 k_{3[i>2} \bar{\lambda}_4 \Gamma_{0]} \lambda_3 + k_1^{[i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{1]} \lambda_2 k_{3[i>2} \bar{\lambda}_4 \Gamma_{1]} \lambda_3 + k_1^{[i>2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{2]} \lambda_2 k_{3[i>2} \bar{\lambda}_4 \Gamma_{2]} \lambda_3] \\
&= \frac{\tilde{t}^2}{64} [\frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 \\
&\quad + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 \\
&\quad - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3 \\
&\quad - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 \\
&\quad + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3 \\
&\quad - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \lambda_3] \\
&= \frac{\tilde{t}^2}{64} [\frac{\tilde{s}}{2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{2} \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 \\
&\quad + \frac{\tilde{s}}{2} \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 - \frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>1} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>1} \lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{2} \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 \\
&\quad - \frac{\tilde{s}}{2} \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3] \\
&= \frac{\tilde{s} \tilde{t}^2}{128} [\bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 - \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 - \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 \\
&\quad + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 - 2 \frac{\tilde{u}}{\tilde{s}} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>1} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>1} \lambda_3 - \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 \\
&\quad - \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3].
\end{aligned}$$

(C.31)

$$\begin{aligned}
& + \frac{\tilde{s}}{2} \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^2 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{2} \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{2} \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3 \\
& + \frac{\tilde{s}}{2} \sin \theta \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{2} \sin \theta \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3] \\
& = \frac{\tilde{s} \tilde{t}^2}{64} [-\sin^2 \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 - \cos^2 \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3 - \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \\
& + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \lambda_3 + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3 + \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^2 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \\
& - \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 + \sin \theta \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 + \sin \theta \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3].
\end{aligned} \tag{C.32}$$

Llegamos al último término de la forma $\mathcal{T}_{2,i}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,15} & = \frac{\tilde{t}^2}{32} \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 (k_2 \cdot \Gamma) \Gamma^M (k_1 \cdot \Gamma) \lambda_3 \\
& = \frac{\tilde{t}^2}{32} k_{2,N} k_{1,P} \bar{\lambda}_1 \Gamma_M \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^N \Gamma^M \Gamma^P \lambda_3 \\
& = \frac{\tilde{t}^2}{32} [k_{2,N} k_{1,P} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^N \Gamma^0 \Gamma^P \lambda_3 + k_{2,N} k_{1,P} \bar{\lambda}_1 \Gamma_i \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^N \Gamma^i \Gamma^P \lambda_3] \\
& = \frac{\tilde{t}^2}{32} [k_{2,0} k_{1,0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^0 \Gamma^0 \lambda_3 + k_{2,0} k_{1,1} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^0 \Gamma^1 \lambda_3 \\
& + k_{2,1} k_{1,0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^0 \Gamma^0 \lambda_3 + k_{2,1} k_{1,1} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^0 \Gamma^1 \lambda_3 + k_{2,0} k_{1,0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_i \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^i \Gamma^0 \lambda_3 \\
& + k_{2,0} k_{1,1} \bar{\lambda}_1 \Gamma_i \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^i \Gamma^1 \lambda_3 + k_{2,1} k_{1,0} \bar{\lambda}_1 \Gamma_i \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^i \Gamma^0 \lambda_3 + k_{2,1} k_{1,1} \bar{\lambda}_1 \Gamma_i \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^i \Gamma^1 \lambda_3] \\
& = \frac{\tilde{t}^2}{32} [k_2^0 k_1^0 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^0 \Gamma^0 \lambda_3 - k_2^0 k_1^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^0 \Gamma^1 \lambda_3 - k_2^1 k_1^0 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^0 \Gamma^0 \lambda_3 \\
& + k_2^1 k_1^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^0 \Gamma^1 \lambda_3 + k_2^0 k_1^0 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^{i>2} \Gamma^0 \lambda_3 + k_2^0 k_1^0 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^0 \lambda_3 \\
& + k_2^0 k_1^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^2 \Gamma^0 \lambda_3 - k_2^0 k_1^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^{i>2} \Gamma^1 \lambda_3 - k_2^0 k_1^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^1 \lambda_3 \\
& - k_2^0 k_1^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^2 \Gamma^1 \lambda_3 - k_2^1 k_1^0 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^{i>2} \Gamma^0 \lambda_3 \\
& - k_2^1 k_1^0 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^1 \Gamma^0 \lambda_3 - k_2^1 k_1^0 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^0 \lambda_3 \\
& + k_2^1 k_1^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^{i>2} \Gamma^1 \lambda_3 + k_2^1 k_1^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^1 \Gamma^1 \lambda_3 \\
& + k_2^1 k_1^1 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^1 \lambda_3] \\
& = \frac{\tilde{t}^2}{32} [\frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \lambda_3 \\
& - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^{i>2} \lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \lambda_3 \\
& - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^2 \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^{i>2} \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \lambda_3 \\
& + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^{i>2} \lambda_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_3 \\
& - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^{i>2} \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^1 \lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{4} \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^2 \lambda_3] \\
& = \frac{\tilde{t}^2}{32} \left[-\frac{\tilde{s}}{2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^{i>2} \lambda_3 - \frac{\tilde{s}}{2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^2 \lambda_3 + \frac{\tilde{s}}{2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \right. \\
& + \left. \frac{\tilde{s}}{2} \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_3 \right] \\
& = -\frac{\tilde{t}^2}{64} \left[\bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \lambda_3 + \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3 + \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \right. \\
& + \left. \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \lambda_3 \right]. \tag{C.33}
\end{aligned}$$

Apéndice D

Los términos de $K_{\mathbf{c}}^4$ -Dilatinos

En este apéndice pasamos en limpio los resultados del apéndice C para mayor claridad. Mostramos explícitamente los términos de la forma $\mathcal{T}_{1,i}$ y $\mathcal{T}_{2,i}$, considerando la cinemática (5.32), para $i \geq 4$. Comenzando,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,4} = & -\frac{\tilde{s}^2}{32} \left[\frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 \right. \\
& + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 - \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 \\
& - \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \Gamma_2 \Gamma_{i>2} \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 \\
& \left. + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_{i>2} \lambda_4 \right], \tag{D.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,5} = & -\frac{\tilde{s}^2}{32} \left[\frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \right. \\
& + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_0 \lambda_4 \\
& - \frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 - \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 \\
& + \frac{\tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{t}}{2} \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 \\
& - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^0 \Gamma^2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 \\
& \left. + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^2 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_1 \lambda_4 + \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_2 \lambda_4 - \frac{\tilde{s}}{4} \sin \theta \bar{\lambda}_2 \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^{i>2} \lambda_3 \bar{\lambda}_1 \Gamma_{i>2} \lambda_4 \right] \tag{D.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{1,11} = & -\frac{\tilde{s}^2\tilde{u}}{128}[-\bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\lambda_4 \\ & - \bar{\lambda}_2\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\lambda_4 - 2\bar{\lambda}_2\Gamma^{i>1}\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_{i>1}\lambda_4],\end{aligned}\quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{1,12} = & -\frac{\tilde{s}^2\tilde{t}}{1024}[\bar{\lambda}_2\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^M\Gamma^N\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4 \\ & + \cos\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4 - \cos\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4 \\ & - \sin\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4 + \sin\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^2\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4],\end{aligned}\quad (\text{D.9})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{1,13} = & -\frac{\tilde{s}^2\tilde{t}}{1024}[\bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^N\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_0\lambda_4 - \cos\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^N\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_1\lambda_4 \\ & - \sin\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^N\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_2\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^1\Gamma^N\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_0\lambda_4 \\ & + \cos\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^1\Gamma^N\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_1\lambda_4 + \sin\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^1\Gamma^N\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_2\lambda_4]\end{aligned}\quad (\text{D.10})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{1,14} = & -\frac{\tilde{s}^2\tilde{t}}{1024}[-\bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^N\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4 - \cos^2\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^1\Gamma^N\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4 \\ & + \cos\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^N\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4 + \sin\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^0\Gamma^N\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4 \\ & + \cos\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^1\Gamma^N\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4 - \sin\theta\cos\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^1\Gamma^N\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4 \\ & + \sin\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^2\Gamma^N\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_0\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4 - \sin\theta\cos\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^2\Gamma^N\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_1\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4 \\ & - \sin^2\theta\bar{\lambda}_2\Gamma^2\Gamma^N\Gamma^M\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_2\Gamma_N\Gamma_M\lambda_4],\end{aligned}\quad (\text{D.11})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{1,15} = & -\frac{\tilde{s}^2\tilde{t}}{1024}[-\bar{\lambda}_2\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_0\lambda_4 - \bar{\lambda}_2\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_1\lambda_4 \\ & + \bar{\lambda}_2\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^0\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_1\lambda_4 + \bar{\lambda}_2\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^1\lambda_3\bar{\lambda}_1\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_0\lambda_4].\end{aligned}\quad (\text{D.12})$$

