



**UNIVERSIDAD MICHUACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

*“VÉRTICES Y PROPAGADORES EN LA
ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA ESCALAR”*

T E S I S

Q U E P R E S E N T A L A

M.C. YAJAIRA CONCHA SÁNCHEZ

PARA OBTENER EL GRADO DE

D O R T O R E N C I E N C I A S

E N E L Á R E A D E L A F Í S I C A

ASESOR: DR. ADNAN BASHIR

Morelia, Mich; junio de 2009.

Propagadores y Vértices en la Electrodinámica Cuántica Escalar

Yajaira Concha Sánchez

A mis Padres ...

Agradecimientos

Al Dr. Adnan Bashir, por darme la oportunidad de trabajar con él, por atender siempre a todas mis dudas y motivarme a seguir en éste maravilloso mundo de la ciencia.

Al Director del Instituto de Física y Matemáticas el Dr. Alfredo Herrera por su apoyo directo durante todo éste tiempo.

A mis Padres, quienes me han apoyado incondicionalmente en todas las decisiones que he tomado, al apoyo moral que siempre me han brindado.

A mis hermanos quienes son personas muy importantes para mí y siempre han estado presentes en los detalles importantes de mi vida.

A mis amigos, por sus consejos y comentarios de los cuales siempre aprendo.

A mis profesores, que me enseñaron las bases fundamentales para mi formación académica durante el doctorado, en especial al Dra. María Elena Tejeda Yeomans y al Dr. Alfredo Raya por el tiempo incondicional que me han brindado y a todos aquellos que me estimularon a continuar adelante.

Al personal Administrativo y de la biblioteca del Instituto de Física y Matemáticas por su cordialidad y eficiencia en el servicio.

Contenido

Introducción	1
1. Electrodinámica Cuántica Escalar	5
1.1. Escalares	5
1.1.1. La Ecuación de Klein-Gordon	5
1.1.2. La Densidad de Lagrange para la Ecuación de Klein-Gordon	6
1.1.3. Conservación del Cuadrivector de Corriente	6
1.1.4. El Propagador Escalar	8
1.2. Fotones	9
1.2.1. Las Ecuaciones de Maxwell	9
1.2.2. Invariancia de Norma	11
1.2.3. Vectores de Polarización	12
1.2.4. La Densidad de Lagrange para un Fotón	13
1.2.5. El Propagador Fotónico	14
1.3. Electrodinámica Cuántica Escalar	15
1.3.1. La Densidad de Lagrange para un Escalar en un Campo Electro- magnético	15
1.3.2. Invariancia de Norma Local $U(1)$	16
1.3.3. Escalar Cargado en un Campo Electromagnético	17
1.3.4. Diagramas y Reglas de Feynman	19
1.4. Divergencias y Regularización	25
1.4.1. Divergencias	25
1.4.2. Regularización	27
2. Propagadores	34
2.1. El Propagador Escalar	34
2.1.1. El Propagador Escalar a un Lazo	36
2.2. El Propagador Fotónico	43
2.2.1. El Propagador Fotónico a un Lazo	44
2.2.2. Método Alternativo	47
2.2.3. La Identidad de Ward	51

3. El Vértice de Tres Puntos	52
3.1. Introducción	52
3.2. Regularización	54
3.2.1. Primer Diagrama	54
3.2.2. Segundo Diagrama	57
3.2.3. Tercer Diagrama	58
3.3. Identidad de Ward-Green-Takahashi	60
3.4. El Vértice Completo de 3-Puntos a un Lazo	61
3.4.1. El Vértice Λ_1^μ a un Lazo	61
3.4.2. Los Vértices Λ_2^μ y Λ_3^μ a un Lazo	105
3.5. Sobre el Vértice No Perturbativo de 3-Puntos	107
3.5.1. El Vértice Longitudinal a un Lazo	109
3.5.2. El Vértice Transversal a un Lazo	110
3.5.3. Técnica de Delbourgo	113
3.5.4. El Vértice Transverso No Perturbativo	116
3.5.5. Las Identidades Transversas de Takahashi	116
4. El Vértice de Cuatro Puntos	118
4.1. Notation	118
4.2. Representación Paramétrica para Integrales de Lazo	119
4.3. Cambio de las Integrales Escalares y Tensoriales	120
4.3.1. Reducción de Integrales Escalares Usando Identidades de Integración por Partes	123
4.4. Representación de Mellin-Barnes	126
4.4.1. Representación de Mellin-Barnes para el Triangulo no Masivo	128
4.4.2. Representación de Mellin-Barnes para el Triangulo con un Denom- inador Masivo	132
4.4.3. Representación de Mellin-Barnes para el Triangulo con Dos Denom- inadores Masivos	136
4.4.4. Representación de Mellin-Barnes para el Triangulo Masivo	141
4.4.5. Representación de Mellin-Barnes de la Caja no Masiva	142
4.4.6. Representación de Mellin-Barnes para la Caja con un Denominador Masivo	145
4.4.7. Representación de Mellin-Barnes para la Caja con Dos Denomi- nadores Masivos	149
4.4.8. Representación de Mellin-Barnes para la Caja con Tres Denomi- nadores Masivos	151
4.4.9. Representación de Mellin-Barnes de la Caja Masiva	154
5. El Vértice de Dispersión Compton	159
5.1. Introducción	159

5.2. Conservación de WGTI para el Vértice Longitudinal de la Dispersión Compton	161
5.2.1. Identidades de Ward-Green-Takahashi para la Electrodinámica Cuántica Escalar	161
5.2.2. Resolviendo las Identidades de WGT para la Función de 4 Puntos	164
5.2.3. Base de Vectores	165
5.2.4. Los Coeficientes C_i a un Lazo	168
5.3. El Vértice de Dispersión Compton a un Lazo	182
5.4. Diagrama 1	184
5.5. Diagrama 2	185
5.6. Diagrama 3	185
5.7. Diagrama 4	187
5.8. Diagrama 5	188
5.9. Diagrama 6	189
5.10. Diagrama 7	189
5.11. Diagrama 8	190
5.12. Diagrama 9	191
5.13. Diagrama 10	192
5.14. Diagrama 11	193
5.15. Diagrama 12	194
5.16. Diagrama 13	195
5.17. Diagrama 14	196
5.18. Diagrama 15	196
5.19. Diagrama 16	197
5.20. Diagrama 17	198
5.21. Diagrama 18	198
5.22. Diagrama 19	199
5.23. Diagrama 20	200
5.24. Diagrama 21	201
5.25. Diagrama 22	202
5.25.1. La Integral Tensorial $\tilde{I}^\mu(k, k + k')$	203
5.25.2. La Integral Tensorial $\tilde{I}^{\mu\nu}(k, k + k')$	205
5.25.3. La Integral Tensorial $\tilde{I}^{\alpha\mu\nu}(k, k + k')$	209
5.26. Diagrama 23	216
5.27. Diagrama 24	217
5.28. Diagrama 25	218
5.29. Diagrama 26	219
5.30. Diagrama 27	220
5.30.1. La Integral Escalar $U(p, q, p')$	222
5.30.2. La Integral Tensorial $U^\mu(p, q, p')$	222
5.30.3. La Integral Tensorial $U^{\mu\nu}(p, q, p')$	224
5.30.4. La Integral Escalar $V(p, q, p')$	229

5.30.5. La Integral Tensorial $V^\mu(p, q, p')$	229
5.30.6. La Integral Tensorial $V^{\mu\nu}(p, q, p')$	230
5.31. Diagrama 28	236
6. Conclusiones	238
A. Parametrización de Feynman	240
A.1. Algunas Integrales Estándar	240
A.2. Parametrización de Feynman	241
A.3. La Función Gamma	242
Bibliografía	244

Introducción

El Modelo Estándar (SM) de partículas elementales es la teoría de la interacción electrodébil (la cual describe las interacciones débil y electromagnética). El Modelo Estándar fue propuesto en 1967 por Salam, Weinberg y Glashow. Desde entonces hasta la fecha, este modelo ha sobrevivido todos los retos experimentales. Conjuntamente con Cromodinámica Cuántica (QCD), el Modelo Estándar juega un papel central en la física de partículas elementales. El espectro de partículas del SM consiste de partículas con espín $1/2$ leptones y quarks y bosones de norma con espín 1. El origen del número de sus masas se debe a la partícula llamada Higgs. El bosón de Higgs es el único bosón en la teoría que no es un bosón de norma y **es una partícula escalar** sin carga. Aunque el Modelo Estándar ha tenido gran éxito en los resultados experimentales, éste no ha sido aceptado como una teoría completa en la física de partículas. Entre otras razones, porque tiene los siguientes defectos:

1. El modelo contiene alrededor de 24 parámetros libres, tales como masas de las partículas, que necesitan ser determinadas experimentalmente. Estos parámetros no pueden ser calculados dentro del modelo.
2. El modelo considera solamente neutrinos no masivos que se ha probado no es el caso.
3. Como las correcciones a la masa del Higgs son cuadráticamente divergentes, uno tiene que afinar los parámetros del potencial del Higgs finamente para evitar que la masa del Higgs alcance valores grandes no razonables.
4. El modelo no describe la interacción gravitacional.

Se han hecho muchos esfuerzos para dirigir estos problemas y completar el Modelo Estándar. Una atractiva extensión del Modelo Estándar puede ser encontrada en la teoría de supersimetría, donde encontramos **partículas escalares cargadas** también. Otras extensiones del Modelo Estándar tal como los modelos de technicolor también cuentan con partículas escalares cargadas. Por lo tanto, estos escenarios nos dan una posibilidad realista de tener escalares fundamentales cargados cuyas interacciones con fotones serán la realización de la Electrodinámica Cuántica Escalar (SQED) al nivel elemental. Notemos que la interacción de los piones cargados con fotones (cuando el fotón no tiene suficiente energía para interactuar dentro de los piones con quarks) es también descrita por SQED.

Al nivel teórico, SQED ha sido una teoría atractiva por largo tiempo, ver por ejemplo, [1]. Nuestro interés particular en SQED es debido al hecho que nos da un laboratorio excelente para explorar las estructuras no perturbativas de las funciones de Green. Vamos a resumir varios aspectos a nuestra afirmación:

1. Debido a la ausencia de las matrices espinoriales, los cálculos son mucho más simples en SQED. Sin pérdida de generalidad tratamos con las mismas integrales que aparecen en QED espinorial y QCD. Por lo tanto, los cálculos perturbativos de las funciones de Green nos ayudan a la construcción de las funciones de Green no perturbativas. La teoría de perturbación es una guía fiable en la cual las estructuras no perturbativas deberían de reducirse en el régimen de acoplamiento débil.
2. Motivados por el razonamiento dado en 1, presentamos un cálculo completo a un lazo de los propagadores escalar y fotónico, del vértice escalar-fotón de tres y 4 puntos y del vértice de la dispersión de Compton en norma y dimensiones arbitrarias para escalares masivos y partículas externas fuera de la capa de masa.
3. Como parte importante de nuestro cálculo de la función de 4 puntos a un lazo, hemos calculado algunas integrales, llamadas $J_{\square}^{(3)}$ y $J_{\square}^{(4)}$ definidas en el capítulo 4 que nunca antes habían sido calculadas en la literatura. Este cálculo nos permite introducir una nueva función de Lauricella generalizada $\mathcal{Y}_3$ y $\mathcal{Y}_4$.
4. Aunque la forma general de la identidad de Ward-Fradkin-Green-Takahashi (WFGTI) y la transformación de Landau-Khalatnikov-Fradkin (LKFT) son las mismas para QED espinorial y escalar, su implementación para extraer las rigurosas constricciones de las funciones de Green es mucho más simple para QED escalar.
5. Usando WFGTI,
6. La evaluación de las funciones de Green para teorías de norma en un régimen no perturbativo es importante así como difícil. Por ejemplo, el entendimiento del confinamiento y la generación dinámica de masas en Cromodinámica Cuántica requiere del conocimiento de los propagadores del quark y gluón en el infrarojo. Estos objetos están ligados a los vértices de 3 y 4 puntos a través de las ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDEs) así como a las identidades de Slavnov-Taylor (STI) .
7. En este escenario, el vértice de 3 puntos puede ser escrito en términos de dos cuádrimomentos independientes. La identidad de Ward-Frankin-Green-Takahashi (WFGTI) fija el coeficiente de uno de estos. Por lo tanto, hay solamente una función desconocida que define al vértice transversal representando una simplificación comparada con QED y QCD.
8. Este cálculo es interesante porque mantiene las propiedades de covarianza correctas de las funciones de Green. Podemos tomar cualquier límite on-shell requerido

del resultado general off-shell para checar la invariancia de norma de los observables físicos, esto no podría ser posible si tenemos solamente los resultados en cuatro dimensiones. Electrodinámica Cuántica Escalar SQED ha sido explorada en bajas dimensiones. Las teorías de campo en tres dimensiones contienen varias características que corresponden a las teorías de campo a altas temperaturas en cuatro dimensiones.

9. La función de 4 puntos aparece incluso al nivel de las identidades de STI en el kernel de dispersión fantasma-fantasma-quark-quark que relacionan los vértices de 2 y 3 puntos en normas covariantes.
10. El kernel de dispersión de 4 puntos quark-quark para piernas externas off-shell es otra importante cantidad. Su comportamiento en el infrarojo en el espacio de coordenadas debería decirnos como el potencial fuerte aumenta para grandes distancias entre dos quarks estáticos.
11. El estudio del vértice de 4 gluones puede mejorar nuestra percepción del corrimiento del acoplamiento en la región del infrarojo.
12. El entendimiento del vértice de 4 puntos no perturbativo es una tarea desafiante, entonces un estudio detallado de tal función en SQED en términos de la identidad de Ward-Fradkin-Green-Takahashi (WFGTI) puede ser un primer paso importante hacia más funciones similares implicadas en QCD.

Hemos organizado la tesis de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 estudiamos las partículas escalares, las cuales son descritas por la ecuación de Klein-Gordon. Vemos cual es la densidad de Lagrange para estas partículas, así como el propagador, ingrediente importante para la teoría de dispersión correspondiente. También, estudiamos los fotones, es decir, las ecuaciones de Maxwell. También discutimos la invariancia de norma, el Lagrangiano y el propagador fotónico en norma arbitraria. Finalmente estudiaremos las interacciones entre partículas escalares y fotones, es decir, la electrodinámica cuántica escalar. Partiendo con el lagrangiano de interacción, vemos la invariancia de norma local que nos conduce a los vértices de 4-puntos.

En el Capítulo 2 estudiamos las divergencias generadas por los lazos en los diagramas de Feynman y la manera de como regularizar estas divergencias. Estudiamos solamente dos métodos de regularización, el método de corte y el método de regularización dimensional.

En el Capítulo 3 calculamos la corrección al propagador escalar a un lazo en una norma y dimensiones arbitrarias. Tomamos los casos particulares $D = 3$ y $D = 4 - 2\epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$.

En el Capítulo 4 calculamos la corrección al propagador fotónico a un lazo por dos métodos alternativos en D arbitrario. Tomamos los casos $D = 3$ y $D = 4 - 2\epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$. Verificamos la identidad de Ward para el propagador fotónico. Además obtenemos una expresión para el propagador no perturbativo en $D = 3$ y $m = 0$.

En el Capítulo 5 evaluamos el vértice completo de 3-puntos en norma y dimensiones arbitrarias a un lazo y deducimos una expresión para su componente transversa. Además

verificamos la Identidad de Ward-Green-Takahashi para el vértice de 3-puntos y el propagador escalar.

En el Capítulo 6 estudiamos como reducir las integrales escalares usando Identidades de Integración por Partes. También, presentamos la técnica de Mellin-Barnes. Usando esta técnica, calculamos el vértice de 4-puntos (la caja) con potencia arbitraria en los factores del denominador en dimensiones arbitrarias y masas iguales. Consideramos algunos casos particulares.

En el Capítulo 7 calculamos el proceso de dispersión escalar-fotón a un lazo. También discutimos acerca del vértice no perturbativo de 4 puntos y como la identidad de Ward-Green-Takahashi relaciona este vértice con el vértice de 3 puntos. Y por último daremos las conclusiones de esta tesis.

Capítulo 1

Electrodinámica Cuántica Escalar

1.1. Escalares

1.1.1. La Ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de *Klein-Gordon* para partículas libres es:

$$(\square^2 + m^2)\varphi = 0, \quad (1.1)$$

donde m es la masa de la partícula. Aquí hemos usado la siguiente notación

$$\begin{aligned} \partial^\mu &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right), \\ \partial_\mu \partial^\mu &\equiv \square^2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Podemos verificar la covariancia de Lorentz para la ecuación de Klein-Gordon, como $\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu$ es invariante de Lorentz. Las soluciones libres son de la forma

$$\varphi = \exp(-ip_\mu x^\mu) = \exp[+i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)]. \quad (1.3)$$

Estas soluciones admiten el principio de superposición. Insertando (1.3) en (1.1) nos conduce a la condición

$$\begin{aligned} \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \varphi = m^2 \varphi &\rightarrow p^\mu p_\mu \exp(-ip_\mu x^\mu) = m^2 \exp(-ip_\mu x^\mu) \\ &\rightarrow p^\mu p_\mu = m^2 \quad \text{o} \quad E^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m^2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

la cual resulta ser

$$E = \pm \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (1.5)$$

Así, existen ambas soluciones para $E = +(m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$ positiva como para $E = -(m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$ negativa respectivamente. Las energías negativas están asociadas físicamente con las antipartículas. La ecuación de Klein-Gordon es satisfecha para partículas escalares tales como el Higgs o piones. Los campos escalares reales φ corresponden a partículas neutrales mientras que las partículas cargadas son representadas por campos escalares complejos. Como nosotros estudiaremos en esta tesis la interacción de partículas escalares cargadas con fotones, elegimos φ a ser complejo.

1.1.2. La Densidad de Lagrange para la Ecuación de Klein-Gordon

La densidad de Lagrange para la ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo es:

$$\mathcal{L} \left(\varphi, \varphi^*, \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}, \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\nu} \right) = \partial_\mu \varphi^*(x) \partial^\mu \varphi(x) - m^2 \varphi^*(x) \varphi(x) . \quad (1.6)$$

Sustituyendo (1.6) en las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para un campo, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= -m^2 \varphi^*(x) , \\ \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi)} \right) &= \square^2 \varphi^* . \end{aligned} \quad (1.7)$$

Por lo tanto,

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \varphi^* = 0 . \quad (1.8)$$

Similarmente para el campo φ^*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} - \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi^*)} \right) = 0 .$$

Por lo tanto,

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \varphi = 0 , \quad (1.9)$$

que son efectivamente la ecuación de Klein-Gordon (una para el campo φ y otra para el campo φ^*).

1.1.3. Conservación del Cuadrivector de Corriente

La densidad de Lagrange ecuación (1.6) es, invariante bajo la siguiente transformación:

$$\varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \varphi(x) , \quad \varphi^*(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \varphi^*(x) , \quad (1.10)$$

(donde α es una constante real) y cuya forma infinitesimal es especificada por

$$\delta \varphi(x) = i\alpha \varphi(x) , \quad \delta \varphi^*(x) = -i\alpha \varphi^*(x) . \quad (1.11)$$

Como α es independiente de las coordenadas, la transformación es llamada *transformación global*, porque esta es la misma para cada punto en el espacio y tiempo. La familia de

transformaciones de fase $U(\alpha) \equiv e^{i\alpha}$, donde α es sólo un parámetro que corre continuamente sobre los números reales, forman un grupo Abelian unitario conocido como el *grupo* $U(1)$. Abelian porque satisface la propiedad de conmutatividad en la multiplicación:

$$U(\alpha_1)U(\alpha_2) = U(\alpha_2)U(\alpha_1) , \quad (1.12)$$

y unitario porque

$$U^\dagger(\alpha)U(\alpha) = 1 . \quad (1.13)$$

El teorema de Noether implica la existencia de una corriente conservada. Para ver esto es suficiente estudiar la invariancia de $\mathcal{L}$ bajo una transformación infinitesimal $U(1)$,

$$\varphi \rightarrow (1 + i\alpha)\varphi \quad (1.14)$$

La invariancia requiere que el Lagrangiano no cambie, esto es,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\right)\delta\varphi + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\partial_\mu(\delta\varphi) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*}\right)\delta\varphi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\partial_\mu(\delta\varphi^*) \\ &= (-m^2\varphi^*)(i\alpha\varphi) + (\partial^\mu\varphi^*)(i\alpha)(\partial_\mu\varphi) + (-m^2\varphi)(-i\alpha\varphi^*) + (\partial^\mu\varphi)(-i\alpha)(\partial_\mu\varphi^*) \\ &= i\alpha[(\partial^\mu\varphi^*)(\partial_\mu\varphi) - (\partial^\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi^*) - m^2\varphi^*\varphi + m^2\varphi^*\varphi] = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Para los campos φ y φ^* tenemos

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\Delta\varphi^* , \quad (1.16)$$

donde usamos que $\mathcal{J}^\mu = 0$. Sustituyendo $\mathcal{L}$ dado por la ecuación (1.6) obtenemos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = \partial^\mu\varphi^* \quad \text{y} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)} = \partial^\mu\varphi . \quad (1.17)$$

Además considerando que

$$\Delta\varphi = i\varphi , \quad \Delta\varphi^* = -i\varphi^* , \quad (1.18)$$

tenemos que el cuadvivector de corriente es:

$$j^\mu = (\partial^\mu\varphi^*)(i\varphi) + (\partial^\mu\varphi)(-i\varphi^*) = ie[\varphi(\partial^\mu\varphi^*) - \varphi^*(\partial^\mu\varphi)] \quad (1.19)$$

donde hemos considerado la normalización adecuada. Esta carga j^μ es conservada, es decir, $\partial_\mu j^\mu = 0$. La carga conservada correspondientemente es

$$Q = ie \int d^3x (\varphi\partial^0\varphi^* - \varphi^*\partial^0\varphi) . \quad (1.20)$$

Más generalmente, el teorema de Noether demuestra que una simetría continua resulta en una corriente y carga conservadas.

1.1.4. El Propagador Escalar

La interacción de una partícula escalar con el campo electromagnético es introducida usualmente por la prescripción de *mínimo acoplamiento*

$$\hat{p}_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu - eA_\mu .$$

La ecuación de Klein-Gordon en presencia de un campo electromagnético nos conduce a

$$[(\hat{p}^\mu - eA^\mu)(\hat{p}_\mu - eA_\mu) - m_0^2]\varphi(x) = 0 \quad (1.21)$$

ó

$$[\partial^\mu \partial_\mu + m_0^2]\varphi(x) = -V\varphi(x) . \quad (1.22)$$

Aquí hemos introducido el operador del potencial V , explícitamente dado como

$$V\varphi = ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu)\varphi - e^2 A^\mu A_\mu \varphi . \quad (1.23)$$

El signo de V en (1.23) es elegido de manera que esté de acuerdo con el signo relativo de la energía cinética y potencial de la ecuación de Schrödinger. El potencial, (1.23), es caracterizado por el parámetro e , el cual (en unidades naturales) está relacionado con la constante de la estructura fina α por

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137} . \quad (1.24)$$

La pequeñez de la constante de acoplamiento nos permite hacer una expansión perturbativa de V en potencias de α . Si queremos resolver (1.22) para φ , es conveniente resolver primero la siguiente ecuación

$$[\Box^2 + m^2]G(x, y) = \delta^4(x - y) \quad (1.25)$$

y escribir la solución para $\varphi(x)$ de la siguiente manera

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) - \int d^4y G(x, y)V(y)\varphi(y) , \quad (1.26)$$

donde $\varphi_0(x)$ satisface $(\Box^2 + m^2)\varphi_0(x)$. Ahora verifiquemos si esta solución satisface la ecuación (1.22)

$$[\Box^2 + m^2] \left[\varphi(x) = \varphi_0(x) - \int d^4y G(x, y)V(y)\varphi(y) \right] . \quad (1.27)$$

Usando el hecho de que

$$[\Box^2 + m^2]\varphi_0(x) = 0 , \quad (1.28)$$

tenemos

$$\begin{aligned} [\square^2 + m^2]\varphi(x) &= - \int d^4y (\square^2 + m^2) G(x, y) V(y) \varphi(y) \\ &= - \int d^4y \delta^4(x - y) V(y) \varphi(y) \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$= -V(x) \varphi(x) . \quad (1.30)$$

Por lo tanto (1.26) es una solución. Ahora tomamos la transformada de Fourier de $G(x, y)$ en el espacio de momentos y conseguimos

$$G(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p S(p) \exp[-ip(x - y)] . \quad (1.31)$$

$S(p)$ es llamado *el propagador de la partícula* en el espacio de momentos.

$$[\square^2 + m^2][G(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p S(p) \exp(-ip(x - y))] = \delta^4(x - y) ,$$

entonces

$$\delta^4(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p S(p) (p^2 - m^2) \exp[-ip(x - y)] . \quad (1.32)$$

Esta ecuación se satisface si escogemos:

$$S(p) = \frac{1}{(p^2 - m^2)} .$$

Más adelante, en la teoría de dispersiones para partículas escalares, usaremos con frecuencia esta expresión para el propagador escalar. A continuación estudiaremos los fotones que son partículas con espín uno, es decir, partículas vectoriales.

1.2. Fotones

1.2.1. Las Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica clásica en el vacío son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \rho(\mathbf{x}, t) , \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= 0 , \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} , \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) . \end{aligned} \quad (1.33)$$

Las cuales relacionan el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ y el campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ con la densidad de carga $\rho(\mathbf{x}, t)$ y la corriente electromagnética $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$. Las ecuaciones de Maxwell

constituyen un sistema de ecuaciones acopladas en derivadas parciales de primer orden entre las componentes de los campos eléctrico y magnético. Estas pueden ser resueltas directamente en algunos casos sencillos. Pero a menudo nos conviene introducir los potenciales con el objetivo de obtener un número menor de ecuaciones de segundo orden que satisfagan idénticamente alguna de las ecuaciones de Maxwell. Podemos introducir el potencial escalar $\varphi(\mathbf{x}, t)$ y el potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, de la manera usual, escribiendo $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \varphi(\mathbf{x}, t) , \quad (1.34)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) . \quad (1.35)$$

Las expresiones de $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ en función de los potenciales $\varphi(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, esto es la (1.34) y la (1.35), satisfacen idénticamente las dos ecuaciones homogéneas de Maxwell. El comportamiento dinámico de $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ y $\varphi(\mathbf{x}, t)$ se determinará mediante las otras dos ecuaciones de (1.33) no homogéneas. Así, pues, las ecuaciones no homogéneas de (1.33) pueden escribirse en función de los potenciales del siguiente modo:

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) = -\rho(\mathbf{x}, t) , \quad (1.36)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}) = -\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) . \quad (1.37)$$

Escribimos estas dos ecuaciones en forma covariante, para ello introducimos los cuadvectores $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ y $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ tal que:

$$\square^2 A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = j^\mu . \quad (1.38)$$

Los campos se expresan en función de los potenciales de acuerdo a (1.34) y (1.35). Las componentes según x de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son, explícitamente,

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) , \\ B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) . \end{aligned} \quad (1.39)$$

Estas ecuaciones implican que los campos eléctrico y magnético tienen seis componentes en total, son los elementos de un tensor de *segundo orden*, *el tensor antisimétrico*, *intensidad de campo*,

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu . \quad (1.40)$$

Las ecuaciones de Maxwell no homogéneas de (1.33) en forma covariante toman la forma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu . \quad (1.41)$$

A continuación vemos que las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante una transformación de norma, es decir, *la teoría electromagnética es una teoría de norma*.

1.2.2. Invariancia de Norma

Como el campo magnético $\mathbf{B}$ se relaciona con $\mathbf{A}$ a través de (1.35), el potencial vectorial es arbitrario en el sentido de podersele sumar el gradiente de una función escalar χ cualquiera. $\mathbf{B}$ no se altera en la transformación:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi . \quad (1.42)$$

Si queremos que también el campo eléctrico permanezca inalterado, debemos transformar simultáneamente el potencial escalar:

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial\chi}{\partial t} . \quad (1.43)$$

Así, sustituyendo (1.42) y (1.43) para el campo eléctrico tenemos:

$$\mathbf{E}' = -\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla\varphi' = -\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{A} + \nabla\chi] - \nabla\left[\varphi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right] = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi = \mathbf{E} .$$

Similarmente para el campo magnético:

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times [\mathbf{A} + \nabla\chi] = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\chi = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} .$$

La transformación definida por (1.42) y (1.43) se denomina *transformación de norma*, y la invariancia de los campos en estas transformaciones, *invariancia de norma*. Las ecuaciones (1.42) y (1.43) se pueden combinar como:

$$A'^{\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi , \quad (1.44)$$

$F^{\mu\nu}$ es invariante ante las transformaciones de norma:

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} \longrightarrow \partial^{\mu}(A^{\nu} + \partial^{\nu}\chi) - \partial^{\nu}(A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi) = F^{\mu\nu} .$$

Por el hecho de que las transformaciones en la ecuación (1.44) dejan los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ invariantes, es recomendable deshacerse de la arbitrariedad en A^{μ} . A éste proceso se le llama *fijación de la norma*. Una de las maneras de hacerlo es elegir $\partial_{\mu}A'^{\mu} = 0$, a ésta condición se le llama *condición de Lorentz* e implica que:

$$\partial_{\mu}A'^{\mu} = 0 = \partial_{\mu}\partial^{\mu}\chi + \partial_{\mu}A^{\mu} .$$

Así, pues, basta hallar una función de norma χ que satisfaga:

$$\square^2\chi = -\partial_{\mu}A^{\mu} . \quad (1.45)$$

para que los nuevos potenciales $\mathbf{A}'$, φ' satisfagan la condición de Lorentz. De ahora en adelante usaremos la notación A^{μ} en vez de A'^{μ} . Tenemos que

$$\square^2 A^{\mu} = j^{\mu} . \quad (1.46)$$

1.2.3. Vectores de Polarización

Consideremos la ecuación (1.46) para un fotón libre, es decir,

$$\square^2 A^\mu = 0 , \quad (1.47)$$

la cual tiene soluciones

$$A^\mu = \varepsilon^\mu(\mathbf{q}) e^{-iq \cdot x} . \quad (1.48)$$

El cuadrivector ε^μ es llamado el vector de polarización del fotón. Sustituyendo en la ecuación (1.47) tenemos

$$\square^2 A^\mu = \varepsilon^\mu(\mathbf{q}) \square^2 e^{-iq \cdot x} = q^2 \varepsilon^\mu(\mathbf{q}) = 0 \quad (1.49)$$

la cual implica que

$$q^2 = 0 , \quad q_0^2 - \mathbf{q}^2 = m^2 , \quad \text{esto es,} \quad m_\gamma = 0 , \quad (1.50)$$

es decir, el fotón es una partícula sin masa. El vector de polarización todavía tiene cuatro componentes y describe una partícula de espín 1. Primero, la condición de Lorentz, $\partial_\mu A^\mu = 0$, nos conduce

$$q_\mu \varepsilon^\mu = 0 , \quad (1.51)$$

y esto reduce el número de componentes independientes de ε^μ a solamente tres. Además, tenemos que explorar las consecuencias del adicional grado de libertad de la norma (1.44). Elegimos la función χ como

$$\chi = i a e^{-iq \cdot x} \quad (1.52)$$

con a constante así que (1.45) es satisfecha (tomando en cuenta la condición de Lorentz). Sustituyendo esto, junto con (1.48), en (1.44) la física deberá permanecer sin cambios con el reemplazamiento

$$\varepsilon_\mu \rightarrow \varepsilon'_\mu = \varepsilon_\mu + a q_\mu , \quad (1.53)$$

es decir,

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad (\varepsilon_\mu + a q_\mu) q^\mu = \varepsilon_\mu q^\mu + a m_\gamma^2 = 0 \quad (1.54)$$

pero recurriendo a (1.50) y (1.51) tenemos que los dos vectores de polarización $(\varepsilon_\mu, \varepsilon'_\mu)$ los cuales difieren por un múltiplo de q_μ describen el mismo fotón. Podemos usar esta libertad para asegurar que la componente del tiempo de ε^μ desaparece. Sea que elegimos $\varepsilon^0 = -a q_0$ entonces,

$$\varepsilon'_0 = \varepsilon_0 + a q_0 = -a q_0 + a q_0 = 0 . \quad (1.55)$$

Por lo tanto,

$$\varepsilon'_0 = 0 \quad (1.56)$$

y entonces la condición de Lorentz (1.51) se reduce a

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{q} = 0 . \quad (1.57)$$

Esta elección (no covariante) de norma es conocida como *norma de Coulomb*. De (1.57), vemos que hay únicamente *dos* vectores de polarización independientes y que ambos son transversos a el momento del fotón. Recordando la ecuación (1.34) y sustituyendo la solución de fotón libre (1.48) en ésta tenemos

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\varepsilon}e^{-iq \cdot x}) = iq^0 \boldsymbol{\varepsilon}e^{-iq \cdot x} . \quad (1.58)$$

Por lo tanto $\mathbf{E}$ es directamente proporcional a $\boldsymbol{\varepsilon}$. $\mathbf{E}$ es perpendicular a la dirección de movimiento del fotón $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{q} = 0$, es decir,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{q} = 0 . \quad (1.59)$$

De la misma manera para la ecuación (1.35),

$$\mathbf{B} = \nabla \times [\boldsymbol{\varepsilon}e^{-iq \cdot x}] = -i[\mathbf{q} \times \boldsymbol{\varepsilon}]e^{-iq \cdot x} . \quad (1.60)$$

Así, $\mathbf{B}$ es perpendicular a ambas direcciones de movimiento del fotón y del campo eléctrico $\mathbf{E}$. Por ejemplo, para un fotón que viaja a lo largo del eje z , podemos tomar

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0) , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0) . \quad (1.61)$$

Así, un fotón libre es descrito por su momento q y dos vectores de polarización $\boldsymbol{\varepsilon}_i$. Ya que $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ transforma como un vector, anticipamos que éste es asociado a una partícula de espín 1.

1.2.4. La Densidad de Lagrange para un Fotón

La densidad de Lagrange para un fotón libre es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) . \quad (1.62)$$

La presencia de una corriente j^μ modifica la densidad de Lagrange como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) - j^\mu A_\mu . \quad (1.63)$$

Correspondientemente las ecuaciones de Maxwell son:

$$\square^2 A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu . \quad (1.64)$$

donde hemos agregado el término $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu)$, por conveniencia. ξ recibe el nombre de parámetro de norma covariante y puede ser cualquier número real finito. Dos elecciones bien conocidas son $\xi = 1$ que es la *norma de Feynman*, y $\xi = 0$ la *norma de Landau*. Éste término adicional se puede considerar como una restricción. La teoría queda invariante después de imponer la condición de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$. Es importante resaltar que la física no es afectada por el valor de ξ . Cualquier ξ puede ser usada. Los pasos intermedios pueden ser diferentes para diferentes elecciones de ξ , pero el resultado final para cualquier observable físico es independiente de la ξ escogida.

1.2.5. El Propagador Fotónico

Para definir el propagador del fotón empezaremos con la ecuación (1.64). Queremos encontrar A^μ que satisfaga esta ecuación. Para esto consideremos dos casos:

Caso I: El procedimiento es un poco más sencillo si empezamos con la norma de Feynman $\xi = 1$. En este caso,

$$\square^2 A^\mu = j^\mu .$$

Resolveremos esta ecuación usando el método de Green para el cual hay que encontrar la solución de la siguiente ecuación:

$$g^{\alpha\mu} \square_x^2 G_{\mu\beta}(x, y) = g^\alpha{}_\beta \delta^4(x - y) , \quad (1.65)$$

donde $G^{\mu\beta}(x, y)$ es la función de Green de dos puntos para el fotón o propagador del fotón en el espacio de posiciones. Ahora proponemos la siguiente solución para $A^\mu(x)$:

$$A^\mu(x) = A_0^\mu + \int d^4y G^{\mu\beta}(x, y) j_\beta(y) , \quad (1.66)$$

donde A_0^μ es el campo en ausencia de corrientes. Para verificar que sí es solución, aplicamos $g^\alpha{}_\mu \square_x^2$ a la ecuación (1.66) y usando (1.65) conseguimos:

$$\begin{aligned} g^\alpha{}_\mu \square_x^2 A^\mu(x) &= g^\alpha{}_\mu \square_x^2 A_0^\mu + \int d^4y g^\alpha{}_\mu \square_x^2 G^{\mu\beta}(x, y) j_\beta(y) \\ &= \int g^{\alpha\beta} \delta^4(x - y) j_\beta(y) = j^\alpha(x) , \end{aligned}$$

$$\square_x^2 A^\alpha = j^\alpha(x) .$$

Para resolver la ecuación (1.65) usamos la transformada de Fourier $G^{\mu\beta}(x, y)$ en el espacio de momentos:

$$G^{\mu\beta}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \Delta^{\mu\beta}(q) e^{-iq(x-y)} d^4q . \quad (1.67)$$

Aplicamos $g_{\alpha\mu} \square_x^2$ a $G^{\mu\beta}(x, y)$ y usando la ecuación (1.65) obtenemos que:

$$g^\beta{}_\alpha \delta^4(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \Delta^{\mu\beta}(q) g_{\alpha\mu} (-q^2) e^{-iq(x-y)} d^4q .$$

Por lo tanto,

$$\Delta^{\mu\beta}(q) = -\frac{1}{q^2} g^{\mu\beta} . \quad (1.68)$$

$\Delta^{\mu\beta}$ es el *propagador del fotón*.

Caso II: Resolvemos (1.64) completa

$$\square^2 A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu .$$

Para encontrar A^ν resolvemos primero la siguiente ecuación:

$$\left[g^{\nu\lambda} \square_x^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu \partial^\lambda \right] G_{\lambda\alpha}(x, y) = g^\nu{}_\alpha \delta^4(x - y) , \quad (1.69)$$

y proponemos la siguiente solución para $A_\lambda(x)$

$$A_\lambda(x) = A_\lambda^0 + \int G_{\lambda\alpha}(x, y) j^\alpha(y) d^4y . \quad (1.70)$$

Procedemos como en el *Caso I*, de manera que el propagador del fotón resulta ser:

$$\Delta_{\lambda\alpha}(q) = \left[-\frac{g_{\lambda\alpha}}{q^2} + (1 - \xi) \frac{q_\lambda q_\alpha}{q^4} \right] .$$

Como mencionamos anteriormente, el propagador del fotón juega un papel importante en la teoría de dispersión cuando los fotones interactúan con partículas cargadas. A continuación estudiaremos la interacciones de partículas cargadas escalares con un campo electromagnético.

1.3. Electrodinámica Cuántica Escalar

1.3.1. La Densidad de Lagrange para un Escalar en un Campo Electromagnético

La densidad de Lagrange para el sistema acoplado de las ecuaciones de Maxwell y el campo de Klein-Gordon es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (i\partial_\mu - eA_\mu)\varphi^* (-i\partial^\mu - eA^\mu)\varphi - m^2 \varphi^* \varphi , \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \end{aligned} \quad (1.71)$$

La variación de $S = \int \mathcal{L} d^4x$ con respecto a φ^* nos conduce a la ecuación de Klein-Gordon para un campo φ , acoplada mínimamente al campo electromagnético, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \varphi^*} &= 0 \\ \Rightarrow \int \{ \delta (i\partial_\mu \varphi^* - eA_\mu \varphi^*) (-i\partial^\mu - eA^\mu) \varphi - m^2 \varphi \delta \varphi^* \} d^4x &= 0 . \end{aligned} \quad (1.72)$$

Usando $\delta\partial_\mu\varphi^* = \partial_\mu\delta\varphi^*$ e integrando parcialmente el primer término, obtenemos bajo la suposición de que $\delta\varphi^*$ desaparece en las fronteras de integración,

$$\int \{-i\partial_\mu - eA_\mu\}(-i\partial^\mu - eA^\mu)\varphi - m^2\varphi\}\delta\varphi^*d^4x = 0 . \quad (1.73)$$

Dada la libertad de elección de $\delta\varphi^*$, esto nos conduce a la ecuación de Klein-Gordon

$$(\hat{p}^\mu - eA^\mu)(\hat{p}_\mu - eA_\mu)\varphi = m^2\varphi . \quad (1.74)$$

La variación de S con respecto a A_μ nos permite escribir las ecuaciones de Maxwell en una manera análoga

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu = ie\{\varphi^*(\partial_\nu + ieA_\nu)\varphi - \varphi(\partial_\nu - ieA_\nu)\varphi^*\} . \quad (1.75)$$

Por lo tanto, la densidad de Lagrange (1.71) nos reproduce las ecuaciones de movimiento apropiadamente tanto para el campo de Klein-Gordon como para el cuadvivector A_μ . La forma explícita de la corriente depende del espín de la partícula que se acopla con el fotón.

1.3.2. Invariancia de Norma Local $U(1)$

Hemos visto que la teoría electrodinámica es invariante bajo transformaciones globales $U(1)$ de norma. Además, por medio del teorema de Noether hemos probado la conservación del cuadvivector de corriente, bajo una transformación global. Ahora veremos que la teoría electrodinámica es invariante también bajo transformaciones locales. Así mismo que la densidad de cuadvivector corriente para la interacción de una partícula escalar con un campo electromagnético es conservada bajo una transformación local. Primeramente generalizamos (1.10) a la transformación

$$\varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\varphi(x) , \quad (1.76)$$

donde $\alpha(x)$ ahora depende del espacio y del tiempo. Estas transformaciones se llaman *transformaciones $U(1)$ locales de norma*. La densidad de Lagrange, (1.6),

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - m^2\varphi^*(x)\varphi(x) , \quad (1.77)$$

no es invariante bajo tal transformación de fase local. El último término de $\mathcal{L}$ es invariante; sin embargo, la derivada de φ no lo es. Puesto que,

$$\partial_\mu\varphi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\varphi + ie^{i\alpha(x)}\varphi\partial_\mu\alpha \quad (1.78)$$

y el término $\partial_\mu\alpha$ rompe la invariancia de $\mathcal{L}$. Sí, insistimos en imponer invariancia del Lagrangiano bajo transformaciones de norma local, necesitamos buscar una derivada modificada, D_μ , que transforme covariantemente bajo una transformación de fase, esto es,

$$D_\mu\varphi \rightarrow e^{i\alpha(x)}D_\mu\varphi . \quad (1.79)$$

Para formar la “derivada covariante” D_μ , necesitamos introducir un campo vectorial A_μ con propiedades de transformación tal que el término que no queremos en (1.78) sea cancelado. Una hábil construcción es

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu \quad (1.80)$$

donde A_μ transforma como

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha. \quad (1.81)$$

Es fácil verificar que D_μ satisface (1.79). La invariancia de la densidad de Lagrange (1.6) consiste en reemplazar ∂_μ por D_μ que nos conduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (D_\mu^*\varphi^*)(D^\mu\varphi) - m^2\varphi^*\varphi, \\ D_\mu &= i\partial_\mu - eA_\mu, \\ D_\mu^* &= -i\partial_\mu - eA_\mu. \end{aligned} \quad (1.82)$$

ó

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi^*\varphi - ie(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*)A_\mu + 2e^2\varphi^*A^\mu\varphi A_\mu, \quad (1.83)$$

donde los primeros dos términos corresponden a la densidad de Lagrange para una partícula escalar y los dos últimos corresponden a la interacción que podemos escribir como $-j^\mu A_\mu$, donde j^μ es la densidad de cuadricorriente la cual es conservada. Como podemos ver, si demandamos invariancia de fase local, necesariamente tenemos que introducir un vector de campo A_μ , llamado el *campo de norma*, el cual acopla a la partícula escalar. Si añadimos la densidad Lagrangiana de un fotón libre (1.62) entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi^*\varphi \\ &\quad - ie(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*)A_\mu + 2e^2\varphi^*A^\mu\varphi A_\mu, \end{aligned} \quad (1.84)$$

la misma densidad de Lagrange que (1.71).

1.3.3. Escalar Cargado en un Campo Electromagnético

La amplitud de transición para una partícula de espín cero del estado φ_i al estado φ_f en presencia del potencial electromagnético A_μ , donde V está dado por la ecuación (1.23), es

$$T_{fi} = -i \int \varphi_f^*(x)V(x)\varphi_i(x)d^4x \quad (1.85)$$

$$= -i \int \varphi_f^*[-ie(A^\mu\partial_\mu + \partial_\mu A^\mu) - e^2 A^\mu A_\mu]\varphi_i d^4x, \quad (1.86)$$

o en forma equivalente,

$$T_{fi} = -e \int d^4x [\varphi_f^*(x) \partial^\mu \varphi_i(x) - \partial^\mu \varphi_f^*(x) \varphi_i(x)] A_\mu(x) + ie^2 \int d^4x \varphi_f^*(x) A^\mu(x) \varphi_i(x) A_\mu(x) . \quad (1.87)$$

Los primeros dos términos se pueden representar mediante el siguiente diagrama:

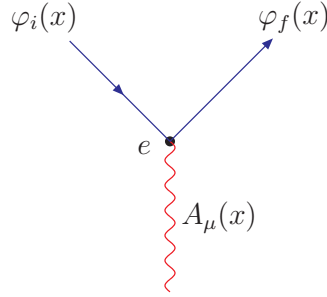


Figura 1.1: Representación esquemática de los primeros dos términos de (1.87).

La interpretación es la siguiente: Una partícula que se encuentra en el estado φ_i interactúa con el término eA_μ del potencial V y se dispersa en un estado final φ_f . El tercer término de (1.87) se puede representar por medio del siguiente diagrama

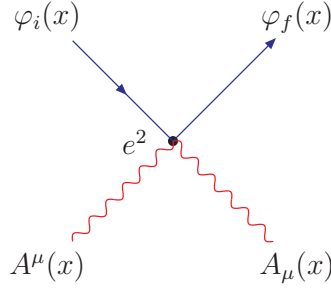


Figura 1.2: Representación esquemática del tercer término de (1.87).

La interpretación física es: Una partícula en el estado φ_i interactúa con el término $e^2 A_\mu A^\mu$ del potencial y se dispersa en el estado final φ_f . Esto es una forma preliminar de los diagramas de Feynman.

1.3.4. Diagramas y Reglas de Feynman

La amplitud de transición T_{fi} se puede interpretar en términos de los llamados diagramas de Feynman. La ventaja es la enorme simplicidad que se consigue en el cálculo de los procesos de dispersión y decaimiento como explicaremos más adelante.

Diagramas de Feynman

Ahora regresamos a la ecuación (1.87), solamente vamos a considerar el primer término debido a que en el diagrama que vamos a estudiar en seguida el término $e^2 A^2$ no contribuye. La amplitud de transición se reduce a

$$T_{fi} = i \int \varphi_f^* i e (A^\mu \partial_\mu + \partial_\mu A^\mu) \varphi_i d^4x . \quad (1.88)$$

La derivada, en el segundo término, el cual actúa en ambos A^μ y φ_i , puede ser convertida a actuar únicamente en φ_f^* después de una integración por partes, es decir,

$$\int \varphi_f^* \partial_\mu (A^\mu \varphi_i) d^4x = \varphi_f^* A^\mu \varphi_i |_{\text{frontera}} - \int \partial_\mu (\varphi_f^*) A^\mu \varphi_i d^4x . \quad (1.89)$$

El primer término es cero debido a que hemos considerado que el potencial desaparece en $|\mathbf{x}|$, cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Podemos por lo tanto escribir la amplitud T_{fi} como

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x , \quad (1.90)$$

donde

$$j_\mu^{fi}(x) \equiv -ie(\varphi_f^*(\partial_\mu \varphi_i) - (\partial_\mu \varphi_f^*)\varphi_i) , \quad (1.91)$$

la cual, comparando con (1.19), puede ser considerada como la transición de la corriente electromagnética de la partícula escalar $i \rightarrow f$. Esquemáticamente representamos esta transición en la figura 1.3. Si la partícula entrante tiene un cuadrimomento p_i , tenemos

$$\varphi_i(x) = N_i e^{-ip_i \cdot x} , \quad (1.92)$$

donde N_i es una constante de normalización. Usando una expresión similar para φ_f , esto nos conduce a

$$j_\mu^{fi}(x) = -e N_i N_f (p_i + p_f)_\mu e^{i(p_f - p_i) \cdot x} . \quad (1.93)$$

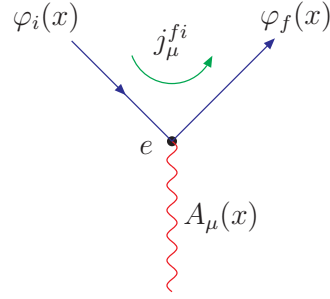


Figura 1.3: Una partícula escalar interactuando con A_μ .

Ahora nos planteamos la siguiente pregunta: ¿De dónde viene el fotón que dispersa la partícula bajo estudio? En otras palabras ¿cuál es el origen del potencial electromagnético? Sabemos que cualquier partícula cargada produce un potencial electromagnético. En muchos de los problemas de la física de partículas elementales, estudiamos interacción de partículas fundamentales entre sí. Para explicar el origen de las reglas de Feynman, consideramos un ejemplo simple en donde un electrón (sin espín) se dispersa con un muón (sin espín). Estamos considerando diferentes partículas para evitar complicaciones extras asociadas con partículas idénticas. Identificamos el muón como la fuente del potencial electromagnético A^μ que aparece en (1.90). Por lo tanto la figura 1.3 se puede extender a la siguiente figura

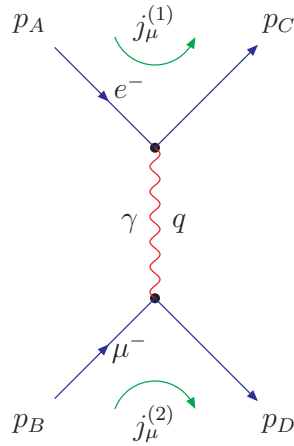


Figura 1.4: Dispersión electrón-muón.

que representa el proceso de dispersión $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$. Por lo tanto el fotón A^μ debe satisfacer la siguiente ecuación de Maxwell

$$\square^2 A^\mu = j_{(2)}^\mu \quad (1.94)$$

Esta ecuación determina el campo electromagnético A^μ asociado con la corriente $j_{(2)}^\mu$ del muón. Notemos que hemos cambiado la notación j_μ^{fi} a $j_\mu^{(1)}$. Como el electrón y el muón son partículas fundamentales, las tratamos al mismo nivel. Por lo tanto, imaginamos al electrón dispersandose en un potencial electromagnético creado por el muón o equivalentemente al muón dispersandose en un potencial creado por el electrón. La corriente asociada para un muón y un electrón sin espín tiene la misma forma como para la de una partícula escalar, la cual es dada por (1.93). Así, tenemos

$$j_{(1)}^\mu = -e N_A N_C (p_C + p_A)^\mu e^{i(p_C - p_A) \cdot x} , \quad (1.95)$$

$$j_{(2)}^\mu = -e N_B N_D (p_D + p_B)^\mu e^{i(p_D - p_B) \cdot x} . \quad (1.96)$$

Ya que

$$\square^2 e^{iq \cdot x} = -q^2 e^{iq \cdot x} , \quad (1.97)$$

la solución de (1.94) es

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j_{(2)}^\mu \quad \text{con} \quad q = p_D - p_B . \quad (1.98)$$

Insertando éste campo dado por el muón en (1.90), encontramos que la amplitud al orden más bajo para la dispersión del electrón-muón es

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{(1)}(x) \left(-\frac{1}{q^2} \right) j_{(2)}^\mu(x) d^4x . \quad (1.99)$$

Insertando (1.95) y (1.96) en (1.99) e integrando con respecto a x , encontramos

$$T_{fi} = -i N_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_B - p_A) \mathcal{M} \quad (1.100)$$

con

$$-i\mathcal{M} = (ie(p_A + p_C)^\mu) \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) (ie(p_B + p_D)^\nu) . \quad (1.101)$$

$\mathcal{M}$, es conocida como la *amplitud invariante*. La función delta en (1.100) expresa la conservación de momento en tal proceso. Ahora estamos en posición de hablar de las reglas de Feynman.

Reglas de Feynman

La amplitud $\mathcal{M}$ se puede considerar como la multiplicación de varios factores que podemos asociar con varias partes del diagrama 1.4, el llamado diagrama de Feynman. Estos factores se muestran en la figura 1.5. Éste diagrama de Feynman es al orden más bajo (orden árbol). El fotón es el intercambio entre los leptones, y el factor asociado al fotón $-ig_{\mu\nu}/q^2$ es llamado el *propagador fotónico*; éste lleva dos índices de Lorentz porque el fotón es una partícula con espín 1. El cuadrimomento q del fotón es determinado por la conservación del cuadrimomento en los vértices. Puesto que $q^2 \neq 0$, decimos que el fotón es “virtual”. Para cada uno de los vértices asociamos el factor mostrado. Cada *factor del vértice* contiene el acoplamiento electromagnético e y un índice de cuadvectores para conectar con el índice del fotón. El signo particular menos en la distribución y los factores de i son dados para obtener el resultado correcto a ordenes mayores. Notemos que la multiplicación de los tres factores nos da $-i\mathcal{M}$. La amplitud invariante $\mathcal{M}$ es obtenida por dibujar todos los diagramas (topológicamente distintos y conectados) de Feynman para los procesos y asignando los factores multiplicativos para los diversos elementos de cada diagrama. Las reglas las resumimos en la tabla 1.1. Para la interacción de un fotón con una partícula de espín cero, existe también un vértice de cuatro puntos; ver la figura 1.6. Éste origina del término $e^2 A^2$ en (1.87), el cual no existe para el proceso correspondiente a la dispersión electrón-muón al nivel más bajo en e .

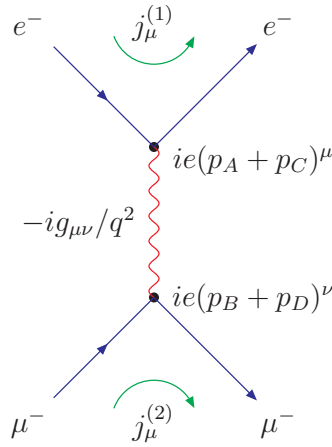


Figura 1.5: Factores del vértice y del propagador para la dispersión electrón-muón “sin espín”.

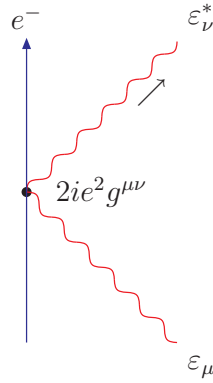
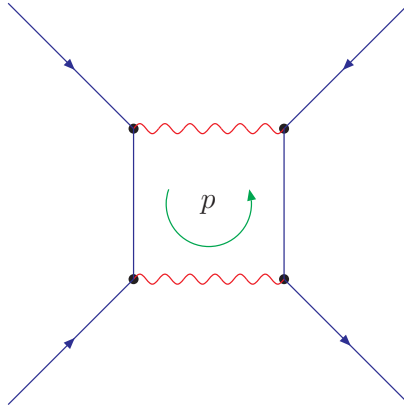


Figura 1.6: Diagrama para $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$, con electrones sin espín.

Hasta ahora hemos considerado únicamente los diagramas de Feynman al orden más bajo. Las reglas se pueden generalizar a diagramas de un orden mayor. Los diagramas a los siguientes ordenes contienen lazos cerrados de partículas intermediarias (ver por ejemplo la figura 1.7). La conservación del cuádrimomento permanece en cada vértice. Uno tiene que integrar sobre todas las variables de momento p que no pueden ser fijadas (lazos internos):

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$



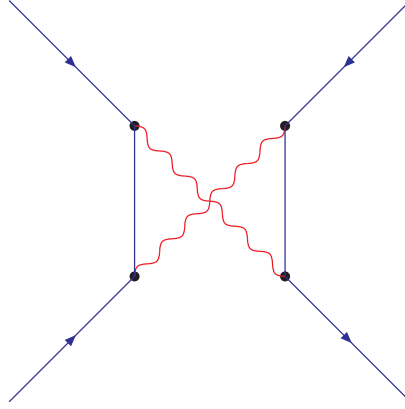
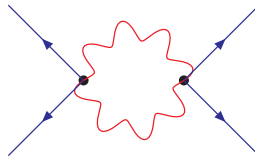


Figura 1.7: Algunos diagramas de orden mayor para $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$.

Agregamos los siguientes comentarios:

- No hay factores extras de -1. Es evidente porque el cambio de la línea de un bosón siempre nos da un factor de +1 de acuerdo a la estadística de Bose-Einstein.
- En el orden n -ésimo de teoría de perturbaciones tenemos que dibujar todos los posibles distintos diagramas de Feynman topológicamente con n vértices que tienen el número de partículas prescrito en el estado inicial y final (líneas externas).
- Para la construcción de los diagramas de Feynman, solamente la estructura topológica es importante. Ya que la teoría está formulada en una manera relativísticamente covariante, todos los posibles ordenes son automáticamente tomados en cuenta. Las gráficas pueden ser arbitrariamente deformadas sin cambiar su significado.
- Para cada lazo de un fotón asignamos un factor de $1/2$.



Desafortunadamente, las integraciones de lazos a menudo nos dan divergencias. Sin embargo, en teorías renormalizables todos los infinitos pueden ser removidos mediante técnicas

ya establecidas permaneciendo la predictibilidad de la teoría.

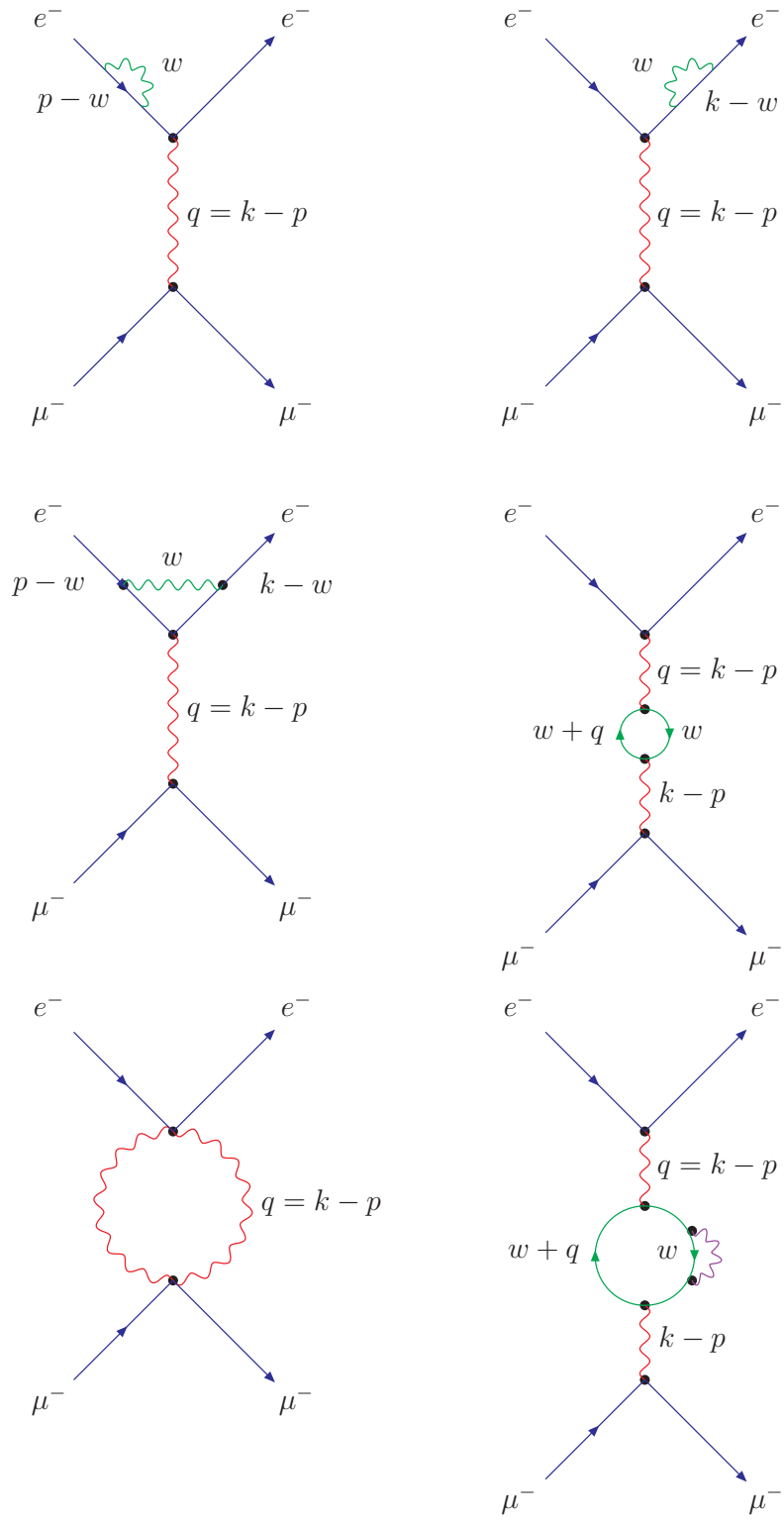
1.4. Divergencias y Regularización

1.4.1. Divergencias

A orden árbol, el cuadrimomento de una partícula interna (o virtual) es fijado no ambiguamente por la conservación de la energía y el momento. Un ejemplo de un diagrama árbol es la figura 1.5 que corresponde a la contribución más baja en α para la dispersión electrón-muón. Pero los diagramas de Feynman a ordenes mayores contienen *lazos*. Los lazos cerrados son tales que el momento de todos los lazos internos *no es fijo* por el cuadrimomento de las partículas externas. Para cada lazo hay un cuadrimomento completamente no especificado. Las reglas de Feynman nos dicen que debemos integrar sobre todos los posibles valores del cuadrimomento interno. La evaluación de los diagramas de lazos por lo tanto requiere que las integrales de lazos sean llevadas a cabo con mucha dificultad. Las correcciones a ordenes mayores son conocidas como *correcciones radiativas*. Los diagramas de Feynman que representan las correcciones radiativas en un proceso contienen vértices adicionales, comparados con los diagramas que describen un proceso a ordenes más bajos en la teoría de perturbaciones, los cuales corresponden a la emisión y absorción de partículas virtuales. Para ilustrar estas ideas consideremos el proceso de dispersión electrón-muón sin espines. Al orden árbol hemos obtenido que la amplitud de probabilidad $\mathcal{M}$ es

$$-i\mathcal{M} = (ie(p_A + p_C)^\mu) \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) (ie(p_B + p_D)^\nu) , \quad (1.102)$$

correspondiente al diagrama de Feynman de la figura 1.5. Al siguiente orden en teoría de perturbaciones (orden e^4), encontramos, es decir, los diagramas mostrados en la página 26. Los dos primeros diagramas representan la *corrección a las líneas externas*, el tercero es la *corrección al vértice* y el cuarto es la *corrección al propagador fotónico*. Para mostrar la *corrección al propagador escalar* consideramos el último diagrama, al orden e^6 . En principio las integrales de lazos son integrales divergentes debido a que tenemos que integrar sobre todos los posibles valores del cuadrimomento interno. La forma explícita de estas integrales y los cálculos de estas correcciones lo haremos en los siguientes capítulos. Antes,



Contribuciones radiativas a ordenes mayores.

para introducir la maquinaria requerida, veremos algunos de los métodos estándar para la evaluación de lazos.

1.4.2. Regularización

En la sección anterior mencionamos que el cálculo de integrales de lazos nos da divergencias. Estas divergencias son removidas por regularización, es decir, una modificación de estas integrales que nos permite separar las partes finitas e infinitas de una manera conveniente. El siguiente paso es eliminar los términos divergentes de tal manera que la predictibilidad de la teoría permanezca. Este proceso se llama *renormalización*. La renormalización de la teoría no siempre es posible. Por lo tanto algunas teorías son renormalizables y otras no lo son. En teorías renormalizables, después de la renormalización, los resultados finales permanecen finitos y la predictibilidad de la teoría también. Existen varios formalismos de regularización y renormalización. Los pasos intermedios dependen del formalismo empleado. Sin embargo, en el límite en el cual la teoría original es válida, las predicciones físicas son independientes del método usado. Por esta razón, los diferentes métodos han sido usados, dependiendo del problema. Historicamente el procedimiento más antiguo es el método de corte (cut-off). Éste tiene la ventaja de relacionar el comportamiento de las divergencias a distancias y por lo tanto a energías extremas. Por lo tanto, existen dos tipos de cortes, los cortes ultravioletas e infrarojos. El empleo del método de corte puede generar los siguientes problemas:

1. Pérdida de la invariancia translacional.
2. Es difícil asegurar la invariancia de norma y la validez de la identidad de Ward tanto en teoría de perturbaciones como en tratamientos no perturbativos.

Un método alternativo, conocido como *regularización dimensional*, es libre de estos problemas. Tomaremos un ejemplo explícito de la teoría cuántica de campos para describir los métodos de corte y regularización.

Regularización de Corte

Consideremos la siguiente integral típica a un lazo en teorías de campo en el espacio de Minkowski

$$I_n^4(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 w}{(2\pi)^4} \frac{1}{(w^2 - s)^n}, \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (1.103)$$

En el espacio de Minkowski $w^2 = w_0^2 - w_1^2 - w_2^2 - w_3^2$ y $d^4 w = dw_0 dw_1 dw_2 dw_3$. No es difícil evaluar la integral w_0 como una integral de contorno, entonces pasamos las integrales espaciales a coordenadas esféricas. Para esto, hacemos una *rotación de Wick* (WR). Notemos que si no tuviéramos el signo menos en la métrica de Minkowski, podríamos realizar la integral cuadrimensional completa en coordenadas esféricas cuadrimensionales. Para

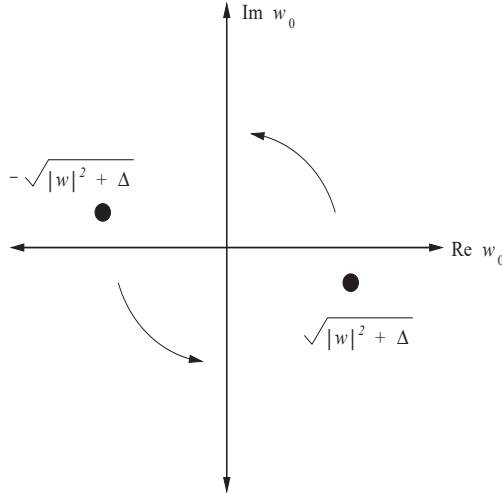


Figura 1.1: El contorno de la integración w_0 puede ser rotada como se muestra.

remover el signo menos, consideramos el contorno de integración en el plano w_0 (ver figura 1.1). La localización de los polos, y el hecho de que la integral cae lo suficientemente rápido a lo largo de $|w_0|$, nos permite rotar el contorno 90° en contra de las manecillas del reloj. Definimos la variable w_E como el cuádrimomento Euclidino:

$$\begin{aligned}
 \text{espacio de Minkowski} &\rightarrow \text{espacio de Euclides} \\
 w_0 &\rightarrow iw_0^E, \\
 w^2 &\rightarrow -w_0^2 - w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 \\
 &\quad -[w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2] = -w^E, \\
 d^4w &\rightarrow id^4w^E.
 \end{aligned} \tag{1.104}$$

Así, la integral (1.103) toma la forma

$$I_n^4(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{id^4w^E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(-1)^n (w_E^2 + s)^n}. \tag{1.105}$$

En coordenadas polares la medida es

$$d^4w^E = d\Omega_4 w_E^3 dw^E = 2\pi^2 w_E^3 dw^E, \tag{1.106}$$

entonces la integral será

$$I_n^4(s) = \frac{i(-1)^n}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \int_0^\infty dw^E \frac{w_E^3}{(w_E^2 + s)^n} \tag{1.107}$$

$$= \frac{i(-1)^n (2\pi^2)}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dw^E \frac{w_E^3}{(w_E^2 + s)^n}. \tag{1.108}$$

Esta integral aún es divergente cuando $w^E \rightarrow \infty$. Hacemos el cambio de variable $x = w_E^2$

$$I_n^4(s) = \frac{i(-1)^n(\pi^2)}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dx \frac{x}{(x+s)^n} . \quad (1.109)$$

Usamos la siguiente integral definida¹

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{(1+\beta x)^\nu} = \beta^{-\mu} B(\mu, \nu - \mu) , \quad [|\arg \beta| < \pi ; \nu > \mu > 0 ; \nu, \mu \in \Re] . \quad (1.110)$$

Por lo tanto,

$$I_n^4(s) = \frac{i(-1)^n(\pi^2)}{(2\pi)^4} \frac{1}{(n-1)(n-2)s^{n-2}} \quad (1.111)$$

la cual es singular para $n = 1$ y $n = 2$. Evaluamos la integral (1.109) para $n = 2$

$$I_2^4(s) = \frac{i(-1)^2(\pi^2)}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dx \frac{x}{(x+s)^2} . \quad (1.112)$$

Introducimos un corte con el regulador Λ :

$$I_2^4(s, \Lambda) = \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\Lambda dx \frac{x}{(x+s)^2} \quad (1.113)$$

entonces,

$$-i(4\pi)^2 I_2^4(s, \Lambda) = \ln \left(\frac{\Lambda + s}{s} \right) - \frac{\Lambda}{\Lambda + s} . \quad (1.114)$$

Notemos que logramos separar en partes finita e infinita. El primer término diverge logarítmicamente y el segundo término es convergente en el límite cuando $\Lambda \rightarrow \infty$. Es trivial notar que perdimos la invariancia translacional de la integral inicial.

Regularización Dimensional

La regularización dimensional consiste en modificar la dimensionalidad de estas integrales para convertirlas en finitas. En primer lugar, generalizemos la cuatridimensionalidad a un espacio D -dimensional donde D es un entero positivo. El tensor métrico $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ esta definido por

$$\begin{aligned} g^{00} &= -g^{ii} = 1 , & i = 1, 2, \dots, D-1 , \\ g^{\alpha\beta} &= 0 , & \alpha \neq \beta . \end{aligned} \quad (1.115)$$

Correspondientemente, un cuadvivector w^α es remplazado por un vector con D componentes

$$w^\alpha \equiv (w^0, w^1, \dots, w^{D-1}) , \quad (1.116)$$

¹Tomamos esta integral de la referencia [2].

y

$$w^2 = w_\alpha w^\alpha = (w^0)^2 - \sum_{i=1}^{D-1} (w^i)^2 . \quad (1.117)$$

Las integrales de lazos ahora se convierten en integrales en D dimensiones con un elemento de volumen $d^D w = dw^0 dw^1 \cdots dw^{D-1}$. Por ejemplo, la ecuación (1.107) se generaliza a

$$I_n^D(s) = \frac{i(-1)^n}{(2\pi)^D} \int d\Omega_D \int_0^\infty dw^E \frac{w_E^{D-1}}{(w_E^2 + s)^n} . \quad (1.118)$$

Para integrar sobre el momento del lazo w^E usamos $x = \frac{s}{w_E^2 + s}$

$$I_n^D(s) = \frac{i(-1)^n}{2(2\pi)^D} s^{D/2-n} \int d\Omega_D \int_0^1 dx x^{n-1-D/2} (1-x)^{D/2-1} . \quad (1.119)$$

Conocemos que

$$\pi^{1/2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} , \quad (1.120)$$

entonces

$$\pi^{D/2} = \prod_i^D \int_{-\infty}^{\infty} dx_i e^{-x_i^2} = \int_{-\infty}^{\infty} d^D x \exp \left(- \sum_i^D x_i^2 \right) . \quad (1.121)$$

Usando coordenadas polares en el lado derecho

$$\pi^{D/2} = \int d\Omega_D \int_0^\infty dr r^{D-1} e^{-r^2} . \quad (1.122)$$

Finalmente, hacemos un cambio de variable $r^2 = y$ y usamos la siguiente definición de función Gamma:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} , \quad (1.123)$$

para tener

$$\pi^{D/2} = \int d\Omega_D \times \frac{1}{2} \int_0^\infty dy y^{\frac{D-2}{2}} e^{-y} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \int d\Omega_D . \quad (1.124)$$

Entonces para la integración sobre el ángulo sólido

$$\int d\Omega_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} . \quad (1.125)$$

En la tabla 1.2 se muestran algunos valores de ángulo sólido. La definición de la función Beta es

$$B(a, b) = \int_0^1 dt t^{a-1} (1-t)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} . \quad (1.126)$$

Con esta definición y el valor de ángulo sólido para D dimensiones, la integral de (1.119) se convierte en

$$I_n^D(s) = \frac{i(-1)^n \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(n - \frac{D}{2})}{(2\pi)^D \Gamma(n)} \left(\frac{1}{s}\right)^{n - \frac{D}{2}}. \quad (1.127)$$

Para $n = D/2$ (es decir, para $n = 2$ cuando $D = 4$), es singular para el polo de $\Gamma(z)$ en $z = 0$. Sin embargo, para valores no enteros de D , el lado derecho de la ecuación (1.127) es perfectamente bien definida y finita. Por lo tanto, podemos usar esto para hacer una generalización de la integral en el lado derecho de (1.127) a D dimensiones para valores no enteros de D . En particular, tomemos $D = 4 - 2\epsilon$ donde ϵ es un parámetro pequeño positivo y $n = 2$

$$\begin{aligned} -i(4\pi)^2 I_2^{D=4-2\epsilon}(s) &= (4\pi)^\epsilon \frac{\Gamma(2 - \frac{4-2\epsilon}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{s}\right)^{2 - \frac{4-2\epsilon}{2}} \\ &= (4\pi)^\epsilon \Gamma(\epsilon) s^{-\epsilon}. \end{aligned} \quad (1.128)$$

En el límite $\epsilon \rightarrow 0$ obtenemos

$$-i(4\pi)^2 I_2^{D=4-2\epsilon}(s) = \frac{1}{\epsilon} - \ln(s) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (1.129)$$

donde $\gamma=0.5772 \dots$ es la constante de Euler. Comparamos este resultado con (1.114)

$$\begin{aligned} -i(4\pi)^2 I_2^4(s, \Lambda) &= \ln\left(\frac{\Lambda + s}{s}\right) - \frac{\Lambda}{\Lambda + s} \\ &\xrightarrow{\Lambda \gg s} \ln(\Lambda) - \ln(s) + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}). \end{aligned} \quad (1.130)$$

Como podemos observar con el método de regularización de corte la divergencia es logaritmica $\ln(\Lambda)$ cuando $\Lambda \rightarrow \infty$ mientras que con el método de regularización dimensional la divergencia es de la forma $1/\epsilon$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. En general, las divergencias explícitas son de la forma $1/\epsilon^n$ donde $n = 1, 2, 3, \dots$. Con el método de regularización dimensional el tratamiento de las integrales divergentes a todos los órdenes en teoría de perturbaciones preserva las simetrías en QED. En los próximos capítulos aplicaremos el método de la regularización dimensional para realizar cálculos de propagadores y vértices en SQED a un lazo.

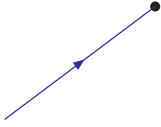
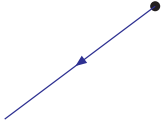
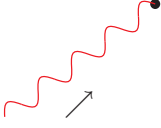
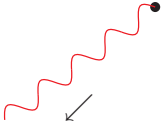
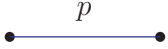
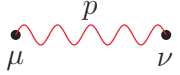
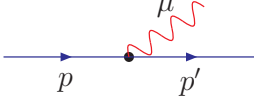
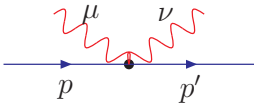
Líneas externas		Factor Multiplicativo
bosón entrante		1
bosón saliente		1
fotón entrante		ε_μ
fotón saliente		ε_μ^*
Líneas internas		
bosón de espín cero		$iS(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}$
fotón de espín 1		$i\Delta^{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2}g^{\mu\nu} + i(1 - \xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^4}$
Factores del vértice		
vértice de un fotón		$-ie\Gamma_\mu = -ie(p'_\mu + p_\mu)$
vértice de dos fotones		$2ie^2 g_{\mu\nu}$

Tabla 1.1: Reglas de Feynman para la Electrodinámica Cuántica Escalar.

D	$\Gamma(D/2)$	$\int d\Omega_D$
1	$\sqrt{\pi}$	2
2	1	2π
3	$\sqrt{\pi}/2$	4π
4	1	$2\pi^2$

Tabla 1.2: Algunos valores de Γ y $\int d\Omega_D$.

Capítulo 2

Propagadores

2.1. El Propagador Escalar

En éste capítulo vamos a estudiar el propagador escalar a un lazo en norma y dimensiones arbitrarias. En la siguiente figura mostramos las correcciones del propagador escalar a primer orden:

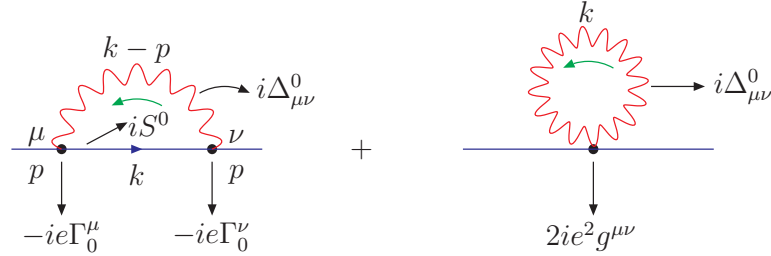


Figura 3.1: Correcciones a primer orden en el propagador escalar.

El índice cero denota cantidades desnudas. El segundo diagrama no contribuye en nuestros cálculos puesto que aplicando las reglas de Feynman (ver tabla 1.1) tenemos:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (2ie^2 g^{\mu\nu}) i \left[-\frac{g_{\mu\nu}}{k^2} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \right] = \frac{2e^2}{(2\pi)^D} [D - 1 + \xi] \int \frac{d^D k}{k^2} = 0. \quad (2.1)$$

En la figura 3.2, el círculo del primer diagrama representa la suma de todas las correcciones de lazos. Llamaremos a esta suma iS . En principio debemos incluir una serie infinita de diagramas de Feynman, pero nos vamos a restringir a calcular correcciones a nivel de un lazo para el propagador escalar.

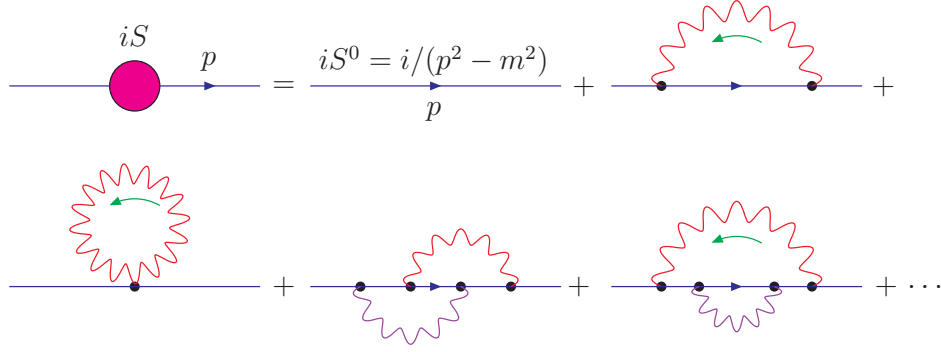


Figura 3.2: Correcciones del propagador escalar a ordenes mayores.

Observemos que hemos incluido diagramas de Feynman que estan de acuerdo con (1.84), nuestro Lagrangiano de interacción en Electrodinámica Cuántica Escalar:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SQED} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi \\ & -ie(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*)A_\mu + 2e^2 \varphi^* A^\mu \varphi A_\mu . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Es importante mencionar que se requiere introducir un término de interacción escalar de cuatro puntos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SQED} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi \\ & -ie(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*)A_\mu + 2e^2 \varphi^* A^\mu \varphi A_\mu - \frac{\lambda}{4}(\varphi^* \varphi)^2 , \end{aligned} \quad (2.3)$$

por las cuestiones de renormalizabilidad para cancelar las divergencias que surgen en la dispersión coulombica escalar [1]. Sin embargo, como nosotros no entramos en los asuntos de renormalización, no consideraremos este término adicional. Si queremos calcular $-iS^{-1}$ a primer orden los diagramas a considerar obviamente son:

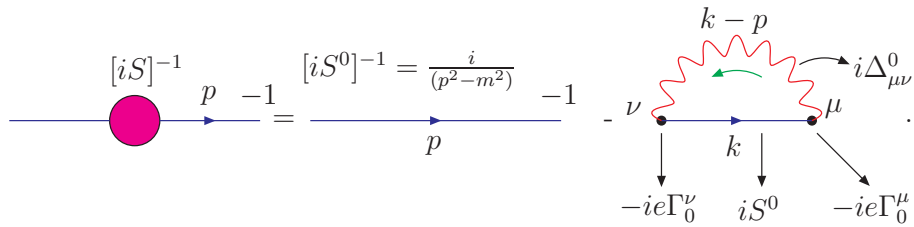


Figura 3.3: Correcciones a un lazo para $-iS^{-1}$.

Aplicando las reglas de Feynman obtenemos que $-iS^{-1}$ es:

$$-iS^{-1} = -i[S^0]^{-1} - \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [-ie\Gamma_0^\nu][iS^0][-ie\Gamma_0^\mu][i\Delta_{\mu\nu}^0] , \quad (2.4)$$

multiplicando por i :

$$S^{-1} = [S^0]^{-1} - ie^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \Gamma_0^\nu S^0 \Gamma_0^\mu \Delta_{\mu\nu}^0 . \quad (2.5)$$

La forma explícita de (2.5) es

$$S^{-1} = [S^0]^{-1} + ie^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (k+p)^\nu \frac{1}{k^2 - m^2} (k+p)^\mu \frac{1}{q^2} \left[g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] , \quad (2.6)$$

donde $q = k - p$ y ξ es el parámetro covariante de norma. El valor de $\xi = 0$ corresponde a la norma de Landau y el valor de $\xi = 1$ a la norma de Feynman.

