

A Bessel Beam Solution for Relativistic Electron Vortices

Yeong Deok HAN*

Department of Computer Science, Woosuk University, Jincheon 27841, Korea

(Received 4 November 2019 : revised 26 December 2019 : accepted 30 December 2019)

In non-relativistic electron vortex beams, the spin of an electron is treated as a degree of freedom independent from the momentum of the electron. However, for a relativistic electron described by the Dirac equation, its spin is intimately related to its momentum, as is manifested by spin-orbit coupling, helicity conservation, etc. In this paper, we construct a Bessel beam solution by superposing momentum eigen functions, whose spins are parallel to the momentum or at a constant angle with the beam axis. By introducing a Gaussian envelope function for the normalization of the wave functions, we calculate the expectation values for physical quantities such as the spin and magnetic moment. Also, the differences from the results of previous studies are discussed.

PACS numbers: 41.85.-p, 03.65.Pm

Keywords: Relativistic electron vortex beam, Bessel beam, Spin, Magnetic moment

상대론적 전자 소용돌이의 베셀 빔 해

한영덕*

우석대학교 컴퓨터공학과, 진천 27841, 대한민국

(2019년 11월 4일 받음, 2019년 12월 26일 수정본 받음, 2019년 12월 30일 게재 확정)

비상대론적 전자 소용돌이 빔에서 전자의 스핀은 운동량과 독립적인 자유도로 취급된다. 그러나 Dirac 방정식으로 기술되는 상대론적 전자의 경우 스핀-궤도 상호작용, 나선도 보존 등에서 보는 바와 같이 스핀은 운동량과 밀접한 관계가 있다. 따라서 상대론적 소용돌이 빔을 기술하는 파동함수에는 이러한 특성이 고려되어야 한다. 본 논문에서는 운동량 고유상태들을 중첩하여 Bessel 빔 해를 구하였는데, 이 때 스핀은 나선도 고유상태이거나 빔의 중심축과 일정한 각도를 이루도록 하였다. 규격화를 위한 가우시안 싸개함수를 도입하여 스핀, 자기모멘트 등의 물리량의 기대값을 구하였고 기존 연구 결과와의 차이점을 논의하였다.

PACS numbers: 41.85.-p, 03.65.Pm

Keywords: 상대론적 전자 소용돌이 빔, 베셀 빔, 스핀, 자기모멘트

I. 서론

*E-mail: ydhan@woosuk.ac.kr

각운동량을 수반하는 자유 전자 소용돌이 빔 (free electron vortex beam)에 대한 연구가 최근에 전자현미경, 양자물리학, 고입자에너지 물리 등 다양한 물리학 분야에서



점점 관심을 끌고 있다 [1-4]. 이 분야는 양자화된 궤도 각 운동량을 가지는 광학적 소용돌이 빔에 대한 연구로부터 [5,6] 파생되었다고 할 수 있다. 입자의 소용돌이 빔에 대한 선구적 연구는 Birula 등에 의해 이루어졌는데 [7-9], 이 후 Bliokh 등은 비상대론적 자유전자 소용돌이 빔을 예측하였고 [10] 이에 자극받아 여러 연구 팀에서 소용돌이 빔을 실험적으로 구현하기에 이르렀다 [11-13]. 최근의 실험에서는 전자의 에너지가 더욱 증가하여 상대론적 영역에(수백 keV) 도달하였다 [1,2]. 따라서 상대론적 효과를 바르게 고려하기 위해서는 전자의 운동의 기술에 Dirac 방정식을 사용해야 한다. Dirac 방정식은 스핀을 방정식의 구조에 자연스럽게 내재시키고 있으며 따라서 상대론적 전자 소용돌이 빔의 각운동량 특성을 바르게 이해하는 데 중요하다.

양의 에너지의 Dirac 파동함수로서 각운동량을 가지는 전자 빔을 나타내는 해를 구하기 위해 여러 가지 방법이 연구되어 왔다. Bliokh 등은 Dirac 방정식을 정확하게 만족하는 Bessel 빔 해를 운동량 고유상태인 성분파의 중첩을 통해 최초로 구하였고 [14], 양과 음의 에너지의 해가 분리되어 표현되도록하는 Foldy-Wouthuysen(FW) 변환 [15]을 이용하여 물리량의 특성을 고찰하였는데 특히 스핀-궤도 상호작용 (spin-orbit interaction)에 의하여 스핀 각운동량이 궤도 각운동량으로 얼마나 전환되는지를 구하였다. Birula 등은 Klein-Gordon(KG) 방정식의 해로부터 Dirac 방정식의 해를 얻어내는 방법을 사용하였으며 광학 등에서 개발된 기존의 KG 소용돌이 해들을 활용하였다 [16]. Barnett은 FW 변환을 한 뒤 빔을 구성하는 운동량 성분들의 방향이 거의 평행하다고 가정하는 근축(para-axial) 근사를 사용하여 해를 구하였다 [17].