También los siguientes términos:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{2,4} = & \frac{\tilde{s}^2\tilde{t}}{1024}[\bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^N\Gamma^M\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\Gamma_N\Gamma_M\lambda_3 - \bar{\lambda}_1\Gamma^0\Gamma^N\Gamma^M\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\Gamma_N\Gamma_M\lambda_3 \\ & + \cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^1\Gamma^N\Gamma^M\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\Gamma_N\Gamma_M\lambda_3 - \cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^1\Gamma^N\Gamma^M\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\Gamma_N\Gamma_M\lambda_3 \\ & + \sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^2\Gamma^N\Gamma^M\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_0\Gamma_N\Gamma_M\lambda_3 - \sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^2\Gamma^N\Gamma^M\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_1\Gamma_N\Gamma_M\lambda_3],\end{aligned}\quad (\text{D.13})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{2,5} = & \frac{\tilde{s}^2\tilde{t}}{1024}[\bar{\lambda}_1\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_0\lambda_3 - \cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_0\lambda_3 \\ & - \sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_0\lambda_3 + \bar{\lambda}_1\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^0\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_1\lambda_3 \\ & - \cos\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^1\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_1\lambda_3 - \sin\theta\bar{\lambda}_1\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^2\lambda_2\bar{\lambda}_4\Gamma_M\Gamma_N\Gamma_1\lambda_3],\end{aligned}\quad (\text{D.14})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,6} &= \frac{\tilde{s}^2 \tilde{t}}{1024} [\bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&+ \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&+ \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3],
\end{aligned} \tag{D.15}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,7} &= \frac{\tilde{s}^2 \tilde{t}}{1024} [\bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&+ \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 \\
&+ \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3 + \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \Gamma_N \Gamma_M \lambda_3],
\end{aligned} \tag{D.16}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,8} &= \frac{\tilde{s} \tilde{t} \tilde{u}}{128} [\bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 - \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 \\
&- \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 + \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 + \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 \\
&- 2 \frac{\tilde{t}}{\tilde{s}} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>1} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>1} \lambda_3],
\end{aligned} \tag{D.17}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,9} &= \frac{\tilde{s} \tilde{t} \tilde{u}}{128} [\bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 - \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 + \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 \\
&- \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 - \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 - 2 \frac{\tilde{t}}{\tilde{s}} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>1} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>1} \lambda_3 \\
&+ \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3],
\end{aligned} \tag{D.18}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,10} &= \frac{\tilde{s} \tilde{t} \tilde{u}}{64} [-\bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \lambda_3 - \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \\
&- \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^2 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \lambda_3 - \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3 \\
&- \cos^2 \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3 + \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 \\
&- \sin^2 \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 + \sin \theta \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3],
\end{aligned} \tag{D.19}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,11} &= -\frac{\tilde{s} \tilde{t} \tilde{u}}{64} [\bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>1} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>1} \lambda_3 - \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \\
&- \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \lambda_3]
\end{aligned} \tag{D.20}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,12} &= \frac{\tilde{s} \tilde{t}^2}{128} [\bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 + \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 + \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 \\
&+ \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 - \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 - 2 \frac{\tilde{u}}{\tilde{s}} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>1} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>1} \lambda_3],
\end{aligned} \tag{D.21}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,13} &= \frac{\tilde{s}\tilde{t}^2}{128} [\bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 - \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 - \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 \\
&\quad - 2 \frac{\tilde{u}}{\tilde{s}} \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>1} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>1} \lambda_3 - \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \lambda_3 - \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3], \quad (\text{D.22})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,14} &= \frac{\tilde{s}\tilde{t}^2}{64} [-\sin^2 \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 - \cos^2 \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3 - \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \\
&\quad + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \lambda_3 + \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3 \\
&\quad + \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^2 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \lambda_3 - \sin \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 \\
&\quad + \sin \theta \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_1 \lambda_3 + \sin \theta \cos \theta \bar{\lambda}_1 \Gamma^1 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3], \quad (\text{D.23})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,15} &= -\frac{\tilde{s}\tilde{t}^2}{64} [\bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_{i>2} \lambda_3 + \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_2 \lambda_3 + \bar{\lambda}_1 \Gamma^{i>2} \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_{i>2} \lambda_3 \\
&\quad + \bar{\lambda}_1 \Gamma^2 \lambda_2 \bar{\lambda}_4 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \lambda_3]. \quad (\text{D.24})
\end{aligned}$$

Apéndice E

Los términos de $K_{\mathbf{c}}^2$ dilatones–2 dilatinos

En este apéndice mostramos los resultados de cada uno de los 30 términos presentes en la suma de los dos productos tensoriales de (5.56). Cada uno de estos términos tiene su pareja \tilde{s} - \tilde{u} dual, la cual será aclarada en cada caso. Comenzando, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,1} &= -\frac{1}{4 \cdot 16} (\tilde{s}\tilde{u}\zeta_1 \cdot \zeta_4 \zeta_3 \cdot \zeta_2) \otimes \frac{\tilde{u}}{2 \cdot 8} \bar{u}_1 \Gamma \cdot \zeta_2 \Gamma \cdot (k_3 + k_4) \Gamma \cdot \zeta_3 u_4 \\
&= -\frac{\Phi_2 \Phi_3 \tilde{s}\tilde{u}^2}{8192} \left(6\tilde{s}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_2) + 6\tilde{t}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_4) + 8\tilde{s}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right. \\
&\quad + 6\tilde{t}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 2\tilde{t}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 2\tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_1)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
&\quad + 16(\bar{k}_2 \cdot k_1)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 6\tilde{s}(\bar{k}_2 \cdot k_3)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 4(\bar{k}_2 \cdot k_3)(\bar{k}_3 \cdot k_1)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
&\quad - 4(\bar{k}_2 \cdot k_4)(\bar{k}_3 \cdot k_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 8\tilde{s}(\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 4\tilde{t}(\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
&\quad \left. - 8\tilde{s}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 2\tilde{t}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 16(\bar{k}_3 \cdot k_4)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 64\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right). \tag{E.1}
\end{aligned}$$