2.1.1. El Propagador Escalar a un Lazo

Norma de Feynman

Procedemos a resolver la integral (5.5) en la norma de Feynman ($\xi = 1$),

$$S_{Feynman}^{-1} = [S^0]^{-1} + ie^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k+p)^\nu (k+p)^\mu}{k^2 - m^2} \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} . \quad (2.7)$$

Del hecho que

$$A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} = A \cdot B \quad \text{y} \quad (k+p) \cdot (k+p) = (k+p)^2 , \quad (2.8)$$

$$S_{Feynman}^{-1} = [S^0]^{-1} + ie^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k+p)^2}{(k^2 - m^2)q^2} . \quad (2.9)$$

La integral de (2.9) es divergente para valores de k muy grandes. Por ejemplo, para $D = 4$, la integral de (2.9) en coordenadas esféricas polares es:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k+p)^2}{(k^2 - m^2)q^2} = \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dk \frac{k^3 (k+p)^2}{(k^2 - m^2)(k-p)^2} . \quad (2.10)$$

Por lo tanto, en el límite $k \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{8\pi^2} \int^\infty dk \frac{k^3 k^2}{k^2 k^2} = \frac{1}{8\pi^2} \int^\infty dk k = \infty . \quad (2.11)$$

Por esta razón queremos integrar sobre D dimensiones directamente puesto que vamos a aplicar el método de regularización dimensional.

$$\int d^D k \frac{(k+p)^2}{(k^2 - m^2)q^2} = \int d^D k \frac{k^2 + p^2 + 2k \cdot p}{(k^2 - m^2)q^2} . \quad (2.12)$$

La definición del momento q^2 es

$$q^2 = (k - p)^2 = k^2 + p^2 - 2k \cdot p , \quad (2.13)$$

entonces

$$2k \cdot p = -q^2 + k^2 + p^2 . \quad (2.14)$$

Sustituyendo (2.14) en (2.12) tenemos que

$$\int d^D k \frac{(k + p)^2}{(k^2 - m^2)q^2} = \int d^D k \frac{2k^2 + 2p^2 - q^2}{(k^2 - m^2)q^2} . \quad (2.15)$$

Por lo tanto, sumando y restando $2m^2$ obtenemos

$$\int d^D k \frac{(k + p)^2}{(k^2 - m^2)q^2} = 2 \int d^D k \frac{1}{q^2} + 2(m^2 + p^2) \int d^D k \frac{1}{(k^2 - m^2)q^2} - \int d^D k \frac{1}{k^2 - m^2} . \quad (2.16)$$

La primera integral es cero debido a que es de la forma

$$\int d^D w f(w) = 0 \quad (2.17)$$

puesto que $q = k - p$ y $d^D q = d^D k$. La tercera integral es de la forma (A.8) con $s = m^2$ y $n = 1$, así

$$\int d^D k \frac{1}{k^2 - m^2} = -i\pi^{D/2} \Gamma(1 - D/2) (m^2)^{D/2-1} . \quad (2.18)$$

Para solucionar la segunda integral de (2.16) usamos parametrización de Feynman en particular la forma (A.15) donde

$$a = q^2 = (k - p)^2 \quad \text{y} \quad b = k^2 - m^2 , \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \int d^D k \frac{1}{(k^2 - m^2)q^2} &= \int d^D k \int_0^1 dx \frac{1}{[x(k - p)^2 + (1 - x)(k^2 - m^2)]^2} \\ &= \int_0^1 dx \int d^D k \frac{1}{[x(k - p)^2 + (1 - x)(k^2 - m^2)]^2} . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Transformemos el denominador de esta integral a una forma conveniente para poder integrar. Llamemos

$$\begin{aligned} D &= x(k - p)^2 + (1 - x)(k^2 - m^2) \\ &= x[k^2 + p^2 - 2k \cdot p] + (1 - x)k^2 - m^2(1 - x) \\ &= k^2 - 2k \cdot px + p^2 x - m^2(1 - x) . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Sea

$$w = k - px , \quad \Rightarrow \quad k = w + px . \quad (2.22)$$

Sustituyendo (2.22) en (2.21) obtenemos

$$\begin{aligned} D &= (w + px)^2 - 2(w + px) \cdot px + p^2x - m^2(1 - x) \\ &= w^2 + p^2x(1 - x) - m^2(1 - x) . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Así

$$\int d^D k \frac{1}{(k^2 - m^2)q^2} = \int_0^1 dx \int d^D w \frac{1}{[w^2 + p^2x(1 - x) - m^2(1 - x)]^2} . \quad (2.24)$$

La integración sobre w la podemos llevar a cabo pues esta integral es de la forma (A.8) donde $n = 2$ y $s = -p^2x(1 - x) + m^2(1 - x)$. Entonces

$$\int d^D k \frac{1}{(k^2 - m^2)q^2} = i\pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2) \int_0^1 dx [(1 - x)(m^2 - p^2x)]^{D/2-2} . \quad (2.25)$$

La integral

$$\int_0^1 dx [(1 - x)(m^2 - p^2x)]^{D/2-2} = (m^2)^{\frac{D}{2}-2} \int_0^1 (1 - x)^{\frac{D}{2}-2} \left(1 - \frac{p^2}{m^2}x\right)^{\frac{D}{2}-2} dx \quad (2.26)$$

la resolvemos usando la siguiente integral estándar, [2].

$$\int_0^1 x^{\lambda-1} (1 - x)^{\mu-1} (1 - \beta x)^{-\nu} dx = B(\lambda, \mu) {}_2F_1(\nu, \lambda; \lambda + \mu; \beta) , \quad (2.27)$$

donde $\lambda = 1$, $\mu = \frac{D}{2} - 1$, $\beta = \frac{p^2}{m^2}$ y $-\nu = \frac{D}{2} - 2$. Tal que,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - x)^{\frac{D}{2}-2} \left(1 - \frac{p^2}{m^2}x\right)^{\frac{D}{2}-2} dx &= B\left(1, \frac{D}{2} - 1\right) {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Así,

$$\int d^D k \frac{1}{(k^2 - m^2)q^2} = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(2 - D/2)\Gamma(D/2 - 1)}{\Gamma(D/2)} (m^2)^{\frac{D}{2}-2} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \quad (2.29)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int d^D k \frac{(k + p)^2}{(k^2 - m^2)q^2} &= 2i\pi^{D/2} (m^2 + p^2) (m^2)^{\frac{D}{2}-2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \\ &\quad + i\pi^{D/2} \Gamma(1 - D/2) (m^2)^{D/2-1} . \end{aligned} \quad (2.30)$$

Finalmente, el inverso del propagador escalar en D dimensiones en la norma de Feynman es:

$$S_{Feynman}^{-1} = p^2 - m^2 - \frac{e^2}{(2\pi)^D} \left[2\pi^{D/2} (m^2 + p^2) (m^2)^{\frac{D}{2}-2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} \times \right. \\ \left. {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) + \pi^{D/2} \Gamma(1 - D/2) (m^2)^{D/2-1} \right]. \quad (2.31)$$

Norma Arbitraria

Ahora solucionamos (2.6) en la norma arbitraria ξ

$$S^{-1} = [S^0]^{-1} + ie^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k+p)^\nu (k+p)^\mu g_{\mu\nu}}{k^2 - m^2} \frac{1}{q^2} \\ - i(1 - \xi) e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k+p)^\nu (k+p)^\mu q_\mu q_\nu}{(k^2 - m^2) q^4} \quad (2.32)$$

donde solamente nos resta resolver la última integral

$$\int d^D k \frac{(k+p)^\nu (k+p)^\mu q_\mu q_\nu}{(k^2 - m^2) q^4} = \int d^D k \frac{[(k+p) \cdot (k-p)][(k+p) \cdot (k-p)]}{(k^2 - m^2) q^4} \\ = \int d^D k \frac{(k^2 - p^2)^2}{(k^2 - m^2) q^4} = \int d^D k \frac{k^4 + p^4 - 2k^2 p^2}{(k^2 - m^2) q^4} \quad (2.33)$$

Sumamos y restamos m^2 dos veces, tal que,

$$\int d^D k \frac{(k+p)^\nu (k+p)^\mu q_\mu q_\nu}{(k^2 - m^2) q^4} = \int d^D k \frac{k^2(k^2 - m^2 + m^2)}{(k^2 - m^2) q^4} + p^4 \int d^D k \frac{1}{(k^2 - m^2) q^4} \\ - 2p^2 \int d^D k \frac{k^2 - m^2 + m^2}{(k^2 - m^2) q^4}. \quad (2.34)$$

Simplificando algunas operaciones algebraicas y usando (2.17) obtenemos

$$\int d^D k \frac{(k+p)^\nu (k+p)^\mu q_\mu q_\nu}{(k^2 - m^2) q^4} = (m^2 - p^2)^2 K_{21}. \quad (2.35)$$

Ahora aplicamos parametración de Feynman a esta integral. Pero resolvemos la siguiente integral más general por conveniencia del cálculo de otras integrales a futuro (la cual hemos solucionado para $\nu_1 = 1$ y $\nu_2 = 1$)

$$K_{\nu_1 \nu_2} \equiv \int d^D k \frac{1}{\underbrace{(q^2)^{\nu_1}}_A \underbrace{(k^2 - m^2)^{\nu_2}}_B}. \quad (2.36)$$

Transformamos el denominador usando la siguiente integral de Feynman

$$\frac{1}{A^{\nu_1} B^{\nu_2}} = \frac{\Gamma(\nu_1 + \nu_2)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \int_0^1 dx \frac{x^{\nu_1-1}(1-x)^{\nu_2-1}}{[xA + (1-x)B]^{\nu_1+\nu_2}} \quad (2.37)$$

entonces

$$K_{\nu_1\nu_2} = \frac{\Gamma(\nu_1 + \nu_2)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \int_0^1 dx \int d^D k \frac{x^{\nu_1-1}(1-x)^{\nu_2-1}}{[x(k-p)^2 + (1-x)(k^2 - m^2)]^{\nu_1+\nu_2}}, \quad (2.38)$$

el término dentro del corchete cuadrado en el denominador tiene la misma forma que (2.21) el cual transformamos a la forma (2.23). Usando nuevamente (A.8) y simplificando tenemos

$$K_{\nu_1\nu_2} = \frac{(-1)^{\nu_1+\nu_2} i\pi^{D/2} \Gamma(\nu_1 + \nu_2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \int_0^1 dx [-p^2 x(1-x) + m^2(1-x)]^{\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2} \times x^{\nu_1-1}(1-x)^{\nu_2-1}. \quad (2.39)$$

La integral

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx [-p^2 x(1-x) + m^2(1-x)]^{\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2} x^{\nu_1-1}(1-x)^{\nu_2-1} = \\ &= \int_0^1 x^{\nu_1-1}(1-x)^{\nu_2-1} (1-x)^{\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2} (-p^2 x + m^2)^{\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2} dx \\ &= (m^2)^{\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2} \int_0^1 x^{\nu_1-1}(1-x)^{\frac{D}{2}-\nu_1-1} \left(1 - \frac{p^2}{m^2} x\right)^{\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2} dx \end{aligned} \quad (2.40)$$

la podemos resolver usando la integral (2.27) donde $\lambda = \nu_1$, $\mu = \frac{D}{2} - \nu_1$, $\beta = \frac{p^2}{m^2}$ y $-\nu = \frac{D}{2} - \nu_1 - \nu_2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{\nu_1-1}(1-x)^{\frac{D}{2}-\nu_1-1} \left(1 - \frac{p^2}{m^2} x\right)^{\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2} dx = \\ &= B\left(\nu_1, \frac{D}{2} - \nu_1\right) {}_2F_1\left(-\frac{D}{2} + \nu_1 + \nu_2, \nu_1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\frac{D}{2} - \nu_1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} {}_2F_1\left(-\frac{D}{2} + \nu_1 + \nu_2, \nu_1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Entonces

$$\begin{aligned} K_{\nu_1\nu_2} &= (-1)^{\nu_1+\nu_2} i\pi^{D/2} (m^2)^{\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2} \frac{\Gamma(\nu_1 + \nu_2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - \nu_1)}{\Gamma(\nu_2)\Gamma(\frac{D}{2})} \times \\ & {}_2F_1\left(-\frac{D}{2} + \nu_1 + \nu_2, \nu_1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Para $\nu_1 = 2$ y $\nu_2 = 1$ tenemos

$$K_{21} = -i\pi^{D/2}(m^2)^{\frac{D}{2}-3} \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2}-2)}{\Gamma(\frac{D}{2})} {}_2F_1\left(-\frac{D}{2}+3, 2; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \quad (2.43)$$

Por lo tanto, el inverso del propagador escalar en D dimensiones en la norma arbitraria es:

$$\begin{aligned} S^{-1} = & p^2 - m^2 - \frac{e^2}{(2\pi)^D} \left[2\pi^{D/2}(m^2 + p^2)(m^2)^{\frac{D}{2}-2} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2}-1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} \times \right. \\ & {}_2F_1\left(2-\frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) + \pi^{D/2}\Gamma(1-D/2)(m^2)^{D/2-1} \Big] \\ & - \frac{e^2(1-\xi)}{(2\pi)^D} (m^2 - p^2)^2 \pi^{D/2} (m^2)^{\frac{D}{2}-3} \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2}-2)}{\Gamma(\frac{D}{2})} \times \\ & {}_2F_1\left(-\frac{D}{2}+3, 2; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Simplificando términos, el propagador escalar en el espacio de Minkowski a un lazo en SQED en norma y dimensiones arbitrarias es:

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) = & p^2 - m^2 - \frac{e^2}{(2\pi)^D} \pi^{D/2} (m^2)^{\frac{D}{2}-1} \left\{ \Gamma(1-D/2) \right. \\ & + 2(m^2 + p^2)(m^2)^{-1} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2}-1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} {}_2F_1\left(2-\frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \\ & + (1-\xi)(m^2 - p^2)^2 (m^2)^{-2} \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2}-2)}{\Gamma(\frac{D}{2})} \times \\ & \left. {}_2F_1\left(3-\frac{D}{2}, 2; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Regularización

Regresando a la expresión (2.45) del propagador escalar en el espacio de Minkowski a un lazo en SQED en norma y dimensiones arbitrarias:

$$\begin{aligned}
S^{-1}(p) = & p^2 - m^2 - \frac{e^2}{(2\pi)^D} \pi^{D/2} (m^2)^{\frac{D}{2}-1} \left\{ \Gamma(1 - D/2) \right. \\
& + 2(m^2 + p^2)(m^2)^{-1} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \\
& + (1 - \xi)(m^2 - p^2)^2(m^2)^{-2} \frac{\Gamma(3 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 2)}{\Gamma(\frac{D}{2})} \times \\
& \left. {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, 2; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \right\}. \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Observemos que la función Γ es divergente para $D = 4$. Vamos a tratar de separar la parte divergente de esta expresión:

$${}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) = {}_2F_1\left(0, 1; 2; \frac{p^2}{m^2}\right) = 1, \tag{2.47}$$

$${}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, 2; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) = {}_2F_1\left(1, 2; 2; \frac{p^2}{m^2}\right) = \frac{m^2}{m^2 + p^2}, \tag{2.48}$$

$$\Gamma(D/2 - 1) = \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3 - D/2) = \Gamma(3 - 2) = 1, \quad \Gamma(D/2) = 1. \tag{2.49}$$

Sustituimos $D = 4 - 2\epsilon$ en las siguientes funciones de Gamma:

$$\Gamma(2 - D/2) = \Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} + \text{cantidad finita}, \tag{2.50}$$

$$\Gamma(D/2 - 2) = \Gamma(-\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon} + \text{cantidad finita}, \tag{2.51}$$

$$\Gamma(1 - D/2) = \Gamma(-1 + \epsilon) = -\frac{1}{1 - \epsilon} \Gamma(\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon} + \dots. \tag{2.52}$$

Entonces,

$$S^{-1}(p) = p^2 - m^2 - \frac{e^2}{16\pi^2} m^2 \left[-\frac{1}{\epsilon} + 2\left(1 + \frac{p^2}{m^2}\right) \frac{1}{\epsilon} - (1 - \xi) \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) \frac{1}{\epsilon} \right]. \tag{2.53}$$

Por lo tanto el *inverso del propagador en la norma arbitraria* en $D = 4 - 2\epsilon$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ es:

$$S^{-1}(p) = p^2 - m^2 - \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \left[m^2 + 2p^2 - (1 - \xi)(m^2 - p^2) \right] + \text{cantidad finita}. \tag{2.54}$$

Esta expresión separa la parte divergente de la parte finita en la expresión del propagador escalar a un lazo. A continuación vamos a calcular el propagador del fotón a un lazo en norma y dimensiones arbitrarias.

2.2. El Propagador Fotónico

En este capítulo, vamos a calcular las correcciones al propagador fotónico a primer orden. Además, en $D = 3$, sumaremos diagramas con burbujas para evaluar el propagador modificado. Las correcciones en el propagador fotónico a primer orden vienen de la presencia de un *lazo* adicional al propagador fotónico desnudo como se muestra en los siguientes diagramas:

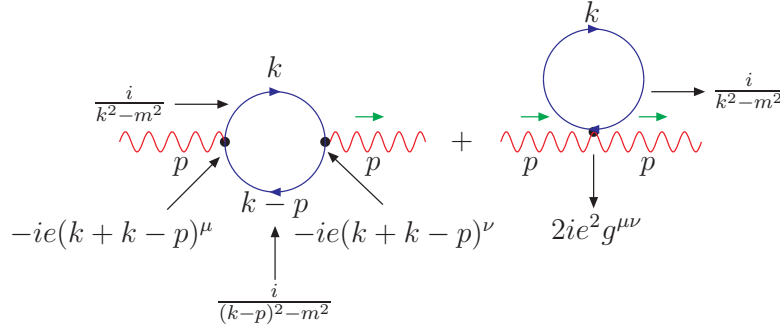


Figura 6.1: Correcciones del propagador fotónico a primer orden.

El propagador fotónico se representa bajo los siguientes diagramas de Feynman:

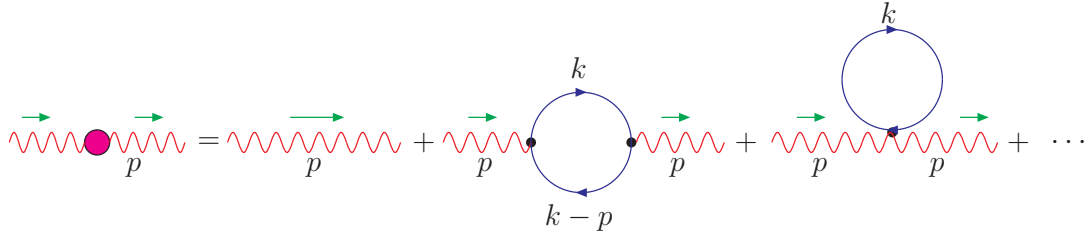


Figura 6.2: Correcciones al propagador fotónico.

donde el círculo en el primer diagrama representa todas las correcciones del propagador fotónico. Aplicando las reglas de Feynman a las correcciones de primer orden obtenemos

$$\begin{aligned}
 i\pi^{\mu\nu} &\equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[(-ie(2k-p)^\mu)(-ie(2k-p)^\nu) \left(\frac{i}{k^2-m^2} \right) \left(\frac{i}{(k-p)^2-m^2} \right) \right] \\
 &+ \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i}{(k^2-m^2)} 2ie^2 g^{\mu\nu} .
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

2.2.1. El Propagador Fotónico a un Lazo

En esta sección vamos a calcular la corrección al propagador fotónico a primer orden, ec. (2.55). Una de estas es esencialmente la misma que como procedimos al cálculo de las correcciones del propagador escalar con unas pequeñas variaciones en los cálculos. Comenzamos simplificando (2.55) tal que

$$i\pi^{\mu\nu} = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^2 \left[\frac{(2k-p)^\mu (2k-p)^\nu}{(k^2-m^2)[(k-p)^2-m^2]} - \frac{2g^{\mu\nu}}{k^2-m^2} \right]. \quad (2.56)$$

Del hecho que $(k-p)^2 = k^2 - 2k \cdot p + p^2$ y $(2k-p)^\mu = 2k^\mu - p^\mu$ obtenemos

$$\begin{aligned} i\pi^{\mu\nu} &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^2 \left[\frac{-2g^{\mu\nu}[(k-p)^2-m^2] + (2k-p)^\mu (2k-p)^\nu}{(k^2-m^2)[(k-p)^2-m^2]} \right] \\ &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^2 \left[\frac{-2g^{\mu\nu}[k^2-2k \cdot p+p^2-m^2] + 4k^\mu k^\nu - 2k^\mu p^\nu - 2k^\nu p^\mu + p^\mu p^\nu}{(k^2-m^2)[(k-p)^2-m^2]} \right]. \end{aligned}$$

Las integrales a calcular son de la forma:

$$\tilde{K}(p) = \int \frac{d^d k}{(k^2-m^2)[(k-p)^2-m^2]}, \quad (2.57)$$

$$\tilde{K}_\nu(p) = \int \frac{d^d k k^\nu}{(k^2-m^2)[(k-p)^2-m^2]}, \quad (2.58)$$

$$\tilde{K}_{\mu\nu}(p) = \int \frac{d^d k k^\mu k^\nu}{(k^2-m^2)[(k-p)^2-m^2]}, \quad (2.59)$$

$$\tilde{K}_1(p) = \int \frac{d^d k k^2}{(k^2-m^2)[(k-p)^2-m^2]}, \quad (2.60)$$

Para calcular la integral $\tilde{K}(p)$ usamos (A.15). Entonces

$$\tilde{K}(p) = \int_0^1 dx \int d^d k \frac{1}{[x[(k-p)^2-m^2] + (1-x)(k^2-m^2)]^2}. \quad (2.61)$$

Definamos

$$\begin{aligned} D &= x[(k-p)^2-m^2] + (1-x)(k^2-m^2) \\ &= x[k^2-2k \cdot p+p^2-m^2] + (1-x)k^2-m^2(1-x) \\ &= k^2-2xk \cdot p+xp^2-m^2. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Sea $w = k - px$ entonces $k = w + px$. Sustituyendo éste cambio de variable en (2.62) y posteriormente en (2.61) obtenemos

$$\tilde{K}(p) = \int_0^1 dx \int d^D w \frac{1}{[w^2+p^2x(1-x)-m^2]^2}. \quad (2.63)$$

Esta integral tiene la forma de (A.8) con $n = 2$ y $s = -p^2x(1-x) + m^2$. Entonces

$$\tilde{K}(p) = i\pi^{D/2}\Gamma(2-D/2) \int_0^1 dx [-p^2x(1-x) + m^2]^{D/2-2}. \quad (2.64)$$

Para calcular las integrales restantes transformamos el denominador a la forma (2.62). Por ejemplo, para calcular $\tilde{K}_\nu(p)$ transformamos el denominador y usamos la integral de Feynman (A.15) de manera que

$$\tilde{K}_\nu(p) = \int_0^1 dx \int d^D k \frac{k^\nu}{[k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - m^2]^2}. \quad (2.65)$$

Consideremos la siguiente integral [3]

$$\int d^D p \frac{p_\mu}{(p^2 + 2p \cdot q - t^2)^n} = -\frac{i\pi^{D/2}\Gamma(n-D/2)q_\mu}{\Gamma(n)(-q^2 - t^2)^{n-D/2}} \quad (2.66)$$

que es la generalización en D dimensiones de (A.5), la cual aplicamos a $\tilde{K}_\nu(p)$ con $n = 2$:

$$\tilde{K}_\nu(p) = i\pi^{D/2}\Gamma(2-D/2)p^\nu \int_0^1 dx \frac{x}{(-x^2p^2 + xp^2 - m^2)^{2-D/2}}. \quad (2.67)$$

Para calcular $\tilde{K}_{\mu\nu}(p)$ usamos la siguiente integral [3]

$$\begin{aligned} \int d^D p \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + 2p \cdot q - t^2)^n} &= \frac{i\pi^{D/2}}{\Gamma(n)(-q^2 - t^2)^{n-D/2}} \left[q_\mu q_\nu \Gamma(n-D/2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (-q^2 - t^2) \Gamma(n-1-D/2) \right] \end{aligned} \quad (2.68)$$

que es la generalización en D dimensiones de (A.6) con $n = 2$. Entonces:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\mu\nu}(p) &= i\pi^{D/2} p^\mu p^\nu \Gamma(2-D/2) \int_0^1 dx x^2 (-p^2 x^2 - m^2 + xp^2)^{D/2-2} \\ &\quad + \frac{i}{2} \pi^{D/2} g^{\mu\nu} \Gamma(1-D/2) \int_0^1 dx (-p^2 x^2 - m^2 + xp^2)^{D/2-1}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Hacemos una contracción con $g^{\mu\nu}$ en la integral (2.68), tal que,

$$\begin{aligned} \int d^D p \frac{p^2}{(p^2 + 2p \cdot q - t^2)^n} &= \frac{i\pi^{D/2}}{\Gamma(n)(-q^2 - t^2)^{n-D/2}} \left[q^2 \Gamma(n-D/2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{D}{2} (-q^2 - t^2) \Gamma(n-1-D/2) \right], \end{aligned} \quad (2.70)$$

la cual aplicamos a $\tilde{K}_1(p)$ con $n = 2$:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_1(p) &= i\pi^{D/2}p^2\Gamma(2-D/2)\int_0^1 dx x^2(-p^2x^2-m^2+xp^2)^{D/2-2} \\ &\quad + \frac{iD}{2}\pi^{D/2}\Gamma(1-D/2)\int_0^1 dx(-p^2x^2-m^2+xp^2)^{D/2-1} .\end{aligned}\quad (2.71)$$

Después de simplificar y realizar algunas operaciones algebraicas obtenemos que *el propagador fotónico* a primer orden en D dimensiones es:

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{e^2 i\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \Gamma(2-D/2) p^2 \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - g^{\mu\nu} \right) \int_0^1 \frac{(4x^2 - 4x + 1)dx}{(-p^2x(1-x) + m^2)^{2-D/2}} . \quad (2.72)$$

Solo falta una integral por calcularse.

Regularización

Calculamos (2.72) en $D = 4 - 2\epsilon$. En sí queremos separar esta integral en una parte finita y una parte infinita como lo hicimos en el capítulo anterior para el propagador escalar. Comenzamos con

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{ie^2\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \Gamma(2-D/2) p^2 \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - g^{\mu\nu} \right) \int_0^1 \frac{(4x^2 - 4x + 1)dx}{(-p^2x(1-x) + m^2)^{2-D/2}} . \quad (2.73)$$

Sustituyendo $D = 4 - 2\epsilon$ tenemos:

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{16(2)^{-2\epsilon}\pi^2\pi^{-\epsilon}} \Gamma(\epsilon) (p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) \int_0^1 \frac{(4x^2 - 4x + 1)dx}{(-p^2x(1-x) + m^2)^\epsilon} . \quad (2.74)$$

Usamos la expansión de la función Gamma (A.21) tal que

$$\begin{aligned}i\pi^{\mu\nu} &= \frac{ie^2}{16\pi^2} [1 + \epsilon \ln 4] [1 + \epsilon \ln \pi] \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right] (p^{\mu\nu} - p^2 g^{\mu\nu}) \times \\ &\quad \int_0^1 (4x^2 - 4x + 1) (1 - \epsilon \ln(m^2 - p^2x(1-x))) dx .\end{aligned}\quad (2.75)$$

Despreciamos términos mayores del orden $\mathcal{O}(\epsilon)$. Obtenemos:

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{3\epsilon} - \frac{\gamma}{3} - [p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}] \int_0^1 (4x^2 - 4x + 1) \ln(m^2 - p^2x(1-x)) dx \right]$$

Entonces

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{3\epsilon} \right) [p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}] + \text{cantidad finita} . \quad (2.76)$$

Hemos logrado separar la integral inicial en una parte finita y una parte infinita.

2.2.2. Método Alternativo

Ahora vamos a calcular nuevamente el propagador fotónico en D dimensiones pero de otra manera. Regresamos a la ecuación (2.55) la cual escribimos de la siguiente manera:

$$i\pi^{\mu\nu} = e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{[4k^\mu k^\nu - 2k^\mu p^\nu - 2k^\nu p^\mu + p^\mu p^\nu]}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} - 2e^2 g^{\mu\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} i\pi^{\mu\nu} = & 4e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} - 2e^2 p^\nu \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \\ & - 2e^2 p^\mu \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\nu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} - 2e^2 g^{\mu\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\ & + e^2 p^\mu p^\nu \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} . \end{aligned} \quad (2.78)$$

Primero evaluamos

$$\tilde{K}^{\mu\nu}(p) = \int d^D k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} . \quad (2.79)$$

Dado que $\tilde{K}^{\mu\nu}(p)$ solo puede depender de $p^\mu p^\nu$ y $g^{\mu\nu}$, y como es simétrico bajo el intercambio $\mu \leftrightarrow \nu$, la podemos escribir de la siguiente manera general.

$$\tilde{K}^{\mu\nu}(p) = \int d^D k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \equiv a \left[\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - \frac{1}{D} g^{\mu\nu} \right] + b g^{\mu\nu} \quad (2.80)$$

donde tenemos que determinar a y b que serán funciones de k y m . Multiplicamos por $g_{\mu\nu}$ en ambos lados de la ecuación, (2.80):

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \tilde{K}^{\mu\nu}(p) &= \int d^D k \frac{k^2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} = \int d^D k \frac{k^2 - m^2 + m^2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \\ &= \int \frac{d^D k}{(k-p)^2 - m^2} + m^2 \int \frac{d^D k}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} . \end{aligned} \quad (2.81)$$

También:

$$g_{\mu\nu} \tilde{K}^{\mu\nu}(p) = b g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = b D . \quad (2.82)$$

Entonces

$$b = \frac{1}{D} \int \frac{d^D k}{(k-p)^2 - m^2} + \frac{m^2}{D} \int \frac{d^D k}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} . \quad (2.83)$$

Ahora multiplicamos la ecuación (2.80) por $p_\mu p_\nu$ en ambos lados de la ecuación:

$$p_\mu p_\nu \tilde{K}^{\mu\nu}(p) = \int d^D k \frac{(k \cdot p)(k \cdot p)}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} p_\mu p_\nu \tilde{K}^{\mu\nu}(p) &= \frac{1}{2} \int d^D k \frac{(k \cdot p)[k^2 + p^2 - (k-p)^2]}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} = \frac{1}{2} \int d^D k \frac{k \cdot p}{[(k-p)^2 - m^2]} \\ &+ \frac{p^2}{2} \int d^D k \frac{k \cdot p}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} - \frac{1}{2} \int d^D k \frac{k \cdot p}{(k^2 - m^2)} . \end{aligned} \quad (2.85)$$

La última integral es cero porque es una integral impar:

$$\int d^d k \frac{k \cdot p}{(k^2 - m^2)} = p^\mu \int d^d k \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)} = 0 . \quad (2.86)$$

Hacemos el cambio de variable $w = k - p$ en la primer integral de (2.85), tal que,

$$\int d^D k \frac{k \cdot p}{[(k-p)^2 - m^2]} = \int d^D w \frac{(p+w) \cdot p}{w^2 - m^2} = p^2 \int d^D w \frac{1}{w^2 - m^2} . \quad (2.87)$$

La segunda integral es equivalente a

$$\int d^D k \frac{k \cdot p}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} = \frac{1}{2} \int d^D k \frac{k^2 + p^2 - (k-p)^2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} .$$

Después de sumar y restar m^2 y simplificar obtenemos:

$$\int d^D k \frac{k \cdot p}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} = \frac{p^2}{2} \int d^D k \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} .$$

Entonces la ecuación (2.85) la podemos escribir como:

$$p_\mu p_\nu \tilde{K}^{\mu\nu}(p) = \frac{p^2}{2} \int d^D k \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{p^4}{4} \int d^D k \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} . \quad (2.88)$$

Por otro lado, también tenemos que

$$p_\mu p_\nu \tilde{K}^{\mu\nu}(p) = a \left[p^2 - \frac{p^2}{D} \right] + b p^2 = a p^2 \left(1 - \frac{1}{D} \right) + b p^2 . \quad (2.89)$$

Por lo tanto,

$$a = \frac{D-2}{2(D-1)} \int d^D k \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{p^2 D - 4m^2}{4(D-1)} \int d^D k \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} . \quad (2.90)$$

La ecuación (2.89) ha sido determinada en términos de a y b que a su vez estas están dadas en términos de integrales las cuales vamos a calcular más adelante. Antes consideremos la integral

$$\int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} . \quad (2.91)$$

Por el hecho de que esta integral depende únicamente de p^μ , la podemos escribir como

$$\int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} \equiv c p^\mu . \quad (2.92)$$

Para encontrar c multiplicamos por p_μ ambos lados de la ecuación (2.92):

$$c p^2 = \int d^D k \frac{k \cdot p}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} . \quad (2.93)$$

Entonces

$$c = \frac{1}{2p^2} \int d^D k \frac{k^2 + p^2 - (k - p)^2}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} = \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} . \quad (2.94)$$

Así

$$\int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} = \frac{1}{2} \int d^D k \frac{p^\mu}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} , \quad (2.95)$$

$$\int d^D k \frac{k^\nu}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} = \frac{1}{2} \int d^D k \frac{p^\nu}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} . \quad (2.96)$$

Así, la corrección al propagador fotónico a nivel de un lazo ecuación (2.78) la podemos escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} i\pi^{\mu\nu} &= \frac{4e^2}{(2\pi)^D} \left\{ \left[\frac{D-2}{2(D-1)} \tilde{K}(p; 1, 0) + \frac{1}{D-1} \left(\frac{p^2 D - 4m^2}{4} \right) \tilde{K}(p; 1, 1) \right] \times \right. \\ &\quad \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - \frac{1}{D} g^{\mu\nu} \right) + \frac{g^{\mu\nu}}{D} \tilde{K}(p; 1, 0) + \frac{m^2 g^{\mu\nu}}{D} \tilde{K}(p; 1, 1) \Big\} \\ &\quad - \frac{e^2}{(2\pi)^D} p^\mu p^\nu \tilde{K}(p; 1, 1) - \frac{2e^2}{(2\pi)^D} g^{\mu\nu} \tilde{K}(p; 1, 0) , \end{aligned} \quad (2.97)$$

donde hemos usado la notación

$$\tilde{K}(p; \nu_1, \nu_2) = \int \frac{d^D k}{(k^2 - m^2)^{\nu_1} [(k - p)^2 - m^2]^{\nu_2}} . \quad (2.98)$$

Después de simplificar y realizar algunas operaciones algebraicas llegamos a que

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{e^2}{(2\pi)^D} \frac{1}{D-1} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - g^{\mu\nu} \right) \left[2(D-2)\tilde{K}(p; 1, 0) + (p^2 - 4m^2)\tilde{K}(p; 1, 1) \right]. \quad (2.99)$$

donde [4],

$$\begin{aligned} \tilde{K}(p; 1, 1) &= i\pi^{D/2}(-p^2)^{D/2-2} \left[\frac{\Gamma(\frac{D}{2}-1)\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(\frac{D}{2})} \lambda^{D-3} \right. \\ &\quad \left. - \Gamma(1-D/2)(1-\lambda) \left(-\frac{m^2}{p^2} \right)^{\frac{D}{2}-2} {}_2F_1 \left(1, 2-\frac{D}{2}; \frac{D}{2}; \frac{(1-\lambda)^2}{4m^2/p^2} \right) \right] \\ \tilde{K}(p; 1, 0) &= -i\pi^{D/2}\Gamma(1-D/2)(m^2)^{\frac{D}{2}-1} \end{aligned} \quad (2.100)$$

con $\lambda = \sqrt{\frac{4m^2-p^2}{-p^2}}$. Para el caso $D = 3$ la ecuación (2.99) se reduce a:

$$\begin{aligned} i\pi^{\mu\nu} &= \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{3-1} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - g^{\mu\nu} \right) \left[2\tilde{K}(p; 1, 0) + (p^2 - 4m^2)\tilde{K}(p; 1, 1) \right] \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^3} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - g^{\mu\nu} \right) \left[\tilde{K}(p; 1, 0) + \frac{p^2 - 4m^2}{2}\tilde{K}(p; 1, 1) \right], \end{aligned} \quad (2.101)$$

donde $\tilde{K}(p; 1, 1) = \tilde{K}(p)$ solo que ahora en 3 dimensiones:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(p; 1, 1) &= \int \frac{d^3k}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \\ &= i\pi^{3/2}\Gamma(2-3/2) \int_0^1 dx [-p^2x(1-x) + m^2] \\ &= \frac{2i\pi^2}{\sqrt{-p^2}} \arctan \left(\sqrt{-\frac{p^2}{4m^2}} \right), \end{aligned} \quad (2.102)$$

y

$$\tilde{K}(p; 1, 0) = \int \frac{d^3k}{(k^2 - m^2)} = (-1)i\pi^{3/2}\Gamma(1-3/2)(m^2)^{\frac{3}{2}-1} = 2i\pi^2 m. \quad (2.103)$$

Por lo tanto,

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{i\alpha}{2} (p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2) \frac{1}{\sqrt{-p^2}} \left[\sqrt{\frac{4m^2}{-p^2}} + \frac{m^2 - p^2/4}{-p^2/4} \sqrt{\frac{-p^2}{4m^2}} \right]. \quad (2.104)$$

Este resultado coincide con el de la ecuación (??).

2.2.3. La Identidad de Ward

La Identidad de Ward para el propagador fotónico nos permite escribir el propagador de la siguiente manera:

$$\Delta_{\mu\nu}(p^2) = \underbrace{\Delta_{\mu\nu}^T \pi(p^2)}_{\pi_{\mu\nu}} - \xi \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \quad (2.105)$$

donde

$$\Delta_{\mu\nu}^T = [g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu] \quad \text{y} \quad \pi(p^2) \sim \alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2 + \dots \quad (2.106)$$

Que nos quiere decir que la parte longitudinal no tiene contribuciones de ningún orden en la teoría de perturbaciones. Como una consecuencia de esta identidad $i\pi^{\mu\nu} \propto (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu)$, es decir, $\pi^{\mu\nu}$ es transversal $p_\mu (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) = p^\nu p^2 - p^2 p^\nu = 0$, a todos los ordenes en teorías de perturbaciones. Esto es lo que hemos logrado a nivel de un lazo [ver ec. (2.99)]. Es importante notar que la interacción de 4-puntos es crucial para obtener la estructura tensorial requerida de $i\pi^{\mu\nu}$. En otras palabras, esta interacción es necesaria para obtener la invariancia de norma. Los cálculos de los propagadores escalar y fotónico son relativamente simples. En el siguiente capítulo, calcularemos el vértice escalar-fotón de tres puntos al nivel de un lazo en norma y dimensiones arbitrarias para partículas externas off-shell.

Capítulo 3

El Vértice de Tres Puntos

3.1. Introducción

La estructura no perturbativa de las funciones de Green en las teorías de norma ha resultado ser un problema desafiante. Además del escenario complicado no abeliano de la Cromodinámica Cuántica (QCD), incluso en ejemplos más simples como la Electrodinámica Cuántica (QED) han probado ser un problema difícil en el régimen no perturbativo. Sin embargo, las relaciones de covariancia, tales como la Identidad de Ward-Fradkin-Green-Takahashi (WFGTI) [5] y las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin (LKFT) [6] contienen vital información acerca de las funciones de Green. Guiándonos por tales relaciones, extensiones de trabajo han sido llevadas para construir funciones de Green no perturbativas [7, 8, 9]. Como bien, la teoría de perturbación es una guía fiable en la cual las estructuras no perturbativas deberían de reducirse en el régimen de acoplamiento débil [10, 11, 12, 13, 14, 15]. En el contexto de la teoría de perturbaciones, un estudio sistemático de QED espinorial fue iniciado por Ball y Chiu [10]. Ellos dividieron el vértice en una parte ‘longitudinal’ y una parte ‘transversa’ que garantiza que la identidad WFGTI se satisfaga. En una base donde las singularidades cinemáticas son obvias, ellos dieron los resultados para el vértice transversal off-shell a un lazo en 4 dimensiones en la norma de Fermi-Feynman. Más tarde, Kızılersü, Reenders y Pennington extendieron estos resultados en norma arbitraria covariante [11]. Los resultados para QED3 no masivo y masivo fueron obtenidos después [13, 14, 15, 16]. Estos resultados fueron entonces generalizados a dimensión arbitraria por Davydychev, Osland y Saks [17] en el dominio de QCD (de donde todos los resultados de QED pueden ser derivados). Mientras que para el vértice desnudo del fermión-bosón en el mínimo acoplamiento de la teoría de norma es meramente γ^μ , en general el vértice puede ser expandido en términos de 12 amplitudes de espín contruidos de γ^μ y dos cuádrimomentos independientes [18]. La identidad de WFGTI fija 4 coeficientes de las 12 amplitudes de espín en términos de las funciones del fermión incorporados en la componente longitudinal. La parte transversal necesita así 8 vectores con 8 coeficientes escalares que dependen del parámetro de norma ξ , la dimensión espacio-tiempo $D = 4 - 2\varepsilon$, fermiones masivos y tres invariantes cinemáticas (k^2, p^2, q^2);

así esto es un problema complicado incluso al nivel de un lazo. Uno podría esperar que, en la ausencia de las matrices espinoriales, la Electrodinámica Cuántica Escalar (SQED) puede ofrecer una simple plataforma para estudiar soluciones no perturbativas [19]. En este escenario, el vértice de 3 puntos puede ser escrito en términos de 2 cuadrimentos independientes. La identidad de WFGTI fija un coeficiente de estos. Por lo tanto, hay solamente una función desconocida que define el vértice transverso representando una simplificación de 8 términos en QED/QCD! La interacción de cuatro puntos es adicional en QED escalar. Así el vértice a un lazo del vértice escalar-fotón involucra 2 diagramas de Feynman adicionales. Ball and Chiu [10] realizaron este cálculo para mesones masivos en norma de Fermi-Feynman ($\xi = 1$) para $D = 4$. En esta tesis, extendemos su trabajo en norma ξ y dimensiones arbitrarias D a un lazo. Hay varias razones porque este cálculo es de ayuda: (i) este mantiene las propiedades de covariación correctas de las funciones de Green; (ii) uno puede tomar límites on-shell para checar la invariancia de norma de los observables físicos, esto podría ser no posible [17] si uno únicamente tiene los resultados cerca de las cuatro dimensiones; (iii) SQED de cualquier manera tiene interés en bajas dimensiones, por ejemplo SQED no perturbativa ha sido examinada en 2+1 y 0+1 dimensiones por [20] y [21] respectivamente; (iv) Las teorías de campos tres dimensional contienen varias características de correspondencia a teorías de campos cuatro dimensional a altas temperaturas [22]. Vamos a comenzar el capítulo con el cálculo de la corrección del vértice de tres puntos a un lazo. Las correcciones al vértice de 3-puntos vienen de la presencia de un fotón *virtual* adicional a los diagramas de Feynman como los que se muestran a continuación:

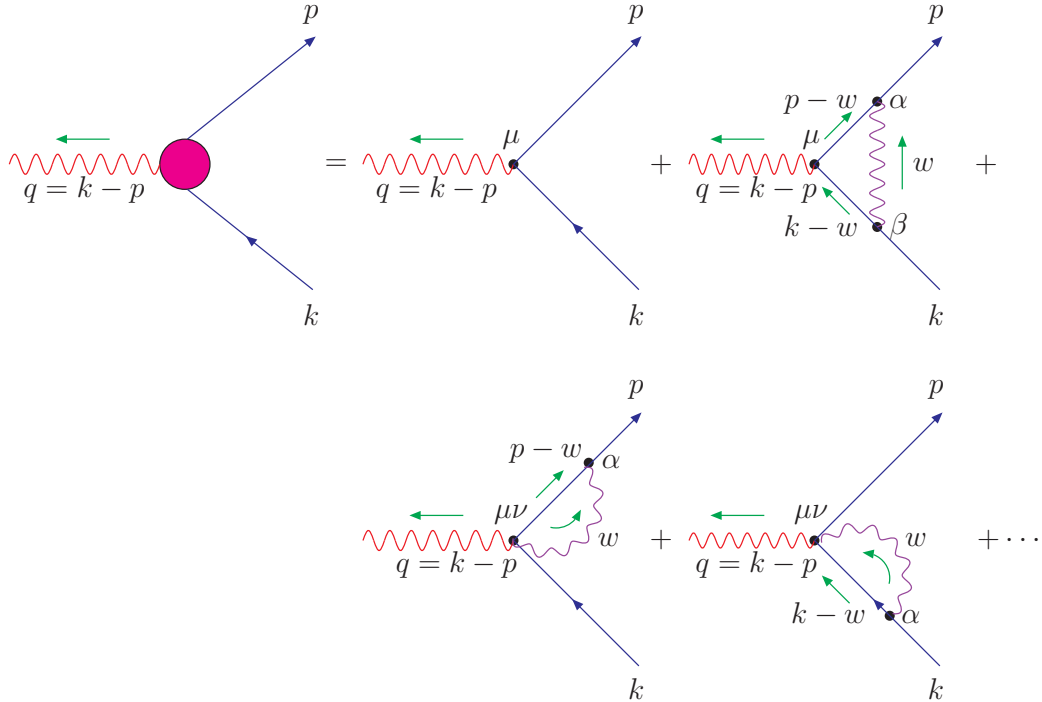


Figura 7.1: Correcciones al vértice de 3-puntos.

Si aplicamos las reglas de Feynman a los diagramas de la figura 7.1 tenemos que la *corrección al vértice de 3-puntos* a primer orden es:

$$\Lambda^\mu = \Lambda_1^\mu + \Lambda_2^\mu + \Lambda_3^\mu , \quad (3.1)$$

donde

$$-ie\Lambda_1^\mu = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [ie\Gamma^\alpha][iS(p-w)][-ie\Gamma^\mu][iS(k-w)][-ie\Gamma^\beta][i\Delta_{\alpha\beta}(w)] , \quad (3.2)$$

$$-ie\Lambda_2^\mu = \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} [-ie\Gamma^\alpha(p-w,p)][iS(p-w)][i\Delta_{\alpha\nu}(w)][2ie^2 g^{\mu\nu}] , \quad (3.3)$$

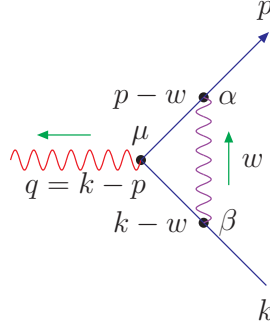
$$-ie\Lambda_3^\mu = \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} [-ie\Gamma^\alpha(k,k-w)][iS(k-w)][i\Delta_{\alpha\nu}(w)][2ie^2 g^{\mu\nu}] . \quad (3.4)$$

3.2. Regularización

En esta sección vamos a calcular el vértice de 3-puntos en la norma de Feynman en $D = 4 - 2\epsilon$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

3.2.1. Primer Diagrama

Primero vamos a resolver la integral correspondiente al diagrama:



$$-ie\Lambda_1^\mu = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [ie\Gamma^\alpha][iS(p-w)][-ie\Gamma^\mu][iS(k-w)][-ie\Gamma^\beta][i\Delta_{\alpha\beta}(w)] , \quad (3.5)$$

Sustituyendo los valores de S , Γ^μ y $\Delta_{\alpha\beta}$, tenemos,

$$\begin{aligned} -i\Lambda_1^\mu &= -e^2 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} (p + p - w)^\alpha \frac{1}{(p-w)^2 - m^2} (k - w + p - w)^\mu \frac{1}{(k-w)^2 - m^2} \times \\ &\quad (k + k - w)^\beta \frac{1}{w^4} [w^2 g_{\alpha\beta} + (1 - \xi) w_\alpha w_\beta] . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Podemos escribir esta expresi3n como:

$$\Lambda_1^\mu = -ie^2 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{(2p-w)^\alpha (k+p-2w)^\mu (2k-w)^\beta}{w^4 [(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} [w^2 g_{\alpha\beta} + (1-\xi)w_\alpha w_\beta] . \quad (3.7)$$

Sea que tomamos $\xi = 1$ (Norma de Feynman):

$$\Lambda_1^\mu = -ie^2 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{(2p-w)^\alpha (k+p-2w)^\mu (2k-w)^\beta}{w^2 [(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} g_{\alpha\beta} . \quad (3.8)$$

El numerador lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned} & (2p-w)^\alpha (k+p-2w)^\mu (2k-w)^\beta g_{\alpha\beta} \\ &= (2p-w) \cdot (2k-w) (k+p-2w)^\mu \\ &= [4k \cdot p - 2(k+p) \cdot w + w^2][(k+p)^\mu - 2w^\mu] \\ &= 4k \cdot p (k+p)^\mu + [-8k \cdot p g^{\mu\nu} - 2(k+p)^\mu (k+p)^\nu] w_\nu + 4(k+p)_\nu w^\mu w^\nu \\ & \quad + (k+p)^\mu w^2 - 2w^2 w^\mu . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\mu &= -\frac{ie^2}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{4k \cdot p (k+p)^\mu + [-2(k+p)^\mu (k+p)^\nu - 8k \cdot p g^{\mu\nu}] w_\nu}{w^2 [(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \\ & \quad - \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{4(k+p)_\nu w^\mu w^\nu + (k+p)^\mu w^2 - 2w^2 w^\mu}{w^2 [(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Usaremos la integral de Feynman (A.16) con $a = w^2$, $b = (k-w)^2 - m^2$ y $c = (p-w)^2 - m^2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w^2 [(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} = \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{\{w^2(1-x-y) + [(k-w)^2 - m^2]x + [(p-w)^2 - m^2]y\}^3} . \end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned} D &= w^2(1-x-y) + [(k-w)^2 - m^2]x + [(p-w)^2 - m^2]y \\ &= w^2 - m^2(x+y) - 2w \cdot (kx + py) + k^2x + p^2y . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sea que $w' = w - kx - py$ entonces $w = w' + py + kx$. As3, la ecuaci3n (5.59) nos queda como:

$$\begin{aligned} D &= [w' + py + kx]^2 - m^2(x+y) - 2(w' + py + kx) \cdot (kx + py) + k^2x + p^2y \\ &= w'^2 - m^2(x+y) - (py + kx)^2 + k^2x + p^2y \\ &= w'^2 - m^2(x+y) + p^2y(1-y) + k^2x(1-x) - 2xyp \cdot k . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(k-m)^2 - m^2]} = \\ & = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[w'^2 - m^2(x+y) + p^2y(1-y) + k^2x(1-x) - 2xyp \cdot k]^3} . \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresi3n en la ecuaci3n (3.10) obtenemos:

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\mu &= -\frac{2ie^2}{(2\pi)^D} \times \\ & \left\{ \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^D w' \frac{4k \cdot p(k+p)^\mu + [-2(k+p)^\mu(k+p)^\nu - 8k \cdot pg^{\mu\nu}]w_\nu}{[w'^2 - m^2(x+y) + p^2y(1-y) + k^2x(1-x) - 2xyp \cdot k]^3} \right. \\ & \left. + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^D w \frac{4(k+p)_\nu w^\mu w^\nu + (k+p)^\mu w^2 - 2w^2 w^\mu}{[w'^2 - m^2(x+y) + p^2y(1-y) + k^2x(1-x) - 2xyp \cdot k]^3} \right\} . \end{aligned}$$

Las diferentes integrales a calcular son de la forma:

$$J_0 = \int d^D w' \frac{1}{[w'^2 - m^2(x+y) + p^2y(1-y) + k^2x(1-x) - 2xyp \cdot k]^3} , \quad (3.13)$$

$$J_1^{\nu\mu} = \int d^D w' \frac{w'^\nu w'^\mu}{[w'^2 - m^2(x+y) + p^2y(1-y) + k^2x(1-x) - 2xyp \cdot k]^3} , \quad (3.14)$$

$$J_2 = \int d^D w' \frac{w'^2}{[w'^2 - m^2(x+y) + p^2y(1-y) + k^2x(1-x) - 2xyp \cdot k]^3} . \quad (3.15)$$

Usaremos las f3rmulas (A.8) y (2.68) con $n = 3$ para la primera y la segunda integral respectivamente. Para la tercera integral observemos que

$$\begin{aligned} \int d^D w \frac{w^2}{(w^2 - s)^n} &= \int d^D w \frac{w^2 - s + s}{(w^2 - s)^n} = \int d^D w \frac{1}{(w^2 - s)^{n-1}} \\ &+ s \int d^D w \frac{1}{(w^2 - s)^n} . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para nuestro caso, $n = 3$ y $s = m^2(x+y) - p^2y(1-y) - k^2x(1-x) + 2xyp \cdot k$. Entonces

$$\begin{aligned} J_0 &= -i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)} \left[m^2(x+y) - p^2y(1-y) - k^2x(1-x) + 2xyp \cdot k \right]^{\frac{D}{2}-3} , \\ J_1^{\nu\mu} &= \frac{i\pi^{D/2}}{4} g^{\nu\mu} \Gamma(2-D/2) \frac{1}{[m^2(x+y) - p^2y(1-y) - k^2x(1-x) + 2xyp \cdot k]^{2-\frac{D}{2}}} , \\ J_2 &= i\pi^{D/2} \left[m^2(x+y) - p^2y(1-y) - k^2x(1-x) + 2xyp \cdot k \right]^{\frac{D}{2}-n+1} \times \\ & \left[(-1)^{n-1} \frac{\Gamma(n-1-\frac{D}{2})}{\Gamma(n-1)} + (-1)^n \frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)} \right] . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Después de simplificar y realizar algunas operaciones algebraicas obtenemos que la corrección al vértice Λ_1^μ en la norma de Feynman es:

$$\Lambda_1^\mu = \text{cantidad finita} + \frac{2e^2}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [k^\mu(2-3x) + p^\mu(2-3y)] \times \left\{ \frac{\pi^{D/2} \Gamma(2-D/2)}{[m^2(x+y) - p^2 y(1-y) - k^2 x(1-x) + 2xyp \cdot k]^{2-\frac{D}{2}}} \right\}. \quad (3.18)$$

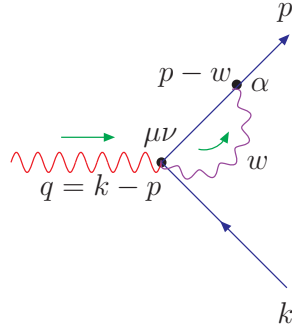
Aclaremos que cuando hablamos de las partes finitas e infinitas, tenemos en mente de que al final tomaremos el límite de $D \rightarrow 4$.

3.2.2. Segundo Diagrama

Ahora vamos a calcular la integral Λ_2^μ :

$$\begin{aligned} -ie\Lambda_2^\mu &= \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} [-ie\Gamma^\alpha(p-w, p)][iS(p-w)][i\Delta_{\alpha\nu}(w)][2ie^2 g^{\mu\nu}] \\ &= \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2p-w)_\alpha}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} \left[g^{\alpha\mu} - (1-\xi) \frac{w^\alpha w^\mu}{w^2} \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

correspondiente al diagrama:



Tomamos $\xi = 1$:

$$-ie\Lambda_2^\mu = \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2p-w)^\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2]}. \quad (3.20)$$

Sea que $w \rightarrow p-w$ entonces

$$\begin{aligned} -ie\Lambda_2^\mu &= \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2p-p+w)^\mu}{(p-w)^2[(p-p+w)^2 - m^2]} \\ &= \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(p+w)^\mu}{(w-p)^2[w^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aplicando parametrización de Feynman obtenemos:

$$-ie\Lambda_2^\mu = \int_0^1 dx \int d^D w \frac{(2p - p + w)^\mu}{[x(w - p)^2 + (1 - x)(w^2 - m^2)]^2} . \quad (3.22)$$

Hacemos el cambio de variable $w' = w - px$ entonces $w = w' + px$. Así,

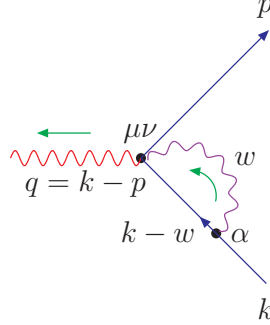
$$\begin{aligned} -ie\Lambda_2^\mu &= \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \int d^D w' \frac{(1 - x)p^\mu + w'^\mu}{[w'^2 + p^2 x(1 - x) - m^2(1 - x)]^2} \\ &= \frac{2e^3}{(2\pi)^D} p^\mu \int_0^1 dx(1 + x) \int d^D w \frac{1}{[w^2 + p^2 x(1 - x) - m^2(1 - x)]^2} \\ &= \frac{2ie^3 \pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2)}{(2\pi)^D} p^\mu \int_0^1 dx(1 + x) [-p^2 x(1 - x) + m^2(1 - x)]^{\frac{D}{2}-2} . \end{aligned}$$

Por lo tanto la corrección al vértice Λ_2^μ en la norma de Feynman es:

$$\Lambda_2^\mu = -\frac{2e^2 \pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2)}{(2\pi)^D} p^\mu \int_0^1 dx(1 + x) [-p^2 x(1 - x) + m^2(1 - x)]^{\frac{D}{2}-2} . \quad (3.23)$$

3.2.3. Tercer Diagrama

Por último vamos a calcular la corrección correspondiente al diagrama:



$$\begin{aligned} -ie\Lambda_3^\mu &= \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} [-ie\Gamma^\alpha(k, k - w)][iS(k - w)][i\Delta_{\alpha\nu}(w)][2ie^2 g^{\mu\nu}] \\ &= \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2k - w)_\alpha}{w^2[(k - w)^2 - m^2]} \left[g^{\alpha\mu} - (1 - \xi) \frac{w^\alpha w^\mu}{w^2} \right] . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Tomamos $\xi = 1$:

$$-ie\Lambda_3^\mu = \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2k - w)^\mu}{w^2[(k - w)^2 - m^2]} . \quad (3.25)$$

Debido a la simetría de esta integral con Λ_2^μ tenemos que la corrección al vértice para Λ_3^μ en la norma de Feynman es:

$$\Lambda_3^\mu = -\frac{2e^2\pi^{D/2}\Gamma(2-D/2)}{(2\pi)^D}k^\mu \int_0^1 dx(1+x)[-p^2x(1-x)+m^2(1-x)]^{\frac{D}{2}-2}. \quad (3.26)$$

Por lo tanto, la *corrección al vértice* a primer orden es:

$$\Lambda^\mu = \Lambda_1^\mu + \Lambda_2^\mu + \Lambda_3^\mu, \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu = & \text{cantidad finita} + \frac{2e^2}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [k^\mu(2-3x) + p^\mu(2-3y)] \times \\ & \left\{ \frac{\pi^{D/2}\Gamma(2-D/2)}{[m^2(x+y) - p^2y(1-y) - k^2x(1-x) + 2xyp \cdot k]^{2-\frac{D}{2}}} \right\} \\ & - \frac{2e^2\pi^{D/2}\Gamma(2-D/2)}{(2\pi)^D} (p^\mu + k^\mu) \int_0^1 dx(1+x)[-p^2x(1-x) \\ & + m^2(1-x)]^{\frac{D}{2}-2}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ahora vamos a poner $D = 4 - 2\epsilon$ en Λ_1^μ , Λ_2^μ y Λ_3^μ . Para Λ_1^μ tenemos:

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\mu = & \text{cantidad finita} + \frac{2e^2}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [k^\mu(2-3x) + p^\mu(2-3y)] \times \\ & \left\{ \frac{\pi^{(4-2\epsilon)/2}\Gamma(2-(4-2\epsilon)/2)\mu^{4-D}}{[m^2(x+y) - p^2y(1-y) - k^2x(1-x) + 2xyp \cdot k]^{2-\frac{4-2\epsilon}{2}}} \right\} \\ = & \text{cantidad finita} + \frac{2e^2}{16(2)^{-2\epsilon}\pi^2\pi^{-\epsilon}}\Gamma(\epsilon) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [k^\mu(2-3x) + p^\mu(2-3y)] \times \\ & \left[\frac{m^2(x+y) - p^2y(1-y) - k^2x(1-x) + 2xyp \cdot k}{\mu^2} \right]^{-\epsilon} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\mu = & \text{cantidad finita} + \frac{e^2}{8\pi^2}[1 - \epsilon \ln 4 + \dots][1 + \epsilon \ln \pi + \dots] \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \dots \right] \times \\ & \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [k^\mu(2-3x) + p^\mu(2-3y)] \times \\ & \left\{ 1 - \epsilon \ln \left[\frac{m^2(x+y) - p^2y(1-y) - k^2x(1-x) + 2xyp \cdot k}{\mu^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Las integrales involucradas son simples de evaluar:

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy(2-3x) = \int_0^1 dx(2-3x)(1-x) = \frac{1}{2}, \quad (3.31)$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (2-2y) = \int_0^1 dx \left[2(1-x) - \frac{3}{2}(1-x)^2 \right] = \frac{1}{2} . \quad (3.32)$$

Sustituyendo estos resultados en (3.30) y simplificando, además de despreciar términos mayores del orden $\mathcal{O}(\epsilon)$ obtenemos:

$$\Lambda_1^\mu = \text{cantidad finita} - \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon} (k+p)^\mu . \quad (3.33)$$

De manera similar tenemos que:

$$\begin{aligned} \Lambda_2^\mu &= -\frac{e^2}{8\pi^2} \frac{p^\mu}{\epsilon} \int_0^1 dx (1-x) \left\{ 1 - \epsilon \ln \left[\frac{-p^2 x(1-x) + m^2(1-x)}{\mu^2} \right] \right\} \\ &= \text{cantidad finita} - \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{p^\mu}{\epsilon} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \text{cantidad finita} - \frac{3e^2 p^\mu}{16\pi^2\epsilon} \end{aligned} \quad (3.34)$$

y

$$\Lambda_3^\mu = \text{cantidad finita} - \frac{3e^2 k^\mu}{16\pi^2\epsilon} . \quad (3.35)$$

Por lo tanto, la corrección al vértice a primer orden en $D = 4 - 2\epsilon$ es:

$$\Lambda^\mu = \text{cantidad finita} + \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon} (k+p)^\mu - \frac{3e^2}{16\pi^2\epsilon} (k+p)^\mu \quad (3.36)$$

$$\Lambda^\mu = -\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} (k+p)^\mu + \text{cantidad finita} . \quad (3.37)$$

En esta sección, hemos logrado la regularización del vértice de tres puntos, es decir, hemos separado la parte finita de la parte infinita. En la próxima sección, confirmaremos que esta división respeta la covarianza de norma.

3.3. Identidad de Ward-Green-Takahashi

A continuación vamos a verificar la identidad de Ward-Green-Takahashi que relaciona el propagador escalar con el vértice de 3-puntos. La cual nos dice que $S^{-1}(k) - S^{-1}(p)$ es igual a $q_\mu \Gamma^\mu$, es decir,

$$q_\mu \Gamma^\mu = S^{-1}(k) - S^{-1}(p) .$$

Como la regularización dimensional preserva la simetría de norma, esperamos que las partes finitas e infinitas satisfagan la identidad de Ward-Green-Takahashi individualmente. Como hemos evaluado explícitamente solo la parte divergente, la verificamos para esta parte.

$$\begin{aligned} S^{-1}(k) &= -\frac{e^2}{16\pi^2} \frac{m^2 + 2k^2}{\epsilon} + \text{cantidad finita} , \\ S^{-1}(p) &= -\frac{e^2}{16\pi^2} \frac{m^2 + 2p^2}{\epsilon} + \text{cantidad finita} . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Entonces

$$\begin{aligned} S^{-1}(k) - S^{-1}(p) &= -\frac{e^2}{16\pi^2} \frac{m^2 + 2k^2 - m^2 - 2p^2}{\epsilon} + \text{cantidad finita} \\ &= -\frac{e^2}{8\pi^2} \frac{k^2 - p^2}{\epsilon} + \text{cantidad finita} . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Y

$$\begin{aligned} q_\mu \Gamma^\mu &= -\frac{e^2}{8\pi^2} \frac{(k_\mu - p_\mu)(k^\mu + p^\mu)}{\epsilon} + \text{cantidad finita} \\ &= -\frac{e^2}{8\pi^2} \frac{k^2 - p^2}{\epsilon} + \text{cantidad finita} . \end{aligned} \quad (3.40)$$

Por lo tanto se satisface la identidad de Ward para la parte divergente. Vamos a agregar los siguientes comentarios:

- La identidad de Ward-Green-Takahashi que relaciona el propagador del escalar con el vértice de tres puntos es satisfecha para la parte divergente en la norma de Feynman.
- Aunque no lo hemos mostrado, pero así debe de ser para el caso de la norma arbitraria y para la parte convergente también.

3.4. El Vértice Completo de 3-Puntos a un Lazo

Hemos calculado la corrección del vértice en la norma de Feynman. Además evaluamos únicamente la parte divergente. Ahora vamos a evaluar Λ_1^μ completo en una norma arbitraria.

3.4.1. El Vértice Λ_1^μ a un Lazo

Regresamos a la expresión de la ecuación (3.7):

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\mu &= -ie^2 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{(2p-w)^\alpha (k+p-2w)^\mu (2k-w)^\beta}{w^4 [(p-w)^2 - m^2] [(k-w)^2 - m^2]} \times \\ &\quad [w^2 g_{\alpha\beta} + (1-\xi) w_\alpha w_\beta] . \end{aligned} \quad (3.41)$$

El primer término en el numerador toma la forma de (5.57) y el segundo término lo transformamos como:

$$\begin{aligned}
& (2p - w)^\alpha (k + p - 2w)^\mu (2k - w)^\beta w_\alpha w_\beta \\
&= (2p^\alpha - w^\alpha) [(k + p)^\mu - 2w^\mu] [2k^\beta w_\alpha w_\beta - w^2 w_\alpha] \\
&= 4(k + p)^\mu p^\alpha k^\beta w_\alpha w_\beta - 2(k + p)^\mu (k + p)^\alpha w^2 w_\alpha - 8p^\alpha k^\beta w^\mu w_\alpha w_\beta \\
&\quad + 4(k + p)^\alpha w^2 w^\mu w_\alpha + (k + p)^\mu w^4 - 2w^4 w^\mu
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Las diferentes integrales independientes a calcular son de la forma:

$$\tilde{K}(k - p) = \int d^D w \frac{1}{[(k - w)^2 - m^2][(p - w)^2 - m^2]} \tag{3.43}$$

$$\tilde{K}_\mu(k - p) = \int d^D w \frac{w_\mu}{[(k - w)^2 - m^2][(p - w)^2 - m^2]} \tag{3.44}$$

$$I(k, p) = \int d^D w \frac{1}{w^2 [(k - w)^2 - m^2][(p - w)^2 - m^2]} \tag{3.45}$$

$$I_\nu(k, p) = \int d^D w \frac{w_\nu}{w^2 [(k - w)^2 - m^2][(p - w)^2 - m^2]} \tag{3.46}$$

$$I_{\mu\nu}(k, p) = \int d^D w \frac{w_\mu w_\nu}{w^2 [(k - w)^2 - m^2][(p - w)^2 - m^2]} \tag{3.47}$$

$$J_{\alpha\beta}(k, p) = \int d^D w \frac{w_\alpha w_\beta}{w^4 [(k - w)^2 - m^2][(p - w)^2 - m^2]} \tag{3.48}$$

$$J_{\mu\alpha\beta}(k, p) = \int d^D w \frac{w_\mu w_\alpha w_\beta}{w^4 [(k - w)^2 - m^2][(p - w)^2 - m^2]} . \tag{3.49}$$

La Integral Escalar $\tilde{K}(k - p)$

Tenemos,

$$\tilde{K}(k - p) = \int \frac{d^D w}{[(p - w)^2 - m^2][(k - w)^2 - m^2]} . \tag{3.50}$$

Empleamos parametrización de Feynman:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[az + b(1 - z)]^2} . \tag{3.51}$$

Tomamos

$$a = [(p - w)^2 - m^2] , \quad b = [(k - w)^2 - m^2] . \tag{3.52}$$

Ahora definimos

$$\begin{aligned}
Den &= z[(p - w)^2 - m^2] + (1 + z)[(k - w)^2 - m^2] \\
&= z[p^2 - 2p \cdot w + w^2 - m^2] + (1 - z)[k^2 - 2k \cdot w + w^2 - m^2] \\
&= z(p^2 - 2p \cdot w) + (1 - z)(k^2 - 2k \cdot w) + w^2 - m^2 .
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Ahora hacemos el siguiente cambio de variable

$$w \rightarrow w' = w - k(1 - z) .$$

Entonces, obtenemos

$$\begin{aligned} Den &= zp^2 - 2p \cdot (w' + k(1 - z))z + (1 - z)(k^2 - 2k \cdot (w' + k(1 - z))) \\ &\quad + (w' + k(1 - z))^2 - m^2 \\ &= zp^2 - 2zp \cdot w' - 2z(1 - z)p \cdot k + k^2z(1 - z) + w'^2 - m^2 . \end{aligned}$$

Un segundo cambio de variable

$$w' \rightarrow w = w' - zp ,$$

implica

$$Den = z(1 - z)(p - k)^2 + w^2 - m^2 = z(1 - z)q^2 + w^2 - m^2 .$$

Por lo tanto,

$$\tilde{K}(k - p) = \int_0^1 dz \int d^D w \frac{1}{[w^2 + q^2(1 - z)z - m^2]^2} .$$

Usando (A.8) llegamos a

$$\tilde{K}(k - p) = i\pi^{D/2}\Gamma(2 - D/2) \int_0^1 dz [m^2 - q^2z(1 - z)]^{\frac{D}{2}-2} . \quad (3.54)$$

En el caso masivo y dimensión arbitraria D , $\tilde{K}(k - p)$ es (ver las ec. (2.4) y (C3) de [17]):

$$\begin{aligned} \tilde{K}(k - p) &= \int d^D w \frac{1}{[(p - w)^2 - m^2][(k - w)^2 - m^2]} \\ &= i\pi^{D/2}\Gamma(2 - D/2)(m^2)^{D/2-2} {}_2F_1\left(1, 2 - \frac{D}{2}; \frac{3}{2}; \frac{q^2}{4m^2}\right) \\ &\equiv \frac{i\pi^2}{2} \tilde{K}_0 , \end{aligned} \quad (3.55)$$

donde $q = k - p$. En el caso no masivo, $\tilde{K}(k - p)$ se reduce a

$$\begin{aligned} \tilde{K}(k - p) &= \int d^D w \frac{1}{(k - w)^2(p - w)^2} = \int_0^1 dz \int d^D w \frac{1}{[w^2 + q^2z(1 - z)]^2} \\ &= i\pi^{D/2}\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)(-q^2)^{D/2-2} \int_0^1 dz [z(1 - z)]^{D/2-2} . \end{aligned} \quad (3.56)$$

Ahora usamos la siguiente integral [2]:

$$\int_0^1 x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}dx = \int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx = B(\mu, \nu) . \quad (3.57)$$

Entonces

$$\int_0^1 dz[z(1-z)]^{D/2-2} = B\left(\frac{D}{2}-1, \frac{D}{2}-1\right) = \frac{\Gamma(\frac{D}{2}-1)^2}{\Gamma(D-2)} . \quad (3.58)$$

Por lo tanto, en el caso **no masivo y dimensión arbitraria** D tenemos:

$$\tilde{K}(k-p) = \int d^D w \frac{1}{(k-w)^2(p-w)^2} = i\pi^{D/2}(-q^2)^{D/2-2} \frac{\Gamma^2(\frac{D}{2}-1)\Gamma(2-\frac{D}{2})}{\Gamma(D-2)} . \quad (3.59)$$

Resultado que esta de acuerdo con [17] (ver las ec. (2.5, C1)). A continuación consideremos los siguientes casos particulares:

CASO $D = 3$:

La ecuación (3.55) se reduce a:

$$\tilde{K}(k-p) = \frac{2i\pi^2}{\sqrt{-q^2}} \arctan \sqrt{-\frac{q^2}{4m^2}} . \quad (3.60)$$

En el caso **no masivo en** $D = 3$ obtenemos:

$$\tilde{K}(k-p) = \frac{i\pi^3}{\sqrt{-q^2}} . \quad (3.61)$$

Los resultados de (3.60) y (3.61) coinciden con la ec. (A3) de [15].

CASO $D = 4 - 2\epsilon$:

Ahora la ecuación (3.54) se transforma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(k-p) &= i\pi^{2-\epsilon}\Gamma(\epsilon) \int_0^1 dz [m^2 - q^2 z(1-z)]^{-\epsilon} \\
&= i\pi^{2-\epsilon}\Gamma(\epsilon) \left[1 - \epsilon \ln(-q^2) - \epsilon \int_0^1 dz \ln \left[-\frac{m^2}{q^2} + z(1-z) \right] \right] \\
&= i\pi^{2-\epsilon}\Gamma(\epsilon) \left[1 - \epsilon \ln m^2 + 2\epsilon - 2\epsilon \sqrt{-1 + \frac{4m^2}{q^2}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{-1 + \frac{4m^2}{q^2}}} \right) \right]
\end{aligned}$$

Usando la identidad

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right) \quad (3.62)$$

obtenemos que

$$\tilde{K}(k-p) = i\pi^{2-\epsilon}\Gamma(\epsilon) \left[1 + 2\epsilon - \epsilon \ln m^2 + \frac{\epsilon}{q} \sqrt{q^2 - 4m^2} \ln \left(\frac{\sqrt{q^2 - 4m^2} - q}{\sqrt{q^2 - 4m^2} + q} \right) \right]. \quad (3.63)$$

Sustituyendo la ecuación (A.21), la integral escalar $\tilde{K}(k-p)$ **en el caso masivo y dimensión** $D = 4 - 2\epsilon$ es:

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(k-p) &= i\pi^2 \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \pi + 2 - \ln m^2 - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} - 1} \right) \right] \\
&= i\pi^2 [C - S], \quad (3.64)
\end{aligned}$$

donde

$$C = \frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \pi + 2 - \ln m^2, \quad S = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} - 1} \right). \quad (3.65)$$

La ecuación (3.64) coincide con [11] (ver las ec. (44,46-48)). Por último consideramos el caso *no masivo*. De la ecuación (3.59) tenemos:

$$\tilde{K}(k-p) = i\pi^{2-\epsilon}(-q^2)^{-\epsilon} \frac{\Gamma^2(1-\epsilon)\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)}. \quad (3.66)$$

Así, **en el caso no masivo en** $D = 4 - 2\epsilon$, $\tilde{K}(k-p)$ es:

$$\tilde{K}(k-p) = i\pi^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + 2 - \gamma - \ln \pi - \ln(-q^2) \right] . \quad (3.67)$$

Este resultado coincide con [11] tomando el límite $m \rightarrow 0$ de las ec. (44,46-48) y con [10] sustituyendo $\ln \Lambda^2 \rightarrow 1/\epsilon + 1 - \gamma - \ln \pi$ en la ec. (A3).

La Integral Tensorial $\tilde{K}_\mu(k-p)$

Ahora, vamos a calcular

$$\tilde{K}_\mu(k-p) = \int d^D w \frac{w_\mu}{[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} . \quad (3.68)$$

Después de la parametrización de Feynman podemos escribir:

$$\tilde{K}_\mu(k-p) = \int_0^1 dz \int d^D w \frac{w_\mu}{\{z[(p-w)^2 - m^2] + (1-z)[(k-w)^2 - m^2]\}^2} . \quad (3.69)$$

Definimos,

$$Den = z[(p-w)^2 - m^2] + (1-z)[(k-w)^2 - m^2] . \quad (3.70)$$

Después del cambio de variable

$$w' = w - zp - (1-z)k , \quad (3.71)$$

tenemos que después de realizar algunas operaciones algebraicas y simplificar el Den es:

$$Den = z(1-z)q^2 + w'^2 - m^2 . \quad (3.72)$$

Por lo tanto,

$$\tilde{K}_\mu(k-p) = \int_0^1 dz \int d^D w \frac{[w'_\mu + zp_\mu + k_\mu(1-z)]}{[w'^2 + q^2z(1-z) - m^2]^2} . \quad (3.73)$$

La integral

$$\int d^D w' \frac{w'_\mu}{[w'^2 + q^2z(1-z) - m^2]^2} = 0 . \quad (3.74)$$

Por otro lado,

$$\int d^D w' \frac{1}{[w'^2 + q^2z(1-z) - m^2]^2} = (-1)^2 i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} [m^2 - q^2z(1-z)]^{D/2-2} . \quad (3.75)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{K}_\mu(k-p) &= i\pi^{D/2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left[p_\mu \int_0^1 dz [m^2 - q^2z(1-z)]^{D/2-2} + \right. \\ &\quad \left. k_\mu \int_0^1 dz [m^2 - q^2z(1-z)]^{D/2-2} - k_\mu \int_0^1 dz [m^2 - q^2z(1-z)]^{D/2-2} \right] \end{aligned}$$

La segunda integral la hemos ya calculado [ver (3.54)]. Para resolver la integral restante procedemos de la siguiente manera. Sea

$$I = \int_0^1 dz z [m^2 - q^2 z(1-z)]^{D/2-2} . \quad (3.76)$$

Si $y = 1 - z$, $dy = -dz$ entonces cuando $z = 0 \rightarrow y = 1$ y cuando $z = 1 \rightarrow y = 0$; es decir,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy (1-y) [m^2 - q^2 (1-y)y]^{D/2-2} \\ &= \int_0^1 dy [m^2 - q^2 y(1-y)]^{D/2-2} - \int_0^1 dy y [m^2 - q^2 y(1-y)]^{D/2-2} . \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$2I = \int_0^1 dz [m^2 - q^2 z(1-z)]^{D/2-2} . \quad (3.78)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{K}_\mu(k-p) &= i\pi^{D/2}\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left[\frac{p_\mu}{2}I + k_\mu I - \frac{k_\mu}{2}I \right] \\ &= \frac{1}{2}(p_\mu + k_\mu)\tilde{K}(k-p) . \end{aligned} \quad (3.79)$$

La Integral Tensorial I_μ

Tenemos

$$I_\mu = \int d^D w \frac{w_\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} . \quad (3.80)$$

Como un vector de Lorentz I_μ puede únicamente tener componentes en la dirección de los momentos k_μ y p_μ . Así, podemos escribir:

$$I_\mu = \frac{i\pi^2}{2} [k_\mu I_A(k, p) + p_\mu I_B(k, p)] \quad (3.81)$$

donde $I_A(k, p)$, $I_B(k, p)$ necesitan ser funciones escalares de k y p . El factor de $i\pi^2/2$ lo tomamos por conveniencia. Formamos los siguientes productos escalares

$$\begin{aligned} k^\mu I_\mu &= \frac{i\pi^2}{2} [k^2 I_A(k, p) + k \cdot p I_B(k, p)] \\ p^\mu I_\mu &= \frac{i\pi^2}{2} [k \cdot p I_A(k, p) + p^2 I_B(k, p)] \end{aligned} \quad (3.82)$$

resolviendo para $I_A(k, p)$ y $I_B(k, p)$ obtenemos

$$\begin{aligned} (k \cdot p) k^\mu I_\mu &= \frac{i\pi^2}{2} [(k \cdot p) k^2 I_A(k, p) + (k \cdot p)^2 I_B(k, p)] \\ k^2 p^\mu I_\mu &= \frac{i\pi^2}{2} [k^2 (k \cdot p) I_A(k, p) + k^2 p^2 I_B(k, p)] . \end{aligned} \quad (3.83)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_B(k, p) &= \frac{2}{i\pi^2 \Delta^2} [(k \cdot p) k^\mu I_\mu - k^2 p^\mu I_\mu] \\ I_A(k, p) &= I_B(p, k) \end{aligned} \quad (3.84)$$

donde

$$\begin{aligned} k^\mu I_\mu &= \frac{(k^2 - m^2)}{2} \int d^D w \frac{1}{w^2 [(k - w)^2 - m^2] [(p - w)^2 - m^2]} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^D w \frac{1}{[(k - w)^2 - m^2] [(p - w)^2 - m^2]} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^D w \frac{1}{w^2 [(p - w)^2 - m^2]} \\ &= \frac{1}{2} (k^2 - m^2) I + \frac{1}{2} \tilde{K}(k - p) - \frac{1}{2} K(p) . \end{aligned} \quad (3.85)$$

La integral $K(p)$ será definida como una integral maestra cuando calculemos J . Hemos usado la relación

$$p \cdot w = \frac{1}{2} (p^2 + w^2 - (p - w)^2 - m^2 + m^2) . \quad (3.86)$$

De manera similar, tenemos que

$$p^\mu I_\mu = \frac{1}{2} (p^2 - m^2) I + \frac{1}{2} \tilde{K}(k - p) - \frac{1}{2} K(k) . \quad (3.87)$$

Procedemos a calcular $K(p)$. El cálculo de esta integral es suficiente puesto que $K(k)$ es solo un cambio de $p \leftrightarrow k$. Resolvemos esta integral usando parametrización de Feynman

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[xa + (1 - x)b]^2} \quad (3.88)$$

donde

$$a = (p - w)^2 - m^2 , \quad b = w^2 . \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} K(p) &= \int d^D w \int_0^1 dx \frac{1}{\{x[(p - w)^2 - m^2] + (1 - x)w^2\}^2} \\ &= \int_0^1 dx \int d^D w \frac{1}{\{x[(p - w)^2 - m^2] + (1 - x)w^2\}^2} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Sea

$$\begin{aligned} Den &= x[(p - w)^2 - m^2] + (1 - x)w^2 \\ &= xp^2 - 2xp \cdot w - xm^2 + w^2 \end{aligned} \quad (3.91)$$

Si $k = w - px$ entonces $w = k + px$. Tal que

$$\begin{aligned} Den &= xp^2 - 2xp \cdot (k + px) - xm^2 + (k + px)^2 \\ &= k^2 + p^2x(1 - x) - xm^2. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Entonces

$$K(p) = \int_0^1 dx \int d^D k \frac{1}{[k^2 + p^2x(1 - x) - xm^2]^2}. \quad (3.93)$$

Usando (A.8) donde $n = 2$ y $s = -p^2x(1 - x) + xm^2$ tenemos:

$$\begin{aligned} K(p) &= i\pi^{D/2}\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 dx x^{D/2-2} [p^2x + m^2 - p^2]^{D/2-2} \\ &= i\pi^{D/2}\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - p^2)^{D/2-2} \int_0^1 dx x^{D/2-2} \left[1 - \frac{p^2}{p^2 - m^2}x\right]^{D/2-2}. \end{aligned}$$

Usando la siguiente integral [2]

$$\int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x)^{\mu-1} (1-\beta x)^{-\nu} dx = B(\lambda, \mu) {}_2F_1(\nu, \lambda; \lambda + \mu; \beta) \quad [\lambda > 0, \mu > 0, |\beta| < 1] \quad (3.94)$$

donde $\mu = 1$, $\nu = 2 - D/2$, $\lambda = D/2 - 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} K(p) &= i\pi^{D/2}\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - p^2)^{D/2-2} B\left(\frac{D}{2} - 1, 1\right) \times \\ &\quad {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) \\ &= -i\pi^{D/2}\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - p^2)^{D/2-2} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Similarmente

$$K(k) = -i\pi^{D/2}\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - k^2)^{D/2-2} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{k^2}{k^2 - m^2}\right). \quad (3.96)$$

Por lo tanto, $I_A(k, p)$ en el caso masivo y dimensión arbitrarria D es:

$$\begin{aligned}
I_A(k, p) &= -\frac{1}{\Delta^2} \left\{ \left[p^2 - (k \cdot p) \right] \frac{\tilde{K}_0}{2} + \left[p^2(k^2 - m^2) - (k \cdot p)(p^2 - m^2) \right] \frac{I_0}{2} \right. \\
&\quad \left. + p^2 Q_1(p) - (k \cdot p) Q_1(k) \right\} \\
I_B(k, p) &= I_A(p, k) ,
\end{aligned} \tag{3.97}$$

donde

$$Q_1(k) = \pi^{D/2-2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - k^2)^{\frac{D}{2}-2} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{k^2}{k^2 - m^2}\right) , \tag{3.98}$$

y

$$I_0 = \frac{2}{i\pi^2} I , \quad \tilde{K}_0 = \frac{2}{i\pi^2} \tilde{K} , \quad \Delta^2 = (k \cdot p)^2 - k^2 p^2 . \tag{3.99}$$

Las ecuaciones (3.55), (3.97) y (3.81) nos dan el resultado final de I_μ . Para **el caso no masivo en dimensión arbitraria** D tenemos:

$$\begin{aligned}
I_A(k, p) &= -\frac{1}{\Delta^2} \left\{ \left[p^2 - (k \cdot p) \right] \frac{\tilde{K}_0}{2} + \left[p^2 k^2 - (k \cdot p) p^2 \right] \frac{I_0}{2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{p^2}{i\pi^2} \int d^D w \frac{1}{w^2(p-w)^2} + \frac{(k \cdot p)}{i\pi^2} \int d^D w \frac{1}{w^2(k-w)^2} \right\}
\end{aligned} \tag{3.100}$$

donde

$$\int d^D w \frac{1}{w^2(k-w)^2} = \pi^{D/2} (-k^2)^{D/2-2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{D}{2} - 1\right) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma(D-2)} . \tag{3.101}$$

CASO $D = 3$:

Las ecuaciones (3.97) y (3.95) se reducen a:

$$\begin{aligned}
I_A &= -\frac{2}{\Delta^2} \left\{ \left[p^2(k^2 - k \cdot p) - m^2(p^2 - k \cdot p) \right] \frac{I_0}{4} + \frac{(p^2 - k \cdot p)}{\sqrt{-q^2}} \arctan \sqrt{-\frac{q^2}{4m^2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{p^2}{\sqrt{p^2}} \arcsen \sqrt{1 - \frac{p^2}{m^2}} + \frac{(k \cdot p)}{\sqrt{k^2}} \arcsen \sqrt{1 - \frac{k^2}{m^2}} \right\} .
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Ahora haciendo uso de la identidad

$$\arctan x = \arcsen \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} , \tag{3.103}$$

obtenemos

$$\arcsen \sqrt{1 - \frac{p^2}{m^2}} = \arcsen \frac{p/m}{\sqrt{p^2/m^2 - 1}} = \frac{1}{i} \arctan \sqrt{-\frac{p^2}{m^2}}. \quad (3.104)$$

Por lo tanto, **En el caso masivo y dimensión $D = 3$, $I_A(k, p)$ es:**

$$\begin{aligned} I_A(k, p) = & -\frac{2}{\Delta^2} \left\{ [p^2(k^2 - k \cdot p) - m^2(p^2 - k \cdot p)] \frac{I_0}{4} + \frac{(p^2 - k \cdot p)}{\sqrt{-q^2}} \arctan \sqrt{-\frac{q^2}{4m^2}} \right. \\ & \left. - \frac{p^2}{\sqrt{-p^2}} \arctan \sqrt{-\frac{p^2}{m^2}} + \frac{(k \cdot p)}{\sqrt{-k^2}} \arctan \sqrt{-\frac{k^2}{m^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Para el **caso no masivo en $D = 3$** tenemos:

$$I_A(k, p) = -\frac{1}{\Delta^2} \left\{ [p^2(k^2 - k \cdot p)] \frac{I_0}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{-q^2}} (p^2 - k \cdot p) - \frac{\pi p^2}{\sqrt{-p^2}} + \frac{\pi(k \cdot p)}{\sqrt{-k^2}} \right\}. \quad (3.106)$$

Los resultados de (3.105) estan de acuerdo con la ec. (A5) de [15] y los resultados de (3.106) estan de acuerdo con la ec. (28) de [13].

CASO $D = 4 - 2\epsilon$:

Para el caso $D = 4 - 2\epsilon$ tenemos que $I_A(k, p)$ es:

$$\begin{aligned} I_A = & -\frac{1}{i\pi^2 \Delta^2} \left\{ [p^2 - k \cdot p] \tilde{K} + [p^2(k^2 - m^2) - (k \cdot p)(p^2 - m^2)] I \right. \\ & \left. - p^2 \int \frac{d^4 w}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} + (k \cdot p) \int \frac{d^4 w}{w^2[(k-w)^2 - m^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Vamos a calcular una de estas integrales. Después de usar parametrización de Feynman obtenemos en dimensión arbitraria que:

$$\int \frac{d^D w}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} = i\pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2) \int_0^1 dx x^{D/2-2} [p^2 x + m^2 - p^2]^{D/2-2}. \quad (3.108)$$

Sustituyendo $D = 4 - 2\epsilon$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 w}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} &= i\pi^{2-\epsilon} \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dx x^{-\epsilon} [p^2 x + m^2 - p^2]^{-\epsilon} \\ &= \pi^{2-\epsilon} \Gamma(\epsilon) \left[1 - \epsilon \int_0^1 dx \ln[x(p^2 x + m^2 - p^2)] \right]. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Usando mathematica tenemos que:

$$\int_0^1 dx \ln[x(p^2 x + m^2 - p^2)] = -2 + \frac{m^2}{p^2} \ln(m^2) + \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \ln(m^2 - p^2) . \quad (3.110)$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{d^4 w}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} = i\pi^2[C - L] , \quad (3.111)$$

donde

$$L = \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \ln\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) . \quad (3.112)$$

Por lo tanto, **en el caso masivo y en la dimensión** $D = 4 - 2\epsilon$ tenemos que $I_A(k, p)$ es:

$$I_A(k, p) = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ \frac{I_0}{2} (-m^2 p \cdot q - p^2 k \cdot q) + k \cdot p L' - p^2 L - p \cdot q S \right\} \quad (3.113)$$

donde $L' = L(p \leftrightarrow k)$. Este resultado coincide con [11] (ver ec. (39-44)) y [10] (ver ec. (A16,A17,3.9a,3.9b,3.9c)). En el caso no masivo:

$$I_A = -\frac{1}{i\pi^2 \Delta^2} \left\{ [p^2 - k \cdot p] \tilde{K} + [p^2 k^2 - (k \cdot p) p^2] I - p^2 \int \frac{d^4 w}{w^2(p-w)^2} + (k \cdot p) \int \frac{d^4 w}{w^2(k-w)^2} \right\} . \quad (3.114)$$

Tal que,

$$\int \frac{d^4 w}{w^2(p-w)^2} = i\pi^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + 2 - \gamma - \ln \pi - \ln(-p^2) \right] , \quad (3.115)$$

$$\int \frac{d^4 w}{w^2(k-w)^2} = i\pi^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + 2 - \gamma - \ln \pi - \ln(-k^2) \right] . \quad (3.116)$$

Sustituyendo (3.115) y (3.116) en (3.114) obtenemos que $I_A(k, p)$ **en** $D = 4 - 2\epsilon$ **y caso no masivo es:**

$$I_A(k, p) = -\frac{1}{\Delta^2} \left\{ \frac{1}{2} [p^2 k^2 - (k \cdot p) p^2] I_0 - [p^2 - (k \cdot p)] \ln(-q^2) + p^2 \ln(-p^2) - (k \cdot p) \ln(-k^2) \right\} , \quad (3.117)$$

$$I_B(k, p) = I_A(p, k) . \quad (3.118)$$

Este resultado coincide con [10], (ver las ec. (A4-A6)).