일반적으로 파동함수는 여러가지 운동량과 스핀을 갖는 성분파의 중첩으로 표시된다. 그런데 위의 연구들에서 논의된 파동함수들은 스핀을 운동량에 의존하지 않는 상수로 간주하고 운동량 성분들을 중첩하여 얻은 것들이다. [14]에서는 스핀 상태를 상수로 두고 운동량에 대해 중첩하였으며, [16]에서는 KG 해를 스피너의 한 성분에 대입하는데 이 것이 스핀을 특정 값으로 두는 것에 해당하기 때문이다. [17]의 경우도 FW 변환된 방정식에서 파동함수를 구하는데 이 때 스핀은 상수 취급을 하고 있다.

비상대론적 경우는 운동량과 스핀을 독립적으로 취급하는 것이 가능하기 때문에 실제 빔을 나타내는 데 운동량과 상관없이 스핀을 일정하게 두는 위와 같은 기술 방식이 적절하다고 할 수 있다. 그러나 전자의 속도가 상대론적이 되면 입자가 운동하는 계에서 본 스핀은 일반적으로 입자 정지계에서 본 스핀(rest spin)과 다르게 된다. 상대론적인 경우 입자의 스핀의 기술에는 스핀의 방향이 운동량 \mathbf{p} 의 방향과 평행을 이루는 나선도(helicity) 고유상태를 기저(basis)로

사용하는 것이 편리하다. 운동량 \mathbf{p} 인 전자의 나선도 고유상태 즉, $\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\Sigma}$ 의 고유상태는 정지계에서의 $\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\Sigma}$ 의 스핀 고유상태(rest spin)를 운동량 \mathbf{p} 가 되도록 로렌츠 부스트(boost)를 가하여 만들 수 있다. 여기서 $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma})$ 이며 $\boldsymbol{\sigma}$ 는 2×2 파울리 행렬이다. 또한 나선도 고유상태의 전자는 극상대론적(ultrarelativistic) 영역에서 전자기 상호작용 등에 의한 산란 후에도 나선도 고유상태를 유지하는 특성이 있다(helicity conservation) [18]. 따라서 빔의 소스로 나선도 고유상태의 고에너지 전자를 사용하였다면 회절 격자 같은 장치를 이용하여 빔을 만들었을 때 빔의 각 성분파는 나선도 고유상태를 유지하고 있다고 볼 수 있다.

따라서 본 논문에서는 각 성분파의 스핀이 나선도 고유상태인 경우의 Bessel 빔을 성분파 중첩에 의해 구한다. 또한 빔 전체의 스핀이 성분파의 스핀의 방향에 따라 어떻게 변화하는가를 알아보기 위해 성분파의 정지계에서의 스핀(rest spin)의 방향을 운동량과 평행한 경우를 포함하여 운동량의 방향과 일정한 각도를 가지는 것으로 일반화 한다. 한편 구한 Bessel 빔 파동함수는 규격화가 불가능하여 물리량들의 기대값을 구하기가 곤란하다. 여기서는 가우시안(Gaussian) 싸개함수(envelope function)를 도입하는 방법으로 물리량들의 기대값을 구하고 기존 연구에서 얻어진 결과와의 차이점을 논의한다.

II. 중첩에 의한 Bessel 빔 해

자유 공간에서의 질량 m 인 입자의 Dirac 방정식은 다음과 같다($\hbar = 1, c = 1$).

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi = (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi \quad (1)$$

여기서 $H = -i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m$ 는 Dirac 해밀토니안이고, α, β 는 4×4 Dirac 행렬들이며 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 은 4개의 성분을 갖는 Dirac 파동함수이다. 방정식 (1)의 운동량 \mathbf{p} , 양의 에너지 $E = +\sqrt{p^2 + m^2}$ 를 갖는 해는 다음과 같다.