Notar que se puede obtener $\mathcal{T}_{1,2}$ intercambiando la partícula 2 por la 3 y viceversa sobre $\mathcal{T}_{1,1}$. Los términos de la forma $\mathcal{T}_{2,j}$ son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,1} &= -\frac{1}{4 \cdot 16} (\tilde{s}\tilde{t}\zeta_1 \cdot \zeta_3 \zeta_4 \cdot \zeta_2) \otimes \frac{\tilde{u}}{2 \cdot 8} \bar{u}_1 \Gamma \cdot \zeta_2 \Gamma \cdot (k_3 + k_4) \Gamma \cdot \zeta_3 u_4 \\
&= -\frac{\Phi_2 \Phi_3 \tilde{s}\tilde{t}\tilde{u}}{8192} \left(-10\tilde{s}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 2\tilde{t}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 2\tilde{u}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right. \\
&\quad - \tilde{t}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 2\tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_1)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
&\quad \left. + 4(\bar{k}_2 \cdot k_1)(\bar{k}_3 \cdot k_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 8(\bar{k}_2 \cdot k_1)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 2\tilde{s}(\bar{k}_2 \cdot k_3)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2(\bar{k}_2 \cdot k_3)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 4(\bar{k}_2 \cdot k_3)(\bar{k}_3 \cdot k_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
& - 2\tilde{s}(\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 4\tilde{t}(\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 6\tilde{s}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 2\tilde{t}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
& + 4(\bar{k}_3 \cdot k_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 12(\bar{k}_3 \cdot k_4)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 48\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \Big), \tag{E.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,2} &= -\frac{1}{4 \cdot 16}(\tilde{s}\tilde{t}\zeta_1 \cdot \zeta_3\zeta_4 \cdot \zeta_2) \otimes \frac{\tilde{s}}{2 \cdot 8}\bar{u}_1\Gamma \cdot \zeta_3\Gamma \cdot (k_2 + k_4)\Gamma \cdot \zeta_2u_4 \\
&= -\frac{\Phi_2\Phi_3\tilde{s}^2\tilde{t}}{8192} \left(10\tilde{u}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 10\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 4\tilde{u}(\bar{k}_2 \cdot k_3)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right. \\
&+ 20(\bar{k}_2 \cdot k_3)\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 4(\bar{k}_2 \cdot k_4)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 20(\bar{k}_2 \cdot k_4)\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
&\left. - 2\tilde{u}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 4\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 84\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right). \tag{E.3}
\end{aligned}$$

Notar que se puede obtener $\mathcal{T}_{3,1}$ y $\mathcal{T}_{3,2}$ intercambiando la partícula 2 por la 3 y viceversa sobre $\mathcal{T}_{2,2}$ y $\mathcal{T}_{2,1}$ respectivamente.

Los términos de la forma $\mathcal{T}_{4,j}$ son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{4,1} &= \frac{\tilde{s}}{2 \cdot 16}(\zeta_1 \cdot k_4\zeta_3 \cdot k_2\zeta_4 \cdot \zeta_2) \otimes \frac{\tilde{u}}{2 \cdot 8}\bar{u}_1\Gamma \cdot \zeta_2\Gamma \cdot (k_3 + k_4)\Gamma \cdot \zeta_3u_4 \\
&= \frac{\Phi_2\Phi_3\tilde{s}\tilde{u}}{4096} \left(-\tilde{s}\tilde{t}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_2) + \tilde{t}^2\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_4) + \tilde{t}\tilde{u}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_4) \right. \\
&+ \tilde{s}\tilde{u}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 - \tilde{u}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma)(k_2 \cdot \Gamma)(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_2) + \tilde{t}\tilde{u}(\bar{k}_2 \cdot k_1)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
&- 2\tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_1)(\bar{k}_3 \cdot k_4)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 2\tilde{u}(\bar{k}_2 \cdot k_3)(\bar{k}_3 \cdot k_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
&+ \tilde{s}\tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_4)\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 4\tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_4)(\bar{k}_3 \cdot k_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 2\tilde{s}(\bar{k}_2 \cdot k_4)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
&+ \tilde{s}\tilde{t}(\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + \tilde{t}\tilde{u}(\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - \tilde{s}\tilde{t}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + \tilde{t}\tilde{u}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \\
&\left. - 2\tilde{u}(\bar{k}_3 \cdot k_2)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 4\tilde{t}(\bar{k}_3 \cdot k_4)\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 - 6\tilde{t}\bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right), \tag{E.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{4,2} &= \frac{\tilde{s}}{2 \cdot 16}(\zeta_1 \cdot k_4\zeta_3 \cdot k_2\zeta_4 \cdot \zeta_2) \otimes \frac{\tilde{s}}{2 \cdot 8}\bar{u}_1\Gamma \cdot \zeta_3\Gamma \cdot (k_2 + k_4)\Gamma \cdot \zeta_2u_4 \\
&= \frac{\Phi_2\Phi_3\tilde{s}^2}{4096} \left(4\tilde{t}\tilde{u}\bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 2\tilde{t}(\bar{k}_3 \cdot k_2)\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 + 8\tilde{t}(\bar{k}_3 \cdot k_4)\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right. \\
&\left. - 10\tilde{t}\bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma)\lambda_4 \right). \tag{E.5}
\end{aligned}$$

Notar que se puede obtener $\mathcal{T}_{14,1}$ y $\mathcal{T}_{14,2}$ intercambiando la partícula 2 por la 3 y viceversa sobre $\mathcal{T}_{4,2}$ y $\mathcal{T}_{4,1}$ respectivamente.

Los términos de la forma $\mathcal{T}_{5,j}$ son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{5,1} &= \frac{\tilde{s}}{2 \cdot 16} (\zeta_2 \cdot k_3 \zeta_4 \cdot k_1 \zeta_1 \cdot \zeta_3) \otimes \frac{\tilde{u}}{2 \cdot 8} \bar{u}_1 \Gamma \cdot \zeta_2 \Gamma \cdot (k_3 + k_4) \Gamma \cdot \zeta_3 u_4 \\
&= \frac{\Phi_2 \Phi_3 \tilde{s} \tilde{u}}{4096} \left(-\tilde{s} \tilde{t} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_1) + \tilde{t}^2 \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_4) + \tilde{t}^2 \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right. \\
&\quad - \tilde{t} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_4) - 3 \tilde{t} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\quad + \tilde{s} \tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_1) \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + \tilde{s} \tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_3) \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + \tilde{u}(\bar{k}_2 \cdot k_3) \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\quad - 2 \tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_3) (\bar{k}_3 \cdot k_1) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + 2 \tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_3) (\bar{k}_3 \cdot k_2) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\quad + 2 \tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_3) (\bar{k}_3 \cdot k_4) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + 2 \tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_3) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - \tilde{t}^2(\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\quad \left. + \tilde{s} \tilde{t} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - \tilde{s} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 6 \tilde{t} \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right), \tag{E.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{5,2} &= \frac{\tilde{s}}{2 \cdot 16} (\zeta_2 \cdot k_3 \zeta_4 \cdot k_1 \zeta_1 \cdot \zeta_3) \otimes \frac{\tilde{s}}{2 \cdot 8} \bar{u}_1 \Gamma \cdot \zeta_3 \Gamma \cdot (k_2 + k_4) \Gamma \cdot \zeta_2 u_4, \\
&= \frac{\Phi_2 \Phi_3 \tilde{s}^2}{4096} \left(5 \tilde{t} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4(\bar{k}_2 \cdot k_4) + 4 \tilde{t} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right. \\
&\quad \left. + 2 \tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_3) \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 10 \tilde{t} \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right). \tag{E.7}
\end{aligned}$$