La Integral Tensorial $I_{\mu\nu}$

La integral tensorial $I_{\mu\nu}$ puede ser expresada en términos de las integrales escalares $\tilde{K}_0, I_C, I_D$ y I_E como

$$I_{\mu\nu} = \frac{i\pi^2}{2} \left[\frac{g_{\mu\nu}}{D} \tilde{K}_0 + \left(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} \frac{k^2}{D} \right) I_C + \left(p_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} \frac{2(k \cdot p)}{D} \right) I_D + \left(p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} \frac{p^2}{D} \right) I_E \right]. \quad (3.119)$$

Contrayendo con p^ν , tenemos

$$p^\nu I_{\mu\nu} = \frac{i\pi^2}{2} \left[\frac{p_\mu}{D} \tilde{K}_0 + \left((k \cdot p) k_\mu - p_\mu \frac{k^2}{D} \right) I_C + \left(p^2 k_\mu + (k \cdot p) p_\mu \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) I_D + p^2 p_\mu \left(1 - \frac{1}{D} \right) I_E \right]. \quad (3.120)$$

Hacemos una contracción más con respecto a p^μ

$$p^\mu p^\nu I_{\mu\nu} = \frac{i\pi^2}{2} \left[\frac{p^2}{D} \tilde{K}_0 + \left((k \cdot p)^2 - \frac{k^2 p^2}{D} \right) I_C + 2p^2 (k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D} \right) I_D + p^4 \left(1 - \frac{1}{D} \right) I_E \right]. \quad (3.121)$$

Otras posibles contracciones son:

$$k^\mu k^\nu I_{\mu\nu} = \frac{i\pi^2}{2} \left[\frac{k^2}{D} \tilde{K}_0 + k^4 \left(1 - \frac{1}{D} \right) I_C + 2k^2 (k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D} \right) I_D + \left((k \cdot p)^2 - \frac{k^2 p^2}{D} \right) I_E \right], \quad (3.122)$$

$$k^\nu p^\mu I_{\mu\nu} + p^\nu k^\mu I_{\mu\nu} = i\pi^2 \left[\frac{(k \cdot p)}{D} \tilde{K}_0 + k^2 (k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D} \right) I_C + \left(k^2 p^2 + (k \cdot p)^2 \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) I_D + p^2 (k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D} \right) I_E \right]. \quad (3.123)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
p^\mu I_{\mu\nu} &= \int d^D w \frac{p \cdot w w_\nu}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \\
&= \frac{1}{2}(p^2 - m^2) \int d^D w \frac{w_\nu}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^D w \frac{w_\nu}{[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int d^D w \frac{w_\nu}{w^2[(k-w)^2 - m^2]} \\
&= \frac{1}{2}(p^2 - m^2)I_\nu + \frac{1}{2}\tilde{K}_\nu - \frac{1}{2}K_\nu(k) ,
\end{aligned} \tag{3.124}$$

donde

$$K_\nu(k) = \int d^D w \frac{w_\nu}{w^2[(k-w)^2 - m^2]} . \tag{3.125}$$

En una manera similar, $k^\mu I_{\mu\nu}$ nos conduce a

$$k^\mu I_{\mu\nu}(k, p) = p^\mu I_{\mu\nu}(p, k) \tag{3.126}$$

$$k^\mu I_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(k^2 - m^2)I_\nu + \frac{1}{2}\tilde{K}_\nu - \frac{1}{2}K_\nu(p) . \tag{3.127}$$

Antes de proceder a calcular $I_{\mu\nu}$ calculamos primero la nueva integral $K_\nu(p)$. Usando parametrización de Feynman,

$$K_\nu(p) = \int_0^1 dx \int d^D w \frac{w_\nu}{[x[(p-w)^2 - m^2] + (1-x)w^2]^2} . \tag{3.128}$$

Sea

$$\begin{aligned}
Den &= x[(p-w)^2 - m^2] + (1-x)w^2 \\
&= w^2 + xp^2 - 2xp \cdot w - xm^2 .
\end{aligned} \tag{3.129}$$

Ahora tomamos

$$w = w' + xp , \tag{3.130}$$

tal que

$$Den = w'^2 + p^2 x(1-x) - m^2 x , \tag{3.131}$$

y consecuentemente,

$$\begin{aligned}
K_\nu(p) &= \int_0^1 dx \int d^D w \frac{w'_\nu + p_\nu x}{[w'^2 + p^2 x(1-x) - m^2 x]^2} \\
&= i\pi^{D/2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - p^2)^{D/2-2} p_\nu \int_0^1 dx x^{D/2-1} \left[1 - \frac{p^2}{p^2 - m^2} x\right]^{D/2-2} \\
&= \frac{(2-D)}{D} i\pi^{D/2} p_\nu \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - p^2)^{D/2-2} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2} + 1; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) .
\end{aligned} \tag{3.132}$$

Regresamos a calcular $I_{\mu\nu}$. Una segunda contracción nos conduce a:

$$\begin{aligned}
p^\nu p^\mu I_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4}(p^2 - m^2)[(k \cdot p)I_A + p^2 I_B] + \frac{1}{4}(p^2 + (k \cdot p))\tilde{K} - \frac{p^\nu}{2}K_\nu(k) \\
k^\nu p^\mu I_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4}(p^2 - m^2)[k^2 I_A + (k \cdot p)I_B] + \frac{1}{4}(k^2 + (k \cdot p))\tilde{K} - \frac{k^\nu}{2}K_\nu(k) \\
k^\nu k^\mu I_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4}(k^2 - m^2)[k^2 I_A + (k \cdot p)I_B] + \frac{1}{4}(k^2 + (k \cdot p))\tilde{K} - \frac{k^\nu}{2}K_\nu(p) \\
p^\nu k^\mu I_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4}(k^2 - m^2)[(k \cdot p)I_A + p^2 I_B] + \frac{1}{4}(p^2 + (k \cdot p))\tilde{K} - \frac{p^\nu}{2}K_\nu(p) .
\end{aligned} \tag{3.133}$$

Vamos a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
k^4 \left(1 - \frac{1}{D}\right) I_C + 2k^2(k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D}\right) I_D + \left[(k \cdot p)^2 - \frac{k^2 p^2}{D}\right] I_E &= a \\
\left[(k \cdot p)^2 - \frac{k^2 p^2}{D}\right] I_C + 2p^2(k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D}\right) I_D + p^4 \left(1 - \frac{1}{D}\right) I_E &= b \\
k^2(k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D}\right) I_C + \left[k^2 p^2 + (k \cdot p)^2 \left(1 - \frac{2}{D}\right)\right] I_D + p^2(k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D}\right) I_E &= c ,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
a &= \frac{2}{i\pi^2} k^\mu k^\nu I_{\mu\nu} - \frac{k^2}{D} \tilde{K}_0 \\
b &= \frac{2}{i\pi^2} p^\mu p^\nu I_{\mu\nu} - \frac{p^2}{D} \tilde{K}_0 \\
c &= \frac{1}{i\pi^2} [k^\nu p^\mu I_{\mu\nu} + p^\nu k^\mu I_{\mu\nu}] - \frac{(k \cdot p)}{D} \tilde{K}_0 .
\end{aligned} \tag{3.134}$$

Para resolver este sistema de I_C , I_D y I_E , usamos el metodo matricial:

$$I_C = \frac{Y}{X} , \tag{3.135}$$

donde

$$X \equiv \begin{vmatrix} k^4 \left(1 - \frac{1}{D}\right) & 2k^2(k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D}\right) & (k \cdot p)^2 - \frac{k^2 p^2}{D} \\ (k \cdot p)^2 - \frac{k^2 p^2}{D} & 2p^2(k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D}\right) & p^4 \left(1 - \frac{1}{D}\right) \\ k^2(k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D}\right) & k^2 p^2 + (k \cdot p)^2 \left(1 - \frac{2}{D}\right) & p^2(k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D}\right) \end{vmatrix} , \tag{3.136}$$

$$Y \equiv \begin{vmatrix} \frac{2}{i\pi^2} k^\mu k^\nu I_{\mu\nu} - \frac{k^2}{D} \tilde{K}_0 & 2k^2(k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D}\right) & (k \cdot p)^2 - \frac{k^2 p^2}{D} \\ \frac{2}{i\pi^2} p^\mu p^\nu I_{\mu\nu} - \frac{p^2}{D} \tilde{K}_0 & 2p^2(k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D}\right) & p^4 \left(1 - \frac{1}{D}\right) \\ \frac{k^\nu p^\mu I_{\mu\nu} + p^\nu k^\mu I_{\mu\nu}}{i\pi^2} - \frac{(k \cdot p)}{D} \tilde{K}_0 & k^2 p^2 + (k \cdot p)^2 \left(1 - \frac{2}{D}\right) & p^2(k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D}\right) \end{vmatrix}. \quad (3.137)$$

Substituyendo las ecuaciones (5.144, 5.145) en la ecuación (3.135) obtenemos que I_C **en el caso masivo y dimensión arbitraria D es:**

$$I_C(k, p) = \frac{D}{(D-2)\Delta^2} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{D} \right) (p^2 - m^2)(k \cdot p) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2D} \right) (k^2 - m^2)p^2 \right] I_A - \frac{1}{2D} (p^2 - m^2)p^2 I_B + \left[\left(\frac{2}{D} - \frac{1}{2} \right) p^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{D} \right) (k \cdot p) \right] \frac{\tilde{K}_0}{2} - \left(1 - \frac{2}{D} \right) (k \cdot p) Q_2(k) \right\}, \quad (3.138)$$

donde

$$Q_2(k) = -\pi^{D/2-2} \left(1 - \frac{2}{D} \right) \Gamma \left(1 - \frac{D}{2} \right) (m^2 - k^2)^{D/2-2} {}_2F_1 \left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2} + 1; \frac{k^2}{k^2 - m^2} \right). \quad (3.139)$$

Similarmente I_D es

$$I_D \equiv \frac{Z}{X}, \quad (3.140)$$

donde

$$Z \equiv \begin{vmatrix} k^4 \left(1 - \frac{1}{D} \right) & \frac{2}{i\pi^2} k^\mu k^\nu I_{\mu\nu} - \frac{k^2}{D} \tilde{K}_0 & (k \cdot p)^2 - \frac{k^2 p^2}{D} \\ (k \cdot p)^2 - \frac{k^2 p^2}{D} & \frac{2}{i\pi^2} p^\mu p^\nu I_{\mu\nu} - \frac{p^2}{D} \tilde{K}_0 & p^4 \left(1 - \frac{1}{D} \right) \\ k^2(k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D} \right) & \frac{k^\nu p^\mu I_{\mu\nu} + p^\nu k^\mu I_{\mu\nu}}{i\pi^2} - \frac{(k \cdot p)}{D} \tilde{K}_0 & p^2(k \cdot p) \left(1 - \frac{1}{D} \right) \end{vmatrix}. \quad (3.141)$$

Reemplazando Z y X en la ecuación (3.140) con las ecuaciones (5.144, 5.149) obtenemos que I_D **en el caso masivo y dimensión arbitraria D es**

$$\begin{aligned}
I_D = & \frac{D}{2(D-2)\Delta^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[(k \cdot p)(k^2 - m^2) + \left(\frac{2}{D} - 1 \right) k^2(p^2 - m^2) \right] I_A \right. \\
& + \frac{1}{2} \left[(p^2 - m^2)(k \cdot p) + \left(\frac{2}{D} - 1 \right) p^2(k^2 - m^2) \right] I_B \\
& - \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{2}{D} \right) (p - k)^2 + \frac{4}{D} (k \cdot p) \right] \tilde{K}_0 \\
& \left. + \left(1 - \frac{2}{D} \right) \left[k^2 Q_2(k) + p^2 Q_2(p) \right] \right\} .
\end{aligned} \tag{3.142}$$

$I_C(k, p)$ y $I_E(k, p)$ son funciones simétricas en k y p , así que I_E puede ser escrita como

$$I_E(k, p) = I_C(p, k) , \tag{3.143}$$

que completa el cálculo de $I_{\mu\nu}$. En el **caso no masivo en D dimensiones** I_C y I_D son:

$$\begin{aligned}
I_C(k, p) = & \frac{D}{(D-2)\Delta^2} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{D} \right) p^2(k \cdot p) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2D} \right) k^2 p^2 \right] I_A \right. \\
& - \frac{1}{2D} p^4 I_B + \left[\left(\frac{2}{D} - \frac{1}{2} \right) p^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{D} \right) (k \cdot p) \right] \frac{\tilde{K}_0}{2} \\
& \left. - \left(1 - \frac{2}{D} \right) \frac{p_\nu}{i\pi^2} \int d^D w \frac{w^\nu}{w^2(k-w)^2} \right\} ,
\end{aligned} \tag{3.144}$$

$$\begin{aligned}
I_D(k, p) = & \frac{D}{2(D-2)\Delta^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[(k \cdot p)k^2 + \left(\frac{2}{D} - 1 \right) k^2 p^2 \right] I_A \right. \\
& + \frac{1}{2} \left[p^2(k \cdot p) + \left(\frac{2}{D} - 1 \right) p^2 k^2 \right] I_B \\
& - \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{2}{D} \right) (p - k)^2 + \frac{4}{D} (k \cdot p) \right] \tilde{K}_0 \\
& + \left(1 - \frac{2}{D} \right) \frac{1}{i\pi^2} \left[k_\nu \int d^D w \frac{w^\nu}{w^2(k-w)^2} \right. \\
& \left. \left. + p_\nu \int d^D w \frac{w^\nu}{w^2(p-w)^2} \right] \right\} .
\end{aligned} \tag{3.145}$$

donde

$$\begin{aligned} \int d^D w \frac{w^\nu}{w^2(p-w)^2} &= i\pi^{D/2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) (-k^2)^{D/2-2} k_\nu \int_0^1 dx x^{D/2-1} (1-x)^{D/2-2} \\ &= i\pi^{D/2} (-k^2)^{D/2-2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{D}{2} - 1\right) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma(D-2)}. \end{aligned} \quad (3.146)$$

Consideremos los siguientes casos particulares:

CASO $D = 3$:

Sustituyendo $D = 3$ en las ecuaciones (5.146) y (3.142) obtenemos que **en el caso masivo y dimensión $D = 3$, I_C y I_D son**

$$\begin{aligned} I_C &= \frac{1}{\Delta^2} \left\{ [p^2(k \cdot p - 2k^2) - m^2(k \cdot p - 2p^2)] \frac{I_A}{2} - p^2(p^2 - m^2) \frac{I_B}{2} \right. \\ &\quad + \frac{k \cdot p}{k^2 \sqrt{-k^2}} (m^2 - k^2) \arctan \sqrt{-\frac{k^2}{m^2}} + \frac{(k \cdot p + p^2)}{\sqrt{-q^2}} \arctan \sqrt{\frac{-q^2}{4m^2}} \\ &\quad \left. - m \frac{k \cdot p}{k^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.147)$$

$$\begin{aligned} I_D &= \frac{1}{2\Delta^2} \left\{ [k^2(3k \cdot p - p^2) - m^2(3k \cdot p - k^2)] \frac{I_A}{2} \right. \\ &\quad + [p^2(3k \cdot p - p^2) - m^2(3k \cdot p - p^2)] \frac{I_B}{2} \\ &\quad - \frac{(m^2 - k^2)}{\sqrt{-k^2}} \arctan \sqrt{-\frac{k^2}{m^2}} - \frac{(m^2 - p^2)}{\sqrt{-p^2}} \arctan \sqrt{-\frac{p^2}{m^2}} \\ &\quad \left. - \frac{(k+p)^2}{\sqrt{-q^2}} \arctan \sqrt{\frac{-q^2}{4m^2}} + 2m \right\} \end{aligned} \quad (3.148)$$

Los resultados de las ecuaciones (3.147), (3.148) estan de acuerdo con [15] (ver la ec.(A7)). En el **caso no masivo y $D = 3$, I_C y I_D son**

$$I_C = \frac{1}{2\Delta^2} \left\{ [p^2(k \cdot p - 2k^2)]I_A - p^4 I_B - \frac{\pi(k \cdot p)}{\sqrt{-k^2}} + \frac{\pi(k \cdot p + p^2)}{\sqrt{-q^2}} \right\} \quad (3.149)$$

$$I_D = \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ [k^2(3k \cdot p - p^2)]I_A + [p^2(3k \cdot p - p^2)]I_B + \frac{\pi k^2}{\sqrt{-k^2}} + \frac{\pi p^2}{\sqrt{-p^2}} - \frac{\pi(k + p)^2}{\sqrt{-q^2}} \right\} \quad (3.150)$$

Los resultados de las ecuaciones (3.149) y (3.150) estan de acuerdo con las ecuaciones (31) y (32) de [13].

CASO $D = 4 - 2\epsilon$:

Sustituimos $D = 4 - 2\epsilon$ en la ecuación (5.146) tal que,

$$I_C(k, p) = \frac{4 - 2\epsilon}{(4 - 2\epsilon - 2)\Delta^2} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) (p^2 - m^2)(k \cdot p) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) (k^2 - m^2)p^2 \right] I_A - \frac{1}{8} (p^2 - m^2)p^2 I_B + \left[\left(\frac{2}{4 - 2\epsilon} - \frac{1}{2} \right) p^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4 - 2\epsilon} \right) (k \cdot p) \right] \frac{\tilde{K}_0}{2} - \left(1 - \frac{2}{4 - 2\epsilon} \right) p_\nu \int d^4 w \frac{w^\nu}{w^2[(k - w)^2 - m^2]} \right\}. \quad (3.151)$$

Después de simplificar tenemos que

$$I_C = \frac{2 + \epsilon}{\Delta^2} \left\{ \left[\frac{1}{4} (p^2 - m^2)(k \cdot p) - \frac{3}{8} (k^2 - m^2)p^2 \right] I_A - \frac{1}{8} (p^2 - m^2)p^2 I_B + \left[\frac{\epsilon}{4} p^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{8} \right) (k \cdot p) \right] \frac{\tilde{K}_0}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{4} \right) p_\nu \int d^4 w \frac{w^\nu}{w^2[(k - w)^2 - m^2]} \right\}. \quad (3.152)$$

Para resolver la integral

$$\int d^4 w \frac{w^\nu}{w^2[(k - w)^2 - m^2]}, \quad (3.153)$$

comenzamos de la integral (3.132) en el caso D dimensional

$$\begin{aligned} K_\nu(k) &= \int_0^1 dx \int d^D w \frac{w'_\nu + k_\nu x}{[w'^2 + k^2 x(1 - x) - m^2 x]^2} \\ &= i\pi^{D/2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - k^2)^{D/2-2} k_\nu \int_0^1 dx x^{D/2-1} \left[1 - \frac{k^2}{k^2 - m^2} x\right]^{D/2-2} \end{aligned} \quad (3.154)$$

Ahora tomamos el límite $D = 4 - 2\epsilon$ tal que

$$\begin{aligned} K_\nu^4(k) &= i\pi^{2-\epsilon}\Gamma(\epsilon)(m^2 - k^2)^{-\epsilon}k_\nu \int_0^1 dx x^{1-\epsilon} \left[1 - \frac{k^2}{k^2 - m^2}\right]^{-\epsilon} \\ &= i\pi^{2-\epsilon}\Gamma(\epsilon)k_\nu \left[\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2} \ln(m^2 - k^2) - \epsilon \int_0^1 dx x \ln \left(x + \frac{x^2 k^2}{m^2 - k^2} \right) \right] . \end{aligned} \quad (3.155)$$

Usando mathematica tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx x \ln \left(x + \frac{x^2 k^2}{m^2 - k^2} \right) &= \frac{1}{2} \left[\frac{m^2}{k^2} - 2 - \left(\frac{m^2}{k^2} - 1 \right)^2 \ln(m^2) + \ln \left(\frac{m^2}{m^2 - k^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{m^2}{k^2} - 1 \right)^2 \ln(m^2 - k^2) \right] . \end{aligned} \quad (3.156)$$

Entonces

$$\begin{aligned} K_\nu^4(k) &= i\pi^2 k_\nu \left[\frac{1}{2\epsilon} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\ln \pi}{2} - \frac{m^2}{2p^2} + 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{p^2} - 1 \right)^2 \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \ln(m^2) \right] = \left[\frac{C}{2} - \frac{m^2}{2p^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) L \right] , \end{aligned} \quad (3.157)$$

donde

$$L = \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) , \quad L' = L(p \leftrightarrow k) . \quad (3.158)$$

Sustituyendo (3.64), (3.157) en (3.152) tenemos:

$$\begin{aligned} I_C &= \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ [2(p^2 - m^2)(k \cdot p) - 3(k^2 - m^2)p^2] I_A - p^2(p^2 - m^2) I_B + 2p^2 - 2(k \cdot p) S \right. \\ &\quad \left. + 2(k \cdot p) \left(1 - \frac{m^2}{k^2} \right) L' + 2(k \cdot p) \frac{m^2}{k^2} \right\} . \end{aligned} \quad (3.159)$$

Por lo tanto, I_C **en el caso masivo y dimensión** $D = 4 - 2\epsilon$ es:

$$\begin{aligned} I_C &= \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ 2p^2 + 2\frac{m^2}{k^2}(k \cdot p) - 2(k \cdot p)S + 2(k \cdot p) \left(1 - \frac{m^2}{k^2} \right) L' + [2(k \cdot p)(p^2 - m^2) \right. \\ &\quad \left. + 3(m^2 - k^2)p^2] I_A + p^2(m^2 - p^2) I_B \right\} . \end{aligned} \quad (3.160)$$

De manera similar tenemos que I_D **en el caso masivo y dimensión** $D = 4 - 2\epsilon$

es:

$$I_D = \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ 2(k \cdot p) [(k^2 - m^2)I_A + (p^2 - m^2)I_B - 1] - k^2 \left[\frac{m^2}{k^2} - S + \left(1 - \frac{m^2}{k^2} \right) L' \right. \right. \\ \left. \left. + (p^2 - m^2)I_A \right] - p^2 \left[\frac{m^2}{p^2} - S + \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) L + (k^2 - m^2)I_B \right] \right\}. \quad (3.161)$$

Los resultados de las ecuaciones (3.160) y (3.161) estan de acuerdo con [11]. Al tomar el límite $D = 4 - 2\epsilon$ en las ecuaciones (5.146) y (3.142) debemos de ser muy cuidadosos pues las funciones I_C y I_D tienen un factor común en términos de D que multiplica nuestras expresiones. De tal manera, que podemos perder algunos términos que nos dan contribuciones al momento de tomar el límite. A continuación consideremos el caso no masivo. Tomamos $m = 0$ en la ecuación (3.152) tal que

$$I_C = \frac{2 + \epsilon}{\Delta^2} \left\{ \left[\frac{p^2}{4}(k \cdot p) - \frac{3}{8}(k^2 - m^2)p^2 \right] I_A - \frac{p^4}{8} I_B \right. \\ \left. + \left[\frac{\epsilon}{4}p^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{8} \right)(k \cdot p) \right] \frac{\tilde{K}_0}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{4} \right) p_\nu \int d^4 w \frac{w^\nu}{w^2(k - w)^2} \right\}. \quad (3.162)$$

Para resolver la última integral consideramos el caso D dimesional; es decir,

$$\int d^D w \frac{w^\nu}{w^2(k - w)^2} = i\pi^{D/2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) (-k^2)^{D/2-2} k_\nu \int_0^1 dx x^{D/2-1} (1-x)^{D/2-2} \quad (3.163)$$

Ahora tomando el límite de $D = 4 - 2\epsilon$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int d^4 w \frac{w^\nu}{w^2(k - w)^2} &= i\pi^{2-\epsilon} \Gamma(\epsilon) (-k^2)^{-\epsilon} k_\nu \int_0^1 dx (x - x^2)^{-\epsilon} x \\ &= i\pi^2 k_\nu \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln(-k^2) - \ln \pi \right] \left[\frac{1}{2} + \epsilon \right] \\ &= i\pi^2 k_\nu \left[\frac{1}{2\epsilon} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\ln(-k^2)}{2} - \frac{\ln \pi}{2} + 1 \right]. \end{aligned} \quad (3.164)$$

Sustituyendo (3.164) en (3.162) tenemos finalmente que I_C **en el caso no masivo en** $D = 4 - 2\epsilon$ es:

$$I_C = \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ [2(k \cdot p)p^2 - 3k^2 p^2] I_A - p^4 I_B + 2p^2 + 2(k \cdot p) \ln \left(\frac{k^2}{q^2} \right) \right\}. \quad (3.165)$$

Similarmente, I_D en el caso no masivo en $D = 4 - 2\epsilon$ es:

$$I_D = \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ [2k^2(k \cdot p) - k^2 p^2] I_A + [2p^2(k \cdot p) - k^2 p^2] I_B + k^2 \ln \left(\frac{q^2}{k^2} \right) + p^2 \ln \left(\frac{q^2}{p^2} \right) - 2k \cdot p \right\}. \quad (3.166)$$

La Integral Escalar J

Definimos

$$J = \int d^D w \frac{1}{w^4 [(p-w)^2 - m^2] [(k-w)^2 - m^2]}. \quad (3.167)$$

Esta integral aparecerá en las integrales tensoriales J_μ e $J_{\mu\nu}$, por lo que tendremos que calcular esta. De manera general, sea que definimos la familia de integrales:

$$J(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \int d^D w \frac{1}{[(p-w)^2 - m^2]^{\nu_1} [(k-w)^2 - m^2]^{\nu_2} [w^2]^{\nu_3}}. \quad (3.168)$$

Este método es basado en la técnica llamada integración por partes (IBP):

$$\int d^D w \frac{\partial}{\partial w_\mu} \left[\frac{(q_i - w)_\mu}{[(p-w)^2 - m^2]^{\nu_1} [(k-w)^2 - m^2]^{\nu_2} [w^2]^{\nu_3}} \right] = 0. \quad (3.169)$$

Después de diferenciar obtenemos:

$$\begin{aligned} \int d^D w (q_i - m)_\mu \left[\frac{2\nu_1(p-w)^\mu}{A^{\nu_1+1} B^{\nu_2} C^{\nu_3}} + \frac{2\nu_2(k-w)^\mu}{A^{\nu_1} B^{\nu_2+1} C^{\nu_3}} - \frac{2\nu_3 w^\mu}{A^{\nu_1} B^{\nu_2} C^{\nu_3+1}} \right] \\ + \int d^D w \frac{-D}{A^{\nu_1} B^{\nu_2} C^{\nu_3}} = 0, \end{aligned} \quad (3.170)$$

ya que,

$$\frac{\partial}{\partial w_\mu} w_\mu = g^\mu_\mu = D. \quad (3.171)$$

Hemos definido

$$A = (p-w)^2 - m^2, \quad B = (k-w)^2 - m^2, \quad C = w^2. \quad (3.172)$$

Por lo tanto,

$$dJ(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \int d^D w (q_i - w)_\mu \left[\frac{2\nu_1(p-w)^\mu}{A^{\nu_1+1} B^{\nu_2} C^{\nu_3}} + \frac{2\nu_2(k-w)^\mu}{A^{\nu_1} B^{\nu_2+1} C^{\nu_3}} - \frac{2\nu_3 w^\mu}{A^{\nu_1} B^{\nu_2} C^{\nu_3+1}} \right]. \quad (3.173)$$

Asumiendo que q_i es definido como $q_1 = p, q_2 = k$ y $q_3 = 0$. Entonces, para $i = 1$:

$$dJ(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \int d^D w (p-w)_\mu \left[\frac{2\nu_1(p-w)^\mu}{A^{\nu_1+1} B^{\nu_2} C^{\nu_3}} + \frac{2\nu_2(k-w)^\mu}{A^{\nu_1} B^{\nu_2+1} C^{\nu_3}} - \frac{2\nu_3 w^\mu}{A^{\nu_1} B^{\nu_2} C^{\nu_3+1}} \right]. \quad (3.174)$$

Observemos los siguientes productos:

$$\begin{aligned} 2(p-w) \cdot (k-w) &= (p-w)^2 + (k-w)^2 - (p-k)^2 - m^2 - m^2 + 2m^2 \\ &= A + B - [(p-k)^2 - 2m^2], \\ 2(p-w) \cdot (-w) &= (p-w)^2 - m^2 + w^2 - p^2 + m^2 = A + C - p^2 + m^2, \\ (p-w)^2 &= (p-w)^2 - m^2 + m^2 = A + m^2. \end{aligned} \quad (3.175)$$

Sustituyendo estos productos, obtenemos:

$$\begin{aligned} dJ(\nu_1, \nu_2, \nu_3) &= \int d^D w \left[\frac{2\nu_1(A+m^2)}{A^{\nu_1+1} B^{\nu_2} C^{\nu_3}} + \frac{\nu_2[A+B-[(p-k)^2-2m^2]]}{A^{\nu_1} B^{\nu_2+1} C^{\nu_3}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu_3[A+C-(p^2-m^2)]}{A^{\nu_1} B^{\nu_2} C^{\nu_3+1}} \right] \\ &= \int d^D w \left[\frac{2\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}{A^{\nu_1} B^{\nu_2} C^{\nu_3}} + \frac{\nu_2}{A^{\nu_1-1} B^{\nu_2+1} C^{\nu_3}} + \frac{2\nu_1 m^2}{A^{\nu_1+1} B^{\nu_2} C^{\nu_3}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu_2[(p-k)^2-2m^2]}{A^{\nu_1} B^{\nu_2+1} C^{\nu_3}} + \frac{\nu_3}{A^{\nu_1-1} B^{\nu_2} C^{\nu_3+1}} - \frac{\nu_3(p^2-m^2)}{A^{\nu_1} B^{\nu_2} C^{\nu_3+1}} \right] \end{aligned} \quad (3.176)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} dJ(\nu_1, \nu_2, \nu_3) &= (2\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)J(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + \nu_2 J(\nu_1 - 1, \nu_2 + 1, \nu_3) \\ &\quad + 2m^2 \nu_1 J(\nu_1 + 1, \nu_2, \nu_3) - \nu_2 [(p-k)^2 - 2m^2] J(\nu_1, \nu_2 + 1, \nu_3) \\ &\quad + \nu_3 J(\nu_1 - 1, \nu_2, \nu_3 + 1) - \nu_3 (p^2 - m^2) J(\nu_1, \nu_2, \nu_3 + 1). \end{aligned} \quad (3.177)$$

Reordenando los términos de tal manera que las integrales con $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ como la suma de sus argumentos estén en el lado derecho, mientras que aquellas con $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + 1$ estén en el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} -2\nu_1 m^2 J(\nu_1 + 1, \nu_2, \nu_3) + \nu_2 [(p-k)^2 - 2m^2] J(\nu_1, \nu_2 + 1, \nu_3) \\ + \nu_3 (p^2 - m^2) J(\nu_1, \nu_2, \nu_3 + 1) = (2\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 - D) J(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \\ + \nu_2 J(\nu_1 - 1, \nu_2 + 1, \nu_3) + \nu_3 J(\nu_1 - 1, \nu_2, \nu_3 + 1). \end{aligned} \quad (3.178)$$

Para $i = 2$ tenemos:

$$\begin{aligned} dJ(\nu_1, \nu_2, \nu_3) &= \int d^D w (k-w)_\mu \left[\frac{2\nu_1(p-w)^\mu}{A^{\nu_1+1} B^{\nu_2} C^{\nu_3}} + \frac{2\nu_2(k-w)^\mu}{A^{\nu_1} B^{\nu_2+1} C^{\nu_3}} - \frac{2\nu_3 w^\mu}{A^{\nu_1} B^{\nu_2} C^{\nu_3+1}} \right] \\ &= (\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3)J(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + \nu_1 J(\nu_1 + 1, \nu_2 - 1, \nu_3) \\ &\quad + \nu_3 J(\nu_1, \nu_2 - 1, \nu_3 + 1) - [(p-k)^2 - 2m^2] \nu_1 J(\nu_1 + 1, \nu_2, \nu_3) \\ &\quad + 2\nu_2 m^2 J(\nu_1, \nu_2 + 1, \nu_3) - \nu_3 (k^2 - m^2) J(\nu_1, \nu_2, \nu_3 + 1) \end{aligned} \quad (3.179)$$

ó

$$\begin{aligned} & \nu_1[(p-w)^2 - 2m^2]J(\nu_1+1, \nu_2, \nu_3) - 2\nu_2 m^2 J(\nu_1, \nu_2+1, \nu_3) \\ & + \nu_3(k^2 - m^2)J(\nu_1, \nu_2, \nu_3+1) = (\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3 - D)J(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \\ & + \nu_1 J(\nu_1+1, \nu_2-1, \nu_3) + \nu_3 J(\nu_1, \nu_2-1, \nu_3+1) , \end{aligned} \quad (3.180)$$

y para $i = 3$:

$$\begin{aligned} dJ(\nu_1, \nu_2, \nu_3) &= \int d^D w (-w)_\mu \left[\frac{2\nu_1(p-w)^\mu}{A^{\nu_1+1} B^{\nu_2} C^{\nu_3}} + \frac{2\nu_2(k-w)^\mu}{A^{\nu_1} B^{\nu_2+1} C^{\nu_3}} - \frac{2\nu_3 w^\mu}{A^{\nu_1} B^{\nu_2} C^{\nu_3+1}} \right] \\ &= (\nu_1 + \nu_2 + 2\nu_3)J(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + \nu_1 J(\nu_1+1, \nu_2, \nu_3-1) \\ &+ \nu_2 J(\nu_1, \nu_2+1, \nu_3-1) - \nu_1(p^2 - m^2)J(\nu_1+1, \nu_2, \nu_3) \\ &- \nu_2(k^2 - m^2)J(\nu_1, \nu_2+1, \nu_3) \end{aligned} \quad (3.181)$$

ó

$$\begin{aligned} & \nu_1(p^2 - m^2)J(\nu_1+1, \nu_2, \nu_3) + \nu_2(k^2 - m^2)J(\nu_1, \nu_2+1, \nu_3) \\ &= (\nu_1 + \nu_2 + 2\nu_3 - D)J(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \\ &+ \nu_1 J(\nu_1+1, \nu_2, \nu_3-1) + \nu_2 J(\nu_1, \nu_2+1, \nu_3-1) . \end{aligned} \quad (3.182)$$

Por lo tanto, necesitamos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & -2\nu_1 m^2 J(\nu_1+1, \nu_2, \nu_3) + \nu_2(q^2 - 2m^2)J(\nu_1, \nu_2+1, \nu_3) \\ & + \nu_3(p^2 - m^2)J(\nu_1, \nu_2, \nu_3+1) = a \\ & \nu_1(q^2 - 2m^2)J(\nu_1+1, \nu_2, \nu_3) - 2\nu_2 m^2 J(\nu_1, \nu_2+1, \nu_3) \\ & + \nu_3(k^2 - m^2)J(\nu_1, \nu_2, \nu_3+1) = b \\ & \nu_1(p^2 - m^2)J(\nu_1+1, \nu_2, \nu_3) + \nu_2(k^2 - m^2)J(\nu_1, \nu_2+1, \nu_3) \\ & + 0J(\nu_1, \nu_2, \nu_3+1) = c , \end{aligned} \quad (3.183)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= (2\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 - D)J(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + \nu_2 J(\nu_1-1, \nu_2+1, \nu_3) \\ &+ \nu_3 J(\nu_1-1, \nu_2, \nu_3+1) \\ b &= (\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3 - D)J(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + \nu_1 J(\nu_1+1, \nu_2-1, \nu_3) \\ &+ \nu_3 J(\nu_1, \nu_2-1, \nu_3+1) \\ c &= (\nu_1 + \nu_2 + 2\nu_3 - D)J(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + \nu_1 J(\nu_1+1, \nu_2, \nu_3-1) \\ &+ \nu_2 J(\nu_1, \nu_2+1, \nu_3-1) . \end{aligned} \quad (3.184)$$

En obvia notación:

$$\begin{pmatrix} -2m^2\nu_1 & \nu_2(q^2 - 2m^2) & \nu_3(p^2 - m^2) \\ \nu_1(q^2 - 2m^2) & -2m^2\nu_2 & \nu_3(k^2 - m^2) \\ \nu_1(p^2 - m^2) & \nu_2(k^2 - m^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} , \quad (3.185)$$

que escribimos formalmente como:

$$SI = A . \quad (3.186)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |S| &= 2\nu_1\nu_2\nu_3[m^2(k^2 - m^2)^2 + m^2(p^2 - m^2)^2 + (k^2 - m^2)(p^2 - m^2)(q^2 - 2m^2)] \\ &= 2\nu_1\nu_2\nu_3[m^2(k^2 - p^2)^2 + (m^2 - k^2)(m^2 - p^2)q^2] . \end{aligned} \quad (3.187)$$

Si las ecuaciones son resueltas para $J(\nu_1, \nu_2, \nu_3 + 1)$, encontramos:

$$J(\nu_1, \nu_2, \nu_3 + 1) = \frac{1}{|S|} \begin{vmatrix} -2\nu_1 m^2 & \nu_2(q^2 - 2m^2) & a \\ \nu_1(q^2 - 2m^2) & -2\nu_2 m^2 & b \\ \nu_1(p^2 - m^2) & \nu_2(k^2 - m^2) & c \end{vmatrix} . \quad (3.188)$$

Para resolver la integral J tomamos $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$. Entonces:

$$|S| = 2[m^2(k^2 - p^2)^2 + (m^2 - k^2)(m^2 - p^2)q^2] . \quad (3.189)$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{|S|} \left\{ 2(4 - D)q^2(m^2 + k \cdot p)I + q^2(4m^2 - q^2)[J(2, 1, 0) + J(1, 2, 0)] \right. \\ &\quad + [(q^2 - 2m^2)(p^2 - m^2) + 2m^2(k^2 - m^2)][J(2, 0, 1) + J(1, 0, 2)] \\ &\quad \left. + [(q^2 - 2m^2)(k^2 - m^2) + 2m^2(p^2 - m^2)][J(0, 2, 1) + J(0, 1, 2)] \right\} , \end{aligned} \quad (3.190)$$

con $J = J(1, 1, 2)$ y $I = J(1, 1, 1)$. Así que, necesitamos calcular las integrales $J(0, 2, 1) =_{k \leftrightarrow p} J(2, 0, 1)$, $J(0, 1, 2) =_{k \leftrightarrow p} J(1, 0, 2)$ y $J(2, 1, 0) =_{k \leftrightarrow p} J(1, 2, 0)$. Para nuestro proposito, definimos la integral

$$J_{\nu_1\nu_2}(k, p, m_1, m_2) = \int d^D w \frac{1}{[(k - w)^2 - m_1^2]^{\nu_1} [(p - w)^2 - m_2^2]^{\nu_2}} . \quad (3.191)$$

Usando parametrización de Feynman, conocemos que

$$\frac{1}{A^{\nu_2} B^{\nu_1}} = \frac{\Gamma(\nu_1 + \nu_2)}{\Gamma(\nu_2)\Gamma(\nu_1)} \int_0^1 dx x^{\nu_2-1} (1-x)^{\nu_1-1} \frac{1}{[xA + (1-x)B]^{\nu_1+\nu_2}} . \quad (3.192)$$

Sea

$$\begin{aligned} A &= [(p - w)^2 - m_2^2] , \\ B &= [(k - w)^2 - m_1^2] , \end{aligned} \quad (3.193)$$

y

$$\begin{aligned}
D &= xA + (1-x)B \\
&= x[p^2 + w^2 - 2p \cdot w - m_2^2] + (1-x)[k^2 + w^2 - 2k \cdot w - m_1^2] \\
&= w^2 - 2w \cdot [px + k(1-x)] + p^2x + k^2(1-x) - m_2^2x - m_1^2(1-x) . \quad (3.194)
\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable

$$w' = w - [px + k(1-x)] \quad (3.195)$$

tal que,

$$w^2 - 2w \cdot [px + k(1-x)] = w'^2 - [px + k(1-x)]^2 . \quad (3.196)$$

De esta manera, D es reescrita como:

$$\begin{aligned}
D &= w'^2 - [px + k(1-x)]^2 + p^2x + k^2(1-x) - m_2^2x - m_1^2(1-x) \\
&= w'^2 + p^2x(1-x) + k^2x(1-x) - 2k \cdot px(1-x) - m_2^2x - m_1^2(1-x) \\
&= w'^2 + q^2x(1-x) - m_2^2x - m_1^2(1-x) . \quad (3.197)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
J_{\nu_1\nu_2}(k, p, m_1, m_2) &= \frac{\Gamma(\nu_1 + \nu_2)}{\Gamma(\nu_2)\Gamma(\nu_1)} \int_0^1 dx x^{\nu_2-1} (1-x)^{\nu_1-1} \int d^D w' \frac{1}{D^{\nu_1+\nu_2}} \\
&= \frac{\Gamma(\nu_1 + \nu_2)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \int_0^1 dx x^{\nu_2-1} (1-x)^{\nu_1-1} (-1)^{\nu_1+\nu_2} i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(\nu_1 + \nu_2 - D/2)}{\Gamma(\nu_1 + \nu_2)} s^{\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2} \\
&= i(-1)^{\nu_1+\nu_2} \pi^{D/2} \frac{\Gamma(\nu_1 + \nu_2 - D/2)}{\Gamma(\nu_2)\Gamma(\nu_1)} \int_0^1 dx x^{\nu_2-1} (1-x)^{\nu_1-1} s^{\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2} , \quad (3.198)
\end{aligned}$$

donde

$$s = -q^2x(1-x) + m_2^2x + m_1^2(1-x) . \quad (3.199)$$

Para las integrales de nuestro interés, tomamos $\nu_1 = \nu_2 = 1$

$$\begin{aligned}
J_{11}(k, p, m_1, m_2) &= \int \frac{d^D w}{[(p-w)^2 - m_2^2][(k-w)^2 - m_1^2]} \\
&= i\pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2) \int_0^1 dx s^{\frac{D}{2}-2} . \quad (3.200)
\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$J(2, 1, 0) = \frac{1}{2m_1} \frac{\partial}{\partial m_1} J_{11}(k, p, m_1, m_2)|_{m_1=m_2=m} \quad (3.201)$$

Ahora,

$$\frac{\partial}{\partial m_1} s^{\frac{D}{2}-2} = \left(\frac{D}{2} - 2 \right) s^{\frac{D}{2}-3} 2m_1(1-x) \quad (3.202)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
J(2, 1, 0) &= i\pi^{D/2} \left(\frac{D}{2} - 2 \right) \Gamma \left(2 - \frac{D}{2} \right) \int_0^1 dx \frac{(1-x)}{[-q^2 x(1-x) + m^2 x + m^2(1-x)]^{3-\frac{D}{2}}} \\
&= i\pi^{\frac{D}{2}} \left(\frac{D}{2} - 2 \right) \Gamma \left(2 - \frac{D}{2} \right) \int_0^1 \frac{dx(1-x)}{[-q^2 x(1-x) + m^2]^{3-\frac{D}{2}}} .
\end{aligned} \tag{3.203}$$

Sea

$$x_1 = 1 - x \quad \Rightarrow \quad dx_1 = -dx . \tag{3.204}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx_1 x_1}{[-q^2 x_1(1-x_1) + m^2]^{3-D/2}} &= \int_0^1 \frac{dx}{[-q^2 x(1-x) + m^2]^{3-D/2}} \\
&\quad - \int_0^1 \frac{dx x}{[-q^2 x(1-x) + m^2]^{3-D/2}} .
\end{aligned} \tag{3.205}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{dx(1-x)}{[-q^2 x(1-x) + m^2]^{3-D/2}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{[-q^2 x(1-x) + m^2]^{3-D/2}} . \tag{3.206}$$

Usando mathematica resolvemos la última integral y obtenemos que

$$\begin{aligned}
J(2, 1, 0) &= \\
& i\pi^{D/2} \left(\frac{D}{2} - 2 \right) \Gamma \left(2 - \frac{D}{2} \right) \frac{2^{D/2-3} (m^2)^{D/2-3}}{[(D-4)q^2(q^2-4m^2)]} \\
& \left\{ \left(1 - \frac{q^2}{\sqrt{q^4-4m^2q^2}} \right)^{1-\frac{D}{2}} (-2m^2 + q^2 - \sqrt{q^4-4m^2q^2}) \times \right. \\
& (q^2 + \sqrt{q^4-4m^2q^2}) {}_2F_1 \left(\frac{D}{2} - 2, 3 - \frac{D}{2}; \frac{D}{2} - 1; \frac{1}{2} + \frac{q^2}{2\sqrt{q^4-4m^2q^2}} \right) \\
& - \left(\frac{q^2}{\sqrt{q^4-4m^2q^2}} + 1 \right)^{1-\frac{D}{2}} (-2m^2 + q^2 + \sqrt{q^4-4m^2q^2}) \times \\
& \left. (-q^2 + \sqrt{q^4-4m^2q^2}) {}_2F_1 \left(\frac{D}{2} - 2, 3 - \frac{D}{2}; \frac{D}{2} - 1; \frac{1}{2} - \frac{q^2}{2\sqrt{q^4-4m^2q^2}} \right) \right\} \\
& \stackrel{=_{p \leftrightarrow k}}{=} J(1, 2, 0) .
\end{aligned} \tag{3.207}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
J(2, 0, 1) &= \frac{1}{2m_2} \frac{\partial}{\partial m_2} J_{11}(k, p, m_1, m_2)|_{k=m_1=0, m_2=m} \\
&= i\pi^{D/2} \left(\frac{D}{2} - 2 \right) \Gamma \left(2 - \frac{D}{2} \right) \int_0^1 dx \frac{x}{[-p^2 x(1-x) + m_2 x]^{3-\frac{D}{2}}} \\
&= i\pi^{D/2} \left(\frac{D}{2} - 2 \right) \Gamma \left(2 - \frac{D}{2} \right) (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-3} \int_0^1 dx x^{\frac{D}{2}-2} \left[1 - \frac{p^2}{p^2 - m^2} x \right]^{\frac{D}{2}-3}.
\end{aligned}$$

Usando[2]

$$\int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x)^{\mu-1} (1-\beta x)^{-\nu} dx = B(\lambda, \mu) {}_2F_1(\nu, \lambda; \lambda + \mu; \beta) \quad (3.208)$$

donde $\lambda = D/2 - 1$, $\mu = 1$, $\nu = 3 - D/2$ y $\beta = p^2/(p^2 - m^2)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
J(2, 0, 1) &= i\pi^{D/2} \left(\frac{D}{2} - 2 \right) \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-3} \times \\
&\quad {}_2F_1 \left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{p^2 - m^2} \right) \\
&= i\pi^{D/2} \left(\frac{D}{2} - 2 \right) \Gamma \left(1 - \frac{D}{2} \right) (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-3} \times \\
&\quad {}_2F_1 \left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{p^2 - m^2} \right) \\
&\stackrel{=_{p \leftrightarrow k}}{=} J(0, 2, 1) . \quad (3.209)
\end{aligned}$$

Para resolver la integral $J(1, 0, 2)$, consideramos la integral

$$L^\nu(p) = \int d^D w \frac{w^\nu}{w^4 [(p-w)^2 - m^2]} . \quad (3.210)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
p_\nu L^\nu(p) &= \frac{1}{2} (p^2 - m^2) \int d^D w \frac{1}{w^4 [(p-w)^2 - m^2]} + \frac{1}{2} \int d^D w \frac{1}{w^2 [(p-w)^2 - m^2]} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^D w}{w^4} = \frac{1}{2} (p^2 - m^2) J(1, 0, 2) + \frac{1}{2} J(1, 0, 1) , \quad (3.211)
\end{aligned}$$

ya que la última integral desaparece en el esquema de regularización dimensional. Es fácil ver que,

$$\begin{aligned}
J(1, 0, 1) &= J_{11}(k, p, m_1, m_2)|_{k=m_1=0, m_2=m} \\
&= i\pi^{D/2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 dx [-p^2 x(1-x) + m^2 x]^{\frac{D}{2}-2} \\
&= i\pi^{D/2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-2} \int_0^1 dx x^{\frac{D}{2}-2} \left[1 - \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right]^{\frac{D}{2}-2} \quad (3.212)
\end{aligned}$$

Usando (3.208) donde $\lambda = D/2 - 1$, $\mu = 1$, $\beta = p^2/(p^2 - m^2)$ y $\nu = 2 - D/2$ obtenemos

$$\begin{aligned}
J(1, 0, 1) &= i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-2} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) \\
&= -i\pi^{D/2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-2} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) \\
&= {}_{k \leftrightarrow p} J(0, 1, 1) . \quad (3.213)
\end{aligned}$$

Para resolver $L^\nu(p)$ hacemos uso de la fórmula (3.192) con $A = (p - w)^2 - m^2$ y $B = w^2$ tal que,

$$L^\nu(p) = \int d^D w \frac{w^\nu}{w^4[(p - w)^2 - m^2]} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)\Gamma(2)} \int_0^1 dx (1-x) \int d^D w w^\nu \frac{1}{[Ax + B(1-x)]^3} .$$

Sea $w' = w - px$. Entonces,

$$\begin{aligned}
D &= Ax + B(1-x) \\
&= w^2 + p^2 x - 2p \cdot wx - xm^2 \\
&= w'^2 + p^2 x - p^2 x^2 - m^2 x \\
&= w'^2 + p^2 x(1-x) - m^2 x , \quad (3.214)
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$L^\nu(p) = 2 \int_0^1 dx (1-x) \int d^D w \frac{p^\nu x}{[w'^2 + p^2 x(1-x) - m^2 x]^3} . \quad (3.215)$$

Ahora usamos la ecuación (A.8) con $n = 3$ y $s = -p^2 x(1-x) + m^2 x$. Así,

$$\begin{aligned}
L^\nu(p) &= -i\pi^{D/2} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) p^\nu \int_0^1 dx x^{\frac{D}{2}-2} (1-x) [-p^2(1-x) + m^2 x]^{\frac{D}{2}-3} \\
&= -i\pi^{D/2} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-3} p^\nu \int_0^1 dx x^{\frac{D}{2}-2} (1-x) \left[1 - \frac{p^2}{p^2 - m^2} x\right]^{\frac{D}{2}-3} .
\end{aligned}$$

Usando (3.208) con $\lambda = D/2 - 1$, $\mu = 2$, $\beta = p^2/(p^2 - m^2)$ y $\nu = 3 - D/2$ tenemos que:

$$\begin{aligned} L^\nu(p) &= -i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(3 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-3} p^\nu {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2} + 1; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) \\ &= -i\pi^{D/2} \left(1 - \frac{4}{D}\right) \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-3} p^\nu {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2} + 1; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) \end{aligned} \quad (3.216)$$

Así que,

$$\begin{aligned} J(1, 0, 2) &= \frac{2}{p^2 - m^2} \left[p_\nu L^\nu(p) - \frac{1}{2} J(1, 0, 1) \right] \\ &= \frac{2i\pi^{D/2}}{p^2 - m^2} \left[-\left(1 - \frac{4}{D}\right) \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) p^2 (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-3} \times \right. \\ &\quad {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2} + 1; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{2} (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-2} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) \right] \\ &= {}_{k \leftrightarrow p} J(0, 1, 2) . \end{aligned} \quad (3.217)$$

Queremos escribir este resultado de tal manera que solamente tengamos la dependencia de una sola función hipergeométrica. Para lograr nuestro objetivo hacemos uso de la siguiente identidad entre funciones hipergeométricas[23]:

$$c(1 - z)F(a, b; c; z) - cF(a, b - 1; c; z) + (c - a)zF(a, b; c + 1; z) = 0 , \quad (3.218)$$

ó equivalentemente,

$$F(a, b; c + 1; z) = \frac{1}{z(c - a)} [cF(a, b - 1; c; z) - c(1 - z)F(a, b; c; z)] . \quad (3.219)$$

En nuestro caso $a = 3 - D/2$, $b = D/2 - 1$, $c = D/2$ y $z = p^2/(p^2 - m^2)$. De tal manera que,

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2} + 1; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) &= \\ &= \frac{D}{2(D - 3)} \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \left[{}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 2; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{p^2 - m^2} {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) \right] . \end{aligned} \quad (3.220)$$

Ahora usamos la siguiente identidad:

$$c(1 - z)F(a, b; c; z) - cF(a - 1, b; c; z) + (c - b)zF(a, b; c + 1; z) = 0 \quad (3.221)$$

ó

$$F(a, b; c; z) = \frac{1}{c(1-z)} [cF(a-1, b; c; z) - (c-b)zF(a, b; c+1; z)] . \quad (3.222)$$

Para nuestra conveniencia tomamos $a = 3 - D/2$, $b = D/2 - 1$, $D/2$ y $z = p^2/(p^2 - m^2)$. Tal que,

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) = \\ \frac{-p^2 + m^2}{m^2} \left[{}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) \right. \\ \left. - \frac{2}{D} \left(\frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2} + 1; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) \right] . \end{aligned} \quad (3.223)$$

Sustituyendo (3.223) en (3.220) y simplificando obtenemos que:

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2} + 1; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) = \\ \frac{D}{2(D-4)} \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \left[{}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 2; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) \right. \\ \left. - {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) \right] . \end{aligned} \quad (3.224)$$

De esta manera, podemos escribir (3.217) como:

$$\begin{aligned} J(1, 0, 2) &= -i\pi^{D/2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-3} {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 2; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) \\ &=_{k \leftrightarrow p} J(0, 1, 2) . \end{aligned} \quad (3.225)$$

Finalmente, sustituyendo (3.207), (3.209) y (3.225) en (3.190) obtenemos el resultado deseado. En el *caso no masivo y dimensión arbitraria* la ecuación (3.190) se reduce a:

$$J_0 = \frac{1}{k^2 p^2} [(4 - D)(k \cdot p)I_0 - k^2 Q_3(k) - p^2 Q_3(p) + q^2 Q_3(q)] , \quad (3.226)$$

donde

$$Q_3(p) = \pi^{D/2-2} (-p^2)^{D/2-3} \frac{\Gamma^2\left(\frac{D}{2} - 2\right) \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma(D-4)} . \quad (3.227)$$

CASO $D = 3$:

A continuación consideramos el *caso masivo* y $D = 3$:

$$J = \frac{1}{\chi} \left\{ q^2(m^2 + k \cdot p) I^{(0)} + i\pi^2 m \left[\frac{q^2(k^2 - m^2) - (k^2 - p^2)(k^2 + m^2)}{(k^2 - m^2)^2} + \frac{q^2(p^2 - m^2) + (k^2 - p^2)(p^2 + m^2)}{(p^2 - m^2)^2} \right] \right\}, \quad (3.228)$$

donde

$$\chi = m^2(k^2 - p^2)^2 + q^2(m^2 - k^2)(m^2 - p^2). \quad (3.229)$$

En el *caso no masivo* y $D = 3$ obtenemos:

$$J = \frac{(k \cdot p)}{k^2 p^2} I. \quad (3.230)$$

CASO $D = 4 - 2\epsilon$:

En el *caso masivo* y $D = 4 - 2\epsilon$ tenemos que cuando $\epsilon \rightarrow 0$ desaparece el termino de I en la ecuación (3.190). Además tenemos que en este límite las ecuaciones (3.207), (3.209) y (3.225) se reducen a:

$$\begin{aligned} J(1, 2, 0) &= i\pi^2 \frac{1}{(q^2 - 4m^2)} S, \\ J(2, 0, 1) &= i\pi^2 \frac{1}{(p^2 - m^2)} L, \\ J(1, 0, 2) &= \frac{i\pi^2}{(m^2 - p^2)} \left(C - \frac{p^2 + m^2}{p^2 - m^2} L \right). \end{aligned} \quad (3.231)$$

Sustituyendo estas en (3.190) tenemos que la solución a J es:

$$J = i\pi^2 \left\{ \frac{1}{\chi} \left[-q^2 S + p^2 \frac{[(p^2 - m^2)q^2 + 2m^2(k^2 - p^2)]}{(p^2 - m^2)^2} L + k^2 \frac{[(k^2 - m^2)q^2 - 2m^2(k^2 - p^2)]}{(k^2 - m^2)^2} L' \right] - \frac{C}{(p^2 - m^2)(k^2 - m^2)} \right\}. \quad (3.232)$$

En el caso no masivo y $D = 4 - 2\epsilon$ tenemos:

$$J = \frac{i\pi^2}{k^2 p^2} \left[- \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \pi - \gamma \right) + \ln \left(\frac{k^2 p^2}{q^2} \right) \right]. \quad (3.233)$$

La Integral Tensorial J_μ

Tenemos que

$$J_\mu = \int d^D w \frac{w_\mu}{w^4 [(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]}. \quad (3.234)$$

Esta integral aparecerá en la integral tensorial $J_{\mu\nu}$ por lo que es conveniente resolver esta antes de comenzar a resolver $J_{\mu\nu}$. Escribimos (3.234) en la siguiente forma general:

$$J_\mu = \frac{i\pi^2}{2} [k_\mu J_A(k, p) + p_\mu J_B(k, p)]. \quad (3.235)$$

Contrayendo con k^μ y p^μ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} k^\mu J_\mu &= \frac{i\pi^2}{2} [k^2 J_A(k, p) + (k \cdot p) J_B(k, p)] \\ p^\mu J_\mu &= \frac{i\pi^2}{2} [(k \cdot p) J_A(k, p) + p^2 J_B(k, p)] \end{aligned} \quad (3.236)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} p^\mu J_\mu &= \frac{(p^2 - m^2)}{2} \int d^D w \frac{1}{w^4 [(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^D w \frac{1}{w^4 [(k-w)^2 - m^2]} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^D w \frac{1}{w^2 [(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \\ &= \frac{(p^2 - m^2)}{2} J + \frac{1}{2} I - \frac{1}{2} L(k), \end{aligned} \quad (3.237)$$

donde hemos usado:

$$p \cdot w = \frac{1}{2}(p^2 + w^2 - (p - w)^2 - m^2 + m^2) . \quad (3.238)$$

Tenemos también que:

$$k^\mu J_\mu = \frac{(k^2 - m^2)}{2} J + \frac{1}{2} I - \frac{1}{2} L(k) . \quad (3.239)$$

Aplicamos parametrización de Feynman a $L(k)$, tal que:

$$\begin{aligned} \int d^D w \frac{1}{w^4[(k-w)^2 - m^2]} &= -i\pi^{D/2} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 dz z [(1-z)(-k^2 z + m^2)]^{\frac{D}{2}-3} \\ &= -i\pi^{D/2} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) (m^2)^{\frac{D}{2}-3} \times \\ &\quad \int_0^1 dz z (1-z)^{\frac{D}{2}-3} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} z\right)^{\frac{D}{2}-3} . \end{aligned} \quad (3.240)$$

Usando (3.208) con $\lambda = 2$, $\mu = D/2 - 2$, $\beta = k^2/m^2$ y $\nu = 3 - D/2$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \int d^D w \frac{1}{w^4[(k-w)^2 - m^2]} &= -i\pi^{D/2} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) (m^2)^{\frac{D}{2}-3} B\left(2, \frac{D}{2} - 2\right) \times \\ &\quad {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, 2; \frac{D}{2}; \frac{k^2}{m^2}\right) \\ &= -i\pi^{D/2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2)^{\frac{D}{2}-3} {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, 2; \frac{D}{2}; \frac{k^2}{m^2}\right) . \end{aligned}$$

Usamos la siguiente identidad entre funciones hipergeométricas [23]:

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) \quad (3.241)$$

con $a = 3 - D/2$, $b = 2$, $c = D/2$ y $z = k^2/m^2$, tal que:

$${}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, 2; \frac{D}{2}; \frac{k^2}{m^2}\right) = \left(1 - \frac{k^2}{m^2}\right)^{\frac{D}{2}-3} {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 2; \frac{D}{2}; \frac{k^2}{k^2 - m^2}\right) . \quad (3.242)$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \int d^D w \frac{1}{w^4[(k-w)^2 - m^2]} &= -i\pi^{D/2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - k^2)^{\frac{D}{2}-3} \times \\ &\quad {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 2; \frac{D}{2}; \frac{k^2}{k^2 - m^2}\right) . \end{aligned} \quad (3.243)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (3.236) obtenemos que $J_A(k, p)$ en *dimensión arbitraria y caso masivo es:*

$$\begin{aligned} J_A(k, p) &= \frac{1}{\Delta^2} \left\{ [(k \cdot p)(p^2 - m^2) - p^2(k^2 - m^2)] \frac{J_0}{2} + [(k \cdot p) - p^2] \frac{I_0}{2} \right. \\ &\quad \left. + (k \cdot p)Q_3(k) - p^2Q_3(p) \right\}, \\ J_B(k, p) &= J_A(p, k), \end{aligned} \quad (3.244)$$

donde

$$Q_3(k) = \pi^{D/2-2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - k^2)^{\frac{D}{2}-3} {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 2; \frac{D}{2}; \frac{k^2}{k^2 - m^2}\right). \quad (3.245)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (3.235) y (3.244) forman la solución completa. En el *caso no masivo y dimensión arbitraria* tenemos que (3.244) se reduce a:

$$\begin{aligned} J_A(k, p) &= \frac{1}{\Delta^2} \left\{ p^2[(k \cdot p) - k^2] \frac{J_0}{2} + [(k \cdot p) - p^2] \frac{I_0}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(k \cdot p)}{i\pi^2} \int d^D w \frac{1}{w^4(k-w)^2} - \frac{p^2}{i\pi^2} \int d^D w \frac{1}{w^4(p-w)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.246)$$

donde

$$\int d^D w \frac{1}{w^4(p-w)^2} = \frac{i\pi^{D/2}}{2} (-p^2)^{\frac{D}{2}-3} \frac{\Gamma(3 - \frac{D}{2})\Gamma^2(\frac{D}{2} - 2)}{\Gamma(D - 4)}. \quad (3.247)$$

A continuación consideraremos los siguientes casos particulares:

CASO $D = 3$:

$$\begin{aligned} J_A(k, p) &= \frac{2}{\Delta^2} \left\{ [(k \cdot p)(p^2 - m^2) - p^2(k^2 - m^2)] \frac{J_0}{4} + [(k \cdot p) - p^2] \frac{I_0}{4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{mp^2}{(m^2 - p^2)^2} - \frac{m(k \cdot p)}{(m^2 - k^2)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.248)$$

En el caso no masivo en $D = 3$ obtenemos:

$$J_A(k, p) = -\frac{\pi}{k^2 \sqrt{-q^2 k^2 p^2}}. \quad (3.249)$$

La ecuación (3.248) esta de acuerdo con [15] ver la ecuación (A11). La ecuación (3.249) esta de acuerdo con [13] ver la ecuación (34). A continuación consideremos el caso $D = 4 - 2\epsilon$.

CASO $D = 4 - 2\epsilon$:

En el *caso masivo* y $D = 4 - 2\epsilon$ obtenemos:

$$\begin{aligned} J_A(k, p) = & \frac{1}{\Delta^2} \left\{ -\frac{k \cdot q}{2} I_0 - \frac{q^2}{\chi} \{ (m^2 - k^2) k^2 - (m^2 - k^2) k \cdot p \} S \right. \\ & + \frac{1}{(m^2 - p^2)} \left[p^2 - k \cdot p + \frac{p^2 q^2}{\chi} (k^2 - m^2) (m^2 + k \cdot p) \right] L \\ & \left. + \frac{k^2 q^2}{\chi} (m^2 + k \cdot p) L' \right\}. \end{aligned} \quad (3.250)$$

La ecuación (3.250) coincide con [11] ver la ecuación (53). Por último consideremos el *caso no masivo* y $D = 4 - 2\epsilon$:

$$J_A(k, p) = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ [k \cdot p - p^2] \frac{I_0}{2} - [k \cdot p - k^2] \frac{\ln(-q^2)}{k^2} + \frac{k \cdot p}{k^2} \ln(-p^2) - \ln(-k^2) \right\} \quad (3.251)$$

La Integral Tensorial $J_{\mu\nu}$

Tenemos que,

$$J_{\mu\nu} = \int d^D w \frac{w_\mu w_\nu}{w^4 [(p - w)^2 - m^2] [(k - w)^2 - m^2]}. \quad (3.252)$$

Expresamos esta integral en su forma más general como:

$$J_{\mu\nu} = \frac{i\pi^2}{2} \left\{ \frac{g_{\mu\nu}}{D} I_0 + \left(k_\mu k_\nu - \frac{k^2}{D} g_{\mu\nu} \right) J_C + \left(p_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu - \frac{2}{D} (k \cdot p) g_{\mu\nu} \right) J_D + \left(p_\mu p_\nu - \frac{p^2}{D} g_{\mu\nu} \right) J_E \right\}. \quad (3.253)$$

Contrayendo con p^μ obtenemos:

$$p^\mu J_{\mu\nu} = \frac{i\pi^2}{2} \left\{ \frac{p_\nu I_0}{D} + \left((k \cdot p) k_\nu - \frac{k^2}{D} p_\nu \right) J_C + \left(p^2 k_\nu + (k \cdot p) p_\nu - \frac{2}{D} (k \cdot p) p_\nu \right) J_D + \left(p^2 p_\nu - \frac{p^2}{D} p_\nu \right) J_E \right\}. \quad (3.254)$$

Contrayendo nuevamente obtenemos:

$$p^\nu p^\mu J_{\mu\nu} = \frac{i\pi^2}{2} \left\{ \frac{p^2}{D} I_0 + \left((k \cdot p)^2 - \frac{k^2 p^2}{D} \right) J_C + \left(2p^2 (k \cdot p) - \frac{2}{D} p^2 (k \cdot p) \right) J_D + \left(p^4 - \frac{p^4}{D} \right) J_E \right\} \quad (3.255)$$

y

$$k^\nu p^\mu J_{\mu\nu} = \frac{i\pi^2}{2} \left\{ \frac{(k \cdot p)}{D} I_0 + \left((k \cdot p) k^2 - \frac{k^2}{D} (k \cdot p) \right) J_C + \left(p^2 k^2 + (k \cdot p)^2 - 2 \frac{(k \cdot p)^2}{D} \right) J_D + \left(p^2 (k \cdot p) - \frac{p^2}{D} (k \cdot p) \right) J_E \right\}. \quad (3.256)$$

En la misma manera,

$$k^\mu J_{\mu\nu} = \frac{i\pi^2}{2} \left\{ \frac{k_\nu}{D} I_0 + \left(k^2 k_\nu - \frac{k^2}{D} k_\nu \right) J_C + \left((k \cdot p) k_\nu + k^2 p_\nu - \frac{2}{D} (k \cdot p) k_\nu \right) J_D + \left((k \cdot p) p_\nu - \frac{p^2}{D} k_\nu \right) J_E \right\} \quad (3.257)$$

donde después de una segunda contracción obtenemos:

$$k^\nu k^\mu J_{\mu\nu} = \frac{i\pi^2}{2} \left\{ \frac{k^2}{D} I_0 + \left(k^4 - \frac{k^4}{D} \right) J_C + \left(2(k \cdot p) k^2 - \frac{2}{D} (k \cdot p) k^2 \right) J_D + \left((k \cdot p)^2 - \frac{k^2 p^2}{D} \right) J_E \right\} \quad (3.258)$$

y

$$p^\nu k^\mu J_{\mu\nu} = \frac{i\pi^2}{2} \left\{ \frac{(k \cdot p)}{D} I_0 + \left((k \cdot p) k^2 - \frac{k^2}{D} (k \cdot p) \right) J_C + \left((k \cdot p)^2 + k^2 p^2 - \frac{2}{D} (k \cdot p)^2 \right) J_D + \left((k \cdot p) p^2 - \frac{p^2}{D} (k \cdot p) \right) J_E \right\}. \quad (3.259)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
p^\mu J_{\mu\nu} &= \int d^D w \frac{(p \cdot w) w_\nu}{w^4 [(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \\
&= \frac{(p^2 - m^2)}{2} \int d^D w \frac{w_\nu}{w^4 [(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^D w \frac{w_\nu}{w^2 [(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int d^D w \frac{w_\nu}{w^4 [(k-w)^2 - m^2]} \\
&= \frac{(p^2 - m^2)}{2} J_\nu + \frac{1}{2} I_\nu - \frac{1}{2} L_\nu(k) .
\end{aligned} \tag{3.260}$$

Similarmente,

$$k^\mu J_{\mu\nu} = \frac{(k^2 - m^2)}{2} J_\nu + \frac{1}{2} I_\nu - \frac{1}{2} L_\nu(p) . \tag{3.261}$$

De la segunda contracción obtenemos:

$$\begin{aligned}
p^\nu p^\mu J_{\mu\nu} &= \frac{(p^2 - m^2)}{2} \frac{i\pi^2}{2} [(k \cdot p) J_A + p^2 J_B] + \frac{1}{2} p^\nu I_\nu - \frac{p^\nu}{2} L_\nu(k) \\
k^\nu p^\mu J_{\mu\nu} &= \frac{(p^2 - m^2)}{2} \frac{i\pi^2}{2} [k^2 J_A + (k \cdot p) J_B] + \frac{1}{2} k^\nu I_\nu - \frac{k^\nu}{2} L_\nu(k) \\
k^\nu k^\mu J_{\mu\nu} &= \frac{(k^2 - m^2)}{2} \frac{i\pi^2}{2} [k^2 J_A + (k \cdot p) J_B] + \frac{1}{2} k^\nu I_\nu - \frac{k^\nu}{2} L_\nu(p) \\
p^\nu k^\mu J_{\mu\nu} &= \frac{(k^2 - m^2)}{2} \frac{i\pi^2}{2} [(k \cdot p) J_A + p^2 J_B] + \frac{1}{2} p^\nu I_\nu - \frac{p^\nu}{2} L_\nu(p)
\end{aligned} \tag{3.262}$$

donde

$$\begin{aligned}
L_\nu(k) &= i\pi^{D/2} \left(\frac{4}{D} - 1 \right) \Gamma \left(1 - \frac{D}{2} \right) (m^2 - k^2)^{\frac{D}{2}-3} k_\nu \times \\
&\quad {}_2F_1 \left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2} + 1; \frac{k^2}{k^2 - m^2} \right) .
\end{aligned} \tag{3.263}$$

Justamente como en el caso de $I_{\mu\nu}$, tenemos un sistema de 3 ecuaciones a resolver:

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{D} \right) k^4 J_C + 2 \left(1 - \frac{1}{D} \right) k^2 (k \cdot p) J_D + \left((k \cdot p)^2 - \frac{k^2 p^2}{D} \right) J_E &= a \\
\left((k \cdot p)^2 - \frac{k^2 p^2}{D} \right) J_C + 2 \left(1 - \frac{1}{D} \right) p^2 (k \cdot p) J_D + \left(1 - \frac{1}{D} \right) p^4 J_E &= b \\
\left(1 - \frac{1}{D} \right) k^2 (k \cdot p) J_C + \left(k^2 p^2 + \left(1 - \frac{2}{D} \right) (k \cdot p)^2 \right) J_D + \left(1 - \frac{1}{D} \right) p^2 (k \cdot p) J_E &= c ,
\end{aligned} \tag{3.264}$$

donde

$$\begin{aligned}
a &= \frac{2}{i\pi^2} k^\nu k^\mu J_{\mu\nu} - \frac{k^2}{D} I_0 \\
b &= \frac{2}{i\pi^2} p^\nu p^\mu J_{\mu\nu} - \frac{p^2}{D} I_0 \\
c &= \frac{1}{i\pi^2} [k^\nu p^\mu J_{\mu\nu} + p^\nu k^\mu J_{\mu\nu}] - \frac{(k \cdot p)}{D} I_0 .
\end{aligned} \tag{3.265}$$

La solución al sistema es:

$$\begin{aligned}
J_C(k, p) &= \frac{D}{(D-2)\Delta^2} \left\{ \left[\left(1 - \frac{2}{D}\right) (p^2 - m^2) (k \cdot p) - \left(1 - \frac{1}{D}\right) (k^2 - m^2) p^2 \right] \frac{J_A}{2} \right. \\
&\quad - \frac{1}{2D} (p^2 - m^2) p^2 J_B + \left[\left(1 - \frac{2}{D}\right) (k \cdot p) - \left(1 - \frac{1}{D}\right) p^2 \right] \frac{I_A}{2} \\
&\quad \left. - \frac{p^2}{2D} I_B + \frac{p^2}{D} I_0 + \left(1 - \frac{2}{D}\right) (k \cdot p) Q_4(k) \right\} ,
\end{aligned} \tag{3.266}$$

donde

$$\begin{aligned}
Q_4(p) &= \pi^{D/2-2} \left(1 - \frac{4}{D}\right) \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - p^2)^{D/2-3} \times \\
&\quad {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2} + 1; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right) .
\end{aligned} \tag{3.267}$$

$$\begin{aligned}
J_D(k, p) &= \frac{D}{2(D-2)\Delta^2} \left\{ \left[(k^2 - m^2) (k \cdot p) - \left(1 - \frac{2}{D}\right) (p^2 - m^2) k^2 \right] \frac{J_A}{2} \right. \\
&\quad + \left[(p^2 - m^2) (k \cdot p) - \left(1 - \frac{2}{D}\right) (k^2 - m^2) p^2 \right] \frac{J_B}{2} \\
&\quad + \left[(k \cdot p) - \left(1 - \frac{2}{D}\right) k^2 \right] \frac{I_A}{2} - \frac{2}{D} (k \cdot p) I_0 \\
&\quad + \left[(k \cdot p) - \left(1 - \frac{2}{D}\right) p^2 \right] \frac{I_B}{2} \\
&\quad \left. - \left(1 - \frac{2}{D}\right) [p^2 Q_4(p) + k^2 Q_4(k)] \right\} ,
\end{aligned} \tag{3.268}$$

$$J_E(k, p) = J_C(p, k) . \quad (3.269)$$

En el caso no masivo y dimensión arbitraria obtenemos:

$$J_C(k, p) = \frac{D}{(D-2)\Delta^2} \left\{ p^2 \left[\left(1 - \frac{2}{D}\right)(k \cdot p) - \left(1 - \frac{1}{D}\right)k^2 \right] \frac{J_A}{2} - \frac{p^4}{2D} J_B + \left[\left(1 - \frac{2}{D}\right)(k \cdot p) - \left(1 - \frac{1}{D}\right)p^2 \right] \frac{I_A}{2} - \frac{p^2}{2D} I_B + \frac{p^2}{D} I_0 + \left(1 - \frac{2}{D}\right)(k \cdot p) Q_4(k) \right\} , \quad (3.270)$$

donde

$$Q_4(p) = \pi^{D/2-2} (-p^2)^{D/2-3} \frac{\Gamma(3 - \frac{D}{2}) \Gamma^2(\frac{D}{2} - 2)}{\Gamma(D-4)} . \quad (3.271)$$

$$J_D(k, p) = \frac{D}{2(D-2)\Delta^2} \left\{ \left[(k \cdot p) - \left(1 - \frac{2}{D}\right)p^2 \right] \left(\frac{I_B}{2} + \frac{k^2 J_A}{2} \right) + \left[(k \cdot p) - \left(1 - \frac{2}{D}\right)k^2 \right] \left(\frac{I_A}{2} + \frac{p^2 J_B}{2} \right) - \frac{2}{D}(k \cdot p) I_0 - \left(1 - \frac{2}{D}\right)[p^2 Q_4(p) + k^2 Q_4(k)] \right\} . \quad (3.272)$$

Consideramos los siguientes casos particulares:

CASO $D = 3$:

$$J_C(k, p) = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ p^2 I_0 + [p^2(k \cdot p - 2k^2) - m^2(k \cdot p - 2p^2)] \frac{J_A}{2} - p^2(p^2 - m^2) \frac{J_B}{2} + (k \cdot p - 2p^2) \frac{I_A}{2} - \frac{p^2}{2} I_B + \frac{mk \cdot p}{k^2(m^2 - k^2)} - \frac{k \cdot p}{k^2 \sqrt{-k^2}} \arctan \sqrt{\frac{-k^2}{m^2}} \right\} , \quad (3.273)$$

$$\begin{aligned}
J_D(k, p) = & \frac{1}{2\Delta^2} \left\{ -2(k \cdot p)I_0 + [k^2(3k \cdot p - p^2) - m^2(3k \cdot p - k^2)]\frac{J_A}{2} \right. \\
& + [p^2(3k \cdot p - k^2) - m^2(3k \cdot p - p^2)]\frac{J_B}{2} + (3k \cdot p - k^2)\frac{I_A}{2} \\
& + (3k \cdot p - p^2)\frac{I_B}{2} - \frac{m}{m^2 - k^2} - \frac{m}{m^2 - p^2} \\
& \left. + \frac{1}{\sqrt{-k^2}} \arctan \sqrt{\frac{-k^2}{m^2}} + \frac{1}{\sqrt{-p^2}} \arctan \sqrt{\frac{-p^2}{m^2}} \right\}. \quad (3.274)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (3.273), (3.274) estan de acuerdo con [15] ver la ecuación (A13). En el caso no masivo y $D = 3$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
J_C(k, p) = & \frac{1}{2\Delta^2} \left\{ p^2(k \cdot p - 2k^2)J_A - p^4J_B + (k \cdot p - 2p^2)I_A - p^2I_B \right. \\
& \left. - \frac{\pi k \cdot p}{k^2\sqrt{-k^2}} - \frac{4\pi p^2}{\sqrt{-k^2}p^2q^2} \right\}, \quad (3.275)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_D(k, p) = & \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ k^2(3k \cdot p - p^2)J_A + p^2(3k \cdot p - k^2)J_B + (3k \cdot p - k^2)I_A \right. \\
& \left. + (3k \cdot p - p^2)I_B + \frac{\pi}{\sqrt{-k^2}} + \frac{\pi}{\sqrt{-p^2}} + \frac{8k \cdot p}{\sqrt{-k^2}p^2q^2} \right\}. \quad (3.276)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (3.275), (3.4.1) estan de acuerdo con [13] ver las ecuaciones (36) y (37). A continuación consideramos el caso $D = 4 - 2\epsilon$.

CASO $D = 4 - 2\epsilon$:

En el caso masivo y $D = 4 - 2\epsilon$ obtenemos:

$$J_C(k, p) = \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ 2p^2 I_0 - 4 \frac{k \cdot p}{k^2} \left(1 + \frac{m^2}{(k^2 - m^2)} L' \right) + \{2k \cdot p - 3p^2\} I_A - p^2 I_B \right. \\ \left. + \{-2k \cdot p(m^2 - p^2) + 3p^2(m^2 - k^2)\} J_A + p^2(m^2 - p^2) J_B \right\}, \quad (3.277)$$

$$J_D(k, p) = \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ -2(k \cdot p) I_0 + 2 \left(1 + \frac{m^2}{(k^2 - m^2)} L' \right) + 2 \left(1 + \frac{m^2}{(k^2 - m^2)} L \right) \right. \\ \left. + (2k \cdot p - k^2) I_A + (2k \cdot p - p^2) I_B + [k^2(m^2 - p^2) - 2k \cdot p(m^2 - k^2)] J_A \right. \\ \left. + [p^2(m^2 - k^2) - 2k \cdot p(m^2 - p^2)] J_B \right\}. \quad (3.278)$$

Las ecuaciones (3.277) y (3.278) estan de acuerdo con [11] ver la ecuación (57). Por último consideramos el caso cuando $m = 0$ y $D = 4 - 2\epsilon$:

$$J_C(k, p) = \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ 2p^2 I_0 - 4 \frac{k \cdot p}{k^2} + (2k \cdot p - 3p^2) I_A - p^2 I_B - p^4 J_B \right. \\ \left. + p^2(2k \cdot p - 3k^2) J_A \right\}, \quad (3.279)$$

$$J_D(k, p) = \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ -2(k \cdot p) I_0 + 4 + (2k \cdot p - k^2) I_A + (2k \cdot p - p^2) I_B \right. \\ \left. - k^2(p^2 - 2k \cdot p) J_A - p^2(k^2 - 2k \cdot p) J_B \right\}. \quad (3.280)$$

La Integral Tensorial $J_{\mu\alpha\beta}$

La integral que nos resta calcular es (3.49) la cual no es necesario calcular puesto que esta la podemos escribir en términos de algunas de las integrales anteriores:

$$J_{\mu\alpha\beta} = \int d^D w \frac{w^\mu w_\alpha w_\beta}{w^4[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} . \quad (3.281)$$

De la ecuación (3.42) tenemos que el factor multiplicativo de esta integral es $-8p^\alpha k^\beta$, sea entonces que calculamos

$$\begin{aligned} J_{\mu\alpha} &= \int d^D w \frac{w_\mu w_\alpha k \cdot w}{w^4[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \\ &= \frac{1}{2} \left[(k^2 - m^2) \int d^D w \frac{w_\mu w_\alpha}{w^4[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \right. \\ &\quad + \int d^D w \frac{w_\mu w_\alpha}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \\ &\quad \left. - \int d^D w \frac{w_\mu w_\alpha}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} \right] , \end{aligned} \quad (3.282)$$

donde hemos usado que $(k-w)^2 = k^2 + w^2 - 2k \cdot w$. Las dos primeras integrales ya las hemos calculado. La tercer integral la multiplicamos ahora por p^α , entonces

$$p^\alpha \int d^D w \frac{w_\mu w_\alpha}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} = \int d^D w \frac{w_\mu w \cdot p}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} . \quad (3.283)$$

Usando $(p-w)^2 = p^2 + w^2 - 2p \cdot w$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \int d^D w \frac{w_\mu w \cdot p}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} &= \frac{1}{2} \left[(p^2 - m^2) \int d^D w \frac{w_\mu}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} \right. \\ &\quad \left. + \int d^D w \frac{w_\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} - \int d^D w \frac{w_\mu}{w^4} \right] . \end{aligned} \quad (3.284)$$

La última integral es cero y las dos primeras integrales las hemos ya calculado anteriormente [ver las ecuaciones (3.132) y (3.263)]. Entonces,

$$\begin{aligned} -8p^\alpha k^\beta J_{\mu\alpha\beta} &= \\ &\quad -2p^\alpha (k^2 - m^2) J_{\mu\alpha} - 2p^\alpha I_{\mu\alpha} + i\pi^2 p^\mu [Q_2(p) - (p^2 - m^2)Q_4(p)] \\ &\quad -2k^\beta (p^2 - m^2) J_{\mu\beta} - 2k^\beta I_{\mu\beta} + i\pi^2 k^\mu [Q_2(k) - (k^2 - m^2)Q_4(k)] . \end{aligned} \quad (3.285)$$

Por lo tanto, tenemos los resultados completos de las integrales independientes para el

vértice Λ_1^μ en dimensión arbitraria y norma arbitraria. De tal manera que sustituyendo estos en el vértice Λ_1^μ que a continuación escribimos tenemos el resultado deseado.

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^\mu = & \frac{\pi^2 e^2}{(2\pi)^D} \left\{ 2(k \cdot p)(k + p)^\mu I_0 + \frac{2}{D}(k + p)^\mu \tilde{K}_0 \right. \\
& - [k^\mu(k^2 + 5(k \cdot p)) + p^\mu(k^2 + (k \cdot p))] I_A \\
& - [p^\mu(p^2 + 5(k \cdot p)) + k^\mu(p^2 + (k \cdot p))] I_B \\
& + 2 \left[-\frac{k^2}{D} p^\mu + \left(\left(1 - \frac{1}{D}\right) k^2 + (k \cdot p) \right) k^\mu \right] I_C \\
& + 2 \left[\left(1 - \frac{2}{D}\right) (k \cdot p)(p + k)^\mu + p^\mu k^2 + k^\mu p^2 \right] I_D \\
& + 2 \left[\left(\left(1 - \frac{1}{D}\right) p^2 + (k \cdot p) \right) p^\mu - \frac{p^2}{D} k^\mu \right] I_E \\
& + (\xi - 1) \left[\frac{1}{D} [2(k + p)^\mu(k \cdot p) - p^\mu(k^2 - m^2) - k^\mu(p^2 - m^2)] I_0 \right. \\
& - (k + p)^\mu [k^2 + (k \cdot p)] I_A - (k + p)^\mu [(k \cdot p) + p^2] I_B \\
& + \left[k^\mu \left((k \cdot p) + k^2 \left(1 - \frac{1}{D}\right) \right) - \frac{k^2}{D} p^\mu \right] I_C \\
& + \left[p^\mu \left(k^2 + \left(1 - \frac{2}{D}\right) (k \cdot p) \right) + k^\mu \left(p^2 + \left(1 - \frac{2}{D}\right) (k \cdot p) \right) \right] I_D \\
& + \left[-\frac{p^2}{D} k^\mu + p^\mu \left((k \cdot p) + \left(1 - \frac{1}{D}\right) p^2 \right) \right] I_E + \frac{1}{D} (k + p)^\mu \tilde{K}_0 \\
& + \left[k^\mu \left(\left(m^2 + k^2 \left(1 - \frac{2}{D}\right) \right) (k \cdot p) + \left(1 - \frac{1}{D}\right) (-p^2 + m^2) k^2 \right) \right. \\
& \left. + p^\mu \left(2 \left(1 - \frac{1}{D}\right) (k \cdot p) k^2 + \frac{k^2}{D} (k^2 - m^2) \right) \right] J_C \\
& + \left[\left(p^2(k^2 + m^2) + 2 \left(1 - \frac{2}{D}\right) (k \cdot p)^2 + \left(1 - \frac{2}{D}\right) (k \cdot p)(m^2 - p^2) \right) k^\mu \right. \\
& + \left(k^2(p^2 + m^2) + 2 \left(1 - \frac{2}{D}\right) (k \cdot p)^2 + \left(1 - \frac{2}{D}\right) (m^2 - k^2)(k \cdot p) \right) p^\mu \left. \right] J_D \\
& + \left[k^\mu \left(2 \left(1 - \frac{1}{D}\right) p^2(k \cdot p) + \frac{p^2}{D} (p^2 - m^2) \right) + p^\mu \left((k \cdot p) \left(m^2 + \left(1 - \frac{2}{D}\right) p^2 \right) \right. \right. \\
& \left. + \left(1 - \frac{1}{D}\right) p^2(m^2 - k^2) \right) \left. \right] J_E + p^\mu [Q_2(p) + (m^2 - p^2)Q_4(p)] \\
& \left. + k^\mu [Q_2(k) + (m^2 - p^2)Q_4(k)] \right\}. \tag{3.286}
\end{aligned}$$

A continuación vamos a calcular los vertices Λ_2^μ y Λ_3^μ .

3.4.2. Los Vértices Λ_2^μ y Λ_3^μ a un Lazo

Regresando a la expresión (3.19) tenemos que

$$\begin{aligned}
\Lambda_2^\mu &= \frac{2ie^2}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2p-w)_\alpha}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} \left[g^{\alpha\mu} - (1-\xi) \frac{w^\alpha w^\mu}{w^2} \right] \\
&= \frac{2ie^2}{(2\pi)^D} \left[\int d^D w \frac{(2p-w)^\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} - (1-\xi) \int d^D w \frac{(2p-w)_\alpha w^\alpha w^\mu}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} \right] \\
&= \frac{2ie^2}{(2\pi)^D} \left\{ 2p^\mu \int d^D w \frac{1}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} - \int d^D w \frac{w^\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} \right. \\
&\quad \left. - (1-\xi) \left[2p_\alpha \int d^D w \frac{w^\alpha w^\mu}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} - \int d^D w \frac{w^\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Las integrales independientes a calcular son:

$$K(p) = \int d^D w \frac{1}{w^2[(p-w)^2 - m^2]}, \quad (3.287)$$

$$K^\mu(p) = \int d^D w \frac{w^\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2]}, \quad (3.288)$$

$$L^{\alpha\mu}(p) = \int d^D w \frac{w^\alpha w^\mu}{w^4[(p-w)^2 - m^2]}. \quad (3.289)$$

Hacemos el cambio de variable $p-w = w'$ en la integral (3.287), tal que,

$$K(p) = \int d^D w' \frac{1}{(w'^2 - m^2)(p-w')^2}, \quad (3.290)$$

la cual hemos calculado [ver (2.29), (2.16)]. Entonces

$$K(p) = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} (m^2)^{\frac{D}{2}-2} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right). \quad (3.291)$$

Usamos la formula (3.241), tal que:

$${}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) = \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right)^{\frac{D}{2}-2} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right). \quad (3.292)$$

Por lo tanto,

$$K(p) = -i\pi^{D/2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-2} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{p^2 - m^2}\right). \quad (3.293)$$

La integral (3.288) la escribimos de la siguiente manera:

$$K^\mu(p) = \int d^D w \frac{w^\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} = ap^\mu. \quad (3.294)$$

Entonces,

$$a = \frac{1}{p^2} \int d^D w \frac{w \cdot p}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} . \quad (3.295)$$

Del hecho que $w \cdot p = \frac{1}{2}[p^2 + w^2 - (w-p)^2]$, además de sumar y restar m^2 en el numerador de la integral obtenemos:

$$a = \frac{1}{2p^2} \left[\int d^D w \frac{1}{w^2 - m^2} + (p^2 - m^2) \int d^D w \frac{1}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} \right] . \quad (3.296)$$

Por lo tanto,

$$K^\mu(p) = \frac{p^\mu}{2p^2} \left[\int d^D w \frac{1}{w^2 - m^2} + (p^2 - m^2) \int d^D w \frac{1}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} \right] . \quad (3.297)$$

Estas integrales ya las hemos calculado en el capítulo 5 (ver para la primer integral (2.18) y (2.29), (2.16) para la segunda integral). Finalmente, sea que escribimos $L^{\mu\nu}(p)$ de la siguiente manera:

$$L^{\alpha\mu}(p) = \int d^D w \frac{w^\alpha w^\mu}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} = a \left[\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - \frac{1}{D} g^{\mu\nu} \right] + b g^{\mu\nu} . \quad (3.298)$$

Si multiplicamos por $g_{\mu\nu}$ esta integral obtenemos:

$$b = \frac{1}{D} \int d^D w \frac{1}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} = K(p) . \quad (3.299)$$

Ahora multiplicamos (3.298) por $p_\mu p_\nu$, tal que,

$$\int d^D w \frac{(p \cdot w)^2}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} = p^2 \left[\frac{a(D-1)}{a} + b \right] , \quad (3.300)$$

donde

$$(p \cdot w)^2 = \frac{1}{4}[p^4 + w^4 + (w-p)^4 + 2p^2 w^2 - 2w^2(w-p)^2 - 2p^2(w-p)^2] . \quad (3.301)$$

Después de hacer algunas operaciones algebraicas y simplicando tenemos

$$\begin{aligned} & \int d^D w \frac{(p \cdot w)^2}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} = \\ &= \frac{1}{4}(p^2 - m^2) \int d^D w \frac{1}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} + \frac{1}{4} \int d^D w \frac{1}{w^2 - m^2} \\ &+ \frac{1}{2}(p^2 - m^2) \int d^D w \frac{1}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} . \end{aligned} \quad (3.302)$$

Todas estas integrales ya las hemos calculado (ver (2.34), (2.43) para la primer integral, (2.18) para la segunda integral y (2.16), (2.29) para la tercera integral). Por lo tanto,

conocemos que es Λ_2^μ a un lazo en una *norma y dimensión arbitraria* lo mismo ocurre para Λ_3^μ puesto que $\Lambda_3^\mu = \Lambda_2^\mu(k \leftrightarrow p)$. Escribimos Λ_2^μ explícitamente como:

$$\begin{aligned}
-i\Lambda_2^\mu = & \frac{2e^2}{(2\pi)^D} p^\mu \left\{ \left[\frac{3}{2} + \frac{m^2}{2p^2} \right] \left[-i\pi^{D/2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2)^{\frac{D}{2}-2} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \right] \right. \\
& + \frac{i\pi^{D/2}}{2p^2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2)^{\frac{D}{2}-1} - (1 - \xi) \left[\frac{1}{2p^2} (p^2 - m^2) \left[-i\pi^{D/2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \times \right. \right. \\
& (m^2)^{\frac{D}{2}-2} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) - (p^2 - m^2) \left[i\pi^{D/2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2)^{\frac{D}{2}-3} \times \right. \\
& \left. {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, 2; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \right] \left. \left. \right] \right\} \quad (3.303)
\end{aligned}$$

Simplificando y usando las formulas (3.242), (3.292), tenemos que Λ_2^μ en *norma y dimensión arbitraria* es:

$$\begin{aligned}
\Lambda_2^\mu = & \frac{e^2 \pi^2}{(2\pi)^D} p^\mu \left\{ \left[3 + \frac{m^2}{p^2} \right] Q_1(p) - \frac{\pi^{D/2-2}}{p^2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2)^{D/2-1} \right. \\
& \left. + (\xi - 1) \left[\frac{(p^2 - m^2)}{p^2} [Q_1(p) + (p^2 - m^2) Q_3(p)] \right] \right\} \quad (3.304)
\end{aligned}$$

De esta manera conocemos el vértice de 3-puntos Λ^μ a un lazo.

