Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Томский политехнический университет»

На правах рукописи

Чернявский Дмитрий Викторович

НЕКОТОРЫЕ КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНЫЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ И ТЕОРИИ ПОЛЯ

01.04.02 – Теоретическая физика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор РАН
Галажинский Антон Владимирович

Томск – 2020

Оглавление

Введение

Актуальность исследования. Конформные теории уже давно находятся в центре пристального внимания исследователей. Уравнения Максвелла, безмассовые уравнения Дирака и Клейна–Гордона, свободное уравнение Шредингера и даже многомерный гармонический осциллятор – все это простейшие классические примеры систем, проявляющих конформную инвариантность. И если конформная симметрия в упомянутых выше системах является скорее интересным математическим артефактом, то во множестве других теорий наличие конформной симметрии можно рассматривать как ключевое свойство, которое приводит к физически значимым следствиям. Так, например, двумерные конформные теории поля могут служить для описания критических явлений в статистической физике [1, 2], а также играют ключевую роль в теории струн [3], которая по-прежнему считается основным кандидатом на роль единой теории всех фундаментальных взаимодействий.

Мощный всплеск интереса к конформной симметрии связан с развитием идеи голографического принципа и AdS/CFT–соответствия [4–6], согласно которым в общем случае теория гравитации в асимптотически анти-де-ситтеровом пространстве имеет дуальное описание в терминах конформной теории поля на границе этого пространства. Со временем идеи и аппарат AdS/CFT–соответствия стали проникать в самые разные области теоретической физики: от физики черных дыр [7–9], до теории конденсированного состояния вещества [10, 11].

В физике черных дыр была выдвинута гипотеза так называемого $Kerr/CFT$–соответствия [9], согласно которой, микросостояния, определяющие энтропию вращающейся экстремальной черной дыры Керра, могут быть описаны в рамках двумерной конформной теории поля. Особенно плодотворной и более успешной в реализации идея дуального описания микросостояний черных дыр оказалась для теорий гравитации в трехмерном пространстве–времени [7,12–14]. Исследования в этом направлении начались гораздо раньше появления идеи Kerr/CFT–соответствия. Первый результат, который сейчас можно интерпретировать в рамках общего подхода AdS/CFT–соответствия, был получен задолго до появления самой гипотезы AdS/CFT и заключался в том, что была установлена алгебра симметрии асимптотически анти-де-ситтерового пространства в трехмерном пространстве–времени, которая оказалась изоморфной двум копиям алгебр Вирасоро [15]. Следующее отсюда предположение о том, что гравитация в трехмерном пространстве Анти-де-Ситтера имеет дуальное описание в терминах двумерной конформной теории поля, дало возможность расчитать энтропию черной дыры BTZ [16], используя известную в этой теории формулу Карди [13].

Гравитация в трехмерном пространстве–времени является топологической теорией и устроена гораздо проще своих аналогов в пространствах более высокой размерности. Эта простота, с одной стороны, и многие интересные свойства, такие, как, например, существование черных дыр, с другой, привлекает внимание исследователей к $3D$ гравитации и к проблеме ее дуального описания. При этом одним из основных инструментов для изучения дуального описания гравитации стал анализ асимптотической симметрии методами ковариантного фазового пространства [17, 18]. В серии недавних работ изучалась асимптотическая динамика и асимптотическая алгебра симметрии в различных расширениях гравитации в трехмерном пространстве–времени, включая суперсимметричные [19–24], теории с высшими спинами (см., например, [25]), а также так называемые теории гипергравитации [26, 27].

Следует отметить и существование другого подхода, опирающегося на модели суперконформной механики, в рамках которого предлагалось описание микросостояний черных дыр [28, 29]. В частности, в [28] было выдвинуто предположение о том, что $N = 4$ суперконформное расширение модели Калоджеро может дать микроскопическое описание экстремальной черной дыры Райсснера–Нордстрема. Несколько позже модели (супер)конформных механик стали изучаться и в контексте AdS_2/CFT_1–соответствия [30–32] (см. также последние работы по этой тематике [33, 34]). Эти исследования стимулировали интерес к суперконформной механике, причем не только в упомянутых приложениях, но и как систем, представляющих самостоятельный интерес.

Нерелятивистская конформная симметрия и нерелятивистская версия AdS/CFT–соответствия заслуживают особого внимания, поскольку они могут быть связаны с системами, реализуемыми в лабораторных условиях. В работах [10,35] было выдвинуто предположение о том, что фермионы, удовлетворяющие условию унитарности (см., например, [36–39]), имеют дуальное описание в теории гравитации с нерелятивистской конформной симметрией. Таким образом, идеи AdS/CFT–соответствия нашли применение и в теории конденсированного состояния вещества. Исследования в данном направлении вызвали большой интерес к изучению нерелятивистской конформной симметрии, который сохраняется и сегодня.

Степень разработанности темы исследования. Как уже отмечалось выше, конформная симметрия играет важную роль в различных разделах современной физики. Настоящее диссертационное исследование посвящено построению и изучению конформно–инвариантных моделей суперсимметричной механики и теории поля. В этом контексте центральным объектом является конформная группа в одномерном пространстве $SL(2,R) \simeq SO(1,2) \simeq SU(1,1)$, ее суперсимметричные расширения и нерелятивистские конформные группы, в которые $SL(2,R)$ входит в качестве подгруппы.

Исследование одномерных конформных систем как на классическом, так и на квантовом уровнях, восходит к известной работе Альфаро, Фубини и Фурлана [40]. Позднее были построены и первые $N = 1$ и $N = 2$ суперсимметричные обобщения конформной механики [41, 42]. Интерес к моделям суперконформной механики мотивирован развитием AdS/CFT–соответствия и возможными приложениями в физике черных дыр. В частности, в статье [29] было продемонстрированно, что движение (супер)частицы вблизи горизонта событий заряженной черной дыры описывается моделью (супер)конформной механики. За ней последовала серия работ, посвященная построению и изучению моделей суперконформной механики [43–54].

Существует несколько основных подходов к построению моделей суперконформных механик с расширенной суперсимметрией $N > 1$. Наиболее популярным является суперполевой формализм [49, 52, 54–59]. Однако для суперконформных моделей с $N > 4$ такой подход неэффективен, поскольку технически оказывается крайне затруднительно выделить неприводимые супермультиплеты, накладывая связи на суперполя [60]. Модели суперконформной механики также можно строить в рамках канонического формализма [51, 53, 61, 62], опираясь на структуру соотношений супералгебры. Однако для $N > 4$ также имеет свои трудности [63]. Некоторые модели можно построить путем размерной редукции теорий, определенных в пространствах более высокой размерности [64, 65]. Один из наиболее эффективных инструментов является метод нелинейных реализаций [44, 47, 50, 66], на который мы опираемся в данном исследовании.

Для того, чтобы ограничить произвол в выборе функционала действия, а также построить модели с минимальным количеством фермионов, целесообразно рассматривать системы, обладающие κ–симметрией, либо ее частью [67]. Для этого удобно использовать формализм, предложенный в котексте теории струн, и использовавшийся при построении моделей суперструн и супербран на однородных пространствах [47, 69–73]. В данной работе мы сосредоточимся на построении и изучении моделей $N > 4$ суперконформной механики, а также уделим особое внимание специальному случаю $N = 4$, соответствующему исключительной супергруппе $D(2, 1; \alpha)$. Таким образом, будут построены и исследованы одномерные суперконформные модели, ассоциированные с некоторыми простыми суперконформными алгебрами.

Наиболее общим нерелятивистским расширением алгебры $sl(2, R)$ является l–конформная алгебра Галилея [74,75]. Помимо алгебры Галилея и конформной подалгебры $sl(2, R)$, последняя включает набор дополнительных векторных генераторов, число которых характеризуется целым либо полуцелым параметром l. Свободная частица, описываемая уравнением с высшими производными, является простейшим примером реализации l–конформной алгебры Галилея, причем дополнительные генераторы можно интерпретировать как генераторы ускорений, обобщая, таким образом, галилеевские бусты [76]. Несмотря на активное изучение l–конформной алгебры Галилея [77–85], в рамках этого направления исследований по-прежнему остается множество открытых вопросов.

Интересной особенностью l–конформной алгебры Галилея является то, что она допускает бесконечномерное расширение [75,80,86,87]. Можно отметить сходство структуры этой алгебры с алгебрами $sl(N, R)$ и их бесконечномерными обобщениями, известными как алгебры W_N. Алгебра W_N является асимптотической алгеброй симметрии в теории гравитации в трехмерном пространстве–времени, взаимодействующей с полями высших спинов [25, 88, 89] и ожидается, что дуальная теория должна быть двумерной конформной теорией поля с данной группой симметрии. Наблюдение о схожести структур l–конформной алгебры и $sl(N)$, а также их бесконечномерных расширений, ставит вопрос о возможной связи l–конформной симметрии Галилея с теорией высших спинов в трехмерном простран- стве–времени.

Описание техмерной теории гравитации, взаимодействующей с полями высших спинов, опирается на формулировку Черна–Саймонса [25]. Теория Черна–Саймонса может быть построена для любой алгебры Ли, на которой существует невырожденная билинейная форма. К сожалению, l–конформная алгебра Галилея не допускает существование такой формы. Поэтому для анализа связи l–конформной симметрии Галилея с теорией высших спинов необходимо некоторым образом обойти эту проблему. В недавней работе [90] было построено расширение алгебры Шредингера, которое обладает невырожденной билинейной формой. Естественно попытаться обобщить эту конструкцию для других представителей семейства l–конформных алгебр. Это, в свою очередь, позволит построить теорию гравитации с (расширенной) l–конформной симметрией Галилея и проанализировать связь с теорией высших спинов.

Таким образом, в предлагаемой диссертационной работе ставятся следующие **цели**:

1. Исследование суперконформной механики с расширенной суперсимметрией в рамках метода нелинейных реализаций и установление соответствия с частицами, движущимися вблизи горизонта событий черных дыр.

2. Исследование динамических реализаций l–конформной группы Галилея, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка.

3. Исследование трехмерной теории гравитации с калибровочной группой, соответствующей расширенной l–конформной симметрии Галилея.

4. Исследование l–конформной симметрии Галилея в контексте теории полей высших спинов.

Для достижения поставленных целей решены следующие **задачи**:

1. Развит метод построения моделей суперконформной механики, инвариантных относительно преобразований из заданной конформной группы и обладающий калибровочной κ-симметрией.

2. Сформулирована новая процедура построения Риччи–плоских пространств и многообразий Эйнштейна с l–конформной группой симметрии Галилея.

3. Предложена новая схема построения динамических реализаций l–конформной группы Галилея, свободных от высших производных.

4. Построены метрики на факторпространствах l–конформной группы Галилея.

5. В рамках существующего подхода построены новые модели гравитации с расширенной калибровочной группой Галилея.

В результате решения поставленных задач и достижения основных целей, **на защиту выносятся следующие новые научные результаты**:

1. Построены новые модели $D(2,1;\alpha)$, $OSp(2|N)$ и $SU(1,1|N)$ суперконформной механики. Установлена взаимосвязь таких систем с моделями релятивистских частиц, движущихся вблизи горизонта событий экстремальных черных дыр

2. Построены новые решения вакуумных уравнений Эйнштейна и уравнений Эйнштейна с космологической постоянной, группа изометрии которых описывается l-конформной группой Галилея.

3. Построены новые динамические реализации l-конформной группы Галилея, не вовлекающие высших производных.

4. Построена новая модель трехмерной гравитации, группа калибровочных преобразований которой представлена расширенной l-конформной группой Галилея. Установлена взаимосвязь такой модели с теорией полей высших спинов в трехмерном пространстве-времени.

Личный вклад автора. Все приведенные в диссертационной работе результаты являются оригинальными и получены лично автором, либо при его непосредственном участии.

Методология и достоверность результатов работы. В рамках работы применялись стандартные математические методы теоретической физики (включая теорию (супер)групп и (супер)алгебр Ли, методы дифференциальной геометрии и т.д.), обеспечивающие достоверность результатов работы.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в работе результаты способствуют более глубокому пониманию современной теории (супер) конформной симметрии и ее приложений. Построенные в работе модели суперконформных частиц на факторпространствах супергурпп для $N > 4$ восполняют определенный пробел в литературе по этой тематике, а найденная связь с геометриями вблизи горизонта событий черных дыр, в том числе в пространствах размерности больше четырех, обобщает результаты работ, полученных ранее другими исследователями. Найденная в работе геометрическая реализация l–конформной симметрии Галилея может быть использована в дальнейшем в контексте нерелятивистской версии AdS/CFT–соответствия. Предложенные примеры динамических реализаций в терминах дифференциальных уравнений второго порядка вносят вклад в понимание структуры и свойств l–конформной симметрии Галилея. Построенные теории гравитации с расширенной l–конформной симметрией Галилея и исследование ее асимптотической группы симметрии проливает свет на неизвестную ранее связь с теорией полей высших спинов в трехмерном пространстве–времени.

Апробация результатов. Основные результаты работы опубликованы в шести статьях в международных рецензируемых журналах [91–96]. Результаты диссертационной работы докладывались на следующих международных конференциях: «Supersymmetry in Integrable Systems» (г. Дубна, 2014), «Supersymmetries and Quantum Symmetries» (г. Дубна, 2015), «Перспективы развития фундаментальных наук» (г. Томск, 2017), «Quantum Field Theory and Gravity» (г. Томск, 2018).

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. В приложении А приведены в явной форме структурные соотношения супералгебр $D(2,1;\alpha)$, $SU(1,1|N)$ и $OSp(4|N)$, а также обсуждаются различные технические подробности, относящиеся к первой главе. В приложении Б приведены соглашения и обозначения, которые используются в Главе 3. Помимо этого, Приложение Б включает дополнительные сведения, касающиеся алгебр $su(1,2)$ и $sl(3,R)$. Полный объем диссертации составляет 104 страницы, а список литературы включает в себя 131 наименование.

Глава 1 Модели суперконформных частиц на факторпространствах супергрупп

1.1 Построение факторпространства

Далее в работе мы будем часто прибегать к понятию факторпространства. Поэтому, прежде чем переходить к основной части главы, приведем основные сведения об этом понятии. Для этого рассмотрим некоторую $m+n$–мерную группу Ли G. В ней выделим n–мерную подгруппу H и зададим m–мерное факторпространство G/H. Отметим, что все рассуждения, приведенные ниже, справедливы и для случая супергрупп. Будем полагать, что подгруппа H генерируется операторами $J_i (i = 1, ..., n)$, в то время как факторпространство задается оставшимися генераторами $T_a (a = 1, ..., m)$. Не нарушая общности, можно считать, что генераторы T_a и J_i подчиняются структурным соотношениям

$$[J_i, J_j] = f_{ij}^k J_k, \quad [T_a, T_b] = f_{ab}^k J_k + f_{ab}^c T_c, \quad [J_i, T_a] = f_{ia}^c T_c + f_{ia}^k J_k. \tag{1.1}$$

Элемент факторпространства $u(x) = u(x^1, ..., x^m) \in G/H$ можно построить взяв экспоненту от генераторов T_a. Следует отметить, что все возможные параметризации факторпространства связаны друг с другом, поэтому не умаляя общности будем полагать, что элемент фактопространства зафиксирован в следующей форме:

$$u(x) = e^{x^1 T_1} \dots e^{x^m T_m}. \tag{1.2}$$

Далее определим формы Маурера–Картана L^a и L^i на факторпространстве G/H посредством выражения

$$u^{-1} du = L^a T_a + L^i J_i. \tag{1.3}$$

В отличие от форм Маурера–Картана, которые определяются на группе, формы на факторпространстве не инвариантны относительно действия всей группы G. Чтобы найти законы преобразования форм под действием группового элемента g, запишем соотношение

$$g(\epsilon) u(x) = u(x') h, \tag{1.4}$$

которое следует непосредственно из групповых свойств и где $h \in H$. В правой части этого соотношения x' обозначает координаты, преобразованные под действием группы, а ϵ – это набор параметров преобразования. Выразив $u(x')$ из этого выражения и подставив в определение форм Маурера–Картана (1.3), получим закон преобразования

$$\begin{aligned} &L^a(x)T_a = hT_a h^{-1}L(x'), \\ &L^i(x)M_i = hJ_i h^{-1}L^i(x') + hdh^{-1}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Таким образом, формы на факторпространстве, соответствующие генераторам T_a, преобразуются однородно, в то время как формы на подгруппе, связанные с генераторам J_i, относительно преобразований ведут себя как связности.

В дальнейшем нам понадобятся выражения, записанные для инфинитеземальных параметров преобразований ϵ. Для этого представим элемент h подгруппы H в первом порядке по ϵ

$$h = 1 - \epsilon^I W_I^i(x) J_i, \tag{1.6}$$

где $W_I^i(x)$ – набор функций от x, явное выражение которых зависит от параметризации элемента факторпространства. Подставив это разложение в первое равенство (1.5), найдем инфинитеземальный закон преобразования форм Маурера–Картана

$$L^a(x') = L^a(x) + L^c(x)\epsilon^I W_I^i f_{ic}^a. \tag{1.7}$$

Используя этот закон преобразования, можем построить инвариантные квадратичные комбинации форм Маурера–Картана на факторпространстве. Рассмотрим квадратичную форму

$$B_{ab}L^a L^b, \tag{1.8}$$

где B_{ab} некоторая матрица с постоянными элементами. Требование инвариантности этой квадратичной формы относительно преобразований из группы G накладывает на матрицу B_{ab} следующее ограничение

$$f_{i(c}^a B_{b)a} = 0, \qquad \forall i, c, b. \tag{1.9}$$

Отметим, что конечное выражение определяется лишь структурными постоянными алгебры и не зависит от конкретной параметризации факторпространства.

1.2 AdS_2 как факторпространство

Для построения моделей суперчастиц на факторпространствах различных супергрупп, а также для построения метрик, инвариантных относительно l–конфор- мной группы Галилея в следующих разделах будем использовать теоретико–группо- вой метод, описанный выше. Интересующие нас группы симметрии содержат конформную подгруппу $SO(1,2)$, структурные соотношения для которой имеют вид

$$[H, D] = H, \qquad [H, K] = 2D, \qquad [D, K] = K. \tag{1.10}$$

В качестве примера рассмотрим, как двумерное пространство анти-де-Ситтера возникает в рамках теоретико–групповой конструкции.

В качестве оператора, генерирующего подгруппу H, выберем генератор дилатаций D. Пространство анти–де–Ситтера может быть представлено как фактопространство G/H. Для простоты мы будем полагать, что радиус кривизны пространства AdS_2 равен единице. Для элемента данного факторпространства $u \in G/H$ выберем следующую параметризацию

$$u = e^{tH} e^{rK}, \tag{1.11}$$

где t и r – координаты на факторпространстве.

Действие группы на факторпространстве можно определить операцией умножения слева на групповой элемент $g = e^{\alpha H} e^{\beta K} e^{\gamma D}$, что приводит к законам преобразования

$$t' = t + \alpha + bt^2 + \gamma t, \qquad r' = r + \beta(1 - 2tr) - \gamma r, \tag{1.12}$$

где мы воспользовались формулой Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа

$$e^A \; T \; e^{-A} = T + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{[A, [A, \ldots [A, T] \ldots]}_{n \text{ times}} \tag{1.13}$$

Один–формы Маурера-Картана $u^{-1} d\tilde{G} = L_H H + L_K K + L_D D$

$$L_H = dt, \quad L_K = r^2 dt + dr, \quad L_D = -2r dt, \tag{1.14}$$

будут использоваться для построения метрики, инвариантной относительно действия группы $SO(2,1)$. Как обсуждалось в предыдущем разделе, формы Маурера–

Картана на факторпространстве, L_H и L_K, преобразуются относительно групповых преобразований (1.12) однородно. Мы можем воспользоваться соотношением (1.9) для нахождения квадратичной формы, составленной из L_H, L_K, инвариантной относительно действия группы $SO(1,2)$

$$ds^2 = L_H L_K = (r^2 dt^2 + dtdr). \tag{1.15}$$

В инвариантности квадратичной формы можно убедиться и непосредственно, восвользовавшись явным видом преобразований (1.12). Переопределив временную координату

$$t \to \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{r}\right) \tag{1.16}$$

можно переписать квадратичную форму (1.15) в виде стандартной метрики на AdS_2 в координатах Пуанкаре

$$ds^2 = r^2 dt^2 - \frac{dr^2}{r^2}, \tag{1.17}$$

где был отброшен общий множитель $\frac{1}{4}$.

1.3 Супер 0–брана на факторпространстве супергруппы $D(2,1;\alpha)$

В этом разделе мы построим функционал действия, описываюший супер 0–брану на факторпространстве супергруппы $D(2,1;\alpha)$. Соответствущая супералгебра в базисе, предложенном в работе [62], приведена в Приложении А. Зафиксируем подгруппу в виде $H = \{D, \mathcal{J}_3, I_\pm, I_3\}$ и построим факторпространство G/H, где $G = D(2,1;\alpha)$. Такой выбор подгруппы обусловлен тем, что бозонная часть факторпространства в данном случае имеет структуру произведения $AdS_2 \times S^2$. Далее определим стандартным образом формы Маурера–Картана

$$\begin{aligned} u^{-1}du = {} & HL_H + KL_K + i\left(L_Q Q + \bar{Q} L_{\bar{Q}} + L_S S + \bar{S} L_{\bar{S}}\right) + \mathcal{J}_m L_m \\ & + DL_D + i(I_+ L_{I_+} + I_- L_{I_-}) + I_3 L_{I_3} + \mathcal{J}_3 L_J, \end{aligned} \tag{1.18}$$

где u представляет собой элемент факторпространства, $m = 1,2$, и явная форма L_H, L_K и т.д., представлена ниже в уравнении (1.32). Можно убедиться, что правая часть этого выражения находится в согласии со свойствами эрмитова сопряжения операторов (3.86).

Как обсуждалось в предыдущем разделе, действие супергруппы G на факторпространстве G/H задает координатное преобразование $x \to x'$. Используя соотношение (1.7), можем найти явный вид преобразованных форм Маурера–Картана на фактопространстве

$$L_H \to L_H(1 - \varepsilon^C W_C^D), \quad L_K \to L_K(1 + \varepsilon^C W_C^D), \quad L_m \to L_n(\delta_{mn} + \varepsilon^C W_C^{J_3} \epsilon_{3nm}).$$

Отметим, что присутствие фермионных генераторов в алгебре не влияет на преобразования форм Маурера–Картана и он остается таким же, как и в случае чисто бозонной подалгебры. Используя указанный закон преобразования, можно найти инвариантные квадратичные формы

$$L_H L_K, \qquad L_m L_m. \tag{1.19}$$

В дальнейшем мы будем использовать их для построения кинетического члена в функционале действия модели супер 0–браны.

Стандартный метод построения члена Весса–Зумино для действия супер 0–браны сводится к поиску линейной комбинации внешних произведений один–форм Маурера–Картана, которая, в свою очередь, должна быть точной формой. Далее можно воспользоваться теоремой Стокса, что позволит представить слагаемое Весса–Зумино как интеграл по одномерному пространству, который в дальнейшем будем называть редуцированным членом Весса–Зумино. Поскольку два–формы и внешние производные форм Маурера–Картана связаны уравнениями Маурера–Картана, следует ожидать, что редуцированный член Весса–Зумино может быть выражен в виде линейной комбинацией бозонных форм Маурера–Картана. Для нахождения последней, заметим, что один–формы на подгруппе преобразуются как связности (1.5). В частности, законы преобразования форм L_J и L_D относительно левого действия группы на факторпространстве имеют вид

$$L_D \to L_D + df_D, \qquad L_J \to L_J + df_J, \tag{1.20}$$

где f_D и f_J обозначают некоторые функции, явная форма которых зависит от параметризации факторпространства. Таким образом, заключаем, линейную комбинацию этих форм можно использовать для построения редуцированного члена Весса–Зумино.

Подводя итог обсуждению в данном разделе, запишем действие супер 0–браны на факторпространстве супергруппы $D(2,1;\alpha)$

$$S = -\tilde{m} \int \sqrt{4L_H L_K - cL_m L_m} - \int (aL_D + bL_J), \qquad (1.21)$$

где $\tilde{m}$, c, a и b – набор постоянных параметров. Отметим, что если все фермионные переменные положить равными нулю, выражение под корнем будем описывать метрику в пространстве $AdS_2 \times S^2$.

1.3.1 κ–симметрия

Перейдем к изучении вопроса о наличии κ–симметрии в построенном в предыдущей главе действии. Будем следовать стандартной процедуре (см., например, [68,69]). Для этого, используя структурные соотношения супералгебры (3.87), найдем уравнения Маурера–Картана для бозонных форм в (1.55), взяв от них внешнюю производную

$$\begin{aligned}
dL_H &= -L_H \wedge L_D - 2iL_Q \wedge L_{\bar{Q}}, \\
dL_K &= L_K \wedge L_D - 2iL_S \wedge L_{\bar{S}}, \\
dL_D &= -2L_H \wedge L_K + 2i\left(L_Q \wedge L_{\bar{S}} + L_S \wedge L_{\bar{Q}}\right), \\
dL_a &= -\frac{1}{2}\epsilon_{abc}L_b \wedge L_c + 2\alpha\left(L_S\sigma_a \wedge L_{\bar{Q}} - L_Q\sigma_a \wedge L_{\bar{S}}\right).
\end{aligned} \qquad (1.22)$$

Используя эти уравнения, можно представить произвольные вариации один–форм Маурера–Картана в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\delta L_H &= d[\delta x_H] + [\delta x_D]L_H - L_D[\delta x_H] - 2i\left([\delta\psi]L_{\bar{Q}} - L_Q[\delta\bar{\psi}]\right), \\
\delta L_K &= d[\delta x_K] - [\delta x_D]L_K + L_D[\delta x_K] - 2i\left([\delta\eta]L_{\bar{S}} - L_S[\delta\bar{\eta}]\right), \\
\delta L_D &= d[\delta x_D] - 2[\delta x_H]L_K + 2[\delta x_K]L_H + \\
&\qquad +2i\left([\delta\psi]L_{\bar{S}} - L_Q[\delta\bar{\eta}] + [\delta\eta]L_{\bar{Q}} - L_S[\delta\bar{\psi}]\right) \\
\delta L_a &= d[\delta x_a] - \epsilon_{abc}[\delta x_b]L_c + \\
&\qquad +2\alpha\left([\delta\eta]\sigma_a L_{\bar{Q}} - L_S\sigma_a[\delta\bar{\psi}] - [\delta\psi]\sigma_a L_{\bar{S}} + L_Q\sigma_a[\delta\bar{\eta}]\right),
\end{aligned} \qquad (1.23)$$

где, следуя [50], мы ввели обозначение

$$[\delta Z^A] = \delta Z^M L^A{}_M \qquad (1.24)$$

для один–форм $L^A = dx^M L^A{}_M$. В частности, $[\delta x_H]$, $[\delta x_K]$, $[\delta x_D]$, $[\delta x_a]$ ассоциированны с формами L_H, L_K, L_D, L_a, соответственно, в то время как $[\delta\psi]$, $[\delta\bar\psi]$ относятся к L_Q, $L_{\bar Q}$ и $[\delta\eta]$, $[\delta\bar\eta]$ связаны с L_S, $L_{\bar S}$.

Как известно [69], преобразования κ–симметрии характеризуются условием равенства нулю $[\delta x^A]$, связанных с бозонными один–формами на факторпространстве, т.е.

$$[\delta x_H] = [\delta x_K] = [\delta x_m] = 0. \tag{1.25}$$

Принимая во внимание данный критерий, а также используя соотношения (1.23), можно записать вариацию действия (1.21) относительно преобразований κ–симметрии вне зависимости от конкретной параметризации факторпространства

$$\begin{aligned}\delta_\kappa S = 2\int\left\{\frac{2i\tilde m L_H[\delta\eta] - \alpha c\tilde m L_n[\delta\psi]\sigma_n}{\sqrt{4L_HL_K - cL_mL_m}} - i[\delta\psi](a + i\alpha b\sigma_3)\right\}L_{\bar S}\\ +2\int\left\{\frac{2i\tilde m L_K[\delta\psi] + \alpha c\tilde m L_n[\delta\eta]\sigma_n}{\sqrt{4L_HL_K - cL_mL_m}} - i[\delta\eta](a - i\alpha b\sigma_3)\right\}L_{\bar Q} + c.c.,\end{aligned} \tag{1.26}$$

где σ_n, $n = 1, 2$ и σ_3 обозначают матрицы Паули и мы опустили граничные члены $d[\delta x_D]$, $d[\delta x_J]$. Сравнивая слагаемые, вовлекающие $[\delta\eta]$ и $[\delta\psi]$, можно заключить, что действие инвариантно относительно преобразований κ–симметрии, если на постоянные параметры наложены ограничения

$$c = \alpha^{-2}, \qquad \tilde m^2 = a^2 + (\alpha b)^2. \tag{1.27}$$

Для дальнейшего удобства запишем в явной форме решение уравнения $\delta_\kappa S = 0$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}&[\delta\eta] = \kappa, \qquad [\delta\bar\eta] = \bar\kappa, \qquad [\delta\psi] = [\delta\eta]\Omega, \qquad [\delta\bar\psi] = \Omega^\dagger[\delta\bar\eta],\\ &\Omega = \frac{\sqrt{4L_HL_K - \alpha^{-2}L_mL_m}}{2\tilde m L_K}(a - i\alpha b\sigma_3) + i\alpha^{-1}\sigma_m\frac{L_m}{2L_K},\end{aligned} \tag{1.28}$$

где $\kappa = \kappa^\alpha$ – антикоммутирующий произвольный параметр и $\bar\kappa_\alpha = (\kappa^\alpha)^\dagger$ его комплексно–сопряженный партнер.

По построению, действие (1.21) инвариантно относительно преобразований глобальной суперсимметрии группы $D(2, 1; \alpha)$, а также локальной суперсимметрии, определяемой κ–преобразованиями, при условии, что постоянные параметры действия подчинены соотношениям (1.27). Помимо этого, действие имеет репараметризационную инвариантность, которая уменьшает число бозонных степеней свободы до трех. В свою очередь, калибровочная κ–симметрия оставляет лишь половину фермионных степеней свободы, что соответствует $(3,4,1)$–спермультиплету. Заключая этот раздел, отметим, что в случае $\alpha=-1$ наш анализ воспроизводит результаты работ [47, 97].