Notar que se puede obtener $\mathcal{T}_{15,1}$ y $\mathcal{T}_{15,2}$ intercambiando la partícula 2 por la 3 y viceversa sobre $\mathcal{T}_{5,2}$ y $\mathcal{T}_{5,1}$ respectivamente. Los términos de la forma $\mathcal{T}_{6,j}$ son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{6,1} &= \frac{\tilde{s}}{2 \cdot 16} (\zeta_1 \cdot k_3 \zeta_4 \cdot k_2 \zeta_3 \cdot \zeta_2) \otimes \frac{\tilde{u}}{2 \cdot 8} \bar{u}_1 \Gamma \cdot \zeta_2 \Gamma \cdot (k_3 + k_4) \Gamma \cdot \zeta_3 u_4 \\
&= \frac{\Phi_2 \Phi_3 \tilde{s} \tilde{u}}{4096} \left(-\tilde{s} \tilde{t} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_2) - \tilde{t}^2 \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4(\bar{k}_3 \cdot k_4) - \tilde{s} \tilde{u} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right. \\
&\quad + \tilde{t} \tilde{u} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 + \frac{\tilde{t} \tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + \tilde{s} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 (\bar{k}_3 \cdot k_2) \\
&\quad + \tilde{t} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 (\bar{k}_3 \cdot k_4) + \tilde{s} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\quad + 2 \tilde{s} \tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_3) \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - \tilde{s}(\bar{k}_2 \cdot k_3) \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\quad + \tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_3) \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 2 \tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_3) (\bar{k}_3 \cdot k_2) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\quad + 2 \tilde{u}(\bar{k}_2 \cdot k_3) (\bar{k}_3 \cdot k_2) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + 2 \tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_3) (\bar{k}_3 \cdot k_4) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + 2 \tilde{t}(\bar{k}_2 \cdot k_3) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\quad - \tilde{t} \tilde{u}(\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + \tilde{s} \tilde{t} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - \tilde{s} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + 2 \tilde{t} \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\quad \left. + 6 \tilde{u} \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right), \tag{E.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{6,2} &= \frac{\tilde{s}}{2 \cdot 16} (\zeta_1 \cdot k_3 \zeta_4 \cdot k_2 \zeta_3 \cdot \zeta_2) \otimes \frac{\tilde{s}}{2 \cdot 8} \bar{u}_1 \Gamma \cdot \zeta_3 \Gamma \cdot (k_2 + k_4) \Gamma \cdot \zeta_2 u_4 \\
&= \frac{\Phi_2 \Phi_3 \tilde{s}^2}{4096} \left(-\tilde{t} \bar{u} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 + \tilde{u} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 + \tilde{t} \tilde{u} (\bar{k}_2 \cdot k_3) \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right. \\
&+ 2\tilde{u} (\bar{k}_2 \cdot k_3) \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 - \tilde{t} (\bar{k}_2 \cdot k_4) \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 2\tilde{t} (\bar{k}_2 \cdot k_4) \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&+ \frac{\tilde{t} \tilde{u}}{2} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - \tilde{t} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 - \tilde{u} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\left. - 2\tilde{t} \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 6\tilde{u} \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right). \tag{E.9}
\end{aligned}$$

Notar que se puede obtener $\mathcal{T}_{12,1}$ y $\mathcal{T}_{12,2}$ intercambiando la partícula 2 por la 3 y viceversa sobre $\mathcal{T}_{6,2}$ y $\mathcal{T}_{6,1}$ respectivamente. Los términos de la forma $\mathcal{T}_{7,j}$ son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{7,1} &= \frac{\tilde{s}}{2 \cdot 16} (\zeta_2 \cdot k_4 \zeta_3 \cdot k_1 \zeta_1 \cdot \zeta_4) \otimes \frac{\tilde{u}}{2 \cdot 8} \bar{u}_1 \Gamma \cdot \zeta_2 \Gamma \cdot (k_3 + k_4) \Gamma \cdot \zeta_3 u_4 \\
&= \frac{\Phi_2 \Phi_3 \tilde{s} \tilde{u}}{4096} \left(-3\tilde{s} \tilde{u} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 (\bar{k}_3 \cdot k_1) - 3\tilde{u}^2 \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 (\bar{k}_3 \cdot k_4) - 3\tilde{u}^2 \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right. \\
&- \tilde{u}^2 \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + 3\tilde{u} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + \tilde{u}^2 (\bar{k}_2 \cdot k_1) \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&+ \tilde{s} \tilde{u} (\bar{k}_2 \cdot k_4) \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 2\tilde{u} (\bar{k}_2 \cdot k_4) \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&- 6\tilde{s} (\bar{k}_2 \cdot k_4) (\bar{k}_3 \cdot k_1) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + 4\tilde{u} (\bar{k}_2 \cdot k_4) (\bar{k}_3 \cdot k_1) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&- 6\tilde{u} (\bar{k}_2 \cdot k_4) (\bar{k}_3 \cdot k_2) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 6\tilde{u} (\bar{k}_2 \cdot k_4) (\bar{k}_3 \cdot k_4) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 6\tilde{u} (\bar{k}_2 \cdot k_4) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&+ \tilde{u}^2 (\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + \tilde{u}^2 \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 3\tilde{u} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\left. - 6\tilde{u} (\bar{k}_3 \cdot k_2) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - \tilde{t} \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 6\tilde{u} \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right), \tag{E.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{7,2} &= \frac{\tilde{s}}{2 \cdot 16} (\zeta_2 \cdot k_4 \zeta_3 \cdot k_1 \zeta_1 \cdot \zeta_4) \otimes \frac{\tilde{s}}{2 \cdot 8} \bar{u}_1 \Gamma \cdot \zeta_3 \Gamma \cdot (k_2 + k_4) \Gamma \cdot \zeta_2 u_4 \\
&= \frac{\Phi_2 \Phi_3 \tilde{s}^2}{4096} \left(2\tilde{u}^2 \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 (\bar{k}_3 \cdot k_1) + \tilde{u}^2 \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 2\tilde{u} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 (\bar{k}_3 \cdot k_1) \right. \\
&+ \tilde{u} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 6\tilde{u} (\bar{k}_2 \cdot k_3) (\bar{k}_3 \cdot k_1) \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 6\tilde{u}^2 (\bar{k}_2 \cdot k_4) \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&+ 2\tilde{s} (\bar{k}_2 \cdot k_4) (\bar{k}_3 \cdot k_1) \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 12\tilde{u} (\bar{k}_2 \cdot k_4) (\bar{k}_3 \cdot k_1) \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&+ 2\tilde{u} (\bar{k}_2 \cdot k_4) (\bar{k}_3 \cdot k_4) \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 2\tilde{t} (\bar{k}_2 \cdot k_4) \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 + \tilde{u}^2 (\bar{k}_3 \cdot \bar{k}_2) \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&- 3\tilde{u}^2 \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - \tilde{u}^2 \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 - \tilde{u} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&- 2\tilde{t} (\bar{k}_3 \cdot k_1) \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 6\tilde{u} (\bar{k}_3 \cdot k_1) \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 2\tilde{u} (\bar{k}_3 \cdot k_2) \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\left. + 2\tilde{s} \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right). \tag{E.11}
\end{aligned}$$

Notar que se puede obtener $\mathcal{T}_{13,1}$ y $\mathcal{T}_{13,2}$ intercambiando la partícula 2 por la 3 y

viceversa sobre $\mathcal{T}_{7,2}$ y $\mathcal{T}_{7,1}$ respectivamente. Los términos de la forma $\mathcal{T}_{8,j}$ son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{8,1} &= \frac{\tilde{t}}{2 \cdot 16} (\zeta_2 \cdot k_1 \zeta_4 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_1) \otimes \frac{\tilde{u}}{2 \cdot 8} \bar{u}_1 \Gamma \cdot \zeta_2 \Gamma \cdot (k_3 + k_4) \Gamma \cdot \zeta_3 u_4 \\
&= \frac{\Phi_2 \Phi_3 \tilde{t} \tilde{u}}{4096} \left(-2\tilde{s}^2 \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 + \frac{\tilde{s}^2}{2} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - \tilde{s} \tilde{t} (\bar{k}_2 \cdot k_1) \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right. \\
&\quad + \tilde{s} (\bar{k}_2 \cdot k_1) \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + 2\tilde{s} (\bar{k}_2 \cdot k_1) (\bar{k}_3 \cdot k_2) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\quad - 2\tilde{t} (\bar{k}_2 \cdot k_1) (\bar{k}_3 \cdot k_4) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 8\tilde{s} (\bar{k}_2 \cdot k_1) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 2\tilde{t} (\bar{k}_2 \cdot k_1) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\quad + \tilde{s} (\bar{k}_2 \cdot k_3) \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 + 2\tilde{s} (\bar{k}_2 \cdot k_3) (\bar{k}_3 \cdot k_2) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\quad \left. - \tilde{u} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 2\tilde{u} (\bar{k}_3 \cdot k_2) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right), \tag{E.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{8,2} &= \frac{\tilde{t}}{2 \cdot 16} (\zeta_2 \cdot k_1 \zeta_4 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_1) \otimes \frac{\tilde{s}}{2 \cdot 8} \bar{u}_1 \Gamma \cdot \zeta_3 \Gamma \cdot (k_2 + k_4) \Gamma \cdot \zeta_2 u_4 \\
&= \frac{\Phi_2 \Phi_3 \tilde{s} \tilde{t}}{4096} \left(8\tilde{t} (\bar{k}_2 \cdot k_1) \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 + 8\tilde{s} (\bar{k}_2 \cdot k_3) \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 8\tilde{u} \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right). \tag{E.13}
\end{aligned}$$