3.5. Sobre el Vértice No Perturbativo de 3-Puntos

La *identidad de Ward-Green-Takahashi* relaciona el vértice con el propagador escalar de la siguiente manera:

$$q^\mu \Gamma_\mu(k, p) = S^{-1}(k) - S^{-1}(p) , \quad (3.305)$$

la cual, hemos verificado explícitamente para la parte divergente del vértice a un lazo. Esta identidad indica que el vértice completo contiene información del propagador escalar. ¿De qué manera podemos extraer esta información?. Para ver esto, podemos empezar con la identidad de Ward que es la forma límite ($k \rightarrow p$) de la identidad 3.305:

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} S^{-1}(p) = \Gamma^\mu(p, p) . \quad (3.306)$$

Podemos verificar esta identidad para el inverso del propagador escalar a orden árbol, $S^{-1}(p) = p^2 - m^2$:

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} [S^{-1}(p)] = \frac{\partial}{\partial p_\mu} [p^2] = 2p^\mu . \quad (3.307)$$

Por otra parte, $\Gamma^\mu(p, p) = 2p^\mu$. Por lo tanto, la identidad de Ward obviamente se satisface al orden árbol. La ecuación (3.305) nos permite dividir Γ_μ en dos partes,

$$\Gamma_\mu(k, p) \equiv \Gamma_\mu^L(k, p) + \Gamma_\mu^T(k, p) , \quad (3.308)$$

donde $\Gamma_\mu^T(k, p)$ es llamado *el vértice transversal* y $\Gamma_\mu^L(k, p)$ es llamado *el vértice longitudinal*. El vértice transversal, por definición, satisface las siguientes propiedades:

$$q^\mu \Gamma_\mu^T(k, p) = 0 \quad \text{y} \quad \Gamma_\mu^T(p, p) = 0 . \quad (3.309)$$

Entonces,

$$q^\mu \Gamma_\mu^L(k, p) = S^{-1}(k) - S^{-1}(p) . \quad (3.310)$$

De esta manera $\Gamma_\mu^T(k, p)$ queda completamente indeterminado. Usando estas propiedades tenemos que:

$$\Gamma_\mu^L(p, p) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} S^{-1}(p) . \quad (3.311)$$

Empleando la regla de la cadena obtenemos

$$\Gamma_\mu^L(p, p) = \frac{\partial p^2}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial p^2} S^{-1}(p) = 2p_\mu \frac{\partial}{\partial p^2} S^{-1}(p) . \quad (3.312)$$

El vértice longitudinal satisface la propiedad de ser simétrico bajo el intercambio del momento k y p , es decir, $\Gamma_L^\mu(k, p) = \Gamma_L^\mu(p, k)$. Uno de los procedimientos más usados para determinar el vértice longitudinal para momentos arbitrarios es

$$p^\mu \rightarrow \frac{1}{2}(k^\mu + p^\mu) \quad \text{y} \quad \frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p^2} \rightarrow \frac{S^{-1}(k) - S^{-1}(p)}{k^2 - p^2} \quad (3.313)$$

cuando $k \neq p$. Entonces

$$\Gamma_L^\mu(k, p) = (k^\mu + p^\mu) \frac{S^{-1}(k) - S^{-1}(p)}{k^2 - p^2} \quad (3.314)$$

Por lo tanto,

$$\Gamma^\mu(k, p) = (k^\mu + p^\mu) \frac{S^{-1}(k) - S^{-1}(p)}{k^2 - p^2} + \Gamma_T^\mu(k, p) . \quad (3.315)$$

Sabemos que $\Gamma^\mu(k, p)$ se puede escribir únicamente en términos de k^μ y p^μ . Por lo tanto, la expresión más general se puede escribir como

$$\Gamma^\mu(k, p) = f k^\mu + g p^\mu \quad (3.316)$$

o alguna combinación lineal de vectores k^μ y p^μ . La ecuación (3.314) nos sugiere escoger una de estas como $k^\mu + p^\mu$. Por lo tanto Γ_T^μ necesita solo un vector para expandirse. Podemos escribir

$$\Gamma_\mu^T(k, p) = \tau(k^2, p^2, q^2) T_\mu(k, p) . \quad (3.317)$$

Siguiendo [10], escogemos

$$T_\mu(k, p) = k \cdot qp^\mu - p \cdot qk^\mu \quad (3.318)$$

Es fácil verificar que

$$q_\mu T^\mu(k, p) = 0 \quad \text{y} \quad T^\mu(k, p) = 0 . \quad (3.319)$$

Por lo tanto

$$\Gamma^\mu(k, p) = (k^\mu + p^\mu) \frac{S^{-1}(k) - S^{-1}(p)}{k^2 - p^2} + \tau(k^2, p^2, q^2)[k \cdot qp^\mu - p \cdot qk^\mu] . \quad (3.320)$$

La única función que nos queda indeterminada es la función τ . Si conocemos esta función podemos saber todo sobre el vértice no perturbativo. Para el vértice a orden árbol la función $\tau_0 = 0$, puesto que,

$$\Gamma_0^\mu(k, p) = k^\mu + p^\mu , \quad \Gamma_{0L}^\mu(k, p) = k^\mu + p^\mu , \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{0T}^\mu(k, p) = 0 . \quad (3.321)$$

El conocimiento de τ a un lazo nos puede guiar a sus posibles estructuras no perturbativas. Esto se obtiene de la siguiente manera:

$$\tau_{1-lazo}[k \cdot qp^\mu - p \cdot qk^\mu] = \Gamma_\mu^{1-lazo} - \frac{S_{1-lazo}^{-1}(k) - S_{1-lazo}^{-1}(p)}{k^2 - p^2}(k^\mu + p^\mu) . \quad (3.322)$$

Ya que conocemos S_{1-lazo}^{-1} y Γ_μ^{1-lazo} , podemos calcular τ_{1-lazo} .

3.5.1. El Vértice Longitudinal a un Lazo

Hemos obtenido que el propagador inverso a un lazo en norma y dimensión arbitraria es [ver la ecuación (2.45)]:

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) = & p^2 - m^2 - \frac{e^2}{(2\pi)^D} \pi^{D/2} (m^2)^{\frac{D}{2}-1} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \times \\ & \left\{ 1 - 2 \frac{(m^2 + p^2)}{m^2} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \right. \\ & \left. + (1 - \xi) \frac{(m^2 - p^2)^2}{m^4} {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, 2; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \right\} . \end{aligned} \quad (3.323)$$

Transformamos las funciones hipergeometricas de esta ecuación usando las fórmulas (3.242) y (3.292) y usando la ecuación (3.314) tenemos que el *vértice longitudinal a un lazo en norma y dimensión arbitraria* es:

$$\begin{aligned} \Gamma_L^\mu(k, p) = & (k^\mu + p^\mu) \frac{e^2 \pi^2}{(2\pi)^D (k^2 - p^2)} \left\{ 2Q_1(k)(m^2 + k^2) - 2Q_1(p)(m^2 + p^2) \right. \\ & \left. + (1 - \xi)[(m^2 - p^2)^2 Q_3(p) - (m^2 - k^2)^2 Q_3(k)] \right\} . \end{aligned} \quad (3.324)$$

A continuación vamos a calcular el vértice transversal.

3.5.2. El Vértice Transversal a un Lazo

El vértice transversal a un lazo en norma y dimensión arbitraria es:

$$\Gamma_T^\mu(k, p) = T^\mu(k, p)\tau(k^2, p^2, q^2), \quad (3.325)$$

donde

$$\begin{aligned} \tau_{D,\xi,m} = & \frac{e^2\pi^2}{2(2\pi)^D\Delta^2} \left\{ (k^2 - 2m^2 + p^2 - 4k \cdot p)[- \tilde{K}_0 + (m^2 + k \cdot p)I_0] \right. \\ & + \frac{2Q_1(p)}{k^2 - p^2} \left[p^2(p^2 - 3k \cdot p) + k^2(k \cdot p - 3p^2) - 2m^2(p^2 + k \cdot p) \right] \\ & - \frac{2Q_1(k)}{k^2 - p^2} \left[k^2(k^2 - 3k \cdot p) + p^2(k \cdot p - 3k^2) - 2m^2(k^2 + k \cdot p) \right] \\ & + (\xi - 1)(m^2 - k^2)(m^2 - p^2) \left[I_0 - (k \cdot p + m^2)J_0 \right. \\ & \left. \left. - \frac{2Q_3(p)}{k^2 - p^2}(k \cdot p + p^2) + \frac{2Q_3(k)}{k^2 - p^2}(k \cdot p + k^2) \right] \right\}. \quad (3.326) \end{aligned}$$

Podemos observar que esta función depende únicamente de las funciones Q_1 y Q_3 puesto que Q_2 y Q_4 dependen de estas dos primeras. Para esto hemos usado las siguientes relaciones entre funciones hipergeométricas[23]:

$$c(1 - z)F(a, b; c; z) - cF(a, b - 1; c; z) + (c - a)zF(a, b; c + 1; z) = 0 \quad (3.327)$$

$$F(a, b; c + 1; z) = \frac{1}{z(c - a)}[cF(a, b - 1; c; z) - c(1 - z)F(a, b; c; z)]. \quad (3.328)$$

Sea $a = 2 - D/2$, $b = D/2$, $c = D/2$ y $z = k^2/(k^2 - m^2)$, tal que:

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2} + 1; \frac{k^2}{k^2 - m^2}\right) = & \frac{D}{2(D - 2)} \left[\left(1 - \frac{m^2}{k^2}\right) {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{k^2}{k^2 - m^2}\right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{m^2}{k^2 - m^2}\right) {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2}; \frac{k^2}{k^2 - m^2}\right) \right]. \quad (3.329) \end{aligned}$$

La última función hipergeométrica es igual a la siguiente función:

$${}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2}; \frac{k^2}{k^2 - m^2}\right) = \left(\frac{k^2 - m^2}{k^2}\right)^{2 - \frac{D}{2}} \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{\frac{D}{2} - 2}. \quad (3.330)$$

Sustituyendo (3.330) en (3.329) y simplificando tenemos que la función $Q_2(k)$ es:

$$Q_2(k) = -\frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{m^2}{k^2}\right) Q_1(k) + \pi^{D/2-2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \frac{(m^2)^{D/2-1}}{k^2} \right]. \quad (3.331)$$

De manera semejante obtenemos que la función $Q_4(k)$ es:

$$Q_4(k) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{m^2}{k^2}\right) Q_3(k) + \frac{1}{k^2} Q_1(k) \right]. \quad (3.332)$$

Ahora tomamos el límite $m = 0$ en la ecuación (3.326), tal que:

$$\begin{aligned} \tau_{D,\xi,m=0} = & \frac{e^2 \pi^2}{2(2\pi)^D \Delta^2} \left\{ (k^2 + p^2 - 4k \cdot p) [(k \cdot p) I_0 - \tilde{K}_0] \right. \\ & - \frac{2Q_1(p)}{k^2 - p^2} [p^4 - 3(k^2 + k \cdot p)p^2 + k^2(k \cdot p)] \\ & + \frac{2Q_1(k)}{k^2 - p^2} [k^4 - 3(p^2 + k \cdot p)k^2 + p^2(k \cdot p)] \\ & + (\xi - 1)k^2 p^2 \left[I_0 - (k \cdot p) J_0 \right. \\ & \left. \left. - \frac{2Q_3(p)}{k^2 - p^2} (k \cdot p + p^2) + \frac{2Q_3(k)}{k^2 - p^2} (k \cdot p + k^2) \right] \right\} \quad (3.333) \end{aligned}$$

En el *caso masivo* y $D = 3$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\tau_{D=3,\xi,m} = & \frac{e^2}{16\pi\Delta^2} \left\{ (k^2 - 2m^2 + p^2 - 4k \cdot p) \times \right. \\
& \left[(m^2 + k \cdot p)I_0 - 2I\left(-\frac{q^2}{4}\right) \right] + 4(k^2(k^2 - 3k \cdot p) - 2(k^2 + k \cdot p)m^2 \\
& + (k \cdot p - 3k^2)p^2) \frac{I(-k^2)}{(k^2 - p^2)} - 4(k^2(k \cdot p - 3p^2) + p^2(p^2 - 3k \cdot p) \\
& - 2m^2(k \cdot p + p^2)) \frac{I(-p^2)}{(k^2 - p^2)} + (\xi - 1)(m^2 - k^2)(m^2 - p^2) \left[I_0 \right. \\
& - \frac{4m(k^2 + k \cdot p)}{(k^2 - m^2)^2(k^2 - p^2)} + \frac{4m(p^2 + k \cdot p)}{(m^2 - p^2)^2(k^2 - p^2)} - \frac{1}{\chi} \left[2(m^2 + k \cdot p) \times \right. \\
& \left(\frac{I_0}{2}(m^2 + k \cdot p)q^2 + m \left(\frac{(k^2 - m^2)q^2 - (k^2 + m^2)(k^2 - p^2)}{(k^2 - m^2)^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{k^2 - p^2 + q^2}{m^2 - p^2} \right) \right] \left. \right] \left. \right\}, \tag{3.334}
\end{aligned}$$

donde

$$I(-k^2) = \frac{1}{\sqrt{-k^2}} \arctan \sqrt{-\frac{k^2}{m^2}}, \tag{3.335}$$

$$I(-q^2/4) = \frac{2}{\sqrt{-q^2}} \arctan \sqrt{-\frac{q^2}{4m^2}}. \tag{3.336}$$

En el caso no masivo y $D = 3$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\tau_{D=3,\xi,m=0} = & \frac{e^2}{8\Delta^2} \left\{ -\frac{p^4 - 3(k^2 + k \cdot p)p^2 + k^2(k \cdot p)}{\sqrt{-p^2}(k^2 - p^2)} \right. \\
& + \frac{k^4 - 3(p^2 + k \cdot p)k^2 + p^2(k \cdot p)}{\sqrt{-k^2}(k^2 - p^2)} \\
& - (k^2 + p^2 - 4k \cdot p) \left(\frac{1}{\sqrt{-q^2}p^2k^2} + \frac{1}{\sqrt{-q^2}} \right) \\
& \left. + (\xi - 1) \frac{\Delta^2}{\sqrt{-q^2}p^2k^2} \right\}. \tag{3.337}
\end{aligned}$$

Usando $\sqrt{-k^2} = k$, $\sqrt{-p^2} = p$, $\sqrt{-q^2} = q$ tenemos:

$$\tau_{D=3,\xi,m=0} = e^2 \frac{k^2 + 2qk + p^2 + 2pq}{2kp(k+p)q(k+p+q)} + (\xi - 1) \frac{e^2}{8qpk} \quad (3.338)$$

En el *caso masivo* y $D = 4 - 2\epsilon$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \tau_{D=4-\epsilon,\xi,m} = & \frac{\alpha}{8\pi\Delta^2} \left\{ (k^2 - 2m^2 + p^2 - 4k \cdot p)[(m^2 + k \cdot p)I_0 + 2S] \right. \\ & + \frac{2L}{k^2 - p^2} \left(p^2(p^2 - 3k \cdot p) + k^2(k \cdot p - 3p^2) - 2m^2(p^2 + k \cdot p) \right) \\ & - \frac{2L'}{k^2 - p^2} \left(k^2(k^2 - 3k \cdot p) + p^2(k \cdot p - 3k^2) - 2m^2(k^2 + k \cdot p) \right) \\ & + (\xi - 1)(m^2 - k^2)(m^2 - p^2) \left[I_0 - \frac{2}{\chi}(k \cdot p + m^2) \left(-q^2 S \right. \right. \\ & + \frac{p^2[(p^2 - m^2)q^2 + 2m^2(k^2 - p^2)]L}{(p^2 - m^2)^2} + \frac{k^2[(k^2 - m^2)q^2 - 2m^2(k^2 - p^2)]L'}{(k^2 - m^2)^2} \Big) \\ & \left. \left. + 2 \frac{(k \cdot p + p^2)(p^2 + m^2)}{(k^2 - p^2)(p^2 - m^2)^2} L - 2 \frac{(k \cdot p + k^2)(k^2 + m^2)}{(k^2 - p^2)(k^2 - m^2)^2} L' \right] \right\} \quad (3.339) \end{aligned}$$

En el *caso no masivo* y $D = 4 - 2\epsilon$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \tau_{D=4-\epsilon,\xi,m=0} = & \frac{\alpha}{8\pi\Delta^2} \left\{ (k^2 + p^2 - 4k \cdot p) \left(k \cdot p I_0 + \ln \frac{q^4}{p^2 k^2} \right) \right. \\ & + \frac{(k^2 + p^2)q^2 - 8p^2 k^2}{p^2 - k^2} \ln \frac{k^2}{p^2} + 2(\xi - 1)k^2 p^2 \left[\frac{I_0}{2} + \frac{p^2(k^2 + k \cdot p) \ln(-p^2)}{k^2 - p^2} \right. \\ & \left. \left. - \frac{k^2(p^2 + k \cdot p)}{k^2 - p^2} \ln(-k^2) + k \cdot p \ln(-q^2) \right] \right\} \quad (3.340) \end{aligned}$$

3.5.3. Técnica de Delbourgo

Hemos visto que

$$\Gamma^\mu(k, p) = \Gamma_L^\mu(k, p) + \Gamma_T^\mu(k, p) \quad (3.341)$$

Podemos trabajar con una base de vectores diferentes:

$$P = \frac{1}{2}(k + p) , \quad q = k - p \quad (3.342)$$

Entonces

$$\Gamma^\mu(P, q) = \Gamma_L^\mu(P) + \Gamma_T^\mu(P, q) \quad (3.343)$$

Para calcular Γ_T^μ , necesitamos únicamente identificar el coeficiente de q^μ en $\Gamma^\mu(P, q)$. Por ejemplo para el vértice Λ_1^μ tenemos que

$$-ie\Lambda_1^\mu = -e^3 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{(2p - w)^\alpha (k + p - 2w)^\mu (2k - w)^\beta}{w^4 [(p - w)^2 - m^2][(k - w)^2 - m^2]} [w^2 g_{\alpha\beta} + (1 - \xi) w_\alpha w_\beta] \quad (3.344)$$

Eliminando el término $k + p$ en el numerador y tomando $\xi = 1$ obtenemos:

$$-ie\Lambda_1^\mu = 2e^3 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{w^\mu (4p \cdot k - 2k \cdot w - 2p \cdot w + w^2)}{w^2 [(p - w)^2 - m^2][(k - w)^2 - m^2]} \quad (3.345)$$

$$(3.346)$$

Eliminando el término w^2 en el numerador puesto que $R_\mu^{(1)} = (k + p)_\mu R^{(0)}$. Entonces

$$-ie\Lambda_1^\mu = 2e^3 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{w^\mu (4p \cdot k + (k - w)^2 - k^2 - w^2 + (p - w)^2 - p^2 - w^2)}{w^2 [(p - w)^2 - m^2][(k - w)^2 - m^2]} \quad (3.347)$$

Eliminando w^2 en el numerador y simplificando tenemos

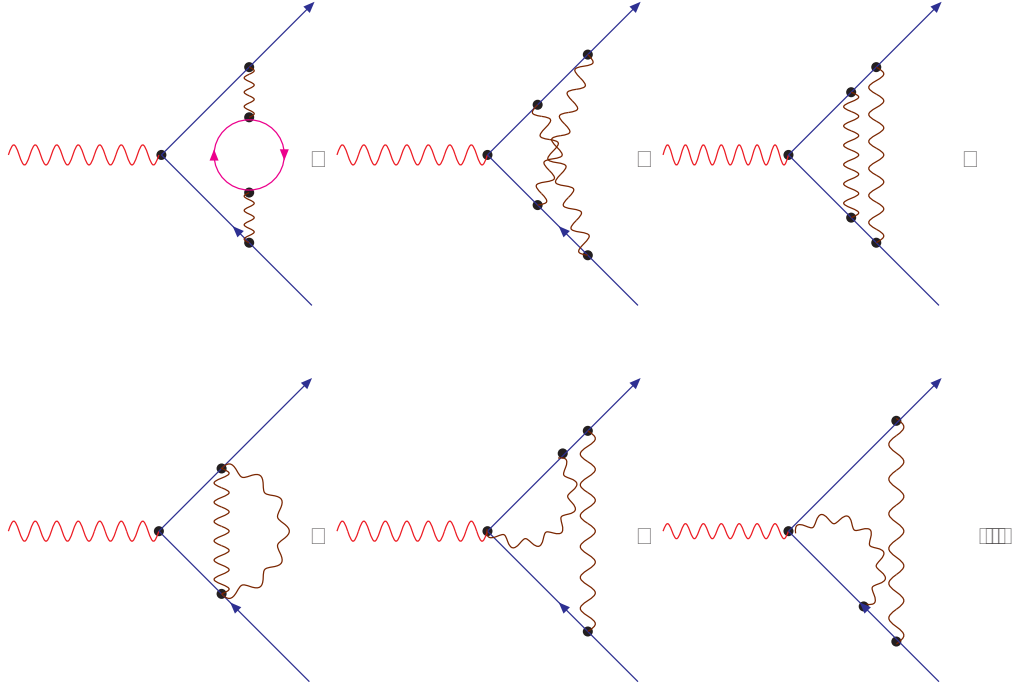
$$-ie\Lambda_1^\mu = \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \{ [4k \cdot p - k^2 - p^2 + 2m^2] I^\mu + K^\mu(p) + K^\mu(k) \} \quad (3.348)$$

Además

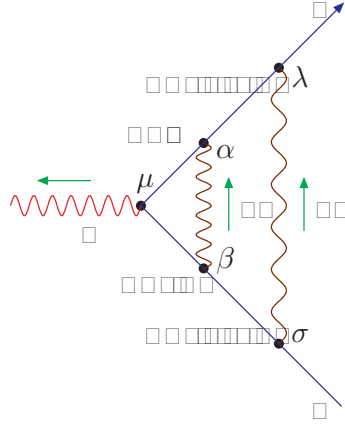
$$-ie\Lambda_2^\mu = \frac{2e^2}{(2\pi)^D} [2p^\mu K(p) - K^\mu(p)] \quad (3.349)$$

$$-ie\Lambda_3^\mu = \frac{2e^2}{(2\pi)^D} [2k^\mu K(k) - K^\mu(k)] \quad (3.350)$$

Por lo tanto, para calcular $\Lambda^\mu = \Lambda_1^\mu + \Lambda_2^\mu + \Lambda_3^\mu$ solamente necesitamos calcular las integrales I^μ , $K^\mu(k)$ y $K(k)$. Antes necesitamos calcular las integrales $R^{(0)}$, I , I^μ y $I^{\mu\nu}$ en la norma de Feynman. Usando esta técnica obtenemos el mismo resultado que antes. Podríamos tratar de encontrar el vértice transverso al nivel de dos lazos usando esta técnica. Algunos diagramas a calcular del vértice de 3 puntos son:



Para el diagrama



Usando reglas de Feynman obtenemos

$$\begin{aligned}
 -ie\Lambda^\mu &= e^5 \int \frac{d^D w_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D w_2}{(2\pi)^D} \frac{[k + p - 2w_1 - w_2]^\mu [2p - w_1]_\lambda}{[(p - w_1 - w_2)^2 - m^2]} \times \\
 &\quad \frac{[2p - 2w_1 - w_2]_\alpha [2k - 2w_1 - w_2]_\beta [2k - w_1]_\sigma}{[(k - w_1 - w_2)^2 - m^2][(p - w_1)^2 - m^2][(k - w_1)^2 - m^2]} \times \\
 &\quad \left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{w_2^2} + (1 - \xi) \frac{w_2^\alpha w_2^\beta}{w_2^4} \right] \left[-\frac{g^{\lambda\sigma}}{w_1^2} + (1 - \xi) \frac{w_1^\lambda w_1^\sigma}{w_1^4} \right] \quad (3.351)
 \end{aligned}$$

Eliminando el término $k + p$ del numerador se puede simplificar un poco el cálculo de este vértice.

3.5.4. El Vértice Transverso No Perturbativo

La expresión a un lazo para $\tau(k^2, p^2, q^2)$ es una guía a sus posibles formas en el régimen de acoplamiento fuerte. Cualquier *ansatz* no perturbativo para el vértice transverso debería reducir el resultado perturbativo evaluado anteriormente. Las ecuaciones (2.45) y (3.326) sugieren que τ debería tener la forma general para e^2 como :

$$\begin{aligned} \tau_{D,m}(k^2, p^2, q^2) = & \frac{1}{4\Delta^2} \frac{[S^{-1}(k, \xi = 1) - S^{-1}(p, \xi = 1)]}{[(m^2 + k^2)Q_1(k) - (m^2 + p^2)Q_1(p)]} \times \\ & \left\{ (k^2 - 2m^2 + p^2 - 4k \cdot p) \left[-\tilde{K}_0(k - p) + (m^2 + k \cdot p)I_0 \right] \right. \\ & + \frac{2Q_1(p)}{k^2 - p^2} [p^2(p^2 - 3k \cdot p) + k^2(k \cdot p - 3p^2) - 2m^2(p^2 + k \cdot p)] \\ & \left. - \frac{2Q_1(k)}{k^2 - p^2} [k^2(k^2 - 3k \cdot p) + p^2(k \cdot p - 3k^2) - 2m^2(k^2 + k \cdot p)] \right\} \\ & + \frac{1}{2\Delta^2} \frac{[S^{-1}(k, \xi - 1) - S^{-1}(p, \xi - 1)]}{[(m^2 - k^2)^2 Q_3(k) - (m^2 - p^2)^2 Q_3(p)]} (m^2 - k^2)(m^2 - p^2) \times \\ & \left\{ I_0 - (k \cdot p + m^2)J_0 - \frac{2Q_3(p)}{k^2 - p^2}(k \cdot p + p^2) + \frac{2Q_3(k)}{k^2 - p^2}(k \cdot p + k^2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.352)$$

La notación significa que $S(p, \xi = 1)$ es el propagador escalar en la norma de Fermi-Feynman, mientras que, $S(p, \xi - 1)$ es el coeficiente del propagador escalar proporcional a $(\xi - 1)$. Por construcción, esta expresión reproduce el vértice transverso a un lazo en el régimen de acoplamiento débil. En dimensiones específicas y para el caso no masivo, este se simplifica. Por supuesto su forma no es única pero quizá esta es la extensión no perturbativa cercana más simple de nuestros resultados para algún ξ y D . Nosotros esperamos que un cálculo idéntico a dos lazos nos ayudará a encontrar una mejor estructura exacta. Debido a la ausencia de las matrices de Dirac, este cálculo a dos lazos es una tarea formidable no como para QED espinorial y QCD.

3.5.5. Las Identidades Transversas de Takahashi

La ecuación (3.352) es efectivamente una identidad de Ward asociando el vértice transverso al propagador escalar. Hemos estado intentando encontrar relaciones formales de este tipo. Y. Takahashi, [24], descubrió que son llamadas identidades transversas cuyas implicaciones para el vértice han sido examinadas para QED espinorial, [25, 26, 27, 28]. En el caso de SQED, como hay justamente una cantidad desconocida que permanece

indeterminada por la convencional identidad de WFGTI, esta es tentativamente a encontrarse por una identidad transversa de Takahashi, esperando poder ser determinado el vértice de 3 puntos más realisticamente. Deberíamos notar que la forma general del vértice (3.320) demuestra que el coeficiente transverso contribuye a ambas bases de vectores $P_\mu = (p+k)_\mu$ y $q_\mu = (k-p)_\mu$. El rotacional del vértice $q_\mu \Gamma_\nu - q_\nu \Gamma_\mu$ eliminará la componente de Γ proporcional a q , quedandonos con mezcla cinématica $q_\mu P_\nu - q_\nu P_\mu$, multiplicando los coeficientes

$$\frac{S^{-1}(p) - S^{-1}(k)}{p^2 - k^2} + q^2 \tau(p^2, k^2, q^2)/2,$$

que es difícil manejar. Sin embargo la misma combinación cinématica puede también ser obtenida formando el ‘rotacional modificado’ $P_\mu \Gamma_\nu - P_\nu \Gamma_\mu$; este tiene la ventaja de eliminar la parte longitudinal de Γ y *brindarnos únicamente* τ . Sugerimos que las nuevas identidades que involucran el rotacional modificado son más apropiadas y demostrarán más desarrollo para SQED.

Capítulo 4

El Vértice de Cuatro Puntos

4.1. Notation

Como ejercicio de calentamiento, en este capítulo dedicaremos a la metodología para calcular las integrales de la función de 4 puntos.

- Identidades de Integración Por Partes (IIPP).
- Técnica de Mellin-Barnes para resolver integrales.

Comenzamos por establecer la notación. La topología con la que vamos a trabajar es la que se muestra en la figura 4.1. Esto es, cada uno de los propagadores es etiquetado por un entero y lleva un momento específico que satisface la conservación del momento. Esto

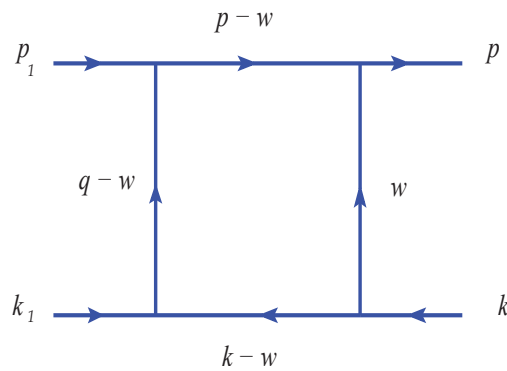


Figura 4.1: Diagrama para la caja off-shell a un lazo.

se puede verificar con la siguiente definición de los propagadores:

$$\begin{aligned} A_1 &= (p - w)^2 - m_1^2 \\ A_2 &= w^2 - m_2^2 \\ A_3 &= (k - w)^2 - m_3^2 \\ A_4 &= (q - w)^2 - m_4^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde $q = k + k_1$ y w es el momento del lazo.

4.2. Representación Paramétrica para Integrales de Lazo

Las dos representaciones paramétricas que pueden ser usadas son

1. *Parametros de Feynman* Esta representación se basa en la idea de Feynman, esto es, expresar un conjunto de propagadores como integrales sobre parametros asignado a cada propagador. La relación entre esos parametros es preescrita por una función delta así que la integración es sobre una unidad de longitud, y normalizada por un radio de funciones de Γ . La preescrición es la siguiente:

$$\frac{1}{A_1^{\nu_1} \dots A_n^{\nu_n}} = \Gamma(N) \left[\prod_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(\nu_i)} \int_0^1 dx_i x_i^{\nu_i-1} \right] \delta \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i A_i \right)^{-N} \quad (4.2)$$

con

$$N = \sum_{i=1}^n \nu_i.$$

2. *Parametros de Schwinger* Esta representación se basa en la propuesta de Schwinger, es decir, usar la función exponencial, en lugar de la función δ para expresar un propagador como una integral sobre algún parametro. Esta vez la integración es sobre un intervalo infinito y para un solo propagador esto es:

$$\frac{1}{A_i^{\nu_i}} = \frac{(-1)^{\nu_i}}{\Gamma(\nu_i)} \int_0^\infty dx_i x_i^{\nu_i-1} \exp(x_i A_i), \quad (4.3)$$

entonces, para un número arbitrario de propagadores tenemos

$$\frac{1}{A_1^{\nu_1} \dots A_n^{\nu_n}} = \left[\prod_{i=1}^n \frac{(-1)^{\nu_i}}{\Gamma(\nu_i)} \int_0^\infty dx_i x_i^{\nu_i-1} \right] \exp \left(\sum_{i=1}^n x_i A_i \right). \quad (4.4)$$

Ambas formas paramétricas nos permiten escribir los propagadores en el denominador como un polinomio que puede ser usado para integrar sobre el momento del lazo con un

simple cambio de variables. El polinomio, para la integral de un lazo, tiene la siguiente estructura

$$\sum_{i=1}^n x_i A_i = a w^2 + 2b \cdot w + c, \quad (4.5)$$

donde hemos tomado aparte la actual estructura interna de los propagadores de las diferentes contribuciones. Precisamente, a es la suma de los parametros asociados con los propagadores que contribuyen al w -lazo. Los tensores b^μ nos dan la contribución de los términos como $p_i \cdot w$, donde p_i puede ser alguno de los momentos externos. Por último, los términos c tienen toda la dependencia de los momentos externos al cuadrado. En todos estos términos siempre tenemos una dependencia lineal en los parametros x_i . Por ahora, tenemos una idea de la estructura de esos términos que puede ser leída la estructura de los polinomios en la ecuación (4.5), de la actual gráfica asociada con estos. Sea que extraemos la estructura de los polinomios asociados con el diagrama general planar mostrado en la fig.(4.1), cuya integral involucra los siguientes propagadores

Propagador	Términos contribuyentes :		
	a	b^μ	c
$A_1 = (p - w)^2 - m_1^2$	w^2	$-2p \cdot w$	$p^2 - m_1^2$
$A_2 = w^2 - m_2^2$	w^2		$-m_2^2$
$A_3 = (k - w)^2 - m_3^2$	w^2	$-2k \cdot w$	$k^2 - m_3^2$
$A_4 = (q - w)^2 - m_4^2$	w^2	$-2q \cdot w$	$q^2 - m_4^2$

Por lo tanto tendremos

$$\begin{aligned} a &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ b^\mu &= -(x_1 p^\mu + x_3 k^\mu + x_4 q^\mu), \\ c &= x_1(p^2 - m_1^2) - x_2 m_2^2 + x_3(k^2 - m_3^2) + x_4(q^2 - m_4^2), \end{aligned} \quad (4.6)$$

para el polinomio asociado con la integral planar general de la ecuación (??).

4.3. Cambio de las Integrales Escalares y Tensoriales

Con esto en mente, podemos aplicar cualquiera de las dos parametrizaciones para una integral arbitraria a un lazo

$$I^D[\nu_1, \dots, \nu_n] = \int \frac{d^D w}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{A_1^{\nu_1} \dots A_n^{\nu_n}},$$

y usando la estructura de los polinomios podemos resolver la integración con respecto al lazo del momento. Podemos hacer esto fácilmente con el siguiente cambio general de variables,

$$w^\mu \rightarrow W^\mu - \frac{1}{a} b^\mu, \quad (4.7)$$

Si aplicamos este cambio de variables a el lado izquierdo de la ecuación (4.5), efectivamente diagonalizan el polinomio (completando los cuadrados del lazo de momento) y tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_i A_i &= a w^2 + 2b \cdot w + c \\ &= a W^2 + \Delta,\end{aligned}\tag{4.8}$$

donde,

$$\Delta = \frac{ac - b^2}{a} = \frac{Q}{P}\tag{4.9}$$

y

$$P = a.\tag{4.10}$$

Entonces

$$\begin{aligned}Q &= \left\{ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) [x_1(p^2 - m_1^2) - x_2 m_2^2 + x_3(k^2 - m_3^2) + x_4(q^2 - m_4^2)] \right. \\ &\quad - 2(x_1 x_3 k \cdot p + x_1 x_4 p \cdot q + x_3 x_4 k \cdot q) \\ &\quad \left. - (x_1^2 p^2 + x_3^2 k^2 + x_4^2 q^2) \right\}\end{aligned}\tag{4.11}$$

$$P = x_1 + x_2 + x_3 + x_4\tag{4.12}$$

En cualquier caso, de acuerdo a lo que hemos discutido, nuestra integral arbitraria de la ecuación (4.7) puede ser escrita de dos maneras. Si usamos la preescripción de Feynman,

$$\begin{aligned}I^D[\nu_i, \dots, \nu_n] &= \Gamma(N) \left[\prod_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(\nu_i)} \int_0^1 dx_i x_i^{\nu_i-1} \right] \delta \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) \\ &\quad \times \int \frac{d^D W}{i\pi^{\frac{D}{2}}} (a W^2 + \Delta)^{-N}\end{aligned}\tag{4.13}$$

y si usamos la preescripción de Schwinger,

$$\begin{aligned}I^D[\nu_i, \dots, \nu_n] &= \left[\prod_{i=1}^n \frac{(-1)^{\nu_i}}{\Gamma(\nu_i)} \int_0^\infty dx_i x_i^{\nu_i-1} \right] \\ &\quad \times \int \frac{d^D W}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \exp(a W^2 + \Delta).\end{aligned}\tag{4.14}$$

Ahora, la dependencia en el lazo de momento es solamente a través de su magnitud, así podemos integrar sobre este. Realizando la rotación de Wick e integrando sobre el momento del lazo. Nos quedamos con las integraciones parametricas sobre las estructuras de Q y P , que pueden ser reconstruidas directamente de la gráfica (usando a , b^μ y c) a la integral que es asociada. Por lo tanto, la integración de lazo resultante es

$$\begin{aligned}I^D[\nu_1 \dots \nu_n] &= \left(\prod_{i=1}^n \frac{(-1)^{\nu_i}}{\Gamma(\nu_i)} \int_0^1 dx_i x_i^{\nu_i-1} \right) \delta \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) \\ &\quad \times \Gamma(N - D) P^{N-D} Q^{D/2-N},\end{aligned}\tag{4.15}$$

en la preescrición de Feynman, mientras que en la preescrición de Schwinger, tenemos

$$I^D[\nu_1 \dots \nu_n] = \left(\prod_{i=1}^n \frac{(-1)^{\nu_i}}{\Gamma(\nu_i)} \int_0^\infty dx_i x_i^{\nu_i-1} \right) \times \frac{1}{P^{D/2}} \exp\left(\frac{Q}{P}\right). \quad (4.16)$$

Esta última expresión puede ser reescrita como:

$$I^D[\nu_1 \dots \nu_n] = \int \mathcal{D}x \frac{1}{P^{D/2}} \exp\left(\frac{Q}{P}\right) \quad (4.17)$$

donde

$$\int \mathcal{D}x = \prod_{i=1}^n \frac{(-1)^{\nu_i}}{\Gamma(\nu_i)} \int_0^\infty dx_i x_i^{\nu_i-1}.$$

Y, cuando tenemos integrales tensoriales, necesitaremos identidades como,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D W}{i\pi^{\frac{D}{2}}} W^\mu \exp(aW^2) &= 0, \\ \int \frac{d^D W}{i\pi^{\frac{D}{2}}} W^\mu W^\nu \exp(aW^2) &= -\frac{1}{2a} g^{\mu\nu} \frac{1}{a^{D/2}}, \\ \int \frac{d^D W}{i\pi^{\frac{D}{2}}} W^\mu W^\nu W^\rho W^\sigma \exp(aW^2) &= \frac{1}{4a^2} \{g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}\} \frac{1}{a^{D/2}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Así, como un ejemplo concreto, consideremos la integral tensorial asociada con w^μ

$$\begin{aligned} I^D[\nu_1 \dots \nu_n]\{w^\mu\} &= \int \mathcal{D}x \int \frac{d^D W}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \left\{ W^\mu - \frac{b^\mu}{a} \right\} \exp\left(aW^2 + \frac{Q}{P}\right) \\ &= \int \mathcal{D}x \frac{b^\mu}{a} \frac{1}{P^{D/2}} \exp\left(\frac{Q}{P}\right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

pero, recordemos que $a = P$, así que,

$$I^D[\nu_1 \dots \nu_n]\{w^\mu\} = \int \mathcal{D}x \frac{b^\mu}{P^{(D+2)/2}} \exp\left(\frac{Q}{P}\right) \quad (4.20)$$

Vamos a ver la respuesta que nos proporciona la integración. Conocemos que los términos a , b^μ y c , tienen dependencia lineal en los parametros de Schwinger x_i . Entonces, podemos absorber los factores extra de x_i (viniendo de a , b^μ , c) y P en los términos ya presentes. Notemos que tendremos dos tipos de modificaciones en nuestro integrando

1. potencias extra en los parametros de Schwinger

$$\frac{x_i^{\nu_i-1}}{\Gamma(\nu_i)} \underbrace{x_i}_{\text{de } b^\mu} \rightarrow \nu_i \frac{x_i^{\nu_i}}{\Gamma(\nu_i+1)} \sim \nu_i \mathbf{i}^+$$

2. y dimensiones extras

$$\frac{1}{P^{D/2}} \underbrace{\frac{1}{P}}_{\text{from } \frac{1}{a}} \rightarrow \frac{1}{P^{(D+2)/2}} \sim \mathbf{d}^+.$$

asi que $1/P = 1/a$ actua como un aumento en la dimensi3n

$$\frac{1}{P} \Rightarrow \mathbf{d}^+, \quad P \Rightarrow \mathbf{d}^- = \nu_1 \mathbf{1}^+ + \nu_2 \mathbf{2}^+ + \nu_3 \mathbf{3}^+ + \nu_4 \mathbf{4}^+ \quad (4.21)$$

donde

$$\mathbf{d}^\pm I^D[\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n] \sim I^{D \pm 2}[\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n]. \quad (4.22)$$

En resumen, el t3rmino b^μ es lineal en los parametros de x_i , as3 que el cambio de potencias actual ocurrir3 en un propagador una vez. La integral en la ecuaci3n (4.20) ser3 una suma de integrales con una estructura similar, esquematicamente

$$I^D[\nu_1, \dots, \nu_i, \dots, \nu_n] \{w^\mu\} \sim \sum \nu_i I^{D+2}[\nu_1, \dots, \nu_{i+1}, \dots, \nu_n] \{p_k^\mu\}. \quad (4.23)$$

As3 hemos escrito nuestras integrales tensoriales en t3rminos de una suma de integrales que tienen potencias y dimensiones extra en los propagadores. Este procedimiento puede ser aplicado a integrales con cualquier n3mero de tensores en el numerador, todo lo que necesitamos es aplicar el cambio de variables dado por w^μ .

4.3.1. Reducci3n de Integrales Escalares Usando Identidades de Integraci3n por Partes

En este momento, cualquier integral tensorial a un lazo puede ser escrita como integrales escalares con potencias y dimensiones extra en los propagadores. Ahora necesitamos un procedimiento para reducir estas potencias y dimensiones, para ser capaz de identificar que integrales escalares necesitamos calcular, y siempre que podemos hacer esto, podemos tener el resultado para cualquier otra integral escalar. Para lograr esto, construiremos un sistema de 4 identidades de Integraci3n por Partes (IBP), comenzando de la siguiente identidad:

$$\int \frac{d^D w}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{\partial}{\partial w^\mu} \left[\frac{A_i^\mu}{A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} A_3^{\nu_3} A_4^{\nu_4}} \right] \equiv 0. \quad (4.24)$$

donde $i = 1, 2, 3, 4$ las definiciones de los propagadores son aquellos presentados en la sección previa. Aplicando la derivada obtenemos las siguientes 4 identidades:

$$\begin{aligned} & [(p^2 - m_1^2 - m_2^2)\nu_1\mathbf{1}^+ + (k^2 - m_2^2 - m_3^2)\nu_3\mathbf{3}^+ + (q^2 - m_2^2 - m_4^2)\nu_4\mathbf{4}^+] I^D \\ & = (D - \nu_1 - 2\nu_2 - \nu_3 - \nu_4)I^D + [(\nu_1\mathbf{1}^+ + \nu_3\mathbf{3}^+ + \nu_4\mathbf{4}^+)\mathbf{2}^-] I^D, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & [(p^2 - m_1^2 - m_2^2)\nu_2\mathbf{2}^+ + ((k-p)^2 - m_1^2 - m_3^2)\nu_3\mathbf{3}^+ + ((q-p)^2 - m_1^2 - m_4^2)\nu_4\mathbf{4}^+] I^D \\ & = -(D - 2\nu_1 - \nu_2 - \nu_3 - \nu_4)I^D + [(\nu_2\mathbf{2}^+ + \nu_3\mathbf{3}^+ + \nu_4\mathbf{4}^+)\mathbf{1}^-] I^D, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} & [((k-p)^2 - m_1^2 - m_3^2)\nu_1\mathbf{1}^+ + (k^2 - m_2^2 - m_3^2)\nu_2\mathbf{2}^+ + ((q-k)^2 - m_3^2 - m_4^2)\nu_4\mathbf{4}^+] I^D \\ & = -(D - \nu_1 - \nu_2 - 2\nu_3 - \nu_4)I^D + [(\nu_1\mathbf{1}^+ + \nu_2\mathbf{2}^+ + \nu_4\mathbf{4}^+)\mathbf{3}^-] I^D, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} & [((q-p)^2 - m_1^2 - m_4^2)\nu_1\mathbf{1}^+ + (q^2 - m_2^2 - m_4^2)\nu_2\mathbf{2}^+ + ((q-k)^2 - m_3^2 - m_4^2)\nu_3\mathbf{3}^+] I^D \\ & = -(D - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 - 2\nu_4)I^D + [(\nu_1\mathbf{1}^+ + \nu_2\mathbf{2}^+ + \nu_3\mathbf{3}^+)\mathbf{4}^-] I^D. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Notemos que este sistema se ve como el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (p^2 - m_1^2 - m_2^2)X + (k^2 - m_2^2 - m_3^2)Z + (q^2 - m_2^2 - m_4^2)W &= A \\ (p^2 - m_1^2 - m_2^2)Y + ((k-p)^2 - m_1^2 - m_3^2)Z + ((q-p)^2 - m_1^2 - m_4^2)W &= B \\ ((k-p)^2 - m_1^2 - m_3^2)X + (k^2 - m_2^2 - m_3^2)Y + ((q-k)^2 - m_3^2 - m_4^2)W &= C \\ ((q-p)^2 - m_1^2 - m_4^2)X + (q^2 - m_2^2 - m_4^2)Y + ((q-k)^2 - m_3^2 - m_4^2)Z &= D \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde $\{X = \nu_1\mathbf{1}^+, Y = \nu_2\mathbf{2}^+, Z = \nu_3\mathbf{3}^+, W = \nu_4\mathbf{4}^+\}$ (representa integrales con potencias extras en los propagadores) y $\{A, B, C, D\}$ son integrales con potencias menos y pinchings. Este sistema es fácilmente invertido así que terminamos con cuatro identidades de IBP que pueden reducir o bajar las potencias de propagadores, esquematicamente

$$\nu_i\mathbf{i}^+ I^D = c_0 I^D + [c_1\mathbf{1}^- + c_2\mathbf{2}^- + c_3\mathbf{3}^- + c_4\mathbf{4}^-] I^D$$

donde $i = 1, 2, 3, 4$ y los $\{c_i\}$ son coeficientes que dependen de razones de polinomios de los momentos externos $\{p^2, k^2, q^2, (k-p)^2, (q-p)^2, (q-k)^2\}$. En el caso en el que $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$. El sistema de ecuaciones (4.29) se reduce a:

$$\begin{aligned} (p^2 - 2m^2)X + (k^2 - 2m^2)Z + (q^2 - 2m^2)W &= A \\ (p^2 - 2m^2)Y + ((k-p)^2 - 2m^2)Z + ((q-p)^2 - 2m^2)W &= B \\ ((k-p)^2 - 2m^2)X + (k^2 - 2m^2)Y + ((q-k)^2 - 2m^2)W &= C \\ ((q-p)^2 - 2m^2)X + (q^2 - 2m^2)Y + ((q-k)^2 - 2m^2)Z &= D \end{aligned} \quad (4.30)$$

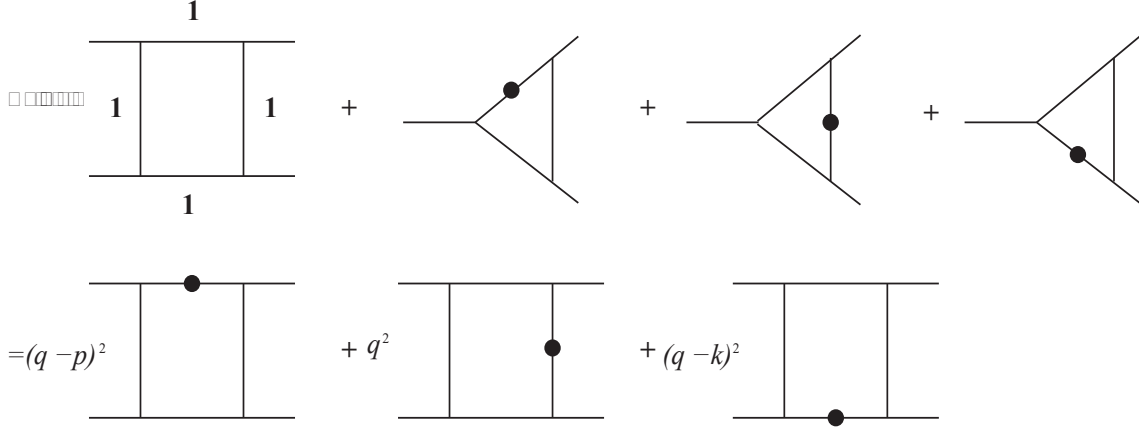


Figura 4.2: Representación diagramática de una de las Identidades de Integración Por Partes (IIPP) para el caso $m = 0$ y $\nu_i = 1$ para $i = 1, \dots, 4$.

Así mismo, para el caso $m = 0$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
 p^2 X + k^2 Z + q^2 W &= A \\
 p^2 Y + (k-p)^2 Z + (q-p)^2 W &= B \\
 (k-p)^2 X + k^2 Y + (q-k)^2 W &= C \\
 (q-p)^2 X + q^2 Y + (q-k)^2 Z &= D
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

Si hacemos una representación diagramática de este sistema de ecuaciones. Sea por ejemplo, que tomamos la última ecuación de este sistema en el caso en que $\nu_i = 1$ para $i = 1, \dots, 4$. Entonces tendríamos que calcular los diagramas que se muestran en la figura 4.2 donde los puntos significan una potencia más en el propagador. Se puede hacer una representación diagramática similar para el resto de las Identidades de Integración Por Partes (IIPP). Para el caso $m = 0$ tenemos que la solución al sistema queda de la siguiente

forma:

$$\begin{aligned}
X = & \frac{1}{\chi} (Dk^2(-k^2(p \cdot q) + p^2(k \cdot q - q^2) + q^2(k \cdot p)) + A(k^2 - 2k \cdot q + q^2)(-p^2(k \cdot q) \\
& + k^2(p \cdot q) - k^2q^2 + q^2(k \cdot p)) + q^2(Bk^2(k^2 - 2k \cdot q + q^2) + C(-k^2p^2 + p^2(k \cdot q) \\
& + k^2(p \cdot q) - q^2(k \cdot p)))) , \tag{4.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y = & \frac{1}{\chi} ((Bk^2 - Cp^2 - 2B(k \cdot q) + 2(p \cdot q))(-p^2(k \cdot q) + k^2(p \cdot q)) - (B(k^4 \\
& + (p^2 + 2(k \cdot p))k \cdot q - k^2(k \cdot p - 2k \cdot q + p \cdot q)) + C(p^4 + (k^2 + 2k \cdot p)(p \cdot q) \\
& - p^2(k \cdot p + k \cdot q + 2p \cdot q)))q^2 - (Bk^2 + Cp^2 - (B + C)k \cdot p)q^4 + A(k^2 + p^2 \\
& - 2k \cdot p)(k^2 - 2k \cdot q + q^2)(p^2 - 2p \cdot q + q^2) + D(k^2 + p^2 - 2k \cdot p)(p^2k \cdot q \\
& + k^2(-p^2 + p \cdot q) - q^2(k \cdot p))) , \tag{4.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z = & \frac{1}{\chi} (A(p^2 - 2p \cdot q + q^2)(-k^2(p \cdot q) + p^2(k \cdot q - q^2) + q^2(k \cdot p)) + Dp^2(-p^2(k \cdot q) \\
& + k^2(p \cdot q) - k^2q^2 + q^2(k \cdot p)) + q^2(Cp^2(p^2 - 2p \cdot q + q^2) + B(-k^2p^2 + p^2(k \cdot q) \\
& + k^2(p \cdot q) - q^2(k \cdot p)))) , \tag{4.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{\chi} (Dk^2p^2(k^2 + p^2 - 2k \cdot p) - (Bk^2 - Cp^2)(-p^2k \cdot q + k^2(p \cdot q)) - ((B + C)k^2p^2 \\
& - (Bk^2 + Cp^2)k \cdot p)q^2 + A(k^2 + p^2 - 2k \cdot p)(p^2(k \cdot q) + k^2(-p^2 + p \cdot q) \\
& - q^2(k \cdot p))) , \tag{4.35}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\chi = & 2(p^4((k \cdot q)^2 - k^2q^2) + ((p \cdot q)k^2 - q^2(k \cdot q))^2 - p^2(k^4q^2 + 2(k \cdot p)(k \cdot q)q^2 \\
& + k^2(2(k \cdot q)(p \cdot q) - 2(k \cdot p + k \cdot q + p \cdot q)q^2 + q^4))) . \tag{4.36}
\end{aligned}$$

A continuación vamos a discutir la técnica de Mellin-Barnes.

4.4. Representación de Mellin-Barnes

Una vez que tenemos una integral en la prescripción de Feynman podemos integrar sobre los parámetros usando el método de Mellin-Barnes que se basa en la representación de una potencia de una suma sobre el contorno de la integral. En el caso de una suma de dos términos con potencia arbitraria,

$$(A_1 + A_2)^{-N} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\xi A_1^\xi A_2^{-N-\xi} \frac{\Gamma(-\xi)\Gamma(N+\xi)}{\Gamma(N)} , \tag{4.37}$$

donde hemos introducido una variable compleja ξ y el contorno de integración separa los polos de las funciones Γ como se muestra en la figura 6.2. $A_{1,2}$ son números complejos tal que $|\arg(A_1) - \arg(A_2)| < \pi$. Esta identidad puede ser generalizada a un número

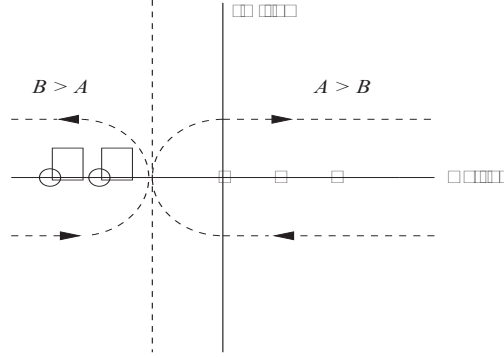


Figura 4.3: El contorno de interacción para las integrales de Mellin-Barnes separa los polos de $\Gamma(\cdots - u)$ y los de $\Gamma(\cdots + u)$. Cerramos el contorno hacia la izquierda o hacia la derecha escogiendo una de las dos series de residuos.

arbitrario de términos para la suma y ser aplicada para convertir el término Q^{D-N} de la representación de Feynman, en un producto de integrales sobre variables complejas. Por iteración de la misma fórmula tenemos que

$$(A_1 + \cdots + A_m)^{-N} = \frac{1}{(2\pi i)^{m-1}} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi_1 \cdots d\xi_{m-1} A_1^{\xi_1} \cdots A_{m-1}^{\xi_{m-1}} A_m^{-N-\xi_1-\cdots-\xi_{m-1}} \\ \times \frac{\Gamma(-\xi_1) \cdots \Gamma(-\xi_{m-1}) \Gamma(N + \xi_1 + \cdots + \xi_{m-1})}{\Gamma(N)}. \quad (4.38)$$

Podemos ver que el integrando tiene polos para $\xi = n$ (rama positiva) y para $\xi = -N - n$ (rama negativa), con $n = 0, 1, 2, \dots$. Si decidimos cerrar el contorno a la derecha. En este caso, sumamos unicamente la primer serie de residuos. Estamos en posición de emplear el teorema del residuo de Cauchy

$$\oint dy f(y) = 2\pi i \sum_i \text{Res}\{f(y_i)\}. \quad (4.39)$$

La única cosa que necesitamos conocer es el residuo de la función Γ en $-n = 0, -1, -2, \dots$.

$$\begin{aligned} \text{Res}\{\Gamma(-x)\}_{x=n} &= \text{Res}\{\Gamma(x)\}_{x=-n} \\ &= \text{Res}\{\Gamma(y-n)\}_{y=0} \\ &= \text{Res}\{\Gamma(y-n-1)!\}_{y=0} \\ &= \text{Res}\left\{\frac{\Gamma(y+1)}{y(y-1)\cdots(y-n)}\right\}_{y=0} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \end{aligned} \quad (4.40)$$

donde hemos usado la propiedad básica de la función Γ

$$x\Gamma(x) = \Gamma(1+x) . \quad (4.41)$$

Sumando todos los residuos obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi A_1^\xi A_2^{-N-\xi} \frac{\Gamma(-\xi)\Gamma(N+\xi)}{\Gamma(N)} \\ &= A_2^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(N+n)}{\Gamma(N)} \frac{(-A_1/A_2)^n}{n!} \\ &= A_2^{-N} \frac{(N, n)}{n!} (-A_1/A_2)^n , \end{aligned} \quad (4.42)$$

que es la expansión de Taylor de $(A_1 + A_2)^{-N}$ alrededor de $A_1 = 0$. Un resultado similar puede ser obtenido cuando cerramos el contorno a la izquierda. En la siguiente sección aplicaremos esta técnica para evaluar el triángulo no masivo.

4.4.1. Representación de Mellin-Barnes para el Triángulo no Masivo

Consideremos el caso del triángulo no masivo como se muestra en la figura 4.4, tal que,

$$\begin{aligned} A_1 &= (p-w)^2 , \\ A_2 &= w^2 , \\ A_3 &= (k-w)^2 . \end{aligned} \quad (4.43)$$

En este caso la ecuación (4.11) se reduce a la siguiente forma:

$$Q = x_1 x_2 p^2 + x_1 x_3 (p-k)^2 + x_2 x_3 k^2 . \quad (4.44)$$

Empleamos la siguiente notación por conveniencia:

$$\begin{aligned} f_{12} &= p^2 \\ f_{13} &= (p-k)^2 \\ f_{23} &= k^2 . \end{aligned} \quad (4.45)$$

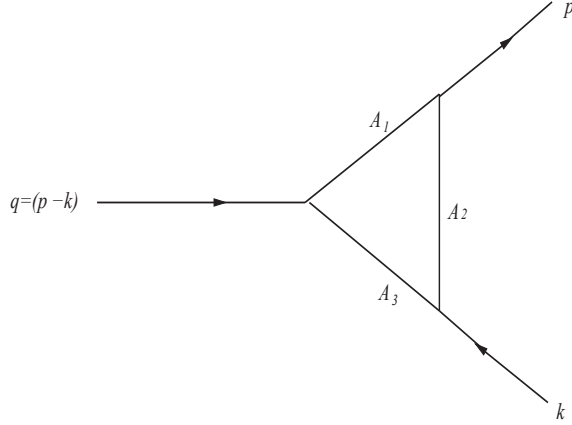


Figura 4.4:

Entonces la representación de Mellin-Barnes para el triángulo con $m_1 = m_2 = m_3 = m = 0$ es:

$$\begin{aligned}
 J_{\Delta}^{m=0} &= \frac{(-1)^{D/2} \Gamma(N - D/2)}{\prod_i \Gamma(\nu_i)} \frac{\int_0^1 (\prod_i dx_i x_i^{\nu_i-1}) \delta(1 - \sum_i x_i)}{[f_{12}x_1x_2 + f_{13}x_1x_3 + f_{23}x_2x_3]^{N-\frac{D}{2}}} \\
 &= \frac{(-1)^{D/2}}{\prod_i \Gamma(\nu_i) (2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 d\lambda_2 \Gamma(-\lambda_1) \Gamma(-\lambda_2) \Gamma\left(N - \frac{D}{2} + \lambda_{12}\right) \times \\
 &\quad f_{12}^{\lambda_1} f_{13}^{\lambda_2} f_{23}^{\frac{D}{2}-N-\lambda_{12}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\prod_l dx_l\right) \delta(1 - \sum x_l) x_1^{\lambda_1+\lambda_2+\nu_1-1} x_2^{\frac{D}{2}-N-\lambda_2+\nu_2-1} \times \\
 &\quad x_3^{\frac{D}{2}-N-\lambda_1+\nu_3-1}, \tag{4.46}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{\Delta}^{m=0} &= \frac{(-1)^{D/2} (f_{23})^{D/2-N}}{\Gamma(D-N) \prod_i \Gamma(\nu_i) (2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 d\lambda_2 \Gamma(-\lambda_1) \Gamma(-\lambda_2) \times \\
 &\quad \Gamma\left(N - \frac{D}{2} + \lambda_{12}\right) \Gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + \nu_1) \Gamma\left(\frac{D}{2} - N - \lambda_2 + \nu_2\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - N - \lambda_1 + \nu_3\right) \\
 &\quad \times \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^{\lambda_2}. \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

Integramos con respecto a λ_2 , tal que, $(p-k)^2 < k^2$. Elegimos así, cerrar el contorno a la derecha. Entonces,

$$\begin{aligned}
J_{\Delta}^{m=0} = & \frac{(-1)^{D/2}(f_{23})^{D/2-N}}{\Gamma(D-N) \prod_i \Gamma(\nu_i)(2\pi i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \Gamma(-\lambda_1) \Gamma\left(\frac{D}{2} + \nu_3 - N - \lambda_1\right) \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{\lambda_1} \times \\
& \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^n \Gamma\left(\frac{D}{2} - n - N + \nu_2\right) \Gamma\left(N - \frac{D}{2} + \lambda_1 + n\right) \Gamma(\lambda_1 + n + \nu_1) \right. \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^{n+\nu_2+D/2-N} \Gamma\left(-n - \frac{D}{2} + N - \nu_2\right) \Gamma\left(\lambda_1 + n + \frac{D}{2} - \nu_3\right) \times \\
& \left. \Gamma(\lambda_1 + n + \nu_2) \right] \quad (4.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\Delta}^{m=0} = & \frac{(-1)^{D/2}(f_{23})^{D/2-N}}{\Gamma(D-N) \prod_i \Gamma(\nu_i)(2\pi i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^n \left\{ \Gamma\left(\frac{D}{2} - n - N + \nu_2\right) \times \right. \\
& \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \Gamma(-\lambda_1) \Gamma\left(\frac{D}{2} + \nu_3 - N - \lambda_1\right) \Gamma\left(N - \frac{D}{2} + \lambda_1 + n\right) \Gamma(\lambda_1 + n + \nu_1) \\
& \times \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{\lambda_1} + \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^{\nu_2+D/2-N} \left[\int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \Gamma(-\lambda_1) \Gamma\left(\frac{D}{2} + \nu_3 - N - \lambda_1\right) \right. \\
& \left. \times \Gamma\left(\lambda_1 + n + \frac{D}{2} - \nu_3\right) \Gamma\left(N - \frac{D}{2} - n - \nu_2\right) \Gamma(\lambda_1 + n + \nu_2) \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{\lambda_1} \right] \left. \right\} \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Ahora integramos con respecto a λ_1 . Si $p^2 < k^2$ elegimos cerrar el contorno a la derecha :

$$\begin{aligned}
J_{\Delta}^{m=0} = & \frac{(-1)^{D/2}(f_{23})^{D/2-N}}{\Gamma(D-N)\prod_i \Gamma(\nu_i)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^l}{l!} \Gamma\left(-n + \frac{D}{2} - N + \nu_2\right) \times \right. \\
& \Gamma\left(\frac{D}{2} + \nu_3 - N - l\right) \Gamma\left(N - \frac{D}{2} + l + n\right) \Gamma(n + l + \nu_1) \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^n \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^l \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^l}{l!} \Gamma\left(-n + \frac{D}{2} - N + \nu_2\right) \Gamma\left(-\frac{D}{2} - \nu_3 + N - l\right) \times \\
& \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_2 + l + n\right) \Gamma(\nu_3 + l + n) \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^n \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{D/2-\nu_3-N+l} \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^l}{l!} \Gamma\left(-n - \frac{D}{2} + N - \nu_2\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} + \nu_3 - N - l\right) \times \\
& \Gamma\left(l + n + \frac{D}{2} - \nu_3\right) \Gamma(l + n + \nu_2) \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^l \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^{n+\nu_2+D/2-N} \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^l}{l!} \Gamma\left(-n - \frac{D}{2} + N - \nu_2\right) \Gamma\left(-\frac{D}{2} - \nu_3 + N - l\right) \times \\
& \left. \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_1 + l + n\right) \Gamma(D - N + l + n) \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{D/2+\nu_3-N+l} \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^{n+\nu_2+D/2-N} \right] \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Introducimos los símbolos de Pochamers:

$$(z, n) \equiv \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} \quad (4.51)$$

$$(z, -n) \equiv \frac{(-1)^n}{(1-z, n)} = \frac{\Gamma(z-n)}{\Gamma(z)} \quad (4.52)$$

Usando los símbolos de Pochamers tenemos que (4.4.1) se reduce a:

$$\begin{aligned}
J_{\Delta}^{m=0} = & (-1)^{D/2} (k^2)^{D/2-\nu_1-\nu_2-\nu_3} \frac{\Gamma(\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_3)\Gamma(\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2)\Gamma(\nu_1+\nu_2+\nu_3-\frac{D}{2})}{\Gamma(D-\nu_1-\nu_2-\nu_3)\Gamma(\nu_2)\Gamma(\nu_3)} \\
& \times F_4\left(\nu_1+\nu_2+\nu_3-\frac{D}{2}, \nu_1, 1-\frac{D}{2}+\nu_1+\nu_3, 1-\frac{D}{2}+\nu_1+\nu_2, \frac{(p-k)^2}{k^2}, \frac{p^2}{k^2}\right) \\
& + (-1)^{D/2} (p^2)^{D/2-\nu_1-\nu_2} (k^2)^{-\nu_3} \frac{\Gamma(\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_3)\Gamma(\nu_1+\nu_2-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2}-\nu_2)}{\Gamma(D-\nu_1-\nu_2-\nu_3)\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \\
& \times F_4\left(\frac{D}{2}-\nu_2, \nu_3, 1-\frac{D}{2}+\nu_1+\nu_3, 1+\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2, \frac{(p-k)^2}{k^2}, \frac{p^2}{k^2}\right) \\
& + (-1)^{D/2} ((p-k)^2)^{D/2-\nu_1-\nu_3} (k^2)^{-\nu_2} \frac{\Gamma(\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2)\Gamma(\frac{D}{2}-\nu_3)\Gamma(\nu_1+\nu_3-\frac{D}{2})}{\Gamma(D-\nu_1-\nu_2-\nu_3)\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_3)} \\
& \times F_4\left(\frac{D}{2}-\nu_3, \nu_2, 1+\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_3, 1-\frac{D}{2}+\nu_1+\nu_2, \frac{(p-k)^2}{k^2}, \frac{p^2}{k^2}\right) \\
& + (-1)^{D/2} ((p-k)^2)^{D/2-\nu_1-\nu_3} (p^2)^{D/2-\nu_1-\nu_2} (k^2)^{\nu_1-D/2} \times \\
& \frac{\Gamma(\nu_1+\nu_3-\frac{D}{2})\Gamma(\nu_1+\nu_2-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2}-\nu_1)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)\Gamma(\nu_3)} \times \\
& F_4\left(\frac{D}{2}-\nu_1, D-\nu_1-\nu_2-\nu_3, 1+\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_3, 1+\frac{D}{2}-\nu_1-\nu_2, \frac{(p-k)^2}{k^2}, \frac{p^2}{k^2}\right)
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Este resultado coincide con la ecuación (3.7) de [29].

4.4.2. Representación de Mellin-Barnes para el Triangulo con un Denominador Masivo

Ahora consideraremos el caso con un denominador masivo, tal que,

$$\begin{aligned}
A_1 &= (p-w)^2, \\
A_2 &= w^2 - m^2, \\
A_3 &= (k-w)^2.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Recordemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(w^2 - m^2)_2^\nu} &= \frac{1}{2\pi i (w^2)^{\nu_2} \Gamma(\nu_2)} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda_3 \left(-\frac{m^2}{w^2}\right)^{\lambda_3} \Gamma(-\lambda_3) \Gamma(\lambda_3 + \nu_2) \\
&= \frac{1}{2\pi i \Gamma(\nu_2)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_3 (-m^2)^{\lambda_3} \frac{\Gamma(-\lambda_3) \Gamma(\lambda_3 + \nu_2)}{(w^2)^{\lambda_3 + \nu_2}}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

De manera que el denominador con una masa, se puede escribir en términos de un denominador sin masa pero con potencia modificada:

$$\frac{1}{[(p-w)^2]^{\nu_1}[w^2-m^2]^{\nu_2}[(k-w)^2]^{\nu_3}} = \frac{1}{2\pi i\Gamma(\nu_2)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_3 (-m^2)^{\lambda_3} \Gamma(-\lambda_3) \times \frac{\Gamma(\lambda_3 + \nu_2)}{[(p-w)^2]^{\nu_1}[w^2]^{\nu_2+\lambda_3}[(k-w)^2]^{\nu_3}}. \quad (4.56)$$

Entonces, la representación de Mellin-Barnes del triángulo con una masa es:

$$J_{\Delta}^{(1)} \equiv \frac{1}{2\pi i\Gamma(\nu_2)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_3 (-m^2)^{\lambda_3} \Gamma(-\lambda_3) \Gamma(\lambda_3 + \nu_2) J_{\Delta}^{m=0}[\nu_1, \nu_2 + \lambda_3, \nu_3]. \quad (4.57)$$

Es decir,

$$J_{\Delta}^{(1)} = \frac{1}{2\pi i\Gamma(\nu_2)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_3 (-m^2)^{\lambda_3} \Gamma(-\lambda_3) \Gamma(\lambda_3 + \nu_2) \times \frac{(i)^D (k^2)^{D/2-\nu_{123}-\lambda_3}}{\Gamma(D-\nu_{123}-\lambda_3)\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2+\lambda_3)\Gamma(\nu_3)} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 d\lambda_2 \times \Gamma(-\lambda_1)\Gamma(-\lambda_2) \left(\frac{p^2}{k^2}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{q^2}{k^2}\right)^{\lambda_2} \Gamma\left(\lambda_{123} + \nu_{123} - \frac{D}{2}\right) \Gamma(\lambda_{12} + \nu_1) \times \Gamma\left(-\lambda_{13} - \nu_{12} + \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(-\lambda_2 - \nu_{13} + \frac{D}{2}\right) \quad (4.58)$$

$$J_{\Delta}^{(1)} = \frac{(i)^D (k^2)^{D/2-\nu_{123}}}{(2\pi i)^3 \prod_{i=1}^3 \Gamma(\nu_i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 \Gamma(-\lambda_1)\Gamma(-\lambda_2)\Gamma(-\lambda_3) \times \left(\frac{p^2}{k^2}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{q^2}{k^2}\right)^{\lambda_2} \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{\lambda_3} \frac{\Gamma(\lambda_{123} + \nu_{123} - \frac{D}{2})}{\Gamma(D-\nu_{123}-\lambda_3)} \Gamma(\lambda_{12} + \nu_1) \times \Gamma\left(-\lambda_{13} - \nu_{12} + \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(-\lambda_2 - \nu_{13} + \frac{D}{2}\right) \quad (4.59)$$

Integramos con respecto a λ_3 :

$$I_{\lambda_3} \equiv \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(-\lambda_3) \frac{\Gamma(\lambda_{123} + \nu_{123} - \frac{D}{2}) \Gamma(-\lambda_{13} - \nu_{12} + \frac{D}{2})}{\Gamma(D-\nu_{123}-\lambda_3)} \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{\lambda_3} d\lambda_3. \quad (4.60)$$

Queremos que el resultado quede con $(-k^2/m^2)$, entonces pedimos que $|-m^2/k^2| > 1$ y cerramos a la izquierda sólo hay polos en $\Gamma(\lambda_{123} + \nu_{123} - D/2)$ cuando $\lambda_{123} + \nu_{123} - D/2 = -n$. Entonces

$$I_{\lambda_3} = 2\pi i \left(-\frac{k^2}{m^2}\right)^{\lambda_{12}+\nu_{123}-D/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(-\frac{k^2}{m^2}\right)^n \Gamma\left(\lambda_{12} + \nu_{123} - \frac{D}{2} + n\right) \frac{\Gamma(\lambda_2 + \nu_3 + n)}{\Gamma(\frac{D}{2} + \lambda_{12} + n)} \quad (4.61)$$

La integral del triángulo queda:

$$J_{\Delta}^{(1)} = \frac{(i)^D (-m^2)^{D/2-\nu_{123}}}{(2\pi i)^2 \prod_{i=1}^3 \Gamma(\nu_i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(-\frac{k^2}{m^2} \right)^n \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 d\lambda_2 \Gamma(-\lambda_1) \Gamma(-\lambda_2) \times \\ \left(-\frac{p^2}{m^2} \right)^{-\lambda_1} \left(-\frac{q^2}{m^2} \right)^{\lambda_2} \Gamma(\lambda_{12} + \nu_1) \Gamma\left(-\lambda_2 - \nu_{13} + \frac{D}{2} \right) \Gamma(\lambda_2 + \nu_3 + n) \times \\ \frac{\Gamma(\lambda_{12} + \nu_{123} - \frac{D}{2} + n)}{\Gamma(\frac{D}{2} + \lambda_{12} + n)}. \quad (4.62)$$

Ahora integramos con respecto a λ_1 :

$$I_{\lambda_1} \equiv \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(-\lambda_1) \frac{\Gamma(\lambda_{12} + \nu_1) \Gamma(\lambda_{12} + \nu_{123} - \frac{D}{2} + n)}{\Gamma(\frac{D}{2} + \lambda_{12} + n)} \left(-\frac{p^2}{m^2} \right)^{\lambda_1} d\lambda_1 \quad (4.63)$$

Queremos que el resultado quede con $(-p^2/m^2)$, entonces pedimos que $|-p^2/m^2| < 1$ y cerramos a la derecha. Solo hay polos en:

$$\Gamma(-\lambda_1) \quad \text{cuando} \quad -\lambda_1 = -l \Rightarrow \lambda_1 = l \quad (4.64)$$

Entonces

$$I_{\lambda_1} = 2\pi i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{\Gamma(\lambda_2 + l + \nu_1) \Gamma(\lambda_2 + l + \nu_{123} - \frac{D}{2} + n)}{\Gamma(\frac{D}{2} + \lambda_2 + l + n)} \left(-\frac{p^2}{m^2} \right)^l. \quad (4.65)$$

La integral del triángulo queda:

$$J_{\Delta}^{(1)} = \frac{(i)^D (-m^2)^{D/2-\nu_{123}}}{(2\pi i) \prod_{i=1}^3 \Gamma(\nu_i)} \sum_{n,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l}}{n!l!} \left(-\frac{k^2}{m^2} \right)^n \left(-\frac{p^2}{m^2} \right)^l \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_2 \Gamma(-\lambda_2) \times \\ \left(-\frac{q^2}{m^2} \right)^{\lambda_2} \Gamma\left(-\lambda_2 - \nu_{13} + \frac{D}{2} \right) \Gamma(\lambda_2 + \nu_3 + n) \Gamma(\lambda_2 + \nu_1 + l) \times \\ \frac{\Gamma(\lambda_2 + \nu_{123} + n + l - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2} + \lambda_2 + n + l)}. \quad (4.66)$$

Por último integramos con respecto a λ_2 . Queremos que quede $(-q^2/m^2)$, entonces pedimos que $|-q^2/m^2| < 1$ y cerramos a la derecha sólo hay polos en:

$$\Gamma(-\lambda_2) \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = j \quad (4.67)$$

$$I_{\lambda_2}^{(1)} = 2\pi i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \left(-\frac{q^2}{m^2} \right)^j \Gamma\left(-j - \nu_{13} + \frac{D}{2} \right) \Gamma(j + \nu_3 + n) \Gamma(j + \nu_1 + l) \times \\ \frac{\Gamma(j + \nu_{123} + n + l - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2} + j + n + l)} \quad (4.68)$$

$$\Gamma\left(-\lambda_2 - \nu_{13} + \frac{D}{2}\right) \Rightarrow \lambda_2 = j - \nu_{13} + \frac{D}{2} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} I_{\lambda_2}^{(2)} &= 2\pi i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \left(-\frac{q^2}{m^2}\right)^{j-\nu_{13}+D/2} \Gamma\left(\nu_{13} - \frac{D}{2} - j\right) \Gamma\left(-\nu_1 + \frac{D}{2} + n + j\right) \times \\ &\quad \frac{\Gamma\left(-\nu_3 + \frac{D}{2} + l + j\right) \Gamma(\nu_2 + n + l + j)}{\Gamma(-\nu_{13} + D + n + l + j)} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Entonces, la integral del triángulo queda:

$$\begin{aligned} J_{\Delta}^{(1)} &= \frac{(i)^D (-m^2)^{D/2-\nu_{123}}}{\prod_{i=1}^3 \Gamma(\nu_i)} \sum_{n,l,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l+j}}{n!l!j!} \left(-\frac{k^2}{m^2}\right)^n \left(-\frac{p^2}{m^2}\right)^l \left(-\frac{q^2}{m^2}\right)^j \times \\ &\quad \left\{ \frac{\Gamma(\nu_1 + l + j) \Gamma(\nu_3 + n + j) \Gamma\left(-\nu_{13} - j + \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(\nu_{123} + n + l + j - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2} + n + l + j\right)} \right. \\ &\quad + \left(-\frac{q^2}{m^2}\right)^{D/2-\nu_{13}} \Gamma(\nu_2 + n + l + j) \Gamma\left(-\nu_1 + \frac{D}{2} + n + j\right) \times \\ &\quad \left. \Gamma\left(-\nu_3 + \frac{D}{2} + l + j\right) \frac{\Gamma\left(\nu_{13} - \frac{D}{2} - j\right)}{\Gamma(-\nu_{13} + D + n + l + j)} \right\} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Cambiamos a símbolos de Pochamers el primer sumando, tal que:

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu_1 + l + j) &= (\nu_1; l + j) \Gamma(\nu_1) , \\ \Gamma(\nu_3 + n + j) &= (\nu_3; n + j) \Gamma(\nu_3) , \\ \Gamma\left(\nu_{123} + n + l + j - \frac{D}{2}\right) &= \left(\nu_{123} - \frac{D}{2}; n + l + j\right) \Gamma\left(\nu_{123} - \frac{D}{2}\right) , \\ \Gamma\left(\frac{D}{2} + n + l + j\right) &= \left(\frac{D}{2}; n + l + j\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) , \\ \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{13} - j\right) &= \frac{(-1)^j \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{13}\right)}{\left(1 + \nu_{13} - \frac{D}{2}; j\right)} . \end{aligned} \quad (4.72)$$

Ahora cambiamos el segundo sumando a símbolos de Pochamers:

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu_2 + n + l + j) &= (\nu_2; n + l + j) \Gamma(\nu_2) , \\ \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_1 + n + j\right) &= \left(\frac{D}{2} - \nu_1; n + j\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_1\right) , \\ \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_3 + l + j\right) &= \left(\frac{D}{2} - \nu_3; l + j\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_3\right) , \\ \Gamma\left(\nu_{13} - \frac{D}{2} - j\right) &= \frac{(-1)^j \Gamma\left(\nu_{13} - \frac{D}{2}\right)}{\left(1 - \nu_{13} + \frac{D}{2}; j\right)} , \\ \Gamma(D - \nu_{13} + n + l + j) &= (D - \nu_{13}; n + l + j) \Gamma(D - \nu_{13}) . \end{aligned} \quad (4.73)$$

Entonces la integral del triángulo con un denominador masivo queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
J_{\Delta}^{(1)} = & (i)^D (-m^2)^{D/2-\nu_{123}} \sum_{n,l,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l+j}}{n!l!j!} \left(-\frac{k^2}{m^2}\right)^n \left(-\frac{p^2}{m^2}\right)^l \left(-\frac{q^2}{m^2}\right)^j \times \\
& \left\{ \frac{(-1)^j \Gamma(\nu_{123} - \frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2} - \nu_{13})}{\Gamma(\nu_2) \Gamma(\frac{D}{2})} \frac{(\nu_{123} - \frac{D}{2}; n+l+j)(\nu_1; l+j)(\nu_3; n+j)}{(\frac{D}{2}; n+l+j)(1+\nu_{13} - \frac{D}{2}; j)} \right. \\
& + \frac{(-1)^j \Gamma(\frac{D}{2} - \nu_1) \Gamma(\frac{D}{2} - \nu_3) \Gamma(\nu_{13} - \frac{D}{2})}{\Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_3) \Gamma(D - \nu_{13})} \left(-\frac{q^2}{m^2}\right)^{D/2-\nu_{13}} \times \\
& \left. \frac{(\nu_2; n+l+j)(\frac{D}{2} - \nu_1; n+j)(\frac{D}{2} - \nu_3; l+j)}{(1 - \nu_{13} + \frac{D}{2}; j)(D - \nu_{13}; n+l+j)} \right\}. \tag{4.74}
\end{aligned}$$

O bien;

$$\begin{aligned}
J_{\Delta}^{(1)} = & (i)^D (-m^2)^{D/2-\nu_{123}} \left\{ \frac{\Gamma(\nu_{123} - \frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2} - \nu_{13})}{\Gamma(\nu_2) \Gamma(\frac{D}{2})} \sum_{n,l,j=0}^{\infty} \frac{(k^2/m^2)^n}{n!} \frac{(p^2/m^2)^l}{l!} \frac{(-q^2/m^2)^j}{j!} \right. \\
& \times \frac{(\nu_{123} - \frac{D}{2}; n+l+j)(\nu_1; l+j)(\nu_3; n+j)}{(\frac{D}{2}; n+l+j)(1+\nu_{13} - \frac{D}{2}; j)} \\
& + \frac{\Gamma(\frac{D}{2} - \nu_1) \Gamma(\frac{D}{2} - \nu_3) \Gamma(\nu_{13} - \frac{D}{2})}{\Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_3) \Gamma(D - \nu_{13})} \sum_{n,l,j=0}^{\infty} \frac{(k^2/m^2)^n}{n!} \frac{(p^2/m^2)^l}{l!} \frac{(-q^2/m^2)^j}{j!} \\
& \left. \times \left(-\frac{q^2}{m^2}\right)^{D/2-\nu_{13}} \frac{(\nu_2; n+l+j)(\frac{D}{2} - \nu_1; n+j)(\frac{D}{2} - \nu_3; l+j)}{(1 - \nu_{13} + \frac{D}{2}; j)(D - \nu_{13}; n+l+j)} \right\}. \tag{4.75}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\Delta}^{(1)} = & (i)^D (-m^2)^{D/2-\nu_{123}} \left\{ \frac{\Gamma(\nu_{123} - \frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2} - \nu_{13})}{\Gamma(\nu_2) \Gamma(\frac{D}{2})} \Phi_1 \left[\begin{matrix} \nu_{123} - \frac{D}{2}, \nu_3, \nu_1 \\ \frac{D}{2}; \nu_{13} - \frac{D}{2} + 1 \end{matrix} \middle| \frac{k^2}{m^2}, \frac{p^2}{m^2}, -\frac{q^2}{m^2} \right] \right. \\
& + \left(-\frac{q^2}{m^2}\right)^{D/2-\nu_{13}} \frac{\Gamma(\frac{D}{2} - \nu_1) \Gamma(\frac{D}{2} - \nu_3) \Gamma(\nu_{13} - \frac{D}{2})}{\Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_3) \Gamma(D - \nu_{13})} \times \\
& \left. \left[\begin{matrix} \nu_2, \frac{D}{2} - \nu_1, \frac{D}{2} - \nu_3 \\ D - \nu_{13}; \frac{D}{2} - \nu_{13} + 1 \end{matrix} \middle| \frac{k^2}{m^2}, \frac{p^2}{m^2}, -\frac{q^2}{m^2} \right] \right\}. \tag{4.76}
\end{aligned}$$

Que coincide con la ecuación (27) de [30] si hacemos $\nu_1 \rightarrow \rho$; $\nu_2 \rightarrow \mu$; $\nu_3 \rightarrow \nu$.