1.3.2 Фиксация калибровки и глобальная суперсимметрия

Обсуждение в предыдущем разделе проводилось безотносительно к выбору конкретной параметризации факторпространства. Теперь зафиксируем параметризацию элемента факторпространства в следующей форме:

$$u = e^{tH} e^{zK} e^{i(\psi Q + \bar{Q}\bar{\psi})} e^{i(\eta S + \bar{S}\bar{\eta})} \tilde{G}_R, \tag{1.29}$$

где $\tilde{G}_R$ обозначает элемент факторпространства подгруппы вращений

$$u_R = e^{\phi \mathcal{J}_1} e^{(\theta - \pi/2)\mathcal{J}_2}. \tag{1.30}$$

Используя данную параметризацию, можно найти явный вид форм Маурера–Картана и, соответственно, функционала действия (1.21).

Как было отмечено ранее, κ–симметрия уменьшает число фермионных степеней свободы наполовину. Мы можем это учесть, наложив калибровку

$$\eta = \bar{\eta} = 0. \tag{1.31}$$

Следует отметить, что в выборе калибровки для κ–симметрии необходимо соблюдать осторожность: калибровку необходимо согласовать со статическим решением [73] (см. также [97]). Можно убедиться явно, что (1.31) согласована со статическим решением и может быть использована без потери общности.

Чтобы упростить анализ, в дальнейшем мы будем иметь дело лишь с объектами в фиксированной калибровке. В частности, формы Маурера–Картана в фиксированной калибровке имеют вид

$$\begin{aligned}
&L_H = dt - i(\psi d\bar{\psi} - d\psi\bar{\psi}) - (1+2\alpha)L_K(\psi\bar{\psi})^2, && L_K = z^2 dt + dz,\\
&L_a = L_a^0 - 2\alpha L_K(\psi\sigma_b\bar{\psi})R_{ba}, && L_D = 2z dt\\
&L_Q = \left(d\psi + i(1+2\alpha)L_K(\psi\bar{\psi})\psi - z dt\psi\right)\Gamma, && L_S = L_K\psi\Gamma,\\
&L_{\bar{Q}} = \Gamma^\dagger\left(d\bar{\psi} - i(1+2\alpha)L_K(\psi\bar{\psi})\bar{\psi} - z dt\bar{\psi}\right), && L_{\bar{S}} = L_K\Gamma^\dagger\bar{\psi},\\
&L_{I_+} = -i(1+\alpha)L_K\bar{\psi}^2, && L_{I_-} = i(1+\alpha)L_K\psi^2,\\
&L_{I_3} = 2(1+\alpha)L_K(\psi\bar{\psi}),
\end{aligned} \tag{1.32}$$

где

$$L_1^0 = \sin\theta d\phi, \qquad L_2^0 = d\theta, \qquad L_3^0 = -\cos\theta d\phi. \tag{1.33}$$

В выражении выше мы использовали обозначение для элемента факторпространства u_R, соответствующего подгруппе вращений в присоединенном R_{ba} и спинорном Γ представлениях

$$u_R^{-1}\mathcal{J}_a u_R = R_{ab}\mathcal{J}_b, \qquad u_R^{-1} Q u_R = \Gamma Q, \tag{1.34}$$

которые могут быть явно выражены в форме

$$R_{ab} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & -\cos\theta \\ \\ -\cos\theta\sin\phi & \cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ \\ \cos\theta\cos\phi & \sin\phi & \sin\theta\cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \Gamma = e^{-\frac{i}{2}\phi\sigma_1} e^{-\frac{i}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\sigma_2}$$

и удовлетворяют условиям

$$\Gamma\sigma_a\Gamma^\dagger = R_{ba}\sigma_b, \qquad R_{ab}R_{ac} = \delta_{bc}. \tag{1.35}$$

Левое действие супергруппы $D(2,1;\alpha)$ на фактрпространстве (1.29) задает глобальные преобразования симметрии действия (1.21) до фиксации калибровки. Однако калибровочные условия (1.31) инвариантны лишь относительно действия бозонной подгруппы. После фиксации калибровки координатные преобразования имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\delta_H t = 1, \\
&\delta_D t = -t, \quad \delta_D z = z, \quad \delta_D \psi = -\frac{1}{2}\psi, \quad \delta_D \psi = -\frac{1}{2}\bar{\psi}, \\
&\delta_K t = t^2, \quad \delta_K z = 1 - 2tz, \quad \delta_K \psi = t\psi, \quad \delta_K \psi = t\bar{\psi}, \\
&\delta_a \phi = \sin^{-1}\theta R_{a1}, \quad \delta_a \theta = R_{a2}, \quad \delta_a \psi = \frac{i}{2}\psi\sigma_a, \quad \delta_a \bar{\psi} = -\frac{i}{2}\sigma_a\bar{\psi}, \\
&\delta_{I_3}\psi = \frac{i}{2}\psi, \qquad \delta_{I_3}\bar{\psi} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}, \qquad \delta_{I_+}\bar{\psi} = -\psi, \qquad \delta_{I_-}\psi = \bar{\psi},
\end{aligned} \tag{1.36}$$

где H, D, K, $\mathcal{J}_a$, $I_\pm$, I_3 относятся к временным трансляциям, дилатациям, специальным конформным преобразованиям, вращениям и $su(2)$–преобразованиям, соответственно. Для простоты мы положили параметры преобразования равными единице. Можно убедиться явно, что действие (1.21), построенное с использованием форм Маурера–Картана в фиксированной калибровке (1.32), инвариантно относительно преобразований (1.36).

Как уже отмечалось выше, условие (1.31), фиксирующее калибровку, не инвариантно относительно преобразований из суперконформной группы (см. Приложение А). Обычный способ восстановить вид преобразований симметрии сводится к нахождению компенсирующего κ–преобразования. Для дальнейшего удобства переопределим пространственную и временную координаты

$$t \to t + \frac{1}{z}, \qquad \psi \to \frac{\psi}{z}, \qquad \bar{\psi} \to \frac{\bar{\psi}}{z}, \tag{1.37}$$

в которых преобразования записываются как (см. также Приложение А)

$$\begin{aligned}
&\delta_Q z = -(\epsilon\bar{\psi})(\psi\bar{\psi}) - iz(\epsilon\bar{\psi}),\\
&\delta_Q \phi = 2\alpha \sin^{-1}\theta(\epsilon\sigma_a\bar{\psi})R_{a1}, \qquad \delta_Q\theta = 2\alpha(\epsilon\sigma_a\bar{\psi})R_{a2},\\
&\delta_Q\psi = \epsilon\left(z + i(\psi\bar{\psi})\right) + i(1+\alpha)(\epsilon\bar{\psi})\psi, \qquad \delta_Q\bar{\psi} = -i(1-\alpha)(\epsilon\bar{\psi})\bar{\psi},\\
&\delta_{\tilde{\kappa}} z = iz^2\left(\epsilon\Gamma^\dagger\Omega\Gamma\bar{\psi}\right), \qquad \delta_{\tilde{\kappa}}\psi = z^2\left(\epsilon\Gamma^\dagger\Omega\Gamma\right).
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Для суперконформных партнеров находим

$$\begin{aligned}
&\delta_S z = -i(1+tz)(\epsilon\bar{\psi}) - t(\epsilon\bar{\psi})(\psi\bar{\psi}),\\
&\delta_Q\phi = 2\alpha t\sin^{-1}\theta(\epsilon\sigma_a\bar{\psi})R_{a1}, \qquad \delta_Q\theta = 2\alpha t(\epsilon\sigma_a\bar{\psi})R_{a2},\\
&\delta_S\psi = \epsilon(1+tz) + itz\left(\epsilon(\psi\bar{\psi}) - (1+\alpha)\psi\right), \qquad \delta_S\bar{\psi} = -i(1-\alpha)t(\epsilon\bar{\psi})\bar{\psi},\\
&\delta_{\tilde{\kappa}} z = itz^2\left(\epsilon\Gamma^\dagger\Omega\Gamma\bar{\psi}\right), \qquad \delta_{\tilde{\kappa}}\psi = tz^2\left(\epsilon\Gamma^\dagger\Omega\Gamma\right),
\end{aligned} \tag{1.39}$$

где Ω определен в уравнении (1.28), а преобразования $\delta_{\bar{Q}}$, $\delta_{\bar{S}}$ могут быть получены эрмитовым сопряжением.

1.3.3 Бозонная часть функционала действия

Прежде чем проанализировать полный суперсимметричный функционал действия в фиксированной калибровке (1.21), рассмотрим его бозонную часть и покажем, что она описывает массивную частицу, движущуюся вблизи горизонта событий экстремальной черной дыры Райсснера–Нордстрема. Переопределив координаты в один–формах (1.32) следующим образом:

$$t \to \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{r}\right), \qquad z \to r, \tag{1.40}$$

функционал действия (1.21) можно переписать в стандартном AdS–базисе

$$S = -\tilde{m}\int dt\left(r^2 - \dot{r}^2/r^2 - \alpha^{-2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2)\right)^{1/2} - \int dt\left(ar - b\cos\theta\dot{\phi}\right), \tag{1.41}$$

с точностью до граничных членов. С другой стороны, функционал действия пробной частицы вблизи горизонта событий экстремальной черной дыры Райсснера–Нодстрема–(А)дС имеет вид (см., например, [98])

$$S = -m\left(\frac{2}{V''(r_+)}\right)^{1/2}\int\left(r^2 - \frac{\dot{r}^2}{r^2} - V''(r_+)\frac{r_+^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2)\right)^{1/2}$$
$$-q\int\left(\frac{2Qr}{r_+^2 V''(r_+)} - P\cos\theta\dot{\phi}\right), \quad (1.42)$$

где Q и P соответствуют электрическому и магнитному зарядам черной дыры, в то время как m и q – массе и электрическому заряду частицы. В предыдущем соотношении $V(r)$ определяется выражением

$$V = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2} + \frac{1}{3}\Lambda r^2, \quad (1.43)$$

где M соответствует массе черной дыры, Λ – космологической постоянной, а r_+ определяет горизонт событий черной дыры

$$V(r_+) = V'(r_+) = 0 \quad \rightarrow \quad Q^2 + P^2 = r_+^2(1 + \Lambda r_+^2),$$
$$M = r_+\left(1 + \frac{1}{3}\Lambda r_+^2\right). \quad (1.44)$$

Отсюда видно, что (1.41) воспроизводит (1.42), если положить

$$\tilde{m} = m\left(\frac{2}{V''(r_+)}\right)^{1/2}, \qquad a = \frac{2Qq}{r_+^2 V''(r_+)}, \qquad b = qP, \qquad \alpha^{-2} = \frac{r_+^2}{2}V''(r_+), \quad (1.45)$$

в то время как ограничение (1.27) принимает вид

$$m^2 = \frac{2q^2Q^2}{r_+^4 V''(r_+)} + \frac{q^2P^2}{r_+^2}. \quad (1.46)$$

Необходимо отметить, что черная дыра Райсснера–Нодстрема–(А)дС может рассматриваться как решение в теории супергравитации лишь при условии, что ее магнитный заряд равен нулю $P = 0$, а космологическая постоянная отрицательна [98, 99]. Интересно, что, в то время как для $\Lambda = 0$ пробная частица движется на фоне, удволетворяещем условию BPS, для Λ отличного от нуля модель суперчастицы может быть сформултрована для более широкого допустимого набора значений физических параметров.

1.3.4 Гамильтонова формулировка

Обсудив бозонную часть функционала действия, вернемся к рассмотрению его суперсимметричного расширения. Наша цель в этом разделе показать, что действие супер–0–браны (1.21) в фиксированнной калибровке может быть связано с $D(2,1;\alpha)$–суперчастицей, построенной в работе [62] в рамках канонического формализма. Ниже мы продемонстрируем, что данные модели связаны каноническим преобразованием.

Выполнив преобразование координат (1.37), суперсимметричный функционал действия в фиксированной калибровке принимает вид

$$S=-\tilde{m}\int\Big[4(z^2-\dot{z})-\alpha^{-2}(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\phi}^2)-4i(\psi\dot{\bar{\psi}}-\dot{\psi}\bar{\psi})-4\alpha^{-1}L^0_m R_{bm}(\psi\sigma_b\bar{\psi})$$
$$-4(2\alpha-1)(\psi\bar{\psi})^2\Big]^{1/2}dt-\int\Big(2az-b\cos\theta\dot{\phi}-2\alpha b(\psi\sigma_a\bar{\psi})R_{a3}\Big)\,dt. \quad (1.47)$$

При получении последнего соотношения были использованы свойства матрицы вращений (1.35), а также тождество

$$(\psi\sigma_a\bar{\psi})(\psi\sigma_b\bar{\psi})=-\delta_{ab}(\psi\bar{\psi})^2. \quad (1.48)$$

Для построения гамильтоновой формулировки введем импульсы (p_z,p_θ,p_ϕ), канонически сопряженные координатам (z,θ,ϕ). Гамильтониан принимает форму

$$H=z^2p_z+\frac{a^2}{p_z}+2az+\frac{\alpha^2}{p_z}J_aJ_a+2\alpha(\psi\sigma_a\bar{\psi})J_a-p_z(1+2\alpha)(\psi\bar{\psi})^2, \quad (1.49)$$

где

$$J_1=p_\phi,\qquad J_2=p_\theta\cos\phi-p_\phi\cot\theta\sin\phi+b\frac{\sin\phi}{\sin\theta},$$
$$J_3=p_\theta\sin\phi+p_\phi\cot\theta\cos\phi-b\frac{\cos\phi}{\sin\theta}. \quad (1.50)$$

Импульсы $(p_\psi,p_{\bar{\psi}})$, канонически сопряженные фермионным переменным $(\psi,\bar{\psi})$, приводят ко связям второго рода

$$p_\psi-i\bar{\psi}p_z=0,\qquad p_{\bar{\psi}}-i\psi p_z=0, \quad (1.51)$$

где мы выбрали правую производную для фермионных переменных.

Чтобы построить каноническое преобразование, связывающее (1.49) с гамильтонианом в [62], переопределим фермионные переменные

$$\psi \to \frac{\psi}{\sqrt{2p_z}}, \qquad \bar{\psi} \to \frac{\bar{\psi}}{\sqrt{2p_z}}, \qquad p_\psi \to \sqrt{2p_z}p_\psi, \qquad p_{\bar{\psi}} \to \sqrt{2p_z}p_{\bar{\psi}}. \tag{1.52}$$

Легко видеть, что это преобразование является каноническим, поскольку соответствующее компенсирующее преобразование

$$z \to z + \frac{1}{2p_z}(\psi p_\psi + \bar{\psi} p_{\bar{\psi}}), \tag{1.53}$$

является тождественным на поверхности связи (1.51). В качестве последнего шага, выполним каноническое преобразование

$$z \to -\frac{p}{x} - \frac{2a}{x^2}, \qquad p_z \to \frac{x^2}{2}. \tag{1.54}$$

Это преобразование вместе с (1.52) приводит гамильтониан и связи к форме, предложенной в [62]. Как следствие, для $\alpha = -1$ мы имеем каноническое преобразование, связывающее $SU(1,1|2)$–инвариантные модели в [47] и в [48, 51].

1.4 $SU(1,1|N)$–суперчастица и редуцированная κ–симметрия

Перейдем к построению моделей суперчастиц на факторпространстве супергруппы $SU(1,1|N)$. Бозонная часть соответствующего функционала действия описывает частицу в пространстве $AdS_2 \times \mathbb{CP}^{N-1}$. Покажем, что можно построить модели, обладающие полной κ–симметрией, лишь в случае $N = 1, 2$ и установим взаимосвязь между данными моделями суперчастиц и моделями массивной релятивистской частицы, движущейся вблизи горизонта событий экстремальной черной дыры.

1.4.1 Функционал действия и κ–симметрия

Рассмотрим факторпространство G/H, где $G = SU(1,1|N)$ со структурными соотношениями, приведенными в (3.87) приложения А, и подгруппа H, генерируемая набором операторов $\{D, J_a, M\}$. Бозонная часть этого суперпространства представляет собой двумерное пространство анти–де–Ситтера AdS_2.

Определим один–формы Маурера–Картана

$$u^{-1}du = HL_H + KL_K + DL_D + L_aJ_a + ML_M + \\ +i\left(L_QQ + \bar{Q}L_{\bar{Q}} + L_SS + \bar{S}L_{\bar{S}}\right), \quad (1.55)$$

где $u \in G/H$. Здесь и далее мы опускаем индексы фундаментального представления алгебры $su(N)$ для фермионных один–форм и предполагаем суммирование по повторяющимся индексам $L_QQ = (L_Q)^jQ_j$.

Присутствие фермионных генераторов не влияют на структуру преобразований, которые остаются такими же, как и в случае чисто бозонной алгебры. Поэтому можно воспользоваться результатами предыдущего раздела, используя для построения кинетического члена функционала действия билинейную форму L_HL_K, а в качестве редуцированного члена Весса–Зумино выбрав линейную комбинацию L_D и L_M

$$S = -m\int\sqrt{4L_HL_K} - \int(aL_D - bL_M), \quad (1.56)$$

где m, a и b некоторые постоянные параметры.

Для изучения κ–сиимметрии построенного функционала действия, как и в предыдущем разделе, будем придерживаться стандартного подхода, который заключается в следующем представлении вариаций форм Маурера–Картана:

$$\begin{aligned}
\delta L_H &= d[\delta x_H] + [\delta x_D]L_H - L_D[\delta x_H] - 2i\left([\delta\psi]L_{\bar{Q}} - L_Q[\delta\bar{\psi}]\right), \\
\delta L_K &= d[\delta x_K] - [\delta x_D]L_K + L_D[\delta x_K] - 2i\left([\delta\eta]L_{\bar{S}} - L_S[\delta\bar{\eta}]\right), \\
\delta L_D &= d[\delta x_D] - 2[\delta x_H]L_K + 2[\delta x_K]L_H + \\
&\qquad +2i\left([\delta\psi]L_{\bar{S}} - L_Q[\delta\bar{\eta}] + [\delta\eta]L_{\bar{Q}} - L_S[\delta\bar{\psi}]\right), \\
\delta L_a &= d[\delta x_a] - f_{abc}[\delta x_b]L_c + \\
&\qquad 2\left(L_S\lambda_a[\delta\bar{\psi}] - [\delta\eta]\lambda_aL_{\bar{Q}} + [\delta\psi]\lambda_aL_{\bar{S}} - L_Q\lambda_a[\delta\bar{\eta}]\right), \quad (1.57)
\end{aligned}$$

$$\delta L_M = d[\delta x_M] + \frac{N-2}{N}\left([\delta\eta]L_{\bar{Q}} - L_S[\delta\bar{\psi}] - [\delta\psi]L_{\bar{S}} + L_Q[\delta\bar{\eta}]\right), \quad (1.58)$$

которые могут быть получены из уравнений Маурера–Картана. κ–симметрия требует равенства нулю бозонных вариаций

$$[\delta x_H] = [\delta x_K] = 0. \quad (1.59)$$

Используя (1.57), вариация действия (1.56) может быть записана в форме

$$\delta_\kappa S = 2i\int\left\{m\sqrt{\frac{L_H}{L_K}}[\delta\eta] - [\delta\psi]\left(a - ib\frac{N-2}{2N}\right)\right\}L_{\bar{S}}$$
$$+2i\int\left\{m\sqrt{\frac{L_K}{L_H}}[\delta\psi] - [\delta\eta]\left(a + ib\frac{N-2}{2N}\right)\right\}L_{\bar{Q}} + c.c., \qquad (1.60)$$

где были отброшены граничные члены $d[\delta x_D]$ и $d[\delta x_M]$. Требование обращения в ноль вариации (1.60) приводит к условию на параметры

$$m^2 = a^2 + \left(\frac{N-2}{2N}\right)^2 b^2. \qquad (1.61)$$

Если данное условие удовлетворено, то действие (1.56) инвариантно относительно преобразований κ–симметрии.

1.4.2 Явная форма функционала действия

Чтобы построить функционал действия в явной форме, определим элемент факторпрстранства в виде

$$u = e^{tH}e^{zK}e^{i\left(\psi Q + \bar{Q}\bar{\psi}\right)}e^{i\left(\eta S + \bar{S}\bar{\eta}\right)}. \qquad (1.62)$$

Как уже обсуждалось ранее, калибровочная κ–симметрия уменьшает число физических фермионных степеней свободы вдвое. Удобно зафиксировать калибровку условием

$$\eta = \bar{\eta} = 0. \qquad (1.63)$$

В качестве следующего шага, построим один–формы Маурера–Картана

$$L_H = dt - i(\psi d\bar{\psi} - d\psi\bar{\psi}) + L_K(\psi\bar{\psi})^2,$$
$$L_K = z^2dt + dz, \qquad L_D = 2zdt, \qquad L_M = -\frac{N-2}{N}L_K\psi\bar{\psi}. \qquad (1.64)$$

Также оказывается удобно переопределить координаты

$$t \to t + \frac{1}{z}, \qquad \psi \to \frac{\psi}{z}, \qquad \bar{\psi} \to \frac{\bar{\psi}}{z}, \qquad (1.65)$$

что позволяет привести функционал действия (1.56) к виду

$$S = -2m\int\sqrt{z^2 - \dot{z} - i(\psi\dot{\bar{\psi}} - \dot{\psi}\bar{\psi}) + (\psi\bar{\psi})^2} - 2za - b\frac{N-2}{N}\psi\bar{\psi}. \qquad (1.66)$$

Чтобы лучше понять структуру модели, рассмотрим ее в каноническом формализме. Гамильтониан имеет вид

$$H=\frac{m^2}{p_z}+z^2p_z+2za+p_z(\psi\bar{\psi})^2+b\frac{N-2}{N}\psi\bar{\psi}, \tag{1.67}$$

где p_z – импульс, канонически сопряженный бозонной переменной z. Фермионные канонические импульсы p_ψ и $p_{\bar{\psi}}$ приводят к наличию связей второго рода

$$p_\psi-ip_z\bar{\psi}=0, \qquad p_{\bar{\psi}}-ip_z\psi=0. \tag{1.68}$$

Чтобы привести гамильтониан к стандартной форме суперконформной механики, выполним канонические преобразования (1.52) и (1.54). В этих переменных гамильтониан и связи принимают вид

$$\begin{aligned} &H=\frac{p^2}{2}+\frac{b^2}{x^2}\left(\frac{N-2}{N}\right)^2+\frac{2b}{x^2}\frac{N-2}{N}\psi\bar{\psi}+\frac{2}{x^2}(\psi\bar{\psi})^2,\\ &p_\psi-\frac{i}{2}\bar{\psi}=0, \qquad p_{\bar{\psi}}-\frac{i}{2}\psi=0. \end{aligned} \tag{1.69}$$

Эта модель представляет собой $SU(1,1|N)$ суперсимметричное расширение стандартной конформной механики.

1.4.3 Инвариантное действие с вращательными степенями свободы

В этом разделе мы построим инвариантный функционал действия на факторпространстве $\frac{SU(1,1|N)}{SO(1,1)\times SU(N-1)\times[U(1)]^2}$, обобщив таким образом (1.56) включением вращательных степеней свободы. Как и прежде, первый фактор в подгруппе стабильности, $SO(1,1)$, генерируется оператором дилатаций D. В соответствии с результатами, которые вынесены в приложение A, мы полагаем, что второй фактор генерируется операторами $\{T^+_{mn},T^-_{mn},\Lambda_s\}$, где $m,n=1,\ldots,N-1$, $s=1,\ldots,N-2$. Одна копия $U(1)$ в третьем факторе соответствует оператору Λ_{N-1}, в то время как вторая – M. Оставшиеся бозонные операторы H, K, $T^\pm_m$, фермионы Q, S и их сопряженные партнеры $\bar{Q}$, $\bar{S}$, задают факторпространство. Бозонная часть факторпространства представляет собой произведение $AdS_2\times\mathbb{CP}^{N-1}$, где $\mathbb{CP}^{N-1}$ – комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^{N-1}=\frac{SU(N)}{SU(N-1)\times U(1)}$. Для элемента факторпространства выберем следующую парметризацию

$$u=e^{tH}e^{i\left(\psi Q+\bar{Q}\bar{\psi}\right)}e^{zK}e^{i\left(\eta S+\bar{S}\bar{\eta}\right)}u_R, \tag{1.70}$$

где u_R – элемент $\mathbb{CP}^{N-1}$, генерируемый $T_m^{\pm}$.

Для того, чтобы построить инвариантное действие, можно использовать (1.56) в качестве анзаца и расширить его включением вращательных степеней свободы. Соответствующий кинетический член можно построить, используя формы Маурера–Картана $L_m^{\pm}$, ассоциированные с генераторами $T_m^{\pm}$ в (3.112)

$$L_m^+ L_m^+ + L_m^- L_m^-. \tag{1.71}$$

Выше мы построили слагаемое Весса–Зумино, используя формы Маурера–Картана, которые преобразуются как абелевы связности. В этом случае можно видеть, помимо L_D и L_M, что L_{N-1} имеет то же свойство.

В итоге приходим к инвариантному функционалу действия на фактор-пространстве

$$S = -m \int \sqrt{4L_H L_K - L_m^+ L_m^+ - L_m^- L_m^-} - \int \left(aL_D - bL_M + cL_{N-1}\right), \tag{1.72}$$

где m, a, b и c – постоянные параметры. Данная модель описывает суперсимметричное расширение частицы на фоне $AdS_2 \times \mathbb{CP}^{N-1}$ с потоком 2–формы напряженности электромагнитного поля. Суперсимметричные расширения механики на $\mathbb{CP}^N$ изучались ранее в работах [100–102].

1.4.4 Редуцированная κ–симметрия

Функционал действия (1.72) представляет собой обобщение модели (1.56), обладающей κ–симметрией. Для случая $N = 2$ он воспроизводит модель супер 0–браны [47]. Обсудим вопрос о наличии κ–симметрии для $N > 2$. Варьируя функционал действия (1.72), наложив ограничение

$$[\delta x_H] = [\delta x_K] = [\delta\theta_m^{\pm}] = 0, \tag{1.73}$$

и поступая по аналогии с тем, как это делалось в предыдущем разделе, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{m\left(2iL_H[\delta\eta] + [\delta\psi]T_m^+ L_m^+ + [\delta\psi]T_m^- L_m^-\right)}{\sqrt{4L_H L_K - L_m^+ L_m^+ - L_m^- L_m^-}} - i[\delta\psi]\left(a - ib\frac{N-2}{2N} - ic\Lambda_{N-1}\right) = 0, \\
\frac{m\left(2iL_K[\delta\psi] - [\delta\eta]T_m^+ L_m^+ - [\delta\eta]T_m^- L_m^-\right)}{\sqrt{4L_H L_K - L_m^+ L_m^+ - L_m^- L_m^-}} - \\
-i[\delta\eta]\left(a + ib\frac{N-2}{2N} + ic\Lambda_{N-1}\right) = 0,
\end{gathered} \tag{1.74}$$

Чтобы разрешить эту систему, выразим $[\delta\psi]$ из второго уравнения и подставим в первое. Это дает линейное уравнение на $[\delta\eta]$, которое, в свою очередь, можно разложить на четыре независимых линейных уравнения. Первые два из них пропорциональны свертке с формами Маурера–Картана $L_m^{\pm}$

$$b\frac{N-2}{N}[\delta\eta]T_m^{\pm} + c[\delta\eta]\{\Lambda_{N-1}, T_m^{\pm}\} = 0, \tag{1.75}$$

где фигурные скобки обозначают антикоммутатор. Используя форму матриц (3.112) в бра/кет обозначениях (3.103)-(3.105), можно получить тождество

$$\{\Lambda_{N-1}, T_m^{\pm}\} = -\sqrt{\frac{2}{N(N-1)}}(N-2)T_m^{\pm}. \tag{1.76}$$

Следовательно, постоянные параметры b и c должны быть связаны друг с другом посредством соотношения

$$b = c\sqrt{\frac{2N}{N-1}}. \tag{1.77}$$

Следующее уравнение пропорционально билинейной форме $L_H L_K$ и имеет вид

$$[\delta\eta] - \frac{[\delta\eta]}{m^2}\left(a^2 + b^2\left(\frac{N-2}{2N}\right)^2 + c^2\Lambda_{N-1}^2 + bc\frac{N-2}{N}\Lambda_{N-1}\right) = 0. \tag{1.78}$$

Аналогично, используя бра/кет обозначения, находим

$$\Lambda_{N-1}^2 = \frac{2}{N(N-1)}\sum_{j=1}^{N-1}|j\rangle\langle j| + \frac{2(N-1)}{N}|N\rangle\langle N|. \tag{1.79}$$

Для того, чтобы уравнение было выполнено с ненулевым c, либо первые $(N-1)$ компонент $[\delta\eta]$ должны быть тривиальными, либо последняя. Оба случая приводят к дополнительным ограничениям на параметры. Предполагая, что (1.78) выполняется, последнее уравнение из (1.74) можно привести к виду

$$[\delta\eta]\left(L_m^+T_m^+ + L_m^-T_m^-\right)\left(L_n^+T_n^+ + L_n^-T_n^-\right) - [\delta\eta]\left(L_m^+L_m^+ + L_m^-L_m^-\right) = 0. \tag{1.80}$$

В этом выражении присутствуют антикоммутаторы

$$\begin{aligned}
\{T_m^+, T_n^+\} &= T_{mn}^+ + 2\delta_{mn}|N\rangle\langle N|, \qquad & \{T_m^+, T_n^-\} &= -T_{mn}^-. \\
\{T_m^-, T_n^-\} &= T_{mn}^- + 2\delta_{mn}|N\rangle\langle N|, \qquad & m, n &= 1, \ldots, N-1.
\end{aligned} \tag{1.81}$$

Заметим, что матрицы $T^{\pm}_{mn}$ действуют в $(N-1)$–мерном пространстве векторов. Из уравнения (1.80) следует, что его решение не может иметь первые $(N-1)$ компонент нетривиальными. Таким образом, имеем решение

$$\langle[\delta\eta]| = \kappa \, \langle N| \, , \tag{1.82}$$

где κ – антикоммутирующий комплекснозначный калибровочный параметр. Как указывалось выше, из уравнения (1.78) можно получить дополнительные ограничения на параметры

$$m^2 = a^2 + \frac{c^2 N}{2(N-1)}. \tag{1.83}$$

Подводя итог, заключаем, что функционал действия (1.72) инвариантен относительно преобразований κ–симметрии с одним фермионным калибровочным параметром при условии, что параметры удовлетворяют соотношениям (1.77) и (1.83). Отметим, что случай $N=2$ является выделенным. Для $N=2$ матрицы $T^{\pm}_{mn}$ в (1.133) тривиальны и существует решение с двумя калибровочными параметрами, что означает наличие обычной κ–симметрии (см. также [47]).