Notar que se puede obtener $\mathcal{T}_{11,1}$ y $\mathcal{T}_{11,2}$ intercambiando la partícula 2 por la 3 y viceversa sobre $\mathcal{T}_{8,2}$ y $\mathcal{T}_{8,1}$ respectivamente. Los términos de la forma $\mathcal{T}_{9,j}$ son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{9,1} &= \frac{\tilde{t}}{2 \cdot 16} (\zeta_3 \cdot k_4 \zeta_1 \cdot k_2 \zeta_2 \cdot \zeta_4) \otimes \frac{\tilde{u}}{2 \cdot 8} \bar{u}_1 \Gamma \cdot \zeta_2 \Gamma \cdot (k_3 + k_4) \Gamma \cdot \zeta_3 u_4 \\
&= \frac{\Phi_2 \Phi_3 \tilde{t} \tilde{u}}{4096} \left(-\tilde{s}^2 \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 (\bar{k}_3 \cdot k_2) - \frac{\tilde{s}^2}{2} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right. \\
&\quad - \tilde{s} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 (\bar{k}_3 \cdot k_2) + \tilde{u} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 (\bar{k}_3 \cdot k_4) \\
&\quad + \tilde{u} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_2 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 3\tilde{s} \bar{\lambda}_1(\bar{k}_3 \cdot \Gamma) (k_2 \cdot \Gamma) (k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 8\tilde{s} (\bar{k}_3 \cdot k_2) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\quad - 16\tilde{s} (\bar{k}_3 \cdot k_4) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 2\tilde{t} (\bar{k}_3 \cdot k_4) \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 6\tilde{s} \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \\
&\quad \left. + 2\tilde{u} \bar{\lambda}_1(k_3 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right), \tag{E.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{9,2} &= \frac{\tilde{t}}{2 \cdot 16} (\zeta_3 \cdot k_4 \zeta_1 \cdot k_2 \zeta_2 \cdot \zeta_4) \otimes \frac{\tilde{s}}{2 \cdot 8} \bar{u}_1 \Gamma \cdot \zeta_3 \Gamma \cdot (k_2 + k_4) \Gamma \cdot \zeta_2 u_4 \\
&= \frac{\Phi_2 \Phi_3 \tilde{s} \tilde{t}}{4096} \left(8\tilde{s} (\bar{k}_3 \cdot k_2) \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 + 8\tilde{t} (\bar{k}_3 \cdot k_4) \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 - 8\tilde{u} \bar{\lambda}_1(k_2 \cdot \Gamma) \lambda_4 \right). \tag{E.15}
\end{aligned}$$

Notar que se puede obtener $\mathcal{T}_{10,1}$ y $\mathcal{T}_{10,2}$ intercambiando la partícula 2 por la 3 y viceversa sobre $\mathcal{T}_{9,2}$ y $\mathcal{T}_{9,1}$ respectivamente.

Apéndice F

Armónicos esféricos sobre la S^5

La intención de este apéndice es ver en mayor detalle la construcción de los armónicos esféricos escalares sobre la S^5 , y también construir explícitamente algunos armónicos escalares que son de mucha utilidad para el cálculo de la amplitud de dispersión de cuatro glueballs. Los estados de Kaluza-Klein obtenidos de la compactificación espontánea de la supergravedad de tipo IIB sobre el $\text{AdS}_5 \times S^5$ fueron derivados en un artículo pionero en [94]. También notar la gran utilidad de [16], el cual da una relación explícita entre los operadores de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM y los estados de Kaluza-Klein obtenidos en [94].

Consideremos la representación irreducible de $SU(4)$ con los números de Dynkin $[0, k, 0]$, con $k \geq 0$. Hay una relación entre el segundo número de Dynkin k y la dimensión de escala Δ del operador de traza única de $\mathcal{N} = 4$ SYM dada por $\Delta = k + 4$. La dimensión de la representación $[0, k, 0]$ se obtiene asociando un diagrama de Young con k columnas de dos cajas cada una. La dimensión de esta representación irreducible está dada por el cociente de dos tableaux de Young, lo cual deja [95, 96]

$$d_{\text{escalar}}(5, k) = \left[\binom{5+k}{5} - \binom{5+k-2}{5} \right] \quad (\text{F.1})$$

Los armónicos esféricos sobre la S^5 están etiquetados por $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)$, donde los $l_i \geq 0$ son enteros. Ellos satisfacen $l_5 \geq l_4 \geq l_3 \geq l_2 \geq l_1 \geq 0$ y $l_5 \equiv k$.

Los armónicos esféricos escalares sobre S^{n-1} han sido obtenidos en [97]

$$Y_{(l_{n-1}, \dots, l_1)}^{(s)}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = (-1)^{l_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{il_1\theta_1} \prod_{j=2}^{n-1} {}_j\bar{P}_{l_j}^{l_{j-1}}(\theta_j) \quad (\text{F.2})$$

donde θ_j 's son los $n - 1$ ángulos sobre S^{n-1} . En esta construcción se han usado las funciones de Legendre definidas como

$${}_j\bar{P}_L^l(\theta) = \sqrt{\frac{2L+j-1}{2} \frac{(L+l+j-2)!}{(L-l)!}} (\sin \theta)^{\frac{2-j}{2}} P_{(L+\frac{j-2}{2})}^{-\left(l+\frac{j-2}{2}\right)}(\cos \theta) \quad (\text{F.3})$$

en términos de los polinomios de Legendre $P_{(L+\frac{j-2}{2})}^{-(l+\frac{j-2}{2})}(\cos \theta)$. Los armónicos esféricos escalares satisfacen

$$\square_{S^{n-1}} Y_{(l_{n-1}, \dots, l_1)}^{(s)}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = -l_{n-1} (l_{n-1} + n - 2) Y_{(l_{n-1}, \dots, l_1)}^{(s)}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \quad (\text{F.4})$$

Nuestro interés se encuentra en la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM con grupo de gauge $SU(N_c)$, la cual es dual a la teoría de supercuerdas de tipo IIB sobre el $\text{AdS}_5 \times S^5$, por lo que $n - 1 = 5$.

Consideremos algunos ejemplos. Para la representación irreducible $[0, 0, 0]$ de $SU(4)$, donde $k = 0$, la dimensión es uno, donde el armónico esférico está dado en la ecuación (6.28). Tomando $k = 1$, la representación es $[0, 1, 0]$ de dimensión 6, la cual puede ser vista como el cociente entre los siguientes tableaux de Young:

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad (\text{F.5})$$

Obtuvimos los 6 armónicos esféricos escalares, los cuales tienen la forma:

$$Y_{(1,0,0,0,0)}^{(s)} = \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \cos \theta_5, \quad (\text{F.6})$$

$$Y_{(1,1,0,0,0)}^{(s)} = \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \cos \theta_4 \sin \theta_5, \quad (\text{F.7})$$

$$Y_{(1,1,1,0,0)}^{(s)} = \frac{2\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \frac{\cos \theta_3 \sin \theta_4 \sin^2\left(\frac{\theta_5}{2}\right) (1 + \cos \theta_5)}{\sin \theta_5}, \quad (\text{F.8})$$

$$Y_{(1,1,1,1,0)}^{(s)} = \frac{2\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \frac{\cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin^2\left(\frac{\theta_5}{2}\right) (1 + \cos \theta_5)}{\sin \theta_5}, \quad (\text{F.9})$$

$$Y_{(1,1,1,1,1)}^{(s)} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^{3/2}} e^{-i\theta_1} \frac{\sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin^2\left(\frac{\theta_5}{2}\right) (1 + \cos \theta_5)}{\sin \theta_5}, \quad (\text{F.10})$$

$$Y_{(1,1,1,1,-1)}^{(s)} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^{3/2}} e^{i\theta_1} \frac{\sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin^2\left(\frac{\theta_5}{2}\right) (1 + \cos \theta_5)}{\sin \theta_5}. \quad (\text{F.11})$$

donde hemos corroborado su ortonormalidad y también hemos calculado las integrales de los cuatro armónicos esféricos escalares sobre la S^5 .