4.4.3. Representación de Mellin-Barnes para el Triángulo con Dos Denominadores Masivos

Consideremos ahora el caso con dos denominadores masivos. Sea

$$\begin{aligned}
A_1 &= (p-w)^2 - m^2 \\
A_2 &= w^2 \\
A_3 &= (k-w)^2 - m^2 \tag{4.77}
\end{aligned}$$

Recordemos que:

$$\frac{1}{[(p-w)^2 - m^2]^{\nu_1}} = \frac{1}{(2\pi i)\Gamma(\nu_1)} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda_3 (-m^2)^{\lambda_3} \frac{\Gamma(-\lambda_3)\Gamma(\lambda_3 + \nu_1)}{[(p-w)^2]^{\lambda_3 + \nu_1}} \quad (4.78)$$

$$\frac{1}{[(k-w)^2 - m^2]^{\nu_3}} = \frac{1}{(2\pi i)\Gamma(\nu_3)} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda_4 (-m^2)^{\lambda_4} \frac{\Gamma(-\lambda_4)\Gamma(\lambda_4 + \nu_3)}{[(k-w)^2]^{\lambda_4 + \nu_3}} \quad (4.79)$$

De manera que el denominador asociado a esta integral es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[(p-w)^2 - m^2]^{\nu_1} [w^2]^{\nu_2} [(k-w)^2 - m^2]^{\nu_3}} &= \frac{1}{(2\pi i)^2 \Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_3)} \int \int d\lambda_3 d\lambda_4 (-m^2)^{\lambda_3 + \lambda_4} \\ &\times \frac{\Gamma(-\lambda_3)\Gamma(-\lambda_4)\Gamma(\lambda_3 + \nu_1)\Gamma(\lambda_4 + \nu_3)}{[(p-w)^2]^{\lambda_3 + \nu_1} [w^2]^{\nu_2} [(k-w)^2 - m^2]^{\lambda_4 + \nu_3}} \end{aligned} \quad (4.80)$$

Entonces la representación de Mellin-Barnes del triángulo con dos denominadores masivos es:

$$\begin{aligned} J_{\Delta}^{(2)} &\equiv \frac{1}{(2\pi i)^2 \Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_3)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_3 d\lambda_4 (-m^2)^{\lambda_3 + \lambda_4} \Gamma(-\lambda_3)\Gamma(-\lambda_4)\Gamma(\lambda_3 + \nu_1) \times \\ &\Gamma(\lambda_4 + \nu_3) J_{\Delta}^{(0)}(\nu_1 + \lambda_3, \nu_2, \nu_3 + \lambda_4) \end{aligned} \quad (4.81)$$

Sea que

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= \lambda_{34} - \lambda_3 \quad \text{ó} \quad \lambda_{34} = \lambda_3 + \lambda_4 \\ d\lambda_4 &= d\lambda_{34} \end{aligned} \quad (4.82)$$

Entonces

$$\begin{aligned} J_{\Delta}^{(2)} &= \frac{1}{(2\pi i)^2 \Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_3)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_3 d\lambda_{34} (-m^2)^{\lambda_{34}} \Gamma(-\lambda_3)\Gamma(-\lambda_{34} + \lambda_3) \times \\ &\Gamma(\lambda_3 + \nu_1)\Gamma(\lambda_{34} - \lambda_3 + \nu_3) J_{\Delta}^{(0)}(\nu_1 + \lambda_3, \nu_2, \nu_3 + \lambda_{34} - \lambda_3) \end{aligned} \quad (4.83)$$

Sustituyendo el valor de $J_{\Delta}^{(0)}(\nu_1 + \lambda_3, \nu_2, \nu_3 + \lambda_{34} - \lambda_3)$ y simplificando obtenemos que

$$\begin{aligned} J_{\Delta}^{(2)} &= \frac{(i)^D}{\prod_{i=1}^3 \Gamma(\nu_i)} \frac{(k^2)^{D/2 - \nu_{123}}}{(2\pi i)^4} \int \int \int \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 d\lambda_{34} \Gamma(-\lambda_1)\Gamma(-\lambda_2)\Gamma(-\lambda_3) \times \\ &\Gamma(\lambda_3 - \lambda_{34}) \left(\frac{p^2}{k^2}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{q^2}{k^2}\right)^{\lambda_2} \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{\lambda_{34}} \frac{\Gamma(\lambda_{12} + \lambda_{34} + \nu_{123} - \frac{D}{2})\Gamma(\lambda_{123} + \nu_1)}{\Gamma(D - \nu_{123} - \lambda_{34})} \times \\ &\Gamma\left(-\lambda_{13} - \nu_{12} + \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(-\lambda_2 - \lambda_{34} - \nu_{13} + \frac{D}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.84)$$

Integraremos con respecto a λ_3 :

$$I_{\lambda_3} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_3 \Gamma(-\lambda_3) \Gamma(\lambda_3 - \lambda_{34}) \Gamma(\lambda_{123} + \nu_1) \Gamma\left(-\lambda_{13} - \nu_{12} + \frac{D}{2}\right) \quad (4.85)$$

Usaremos el lema de Barnes:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} ds \Gamma(a+s) \Gamma(b+s) \Gamma(c-s) \Gamma(d-s) = \frac{\Gamma(a+c) \Gamma(b+c) \Gamma(a+d) \Gamma(b+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}. \quad (4.86)$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} a &= -\lambda_{34} \\ b &= \nu_1 + \lambda_{12} \\ c &= 0 \\ d &= \frac{D}{2} - \nu_{12} - \lambda_1 \end{aligned} \quad (4.87)$$

De aquí que

$$I_{\lambda_3} = \frac{\Gamma(-\lambda_{34}) \Gamma(\nu_1 + \lambda_{12}) \Gamma\left(-\lambda_1 - \lambda_{34} - \nu_{12} + \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(\lambda_2 - \nu_2 + \frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda_2 - \lambda_{34} - \nu_2 + \frac{D}{2}\right)} \quad (4.88)$$

Por lo tanto no genera suma. Entonces la integral del triángulo nos queda como:

$$\begin{aligned} J_{\Delta}^{(2)} &= \frac{(i)^D}{\prod_{i=1}^3 \Gamma(\nu_i)} \frac{(k^2)^{D/2-\nu_{123}}}{(2\pi i)^3} \int \int \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_{34} \Gamma(-\lambda_1) \Gamma(-\lambda_2) \left(\frac{p^2}{k^2}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{q^2}{k^2}\right)^{\lambda_2} \times \\ &\quad \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{\lambda_{34}} \frac{\Gamma(\lambda_{12} + \lambda_{34} + \nu_{123} - \frac{D}{2}) \Gamma\left(-\lambda_2 - \lambda_{34} - \nu_{13} + \frac{D}{2}\right)}{\Gamma(D - \nu_{123} - \lambda_{34})} \times \\ &\quad \frac{\Gamma(-\lambda_{34}) \Gamma(\nu_1 + \lambda_2) \Gamma\left(-\lambda_1 - \lambda_{34} - \nu_{12} + \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(\lambda_2 - \nu_2 + \frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda_2 - \lambda_{34} - \nu_2 + \frac{D}{2}\right)} \end{aligned} \quad (4.89)$$

Queremos que la dependencia en $(-m^2/k^2)$ nos quede como $(-k^2/m^2)$. Vamos a integrar con respecto a λ_{34} cerrando el contorno a la izquierda $|-m^2/k^2| > 1$, tenemos polos en:

$$\Gamma\left(\lambda_{12} + \lambda_{34} + \nu_{123} - \frac{D}{2}\right) \Rightarrow \lambda_{34} = -\lambda_{12} - \nu_{123} + \frac{D}{2} - n \quad (4.90)$$

De manera que:

$$\begin{aligned} I_{\lambda_{34}} &= 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{D/2-\lambda_{12}-\nu_{123}-n} \Gamma(\lambda_1 + \nu_2 + n) \Gamma\left(\lambda_{12} + \nu_{123} - \frac{D}{2} + n\right) \times \\ &\quad \frac{\Gamma(\lambda_2 + \nu_3 + n)}{\Gamma\left(\frac{D}{2} + \lambda_{12} + n\right) \Gamma(2\lambda_2 + \lambda_1 + \nu_{13} + n)} \end{aligned} \quad (4.91)$$

Entonces, la integral queda

$$J_{\Delta}^{(2)} = \frac{(i)^D}{\prod_{i=1}^3 \Gamma(\nu_i)} \frac{(-m^2)^{D/2-\nu_{123}}}{(2\pi i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 d\lambda_2 \Gamma(-\lambda_1) \Gamma(-\lambda_2) \left(-\frac{p^2}{m^2}\right)^{\lambda_1} \times$$

$$\left(-\frac{q^2}{m^2}\right)^{\lambda_2} \left(-\frac{k^2}{m^2}\right)^n \frac{\Gamma(\lambda_2 - \nu_2 + \frac{D}{2}) \Gamma(\lambda_{12} + \nu_1) \Gamma(\lambda_{12} + \nu_{123} - \frac{D}{2} + n)}{\Gamma(\frac{D}{2} + n + \lambda_{12}) \Gamma(n + \nu_{13} + \lambda_1 + 2\lambda_2)} \times$$

$$\Gamma(\lambda_1 + \nu_2 + n) \Gamma(\lambda_2 + \nu_3 + n) \quad (4.92)$$

Ahora integramos con respecto a λ_1 . Cerramos el contorno a la derecha, tal que, $|-p^2/m^2| < 1$

$$I_{\lambda_1} = \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \Gamma(-\lambda_1) \left(-\frac{p^2}{m^2}\right)^{\lambda_1} \Gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + \nu_1) \Gamma\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \nu_{123} - \frac{D}{2} + n\right) \times$$

$$\frac{\Gamma(\lambda_1 + \nu_2 + n)}{\Gamma(\frac{D}{2} + n + \lambda_{12}) \Gamma(n + \nu_{13} + \lambda_1 + 2\lambda_2)} \quad (4.93)$$

Sólo hay polos en:

$$\Gamma(-\lambda_1) \Rightarrow \lambda_1 = l \quad (4.94)$$

Entonces

$$I_{\lambda_1} = 2\pi i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left(-\frac{p^2}{m^2}\right)^l \Gamma(\lambda_2 + l + \nu_1) \Gamma\left(\lambda_2 + l + \nu_{123} - \frac{D}{2} + n\right) \times$$

$$\frac{\Gamma(\nu_2 + n + l)}{\Gamma(\frac{D}{2} + n + l + \lambda_2) \Gamma(n + l + \nu_{13} + 2\lambda_2)} \quad (4.95)$$

La integral queda como:

$$J_{\Delta}^{(2)} = \frac{(i)^D (-m^2)^{D/2-\nu_{123}}}{\prod_{i=1}^3 \Gamma(\nu_i) (2\pi i)} \sum_{n,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^l}{l!} \left(-\frac{k^2}{m^2}\right)^n \left(-\frac{p^2}{m^2}\right)^l \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_2 \Gamma(-\lambda_2) \times$$

$$\left(-\frac{q^2}{m^2}\right)^{\lambda_2} \Gamma\left(\frac{D}{2} + \lambda_2 - \nu_2\right) \Gamma(\lambda_2 + \nu_3 + n) \Gamma(\lambda_2 + \nu_1 + l) \times$$

$$\frac{\Gamma(\lambda_2 + n + l + \nu_{123} - \frac{D}{2}) \Gamma(\nu_2 + n + l)}{\Gamma(\lambda_2 + \frac{D}{2} + n + l) \Gamma(2\lambda_2 + n + l + \nu_{13})} \quad (4.96)$$

Finalmente integramos con respecto a λ_2 . Cerramos el contorno a la derecha, tal que, $|-q^2/m^2| < 1$

$$I_{\lambda_2} = \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_2 \Gamma(-\lambda_2) \Gamma\left(\frac{D}{2} + \lambda_2 - \nu_2\right) \Gamma(\lambda_2 + \nu_3 + n) \Gamma(\lambda_2 + \nu_1 + l) \left(-\frac{q^2}{m^2}\right)^{\lambda_2} \times$$

$$\frac{\Gamma(\lambda_2 + n + l + \nu_{123} - \frac{D}{2})}{\Gamma(\lambda_2 + \frac{D}{2} + n + l) \Gamma(2\lambda_2 + n + l + \nu_{13})} \quad (4.97)$$

Sólo hay polos en:

$$\Gamma(-\lambda_2) \Rightarrow \lambda_2 = j \quad (4.98)$$

Entonces:

$$I_{\lambda_2} = 2\pi i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \left(-\frac{q^2}{m^2} \right)^j \Gamma\left(j - \nu_2 + \frac{D}{2}\right) \Gamma(n+j+\nu_3) \Gamma(l+j+\nu_1) \times \frac{\Gamma\left(n+l+j+\nu_{123} - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(n+l+j+\frac{D}{2}\right) \Gamma(n+l+2j+\nu_{13})} \quad (4.99)$$

La integral queda:

$$J_{\Delta}^{(2)} = \frac{(i)^D (-m^2)^{D/2-\nu_{123}}}{\prod_{i=1}^3 \Gamma(\nu_i)} \sum_{n,l,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{(-1)^j}{j!} \left(-\frac{k^2}{m^2} \right)^n \left(-\frac{p^2}{m^2} \right)^l \left(-\frac{q^2}{m^2} \right)^j \times \Gamma(l+j+\nu_1) \Gamma(n+l+\nu_2) \Gamma(n+j+\nu_3) \Gamma\left(n+l+j+\nu_{123} - \frac{D}{2}\right) \times \frac{\Gamma\left(j - \nu_2 + \frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(n+l+j+\frac{D}{2}\right) \Gamma(n+l+2j+\nu_{13})} \quad (4.100)$$

Cambiamos a Pochamers, tal que:

$$J_{\Delta}^{(2)} = \frac{(i)^D (-m^2)^{D/2-\nu_{123}}}{\prod_{i=1}^3 \Gamma(\nu_i)} \sum_{n,l,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l+j}}{n!l!j!} \left(-\frac{k^2}{m^2} \right)^n \left(-\frac{p^2}{m^2} \right)^l \left(-\frac{q^2}{m^2} \right)^j \Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_2) \times \frac{\Gamma(\nu_3) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_2\right) \Gamma(\nu_{123} - \frac{D}{2})}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma(\nu_1 + \nu_3)} \frac{(\nu_{123} - \frac{D}{2}; n+l+j)(\nu_2; n+l)(\nu_3; n+j)}{(\frac{D}{2}; n+l+j)(\nu_{13}; n+l+2j)} \times (\nu_1; l+j) \left(\frac{D}{2} - \nu_2; j \right) \quad (4.101)$$

O bien,

$$J_{\Delta}^{(2)} = (i)^D (-m^2)^{D/2-\nu_{123}} \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_2\right) \Gamma(\nu_{123} - \frac{D}{2})}{\Gamma(\nu_1 + \nu_3) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \times \Phi_2 \left[\begin{matrix} \nu_{123} - \frac{D}{2}, \nu_2, \nu_3, \nu_1; \frac{D}{2} - \nu_2 \\ \frac{D}{2}; \nu_{13} \end{matrix} \middle| \frac{k^2}{m^2}, \frac{p^2}{m^2}, \frac{q^2}{m^2} \right]. \quad (4.102)$$

Que coincide con la ecuación (32) de [30] si hacemos $\nu_1 \rightarrow \rho$; $\nu_2 \rightarrow \mu$; $\nu_3 \rightarrow \nu$.

4.4.4. Representación de Mellin-Barnes para el Triángulo Masivo

Ahora consideremos el caso del triángulo con tres denominadores masivos, tal que:

$$\begin{aligned} A_1 &= (p-w)^2 - m^2 \\ A_2 &= w^2 - m^2 \\ A_3 &= (k-w)^2 - m^2 \end{aligned} \quad (4.103)$$

$$\frac{1}{[w^2 - m^2]^{\nu_2}} = \frac{1}{2\pi i \Gamma(\nu_2)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_5 (-m^2)^{\lambda_5} \Gamma(-\lambda_5) \Gamma(\lambda_5 + \nu_2) \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} J_{\Delta}^{(3)} &\equiv \frac{(i)^D (k^2)^{D/2 - \nu_{123}}}{(2\pi i)^4 \Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_2) \Gamma(\nu_3)} \int \int \int \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_{34} d\lambda_5 \Gamma(-\lambda_1) \Gamma(-\lambda_2) \Gamma(-\lambda_{34}) \times \\ &\Gamma(-\lambda_5) \left(\frac{p^2}{k^2}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{q^2}{k^2}\right)^{\lambda_2} \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{\lambda_{34} + \lambda_5} \Gamma\left(\lambda_{12} + \lambda_{34} + \nu_{123} - \frac{D}{2} + \lambda_5\right) \times \\ &\Gamma(\nu_1 + \lambda_{12}) \Gamma\left(-\lambda_2 - \lambda_{34} - \nu_{13} + \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(-\lambda_1 - \lambda_{34} - \nu_{12} + \frac{D}{2} - \lambda_5\right) \times \\ &\frac{1}{\Gamma(\lambda_2 - \lambda_{34} - \nu_2 + \frac{D}{2} - \lambda_5) \Gamma(D - \nu_{123} - \lambda_{34} - \lambda_5)} \end{aligned} \quad (4.105)$$

Hacemos un cambio de variable, tal que:

$$\lambda_5 = \lambda_{345} - \lambda_{34} \Rightarrow \lambda_{345} = \lambda_5 + \lambda_{34} \quad (4.106)$$

Integramos con respecto a λ_{34} :

$$\begin{aligned} I_{\lambda_{34}} &= \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_{34} \Gamma(-\lambda_{34}) \Gamma(-\lambda_{345} + \lambda_{34}) \Gamma\left(-\lambda_2 - \lambda_{34} - \nu_{13} + \frac{D}{2}\right) \times \\ &\Gamma\left(\lambda_2 - \nu_2 + \frac{D}{2} - \lambda_{345} + \lambda_{34}\right) \end{aligned} \quad (4.107)$$

Aplicando el lema de Barnes obtenemos:

$$I_{\lambda_{34}} = \Gamma(-\lambda_{345}) \Gamma\left(\lambda_2 - \nu_2 + \frac{D}{2} - \lambda_{345}\right) \Gamma(-\nu_{123} + D - \lambda_{345}) \frac{\Gamma(-\lambda_{345} - \lambda_2 - \nu_{13} + \frac{D}{2})}{\Gamma(-2\lambda_{345} - \nu_{123} + D)} \quad (4.108)$$

Entonces

$$\begin{aligned} J_{\Delta}^{(3)} &= \frac{(i)^D (k^2)^{D/2 - \nu_{123}}}{(2\pi i)^3 \Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_2) \Gamma(\nu_3)} \int \int \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_{345} \Gamma(-\lambda_1) \Gamma(-\lambda_2) \Gamma(-\lambda_{345}) \times \\ &\left(\frac{p^2}{k^2}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{q^2}{k^2}\right)^{\lambda_2} \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{\lambda_{345}} \Gamma\left(\lambda_{12} + \nu_{123} - \frac{D}{2} + \lambda_{345}\right) \Gamma(\lambda_{12} + \nu_1) \times \\ &\Gamma\left(-\lambda_1 - \nu_{12} + \frac{D}{2} - \lambda_{345}\right) \frac{\Gamma(-\lambda_{345} - \lambda_2 - \nu_{13} + \frac{D}{2})}{\Gamma(-2\lambda_{345} - \nu_{123} + D)} \end{aligned} \quad (4.109)$$

Para integrar con respecto a las variables restantes procedemos como en los casos anteriores de manera que obtenemos que la representación de Mellin-Barnes para el triángulo masivo es:

$$J_{\Delta}^{(3)} = \frac{(i)^D (k^2)^{D/2-\nu_{123}}}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)\Gamma(\nu_3)} \sum_{n,l,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l+j}}{n!l!j!} \left(\frac{q^2}{k^2}\right)^l \left(\frac{p^2}{k^2}\right)^j \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{D/2-\nu_{123}-n-l-j} \times \\ \Gamma(\nu_1+j+l)\Gamma(\nu_2+n+j)\Gamma(\nu_3+n+l) \frac{\Gamma(\nu_{123}-\frac{D}{2}+n+l+j)}{\Gamma(2j+2l+2n+\nu_{123})} \quad (4.110)$$

Cambiando a símbolos de Pochammers obtenemos:

$$J_{\Delta}^{(3)} = \frac{(i)^D (-m^2)^{D/2-\nu_{123}} \Gamma(\nu_{123}-\frac{D}{2})}{\Gamma(\nu_{123})} \sum_{n,l,j=0}^{\infty} \frac{1}{n!l!j!} \left(\frac{q^2}{m^2}\right)^l \left(\frac{p^2}{m^2}\right)^j \left(\frac{k^2}{m^2}\right)^n \times \\ \frac{(\nu_1; l+j)(\nu_2; n+j)(\nu_3; n+l)(\nu_{123}-D/2; n+l+j)}{(\nu_{123}; 2n+2l+2j)} \quad (4.111)$$

O bien,

$$J_{\Delta}^{(3)} = (i)^D (-m^2)^{D/2-\nu_{123}} \frac{\Gamma(\nu_{123}-\frac{D}{2})}{\Gamma(\nu_{123})} \Phi_3 \left[\begin{matrix} \nu_{123}-\frac{D}{2}, \nu_2, \nu_3, \nu_1 \\ \nu_{123} \end{matrix} \middle| \frac{q^2}{m^2}, \frac{p^2}{m^2}, \frac{k^2}{m^2} \right] \quad (4.112)$$

Que coincide con la ecuación (37) de [30] si hacemos $\nu_1 \rightarrow \rho$; $\nu_2 \rightarrow \mu$; $\nu_3 \rightarrow \nu$.

4.4.5. Representación de Mellin-Barnes de la Caja no Masiva

Consideremos el caso de la caja no masiva como se muestra en la figura 4.1. Entonces

$$\begin{aligned} A_1 &= (p-w)^2 \\ A_2 &= w^2 \\ A_3 &= (k-w)^2 \\ A_4 &= (q-w)^2 \end{aligned} \quad (4.113)$$

Para este caso la ecuación (4.11) se reduce a

$$Q = [(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1p^2+x_3k^2+x_4q^2) - 2(x_1x_3k \cdot p + x_1x_4p \cdot q + x_3x_4k \cdot q) - (x_1^2p^2+x_3^2k^2+x_4^2q^2)] \quad (4.114)$$

$$Q = x_1x_3(k^2+p^2-2k \cdot p) + x_1x_4(q^2+p^2-2p \cdot q) + x_1x_2p^2 + x_2x_3k^2 + x_2x_4q^2 + x_3x_4(q^2+k^2-2k \cdot q) \quad (4.115)$$

Entonces

$$Q = x_1x_3(k-p)^2 + x_1x_4(q-p)^2 + x_3x_4(q-k)^2 + x_1x_2p^2 + x_2x_3k^2 + x_2x_4q^2 \quad (4.116)$$

Sea

$$\begin{aligned}
f_{13} &= (k-p)^2 \\
f_{14} &= (q-p)^2 \\
f_{34} &= (q-k)^2 \\
f_{12} &= p^2 \\
f_{23} &= k^2 \\
f_{24} &= q^2
\end{aligned} \tag{4.117}$$

Entonces necesitamos 5 integraciones de Mellin-Barnes. La representación de Mellin-Barnes es la siguiente:

$$\begin{aligned}
J_{\square}^{(0)}[\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4] &\equiv \frac{(-1)^{D/2} \Gamma(N - \frac{D}{2})}{\prod_i \Gamma(\nu_i)} \int_0^1 \left(\prod_i dx_i x_i^{\nu_i-1} \right) \delta(1 - \sum_i x_i) \times \\
&\quad \frac{1}{[x_1 x_3 f_{13} + x_1 x_4 f_{14} + x_3 x_4 f_{34} + x_1 x_2 f_{12} + x_2 x_3 f_{23} + x_2 x_4 f_{24}]^{N-D/2}}
\end{aligned} \tag{4.118}$$

Por lo tanto la representación de Mellin-Barnes para la caja en el caso no masivo es:

$$\begin{aligned}
J_{\square}^{(0)}[\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4] &\equiv \frac{(-1)^{D/2} (f_{32})^{D/2-N}}{(2\pi i)^5 \Gamma(D-N) \prod_i \Gamma(\nu_i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \cdots \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \cdots d\lambda_5 \times \\
&\quad \Gamma(-\lambda_1) \cdots \Gamma(-\lambda_5) \Gamma\left(N - \frac{D}{2} + \lambda_{12345}\right) \Gamma(\nu_1 + \lambda_{124}) \times \\
&\quad \Gamma\left(\nu_2 + \frac{D}{2} - N - \lambda_{123}\right) \Gamma\left(\nu_3 + \frac{D}{2} - N - \lambda_{245}\right) \times \\
&\quad \Gamma(\nu_4 + \lambda_{235}) \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{f_{14}}{f_{23}}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{f_{34}}{f_{23}}\right)^{\lambda_3} \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{\lambda_4} \left(\frac{f_{24}}{f_{23}}\right)^{\lambda_5}
\end{aligned} \tag{4.119}$$

Calculando las integraciones con respecto a $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ y simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned}
J_{\square}^{(0)} = & \frac{(-1)^{D/2} (f_{23})^{D/2-\nu_{1234}}}{(2\pi i)^2 \Gamma(D-\nu_{1234}) \prod_i \Gamma(\nu_i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 d\lambda_2 \Gamma(-\lambda_1) \Gamma(-\lambda_2) \times \\
& \left(\frac{f_{13}}{f_{23}} \right)^{\lambda_1} \left(\frac{f_{14}}{f_{23}} \right)^{\lambda_2} \sum_{n,l,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l+j}}{n!l!j!} \left[\left(\frac{f_{24}}{f_{23}} \right)^n \left(\frac{f_{12}}{f_{23}} \right)^l \left(\frac{f_{34}}{f_{23}} \right)^j \Gamma(\nu_1 + \lambda_{12} + l) \times \right. \\
& \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_2 - n - l\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{12} - j\right) \Gamma(\nu_4 + \lambda_2 + n + j) \times \\
& \Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{12} + n + l + j\right) + \left(\frac{f_{24}}{f_{23}} \right)^n \left(\frac{f_{12}}{f_{23}} \right)^l \left(\frac{f_{34}}{f_{23}} \right)^{D/2-\nu_{134}-\lambda_{12}+j} \times \\
& \Gamma(\nu_1 + \lambda_{12} + l) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_2 - n - l\right) \Gamma\left(\nu_{134} - \frac{D}{2} + \lambda_{12} - j\right) \times \\
& \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{13} - \lambda_1 + n + j\right) \Gamma(\nu_2 + n + l + j) + \left(\frac{f_{24}}{f_{23}} \right)^n \left(\frac{f_{12}}{f_{23}} \right)^{D/2-\nu_{124}-\lambda_2-n+l} \times \\
& \left(\frac{f_{34}}{f_{23}} \right)^j \Gamma\left(\nu_{124} - \frac{D}{2} + \lambda_2 + n - l\right) \Gamma\left(\lambda_1 + \frac{D}{2} - \nu_{24} - n + l\right) \times \\
& \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{12} + j\right) \Gamma(\nu_4 + \lambda_2 + n + j) \Gamma(\nu_3 + \lambda_1 + l + j) \\
& + \left(\frac{f_{24}}{f_{23}} \right)^n \left(\frac{f_{12}}{f_{23}} \right)^{D/2-\nu_{124}-\lambda_2-n+l} \left(\frac{f_{34}}{f_{23}} \right)^{D/2-\nu_{134}-\lambda_{12}+j} \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{13} - \lambda_1 + j\right) \times \\
& \Gamma\left(\nu_{124} - \frac{D}{2} + \lambda_2 + n - l\right) \Gamma\left(\lambda_1 + \frac{D}{2} - \nu_{24} - n + l\right) \Gamma\left(\nu_{134} - \frac{D}{2} + \lambda_{12} - j\right) \times \\
& \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{14} - \lambda_2 + l + j\right) + \left(\frac{f_{12}}{f_{23}} \right)^l \left(\frac{f_{24}}{f_{23}} \right)^{D/2-\nu_{124}-\lambda_2+n-l} \left(\frac{f_{34}}{f_{23}} \right)^j \times \\
& \Gamma(\nu_1 + \lambda_{12} + l) \Gamma\left(\nu_{124} - \frac{D}{2} + \lambda_2 - n + l\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{12} - j\right) \times \\
& \Gamma(\nu_3 + \lambda_1 + n + j) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{12} + n - l + j\right) + \left(\frac{f_{12}}{f_{23}} \right)^l \left(\frac{f_{24}}{f_{23}} \right)^{D/2-\nu_{124}-\lambda_2+n-l} \times \\
& \left(\frac{f_{34}}{f_{23}} \right)^{D/2-\nu_{134}-\lambda_{12}+j} \Gamma\left(\nu_{134} - \frac{D}{2} + \lambda_{12} - j\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{14} - \lambda_2 + n + j\right) \times \\
& \Gamma(D - 2\nu_1 - \nu_{234} - \lambda_{12} + n - l + j) \Gamma(\nu_1 + \lambda_{12} + l) \Gamma\left(\lambda_2 - \frac{D}{2} - \nu_{124} - n + l\right) \\
& + \left(\frac{f_{12}}{f_{23}} \right)^{D/2-\nu_{12}+n+l+j} \left(\frac{f_{24}}{f_{23}} \right)^{-\nu_4-\lambda_2-l-j} \left(\frac{f_{34}}{f_{23}} \right)^j \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{12} - j\right) \times \\
& \Gamma(\nu_3 + \lambda_1 + n + j) \Gamma\left(-\frac{D}{2} - \nu_{12} - n - l - j\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} + \lambda_{12} - \nu_2 + n + l + j\right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Gamma(\nu_4 + \lambda_2 + l + j) + \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{D-2\nu_1-\nu_{234}-\lambda_{12}+n+l+j} \left(\frac{f_{34}}{f_{23}}\right)^{D/2-\nu_{134}-\lambda_{12}+j} \times \\
& \left(\frac{f_{24}}{f_{23}}\right)^{\nu_{13}-D/2+\lambda_1-l-j} \Gamma\left(\nu_{134} - \frac{D}{2} + \lambda_{12} - j\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{14} - \lambda_2 + n + j\right) \times \\
& \Gamma(\nu_{34} - D - \nu_2 + \lambda_{12} - n - l - j) \Gamma(D - \nu_{1234} + n + l + j) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{13} - \lambda_1 + l + j\right) \\
& + \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{j-2\nu_{12}} \left(\frac{f_{34}}{f_{23}}\right)^{-D/2-\nu_{12}-n-l-j} \left(\frac{f_{24}}{f_{23}}\right)^{D/2+\nu_{12}-\nu_4-\lambda_2+n-j} \Gamma\left(\frac{D}{2} + \nu_{12} + n + l + j\right) \times \\
& \Gamma(D - \nu_{34} + \nu_2 - \lambda_{12} + n + l - j) \Gamma\left(\nu_3 + \lambda_1 - \frac{D}{2} - \nu_{12} - l + j\right) \Gamma(\lambda_{12} - \nu_1 - 2\nu_2 + j) \times \\
& \Gamma\left(\nu_4 + \lambda_2 - \frac{D}{2} - \nu_{12} - n + j\right) \Big] \quad (4.120)
\end{aligned}$$

4.4.6. Representación de Mellin-Barnes para la Caja con un Denominador Masivo

Consideremos el caso de la caja con un propagador masivo:

$$\begin{aligned}
A_1 &= (p - w)^2 \\
A_2 &= w^2 - m^2 \\
A_3 &= (k - w)^2 \\
A_4 &= (q - w)^2
\end{aligned} \quad (4.121)$$

Recordemos que:

$$\frac{1}{[w^2 - m^2]^{\nu_2}} = \frac{1}{(2\pi i)\Gamma(\nu_2)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_6 (-m^2)^{\lambda_6} \Gamma(-\lambda_6) \Gamma(\lambda_6 + \nu_2) \quad (4.122)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
J_{\square}^{(1)} &= \frac{(-1)^{D/2} (k^2)^{D/2-\nu_{1234}}}{(2\pi i)^6 \prod_{i=1}^4 \Gamma(\nu_i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \cdots \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \cdots d\lambda_6 \Gamma(-\lambda_1) \cdots \Gamma(-\lambda_6) \times \\
& \Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{123456}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{123}\right) \Gamma(\nu_1 + \lambda_{124}) \Gamma(\nu_4 + \lambda_{234}) \times \\
& \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_{2456}\right)}{\Gamma(D - \nu_{1234} - \lambda_6)} \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{f_{14}}{f_{23}}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{f_{34}}{f_{23}}\right)^{\lambda_3} \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{\lambda_4} \left(\frac{f_{24}}{f_{23}}\right)^{\lambda_5} \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{\lambda_6} \\
& \quad (4.123)
\end{aligned}$$

Integramos con respecto a λ_6 :

$$I_{\lambda_6} = \frac{\int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_6 \Gamma(-\lambda_6) \Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{123456}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_{2456}\right) \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{\lambda_6} \times}{\Gamma(D - \nu_{1234} - \lambda_6)} \quad (4.124)$$

Cerramos el contorno a la izquierda:

$$\Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{123456}\right) \Rightarrow \lambda_6 = -\nu_{1234} + \frac{D}{2} - \lambda_{12345} - n \quad (4.125)$$

Entonces

$$\begin{aligned} J_{\square}^{(1)} &= \frac{(-1)^{D/2} (-m^2)^{D/2 - \nu_{1234}}}{(2\pi i)^5 \prod_{i=1}^4 \Gamma(\nu_i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \cdots \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \cdots d\lambda_5 \Gamma(-\lambda_1) \cdots \Gamma(-\lambda_5) \times \\ &\Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{123}\right) \Gamma(\nu_1 + \lambda_{124}) \Gamma(\nu_4 + \lambda_{234}) \left(-\frac{f_{13}}{m^2}\right)^{\lambda_1} \left(-\frac{f_{14}}{m^2}\right)^{\lambda_2} \times \\ &\left(-\frac{f_{34}}{m^2}\right)^{\lambda_3} \left(-\frac{f_{12}}{m^2}\right)^{\lambda_4} \left(-\frac{f_{24}}{m^2}\right)^{\lambda_5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{12345} + n\right) \times \\ &\frac{\Gamma(\nu_3 + \lambda_{13} + n)}{\Gamma\left(\frac{D}{2} + \lambda_{12345} + n\right)} \left(-\frac{k^2}{m^2}\right)^n \end{aligned} \quad (4.126)$$

Integramos con respecto a λ_5 :

$$I_{\lambda_5} = \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_5 \Gamma(-\lambda_5) \frac{\Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{12345} + n\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2} + \lambda_{12345} + n\right)} \left(-\frac{f_{24}}{m^2}\right)^{\lambda_5} \quad (4.127)$$

Cerramos a la derecha, es decir, $\Gamma(-\lambda_5) \Rightarrow \lambda_5 = l$ Por lo tanto

$$\begin{aligned} J_{\square}^{(1)} &= \frac{(-1)^{D/2} (-m^2)^{D/2 - \nu_{1234}}}{(2\pi i)^4 \prod_{i=1}^4 \Gamma(\nu_i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \cdots \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \cdots d\lambda_4 \Gamma(-\lambda_1) \cdots \Gamma(-\lambda_4) \times \\ &\Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{123}\right) \Gamma(\nu_1 + \lambda_{124}) \Gamma(\nu_4 + \lambda_{234}) \left(-\frac{f_{13}}{m^2}\right)^{\lambda_1} \left(-\frac{f_{14}}{m^2}\right)^{\lambda_2} \times \\ &\left(-\frac{f_{34}}{m^2}\right)^{\lambda_3} \left(-\frac{f_{12}}{m^2}\right)^{\lambda_4} \sum_{n,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l}}{n!l!} \Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{1234} + n + l\right) \times \\ &\frac{\Gamma(\nu_3 + \lambda_{13} + n)}{\Gamma\left(\frac{D}{2} + \lambda_{1234} + n + l\right)} \left(-\frac{k^2}{m^2}\right)^n \left(-\frac{q^2}{m^2}\right)^l \end{aligned} \quad (4.128)$$

Ahora integramos con respecto a λ_4 cerrando a la derecha $\Gamma(-\lambda_4) \Rightarrow \lambda_4 = j$

$$\begin{aligned}
J_{\square}^{(1)} &= \frac{(-1)^{D/2}(-m^2)^{D/2-\nu_{1234}}}{(2\pi i)^3 \prod_{i=1}^4 \Gamma(\nu_i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 \Gamma(-\lambda_1) \Gamma(-\lambda_2) \Gamma(-\lambda_3) \times \\
&\quad \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{123}\right) \left(-\frac{f_{13}}{m^2}\right)^{\lambda_1} \left(-\frac{f_{14}}{m^2}\right)^{\lambda_2} \left(-\frac{f_{34}}{m^2}\right)^{\lambda_3} \sum_{n,l,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l+j}}{n!l!j!} \times \\
&\quad \Gamma(\nu_1 + \lambda_{12} + j) \Gamma(\nu_3 + \lambda_{13} + n) \Gamma(\nu_4 + \lambda_{23} + j) \frac{\Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{123} + n + l + j\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2} + \lambda_{123} + n + l + j\right)} \\
&\quad \times \left(-\frac{k^2}{m^2}\right)^n \left(-\frac{q^2}{m^2}\right)^l \left(-\frac{p^2}{m^2}\right)^j \tag{4.129}
\end{aligned}$$

Integrando con respecto a las variables restantes obtenemos:

$$\begin{aligned}
J_{\square}^{(1)} = & \frac{(-1)^{D/2}(-m^2)^{D/2-\nu_{1234}}}{\prod_{i=1}^4 \Gamma(\nu_i)} \sum_{n,l,j,r,t,w=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l+j+r+t+w}}{n!!j!!r!!t!!w!!} \left(-\frac{k^2}{m^2}\right)^n \left(-\frac{q^2}{m^2}\right)^l \left(-\frac{p^2}{m^2}\right)^j \\
& \left[\left(-\frac{f_{34}}{m^2}\right)^r \left(-\frac{f_{14}}{m^2}\right)^t \left(-\frac{f_{13}}{m^2}\right)^w \Gamma(\nu_3+n+r+w) \Gamma(\nu_4+j+r+t) \times \right. \\
& \frac{\Gamma(\frac{D}{2}-\nu_{134}-r-t-w) \Gamma(\nu_{1234}-\frac{D}{2}+n+l+j+r+t+w)}{\Gamma(\frac{D}{2}+n+l+j+r+t+w)} \\
& + \left(-\frac{f_{34}}{m^2}\right)^r \left(-\frac{f_{14}}{m^2}\right)^t \left(-\frac{f_{13}}{m^2}\right)^{D/2-\nu_{134}-r-t-w} \Gamma(\nu_2+n+l+j+w) \times \\
& \Gamma(\nu_4+j+r+t) \Gamma\left(\nu_{134}-\frac{D}{2}+r+t-w\right) \frac{\Gamma(\frac{D}{2}-\nu_{14}+n-t+w)}{\Gamma(D-\nu_{134}+n+l+j+w)} \\
& + \left(-\frac{f_{34}}{m^2}\right)^r \left(-\frac{f_{14}}{m^2}\right)^{D/2-\nu_{134}-r+t-w} \left(-\frac{f_{13}}{m^2}\right)^w \Gamma(\nu_2+n+l+j+t) \times \\
& \Gamma(\nu_3+n+r+w) \Gamma\left(\nu_{134}-\frac{D}{2}+r-t+w\right) \frac{\Gamma(\frac{D}{2}-\nu_{13}+j+t-w)}{\Gamma(D-\nu_{134}+n+l+j+t)} \\
& + \left(-\frac{f_{34}}{m^2}\right)^r \left(-\frac{f_{14}}{m^2}\right)^{-\nu_4-j-r-w} \left(-\frac{f_{13}}{m^2}\right)^{D/2-\nu_{13}+j+t+w} \Gamma(\nu_2+n+l+j+t) \times \\
& \Gamma(\nu_4+j+r+w) \frac{\Gamma(\frac{D}{2}-\nu_1+n+j+r+t+w)}{\Gamma(D-\nu_{134}+n+l+j+t)} \\
& + \left(-\frac{f_{34}}{m^2}\right)^t \left(-\frac{f_{13}}{m^2}\right)^w \left(-\frac{f_{14}}{m^2}\right)^{D/2-\nu_{134}+r-t-w} \Gamma(\nu_2+n+l+j+r) \times \\
& \Gamma(\nu_3+n+t+w) \Gamma\left(\nu_{134}-\frac{D}{2}-r+t+w\right) \frac{\Gamma(\frac{D}{2}-\nu_{13}+j+r-w)}{\Gamma(D-\nu_{134}+n+l+j+r)} \\
& \left(-\frac{f_{34}}{m^2}\right)^t \left(-\frac{f_{14}}{m^2}\right)^{-\nu_4-j-t+w} \left(-\frac{f_{13}}{m^2}\right)^{D/2-\nu_{13}+j+r-w} \Gamma(\nu_2+n+l+j+r) \times \\
& \left. \Gamma(\nu_4+j+t-w) \Gamma\left(\nu_{13}-\frac{D}{2}-j-r+w\right) \frac{\Gamma(\frac{D}{2}-\nu_1+n+j+r+t-w)}{\Gamma(D-\nu_{134}+n+l+j+r)} \right] \quad (4.130)
\end{aligned}$$

4.4.7. Representación de Mellin-Barnes para la Caja con Dos Denominadores Masivos

Consideremos el caso de la caja con 2 masas iguales:

$$\begin{aligned} A_1 &= (p-w)^2 - m^2 \\ A_2 &= w^2 \\ A_3 &= (k-w)^2 - m^2 \\ A_4 &= (q-w)^2 \end{aligned} \quad (4.131)$$

Recordemos que:

$$\frac{1}{[(p-w)^2 - m^2]^{\nu_1}} = \frac{1}{(2\pi i)\Gamma(\nu_1)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_6 (-m^2)^{\lambda_6} \Gamma(-\lambda_6) \frac{\Gamma(\lambda_6 + \nu_1)}{[(p-w)^2]^{\lambda_6 + \nu_1}} \quad (4.132)$$

y

$$\frac{1}{[(k-w)^2 - m^2]^{\nu_3}} = \frac{1}{(2\pi i)\Gamma(\nu_3)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_7 (-m^2)^{\lambda_7} \Gamma(-\lambda_7) \frac{\Gamma(\lambda_7 + \nu_3)}{[(k-w)^2]^{\lambda_7 + \nu_3}} \quad (4.133)$$

Entonces

$$\begin{aligned} J_{\square}^{(2)} &\equiv \frac{1}{(2\pi i)^2 \Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_3)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_6 d\lambda_7 (-m^2)^{\lambda_6 + \lambda_7} \Gamma(-\lambda_6) \Gamma(-\lambda_7) \times \\ &\quad \Gamma(\nu_1 + \lambda_6) \Gamma(\nu_3 + \lambda_7) J_{\square}^{(0)}[\nu_1 + \lambda_6, \nu_2, \nu_3 + \lambda_7, \nu_4] \end{aligned} \quad (4.134)$$

$$\begin{aligned} J_{\square}^{(2)} &= \frac{(-1)^{D/2} (f_{23})^{D/2 - \nu_{1234}}}{(2\pi i)^7 \prod_{i=1}^4 \Gamma(\nu_i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \cdots \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \cdots d\lambda_7 \Gamma(-\lambda_1) \cdots \Gamma(-\lambda_7) \times \\ &\quad \Gamma(\nu_1 + \lambda_{1246}) \Gamma(\nu_4 + \lambda_{235}) \Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{1234567}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{12367}\right) \times \\ &\quad \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_{2456}\right)}{\Gamma(D - \nu_{1234} - \lambda_{67})} \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{f_{14}}{f_{23}}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{f_{34}}{f_{23}}\right)^{\lambda_3} \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{\lambda_4} \left(\frac{f_{24}}{f_{23}}\right)^{\lambda_5} \left(-\frac{m^2}{f_{23}}\right)^{\lambda_{67}} \end{aligned} \quad (4.135)$$

Hacemos el cambio de variable $\lambda_{67} = \lambda_7 + \lambda_6$

$$\begin{aligned} J_{\square}^{(2)} &= \frac{(-1)^{D/2} (f_{23})^{D/2 - \nu_{1234}}}{(2\pi i)^7 \prod_{i=1}^4 \Gamma(\nu_i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \cdots \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \cdots d\lambda_6 \Gamma(-\lambda_1) \cdots \Gamma(-\lambda_6) \times \\ &\quad \Gamma(\lambda_6 - \lambda_{67}) \Gamma(\nu_1 + \lambda_{1246}) \Gamma(\nu_4 + \lambda_{235}) \Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{12345} + \lambda_{67}\right) \times \\ &\quad \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{123} - \lambda_{67}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_{2456}\right)}{\Gamma(D - \nu_{1234} - \lambda_{67})} \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{f_{14}}{f_{23}}\right)^{\lambda_2} \times \\ &\quad \left(\frac{f_{34}}{f_{23}}\right)^{\lambda_3} \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{\lambda_4} \left(\frac{f_{24}}{f_{23}}\right)^{\lambda_5} \left(-\frac{m^2}{f_{23}}\right)^{\lambda_{67}} \end{aligned} \quad (4.136)$$

Integramos con respecto a λ_6 usando el lema de Barnes:

$$I_{\lambda_6} = \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_6 \Gamma(-\lambda_6) \Gamma(-\lambda_{67} + \lambda_6) \Gamma(\nu_1 + \lambda_{1246}) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_{2456}\right) \quad (4.137)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= -\lambda_{67} \\ b &= \nu_1 + \lambda_{124} \\ c &= 0 \\ d &= \frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_{245} \end{aligned} \quad (4.138)$$

$$\begin{aligned} J_{\square}^{(2)} &= \frac{(-1)^{D/2} (k^2)^{D/2 - \nu_{1234}}}{(2\pi i)^6 \prod_{i=1}^4 \Gamma(\nu_i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \cdots \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \cdots d\lambda_5 d\lambda_{67} \Gamma(-\lambda_1) \cdots \Gamma(-\lambda_5) \times \\ &\quad \Gamma(-\lambda_{67}) \Gamma(\nu_1 + \lambda_{124}) \Gamma(\nu_4 + \lambda_{235}) \Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{12345} + \lambda_{67}\right) \times \\ &\quad \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{123} - \lambda_{67}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_{245} - \lambda_{67}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{24} + \lambda_1 - \lambda_5\right)}{\Gamma(D - \nu_{1234} - \lambda_{67}) \Gamma\left(\frac{D}{2} + \lambda_1 - \lambda_{67} - \lambda_5 - \nu_{24}\right)} \times \\ &\quad \left(\frac{f_{13}}{k^2}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{f_{14}}{k^2}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{f_{34}}{k^2}\right)^{\lambda_3} \left(\frac{f_{12}}{k^2}\right)^{\lambda_4} \left(\frac{f_{24}}{k^2}\right)^{\lambda_5} \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{\lambda_{67}} \end{aligned} \quad (4.139)$$

Integrando con respecto a las variables restantes obtenemos:

$$\begin{aligned}
J_{\square}^{(2)} = & (-1)^{D/2} (-m^2)^{D/2-\nu_{1234}} \left[\frac{\Gamma(\nu_{1234} - \frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2} - \nu_{24})}{\Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(\nu_{13})} \sum_{n,l,j,r,t,w=0}^{\infty} \frac{1}{n!l!j!r!t!w!} \times \right. \\
& (\nu_1; l+r+t)(\nu_2; n+l+w)(\nu_3; n+j+t)(\nu_4; j+r+w) \left(\frac{D}{2} - \nu_{24}; t-w \right) \times \\
& \frac{(\nu_{1234} - \frac{D}{2}; n+l+j+r+t+w)}{(\frac{D}{2}; n+l+j+r+t+w)(\nu_{13}; n+l+j+r+2t)} \left(\frac{k^2}{m^2} \right)^n \left(\frac{p^2}{m^2} \right)^l \times \\
& \left(\frac{(q-k)^2}{m^2} \right)^j \left(\frac{(q-p)^2}{m^2} \right)^r \left(\frac{(k-p)^2}{m^2} \right)^t \left(\frac{q^2}{m^2} \right)^w \\
& + \frac{\Gamma(\nu_{24} - \frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2} - \nu_2) \Gamma(\frac{D}{2} - \nu_4)}{\Gamma(\nu_2) \Gamma(\nu_4) \Gamma(D - \nu_{24})} \sum_{n,l,j,r,t,w=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l+r+j}}{n!l!j!r!t!w!} (\nu_1; l+r+t) \times \\
& (\nu_3; n+j+t) \left(\frac{D}{2} - \nu_4; n+l+t+w \right) \left(\frac{D}{2} - \nu_2; j+r+t+w \right) \times \\
& \frac{(\nu_{13}; n+l+j+r+2t+w)}{(\nu_{13}; n+l+j+r+2t)(1 - \nu_{24} + \frac{D}{2}; t+w)(D - \nu_{24}; n+l+j+r+2t+w)} \times \\
& \left(-\frac{k^2}{m^2} \right)^n \left(-\frac{p^2}{m^2} \right)^l \left(-\frac{(q-k)^2}{m^2} \right)^j \left(-\frac{(q-p)^2}{m^2} \right)^r \left(-\frac{(k-p)^2}{m^2} \right)^t \times \\
& \left. \left(-\frac{q^2}{m^2} \right)^{D/2-\nu_{24}+t+w} \right] \tag{4.140}
\end{aligned}$$

Tomando el límite $\nu_4 = 0, j = r = w = 0$ en el primer término obtenemos que $J_{\square}^{(2)} \rightarrow J_{\triangle}^{(2)}$ coincide con [30].

4.4.8. Representación de Mellin-Barnes para la Caja con Tres Denominadores Masivos

Consideremos el caso de la caja con 3 masas iguales:

$$\begin{aligned}
A_1 &= (p-w)^2 - m^2 \\
A_2 &= w^2 - m^2 \\
A_3 &= (k-w)^2 - m^2 \\
A_4 &= (q-w)^2
\end{aligned} \tag{4.141}$$

$$\frac{1}{[w^2 - m^2]^{\nu_2}} = \frac{1}{(2\pi i) \Gamma(\nu_2)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_8 (-m^2)^{\lambda_8} \Gamma(-\lambda_8) \Gamma(\lambda_8 + \nu_2) \tag{4.142}$$

$$\begin{aligned}
J_{\square}^{(3)} &= \frac{1}{(2\pi i)\Gamma(\nu_2)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_8 (-m^2)^{\lambda_8} \Gamma(-\lambda_8) \Gamma(\lambda_8 + \nu_2) J_{\square}^{(2)}(\nu_1, \nu_2 + \lambda_8, \nu_3, \nu_4) \\
J_{\square}^{(3)} &= \frac{(-1)^{D/2} (f_{23})^{D/2 - \nu_{1234}}}{(2\pi i)^8 \prod_{i=1}^4 \Gamma(\nu_i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \cdots \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \cdots d\lambda_{67} d\lambda_8 \Gamma(-\lambda_1) \cdots \Gamma(-\lambda_6) \times \\
&\quad \Gamma(-\lambda_{67} + \lambda_6) \Gamma(-\lambda_8) \Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{123458} + \lambda_{67}\right) \Gamma(\nu_1 + \lambda_{1246}) \times \\
&\quad \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{123} - \lambda_{67}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_{24568}\right) \Gamma(\nu_4 + \lambda_{235})}{\Gamma(D - \nu_{1234} - \lambda_8 - \lambda_{67})} \times \\
&\quad \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{f_{14}}{f_{23}}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{f_{34}}{f_{23}}\right)^{\lambda_3} \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{\lambda_4} \left(\frac{f_{24}}{f_{23}}\right)^{\lambda_5} \left(-\frac{m^2}{f_{23}}\right)^{\lambda_{67} + \lambda_8} \quad (4.143)
\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $\lambda_{678} = \lambda_{67} + \lambda_8 \Rightarrow \lambda_8 = \lambda_{678} - \lambda_{67}$

$$\begin{aligned}
J_{\square}^{(3)} &= \frac{(-1)^{D/2} (f_{23})^{D/2 - \nu_{1234}}}{(2\pi i)^8 \prod_{i=1}^4 \Gamma(\nu_i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \cdots \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \cdots d\lambda_{67} d\lambda_{678} \Gamma(-\lambda_1) \cdots \Gamma(-\lambda_6) \times \\
&\quad \Gamma(-\lambda_{67} + \lambda_6) \Gamma(-\lambda_{678} + \lambda_{67}) \Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{12345(678)}\right) \Gamma(\nu_1 + \lambda_{1246}) \times \\
&\quad \Gamma(\nu_4 + \lambda_{235}) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{123} - \lambda_{67}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_{2456} - \lambda_{678} + \lambda_{67}\right)}{\Gamma(D - \nu_{1234} - \lambda_{678})} \times \\
&\quad \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{f_{14}}{f_{23}}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{f_{34}}{f_{23}}\right)^{\lambda_3} \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{\lambda_4} \left(\frac{f_{24}}{f_{23}}\right)^{\lambda_5} \left(-\frac{m^2}{f_{23}}\right)^{\lambda_{678}} \quad (4.144)
\end{aligned}$$

Integramos con respecto a λ_{67} usando el lema de Barnes y obtenemos:

$$\begin{aligned}
I_{\lambda_{67}} &= 2\pi i \Gamma(\lambda_6 - \lambda_{678}) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_{245} - \lambda_{678}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{123} - \lambda_{678}\right) \times \\
&\quad \frac{\Gamma(D - 2\nu_{14} - \nu_{23} - \lambda_{13456} - 2\lambda_2 - \lambda_{678})}{\Gamma(D - 2\lambda_{678} - 2\nu_{14} - \nu_{23} - 2\lambda_2 - \lambda_{1345})} \quad (4.145)
\end{aligned}$$

Ahora integramos con respecto a λ_6 usando el lema de Barnes y obtenemos:

$$\begin{aligned}
I_{\lambda_6} &= 2\pi i \Gamma(-\lambda_{678}) \Gamma(\nu_1 + \lambda_{124}) \Gamma(D - 2\nu_{14} - \nu_{23} - \lambda_{1345} - 2\lambda_2 - 2\lambda_{678}) \times \\
&\quad \frac{\Gamma(D - 2\nu_4 - \nu_{123} - \lambda_{235} - \lambda_{678})}{\Gamma(-2\lambda_{678} + D - \nu_{123} - 2\nu_4 - \lambda_{235})} \quad (4.146)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
J_{\square}^{(3)} &= \frac{(-1)^{D/2} (f_{23})^{D/2-\nu_{1234}}}{(2\pi i)^6 \prod_{i=1}^4 \Gamma(\nu_i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \cdots \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \cdots d\lambda_5 d\lambda_{678} \Gamma(-\lambda_1) \cdots \Gamma(-\lambda_5) \times \\
&\Gamma(-\lambda_{678}) \Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{12345} + \lambda_{678}\right) \Gamma(\nu_4 + \lambda_{235}) \Gamma(\nu_1 + \lambda_{124}) \times \\
&\Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_{245} - \lambda_{678}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{123} - \lambda_{678}\right) \times \\
&\frac{\Gamma(D - 2\nu_{14} - \nu_{23} - \lambda_{1345} - 2\lambda_2 - 2\lambda_{678}) \Gamma(D - 2\nu_4 - \nu_{123} - \lambda_{235} - \lambda_{678})}{\Gamma(D - \nu_{1234} - \lambda_{678}) \Gamma(D - 2\lambda_{678} - 2\nu_{14} - \nu_{23} - 2\lambda_2 - \lambda_{1345})} \times \\
&\frac{1}{\Gamma(-2\lambda_{678} + D - \nu_{123} - 2\nu_4 - \lambda_{235})} \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{f_{14}}{f_{23}}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{f_{34}}{f_{23}}\right)^{\lambda_3} \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{\lambda_4} \times \\
&\left(\frac{f_{24}}{f_{23}}\right)^{\lambda_5} \left(-\frac{m^2}{f_{23}}\right)^{\lambda_{678}} \quad (4.147)
\end{aligned}$$

Integrando con respecto a las variables restantes obtenemos:

$$\begin{aligned}
J_{\square}^{(3)} &= (-1)^{D/2} (-m^2)^{D/2-\nu_{1234}} \sum_{n,l,r,w,t,j=0}^{\infty} \frac{1}{n!l!r!w!t!j!} \left(\frac{k^2}{m^2}\right)^n \left(\frac{q^2}{m^2}\right)^l \left(\frac{p^2}{m^2}\right)^r \times \\
&\left(\frac{(q-k)^2}{m^2}\right)^w \left(\frac{(q-p)^2}{m^2}\right)^t \left(\frac{(k-p)^2}{m^2}\right)^j \frac{\Gamma(\frac{D}{2} - \nu_4) \Gamma(\nu_{1234} - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(\nu_{123})} \times \\
&(\nu_1; r+t+j)(\nu_2; n+l+r)(\nu_3; n+w+j)(\nu_4; l+w+t) \times \\
&\frac{(\frac{D}{2} - \nu_4; n+r+j)(\nu_{1234} - \frac{D}{2}; n+l+r+w+t+j)}{(\frac{D}{2}; n+l+r+w+t+j)(\nu_{123}; 2n+l+2r+w+t+2j)} \quad (4.148)
\end{aligned}$$

O bien,

$$\begin{aligned}
J_{\square}^{(3)} &= (-1)^{D/2} (-m^2)^{D/2-\nu_{1234}} \frac{\Gamma(\frac{D}{2} - \nu_4) \Gamma(\nu_{1234} - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(\nu_{123})} \times \\
&\mathcal{Y}_3 \left[\begin{matrix} \nu_{1234} - \frac{D}{2}, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \frac{D}{2} - \nu_4 \\ \frac{D}{2}, \nu_{123} \end{matrix} \left| \frac{k^2}{m^2}, \frac{q^2}{m^2}, \frac{p^2}{m^2}, \frac{(q-k)^2}{m^2}, \frac{(q-p)^2}{m^2}, \frac{(k-p)^2}{m^2} \right. \right] \quad (4.149)
\end{aligned}$$

Tomando el límite $l = w = t = 0$ y $\nu_4 = 0$ recuperamos $J_{\triangle}^{(3)}$, es decir,

$$J_{\triangle}^{(3)} = (-1)^{D/2} (-m^2)^{D/2-\nu_{123}} \frac{\Gamma(\nu_{123} - \frac{D}{2})}{\Gamma(\nu_{123})} \Phi_3 \left[\begin{matrix} \nu_{123} - \frac{D}{2}, \nu_1, \nu_2, \nu_3 \\ \nu_{123} \end{matrix} \left| \frac{(k-p)^2}{m^2}, \frac{p^2}{m^2}, \frac{k^2}{m^2} \right. \right]$$

4.4.9. Representación de Mellin-Barnes de la Caja Masiva

Consideremos el caso de la caja con 4 masas iguales:

$$\begin{aligned} A_1 &= (p-w)^2 - m^2 \\ A_2 &= w^2 - m^2 \\ A_3 &= (k-w)^2 - m^2 \\ A_4 &= (q-w)^2 - m^2 \end{aligned} \quad (4.150)$$

$$\frac{1}{[w^2 - m^2]^{\nu_2}} = \frac{1}{(2\pi i)\Gamma(\nu_2)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_8 (-m^2)^{\lambda_8} \Gamma(-\lambda_8) \Gamma(\lambda_8 + \nu_2) \quad (4.151)$$

$$\frac{1}{[(q-w)^2 - m^2]^{\nu_4}} = \frac{1}{(2\pi i)\Gamma(\nu_4)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_9 (-m^2)^{\lambda_9} \frac{\Gamma(-\lambda_9) \Gamma(\lambda_9 + \nu_4)}{[(q-w)^2]^{\lambda_9 + \nu_4}} \quad (4.152)$$

$$\begin{aligned} J_{\square}^{(4)} &= \frac{1}{(2\pi i)^2 \Gamma(\nu_2) \Gamma(\nu_4)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_8 d\lambda_9 (-m^2)^{\lambda_8 + \lambda_9} \Gamma(-\lambda_8) \Gamma(-\lambda_9) \times \\ &\quad \Gamma(\lambda_8 + \nu_2) \Gamma(\lambda_9 + \nu_4) J_{\square}^{(2)}[\nu_1, \nu_2 + \lambda_8, \nu_3, \nu_4 + \lambda_9] \end{aligned} \quad (4.153)$$

$$\begin{aligned} J_{\square}^{(4)} &= \frac{(-1)^{D/2} (f_{23})^{D/2 - \nu_{1234} - \lambda_{89}}}{(2\pi i)^9 \prod_{i=1}^4 \Gamma(\nu_i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \cdots \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \cdots d\lambda_9 \Gamma(-\lambda_1) \cdots \Gamma(-\lambda_9) \times \\ &\quad \Gamma(-\lambda_{67} + \lambda_6) \Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{1234589} + \lambda_{67}\right) \Gamma(\nu_1 + \lambda_{1246}) \Gamma(\nu_4 + \lambda_{2359}) \times \\ &\quad \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{1239} - \lambda_{67}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_{245689}\right)}{\Gamma(D - \nu_{1234} - \lambda_{67} - \lambda_{89})} (-m^2)^{\lambda_{89}} \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^{\lambda_1} \times \\ &\quad \left(\frac{f_{14}}{f_{23}}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{f_{34}}{f_{23}}\right)^{\lambda_3} \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{\lambda_4} \left(\frac{f_{24}}{f_{23}}\right)^{\lambda_5} \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{\lambda_{67}} \end{aligned} \quad (4.154)$$

Hacemos los siguientes cambios de variables:

$$\begin{aligned} \lambda_8 + \lambda_9 = \lambda_{89} &\Rightarrow \lambda_9 = \lambda_{89} - \lambda_8 \\ \lambda_{67} + \lambda_{89} = \lambda_{6789} &\Rightarrow \lambda_{89} = \lambda_{6789} - \lambda_{67} \end{aligned} \quad (4.155)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
J_{\square}^{(4)} &= \frac{(-1)^{D/2} (f_{23})^{D/2 - \nu_{1234}}}{(2\pi i)^9 \prod_{i=1}^4 \Gamma(\nu_i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \cdots \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \cdots d\lambda_6 d\lambda_{67} d\lambda_8 d\lambda_{6789} \Gamma(-\lambda_1) \cdots \Gamma(-\lambda_8) \\
&\times \Gamma(-\lambda_{6789} + \lambda_{67} + \lambda_8) \Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{12345} + \lambda_{6789}\right) \Gamma(\nu_1 + \lambda_{1246}) \Gamma(-\lambda_{67} + \lambda_6) \\
&\times \Gamma(\nu_4 + \lambda_{235} + \lambda_{6789} - \lambda_{67} - \lambda_8) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{123} - \lambda_{6789} + \lambda_8\right) \\
&\times \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_{2456} - \lambda_{6789} + \lambda_{67}\right)}{\Gamma(D - \nu_{1234} - \lambda_{6789})} \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{f_{14}}{f_{23}}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{f_{34}}{f_{23}}\right)^{\lambda_3} \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{\lambda_4} \\
&\times \left(\frac{f_{24}}{f_{23}}\right)^{\lambda_5} \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{\lambda_{6789}}
\end{aligned} \tag{4.156}$$

Integramos con respecto a λ_8 usando el lema de Barnes y obtenemos:

$$\begin{aligned}
I_{\lambda_8} &= \Gamma(\lambda_{67} - \lambda_{6789}) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{123} - \lambda_{6789}\right) \Gamma(\nu_4 + \lambda_{235}) \times \\
&\frac{\Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{13} - \lambda_1 + \lambda_5 - \lambda_{67}\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{13} - \lambda_1 + \lambda_5 - \lambda_{6789}\right)}
\end{aligned} \tag{4.157}$$

Integramos con respecto a λ_{67} usando el lema de Barnes y obtenemos:

$$\begin{aligned}
I_{\lambda_{67}} &= \Gamma(\lambda_6 - \lambda_{6789}) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_{245} - \lambda_{6789}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \lambda_{6789} - \nu_{13} - \lambda_1 + \lambda_5\right) \times \\
&\frac{\Gamma(D - \nu_{234} - 2\nu_1 - \lambda_{1246} - \lambda_{6789})}{\Gamma(-2\lambda_{6789} + D - 2\nu_1 - \nu_{234} - \lambda_{124})}
\end{aligned} \tag{4.158}$$

Ahora integramos con respecto a λ_6 usando el lema de Barnes y obtenemos:

$$\begin{aligned}
I_{\lambda_6} &= \Gamma(-\lambda_{6789}) \Gamma(\nu_1 + \lambda_{124}) \Gamma(D - \nu_{234} - 2\nu_1 - \lambda_{124} - 2\lambda_{6789}) \times \\
&\frac{\Gamma(D - \nu_{1234} - \lambda_{6789})}{\Gamma(D - \nu_{1234} - 2\lambda_{6789})}
\end{aligned} \tag{4.159}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
J_{\square}^{(4)} = & \frac{(-1)^{D/2} (f_{23})^{D/2-\nu_{1234}}}{(2\pi i)^6 \prod_{i=1}^4 \Gamma(\nu_i)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \cdots \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda_1 \cdots d\lambda_5 d\lambda_{6789} \Gamma(-\lambda_1) \cdots \Gamma(-\lambda_5) \times \\
& \Gamma(-\lambda_{6789}) \Gamma\left(\nu_{1234} - \frac{D}{2} + \lambda_{12345} + \lambda_{6789}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{134} - \lambda_{123} - \lambda_{6789}\right) \times \\
& \Gamma(\nu_4 + \lambda_{235}) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{124} - \lambda_{245} - \lambda_{6789}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} - \lambda_{6789} - \nu_{13} - \lambda_1 + \lambda_5\right) \times \\
& \frac{\Gamma(\nu_1 + \lambda_{124}) \Gamma(D - \nu_{234} - 2\nu_1 - \lambda_{124} - 2\lambda_{6789}) \Gamma(D - \nu_{1234} - \lambda_{6789})}{\Gamma\left(\frac{D}{2} - \nu_{13} - \lambda_1 + \lambda_5 - \lambda_{6789}\right) \Gamma(D - 2\lambda_{6789} - 2\nu_1 - \nu_{234} - \lambda_{124})} \times \\
& \frac{1}{\Gamma(D - \nu_{1234} - \lambda_{6789}) \Gamma(D - \nu_{1234} - 2\lambda_{6789})} \left(\frac{f_{13}}{f_{23}}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{f_{14}}{f_{23}}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{f_{34}}{f_{23}}\right)^{\lambda_3} \times \\
& \left(\frac{f_{12}}{f_{23}}\right)^{\lambda_4} \left(\frac{f_{24}}{f_{23}}\right)^{\lambda_5} \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{\lambda_{6789}} \quad (4.160)
\end{aligned}$$

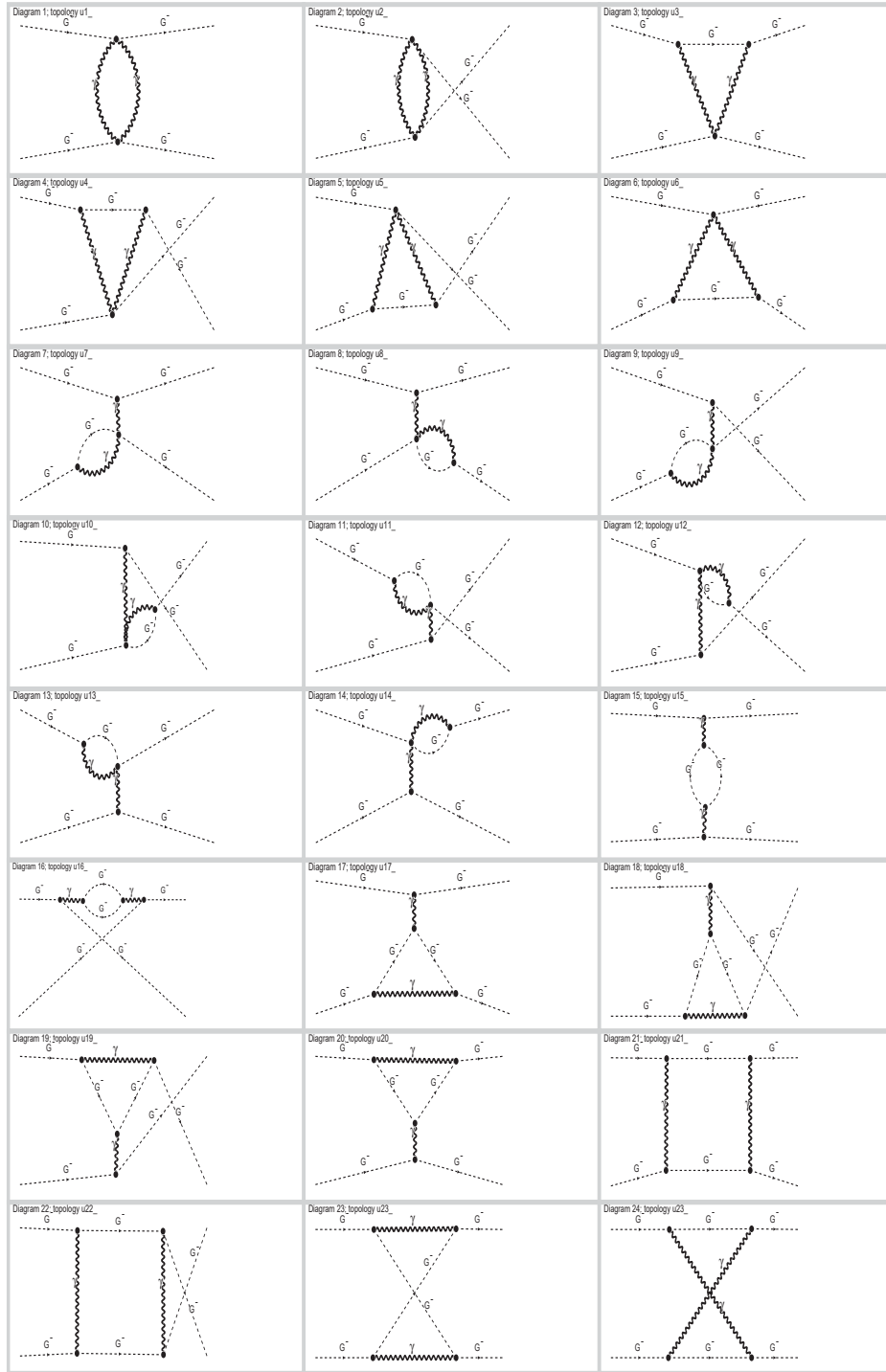
Integrando con respecto a las variables restantes obtenemos:

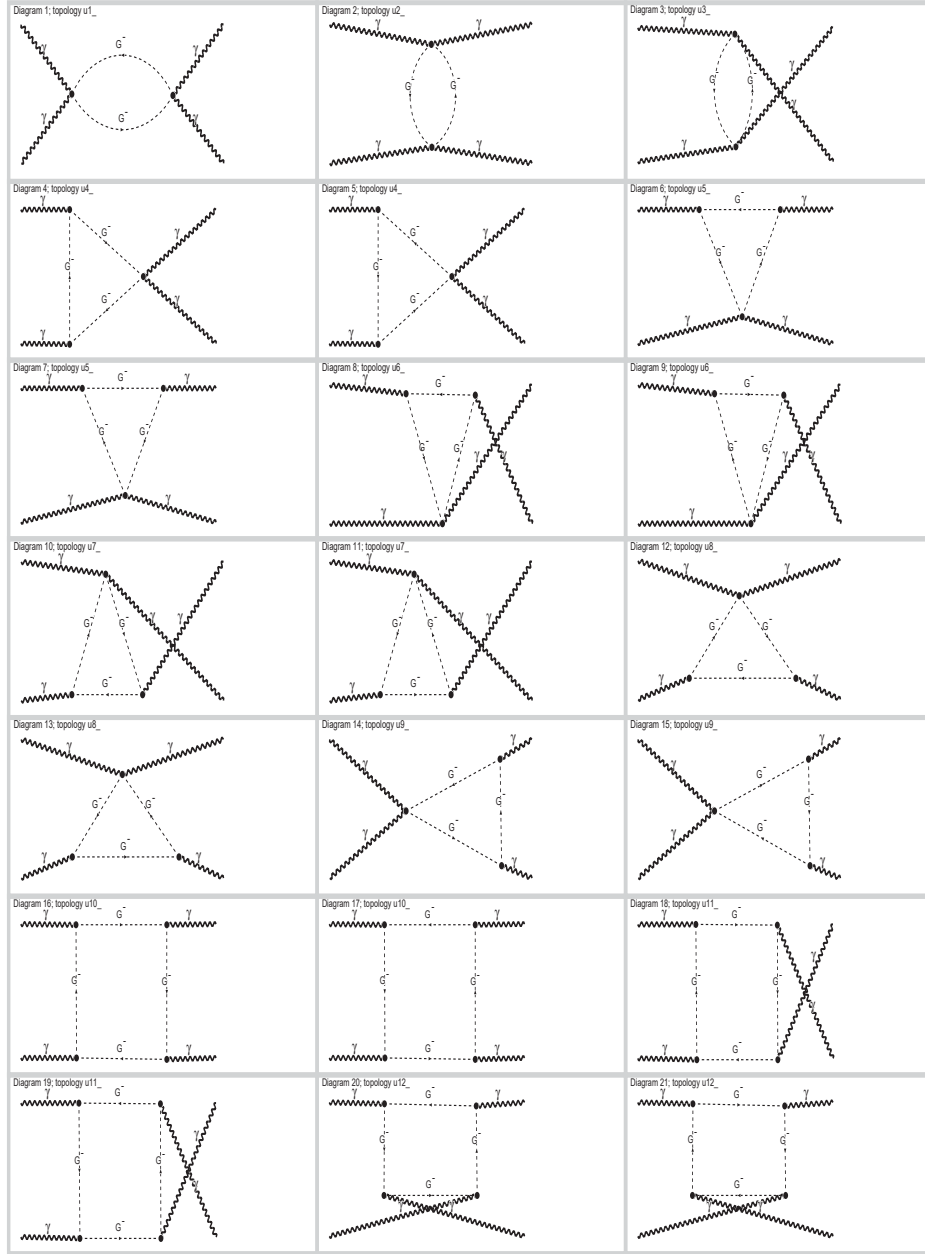
$$\begin{aligned}
J_{\square}^{(4)} = & (-1)^{D/2} (-m^2)^{D/2-\nu_{1234}} \frac{\Gamma(\nu_{1234} - \frac{D}{2})}{\Gamma(\nu_{1234})} \sum_{n,l,j,r,w,t=0}^{\infty} \frac{1}{n!l!j!r!w!t!} (\nu_1; j+w+t) \times \\
& (\nu_2; n+l+j) (\nu_3; n+r+t) (\nu_4; l+r+w) \frac{(\nu_{1234} - \frac{D}{2}; n+l+j+r+w+t)}{(\nu_{1234}; 2n+2l+2j+2r+2w+2t)} \quad (4.161)
\end{aligned}$$

O bien,

$$\begin{aligned}
J_{\square}^{(4)} = & (-1)^{D/2} (-m^2)^{D/2-\nu_{1234}} \frac{\Gamma(\nu_{1234} - \frac{D}{2})}{\Gamma(\nu_{1234})} \times \\
& \mathcal{Y}_4 \left[\begin{matrix} \nu_{1234} - \frac{D}{2}, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \\ \nu_{1234} \end{matrix} \middle| \frac{k^2}{m^2}, \frac{q^2}{m^2}, \frac{p^2}{m^2}, \frac{(q-k)^2}{m^2}, \frac{(q-p)^2}{m^2}, \frac{(k-p)^2}{m^2} \right] \quad (4.162)
\end{aligned}$$

Algunos de los procesos donde podemos aplicar los resultados que hemos calculado en este capítulo son la dispersión escalar-escalar, fotón-fotón y escalar-fotón. En el siguiente capítulo calcularemos el proceso de dispersión escalar-fotón.





Capítulo 5

El Vértice de Dispersión Compton

5.1. Introducción

La evaluación de las funciones de Green para las teorías de norma en el régimen no perturbativo es importante así como difícil. Por ejemplo, el entendimiento del confinamiento y la generación dinámica de masas en QCD requiere del conocimiento de los propagadores del quark y gluón en el infrarojo. Estos objetos están ligados a los vértices de 3 y 4 puntos a través de las ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDEs) así como a las identidades de Slavnov-Taylor (STI), [31]. Por ejemplo, a diferencia de las teorías de norma abelianas, aparecen en el kernel de la dispersión de 4 puntos fantasma-fantasma-quark-quark incluso al nivel donde estas identidades relacionan vértices de 2 y 3 puntos en normas covariantes. El kernel de dispersión de 4 puntos quark-quark para piernas externas off-shell es otra importante cantidad. Su comportamiento en el infrarojo en el espacio de coordenadas debería decirnos como el potencial fuerte aumenta para distancias grandes entre dos quarks estáticos. El estudio del vértice de 4 gluones puede mejorar nuestro entendimiento del corrimiento de acoplamiento en la región del infrarojo, [32]. El entendimiento del comportamiento no perturbativo de una función de 4 puntos es una tarea desalentadora, así un estudio detallado de tal función en una relativamente simple SQED en términos de la identidad de WFGTI [5] podemos dar un paso importante hacia funciones similares en QCD mucho más complicadas.

Comenzaremos por dar la base más general en términos de la cual podemos expandir el vértice de la dispersión de Compton. Usaremos un conjunto apropiado de vectores así del vértice de 4 puntos las componentes del vértice longitudinal para fotones externos puede ser identificado fácilmente. Apelando a la identidad de WFGTI, que relaciona el vértice de 4 puntos de la dispersión de Compton con el vértice de 3 puntos escalar-fotón y el propagador escalar, construimos el vértice longitudinal para todos los órdenes en teoría de perturbaciones en términos de menores funciones de n puntos. La conservación de la construcción de la identidad de WGTI nos permitirá ir al próximo orden de aproximación en los estudios de las ecuaciones de SDE. En principio, por ahora seremos capaces de truncar este al nivel de las funciones de 4 puntos en lugar de las funciones de 3 puntos. Notemos

que la identidad de WFGTI nos deja la parte transversa del vértice indeterminada que ha de ser evaluada usando la fuerza bruta de la teoría de perturbaciones.

A pesar del hecho de que la evaluación perturbativa de las funciones de Green de n puntos en teorías de norma esta recibiendo más atención, resultados analíticos para norma y dimensiones arbitrarias con piernas externas off-shell incluso al nivel de un lazo para vértices de 3 puntos en SQED y QCD [17, 33, 34, 35] han sido reportado recientemente. Los resultados para QED espinorial pueden ser derivados por los apropiados factores de color en el vértice de quark-gluón. Esos resultados perturbativos nos dan una guía natural hacia sus posibles estructuras no perturbativas del vértice fermión-bosón, estructuras que son vitales en las truncaciones de las auténticas ecuaciones de Schwinger-Dyson al nivel de las funciones de 3 puntos para el estudio del confinamiento, generación dinámica de masas y el espectro del hadrón, ver por ejemplo [8, 36].

Un paso natural en esta dirección es la evaluación de la función de 4 puntos en norma y dimensiones arbitrarias para piernas externas off-shell. Para nuestro conocimiento, tal cálculo completo no existe para alguna teoría de norma a través de mucho trabajo tratar con el cálculo de los diagramas de caja en regímenes cinemáticos particulares relacionan el problema por un lado. Por ejemplo, un método para calcular las integrales masivas de Feynman usando la técnica de Mellin-Barnes fue desarrollada en [30] para propagadores y triangulos con potencias arbitrarias en los denominadores. Primero la caja escalar on shell diverge en el infrarojo fue calculada en [37] usando un regulador masivo para el fotón interno; este resultado ha sido extensivamente empleado en muchos cálculos electrodébiles y cálculos para quarks pesados desde entonces. Los diagramas de caja de la dispersión fotón-fotón fueron tratados en [38] usando diferentes representaciones para integrales de un lazo. Las integrales masivas para momentos y dimensiones arbitrarias para funciones de 2, 3 y 4 puntos fueron estudiadas en [39] ejemplos explicitos de las integrales relacionan la dispersión de Bhabha. La integral maestra de 4 puntos en D dimensiones usando técnicas de Mellin-Barnes fueron estudiadas en [40]. Técnicas generales para resolver integrales escalares masivas y no masivas de n puntos a un lazo fueron desarrolladas en [41, 42]. En [43], el diagrama de la caja en dimensiones arbitrarias fue calculada para piernas externas on-shell con propagadores internos de masas variables en conexión con las correcciones radiativas a primer orden para la dispersión Bhabha en D dimensiones. Las amplitudes a un lazo para las funciones de 4 puntos con dos quarks masivos externos y dos partones externos no masivos fueron estudiados en detalle en [44]. En conexión con $2 \rightarrow 2$ amplitudes de dispersión de QCD, integrales escalares a un lazo en diferentes regimenes han sido evaluados en [45, 46, 47]. Trabajo más reciente en este tema puede ser encontrado en [48]. Nuestra tesis extiende estos resultados para piernas externas off-shell. Sin embargo, en lugar de calcular una topología particular, evaluamos un proceso completo en una teoría de norma (dispersión de Compton en SQED) en norma covariante arbitraria, calculando todos los diagramas que contribuyen al proceso en dimensiones generales D .

SQED es una teoría de norma simple comparada con las teorías de norma espinoriales (en el sentido que no hay estructura matricial de Dirac), pero las integrales de lazo tienen la

mismas topologías que aparecen en QED espinorial y QCD. Este hecho la hace una teoría más atractiva. Recientemente, resultados analíticos de las amplitudes de helicidad de 6 fotones han sido reportados para SQED, [49]. A parte del hecho que hemos formulado la maquinaria necesaria para obtener la función de 4 puntos a un lazo, el estudio de procesos tales como la dispersión de Compton

$$e^-(p) + \gamma(k) \rightarrow e^-(p') + \gamma(k')$$

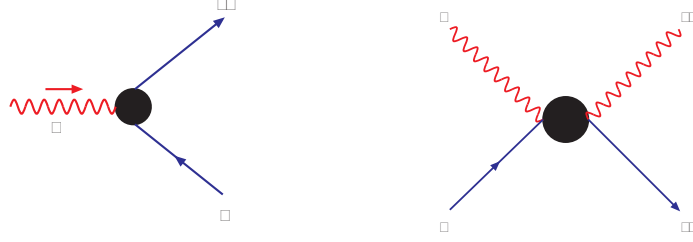
tiene su propio valor correcto. Por ejemplo, las polarizaciones eléctrica y magnética de un pión están relacionadas con la amplitud de la dispersión de Compton. Debido al hecho que la estructura interna del pión contribuye poco a esas polarizaciones, es importante calcular los resultados a un lazo (ver [50] y referencias en este) porque este juega un papel importante en la calibración de los aceleradores de altas energías. Sin embargo, en términos del entendimiento físico, el análisis de procesos con fotones reales o virtuales ligados a un electrón o a una línea de quark nos ayudan a probar la subestructura de un electrón o un nucleón (ver [51] y referencias en este para una revisión en el desarrollo). En particular, el cálculo de las amplitudes a un lazo con quarks masivos externos son cruciales para describir quarks pesados en la producción y desarrollos teóricos de la constante guiados de procedimientos numéricos o semianalíticos que nos permiten mejorar los resultados con precisión. Estos avances han permitido un continuo flujo de diferentes métodos matemáticos modificando la evaluación de las integrales escalares y tensoriales de con líneas masivas [51]. En esta tesis, en adición a la conservación de la identidad de WFTI para el vértice longitudinal por construcción, también presentamos su calculación a un lazo para momentos externos off-shell en norma y dimensiones arbitrarias para SQED masivos. Este involucra integrales escalares de 2, 3 y 4 puntos con un máximo de 2 índices ¹. Los diagramas de caja involucrados tienen al menos 3 propagadores masivos. Todos los cálculos se han llevado a cabo usando FORM o/y Mathematica 6.0.

5.2. Conservación de WFTI para el Vértice Longitudinal de la Dispersión Compton

5.2.1. Identidades de Ward-Green-Takahashi para la Electrodinámica Cuántica Escalar

Consideremos los siguientes vértices:

¹También resultan integrales tensoriales que involucran 3 índices de Lorentz pero dos diagramas de los involucrados se cancelan entre ellos por simetría de conjugación de carga.



Asumimos que el momento conservado es:

$$\begin{aligned} k + p &= p' & \text{para la función de 3 puntos} \\ k + p &= k' + p' & \text{para la función de 4 puntos} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Consideremos entonces, que podemos tener la función de 3 puntos como

$$G_\mu(p', p) = \Delta(p') \Gamma_\mu(p', p) \Delta(p) \quad (5.2)$$

que obedece

$$k^\mu G_\mu(p', p) = \Delta(p) - \Delta(p') \quad (5.3)$$

o bien

$$k^\mu \Gamma_\mu(p + k, p) = \Delta^{-1}(p + k) - \Delta^{-1}(p) . \quad (5.4)$$

En este mismo espíritu analizamos las relaciones de la función de 4 puntos. Como punto de partida, las identidades satisfechas por las funciones de Green, están dadas por:

$$k'^\nu G_{\nu\mu}(p', k'; p, k) = G_\mu(p + k, p) - G_\mu(p', p' - k) , \quad (5.5)$$

$$k'^\mu G_{\nu\mu}(p', k'; p, k) = G_\nu(p', p' + k') - G_\nu(p - k', p) , \quad (5.6)$$

Para ver que implican estas identidades para Γ primero dividimos los G s en partes 1-PI y entonces contraemos con los vectores de momento del fotón k y k' . Para la primera, tenemos

$$\begin{aligned} 0 = k'^\nu G_{\nu\mu}(p', k'; p, k) &= -\Delta(p') \underbrace{k'^\nu \Gamma_\nu(p', p' + k')} \Delta(p' + k') \Gamma_\mu(p + k, p) \Delta(p) \\ &\quad - \Delta(p') \Gamma_\mu(p', p' - k) \Delta(p' - k) \underbrace{k'^\nu \Gamma_\nu(p - k', p)} \Delta(p) \\ &\quad + \Delta(p') k'^\nu \Gamma_{\nu\mu}(p', k'; p, k) \Delta(p) \end{aligned} \quad (5.7)$$

y para la segunda tenemos

$$\begin{aligned} 0 = k'^\mu G_{\nu\mu}(p', k'; p, k) &= -\Delta(p') \Gamma_\nu(p', p' + k') \Delta(p' + k') \underbrace{k'^\mu \Gamma_\mu(p + k, p)} \Delta(p) \\ &\quad - \Delta(p') \underbrace{k'^\mu \Gamma_\mu(p', p' - k)} \Delta(p' - k) \Gamma_\nu(p - k', p) \Delta(p) \\ &\quad + \Delta(p') k'^\mu \Gamma_{\nu\mu}(p', k'; p, k) \Delta(p) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Notemos que los términos que estan en el corchete se reemplazan por la identidad de la ecuación (5.4) para obtener el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}
0 &= -\Delta(-p')[\Delta^{-1}(p') - \Delta^{-1}(p' + k')]\Delta(p' + k')\Gamma_\mu(p + k, p)\Delta(p) \\
&\quad -\Delta(-p')\Gamma_\mu(p', p' - k)\Delta(p' - k)[\Delta^{-1}(p - k') - \Delta^{-1}(p)]\Delta(p) \\
&\quad +\Delta(p')k''\Gamma_{\nu\mu}(p', k'; p, k)\Delta(p)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
0 &= -\Delta(p')\Gamma_\nu(p', p' + k')\Delta(p' + k')[\Delta^{-1}(p + k) - \Delta^{-1}(p)]\Delta(p) \\
&\quad -\Delta(p')[\Delta^{-1}(p') - \Delta^{-1}(p' - k)]\Delta(p' - k)\Gamma_\nu(p - k', p)\Delta(p) \\
&\quad +\Delta(p')k^\mu\Gamma_{\nu\mu}(p', k'; p, k)\Delta(p)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Podemos aislar el término que contiene la información de la función de 4 puntos de ambas relaciones y tenemos

$$\begin{aligned}
\Delta(p')k''\Gamma_{\nu\mu}(p', k'; p, k)\Delta(p) &= \Delta(p' + k')\Gamma_\mu(p + k, p)\Delta(p) - \Delta(p')\Gamma_\mu(p', p' - k)\Delta(p' - k) \\
&\quad +\Delta(p')\Gamma_\mu(p', p' - k)\Delta(p) - \Delta(p')\Gamma_\mu(p + k, p)\Delta(p) ,
\end{aligned} \tag{5.11}$$

por un lado, y

$$\begin{aligned}
\Delta(p')k^\mu\Gamma_{\nu\mu}(p', k'; p, k)\Delta(p) &= \Delta(p' - k)\Gamma_\nu(p - k', p)\Delta(p) - \Delta(p')\Gamma_\nu(p', p' + k')\Delta(p' + k') \\
&\quad +\Delta(p')\Gamma_\nu(p', p' + k')\Delta(p) - \Delta(p')\Gamma_\nu(p - k', p)\Delta(p) ,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

por el otro. Notemos ahora que los primeros dos términos de las dos relaciones se cancelan cuando usamos conservación de momento, como en la ecuación (5.1), ya que:

$$\begin{aligned}
\Delta(p')\Gamma_\mu(p', p' - k)\Delta(p' - k) &\xrightarrow{p' \rightarrow p' + k'} \Delta(p' + k')\Gamma_\mu(p' + k', p' + k' - k)\Delta(p' + k' - k) \\
&= \Delta(p' + k')\Gamma_\mu(p + k, p)\Delta(p) .
\end{aligned} \tag{5.13}$$

y

$$\begin{aligned}
\Delta(p')\Gamma_\mu(p', p' + k')\Delta(p' + k') &\xrightarrow{p' \rightarrow p' - k} \Delta(p' - k)\Gamma_\mu(p' - k, p' + k' - k)\Delta(p' + k' - k) \\
&= \Delta(p' - k)\Gamma_\mu(p' - k, p)\Delta(p) .
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Con las ecuaciones (5.11)-(5.14) tenemos que las identidades de Ward-Frankin-Green-Takahashi (WFGTI) que relacionan las funciones de Green de 3 y 4 puntos son :

$$\begin{aligned}
k'^\mu\Gamma_{\nu\mu}(p', k'; p, k) &= \Gamma_\nu(p + k, p) - \Gamma_\nu(p', p' - k) , \\
k^\mu\Gamma_{\nu\mu}(p', k'; p, k) &= \Gamma_\nu(p', p' + k') - \Gamma_\nu(p - k', p) ,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Estas identidades nos permiten escribir “ las partes longitudinales ” del vértice de 4-puntos en términos del vértice de 3-puntos. Esas partes son definidas como las que desaparecen cumpliendo con las contracciones descritas en la ecuación (5.15). Las partes restantes “ las partes transversas ” tendran que ser calculadas por fuerza bruta de la teoría de perturbaciones.