1.4.5 Фоновая геометрия и бозонная часть действия

Один–формы Маурера–Картана, которые были использованы при построении функционала действия (1.72), приведены в Приложении A. Можно зафиксировать калибровку, требуя равенства нулю N-ых компонент фермионных переменных η и $\bar\eta$. Вид функционала действия в фиксированной калибровке при этом не упрощается, поэтому далее мы подолжим анализ лишь его бозонной части.

Интересно, что бозонную часть функционала действия (1.72) можно интерпретировать как действие частицы во внешних гравитационном и электромагнитном полях. Для того, чтобы понять удовлетворяет ли конфигурация этих полей уравнениям Эйнштейна–Максвелла, перепишем метрику в AdS–базисе, выполнив замену координат

$$t \to \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{r}\right), \qquad z \to r. \tag{1.84}$$

В этих координатах метрика и калибровочное поле имеют вид

$$
\begin{aligned}
& ds^2 = \gamma^2 \left(r^2 dt^2 - \frac{dr^2}{r^2} - L_m^+ L_m^+ - L_m^- L_m^- \right), \\
& A = \alpha r dt + \beta L_{N-1},
\end{aligned} \tag{1.85}
$$

где $L_i^{\pm}$, L_{N-1} – формы Маурера–Картана (3.98) с нулевой фермионной частью, в то время как α, β и γ – некоторые параметры, связаные с a, b и c в действии (1.72). Метрика описывает $2N$–мерное пространство $AdS_2 \times \mathbb{CP}^{N-1}$. Для того, чтобы найти два–форму Максвелла, выпишем уравнения Маурера–Картана для форм L_a, реализующих подалгебру $su(N)$

$$
dL_a = -\frac{1}{2} f_{abc} L_b \wedge L_c + 2 \left(L_Q \lambda_a \wedge L_{\bar{S}} - L_S \lambda_a \wedge L_{\bar{Q}} \right). \tag{1.86}
$$

Используя их, а также коммутационные соотношения для алгебры $su(N)$, найдем максвелловскую напряженность

$$
F = dA = -\alpha dt \wedge dr - \beta \sqrt{\frac{N}{2(N-1)}} L_m^+ \wedge L_m^-. \tag{1.87}
$$

Покажем, что она удволетворяет уравнениям Максвелла

$$
d * F = 0, \tag{1.88}
$$

где $*$ обозначает оператор дуальности Ходжа. Форма, дуальная первому слагаемому в (1.87), пропорциональна форме объема на $\mathbb{CP}^{N-1}$ и, следовательно, замкнута. Дуальная ко второму члену форма пропорциональна внешнему произведению $dt \wedge dr$ и линейной комбинации $2(N-2)$–форм на $\mathbb{CP}^{N-1}$. Очевидно, первый множитель в этом произведении является замкнутой формой. Для того, чтобы убедиться, что линейная комбинация также замкнута, необходимо воспользоваться уравнениями Маурера–Картана

$$
\begin{aligned}
dL_m^{\pm} = L_{mq}^{\pm} \wedge L_q^- \pm L_{mq}^{\mp} \wedge L_q^+ \pm \sum_{l=m}^{N-1} \sqrt{\frac{1}{2l(l+1)}} L_l \wedge L_m^{\mp} \\
\mp \sqrt{\frac{m-1}{2m}} L_{m-1} \wedge L_m^{\mp} \pm \sqrt{\frac{N-1}{2N}} L_{N-1} \wedge L_m^{\mp}.
\end{aligned} \tag{1.89}
$$

Из этих уравнений можно заключить, что (1.87) удволетворяет уравнениям Максвелла без наложения каких–либо ограничений на постоянные параметры α и β.

Уравнения Эйнштейна удобно анализировать в тетрадном формализме. Принимая во внимание явный вид структурных постоянных алгебры $su(N)$, можно найти тензор Риччи

$$R_{\substack{++\\mn}} = \frac{N}{2}\delta_{\substack{++\\mn}}, \qquad R_{\substack{--\\mn}} = \frac{N}{2}\delta_{\substack{--\\mn}}, \tag{1.90}$$

из которого также следует выражение для скалярной кривизны

$$R = N(N-1). \tag{1.91}$$

Уравнения Эйнштейна–Максвелла

$$R_{ab} - \frac{R}{2}\eta_{ab} - 2\left(F_{ac}F_{bc} - \frac{1}{4}F^2\eta_{ab}\right) = 0, \tag{1.92}$$

где η_{ab} – $2N$–мерная метрика Минковского, оказываются выполнены при условии, что параметры подчиняются соотношениям

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma^2}{2}(N+2) = 2\alpha^2 + \frac{\beta^2 N}{N-1}, \\ &\gamma^2\left(1 + (N-2)(N+1)\right) = \alpha^2 + \beta^2\frac{N}{2}. \end{aligned} \tag{1.93}$$

Стоит заметить, что случай $N = 2$ имеет особенность. Два уравнения выше сводятся к $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ и в результате решение (1.85) описывает поле вблизи горизонта событий экстремальной черной дыры Райснера–Нордстрема [47]. В этой связи представляется естественным поставить вопрос о связи моделей с $N > 2$ с конфигурациями черных дыр в высших измерениях. Вспомним, что $(2N-1)$–мерная сфера может быть представлена как расслоение Хопфа над $\mathbb{CP}^{N-1}$, а соответствующая метрика имеет вид (см., например, [103])

$$d\Omega^2_{2N-1} = L^+_m L^+_m + L^-_m L^-_m + (d\psi + L_{N-1})^2. \tag{1.94}$$

Геометрия вблизи горизонта событий сферически–симметричной заряженой черной дыры представляет собой произведение AdS_2 и сферы. Можно убедиться, что в нечетномерном пространстве эта геометрия может быть редуцированна в направлении, задаваемом координатой ψ, приводя, таким образом, к конфигурации полей (1.85). Для частицы, движущейся на таком фоне, редукция означает лишь фиксацию импульса, сопряженного координате ψ. Отсюда следует, что бозонная часть действия (1.72) описывает частицу вблизи горизонта событий сферически симметричной черной дыры с фиксированным каноническим импульсом p_ψ.

1.5 Суперчастицы на факторпространствах супергруппы $OSp(N|2)$

1.5.1 Формы Маурера–Картана и выбор факторпрстранства

Структурные соотношения алгебры $osp(N|2)$ приведены в Приложении А. В качестве подалгебры она включает в себя алгебру вращений $so(N)$, которую для дальнейшего удобства мы разобьем на подалгебру $so(N-1)$ и набор генераторов, которые будем использоваться для построения факторпространства

$$J^{mn} := M^{mn}, \qquad J^{mN} := P^m, \qquad m,n = 1,\ldots,N-1. \tag{1.95}$$

В этих обозначениях коммутационные соотношения $so(N)$ принимают вид

$$\begin{aligned} &[M^{mn}, P^q] = \delta^{qm}P^n - \delta^{qn}P^m, \qquad [P^m, P^n] = M^{mn}, \\ &[M^{mn}, M^{pq}] = M^{mp}\delta_{nq} + M^{mq}\delta_{np} - M^{nq}\delta_{mp} - M^{np}\delta_{mq}. \end{aligned} \tag{1.96}$$

Как и ранее, определим формы Маурера–Картана посредством соотношения

$$u^{-1}du = HL_H + KL_K + DL_D + L^aJ^a + L_QQ + L_SS, \tag{1.97}$$

и предполагается, что производится суммирование по повторяющимся индексам вращения на фермионах. В последующем изложении нам будет необходим лишь вид и свойства бозонных один–форм. Также при изучении свойств κ–симметрии моделей, как обычно будем использовать вариации форм Маурера–Картана в специальном виде

$$\begin{aligned} \delta L_H &= d[\delta x_H] + [\delta x_D]L_H - [\delta x_H]L_D + 2i[\delta\psi]L_Q, \\ \delta L_K &= d[\delta x_K] - [\delta x_D]L_K + [\delta x_K]L_D + 2i[\delta\eta]L_S, \\ \delta L_D &= d[\delta x_D] - [\delta x_H]L_K + 2[\delta x_K]L_H - 2i\left([\delta\psi]L_S + [\delta\eta]L_Q\right), \\ \delta L^a &= d[\delta x^a] - f^{abc}[\delta x^b]L^c - i[\delta\psi]\lambda^a L_S + iL_Q\lambda^a[\delta\eta], \end{aligned} \tag{1.98}$$

где

$$[\delta Z^A] = L^A{}_M \delta Z^M, \tag{1.99}$$

для один форм Маурера–Картана $L^A = L^A{}_M dZ^M$. κ–симметрия характеризуется тем, что вариации бозонных форм на факторпространстве должны обращаться в ноль

$$[\delta_\kappa x_H] = [\delta_\kappa x_K] = [\delta_\kappa x_m] = 0. \tag{1.100}$$

1.5.2 $OSp(4|2)$–суперчастица с вращательными степенями свободы на S^3

Технически проблема поиска κ–симметричных моделей сводится к свойствам матриц λ^m, соответствующих генераторам факторпространства P_m, которые, в свую очередь, зависят от того, каким образом выделяется подалгебра $SO(N-1)$ из $SO(N)$. В этом смысле случай $N = 4$ является выделенным, поскольку алгебра $so(4)$ является прямой суммой двух копий $so(3)$

$$[P^m_\pm, P^n_\pm] = \delta_{\pm,\pm}\epsilon^{mnq}P^q_\pm. \tag{1.101}$$

Так как супералгебра $osp(4|2)$ включает обе копии $so(3)$ симметричным образом, факторпространство может генерироваться любой из них. Далее мы введем набор матриц

$$\begin{aligned}
&\lambda^1_+ = \mathbb{1}\otimes i\sigma_2, \qquad \lambda^2_+ = i\sigma_2\otimes\sigma_1, \qquad \lambda^3_+ = i\sigma_2\otimes\sigma_3,\\
&\lambda^1_- = i\sigma_2\otimes\mathbb{1}, \qquad \lambda^2_- = \sigma_1\otimes i\sigma_2, \qquad \lambda^3_- = \sigma_3\otimes i\sigma_2,
\end{aligned} \tag{1.102}$$

задающих представление алгебры $so(4)$ и удовлетворяющие (анти)коммутационным соотношениям

$$[\lambda^m_\pm, \lambda^n_\pm] = 2\delta_{\pm\pm}\epsilon^{mnp}\lambda^p_\pm, \qquad \{\lambda^m_+, \lambda^n_+\} = -2\delta^{mn}, \qquad \{\lambda^m_-, \lambda^n_-\} = -2\delta^{mn}. \tag{1.103}$$

Эти матрицы удовлетворяют соотношениям

$$(\lambda^m_+)_{jk}(\lambda^m_+)_{pq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{pk} + \epsilon_{jkpq}, \qquad (\lambda^m_-)_{jk}(\lambda^m_-)_{pq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{pk} - \epsilon_{jkpq}. \tag{1.104}$$

Здесь σ_i – матрицы Паули.

Несложно установить, что факторпространство максимальной размерности, на котором можно построить κ–инвариантное суперсимметричное действие, представляет собой $OSp(4|2)/SO(3)$. Бозонная часть этого пространства описывает $AdS_3 \times S^3$. Поскольку это пространство имеет более широкую группу симметрии, исключим его из рассмотрения (см., например, [104]). Следующее по размерности факторпространство имеет вид

$$\frac{OSp(4|2)}{SO(1,1)\times SO(3)} \sim \frac{\{H, K, D, P^m_\pm, Q, S\}}{\{D, P^m_-\}}, \tag{1.105}$$

бозонная часть которого соответствует $AdS_2 \times S^3$. Построим функционал действия на этом факторпространстве

$$S = -2m \int \sqrt{L_H L_K - L_+^n L_+^n} - a \int L_D, \tag{1.106}$$

где один–формы Маурера–Картана L_+^m соответствуют генераторам P_+^m и a, m – постоянные параметры. На чисто бозонном фоне первый и второй члены под корнем задают метрику на AdS_2 и S^3, соответственно. Вклад Весса–Зумино в данном случае представляется лишь одним слагаемым L_D.

Убедимся, что построенное выше действие обладает κ–симметрией. Используя соотношения (1.98) и (1.100), вариация действия (1.106) относительно преобразований κ–симметрии имеет вид

$$\begin{aligned}\delta_\kappa S = -2i \int \left\{ \frac{m L_H[\delta_\kappa \eta] - m L_+^m [\delta_\kappa \psi] \lambda_+^m}{\sqrt{L_H L_K - L_+^m L_+^m}} - a[\delta_\kappa \psi] \right\} L_S \\ -2i \int \left\{ \frac{m L_K[\delta_\kappa \psi] + m L_+^m [\delta_\kappa \eta] \lambda_+^m}{\sqrt{L_H L_K - L_+^m L_+^m}} - a[\delta_\kappa \eta] \right\} L_Q,\end{aligned} \tag{1.107}$$

где мы опустили граничный вклад $[\delta_\kappa x_D]$, возникающий при варьировании функционала Весса–Зумино. Требуя, чтобы вариация $\delta_\kappa S$ обращалась в ноль, мы получим систему линейных алгебраических уравнений на $[\delta_\kappa \psi]$ and $[\delta_\kappa \eta]$. Решение существует для произвольного $[\delta_\kappa \eta]$ (или $[\delta_\kappa \psi]$), если постоянные параметры удовлетворяют ограничению

$$m = |a|. \tag{1.108}$$

Построим далее функционал действия в явной форме. Формы Маурера–Кар- тана на факторпространстве (1.105) в фиксированной калибровке приведены в Приложении А. Выполнив замену переменных

$$t \to t + \frac{1}{z}, \qquad \psi \to \frac{\psi}{z}, \tag{1.109}$$

функционал действия (1.106) приобретает вид

$$\begin{aligned}S = -2m \int \left[z^2 - \dot{z} - i\psi\dot{\psi} - e^m e^m + i e^m (\psi \lambda_+^p \psi) O^{mp} + \frac{1}{4} \epsilon_{ijkl} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l \right]^{1/2} dt + \\ +2m \int z dt.\end{aligned} \tag{1.110}$$

Чтобы установить связь с моделями, построенными в работах других авторов, перейдем в канонический формализм. Гамильтониан имеет вид

$$H = z^2 p_z + \frac{m^2}{p_z} + 2mz + \frac{1}{4p_z} J_+^m J_+^m - \frac{i}{2} J_+^m (\psi \lambda^m \psi), \tag{1.111}$$

где

$$\begin{aligned} J_+^1 &= -p_\phi \cot\theta \cos\phi - p_\theta \sin\phi + p_\chi \cos\phi \sin^{-1}\theta, \\ J_+^2 &= -p_\phi \cot\theta \sin\phi + p_\theta \cos\phi + p_\chi \sin\phi \sin^{-1}\theta, \qquad J_+^3 = p_\phi, \end{aligned} \tag{1.112}$$

представляет собой бозонную часть генераторов вращений $P_+^m = J_+^m + \frac{1}{2}(\psi \lambda_+^m \psi)$, а $(p_z, p_\theta, p_\phi, p_\chi)$ обозначают канонические импульсы. Фермионные импульсы приводят ко связям второго рода

$$p_\psi - i p_z \psi = 0. \tag{1.113}$$

Для того, чтобы привести гамильтониан к стандартной форме, выполним каноническое преобразование

$$z \to -\frac{p}{x} - \frac{2m}{x^2}, \qquad p_z \to \frac{x^2}{2}, \qquad \psi \to \frac{\psi}{x}, \qquad p_\psi \to x p_\psi, \tag{1.114}$$

которое дает

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2x^2} J_+^m J_+^m - \frac{i}{2x^2} (\psi \lambda^m \psi) J_+^m, \qquad p_\psi - \frac{i}{2}\psi = 0. \tag{1.115}$$

Как было показано выше, одна копия $so(3)$ реализована на бозонных и фермионных переменных посредством P_+^m, в то время как вторая лишь на фермионных $P_-^m = \frac{1}{2}(\psi \lambda_-^m \psi)$. Эта модель инвариантна относительно дополнительных преобразований симметрии, которые следуют из правого действия $SO(3)$ на себе

$$\begin{aligned} J_-^1 &= \cot\theta \cos\chi p_\psi + \sin\chi p_\theta + \cos\chi \sin^{-1}\theta p_\phi, \\ J_-^2 &= -\cot\theta \sin\chi p_\chi + \cos\chi p_\theta - \sin\chi \sin^{-1}\theta p_\phi, \qquad J_-^3 = p_\chi. \end{aligned} \tag{1.116}$$

Построенная модель инвариантна относительно преобразований из группы $OSp(4|2) \times SO(3)$. На гамильтоновом уровне легко установить, что функции J_+^m могут быть произвольными генераторами алгебры вращений [62]. В частности, мы можем положить $p_\chi = constant$, нарушая таким образом группу симметрии до $OSp(4|2)$. В этом случае модель описывает $OSp(4|2)$ суперсимметричное расширение частицы, движущейся вблизи горизонта событий заряженной черной дыры. Принимая во внимание изоморфизм $osp(4|2) \simeq D(2,1;-\frac{1}{2})$, можно убедиться, что гамильтониан (1.115) воспроизводит $D(2,1;\alpha)$ суперконформную механику, изучавшуюся в [62] и в Разделе 1.3 для $\alpha = -1/2$.

1.5.3 $OSp(4|2)$–суперчастица со степенями свободы на S^2

Следующее факторпространство, на котором мы построим действие $OSp(4|2)$ суперчастицы, можно представить как

$$\frac{OSp(4|2)}{SO(1,1)\times SO(3)\times SO(2)} \sim \frac{\{H,K,D,P^m_\pm,Q,S\}}{\{D,P^m_-,P^3_+\}}. \tag{1.117}$$

Определим действие на факторпространстве

$$S = -2m\int\sqrt{L_H L_K - L^m_+ L^m_+} - \int(aL_D + bL^3_+), \tag{1.118}$$

где предполагается суммирование по $m = 1,2$. Бозонная часть этого функционала действия описывает частицу в пространстве $AdS_2\times S^2$ с потоком 2-формы напряженности электромагнитного поля. Этот фон можно интерпретировать как область вблизи горизонта событий невращающейся заряженной черной дыры. Функционал действия (1.118) представляет собой $OSp(4|2)$ аналог $SU(1|2)$ супер–0–браны [47, 97]. Вследствие изоморфизма $osp(4|2) \simeq \; D(2,1;-\frac{1}{2})$, это действие в точности воспроизводит κ–симметричную модель (1.21) для $\alpha = -1/2$.

Поскольку S^3 является расслоением над S^2 со слоем $U(1)$, функционал действия (1.118) можно также получить из (1.106) размерной редукцией. На классическом уровне такая редукция сводится лишь к фиксации импульса, сопряженного координате, параметризующей $U(1)$. Условие инвариантности действия (1.118) относительно преобразований κ–симметрии приводит к ограничению на параметры

$$m^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}. \tag{1.119}$$

Заметим, что это выражение явно включает магнитный заряд. Отсюда следует, что (1.118) отличается от модели предыдущего раздела с постоянным p_χ.

1.5.4 $OSp(4|2)$–суперчастица с вращательными степенями свободы на поверхности связи

В этом разделе рассмотрим модель $OSp(4|2)$–суперчастицы, на угловой сектор которой наложено ограничение

$$S = -2m \int \sqrt{L_H L_K} + \int \left(b\sqrt{L_+^n L_+^n} - aL_D \right), \tag{1.120}$$

где $n = 1, 2$ для факторпространства (1.117) и $n = 1, 2, 3$ для (1.105). Несложно убедиться, что функционал действия инвариантен относительно преобразований κ–симметрии при условии, что параметры a, b, m подчинены соотношению (1.119). Помимо κ–симметрии это действие обладает репараметризационной инвариантностью. Используя явный вид форм Маурера–Картана и налагая статическую калибровку, построим гамильтониан

$$H = z^2 p_z + \frac{m^2}{p_z} + 2mz - \frac{i}{2} J_+^m (\psi \lambda^m \psi), \tag{1.121}$$

и найдем связи первого рода

$$J_+^m J_+^m = b^2, \tag{1.122}$$

где J_+^m приведены в (1.112) для факторпространства (1.105), а для (1.117) определены тем же выражением, но с $p_\chi = 0$. Каноничское преобразование (1.114) приводит к гамильтониану (1.115) на поверхности связи (1.126). Можно видеть, что эта модель представляет собой $OSp(4|2)$ аналог $SU(1,1|2)$–суперчастицы, построенной в [50]. Отметим также, что эту систему можно получить из (1.115) проекцией на поверхность связи (1.126). Однако этот способ имеет особенность на квантовом уровне, поскольку b^2 должен квантоваться. В отличие от модели, полученной проекцией (1.115), наличие κ–симметрии у функционала действия (1.120) требует выполнения соотношения (1.119), приводя к квантованию параметра массы m.

1.5.4.1 Полудинамические угловые степени свободы

Хотя модель, построенная в предыдущем разделе, имеет ту же группу симметрии и такое же число физических степеней свободы как и $OSp(4|2)$–модель со спиновыми переменными [105] (см. также [52, 56, 56]), их физическое содержание различно. В этом разделе мы изучим полудинамические угловые переменные.[1]

Введем набор действительных переменных α_i, β_i, $i = 1, \ldots, 4$ на фазовом пространстве и скобку

$$\{\alpha_i, \beta_j\} = -\delta_{ij}. \tag{1.123}$$

Их можно использовать, для того чтобы построить генераторы $so(4)$

$$J^m_\pm := (\alpha \lambda^m_\pm \beta)\,. \tag{1.124}$$

Используя тождества (1.104) для матриц λ^m_+, можем найти элемент Казимира

$$J^m_+ J^m_+ = \alpha^2 \beta^2 - (\alpha_i \beta_i)^2. \tag{1.125}$$

Для того, чтобы построить аналог суперчастицы [105], естественно ограничить фазовое пространство на поверхность

$$\alpha^2 \beta^2 = c_1^2, \qquad \alpha_i \beta_i = c_2, \tag{1.126}$$

где c_1 и c_2 – некоторые константы. Эта поверхность задает связи первого рода. Они делают нефизическими $(2+2)$ степеней свободы. Определим суперзаряды

$$Q_i = p\psi_i - \frac{1}{x} J^m_+ (\lambda^m_+ \psi)_i, \tag{1.127}$$

которые антикоммутируют на гамильтониан на поверхности связи

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2x^2}(c_1^2 - c_2^2) - \frac{i}{2x^2}(\psi \lambda^m_+ \psi) J^m_+. \tag{1.128}$$

На лагранжевом уровне скобки (1.123) и связи (1.126) можно представить в виде

$$\frac{1}{2}(\dot{\alpha}_i \beta_i - \alpha_i \dot{\beta}_i) + A(\alpha^2 \beta^2 - c_1^2) + B(\alpha_i \beta_i - c_2), \tag{1.129}$$

где A и B – лагранжевы множители. Кинетический слагаемое первого порядка по производным приводит к скобке Дирака (1.123). Очевидно, что данную модель можно рассматривать и без проекции на поверхность связи, имея, таким образом, восемь степеней свободы на фазовом пространстве.Данная модель может быть очевидным образом расширена до модели с супергруппой симметрии $D(2,1;\alpha)$.

[1]Термин "полудинамические"означает, что динамика соответствующих степеней свободы определяется уравнениями первого порядка.

1.6 Модель $OSp(2|N)$–суперчастицы для произвольного N

Мы переходим к общему случаю супералгебры $osp(N|2)$ и ее реализаций на суперчастицах с κ–симметрией. Как будет показано ниже, κ–симметрия для произвольного $N \neq 4$ нарушена до однопараметрической калибровочной фермионной симметрии аналогично случаю $SU(1,1|N)$–суперчастиц. Рассмотрим факторпространство

$$\frac{OSp(N,2)}{SO(1,1)\times SO(N-1)} \sim \frac{\{H,K,D,J^a,Q,S\}}{\{D,M^{mn}\}}, \tag{1.130}$$

бозонная часть которого представляет собой произведение $AdS_2 \times S^{N-1}$. Функционал действия на этом факторпространстве определим выражением (1.118). Алгебраические уравнения, которые следуют из требования инвариантности функционала действия относительно κ–преобразований, совпадают с теми, что были получены из (1.107). Эти уравнения можно привести к виду

$$[\delta_\kappa \eta]\left(L^m L^n \{\lambda^m, \lambda^n\} + 2L^m L^n\right) = 0, \tag{1.131}$$

при условии, что выполнено требование (1.108), где фигурные скобки обозначают матричный антикоммутатор. Чтобы найти его явно, удобно определить матрицы λ^{jk} в бра/кет обозначениях

$$\lambda^{jk} = |j\rangle\langle k| - |k\rangle\langle j|, \qquad j,k = 1,\ldots,N, \tag{1.132}$$

и установить соотношения

$$\{\lambda^m, \lambda^n\} = -(|m\rangle\langle n| + |n\rangle\langle m|) - 2|N\rangle\langle N|. \tag{1.133}$$

Используя этот результат, можем найди однопараметрическое решение уравнений (1.131)

$$|[\delta_\kappa \eta]\rangle = \kappa\,|N\rangle, \tag{1.134}$$

где κ – произвольный антикоммутирующий параметр. Отметим также, что уравнения (1.131) можно разрешить для любого $[\delta_\kappa \eta]$ только лишь в тривиальном случае $N = 2$. Как было показано в разделе 1.5.2, случай $N = 4$ является выделенным, поскольку $so(4)$ представляет собой прямую сумму двух копий $so(3)$ и может быть представлена матрицами (1.102) с ключевыми для

κ–симметрии свойствами (1.103) и (1.104). В общем случае, разложить алгебру $so(N)$ на подалгебру $so(N-1)$ и набор генераторов, определяющих факторпространство, можно лишь согласно формуле (3.94), что приводит к соотношениям (1.133) и (1.134).

Принимая во внимание (3.117), функционал действия можно записать в виде

$$S = -2m \int dt \sqrt{L_H(z^2 L_H + \dot{z} - 2iz(\dot{\psi}\eta) - i(\eta\dot{\eta})) - L^m L^m} - 2m \int (zL_H - i\dot{\psi}\eta) dt, \tag{1.135}$$

где все дифференциалы в L_H и L^m заменены на скорости по отношению к параметру t.

Перейдем к анализу модели в каноническом формализме. Прямое вычисление приводит к гамильтониану

$$H = \frac{m^2}{p_z^2} + z^2 p_z + 2mz + \frac{1}{4p_z} J^a J^a - \frac{i}{2} J^a (\eta \lambda^a \eta), \tag{1.136}$$

где мы воспользовались тем фактом, что $e_m^\mu O_{am}$ представляет собой набор векторов Киллинга (см., например, [106]), откуда следует, что $p_\mu e_m^\mu O_{am} := J^a$ определяет набор генераторов алгебры $so(N)$ на фазовом пространстве. Фермионные импульсы приводят к связям

$$p_\eta - ip_z \eta = 0, \tag{1.137}$$

$$\begin{aligned} & p_\psi + i\psi \left(\frac{m^2}{p_z} - \frac{1}{p_z} J^a J^a + z^2 p_z + 2mz \right) - 2z p_\eta + \\ & \qquad + iJ^a(\eta\lambda^a) + im\eta = 0. \end{aligned} \tag{1.138}$$

Отметим, что гамильтониан имеет такую же структуру, как и в случае $N = 4$ (1.111) [1], но теперь мы имеем дополнительные фермионные переменные и связи (1.138). Среди этих связей можно выделить лишь одну первого рода, которая связана с нарушенной κ–симметрией для $N > 2$.

[1] С той разницей, что теперь фермионы η и ψ поменялись ролями, поскольку мы используем различную параметризацию элементов факторпространств (3.113) и (3.116).

Глава 2 l–конформная симметрия Галилея и ее геометрические реализации

В данной главе мы переходим к изучению l–конформной симметрии Галилея и ее геометрических реализаций. l–конформная алгебра Галилея представляет собой семейство нерелятивистских конформных алгебр, которые параметризуются целым или полуцелым положительным параметром l [74]

$$[H, C_i^{(n)}] = inC_i^{(n-1)}, \qquad [D, C_i^{(n)}] = i(n-l)C_i^{(n)}, \tag{2.1}$$
$$[K, C_i^{(n)}] = i(n-2l)C_i^{(n+1)}, \qquad [M_{ij}, C_k^{(n)}] = -i(\delta_{ik}C_j^{(n)} - \delta_{jk}C_i^{(n)}),$$
$$[M_{ij}, M_{kl}] = -i(\delta_{ik}M_{jl} + \delta_{jl}M_{ik} - \delta_{il}M_{jk} - \delta_{jk}M_{il}),$$
$$[H, D] = iH, \qquad [H, K] = 2iD, \qquad [D, K] = iK, \tag{2.2}$$

где $n = 0, \ldots, 2l$ и размерностью пространства $i = 1, \ldots, d$. Конформная подалгебра $so(1,2)$ задана операторами временных трансляций H, дилатаций D и специальных конформных преобразований K, действие которых естественно определить в d–мерном галилеевском пространстве с дополнительным выделенным временным измерением. Вращения, трансляции галилеевские бусты в этом пространстве генерируются операторами M_{ij}, $C_i^{(0)}$ и $C_i^{(1)}$, соответственно, в то время как $C_i^{(\alpha)}$, где $\alpha = 2, \ldots, 2l$ представляют собой генераторы ускорений.