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) = W(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)}, \quad (2)$$

$$W(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{bmatrix} w \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E+m} w \end{bmatrix} \quad (3)$$

위에서 $w = (a, b)^T$ ($w^\dagger w = 1$)는 양의 에너지 입자의 정지계에서 본 2성분의 스핀(rest spin) 상태를 의미하며, $W^\dagger W = 1$ 이다. 잘 알려진 바와 같이 Dirac 해밀토니안 H 에 대해 궤도각운동량 \mathbf{L} 과 스핀 $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}$ 는 $[H, \mathbf{L}] \neq 0$, $[H, \mathbf{S}] \neq 0$ 이므로 보존되지 않는다. 그러나 총 각운동량 $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ 에 대해서는 $[H, \mathbf{J}] = 0$ 이고 따라서 \mathbf{J} 는 보존된다.

운동량 벡터를 극 좌표계를 도입하여 (p, θ, ϕ) 로 표시하자. 일반적으로 Dirac 방정식 (1)을 만족하는 임의의 파동함수는 위의 (2)의 상태들의 중첩으로 표시된다. Bessel 빔은 운동량 벡터를 원뿔 모양으로 분포시켜 중첩할 때만 들어진다 [1,2]. 즉 단일 에너지 ($|\mathbf{p}| = p$ 상수)이고 운동량 벡터의 방향이 빔의 방향(z 축)과 일정한 각도 $\theta = \theta_0$ ($0 \leq \theta_0 < \pi/2$)를 이루며 원뿔 모양인, 즉 $p_x = p \sin \theta_0 \cos \phi$, $p_y = p \sin \theta_0 \sin \phi$, $p_z = p \cos \theta_0$ ($0 \leq \phi < 2\pi$)인 운동량 고유상태들을 중첩하여 만들어진다. 이 때 z 축에 대한 각 운동량을 가지는 비상대론적 Bessel빔을 형성할 때와 같이 위상 $e^{i\ell\phi}$ ($\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)를 곱하여 중첩하자.

$$\begin{aligned}\psi_\ell(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\ell\phi} \psi_{\mathbf{p},s} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E+m}{2m}} e^{ip_z z} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} e^{i\ell\phi + i(p_x x + p_y y)} \left(\frac{w}{E+m} \right) d\phi \quad (4)\end{aligned}$$

(4)에서 $w = (a, b)^T$ 가 일정한 상수인 경우는 [14]에서 구한 Bessel 빔이 얻어진다.

이제 서론에서 설명한 바와 같이 성분파의 스핀의 상태 $W(\mathbf{p})$ 가 나선도 고유상태인 경우를 고려하자. 이를 위해서는 정지계에서의 스핀 w 가 $\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ 의 고유값 ± 1 인 고유상태 즉 $w = (\cos \frac{\theta_0}{2}, e^{i\phi} \sin \frac{\theta_0}{2})^T$ 또는 $(-\sin \frac{\theta_0}{2}, e^{i\phi} \cos \frac{\theta_0}{2})^T$ 이면 된다. 한편 빔 전체의 스핀이 w 의 방향에 어떻게 의존하는지를 알아보기 위해 w 의 방향이 z 축과 θ_s 의 각도를 이룬다고 일반화하면 w 는 다음과 같다.

$$w(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_s}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta_s}{2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

여기서 w 의 위상은 임의로 잡을 수 있으나 빔의 회전대칭성을 고려하여 $\phi = 0, 2\pi$ 에서 불연속이 되지 않도록 하였다. 나선도 고유값 ± 1 의 고유상태는 $\theta_s = \theta_0$ 또는 $\theta_0 + \pi$ 인 경우에 해당한다.

이 때 (4)의 적분은 Bessel 함수에 대한 $J_n(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(in\phi + x \sin \phi) d\phi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 공식을 이용하여 계산할 수 있다. 공간의 좌표를 원통형 좌표계 (r, φ, z) (단, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$)로 표시할 때 그 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\psi_\ell(r, \varphi, z, t) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} e^{-iEt} e^{ip_{\parallel} z} \times \\ &\quad \left[\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_s}{2} \\ 0 \\ \frac{p}{E_+} \cos \frac{\Theta_s}{2} \\ 0 \end{pmatrix} i^\ell e^{i\ell\varphi} J_\ell(p_{\perp} r) + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \frac{\theta_s}{2} \\ 0 \\ \frac{p}{E_+} \sin \frac{\Theta_s}{2} \end{pmatrix} i^{\ell+1} e^{i(\ell+1)\varphi} J_{\ell+1}(p_{\perp} r) \right] \quad (6)\end{aligned}$$

여기서 $p_{\parallel} \equiv p_z = p \cos \theta_0$ 는 운동량의 빔 방향의 성분, $p_{\perp} \equiv p \sin \theta_0$ 는 빔에 수직인 방향의 성분을 나타내며, $E_{\pm} \equiv E \pm m$, $\Theta_s \equiv 2\theta_0 - \theta_s$ 로 표시하였다.