5.2.2. Resolviendo las Identidades de WGT para la Función de 4 Puntos

Hemos obtenido que

$$\begin{aligned} k'^\mu \Gamma_{\nu\mu}(p', k'; p, k) &= \Gamma_\nu(p+k, p) - \Gamma_\nu(p', p' - k), \\ k^\mu \Gamma_{\nu\mu}(p', k'; p, k) &= \Gamma_\nu(p', p' + k') - \Gamma_\nu(p - k', p), \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde podemos hacer la siguiente descomposición

$$\Gamma_\mu(p+k, p) = (2p+k)_\mu \frac{\Delta^{-1}(p+k) - \Delta^{-1}(p)}{(p+k)^2 - p^2} + 2(k_\mu p \cdot k - k^2 p_\mu) \underbrace{T((p+k)^2, p^2, k^2)}_{\text{parte transversa}} \quad (5.17)$$

Necesitamos expandir $\Gamma_{\nu\mu}$ en términos de un conjunto de tensores que contienen términos que son longitudinales y transversos a los dos fotones. Para guiarnos notemos que

$$\begin{aligned} k'^\mu \Gamma_{\nu\mu} &= (2p+k)_\nu \frac{\Delta^{-1}(p+k) - \Delta^{-1}(p)}{(p+k)^2 - p^2} + 2(k_\nu p \cdot k - k^2 p_\nu) T(p+k, p) \\ &\quad - (2p'-k)_\nu \frac{\Delta^{-1}(p') - \Delta^{-1}(p'-k)}{p'^2 - (p'-k)^2} + 2(k_\nu p' \cdot k - k^2 p'_\nu) T(p', p'-k) \\ &= (p'+p)_\nu \left[\frac{\Delta^{-1}(p+k) - \Delta^{-1}(p)}{(p+k)^2 - p^2} - \frac{\Delta^{-1}(p') - \Delta^{-1}(p'-k)}{p'^2 - (p'-k)^2} \right] \\ &\quad + k_\nu \left[\frac{\Delta^{-1}(p+k) - \Delta^{-1}(p)}{(p+k)^2 - p^2} - \frac{\Delta^{-1}(p') - \Delta^{-1}(p'-k)}{p'^2 - (p'-k)^2} \right] \\ &\quad + [k_\nu(p+p') \cdot k - k^2(p+p')_\nu] [T(p+k, p) - T(p', p'-k)] \\ &\quad + [k_\nu k' \cdot k - k^2 k'_\nu] [T(p+k, p) + T(p', p'-k)] \end{aligned} \quad (5.18)$$

Los últimos dos términos son transversos a k^ν y son independientes pero tenemos 3 cuadvectores independientes, $(p+p')_\nu$, k_ν , k'_ν dos de los cuales pueden ser ortonormales a k^μ . Similarmente la otra identidad de WGT queda como

$$\begin{aligned} k^\mu \Gamma_{\nu\mu} &= (2p'+k')_\nu \frac{\Delta^{-1}(p'+k') - \Delta^{-1}(p')}{(p'+k')^2 - p'^2} + 2(k'_\nu k' \cdot p' - k'^2 p'_\nu) T(p'+k', p') \\ &\quad - (2p-k)_\nu \frac{\Delta^{-1}(p) - \Delta^{-1}(p-k')}{p^2 - (p-k')^2} - 2(k'_\nu k' \cdot p - k'^2 p_\nu) T(p, p-k') \\ &= (p+p')_\nu \left[\frac{\Delta^{-1}(p'+k') - \Delta^{-1}(p')}{(p'+k')^2 - p'^2} - \frac{\Delta^{-1}(p) - \Delta^{-1}(p-k')}{p^2 - (p-k')^2} \right] \\ &\quad + k_\nu \left[\frac{\Delta^{-1}(p'+k') - \Delta^{-1}(p')}{(p'+k')^2 - p'^2} - \frac{\Delta^{-1}(p) - \Delta^{-1}(p-k')}{p^2 - (p-k')^2} \right] \\ &\quad + [k'_\nu k' \cdot (p+p') - k'^2(p+p')_\nu] [T(p'+k', p') - T(p, p-k')] \\ &\quad + [k'_\nu k' \cdot k - k'^2 k'_\nu] [T(p'+k', p') + T(p, p-k')] \end{aligned} \quad (5.19)$$

5.2.3. Base de Vectores

Si convenientemente definimos

$$\begin{aligned}
Q_\mu &= k'_\mu(p+p') \cdot k - k \cdot k'(p+p')_\mu , \\
Q'_\nu &= k_\nu(p+p') \cdot k' - k \cdot k'(p+p')_\nu , \\
R_\mu &= k_\mu k' \cdot k - k^2 k'_\mu , \\
R'_\nu &= k'_\nu k' \cdot k - k'^2 k'_\nu .
\end{aligned} \tag{5.20}$$

entonces el vértice completo de 4 puntos puede ser escrito en su forma más general como :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^L + \Gamma_{\mu\nu}^T = Ag_{\mu\nu} &+ B_{11}(k \cdot k' g_{\nu\mu} - k_\nu k'_\mu) + B_{12}Q'_\nu k'_\mu + B_{13}R'_\nu k'_\mu \\
&+ B_{21}k_\nu Q_\mu + B_{22}Q'_\nu Q_\mu + B_{23}R'_\nu Q_\mu \\
&+ B_{31}k_\nu R_\mu + B_{32}Q'_\nu R_\mu + B_{33}R'_\nu R_\mu ,
\end{aligned} \tag{5.21}$$

donde los coeficientes A , B_{12} , B_{21} , B_{31} y B_{13} son determinados por la identidad de WFGT a todos los ordenes en teoría de perturbaciones. Por lo tanto,

$$\Gamma_{\mu\nu}^L = Ag_{\mu\nu} + B_{12}Q'_\nu k'_\mu + B_{13}R'_\nu k'_\mu + B_{21}k_\nu Q_\mu + B_{31}k_\nu R_\mu , \tag{5.22}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^T = B_{11}(k \cdot k' g_{\nu\mu} - k_\nu k'_\mu) + B_{22}Q'_\nu Q_\mu + B_{23}R'_\nu Q_\mu + B_{32}Q'_\nu R_\mu + B_{33}R'_\nu R_\mu . \tag{5.23}$$

Los coeficientes que constituyen la parte longitudinal del vértice son:

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{k \cdot k'} \{ \Delta^{-1}(p+k) - \Delta^{-1}(p) + \Delta^{-1}(p'-k) - \Delta^{-1}(p') \} \\
B_{21} &= -\frac{1}{k \cdot k'} \left\{ \frac{\Delta^{-1}(p+k) - \Delta^{-1}(p)}{(p+k)^2 - p^2} - \frac{\Delta^{-1}(p') - \Delta^{-1}(p'-k)}{p'^2 - (p'-k)^2} - k^2 [\Gamma_T(p+k, p) \right. \\
&\quad \left. - \Gamma_T(p', p'-k)] \right\} \\
B_{12} &= -\frac{1}{k \cdot k'} \left\{ \frac{\Delta^{-1}(p'-k') - \Delta^{-1}(p')}{(p'-k')^2 - p'^2} - \frac{\Delta^{-1}(p) - \Delta^{-1}(p+k')}{p^2 - (p+k')^2} - k'^2 [\Gamma_T(p', p'-k') \right. \\
&\quad \left. - \Gamma_T(p, p+k')] \right\} \\
B_{31} &= \frac{1}{(k \cdot k')^2} \{ [(p+k)^2 - p^2] \Gamma_T(p+k, p) + [(p'-k)^2 - p'^2] \Gamma_T(p', p'-k) \} \\
B_{13} &= \frac{1}{(k \cdot k')^2} \{ [(p'-k')^2 - p'^2] \Gamma_T(p'-k', p') + [(p+k')^2 - p^2] \Gamma_T(p, p+k') \} ,
\end{aligned} \tag{5.24}$$

donde Γ_T es la parte transversa del vértice de 3-puntos escalar-fotón definido como

$$\Gamma_\mu(p+k, p) = (2p+k)_\mu \frac{\Delta^{-1}(p+k) - \Delta^{-1}(p)}{(p+k)^2 - p^2} + 2(k_\mu p \cdot k - k^2 p_\mu) \Gamma_T(p+k, p) . \tag{5.25}$$

Notemos que en todos estos cálculos, donde la proyección longitudinal del vértice involucrado, Eqs.(5.24) constituye un resultado exacto no perturbativo. Sin embargo B_{11} , B_{22} , B_{23} , B_{32} y B_{33} permanecen indeterminados y necesitan ser calculados perturbativamente orden por orden. Substrayendo la parte longitudinal del vértice de 4 puntos, podemos extraer los coeficientes desconocidos a un lazo en teoría de perturbaciones. La dispersión Escalar-Fotón² puede ser expandida en una base natural como :

$$\Gamma_{\mu\nu} = C_0 g_{\mu\nu} + C_1 k_\mu k_\nu + C_2 k_\mu p_\nu + C_3 p_\mu k_\nu + C_4 k_\mu p'_\nu + C_5 p'_\mu k_\nu + C_6 p_\mu p'_\nu + C_7 p'_\mu p_\nu + C_8 p'_\mu p'_\nu + C_9 p_\mu p_\nu, \quad (5.26)$$

Usando las ecuaciones (5.21) y (5.26), podemos invertir el sistema y encontrar las relaciones entre los C_i , A 's y B 's como:

$$C_0 = A + (k \cdot k') B_{11} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} C_1 = & B_{11} + (-p^2 - k \cdot p - k \cdot p' + p'^2) B_{12} \\ & + (-2p \cdot p' + p^2 + p'^2 - k \cdot p' + k \cdot p) B_{13} \\ & + (k \cdot p + k \cdot p') B_{21} + (k \cdot p + k \cdot p') (k \cdot p - p'^2 + k \cdot p' + p^2) B_{22} \\ & + (k \cdot p + k \cdot p') (2p \cdot p' + k \cdot p' - p^2 - p'^2 - k \cdot p) B_{23} \\ & + (k \cdot p' - k \cdot p) B_{31} + (k \cdot p' - k \cdot p) (k \cdot p - p'^2 + k \cdot p' + p^2) B_{32} \\ & + (k \cdot p' - k \cdot p) (2p \cdot p' + k \cdot p' - p^2 - p'^2 - k \cdot p) B_{33} \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} C_2 = & (-k \cdot k') B_{12} + (k \cdot k') B_{13} + (k \cdot p + k \cdot p') (k \cdot k') B_{22} \\ & - (k \cdot p + k \cdot p') (k \cdot k') B_{23} + (k \cdot p' - k \cdot p) (k \cdot k') B_{32} \\ & - (k \cdot p' - k \cdot p) (k \cdot k') B_{33} \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} C_3 = & B_{11} + (-p^2 - k \cdot p - k \cdot p' + p'^2) B_{12} + (-2p \cdot p' + p^2 + p'^2 - k \cdot p' + k \cdot p) B_{13} \\ & + (-k^2 + 2k \cdot p') B_{21} + (k \cdot p - p'^2 + k \cdot p' + p^2) (-k^2 + 2k \cdot p') B_{22} \\ & + (-k^2 + 2k \cdot p') (2p \cdot p' + k \cdot p' - p^2 - p'^2 - k \cdot p) B_{23} + k^2 B_{31} \\ & + k^2 (k \cdot p - p'^2 + k \cdot p' + p^2) B_{32} + k^2 (2p \cdot p' + k \cdot p' - p^2 - p'^2 - k \cdot p) B_{33} \\ C_4 = & (-k \cdot k') B_{12} + (-k \cdot k') B_{13} + (k \cdot p + k \cdot p') (k \cdot k') B_{22} \\ & + (k \cdot p + k \cdot p') (k \cdot k') B_{23} + (k \cdot p' - k \cdot p) (k \cdot k') B_{32} \\ & + (k \cdot p' - k \cdot p) (k \cdot k') B_{33} \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} C_5 = & -B_{11} + (k \cdot p - p'^2 + k \cdot p' + p^2) B_{12} + (2p \cdot p' + k \cdot p' - p^2 - p'^2 - k \cdot p) B_{13} \\ & + (-2k \cdot p - k^2) B_{21} - (k^2 + 2k \cdot p) (k \cdot p - p'^2 + k \cdot p' + p^2) B_{22} \\ & - (k^2 + 2k \cdot p) (2p \cdot p' + k \cdot p' - p^2 - p'^2 - k \cdot p) B_{23} - k^2 B_{31} \\ & - k^2 (k \cdot p - p'^2 + k \cdot p' + p^2) B_{32} - k^2 (2p \cdot p' + k \cdot p' - p^2 - p'^2 - k \cdot p) B_{33} \\ C_6 = & (-k \cdot k') B_{12} + (-k \cdot k') B_{13} + (-k^2 + 2k \cdot p') (k \cdot k') B_{22} \\ & + (-k^2 + 2k \cdot p') (k \cdot k') B_{23} + k^2 (k \cdot k') B_{32} + k^2 (k \cdot k') B_{33} \end{aligned} \quad (5.31)$$

²Analizamos el proceso de dispersión de Compton para escalares masivos como $e^-(p) + \gamma(k) \rightarrow e^-(p') + \gamma(k')$ esto significa que $p + k = p' + k'$ para la función de 4 puntos.

$$\begin{aligned}
C_7 &= (k \cdot k')B_{12} + (-k \cdot k')B_{13} - (k^2 + 2k \cdot p)(k \cdot k')B_{22} \\
&\quad + (k^2 + 2k \cdot p)(k \cdot k')B_{23} - k^2(k \cdot k')B_{32} + k^2(k \cdot k')B_{33}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned}
C_8 &= (k \cdot k')B_{12} + (k \cdot k')B_{13} - (k^2 + 2k \cdot p)(k \cdot k')B_{22} \\
&\quad - (k^2 + 2k \cdot p)(k \cdot k')B_{23} - k^2(k \cdot k')B_{32} - k^2(k \cdot k')B_{33}
\end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
C_9 &= (-k \cdot k')B_{12} + (k \cdot k')B_{13} + (-k^2 + 2k \cdot p')(k \cdot k')B_{22} \\
&\quad - (-k^2 + 2k \cdot p')(k \cdot k')B_{23} + k^2(k \cdot k')B_{32} - k^2(k \cdot k')B_{33}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Estos coeficientes satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
C_2 &= C_4|_{\{B_{13}=-B_{13}, B_{23}=-B_{23}, B_{33}=-B_{33}\}} , \\
C_6 &= C_9|_{\{B_{13}=-B_{13}, B_{23}=-B_{23}, B_{33}=-B_{33}\}} , \\
C_7 &= C_8|_{\{B_{13}=-B_{13}, B_{23}=-B_{23}, B_{33}=-B_{33}\}} , \\
C_6 &= C_7|_{\{B_{12}=-B_{12}, B_{23}=-B_{23}, B_{32}=-B_{32}\}} + 2(k \cdot k')(k \cdot p + k \cdot p')(B_{22} + B_{23}) , \\
C_1 - \frac{1}{2}(C_3 - C_5) &= -(k \cdot k')[B_{31} + (p^2 - p'^2 + k \cdot p + k \cdot p')(B_{32} - B_{33}) \\
&\quad + 2(p \cdot p' - k \cdot p - p^2)B_{33}] \\
C_3 + C_5 &= -2(k \cdot k')[B_{21} - (p^2 - p'^2 + k \cdot p + k \cdot p')B_{22} \\
&\quad + (k \cdot p' - k \cdot p - (p - p')^2)B_{23}] .
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Invirtiendo este sistema podemos escribir las piezas transversas desconocidas en la ecuación (5.21) al nivel de un lazo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= -\frac{k^2}{k \cdot k'} C_1 + \frac{k^2(k \cdot p + p^2 - p \cdot p')}{(k \cdot k')^2} C_2 - \frac{k \cdot p}{k \cdot k'} C_3 + \frac{k^2(-p'^2 + p \cdot p' + k \cdot p')}{(k \cdot k')^2} C_4 \\
&\quad - \frac{k \cdot p'}{k \cdot k'} C_5 + \frac{k \cdot p(-p'^2 + p \cdot p' + k \cdot p')}{(k \cdot k')^2} C_6 + \frac{k \cdot p'(k \cdot p + p^2 - p \cdot p')}{(k \cdot k')^2} C_7 \\
&\quad + \frac{k \cdot p'(-p'^2 + p \cdot p' + k \cdot p')}{(k \cdot k')^2} C_8 + \frac{k \cdot p(k \cdot p + p^2 - p \cdot p')}{(k \cdot k')^2} C_9 \\
B_{22} &= \frac{1}{4} \frac{C_6 + C_7 + C_8 + C_9}{(k \cdot p')(-2k \cdot p + k \cdot p') + (k \cdot p)^2 + k^2(k^2 + 2k \cdot p - 2k \cdot p')} \\
B_{23} &= \frac{1}{4} \frac{C_6 - C_7 + C_8 - C_9}{(k \cdot p')(-2k \cdot p + k \cdot p') + (k \cdot p)^2 + k^2(k^2 + 2k \cdot p - 2k \cdot p')} \\
B_{32} &= \frac{1}{4} \frac{2 C_2 + 2 C_4 - C_6 + C_7 + C_8 - C_9}{(k \cdot p')(-2k \cdot p + k \cdot p') + (k \cdot p)^2 + k^2(k^2 + 2k \cdot p - 2k \cdot p')} \\
B_{33} &= -\frac{1}{4} \frac{2 C_2 - 2 C_4 + C_6 + C_7 - C_8 - C_9}{(k \cdot p')(-2k \cdot p + k \cdot p') + (k \cdot p)^2 + k^2(k^2 + 2k \cdot p - 2k \cdot p')} .
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Los coeficientes C_i pueden ser identificados de las expresiones de $\Gamma_1^{\mu\nu}$ a $\Gamma_{28}^{\mu\nu}$. A continuación daremos los coeficientes C_i explícitamente.

5.2.4. Los Coeficientes C_i a un Lazo

Los coeficientes C_i son:

$$\begin{aligned}
C_0 = & -\frac{2^{-2D-1}e^2\pi^{-2D}}{D} \left\{ -2^D\pi^{D+2}D\tilde{K}_0(p,p') + 2^{D+1}\pi^{D+2}(p'^4(U_I(p,p',q) \right. \\
& + U_I(p,p',q')) + p'^2(I_C(p',q) + I_C(p',q') - I_E(p',q) - I_E(p',q')) \\
& - \tilde{I}_0(q' - p, p' - p) - \tilde{I}_0(q - p, p' - p) + \tilde{I}_E(q' - p, p' - p) \\
& + \tilde{I}_E(q - p, p' - p)) + p^2p'^2(U_D(p,p',q) + U_D(p,p',q')) + 2p'^2(p \cdot q)U_E(p,p',q) \\
& + 2p'^2(p \cdot q')U_E(p,p',q') + 2p'^2(p \cdot p')U_F(p,p',q) + 2p'^2(p \cdot p')U_F(p,p',q') \\
& + q^2p'^2U_G(p,p',q) + q'^2p'^2U_G(p,p',q') + 2p'^2(p' \cdot q)U_H(p,p',q) \\
& + 2p'^2(p' \cdot q')U_H(p,p',q') - 2m^2p'^2(U_I(p,p',q) + U_I(p,p',q')) \\
& + p^2p'^2(U_I(p,p',q) + U_I(p,p',q')) - K_0(q' - p, p' - p) - K_0(q - p, p' - p) \\
& - m^2(\tilde{I}_0(q' - p, p' - p) - \tilde{I}_0(q - p, p' - p) + 2\tilde{I}_0(q' - p, p' - p) \\
& + 2\tilde{I}_0(q - p, p' - p)) + 2(p' \cdot q)\tilde{I}_D(q - p, p' - p) + 2(p' \cdot q')\tilde{I}_D(q' - p, p' - p) \\
& + p^2(I_C(p,q) + I_C(p,q') - I_E(p,q) - I_E(p,q')) - \tilde{I}_0(q' - p, p' - p) \\
& - \tilde{I}_0(q - p, p' - p) + \tilde{I}_C(q' - p, p' - p) + \tilde{I}_C(q - p, p' - p) + 2\tilde{I}_D(q' - p, p' - p) \\
& + 2\tilde{I}_D(q - p, p' - p) + \tilde{I}_E(q' - p, p' - p) + \tilde{I}_E(q - p, p' - p)) \\
& - 2(p \cdot p')(\tilde{I}_D(q' - p, p' - p) - \tilde{I}_D(q - p, p' - p) - \tilde{I}_E(q' - p, p' - p) \\
& - \tilde{I}_E(q - p, p' - p)) - 2(p \cdot q)(\tilde{I}_C(q - p, p' - p) - \tilde{I}_D(q - p, p' - p)) \\
& - 2(p \cdot q')(\tilde{I}_C(q' - p, p' - p) - \tilde{I}_D(q' - p, p' - p)) - q'^2(I_C(p',q') - I_C(p,q')) \\
& + I_E(p',q') + I_E(p,q') + \tilde{I}_C(q' - p, p' - p)) - q^2(I_C(p',q)q^2 - I_C(p,q) \\
& + I_E(p',q) + I_E(p,q) + \tilde{I}_C(q - p, p' - p)) + p^4(U_D(p,p',q) + U_D(p,p',q')) \\
& - 2m^2p^2(U_D(p,p',q) + U_D(p,p',q')) + 2p^2(p \cdot q)U_E(p,p',q) \\
& + 2p^2(p \cdot q')U_E(p,p',q') + 2p^2(p \cdot p')U_F(p,p',q) + 2p^2(p \cdot p')U_F(p,p',q') \\
& - 2m^2q^2U_G(p,p',q) + p^2q^2U_G(p,p',q) - 2m^2q'^2U_G(p,p',q') + p^2q'^2U_G(p,p',q') \\
& + 2p^2(p' \cdot q)U_H(p,p',q) + 2p^2(p' \cdot q')U_H(p,p',q') - 4(2(p \cdot p')^2(U_F(p,p',q) \\
& + U_F(p,p',q')) - (p \cdot p')(\tilde{I}_0(q' - p, p' - p) - \tilde{I}_0(q - p, p' - p)) \\
& + p^2(p \cdot p')(U_D(p,p',q) + U_D(p,p',q')) + 2(p \cdot q)(p \cdot p')U_E(p,p',q) \\
& + 2(p \cdot q')(p \cdot p')U_E(p,p',q') + m^2(p \cdot p')(U_F(p,p',q) + U_F(p,p',q')) \\
& + q^2(p \cdot p')U_G(p,p',q) + q'^2(p \cdot p')U_G(p,p',q') + 2(p' \cdot q)(p \cdot p')U_H(p,p',q) \\
& + 2(p' \cdot q')(p \cdot p')U_H(p,p',q') + p'^2(p \cdot p')(U_I(p,p',q) + U_I(p,p',q')) \\
& + m^2(p \cdot q)U_E(p,p',q) + m^2(p \cdot q')U_E(p,p',q') + m^2(p' \cdot q)U_H(p,p',q) \\
& + m^2(p' \cdot q')U_H(p,p',q')) + D(-2(p \cdot p')I_0(p,p') + K_0(q) + K_0(q') \\
& + (p'^2 + p \cdot p')I_B(p,p') + (p' \cdot p + p^2)I_A(p,p')) + (1 - \xi)(2^{D+1}\pi^{D+2}(\\
& - m^4(U_0(p,p',q) + U_0(p,p',q')) + p^2m^4(V_D(p,p',q) + V_D(p,p',q')) \\
& + q^2m^4V_G(p,p',q) + q'^2m^4V_G(p,p',q') + p'^2m^4(V_I(p,p',q) + V_I(p,p',q'))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m^2(\tilde{I}_0(q' - p, p' - p) + \tilde{I}_0(q - p, p' - p)) + p'^2 m^2(-J_C(p', q) - J_C(p', q') + J_E(p', q) \\
& + J_E(p', q')) + p^2 m^2(-J_C(p, q) - J_C(p, q') + J_E(p, q) + J_E(p, q')) + q'^2 m^2(J_C(p', q') \\
& + J_C(p, q') - J_E(p', q') - J_E(p, q')) + q^2 m^2(J_C(p', q) + J_C(p, q) - J_E(p', q) - J_E(p, q)) \\
& + p'^2 m^2(U_0(p, p', q) + U_0(p, p', q')) + p^2 m^2(U_0(p, p', q) + U_0(p, p', q')) \\
& - 4m^2(p \cdot q)U_E(p, p', q) - 4m^2(p \cdot q')U_E(p, p', q') - 4m^2(p \cdot p')(U_F(p, p', q) + U_F(p, p', q')) \\
& - 4m^2(p' \cdot q)U_H(p, p', q) - 4m^2(p' \cdot q')U_H(p, p', q') - p^4 m^2(V_D(p, p', q) + V_D(p, p', q')) \\
& - p'^2 p^2 m^2(V_D(p, p', q') + V_D(p, p', q) + V_I(p, p', q) + V_I(p, p', q')) - p'^2 q^2 m^2 V_G(p, p', q) \\
& - p^2 q^2 m^2 V_G(p, p', q) - p'^2 q'^2 m^2 V_G(p, p', q') - p^2 q'^2 m^2 V_G(p, p', q') - p'^4 m^2(V_I(p, p', q) \\
& + V_I(p, p', q')) + p'^4(J_C(p', q) + J_C(p', q') - J_E(p', q) - J_E(p', q')) + Dp'^2 I_B(p, p') \\
& + p^4(J_C(p, q) + J_C(p, q') - J_E(p, q) - J_E(p, q')) + K_0(p', q) + K_0(p', q') + K_0(p, q) \\
& + K_0(p, q') - K_0(q' - p, p' - p) - K_0(q - p, p' - p) + p'^2(-I_E(p', q) - I_E(p', q')) \\
& - \tilde{I}_0(q' - p, p' - p) - \tilde{I}_0(q - p, p' - p) + \tilde{I}_E(q' - p, p' - p) + \tilde{I}_E(q - p, p' - p)) \\
& + p^2(-I_E(p, q) - I_E(p, q') - \tilde{I}_0(q' - p, p' - p) - \tilde{I}_0(q - p, p' - p) + \tilde{I}_C(q' - p, p' - p) \\
& + \tilde{I}_C(q - p, p' - p) + \tilde{I}_E(q' - p, p' - p) + \tilde{I}_E(q - p, p' - p) + DI_A(p, p')) \\
& + D(p \cdot p')(I_A(p, p') + I_B(p, p')) + q'^2(-I_C(p', q') - I_C(p, q') + \tilde{I}_C(q' - p, p' - p)) \\
& - p'^2 q'^2(J_C(p', q') + J_E(p', q')) + p^2 q'^2(-J_C(p, q') + J_E(p, q')) + q^2(-I_C(p', q) - I_C(p, q) \\
& + \tilde{I}_C(q - p, p' - p)) + p'^2 q^2(-J_C(p', q) + J_E(p', q)) + p^2 q^2(-J_C(p, q) + J_E(p, q)) \\
& - p'^2 p^2(U_0(p, p', q) + U_0(p, p', q')) + p^4(U_D(p, p', q) + U_D(p, p', q')) + p'^2 p^2(U_D(p, p', q) \\
& + U_D(p, p', q')) + p'^2 q^2 U_G(p, p', q) + p^2 q^2 U_G(p, p', q) + p'^2 q'^2 U_G(p, p', q') + p^2 q'^2 U_G(p, p', q') \\
& + p'^4(U_I(p, p', q) + U_I(p, p', q')) + p'^2 p^2(U_I(p, p', q) + U_I(p, p', q')) + p'^2 p^4(V_D(p, p', q) \\
& + V_D(p, p', q')) + p'^2 p^2 q^2 V_G(p, p', q) + p'^2 p^2 q'^2 V_G(p, p', q') + p'^4 p^2(V_I(p, p', q) + V_I(p, p', q')) \\
& + 2^{D+1} \pi^{3D/2} D \left((q^2 - m^2)^{D/2-2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} {}_2F_1 \left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2} + 1; \frac{q^2}{q^2 - m^2} \right) \right. \\
& \left. + (q'^2 - m^2)^{D/2-2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} {}_2F_1 \left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2} + 1; \frac{q'^2}{q'^2 - m^2} \right) \right) \\
& + 2^D \pi^{D+2} (4m^4(p \cdot q)V_E(p, p', q) + 4m^4(p \cdot q')V_E(p, p', q') + 4m^4(p \cdot p')(V_F(p, p', q) \\
& + V_F(p, p', q')) + 4m^4(p' \cdot q)V_H(p, p', q) + 4m^4(p' \cdot q')V_H(p, p', q') + 4p^2 m^2(-U_D(p, p', q) \\
& - U_D(p, p', q')) - 4q^2 m^2 U_G(p, p', q) - 4q'^2 m^2 U_G(p, p', q') - 4p'^2 m^2(U_I(p, p', q) + U_I(p, p', q')) \\
& - 4p'^2 m^2(p \cdot q)V_E(p, p', q) - 4p^2 m^2(p \cdot q)V_E(p, p', q) - 4p'^2 m^2(p \cdot q')V_E(p, p', q') \\
& - 4p^2 m^2(p \cdot q')V_E(p, p', q') - 4p'^2 m^2(p \cdot p')V_F(p, p', q) - 4p^2 m^2(p \cdot p')V_F(p, p', q) \\
& - 4p'^2 m^2(p \cdot p')V_F(p, p', q') - 4p^2 m^2(p \cdot p')V_F(p, p', q') - 4p'^2 m^2(p' \cdot q)V_H(p, p', q) \\
& - 4p^2 m^2(p' \cdot q)V_H(p, p', q) - 4p'^2 m^2(p' \cdot q')V_H(p, p', q') - 4p^2 m^2(p' \cdot q')V_H(p, p', q') \\
& + 4m^2(\tilde{I}_0(q' - p, p' - p) + \tilde{I}_0(q - p, p' - p)) - 4Dp^2(p \cdot p')J_C(p, p') - 4Dp'^2 p^2 J_D(p, p') \\
& - D\tilde{K}_0(p, p') - 4D(p \cdot p')^2 J_D(p, p') - 4Dp'^2(p \cdot p')J_E(p, p') + 4p'^2(p \cdot q)U_E(p, p', q) \\
& + 4p^2(p \cdot q)U_E(p, p', q) + 4p'^2(p \cdot q')U_E(p, p', q') + 4p^2(p \cdot q')U_E(p, p', q')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4p'^2(p \cdot p')U_F(p, p', q) + 4p^2(p \cdot p')U_F(p, p', q) + 4p'^2(p \cdot p')U_F(p, p', q') \\
& +4p^2(p \cdot p')U_F(p, p', q') + 4p'^2(p' \cdot q)U_H(p, p', q) + 4p^2(p' \cdot q)U_H(p, p', q) \\
& +4p'^2(p' \cdot q')U_H(p, p', q') + 4p^2(p' \cdot q')U_H(p, p', q') + 4p'^2p^2(p \cdot q)V_E(p, p', q) \\
& +4p'^2p^2(p \cdot q')V_E(p, p', q') + 4p'^2p^2(p \cdot p')(V_F(p, p', q) + V_F(p, p', q')) \\
& +4p'^2p^2(p' \cdot q)V_H(p, p', q) + 4p'^2p^2(p' \cdot q')V_H(p, p', q') + 4(p' \cdot q)(-I_D(p', q) \\
& + \tilde{I}_D(q - p, p' - p)) + 4(p' \cdot q')(-I_D(p', q') + \tilde{I}_D(q' - p, p' - p)) \\
& +4p^2(\tilde{I}_D(q' - p, p' - p) + \tilde{I}_D(q - p, p' - p)) - 4(p \cdot p')(\tilde{I}_D(q' - p, p' - p) \\
& + \tilde{I}_D(q - p, p' - p)) - 4(p \cdot p')(\tilde{I}_E(q' - p, p' - p) + \tilde{I}_E(q - p, p' - p)) \\
& -4(p \cdot q)(I_D(p, q) + \tilde{I}_C(q - p, p' - p) + \tilde{I}_D(q - p, p' - p)) - 4(p \cdot q')(I_D(p, q') \\
& + \tilde{I}_C(q' - p, p' - p) + \tilde{I}_D(q' - p, p' - p))) \Big\} \tag{5.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 = & \frac{1}{4}e^2 \left\{ 2^{1-D}\pi^{2-D}(-I_B(p', q) - I_B(p, q) + 2I_E(p', q) + 2I_E(p, q)) \right. \\
& - \frac{2^{3-D}\pi^{-D}(\pi^2 K_0(q) - \pi^{D/2}Q_1(q))}{m^2 - q^2} + \frac{2^{-D}\pi^{2-D}(T - 2K_0(q)(m^2 + q^2))}{(m^2 - q^2)^2} \\
& + (2\pi)^{-D} \left(-\pi^2 I_0(p', q) + \frac{1}{m^2 - q^2} \left(\pi^2(K_0(p') + K_0(q) + (I_0(p', q) - 2I_A(p', q)) \right. \right. \\
& (2m^2 - p'^2 + 4p' \cdot q - q^2)) - 4\pi^{D/2}Q_1(q) \Big) + \frac{1}{m^2 - q^2} \left(\pi^2(K_0(p) + K_0(q) \right. \\
& + (I_0(p, q) - 2I_A(p, q))(2m^2 - p^2 + 4p \cdot q - q^2)) - 4\pi^{D/2}Q_1(q) \Big) \\
& + \pi^2(-2m^2 + p'^2 + p^2 - 4p \cdot p')U_0(p, p', q) + 4\pi^2(I_B(p', q) + I_B(p, q) \\
& - \tilde{I}_A(q - p, p' - p) - (-2m^2 + p'^2 + p^2 - 4p \cdot p')U_B(p, p', q)) \\
& - 4\pi^2(I_C(p', q) + I_C(p, q) - \tilde{I}_C(q - p, p' - p) - (-2m^2 + p'^2 + p^2 \\
& - 4p \cdot p')U_G(p, p', q)) - \pi^2 I_0(p, q) + \pi^2 \tilde{I}_0(q - p, p' - p) \\
& \left. + 4\pi^2 \tilde{I}_C(q' - p, p' - p) \right) \Big\} + (1 - \xi) - \frac{4^{-D-1}e^2\pi^{-2D}}{m^2 - q^2} \left\{ \right. \\
& 2^D\pi^{D+2}(m^4(-m^2 + p'^2 + p^2 + q^2)V_0(p, p', q) + m^2(I_0(p, q) - \tilde{I}_0(q - p, p' - p) \\
& + L_0(p) + L_0(p') - (p'^2 + p^2)U_0(p, p', q) - p'^2p^2V_0(p, p', q) - p'^2q^2V_0(p, p', q) \\
& - p^2q^2V_0(p, p', q)) - p'^2L_0(p') - p^2L_0(p) + (m^2 - q^2)I_0(p, q) - q^2I_0(p, q) \\
& + q^2\tilde{I}_0(q - p, p' - p) + (p'^2q^2 + p^2q^2)U_0(p, p', q) + p'^2p^2q^2V_0(p, p', q)) \\
& + 2^{D+1}\pi^{D+2}(m^4(-J_A(p', q) - J_A(p, q) - J_B(p', q) - J_B(p, q) + U_0(p, p', q) \\
& - 4U_B(p, p', q) + 4U_G(p, p', q)) + m^2(p'^2(J_A(p', q) + J_B(p', q)) + p^2(J_A(p, q) \\
& + J_B(p, q)) + q^2(J_A(p', q) + J_A(p, q) + J_B(p', q) + J_B(p, q) - U_0(p, p', q) \\
& + 4U_B(p, p', q) - 4U_G(p, p', q))) - p'^2q^2(J_A(p', q) + J_B(p', q)) - p^2q^2(J_A(p, q) \\
& + J_B(p, q))) + (2\pi)^{D+2}(m^2 - q^2)(m^4V_B(p, p', q) + m^2(J_B(p', q) + J_B(p, q) \\
& - J_C(p', q) - J_C(p, q) + J_E(p', q) + J_E(p, q) - p'^2V_B(p, p', q) - p^2V_B(p, p', q)) \\
& - I_B(p', q) - I_B(p, q) + I_C(p', q) + I_C(p, q) + \tilde{I}_A(q - p, p' - p) \\
& - \tilde{I}_C(q' - p, p' - p) - \tilde{I}_C(q - p, p' - p) + p'^2(-J_B(p', q) + J_C(p', q) - J_E(p', q) \\
& + U_B(p, p', q) - U_G(p, p', q)) + p^2(-J_B(p, q) + J_C(p, q) - J_E(p, q) + U_B(p, p', q) \\
& - U_G(p, p', q)) + p'^2p^2V_B(p, p', q) - (m^2 - p'^2)(m^2 - p^2)V_G(p, p', q)) \\
& \left. - 2^{D+3}\pi^{3D/2}(q^2 - m^2)^{D/2-2} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(3 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2} + 2)} {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2} + 2; \frac{q^2}{q^2 - m^2}\right) \right\} \\
& \hspace{15em} (5.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & \frac{1}{4}e^2 \left\{ -2^{1-D}\pi^{2-D} \left(I_B(p', q) - 2I_E(p', q) + 2I_0(p, q) - I_A(p, q) \right. \right. \\
& -5I_B(p, q) + 2(I_D(p, q) + I_E(p, q)) - \frac{4}{m^2 - q^2} (K_0(q) - \pi^{D/2-2}Q_1(q)) \Big) \\
& + 2^{-D}\pi^{2-D} \left(\frac{1}{m^2 - q^2} (K_0(p) + K_0(p') + 2K_0(q) + I_0(p', q)(2m^2 \right. \\
& - p'^2 + 4(p' \cdot q) - q^2) + I_0(p, q)(2m^2 - p^2 + 4(p \cdot q) - q^2) \\
& + 2(I_A(p', q)(-2m^2 + p'^2 - 4(p' \cdot q) + q^2) + I_A(p, q)(-2m^2 + p^2 - 4(p \cdot q) + q^2)) \\
& - 8\pi^{D/2-2}Q_1(q)) + \frac{1}{(m^2 - q^2)^2} (T - 2K_0(q)(m^2 + q^2)) - (I_0(p', q) + I_0(p, q) \\
& + \tilde{I}_0(q - p, p', p) - 2I_A(p, q) - 4I_B(p', q) - 4I_B(p, q) + 4I_C(p', q) + 4I_C(p, q) \\
& + 4I_D(p, q) - 2\tilde{I}_A(q - p, p' - p) - 2\tilde{I}_B(q - p, p' - p) + 4\tilde{I}_D(q - p, p' - p) \\
& + (2m^2 - p'^2 - p^2 + 4(p \cdot p'))(U_0(p, p', q) - 2U_A(p, p', q) + 4(-U_B(p, p', q) \\
& + U_E(p, p', q) + U_G(p, p', q))) \Big) \Big\} - (1 - \xi) \frac{2^{-D-2}\pi^{2-D}e^2}{m^2 - q^2} \left\{ m^6(-V_0(p, p', q) \right. \\
& + 2V_A(p, p', q) + 4V_B(p, p', q) - 4V_E(p, p', q)) + m^4(2U_0(p, p', q) - 4U_A(p, p', q) \\
& - 8U_B(p, p', q) + 8U_E(p, p', q) + 8U_G(p, p', q) + (q^2 + p'^2 + p^2)(V_0(p, p', q) \\
& - 2V_A(p, p', q) - 4V_B(p, p', q) + 4V_E(p, p', q)) - 2J_A(p', q) - 2J_A(p, q) \\
& + 2J_B(p', q) + 2J_B(p, q) - 4J_C(p', q) - 4J_C(p, q) + 4J_E(p', q) + 4J_E(p, q)) \\
& + m^2(q^2(2J_A(p', q) + 2J_A(p, q) - 2J_B(p', q) - 2J_B(p, q) + 4J_C(p', q) + 4J_C(p, q) \\
& - 4J_E(p', q) - 4J_E(p, q) - 2U_0(p, p', q) + 4U_A(p, p', q) + 8U_B(p, p', q) \\
& - 8U_E(p, p', q) - 8U_G(p, p', q)) + (p'^2 + p^2)(-U_0(p, p', q) + 2U_A(p, p', q) \\
& + 4U_B(p, p', q) - 4U_E(p, p', q) - 4U_G(p, p', q)) + (p'^2q^2 + p^2q^2 + p'^2p^2)(-V_0(p, p', q) \\
& + 2V_A(p, p', q) + 4V_B(p, p', q) - 4V_E(p, p', q)) + I_0(p, q) + \tilde{I}_0(q - p, p' - p) \\
& - 2I_A(p, q) - 4I_B(p', q) - 4I_B(p, q) + 4I_C(p', q) + 4I_C(p, q) + 4I_D(p, q) \\
& - 2\tilde{I}_A(q - p, p' - p) - 2\tilde{I}_B(q - p, p' - p) + 4\tilde{I}_D(q - p, p' - p) + L_0(p) \\
& + L_0(p') + p'^2(2J_A(p', q) - 2J_B(p', q) + 4J_C(p', q) - 4J_E(p', q)) \\
& + p^2(2J_A(p, q) - 2J_B(p, q) + 4J_C(p, q) - 4J_E(p, q)) + (m^2 - q^2)I_0(p', q) \\
& + q^2(-I_0(p, q) - \tilde{I}_0(q - p, p' - p) + 2I_A(p, q) + 4I_B(p', q) + 4I_B(p, q) - 4I_C(p', q) \\
& - 4I_C(p, q) - 4I_D(p, q) + 2\tilde{I}_A(q - p, p' - p) + 2\tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
& - 4\tilde{I}_D(q - p, p' - p)) + p'^2q^2(-2J_A(p', q) + 2J_B(p', q) - 4J_C(p', q) + 4J_E(p', q) \\
& + U_0(p, p', q) - 2U_A(p, p', q) - 4U_B(p, p', q) + 4U_E(p, p', q) + 4U_G(p, p', q)) \\
& + p^2q^2(-2J_A(p, q) + 2J_B(p, q) - 4J_C(p, q) + 4J_E(p, q) + U_0(p, p', q) \\
& - 2U_A(p, p', q) - 4U_B(p, p', q) + 4U_E(p, p', q) + 4U_G(p, p', q)) + p'^2p^2q^2(V_0(p, p', q) \\
& - 2V_A(p, p', q) - 4V_B(p, p', q) + 4V_E(p, p', q)) - 4(m^2 - p'^2)(m^2 - p^2)(m^2 - q^2) \times \\
& V_G(p, p', q) - p'^2L_0(p') - p^2L_0(p) - \frac{8\pi^{D/2-2}}{172}(q^2 - m^2)^{D/2-2} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(3 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2} + 2)} \times \\
& \left. {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2} + 2; \frac{q^2}{q^2 - m^2}\right)\right\} \quad (5.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 = & 2^{-D-1}\pi^{2-D}e^2 \left\{ 2(I_B(p', q) - I_C(p', q) - I_C(p, q) + I_E(p', q) + I_E(p, q)) \right. \\
& + I_B(p, q) + \tilde{I}_B(q - p, p' - p) - 2\tilde{I}_D(q - p, p' - p) + \frac{2q^2 I_A(p', q)}{m^2 - q^2} - \frac{2q^2 K_0(q)}{(m^2 - q^2)^2} \\
& + \frac{T}{(m^2 - q^2)^2} 2m^2(-U_0(p, p', q) + U_A(p, p', q) + 3U_B(p, p', q) - 2U_E(p, p', q) \\
& - 2U_G(p, p', q)) + p'^2(U_0(p, p', q) + U_0(p, p', q) - U_A(p, p', q) - 3U_B(p, p', q) \\
& + 2U_E(p, p', q) + 2U_G(p, p', q)) + 4(p \cdot p')(-U_0(p, p', q) + U_A(p, p', q) \\
& + 3U_B(p, p', q) - 2U_E(p, p', q) - 2U_G(p, p', q)) + p^2(-U_A(p, p', q) - 3U_B(p, p', q) \\
& + 2U_E(p, p', q) + 2U_G(p, p', q)) + \frac{K_0(p')}{m^2 - q^2} + \frac{m^2 I_0(p, q)}{m^2 - q^2} + \frac{2p'^2 I_A(p', q)}{m^2 - q^2} \\
& + \frac{(m^2 - p'^2 + 4(p' \cdot q))}{m^2 - q^2} I_0(p', q) + \frac{4(p \cdot q)}{m^2 - q^2} I_0(p, q) + \frac{K_0(p)}{q^2 - m^2} + \frac{4K_0(q)}{q^2 - m^2} \\
& + \frac{4m^2 I_A(p', q)}{q^2 - m^2} + \frac{8(p' \cdot q)}{q^2 - m^2} I_A(p', q) + \frac{p^2 I_0(p, q)}{q^2 - m^2} + \frac{(m^2 - p^2 + 4(p \cdot q))}{q^2 - m^2} I_A(p, q) \\
& - \frac{2m^2 K_0(q)}{(m^2 - q^2)^2} - \frac{(1 - \xi)}{m^2 - q^2} \left(m^6(-V_0(p, p', q) + V_A(p, p', q) + 3V_B(p, p', q) \right. \\
& - 2V_E(p, p', q)) + m^4(2U_0(p, p', q) - 2U_A(p, p', q) - 6U_B(p, p', q) + 4U_E(p, p', q) \\
& + 4U_G(p, p', q) + (p'^2 + p^2 + q^2)(V_0(p, p', q) - V_A(p, p', q) + 2V_E(p, p', q) \\
& - 3V_B(p, p', q)) + 2(-J_A(p', q) + J_B(p', q) - J_C(p', q) - J_C(p, q) + J_E(p', q) \\
& + J_E(p, q))) + m^2(2q^2(J_A(p', q) - J_B(p', q) + J_C(p', q) + J_C(p, q) - J_E(p', q) \\
& - J_E(p, q) - U_0(p, p', q) + U_A(p, p', q) - 2U_E(p, p', q) + 3U_B(p, p', q) \\
& - 2U_G(p, p', q)) + (p'^2 + p^2)(-U_0(p, p', q) + U_A(p, p', q) + 3U_B(p, p', q) \\
& - 2U_E(p, p', q) - 2U_G(p, p', q)) + (p'^2 q^2 + p^2 q^2 + p'^2 p^2)(-V_0(p, p', q) \\
& + 3V_B(p, p', q) + V_A(p, p', q) - 2V_E(p, p', q)) + I_0(p, q) - I_A(p, q) - 3I_B(p', q) \\
& - 3I_B(p, q) + 2I_C(p', q) + 2I_C(p, q) + 2I_D(p, q) - \tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
& + 2\tilde{I}_D(q - p, p' - p) + L_0(p) + L_0(p') + p'^2(2J_A(p', q) - 2J_B(p', q) + 2J_C(p', q) \\
& - 2J_E(p', q)) + p^2(2J_C(p, q) - 2J_E(p, q)) + 4\pi^{D/2-2}Q_2(q)) + (m^2 - q^2)I_0(p', q) \\
& + q^2(-I_0(p, q) + I_A(p, q) + 3I_B(p', q) + 3I_B(p, q) - 2I_C(p', q) - 2I_C(p, q) \\
& - 2I_D(p, q) + \tilde{I}_B(q - p, p' - p) - 2\tilde{I}_D(q - p, p' - p)) + 2p'^2 q^2(-J_A(p', q) \\
& + J_B(p', q) - J_C(p', q) + J_E(p', q)) + 2p^2 q^2(-J_C(p, q) + J_E(p, q)) \\
& - 4\pi^{D/2-2}q^2 Q_2(q) + (p'^2 q^2 + p^2 q^2)(U_0(p, p', q) - U_A(p, p', q) \\
& - 3U_B(p, p', q) + 2U_E(p, p', q) + 2U_G(p, p', q)) + p'^2 p^2 q^2(V_0(p, p', q) - V_A(p, p', q) \\
& - 3V_B(p, p', q) + 2V_E(p, p', q)) - 2(m^2 - p'^2)(m^2 - p^2)(m^2 - q^2)V_G(p, p', q) \\
& \left. - p'^2 L_0(p') - p^2 L_0(p) \right) \Big\} \tag{5.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4 = & \frac{1}{4}e^2 \left\{ -2^{1-D}\pi^{2-D}(I_B(p', q) - 2I_D(p', q)) - \frac{2^{2-D}\pi^{2-D}}{m^2 - q^2}(K_0(p') - \pi^{D/2-2}Q_1(p')) \right. \\
& -K_0(q) + \pi^{D/2-2}Q_1(q)) + \frac{2^{-D}\pi^{2-D}}{m^2 - q^2} \left(K_0(p) + K_0(p') + 2K_0(q) + I_0(p', q)(2m^2 \right. \\
& -p'^2 + 4(p' \cdot q) - q^2) + I_0(p, q)(2m^2 - p^2 + 4(p \cdot q) - q^2) + 2(I_B(p', q)(-2m^2 \\
& + p'^2 - 4(p' \cdot q) + q^2) + I_A(p, q)(-2m^2 + p^2 - 4(p \cdot q) + q^2)) - 4\pi^{D/2-2}(Q_1(p') \\
& + Q_1(q)) + \frac{1}{(m^2 - q^2)}(T - 2K_0(q)(m^2 + q^2)) \left. \right) - 2^{-D}\pi^{2-D}(I_0(p', q) + I_0(p, q) \\
& - \tilde{I}_0(q - p, p' - p) - 2I_A(p', q) - 2I_B(p', q) - 2I_B(p, q) + 4I_D(p', q) \\
& + 2\tilde{I}_A(q - p, p' - p) + 2\tilde{I}_B(q - p, p' - p) - 4\tilde{I}_D(q - p, p' - p) + (2m^2 - p'^2 - p^2 \\
& + 4(p \cdot p'))(U_0(p, p', q) - 2(U_B(p, p', q) + U_C(p, p', q) - 2U_H(p, p', q)))) \left. \right\} \\
& + (1 - \xi) \frac{4^{-D-1}e^2\pi^{2-2D}}{m^2 - q^2} \left\{ 2^{D+1}\pi^D(m^6(-V_B(p, p', q) - V_C(p, p', q) + 2V_H(p, p', q)) \right. \\
& + m^4(-J_A(p', q) + J_A(p, q) + J_B(p', q) - J_B(p, q) - U_0(p, p', q) + 2U_B(p, p', q) \\
& + 2U_C(p, p', q) - 4U_H(p, p', q) + (p'^2 + p^2 + q^2)(V_B(p, p', q) + V_C(p, p', q) \\
& - 2V_H(p, p', q))) + m^2(I_B(p', q) + I_B(p, q) - 2I_D(p', q) - \tilde{I}_A(q - p, p' - p) \\
& - \tilde{I}_B(q - p, p' - p) + 2\tilde{I}_D(q - p, p' - p) + (p'^2 + q^2)(J_A(p', q) - J_B(p', q)) \\
& + (p^2 + q^2)(-J_A(p, q) + J_B(p, q)) + q^2(U_0(p, p', q) - 2U_B(p, p', q) \\
& - 2U_C(p, p', q) + 4U_H(p, p', q)) + p'^2(-U_B(p, p', q) - U_C(p, p', q) \\
& + 2U_H(p, p', q)) + p^2(-U_B(p, p', q) - U_C(p, p', q) + 2U_H(p, p', q)) + (p'^2p^2 + p'^2q^2 \\
& + p^2q^2)(-V_B(p, p', q) - V_C(p, p', q) + 2V_H(p, p', q))) + (m^2 - q^2)I_A(p', q) \\
& + q^2(-I_B(p', q) - I_B(p, q) + 2I_D(p', q) + \tilde{I}_A(q - p, p' - p) + \tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
& - 2\tilde{I}_D(q - p, p' - p)) + p'^2q^2(-J_A(p', q) + J_B(p', q) + U_B(p, p', q) + U_C(p, p', q) \\
& - 2U_H(p, p', q)) + p^2q^2(J_A(p, q) - J_B(p, q) + U_B(p, p', q) + U_C(p, p', q) \\
& - 2U_H(p, p', q)) + p'^2p^2q^2(V_B(p, p', q) + V_C(p, p', q) - 2V_H(p, p', q))) \\
& - (2\pi)^D(m^2(I_0(p', q) + I_0(p, q) - \tilde{I}_0(q - p, p' - p) + L_0(p) + L_0(p')) - p'^2L_0(p') \\
& - p^2L_0(p) - q^2(I_0(p', q) + I_0(p, q) - \tilde{I}_0(q - p, p' - p)) + (m^2 - q^2)((p'^2 - m^2) \times \\
& (m^2 - p^2)V_0(p, p', q) - (p'^2 + p^2)U_0(p, p', q))) \left. \right\} \tag{5.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_5 = & 2^{-D-1}\pi^{2-D}e^2(2I_0(p',q) - 4I_B(p',q) - \tilde{I}_B(q-p,p'-p) + 2\tilde{I}_D(q-p,p'-p) \\
& +(2m^2 - p'^2 - p^2 + 4p \cdot p')(U_C(p,p',q) - 2U_H(p,p',q)) + (1 - \xi)(\\
& -m^4(V_C(p,p',q) - 2V_H(p,p',q)) + m^2(2U_C(p,p',q) - 4U_H(p,p',q) + (p'^2 + p^2) \\
& (V_C(p,p',q) - 2V_H(p,p',q))) + I_A(p',q) - 2I_D(p',q) - \tilde{I}_B(q-p,p'-p) \\
& + 2\tilde{I}_D(q-p,p'-p) - p^2(U_C(p,p',q) - 2U_H(p,p',q)) - p'^2(U_C(p,p',q) \\
& - 2U_H(p,p',q) + p^2(V_C(p,p',q) - 2V_H(p,p',q)))) \tag{5.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_6 = & 2^{-D} \pi^{2-D} e^2 \left\{ I_D(p', q) - \frac{1}{2} I_B(p', q) + I_D(p', q') - \frac{1}{2} I_B(p', q') + \frac{1}{q'^2 - m^2} \left(\right. \right. \\
& - \pi^{D/2-2} Q_1(p) + K_0(p) \left. \right) + \frac{1}{q^2 - m^2} (K_0(p) - \pi^{D/2-2} Q_1(p)) + \frac{2}{q'^2 - m^2} (K_0(p') \\
& - \pi^{D/2-2} Q_1(p')) + \frac{2}{q^2 - m^2} (K_0(p') - \pi^{D/2-2} Q_1(p')) + \frac{-(K_0(p') + K_0(q'))}{2(q'^2 - m^2)} \\
& - \frac{1}{2} I_0(p', q') \left(\frac{m^2 - p'^2}{q'^2 - m^2} + \frac{4(p' \cdot q')}{q'^2 - m^2} - 1 \right) + \frac{\tilde{K}_0(p', q')}{2(q'^2 - m^2)} - 4 \left(+ \frac{\tilde{K}_0(p', q')}{4(q'^2 - m^2)} \right. \\
& - \frac{1}{2} I_B(p', q') \left(\frac{m^2 - p'^2}{q'^2 - m^2} + \frac{4(p' \cdot q')}{q'^2 - m^2} - 1 \right) - \frac{\pi^{D/2-2} Q_1(p')}{q'^2 - m^2} \left. \right) \\
& + \frac{-(K_0(p') + K_0(q))}{2(q^2 - m^2)} - \frac{1}{4} I_0(p', q) \left(\frac{m^2 - p'^2}{q^2 - m^2} + \frac{4(p' \cdot q)}{q^2 - m^2} - 1 \right) \\
& + \frac{\tilde{K}_0(p', q)}{4(q^2 - m^2)} - \frac{\tilde{K}_0(p', q)}{(q^2 - m^2)} + 2 I_B(p', q) \left(\frac{m^2 - p'^2}{q^2 - m^2} + \frac{4(p' \cdot q)}{q^2 - m^2} - 1 \right) \\
& + \frac{4\pi^{D/2-2} Q_1(p')}{q^2 - m^2} - \frac{\pi^{D/2-2} Q_1(q)}{q^2 - m^2} + \frac{K_0(q)}{q^2 - m^2} + \frac{-(K_0(p) + K_0(q))}{2(q^2 - m^2)} \\
& - \frac{1}{4} I_0(p, q) \left(\frac{m^2 - p^2}{q^2 - m^2} + \frac{4(p \cdot q)}{q^2 - m^2} - 1 \right) + \frac{\tilde{K}_0(p, q)}{4(q^2 - m^2)} - \frac{\tilde{K}_0(p, q)}{2(q^2 - m^2)} \\
& + \frac{1}{2} I_A(p, q) \left(\frac{m^2 - p^2}{q^2 - m^2} + \frac{4(p \cdot q)}{q^2 - m^2} - 1 \right) + \frac{\pi^{D/2-2}}{q^2 - m^2} (Q_1(p) + Q_1(q)) \\
& + \frac{-(K_0(p) + K_0(q'))}{2(q'^2 - m^2)} - \frac{1}{2} I_D(p, q') \left(\frac{m^2 - p^2}{q'^2 - m^2} + \frac{4(p \cdot q')}{q'^2 - m^2} - 1 \right) + \frac{\tilde{K}_0(p, q')}{2(q'^2 - m^2)} \\
& - \frac{\tilde{K}_0(p, q')}{2(q'^2 - m^2)} + \frac{1}{2} (I_A(p, q') + I_B(p, q')) \left(\frac{m^2 - p^2}{q'^2 - m^2} + \frac{4(p \cdot q')}{q'^2 - m^2} - 1 \right) \\
& + \frac{\pi^{D/2-2}}{q'^2 - m^2} (Q_1(p) + Q_1(q')) - \frac{K_0(q)}{2} \left(\frac{4m^2}{(q^2 - m^2)^2} + \frac{2}{q^2 - m^2} \right) + \frac{T}{2(q^2 - m^2)^2} \\
& + \frac{1}{2} \left((I_0(p', q) + I_0(p, q) - \tilde{I}_0(q - p, p' - p) - (-2m^2 + p'^2 + p^2 \right. \\
& - 4(p \cdot p')) U_0(p, p', q)) + (\tilde{I}_0(q - p, p' - p) - I_A(p, q) - I_B(p', q) - I_B(p, q) \\
& - \tilde{I}_B(q - p, p' - p) + (-2m^2 + p'^2 + p^2 - 4(p \cdot p')) (U_A(p, p', q) + U_B(p, p', q))) \\
& - 2(I_A(p', q) - \tilde{I}_B(q - p, p' - p) - (-2m^2 + p'^2 + p^2 - 4(p \cdot p')) U_C(p, p', q)) \\
& + 2(I_D(p', q) - \tilde{I}_B(q - p, p' - p) + \tilde{I}_E(q - p, p' - p) - (-2m^2 + p'^2 + p^2 \\
& - 4(p \cdot p')) (U_F(p, p', q) + U_H(p, p', q))) - (I_0(p', q') + I_D(p, q') - \tilde{I}_0(q' - p, p' - p) \\
& - (-2m^2 + p'^2 + p^2 - 4(p \cdot p')) U_0(p, p', q')) - (\tilde{I}_0(q' - p, p' - p) - I_A(p, q') \\
& - I_B(p', q') - I_B(p, q') - \tilde{I}_B(q' - p, p' - p) + (-2m^2 + p'^2 + p^2 - 4(p \cdot p'))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (U_A(p, p', q') + U_B(p, p', q')) + 2(I_A(p', q') - \tilde{I}_B(q' - p, p' - p) - (-2m^2 + p'^2 \\
& + p^2 - 4(p \cdot p'))U_C(p, p', q')) - 2(I_D(p', q') - \tilde{I}_B(q' - p, p' - p) + \tilde{I}_E(q' - p, p' - p) \\
& - (-2m^2 + p'^2 + p^2 - 4(p \cdot p'))(U_F(p, p', q') + U_H(p, p', q')) \Big) \Big\} + (1 - \xi)2^{-D-1}\pi^{2-D}e^2 \\
& \Big\{ m^4(V_0(p, p', q) + V_0(p, p', q') - V_A(p, p', q) - V_A(p, p', q') - V_B(p, p', q) \\
& - V_B(p, p', q') - 2V_C(p, p', q) - 2V_C(p, p', q') + 2V_F(p, p', q) + 2V_F(p, p', q') + 2V_H(p, p', q) \\
& + 2V_H(p, p', q')) + m^2(-2J_A(p', q) - 2J_A(p', q') + 2J_B(p', q) + 2J_B(p', q') - 2U_0(p, p', q) \\
& - 2U_0(p, p', q') + 2U_A(p, p', q) + 2U_A(p, p', q') + 2U_B(p, p', q) + 2U_B(p, p', q') \\
& + 4(U_C(p, p', q) + U_C(p, p', q') - U_F(p, p', q) - U_F(p, p', q') - U_H(p, p', q) - U_H(p, p', q')) \\
& + (p'^2 + p^2)(-V_0(p, p', q) - V_0(p, p', q') + V_A(p, p', q) + V_A(p, p', q') + V_B(p, p', q) \\
& + V_B(p, p', q') + 2V_C(p, p', q) + 2V_C(p, p', q') - 2V_F(p, p', q) - 2V_F(p, p', q') - 2V_H(p, p', q) \\
& - 2V_H(p, p', q')) + \frac{L_0(p)}{q'^2 - m^2} + \frac{L_0(p')}{q'^2 - m^2} + \frac{L_0(p)}{q^2 - m^2} + \frac{L_0(p')}{q^2 - m^2} - I_0(p', q) - I_0(p', q') \\
& - I_0(p, q) - I_0(p, q') + 2I_A(p', q) + 2I_A(p', q') + I_A(p, q) + I_A(p, q') + I_B(p', q) \\
& + I_B(p', q') + I_B(p, q) + I_B(p, q') - 2I_D(p', q) - 2I_D(p', q') + 2\tilde{I}_B(q' - p, p' - p) \\
& + 2\tilde{I}_B(q - p, p' - p) - 2\tilde{I}_E(q' - p, p' - p) - 2\tilde{I}_E(q - p, p' - p) - L_0(q') \\
& + p'^2(2J_A(p', q) + 2J_A(p', q') - 2J_B(p', q) - 2J_B(p', q')) + (p'^2 + p^2)(U_0(p, p', q) \\
& + U_0(p, p', q') - U_A(p, p', q) - U_A(p, p', q') - U_B(p, p', q) - U_B(p, p', q') \\
& - 2U_C(p, p', q) - 2U_C(p, p', q') + 2U_F(p, p', q') + 2U_F(p, p', q) + 2U_H(p, p', q) \\
& + 2U_H(p, p', q')) + p'^2p^2(V_0(p, p', q) + V_0(p, p', q') - V_A(p, p', q) - V_A(p, p', q') \\
& - V_B(p, p', q) - V_B(p, p', q') - 2V_C(p, p', q) - 2V_C(p, p', q') + 2V_F(p, p', q) \\
& + 2V_F(p, p', q') + 2V_H(p, p', q) + 2V_H(p, p', q')) + p'^2\left(\frac{L_0(p')}{m^2 - q'^2} + \frac{L_0(p')}{m^2 - q^2}\right) \\
& + p^2\left(\frac{L_0(p)}{m^2 - q'^2} + \frac{L_0(p)}{m^2 - q^2}\right) + 2\pi^{D/2-2}(m^2 - q'^2)^{D/2-3}\frac{\Gamma(3 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} \\
& {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2} + 1; \frac{q'^2}{q'^2 - m^2}\right) \Big\} \tag{5.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_7 = & 2^{-D-1}\pi^{2-D}e^2 \left\{ \frac{1}{(m^2 - q'^2)^2} \left(8\pi^{D/2-2}(m^2 - q'^2)^{D/2-2}q'^2 \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} \right. \right. \\
& {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2} + 1; \frac{q'^2}{q'^2 - m^2}\right) - (4q'^2 K_0(q') + T) + 2I_0(p', q) \\
& + 2I_0(p', q') - 4I_B(p', q) - 4I_B(p', q') + \tilde{I}_B(q' - p, p' - p) + \tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
& - 2\tilde{I}_E(q' - p, p' - p) - 2\tilde{I}_E(q - p, p' - p) + (2m^2 - p'^2 - p^2 + 4p \cdot p')(U_C(p, p', q) \\
& + U_C(p, p', q') - 2(U_F(p, p', q) + U_F(p, p', q') + U_H(p, p', q) + U_H(p, p', q')))) \\
& + (1 - \xi) \left(4(I_0(p, p') - p'^2 J_E(p, p') - p^2 J_C(p, p') - 2(p \cdot p') J_D(p, p')) \right. \\
& - \frac{8\pi^{D/2-2}}{(m^2 - q'^2)^2} \left((m^2 - q'^2)^{D/2-2} q'^2 \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2} + 1; \frac{q'^2}{q'^2 - m^2}\right) \right. \\
& - q'^4 (q'^2 - m^2)^{D/2-3} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(3 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2} + 2)} {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2} + 2; \frac{q'^2}{q'^2 - m^2}\right) \\
& - \frac{1}{2} q'^2 (q'^2 - m^2)^{D/2-2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2} + 1; \frac{q'^2}{q'^2 - m^2}\right) \Big) \\
& - m^4 (V_C(p, p', q) + V_C(p, p', q') - 2(V_F(p, p', q) + V_F(p, p', q') + V_H(p, p', q) \\
& + V_H(p, p', q')) + m^2 (2U_C(p, p', q) + 2U_C(p, p', q') - 4U_F(p, p', q) - 4U_F(p, p', q') \\
& - 4U_H(p, p', q) - 4U_H(p, p', q') + (p'^2 + p^2)(V_C(p, p', q) + V_C(p, p', q') - 2(V_F(p, p', q) \\
& + V_F(p, p', q') + V_H(p, p', q) + V_H(p, p', q')))) + I_A(p', q) + I_A(p', q') - 2I_D(p', q) \\
& - 2I_D(p', q') + \tilde{I}_B(q' - p, p' - p) + \tilde{I}_B(q - p, p' - p) - 2\tilde{I}_E(q' - p, p' - p) \\
& - 2\tilde{I}_E(q - p, p' - p) + 4(p \cdot p') J_D(p, p') + \frac{T}{(m^2 - q'^2)^2} - p^2 (U_C(p, p', q) \\
& + U_C(p, p', q') - 2(U_F(p, p', q) + U_F(p, p', q') + U_H(p, p', q) + U_H(p, p', q')) \\
& - p'^2 (U_C(p, p', q) + U_C(p, p', q') - 2U_F(p, p', q) - 2U_F(p, p', q') - 2U_H(p, p', q) \\
& - 2U_H(p, p', q') + p^2 (V_C(p, p', q) + V_C(p, p', q') - 2(V_F(p, p', q) + V_F(p, p', q') \\
& + V_H(p, p', q) + V_H(p, p', q')))) \Big) \Big\} \tag{5.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_8 = & 2^{-D-1}\pi^{2-D}e^2 \big(2I_0(p', q) + 2I_0(p', q') - 4I_A(p', q) - 4I_A(p', q') + 2I_C(p', q) \\
& + 2I_C(p', q') - 2I_E(p', q) - 2I_E(p', q') - \tilde{I}_B(q' - p, p' - p) - \tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
& + 2\tilde{I}_E(q' - p, p' - p) + 2\tilde{I}_E(q - p, p' - p) + (2m^2 - p'^2 - p^2 + 4p \cdot p') \\
& (U_C(p, p', q) + U_C(p, p', q') - 2(U_I(p, p', q) + U_I(p, p', q'))) \\
& + (1 - \xi) \big(m^4(-V_C(p, p', q) - V_C(p, p', q') + 2V_I(p, p', q)) + m^2(-2J_C(p', q) \\
& - 2J_C(p', q') + 2J_E(p', q) + 2J_E(p', q') + 2U_C(p, p', q) + 2U_C(p, p', q') \\
& - 4U_I(p, p', q) - 4U_I(p, p', q')) + p'^2 m^2(V_C(p, p', q) + V_C(p, p', q') - 2V_I(p, p', q)) \\
& + p^2 m^2(V_C(p, p', q) + V_C(p, p', q') - 2V_I(p, p', q)) + I_A(p', q) + I_A(p', q') \\
& - 2I_E(p', q) - 2I_E(p', q') - \tilde{I}_B(q' - p, p' - p) - \tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
& + 2\tilde{I}_E(q' - p, p' - p) + 2\tilde{I}_E(q - p, p' - p) + p'^2(2J_C(p', q) + 2J_C(p', q') \\
& - 2J_E(p', q) - 2J_E(p', q') - U_C(p, p', q) - U_C(p, p', q') + 2U_I(p, p', q) \\
& + 2U_I(p, p', q')) + p^2(4J_D(p, p') - U_C(p, p', q) - U_C(p, p', q') + 2U_I(p, p', q) \\
& + 2U_I(p, p', q')) + p'^2 p^2(-V_C(p, p', q) - V_C(p, p', q') + 2V_I(p, p', q)) \\
& + 2(m^2 - p'^2)(m^2 - p^2)V_I(p, p', q') \big) \tag{5.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_9 = & -2^{-D-1}\pi^{2-D}e^2 \left\{ -2I_E(p', q) + I_B(p', q) + 2I_E(p', q') - I_B(p', q') + 4I_0(p, q) \right. \\
& -6(I_A(p, q) + I_B(p, q)) + 2(I_C(p, q) + 2I_D(p, q) + I_E(p, q)) + I_0(p, q') \\
& -6(I_A(p, q') + I_B(p, q')) + 2(I_C(p, q') + 2I_D(p, q') + I_E(p, q')) \\
& + \left(\frac{2}{q'^2 - m^2} + \frac{2}{q^2 - m^2} \right) (-\pi^{D/2-2}Q_1(p) + K_0(p)) + \frac{6}{q^2 - m^2} (-\pi^{D/2-2}Q_1(q) \\
& + K_0(q)) + 2 \left(\frac{-(K_0(p') + K_0(q))}{2(q^2 - m^2)} - \frac{1}{2}I_0(p', q) \left(\frac{m^2 - p'^2}{q^2 - m^2} + \frac{4(p' \cdot q)}{q^2 - m^2} - 1 \right) \right. \\
& + \frac{\tilde{K}_0(p', q)}{2(q^2 - m^2)} \left. \right) - 4 \left(\frac{\tilde{K}_0(p', q)}{4(q^2 - m^2)} - \frac{1}{2}I_A(p', q) \left(\frac{m^2 - p'^2}{q^2 - m^2} + \frac{4(p' \cdot q)}{q^2 - m^2} - 1 \right) \right. \\
& - \pi^{D/2-2} \frac{Q_1(q)}{q^2 - m^2} \left. \right) + 2 \left(\frac{-(K_0(p) + K_0(q))}{2(q^2 - m^2)} - \frac{1}{2}I_0(p, q) \left(\frac{m^2 - p^2}{q^2 - m^2} + \frac{4(p \cdot q)}{q^2 - m^2} \right. \right. \\
& - 1 \left. \right) + \frac{\tilde{K}_0(p, q)}{2(q^2 - m^2)} \left. \right) - 2 \left(\frac{\tilde{K}_0(p, q)}{2(q^2 - m^2)} - \frac{1}{2}I_A(p, q) \left(\frac{m^2 - p^2}{q^2 - m^2} + \frac{4(p \cdot q)}{q^2 - m^2} - 1 \right) \right. \\
& - \pi^{D/2-2} \left(\frac{Q_1(p) + Q_1(q)}{q^2 - m^2} \right) \left. \right) + \frac{6}{q'^2 - m^2} (-\pi^{D/2-2}Q_1(q') + K_0(q')) \\
& + 2 \left(\frac{-(K_0(p') + K_0(q'))}{2(q'^2 - m^2)} - \frac{1}{2}I_0(p', q') \left(\frac{m^2 - p'^2}{q'^2 - m^2} + \frac{4(p' \cdot q')}{q'^2 - m^2} - 1 \right) + \frac{\tilde{K}_0(p', q')}{2(q'^2 - m^2)} \right) \\
& - 4 \left(\frac{\tilde{K}_0(p', q')}{4(q'^2 - m^2)} - \frac{1}{2}I_A(p', q') \left(\frac{m^2 - p'^2}{q'^2 - m^2} + \frac{4(p' \cdot q')}{q'^2 - m^2} - 1 \right) - \pi^{D/2-2} \frac{Q_1(q')}{q'^2 - m^2} - 1 \right) \\
& + 2 \left(\frac{-(K_0(p) + K_0(q'))}{2(q'^2 - m^2)} - \frac{1}{2}I_0(p, q') \left(\frac{m^2 - p^2}{q'^2 - m^2} + \frac{4(p \cdot q')}{q'^2 - m^2} - 1 \right) + \frac{\tilde{K}_0(p, q')}{2(q'^2 - m^2)} \right) \\
& - 2 \left(\frac{\tilde{K}_0(p, q')}{2(q'^2 - m^2)} - \frac{1}{2}(I_A(p, q') + I_B(p, q')) \left(\frac{m^2 - p^2}{q'^2 - m^2} + \frac{4(p \cdot q')}{q'^2 - m^2} - 1 \right) \right. \\
& - \pi^{D/2-2} \left(\frac{Q_1(p) + Q_1(q')}{q'^2 - m^2} \right) \left. \right) - \frac{2}{(q'^2 - m^2)^2} \left(2K_0(q')q'^2 \right. \\
& - 4\pi^{D/2-2}q'^2(m^2 - q'^2)^{D/2-2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} {}_2F_1 \left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2} + 1; \frac{q^2}{q'^2 - m^2} \right) \\
& + \frac{1}{2}T \left. \right) - K_0(q) \left(\frac{4m^2}{(q^2 - m^2)^2} + \frac{2}{q^2 - m^2} \right) + \frac{T}{(q^2 - m^2)^2} - (I_0(p', q) + I_0(p, q) \\
& - \tilde{I}_0(q - p, p' - p) - (-2m^2 + p'^2 + p^2 - 4(p \cdot p'))U_0(p, p', q)) \\
& - 3(\tilde{I}_0(q - p, p' - p) - I_A(p, q) - I_B(p', q) - I_B(p, q) - \tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
& + (-2m^2 + p'^2 + p^2 - 4(p \cdot p'))(U_A(p, p', q) + U_B(p, p', q))) + 2(\tilde{I}_0(q - p, p' - p) \\
& - I_C(p', q) - I_C(p, q) - 2I_D(p, q) - I_E(p, q) - 2\tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
& + \tilde{I}_E(q - p, p' - p) + (-2m^2 + p'^2 + p^2 - 4(p \cdot p'))(U_D(p, p', q) + 2U_E(p, p', q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +U_G(p, p', q')) - (I_0(p', q') + I_0(p, q') - \tilde{I}_0(q' - p, p' - p) - (-2m^2 + p'^2 + p^2 \\
& - 4(p \cdot p'))U_0(p, p', q')) - 3(\tilde{I}_0(q' - p, p' - p) - I_A(p, q') - I_B(p', q') - I_B(p, q') \\
& - \tilde{I}_B(q' - p, p' - p) + (-2m^2 + p'^2 + p^2 - 4(p \cdot p'))(U_A(p, p', q') + U_B(p, p', q')) \\
& + 2(\tilde{I}_0(q' - p, p' - p) - I_C(p', q') - I_C(p, q') - 2I_D(p, q') - I_E(p, q') \\
& - 2\tilde{I}_B(q' - p, p' - p) + \tilde{I}_E(q' - p, p' - p) + (-2m^2 + p'^2 + p^2(p \cdot p'))(U_D(p, p', q') \\
& + 2U_E(p, p', q') + U_G(p, p', q')) \Big\} + (1 - \xi)2^{-D-1}\pi^{2-D}e^2 \Big\{ m^4(V_0(p, p', q) \\
& + V_0(p, p', q') - 3V_A(p, p', q) - 3V_A(p, p', q') - 3V_B(p, p', q) - 3V_B(p, p', q') \\
& + 2V_D(p, p', q) + 2V_D(p, p', q') + 4V_E(p, p', q) + 4V_E(p, p', q') + 2V_G(p, p', q) \\
& + m^2(-2U_0(p, p', q) - 2U_0(p, p', q') + 6U_A(p, p', q) + 6U_A(p, p', q') + 6U_B(p, p', q) \\
& + 6U_B(p, p', q') - 4U_D(p, p', q) - 4U_D(p, p', q') - 8U_E(p, p', q) - 8U_E(p, p', q') \\
& - 4U_G(p, p', q) - 4U_G(p, p', q') + (p'^2 + p^2)(-V_0(p, p', q) - V_0(p, p', q') \\
& + 3V_A(p, p', q) + 3V_A(p, p', q') + 3V_B(p, p', q) + 3V_B(p, p', q') - 2V_D(p, p', q) \\
& - 2V_D(p, p', q') - 4V_E(p, p', q) - 4V_E(p, p', q') - 2V_G(p, p', q)) + \frac{L_0(p)}{q'^2 - m^2} \\
& + \frac{L_0(p')}{q'^2 - m^2} + \frac{L_0(p)}{q^2 - m^2} + \frac{L_0(p')}{q^2 - m^2} + 2J_A(p', q) + 2J_A(p', q') - 2J_B(p', q) \\
& - 2J_B(p', q') + 2J_C(p', q) + 2J_C(p', q') - 2J_E(p', q) - 2J_E(p', q')) + \frac{T}{(m^2 - q'^2)^2} \\
& + (p'^2 + p^2)(U_0(p, p', q) + U_0(p, p', q') - 3U_A(p, p', q) - 3U_A(p, p', q') \\
& - 3U_B(p, p', q) - 3U_B(p, p', q') + 2U_D(p, p', q) + 2U_D(p, p', q') + 4U_E(p, p', q) \\
& + 4U_E(p, p', q') + 2U_G(p, p', q) + 2U_G(p, p', q')) + p'^2 p^2 (V_0(p, p', q) + V_0(p, p', q') \\
& - 3V_A(p, p', q) - 3V_A(p, p', q') - 3V_B(p, p', q) - 3V_B(p, p', q') + 2V_D(p, p', q) \\
& + 2V_D(p, p', q') + 4V_E(p, p', q) + 4V_E(p, p', q') + 2V_G(p, p', q)) + 2(m^2 - p'^2) \\
& (m^2 - p^2)V_G(p, p', q') + p'^2 \left(\frac{L_0(p')}{m^2 - q'^2} + \frac{L_0(p')}{m^2 - q^2} \right) + p^2 \left(\frac{L_0(p)}{m^2 - q'^2} + \frac{L_0(p)}{m^2 - q^2} \right) \\
& - I_0(p', q) - I_0(p', q') - I_0(p, q) - I_0(p, q') + 3I_A(p, q) + 3I_A(p, q') + 3I_B(p', q) \\
& + 3I_B(p', q') + 3I_B(p, q) + 3I_B(p, q') - 2I_C(p', q) - 2I_C(p', q') - 2I_C(p, q) \\
& - 2I_C(p, q') - 4I_D(p, q) - 4I_D(p, q') - 2I_E(p, q) - 2I_E(p, q') - \tilde{I}_B(q' - p, p' - p) \\
& - \tilde{I}_B(q - p, p' - p) + 2\tilde{I}_E(q' - p, p' - p) + 2\tilde{I}_E(q - p, p' - p) - L_0(q') \\
& + p'^2(-2J_A(p', q) - 2J_A(p', q') + 2J_B(p', q) + 2J_B(p', q') - 2J_C(p', q) - 2J_C(p', q') \\
& + 2J_E(p', q) + 2J_E(p', q') + 4J_D(p, p')) + 8\pi^{D/2-2} \frac{q'^4}{(m^2 - q'^2)^2} \left[(q'^2 - m^2)^{D/2-3} \times \right. \\
& \left. \frac{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(3 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2} + 2)} {}_2F_1 \left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2} + 2; \frac{q'^2}{q'^2 - m^2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}(q'^2 - m^2)^{D/2-2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} {}_2F_1 \left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2} + 1; \frac{q'^2}{q'^2 - m^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

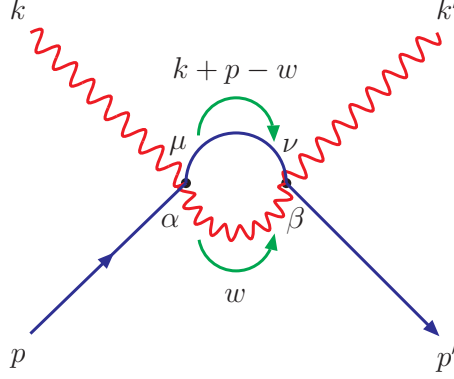
$$\begin{aligned}
& -8\pi^{D/2-2}q'^2(m^2 - q^2)^{D/2-4}\frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)}{}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2} + 1; \frac{q^2}{q^2 - m^2}\right) \\
& -4\pi^{D/2-2}\left[(q^2 - m^2)^{D/2-3}\frac{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(3 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2} + 2)}{}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2} + 2; \frac{q^2}{q^2 - m^2}\right) \right. \\
& \left. + (q'^2 - m^2)^{D/2-3}\frac{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(3 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2} + 2)}{}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2} + 2; \frac{q'^2}{q'^2 - m^2}\right)\right]\} \quad (5.46)
\end{aligned}$$

5.3. El Vértice de Dispersión Compton a un Lazo

En este capítulo comenzamos proponiendo una base conveniente para descomponer el vértice de la dispersión de Compton en sus partes longitudinal y transversa. Además, construimos el vértice longitudinal. En esta sección, vamos a calcular la dispersión Escalar-Fotón. Los diagramas que tenemos que evaluar son 28. Estos diagramas los generamos usando un paquete computacional llamado Feyn-Arts. Comenzaremos calculando el primer diagrama.