2.1 Факторпространства l–конформной группы Галилея и геодезические на них

В этом разделе мы построим метрики на факторпространствах l–конформной группы Галилея. Для начала определим факторпространство. Будем полагать, что подгруппа, которой берется фактор, гененируется операторами D и M_{ij}. Зададим соответствующий элемент факторпространства в следующем виде:

$$u = e^{itH}e^{irK}e^{ix_i^{(n)}C_i^{(n)}}, \tag{2.3}$$

где t, r и $x_i^{(n)}$ обозначают координаты на факторпространстве. Определим один–формы Маурера–Картана

$$u^{-1}du = i(L_H H + L_K K + L_D D + L_i^{(n)}C_i^{(n)}). \tag{2.4}$$

Пользуясь соотношением (1.9), найдем инвариантную метрику на факторпространстве

$$ds^2 = L_H L_K + V_{m,n} L_i^{(m)} L_i^{(n)}, \tag{2.5}$$

где $V_{m,n}$ – антидиагональная матрица

$$V_{m,n} = k_n \delta_{m+n,2l}, \tag{2.6}$$

с произвольными постоянными элементами k_n. Первое слагаемое нам уже знакомо и представляет собой метрику на AdS_2. Отметим, что для случая $d = 1$, $l = 1$ метрика была построена ранее в работе [107].

Далее, запишем уравнения геодезических на факторпространстве с метрикой (2.5). Алгебраическая структура позволяет выписать уравнения в компактной форме, что является общим свойством для уравнений геодезических на фактопространствах. Действительно, рассмотрим некоторую алгебру с выделенной подалгеброй со структурными соотношениями (1.1). На соответствующем факторпространстве построим метрику, используя один–формы Маурера–Картана $ds^2 = B_{ab} L^a L^b$, где матрица B_{ab} определена соотношением (1.9). Действие для уравнений геодезических имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \int B_{ab} L^a L^b d\lambda, \tag{2.7}$$

где полагаем, что все дифференциалы dz^μ в один формах $L^a = L^a_\mu dz^\mu$ заменены на скорости по отношению к параметру λ. Принимая во внимание тождество

$$\delta L^a = \frac{d}{d\lambda} \delta X^a + \dot{z}^\nu \delta z^\mu (\partial_\mu L^a{}_\nu - \partial_\nu L^a{}_\mu), \tag{2.8}$$

где $\delta X^a = \delta z^\mu L^a{}_\mu$, а также уравнения Маурера–Картана

$$dL^a + \frac{1}{2} f^a_{bc} L^b \wedge L^c + f^a_{ci} L^c \wedge L^i = 0, \tag{2.9}$$

вариацию действия (2.7) можно записать в виде

$$\delta S = \int B_{ab} L^b \left(\frac{d}{d\lambda} \delta X^a - \frac{1}{2} f^a_{bc} \left(\delta X^b L^c - L^b \delta X^c \right) - f^a_{ci} \left(\delta X^c L^i - \delta X^i L^c \right) \right) d\lambda, \tag{2.10}$$

где мы ввели обозначение $\delta X^i = \delta z^\mu L^i{}_\mu$. В полученном выражении последний влкад обращается в ноль вследствие условия (1.9) на компоненты матрицы B_{ab}.

Из вариации действия (2.10) найдем уравнение геодезических на факторпространстве

$$B_{ab}\dot{L}^b = B_{bd}f^d_{ca}L^bL^c + B_{bd}f^d_{ia}L^bw^i. \tag{2.11}$$

Мы можем воспользоваться полученным соотношением для того, чтобы записать уравнения геодезических на факторпространстве l–конформной группы Галилея с метрикой (2.5) в следующей форме

$$\begin{aligned}
&\dot{L}_H = -L_HL_D + 2(q-2l)V_{p,q+1}L_i^{(p)}L_i^{(q)}, \\
&\dot{L}_K = L_KL_D + 2qV_{p,q-1}L_i^{(p)}L_i^{(q)}, \\
&\dot{L}_i^{(p)}V_{p,n} = -(n-l)V_{p,n}L^{(p)}L_D - nV_{p,n-1}L_i^{(p)}L_H - (n-2l)V_{p,n+1}L_i^{(p)}L_K.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Полученные уравнения геодезических можно рассматривать как динамическую реализацию l–конформной алгебры Галилея. Левое действие группового элемента $g = e^{iaH}e^{ibK}e^{icD}e^{i\lambda_i^{(n)}C_i^{(n)}}e^{\frac{i}{2}\sigma_{ij}M_{ij}}$ на факторпространстве (2.3), где $a, b, c, \lambda_i^{(n)}$ и $\sigma_{ij} = -\sigma_{ji}$ – инфинитеземальные параметры преобразований, генерирует преобразования симметрии для уравнений (2.12)

$$\begin{aligned}
&H = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad K = t^2\frac{\partial}{\partial t} + (1-2tr)\frac{\partial}{\partial r} - 2t(n-l)x_i^{(n)}\frac{\partial}{\partial x_i^{(n)}}, \\
&D = t\frac{\partial}{\partial t} - r\frac{\partial}{\partial r} - (n-l)x_i^{(n)}\frac{\partial}{\partial x_i^{(n)}}, \qquad M_{ij} = x_i^{(n)}\frac{\partial}{\partial x_j^{(n)}} - x_j^{(n)}\frac{\partial}{\partial x_i^{(n)}}, \\
&C_i^{(m)} = D^{nm}\frac{\partial}{\partial x_i^{(n)}}, \quad D^{mn} = \sum_{s=0}^{m}\frac{(-1)^{n-s}m!(2l-s)!}{s!(m-s)!(n-s)!(2l-n)!}t^{m-s}r^{n-s},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

где предполагается, что в последнем соотношении слагаемые с $s > m$ и $s > n$ равны нулю. Преобразования форм Маурера–Картана относительно действия (1.7) имеют вид

$$\begin{aligned}
&L_H \to (1+2tb+c)L_H, \qquad L_K \to (1-2tb-c)\,L_K, \qquad L_D \to L_D - 2bL_H, \\
&L_i^{(n)} \to (\delta_{ij} - \delta_{ij}(n-l)(c+2bt) - \sigma_{ij})L_j^{(n)}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Можно непосредственно убедиться в том, что квадратичная форма (2.5) инвариантна относительно преобразований (2.14)

Для того, чтобы построить соответствующие интегралы движения в явной форме, переопределим координаты $x_i^{(n)}$

$$x_i'^{(n)} = (D^{-1})^{np}x_i^{(p)}, \tag{2.15}$$

где матрица $(D^{-1})^{np}$ является обратной к D^{np}

$$(D^{-1})^{np} = \sum_{q=n}^{2l} \frac{(-1)^{q-n} q!(2l-p)!}{n!(q-p)!(q-n)!(2l-q)!} t^{q-n} r^{q-p}, \tag{2.16}$$

и предполагается, что слагаемые с $p > q$ и $n > q$ равны нулю. В новой координатной системе $C_i^{(m)}$ генерируют сдвиги вдоль $x_i'^{(n)}$. Несложно убедиться, что данная система координат соответствует параметризации факторпространства в следующей форме:

$$u = e^{iC_i^{(n)} x_i'^{(n)}} e^{itH} e^{irK}. \tag{2.17}$$

Метрика в такой системе координат имеет вид (2.5), где

$$L_i^{(n)} = D^{np} dx_i'^{(p)}, \tag{2.18}$$

а L_H, L_D, L_K имеют прежний вид. Уравнения движения, разумеется, по-прежнему имеют вид (2.12).

Генераторы преобразований симметрии в новой системе координат определяются соотношениями

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial}{\partial t} - (n+1) x_i'^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial x_i'^{(n)}}, \qquad D = t\frac{\partial}{\partial t} - r\frac{\partial}{\partial r} - (n-l) x_i'^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_i'^{(n)}}, \\ K &= t^2 \frac{\partial}{\partial t} + (1-2tr)\frac{\partial}{\partial r} - (n-2l-1) x_i'^{(n-1)} \frac{\partial}{\partial x_i'^{(n)}}, \qquad C_i^{(n)} = \frac{\partial}{\partial x_i'^{(n)}} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Теперь мы можем записать интегралы движения в явной форме

$$\begin{aligned} H &= 2r^2 \dot{t} + \dot{r} - (n+1) x_i'^{(n+1)} C_i^{(n)}, \qquad C_i^{(n)} = D^{pn} V_{p,m} \omega_i^{(m)}, \\ D &= t(2r^2 \dot{t} + \dot{r}) - r\dot{t} - (n-l) x_i'^{(n)} C_i^{(n)}, \\ K &= t^2 (2r^2 \dot{t} + \dot{r}) + (1-2tr)\dot{t} - (n-2l-1) x_i'^{(n-1)} C_i^{(n)}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

При этом полезно принять во внимание тождества:

$$\dot{D}^{mp} (D^{-1})^{pn} = (n-l) L_D \delta^{mn} + n\delta^{n-1,m} L_H + (n-2l) L_K \delta^{m,n+1}, \tag{2.21}$$

$$qD^{p,q-1} (D^{-1})^{qm} V_{pn} - r^2 (n-2l) V_{m,n+1} - nV_{m,n-1} + m \leftrightarrow n = 0,$$

$$(q-l) D^{pq} (D^{-1})^{qm} V_{pn} - (tr^2 - r)(n-2l) V_{m,n+1} - tnV_{m,n-1} + m \leftrightarrow n = 0,$$

$$(q-2l) D^{p,q+1} (D^{-1})^{qm} V_{p,n} - (1-tr)^2 (n-2l) V_{m,n+1} - t^2 nV_{m,n-1} + m \leftrightarrow n = 0,$$

Можно убедиться, что (2.20) задают систему функционально независимых интегралов движения для системы уравнений второго порядка (2.12).

2.2 Риччи–плоские пространства с l–конформной группой изометрии

В этом разделе мы деформируем метрику (2.5) на факторпространстве таким образом, чтобы она описывала Риччи–плоское пространство. Для начала найдем явный вид один–форм Маурера–Картана, используя определение (2.4) и выражение для элемента фактропространства (2.3)

$$\begin{aligned}
L_i^{(n)} &= dx_i^{(n)} + 2r(n-l)x_i^{(n)}dt - (n+1)x_i^{(n+1)}dt - \\
&\qquad\qquad -(n-2l-1)x_i^{(n-1)}(r^2dt+dr), \\
L_H &= dt, \qquad\qquad L_K = r^2dt+dr, \qquad\qquad L_D = -2rdt. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

где мы полагаем, что $x_i^{(-1)} = x_i^{(2l+1)} = 0$.

Для дальнейшего удобства выполним замену координат

$$t \to \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{r}\right). \qquad (2.23)$$

В этих координатах один–форму $L_i^{(n)}$ можно записать в виде

$$L_i^{(n)} = dx_i^{(n)} + a_i^{(n)}dt + b_i^{(n)}dr, \qquad (2.24)$$

где

$$\begin{aligned}
a_i^{(n)} &= r(n-l)x_i^{(n)} - \frac{1}{2}(n+1)x_i^{(n+1)} - \frac{1}{2}r^2(n-2l-1)x_i^{(n-1)}, \\
b_i^{(n)} &= -\frac{1}{r}(n-l)x_i^{(n)} + \frac{1}{2r^2}(n+1)x_i^{(n+1)} - \frac{1}{2}(n-2l-1)x_i^{(n-1)}. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Приведенные обозначения облегчают построение явного решения уравнений Эйнштейна $R_{\mu\nu} = 0$.

Запишем деформированную метрику (2.5), расширив пространство дополнительным измерением, параметризуемым координатой y

$$ds^2 = \alpha(y)\left(r^2dt^2 - \frac{dr^2}{r^2}\right) + V_{n,m}L_i^{(n)}L_i^{(m)} + \epsilon dy^2, \qquad (2.26)$$

где $\alpha(y)$ некоторая функция, форму которой мы зафиксируем ниже. Отметим, что мы могли бы ввести также некоторую функцию для компоненты метрики dy^2, однако ее всегда можно устранить переопределением координаты y. При этом, оставшийся произвол в выборе знака контролируется параметром $\epsilon = \pm 1$. Компоненты антидиагональной матрицы $V_{m,n}$ мы считаем постоянными. Необходимо подчеркнуть, что такая деформация метрики на фоакторпространстве не нарушает группу изометрии для (2.26).

Перейдем к решению вакуумных уравнений Эйнштейна $R_{\mu\nu} = 0$. Из уравнения $R_{yy} = 0$ найдем

$$\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)' + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 = 0, \tag{2.27}$$

что позволяет нам зафиксировать вид функции $\alpha(y)$

$$\alpha(y) = c_1(y + c_2)^2, \tag{2.28}$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные. Константу c_2 можно положить равной нулю, поскольку мы всегда можем переопределить $y \ \to y - c_2$. Компоненты тензора Риччи R_{ty}, R_{ry}, R_{xy} обращаются в ноль вследствие выполнения тождеств

$$\frac{\partial a_i^{(n)}}{\partial x_i^{(n)}} = 0, \qquad \frac{\partial b_i^{(n)}}{\partial x_i^{(n)}} = 0. \tag{2.29}$$

Уравнение $R_{xx} = 0$ приводит к условию, которое позволяет зафиксировать компоненты матрицы $V_{n,m}$

$$\begin{aligned} &n^2 V_{n-1,2l-n+1} + (2l-n)^2 V_{n+1,2l-n-1} \\ &- \left[(n+1)^2 V^{n+1,2l-n-1} + (n-2l-1)^2 V^{n-1,2l-n+1}\right] (V_{n,2l-n})^2 = 0, \end{aligned} \tag{2.30}$$

где $n = 0, \ldots, 2l$ и $V^{m,n}$ является обратной матрицей к $V_{m,n}$. Можно убедиться, что (2.30) подразумевает, что все компоненты матрицы $V_{n,m}$ связаны с $V_{0,2l}$ посредством рекуррентного соотношения

$$V_{m,n} = \varepsilon_{mn} \frac{n}{m+1} V_{m+1,n+1}, \tag{2.31}$$

где $\varepsilon_{mn} = \pm 1$. Уравнение $R_{tt} = 0$ связывает константы $c_1 = \frac{1}{2}\alpha''$ в (2.28) с параметрами d, l, ϵ и матричными элементами $V_{p,q}$

$$c_1 = \epsilon + \frac{l(l+1)(2l+1)d\epsilon}{6} - \frac{d\epsilon}{4} \sum_{p=0}^{2l-1} \sum_{q=1}^{2l} (p+1)(q-2l-1) V^{p+1,q-1} V_{p,q}. \tag{2.32}$$

Можно убедиться, что оставшиеся компоненты тензора Риччи обращаются в ноль, при условии, что выполнены ограничения на параметры (2.30) и (2.40).

2.3 Многообразия Эйнштейна с l–конформной симметрией Галилея

В этом разделе мы продемонстрируем, что метрика на факторпространстве (2.5) может быть деформирована таким образом, чтобы она описывала многообразие Эйнштейна, сохраняя при этом l–конформную симметрию Галилея. Как и в предыдущем разделе, выполним замену координат (2.23) и введем дополнительную координату y

$$ds^2 = \alpha \left(r^2 dt^2 - \frac{dr^2}{r^2} \right) + V_{n,m}(y) L_i^{(n)} L_i^{(m)} + \epsilon dy^2, \tag{2.33}$$

где теперь мы полагаем, что матричные коэффициенты $V_{m,n}$ являются функциями от координаты y. Ясно, что такая деформация метрики не нарушает ее инвариантности относительно действия l–конформной группы Галилея. Как и прежде, произвол в выборе множителя перед dy^2 определяется знаком $\epsilon = \pm 1$.

Прямым вычислением убеждаемся, что компоненты тензора Риччи имеют вид

$$R_{\{(m)i\}\{(n)j\}} = \frac{\epsilon}{4} V^{p,q} \left(V'_{p,(m} V'_{n),q} - V'_{p,q} V'_{m,n} \right) \delta_{ij} - \frac{\epsilon}{2} V''_{m,n} \delta_{ij} + \Omega_{mn} \delta_{ij}, \tag{2.34}$$

где

$$\Omega_{mn} = \frac{1}{4\alpha} \left(q(p-2l) V^{q,p} V_{q-1,m} V_{n,p+1} - m(n-2l) V_{m-1,n+1} \right) + (m \leftrightarrow n), \tag{2.35}$$

и, как и прежде, штрих обозначает производную по координате y. Чтобы упростить эти уравнения, далее мы полагаем, что $V_{m,n}(y) = v(y) V_{m,n}$, где $v(y)$ – некоторая функция, вид которой будет зафиксирован ниже, а коэффициенты матрицы $V_{m,n}$ постоянны. Требование пропорциональности тензора Риччи метрике приводит к условию $\Omega_{mn} = 0$. Оно, в свою очередь, ведет к рекуррентному соотношению (2.31), которое оставляет лишь одну компоненту $V_{0,2l}$ матрицы независимой.

Принимая во внимание перечисленные выше ограничения, компоненты тензора Риччи можно переписать в следующей форме:

$$R_{mn} = \epsilon \frac{v'^2}{v} \left(-\frac{1}{4} d(2l+1) + \frac{1}{2} \right) V_{m,n} - \frac{\epsilon}{2} v'' V_{m,n}, \tag{2.36}$$

где мы обозначили $R_{\{(m)i\}\{(n)j\}} = R_{mn} \delta_{ij}$. Уравнение Эйнштейна $R_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = 0$

накладывает ограничение на вид функции $v(y)$

$$v'^2 - \frac{4\lambda\epsilon}{d(2l+1)}v^2 = 0. \qquad (2.37)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v(y) = C\exp \pm ky, \qquad k^2 = \frac{4\lambda\epsilon}{d(2l+1)}, \qquad (2.38)$$

где C – постоянная интегрирования. Для того, чтобы метрика была вещественной, произведение $\lambda\epsilon$ должно быть положительным.

Прямыми вычислениями можно убедиться, что компоненты R_{ty}, R_{ry}, R_{xy} тождественно обращаются в ноль, в то время как оставшиеся имеют вид

$$\begin{aligned} &R_{tt} = R_{mn}a_i^{(m)}a_i^{(n)} + cr^2, \qquad R_{rr} = R_{mn}b_i^{(m)}b_i^{(n)} - \frac{c}{r^2}, \\ &R_{tr} = R_{mn}a_i^{(m)}b_i^{(n)}, \qquad R_{t\{(m)i\}} = R_{mp}a_i^{(p)}, \qquad R_{r\{(m)i\}} = R_{mp}b_i^{(p)}, \end{aligned} \qquad (2.39)$$

где

$$c = \epsilon + \frac{l(l+1)(2l+1)d\epsilon}{6} - \frac{d\epsilon}{4}V^{p+1,q-1}V_{p,q}(p+1)(q-2l-1). \qquad (2.40)$$

Наконец, можно видеть, что (2.33) подчиняется уравнению $R_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = 0$, если мы свяжем космологическую постоянную λ с параметром α, входящим в метрику

$$\alpha = -\frac{c}{\lambda}. \qquad (2.41)$$

Как и Риччи–плоская метрика, построенная в предыдущем разделе, метрика (2.33) имеет ультрагиперболическую сигнатуру. Она описывает $[(2l+1)d+3]$-мерное многообразие Эйнштейна с одним независимым параметром C, определенным уравнением (2.38).

Глава 3 $3D$ гравитация с расширенной l–конформной симметрией Галилея

3.1 Расширенная l–конфмормная алгебра Галилея

В этом разделе мы построим расширение l–конфмормной алгебры Галилея в $d=1$ и $d=2$ включением трех дополнительных генераторов. Для случая $l=\frac{1}{2}$ такое расширение было построено в работе [90]. Интересной особенностью полученной алгебры является то, что ее можно переписать в релятивистских терминах [96] и рассматривать таким образом как расширенную алгебру Пуанкаре.

Для дальнейшего удобства мы перепишем l–конформную алгебру Галилея (2.1) в $d=2$ в следующем базисе:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, \qquad [L_m, C_p^i] = (lm-p)C_{m+p}^i,$$
$$[I, C_p^i] = \epsilon^{ij} C_p^j, \qquad m,n = \pm 1, 0, \quad p = -l, \ldots, l, \qquad i = 1,2. \tag{3.1}$$

Случай $d=1$ может быть получен из (3.1), опустив векторный индекс i у генератора C и исключив генератор вращений I, который мы обозначали в предыдущий главе символом M. Генераторы L_m образуют конформную подалгебру и соответствуют операторам (H, K, D) в (2.1). В следующих двух разделах мы построим расширение алгебры (3.1).

3.1.1 Случай полуцелого l

Введем в рассмотрение три новых генератора M_m, $m, \pm 1, 0$ и будем считать, что коммутатор векторных генераторов C_p^i теперь отличен от нуля и имеет вид

$$[C_p^i, C_q^j] = \epsilon^{ij} f_{p,q}^{(l)} M_{p+q} + N_{p,q}^{(l)} \delta^{ij}, \tag{3.2}$$

где $f_{p,q}^{(l)}$ – симметричные, а $N_{p,q}^{(l)}$ – антисимметричные структурные постоянные, причем последние задают центральное расширение. Их форма была найдена в работе [80]. Вид $N_{p,q}^{(l)}$ можно зафиксировать, рассматривая тождества Якоби для генераторов (L_m, C_p^i, C_q^j)

$$(lm-p)N_{p+m,q} - (lm-q)N_{q+m,p} = 0, \tag{3.3}$$

которое дает

$$N_{-p,p}^{(l)} = (-1)^{(p+1/2)^2}\frac{(2l-2p)}{(2l+1)}\prod_{s=\frac{1}{2}}^{p}\frac{(2l+2s)}{(2l-2s)}N, \qquad p>0, \tag{3.4}$$

в то время как все остальные компоненты $N_{p,q}^{(l)}$ равны нулю. Символом N мы обозначаем единственный независимый элемент.

Основываясь на случае $l=\frac{1}{2}$ [90], будем полагать, что для любого l расширенная алгебра включает подалгебру Пуанкаре

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, \qquad [L_m, M_n] = (m-n)M_{m+n}, \qquad m,n=\pm 1, 0. \tag{3.5}$$

Исходя из этого потребуем, чтобы структурные постоянные $f_{p,q}^{(l)}$ были отличны от нуля лишь в случае $|p+q|\le 1$. Тождества Якоби для (L_m, C_p^i, C_q^j) накладывают следующее ограничение на структурные постоянные $f_{p,q}^{(l)}$

$$(m-p-q)f_{p,q}^{(l)} - (lm-p)f_{q,p+m}^{(l)} - (lm-q)f_{p,q+m}^{(l)} = 0. \tag{3.6}$$

Интересно отметить, что это в точности условие на структурные постоянные в нечетном секторе так называемой гипер–алгебры Пуанкаре [26], которая представляет собой обобщение обычной супералгебры Пункаре, опубликованные в работе [108]. Это ограничение на структурные константы приводит к реккурентному соотношению

$$f_{p,-p-1}^{(l)} = f_{-p,p+1}^{(l)} = -\frac{p+l+1}{2p}f_{p,-p}^{(l)}, \qquad p>0, \tag{3.7}$$

и все $f_{p,-p}^{(l)}$ можно выразить через $f_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(l)}$ [26]

$$f_{-p,p}^{(l)} = 2p\prod_{s=\frac{1}{2}}^{p-1}\frac{2l+2s+2}{2s-2l}f_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(l)}, \tag{3.8}$$

где мы нормировали единственный независимый элемент $f_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(l)}=1$. Помимо этого, структурные постоянные имеют еще два нетривиальных элемента $f_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(l)} = f_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{(l)} = \frac{1+2l}{2}$.

Рассмотрим более детально случаи $l=\frac{1}{2}$ и $l=\frac{3}{2}$.

3.1.1.1 Случай $l = \frac{1}{2}$

Структурные соотношения расширенной алгебры Шредингера были получены в [90]

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, \qquad [L_m, M_n] = (m-n)M_{m+n},\\
&[L_m, C^i_p] = \left(\frac{m}{2} - p\right) C^i_{m+p}, \qquad [I, C^i_p] = \epsilon^{ij} C^j_p,\\
&[C^i_p, C^j_q] = \frac{1}{2}\epsilon^{ij} M_{p+q} + \frac{1}{2} N(p-q)\delta^{ij}, \qquad m,n = \pm 1, 0, \quad p,q = \pm\frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Алгебру можно переписать в явно лоренц–инвариантной форме (см. Приложение B, 3.3.3.3)

$$
\begin{aligned}
&[J^a, J^b] = \epsilon^{abc} J_c, \qquad [J^a, \mathcal{P}^b] = \epsilon^{abc}\mathcal{P}_c, \qquad [I, Z^i_\alpha] = \epsilon^{ij} Z^j_\alpha,\\
&[J^a, Z^i_\beta] = \frac{1}{2} Z^i_\beta (\gamma^a)^\beta{}_\alpha, \qquad [Z^i_\alpha, Z^j_\beta] = -\frac{1}{2}\epsilon^{ij}(C\gamma_a)_{\alpha\beta}\mathcal{P}^a + N C_{\alpha\beta}\delta^{ij}.
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Таким образом, мы видим, что расширенная алгебра Шредингера изоморфна расширенной алгебре Пуанкаре.

3.1.1.2 Случай $l = \frac{3}{2}$

В работе [26] было отмечено, что структурные постоянные $f^{(l)}_{p,q}$ можно выразить через однородные полиномы. Аналогичным образом можем выразить и $N_{p,q}$. Расширенная алгебра Галилея для $l = \frac{3}{2}$ имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, \qquad [L_m, M_n] = M_{m+n},\\
&[L_m, C^i_p] = \left(\frac{3m}{2} - p\right) C^i_{m+p}, \qquad [I, C^i_p] = \epsilon^{ij} C^j_p,\\
&[C^i_p, C^j_q] = \frac{1}{4}\left(9 + 8pq - 6p^2 - 6q^2\right)\epsilon^{ij} M_{p+q} - \frac{1}{2}(p-q)\left(p^2 + q^2 - \frac{5}{2}\right)\delta^{ij} N,
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

где $m, n = \pm 1, 0$, и $p, q = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$. Структурные постоянные в коммутаторе $[C^i_p, C^j_q]$ находятся в согласии с соотношениями (3.7) и (3.8). Как и в случае расширенной алгебры Шредингера, можем переписать алгебру (3.11) в $3D$ лоренц–ковариантной форме (см. Приложение B)

$$
\begin{aligned}
&[J^a, J^b] = \epsilon^{abc} J_c, \qquad [J^a, \mathcal{P}^b] = \epsilon^{abc}\mathcal{P}_c,\\
&[J^a, Z^{b,i}_\alpha] = \frac{3}{2}(Z^{b,i}\gamma^a)_\alpha - (Z^{a,i}\gamma^b)_\alpha, \qquad [I, Z^{a,i}_\alpha] = \epsilon^{ij} Z^{a,j}_\alpha,
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

$$[Z^{a,i}_\alpha, Z^{b,j}_\beta] = \epsilon^{ij}\left(-2(C\gamma^c)_{\alpha\beta}\mathcal{P}_c\eta^{ab} + \frac{5}{2}\epsilon^{abc}C_{\alpha\beta}\mathcal{P}_c + \frac{1}{2}(C\gamma^{(a})_{\alpha\beta}\mathcal{P}^{b)}\right) + \\ +\delta^{ij}\left(\epsilon^{abc}(C\gamma_c)_{\alpha\beta} - 2\eta^{ab}C_{\alpha\beta}\right)N, \tag{3.13}$$

где генератор $Z^{a,i}_\alpha$ имеет свойство гамма–бесследовости $Z^{a,i}\gamma_a = 0$.

В случае произвольного полуцелого l число генераторов C^i_p в точности равно числу независимых компонент симметричного гамма–бесследового тензора $Z^{a_1\ldots a_n i}_\alpha$ с $n = l - \frac{1}{2}$. Следовательно, по аналогии с гипер–алгебрами Пуанкаре [26], мы можем представить расширенную l–конформную алгебру Галилея в следующей форме:

$$[J^a, J^b] = \epsilon^{abc}J_c, \qquad [J^a, \mathcal{P}^b] = \epsilon^{abc}\mathcal{P}_c, \qquad [I, Z^{a_1\ldots a_n,i}] = \epsilon^{ij}Z^{a_1\ldots a_n,j}$$
$$[J^a, Z^{b_1\ldots b_n,i}] = \left(n + \frac{1}{2}\right)Z^{b_1\ldots b_n,i}\gamma^a - Z^{a(b_2\ldots b_n|,i}\gamma^{|b_1)},$$
$$[Z^{a_1\ldots a_n,i}_\alpha, Z^{b_1\ldots b_n,j}_\beta] = \epsilon^{ij}f^{a_1\ldots a_n b_1\ldots b_n c}_{\alpha\beta}\mathcal{P}_c + \delta^{ij}N^{a_1\ldots a_n b_1\ldots b_n}_{\alpha\beta}N, \tag{3.14}$$

где структурные постоянные являются $SO(1,2)$–ивариантными тензорами, построенными из гамма–матриц, метрики Минковского, тензора Леви–Чевиты и матрицы зарядового сопряжения.