Para $k = 2$, la representación es $[0, 2, 0]$, teniendo 20 armónicos esféricos escalares ortogonales sobre la S^5 , dimensión que puede ser calculada del cociente entre los valores de los siguientes tableaux de Young:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} \quad (\text{F.12})$$

Los correspondientes 20 armónicos esféricos escalares pueden ser obtenidos de la ecuación (F.2). La construcción de los armónicos esféricos espinoriales sobre la S^5 se puede ver en [34, 35, 97, 98].

Bibliografia

- [1] J. Polchinski and M. J. Strassler, “Hard scattering and gauge / string duality,” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 031601 (2002) doi:10.1103/PhysRevLett.88.031601 [arXiv:hep-th/0109174 [hep-th]].
- [2] L. Martin, M. Parlanti and M. Schvellinger, “Fermions hard scattering from superstrings,” *Phys. Rev. D* **111** (2025) no.6, 066004 doi:10.1103/PhysRevD.111.066004 [arXiv:2412.08425 [hep-th]].
- [3] L. Martin, M. Parlanti and M. Schvellinger, “Four-dilatino superstring theory scattering amplitude and its Regge behavior,” *Phys. Rev. D* **112** (2025) no.6, 066009 doi:10.1103/4hcr-5b57 [arXiv:2503.19150 [hep-th]].
- [4] L. Martin, M. Parlanti and M. Schvellinger, “SYM theory hard scattering from the dilaton-dilatino superstring scattering amplitude,” *Phys. Rev. D* **112** (2025) no.8, 086003 doi:10.1103/8qc2-5cqk.
- [5] L. Martin, M. Parlanti and M. Schvellinger, “Dilaton-dilatino superstring theory scattering amplitude and its Regge behavior,” [arXiv:2506.16472 [hep-th]].
- [6] Chew, Geoffrey F., and Steven C. Frautschi. "Regge trajectories and the principle of maximum strength for strong interactions." *Physical Review Letters* 8.1 (1962): 41.
- [7] G. Veneziano, “Construction of a crossing - symmetric, Regge behaved amplitude for linearly rising trajectories,” *Nuovo Cim. A* **57** (1968), 190-197 doi:10.1007/BF02824451.
- [8] M. A. Virasoro, “Alternative constructions of crossing-symmetric amplitudes with Regge behavior,” *Phys. Rev.* **177** (1969), 2309-2311 doi:10.1103/PhysRev.177.2309.
- [9] J. A. Shapiro, “Electrostatic analog for the virasoro model,” *Phys. Lett. B* **33** (1970), 361-362 doi:10.1016/0370-2693(70)90255-8.
- [10] S. Weinberg, *Phys. Lett.* 156B (1985) 309.

- [11] D. Friedan, 1982 Les Houches Theoretical Physics Summer School (North-Holland).
- [12] H. Fritzsche, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, “Advantages of the Color Octet Gluon Picture,” *Phys. Lett. B* **47** (1973), 365-368 doi:10.1016/0370-2693(73)90625-4.
- [13] G. 't Hooft, “A Planar Diagram Theory for Strong Interactions,” *Nucl. Phys. B* **72** (1974), 461 doi:10.1016/0550-3213(74)90154-0.
- [14] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323** (2000), 183-386 doi:10.1016/S0370-1573(99)00083-6 [arXiv:hep-th/9905111 [hep-th]].
- [15] B. Zwiebach, "A first course in string theory", Cambridge University Press, 2006, ISBN 978-0-521-83143-7, 978-0-511-20757-0.
- [16] E. D'Hoker and D. Z. Freedman, “Supersymmetric gauge theories and the AdS / CFT correspondence,” [arXiv:hep-th/0201253 [hep-th]].
- [17] R. Grimm, M. Sohnius and J. Wess, “Extended Supersymmetry and Gauge Theories,” *Nucl. Phys. B* **133** (1978), 275-284 doi:10.1016/0550-3213(78)90303-6.
- [18] Gubser, Steven S., Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. "Gauge theory correlators from non-critical string theory." *Physics Letters B* 428.1-2 (1998): 105-114.
- [19] E. Witten, “Anti de Sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998), 253-291 doi:10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2 [arXiv:hep-th/9802150 [hep-th]].
- [20] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998), 231-252 doi:10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a1 [arXiv:hep-th/9711200 [hep-th]].
- [21] J. Casallerrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal and U. Achim Wiedemann, Cambridge University Press, 2014, ISBN 978-1-009-40350-4, 978-1-009-40349-8, 978-1-009-40352-8, 978-1-139-13674-7 doi:10.1017/9781009403504 [arXiv:1101.0618 [hep-th]].
- [22] R. C. Brower, J. Polchinski, M. J. Strassler and C. I. Tan, *JHEP* **12** (2007), 005 doi:10.1088/1126-6708/2007/12/005 [arXiv:hep-th/0603115 [hep-th]].
- [23] D. Jorjin and M. Schvellinger, “Scope and limitations of a string theory dual description of the proton structure,” *Phys. Rev. D* **106**, no.6, 066024 (2022) doi:10.1103/PhysRevD.106.066024 [arXiv:2207.02984 [hep-ph]].

- [24] N. Kovensky, G. Michalski and M. Schvellinger, “Deep inelastic scattering from polarized spin-1/2 hadrons at low x from string theory,” JHEP **10**, 084 (2018) doi:10.1007/JHEP10(2018)084 [arXiv:1807.11540 [hep-th]].
- [25] S. J. Brodsky and G. R. Farrar, “Scaling Laws at Large Transverse Momentum,” Phys. Rev. Lett. **31**, 1153-1156 (1973) doi:10.1103/PhysRevLett.31.1153.
- [26] S. J. Brodsky and G. R. Farrar, “Scaling Laws for Large Momentum Transfer Processes,” Phys. Rev. D **11**, 1309 (1975) doi:10.1103/PhysRevD.11.1309.
- [27] P. V. Landshoff and J. C. Polkinghorne, “p p Elastic scattering at large momentum transfer,” Phys. Lett. B **44**, 293-295 (1973) doi:10.1016/0370-2693(73)90230-X.
- [28] P. V. Landshoff, “Model for elastic scattering at wide angle,” Phys. Rev. D **10** (1974), 1024-1030 doi:10.1103/PhysRevD.10.1024.
- [29] C. W. Akerlof, R. H. Hieber, A. D. Krisch, K. W. Edwards, L. G. Ratner and K. Ruddick, “Proton-Proton Elastic Scattering at 90-degrees and Structure Within the Proton,” Phys. Rev. Lett. **17** (1966), 1105-1109 doi:10.1103/PhysRevLett.17.1105.
- [30] C. W. Akerlof, R. H. Hieber, A. D. Krisch, K. W. Edwards, L. G. Ratner and K. Ruddick, “Elastic Proton-Proton Scattering at 90-degrees and Structure within the Proton,” Phys. Rev. **159** (1967), 1138-1149 doi:10.1103/PhysRev.159.1138.
- [31] J. V. Allaby, F. G. Binon, A. N. Diddens, P. Duteil, A. Klovning, R. Meunier, J. P. Peigneux, E. J. Sacharidi, K. Schlupmann and M. Spighel, *et al.* “Structure in the angular distribution of high energy proton-proton scattering,” Phys. Lett. B **28** (1968), 67-71 doi:10.1016/0370-2693(68)90545-5.
- [32] R. A. Carrigan, R. M. Edelstein, N. C. Hien, T. J. McMahon, I. Nadelhaft, E. W. Anderson, E. J. Bleser, G. B. Collins, T. Fujii and J. Menes, *et al.* “Proton proton elastic scattering at 15, 20, and 30 bev/c,” Phys. Rev. Lett. **24** (1970), 683-686 doi:10.1103/PhysRevLett.24.683.
- [33] G. Cocconi, V. T. Cocconi, A. D. Krisch, J. Orear, R. Rubinstein, D. B. Scarl, B. T. Ulrich, W. F. Baker, E. W. Jenkins and A. L. Read, “Proton-Proton Elastic Scattering Involving Large Momentum Transfers,” Phys. Rev. **138** (1965), B165-B172 doi:10.1103/PhysRev.138.B165.
- [34] D. Jorjin, G. Michalski and M. Schvellinger, “Spin-1/2 fermionic operators of $\mathcal{N} = 4$ SYM theory and DIS from type IIB supergravity,” JHEP **06**, 063 (2020) doi:10.1007/JHEP06(2020)063 [arXiv:2004.02909 [hep-th]].