D_1 	D_2 	D_3 	D_4
D_5 	D_6 	D_7 	D_8
D_9 	D_{10} 	D_{11} 	D_{12}
D_{13} 	D_{14} 	D_{15} 	D_{16}
D_{17} 	D_{18} 	D_{19} 	D_{20}
D_{21} 	D_{22} 	D_{23} 	D_{24}
D_{25} 	D_{26} 	D_{27} 	D_{28}

5.4. Diagrama 1



Aplicando reglas de Feynman tenemos:

$$\Gamma_{\mu\nu} = \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} (2ie^2) \frac{g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}}{[(q-w)^2 - m^2]} \left[-\frac{g_{\alpha\beta}}{w^2} + (1-\xi) \frac{w_\alpha w_\beta}{w^4} \right] \quad (5.47)$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = -2ie^2 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \left[-\frac{g_{\mu\nu}}{w^2[(q-w)^2 - m^2]} + (1-\xi) \frac{w_\mu w_\nu}{w^4[(q-w)^2 - m^2]} \right] \quad (5.48)$$

donde $q = k + p$ y

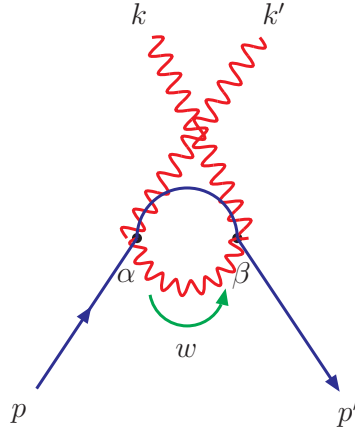
$$K(q) = \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{1}{w^2[(q-w)^2 - m^2]} = \frac{i\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - q^2)^{D/2-2} \times \\ B\left(\frac{D}{2} - 1, 1\right) {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2}; \frac{q^2}{q^2 - m^2}\right) \quad (5.49)$$

$$L_{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{w_\mu w_\nu}{w^4[(q-w)^2 - m^2]} = i\pi^{D/2} \left[q_\mu q_\nu \frac{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(3 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2} + 2)} (q^2 - m^2)^{D/2-3} \times \right. \\ {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2} + 2; \frac{q^2}{q^2 - m^2}\right) + \frac{g_{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} (q^2 - m^2)^{D/2-2} \times \\ \left. {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2} + 1; \frac{q^2}{q^2 - m^2}\right) \right] \quad (5.50)$$

Entonces

$$\Gamma_{D_1}^{\mu\nu} = -\frac{2ie^2}{(2\pi)^D} \{ -g^{\mu\nu} K(q) + (1-\xi) L^{\mu\nu}(q) \} \quad (5.51)$$

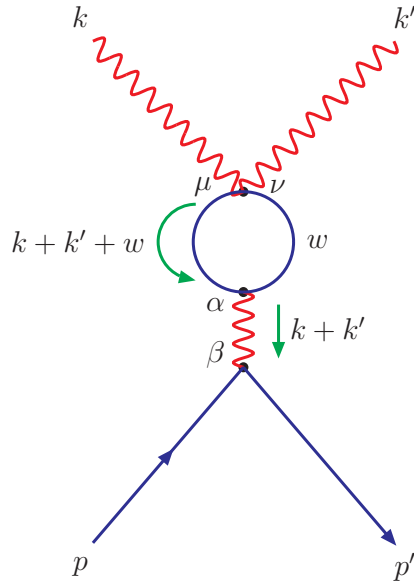
5.5. Diagrama 2



$$\Gamma_{D_2}^{\mu\nu} = -\frac{2ie^2}{(2\pi)^D} \{ -g^{\mu\nu} K(q') + (1 - \xi) L^{\mu\nu}(q') \} \quad (5.52)$$

donde $q' = k' + p$

5.6. Diagrama 3



Aplicando reglas de Feynman obtenemos:

$$\Gamma^{\mu\nu} = ie^2 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{g^{\mu\nu}(p+p')_\beta (k+k'+2w)_\alpha}{(w^2-m^2)[(k+k'+w)^2-m^2]} \left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{(k+k')^2} + (1-\xi) \frac{(k+k')^\alpha (k+k')^\beta}{(k+k')^4} \right] \quad (5.53)$$

$$(k+k'+2w)_\alpha (p+p')_\beta g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} [(p+p') \cdot (k+k') + 2(p+p')_\beta w^\beta] \quad (5.54)$$

$$(k+k'+2w)_\alpha (k+k')^\alpha (k+k')^\beta (p+p')_\beta g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (k+k') \cdot (p+p') [(k+k')^2 + 2(k+k')^\beta w^\beta] \quad (5.55)$$

Las integrales a calcular son de la forma:

$$\int \frac{d^D w}{(w^2-m^2)[(k+k'+w)^2-m^2]} \quad \int \frac{d^D w w^\beta}{(w^2-m^2)[(k+k'+w)^2-m^2]} \quad (5.56)$$

Sea $-r = k+k'$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D w}{(w^2-m^2)[(w-r)^2-m^2]} &= i\pi^{D/2} (-r^2)^{D/2-2} \left[\frac{\Gamma(\frac{D}{2}-1)\Gamma(2-\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})} \lambda^{D-3} \right. \\ &\quad \left. - \Gamma\left(1-\frac{D}{2}\right) (1-\lambda) \left(-\frac{m^2}{r^2}\right)^{D/2-2} \times \right. \\ &\quad \left. {}_2F_1\left(1, 2-\frac{D}{2}; \frac{D}{2}; \frac{(1-\lambda)^2}{4m^2/r^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (5.57)$$

donde

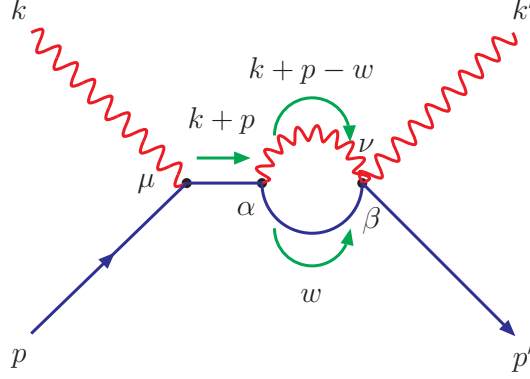
$$\lambda = \sqrt{\frac{4m^2-r^2}{-r^2}} \quad (5.58)$$

$$\int \frac{d^D w w^\beta}{(w^2-m^2)[(w-r)^2-m^2]} = \frac{r^\beta}{2} \int \frac{d^D w}{(w^2-m^2)[(w-r)^2-m^2]} \quad (5.59)$$

Por lo tanto

$$\Gamma_{D_3}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.60)$$

5.7. Diagrama 4



Aplicando reglas de Feynman tenemos que:

$$\Gamma^{\mu\nu} = ie^2 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} g^{\nu\beta} \frac{(p+q)^\mu (2q-w)^\alpha}{(q^2-m^2)[(q-w)^2-m^2]} \left[-\frac{g_{\alpha\beta}}{w^2} + (1-\xi) \frac{w^\alpha w^\beta}{w^4} \right] \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} g^{\nu\beta} (q+p)^\mu (2q-w)^\alpha &= (2q-w)^\nu (q+p)^\mu \\ g^{\nu\beta} (q+p)^\mu (2q-w)^\alpha w^\alpha w^\beta &= w^\nu (p+q)^\mu [q^2 - (q-w)^2] \end{aligned} \quad (5.62)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu\nu} &= \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \left[-\frac{2q^\nu (p+q)^\mu}{(q^2-m^2)} \int \frac{d^D w}{w^2[(q-w)^2-m^2]} + \frac{(p+q)^\mu}{(q^2-m^2)} \int \frac{d^D w w^\nu}{w^2[(q-w)^2-m^2]} \right. \\ &\quad \left. + (1-\xi) \left[(p+q)^\mu \int \frac{d^D w w^\nu}{w^4[(q-w)^2-m^2]} - (p+q)^\mu \underbrace{\int \frac{d^D w w^\nu}{w^4}}_{=0} \right] \right] \end{aligned} \quad (5.63)$$

donde

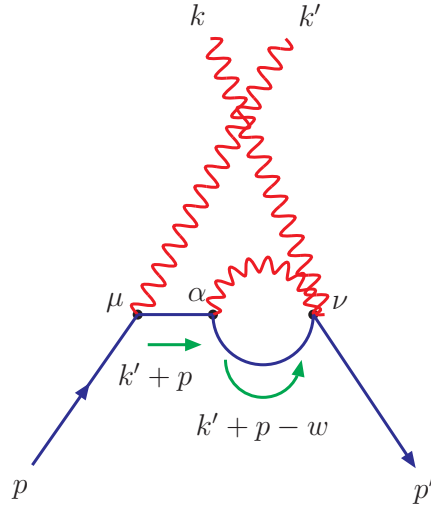
$$\begin{aligned} K^\nu(q) &= \int \frac{d^D w w^\nu}{w^2[(q-w)^2-m^2]} = i\pi^{D/2} (m^2-q^2)^{D/2-2} q^\nu \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2}+1)} \times \\ &\quad {}_2F_1\left(2-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}; \frac{D}{2}+1; \frac{q^2}{q^2-m^2}\right) \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} L^\nu(q) &= \int \frac{d^D w w^\nu}{w^4[(q-w)^2-m^2]} = -i\pi^{D/2} (m^2-p^2)^{D/2-3} q^\nu \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2}-1)}{\Gamma(\frac{D}{2}+1)} \times \\ &\quad {}_2F_1\left(3-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}-1; \frac{D}{2}+1; \frac{q^2}{q^2-m^2}\right) \end{aligned} \quad (5.65)$$

Por lo tanto

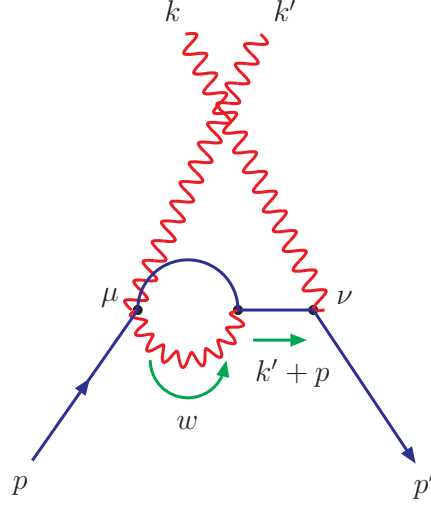
$$\Gamma_{D_4}^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \left\{ -2 \frac{(p^\mu + q^\mu)q^\nu}{(q^2 - m^2)} K(q) + \frac{(p^\mu + q^\mu)}{(q^2 - m^2)} K^\nu(q) + (1 - \xi)(p^\mu + q^\mu)L^\nu(q) \right\} \quad (5.66)$$

5.8. Diagrama 5



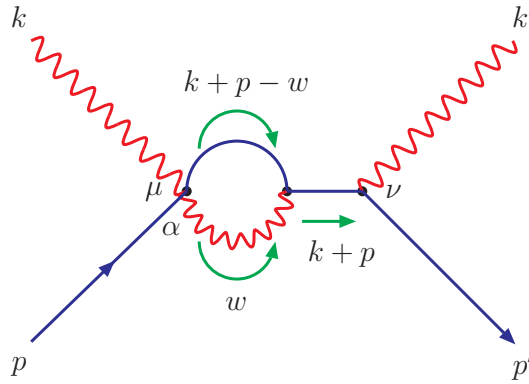
$$\Gamma_{D_5}^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \left\{ -2 \frac{(p^\mu + q'^\mu)q'^\nu}{(q'^2 - m^2)} K(q') + \frac{(p^\mu + q'^\mu)}{(q'^2 - m^2)} K^\nu(q') + (1 - \xi)(p^\mu + q'^\mu)L^\nu(q') \right\} \quad (5.67)$$

5.9. Diagrama 6



$$\Gamma_{D_6}^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \left\{ -2 \frac{(p'^\nu + q'^\nu)q'^\mu}{(q'^2 - m^2)} K(q') + \frac{(p'^\nu + q'^\nu)}{(q'^2 - m^2)} K^\mu(q') + (1 - \xi)(p'^\nu + q'^\nu) L^\mu(q') \right\} \quad (5.68)$$

5.10. Diagrama 7



Aplicando reglas de Feynman tenemos:

$$\Gamma^{\mu\nu} = ie^2 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} g_{\alpha\mu} \frac{(2q - w)^\beta (p' + q)^\nu}{(q^2 - m^2)[(q - w)^2 - m^2]} \left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{w^2} + (1 - \xi) \frac{w^\alpha w^\beta}{w^4} \right] \quad (5.69)$$

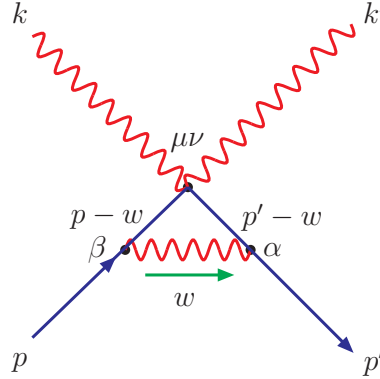
$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \left\{ - \int d^D w \left[\frac{(2q-w)_\mu (p'+q)^\nu}{w^2(q^2-m^2)[(q-w)^2-m^2]} \right] \right. \\ \left. + (1-\xi) \int d^D w \left[\frac{w_\mu (p'+q)^\nu [w \cdot (2q-w)]}{w^4(q^2-m^2)[(q-w)^2-m^2]} \right] \right\} \quad (5.70)$$

Entonces

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \left\{ - \frac{2q^\mu (p'^\nu + q^\nu)}{(q^2 - m^2)} \int \frac{d^D w}{w^2[(q-w)^2 - m^2]} + \frac{(p'^\nu + q^\nu)}{(q^2 - m^2)} \int \frac{d^D w w^\mu}{w^2[(q-w)^2 - m^2]} \right. \\ \left. + (1-\xi) \left[(p'^\nu + q^\nu) \int \frac{d^D w w^\mu}{w^4[(q-w)^2 - m^2]} - \frac{(p'^\nu + q^\nu)}{(q^2 - m^2)} \underbrace{\int \frac{d^D w w^\mu}{w^4}}_{=0} \right] \right\} \quad (5.71)$$

$$\Gamma_{D7}^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \left\{ -2 \frac{(p'^\nu + q^\nu) q^\mu}{(q^2 - m^2)} K(q) + \frac{(p'^\nu + q^\nu)}{(q^2 - m^2)} K^\mu(q) + (1-\xi)(p'^\nu + q^\nu) L^\mu(q) \right\} \quad (5.72)$$

5.11. Diagrama 8



Aplicando reglas de Feynman tenemos:

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D w (2p'-w)^\alpha (2p-w)^\beta g_{\mu\nu}}{[(p-w)^2 - m^2][(p'-w)^2 - m^2]} \left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{w^2} + (1-\xi) \frac{w^\alpha w^\beta}{w^4} \right] \quad (5.73)$$

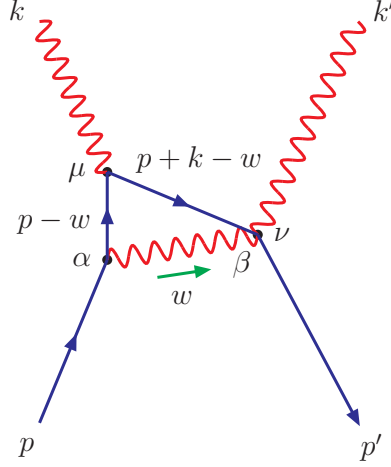
O bien,

$$\Gamma_{D8}^{\mu\nu} = \frac{-ie^2}{(2\pi)^D} g^{\mu\nu} \left\{ \tilde{K}(p-p') - 2(p+p')^\mu I_\mu(p, p') + 4p \cdot p' I(p, p') \right. \\ \left. + (\xi - 1) [\tilde{K}(p-p') - 2(p+p')^\mu I_\mu(p, p') + 4p'^\mu p^\nu J_{\mu\nu}(p, p')] \right\} \quad (5.74)$$

donde

$$\tilde{K}(p - p') = \int \frac{d^D w}{[(p - w)^2 - m^2][(p' - w)^2 - m^2]} \quad (5.75)$$

5.12. Diagrama 9



Aplicando reglas de Feynman obtenemos:

$$\Gamma^{\mu\nu} = ie^2 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{(p + q - 2w)^\mu (2p - w)^\alpha g^{\beta\nu}}{[(p - w)^2 - m^2][(q - w)^2 - m^2]} \left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{w^2} + (1 - \xi) \frac{w^\alpha w^\beta}{w^4} \right] \quad (5.76)$$

$$(2p - w)^\alpha (p + q - 2w)^\mu g^{\alpha\beta} g^{\beta\nu} = 2(p + q)^\mu p^\nu - (p + q)^\mu w^\nu - 4w^\mu p^\nu + 2w^\mu w^\nu \quad (5.77)$$

$$(2p - w)^\alpha (p + q - 2w)^\mu g^{\beta\nu} w^\alpha w^\beta = [(q + p)^\mu w^\nu - 2w^\mu w^\nu][p^2 - (p - w)^2] \quad (5.78)$$

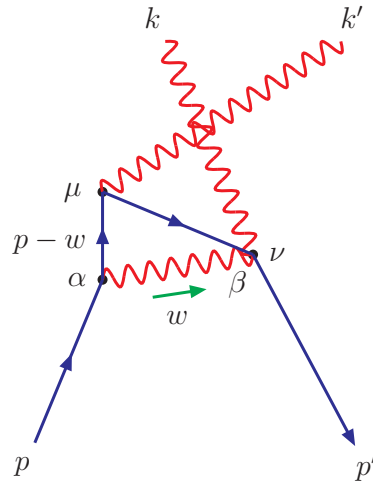
Las integrales que necesitamos calcular son de la forma:

$$\begin{aligned}
L^\nu(q) &= \int \frac{d^D w w^\nu}{w^4[(q-w)^2 - m^2]} \\
L^{\mu\nu}(q) &= \int \frac{d^D w w^\mu w^\nu}{w^4[(q-w)^2 - m^2]} \\
I(p, q) &= \int \frac{d^D w}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(q-w)^2 - m^2]} \\
I^\nu(p, q) &= \int \frac{d^D w w^\nu}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(q-w)^2 - m^2]} \\
I^{\mu\nu}(p, q) &= \int \frac{d^D w w^\mu w^\nu}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(q-w)^2 - m^2]} \\
J^\nu(p, q) &= \int \frac{d^D w w^\nu}{w^4[(p-w)^2 - m^2][(q-w)^2 - m^2]} \\
J^{\mu\nu}(p, q) &= \int \frac{d^D w w^\mu w^\nu}{w^4[(p-w)^2 - m^2][(q-w)^2 - m^2]}
\end{aligned} \tag{5.79}$$

Entonces

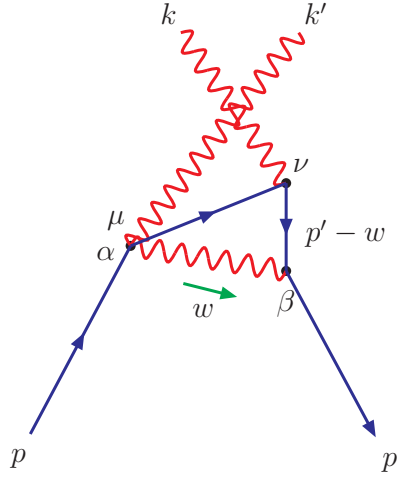
$$\begin{aligned}
\Gamma_{D_9}^{\mu\nu} &= \frac{-ie^2}{(2\pi)^D} \left\{ 2(p+q)^\mu p^\nu I(p, q) - (p+q)^\mu I^\nu(p, q) - 4p^\nu I^\mu(p, q) + 2I^{\mu\nu}(p, q) \right. \\
&\quad \left. - (1-\xi)[(p^2 - m^2)(p+q)^\mu J^\nu(p, q) - 2(p^2 - m^2)J^{\mu\nu}(p, q) + 2L^{\mu\nu}(q) \right. \\
&\quad \left. - (p+q)^\mu L^\nu(q) \right\}
\end{aligned} \tag{5.80}$$

5.13. Diagrama 10



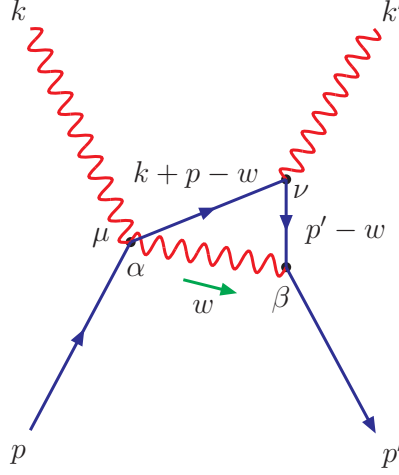
$$\begin{aligned}
\Gamma_{D_{10}}^{\mu\nu} = & \frac{-ie^2}{(2\pi)^D} \{ 2(p+q')^\mu p^\nu I(p, q') - (p+q')^\mu I^\nu(p, q') - 4p^\nu I^\mu(p, q') + 2I^{\mu\nu}(p, q') \\
& - (1-\xi) [(p^2 - m^2)(p+q')^\mu J^\nu(p, q') - 2(p^2 - m^2)J^{\mu\nu}(p, q') + 2L^{\mu\nu}(q') \\
& - (p+q')^\mu L^\nu(q')] \} \tag{5.81}
\end{aligned}$$

5.14. Diagrama 11



$$\begin{aligned}
\Gamma_{D_{11}}^{\mu\nu} = & \frac{-ie^2}{(2\pi)^D} \{ 2p'^\mu (p' + q')^\nu I(p', q') - (p' + q')^\nu I^\mu(p', q') - 4p'^\mu I^\nu(p', q') + 2I^{\mu\nu}(p', q') \\
& - (1-\xi) [(p'^2 - m^2)(p' + q')^\nu J^\mu(p', q') - 2(p'^2 - m^2)J^{\mu\nu}(p', q') + 2L^{\mu\nu}(q') \\
& - (p' + q')^\nu L^\mu(q')] \} \tag{5.82}
\end{aligned}$$

5.15. Diagrama 12



Aplicamos reglas de Feynman:

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2p' - w)^\beta (p' + q - 2w)^\nu g^{\alpha\mu}}{[(p' - w)^2 - m^2][(q - w)^2 - m^2]} \left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{w^2} + (1 - \xi) \frac{w^\alpha w^\beta}{w^4} \right]$$

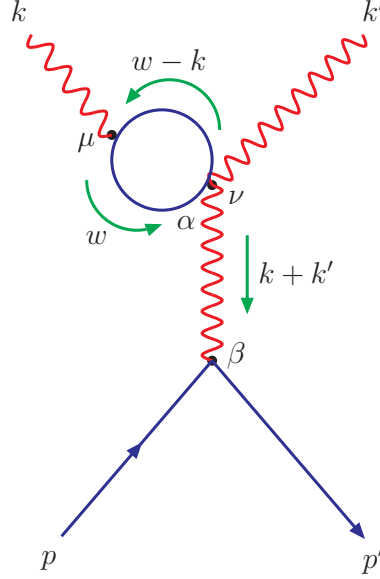
$$(2p' - w)^\beta (p' + q - 2w)^\nu g^{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} = (2p' - w)^\mu (p' + q - 2w)^\nu \quad (5.83)$$

$$(2p' - w)^\beta (p' + q - 2w)^\nu g^{\alpha\mu} w^\alpha w^\beta = [w \cdot (2p' - w)] w^\mu (p' + q - 2w)^\nu \quad (5.84)$$

Por lo tanto

$$\Gamma_{D12}^{\mu\nu} = \frac{-ie^2}{(2\pi)^D} \left\{ 2p'^\mu (p' + q)^\nu I(p', q) - (p' + q)^\nu I^\mu(p', q) - 4p'^\mu I^\nu(p', q) + 2I^{\mu\nu}(p', q) \right. \\ \left. - (1 - \xi) [(p'^2 - m^2)(p' + q)^\nu J^\mu(p', q) - 2(p'^2 - m^2)J^{\mu\nu}(p', q) + 2L^{\mu\nu}(q) - (p' + q)^\nu L^\mu(q)] \right\} \quad (5.85)$$

5.16. Diagrama 13



Aplicando reglas de Feynman obtenemos:

$$\Gamma^{\mu\nu} = ie^2 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{(p+p')^\beta (2w-k)^\mu g^{\alpha\nu}}{(w^2-m^2)[(w-k)^2-m^2]} \left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{(k+k')^2} + (1-\xi) \frac{(k+k')^\alpha (k+k')^\beta}{(k+k')^4} \right] \quad (5.86)$$

$$(p+p')^\beta (2w-k)^\mu g^{\alpha\beta} g^{\alpha\nu} = (2w-k)^\mu (p+p')^\nu \quad (5.87)$$

$$(p+p')^\beta (2w-k)^\mu g^{\alpha\nu} (k+k')^\alpha (k+k')^\beta = (k+k') \cdot (p+p') (2w-k)^\mu (k+k')^\nu \quad (5.88)$$

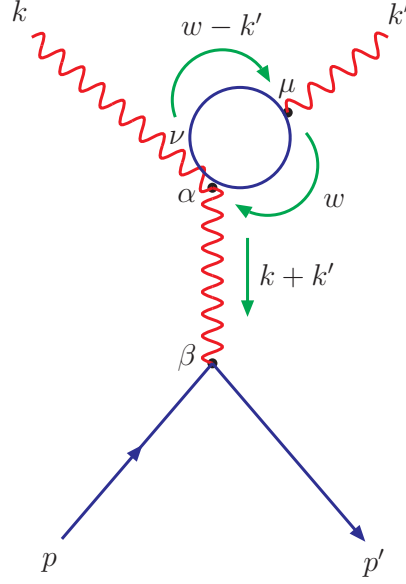
Entonces

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \left\{ \left[-\frac{(p+p')^\nu}{(k+k')^2} + (1-\xi) \frac{(k+k') \cdot (p+p') (k+k')^\nu}{(k+k')^4} \right] \times \left[2 \int \frac{d^D w w^\mu}{(w^2-m^2)[(w-k)^2-m^2]} - k^\mu \int \frac{d^D w}{(w^2-m^2)[(w-k)^2-m^2]} \right] \right\}$$

Utilizando (5.57), (5.59) y simplificando obtenemos:

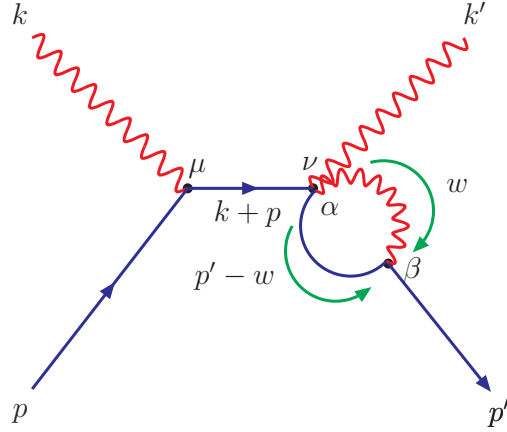
$$\Gamma_{D13}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.89)$$

5.17. Diagrama 14



$$\Gamma_{D_{14}}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.90)$$

5.18. Diagrama 15



Aplicando reglas de Feynman obtenemos:

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2p' - w)^\beta (p + q)^\mu g^{\alpha\nu}}{(q^2 - m^2)[(p' - w)^2 - m^2]} \left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{w^2} + (1 - \xi) \frac{w^\alpha w^\beta}{w^4} \right] \quad (5.91)$$

$$(2p' - w)^\beta (p + q)^\mu g^{\alpha\beta} g^{\alpha\nu} = (2p' - w)^\nu (p + q)^\mu \quad (5.92)$$

$$(2p' - w)^\beta (p + q)^\mu g^{\alpha\nu} w^\alpha w^\beta = [w \cdot (2p' - w)] (p + q)^\mu w^\nu \quad (5.93)$$

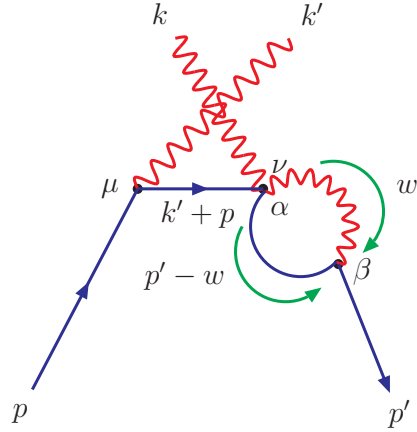
Entonces

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu\nu} = & \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \left[-\frac{(p+q)^\mu}{(q^2 - m^2)} \int d^D w \frac{(2p'^\nu - w^\nu)}{w^2[(p' - w)^2 - m^2]} \right. \\ & \left. + (1 - \xi) \frac{(p+q)^\mu}{(q^2 - m^2)} \int d^D w \frac{(2p' \cdot w - w^2)}{w^4[(p' - w)^2 - m^2]} \right] \end{aligned} \quad (5.94)$$

Por lo tanto

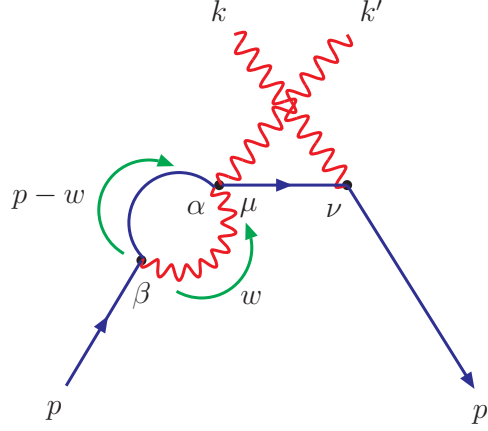
$$\Gamma_{D_{15}}^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \frac{(p+q)^\mu}{(q^2 - m^2)} \{ -2p'^\nu K(p') + K^\nu(p') + (1 - \xi)(p'^2 - m^2)L^\nu(p') \} \quad (5.95)$$

5.19. Diagrama 16



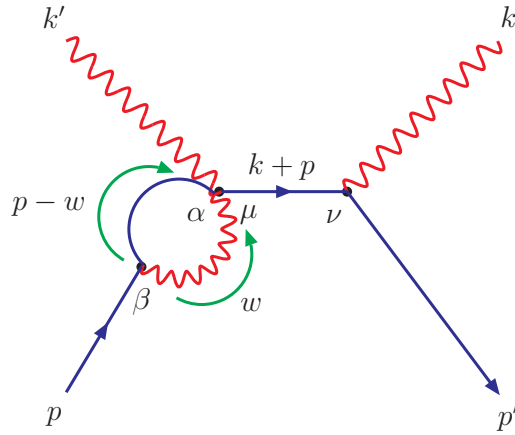
$$\Gamma_{D_{16}}^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \frac{(p+q')^\mu}{(q'^2 - m^2)} \{ -2p'^\nu K(p') + K^\nu(p') + (1 - \xi)(p'^2 - m^2)L^\nu(p') \} \quad (5.96)$$

5.20. Diagrama 17



$$\Gamma_{D_{17}}^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \frac{(p' + q')^\nu}{(q'^2 - m^2)} \{ -2p^\mu K(p) + K^\mu(p) + (1 - \xi)(p^2 - m^2)L^\mu(p) \} \quad (5.97)$$

5.21. Diagrama 18



Aplicando reglas de Feynman obtenemos:

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2p - w)^\beta (p' + q)^\nu g^{\alpha\mu}}{(q^2 - m^2)[(p - w)^2 - m^2]} \left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{w^2} + (1 - \xi) \frac{w^\alpha w^\beta}{w^4} \right] \quad (5.98)$$

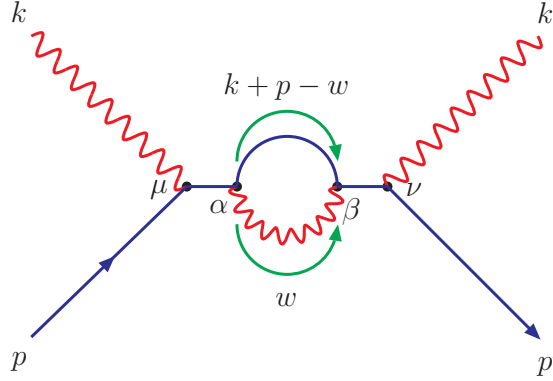
$$(2p - w)^\beta (p' + q)^\nu g^{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} = (p' + q)^\nu (2p - w)^\mu \quad (5.99)$$

$$(2p - w)^\beta (p' + q)^\nu g^{\alpha\mu} w^\alpha w^\beta = [w \cdot (2p - w)] w^\mu (p' + q)^\nu \quad (5.100)$$

Por lo tanto

$$\Gamma_{D_{18}}^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \frac{(p' + q)^\nu}{(q^2 - m^2)} \{ -2p^\mu K(p) + K^\mu(p) + (1 - \xi)(p^2 - m^2)L^\mu(p) \} \quad (5.101)$$

5.22. Diagrama 19



Aplicando reglas de Feynman obtenemos:

$$\Gamma^{\mu\nu} = -\frac{ie^2}{2(2\pi)^D} \int \frac{d^D w}{(q^2 - m^2)^2 [(q - w)^2 - m^2]} (p + q)^\mu (p' + q)^\nu (2q - w)^\alpha (2q - w)^\beta \times \left[-\frac{g_{\alpha\beta}}{w^2} + (1 - \xi) \frac{w^\alpha w^\beta}{w^4} \right] \quad (5.102)$$

$$(2q - w)^\alpha (2q - w)^\beta g^{\alpha\beta} = (2q - w)^2 \quad (5.103)$$

$$(2q - w)^\alpha (2q - w)^\beta w^\alpha w^\beta = [q^2 - m^2 - (q - w)^2 + m^2]^2 \quad (5.104)$$

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{2(2\pi)^D} \left[\int d^D w \frac{(2q - w)^2 (p + q)^\mu (p' + q)^\nu}{w^2 (q^2 - m^2)^2 [(q - w)^2 - m^2]} - (1 - \xi) \int d^D w \frac{[q^2 - m^2 - (q - w)^2 + m^2]^2 (p + q)^\mu (p' + q)^\nu}{w^4 (q^2 - m^2)^2 [(q - w)^2 - m^2]} \right] \quad (5.105)$$

Simplificando tenemos que:

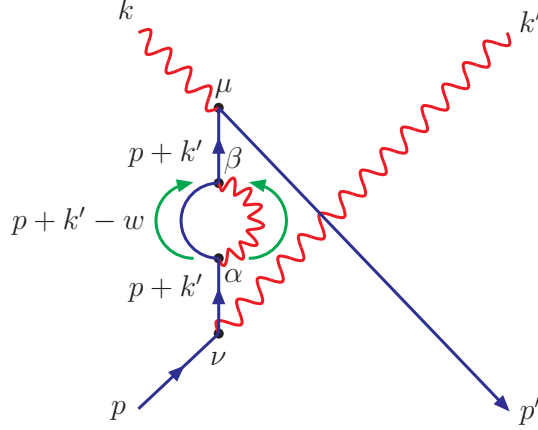
$$\Gamma_{D_{19}}^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{2(2\pi)^D} (p + q)^\mu (p' + q)^\nu \left\{ \left(\frac{2}{q^2 - m^2} + \frac{4m^2}{(q^2 - m^2)^2} \right) K(q) - \frac{T}{(q^2 - m^2)^2} - (1 - \xi) L(q) \right\} \quad (5.106)$$

donde

$$T = \int \frac{d^D w}{[(q - w)^2 - m^2]} = -i\pi^{D/2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2)^{D/2-1} \quad (5.107)$$

$$L(q) = \int \frac{d^D w}{w^4 [(q-w)^2 - m^2]} = -i\pi^{D/2} (m^2)^{D/2-3} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) B\left(2, \frac{D}{2} - 2\right) \times {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, 2; \frac{D}{2}; \frac{q^2}{m^2}\right) \quad (5.108)$$

5.23. Diagrama 20



Aplicando reglas de Feynman obtenemos:

$$\Gamma^{\mu\nu} = -\frac{ie^2}{2(2\pi)^D} \int \frac{d^D w (2q' - w)^\alpha (2q' - w)^\beta (p' + q')^\mu (p + q')^\nu}{(q'^2 - m^2)^2 [(q' - w)^2 - m^2]} \times \left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{w^2} + (1 - \xi) \frac{w^\alpha w^\beta}{w^4} \right] \quad (5.109)$$

$$(2q' - w)^\alpha (2q' - w)^\beta (p' + q')^\mu (p + q')^\nu g^{\alpha\beta} = (p' + q')^\mu (p + q')^\nu [w^2 + 4q'^2 - 4q'_\alpha w^\alpha] \quad (5.110)$$

$$(2q' - w)^\alpha (2q' - w)^\beta (p' + q')^\mu (p + q')^\nu w^\alpha w^\beta = (p' + q')^\mu (p + q')^\nu [w^4 - 2w^2 q'_\beta w^\beta - 2w^2 w^\alpha q'_\alpha + 4q'_\alpha q'_\beta w^\alpha w^\beta] \quad (5.111)$$

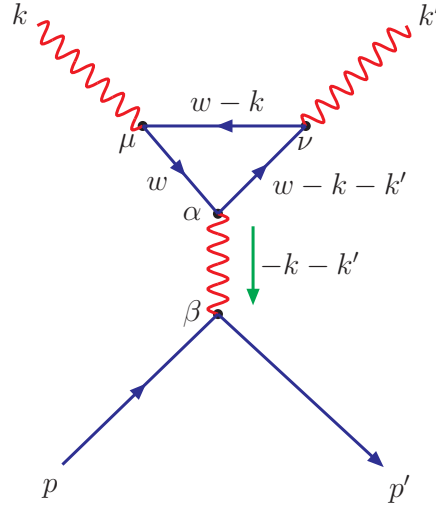
Las integrales a calcular son de la forma:

$$\begin{aligned} T &= \int \frac{d^D w}{(q' - w)^2 - m^2} \\ K(q') &= \int \frac{d^D w}{w^2 [(q' - w)^2 - m^2]} \\ K^\alpha(q') &= \int \frac{d^D w w^\alpha}{w^2 [(q' - w)^2 - m^2]} \\ L^{\alpha\beta}(q') &= \int \frac{d^D w w^\alpha w^\beta}{w^4 [(q' - w)^2 - m^2]} \end{aligned}$$

Entonces

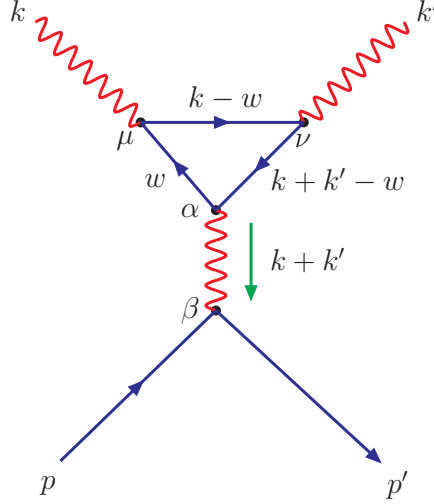
$$\Gamma_{D_{20}}^{\mu\nu} = \frac{-ie^2}{2(2\pi)^D} \frac{(p' + q')^\mu (p + q')^\nu}{(q'^2 - m^2)^2} \left\{ -4q'^2 K(q') - T + 4q'_\alpha K^\alpha(q') + (1 - \xi) [T - 4q'_\alpha K^\alpha(q') + 4q'_\alpha q'_\beta L^{\alpha\beta}(q')] \right\} \quad (5.112)$$

5.24. Diagrama 21



$$\Gamma_{D_{21}}^{\mu\nu} = -\Gamma_{D_{22}}^{\mu\nu} \quad (5.113)$$

5.25. Diagrama 22



Aplicamos reglas de Feynman y tenemos que:

$$\Gamma^{\mu\nu} = -\frac{ie^2}{2(2\pi)^D} \int \frac{(k+k'-2w)^\alpha (p+p')^\beta (k-2w)^\mu (2k+k'-2w)^\nu}{(w^2-m^2)[(k-w)^2-m^2][(k+k'-w)^2-m^2]} \times \left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{(k+k')^2} + (1-\xi) \frac{(k+k')^\alpha (k+k')^\beta}{(k+k')^4} \right] \quad (5.114)$$

$$(k+k'-2w)^\alpha (p+p')^\beta (k-2w)^\mu (2k+k'-2w)^\nu g^{\alpha\beta} = (k-2w)^\mu (2k+k'-2w)^\nu [-2w_\alpha (p+p')^\alpha + (k+k') \cdot (p+p')] \quad (5.115)$$

$$(k+k'-2w)^\alpha (p+p')^\beta (k-2w)^\mu (2k+k'-2w)^\nu (k+k')^\alpha (k+k')^\beta = (p+p') \cdot (k+k') [(k+k')^2 - 2w \cdot (k+k')] (k-2w)^\mu (2k+k'-2w)^\nu \quad (5.116)$$

Las integrales a calcular son de la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{I}(k, k+k') &= \int \frac{d^D w}{(w^2-m^2)[(k-w)^2-m^2][(k+k'-w)^2-m^2]} \\ \tilde{I}^\mu(k, k+k') &= \int \frac{d^D w w^\mu}{(w^2-m^2)[(k-w)^2-m^2][(k+k'-w)^2-m^2]} \\ \tilde{I}^{\mu\nu}(k, k+k') &= \int \frac{d^D w w^\mu w^\nu}{(w^2-m^2)[(k-w)^2-m^2][(k+k'-w)^2-m^2]} \\ \tilde{I}_\alpha^{\mu\nu}(k, k+k') &= \int \frac{d^D w w^\mu w^\nu w_\alpha}{(w^2-m^2)[(k-w)^2-m^2][(k+k'-w)^2-m^2]} \end{aligned} \quad (5.117)$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{I}(k, k+k') &= \frac{(i)^D}{2} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) (-m^2)^{D/2-3} \times \\ &\quad \mathcal{Y}_3 \left[3 - \frac{D}{2}, 1, 1, 1 \mid \frac{(k+k')^2}{m^2}, \frac{k'^2}{m^2}, \frac{k^2}{m^2} \right]\end{aligned}\quad (5.118)$$

5.25.1. La Integral Tensorial $\tilde{I}^\mu(k, k+k')$

Tenemos

$$\tilde{I}^\mu(k, k+k') = \int \frac{d^D w w^\mu}{[w^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2][(k+k'-w)^2 - m^2]} \quad (5.119)$$

Sea $t = k + k'$

$$\tilde{I}^\mu(k, t) = \int \frac{d^D w w^\mu}{[w^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2][(t-w)^2 - m^2]} . \quad (5.120)$$

Como un vector de Lorentz $\tilde{I}^\mu$ puede únicamente tener componentes en la dirección de los momentos k^μ y t^μ . Así, podemos escribir:

$$\tilde{I}^\mu = \frac{i\pi^2}{2} [k^\mu \tilde{I}_A(k, t) + t^\mu \tilde{I}_B(k, t)] \quad (5.121)$$

donde $\tilde{I}_A(k, t)$, $\tilde{I}_B(k, t)$ necesitan ser funciones escalares de k y t . El factor de $i\pi^2/2$ lo tomamos por conveniencia. Formamos los siguientes productos escalares

$$\begin{aligned}k^\mu \tilde{I}^\mu &= \frac{i\pi^2}{2} [k^2 \tilde{I}_A(k, t) + k \cdot t \tilde{I}_B(k, t)] \\ t^\mu \tilde{I}_\mu^{(1)} &= \frac{i\pi^2}{2} [k \cdot t \tilde{I}_A(k, t) + t^2 \tilde{I}_B(k, t)]\end{aligned}\quad (5.122)$$

resolviendo para $\tilde{I}_A(k, t)$ y $\tilde{I}_B(k, t)$ obtenemos

$$\begin{aligned}(k \cdot t) k^\mu \tilde{I}^\mu &= \frac{i\pi^2}{2} [(k \cdot t) k^2 \tilde{I}_A(k, t) + (k \cdot t)^2 \tilde{I}_B(k, t)] \\ k^2 t^\mu \tilde{I}^\mu &= \frac{i\pi^2}{2} [k^2 (k \cdot t) \tilde{I}_A(k, t) + k^2 t^2 \tilde{I}_B(k, t)] .\end{aligned}\quad (5.123)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\tilde{I}_B(k, t) &= \frac{2}{i\pi^2 \Delta^2} [(k \cdot t) k^\mu \tilde{I}^\mu - k^2 t^\mu \tilde{I}^\mu] \\ \tilde{I}_A(k, t) &= \tilde{I}_B(t, k)\end{aligned}\quad (5.124)$$

donde

$$\begin{aligned}
k^\mu \tilde{I}_\mu &= \frac{k^2}{2} \int d^D w \frac{1}{[w^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2][(t-w)^2 - m^2]} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^D w \frac{1}{[(k-w)^2 - m^2][(t-w)^2 - m^2]} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int d^D w \frac{1}{[w^2 - m^2][(t-w)^2 - m^2]} \\
&= \frac{k^2}{2} \tilde{I}(k, t) + \frac{1}{2} \tilde{K}(k-t) - \frac{1}{2} \tilde{K}(t) .
\end{aligned} \tag{5.125}$$

Hemos usado la relación

$$t \cdot w = \frac{1}{2}(t^2 + w^2 - (t-w)^2 - m^2 + m^2) . \tag{5.126}$$

De manera similar, tenemos que

$$t^\mu \tilde{I}^\mu = \frac{t^2}{2} \tilde{I} + \frac{1}{2} \tilde{K}(k-t) - \frac{1}{2} \tilde{K}(k) . \tag{5.127}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(k) &= i\pi^{D/2}(-k^2)^{D/2-2} \left[\frac{\Gamma(\frac{D}{2}-1)\Gamma(2-\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})} \lambda^{D-3} - \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{D/2-2} \Gamma\left(1-\frac{D}{2}\right) \times \right. \\
&\quad \left. (1-\lambda)_2 F_1\left(1, 2-\frac{D}{2}; \frac{D}{2}; \frac{(1-\lambda)^2}{4m^2/k^2}\right) \right] ,
\end{aligned} \tag{5.128}$$

con $\lambda = \sqrt{(4m^2 - k^2)/-k^2}$. Por lo tanto, $\tilde{I}_A(k, t)$ **en el caso masivo y dimensión arbitrarria D es:**

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_A(k, t) &= -\frac{1}{\Delta^2} \left\{ [t^2 - (k \cdot t)] \frac{\tilde{K}_0(k-t)}{2} + [t^2(k^2 - k \cdot t)] \frac{\tilde{I}_0}{2} + t^2 \tilde{Q}_1(t) - (k \cdot t) \tilde{Q}_1(k) \right\} \\
\tilde{I}_B(k, t) &= \tilde{I}_A(t, k) ,
\end{aligned} \tag{5.129}$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_1(k) &= \pi^{D/2-2}(-k^2)^{D/2-2} \left[\frac{\Gamma(\frac{D}{2}-1)\Gamma(2-\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})} \lambda^{D-3} - \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^{D/2-2} \Gamma\left(1-\frac{D}{2}\right) \times \right. \\
&\quad \left. (1-\lambda)_2 F_1\left(1, 2-\frac{D}{2}; \frac{D}{2}; \frac{(1-\lambda)^2}{4m^2/k^2}\right) \right] ,
\end{aligned} \tag{5.130}$$

y

$$\tilde{I}_0 = \frac{2}{i\pi^2} \tilde{I} , \quad \tilde{K}_0(k-t) = \frac{2}{i\pi^2} \tilde{K}(k-t) , \quad \Delta^2 = (k \cdot t)^2 - k^2 t^2 . \tag{5.131}$$

5.25.2. La Integral Tensorial $\tilde{I}^{\mu\nu}(k, k + k')$

La integral tensorial $\tilde{I}^{\mu\nu}$ puede ser expresada en términos de las integrales escalares $\tilde{K}(k - t)$, $\tilde{I}$, $\tilde{I}_C$, $\tilde{I}_D$ y $\tilde{I}_E$ como

$$\begin{aligned} \tilde{I}^{\mu\nu} = & \frac{i\pi^2}{2} \left[\frac{g_{\mu\nu}}{D} \left(\tilde{K}(k - t) + m^2 \tilde{I} \right) + \left(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} \frac{k^2}{D} \right) \tilde{I}_C + \left(t_\mu k_\nu + k_\mu t_\nu \right. \right. \\ & \left. \left. - g_{\mu\nu} \frac{2(k \cdot t)}{D} \right) \tilde{I}_D + \left(t_\mu t_\nu - g_{\mu\nu} \frac{t^2}{D} \right) \tilde{I}_E \right]. \end{aligned} \quad (5.132)$$

Contrayendo con t^ν , tenemos

$$\begin{aligned} t^\nu \tilde{I}^{\mu\nu} = & \frac{i\pi^2}{2} \left[\frac{t_\mu}{D} \left(\tilde{K}(k - t) + m^2 \tilde{I} \right) + \left((k \cdot t) k_\mu - t_\mu \frac{k^2}{D} \right) \tilde{I}_C \right. \\ & \left. + \left(t^2 k_\mu + (k \cdot t) t_\mu \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) \tilde{I}_D + t^2 t_\mu \left(1 - \frac{1}{D} \right) \tilde{I}_E \right]. \end{aligned} \quad (5.133)$$

Hacemos una contracción más con respecto a t^μ

$$\begin{aligned} t^\mu t^\nu \tilde{I}^{\mu\nu} = & \frac{i\pi^2}{2} \left[\frac{t^2}{D} \left(\tilde{K}(k - t) + m^2 \tilde{I} \right) + \left((k \cdot t)^2 - \frac{k^2 t^2}{D} \right) \tilde{I}_C + 2t^2 (k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D} \right) \tilde{I}_D \right. \\ & \left. + t^4 \left(1 - \frac{1}{D} \right) \tilde{I}_E \right]. \end{aligned} \quad (5.134)$$

Otras posibles contracciones son:

$$\begin{aligned} k^\mu k^\nu \tilde{I}^{\mu\nu} = & \frac{i\pi^2}{2} \left[\frac{k^2}{D} \left(\tilde{K}(k - t) + m^2 \tilde{I} \right) + k^4 \left(1 - \frac{1}{D} \right) \tilde{I}_C + 2k^2 (k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D} \right) \tilde{I}_D \right. \\ & \left. + \left((k \cdot t)^2 - \frac{k^2 t^2}{D} \right) \tilde{I}_E \right], \end{aligned} \quad (5.135)$$

$$\begin{aligned} k^\nu t^\mu \tilde{I}^{\mu\nu} + t^\nu k^\mu \tilde{I}^{\mu\nu} = & i\pi^2 \left[\frac{(k \cdot t)}{D} \left(\tilde{K}(k - t) + m^2 \tilde{I} \right) + k^2 (k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D} \right) \tilde{I}_C \right. \\ & \left. + \left(k^2 t^2 + (k \cdot t)^2 \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) \tilde{I}_D + t^2 (k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D} \right) \tilde{I}_E \right]. \end{aligned} \quad (5.136)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
t^\mu \tilde{I}^{\mu\nu} &= \int d^D w \frac{t \cdot w w_\nu}{[w^2 - m^2][(t - w)^2 - m^2][(k - w)^2 - m^2]} \\
&= \frac{t^2}{2} \int d^D w \frac{w_\nu}{[w^2 - m^2][(t - w)^2 - m^2][(k - w)^2 - m^2]} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^D w \frac{w_\nu}{[(t - w)^2 - m^2][(k - w)^2 - m^2]} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int d^D w \frac{w_\nu}{[w^2 - m^2][(k - w)^2 - m^2]} \\
&= \frac{t^2}{2} \tilde{I}^\nu + \frac{1}{2} \tilde{K}^\nu(k - t) - \frac{1}{2} \tilde{K}^\nu(k) .
\end{aligned} \tag{5.137}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_\nu(k) &= \int d^D w \frac{w_\nu}{[w^2 - m^2][(k - w)^2 - m^2]} = \frac{i\pi^{D/2}}{2} k_\nu (-k^2)^{D/2-2} \times \\
&\quad \left[\frac{\Gamma(\frac{D}{2} - 1) \Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})} \lambda^{D-3} - \left(-\frac{m^2}{k^2} \right)^{D/2-2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (1 - \lambda) \times \right. \\
&\quad \left. {}_2F_1\left(1, 2 - \frac{D}{2}; \frac{D}{2}; \frac{(1 - \lambda)^2}{4m^2/k^2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{5.138}$$

En una manera similar, $k^\mu \tilde{I}^{\mu\nu}$ nos conduce a

$$k^\mu \tilde{I}^{\mu\nu}(k, t) = t^\mu \tilde{I}^{\mu\nu}(t, k) \tag{5.139}$$

$$k^\mu \tilde{I}^{\mu\nu} = \frac{k^2}{2} \tilde{I}^\nu + \frac{1}{2} \tilde{K}^\nu(k - t) - \frac{1}{2} \tilde{K}^\nu(t) . \tag{5.140}$$

Una segunda contracción nos conduce a:

$$\begin{aligned}
t^\nu t^\mu \tilde{I}^{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} t^2 [(k \cdot t) \tilde{I}_A + t^2 \tilde{I}_B] + \frac{1}{4} (t^2 + (k \cdot t)) \tilde{K}(k - t) - \frac{t^\nu}{2} \tilde{K}_\nu(k) \\
k^\nu t^\mu \tilde{I}^{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} t^2 [k^2 \tilde{I}_A + (k \cdot t) \tilde{I}_B] + \frac{1}{4} (k^2 + (k \cdot t)) \tilde{K}(k - t) - \frac{k^\nu}{2} \tilde{K}_\nu(k) \\
k^\nu k^\mu \tilde{I}^{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} k^2 [k^2 \tilde{I}_A + (k \cdot t) \tilde{I}_B] + \frac{1}{4} (k^2 + (k \cdot t)) \tilde{K}(k - t) - \frac{k^\nu}{2} \tilde{K}_\nu(t) \\
t^\nu k^\mu \tilde{I}^{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} k^2 [(k \cdot t) \tilde{I}_A + t^2 \tilde{I}_B] + \frac{1}{4} (t^2 + (k \cdot t)) \tilde{K}(k - t) - \frac{t^\nu}{2} \tilde{K}_\nu(t) .
\end{aligned} \tag{5.141}$$

Vamos a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
k^4 \left(1 - \frac{1}{D}\right) \tilde{I}_C + 2k^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D}\right) \tilde{I}_D + \left[(k \cdot t)^2 - \frac{k^2 t^2}{D}\right] \tilde{I}_E &= a \\
\left[(k \cdot t)^2 - \frac{k^2 t^2}{D}\right] \tilde{I}_C + 2t^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D}\right) \tilde{I}_D + t^4 \left(1 - \frac{1}{D}\right) \tilde{I}_E &= b \\
k^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D}\right) \tilde{I}_C + \left[k^2 t^2 + (k \cdot t)^2 \left(1 - \frac{2}{D}\right)\right] \tilde{I}_D + t^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D}\right) \tilde{I}_E &= c,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
a &= \frac{2}{i\pi^2} k^\mu k^\nu \tilde{I}^{\mu\nu} - \frac{k^2}{D} (\tilde{K}(k-t) + m^2 \tilde{I}) \\
b &= \frac{2}{i\pi^2} t^\mu t^\nu \tilde{I}^{\mu\nu} - \frac{t^2}{D} (\tilde{K}(k-t) + m^2 \tilde{I}) \\
c &= \frac{1}{i\pi^2} [k^\nu t^\mu \tilde{I}^{\mu\nu} + t^\nu k^\mu \tilde{I}^{\mu\nu}] - \frac{(k \cdot t)}{D} (\tilde{K}(k-t) + m^2 \tilde{I}).
\end{aligned} \tag{5.142}$$

Para resolver este sistema de $\tilde{I}_C$, $\tilde{I}_D$ y $\tilde{I}_E$, usamos el metodo matricial:

$$\tilde{I}_C = \frac{Y}{X}, \tag{5.143}$$

donde

$$X \equiv \begin{vmatrix} k^4 \left(1 - \frac{1}{D}\right) & 2k^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D}\right) & (k \cdot t)^2 - \frac{k^2 t^2}{D} \\ (k \cdot t)^2 - \frac{k^2 t^2}{D} & 2t^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D}\right) & t^4 \left(1 - \frac{1}{D}\right) \\ k^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D}\right) & k^2 t^2 + (k \cdot t)^2 \left(1 - \frac{2}{D}\right) & t^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D}\right) \end{vmatrix}, \tag{5.144}$$

$$Y \equiv \begin{vmatrix} \frac{2}{i\pi^2} k^\mu k^\nu \tilde{I}^{\mu\nu} - \frac{k^2}{D} (\tilde{K}(k-t) + m^2 \tilde{I}) & 2k^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D}\right) & (k \cdot t)^2 - \frac{k^2 t^2}{D} \\ \frac{2}{i\pi^2} t^\mu t^\nu \tilde{I}^{\mu\nu} - \frac{t^2}{D} (\tilde{K}(k-t) + m^2 \tilde{I}) & 2t^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D}\right) & t^4 \left(1 - \frac{1}{D}\right) \\ \frac{k^\nu t^\mu \tilde{I}^{\mu\nu} + t^\nu k^\mu \tilde{I}^{\mu\nu}}{i\pi^2} - \frac{(k \cdot t)}{D} (\tilde{K}(k-t) + m^2 \tilde{I}) & k^2 t^2 + (k \cdot t)^2 \left(1 - \frac{2}{D}\right) & t^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D}\right) \end{vmatrix}. \tag{5.145}$$

Substituyendo las ecuaciones (5.144, 5.145) en la ecuación (5.143) obtenemos que $\tilde{I}_C$ **en el caso masivo y dimensión arbitraria D es:**

$$\begin{aligned}\tilde{I}_C(k, t) = & \frac{D}{(D-2)\Delta^2} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{D} \right) t^2 (k \cdot t) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2D} \right) k^2 t^2 \right] \tilde{I}_A - \frac{1}{2D} t^4 \tilde{I}_B \right. \\ & + \left[\left(\frac{2}{D} - \frac{1}{2} \right) t^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{D} \right) (k \cdot t) \right] \frac{\tilde{K}_0(k-t)}{2} + \frac{1}{D} m^2 t^2 \tilde{I}_0 \\ & \left. - \left(1 - \frac{2}{D} \right) (k \cdot t) \tilde{Q}_2(k) \right\},\end{aligned}\quad (5.146)$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_2(k) = & \frac{\pi^{D/2-2}}{2} (-k^2)^{D/2-2} \left[\frac{\Gamma(\frac{D}{2}-1)\Gamma(2-\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})} \lambda^{D-3} - \left(-\frac{m^2}{k^2} \right)^{D/2-2} \Gamma\left(1-\frac{D}{2}\right) \times \right. \\ & \left. (1-\lambda)_2 F_1\left(1, 2-\frac{D}{2}; \frac{D}{2}; \frac{(1-\lambda)^2}{4m^2/k^2}\right) \right].\end{aligned}\quad (5.147)$$

Similarmente $\tilde{I}_D$ es

$$\tilde{I}_D \equiv \frac{Z}{X}, \quad (5.148)$$

donde

$$Z \equiv \begin{vmatrix} k^4 \left(1 - \frac{1}{D}\right) & \frac{2}{i\pi^2} k^\mu k^\nu \tilde{I}^{\mu\nu} - \frac{k^2}{D} (\tilde{K}(k-t) + m^2 \tilde{I}) & (k \cdot t)^2 - \frac{k^2 t^2}{D} \\ (k \cdot t)^2 - \frac{k^2 t^2}{D} & \frac{2}{i\pi^2} t^\mu t^\nu \tilde{I}^{\mu\nu} - \frac{t^2}{D} (\tilde{K}(k-t) + m^2 \tilde{I}) & t^4 \left(1 - \frac{1}{D}\right) \\ k^2 (k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D}\right) & \frac{k^\nu t^\mu \tilde{I}^{\mu\nu} + t^\nu k^\mu \tilde{I}^{\mu\nu}}{i\pi^2} - \frac{(k \cdot t)}{D} (\tilde{K}(k-t) + m^2 \tilde{I}) & t^2 (k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D}\right) \end{vmatrix}. \quad (5.149)$$

Reemplazando Z y X en la ecuación (5.148) con las ecuaciones (5.144, 5.149) obtenemos que $\tilde{I}_D$ en el caso masivo y dimensión arbitraria D es

$$\begin{aligned}\tilde{I}_D = & \frac{D}{2(D-2)\Delta^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[(k \cdot t) k^2 + \left(\frac{2}{D} - 1 \right) k^2 t^2 \right] \tilde{I}_A + \frac{1}{2} \left[t^2 (k \cdot t) + \left(\frac{2}{D} - 1 \right) t^2 k^2 \right] \tilde{I}_B \right. \\ & - \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{2}{D} \right) (t-k)^2 + \frac{4}{D} (k \cdot t) \right] \tilde{K}_0(k-t) - \frac{1}{D} m^2 (k \cdot t) \tilde{I}_0 \\ & \left. + \left(1 - \frac{2}{D} \right) \left[k^2 \tilde{Q}_2(k) + t^2 \tilde{Q}_2(t) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (5.150)$$

$\tilde{I}_C(k, t)$ y $\tilde{I}_E(k, t)$ son funciones simétricas en k y t , así que $\tilde{I}_E$ puede ser escrita como

$$\tilde{I}_E(k, t) = \tilde{I}_C(t, k) , \quad (5.151)$$

que completa el cálculo de $\tilde{I}^{\mu\nu}$.

5.25.3. La Integral Tensorial $\tilde{I}^{\alpha\mu\nu}(k, k + k')$

Tenemos

$$\tilde{I}^{\alpha\mu\nu}(k, t) = \int \frac{d^D w w_\alpha w_\mu w_\nu}{[w^2 - m^2][(k - w)^2 - m^2][(t - w)^2 - m^2]} . \quad (5.152)$$

Como un vector de Lorentz $\tilde{I}^{\alpha\mu\nu}$ puede tener únicamente las siguientes dependencias:

1. $k_\alpha k_\mu k_\nu$
2. $t_\alpha t_\mu t_\nu$
3. $k_\alpha k_\mu t_\nu + k_\nu k_\mu t_\alpha + k_\alpha k_\nu t_\mu$
4. $t_\alpha t_\mu k_\nu + t_\nu t_\mu k_\alpha + t_\alpha t_\nu k_\mu$
5. $k_\alpha g_{\mu\nu} + k_\mu g_{\alpha\nu} + k_\nu g_{\alpha\mu}$
6. $t_\alpha g_{\mu\nu} + t_\mu g_{\alpha\nu} + t_\nu g_{\alpha\mu}$

Así, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \tilde{I}^{\alpha\mu\nu}(k, t) = & \frac{i\pi^2}{2} \left\{ k_\alpha k_\mu k_\nu \tilde{I}_F(k, t) + t_\alpha t_\mu t_\nu \tilde{I}_G(k, t) + \left[k_\alpha k_\mu k_\nu - \frac{k^2}{D+2} (k_\alpha g_{\mu\nu} + k_\mu g_{\alpha\nu} \right. \right. \\ & \left. \left. + k_\nu g_{\alpha\mu}) \right] \tilde{I}_H(k, t) + \left[t_\alpha t_\mu t_\nu - \frac{t^2}{D+2} (t_\alpha g_{\mu\nu} + t_\mu g_{\alpha\nu} + t_\nu g_{\alpha\mu}) \right] \tilde{I}_I(k, t) \right. \\ & + \left[k_\alpha k_\mu t_\nu + k_\nu k_\mu t_\alpha + k_\alpha k_\nu t_\mu - \frac{2k \cdot t}{D+2} (k_\alpha g_{\mu\nu} + k_\mu g_{\alpha\nu} + k_\nu g_{\alpha\mu}) \right. \\ & \left. - \frac{k^2}{t^2} t_\alpha t_\mu t_\nu \right] \tilde{I}_J(k, t) + \left[t_\alpha t_\mu k_\nu + t_\nu t_\mu k_\alpha + t_\alpha t_\nu k_\mu - \frac{2k \cdot t}{D+2} (t_\alpha g_{\mu\nu} \right. \\ & \left. + t_\mu g_{\alpha\nu} + t_\nu g_{\alpha\mu}) - \frac{t^2}{k^2} k_\alpha k_\mu k_\nu \right] \tilde{I}_K(k, t) \left. \right\} . \quad (5.153) \end{aligned}$$

Donde se satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_F(k, t) &= \tilde{I}_G(k, t) \\ \tilde{I}_H(k, t) &= \tilde{I}_I(k, t) \\ \tilde{I}_J(k, t) &= \tilde{I}_K(k, t) \end{aligned} \quad (5.154)$$

Hacemos las siguientes contracciones:

$$k^\alpha g^{\mu\nu} \tilde{I}^{\alpha\mu\nu} = \frac{i\pi^2}{2} \{k^4 \tilde{I}_F + t^2(k \cdot t) \tilde{I}_G\} , \quad (5.155)$$

$$t^\alpha g^{\mu\nu} \tilde{I}^{\alpha\mu\nu} = \frac{i\pi^2}{2} \{k^2(k \cdot t) \tilde{I}_F + t^4 \tilde{I}_G\} , \quad (5.156)$$

$$\begin{aligned} k^\alpha k^\mu k^\nu \tilde{I}^{\alpha\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{2} \left\{ k^6 \tilde{I}_F + (k \cdot t)^3 \tilde{I}_G + k^6 \left(1 - \frac{3}{D+2}\right) \tilde{I}_H + \left((k \cdot t)^3 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3}{D+2} t^2 k^2 (k \cdot t) \right) \tilde{I}_I + \left[k^4 (k \cdot t) \left(3 - \frac{6}{D+2}\right) - \frac{k^2}{t^2} (k \cdot t)^3 \right] \tilde{I}_J \right. \\ &\quad \left. + \left[k^2 (k \cdot t)^2 \left(3 - \frac{6}{D+2}\right) - t^2 k^4 \right] \tilde{I}_K \right\} , \end{aligned} \quad (5.157)$$

$$\begin{aligned} t^\alpha t^\mu t^\nu \tilde{I}^{\alpha\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{2} \left\{ (k \cdot t)^3 \tilde{I}_F + t^6 \tilde{I}_G + \left((k \cdot t)^3 - \frac{3}{D+2} t^2 k^2 (k \cdot t) \right) \tilde{I}_H \right. \\ &\quad \left. + t^6 \left(1 - \frac{3}{D+2}\right) \tilde{I}_I + \left[t^2 (k \cdot t)^2 \left(3 - \frac{6}{D+2}\right) - k^2 t^4 \right] \tilde{I}_J \right. \\ &\quad \left. + \left[t^4 (k \cdot t) \left(3 - \frac{6}{D+2}\right) - \frac{t^2}{k^2} (k \cdot t)^3 \right] \tilde{I}_K \right\} , \end{aligned} \quad (5.158)$$

$$\begin{aligned} k^\alpha k^\mu t^\nu \tilde{I}^{\alpha\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{2} \left\{ k^4 (k \cdot t) \tilde{I}_F + t^2 (k \cdot t)^2 \tilde{I}_G + k^4 (k \cdot t) \left(1 - \frac{3}{D+2}\right) \tilde{I}_H \right. \\ &\quad \left. + \left[t^2 (k \cdot t)^2 \left(1 - \frac{2}{D+2}\right) - \frac{k^2 t^4}{D+2} \right] \tilde{I}_I + \left[k^4 t^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k^2 (k \cdot t)^2 \left(1 - \frac{6}{D+2}\right) \right] \tilde{I}_J + \left[(k \cdot t)^3 \left(1 - \frac{4}{D+2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k^2 t^2 (k \cdot t) \left(1 - \frac{2}{D+2}\right) \right] \tilde{I}_K \right\} , \end{aligned} \quad (5.159)$$

$$\begin{aligned} t^\alpha t^\mu k^\nu \tilde{I}^{\alpha\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{2} \left\{ k^2 (k \cdot t)^2 \tilde{I}_F + t^4 (k \cdot t) \tilde{I}_G + \left[k^2 (k \cdot t)^2 \left(1 - \frac{2}{D+2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{k^4 t^2}{D+2} \right] \tilde{I}_H + t^4 (k \cdot t) \left(1 - \frac{3}{D+2}\right) \tilde{I}_I + \left[(k \cdot t)^3 \left(1 - \frac{4}{D+2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k^2 t^2 (k \cdot t) \left(1 - \frac{2}{D+2}\right) \right] \tilde{I}_J + \left[t^2 (k \cdot t)^2 \left(1 - \frac{6}{D+2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + t^4 k^2 \right] \tilde{I}_K \right\} . \end{aligned} \quad (5.160)$$

Por otro lado tenemos que:

$$g^{\mu\nu} \tilde{I}_{\alpha\mu\nu} = \int \frac{d^D w w^2 w_\alpha}{[w^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2][(t-w)^2 - m^2]} = \tilde{K}_\alpha(k-t) + m^2 \tilde{I}_\alpha(k,t) \quad (5.161)$$

$$k^\alpha k^\mu k^\nu \tilde{I}_{\alpha\mu\nu} = \frac{k^\alpha k^\mu}{2} \left[k^2 \tilde{I}_{\alpha\mu} + \tilde{K}^{\alpha\mu}(k-t) - \int \frac{d^D w w_\alpha w_\mu}{[w^2 - m^2][(t-w)^2 - m^2]} \right]. \quad (5.162)$$

Donde

$$\tilde{K}_{\alpha\mu}(t) = \int \frac{d^D w w_\alpha w_\mu}{[w^2 - m^2][(t-w)^2 - m^2]} = a \left(\frac{t_\alpha t_\mu}{t^2} - \frac{1}{D} g_{\alpha\mu} \right) + b g_{\alpha\mu}. \quad (5.163)$$

$$a = \frac{D-2}{2(D-1)} \int \frac{d^D w}{w^2 - m^2} + \frac{t^2 D - 4m^2}{4(D-1)} \int \frac{d^D w}{[w^2 - m^2][(t-w)^2 - m^2]}, \quad (5.164)$$

$$b = \frac{1}{D} \int \frac{d^D w}{(t-w)^2 - m^2} + \frac{m^2}{D} \int \frac{d^D w}{[w^2 - m^2][(t-w)^2 - m^2]}, \quad (5.165)$$

$$T = \int \frac{d^D w}{w^2 - m^2} = \int \frac{d^D w}{(t-w)^2 - m^2} = -i\pi^{D/2} (m^2)^{D/2-1} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right). \quad (5.166)$$

Tenemos

$$\tilde{K}_{\alpha\mu}(k-t) = \int \frac{d^D w w_\alpha w_\mu}{[(k-w)^2 - m^2][(t-w)^2 - m^2]}. \quad (5.167)$$

Sea

$$w = k + w' \quad (5.168)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\alpha\mu}(t) &= \int \frac{d^D w' (w' + k)_\alpha (w' + k)_\mu}{[w'^2 - m^2][(w' + k - t)^2 - m^2]} = \int \frac{d^D w' w'_\alpha w'_\mu}{[w'^2 - m^2][(w' + k - t)^2 - m^2]} \\ &\quad + k_\alpha \int \frac{d^D w' w'_\mu}{[w'^2 - m^2][(w' + k - t)^2 - m^2]} + k_\mu \int \frac{d^D w' w'_\alpha}{[w'^2 - m^2][(w' + k - t)^2 - m^2]} \\ &\quad + k_\alpha k_\mu \int \frac{d^D w'}{[w'^2 - m^2][(w' + k - t)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (5.169)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\alpha\mu}(t) &= a' \left(\frac{(t-k)_\alpha (t-k)_\mu}{(t-k)^2} - \frac{1}{D} g_{\alpha\mu} \right) + b' g_{\alpha\mu} + c k_\alpha (t-k)_\mu + c k_\mu (t-k)_\alpha \\ &\quad + 2c k_\alpha k_\mu \end{aligned} \quad (5.170)$$

$$a' = \frac{D-2}{2(D-1)} \int \frac{d^D w'}{w'^2 - m^2} + \frac{(t-k)^2 D - 4m^2}{4(D-1)} \int \frac{d^D w'}{[w'^2 - m^2][(w' + k - t)^2 - m^2]},$$

$$b' = \frac{1}{D} \int \frac{d^D w'}{(w' + k - t)^2 - m^2} + \frac{m^2}{D} \int \frac{d^D w'}{[w'^2 - m^2][(w' + k - t)^2 - m^2]}, \quad (5.171)$$

$$c = \frac{1}{2} \int \frac{d^D w'}{[w'^2 - m^2][(w' + k - t)^2 - m^2]}. \quad (5.172)$$

Por conveniencia definimos:

$$X_0 = \frac{2}{i\pi^2} X, \quad \text{donde} \quad X = a, b, a', b', c. \quad (5.173)$$

Entonces:

$$k^\alpha g^{\mu\nu} \tilde{I}^{\alpha\mu\nu} = \frac{i\pi^2}{2} \left[(k^2 + k \cdot t) \frac{\tilde{K}_0(k-t)}{2} + m^2(k^2 \tilde{I}_A + (k \cdot t) \tilde{I}_B) \right], \quad (5.174)$$

$$t^\alpha g^{\mu\nu} \tilde{I}^{\alpha\mu\nu} = \frac{i\pi^2}{2} \left[(t^2 + k \cdot t) \frac{\tilde{K}_0(k-t)}{2} + m^2((k \cdot t) \tilde{I}_A + t^2 \tilde{I}_B) \right], \quad (5.175)$$

$$\begin{aligned} k^\alpha k^\mu k^\nu \tilde{I}^{\alpha\mu\nu} = & \frac{i\pi^2}{4} \left\{ k^2 \left[\frac{k^2}{D} (\tilde{K}_0(k-t) + m^2 \tilde{I}_0) + k^4 \left(1 - \frac{1}{D} \right) \tilde{I}_C + 2k^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D} \right) \tilde{I}_D \right. \right. \\ & + \left. \left((k \cdot t)^2 - \frac{k^2 t^2}{D} \right) \tilde{I}_E \right] + a'_0 \left(\frac{(k \cdot t - k^2)^2}{(t-k)^2} - \frac{k^2}{D} \right) + b'_0 k^2 + 2c_0 k^2 k \cdot t \\ & \left. - a_0 \left(\frac{(k \cdot t)^2}{t^2} - \frac{k^2}{D} \right) - b_0 k^2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.176)$$

$$\begin{aligned} t^\alpha t^\mu t^\nu \tilde{I}^{\alpha\mu\nu} = & \frac{i\pi^2}{4} \left\{ t^2 \left[\frac{t^2}{D} (\tilde{K}_0(k-t) + m^2 \tilde{I}_0) + \left((k \cdot t)^2 - \frac{k^2 t^2}{D} \right) \tilde{I}_C + 2t^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D} \right) \tilde{I}_D \right. \right. \\ & + \left. \left. t^4 \left(1 - \frac{1}{D} \right) \tilde{I}_E \right] + a'_0 \left(\frac{(t^2 - k \cdot t)^2}{(t-k)^2} - \frac{t^2}{D} \right) + b'_0 t^2 + 2c_0 t^2 k \cdot t \right. \\ & \left. - a_0 \left(\frac{(k \cdot t)^2}{k^2} - \frac{t^2}{D} \right) - b_0 t^2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.177)$$

$$\begin{aligned} k^\alpha k^\mu t^\nu \tilde{I}^{\alpha\mu\nu} = & \frac{i\pi^2}{4} \left\{ k^2 \left[\frac{k \cdot t}{D} (\tilde{K}_0(k-t) + m^2 \tilde{I}_0) + k^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D} \right) \tilde{I}_C + \left[k^2 t^2 \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. (k \cdot t)^2 \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right] \tilde{I}_D + t^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D} \right) \tilde{I}_E \right] \\ & + a'_0 \left(\frac{(t^2 - k \cdot t)(k \cdot t - k^2)}{(t-k)^2} - \frac{k \cdot t}{D} \right) + b'_0 k \cdot t + c_0(k^2 t^2 + (k \cdot t)^2) \\ & \left. - a_0(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D} \right) - b_0 k \cdot t \right\}, \end{aligned} \quad (5.178)$$

$$\begin{aligned} t^\alpha t^\mu k^\nu \tilde{I}^{\alpha\mu\nu} = & \frac{i\pi^2}{4} \left\{ t^2 \left[\frac{k \cdot t}{D} (\tilde{K}_0(k-t) + m^2 \tilde{I}_0) + k^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D} \right) \tilde{I}_C + \left[k^2 t^2 \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. (k \cdot t)^2 \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right] \tilde{I}_D + t^2(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D} \right) \tilde{I}_E \right] \\ & + a'_0 \left(\frac{(t^2 - k \cdot t)(k \cdot t - k^2)}{(t-k)^2} - \frac{k \cdot t}{D} \right) + b'_0 k \cdot t + c_0(k^2 t^2 + (k \cdot t)^2) \\ & \left. - a_0(k \cdot t) \left(1 - \frac{1}{D} \right) - b_0 k \cdot t \right\}. \end{aligned} \quad (5.179)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para $\tilde{I}_F$, $\tilde{I}_G$, $\tilde{I}_H$, $\tilde{I}_I$, $\tilde{I}_J$ y $\tilde{I}_K$ obtenemos:

$$\tilde{I}_F(k, t) = \frac{1}{2k^2} [\tilde{K}_0(k - t) + 2m^2 \tilde{I}_A(k, t)] , \quad (5.180)$$

$$\tilde{I}_G(k, t) = \tilde{I}_F(t, k) , \quad (5.181)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_H(k, t) = & \frac{1}{2(D-2)\Delta^6} \left\{ -\frac{2(D-2)\Delta^4}{k^2} [m^2 ((k \cdot t)^2 - k^2 t^2)] \tilde{I}_A \right. \\
& - \frac{\Delta^4}{k^2} [4(k \cdot t)m^2 t^2] \tilde{I}_B + [t^2 ((D^2 + D - 2)k^2 + (D - 2)Dk \cdot t)(k \cdot t)^4 \\
& + 2k^2(3k \cdot t + 2(D - 1)(Dk^2 + k^2 - Dk \cdot t))t^2(k \cdot t)^2 - k^4(2k \cdot t \\
& + (D + 2)((D - 1)k^2 + Dk \cdot t)t^4)] \frac{\tilde{I}_C}{D} + [t^2 ((D^2 - 4)(k \cdot t)^5 \\
& - ((-4D^2 + 2D + 8)k^2 + 3(D^2 - 4)k \cdot t)t^2(k \cdot t)^3 + k^2((D(3D + 2) + 4)k^2 \\
& + 2(-2D^2 + D - 2)k \cdot t)t^4 k \cdot t - D(D + 2)k^4 t^6)] \frac{\tilde{I}_D}{D} + [t^4 ((D - 2)(k \cdot t)^4 \\
& - 2((-2D^2 + D + 2)k^2 + (2D^2 + D - 3)k \cdot t)t^2(k \cdot t)^2 + k^2((D + 2)k^2 \\
& + 2(D - 1)k \cdot t)t^4)] \frac{\tilde{I}_E}{D} - [(D - 2)D(k \cdot t)^6 + ((-3D^2 + D - 2)k^2 \\
& + 2Dk \cdot t)t^2(k \cdot t)^4 + k^2((D(3D - 2) - 4)k^2 + 6k \cdot t)t^4(k \cdot t)^2 \\
& - (D - 1)k^4((D + 2)k^2 - 2k \cdot t)t^6] \frac{\tilde{K}_0(k - t)}{k^2 D} - [k \cdot t(-k^2(k \cdot t)^4 \\
& + (k \cdot t - 2k^2)^2 t^2(k \cdot t)^2 + k^2(3k^2 - 4k \cdot t)t^6 + k^2(k^4 - 8k \cdot t k^2 \\
& + 8(k \cdot t)^2)t^4)D^2 + ((k \cdot t)^2 - k^2 t^2)^2(-t^4 - k^2 t^2 + 2k^2 k \cdot t)D \\
& + 2t^2(k^2 - 2k \cdot t + t^2)((k \cdot t)^4 + k^2(2t^2 - 3k \cdot t)(k \cdot t)^2 + k^4(k \cdot t - t^2)t^2)] \\
& \frac{a'_0}{Dk^2(t - k)^2} - [t^2(((4D + 6)k^2 - (D + 2)k \cdot t)(k \cdot t)^3 - 2k^2(k^2 \\
& + 2(D + 1)k \cdot t)t^2 k \cdot t + (D + 2)k^4 t^4)] \frac{b'_0}{k^2} - [t^2(((3D + 8)k^2 \\
& - (D + 2)k \cdot t)(k \cdot t)^4 - 2k^2(-2Dk^2 + k^2 + (2D + 3)k \cdot t)t^2(k \cdot t)^2 \\
& + k^4((D + 2)k^2 - 3Dk \cdot t)t^4)] \frac{c_0}{k^2} - [(D - 2)D(k \cdot t)^5 + ((6 - 4(D - 1)D)k^2 \\
& + (D - 2)k \cdot t)t^2(k \cdot t)^3 - k^2((D(D + 2) + 2)k^2 + 2(-2D^2 + D \\
& + 2)k \cdot t)t^4 k \cdot t + (D + 2)k^4 t^6] \frac{a_0}{Dk^2} - [t^2(((D + 2)k \cdot t - 2(2D + 3)k^2)(k \cdot t)^3 \\
& + 2k^2(k^2 + 2(D + 1)k \cdot t)t^2 k \cdot t - (D + 2)k^4 t^4)] \frac{b_0}{k^2} + [m^2 t^2((D + 2)(k \cdot t)^4 \\
& - 2((2D + 3)k \cdot t - 2(D + 1)k^2)t^2(k \cdot t)^2 - k^2((D + 2)k^2 - 2k \cdot t)t^4)] \frac{\tilde{I}_0}{D} \Big\} \\
& (5.182)
\end{aligned}$$

$$\tilde{I}_I(k, t) = \tilde{I}_H(t, k) , \quad (5.183)$$

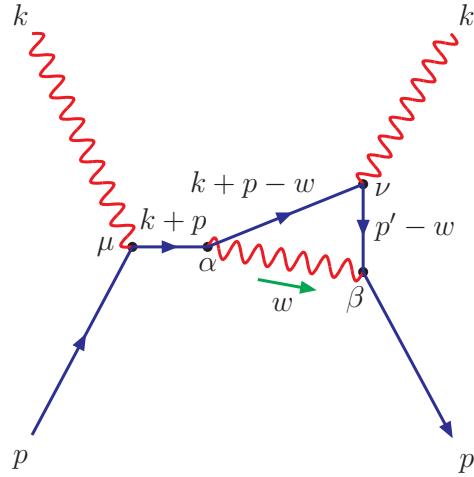
$$\begin{aligned}
\tilde{I}_J(k, t) = & \frac{1}{2(D-2)\Delta^6} \left\{ -\Delta^4 [4k \cdot t m^2] \tilde{I}_A + [2\Delta^4 m^2 t^2] \tilde{I}_B + [k^2 t^2 ((D-2)k \cdot t \right. \\
& - 2(D^2 + D - 2)k^2)(k \cdot t)^3 + (D-1)k^2(2k^2 + 2Dk \cdot t + k \cdot t)t^2 k \cdot t \\
& + k^4 t^4] \frac{\tilde{I}_C}{D} + [t^2 ((D^2 - 4)(k \cdot t)^5 - (D+2)k^2(2(D-2)k \cdot t - Dt^2 \\
& + t^2)(k \cdot t)^3 - k^4 t^2 ((D^2 + D + 4)k \cdot t + (-2D^2 + D - 2)t^2)k \cdot t \\
& - (D-1)Dk^6 t^4) \frac{\tilde{I}_D}{D} + [t^4 ((D^2 + D - 2)(k \cdot t)^4 + k^2((D^2 - 1)t^2 \\
& - (D^2 + D - 4)k \cdot t)(k \cdot t)^2 + k^4 t^2 ((-D^2 + D - 2)k \cdot t - Dt^2 + t^2))] \frac{\tilde{I}_E}{D} \\
& + [-2D(k \cdot t)^5 + 2((D-2)k^2 + Dk \cdot t + k \cdot t)t^2(k \cdot t)^3 \\
& - (D-1)k^2(2k^2 + k \cdot t)t^4 k \cdot t + (D-1)k^4 t^6] \frac{\tilde{K}_0(k \cdot t)}{D} + [(D-2)(k^2 \\
& - (D+2)k \cdot t)(k \cdot t)^4 + ((D-1)(2D+1)k^4 - 3(D^2 + D - 2)k \cdot t k^2 \\
& + (D+2)(3D-5)(k \cdot t)^2)t^2(k \cdot t)^2 + k^2(k^2(D-1)^2 + (-D^2 + D \\
& - 2)k \cdot t)t^6 + (k^6 - (D(2D-3) + 4)k \cdot t k^4 + (2D^2 + D + 3)(k \cdot t)^2 k^2 \\
& - (D^2 + D - 4)k \cdot t^3)t^4] \frac{a'_0}{D(t-k)^2} + [((D+2)(k \cdot t)^2 - k^2 t^2)((k \cdot t)^2 \\
& - 2t^2 k \cdot t + k^2 t^2)] b'_0 - [- (D+2)(k \cdot t)^5 + (2(D+2)k \cdot t \\
& - (D+3)k^2)t^2(k \cdot t)^3 + k^2(-2Dk^2 + k^2 + Dk \cdot t + k \cdot t)t^4 k \cdot t + (D-1)k^4 t^6] c_0 \\
& - [(D-2)(k \cdot t)^4 - ((-2D^2 + D + 1)k^2 + (D^2 + D - 4)k \cdot t)t^2(k \cdot t)^2 \\
& + k^2(k^2 + (-D^2 + D - 2)k \cdot t)t^4] \frac{a_0}{D} - [((D+2)(k \cdot t)^2 - k^2 t^2)((k \cdot t)^2 \\
& - 2t^2 k \cdot t + k^2 t^2)] b_0 + [m^2 t^2 ((D+2)(k \cdot t)^2 - k^2 t^2)((k \cdot t)^2 \\
& + k^2(t^2 - 2k \cdot t))] \frac{\tilde{I}_0}{D} \Big\} , \tag{5.184}
\end{aligned}$$

$$\tilde{I}_K(k, t) = \tilde{I}_J(t, k) . \tag{5.185}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Gamma_{D_{22}}^{\mu\nu} = & \frac{-ie^2}{2(2\pi)^D} \left\{ -\frac{(p+p') \cdot (k+k')}{(k+k')^2} \left[k^\mu (2k+k')^\nu \tilde{I}(k, k+k') - 2k^\mu \tilde{I}^\nu(k, k+k') \right. \right. \\
& - (4k+2k')^\nu \tilde{I}^\mu(k, k+k') + 4\tilde{I}^{\mu\nu}(k, k+k') \left. \right] \\
& - \frac{(p+p')^\alpha}{(k+k')^2} \left[-2k^\mu (2k+k')^\nu \tilde{I}^\alpha(k, k+k') + 4k^\mu \tilde{I}^{\alpha\nu}(k, k+k') \right. \\
& + 4(2k+k')^\nu \tilde{I}^{\alpha\mu}(k, k+k') - 8\tilde{I}^{\alpha\mu\nu}(k, k+k') \left. \right] + (1-\xi) \frac{(p+p') \cdot (k+k')}{(k+k')^4} \left[\right. \\
& (k+k')^2 k^\mu (2k+k')^\nu \tilde{I}(k, k+k') - 2(k+k')_\alpha k^\mu (2k+k')^\nu \tilde{I}^\alpha(k, k+k') \\
& - 2(k+k')^2 k^\mu \tilde{I}^\nu(k, k+k') - 2(k+k')^2 (2k+k')^\nu \tilde{I}^\mu(k, k+k') \\
& + 4(k+k')_\alpha k^\mu \tilde{I}^{\alpha\nu}(k, k+k') + 4(k+k')_\alpha (2k+k')^\nu \tilde{I}^{\alpha\mu}(k, k+k') \\
& \left. \left. + 4(k+k')^2 \tilde{I}^{\mu\nu}(k, k+k') - 8(k+k')_\alpha \tilde{I}^{\alpha\mu\nu}(k, k+k') \right] \right\} \quad (5.186)
\end{aligned}$$

5.26. Diagrama 23



Aplicamos reglas de Feynman y tenemos:

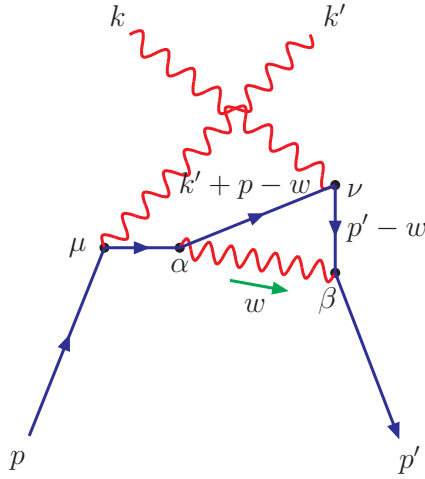
$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu\nu} = & -\frac{ie^2}{2(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2k+2p-w)^\alpha (2p'-w)^\beta (2p+k)^\mu (k+p'+p-2w)^\nu}{(p'-w)^2 - m^2} \times \\
& \left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{w^2} + (1-\xi) \frac{w^\alpha w^\beta}{w^4} \right] \quad (5.187)
\end{aligned}$$

Simplificando tenemos que las integrales que necesitamos calcular son de la forma:
 $K(p')$, $K(q)$, $K^\nu(p')$, $K^\nu(q)$, $\tilde{K}(p'-q)$, $\tilde{K}^\nu(p'-q)$, $I(p', q)$, $I^\nu(p', q)$, $L(p')$, $L(q)$, $L^\nu(p')$,

$L^\nu(q), J(p', q), J^\nu(p', q)$ Por lo tanto

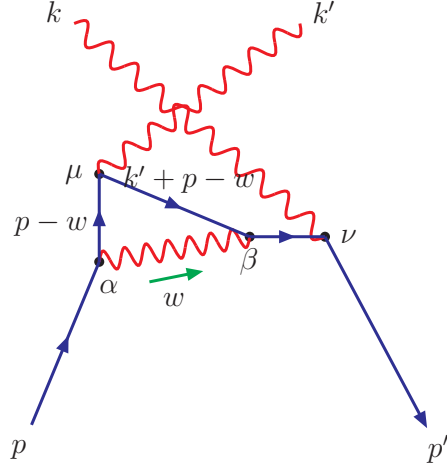
$$\begin{aligned}
\Gamma_{D_{23}}^{\mu\nu} = & \frac{ie^2}{2(2\pi)^D} \left\{ (p+q)^\mu (p'+q)^\nu \left[\left(\frac{4p' \cdot q}{q^2 - m^2} + \frac{m^2 - p'^2}{q^2 - m^2} - 1 \right) I(p', q) - \frac{\tilde{K}(p' - q)}{q^2 - m^2} \right. \right. \\
& + \frac{K(p')}{q^2 - m^2} + \frac{K(q)}{q^2 - m^2} \left. \right] - 2(p+q)^\mu \left[\left(\frac{4p' \cdot q}{q^2 - m^2} + \frac{m^2 - p'^2}{q^2 - m^2} - 1 \right) I^\nu(p', q) \right. \\
& - \frac{p'^\nu + q^\nu}{2(q^2 - m^2)} \tilde{K}(p' - q) + \frac{K^\nu(p')}{q^2 - m^2} + \frac{K^\nu(q)}{q^2 - m^2} \left. \right] \\
& - (1 - \xi) \left[(p+q)^\mu (p'+q)^\nu \left[(p'^2 - m^2) J(p', q) - L(q) - \frac{p'^2 - m^2}{q^2 - m^2} L(p') \right] \right. \\
& \left. \left. - 2(p+q)^\mu \left[(p'^2 - m^2) J^\nu(p', q) - L^\nu(q) - \frac{p'^2 - m^2}{q^2 - m^2} L^\nu(p') \right] \right] \right\} \quad (5.188)
\end{aligned}$$

5.27. Diagrama 24



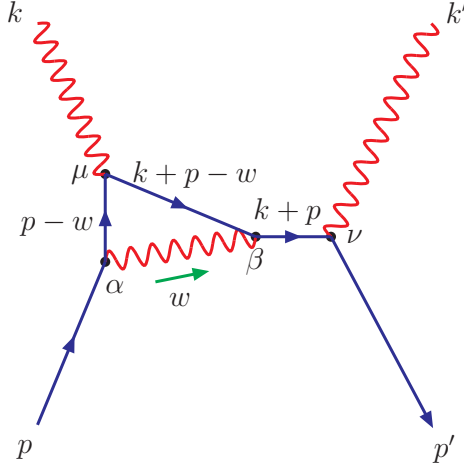
$$\begin{aligned}
\Gamma_{D_{24}}^{\mu\nu} = & \frac{ie^2}{2(2\pi)^D} \left\{ (p+q')^\mu (p'+q')^\nu \left[\left(\frac{4p' \cdot q'}{q'^2 - m^2} + \frac{m^2 - p'^2}{q'^2 - m^2} - 1 \right) I(p', q') - \frac{\tilde{K}(p' - q')}{q'^2 - m^2} \right. \right. \\
& + \frac{K(p')}{q'^2 - m^2} + \frac{K(q')}{q'^2 - m^2} \left. \right] - 2(p+q')^\mu \left[\left(\frac{4p' \cdot q'}{q'^2 - m^2} + \frac{m^2 - p'^2}{q'^2 - m^2} - 1 \right) I^\nu(p', q') \right. \\
& - \frac{p'^\nu + q'^\nu}{2(q'^2 - m^2)} \tilde{K}(p' - q') + \frac{K^\nu(p')}{q'^2 - m^2} + \frac{K^\nu(q')}{q'^2 - m^2} \left. \right] \\
& - (1 - \xi) \left[(p+q')^\mu (p'+q')^\nu \left[(p'^2 - m^2) J(p', q') - L(q') - \frac{p'^2 - m^2}{q'^2 - m^2} L(p') \right] \right. \\
& \left. \left. - 2(p+q')^\mu \left[(p'^2 - m^2) J^\nu(p', q') - L^\nu(q') - \frac{p'^2 - m^2}{q'^2 - m^2} L^\nu(p') \right] \right] \right\} \quad (5.189)
\end{aligned}$$

5.28. Diagrama 25



$$\begin{aligned}
 \Gamma_{D_{25}}^{\mu\nu} = & \frac{ie^2}{2(2\pi)^D} \left\{ (p+q')^\mu (p'+q')^\nu \left[\left(\frac{4p \cdot q'}{q'^2 - m^2} + \frac{m^2 - p^2}{q'^2 - m^2} - 1 \right) I(p, q') - \frac{\tilde{K}(p - q')}{q'^2 - m^2} \right. \right. \\
 & + \frac{K(p)}{q'^2 - m^2} + \frac{K(q')}{q'^2 - m^2} \left. \right] - 2(p' + q')^\nu \left[\left(\frac{4p \cdot q'}{q'^2 - m^2} + \frac{m^2 - p^2}{q'^2 - m^2} - 1 \right) I^\mu(p, q') \right. \\
 & - \frac{p^\mu + q'^\mu}{2(q'^2 - m^2)} \tilde{K}(p - q') + \frac{K^\mu(p)}{q'^2 - m^2} + \frac{K^\mu(q')}{q'^2 - m^2} \left. \right] \\
 & - (1 - \xi) \left[(p + q')^\mu (p' + q')^\nu \left[(p^2 - m^2) J(p, q') - L(q') - \frac{p^2 - m^2}{q'^2 - m^2} L(p) \right] \right. \\
 & \left. \left. - 2(p' + q')^\nu \left[(p^2 - m^2) J^\mu(p, q') - L^\mu(q') - \frac{p^2 - m^2}{q'^2 - m^2} L^\mu(p) \right] \right] \right\} \quad (5.190)
 \end{aligned}$$

5.29. Diagrama 26



Aplicando reglas de Feynman obtenemos:

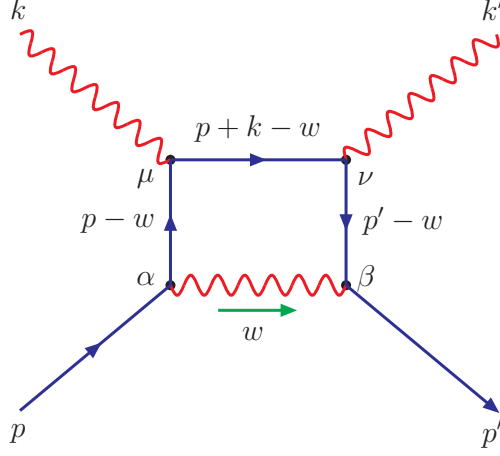
$$\Gamma^{\mu\nu} = -\frac{ie^2}{2(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2p-w)^\alpha (2k+2p-w)^\beta (2p+k-2w)^\mu (k+p+p')^\nu}{[(k+p-w)^2 - m^2][(p-w)^2 - m^2][(k+p)^2 - m^2]} \times \left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{w^2} + (1-\xi) \frac{w^\alpha w^\beta}{w^4} \right] \quad (5.191)$$

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{2(2\pi)^D} \left\{ \int d^D w \frac{(p+q-2w)^\mu (p'+q)^\nu [(2p-w) \cdot (2q-w)]}{w^2 (q^2 - m^2) [(q-w)^2 - m^2] [(p-w)^2 - m^2]} - (1-\xi) \int d^D w \frac{(p+q-2w)^\mu (p'+q)^\nu [w \cdot (2p-w)][w \cdot (2q-w)]}{w^4 (q^2 - m^2) [(q-w)^2 - m^2] [(p-w)^2 - m^2]} \right\} \quad (5.192)$$

Simplificando tenemos que:

$$\begin{aligned} \Gamma_{D_{26}}^{\mu\nu} = & \frac{ie^2}{2(2\pi)^D} \left\{ (p+q)^\mu (p'+q)^\nu \left[\left(\frac{4p \cdot q}{q^2 - m^2} + \frac{m^2 - p^2}{q^2 - m^2} - 1 \right) I(p, q) - \frac{\tilde{K}(p-q)}{q^2 - m^2} \right. \right. \\ & + \frac{K(p)}{q^2 - m^2} + \frac{K(q)}{q^2 - m^2} \left. \right] - 2(p'+q)^\nu \left[\left(\frac{4p \cdot q}{q^2 - m^2} + \frac{m^2 - p^2}{q^2 - m^2} - 1 \right) I^\mu(p, q) \right. \\ & - \frac{p^\mu + q^\mu}{2(q^2 - m^2)} \tilde{K}(p-q) + \frac{K^\mu(p)}{q^2 - m^2} + \frac{K^\mu(q)}{q^2 - m^2} \left. \right] \\ & - (1-\xi) \left[(p+q)^\mu (p'+q)^\nu \left[(p^2 - m^2) J(p, q) - L(q) - \frac{p^2 - m^2}{q^2 - m^2} L(p) \right] \right. \\ & \left. \left. - 2(p'+q)^\nu \left[(p^2 - m^2) J^\mu(p, q) - L^\mu(q) - \frac{p^2 - m^2}{q^2 - m^2} L^\mu(p) \right] \right] \right\} \quad (5.193) \end{aligned}$$