3.1.2 Случай целого l

Можно убедиться, что в случае целого l не существует решения для рекурентного соотношения (3.6). Чтобы разрешить эту проблему, мы изменим структуру коммутационных соотношений для C^i_p в (3.11) следующим образом:

$$[C^i_p, C^j_q] = \delta^{ij}f^{(l)}_{p,q}M_{p+q}.$$

Далее мы ограничимся случаем $d = 1$, хотя, как видно из структуры коммутационных соотношений записанных выше, можно легко обобщить рассмотрение на случай произвольного d. Тогда коммутационные соотношения для генераторов C_p примут вид

$$[C_p, C_q] = f^{(l)}_{p,q}M_{p+q}. \tag{3.15}$$

Все оставшиеся коммутаторы имеют такую же форму, как и в (3.11), с исключенным из рассмотрения генератором I. В частности, ненулевые значения принимают компоненты структурных постоянных $f^{(l)}_{p,q}$ лишь для $|p+q| \leq 1$. Из тождеств Якоби для генераторов(L_m, C_p, C_q) найдем следующее ограничение[1]:

$$(m-p-q)f^{(l)}_{p,q} + (lm-p)f^{(l)}_{q,p+m} - (lm-q)f^{(l)}_{p,q+m} = 0, \tag{3.16}$$

которое приводит к условию, что структурные постоянные должны быть связаны посредством соотношения (3.7). Явно их можно представить в форме $f^{(l)}_{0,1} = f^{(l)}_{-1,0} = \frac{l}{2} f_{-1,1}$ и

$$f^{(l)}_{-p,p} = p \prod_{s=1}^{p-1} \frac{l+s+1}{s-l} f^{(l)}_{-1,1}. \tag{3.17}$$

В дальнейшем мы нормируем независимую компоненту $f^{(l)}_{-1,1} = 1$. Опять же, структурные константы можно представить через полиномы. Ниже мы рассмотрим два примера расширенной l–конформной алгебры Галилея для целых l.

3.1.3 Случай $l = 1$

Структурные соотношения для расширенной $l = 1$–конформной алгебры Галилея имеют вид

$$\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, \quad [L_m, M_n] = (m-n)M_{m+n},\\
&[L_m, C_n] = (m-n)C_{m+n},\\
&[C_m, C_n] = (m-n)M_{m+n}, \qquad m, n = \pm 1, 0,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

где мы также переопределили $M_m \to -M_m$ и $C_m \to 2C_m$. Эта алгебра изоморфна алгебре Максвелла в трехмерном пространстве, записанной в базисе BMS_3 (см., например, [109]). Чтобы представить алгебру в стандартной лоренц–инвариантной форме, переопределим генераторы как в (3.128) и в результате получим

$$\begin{aligned}
&[J^a, J^b] = \epsilon^{abc} J_c, \qquad [J^a, \mathcal{P}^b] = \epsilon^{abc} \mathcal{P}_c.\\
&[J^a, Z^b] = \epsilon^{abc} Z_c, \qquad [\mathcal{P}^a, \mathcal{P}^b] = \epsilon^{abc} Z_c.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Эти структурные соотношения представляют собой $3D$ алгебру Максвелла в стандартной форме [110, 111]. Генератор $Z_{ab} = \epsilon_{abc} Z^c$ ассоциирован с постоянным электромагнитным полем. Отметим, что генераторы Z^a и $\mathcal{P}^a$ можно

[1]Отметим, что для полуцелого l уравнение (3.16) не имеет решений.

поменять ролями, и алгебра примет вид простейшей алгебры Хиетаринты [108]

$$
\begin{aligned}
&[J^a, J^b] = \epsilon^{abc} J_c, \qquad [J^a, \mathcal{P}^b] = \epsilon^{abc} \mathcal{P}_c. \\
&[J^a, Z^b] = \epsilon^{abc} Z_c, \qquad [Z^a, Z^b] = \epsilon^{abc} \mathcal{P}_c.
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

3.1.4 Случай $l = 2$

Коммутационные соотношения в этом случае имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n}, \qquad [L_m, M_n] = (m-n) L_{m+n}, \\
&[L_m, C_p] = (2m-p) C_{m+p} \\
&[C_p, C_q] = \frac{1}{6}(p-q)(2p^2 + 2q^2 - pq - 8) M_{p+q}, \\
&m, n = \pm 1, 0, \quad p, q = \pm 2, \pm 1, 0.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Мы можем переписать эти коммутационные соотношения в лоренц–инвариантной форме, переопределив генераторы в соответствии с предписанием (3.130)

$$
\begin{aligned}
&[J^a, J^b] = \epsilon^{abc} J_c, \qquad [J^a, \mathcal{P}^b] = \epsilon^{abc} \mathcal{P}_c, \\
&[J^a, Z^{bc}] = \epsilon^{da(b} Z^{c)}{}_d, \qquad [Z^{ab}, Z^{cd}] = \mathcal{P}_e \epsilon^{ec(a} \eta^{b)d} + \mathcal{P}_e \epsilon^{ed(b} \eta^{a)c},
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

где генератор Z^{ab} симметричен и бесследов $Z^{ab}\eta_{ab} = 0$.

3.1.5 Случай произвольного целого l

Для произвольного целого l можно представить расширенную l–конформную алгебру Галилея в $3D$ релятивистской форме введением симметричного бесследового генератора $Z^{a_1 \dots a_l}$. Действительно, число генераторов C_n для данного целого l равно $2l + 1$, что в точности равно числу независимых компонент бесследового симметричного тензора ранга l в трех измерениях. Таким образом, мы можем представить расширенную l–конформную алгебру Галилея в виде

$$
\begin{aligned}
&[J^a, J^b] = \epsilon^{abc} J_c, \qquad [J^a, \mathcal{P}^b] = \epsilon^{abc} \mathcal{P}_c, \\
&[J^a, Z^{a_1 \dots a_l}] = \epsilon^{ab(a_1} Z^{a_2 \dots a_l)}{}_b, \qquad [Z^{a_1 \dots a_l}, Z^{b_1 \dots b_l}] = f^{a_1 \dots a_l b_1 \dots b_l c} \mathcal{P}_c,
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

где структурные константы являются $SO(1, 2)$–инвариантными тензорами, которые должны учитывать свойство бесследовости $Z^{a_1 \dots a_l}$. Можно видеть, что эти алгебры представляют собой подкласс в семействе алгебр Хиетаринты [108].

3.2 $3D$ гравитация как теория Черна–Саймонса

Одной из отличительных особенностей $3D$ гравитации является то, что ее можно представить как теорию Черна–Саймонса [112]. Теория задается функционалом действия

$$S[A] = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}_3} \langle \mathbf{A} d\mathbf{A} + \frac{2}{3}\mathbf{A}^3 \rangle, \tag{3.24}$$

который описывает калибровочное поле $\mathbf{A} = dx^\mu A_\mu(x)$, принимающее значения в некоторой алгебре Ли $\mathbf{A} = A^a T_a$, где T_a – генераторы. В выражении выше предполагается, что один–формы $\mathbf{A}$ умножаются посредством внешнего произведения.

На любой алгебре Ли можно ввести квадратичную форму $\langle T_a, T_b \rangle = g_{ab}$, где g_{ab} – симметричная матрица. Для того, чтобы теория Черна–Сайсмонса была самосогласованной, соответствующая алгебра Ли должна иметь невырожденную инвариантную квадратичную форму. Инвариантность квадратичной формы определяется выражением

$$\langle [T_a, T_b], T_c \rangle + \langle T_b, [T_a, T_c] \rangle = 0, \tag{3.25}$$

или

$$f^d_{ab} g_{dc} + f^d_{ac} g_{bc} = 0, \tag{3.26}$$

где f^c_{ab} – структурные постоянные алгебры. Для полупростых алгебр в качестве инвариантной квадратичной формы может служить метрика Киллинга. Известны неполупростые алгебры Ли, имеющие инвариантную невырожденную билинейную форму. Например, алгебра Пуанкаре в трехмерном пространстве.

Вариацию функционала действия (3.24) можно записать в следующей форме:

$$\delta S[A] = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}_3} \langle 2\delta\mathbf{A}(d\mathbf{A} + \mathbf{A}^2) \rangle - \frac{k}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{M}_3} \langle \mathbf{A}\delta\mathbf{A} \rangle. \tag{3.27}$$

При условии, что граничный вклад обращается в ноль, можем записать уравнения движения

$$d\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = 0. \tag{3.28}$$

То есть уравнения движения представляют собой уравнения Маурера–Картана. Общее решение этих уравнений можно представить в форме

$$\mathbf{A} = g^{-1} dg, \tag{3.29}$$

где g – элемент группы, на основе которой построена теория. Действие Черна–Саймонса инвариантно относительно калибровочного преобразования

$$\mathbf{A} \to g^{-1}\mathbf{A}g + g^{-1}dg. \tag{3.30}$$

Отсюда следует, что решение (3.29) является чистой калибровкой и поэтому теория Черна–Саймонса не имеет динамических степеней свободы.

Необходимо сделать важное замечание. Утверждение о том, что теория Черна–Саймонса не имеет динамических степеней свободы справедливо лишь для степеней свободы во внутренней части многообразия $\mathcal{M}_3$, в то время как для многобразий с границей и нетривиальными граничными условиями для теории возможно существование эффективных степеней свободы на границе $\partial\mathcal{M}_3$ (см., например, [7]).

3.2.1 Пример: гравитация с нулевой космологической постоянной

Продемонстрируем каким образом $3D$ теорию гравитации можно записать как модель Черна–Саймонса. В качестве калибровочной группы выберем группу Пуанкаре. Коммутационные соотношения соответствующей алгебры имеют вид

$$[J^a, J^b] = \epsilon^{abc}J^c, \qquad [J^a, P^b] = \epsilon^{abc}P^c, \tag{3.31}$$

где J^a генерируют подалгебру Лоренца $so(1,2)$, а P^a обозначают генераторы трансляций. Хотя алгебра не является полупростой, она имеет невырожденную билинейную инвариантную форму

$$\langle J^a, P^b \rangle = \eta^{ab}, \tag{3.32}$$

которую будем использовать для построения действия Черна–Саймонса. Калибровочное поле, принимающее значение в алгебре Пуанкаре, запишем в следующей форме

$$\mathbf{A} = e^a P^a + J^a \omega^a, \tag{3.33}$$

где $e^a = e^a_\mu dx^\mu$ представляет собой тетраду, а $\omega^a = \omega^a_\mu dx^\mu$ – спиновую связность. Найдем явный вид первого слагаемого в функционале действия (3.24), используя билинейную форму (3.32)

$$\langle \mathbf{A}d\mathbf{A} \rangle = e^a d\omega^a + \omega^a de^a. \tag{3.34}$$

Чтобы найти в явной форме второе слагаемое, перепишем его как $\mathbf{A}^3 = \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{A}]\mathbf{A}$, что позволит воспользоваться соотношением (3.32) и получить

$$\langle \mathbf{A}^3 \rangle = \frac{3}{2}\epsilon^{abc} e^a \omega^b \omega^c. \tag{3.35}$$

В результате, для случая группы Пуанкаре функционал действия Черна–Саймонса примет вид

$$S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}_3} e^a R^a, \qquad R^a = d\omega^a + \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\omega^b\omega^c. \tag{3.36}$$

Если положить

$$k = \frac{1}{4G}, \tag{3.37}$$

где G – гравитационная постоянная, то выражение (3.36) в точности совпадет с функционалом действия $3D$ гравитации, записанное в тетрадном формализме. Отметим, что выбрав группу $SO(2,2)$ в качестве калибровочной, можно построить действие с ненулевой космологической постоянной [112].

3.2.2 Теория гравитации с расширенной симметрией Шредингера

Как и все расширенные l–конформные алгебры, расширенная алгебра Шредингера имеет несингулярную билинейную форму. В [90] она была использована, чтобы построить функционал действия Черна–Саймонса, описывающий новую версию конформной гравитации Хоравы–Лифшица, которую авторы работы назвали расширенной гравитацией Шредингера. Изоморфизм между расширенной алгеброй Шредингера и расширенной алгеброй Пуанкаре может быть использован для того, чтобы представить действие Черна–Саймонса в [90] как релятивистскую модель. Для этого представим невырожденную билинейную форму расширенной алгебры Шредингера в релятивистском базисе (3.10)

$$\langle J^a, \mathcal{P}^b \rangle = \eta^{ab}, \qquad \langle Z^i_\alpha, Z^j_\beta \rangle = C_{\alpha\beta}\epsilon^{ij}, \qquad \langle I, N \rangle = -1, \tag{3.38}$$

и зададим калибровочное поле $\mathbf{A}$, принимающее значения в алгебре (3.10)

$$\mathbf{A} = e^a \mathcal{P}_a + \omega^a J_a + \lambda^{i\alpha} Z^i_\alpha + Nv + Ib. \tag{3.39}$$

Используя выражение для билинейной формы (3.38), с точностью до граничных слагаемых, действие (3.24) принимает вид

$$S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}_3} \left(2R_a\, e^a - \epsilon^{ij}(\bar{\lambda}^i \nabla \lambda^j) - 2vdb\right), \tag{3.40}$$

где ковариантная производная определена выражением

$$\nabla\lambda^i = d\lambda^i + \frac{1}{2}\omega^a\gamma_a\lambda^i - b\epsilon^{ij}\lambda^j, \tag{3.41}$$

а два–форма кривизны R^a представлена в (3.36). Первое слагаемое в (3.40) представляет собой функционал действия для эйнштейновской гравитации (3.36). Помимо него в функционал действия входят поля спина-1 b и v, а также бозонные поля λ^i спина–$\frac{3}{2}$. Уравнения движения в теории Черна–Саймонса приводят к тому, что кривизна $\mathbf{F}_2 = d\mathbf{A} + \mathbf{A}^2$ обращается в ноль и локально $\mathbf{A}$ это чистая калибровка. Однако, если $\mathcal{M}_3$ имеет границу, то на ней в теории Черна–Саймонса имеются степени свободы.

3.2.3 Расширенная гравитация Шредингера как контракция $SU(1,2)\times SU(1,2)$–теории Черна–Саймонса

Алгебра $su(1,2)$ допускает два различных вложения подалгебры $sl(2,\mathbb{R})$ (см. Приложение B). Теория Черна–Саймонса для первого из них представляет собой взаимодействующую теорию гравитации с полем спина–3, вторая же описывает гравитацию, взаимодействующую с полями спина–1 и бозонным полем спина–$\frac{3}{2}$. Оказывается, что расширенная алгебра Шредингера связана со второй теорией, которой соответствует алгебра $su(1,2)$, записанной в базисе

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{J}^a, \mathcal{J}^b] = \epsilon^{abc}\mathcal{J}_c, && [\mathcal{I}, \mathcal{Z}^i_\alpha] = \epsilon^{ij}\mathcal{Z}^j_\alpha,\\
&[\mathcal{J}^a, \mathcal{Z}^i_\alpha] = \frac{1}{2}(\gamma^a)^\beta{}_\alpha\mathcal{Z}^i_\beta, && [\mathcal{Z}^i_\alpha, \mathcal{Z}^j_\beta] = -\frac{1}{2}\epsilon^{ij}(C\gamma_a)_{\alpha\beta}\mathcal{J}^a + \frac{3}{4}\delta^{ij}C_{\alpha\beta}\mathcal{I}\,,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

где J^a образуют подалгебру $so(1,2) \simeq sl(2,\mathbb{R})$.

Рассмотрим алгебру $su(1,2)\oplus su(1,2)$. Генераторы второй подалгебры будем помечать волной. Возьмем линейные комбинации этих генераторов

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}^a = \frac{1}{\rho}(\mathcal{J}^a - \tilde{\mathcal{J}}^a), \qquad J^a = \mathcal{J}^a + \tilde{\mathcal{J}}^a, \qquad Z^i_\alpha = \sqrt{\frac{2}{\rho}}\mathcal{Z}^i_\alpha, \qquad \tilde{Z}^i_\alpha = \sqrt{\frac{2}{\rho}}\tilde{\mathcal{Z}}^i_\alpha\,,\\
&I = \mathcal{I} - \tilde{\mathcal{I}}, \qquad N = \frac{3}{4\rho}(\mathcal{I} + \tilde{\mathcal{I}}).
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Генераторы $\mathcal{P}^a$ и J^a образуют алгебру $so(2,2) \simeq sl(2,R)\oplus sl(2,R)$ изометрии пространства AdS_3, причем ρ можно понимать как соответствующий радиус AdS_3. В пределе $\rho\to\infty$, алгебра $so(2,2)$ переходит в $3D$ алгебру Пуанкаре

(3.31). Включив в рассмотрение также генераторы Z^i_α, $\tilde{Z}^i_\alpha$, I и N и рассмотрев $\rho \to \infty$, получим расширенную алгебру Шредингера в базисе (3.10), но с дополнительной парой спинорных генераторов $\tilde{Z}^i_\alpha$

$$[\tilde{Z}^i_\alpha, \tilde{Z}^j_\beta] = \frac{1}{2}\epsilon^{ij}(C\gamma_a)_{\alpha\beta}\mathcal{P}^a + \delta^{ij}C_{\alpha\beta}N\,. \tag{3.44}$$

Генераторы определяют расширение алгебры (3.10). В нерелятивистском базисе эти генераторы соответствует дополнительной копии галилеевских трансляций и бустов $\tilde{Z}^i_\alpha = (\tilde{P}^i, \tilde{G}^i)$. Для того, чтобы получить расширенную алгебру Пуанкаре таким способом, необходимо устранить дополнительные генераторы, формально положив их равными нулю.[1].

Для построения модели гравитации (3.40) посредством контракции $SU(1,2)\times SU(1,2)$ теории Черна–Саймонса [25], введем калибровочное поле $\mathbf{A}$, которое принимает значение в алгебре $su(1,2)\oplus su(1,2)$, записанной в базисе (3.43)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}} = e^a P_a + \omega^a J_a + \lambda^{i,\alpha} Z^i_\alpha + \tilde{\lambda}^{i,\alpha}\tilde{Z}^i_\alpha + Nv + Ib. \tag{3.45}$$

Используя инвариантную билинейную форму [2]

$$\langle J^a, P^b\rangle = \eta^{ab}, \quad \langle I, N\rangle = -1, \quad \langle Z^i_\alpha, Z^j_\beta\rangle = C_{\alpha\beta}\epsilon^{ij}, \quad \langle \tilde{Z}^i_\alpha, \tilde{Z}^j_\beta\rangle = -C_{\alpha\beta}\epsilon^{ij}, \tag{3.46}$$

получим $SU(1,2)\times SU(1,2)$ теорию Черна–Саймонса в следующей форме:

$$S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}_3}\left(2e^a\,R_a + \frac{1}{3\rho^2}\epsilon_{abc}e^a e^b e^c - \epsilon^{ij}\bar{\lambda}^i\nabla\lambda^j + \epsilon^{ij}\bar{\tilde{\lambda}}^i\nabla\tilde{\lambda}^j - 2vdb\right), \tag{3.47}$$

где

$$\nabla\lambda^i = d\lambda^i + \frac{1}{2}\omega^a\gamma_a\lambda^i + \frac{1}{2\rho}e^a\gamma_a\lambda^i - \frac{3}{4\rho}\epsilon^{ik}v\lambda^k - \epsilon^{ik}b\lambda^k \tag{3.48}$$

а также

$$\tilde{\nabla}\tilde{\lambda}^i = d\tilde{\lambda}^i + \frac{1}{2}\omega^a\gamma_a\tilde{\lambda}^i - \frac{1}{2\rho}e^a\gamma_a\tilde{\lambda}^i - \frac{3}{4\rho}\epsilon^{ik}v\tilde{\lambda}^k + \epsilon^{ik}b\tilde{\lambda}^k.$$

Мы видим, что действие Черна–Саймонса в форме (3.47) описывает гравитацию (ассоциированную с полям e^a и ω^a), взаимодействующую с бозонными полями

[1] Отметим, что аналогичным образом можно произвести контракцию алгебры $sl(3,R)\oplus sl(3,R)$, полагая, что векторные индексы i,j в (3.47) преобразуются под действием группы $SO(1,1)$ вместо $SO(2)$ (см. Приложение В). Однако, вследствие того, что группа некомпактна, получим алгебру, которую невозможно интерпретировать как расширенную алгебру Шредингера.

[2] Используя переопределения (3.43), (3.123) и (3.126), можно показать, что (с точностью до нормировочного множителя) билинейная форма (3.46) соответствует разности между двух копий форм (3.122) алгебры $su(1,2)$. Другими словами, действие Черна–Саймонса (3.47) равно $\frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}_3}\left(\langle\mathbf{A}d\mathbf{A} + \frac{2}{3}\mathbf{A}^3\rangle - \langle\tilde{\mathbf{A}}d\tilde{\mathbf{A}} + \frac{2}{3}\tilde{\mathbf{A}}^3\rangle\right)$.

спина–$\frac{3}{2}$ λ^i_α, $\tilde{\lambda}^i_\alpha$ и спина–1, v и b. Действие (3.40) может быть получено из (3.47) в пределе $\rho \to \infty$ с последующим исключением полей $\tilde{\lambda}^i$ из рассмотрения. Заметим, что теория, полученная в пределе, отличается от обычной асимптотически плоской гравитации, взаимодействующей с полем спина–3, которая обсуждалась в [113–115].

3.2.4 Асимптотическая симметрия

Мы переходим к анализу асимптотической симметрии в теории гравитации (3.40), построенной по расширенной алгебре Шредингера, записанной в релятивистском базисе.

Как было показано в предыдущем разделе, эта теория может быть получена контракцией теории Черна–Саймонса с калибровочной группой $SU(1,2) \times SU(1,2)$ и исключением из рассмотрения появляющейся в результате дополнительной копии бозонных спинорных полей. Поэтому можно ожидать, что алгебру асимптотической симметрии в теории (3.40) можно получить контракцией алгебры асимптотической симметрии соответствующей теории Черна–Саймонса. В приложении B мы демонстрируем это явно.

Будем полагать, что граница трехмерного многоообразия $\mathcal{M}_3$ имеет цилиндрическую топологию, компактное измерение которого параметризуется координатой ϕ, а некомпактное координатой t. Радиальная координата r измеряет расстояние до границы. Как обычно, будем считать, что на границе калибровочное поле принимает вид

$$\mathbf{A} = h^{-1}(d + \mathfrak{a})h, \tag{3.49}$$

где групповой элемент h зависит лишь от радиальной кооординаты $h = h(r)$. Когда все поля за исключением тех, что определяют эйнштейновскую гравитацию, положены равными нулю, следует ожидать, что граничные условия перейдут в те, что имеют BMS_3 алгебру симметрии (см., например [19, 116, 117])

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^0_\phi &= -\mathcal{L}M_{-1} - \mathcal{M}L_{-1} + L_{+1}, \\ \mathfrak{a}^0_t &= -\mathcal{M}M_{-1} + M_{+1}, \end{aligned} \tag{3.50}$$

где мы использовали базис (3.31) и (3.9) для расширенной алгебры Шредингера.

Расширим граничные условия (3.50) следующим образом:

$$\mathfrak{a}_\phi = \mathfrak{a}_\phi^0 + \mathcal{N}\mathcal{I}M_{-1} + \mathcal{N}^2 L_{-1} + \sqrt{2}\mathcal{C}^i Z^i_{-\frac{1}{2}} + \mathcal{I}N + \mathcal{N}I,$$
$$\mathfrak{a}_t = \mathfrak{a}_t^0 + \mathcal{N}^2 M_{-1} + 2\mathcal{N}N, \tag{3.51}$$

где $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{C}$ некоторые функции от ϕ и t, описывающие асимптотическую динамику модели. Следует отметить, что данные граничные условия включают решения, представляющие физический интерес, например, космологические горизонты [118, 119]. Можно заметить сходство между (3.51) и асимптотическими условиями в $3D$ $\mathcal{N}=2$ супергравитации, представленными в [21]. Калибровочное поле (3.51) удовлетворяет уравнениям движения $d\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = 0$, если функции на границе подчиняются условиям

$$\dot{\mathcal{L}} = \mathcal{M}', \qquad \dot{\mathcal{I}} = 2\mathcal{N}', \qquad \dot{\mathcal{N}} = \dot{\mathcal{M}} = \dot{\mathcal{C}}^i = 0, \tag{3.52}$$

где, здесь и далее, штрих и точка обозначают, соответственно, производные по ϕ и t. Граничные условия (3.51) задают функционал действия с хорошо определенной вариационной задачей в том смысле, что вариация действия Черна–Саймонса (3.24) на уравнениях движения точно обращается в ноль

$$\delta S|_{EOM} = \frac{k}{4\pi}\int_{\partial\mathcal{M}} \langle \delta\mathbf{A}, \mathbf{A}\rangle = 0. \tag{3.53}$$

Принимая во внимание билинейную форму (3.38), записанную в базисе (3.31) и (3.9)

$$\langle L_{+1}, M_{-1}\rangle = \langle L_{-1}, M_{+1}\rangle = -\langle I, N\rangle = -2, \quad \langle L_0, M_0\rangle = 1, \quad \langle Z^i_{-\frac{1}{2}}, Z^j_{+\frac{1}{2}}\rangle = \epsilon^{ij}, \tag{3.54}$$

можно явно убедиться в том, что подынтегральное выражение в соотношении, записанном выше, обращается в ноль для граничных условий (3.51).

Перейдем к поиску преобразований

$$\delta\mathbf{A} = d\boldsymbol{\lambda} + [\mathbf{A}, \boldsymbol{\lambda}], \tag{3.55}$$

которые сохраняют (3.51), т.е. таких преобразований, которые переводят граничные условия в тот же класс. Несложно установить, что параметр $\boldsymbol{\lambda}$ должен иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_L'' - \varepsilon_L(\mathcal{M} - \mathcal{N}^2)\right) L_{-1}$$
$$+ \left(\frac{1}{2}\varepsilon_M'' - \varepsilon_L(\mathcal{L} - \mathcal{N}\mathcal{I}) - \varepsilon_M(\mathcal{M} - \mathcal{N}^2) - \frac{1}{2}\mathcal{C}^i\varepsilon^i\right) M_{-1} \tag{3.56}$$

$$
+\sqrt{2}(\varepsilon'^j\epsilon^{ij}+\varepsilon_L\mathcal{C}^i+\mathcal{N}\varepsilon^i)Z^i_{-\frac{1}{2}}+(\varepsilon_I+\mathcal{N}\varepsilon_L)I+(\varepsilon_N+2\varepsilon_M\mathcal{N}+\varepsilon_L\mathcal{I})N
$$

$$
-\varepsilon'_L L_0+\varepsilon_L L_{+1}-\varepsilon'_M M_0+\varepsilon_M M_{+1}-\sqrt{2}\epsilon^{ij}\varepsilon^j Z^i_{+\frac{1}{2}}, \tag{3.57}
$$

где ε подчиняются условиям

$$
\dot{\varepsilon}_M=\varepsilon'_L, \qquad \dot{\varepsilon}_N=2\varepsilon'_I, \qquad \dot{\varepsilon}_L=\dot{\varepsilon}^i=\dot{\varepsilon}_I=0, \tag{3.58}
$$

и зависят от ϕ. Отсюда можно найти законы преобразования полей, определяющих асимптотическую структуру теории

$$
\begin{aligned}
&\delta\mathcal{L}=2\varepsilon'_L\mathcal{L}+\varepsilon_L\mathcal{L}'+2\varepsilon'_M\mathcal{M}+\varepsilon_M\mathcal{M}'+\frac{3}{2}\mathcal{C}^i\varepsilon'^i+\frac{1}{2}\mathcal{C}'^i\varepsilon^i+\mathcal{I}\varepsilon'_I+\mathcal{N}\varepsilon'_N-\frac{1}{2}\varepsilon'''_M,\\
&\delta\mathcal{M}=2\varepsilon'_L\mathcal{M}+\varepsilon_L\mathcal{M}'+2\varepsilon'_I\mathcal{N}-\frac{1}{2}\varepsilon'''_L,\\
&\delta\mathcal{C}^i=\frac{3}{2}\varepsilon'_L\mathcal{C}^i+\varepsilon_L\mathcal{C}'^i-\mathcal{M}\epsilon^{ij}\varepsilon^j+2\varepsilon'^i\mathcal{N}+\varepsilon^i\mathcal{N}'+\epsilon^{ij}\mathcal{C}^j\varepsilon_I+\epsilon^{ij}\varepsilon''^j,\\
&\delta\mathcal{N}=\varepsilon'_I+\mathcal{N}'\varepsilon_L+\mathcal{N}\varepsilon'_L,\\
&\delta\mathcal{I}=\varepsilon'_N+2(\varepsilon'_M\mathcal{N}+\varepsilon_M\mathcal{N}')+\varepsilon'_L\mathcal{I}+\varepsilon_L\mathcal{I}'+\epsilon^{ij}\mathcal{C}^i\varepsilon^j.
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

С каждым преобразованием симметрии можно связать сохраняющийся заряд $Q[\boldsymbol{\lambda}]$, вариация которого в теории Черна–Саймонса имеет вид (см., например, [120])

$$
\delta Q[\boldsymbol{\lambda}]=-\frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\langle\boldsymbol{\lambda},\delta\mathfrak{a}_\phi\rangle d\phi. \tag{3.60}
$$

Принимая во внимание (3.54) и (3.56), находим

$$
\langle\boldsymbol{\lambda},\delta\mathfrak{a}_\phi\rangle=-2\left(\varepsilon_I\delta\mathcal{I}+\varepsilon_N\delta\mathcal{N}+\varepsilon_M\delta\mathcal{M}+\varepsilon_L\delta\mathcal{L}+\varepsilon^i\delta\mathcal{C}^i\right). \tag{3.61}
$$

Вариация (3.60) задает структуру скобок Дирака на фазовом пространстве для зарядов

$$
\delta_{\boldsymbol{\lambda}_2}Q[\boldsymbol{\lambda}_1]=\Big[Q[\boldsymbol{\lambda}_1],Q[\boldsymbol{\lambda}_2]\Big],
$$

которые задают представление алгебры асимптотической симметрии. Для того, чтобы найти явный вид этой алгебры, разложим поля и параметры преобразования по модам Фурье $Q_n=\frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi}d\phi e^{-in\phi}X$, где X обозначает функции, описывающие асимптотическую динамику. Используя это соотношение вместе с законами преобразований (3.59), найдем асимптотическую алгебру симметрии

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = i(m-n)L_{m+n}, && [L_m, M_n] = i(m-n)M_{m+n} - ikn^3\delta_{m+n,0},\\
&[L_m, I_n] = -inI_{m+n}, && [L_m, N_n] = -inN_{m+n},\\
&[M_m, I_n] = -2inN_{m+n}, && [I_m, N_n] = -2ink\delta_{m+n,0},\\
&[L_m, C^i_p] = i\left(\frac{m}{2}-p\right)C^i_{p+m}, && [I_m, C^i_p] = -\epsilon^{ij}C^j_{m+p},\\
&[C^i_p, C^j_q] = -M_{p+q}\epsilon^{ij} + i(p-q)N_{p+q}\delta^{ij} - 2q^2k\delta_{p+q,0}\epsilon^{ij}, &&
\end{aligned} \tag{3.62}
$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$, $p, q \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ и генераторы связаны с асимптотическими полями как $(L, M, I,\ N, C) \sim (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{I}, \mathcal{N}, \mathcal{C})$. Первая строка здесь представляет собой алгебру BMS_3 со стандартным центральным зарядом $c = 12k$ [117].