- [35] D. Jorin and M. Schvellinger, “Higher-twist fermionic operators and DIS structure functions from the AdS/CFT duality,” *Phys. Rev. D* **103**, no.10, 106012 (2021) doi:10.1103/PhysRevD.103.106012 [arXiv:2010.07369 [hep-th]].
- [36] H. Kawai, D. C. Lewellen and S. H. H. Tye, “A Relation Between Tree Amplitudes of Closed and Open Strings,” *Nucl. Phys. B* **269**, 1-23 (1986) doi:10.1016/0550-3213(86)90362-7.
- [37] Z. Koba and H. B. Nielsen, “Generalized Veneziano model from the point of view of manifestly crossing-invariant parametrization,” *Z. Phys.* **229** (1969), 243-263 doi:10.1007/BF01396251.
- [38] P. Ramond, Dual theory for free fermions, *Phys. Rev. D* **3**, 2415 (1971).
- [39] A. Neveu and J. H. Schwarz, Factorizable dual model of pions, *Nucl. Phys. B* **31**, 86 (1971).
- [40] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, “SUPERSTRING THEORY. VOL. 1: INTRODUCTION,” 1988, ISBN 978-0-521-35752-4.
- [41] F. Gliozzi, J. Scherk and D. I. Olive, “Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model,” *Nucl. Phys. B* **122** (1977), 253-290 doi:10.1016/0550-3213(77)90206-1.
- [42] M.B. Green and J.H. Schwarz, Supersymmetrical string theories, *Phys. Lett.* **109B**, 444 (1982).
- [43] M. B. Green and J. H. Schwarz, “Supersymmetrical Dual String Theory. 2. Vertices and Trees,” *Nucl. Phys. B* **198**, 252-268 (1982) doi:10.1016/0550-3213(82)90556-9.
- [44] M. B. Green, J. H. Schwarz and L. Brink, “N=4 Yang-Mills and N=8 Supergravity as Limits of String Theories,” *Nucl. Phys. B* **198**, 474-492 (1982) doi:10.1016/0550-3213(82)90336-4.
- [45] C. B. Thorn, “Embryonic Dual Model for Pions and Fermions,” *Phys. Rev. D* **4**, 1112-1116 (1971) doi:10.1103/PhysRevD.4.1112.
- [46] J. H. Schwarz, “Dual quark-gluon model of hadrons,” *Phys. Lett. B* **37**, 315-319 (1971) doi:10.1016/0370-2693(71)90028-1.
- [47] E. Corrigan and D. I. Olive, “Fermion meson vertices in dual theories,” *Nuovo Cim. A* **11**, 749-773 (1972) doi:10.1007/BF02729477.
- [48] L. Brink, D. I. Olive, C. Rebbi and J. Scherk, “The Missing Gauge Conditions for the Dual Fermion Emission Vertex and Their Consequences,” *Phys. Lett. B* **45**, 379-383 (1973) doi:10.1016/0370-2693(73)90060-9.

- [49] D. I. Olive and J. Scherk, “Towards satisfactory scattering amplitudes for dual fermions,” Nucl. Phys. B **64**, 334-348 (1973) doi:10.1016/0550-3213(73)90630-5.
- [50] S. Mandelstam, “Manifestly Dual Formulation of the Ramond Model,” Phys. Lett. B **46**, 447-451 (1973) doi:10.1016/0370-2693(73)90163-9.
- [51] J. H. Schwarz and C. C. Wu, “Evaluation of Dual Fermion Amplitudes,” Phys. Lett. B **47**, 453-456 (1973) doi:10.1016/0370-2693(73)90112-3.
- [52] J. H. Schwarz and C. C. Wu, “Functions Occurring in Dual Fermion Amplitudes,” Nucl. Phys. B **73**, 77-92 (1974) doi:10.1016/0550-3213(74)90042-X.
- [53] E. Corrigan, P. Goddard, R. A. Smith and D. I. Olive, “Evaluation of the scattering amplitude for four dual fermions,” Nucl. Phys. B **67**, 477-491 (1973) doi:10.1016/0550-3213(73)90210-1.
- [54] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi and C. B. Thorn, “Quantum dynamics of a massless relativistic string,” Nucl. Phys. B **56**, 109-135 (1973) doi:10.1016/0550-3213(73)90223-X.
- [55] S. Mandelstam, “Interacting String Picture of Dual Resonance Models,” Nucl. Phys. B **64**, 205-235 (1973) doi:10.1016/0550-3213(73)90622-6.
- [56] J. H. Schwarz, “Superstring Theory,” Phys. Rept. **89**, 223-322 (1982) doi:10.1016/0370-1573(82)90087-4.
- [57] D. Friedan, E. J. Martinec and S. H. Shenker, “Conformal invariance, supersymmetry and string theory,” Nucl. Phys. B **271**, 93-165 (1986) doi:10.1016/S0550-3213(86)80006-2.
- [58] V. G. Knizhnik, “Covariant Fermionic Vertex in Superstrings,” Phys. Lett. B **160**, 403-407 (1985) doi:10.1016/0370-2693(85)90009-7.
- [59] J. Cohn, D. Friedan, Z. a. Qiu and S. H. Shenker, “Covariant Quantization of Supersymmetric String Theories: The Spinor Field of the Ramond-neveu-schwarz Model,” Nucl. Phys. B **278**, 577-600 (1986) doi:10.1016/0550-3213(86)90053-2.
- [60] V. G. Knizhnik, “Covariant Superstring Fermion Amplitudes From the Sum Over Fermionic Surfaces,” Phys. Lett. B **178**, 21-28 (1986) doi:10.1016/0370-2693(86)90463-6.
- [61] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec and R. Rohm, “The Heterotic String,” Phys. Rev. Lett. **54**, 502-505 (1985) doi:10.1103/PhysRevLett.54.502.