5.30. Diagrama 27



Aplicando reglas de Feynman obtenemos:

$$\Gamma^{\mu\nu} = -\frac{ie^2}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2p-w)^\alpha (2p'-w)^\beta (p+q-2w)^\mu (p'+q-2w)^\nu}{[(p-w)^2 - m^2][(p'-w)^2 - m^2][(q-w)^2 - m^2]} \times \left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{w^2} + (1-\xi) \frac{w^\alpha w^\beta}{w^4} \right] \quad (5.194)$$

Las integrales que necesitamos calcular son de la forma ($\xi = 1$):

$I(p, q), I(p', q), I^\mu(p, q), I^\mu(p', q), I^{\mu\nu}(p, q), I^{\mu\nu}(p', q),$

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(p-w)^2 - m^2][(p'-w)^2 - m^2][(q-w)^2 - m^2]}, \\ & \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{w^\mu}{[(p-w)^2 - m^2][(p'-w)^2 - m^2][(q-w)^2 - m^2]}, \\ & \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{w^\mu w^\nu}{[(p-w)^2 - m^2][(p'-w)^2 - m^2][(q-w)^2 - m^2]}, \end{aligned} \quad (5.195)$$

$$\begin{aligned} U(p, q, p') &= \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{1}{w^2 [(p-w)^2 - m^2][(q-w)^2 - m^2][(p'-w)^2 - m^2]}, \\ U^\mu(p, q, p') &= \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{w^\mu}{w^2 [(p-w)^2 - m^2][(q-w)^2 - m^2][(p'-w)^2 - m^2]}, \\ U^{\mu\nu}(p, q, p') &= \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{w^\mu w^\nu}{w^2 [(p-w)^2 - m^2][(q-w)^2 - m^2][(p'-w)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (5.196)$$

Cuando $\xi \neq 1$ adicionalmente tenemos: $L(q), L^\mu(q), L^{\mu\nu}(q), J(p, q), J(p', q), J^\mu(p, q), J^\mu(p', q), J^{\mu\nu}(p, q), J^{\mu\nu}(p', q)$,

$$\begin{aligned} V(p, q, p') &= \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{1}{w^4 [(p-w)^2 - m^2] [(q-w)^2 - m^2] [(p'-w)^2 - m^2]} , \\ V^\mu(p, q, p') &= \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{w^\mu}{w^4 [(p-w)^2 - m^2] [(q-w)^2 - m^2] [(p'-w)^2 - m^2]} , \\ V^{\mu\nu}(p, q, p') &= \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{w^\mu w^\nu}{w^4 [(p-w)^2 - m^2] [(q-w)^2 - m^2] [(p'-w)^2 - m^2]} . \end{aligned} \quad (5.197)$$

Vamos a resolver

$$\int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(p-w)^2 - m^2] [(p'-w)^2 - m^2] [(q-w)^2 - m^2]} \quad (5.198)$$

Sea $w' = w - p \Rightarrow w = w' + p$. Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{I}(k, p' - p) &= \tilde{I}(q - p, p' - p) = \\ &= \int \frac{d^D w'}{(2\pi)^D} \frac{1}{[w'^2 - m^2] [(k - w')^2 - m^2] [(p' - p - w')^2 - m^2]} . \end{aligned} \quad (5.199)$$

De la misma manera tenemos que:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{w^\mu}{[(p-w)^2 - m^2] [(p'-w)^2 - m^2] [(q-w)^2 - m^2]} = \\ p^\mu \tilde{I}(q - p, p' - p) + \tilde{I}^\mu(q - p, p' - p) \end{aligned} \quad (5.200)$$

donde

$$\tilde{I}^\mu(q - p, p' - p) = \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{w^\mu}{[w^2 - m^2] [(k - w)^2 - m^2] [(p' - p - w)^2 - m^2]} . \quad (5.201)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{w^\mu w^\nu}{[(p-w)^2 - m^2] [(p'-w)^2 - m^2] [(q-w)^2 - m^2]} = \\ p^\mu p^\nu \tilde{I}(q - p, p' - p) + p^\mu \tilde{I}^\nu(q - p, p' - p) + p^\nu \tilde{I}^\mu(q - p, p' - p) + \tilde{I}^{\mu\nu}(q - p, p' - p) \end{aligned} \quad (5.202)$$

donde

$$\tilde{I}^{\mu\nu}(q - p, p' - p) = \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{w^\mu w^\nu}{[w^2 - m^2] [(k - w)^2 - m^2] [(p' - p - w)^2 - m^2]} . \quad (5.203)$$

5.30.1. La Integral Escalar $U(p, q, p')$

Tenemos que la integral escalar $U(p, q, p')$ es:

$$U(p, q, p') = \int \frac{d^D w}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(q-w)^2 - m^2][(p'-w)^2 - m^2]} \quad (5.204)$$

Hemos calculado

$$J_{\square}^{(3)} = \int \frac{d^D w}{[(p'-w)^2 - m^2]^{\nu_1} [w^2 - m^2]^{\nu_2} [(p-w)^2 - m^2]^{\nu_3} [(q-w)^2 - m^2]^{\nu_4}} \quad (5.205)$$

Sea $w' = q - w \Rightarrow w = q - w'$. Entonces

$$J_{\square}^{(3)} = \frac{d^D w'}{[(q-p'-w')^2 - m^2]^{\nu_1} [(q-w')^2 - m^2]^{\nu_2} [(k-w')^2 - m^2]^{\nu_3} [w'^2]^{\nu_4}} \quad (5.206)$$

Sea $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 1$

$$U(p, q, p') = (-1)^{D/2} (-m^2)^{D/2-4} \frac{\Gamma(\frac{D}{2}-1) \Gamma(4-\frac{D}{2})}{2\Gamma(\frac{D}{2})} \times \\ \mathcal{Y}_3 \left[4 - \frac{D}{2}, 1, 1, 1, 1, \frac{D}{2} - 1 \mid \frac{p^2}{m^2}, \frac{q^2}{m^2}, \frac{p'^2}{m^2}, \frac{(q-p)^2}{m^2}, \frac{(q-p')^2}{m^2}, \frac{(p-p')^2}{m^2} \right]. \quad (5.207)$$

5.30.2. La Integral Tensorial $U^\mu(p, q, p')$

Tenemos

$$U^\mu(p, q, p') = \int \frac{d^D w w^\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(q-w)^2 - m^2][(p'-w)^2 - m^2]}. \quad (5.208)$$

U_μ puede depender únicamente de los momentos p_μ , q_μ y p'_μ . Tal que,

$$U_\mu = \frac{i\pi^2}{2} [p_\mu U_A(p, q, p') + q_\mu U_B(p, q, p') + p'_\mu U_C(p, q, p')] \quad (5.209)$$

donde $U_A(p, q, p')$, $U_B(p, q, p)$ y $U_C(p, q, p)$ necesitan ser funciones escalares de p , q y p' . Formamos los siguientes productos escalares

$$\begin{aligned} p^\mu U_\mu &= \frac{i\pi^2}{2} [p^2 U_A(p, q, p') + p \cdot q U_B(p, q, p') + p \cdot p' U_C(p, q, p')] \\ q^\mu U_\mu &= \frac{i\pi^2}{2} [p \cdot q U_A(p, q, p') + q^2 U_B(p, q, p') + p' \cdot q U_C(p, q, p')] \\ p'^\mu U_\mu &= \frac{i\pi^2}{2} [p \cdot p' U_A(p, q, p') + p' \cdot q U_B(p, q, p') + p'^2 U_C(p, q, p')] \end{aligned} \quad (5.210)$$

Hacemos las siguientes contracciones:

$$\begin{aligned}
p_\mu U_\mu &= \frac{1}{2}(p^2 - m^2)U(p, q, p') + \frac{1}{2}\tilde{I}(q - p, p' - p) - \frac{1}{2}I(p', q) \\
q_\mu U_\mu &= \frac{1}{2}(q^2 - m^2)U(p, q, p') + \frac{1}{2}\tilde{I}(q - p, p' - p) - \frac{1}{2}I(p, p') \\
p'_\mu U_\mu &= \frac{1}{2}(p'^2 - m^2)U(p, q, p') + \frac{1}{2}\tilde{I}(q - p, p' - p) - \frac{1}{2}I(p, q)
\end{aligned} \tag{5.211}$$

Donde se satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
U_A(p, q, p') &= U_B(q, p, p') \\
U_C(p, q, p') &= U_C(q, p, p') \\
U_A(p, q, p') &= U_C(p', q, p) \\
U_B(p, q, p') &= U_B(p', q, p) \\
U_A(p, q, p') &= U_A(p, p', q) \\
U_B(p, q, p') &= U_C(p, p', q)
\end{aligned} \tag{5.212}$$

Resolviendo para $U_A(p, q, p')$, $U_B(p, q, p')$ y $U_C(p, q, p')$ obtenemos

$$\begin{aligned}
U_A(p, q, p') &= \frac{1}{2[p'^2(p \cdot q)^2 - 2(p \cdot q)(p \cdot p')(p' \cdot q) + q^2(p \cdot p')^2 + p^2((p' \cdot q)^2 - p'^2 q^2)]} \times \\
&\{ [(p \cdot p')(p' \cdot q) - p'^2(p \cdot q)]I_0(p, p') + [p'^2 q^2 - (p' \cdot q)^2]I_0(p', q) \\
&+ [(p \cdot q)(p' \cdot q) - q^2(p \cdot p')]I_0(p, q) + [p'^2(p \cdot q) - p'^2 q^2 + q^2(p \cdot p') \\
&- (p \cdot q + p \cdot p')p' \cdot q + (p' \cdot q)^2]\tilde{I}_0 + [p'^2 q^2(-p^2 + p \cdot q + p \cdot p') \\
&- p' \cdot q(p'^2(p \cdot q) + q^2(p \cdot p')) + p^2(p' \cdot q)^2 + m^2(-p'^2(p \cdot q) + p'^2 q^2 \\
&- q^2(p \cdot p') + p' \cdot q(p \cdot q + p \cdot p') - (p' \cdot q)^2)]U_0 \} ,
\end{aligned} \tag{5.213}$$

$$U_B(p, q, p') = U_C(p, p', q) , \tag{5.214}$$

$$\begin{aligned}
U_C(p, q, p') &= \frac{1}{2[p'^2(p \cdot q)^2 - 2(p \cdot q)(p \cdot p')(p' \cdot q) + q^2(p \cdot p')^2 + p^2((p' \cdot q)^2 - p'^2 q^2)]} \times \\
&\{ [(p \cdot p')(p \cdot q) - p^2(p' \cdot q)]I_0(p, p') + [(p \cdot q)(p' \cdot q) - q^2(p \cdot p')]I_0(p', q) \\
&+ [(p \cdot q)^2 - p^2 q^2]I_0(p, q) + [(p \cdot q)^2 + q^2(p \cdot p') + p^2(-q^2 + p' \cdot q) \\
&- (p \cdot p' + p' \cdot q)p \cdot q]\tilde{I}_0 - [-p'^2(p \cdot q)^2 + p^2 q^2(p'^2 - p \cdot p' - p' \cdot q) \\
&+ p \cdot q(q^2(p \cdot p') + p^2(p' \cdot q)) + m^2((p \cdot q)^2 - p^2 q^2 + q^2(p \cdot p') + p^2(p' \cdot q) \\
&- p \cdot q(p' \cdot q + p \cdot p'))]U_0 \} ,
\end{aligned} \tag{5.215}$$

donde

$$\tilde{I}_0 = \frac{2}{i\pi^2}\tilde{I} , \quad I_0 = \frac{2}{i\pi^2}I , \quad U_0 = \frac{2}{i\pi^2}U . \tag{5.216}$$

5.30.3. La Integral Tensorial $U^{\mu\nu}(p, q, p')$

La integral tensorial $U^{\mu\nu}$ puede ser expresada en términos de las integrales escalares $\tilde{I}_0, U_D, U_E, U_F, U_G, U_H$ y U_I como

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu} = & \frac{i\pi^2}{2} \left[\frac{g_{\mu\nu}}{D} \tilde{I}_0 + \left(p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} \frac{p^2}{D} \right) U_D + \left(p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} \frac{2(p \cdot q)}{D} \right) U_E \right. \\ & + \left(p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} \frac{2(p \cdot p')}{D} \right) U_F + \left(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} \frac{q^2}{D} \right) U_G \\ & \left. + \left(q_\mu p'_\nu + p'_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} \frac{2(p' \cdot q)}{D} \right) U_H + \left(p'_\mu p'_\nu - g_{\mu\nu} \frac{p'^2}{D} \right) U_I \right]. \end{aligned} \quad (5.217)$$

Hacemos las siguientes contracciones:

$$\begin{aligned} p^\mu p^\nu U_{\mu\nu} = & \frac{i\pi^2}{2} \left[\frac{p^2}{D} \tilde{I}_0 + p^4 \left(1 - \frac{1}{D} \right) U_D + 2p^2(p \cdot q) \left(1 - \frac{1}{D} \right) U_E \right. \\ & + 2p^2(p \cdot p') \left(1 - \frac{1}{D} \right) U_F + \left((p \cdot q)^2 - \frac{p^2 q^2}{D} \right) U_G \\ & + 2 \left((p \cdot q)(p \cdot p') - \frac{p^2(p' \cdot q)}{D} \right) U_H + \left. \left((p \cdot p')^2 - \frac{p^2 p'^2}{D} \right) U_I \right], \\ q^\mu q^\nu U_{\mu\nu} = & \frac{i\pi^2}{2} \left[\frac{q^2}{D} \tilde{I}_0 + \left((p \cdot q)^2 - \frac{p^2 q^2}{D} \right) U_D + 2q^2(p \cdot q) \left(1 - \frac{1}{D} \right) U_E \right. \\ & + 2 \left((p \cdot q)(p' \cdot q) - \frac{q^2(p \cdot p')}{D} \right) U_F + q^4 \left(1 - \frac{1}{D} \right) U_G \\ & + 2q^2(p' \cdot q) \left(1 - \frac{1}{D} \right) U_H + \left. \left((p' \cdot q)^2 - \frac{p'^2 q^2}{D} \right) U_I \right], \end{aligned} \quad (5.218)$$

$$\begin{aligned} p'^\mu p'^\nu U_{\mu\nu} = & \frac{i\pi^2}{2} \left[\frac{p'^2}{D} \tilde{I}_0 + \left((p \cdot p')^2 - \frac{p^2 p'^2}{D} \right) U_D + 2 \left((p' \cdot p)(p' \cdot q) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{p'^2(p \cdot q)}{D} \right) U_E + 2p'^2(p \cdot p') \left(1 - \frac{1}{D} \right) U_F + q^4 \left(1 - \frac{1}{D} \right) U_G \right. \\ & \left. + 2q^2(p' \cdot q) \left(1 - \frac{1}{D} \right) U_H + \left((p' \cdot q)^2 - \frac{p'^2 q^2}{D} \right) U_I \right], \end{aligned} \quad (5.219)$$

$$\begin{aligned} p^\mu q^\nu U_{\mu\nu} + q^\mu p^\nu U_{\mu\nu} = & i\pi^2 \left[\frac{p \cdot q}{D} \tilde{I}_0 + p^2(p \cdot q) \left(1 - \frac{1}{D} \right) U_D + \left(p^2 q^2 + (p \cdot q)^2 \times \right. \right. \\ & \left. \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) U_E + \left(p^2(p' \cdot q) + (p \cdot p')(p \cdot q) \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) U_F \\ & + q^2(p \cdot q) \left(1 - \frac{1}{D} \right) U_G + \left(q^2(p \cdot p') + (p' \cdot q)(p \cdot q) \times \right. \\ & \left. \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) U_H + \left. \left((p \cdot p')(p' \cdot q) - \frac{p'^2(p \cdot q)}{D} \right) U_I \right], \end{aligned} \quad (5.220)$$

$$\begin{aligned}
p^\mu p'^\nu U_{\mu\nu} + p'^\mu p^\nu U_{\mu\nu} &= i\pi^2 \left[\frac{p \cdot p'}{D} \tilde{I}_0 + p^2(p \cdot p') \left(1 - \frac{1}{D} \right) U_D + \left(p^2(p' \cdot q) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (p \cdot p')(p \cdot q) \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) U_E + \left(p^2 p'^2 + (p \cdot p')^2 \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) U_F \right. \\
&\quad \left. + \left((p \cdot q)(p' \cdot q) - \frac{q^2}{D}(p \cdot p') \right) U_G + \left(p'^2(p \cdot q) + (p' \cdot p)(p' \cdot q) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) U_H + p'^2(p \cdot p') \left(1 - \frac{1}{D} \right) U_I \right], \tag{5.221}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q^\mu p'^\nu U_{\mu\nu} + p'^\mu q^\nu U_{\mu\nu} &= i\pi^2 \left[\frac{p' \cdot q}{D} \tilde{I}_0 + \left((p \cdot p')(p \cdot q) - \frac{p^2}{D}(p' \cdot q) \right) U_D + \left(q^2(p \cdot p') \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (p' \cdot q)(p \cdot q) \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) U_E + \left(p'^2(p \cdot q) + (p \cdot p')(p' \cdot q) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) U_F + q^2(p' \cdot q) \left(1 - \frac{1}{D} \right) U_G + \left(p'^2 q^2 + (p' \cdot q)^2 \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) U_H + p'^2(p' \cdot q) \left(1 - \frac{1}{D} \right) U_I \right]. \tag{5.222}
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
p^\mu p^\nu U_{\mu\nu} &= p^\mu \int d^D w \frac{p \cdot w w_\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(q-w)^2 - m^2][(p'-w)^2 - m^2]} \\
&= p^\mu \left[\frac{1}{2}(p^2 - m^2)U_\mu(p, q, p') + \frac{1}{2}\tilde{I}_\mu(q - p, p' - p) + \frac{p_\mu}{2}\tilde{I}(q - p, p' - p) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}I_\mu(p', q) \right]. \tag{5.223}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
p^\mu p^\nu U_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(p^2 - m^2)(p^2 U_A(p, q, p') + (p \cdot q)U_B(p, q, p') + (p \cdot p')U_C(p, q, p')) \\
&\quad + (q \cdot p - p^2)\tilde{I}_A(q - p, p' - p) + (p \cdot p' - p^2)\tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
&\quad + p^2\tilde{I}_0(q - p, p' - p) - ((p \cdot q)I_A(p', q) + (p \cdot p')I_B(p', q))] \\
q^\mu q^\nu U_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(q^2 - m^2)((p \cdot q)U_A(p, q, p') + q^2 U_B(p, q, p') + (p' \cdot q)U_C(p, q, p')) \\
&\quad + (q^2 - p \cdot q)\tilde{I}_A(q - p, p' - p) + (p' \cdot q - p \cdot q)\tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
&\quad + (p \cdot q)\tilde{I}_0(q - p, p' - p) - ((p \cdot q)I_A(p, p') + (p' \cdot q)I_B(p, p'))] \\
p'^\mu p'^\nu U_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(p'^2 - m^2)((p \cdot p')U_A(p, q, p') + (p' \cdot q)U_B(p, q, p') + p'^2 U_C(p, q, p')) \\
&\quad + (p' \cdot q - p \cdot p')\tilde{I}_A(q - p, p' - p) + (p'^2 - p \cdot p')\tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
&\quad + (p \cdot p')\tilde{I}_0(q - p, p' - p) - ((p \cdot p')I_A(p, q) + (p' \cdot q)I_B(p, q))] \tag{5.224}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^\mu q^\nu U_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(q^2 - m^2)(p^2 U_A(p, q, p') + (p \cdot q) U_B(p, q, p') + (p \cdot p') U_C(p, q, p')) \\
&\quad + (p \cdot q - p^2) \tilde{I}_A(q - p, p' - p) + (p \cdot p' - p^2) \tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
&\quad + p^2 \tilde{I}_0(q - p, p' - p) - (p^2 I_A(p, p') + (p \cdot p') I_B(p, p'))] \\
q^\mu p^\nu U_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(p^2 - m^2)((p \cdot q) U_A(p, q, p') + q^2 U_B(p, q, p') + (p' \cdot q) U_C(p, q, p')) \\
&\quad + (q^2 - p \cdot q) \tilde{I}_A(q - p, p' - p) + (p' \cdot q - p \cdot q) \tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
&\quad + (p \cdot q) \tilde{I}_0(q - p, p' - p) - (q^2 I_A(p', q) + (p' \cdot q) I_B(p', q))] \\
p'^\mu p^\nu U_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(p^2 - m^2)((p \cdot p') U_A(p, q, p') + (p' \cdot q) U_B(p, q, p') + p'^2 U_C(p, q, p')) \\
&\quad + (p' \cdot q - p \cdot p') \tilde{I}_A(q - p, p' - p) + (p'^2 - p \cdot p') \tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
&\quad + (p \cdot p') \tilde{I}_0(q - p, p' - p) - ((p' \cdot q) I_A(p', q) + p'^2 I_B(p', q))] \\
p^\mu p'^\nu U_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(p'^2 - m^2)(p^2 U_A(p, q, p') + (p \cdot q) U_B(p, q, p') + (p \cdot p') U_C(p, q, p')) \\
&\quad + (p \cdot q - p^2) \tilde{I}_A(q - p, p' - p) + (p \cdot p' - p^2) \tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
&\quad + p^2 \tilde{I}_0(q - p, p' - p) - (p^2 I_A(p, q) + (p \cdot q) I_B(p, q))] \\
q^\mu p'^\nu U_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(p'^2 - m^2)((p \cdot q) U_A(p, q, p') + q^2 U_B(p, q, p') + (p' \cdot q) U_C(p, q, p')) \\
&\quad + (q^2 - p \cdot q) \tilde{I}_A(q - p, p' - p) + (p' \cdot q - p \cdot q) \tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
&\quad + (p \cdot q) \tilde{I}_0(q - p, p' - p) - ((p \cdot q) I_A(p, q) + q^2 I_B(p, q))] \\
p'^\mu q^\nu U_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(q^2 - m^2)((p \cdot p') U_A(p, q, p') + (p' \cdot q) U_B(p, q, p') + p'^2 U_C(p, q, p')) \\
&\quad + (p' \cdot q - p \cdot p') \tilde{I}_A(q - p, p' - p) + (p'^2 - p \cdot p') \tilde{I}_B(q - p, p' - p) \\
&\quad + (p \cdot p') \tilde{I}_0(q - p, p' - p) - ((p \cdot p') I_A(p, p') + p'^2 I_B(p, p'))] \tag{5.225}
\end{aligned}$$

Donde se satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
U_D(p, q, p') &= U_G(q, p, p') \\
U_E(p, q, p') &= U_E(q, p, p') \\
U_F(p, q, p') &= U_H(q, p, p') \\
U_I(p, q, p') &= U_I(q, p, p') \\
U_D(p, q, p') &= U_I(p', q, p) \\
U_E(p, q, p') &= U_H(p', q, p) \\
U_F(p, q, p') &= U_F(p', q, p) \\
U_G(p, q, p') &= U_G(p', q, p) \\
U_D(p, q, p') &= U_D(p, p', q) \\
U_E(p, q, p') &= U_F(p, p', q) \tag{5.226}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_G(p, q, p') &= U_I(p, p', q) \\
U_H(p, q, p') &= U_H(p, p', q)
\end{aligned} \tag{5.227}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos que:

$$\begin{aligned}
&U_D(p, q, p') = \\
&\frac{1}{2(D-3) [p^2(p' \cdot q)^2 - 2(p \cdot p')(p \cdot q)(p' \cdot q) + (p \cdot p')^2 q^2 + p'^2 ((p \cdot q)^2 - p^2 q^2)]} \\
&\{ [(D-2)p^2(p' \cdot q)^2 - (D-3)(p'^2 p \cdot q + p \cdot p' q^2)p' \cdot q + p'^2((D-3)(p \cdot p' + p \cdot q) \\
&\quad - (D-2)p^2)q^2 + m^2(-(D-2)(p' \cdot q)^2 + (D-3)(p \cdot p' + p \cdot q)p' \cdot q \\
&\quad - (D-3)p'^2 p \cdot q + (D-2)p'^2 q^2 - (D-3)p \cdot p' q^2)] U_A(p, q, p') \\
&\quad + [(m^2 - q^2)(p'^2 q^2 - (p' \cdot q)^2)] U_B(p, q, p') \\
&\quad + [(p'^2 - m^2)((p' \cdot q)^2 - p'^2 q^2)] U_C(p, q, p') \\
&\quad + [(D-4)(p' \cdot q)^2 - (D-3)(p \cdot p' + p \cdot q)p' \cdot q + (D-3)p'^2 p \cdot q \\
&\quad - (D-4)p'^2 q^2 + (D-3)p \cdot p' q^2] \tilde{I}_0(q - p, p' - p) \\
&\quad - (D-3)[(p' \cdot q)^2 - (p \cdot p' + p \cdot q)p' \cdot q + p'^2(p \cdot q - q^2) + p \cdot p' q^2] \times \\
&\quad [\tilde{I}_A(q - p, p' - p) + \tilde{I}_B(q - p, p' - p)] + (D-3)[(p' \cdot q)(p \cdot p') - p'^2 p \cdot q] \times \\
&\quad I_A(p, p') + (D-3)[(p' \cdot q)(p \cdot q) - p \cdot p' q^2] I_A(p, q) \}
\end{aligned} \tag{5.228}$$

$$U_E(p, q, p') = U_H(p', q, p) \tag{5.229}$$

$$U_F(p, q, p') = U_H(q, p, p') \tag{5.230}$$

$$U_G(p, q, p') = U_I(p, p', q) \tag{5.231}$$

$$\begin{aligned}
& U_H(p, q, p') = \\
& \frac{1}{2(D-3) [p^2(p' \cdot q)^2 - 2(p \cdot p')(p \cdot q)(p' \cdot q) + (p \cdot p')^2 q^2 + p'^2 ((p \cdot q)^2 - p^2 q^2)]} \\
& \quad \{ - [(m^2 - p^2)((p' \cdot q)p^2 - (p \cdot p')(p \cdot q))] U_A(p, q, p') \\
& \quad + [(D-3)p \cdot q(p'^2 p \cdot q - p' \cdot qp^2) + (-p^2((D-3)p'^2 + p' \cdot q + 3p \cdot p' \\
& \quad - D(p' \cdot q + p \cdot p')) - (D-1)p \cdot p' p \cdot q) q^2 + m^2(p' \cdot q(-Dp^2 + p^2 \\
& \quad + (D-3)p \cdot q) - p \cdot q(-Dp \cdot p' + p \cdot p' + (D-3)p \cdot q) + (D-3)(p^2 - p \cdot p') q^2)] \\
& \quad \frac{U_B(p, q, p')}{2} + [m^2(p' \cdot q(-Dp^2 + p^2 + (D-3)p \cdot p') + (D-3)p'^2(p^2 - p \cdot q) \\
& \quad - p \cdot p'((D-3)p \cdot p' - Dp \cdot q + p \cdot q)) + p'^2((D-1)p' \cdot qp^2 \\
& \quad + (D-3)(p \cdot q - q^2)p^2 - (D-1)p \cdot p' p \cdot q) + (D-3)p \cdot p'(p \cdot p' q^2 - p' \cdot qp^2)] \\
& \quad \frac{U_C(p, q, p')}{2} + [(p \cdot p')(p \cdot q) - p' \cdot qp^2] \tilde{I}_0(q - p, p' - p) \\
& \quad + \frac{D-3}{2} [p \cdot q^2 - p' \cdot qp \cdot q - p \cdot p' p \cdot q + p' \cdot qp^2 - p^2 q^2 + p \cdot p' q^2] \\
& \quad \tilde{I}_A(q - p, p' - p) + \frac{D-3}{2} [p' \cdot q(p^2 - p \cdot p') + p \cdot p'(p \cdot p' - p \cdot q) + \\
& \quad p'^2(p \cdot q - p^2)] \tilde{I}_B(q - p, p' - p) + \frac{D-3}{2} [p'^2 p^2 - (p \cdot p')^2] I_B(p, p') \\
& \quad + \frac{D-3}{2} [p^2 q^2 - (p \cdot q)^2] I_B(p, q) + \frac{D-3}{2} [p' \cdot qp \cdot q - p \cdot p' q^2] I_A(p', q) \\
& \quad + \frac{D-3}{2} [p' \cdot qp \cdot p' - p'^2 p \cdot q] I_B(p', q) \} \\
& \hspace{15em} (5.232)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U_I(p, q, p') = \\
& \frac{1}{2(D-3) [p^2(p' \cdot q)^2 - 2(p \cdot p')(p \cdot q)(p' \cdot q) + (p \cdot p')^2 q^2 + p'^2 ((p \cdot q)^2 - p^2 q^2)]} \\
& \quad \{ [(m^2 - p^2) (p^2 q^2 - (p \cdot q)^2)] U_A(p, q, p') + [(m^2 - q^2) (p^2 q^2 - (p \cdot q)^2)] \\
& \quad U_B(p, q, p') - [p \cdot q((D-3)p' \cdot qp^2 - (D-2)p'^2 p \cdot q) + ((D-2)p'^2 p^2 \\
& \quad - (D-3)(p^2(p' \cdot q + p \cdot p') - p \cdot p' p \cdot q)) q^2 + m^2((D-3)p' \cdot q(p^2 - p \cdot q) \\
& \quad + (D-3)p \cdot p'(q^2 - p \cdot q) + (D-2) ((p \cdot q)^2 - p^2 q^2))] U_C(p, q, p') \\
& \quad + [p^2 q^2 - (p \cdot q)^2] \tilde{I}_0(q - p, p' - p) + (D-3) [(p \cdot q)^2 - p' \cdot qp \cdot q - p \cdot p' p \cdot q \\
& \quad + p' \cdot qp^2 - p^2 q^2 + p \cdot p' q^2] \tilde{I}_B(q - p, p' - p) + (D-3) [p \cdot p' p \cdot q - p' \cdot qp^2] \\
& \quad I_B(p, p') + (D-3) [p' \cdot qp \cdot q - p \cdot p' q^2] I_B(p', q) \} \quad (5.233)
\end{aligned}$$

5.30.4. La Integral Escalar $V(p, q, p')$

La integral escalar $V(p, q, p')$ es:

$$V(p, q, p') = \int \frac{d^D w}{w^4 [(p-w)^2 - m^2] [(q-w)^2 - m^2] [(p'-w)^2 - m^2]} \quad (5.234)$$

Hemos calculado

$$J_{\square}^{(3)} = \int \frac{d^D w}{[(p'-w)^2 - m^2]^{\nu_1} [w^2 - m^2]^{\nu_2} [(p-w)^2 - m^2]^{\nu_3} [(q-w)^2]^{\nu_4}} \quad (5.235)$$

Entonces

$$\begin{aligned} V(p, q, p') = & (-1)^{D/2} (-m^2)^{D/2-5} \frac{\Gamma(\frac{D}{2}-2) \Gamma(5-\frac{D}{2})}{6\Gamma(\frac{D}{2})} \times \\ & \mathcal{Y}_3 \left[5 - \frac{D}{2}, 1, 1, 1, 2, \frac{D}{2} - 2 \left| \frac{p^2}{m^2}, \frac{q^2}{m^2}, \frac{p'^2}{m^2}, \frac{(q-p)^2}{m^2}, \frac{(q-p')^2}{m^2}, \frac{(p-p')^2}{m^2} \right] \right]. \end{aligned} \quad (5.236)$$

5.30.5. La Integral Tensorial $V^\mu(p, q, p')$

Tenemos

$$V^\mu(p, q, p') = \int \frac{d^D w w^\mu}{w^4 [(p-w)^2 - m^2] [(q-w)^2 - m^2] [(p'-w)^2 - m^2]}. \quad (5.237)$$

De manera similar a U_μ tenemos que

$$V_\mu = \frac{i\pi^2}{2} [p_\mu V_A(p, q, p') + q_\mu V_B(p, q, p') + p'_\mu V_C(p, q, p')] \quad (5.238)$$

donde $V_A(p, q, p')$, $V_B(p, q, p')$ y $V_C(p, q, p')$ seran funciones escalares que dependeran de p , q y p' .

$$\begin{aligned} p^\mu V_\mu &= \frac{i\pi^2}{2} [p^2 V_A(p, q, p') + p \cdot q V_B(p, q, p') + p \cdot p' V_C(p, q, p')] \\ q^\mu V_\mu &= \frac{i\pi^2}{2} [p \cdot q V_A(p, q, p') + q^2 V_B(p, q, p') + p' \cdot q V_C(p, q, p')] \\ p'^\mu V_\mu &= \frac{i\pi^2}{2} [p \cdot p' V_A(p, q, p') + p' \cdot q V_B(p, q, p') + p'^2 V_C(p, q, p')] . \end{aligned} \quad (5.239)$$

$$\begin{aligned} p_\mu V_\mu &= \frac{1}{2} (p^2 - m^2) V(p, q, p') + \frac{1}{2} U(p, q, p') - \frac{1}{2} J(p', q) \\ q_\mu V_\mu &= \frac{1}{2} (q^2 - m^2) V(p, q, p') + \frac{1}{2} U(p, q, p') - \frac{1}{2} J(p, p') \\ p'_\mu V_\mu &= \frac{1}{2} (p'^2 - m^2) V(p, q, p') + \frac{1}{2} U(p, q, p') - \frac{1}{2} J(p, q) \end{aligned} \quad (5.240)$$

Donde se satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
V_A(p, q, p') &= V_B(q, p, p') \\
V_C(p, q, p') &= V_C(q, p, p') \\
V_A(p, q, p') &= V_C(p', q, p) \\
V_B(p, q, p') &= V_B(p', q, p) \\
V_A(p, q, p') &= V_A(p, p', q) \\
V_B(p, q, p') &= V_C(p, p', q)
\end{aligned} \tag{5.241}$$

Resolviendo para $V_A(p, q, p')$, $V_B(p, q, p')$ y $V_C(p, q, p')$ obtenemos

$$\begin{aligned}
V_A(p, q, p') &= \frac{1}{2[p'^2(p \cdot q)^2 - 2(p \cdot q)(p \cdot p')(p' \cdot q) + q^2(p \cdot p')^2 + p^2((p' \cdot q)^2 - p'^2 q^2)]} \times \\
&\quad \{[(p \cdot p')(p' \cdot q) - p'^2(p \cdot q)]J_0(p, p') + [p'^2 q^2 - (p' \cdot q)^2]J_0(p', q) \\
&\quad + [(p \cdot q)(p' \cdot q) - q^2(p \cdot p')]J_0(p, q) + [p'^2(p \cdot q) - p'^2 q^2 + q^2(p \cdot p') \\
&\quad - (p \cdot q + p \cdot p')p' \cdot q + (p' \cdot q)^2]U_0 + [p'^2 q^2(-p^2 + p \cdot q + p \cdot p') \\
&\quad - p' \cdot q(p'^2(p \cdot q) + q^2(p \cdot p')) + p^2(p' \cdot q)^2 + m^2(-p'^2(p \cdot q) + p'^2 q^2 \\
&\quad - q^2(p \cdot p') + p' \cdot q(p \cdot q + p \cdot p') - (p' \cdot q)^2)]V_0\} ,
\end{aligned} \tag{5.242}$$

$$V_B(p, q, p') = V_C(p, p', q) , \tag{5.243}$$

$$\begin{aligned}
V_C(p, q, p') &= \frac{1}{2[p'^2(p \cdot q)^2 - 2(p \cdot q)(p \cdot p')(p' \cdot q) + q^2(p \cdot p')^2 + p^2((p' \cdot q)^2 - p'^2 q^2)]} \times \\
&\quad \{[(p \cdot p')(p \cdot q) - p^2(p' \cdot q)]J_0(p, p') + [(p \cdot q)(p' \cdot q) - q^2(p \cdot p')]J_0(p', q) \\
&\quad + [(p \cdot q)^2 - p^2 q^2]J_0(p, q) + [(p \cdot q)^2 + q^2(p \cdot p') + p^2(-q^2 + p' \cdot q) \\
&\quad - (p \cdot p' + p' \cdot q)p \cdot q]U_0 - [-p'^2(p \cdot q)^2 + p^2 q^2(p'^2 - p \cdot p' - p' \cdot q) \\
&\quad + p \cdot q(q^2(p \cdot p') + p^2(p' \cdot q)) + m^2((p \cdot q)^2 - p^2 q^2 + q^2(p \cdot p') + p^2(p' \cdot q) \\
&\quad - p \cdot q(p' \cdot q + p \cdot p'))]V_0\} ,
\end{aligned} \tag{5.244}$$

donde

$$V_0 = \frac{2}{i\pi^2}V , \quad J_0 = \frac{2}{i\pi^2}J , \quad U_0 = \frac{2}{i\pi^2}U . \tag{5.245}$$

5.30.6. La Integral Tensorial $V^{\mu\nu}(p, q, p')$

La integral tensorial $V^{\mu\nu}$ puede ser expresada en términos de las integrales escalares $U_0, V_D, V_E, V_F, V_G, V_H$ y V_I como

$$\begin{aligned}
V_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{2} \left[\frac{g_{\mu\nu}}{D} U_0 + \left(p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} \frac{p^2}{D} \right) V_D + \left(p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} \frac{2(p \cdot q)}{D} \right) V_E \right. \\
&\quad + \left(p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} \frac{2(p \cdot p')}{D} \right) V_F + \left(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} \frac{q^2}{D} \right) V_G \\
&\quad \left. + \left(q_\mu p'_\nu + p'_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} \frac{2(p' \cdot q)}{D} \right) V_H + \left(p'_\mu p'_\nu - g_{\mu\nu} \frac{p'^2}{D} \right) V_I \right] .
\end{aligned} \tag{5.246}$$

Hacemos las siguientes contracciones:

$$\begin{aligned}
p^\mu p^\nu V_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{2} \left[\frac{p^2}{D} U_0 + p^4 \left(1 - \frac{1}{D} \right) V_D + 2p^2(p \cdot q) \left(1 - \frac{1}{D} \right) V_E \right. \\
&\quad + 2p^2(p \cdot p') \left(1 - \frac{1}{D} \right) V_F + \left((p \cdot q)^2 - \frac{p^2 q^2}{D} \right) V_G \\
&\quad \left. + 2 \left((p \cdot q)(p \cdot p') - \frac{p^2(p' \cdot q)}{D} \right) V_H + \left((p \cdot p')^2 - \frac{p^2 p'^2}{D} \right) V_I \right] \\
q^\mu q^\nu V_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{2} \left[\frac{q^2}{D} U_0 + \left((p \cdot q)^2 - \frac{p^2 q^2}{D} \right) V_D + 2q^2(p \cdot q) \left(1 - \frac{1}{D} \right) V_E \right. \\
&\quad + 2 \left((p \cdot q)(p' \cdot q) - \frac{q^2(p \cdot p')}{D} \right) V_F + q^4 \left(1 - \frac{1}{D} \right) V_G \\
&\quad \left. + 2q^2(p' \cdot q) \left(1 - \frac{1}{D} \right) V_H + \left((p' \cdot q)^2 - \frac{p'^2 q^2}{D} \right) V_I \right], \tag{5.247}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p'^\mu p'^\nu V_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{2} \left[\frac{p'^2}{D} U_0 + \left((p \cdot p')^2 - \frac{p^2 p'^2}{D} \right) V_D + 2 \left((p' \cdot p)(p' \cdot q) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{p'^2(p \cdot q)}{D} \right) V_E + 2p'^2(p \cdot p') \left(1 - \frac{1}{D} \right) V_F + q^4 \left(1 - \frac{1}{D} \right) V_G \right. \\
&\quad \left. + 2q^2(p' \cdot q) \left(1 - \frac{1}{D} \right) V_H + \left((p' \cdot q)^2 - \frac{p'^2 q^2}{D} \right) V_I \right], \tag{5.248}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^\mu q^\nu V_{\mu\nu} + q^\mu p^\nu V_{\mu\nu} &= i\pi^2 \left[\frac{p \cdot q}{D} U_0 + p^2(p \cdot q) \left(1 - \frac{1}{D} \right) V_D + \left(p^2 q^2 + (p \cdot q)^2 \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) V_E + \left(p^2(p' \cdot q) + (p \cdot p')(p \cdot q) \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) V_F \\
&\quad + q^2(p \cdot q) \left(1 - \frac{1}{D} \right) V_G + \left(q^2(p \cdot p') + (p' \cdot q)(p \cdot q) \times \right. \\
&\quad \left. \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) V_H + \left((p \cdot p')(p' \cdot q) - \frac{p'^2}{D}(p \cdot q) \right) V_I \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^\mu p'^\nu V_{\mu\nu} + p'^\mu p^\nu V_{\mu\nu} &= i\pi^2 \left[\frac{p \cdot p'}{D} U_0 + p^2(p \cdot p') \left(1 - \frac{1}{D} \right) V_D + \left(p^2(p' \cdot q) + (p \cdot p')(p \cdot q) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) V_E + \left(p^2 p'^2 + (p \cdot p')^2 \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) V_F \\
&\quad + \left((p \cdot q)(p' \cdot q) - \frac{q^2}{D}(p \cdot p') \right) V_G + \left(p'^2(p \cdot q) + (p' \cdot p)(p' \cdot q) \times \right. \\
&\quad \left. \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) V_H + p'^2(p \cdot p') \left(1 - \frac{1}{D} \right) V_I \right], \tag{5.249}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q^\mu p'^\nu V_{\mu\nu} + p'^\mu q^\nu V_{\mu\nu} &= i\pi^2 \left[\frac{p' \cdot q}{D} U_0 + \left((p \cdot p')(p \cdot q) - \frac{p^2}{D}(p' \cdot q) \right) V_D + \left(q^2(p \cdot p') \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (p' \cdot q)(p \cdot q) \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) V_E + \left(p'^2(p \cdot q) + (p \cdot p')(p' \cdot q) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) V_F + q^2(p' \cdot q) \left(1 - \frac{1}{D} \right) V_G + \left(p'^2 q^2 + (p' \cdot q)^2 \times \right. \\
&\quad \left. \left(1 - \frac{2}{D} \right) \right) V_H + p'^2(p' \cdot q) \left(1 - \frac{1}{D} \right) V_I \right]. \quad (5.250)
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
p^\mu p^\nu V_{\mu\nu} &= p^\mu \int d^D w \frac{p \cdot w w_\mu}{w^4 [(p-w)^2 - m^2] [(q-w)^2 - m^2] [(p'-w)^2 - m^2]} \\
&= p^\mu \left[\frac{1}{2} (p^2 - m^2) V_\mu(p, q, p') + \frac{1}{2} U_\mu(p, q, p') - \frac{1}{2} J_\mu(p', q) \right]. \quad (5.251)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
p^\mu p^\nu V_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(p^2 - m^2)(p^2 V_A(p, q, p') + (p \cdot q) V_B(p, q, p') + (p \cdot p') V_C(p, q, p')) \\
&\quad + p^2 U_A(p, q, p') + (p \cdot q) U_B(p, q, p') + (p \cdot p') U_C(p, q, p') \\
&\quad - ((p \cdot q) J_A(p', q) + (p \cdot p') J_B(p', q))] \\
q^\mu q^\nu V_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(q^2 - m^2)((p \cdot q) V_A(p, q, p') + q^2 V_B(p, q, p') + (p' \cdot q) V_C(p, q, p')) \\
&\quad + (p \cdot q) U_A(p, q, p') + q^2 U_B(p, q, p') + (p' \cdot q) U_C(p, q, p') \\
&\quad - ((p \cdot q) J_A(p, p') + (p' \cdot q) J_B(p, p'))] \\
p'^\mu p'^\nu V_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(p'^2 - m^2)((p \cdot p') V_A(p, q, p') + (p' \cdot q) V_B(p, q, p') + p'^2 V_C(p, q, p')) \\
&\quad + (p \cdot p') U_A(p, q, p') + (p' \cdot q) U_B(p, q, p') + p'^2 U_C(p, q, p') \\
&\quad - ((p \cdot p') J_A(p, q) + (p' \cdot q) J_B(p, q))] \\
p^\mu q^\nu V_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(q^2 - m^2)(p^2 V_A(p, q, p') + (p \cdot q) V_B(p, q, p') + (p \cdot p') V_C(p, q, p')) \\
&\quad + p^2 U_A(p, q, p') + (p \cdot q) U_B(p, q, p') + (p \cdot p') U_C(p, q, p') \\
&\quad - (p^2 J_A(p, p') + (p \cdot p') J_B(p, p'))] \\
q^\mu p^\nu V_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(p^2 - m^2)((p \cdot q) V_A(p, q, p') + q^2 V_B(p, q, p') + (p' \cdot q) V_C(p, q, p')) \\
&\quad + (p \cdot q) U_A(p, q, p') + q^2 U_B(p, q, p') + (p' \cdot q) U_C(p, q, p') \\
&\quad - (q^2 J_A(p', q) + (p' \cdot q) J_B(p', q))] \\
p'^\mu p^\nu V_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(p^2 - m^2)((p \cdot p') V_A(p, q, p') + (p' \cdot q) V_B(p, q, p') + p'^2 V_C(p, q, p')) \\
&\quad + (p \cdot p') U_A(p, q, p') + (p' \cdot q) U_B(p, q, p') + p'^2 U_C(p, q, p') \\
&\quad - ((p' \cdot q) J_A(p', q) + p'^2 J_B(p', q))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^\mu p^\nu V_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(p'^2 - m^2)(p^2 V_A(p, q, p') + (p \cdot q) V_B(p, q, p') + (p \cdot p') V_C(p, q, p')) \\
&\quad + p^2 U_A(p, q, p') + (p \cdot q) U_B(p, q, p') + (p \cdot p') U_C(p, q, p') \\
&\quad - (p^2 J_A(p, q) + (p \cdot q) J_B(p, q))] \\
q^\mu p^\nu V_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(p'^2 - m^2)((p \cdot q) V_A(p, q, p') + q^2 V_B(p, q, p') + (p' \cdot q) V_C(p, q, p')) \\
&\quad + (p \cdot q) U_A(p, q, p') + q^2 U_B(p, q, p') + (p' \cdot q) U_C(p, q, p') \\
&\quad - ((p \cdot q) J_A(p, q) + q^2 J_B(p, q))] \\
p'^\mu q^\nu V_{\mu\nu} &= \frac{i\pi^2}{4} [(q^2 - m^2)((p \cdot p') V_A(p, q, p') + (p' \cdot q) V_B(p, q, p') + p'^2 V_C(p, q, p')) \\
&\quad + (p \cdot p') U_A(p, q, p') + (p' \cdot q) U_B(p, q, p') + p'^2 U_C(p, q, p') \\
&\quad - ((p \cdot p') J_A(p, p') + p'^2 J_B(p, p'))] \tag{5.252}
\end{aligned}$$

Donde se satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
V_D(p, q, p') &= V_G(q, p, p') \\
V_E(p, q, p') &= V_E(q, p, p') \\
V_F(p, q, p') &= V_H(q, p, p') \\
V_I(p, q, p') &= V_I(q, p, p') \\
V_D(p, q, p') &= V_I(p', q, p) \\
V_E(p, q, p') &= V_H(p', q, p) \\
V_F(p, q, p') &= V_F(p', q, p) \\
V_G(p, q, p') &= V_G(p', q, p) \\
V_D(p, q, p') &= V_D(p, p', q) \\
V_E(p, q, p') &= V_F(p, p', q) \\
V_G(p, q, p') &= V_I(p, p', q) \\
V_H(p, q, p') &= V_H(p, p', q) \tag{5.253}
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 V_D(p, q, p') = & \frac{1}{2(D-3) [p^2(p' \cdot q)^2 - 2(p \cdot p')(p \cdot q)(p' \cdot q) + (p \cdot p')^2 q^2 + p'^2 ((p \cdot q)^2 - p^2 q^2)]} \\
 & \{ [(D-2)p^2(p' \cdot q)^2 - (D-3)(p'^2 p \cdot q + p \cdot p' q^2)p' \cdot q + p'^2 ((D-3)(p \cdot p' + p \cdot q) \\
 & \quad - (D-2)p^2)q^2 + m^2 (-(D-2)(p' \cdot q)^2 + (D-3)(p \cdot p' + p \cdot q)p' \cdot q \\
 & \quad - (D-3)p'^2 p \cdot q + (D-2)p'^2 q^2 - (D-3)p \cdot p' q^2)] V_A(p, q, p') \\
 & + [(m^2 - q^2) (p'^2 q^2 - (p' \cdot q)^2)] V_B(p, q, p') + [(p'^2 - m^2) ((p' \cdot q)^2 - p'^2 q^2)] \\
 & V_C(p, q, p') + [(D-2)(p' \cdot q)^2 - (D-3)(p \cdot p' + p \cdot q)p' \cdot q + (D-3)p'^2 p \cdot q \\
 & \quad - (D-2)p'^2 q^2 + (D-3)p \cdot p' q^2] U_A(p, q, p') + [(p' \cdot q)^2 - p'^2 q^2] [U_B(p, q, p') \\
 & \quad + U_C(p, q, p')] + (D-3) [p' \cdot qp \cdot p' - p'^2 p \cdot q] J_A(p, p') \\
 & + (D-3) [p' \cdot qp \cdot q - p \cdot p' q^2] J_A(p, q) + 2 [p'^2 q^2 - (p' \cdot q)^2] U_0(p, q, p') \}
 \end{aligned} \tag{5.254}$$

$$V_E(p, q, p') = V_H(p', q, p) \tag{5.255}$$

$$V_F(p, q, p') = V_H(q, p, p') \tag{5.256}$$

$$V_G(p, q, p') = V_I(p, p', q) \tag{5.257}$$

$$\begin{aligned}
 V_H(p, q, p') = & \frac{1}{2(D-3) [p^2(p' \cdot q)^2 - 2(p \cdot p')(p \cdot q)(p' \cdot q) + (p \cdot p')^2 q^2 + p'^2 ((p \cdot q)^2 - p^2 q^2)]} \\
 & \{ - [(m^2 - p^2)(p' \cdot qp^2 - p \cdot p' p \cdot q)] V_A(p, q, p') \\
 & + [(D-3)p \cdot q(p'^2 p \cdot q - p' \cdot qp^2) + (-p^2((D-3)p'^2 + p' \cdot q + 3p \cdot p' \\
 & \quad - D(p' \cdot q + p \cdot p')) - (D-1)p \cdot p' p \cdot q)q^2 + m^2(p' \cdot q(-Dp^2 + p^2 + (D-3)p \cdot q) - \\
 & \quad p \cdot q(-Dp \cdot p' + p \cdot p' + (D-3)p \cdot q) + (D-3)(p^2 - p \cdot p')q^2)] \frac{V_B(p, q, p')}{2} \\
 & [m^2(p' \cdot q(-Dp^2 + p^2 + (D-3)p \cdot p') + (D-3)p'^2(p^2 - p \cdot q) - p \cdot p'((D-3)p \cdot p' \\
 & \quad - Dp \cdot q + p \cdot q)) + p'^2((D-1)p' \cdot qp^2 + (D-3)(p \cdot q - q^2)p^2 - (D-1)p \cdot p' p \cdot q) \\
 & + (D-3)p \cdot p'(p \cdot p' q^2 - p' \cdot qp^2)] \frac{V_C(p, q, p')}{2} + [p' \cdot qp^2 - p \cdot p' p \cdot q] U_A(p, q, p') \\
 & [(D-1)p' \cdot qp^2 - (D-3)p' \cdot qp \cdot q + p \cdot q(-Dp \cdot p' + p \cdot p' + (D-3)p \cdot q) \\
 & + (D-3)(p \cdot p' - p^2)q^2] \frac{U_B(p, q, p')}{2} + [(D-1)p' \cdot qp^2 - (D-3)p' \cdot qp \cdot p' \\
 & + (D-3)p'^2(p \cdot q - p^2) + p \cdot p'((D-3)p \cdot p' - Dp \cdot q + p \cdot q)] \frac{U_C(p, q, p')}{2} \\
 & + \frac{(D-3)}{2} [p'^2 p^2 - (p \cdot p')^2] J_B(p, p') + \frac{(D-3)}{2} [p^2 q^2 - (p \cdot q)^2] J_B(p, q) \\
 & + \frac{(D-3)}{2} [p' \cdot qp \cdot q - p \cdot p' q^2] J_A(p', q) + \frac{(D-3)}{2} [p' \cdot qp \cdot p' - p'^2 p \cdot q] J_B(p', q)
 \end{aligned}$$

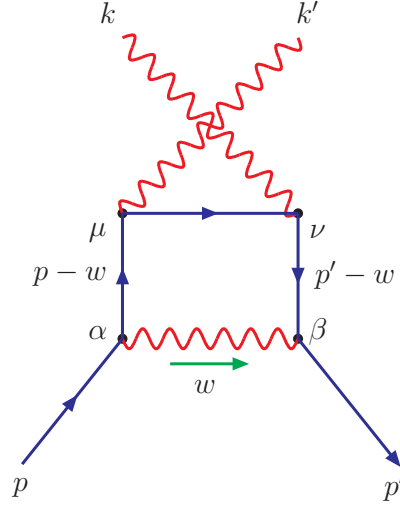
$$+2[p \cdot p' p \cdot q - p' \cdot qp^2]U_0(p, q, p')\} \quad (5.258)$$

$$V_I(p, q, p') = \frac{1}{2(D-3)} [p^2(p' \cdot q)^2 - 2(p \cdot p')(p \cdot q)(p' \cdot q) + (p \cdot p')^2 q^2 + p'^2((p \cdot q)^2 - p^2 q^2)] \{ [(m^2 - p^2)(p^2 q^2 - (p \cdot q)^2)] V_A(p, q, p') + [(m^2 - q^2)(p^2 q^2 - (p \cdot q)^2)] V_B(p, q, p') - [p \cdot q((D-3)p' \cdot qp^2 - (D-2)p'^2 p \cdot q) + ((D-2)p'^2 p^2 - (D-3)(p^2(p' \cdot q + p \cdot p') - p \cdot p' p \cdot q))q^2 + m^2((D-3)p' \cdot q(p^2 - p \cdot q) + (D-3)p \cdot p'(q^2 - p \cdot q) + (D-2)(p \cdot q^2 - p^2 q^2))] V_C(p, q, p') + [(p \cdot q)^2 - p^2 q^2][U_A(p, q, p') + U_B(p, q, p')] + [(D-3)p' \cdot q(p^2 - p \cdot q) + (D-3)p \cdot p'(q^2 - p \cdot q) + (D-2)((p \cdot q)^2 - p^2 q^2)] U_C(p, q, p') + (D-3)[p \cdot p' p \cdot q - p' \cdot qp^2] J_B(p, p') + (D-3)[p' \cdot qp \cdot q - p \cdot p' q^2] J_B(p', q) + 2[p^2 q^2 - (p \cdot q)^2] U_0(p, q, p') \} \quad (5.259)$$

Por lo tanto

$$\Gamma_{D_{27}}^{\mu\nu} = \frac{-ie^2}{2(2\pi)^D} \{ (k+2p)^\mu (k+p+p')^\nu [(-2m^2 + (p' - p)^2 - 2p \cdot p') U(p, p', q) + \tilde{I}(q - p, p' - p) - I(p, q) - I(p', q)] - 2(k+p+p')^\nu [(-2m^2 + (p' - p)^2 - 2p \cdot p') U^\mu(p, p', q) + \tilde{I}^\mu(q - p, p' - p) - I^\mu(p, q) - I^\mu(p', q)] - (2k+4p)^\mu [(-2m^2 + (p' - p)^2 - 2p \cdot p') U^\nu(p, p', q) + \tilde{I}^\nu(q - p, p' - p) - I^\nu(p, q) - I^\nu(p', q)] + 4[(-2m^2 + (p' - p)^2 - 2p \cdot p') U^{\mu\nu}(p, p', q) + \tilde{I}^{\mu\nu}(q - p, p' - p) - I^{\mu\nu}(p, q) - I^{\mu\nu}(p', q)] + (1 - \xi) [(k+2p)^\mu (k+p+p')^\nu [(-m^2(p^2 + p'^2 - m^2) + p^2 p'^2) V(p, p', q) + (p^2 + p'^2 - 2m^2) U(p, p', q) + \tilde{I}(q - p, p' - p) + (m^2 - p^2) J(p, q) + (m^2 - p'^2) J(p', q) - I(p, q) - I(p', q) + L(q)] - 2(k+p+p')^\nu [(-m^2(p^2 + p'^2 - m^2) + p^2 p'^2) V^\mu(p, p', q) + (p^2 + p'^2 - 2m^2) U^\mu(p, p', q) + \tilde{I}^\mu(q - p, p' - p) + (m^2 - p^2) J^\mu(p, q) + (m^2 - p'^2) J^\mu(p', q) - I^\mu(p, q) - I^\mu(p', q) + L^\mu(q)] - (2k+4p)^\mu [(-m^2(p^2 + p'^2 - m^2) + p^2 p'^2) V^\nu(p, p', q) + (p^2 + p'^2 - 2m^2) U^\nu(p, p', q) + \tilde{I}^\nu(q - p, p' - p) + (m^2 - p^2) J^\nu(p, q) + (m^2 - p'^2) J^\nu(p', q) - I^\nu(p, q) - I^\nu(p', q) + L^\nu(q)] + 4[(-m^2(p^2 + p'^2 - m^2) + p^2 p'^2) V^{\mu\nu}(p, p', q) + (p^2 + p'^2 - 2m^2) U^{\mu\nu}(p, p', q) + \tilde{I}^{\mu\nu}(q - p, p' - p) + (m^2 - p^2) J^{\mu\nu}(p, q) + (m^2 - p'^2) J^{\mu\nu}(p', q) - I^{\mu\nu}(p, q) - I^{\mu\nu}(p', q) + L^{\mu\nu}(q)] \} \quad (5.260)$$

5.31. Diagrama 28



$$\begin{aligned}
 \Gamma_{D_{28}}^{\mu\nu} = & \frac{-ie^2}{2(2\pi)^D} \{ (k' + 2p)^\mu (k' + p + p')^\nu [(-2m^2 + (p' - p)^2 - 2p \cdot p') U(p, p', q') \\
 & + \tilde{I}(q' - p, p' - p) - I(p, q') - I(p', q')] - 2(k' + p + p')^\nu [(-2m^2 + (p' - p)^2 \\
 & - 2p \cdot p') U^\mu(p, p', q') + \tilde{I}^\mu(q' - p, p' - p) - I^\mu(p, q') - I^\mu(p', q')] \\
 & - (2k' + 4p)^\mu [(-2m^2 + (p' - p)^2 - 2p \cdot p') U^\nu(p, p', q') + \tilde{I}^\nu(q' - p, p' - p) \\
 & - I^\nu(p, q') - I^\nu(p', q')] + 4[(-2m^2 + (p' - p)^2 - 2p \cdot p') U^{\mu\nu}(p, p', q') \\
 & + \tilde{I}^{\mu\nu}(q' - p, p' - p) - I^{\mu\nu}(p, q') - I^{\mu\nu}(p', q')] + (1 - \xi) [(k' + 2p)^\mu (k' + p + p')^\nu \\
 & [(-m^2(p^2 + p'^2 - m^2) + p^2 p'^2) V(p, p', q') + (p^2 + p'^2 - 2m^2) U(p, p', q') \\
 & + \tilde{I}(q' - p, p' - p) + (m^2 - p^2) J(p, q') + (m^2 - p'^2) J(p', q') - I(p, q') \\
 & - I(p', q') + L(q')] - 2(k' + p + p')^\nu [(-m^2(p^2 + p'^2 - m^2) + p^2 p'^2) V^\mu(p, p', q') \\
 & + (p^2 + p'^2 - 2m^2) U^\mu(p, p', q') + \tilde{I}^\mu(q' - p, p' - p) + (m^2 - p^2) J^\mu(p, q') \\
 & + (m^2 - p'^2) J^\mu(p', q') - I^\mu(p, q') - I^\mu(p', q') + L^\mu(q')] - (2k' + 4p)^\mu \\
 & [(-m^2(p^2 + p'^2 - m^2) + p^2 p'^2) V^\nu(p, p', q') + (p^2 + p'^2 - 2m^2) U^\nu(p, p', q') \\
 & + \tilde{I}^\nu(q' - p, p' - p) + (m^2 - p^2) J^\nu(p, q') + (m^2 - p'^2) J^\nu(p', q') - I^\nu(p, q') \\
 & - I^\nu(p', q') + L^\nu(q')] + 4[(-m^2(p^2 + p'^2 - m^2) + p^2 p'^2) V^{\mu\nu}(p, p', q') \\
 & + (p^2 + p'^2 - 2m^2) U^{\mu\nu}(p, p', q') + \tilde{I}^{\mu\nu}(q' - p, p' - p) + (m^2 - p^2) J^{\mu\nu}(p, q') \\
 & + (m^2 - p'^2) J^{\mu\nu}(p', q') - I^{\mu\nu}(p, q') - I^{\mu\nu}(p', q') + L^{\mu\nu}(q')]] \} \quad (5.261)
 \end{aligned}$$

En este capítulo, hemos desarrollado una base apropiada para descomponer el vértice completo de la dispersión de Compton en SQED en sus partes longitudinal y transversa (a uno o ambos fotones externos). Entonces empleamos la identidad de WFGTI que relaciona los vértices de 3 puntos y 4 puntos para determinar la componente longitudinal

del vértice de la dispersión de Compton en una forma exacta no perturbativa, escrita en términos de funciones de menores puntos. La conservación de la identidad de WGTI por construcción para las interacciones de tres puntos contiene información auténtica del esquema de truncación para las ecuaciones de SDEs al nivel de las funciones de dos puntos. El trabajo presentado en esta tesis nos da la oportunidad de ir al siguiente orden de aproximación. Podemos truncar la torre de las ecuaciones de SDE al nivel de la función de 4 puntos, otra vez con una conservación de WFGTI como *ansatz* y resolver consistentemente el conjunto acoplado de las ecuaciones de SDEs para las funciones al orden de 2 y 3 puntos para llegar a sus más exactas soluciones. Un paso natural es probar la importancia de las estructuras no perturbativas de los vértices de 4 puntos en QCD a través de las identidades generalizadas de Slavnov-Taylor.

Como el nombre lo sugiere, la parte transversa permanece indeterminada por la identidad de WFGTI. Sin embargo, con la ayuda de la evaluación de este vértice completo a un lazo, las partes transversas desconocidas pueden ser extraídas a este orden. Este debería servir como una guía para sus posibles extensiones no perturbativas. Cualquier intento debería de reproducir este resultado perturbativo en el régimen de acoplamiento débil.

Hay varias ventajas de calcular la dispersión de Compton para electrones masivos y piernas externas off-shell en norma y dimensiones arbitrarias: (i) Como las piernas externas son off-shell, uno puede estudiar varios casos de interés poniendo las partículas on shell deseadas. Por otro lado, este también puede servir como la parte interna de diagramas de Feynman más elaborados. (ii) La norma arbitraria nos ayuda a checar la invariancia de norma de las observables físicas relacionadas y las propiedades de covariancia de norma de las funciones de Green. (iii) Sustituyendo $D = 4 - 2\epsilon$ y expandiendo en potencias de ϵ , podemos estudiar el caso 4-dimensional. También ha sido demostrado que las bajas dimensiones en SQED son de interés y pueden ser proyectadas por la sustitución apropiada de D . (iv) Resultados explícitos de muchas de las integrales son nuevos y pueden ser usados en otros cálculos. Estas son las mismas integrales que aparecen en QED espinorial y QCD. Por lo tanto, este estudio puede ser de guía para la calculación similar de los vértices fantasma-fantasma-quark-quark, 4-gluones y 4-quark en QCD, cuya importancia ha sido descrita en la introducción de este capítulo.

Capítulo 6

Conclusiones

Hemos estudiado la Electrodinámica Cuántica Escalar a nivel de un lazo en la teoría de perturbaciones y algunos aspectos no perturbativos de la misma. Vamos a resaltar los resultados más importantes que hemos desarrollado a lo largo de la tesis:

■ *EL PROPAGADOR ESCALAR*

- Hemos calculado el propagador escalar a un lazo en dimensión y norma arbitraria. Como casos particulares tomamos $D = 3$ y $D = 4 - 2\epsilon$ en el límite $\epsilon \rightarrow 0$.

■ *EL PROPAGADOR FOTÓNICO*

- Calculamos el propagador fotónico a un lazo en dimensión arbitraria considerando los casos $D = 3$ y $D = 4 - 2\epsilon$ en el límite $\epsilon \rightarrow 0$.
- Como una verificación de nuestros resultados, la identidad de Ward es satisfecha puesto que la estructura tensorial es transversa.
- Así mismo calculamos el propagador fotónico sumando las burbujas en $D = 3$ en el caso en que $m = 0$. Donde pudimos observar que este tiene un comportamiento similar al propagador del fotón espinorial en $D = 3$.

■ *EL VÉRTICE DE TRES PUNTOS*

- Hemos presentado el vértice de 3 puntos a un lazo en norma y dimensiones arbitrarias para escalares masivos.
- Para calcular el vértice, usamos la identidad WFGTI para descomponer el vértice en sus partes longitudinal y transversa; el vértice longitudinal es completamente determinado por el propagador escalar.
- Hemos presentado también los resultados para los casos especiales $D = 4 - 2\epsilon$ y $D = 3$ con escalares masivos y no masivos.

- Como comparación, en QED espinorial y QCD donde las ocho funciones escalares desconocidas definen el vértice transverso, solamente una función escalar no determinada existe para el caso de QED escalar. Sin embargo, su calculación perturbativa puede ser una guía cercana a sus posibles formas no perturbativas. Hemos formulado una forma simple y natural del vértice no perturbativo que, por construcción, se reduce a su expansión de un lazo en el régimen de acoplamiento débil.

■ *EL VÉRTICE DE CUATRO PUNTOS*

- Calculamos el vértice de cuatro puntos a un lazo en norma y dimensiones arbitrarias. Utilizamos este resultado para calcular el proceso de dispersión escalar-fotón.
- Hemos propuesto una base apropiada para descomponer la dispersión escalar-fotón completa en sus partes longitudinal y transversa (a uno o ambos fotones externos).
- Empleamos la identidad WFGTI que relaciona los vértices de 3 puntos con los de 4 puntos para determinar la componente longitudinal de la dispersión escalar-fotón en una forma no perturbativa.
- El trabajo presentado en esta tesis nos da la oportunidad de ir al siguiente orden de aproximación. Uno puede truncar la torre de las ecuaciones de SDE al nivel de la función de 4 puntos, otra vez conservandose la identidad WFGTI y consistentemente resolviendo el conjunto acoplado de las ecuaciones de SDEs para las funciones al orden de 2 y 3 puntos para llegar a su más exactas soluciones. Un paso natural es probar la estructura no perturbativa y las estructuras vitalmente importantes de los vértices de 4 puntos en QCD a través de las generalizadas identidades de Slavnov-Taylor.
- Como el nombre lo sugiere, las partes transversas permanecen indeterminadas por la identidad de WFGTI. Sin embargo, con la ayuda de la evaluación completa de este vértice a un lazo, las piezas desconocidas pueden ser extraídas a tal orden. Esto debería de servirnos como una guía para sus posibles extensiones no perturbativas. Cualquier intento debería de reproducir este resultado perturbativo en el régimen de acoplamiento débil.

Apéndice A

Parametrización de Feynman

A.1. Algunas Integrales Estándar

Primero listamos las integrales estándar que más frecuentemente encontramos en la evaluación de integrales de lazos.

$$\int \frac{d^4 w}{(w^2 + s)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-2}}, \quad (\text{A.1})$$

$$\int d^4 w \frac{w^\mu}{(w^2 + s)^n} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\int d^4 w \frac{w^\mu w^\nu}{(w^2 + s)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-3)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-3}}, \quad (\text{A.3})$$

$$\int \frac{d^4 w}{(w^2 + 2w \cdot q + s)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(s - q^2)^{n-2}}, \quad (\text{A.4})$$

$$\int d^4 w \frac{w^\mu}{(w^2 + 2w \cdot q + s)^n} = -i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{q^\mu}{(s - q^2)^{n-2}}, \quad (\text{A.5})$$

$$\int d^4 w \frac{w^\mu w^\nu}{(w^2 + 2w \cdot q + s)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma((n-3))}{2\Gamma(n)} \frac{[2(n-3)q^\mu q^\nu + (s - q^2)g^{\mu\nu}]}{(s - q^2)^{n-2}}. \quad (\text{A.6})$$

La fórmula (A.1) la hemos derivado anteriormente en la sección ?? realizando la integración sobre el contorno de integración de w^0 y la subsecuente la integración con respecto a $\mathbf{w}$ usando coordenadas polares.¹ La ecuación (A.2) es obviamente de simetría. Las ecuaciones (A.4) y (A.5) se siguen de (A.1) y (A.2) respectivamente por un cambio de variables de w y s a

$$w \rightarrow w + q, \quad s \rightarrow s - q^2. \quad (\text{A.7})$$

Diferenciando la ecuación (A.5) con respecto a q_ν nos conduce a la ecuación (A.6), y tomando $q = 0$ en la ecuación (A.6) obtenemos la ecuación (A.3). Podemos generalizar las

¹Para más detalles ver la referencia [52].

fórmulas (A.1)-(A.6) a un espacio D -dimensional. Para una referencia rápida, escribimos algunas de estas formulas:

$$\int \frac{d^D w}{(w^2 + s)^n} = (-1)^n i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}} , \quad (\text{A.8})$$

$$\int d^D w \frac{w^\mu}{(w^2 + s)^n} = 0 , \quad (\text{A.9})$$

$$\int d^D w \frac{w^\mu w^\nu}{(w^2 + s)^n} = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-D/2-1}} , \quad (\text{A.10})$$

$$\int d^D w \frac{w^2}{(w^2 + s)^n} = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{D}{s^{n-D/2-1}} , \quad (\text{A.11})$$

donde la ecuación (A.11) se sigue de la ecuación (A.10), ya que

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = D . \quad (\text{A.12})$$

Las ecuaciones (A.8)-(A.11), son en primer lugar derivadas para valores enteros de D . Para valores no enteros, las integrales son definidas por las expresiones de los lados derechos de estas ecuaciones. Podemos escribir $D = 4 - 2\epsilon$ y luego requerimos tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$, es decir $D \rightarrow 4$. Otras integrales que involucran tensores más complicados en el numerador de la integral son fáciles de obtener de las fórmulas de arriba por diferenciación y cambios de variables, pero para nuestro proposito con las anteriores es suficiente.

A.2. Parametrización de Feynman

Las integrales (A.1)-(A.6) contienen un sólo factor cuadrático, elevado a la potencia n , en los denominadores, usualmente nosotros tratamos con integrales que contienen un producto de varios factores en el denominador. Estos términos son reducidos a la forma deseada usando una técnica ingeniosa dada por Feynman. Para el producto de dos factores cuadráticos a y b , comenzamos con la identidad

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dt}{t^2} . \quad (\text{A.13})$$

Definiendo el *parámetro de Feynman* z como

$$t = b + (a-b)z , \quad (\text{A.14})$$

La ecuación (A.13) puede ser escrita

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a-b)z]^2} . \quad (\text{A.15})$$

Vemos que introduciendo el parámetro de Feynman z hemos expresado $1/ab$ en términos de un sólo factor elevado a la potencia 2. Aunque la integral (A.15) tenga la apariencia de ser más complicada, veremos que la parametrización de Feynman nos permite evaluar todas las integrales directamente. El método anterior se puede extender fácilmente. Para tres factores, el resultado alternativo es

$$\begin{aligned}\frac{1}{abc} &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{[a + (b-a)x + (c-b)y]^3} \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{1}{[a + (b-a)x + (c-a)z]^3}\end{aligned}\quad (\text{A.16})$$

las cuales se pueden probar integrando con respecto a y y z respectivamente y usando la ecuación (A.15). La ecuación (A.16) se puede generalizar a un número arbitrario de factores, y el resultado es

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_0 a_1 a_2 \cdots a_n} &= \Gamma(n+1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \\ &\quad \times \frac{1}{[a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_n]^{n+1}}\end{aligned}\quad (\text{A.17})$$

la cual es establecida por inducción. Otros resultados útiles son obtenidos por diferenciación con respecto a uno o más parámetros. Por ejemplo, diferenciando la ecuación (A.15) con respecto a a obtenemos

$$\frac{1}{a^2 b} = 2 \int_0^1 dz \frac{z}{[b + (a-b)z]^3} . \quad (\text{A.18})$$

En la misma manera podemos obtener otras expresiones más complicadas.

A.3. La Función Gamma

De las identidades de la Función Gamma tenemos que

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \Gamma(1 + \epsilon) . \quad (\text{A.19})$$

Por una expansión de Taylor ($\epsilon \ll 1$)

$$\begin{aligned}\Gamma(1 + \epsilon) &= \Gamma(1) + \epsilon \Gamma'(1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= 1 + \epsilon \Gamma(1) \psi_1(1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= 1 - \epsilon \gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2) ,\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned}\Gamma(\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} (1 - \epsilon \gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \\ &= \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) ,\end{aligned}\quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(-1+\epsilon) &= -\frac{1}{1-\epsilon}\Gamma(\epsilon) = -(1+\epsilon+\epsilon^2+\dots)\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma+\mathcal{O}(\epsilon)\right) \\
&= -\left[\frac{1}{\epsilon}+1-\gamma+\mathcal{O}(\epsilon)\right],
\end{aligned} \tag{A.22}$$

donde γ es la constante de Euler:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0,5772157. \tag{A.23}$$

Además

$$\psi_1(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+z}\right). \tag{A.24}$$

Cuando $z = n = \text{entero}$

$$\psi_1(n) = -\gamma + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r}; \quad \psi_1(1) = -\gamma. \tag{A.25}$$

Bibliografía

- [1] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. **D7**, 1888 (1973).
- [2] I. S. Grandshteyn and I. M. Ryzhik, “*Table of Integrals, Series and Products*”, cuarta edición, Academic Press, New York, (1995).
- [3] L. H. Ryder, “*Quantum Field Theory*”, Cambridge University Press, (1985).
- [4] F. A. Berends, A.I. Davydychev and V. A. Smirnov, Nucl. Phys. **B478** (1996) 59-89.
- [5] J.C. Ward, Phys. Rev. **78**, 182 (1950); E.S. Fradkin, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **29**, 258 (1955) [Sov. Phys. JETP **2**, 361 (1956)]; H.S. Green, Proc. Phys. Soc., London, Sect. **A66**, 873 (1953); Y. Takahashi, Nuovo Cim. **6** 371 (1957).
- [6] L.D. Landau and I.M. Khalatnikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **29**, 89 (1956); L.D. Landau and I.M. Khalatnikov, Sov. Phys. JETP **2**, 69 (1956); E.S. Fradkin, Sov. Phys. JETP **2**, 361 (1956); K. Johnson and B. Zumino, Phys. Rev. Lett. **3**, 351 (1959); B. Zumino, J. Math. Phys. **1**, 1 (1960); S. Okubo, Nuovo Cim. **15**, 949 (1960); I. Bialynicki-Birula, Nuovo Cim. **17**, 951 (1960).
- [7] A. Salam, Phys. Rev. **130**, 1287 (1963); J. Strathdee, Phys. Rev. **135**, 1428 (1964); R. Delbourgo and P. West, Phys. Lett. **B72**, 96 (1977); R. Delbourgo, Nuovo Cim. **A49**, 484 (1979); R. Delbourgo and B.W. Keck, J. Phys. **G6**, 275 (1980); R. Delbourgo, Austral. J. Phys. **52**, 681 (1999).
- [8] D.C. Curtis and M.R. Pennington, Phys. Rev. **D42**, 4165 (1990); D.C. Curtis and M.R. Pennington, Phys. Rev. **D44**, 536 (1991); D.C. Curtis and M.R. Pennington, Phys. Rev. **D48**, 4933 (1993); A. Bashir and M.R. Pennington, Phys. Rev. **D50**, 7679 (1994); A. Bashir and M.R. Pennington, Phys. Rev. **D53**, 4694 (1996).
- [9] A. Bashir, Phys. Lett. **B491**, 280 (2000); A. Bashir and A. Raya, Phys. Rev. **D66** 105005 (2002); A. Bashir and R. Delbourgo, J. Phys. **A37** 6587 (2004); A. Bashir and A. Raya, proceedings of “2004 International Workshop on Dynamical Symmetry Breaking”, **257** (2004); A. Bashir and A. Raya, Nucl. Phys. **B709**, 307 (2005); A. Bashir and A. Raya, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B141**, 259 (2005); A. Bashir and A. Raya, “*Gauge Independent Chiral Condensate in QED3*” hep-ph/0511291; A. Bashir and A. Raya, AIP Conf. Proc. **892**, 245 (2007).

- [10] J. S. Ball and T. W. Chiu, Phys. Rev. **D22**, 2542 (1980).
- [11] A. Kizilersü, M. Reenders and M. R. Pennington “*One-loop QED vertex in any covariant gauge: Its complete analytic form*”, Phys. Rev. **D52**, 1242 (1995).
- [12] A. Bashir, A. Kizilersü and M.R. Pennington, Phys. Rev. **D57**, 1242 (1998).
- [13] A. Bashir, A. Kizilersü and M.R. Pennington, *Analytic Form of the One Loop Vertex and the Two Loop Fermion Propagator in Three Dimensional Massless QED*, Adelaide University preprint no. ADP-99-8/T353, Durham University preprint no. DTP-99/76, hep-ph/9907418.
- [14] A. Bashir, A. Kizilersü and M.R. Pennington, Phys. Rev. **D62**, 085002 (2000).
- [15] A. Bashir y A. Raya, Phys. Rev. D **64**, 105001 (2001).
- [16] G.S. Adkins, M. Lymberopoulos, and D.D. Velkov, Phys. Rev. **50** 4194 (1994).
- [17] A. I. Davydychev, P. Osland and L. Saks *Quark-gluon vertex in arbitrary gauge and dimension*, Phys. Rev. **D63**, 014922 (2000).
- [18] *Elementary Particles and Their Currents* (Freeman, San Francisco, 1968).
- [19] A. Salam and R. Delbourgo, *Phys. Rev.* **135** B1389, (1964); R. Delbourgo and P. West, J. Phys. A: Math Gen. **10** 1049 (1977); R. Delbourgo, *J. Phys* **A10** 1369 (1977).
- [20] A.B. Waites, *Gauge Theories in Three Dimensions*, Ph. D. thesis, University of Tasmania, Hobart, Australia, (1994).
- [21] C. Savkli, F. Gross and J. Tjon, Phys. Atom. Nucl. **68** 842 (2005); Yad. Fiz. **68** 874 (2005).
- [22] D.J. Gross, R.D. Pisarski and L.G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. **53** 43 (1981).
- [23] M. Abramowitz and I.A. Stegun (eds.), “*Handbook of Mathematical Functions*”, Dover Publications, (1965).
- [24] Y. Takahashi, “*Canonical Quantization and Generalized Ward Relations – Foundation of Non Perturbative Approach*” in Quantum Field Theory, Elsevier Science Publishers, (19-37), (1986).
- [25] K.-I. Kondo, Int. J. Mod. Phys. **A12** 5651 (1997).
- [26] H.-X He F. C. Khanna and Y. Takahashi, Phys. Lett. **B480** 222 (2000).
- [27] M. R. Pennington and R. Williams, J. Phys. **G32** 2219 (2006).

- [28] H.-X He and F. C. Khanna, Int. J. Mod. Phys. **A21** 2541 (2006).
- [29] C. Anastasiou, E. W. N. Glover and C. Oleari “*Scalar One-Loop Integrals using the Negative-Dimension Approach*”, hep-ph/9907494.
- [30] E. E. Boos and A. I. Davydychev, Theor. Math. Phys. **89**,1052 (1991); Teor. Mat. Fiz. **89**, 56 (1991).
- [31] A.A. Slavnov, Teor. Mat. Fiz. **10** 153 (1972) [Theor. Math. Phys. **10** 99 (1972)]; J.C. Taylor, Nucl. Phys. **B33** 436 (1971).
- [32] C. Kellermann and C. S. Fischer, “*Running coupling from the four-gluon vertex in Landau gauge Yang-Mills theory*”, Phys. Rev. **D 78**,025015 (2008).
- [33] A. Bashir, Y. Concha-Sánchez and R. Delbourgo, Phys. Rev.**D76**, 065009 (2007).
- [34] A. I. Davydychev, P. Osland y O. V. Tarasov, Phys. Rev. **D 54** 4087 (1996); *Erratum-ibid* **D 59** 109901 (1999).
- [35] A. I. Davydychev and A. G. Grozin, Eur. Phys. J. **C 20** 333 (2001).
- [36] A. Bender, W. Detmold and A.W. Thomas, Phys. Rev. **C65** 065203 (2002).
- [37] W. Beenakker, A. Denner, Nucl. Phys. **B338** (1990).
- [38] A. I. Davydychev, “*Standard and hypergeometric representations for loop diagrams and the photon-photon scattering*” (published in the proceedings of International Seminar on Quarks (Quarks 92), Zvenigorod, Russia, 11-17 May 1992) Zvenigorod Quarks, 260-270 (1992).
- [39] J. Fleischer, F. Jegerlehner and O. V. Tarasov, Nucl. Phys. **B672** (2003).
- [40] V. Smirnov, Springer Tracts Mod. Phys. **211** 1 (2004).
- [41] A.I. Davydychev “*General results for massive N-point Feynman diagrams with different masses*”, J. Math Phys. **33** (1), 1992.
- [42] A. I. Davydychev “*Some exact results for N-point massive Feynman integrals*”, J. Math. Phys. **32** (4), 1991.
- [43] J. Fleischer, J. Gluza, A. Lorca and T. Riemman, “*First order radiative corrections to Bhabha scattering in d dimensions*”, hep-hp/0606210v2 (2006).
- [44] J.G. Korner, Z. Merebashvili, M. Rogal, Phys. Rev. **D73** 034030 (2006).
- [45] W. Beenakker *et. al.*, Nucl. Phys. **B653** 151 (2003).
- [46] J.R. Andersen, T. Binoth, G. Heinrich and J.M. Smillie, arXiv:0709.3513.

- [47] G. Rodrigo, A. Santamaria and M.S. Bilenky, J. Phys. G 25 (1999) 1593.
- [48] R.K. Ellis, G. Zanderighi, JHEP **0802** 002 (2008).
- [49] C. Bernicot y J.-Ph. Guillet, JHEP **059** 01 (2008).
- [50] N. Kaiser and J.M. Friedrich, *Radiative corrections to pion Compton scattering*, arXiv:0806.2614 [nucl-th], (2008).
- [51] C. Anastasiou, E.W.N. Glover and M.E. Tejeda-Yeomans, Nucl. Phys. **B629**, 255 (2002).
- [52] J. J. Sakurai, “*Advanced Quantum Mechanics*”, Addison-Wesley, (1967).
- [53] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “*An Introduction to Quantum Field Theory*”, Westview Press, (1995).
- [54] M. Hans, “*An electrostatic example to illustrate dimensional regularization and renormalization group technique*” Am.J.Phys. **51**, 694 (1983).
- [55] J. D. Jackson, “*Classical Electrodynamics*”, segunda edición, John Wiley & Sons, New York, (1975).
- [56] F. Gross, “*Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*”, John Wiley & Sons, New York, (1999).
- [57] F. Mandl and G. Shaw, “*Quantum Field Theory*”, John Wiley & Sons, (1984).
- [58] F. Halzen and A. D. Martin, “*Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*”, John Wiley & Sons, New York, (1984).
- [59] A. Bashir, L. X. Gutierrez-Guerrero and Y. Concha-Sánchez “*Scalar Quantum Electrodynamics: Perturbation Theory and Beyond*”, Proceedings of the X Mexican Workshop on Particles and Fields, Morelia, Mexico, eds. A. Bashir, V. Villanueva, and L. Villaseñor, AIP Conference Proceedings **279**, American Institute of Physics, New York 2006.
- [60] A. Bashir, Y. Concha-Sánchez, R. Delbourgo and M. E. Tejeda-Yeomans, “*Off-shell Green functions: One loop with growing legs*”, Proceedings of the XI Mexican Workshop on Particles and Fields, Tuxtla Gutierrez, Mexico, published in AIP Conf.Proc.1026:127-131,2008.
- [61] A. Bashir, Y. Concha-Sánchez, R. Delbourgo and M. E. Tejeda-Yeomans “*On the Compton scattering vertex for massive scalar QED*” enviado a Phys. Rev. D.
- [62] A. Bashir, Y. Concha-Sánchez, R. Delbourgo and J. J. Toscano “*The anapole moment in scalar quantum electrodynamics*” por ser enviado.

- [63] C. Anastasiou, E. W. N. Glover and C. Oleari, Nucl. Phys. **B572**, 445 (2000).
- [64] A. I. Davydychev “*A simple formula for reducing Feynman diagrams* preprint 91-10/214.
- [65] A.I. Davydychev, Phys. Lett. **B263**, 107 (1991).
- [66] T. Appelquist and R. Pisarski, Phys. Rev. **D23** (1981) 2305.
- [67] T. Appelquist and U. Heinz, Phys. Rev. **D24** (1981) 2169.
- [68] R.S. Van Dyck, P.B. Schwinberg, H.G. Dehmelt, Phys. Rev. Lett. **59**, 26 (1987).
- [69] R. Delbourgo, J. Phys. **A36**, 11697 (2003); D. Kreimer, Nuc. Phys. Proc. Suppl. **135**, 238 (2004).
- [70] C.N. Parker, J. Phys. **A17**, 2873 (1984); R. Delbourgo and R.B. Zhang, J. Phys. **A17**, 3593 (1984).
- [71] H. Cheng and T.T. Wu, *Expanding Protons: Scattering at High Energies*. MIT Press. USA. (1987); K. S. Bjorkvoll, G. Fäldt and P. Oslan, Nucl. Phys. **B386** 303 (1992).
- [72] Z. Bern, L. Dixon, A. Ghinculov and H.L. Wong, ”QCD and QED corrections to Light-by-Light Scattering”, JHEP 0111:031 (2001).
- [73] Elementary Particles and Their Currents (Freeman, San Francisco, 1968).
- [74] G. Passarino and M. Veltman, Nucl. Phys. **B160**, 151 (1979).
- [75] R.S. Van Dyck, P.B. Schwinberg, H.G. Dehmelt, “*New high precision comparison of electron and positron G factors*”, Phys. Rev. Lett. **59**, 26 (1987).
- [76] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G.R. Dvali, “*The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*”, Phys. Lett **B429**, 263 (1998).
- [77] C. Anastasiou, Z. Bern, L. J. Dixon and D. A. Kosower, Phys. Rev. Lett. **91**, 251602 (2003); Z. Bern, M. Czakon, L. J. Dixon, D. A. Kosower and V. A. Smirnov, Phys. Rev. **D 75**, 085010 (2007).
- [78] C. Anastasiou and A. Daleo, “*Numerical evaluation of loop integrals*”, JPEP10 (2006) 031.
- [79] J. Fleischer, T. Riemann and O. V. Tarasov, “*Analytic ε -expansion of the scalar one-loop Bhabha box function*”, Acta Physica Polonica B **34** (2003).
- [80] A. V. Bogdan and R. N. Lee, “*Differential equations and high-energy expansion of two-loop diagrams in D dimensions*”, Nucl. Phys. **B 732**, (2006) 169-182.

- [81] R. Bonciani, P. Mastrolia and E. Remiddi, “*Vertex diagrams for the QED form factors at the 2-loop level*”, Nucl. Phys. **B 661**, (2003) 289.
- [82] R. Bonciani, P. Mastrolia and E. Remiddi, “*QED vertex form factors at two loops*”, Nucl. Phys. **676**, (2004) 399-452.
- [83] T. G. Birthwright, E. W. Nigel Glover and P. Marquard, “*Master integrals for massless two-loop vertex diagrams with three offshell legs*”, JPEP09 (2004) 042.
- [84] A. I. Davydychev, “Explicit results for all orders of the ε expansion of certain massive and massless diagrams”, Phys. Rev. **D 61**, 087701 (2000).
- [85] N.I. Ussyukina and A.I. Davydychev, Phys. Lett. **B298** 363 (1993); N.I. Ussyukina and A.I. Davydychev, Phys. Lett. **B332** 158 (1994); N.I. Ussyukina and A.I. Davydychev, Phys. Lett. **B348** 503 (1995).
- [86] R. Bonciani, P. Mastrolia and E. Remiddi, Nucl. Phys. **B661** 289 (2003); R. Bonciani, P. Mastrolia and E. Remiddi, Nucl. Phys. **B676** 399 (2004); R. Bonciani, P. Mastrolia and E. Remiddi, Nucl. Phys. **B702** 359 (2004).
- [87] T.G. Birthwright, E.W.N. Glover and P. Marquard, **JHEP09** 042 (2004).