3.3 Модели гравитации с расширенной l–конформной симметрией Галилея

Перейдем к построению и изучению моделей гравитации с полями высших спинов, имеющих l–конформную симметрию Галилея. Можно показать, что расширенная l–конформная алгебра Галилея имеет невырожденную билинейную форму для любого l. Однако вместо того, чтобы использовать стандартную конструкцию Черна–Саймонса, требующую знание явного вида билинейной формы, мы предъявим функционал действия и убедимся, что он инвариантен относительно калибровочных преобразований из расширенной l–конформной группы Галилея.

3.3.1 Случай полуцелого l

Рассмотрим случай полуцелого l. Действие для гравитации, взаимодействующей с полями высших спинов и инвариантное относительно преобразований, генерируемых алгеброй (3.14), имеет вид [1]

$$
S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}_3}\left(2e^a R_a - \epsilon^{ij}\bar{\lambda}^i_{a_1\ldots a_n}\nabla\lambda^{a_1\ldots a_n,j} - 2vdb\right), \tag{3.63}
$$

где ковариантная производная определена соотношением

$$
\nabla\lambda^{a_1\ldots a_n,i} = d\lambda^{a_1\ldots a_n,i} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\omega^b\gamma^b\lambda^{a_1\ldots a_n,i} - \omega^b\gamma^{(a_1}\lambda^{a_2\ldots a_n)b,i} - b\epsilon^{ij}\lambda^{a_1\ldots a_n,j}, \tag{3.64}
$$

[1]Форму действия можно предложить, зная вид действия для $l = \frac{1}{2}$ в (3.40), а также форму действия для гипергравитации [26, 27].

вместе с $n = l - \frac{1}{2}$.

По построению, помимо локальной симметрии Пуанкаре, эта теория инвариантна относительно преобразований, генерируемых операторами $Z_\alpha^{a_1\dots a_n,i}$, I и N (3.14). Локальные преобразования Пуанкаре определены соотношениями

$$\delta e^a = d\alpha^a + \epsilon^{abc}(e_b\beta_c + \omega_b\alpha_c), \qquad \delta\omega^a = d\beta^a + \epsilon^{abc}\omega_b\beta_c,$$
$$\delta\lambda^{a_1\dots a_n,i} = -\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta^a\gamma_a\lambda^{a_1\dots a_n,i} + \beta_a\gamma^{(a_1}\lambda^{a_2\dots a_n)a,i}, \tag{3.65}$$

где β^a – калибровочный параметр, соответствующий лоренцевским вращениям J^a, в то время как α^a обозначает параметр для локальных трансляций $\mathcal{P}^a$. Калибровочные преобразования, соответствующие генераторам Z, имеют вид

$$\delta e^a = \left(n+\frac{1}{2}\right)\epsilon^{ij}\bar{\lambda}^{a_1\dots a_n,i}\gamma^a\varepsilon^j_{a_1\dots a_n},$$
$$\delta\lambda^{a_1\dots a_n,i} = \nabla\varepsilon^{a_1\dots a_n,i}, \qquad \delta v = -\bar{\lambda}^{a_1\dots a_n,i}\varepsilon^i_{a_1\dots a_n}, \tag{3.66}$$

где калибровочный параметр $\varepsilon^i_{a_1\dots a_n}$ полностью симметричен и обладает свойством гамма–бесследовости. При явной проверке инвариантности действия относительно данных преобразований можно воспользоваться следующим тождеством:

$$\nabla^2\varepsilon^{a_1\dots a_n,i} = \left(n+\frac{1}{2}\right)R^a\gamma_a\varepsilon^{a_1\dots a_n,i} - R_a\gamma^{(a_1}\varepsilon^{a_2\dots a_n)a,i} - \epsilon^{ij}db\varepsilon^{a_1\dots a_n,j}. \tag{3.67}$$

Калибровочные преобразования, генерируемые операторами I и N, определены соотношениями

$$\delta\lambda^{a_1\dots a_n,i} = \kappa\epsilon^{ij}\lambda^{a_1\dots a_n,j}, \qquad \delta b = d\kappa, \qquad \delta v = d\varphi, \tag{3.68}$$

где κ и φ – соответствующие калибровочные параметры. Структура действия (3.63) сильно напоминает структуру для теории гипергравитации [26, 27, 121, 122], но также включает взаимодействие полей высших спинов с калибровочным полем R-симметрии b.

3.3.2 Случай целого l

Для случая целого l интересующий нас функционал действия имеет вид

$$S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}_3}\left(2e^aR_a + \lambda^{a_1\dots a_l}\nabla\lambda_{a_1\dots a_l}\right), \tag{3.69}$$

где ковариантная производная задана соотношением

$$\nabla\lambda^{a_1\ldots a_l} = d\lambda^{a_1\ldots a_l} + \epsilon^{bc(a_1}\lambda_b{}^{a_2\ldots a_l)}\omega_c. \tag{3.70}$$

Вместе с локальными преобразованиями, явный вид которых приведен в первой строке (3.65) и

$$\delta\lambda^{a_1\ldots a_l} = -\epsilon^{ab(a_1}\lambda^{a_2\ldots a_l)}{}_a\beta_b, \tag{3.71}$$

теория инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$\delta e^a = \epsilon^{abc}\lambda_{bb_2\ldots b_l}\varepsilon_c{}^{b_2\ldots b_l}, \qquad \delta\lambda^{a_1\ldots a_l} = \nabla\varepsilon^{a_1\ldots a_l}, \tag{3.72}$$

связанных с генераторами $Z^{a_1\ldots a_l}$. В случае $l = 1$ модель инвариантна относительно локальных преобразований, соответствующих алгебре (3.20), которая изоморфна алгебре Максвелла (3.19). Модель $3D$ гравитации, обладающая локальной симметрией (3.20), и ее расширение было построено ранее в работе [123], а теория, основанная на алгебре Максвелла в стандартной форме (3.19), была построена и изучена в [124–126].[1]

Наиболее общее действие гравитации, обладающее локальной симметрией Максвелла (3.20), имеет следующий вид

$$S = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}_3}\left[(2e^aR_a + \lambda^a\nabla\lambda_a) + 2\mathtt{a}\,\lambda^aR_a + \frac{1}{\mathtt{m}}\left(\omega^a d\omega_a + \frac{1}{3}\epsilon_{abc}\omega^a\omega^b\omega^c\right)\right], \tag{3.73}$$

$\mathtt{a}$ и $\mathtt{m}$ – постоянные взаимодействия. Это действие похоже на гравитацию Максвелла–Черна–Саймонса [124] и может быть построено, используя билинейную форму

$$\langle J_a, P_b\rangle = \eta_{ab}, \qquad \langle Z_a, Z_b\rangle = \eta_{ab}, \qquad \langle J_a, J_b\rangle = \frac{1}{\mathtt{m}}\eta_{ab}, \qquad \langle J_a, Z_b\rangle = \mathtt{a}\eta_{ab}. \tag{3.74}$$

Чтобы перейти от одного действия к другому необходимо поменять ролями поля e^a с λ^a.

3.3.3 Асимптотическая симметрия для $l = \frac{3}{2}$, $l = 1$ и $l = 2$

В этом разделе обсудим асимптотическую симметрию расширенных теорий гравитации, описываемых функционалами действия (3.63) и (3.69) для случаев $l = \frac{3}{2}$ и $l = 1, 2$.

[1] Расширение алгебры Максвелла и соответствующие модели теории гравитации были построены и изучены в [127]. Смотрите также [128] для детального описания группы Максвелла в $3D$, ее бесконечномерного расширения и различных приложений.

3.3.3.1 Случай $l = \frac{3}{2}$

Как и в случае $l = \frac{1}{2}$, мы можем ослабить граничные условия, позволив дополнительным полям иметь ненулевые возбуждения на границе. Также будем требовать выполнение граничных условий BMS_3. Для простоты в случае $l = \frac{3}{2}$ полагаем центральный заряд в алгебре (3.11) равным нулю и фиксируем граничные условия в следующем виде:

$$\mathfrak{a}_\phi = \mathfrak{a}^0_\phi + \frac{1}{3}\mathcal{C}^i C^i_{-\frac{3}{2}}, \qquad \mathfrak{a}_t = \mathfrak{a}^0_t, \tag{3.75}$$

где $\mathfrak{a}^0_\phi$ и $\mathfrak{a}^0_t$ приведены в (3.50). Для того, чтобы граничные условия были согласованы с уравнениями движения, функции $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ в (3.50) по-прежнему должны быть связаны соотношениями (3.52), в то время как $\mathcal{C}$ может зависеть лишь от ϕ. Те же ограничения накладываются на функции, описывающие асимптотическую динамику в случаях $l = 1, 2$, которые мы изучим ниже. Можно также заметить сходство (3.75) с граничными условиями в $N = 1$ супергравитации [19] или теориях гипергравитации [26]. Параметр $\boldsymbol{\lambda}$, который генерирует преобразования, сохраняющие граничные условия, задан соотношением

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda} = {} & L_{+1}\varepsilon_L - L_0\varepsilon'_L + \left(\frac{1}{2}\varepsilon''_L - \varepsilon_L\mathcal{M}\right)L_{-1} + \left(\frac{1}{2}\varepsilon''_M - \varepsilon_L\mathcal{L} - \varepsilon_M\mathcal{M} - \frac{3}{2}\mathcal{C}^i\varepsilon^i\right)M_{-1} \\ & + M_{+1}\varepsilon_M - M_0\varepsilon'_M + \epsilon^{ij}\left(C^i_{+\frac{3}{2}}\varepsilon^j - C^i_{+\frac{1}{2}}\varepsilon'^j\right) + \epsilon^{ij}C^i_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\varepsilon''^j - \frac{3}{2}\mathcal{M}\varepsilon^j\right) \\ & + \epsilon^{ij}C^i_{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}\mathcal{C}^i\varepsilon_L + \frac{1}{2}\mathcal{M}'\varepsilon^j + \frac{7}{6}\mathcal{M}\varepsilon'^j - \frac{1}{6}\varepsilon'''^j\right).\end{aligned} \tag{3.76}$$

Требование, чтобы компоненты калибровочного поля $\mathfrak{a}_t$ вдоль временного направления сохранялись относительно тех же преобразований, приводит к ограничению на параметры преобразований ε_L и ε_M, данное в (3.58), в то время как ε^i не должны зависеть от времени.

По аналогии с нашим рассмотрением выше, можно найти асимптотическую алгебру симметрии

$$\begin{aligned}& [L_m, L_n] = i(m-n)L_{m+n}, \qquad [L_m, C^i_p] = i\left(\frac{3m}{2} - p\right)C^i_{m+p}, \\ & [L_m, M_n] = i(m-n)M_{m+n} - ikn^3\delta_{m+n,0}, \\ & [C^i_p, C^j_q] = \left(2pq - \frac{3}{2}p^2 - \frac{3}{2}q^2\right)\epsilon^{ij}M_{p+q} - \frac{9}{4k}\sum_s M_{p+q-s}M_s\epsilon^{ij} - \epsilon^{ij}kp^4\delta_{p+q,0},\end{aligned} \tag{3.77}$$

где мы записали лишь ненулевые коммутаторы.

В отличие от случая $l = \frac{1}{2}$, алгебра включает в себя нелинейный вклад, который характерен для асимптотических алгебр симметрии в теориях гравитации, взаимодействующей с полями высших спинов (см. [25] и ссылки на эту работу).

3.3.3.2 Случай $l = 1$

Для случая $l = 1$ наложим граничные условия

$$\mathfrak{a}_\phi = \mathfrak{a}_\phi^0 - \mathcal{C}(\phi) C_{-1}, \qquad \mathfrak{a}_t = \mathfrak{a}_t^0, \tag{3.78}$$

где $\mathfrak{a}_\phi^0$ и $\mathfrak{a}_t^0$ даны в (3.50). Соответствующий параметр преобразования для этих граничных условий имеет вид

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_L'' - \varepsilon_L \mathcal{M}\right) L_{-1} + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_M'' - \varepsilon_L \mathcal{L} - \varepsilon_M \mathcal{M} - \mathcal{C}\varepsilon\right) M_{-1} \tag{3.79}$$
$$+ \left(\frac{1}{2}\varepsilon'' - \mathcal{M}\varepsilon - \mathcal{C}\varepsilon_L\right) + L_{+1}\varepsilon_L - L_0\varepsilon_L' + M_{+1}\varepsilon_M - M_0\varepsilon_M' + C_{+1}\varepsilon - C_0\varepsilon',$$

где параметры ε_L и ε_M связаны как в (3.58) и ε не зависит от времени. В результате мы имеем асимптотическую алгебру симметрии изоморфную алгебре, найденной в [109]

$$\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = i(m-n)L_{m+n} - \frac{ik}{\mathtt{m}} n^3 \delta_{m+n,0},\\
&[L_m, C_n] = i\,(m-n)\,C_{m+n} - i\mathtt{a}kn^3\delta_{m+n,0},\\
&[L_m, M_n] = i(m-n)M_{m+n} - ikn^3\delta_{m+n,0},\\
&[C_m, C_n] = i(m-n)M_{m+n} - ikn^3\delta_{m+n,0},\\
&[M_m, M_n] = 0 = [M_m, C_n]
\end{aligned} \tag{3.80}$$

где центральный заряд в первой строке зависит от параметра размерности массы $\mathtt{m}$, который задает взаимодействие в члене Черна–Саймонса, а центральный заряд во второй строке пропорционален константе взаимодействия $\mathtt{a}$.

3.3.3.3 Случай $l = 2$

Наложим граничные условия

$$\mathfrak{a}_\phi = \mathfrak{a}_\phi^0 + \mathcal{C}(\phi) C_{-2}, \qquad \mathfrak{a}_t = \mathfrak{a}_t^0. \tag{3.81}$$

Параметр преобразований (3.55), сохраняющих данные граничные условия, имеет форму

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\lambda} = L_{+1}\varepsilon_L - L_0\varepsilon_L' + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_L'' - \varepsilon_L\mathcal{M}\right)L_{-1} + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_M'' - \varepsilon_L\mathcal{L} - \varepsilon_M\mathcal{M} + 4\mathcal{C}\varepsilon\right)M_{-1} + \\
&+M_{+1}\varepsilon_M - M_0\varepsilon_M' + C_{+2}\varepsilon - C_{+1}\varepsilon' + C_0\left(\frac{1}{2}\varepsilon'' - 2\mathcal{M}\varepsilon\right) + \\
&+C_{-1}\left(-\frac{1}{6}\varepsilon''' + \frac{2}{3}\mathcal{M}'\varepsilon + \frac{5}{3}\mathcal{M}\varepsilon'\right) + \\
&+C_{-2}\left(\mathcal{C}\varepsilon_L - \frac{1}{6}\mathcal{M}''\varepsilon - \frac{2}{3}\mathcal{M}\varepsilon'' - \frac{7}{12}\mathcal{M}'\varepsilon' + \mathcal{M}^2\varepsilon\right),
\end{aligned}
\tag{3.82}
$$

где параметры ε_L and ε_M связаны как в (3.58) и $\varepsilon = \varepsilon(\phi)$. Соответствующая асимптотическая алгебра симметрии задана коммутационными соотношениями

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = i(m-n)L_{m+n}, \qquad [L_m, C_p] = i\left(2m - p\right)C_{m+p}, \\
&[L_m, M_n] = i(m-n)M_{m+n} - ikn^3\delta_{m+n,0}, \\
&[C_p, C_q] = (p-q)\left(pq - 2p^2 - 2q^2\right)M_{p+q} - \frac{8}{k}(p-q)\sum_s M_{p+q-s}M_s + kq^5\delta_{p+q,0},
\end{aligned}
\tag{3.83}
$$

которые также включают нелинейный вклад.

Заключение

В заключение кратко перечислим основные результаты, полученные в диссертационной работе.

1. Построены новые модели $D(2,1;\alpha)$, $OSp(2|N)$ и $SU(1,1|N)$ суперконформной механики. Установлена взаимосвязь таких систем с моделями релятивистских частиц, движущихся вблизи горизонта событий экстремальных черных дыр

2. Построены новые решения вакуумных уравнений Эйнштейна и уравнений Эйнштейна с космологической постоянной, группа изометрии которых описывается l-конформной группой Галилея.

3. Построены новые динамические реализации l-конформной группы Галилея, не вовлекающие высших производных.

4. Построена новая модель трехмерной гравитации, группа калибровочных преобразований которой представлена расширенной l-конформной группой Галилея. Установлена взаимосвязь такой модели с теорией полей высших спинов в трехмерном пространстве-времени.

Полученные в работе результаты способствуют более глубокому пониманию современной теории (супер) конформной симметрии и ее приложений и могут быть использованы для дальнейших исследований. В частности, представляет интерес дальнейшее изучение неизвестной ранее связи l–конформной симметрии Галилея с теорией полей высших спинов в трехмерном пространстве–времени. В работе было явно продемонстрированно, что теория гравитации с расширенной $l = 1/2$ симметрией Галилея может быть получена контракцией $SU(1,2) \times SU(1,2)$ теории Черна-Саймонса, описывающей гравитацию с полями высших спинов. Также была продемонстрирована связь $W_{1,2}^{(2)}$-алгебры с асимптотической алгеброй симметрии в построенной теории. Отсюда возникает естественный вопрос, можно ли аналогичным образом связать $SU(N) \times SU(N)$ теории Черна-Саймонса для старшего N и построенные в работе теории с расширенной l-конформной симметрией Галилея для $l > 1/2$. Найденная в работе геометрическая реализация l–конформной симметрии Галилея может быть использована в дальнейшем в контексте нерелятивистской версии AdS/CFT–соответствия. Построенные метрики имеют конформную группу $SO(2,1)$ в качестве подгруппы изометрии, а сама l–конформная алгебра имеет бесконечномерное расширение со структурой алгебры типа Каца-Муди. Можно ожидать, что эта алгебра симметрии является асимптотической алгеброй симметрии для построенных метрик, что в свою очередь позволит проводить дальнейший анализ в контексте AdS/CFT–соответствия.

Список литературы

[1] Di Francesco P. Conformal Field Theory / P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal // Graduate Texts in Contemporary Physics. - New York: Springer-Verlag, 1997. - 723 p.

[2] Henkel M. Conformal invariance and critical phenomena / M. Henkel // Texts and monographs in physics. - Springer. 1999. - 346 p.

[3] Грин М. Теория суперструн: в 2 т.// М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен. - М.: Мир. - 1990. - Т.1-2.

[4] Maldacena J. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity / J. Maldacena // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. - 1998. - Vol. 2. - P. 231-252. – URL: https://link.springer.com/article/10.1023/A:1026654312961 (access date: 01.09.2020).

[5] Gubser S. Gauge theory correlators from non-critical string theory / S.S. Gubser, I.R. Klebanov, A.M. Polyakov // Physics Letters B. - 1998. - Vol. 428. - P. 105-114. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269398003773 (access date: 01.09.2020).

[6] Witten E. Anti-de Sitter space and holography / E. Witten // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. - 1998. - Vol. 2. - P. 253-291. - URL: https://www.intlpress.com/site/pub/pages/journals/items/atmp/content/vols /0002/0002/a002 (access date: 01.09.2020).

[7] Carlip S. Conformal field theory, (2+1)-dimensional gravity, and the BTZ black hole/ S. Carlip // Classical and Quantum Gravity. - 2005. - Vol. 22. - P. 85-124. - URL: - https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/22/12/R01 (access date: 01.09.2020).

[8] Solodukhin S. Conformal description of horizon's states / S. Solodukhin // Physics Letters B. - 1999. - Vol. 454. - P. 213–222. - URL:

https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269399003986?via%3Dihub (access date: 01.09.2020).

[9] Guica M. The Kerr/CFT Correspondence / M. Guica, T. Hartman, W. Song, and A. Strominger // Physical Review D. - 2009. - Vol. 80. - 124008. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.80.124008 (access date: 01.09.2020).

[10] Son D. Toward an AdS/cold atoms correspondence: A Geometric realization of the Schrodinger symmetry / D. M. Son // Physical Review D. - 2008. - Vol. 78. - 046003. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.78.046003 (access date: 01.09.2020).

[11] Balasubramanian K. Gravity duals for non-relativistic CFTs / K. Balasubramanian, J. McGreevy // Physical Review Letters. - 2008. - Vol. 101. - 061601. - URL: https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.101.061601 (access date: 01.09.2020).

[12] Carlip S. The Statistical mechanics of the (2+1)-dimensional black hole / S. Carlip // Physical Review D. - 1995. - Vol. 51. - P. 632-637. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.51.632 (access date: 01.09.2020).

[13] Strominger A. Black hole entropy from near horizon microstates / A. Strominger // Journal of High Energy Physics. - 1998. - Vol 2. - 009. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1126-6708/1998/02/009 (access date: 01.09.2020).

[14] Afshar H. Soft Heisenberg hair on black holes in three dimensions / H. Afshar, S. Detournay, D. Grumiller, W. Merbis, A. Perez, D. Tempo, R. Troncoso // Physical Review D. - 2016. - Vol. 93. - 101503. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.93.101503 (access date: 01.09.2020).

[15] Brown J. Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries: an example from three-dimensional gravity / J. D. Brown,

M. Henneaux // Communications in Mathematical Physics. - 1986. - Vol. 104. - P. 207-226. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007/BF01211590 (access date: 01.09.2020).

[16] Banados M. The Black hole in three-dimensional space-time / M. Banados, C. Teitelboim, J. Zanelli // Physical Review Letters. - 1992. - Vol. 69. - P. 1849-1851. - URL: https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.69.1849 (access date: 01.09.2020).

[17] Wald R. A General definition of 'conserved quantities' in general relativity and other theories of gravity / R. M. Wald, A. Zoupas // Physical Review D. - 2000. - Vol. 61. - 084027. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.61.084027 (access date: 01.09.2020).

[18] Barnich G. Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charges/ G. Barnich, F. Brandt // Nuclear Physics B. - 2002. - Vol. 633. - P. 3–82. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321302002511?via%3Dihub (access date: 01.09.2020).

[19] Barnich G. Asymptotic symmetries and dynamics of three-dimensional flat supergravity / G. Barnich, L. Donnay, J. Matulich, R. Troncoso // Journal of High Energy Physics. - 2014. - Vol. 08. - 071. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP08(2014)071 (access date: 01.09.2020).

[20] Barnich G. Super-BMS_3 invariant boundary theory from three-dimensional flat supergravity / G. Barnich, L. Donnay, J. Matulich, R. Troncoso // Journal of High Energy Physics. - 2017. - Vol. 029. - 01. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP01%282017%29029 (access date: 01.09.2020).

[21] Fuentealba O. Asymptotic structure of $\mathcal{N} = 2$ supergravity in 3D: extended super-BMS_3 and nonlinear energy bounds / O. Fuentealba, J. Matulich, R. Troncoso // Journal of High Energy Physics. - 2017. - Vol. 30. - 01.

- URL: https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP09(2017)030 (access date: 01.09.2020).

[22] Lodato I. Super-BMS$_3$ algebras from $\mathcal{N} = 2$ flat supergravities / I. Lodato, W. Merbis // Journal of High Energy Physics. - 2016. - Vol. 11. - 150. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP11%282016%29150 (access date: 01.09.2020).

[23] Fierro O. Minimal AdS-Lorentz supergravity in three-dimensions / O. Fierro, F. Izaurieta, P. Salgado, O. Valdivia // Physics Letters B. - 2019. Vol. - 788. - P. 198-205. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269318308748?via%3Dihub (access date: 01.09.2020).

[24] Concha P. N-extended Maxwell supergravities as Chern-Simons theories in three spacetime dimensions/ P. Concha // Physics Letters B B. - 2019. - Vol. 792. - P. 290-297. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269319302291 (access date: 01.09.2020)

[25] Campoleoni A. Asymptotic symmetries of three-dimensional gravity coupled to higher-spin fields / A. Campoleoni, S. Fredenhagen, S. Pfenninger, S. Theisen // Journal of High Energy Physics. - 2010. - Vol. 11. - 007. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP11%282010%29007 (access date: 01.09.2020).

[26] Fuentealba O. Asymptotically flat structure of hypergravity in three spacetime dimensions / O. Fuentealba, J. Matulich, R. Troncoso // Journal of High Energy Physics. - 2015. - Vol. 10. - 009. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP10(2015)009 (access date: 01.09.2020).

[27] Fuentealba O. Extension of the Poincare group with half-integer spin generators: hypergravity and beyond/ O. Fuentealba, J. Matulich, R. Troncoso // Journal of High Energy Physics. - 2015. - Vol. 09. - P. 003. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP09%282015%29003 (access date: 01.09.2020).

[28] Gibbons G. Black holes and Calogero models / G. Gibbons and P. Townsend // Physics Letters B. - 1999. - Vol. 454. - P. 187-192. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026939900266X?via%3Dihub (access date: 01.09.2020).

[29] Claus P. Black holes and superconformal mechanics / P. Claus, M. Derix, R. Kallosh, J. Kumar, P. K. Townsend, A. Van Proeyen // Physical Review Letters. - 1998. - Vol. 81. P. 4553-4556. - URL: https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.81.4553 (access date: 01.09.2020).

[30] Cadoni M. AdS_2 gravity as conformally invariant mechanical system / M. Cadoni, P. Carta, D. Klemm, S. Mignemi // Physical Review D. - 2001. - Vol. 63. - 125021. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.63.125021 (access date: 01.09.2020).

[31] Astorino M. AdS_2 supergravity and superconformal quantum mechanics / M. Astorino, S. Cacciatori, D. Klemm, D. Zanon // Annals of Physics. - 2003. - Vol. 304. - P. 128-144. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491603000083?via%3Dihub (access date: 01.09.2020).

[32] Chamon C. Conformal quantum mechanics as the CFT_1 dual to AdS_2 / C. Chamon, R. Jackiw, S. Y. Pi, L. Santos // Physics Letters B. - 2011. - Vol. 701. - P. 503-507. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269311006447?via%3Dihub (access date: 01.09.2020).

[33] Grumiller D. Menagerie of AdS_2 boundary conditions / D. Grumiller, R. McNees, J. Salzer, C. Valcarcel, D. Vassilevich, // Journal of High Energy Physics. - 2017. - Vol. 10. - 203. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP10%282017%29203 (access date: 01.09.2020).

[34] Cardenas M. Boundary theories for dilaton supergravity in 2D / M. Cardenas, O. Fuentealba, H. A. Gonzalez, D. Grumiller, C. Valcarcel, D. Vassilevich // Journal of High Energy Physics. - 2018. - Vol. 11. - 077. -

URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP11%282018%29077 (access date: 01.09.2020).

[35] Adams A. Hot spacetimes for cold atoms / A. Adams, K. Balasubramanian, J. McGreevy // Journal of High Energy Physics. - 2008. - Vol. 11. - 059. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1126-6708/2008/11/059 (access date: 01.09.2020).

[36] Nishida Y. Unitary Fermi gas, epsilon expansion, and nonrelativistic conformal field theories / Y. Nishida, D. T. Son // Lecture Notes in Physics. - 2012. - Vol. 836. - P. 233-275. - URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-21978-8_7 (access date: 01.09.2020).

[37] Regal C. Observation of resonance condensation of fermionic atom pairs / C. A. Regal, M. Greiner, D. S. Jin // Physical Review Letters. - 2004. - Vol. 92. - 040403. - URL: https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.92.040403 (access date: 01.09.2020)..

[38] O'Hara K. Observation of a strongly interacting degenerate fermi gas of atoms / K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, J. E. Thomas // Science. - 2002. - Vol. 298. - P. 2179-2182. - URL: https://science.sciencemag.org/content/298/5601/2179 (access date: 01.09.2020).

[39] Bourdel T. Experimental study of the BEC-BCS crossover region in lithium 6 / T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, J. Zhang, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, C. Salomon // Physical Review Letters. - 2004. - Vol. 93. - 050401. - URL: https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.93.050401 (access date: 01.09.2020).

[40] de Alfaro V. Conformal invariance in quantum mechanics / V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan // Nuovo Cimento A. - 1976. - Vol. 34. - 569. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02785666 (access date: 01.09.2020).

[41] V. Akulov. Quantum superconformal model in (1,2) space / V. P. Akulov, A. I. Pashnev // Theoretical and Mathematical Physics. - 1983. - Vol. 56. - 862-866. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01086252 (access date: 01.09.2020).

[42] Fubini S. Superconformal quantum mechanics / S. Fubini, E. Rabinovici // Nuclear Physics B. - 1984. - Vol. 245. - 17. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032138490422X (access date: 01.09.2020).

[43] Wyllard N. (Super)conformal many body quantum mechanics with extended supersymmetry / N. Wyllard // Journal of Mathematical Physics. - 2000. - Vol. 41. - P. 2826-2838. - URL: https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.533273 (access date: 01.09.2020).

[44] de Azcarraga J. Superconformal mechanics and nonlinear realizations / J. A. de Azcarraga, J. M. Izquierdo, J. C. Perez Bueno, P. K. Townsend // Physical Review D. - 1999. - Vol. 59. - 084015. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.59.084015 (access date: 01.09.2020).

[45] Michelson J. Superconformal multiblack hole quantum mechanics / J. Michelson, A. Strominger // Journal of High Energy Physics. - 1999. - Vol. 09. - 005. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1126-6708/1999/09/005 (access date: 01.09.2020).

[46] Papadopoulos G. Conformal and superconformal mechanics / G. Papadopoulos // Classical and Quantum Gravity. - 2000. - Vol. 17. - P. 3715-3742. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/17/18/310 (access date: 01.09.2020).

[47] Zhou J. Super 0-brane and GS superstring actions on $AdS_2 \times S^2$ / J.-G. Zhou // Nuclear Physics B. - 1999. - Vol. 552. - P. 92-102. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321399004629 (access date: 01.09.2020).