- [62] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec and R. Rohm, “Heterotic String Theory. 1. The Free Heterotic String,” Nucl. Phys. B **256**, 253 (1985) doi:10.1016/0550-3213(85)90394-3.
- [63] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec and R. Rohm, “Heterotic String Theory. 2. The Interacting Heterotic String,” Nucl. Phys. B **267**, 75-124 (1986) doi:10.1016/0550-3213(86)90146-X.
- [64] J. J. Atick and A. Sen, “Covariant One Loop Fermion Emission Amplitudes in Closed String Theories,” Nucl. Phys. B **293**, 317-347 (1987) doi:10.1016/0550-3213(87)90075-7.
- [65] K. Becker, M. Becker, I. V. Melnikov, D. Robbins and A. B. Royston, “Some tree-level string amplitudes in the NSR formalism,” JHEP **12**, 010 (2015) doi:10.1007/JHEP12(2015)010 [arXiv:1507.02172 [hep-th]].
- [66] N. Berkovits, “Super Poincare covariant quantization of the superstring,” JHEP **04**, 018 (2000) doi:10.1088/1126-6708/2000/04/018 [arXiv:hep-th/0001035 [hep-th]].
- [67] N. Berkovits and B. C. Vallilo, “Consistency of superPoincare covariant superstring tree amplitudes,” JHEP **07**, 015 (2000) doi:10.1088/1126-6708/2000/07/015 [arXiv:hep-th/0004171 [hep-th]].
- [68] G. Alencar, M. O. Tahim, R. R. Landim and R. N. Costa Filho, “RNS and Pure Spinors Equivalence for Type I Tree Level Amplitudes Involving up to Four Fermions,” [arXiv:1104.1939 [hep-th]].
- [69] N. Berkovits and C. R. Mafra, “Pure Spinor Formulation of the Superstring and Its Applications,” doi:10.1007/978-981-19-3079-9_63-1 [arXiv:2210.10510 [hep-th]].
- [70] C. R. Mafra and O. Schlotterer, “Tree-level amplitudes from the pure spinor superstring,” Phys. Rept. **1020**, 1-162 (2023) doi:10.1016/j.physrep.2023.04.001 [arXiv:2210.14241 [hep-th]].
- [71] S. Stieberger, “Open & Closed vs. Pure Open String One-Loop Amplitudes,” [arXiv:2105.06888 [hep-th]].
- [72] S. Stieberger, “A Relation between One-Loop Amplitudes of Closed and Open Strings (One-Loop KLT Relation),” [arXiv:2212.06816 [hep-th]].
- [73] M. R. Garousi and R. C. Myers, “Superstring scattering from D-branes,” Nucl. Phys. B **475**, 193-224 (1996) doi:10.1016/0550-3213(96)00316-1 [arXiv:hep-th/9603194 [hep-th]].

- [74] A. Karch, E. Katz, D. T. Son and M. A. Stephanov, “Linear confinement and AdS/QCD,” *Phys. Rev. D* **74** (2006), 015005 doi:10.1103/PhysRevD.74.015005 [arXiv:hep-ph/0602229 [hep-ph]].
- [75] T. Sakai and S. Sugimoto, “Low energy hadron physics in holographic QCD,” *Prog. Theor. Phys.* **113**, 843-882 (2005) doi:10.1143/PTP.113.843 [arXiv:hep-th/0412141 [hep-th]].
- [76] S. K. Domokos, J. A. Harvey and N. Mann, “The Pomeron contribution to p p and p anti-p scattering in AdS/QCD,” *Phys. Rev. D* **80**, 126015 (2009) doi:10.1103/PhysRevD.80.126015 [arXiv:0907.1084 [hep-ph]].
- [77] S. K. Domokos, J. A. Harvey and N. Mann, “Setting the scale of the p p and p bar p total cross sections using AdS/QCD,” *Phys. Rev. D* **82**, 106007 (2010) doi:10.1103/PhysRevD.82.106007 [arXiv:1008.2963 [hep-th]].
- [78] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, “Table of Integrals, Series, and Products,” Corrected and enlarged edition, 1980, ISBN 0-12-294760-6.
- [79] M. Bianchi, M. Firrotta, J. Sonnenschein and D. Weissman, “Partonic behavior of string scattering amplitudes from holographic QCD models,” *JHEP* **05**, 058 (2022) doi:10.1007/JHEP05(2022)058 [arXiv:2111.12106 [hep-th]].
- [80] J. Polchinski and M. J. Strassler, “Deep inelastic scattering and gauge / string duality,” *JHEP* **05**, 012 (2003) doi:10.1088/1126-6708/2003/05/012 [arXiv:hep-th/0209211 [hep-th]].
- [81] E. Koile, S. Macaluso and M. Schvellinger, “Deep Inelastic Scattering from Holographic Spin-One Hadrons,” *JHEP* **02**, 103 (2012) doi:10.1007/JHEP02(2012)103 [arXiv:1112.1459 [hep-th]].
- [82] E. Koile, S. Macaluso and M. Schvellinger, “Deep inelastic scattering structure functions of holographic spin-1 hadrons with $N_f \geq 1$,” *JHEP* **01**, 166 (2014) doi:10.1007/JHEP01(2014)166 [arXiv:1311.2601 [hep-th]].
- [83] D. Jorjin, N. Kovensky and M. Schvellinger, “Towards $1/N$ corrections to deep inelastic scattering from the gauge/gravity duality,” *JHEP* **04**, 113 (2016) doi:10.1007/JHEP04(2016)113 [arXiv:1601.01627 [hep-th]].
- [84] D. Jorjin, M. Schvellinger and N. Kovensky, “Deep inelastic scattering off scalar mesons in the $1/N$ expansion from the D3D7-brane system,” *JHEP* **12**, 003 (2016) doi:10.1007/JHEP12(2016)003 [arXiv:1609.01202 [hep-th]].

- [85] R. C. Brower, J. Polchinski, M. J. Strassler and C. I. Tan, “The Pomeron and gauge/string duality,” JHEP **12**, 005 (2007) doi:10.1088/1126-6708/2007/12/005 [arXiv:hep-th/0603115 [hep-th]].
- [86] R. C. Brower, M. Djuric, I. Sarcevic and C. I. Tan, “String-Gauge Dual Description of Deep Inelastic Scattering at Small- x ,” JHEP **11**, 051 (2010) doi:10.1007/JHEP11(2010)051 [arXiv:1007.2259 [hep-ph]].
- [87] I. Borsa, D. Jorjin, R. Sassot and M. Schvellinger, “Proton helicity structure function g_1^p from a holographic Pomeron,” Phys. Rev. D **108**, no.5, 056024 (2023) doi:10.1103/PhysRevD.108.056024 [arXiv:2308.01975 [hep-ph]].
- [88] J. Chaves, D. Jorjin and M. Schvellinger, work in preparation.
- [89] D. J. Gross and J. H. Sloan, “The Quartic Effective Action for the Heterotic String,” Nucl. Phys. B **291**, 41-89 (1987) doi:10.1016/0550-3213(87)90465-2.
- [90] M. A. Virasoro, “Alternative constructions of crossing-symmetric amplitudes with Regge behavior,” Phys. Rev. **177**, 2309-2311 (1969) doi:10.1103/PhysRev.177.2309.
- [91] J. A. Shapiro, “Electrostatic analog for the virasoro model,” Phys. Lett. B **33**, 361-362 (1970) doi:10.1016/0370-2693(70)90255-8.
- [92] M. Abramowitz and I. A. Stegun, (Eds.) “Handbook of Mathematical Functions,” with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 1970, Dover Publications Inc., New York.
- [93] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,” Addison-Wesley, 1995, ISBN 978-0-201-50397-5, 978-0-429-50355-9, 978-0-429-49417-8 doi:10.1201/9780429503559.
- [94] H. J. Kim, L. J. Romans and P. van Nieuwenhuizen, “The Mass Spectrum of Chiral N=2 D=10 Supergravity on S^{*5} ,” Phys. Rev. D **32** (1985) 389. doi:10.1103/PhysRevD.32.389.
- [95] P. van Nieuwenhuizen, “The compactification of IIB supergravity on S_5 revisited,” doi:10.1142/9789814412551_0005 [arXiv:1206.2667 [hep-th]].
- [96] P. van Nieuwenhuizen, “The Kaluza-Klein Program and Supergravity — The Compactification of Type 2B Supergravity Revisited,” doi:10.1142/9789811206856_0009.

- [97] A. Higuchi, “Symmetric Tensor Spherical Harmonics on the N Sphere and Their Application to the De Sitter Group $SO(N,1)$,” *J. Math. Phys.* **28**, 1553 (1987) [erratum: *J. Math. Phys.* **43**, 6385 (2002)] doi:10.1063/1.527513.
- [98] R. Camporesi and A. Higuchi, “On the Eigen functions of the Dirac operator on spheres and real hyperbolic spaces,” *J. Geom. Phys.* **20** (1996) 1 doi:10.1016/0393-0440(95)00042-9 [gr-qc/9505009].