해 (6)을 보면 [14]의 해와 유사한 형태이면서도 다른 특징을 가지고 있다. 먼저 [14]의 해는 임의의 스핀 방향의 경우 3개의 Bessel 함수 $J_\ell, J_{\ell\pm 1}$ 로 표현되며 스핀 w 의 방향이 $+\hat{\mathbf{z}}$ (또는 $-\hat{\mathbf{z}}$)인 경우에만 2개의 Bessel 함수 $J_\ell, J_{\ell+1}$ (또는 $J_{\ell-1}, J_\ell$)로 표현된다. 그러나 (6)에서는 스핀의 방향과 무관하게 항상 2개의 Bessel 함수 $J_\ell, J_{\ell+1}$ 로 표현되는 점이 특이하다고 할 수 있다. 이렇게 되는 이유는 w 의 정의에 $e^{i\varphi}$ 가 포함되어 ℓ 값을 증가시키기 때문이다. 한편 (6)의 해와 [14]의 해는 운동량 상태의 중첩 시 2차원 공간인 스핀 상태를 다르게 잡았을 뿐이므로 서로 독립적인 것은 아니다. [14]에서 각운동량 계수 ℓ , z 방향 스핀 $s = \pm \frac{1}{2}$ 에 해당하는 해를 각각 $\psi_{\ell\uparrow}^B, \psi_{\ell\downarrow}^B$ 로 표시하면 (6)의 ψ_ℓ 과는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\psi_\ell = \eta \left(\cos \frac{\theta_s}{2} \psi_{\ell\uparrow}^B + i \sin \frac{\theta_s}{2} \psi_{\ell+1\downarrow}^B \right) \quad (7)$$

여기서 $\eta = i^\ell \frac{E}{m}$ 는 규격화의 차이에 따른 상수이다. (7)에서 우변의 두 항의 인덱스가 ℓ 과 $\ell+1$ 로 다름을 볼 수 있으며, $\theta_s = 0, \pi$ 인 경우 ψ_ℓ 은 각각 $\psi_{\ell\uparrow}^B, \psi_{\ell+1\downarrow}^B$ 에 대응된다.

$$\psi_\ell = \eta \psi_{\ell\uparrow}^B \quad (\theta_s = 0), \quad \psi_\ell = i\eta \psi_{\ell+1\downarrow}^B \quad (\theta_s = \pi) \quad (8)$$

한편 해 (6)은 $\int \psi_\ell^\dagger \psi_\ell d^3x = \infty$ 으로 규격화가 불가능하다. 이로 인해 빔 전체에 대한 기대값 등이 수학적으로 잘 정의되지 않는다. 그러나 3절에서와 같이 파동함수에 적당한 가우시안(Gaussian) 싸개함수를 곱하여 규격화하고 기대값을 계산한 뒤 이 함수를 1로 접근시키는 방법으로 기대값 계산이 가능하다.

III. Bessel 빔의 물리적 특성 및 물리량의 기대값

Bessel빔의 물리적 특성 - 여기서는 해의 물리적 특성들을 살펴보자. (6)은 연산자 $J_z = L_z + S_z$ 의 고유상태가 됨을 쉽게 알 수 있는데 고유값은 $\ell + \frac{1}{2}$ 이며 스핀의 방향 θ_s 와 무관하다.

$$J_z \psi_\ell = \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \psi_\ell \quad (9)$$

(고유값이 $\ell + \frac{1}{2}$ 인 것은 w 의 위상을 (5)와 같이 택했기 때문이며, 만약 $w(\phi) = (e^{-i\phi} \cos \frac{1}{2}\theta_s, \sin \frac{1}{2}\theta_s)^T$ 과 같이 택한다면 고유값은 $\ell - \frac{1}{2}$ 이 될 것이다.)