[48] Bellucci S. AdS_2/CFT_1, canonical transformations and superconformal mechanics / S. Bellucci, A. Galajinsky, E. Ivanov, S. Krivonos

// Physics Letters B. - 2003. - Vol. 555. - P. 99-106. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269303000406 (access date: 01.09.2020).

[49] Ivanov E. N=4, d = 1 supermultiplets from nonlinear realizations of D(2,1; α) / E. Ivanov, S. Krivonos, O. Lechtenfeld // Classical and Quantum Gravity. - 2004. - Vol. 21. - P. 1031-1050. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/21/4/021 (access date: 01.09.2020).

[50] Anabalon A. N=4 superconformal mechanics as a non linear realization / A. Anabalon, J. Gomis, K. Kamimura, J. Zanelli // Journal of High Energy Physics. - 2006. - Vol. 10. - 068. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1126-6708/2006/10/068 (access date: 01.09.2020).

[51] Galajinsky A. Particle dynamics on $AdS_2 \times S^2$ background with two-form flux/ A. Galajinsky // Physical Review D. - 2008. - Vol. 78. - 044014. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.78.044014 (access date: 01.09.2020).

[52] Bellucci S. Potentials in N=4 superconformal mechanics / S. Bellucci, S. Krivonos // Physical Review D. - 2009. - Vol. 80. - 065022. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.80.065022 (access date: 01.09.2020).

[53] Galajinsky A. Particle dynamics near extreme Kerr throat and supersymmetry / A. Galajinsky // Journal of High Energy Physics. - 2010. - Vol. 11. - 126. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP11%282010%29126 (access date: 01.09.2020).

[54] Fedoruk S. New D(2,1; α) mechanics with spin variables / S. Fedoruk, E. Ivanov, O. Lechtenfeld // Journal of High Energy Physics. - 2010. - Vol. 04. - 129. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP04%282010%29129 (access date: 01.09.2020).

[55] Delduc F. Gauging N=4 supersymmetric mechanics II: (1,4,3) models from the (4,4,0) ones / F. Delduc, E. Ivanov // Nuclear Physics B. - 2007. - Vol. 770. - P. 179-205. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S055032130700096X (access date: 01.09.2020).

[56] Fedoruk S. Superconformal mechanics / S. Fedoruk, E. Ivanov, O. Lechtenfeld // Journal of Physics A. - 2012. - Vol. 45. - 173001. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8113/45/17/173001 (access date: 01.09.2020).

[57] Ivanov E. New variant of N=4 superconformal mechanics / E. Ivanov, S. Krivonos, O. Lechtenfeld // Journal of High Energy Physics. - 2003. - Vol. 03. - 014. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1126-6708/2003/03/014 (access date: 01.09.2020).

[58] Ivanov E. Deformed supersymmetric mechanics / E. Ivanov, S. Sidorov // Classical and Quantum Gravity. - 2014. - Vol. 31. - 075013. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/31/7/075013 (access date: 01.09.2020).

[59] Fedoruk S. New realizations of the supergroup D(2, 1; α) in $\mathcal{N} = 4$ superconformal mechanics / S. Fedoruk, E. Ivanov // Journal of High Energy Physics. - 2015. - Vol. 10. - 087. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP10%282015%29087 (access date: 01.09.2020).

[60] Bellucci S. ABC of N = 8, d = 1 supermultiplets / S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos, O. Lechtenfeld // Nuclear Physics B. - 2004. - Vol. 699. - P. 226-252. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321304005802?via%3Dihub (access date: 01.09.2020).

[61] Galajinsky A. $\mathcal{N} = 4$ superconformal mechanics from the $su(2)$ perspective / A. Galajinsky // Journal of High Energy Physics. - 2015. - Vol. 02 - 091. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP02%282015%29091 (access date: 01.09.2020).

[62] Galajinsky A. Couplings in D(2, 1; α) superconformal mechanics from the SU(2) perspective/ A. Galajinsky // Journal of High Energy Physics. - 2017. - Vol. 03. - 054. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP03%282017%29054 (access date: 01.09.2020).

[63] Galajinsky A. Superconformal SU(1, 1|n) mechanics / A. Galajinsky, O. Lechtenfeld // Journal of High Energy Physics. - 2016. - Vol. 09. -114. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP09%282016%29114 (access date: 01.09.2020).

[64] Copland N. Superconformal Yang-Mills quantum mechanics and Calogero model with OSp(N|2,R) symmetry / N. B. Copland, S. M. Ko, J.-H. Park // Journal of High Energy Physics. - 2012. - Vol. 07. - 076. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP07%282012%29076 (access date: 01.09.2020).

[65] Okazaki T. Membrane quantum mechanics / T. Okazaki // Nuclear Physics B. - 2014. - Vol. 890. - P. 400-441. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S055032131400368X?via%3 Dihub (access date: 01.09.2020).

[66] Heinze M. Orbit method quantization of the AdS_2 superparticle / M. Heinze, B. Hoare, G. Jorjadze, L. Megrelidze // Journal of Physics A. - 2015. - Vol. 48. -315403. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8113/48/31/315403 (access date: 01.09.2020).

[67] Siegel W. Hidden local supersymmetry in the supersymmetric particle action / W. Siegel // Physics Letters B. - 1983. - Vol. 128. - 397. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269383909243 (access date: 01.09.2020).

[68] Bandos I. On the generalized action principle for superstrings and supermembranes / I. Bandos, D. Sorokin, D. Volkov // Physics Letter B. - 1995. - Vol. 352. - 269. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939500506G?via%3 Dihub (access date: 01.09.2020).

[69] Metsaev R. Type IIB superstring action in $AdS_5 \times S^5$ background / R. R. Metsaev, A. A. Tseytlin // Nuclear Physics B. - 1998. - Vol. 533. - P. 109-126. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321398005707?via%3Dihub (access date: 01.09.2020).

[70] Metsaev R. Supersymmetric D3-brane action in $AdS_5 \times S^5$ / R. R. Metsaev, A. A. Tseytlin // Physics Letters B. - 1998. - Vol. 436. - P. 281-288. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269398008697?via%3Dihub (access date: 01.09.2020).

[71] Rahmfeld J. The GS string action on $AdS(3) \times S(3)$ with Ramond-Ramond charge / J. Rahmfeld, A. Rajaraman // Physical Review D. - 1999. - Vol. 60. - 064014. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.60.064014 (access date: 01.09.2020).

[72] Bandos I. *OSp* supergroup manifolds, superparticles and supertwistors / I. A. Bandos, J. Lukierski, C. Preitschopf, D. P. Sorokin // Physical Review D. - 2000. - Vol. 61. - 065009. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.61.065009 (access date: 01.09.2020).

[73] Pasti P. On gauge-fixed superbrane actions in AdS superbackgrounds / P. Pasti, D. P. Sorokin, M. Tonin // Physics Letters B. - 1999. - Vol. 447. - P. 251-256. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269398015974?via%3Dihub (access date: 01.09.2020).

[74] Negro J. Nonrelativistic conformal groups / J. Negro, M. del Olmo, A. Rodriguez-Marco // Journal of Mathematical Physics. - 1997. - Vol. 38. - 3786. - URL: https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.532068 (access date: 01.09.2020).

[75] Henkel M. Local scale invariance and strongly anisotropic equilibrium critical systems / J. Negro, M. del Olmo, A. Rodriguez-Marco // Physical Review Letters. - 1997. - Vol. 78. - P. 1940-1943. - URL:

https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.78.1940 (access date: 01.09.2020).

[76] Gomis J. Schrodinger equations for higher order non-relativistic particles and N-Galilean conformal symmetry / J. Gomis, K. Kamimura // Physical Review D. - 2012. - Vol. 85. - 045023. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.85.045023 (access date: 01.09.2020).

[77] Lukierski J. Acceleration-extended Galilean symmetries with central charges and their dynamical realizations / J. Lukierski, P. C. Stichel, W. J. Zakrzewski // Physics Letters B. - 2007. - Vol. 650. - P. 203-207. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269307005242 (access date: 01.09.2020).

[78] Duval C. Non-relativistic conformal symmetries and Newton-Cartan structures / C. Duval, P. A. Horvathy // Journal of Physics A. - 2009. - Vol. 42. - 465206. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8113/42/46/465206 (access date: 01.09.2020).

[79] Fedoruk S. Galilean conformal mechanics from nonlinear realizations / S. Fedoruk, E. Ivanov, J. Lukierski // Physical Review D. - 2011. - Vol. 83. - 085013. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.83.085013 (access date: 01.09.2020).

[80] Galajinsky A. Remarks on l-conformal extension of the Newton-Hooke algebra / A. Galajinsky, I. Masterov // Physics Letters B. - 2011. - Vol. 702. - P. 265-267. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269311007593?via%3Dihub (access date: 01.09.2020).

[81] Galajinsky A. Dynamical realizations of l-conformal Newton-Hooke group / A. Galajinsky, I. Masterov // Physics Letters B. - 2013. - Vol. 723. - P. 190-195. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269313003432?via%3Dihub (access date: 01.09.2020).

[82] Andrzejewski K. Dynamical interpretation of nonrelativistic conformal groups / K. Andrzejewski, J. Gonera // Physics Letters B. - 2013. - Vol. 721. - P. 319-322. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269313002323 (access date: 01.09.2020).

[83] Andrzejewski K. On dynamical realizations of l-conformal Galilei groups / K. Andrzejewski, J. Gonera, P. Kosinski, P. Maslanka // Nuclear Physics B. - 2013. - Vol. 876. - P. 309-321. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321313004069 (access date: 01.09.2020).

[84] Andrzejewski K. Conformal Newton-Hooke symmetry of Pais-Uhlenbeck oscillator / K. Andrzejewski, A. Galajinsky, J. Gonera, I. Masterov // Nuclear Physics B. - 2014. - Vol. 885. - P. 150-162. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321314001679?via%3Dihub (access date: 01.09.2020).

[85] Andrzejewski K. Conformal Newton-Hooke algebras, Niederer's transformation and Pais-Uhlenbeck oscillator / K. Andrzejewski // Physics Letters B. - 2014. - Vol. 738. - P. 405-411. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931400731X?via%3Dihub (access date: 01.09.2020).

[86] Bagchi A. Galilean conformal algebras and AdS/CFT / A. Bagchi, R. Gopakumar // Journal of High Energy Physics. - 2009. - Vol. 07. - 037. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1126-6708/2009/07/037 (access date: 01.09.2020).

[87] Martelli D. Comments on Galilean conformal field theories and their geometric realization / D. Martelli, Y. Tachikawa // Journal of High Energy Physics. - 2010. - Vol. 05. - 091. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP05%282010%29091 (access date: 01.09.2020).

[88] Campoleoni A. Asymptotic W-symmetries in three-dimensional higher-spin gauge theories / A. Campoleoni, S. Fredenhagen, S. Pfenninger // Journal of High Energy Physics. - 2011. - Vol. 09. - 113. -

URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP09%282011%29113 (access date: 01.09.2020).

[89] Ammon M. Spacetime geometry in higher spin gravity / M. Ammon, M. Gutperle, P. Kraus, E. Perlmutter // Journal of High Energy Physics. - 2011. - Vol. 10. - 053. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP10%282011%29053 (access date: 01.09.2020).

[90] Hartong J. Nonrelativistic Chern-Simons theories and three-dimensional Horava-Lifshitz gravity / J. Hartong, Y. Lei, N. A. Obers // Physical Review D. - 2016. - Vol. 94. - 065027. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.94.065027 (access date: 01.09.2020).

[91] Chernyavsky D. Ricci-flat spacetimes with l-conformal Galilei symmetry / D. Chernyavsky, A. Galajinsky // Physics Letters B. - 2016. - Vol. 754. - P. 249-253. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269316000599 (access date: 01.09.2020).

[92] Chernyavsky D. Coset spaces and Einstein manifolds with l-conformal Galilei symmetry / D. Chernyavsky // Nuclear Physics B. - 2016. - Vol. 911. - P. 471-479. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321316302371 (access date: 01.09.2020).

[93] Chernyavsky D. Super 0–brane action on the coset space of $D(2,1;\alpha)$ supergroup / D. Chernyavsky // Journal of High Energy Physics. - 2017. - Vol. 09. - 054. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP09%282017%29054 (access date: 01.09.2020).

[94] Chernyavsky D. $SU(1,1|N)$ superconformal mechanics with fermionic gauge symmetry / D. Chernyavsky // Journal of High Energy Physics. - 2018. - Vol. 04. - 009. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP04%282018%29009 (access date: 01.09.2020).

[95] Chernyavsky D. On $OSp(N|2)$ superconformal mechanics / D. Chernyavsky // Journal of High Energy Physics. - 2019. - Vol. 02. - 170. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP02%282019%29170 (access date: 01.09.2020).

[96] Chernyavsky D. Three-dimensional (higher-spin) gravities with extended Schrödinger and l-conformal Galilean symmetries / D. Chernyavsky, D. Sorokin //Journal of High Energy Physics. - 2019. - Vol. 07. - 156. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP07(2019)156 (access date: 01.09.2020).

[97] Kreuzer M. Killing gauge for the 0-brane on $AdS_2 \times S^2$ coset superspace / M. Kreuzer, J.-G. Zhou // Physics Letters B. - 2009. - Vol. 472. - P. 309-315. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269399014434?via%3 Dihub (access date: 01.09.2020).

[98] Caldarelli M. Supersymmetry of Anti-de Sitter black holes / M. M. Caldarelli, D. Klemm // Nuclear Physics B. - 1999. - Vol. 545. - P. 434-460. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321398008463?via%3 Dihub (access date: 01.09.2020).

[99] Romans L. Supersymmetric, cold and lukewarm black holes in cosmological Einstein-Maxwell theory / L. J. Romans // Nuclear Physics B. - 1992. - Vol. 383. - P. 395-415. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321392906844?via%3 Dihub (access date: 01.09.2020).

[100] Bellucci S. (Super)oscillator on CP^N and constant magnetic field / S. Bellucci, A. Nersessian // Physical Review D. - 2003. - Vol. 67. - 065013. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.67.065013 (access date: 01.09.2020).

[101] Bellucci S. CP^n supersymmetric mechanics in U(n) background gauge fields / S. Bellucci, S. Krivonos, A. Sutulin // Physical Review D. - 2011. - Vol. 84. - 065033. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.84.065033 (access date: 01.09.2020).

[102] Bellucci S. Symmetries of N = 4 supersymmetric $\mathbb{CP}^n$ mechanics / S. Bellucci, N. Kozyrev, S. Krivonos, A. Sutulin // Journal of Physics A. - 2013. - Vol. 46. - 275305. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8113/46/27/275305/meta (access date: 01.09.2020).

[103] Gibbons G. The General Kerr-de Sitter metrics in all dimensions / G. W. Gibbons, H. Lu, D. N. Page, C. N. Pope // Journal of Geometry and Physics. - 2005. - Vol. 53. - P. 49-73. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S039304400400083X?via%3Dihub (access date: 01.09.2020).

[104] Metsaev R. Superparticle and superstring in $AdS_3 \times S^3$ Ramond-Ramond background in light cone gauge / R. R. Metsaev, A. A. Tseytlin // Journal of Mathematical Physics. - 2001. - Vol. 42. - P. 2987-3014. - URL: https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1377274 (access date: 01.09.2020).

[105] Fedoruk S. OSp(4|2) Superconformal mechanics / S. Fedoruk, E. Ivanov, O. Lechtenfeld // Journal of High Energy Physics. - 2009. - Vol. 08. - 081. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1126-6708/2009/08/081 (access date: 01.09.2020).

[106] Alonso-Alberca N. Geometric construction of Killing spinors and supersymmetry algebras in homogeneous space-times / N. Alonso-Alberca, E. Lozano-Tellechea, T. Ortin // Classical and Quantum Gravity. - 2002. - Vol. 19. - P. 6009-6024. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/19/23/309 (access date: 01.09.2020).

[107] Bagchi A. Metrics with Galilean conformal isometry / A. Bagchi, A. Kundu // Physical Review D. - 2011. - Vol. 83. - 066018. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.83.066018 (access date: 01.09.2020).

[108] Hietarinta J. Supersymmetry generators of arbitrary spin / J. Hietarinta // Physical Review D. - 1976. - Vol. 13. - 838. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.13.838 (access date: 01.09.2020).

[109] Concha P. Asymptotic symmetries of three-dimensional Chern-Simons gravity for the Maxwell algebra / P. Concha, N. Merino, O. Miskovic, E. Rodriguez, P. Salgado-Rebolledo, O. Valdivia // Journal of High Energy Physics. - 2018. - Vol. 10. - 079. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP10(2018)079 (access date: 01.09.2020).

[110] Bacry H. Group-theoretical analysis of elementary particles in an external electromagnetic field. 1. the relativistic particle in a constant and uniform field / H. Bacry, P. Combe, J. L. Richard // Nuovo Cimento A. - 1970. - Vol. 67. - P. 267-299. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02725178 (access date: 01.09.2020).

[111] Schrader R. The Maxwell group and the quantum theory of particles in classical homogeneous electromagnetic fields / R. Schrader // Fortschritte der Physik. - 1972. - Vol. 20. - P. 701-734. - URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/prop.19720201202 (access date: 01.09.2020).

[112] Achucarro A. A Chern-Simons action for three-dimensional anti-De Sitter supergravity theories / A. Achucarro, P. Townsend // Physics Letters B. - 1986. - Vol. 180. - 89. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269386901401 (access date: 01.09.2020).

[113] Afshar H. Spin-3 gravity in three-dimensional flat space / H. Afshar, A. Bagchi, R. Fareghbal, D. Grumiller, J. Rosseel // Physical Review Letters. - 2013. - Vol. 111. - 121603. - URL: https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.111.121603 (access date: 01.09.2020).

[114] Gonzalez H. Asymptotically flat spacetimes in three-dimensional higher spin gravity / H. A. Gonzalez, J. Matulich, M. Pino, R. Troncoso // Journal of High Energy Physics. - 2013. - Vol. 09. - 016. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP09%282013%29016 (access date: 01.09.2020).

[115] Matulich J. Higher spin extension of cosmological spacetimes in 3D: asymptotically flat behaviour with chemical potentials and thermodynamics / J. Matulich, A. Perez, D. Tempo, R. Troncoso // Journal of High Energy Physics. - 2015. - Vol. 05. - 025. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP05%282015%29025 (access date: 01.09.2020).

[116] Ashtekar A. Asymptotic structure of symmetry reduced general relativity / A. Ashtekar, J. Bicak, B. G. Schmidt // Physical Review D. - 1997. - Vol. 55. - P. 669-686. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.55.669 (access date: 01.09.2020).

[117] Barnich G. Classical central extension for asymptotic symmetries at null infinity in three spacetime dimensions / G. Barnich, G. Compere // Classical and Quantum Gravity. - 2007. - Vol. 24. - P. 15-23. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/24/5/F01 (access date: 01.09.2020).

[118] Bagchi A. Holography of 3D flat cosmological horizons / A. Bagchi, S. Detournay, R. Fareghbal, J. Simon // Physical Review Letters. - 2013. - Vol. 110. - 141302. - URL: https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.110.141302 (access date: 01.09.2020).

[119] Barnich G. The Flat limit of three dimensional asymptotically anti-de Sitter spacetimes / G. Barnich, A. Gomberoff, H. A. Gonzalez // Physical Review D. - 2012. - Vol. 86. - 024020. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.86.024020 (access date: 01.09.2020).

[120] Banados M. Global charges in Chern-Simons field theory and the (2+1) black hole / M. Banados // Physical Review D. - 1996. - Vol. 52. - P. 5816-5825. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.52.5816 (access date: 01.09.2020).

[121] Aragone C. Higher spin vierbein gauge fermions and hypergravities / C. Aragone, S. Deser // Nuclear Physics B. - 1980. - Vol. 170. - 329. - URL:

https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321380901534 (access date: 01.09.2020).

[122] Rahman R. The uniqueness of hypergravity / R. Rahman // Journal of High Energy Physics. - 2019. - Vol. 11. - 115. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP11(2019)115 (access date: 01.09.2020).

[123] Bansal S. Can Chern-Simons or Rarita-Schwinger be a Volkov-Akulov Goldstone? / S. Bansal, D. Sorokin // Journal of High Energy Physics. - 2018. - Vol. 07. - 106. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP07%282018%29106 (access date: 01.09.2020).

[124] Salgado P. Topological gravity and transgression holography / P. Salgado, R. J. Szabo, O. Valdivia // Physical Review D. - 2014. - Vol. 89. - 084077. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.89.084077 (access date: 01.09.2020).

[125] Hoseinzadeh S. (2+1)-dimensional gravity from Maxwell and semisimple extension of the Poincare gauge symmetric models / S. Hoseinzadeh, A. Rezaei-Aghdam // Physical Review D. - 2014. - Vol. 90. - 084008. - URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.90.084008 (access date: 01.09.2020).

[126] Aviles L. Non-relativistic Maxwell Chern-Simons gravity / L. Aviles, E. Frodden, J. Gomis, D. Hidalgo, J. Zanelli // Journal of High Energy Physics. - 2018. - Vol. 05. - 047. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP05%282018%29047 (access date: 01.09.2020).

[127] Caroca R. Generalized Chern?Simons higher-spin gravity theories in three dimensions / R. Caroca, P. Concha, O. Fierro, E. Rodriguez, P. Salgado-Rebolledo // Nuclear Physics B. - 2018. - Vol. 934. - P. 240-264. - URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321318301913?via%3Dihub (access date: 01.09.2020).

[128] Salgado-Rebolledo P. The Maxwell group in 2+1 dimensions and its infinite-dimensional enhancements / P. Salgado-Rebolledo // Journal of High Energy Physics. - 2019. - Vol. 10. - 039. - URL: https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP10(2019)039 (access date: 01.09.2020).

[129] Britto-Pacumio R. Lectures on superconformal quantum mechanics and multi-black hole moduli spaces / R. Britto-Pacumio, J. Michelson, A. Strominger, A. Volovich // NATO Science Series C. - 2000. - Vol. 556. - P. 255-284. - URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-94-010-0852-5_7 (access date: 01.09.2020).

[130] Bertlmann R. Bloch vectors for qudits / R. Bertlmann, P. Krammer // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. - 2008. - Vol. 41. - 235303. - URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8113/41/23/235303 (access date: 01.09.2020).

[131] Riegler M. How General Is Holography? / M. Riegler // Vienna, Technical University. - 2016. - PhD thesis. - URL: https://arxiv.org/abs/1609.02733 (access date: 01.09.2020).

Приложение А
(обязательное)
Дополнения к Главе 1

Супералгебры $D(2,1;\alpha)$, $su(1,1|N)$ и $osp(2|N)$

В этом приложении мы рассмотрим простые супералгебры $su(1,1|N)$, $D(2,1;\alpha)$ и $osp(N|2)$ их коммутационные соотношения, которые используются в данной дисертационной работе. Список всех простых супералгебр, включающих конформную подалгебру $sl(2,R)$, можно найти в [129]. Все три супералгебры влключают в себя конформную подалгебру, которая задана операторами H, K и D. Каждая из них включает набор суперсимметричных Q и суперконформных S генераторов, которые преобразуются группой R–симметрии.

• Супералгебра $D(2,1;\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
&[H,D]=H\ , && [H,K]=2D\ ,\\
&[D,K]=K\ , && [\mathcal{J}_a,\mathcal{J}_b]=\epsilon_{abc}\mathcal{J}_c\ ,\\
&\{Q_\alpha,\bar{Q}^\beta\}=-2iH\delta_\alpha{}^\beta, && \{Q_\alpha,\bar{S}^\beta\}=-2\alpha(\sigma_a)_\alpha{}^\beta\mathcal{J}_a+2iD\delta_\alpha{}^\beta+2(1+\alpha)I_3\delta_\alpha{}^\beta,\\
&\{S_\alpha,\bar{S}^\beta\}=-2iK\delta_\alpha{}^\beta, && \{\bar{Q}^\alpha,S_\beta\}=2\alpha(\sigma_a)_\beta{}^\alpha\mathcal{J}_a+2iD\delta_\beta{}^\alpha-2(1+\alpha)I_3\delta_\beta{}^\alpha,\\
&\{Q_\alpha,S_\beta\}=2i(1+\alpha)\epsilon_{\alpha\beta}I_-, && \{\bar{Q}^\alpha,\bar{S}^\beta\}=-2i(1+\alpha)\epsilon^{\alpha\beta}I_+,\\
&[D,Q_\alpha]=-\frac{1}{2}Q_\alpha\ , && [D,S_\alpha]=\frac{1}{2}S_\alpha\ ,\\
&[K,Q_\alpha]=S_\alpha\ , && [H,S_\alpha]=-Q_\alpha\ ,\\
&[\mathcal{J}_a,Q_\alpha]=\frac{i}{2}(\sigma_a)_\alpha{}^\beta Q_\beta\ , && [\mathcal{J}_a,S_\alpha]=\frac{i}{2}(\sigma_a)_\alpha{}^\beta S_\beta\ ,\\
&[D,\bar{Q}^\alpha]=-\frac{1}{2}\bar{Q}^\alpha\ , && [D,\bar{S}^\alpha]=\frac{1}{2}\bar{S}^\alpha\ ,\\
&[K,\bar{Q}^\alpha]=\bar{S}^\alpha\ , && [H,\bar{S}^\alpha]=-\bar{Q}^\alpha\ ,\\
&[\mathcal{J}_a,\bar{Q}^\alpha]=-\frac{i}{2}\bar{Q}^\beta(\sigma_a)_\beta{}^\alpha\ , && [\mathcal{J}_a,\bar{S}^\alpha]=-\frac{i}{2}\bar{S}^\beta(\sigma_a)_\beta{}^\alpha\\
&[I_-,\bar{Q}^\alpha]=\epsilon^{\alpha\beta}Q_\beta, && [I_-,\bar{S}^\alpha]=\epsilon^{\alpha\beta}S_\beta,\\
&[I_+,Q_\alpha]=-\epsilon_{\alpha\beta}\bar{Q}^\beta, && [I_+,S_\alpha]=-\epsilon_{\alpha\beta}\bar{S}^\beta,
\end{aligned}
\tag{3.84}
$$

$$
\begin{aligned}
&[I_3, Q_\alpha] = \frac{i}{2} Q_\alpha, && [I_3, S_\alpha] = \frac{i}{2} S_\alpha, \\
&[I_3, \bar{Q}^\alpha] = -\frac{i}{2} \bar{Q}^\alpha, && [I_3, \bar{S}^\alpha] = -\frac{i}{2} \bar{S}^\alpha, \\
&[I_-, I_3] = -i I_-, && [I_+, I_3] = i I_+, \\
&[I_-, I_+] = 2i I_3, &&
\end{aligned} \tag{3.85}
$$

где ${(\sigma_a)_\alpha}^\beta$ – матрицы Паули. В данном случае алгебра R–симметрии является $su(2) \oplus su(2)$, где первая копия генерируется операторами $\mathcal{J}_a$, а вторая задана в базисе Картана $I_\pm, I_3$. Относительно эрмитова сопряжения генераторы ведут себя следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&H^\dagger = -H, \quad D^\dagger = -D, \quad K^\dagger = -K, \quad \mathcal{J}_a^\dagger = -\mathcal{J}_a, \quad I_\pm^\dagger = I_\mp, \quad I_3^\dagger = -I_3, \\
&Q_\alpha^\dagger = \bar{Q}^\alpha, \qquad S_\alpha^\dagger = \bar{S}^\alpha.
\end{aligned} \tag{3.86}
$$

В случае $\alpha = -1$ супералгебра (3.87) сводится к полупрямой сумме алгебр $su(1,1|2)$ и $su(2)$.

- Супералгебра $su(1,1|N)$

$$
\begin{aligned}
&[H, D] = H \ , && [H, K] = 2D \ , \\
&[D, K] = K \ , && [J_a, J_b] = f_{abc} J_c \ , \\
&[D, Q_j] = -\frac{1}{2} Q_j \ , && [D, S_j] = \frac{1}{2} S_j \ , \\
&[K, Q_j] = S_\alpha \ , && [H, S_j] = -Q_j \ , \\
&[J_a, Q_j] = \frac{i}{2} {(\lambda_a)_j}^k Q_k \ , && [J_a, S_j] = \frac{i}{2} {(\lambda_a)_j}^k S_k \ , \\
&[D, \bar{Q}^j] = -\frac{1}{2} \bar{Q}^j \ , && [D, \bar{S}^j] = \frac{1}{2} \bar{S}^j \ , \\
&[K, \bar{Q}^j] = \bar{S}^j \ , && [H, \bar{S}^j] = -\bar{Q}^j \ , \\
&[J_a, \bar{Q}^j] = -\frac{i}{2} \bar{Q}^k {(\lambda_a)_k}^j \ , && [J_a, \bar{S}^j] = -\frac{i}{2} \bar{S}^k {(\lambda_a)_k}^j \\
&[M, Q_j] = i Q_j, && [M, \bar{Q}^j] = -i \bar{Q}^j, \\
&[M, S_j] = i S_j, && [M, \bar{S}^j] = -i \bar{S}^j, \\
&\{Q_j, \bar{Q}^k\} = -2iH {\delta_j}^k, && \{Q_j, \bar{S}^k\} = 2 {(\lambda_a)_j}^k J_a + \left(2iD - \frac{N-2}{N} M \right) {\delta_j}^k,
\end{aligned} \tag{3.87}
$$

$$
\{S_j, \bar{S}^k\} = -2iK {\delta_j}^k \quad \{S_j, \bar{Q}^k\} = -2 {(\lambda_a)_j}^k J_a + \left(2iD + \frac{N-2}{N} M \right) {\delta_j}^k. \tag{3.88}
$$

Подалгебра R–симметрии имеет вид $su(N) \oplus u(1)$, которая генерируется операторами J_a и M. Матрицы $(\lambda_a)_j{}^k$ задают фундаментальное представление алгебры $su(N)$ и представляют собой эрмитовы бесследовы матрицы размерности $N \times N$, $j, k = 1, \ldots, N$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2i f_{abc} \lambda_c, \tag{3.89}$$

где, как и в (3.87), f_{abc} представляют антисимметричные структурные константы алгебры $su(N)$. Генераторы подчиняются законам эрмитова сопряжения, аналогичным (3.86).

- Супералгебра $osp(N|2)$:

$$\begin{aligned}
&[H, D] = H\ , && [H, K] = 2D\ , \\
&[D, K] = K\ , && [J^a, J^b] = f^{abc} J^c\ , \\
&[D, Q_j] = -\frac{1}{2} Q_j\ , && [D, S_j] = \frac{1}{2} S_j\ , \\
&[K, Q_j] = S_j, && [H, S_j] = -Q_j\ , \\
&[J^a, Q_j] = -\lambda^a_{jk} Q_k\ , && [J^a, S_j] = -\lambda^a_{jk} S_k\ , \\
&\{Q_j, Q_k\} = -2iH\delta_{jk}, && \{S_j, S_k\} = -2iK\delta_{jk} \\
&\{Q_j, S_k\} = 2iD\delta_{ij} + i\lambda^a_{jk} J^a.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Подалгебра R–симметрии для данной алгебры $so(N)$. Для генераторов подалгебры $so(N)$

$$[J^{ij}, J^{kl}] = \delta^{jk} J^{il} + \delta^{ik} J^{jl} - \delta^{kl} J^{ij} - \delta^{jl} J^{ik}. \tag{3.91}$$

мы ввели конденсированные обозначения $J^{jk} \to J^a$. Все генераторы вещественны. Антисимметричные матрицы $\lambda^{ij}_{kl} \to \lambda^a_{kl}$ задают N–мерное представление алгебры вращений

$$[\lambda^a, \lambda^b] = f^{abc} \lambda^c, \tag{3.92}$$

где f^{abc} – структурные константы алгебры $so(N)$ (3.91). Эти матрицы удовлетворяют следующим тождествам:

$$\lambda^a_{ij} \lambda^a_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}. \tag{3.93}$$

Для удобства разобьем алгебру $so(N)$ на подалгебру $so(N-1)$ и набор генераторов, которые будут использованы при построении факторпространства

$$J^{mn} := M^{mn}, \qquad J^{mN} := P^m, \qquad m, n = 1, \ldots, N-1. \tag{3.94}$$

В этих обозначениях коммутационные соотношения алгебры $so(N)$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
&[M^{mn}, P^q] = \delta^{qm} P^n - \delta^{qn} P^m, \qquad [P^m, P^n] = M^{mn}, \\
&[M^{mn}, M^{pq}] = M^{mp}\delta_{nq} + M^{np}\delta_{mq} - M^{nq}\delta_{mp} - M^{mq}\delta_{np}.
\end{aligned} \tag{3.95}
$$

Глобальные преобразования суперсимметрии для $D(2,1;\alpha)$–суперчастицы

В этом приложении мы приведем в явной форме преобразования глобальной суперсимметрии для $D(2,1;\alpha)$–суперчастицы.

Рассмотрим левое действие группового элемента $e^{\epsilon Q}$ на факторпространстве (1.29) с $\eta = \bar\eta = 0$

$$
e^{\epsilon Q} u|_{\eta=\bar\eta=0} = e^{H(t+\delta_Q t)} e^{K(z+\delta_Q z)} e^{iQ(\psi+\delta_Q\psi)+i(\bar\psi+\delta_Q\bar\psi)\bar Q} e^{-iz(\epsilon S)} u'_R h,
$$

где

$$
\begin{aligned}
&u'_R = e^{J_1(\phi+\delta_Q\phi)} e^{J_2(\theta+\delta_Q\theta+\pi/2)}, \\
&h = e^{-2zD\left(\delta_Q t - i(\epsilon\bar\psi)\right)} e^{2z\sin^{-1}\theta\left((\epsilon\sigma_2\bar\psi)\sin\phi - (\epsilon\sigma_3\bar\psi)\cos\phi\right)J_3} e^{-2(1+\alpha)(\epsilon\bar\psi)I_3 - 2i(1+\alpha)\psi^\alpha\epsilon^\beta\varepsilon_{\alpha\beta}I_-}, \\
&\delta_Q t = z(\epsilon\bar\psi)(\psi\bar\psi) + i(\epsilon\bar\psi), \qquad \delta_Q z = -z^2\delta_Q t, \\
&\delta_Q\phi = 2\alpha z\sin^{-1}\theta(\epsilon\sigma_a\bar\psi)S_{a1}, \qquad \delta_Q\theta = 2\alpha z(\epsilon\sigma_a\bar\psi)S_{a2}, \\
&\delta_Q\psi = \epsilon\left(1 + iz(\psi\bar\psi)\right) + i(1+\alpha)z(\epsilon\psi)\psi + z\psi\delta_Q t, \qquad \delta_Q\bar\psi = i\alpha z\bar\psi(\epsilon\bar\psi),
\end{aligned}
$$

и ϵ инфинетеземальный параметр преобразования, принимающий значения в алгебре Грассмана. Из (3.96) можно получить законы преобразования для фермионных координат

$$
\delta_Q\eta|_{\eta=\bar\eta=0} = -\epsilon z, \qquad \delta_Q\bar\eta|_{\eta=\bar\eta=0} = 0.
$$

Из первого уравнения следует, что калибровочное условие (1.31) неинвариантно относительно преобразований суперсимметрии. Компенсирующее преобразование $\delta_{\tilde\kappa}$ должно удовлетворять условию

$$
(\delta_{\tilde\kappa} + \delta_Q)\eta = (\delta_{\tilde\kappa} + \delta_Q)\bar\eta = 0, \tag{3.96}
$$

из которого следует

$$
\delta_{\tilde\kappa}\eta = z\epsilon, \qquad \delta_{\tilde\kappa}\bar\eta = 0. \tag{3.97}
$$

Для того, чтобы найти компенсирующее преобразование для бозонных t, z, θ, ϕ и фермионных ψ, $\bar{\psi}$ координат, следует рассмотреть (1.25) и (1.28) как систему алгебраических уравнений на $\delta_{\tilde{\kappa}}t$, $\delta_{\tilde{\kappa}}z$, $\delta_{\tilde{\kappa}}\theta$, $\delta_{\tilde{\kappa}}\phi$ and $\delta_{\tilde{\kappa}}\psi$, $\delta_{\tilde{\kappa}}\bar{\psi}$ с один–формами Маурера–Картана данными в (1.32)

$$
\begin{aligned}
&[\delta\eta] = z\epsilon\Gamma, \qquad [\delta\bar{\eta}] = 0,\\
&[\delta\psi] = (\delta_{\tilde{\kappa}}\psi - z\delta_{\tilde{\kappa}}t\psi)\,\Gamma = [\delta\eta]\Omega,\\
&[\delta\bar{\psi}] = \Gamma^{\dagger}\left(\delta_{\tilde{\kappa}}\psi - z\delta_{\tilde{\kappa}}t\bar{\psi}\right) = \Omega^{\dagger}[\delta\bar{\eta}],\\
&[\delta x_H] = \delta_{\tilde{\kappa}}t - i(\psi\delta_{\tilde{\kappa}}\bar{\psi} - \delta_{\tilde{\kappa}}\psi\bar{\psi}) = 0, \qquad [\delta x_K] = z^2\delta_{\tilde{\kappa}}t + \delta_{\tilde{\kappa}}z = 0,\\
&[\delta x_1] = \sin\theta\delta_{\tilde{\kappa}}\phi = 0, \qquad [\delta x_2] = \delta_{\tilde{\kappa}}\theta = 0.
\end{aligned}
$$

Общее решение этой системы может быть представлено в форме

$$
\begin{aligned}
&\delta_{\tilde{\kappa}}t = -iz\left(\epsilon\Gamma\Omega\Gamma^{\dagger}\bar{\psi}\right), \qquad \delta_{\tilde{\kappa}}z = -z^2\delta_{\tilde{\kappa}}t, \qquad \delta_{\tilde{\kappa}}\phi = \delta_{\tilde{\kappa}}\theta = 0,\\
&\delta_{\tilde{\kappa}}\psi = z\left(\epsilon\Gamma\Omega\Gamma^{\dagger}\right) + z\delta_{\tilde{\kappa}}t\psi, \qquad \delta_{\tilde{\kappa}}\bar{\psi} = z\delta_{\tilde{\kappa}}t\bar{\psi},
\end{aligned}
$$

where $\Gamma\Omega\Gamma^{\dagger}$ can be written in the form

$$
\Gamma\Omega\Gamma^{\dagger} = \frac{\sqrt{4L_HL_K - \alpha^{-2}L_mL_m}}{2mL_K}\left(a + ib\sigma_aR_{a3}\right) - i\alpha^{-1}\sigma_aR_{am}\frac{L_m}{2L_K}.
$$

Аналогично можно найти вид действия суперконформного генератора S на факторпространстве (1.29)

$$
\begin{aligned}
&\delta_S t = -it(\epsilon\bar{\psi}) - (1-tz)(\epsilon\bar{\psi})(\psi\bar{\psi}), \qquad \delta_S z = -z^2\delta_S t,\\
&\delta_S\phi = 2\alpha(1-tz)\sin^{-1}\theta R_{a1}(\epsilon\sigma_a\bar{\psi}), \qquad \delta_S\theta = 2\alpha(1-tz)R_{a2}(\epsilon\sigma_a\bar{\psi}),\\
&\delta_S\psi = i(1-tz)\left((\psi\bar{\psi})\epsilon - (1+\alpha)\psi\right) + t\epsilon + z\psi\delta_S t,\\
&\delta_S\bar{\psi} = -i(1-\alpha)(1-tz)(\epsilon\bar{\psi})\bar{\psi},
\end{aligned}
$$

и соответствующее компенсирующее преобразование

$$
\begin{aligned}
&\delta_{\tilde{\kappa}}t = i(1-tz)\left(\epsilon\Gamma\Omega\Gamma^{\dagger}\bar{\psi}\right), \qquad \delta_{\tilde{\kappa}}z = -z^2\delta_{\tilde{\kappa}}t,\\
&\delta_{\tilde{\kappa}}\psi = -(1-tz)\left(\epsilon\Gamma\Omega\Gamma^{\dagger}\right) + z\delta_{\tilde{\kappa}}t\psi, \qquad \delta_{\tilde{\kappa}}\bar{\psi} = z\delta_{\tilde{\kappa}}t\bar{\psi}.
\end{aligned}
$$

Отсюда найдем $\bar{Q}$– и $\bar{S}$–преобразования, применив эрмитово сопряжение .

Явный вид форм Маурера–Картана для факторпространства супергруппы $SU(1,1|N)$

Бозонные формы Маурера–Картана для элемента факторпространства (1.105) имеют вид

$$\begin{aligned}
&L_H = Dt, \\
&L_D = 2zDt + i(\eta d\bar{\psi} - d\psi\bar{\eta}), \\
&L_a = L_a^0 + 2Dt(\eta\lambda_b\bar{\eta})U_{ab} - 2\left(d\psi\lambda_b\bar{\eta} + \eta\lambda_b d\bar{\psi}\right)U_{ab}, \\
&L_M = \frac{N-2}{N}\left(d\psi\bar{\eta} + \eta d\bar{\psi} - \eta\bar{\eta}Dt\right), \\
&L_K = z^2Dt + dz + Dt(\eta\bar{\eta})^2 - 2\eta\bar{\eta}\left(d\psi\bar{\eta} + \eta d\bar{\psi}\right) - \\
&\qquad -2iz\left(d\psi\bar{\eta} - \eta d\bar{\psi}\right) - i(\eta d\bar{\eta} - d\eta\bar{\eta}), \qquad (3.98)
\end{aligned}$$

где L_a^0 – формы Маурера–Картана на факторпространстве $\frac{SU(N)}{SU(N-1)\times U(1)}$

$$u_R^{-1}du_R = L_a^0 J_a, \qquad (3.99)$$

и матрица U_{ab} задает групповой элемент $SU(N)$ в присоединенном представлении

$$u_R^{-1}J_a u_R = U_{ab}J_b. \qquad (3.100)$$

Мы также ввели обозначение

$$Dt = dt - i(\psi d\bar{\psi} - d\psi\bar{\psi}). \qquad (3.101)$$

При получении этих уравнений было использовано тождество

$$\frac{1}{2}(\lambda_a)_\alpha{}^\beta(\lambda_a)_\gamma{}^\rho = -\frac{1}{N}\delta_\alpha{}^\beta\delta_\gamma{}^\rho + \delta_\gamma{}^\beta\delta_\alpha{}^\rho. \qquad (3.102)$$

Обобщенные матрицы Гелл–Мана и алгебра $su(N)$

При построении модели $SU(1,1|N)$ суперчастицы с вращательными степенями свободы удобно использовать матрицы фундаментального представления алгебры $su(N)$ в бра/кет обозначениях (см., например, [130]). Разобьем множество (N^2-1) бесследовых эрмитовых матриц λ_a на три подмножества $\{T^+_{jk}, T^-_{jk}, \Lambda_l\}$:

- $N(N-1)/2$ симметричных матриц

$$T^+_{jk} = |j\rangle\langle k| + |k\rangle\langle j|, \qquad j,k = 1,\ldots,N, \quad j \neq k, \tag{3.103}$$

- $N(N-1)/2$ антисимметричных матриц

$$T^-_{jk} = -i\,|j\rangle\langle k| + i\,|k\rangle\langle j|, \qquad j,k = 1,\ldots,N, \tag{3.104}$$

- $(N-1)$ бесследовых диагональных матриц

$$\Lambda_l = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}}\left(\sum_{j=1}^{l}|j\rangle\langle j| - l\,|l+1\rangle\langle l+1|\right), \qquad l = 1,\ldots,N-1. \tag{3.105}$$

Используя бра/кет обозначения, можно найти структурные соотношения алгебры $su(N)$. Множество антисимметричных матриц T^- задает подалгебру $so(N)$

$$[T^-_{jk}, T^-_{pq}] = i\left(T^-_{jp}\delta_{kq} - T^-_{jq}\delta_{kp} - T^-_{kp}\delta_{jq} + T^-_{kq}\delta_{jp}\right). \tag{3.106}$$

Матрицы T^+ коммутируют на T^-

$$[T^+_{jk}, T^+_{pq}] = i\left(T^-_{jq}\delta_{kp} + T^-_{jp}\delta_{kq} + T^-_{kq}\delta_{jp} + T^-_{kp}\delta_{jq}\right), \tag{3.107}$$

в то время как коммутатор T^+ и T^- имеет вид

$$[T^+_{jk}, T^-_{pq}] = i\left(T^+_{jp}\delta_{kq} - T^+_{jq}\delta_{kp} - T^+_{kq}\delta_{jp} + T^+_{kp}\delta_{jq}\right) + 2i(\delta_{kq}\delta_{jp} - \delta_{jq}\delta_{kp})\big(|j\rangle\langle j| - |k\rangle\langle k|\big). \tag{3.108}$$

Используя тот факт, что (3.105) вместе с единичной матрицей задают базис в пространстве диагональных $N\times N$ матриц, можно найти тождество [130]

$$|j\rangle\langle j| = \frac{1}{N} - \sqrt{\frac{j-1}{2j}}\Lambda_{j-1} + \sum_{s=0}^{N-j-1}\frac{\Lambda_{j+s}}{\sqrt{2(j+s)(j+s+1)}}, \tag{3.109}$$

которое позволяет переписать второй член в (3.108) как комбинацию диагональных бесследовых матриц Λ_l

$$|j\rangle\langle j| - |k\rangle\langle k| = \sqrt{\frac{k-1}{2k}}\Lambda_{k-1} - \sqrt{\frac{j-1}{2j}}\Lambda_{j-1} + \sum_{s=j}^{k-1}\frac{\Lambda_s}{\sqrt{2s(s+1)}}, \qquad j < k. \tag{3.110}$$

Далее найдем коммутатор Λ_l и $T^\pm_{jk}$

$$\sqrt{\frac{l(l+1)}{2}}[\Lambda_l, T^\pm_{jk}] = \pm i\sum_{s=1}^{l}\left(T^\mp_{sk}\delta_{sj} \pm T^\mp_{sj}\delta_{sk}\right) \pm iT^\mp_{jk}\left((k-1)\delta_{k,l+1} - (j-1)\delta_{j,l+1}\right). \tag{3.111}$$

Поскольку Λ_l являются диагональными матрицами, их коммутатор обращается в ноль. Подводя итог, (3.106)-(3.111) определяют структурные соотношения алгебры $su(N)$.

В таком базисе оказывается просто выделить подалгебру $su(N-1)$. Именно, можно видеть, что операторы $\{T^+_{mn}, T^-_{mn}, \Lambda_s\}$, с $m,n = 1,\ldots,N-1$, $s = 1,\ldots,N-2$ генерируют $su(N-1)$. Для дальнейшего удобно ввести обозначения

$$T^\pm_{mN} := T^\pm_m, \qquad m = 1,\ldots,N-1. \tag{3.112}$$

Как показано в Приложении A, коммутационные соотношения $su(N)$ и (3.106)–(3.111) отличаются фактором $2i$. Далее мы будем полагать, что дульные к генераторам $T^\pm_{ij}$ и Λ_l один–формы Маурера–Картана $L^\pm_{ij}$ и L_l подчиняются алгебре $su(N)$ в стандартной форме.

Формы Маурера–Картана для супергруппы $OSp(N|2)$

Случай $N = 4$

Поскольку κ–симметрия уменьшает количество фермионных степеней свободы вдове, мы введем калибровку, полагая переменные, соосветствующие генераторам S, равными нулю. Элемент факторпространства в фиксированной калибровке имеет вид

$$u = e^{tH}e^{zK}e^{\psi Q}u, \qquad u_R = e^{P^1_+\phi}e^{P^2_+(\theta-\pi/2)}e^{P^3_+\chi}. \tag{3.113}$$

Соответствующие формы Маурера–Картана

$$\begin{aligned} &L_H = dt - i\psi d\psi, \qquad L_K = z^2dt + dz, \qquad L_D = 2zdt,\\ &L^m = e^m + \frac{i}{2}(\psi\lambda^p_+\psi)O^{mp}L_K, \end{aligned} \tag{3.114}$$

где

$$u^{-1}J^m_+u = O^{mp}J^p_+, \tag{3.115}$$

и

$$\begin{aligned} &e^1 = \sin\theta\cos\chi d\phi + \sin\chi d\theta, \qquad e^2 = -\sin\theta\sin\chi d\phi + \cos\chi d\theta,\\ &e^3 = -\cos\theta d\phi + d\chi. \end{aligned}$$

Один–формы Маурера–Картана для факторпространства (1.117) можно получить из (3.114) полагая $\chi = 0$.

Общий случай

Мы выбираем элемент факторпространства (1.130) в форме

$$u = e^{tH} e^{\psi Q} e^{zK} e^{\eta S} u_R, \tag{3.116}$$

где u_R – элемент $SO(N)/SO(N-1)$. Соответствующие бозонные формы Муарера–Картана имеют вид

$$\begin{aligned} & L_H = dt - i\psi d\psi, \qquad L_D = 2zL_H - 2i(d\psi\eta), \\ & L_K = z^2 L_H + dz - 2iz(d\psi\eta) - i\eta d\eta, \\ & L^m = e^m + \frac{i}{2}(\eta\lambda^a\eta)O^{am}dt - (\eta\lambda^a d\psi)O^{am}, \end{aligned} \tag{3.117}$$

где e^m – формы МК на факторпространстве $SO(N)/SO(N-1)$, следующие из $u_R^{-1}du_R$. Матрицы O^{am} заданы соотношением

$$u_R^{-1} P^m u_R = O^{am} J^a. \tag{3.118}$$

Приложение Б
(обязательное)
Дополнения к Главе 3

Основные обозначения и соглашения

В главе 3 мы считаем, что метрика Минковского задана в кооординатах светового конуса, в которых ненулевыми являются компоненты $\eta^{+-} = \eta^{-+} = \eta^{22} = 1$. Соответственно, гамма–матрицы имеют явный вид

$$\gamma^- = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^+ = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.119}$$

и удовлетворяют тождествам

$$\gamma^a\gamma^b = \eta^{ab} + \epsilon^{abc}\gamma_c, \qquad (\gamma_a)^\alpha{}_\beta(\gamma^a)^\rho{}_\sigma = 2\delta^\alpha_\sigma\delta^\rho_\beta - \delta^\alpha_\beta\delta^\rho_\sigma, \tag{3.120}$$

где $\epsilon^{-+2} = 1$. Сопряжение для спинора определяем соотношением $\bar\lambda_\alpha = C_{\alpha\beta}\lambda^\beta$, где матрица зарядового сопряжения имеет вид $C_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}$ вместе с $\epsilon_{12} = 1$, то есть является антисимметричной матрицей с действительными элементами, в то время как ее произведение с гамма–матрицами симметрично $(C\gamma^a)_{\alpha\beta} = (C\gamma^a)_{\beta\alpha}$.

Алгебры $su(1,2)$ и $sl(3,R)$

Коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} &[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, \qquad [L_m, W_p] = (2m-p)W_{m+p}, \\ &[W_p, W_q] = \frac{\sigma}{3}(p-q)(2p^2+2q^2-pq-8)L_{p+q}, \end{aligned} \tag{3.121}$$

где $m,n = \pm1, 0$ и $p,q = \pm2, \pm1, 0$, представляют алгебры $su(1,2)$ и $sl(3,R)$ для $\sigma = +1$ и $\sigma = -1$, соответственно. Инвариантная билинейная форма для этих алгебр имеет вид

$$\begin{aligned} &\langle L_{-1}, L_{+1}\rangle = -1, \qquad \langle L_0, L_0\rangle = \frac{1}{2}, \\ &\langle W_{-1}, W_{+1}\rangle = \sigma, \qquad \langle W_{-2}, W_{+2}\rangle = -4\sigma, \qquad \langle W_0, W_0\rangle = -\frac{2\sigma}{3} \end{aligned} \tag{3.122}$$

Подалгебра $sl(2,R)$ задана генераторами $(L_{\pm 1}, L_0)$ и такое вложение $sl(2,R)$ в алгебру $su(1,2)$ известно как главное (principal). Существует также другое вложение, которое мы будем называть побочным, и оно определяется генераторами

$$\mathcal{L}_{-1} = \frac{\sigma}{4} W_{-2}, \qquad \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} L_0, \qquad \mathcal{L}_{+1} = \frac{1}{4} W_{+2}, \tag{3.123}$$

которые задают алгебру $sl(2,R)$. Переопределив оставшиеся генераторы

$$\mathcal{I} = -\frac{1}{2} W_0, \quad \mathcal{C}^1_{+\frac{1}{2}} = \frac{\sigma}{2} L_{+1}, \quad \mathcal{C}^2_{+\frac{1}{2}} = \frac{\sigma}{2} W_{+1}, \quad \mathcal{C}^1_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} W_{-1}, \quad \mathcal{C}^2_{-\frac{1}{2}} = \frac{\sigma}{2} L_{-1}, \tag{3.124}$$

алгебра (3.121) принимает форму

$$\begin{aligned} &[\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_n] = (m-n)\mathcal{L}_{m+n}, \qquad [\mathcal{L}_m, \mathcal{C}^i_p] = \left(\frac{m}{2} - p\right) \mathcal{C}^i_{m+p} \\ &[\mathcal{C}^i_p, \mathcal{C}^j_q] = \epsilon^{ij} \mathcal{L}_{p+q} - \frac{3}{2} \eta^{ij} (p-q) \mathcal{I}, \qquad [\mathcal{I}, \mathcal{C}^i_p] = \epsilon^{ij} \mathcal{C}^j_p, \end{aligned} \tag{3.125}$$

где $\eta^{ij} = diag(\sigma, 1)$ и суммирование по индексам (i,j) ведется через эту метрику. Разница между алгебрами $sl(3,R)$ и $su(1,2)$ в том, что в $sl(3,R)$ генератор $\mathcal{I}$ ассоциирован с некомпактной подалгеброй $so(1,1)$, в то время как в $su(1,2)$ он генерирует обычные вращения $so(2)$. Для $\sigma = 1$ коммутационные соотношения (3.125), определяющие $su(1,2)$ могут быть записаны в форме (3.42) посредством переопределения генераторов

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}^- = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_{-1}, \qquad \mathcal{J}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_{+1}, \qquad \mathcal{J}^2 = \mathcal{L}_0, \\ &\mathcal{Z}^i_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{C}^i_{-\frac{1}{2}}, \qquad \mathcal{Z}^i_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{C}^i_{+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.126}$$

Лоренц–ковариантная форма расширенной l-конформной алгебры Галилея

Здесь мы приведем вид преобразований генераторов, которые задают изоморфизм между расширенной l–конформной алгеброй Галилея в нерелятивистской и релятивистской формах (для $l = 1, \frac{3}{2}$ и 2). В каждом случае переопределение генераторов конформной подалегбры имеет вид

$$\sqrt{2} J^- = -L_{-1}, \quad \sqrt{2} J^+ = L_{+1}, \quad J^2 = L_0, \tag{3.127}$$

Преобразования оставшихся генераторов заданы соотношениями:

- $l = 1$, из (3.18) в (3.19)

$$\mathcal{P}^- = -\sqrt{2}M_{-1}, \quad \mathcal{P}^+ = \sqrt{2}M_{+1}, \quad \mathcal{P}^2 = 2M_0,$$
$$Z^- = C_{-1}, \quad Z^+ = -C_{+1}, \quad Z^2 = -\sqrt{2}C_0. \tag{3.128}$$

- $l = \frac{3}{2}$, from (3.11) to (3.12)

$$\mathcal{P}^- = -\sqrt{2}M_{-1}, \qquad \mathcal{P}^+ = \sqrt{2}M_{+1}, \qquad \mathcal{P}^2 = 2M_0,$$
$$Z_1^{-,i} = C^i_{-\frac{3}{2}}, \qquad Z_2^{-,i} = C^i_{-\frac{1}{2}}, \qquad Z_1^{+,i} = -C_{+\frac{1}{2}}, \qquad Z_2^{+,i} = -C_{+\frac{3}{2}}. \tag{3.129}$$

Отметим также, что условие $(Z^{a,i}\gamma_a)^\alpha = 0$ приводит к связи $\sqrt{2}Z_1^{+,i} = Z_2^{2,i}$ и $-\sqrt{2}Z_2^{-,i} = Z_1^{2,i}$.

- $l = 2$, из (3.21) в (3.22)

$$Z^{--} = C_{-2}, \quad Z^{-+} = -C_0, \quad Z^{-2} = -\sqrt{2}C_{-1}, \quad Z^{++} = C_2, \quad Z^{+2} = \sqrt{2}C_1,$$
$$\mathcal{P}^- = -\sqrt{2}M_{-1}, \quad \mathcal{P}^+ = \sqrt{2}M_{+1}, \quad \mathcal{P}^2 = 2M_0. \tag{3.130}$$

Условие бесследовости $Z^{ab}\eta_{ab} = 0$ дает $Z^{22} = -2Z^{-+}$.

Контракция алгебры $W_{1,2}^{(2)} \oplus W_{1,2}^{(2)}$

Зная о связи расширенной алгебры Шредингера с алгеброй $su(1,2)$, естественно ожидать, что должна существовать связь между асимптотической алгеброй (3.62) и $W_{1,2}^{(2)}$. Действительно, ниже мы покажем, что контракция двух копий $W_{1,2}^{(2)}$ приводит к алгебре (3.62). Коммутационные соотношения алгебры $W_{1,2}^{(2)}$ имеют следующий вид

$$[\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_n] = (m-n)\mathcal{L}_{m+n} - \frac{\rho}{2}kn^3\delta_{m+n,0},$$
$$[\mathcal{L}_m, \mathcal{I}_n] = -n\mathcal{I}_{m+n},$$
$$[\mathcal{I}_m, \mathcal{I}_n] = \frac{2}{3}k\rho m\delta_{m+n,0},$$
$$[\mathcal{L}_m, \mathcal{C}^i_p] = \left(\frac{m}{2} - p\right)\mathcal{C}^i_{m+p},$$
$$[\mathcal{I}_m, \mathcal{C}^i_p] = -\epsilon^{ij}\mathcal{C}^j_{m+p}, \tag{3.131}$$
$$[\mathcal{C}^i_p, \mathcal{C}^j_q] = -\epsilon^{ij}\left(\mathcal{L}_{p+q} - \frac{3}{k\rho}\sum_s \mathcal{I}_{p+q-s}\mathcal{I}_s + k\rho p^2\delta_{p+q,0}\right) - \frac{3}{2}\delta^{ij}(p-q)\mathcal{I}_{p+q},$$

где ρ – параметр, пропорциональный радиусу AdS_3. Возьмем две копии этой алгебры, которые будем помечать индексами $\pm$, и определим

$$L_m = i(\mathcal{L}^+_m - \mathcal{L}^-_{-m}), \qquad M_m = \frac{1}{\rho}(\mathcal{L}^+_m + \mathcal{L}^-_{-m}), \qquad C^i_p = \sqrt{\frac{2}{\rho}}\mathcal{C}^{+,i}_p,$$
$$I_m = \mathcal{I}^+_m - \mathcal{I}^-_{-m}, \qquad N_m = \frac{2}{3}\frac{i}{\rho}(\mathcal{I}^+_m + \mathcal{I}^-_{-m}). \tag{3.132}$$

Взяв предел $\rho \to \infty$ и отбросив генераторы $C^{-,i}_p$, получим алгебру в форме (3.62), за исключением коммутаторов

$$[M_m, I_n] = \frac{2}{3} in N_{m+n}, \tag{3.133}$$
$$[C^i_p, C^j_q] = -\epsilon^{ij}\left(M_{p+q} + \frac{3}{2k}\sum_s N_{p+q-s}N_s + 2kq^2\delta_{p+q,0}\right) + i(p-q)N_{p+q}\delta^{ij}.$$

Переопределив $M_m \to M_m - \frac{3}{2k}\sum_s N_{m-s}N_s$, эти коммутационные соотношения принимают форму (3.62). Отметим, в частности, что это переопределение не меняет формы коммутатора $[L_m, M_n]$ в (3.62). Отметим также, что контракция алгебры $W_3^{(2)} \oplus W_3^{(2)}$ изучалась ранее в [131].