해(6)의 확률밀도, 흐름밀도 및 궤도각운동량, 스핀 그리고 자기모멘트의 밀도를 살펴보자. 밀도 $\rho = \psi_\ell^\dagger \psi_\ell$ 와 흐름밀도 $\mathbf{j} = \psi_\ell^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi_\ell$ 는 다음과 같다.

$$\rho = \frac{E_+}{2E} \left\{ \left(\cos^2 \frac{\theta_s}{2} + \frac{E_-}{E_+} \cos^2 \frac{\Theta_s}{2} \right) J_\ell^2(p_\perp r) + \left(\sin^2 \frac{\theta_s}{2} + \frac{E_-}{E_+} \sin^2 \frac{\Theta_s}{2} \right) J_{\ell+1}^2(p_\perp r) \right\} \quad (10)$$

$$j_x = -\frac{p_\perp}{E} \sin \varphi J_\ell(p_\perp r) J_{\ell+1}(p_\perp r) \quad (11)$$

$$j_y = \frac{p_\perp}{E} \cos \varphi J_\ell(p_\perp r) J_{\ell+1}(p_\perp r) \quad (12)$$

$$j_z = \frac{p}{E} \left\{ \cos \frac{\theta_s}{2} \cos \frac{\Theta_s}{2} J_\ell^2(p_\perp r) - \sin \frac{\theta_s}{2} \sin \frac{\Theta_s}{2} J_{\ell+1}^2(p_\perp r) \right\} \quad (13)$$

(10) ~ (13)에서 ρ 와 j_z 는 스핀의 방향 θ_s 에 의존하나 j_x , j_y 는 의존하지 않는다.

궤도각운동량 밀도 $\mathcal{L} \equiv \psi_\ell^\dagger \mathbf{L} \psi_\ell$ 와 스핀 밀도 $\mathcal{S} \equiv \frac{1}{2} \psi_\ell^\dagger \boldsymbol{\Sigma} \psi_\ell$ 는 원통형 대칭성 때문에 z 성분만 살펴보면 충분하다. 다음과 같으며 θ_s 에 의존한다.

$$\mathcal{L}_z = \frac{E_+}{2E} \left\{ \left(\cos^2 \frac{\theta_s}{2} + \frac{E_-}{E_+} \cos^2 \frac{\Theta_s}{2} \right) \ell J_\ell^2(p_\perp r) + \left(\sin^2 \frac{\theta_s}{2} + \frac{E_-}{E_+} \sin^2 \frac{\Theta_s}{2} \right) (\ell+1) J_{\ell+1}^2(p_\perp r) \right\} \quad (14)$$

$$\mathcal{S}_z = \frac{E_+}{4E} \left\{ \left(\cos^2 \frac{\theta_s}{2} + \frac{E_-}{E_+} \cos^2 \frac{\Theta_s}{2} \right) J_\ell^2(p_\perp r) - \left(\sin^2 \frac{\theta_s}{2} + \frac{E_-}{E_+} \sin^2 \frac{\Theta_s}{2} \right) J_{\ell+1}^2(p_\perp r) \right\} \quad (15)$$

자기 모멘트 밀도는 $\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2} \psi_\ell^\dagger \mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha} \psi_\ell$ 이며, e 는 전자의 전하이다. 그 중 z 성분은 다음과 같으며 (11), (12)을 이용하여 구할 수 있다. 스핀의 방향 θ_s 에 의존하지 않음을 볼 수 있다.

$$\mu_z = \frac{e}{2} (x j_y - y j_x) = \frac{e}{2E} p_\perp r J_\ell(p_\perp r) J_{\ell+1}(p_\perp r) \quad (16)$$

물리량의 기대값 계산 방법 - 해 (6)은 $\hat{\mathbf{z}}$ 방향으로 길이가 무한대인 빔을 나타내므로 규격화가 불가능하고 따라서 기대값을 계산하기 곤란하다. 그러나 확률밀도 등 물리량들이 z 에 의존하지 않으므로 빔의 $\hat{\mathbf{z}}$ 방향으로의 단위길이 부분에 대한 기대값을 생각할 수 있다. 이는 z 값을 고정한 2차원 (r, φ) 평면 위에서의 기대값을 고려하는 것과 같다. 즉 빔의 단위 길이에 대한 물리량 Q 의 기대값은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\langle Q \rangle = \frac{\int \psi^\dagger Q \psi r d\varphi dr}{\int \psi^\dagger \psi r d\varphi dr} \quad (17)$$

그러나 r 이 큰 영역에서 $J_\ell(r)$ 이 0으로 수렴하는 속도가 느려 분모와 분자의 적분이 모두 발산하므로 역시 기대값

계산이 곤란하다. r 이 큰 영역에서 파동함수가 0으로 보다 빨리 수렴할 수 있도록 가우시안 싸개 함수를 곱하여 파동함수를 변형하자.

$$\tilde{\psi} = e^{-\frac{1}{2} a^2 r^2} \psi \quad (18)$$

실제 실험실의 Bessel 빔은 유한한 크기의 공간에서만 0이 아닐 것이므로 $\tilde{\psi}$ 는 물리적 Bessel 빔을 근사적으로 나타낸다고 할 수 있다. 파동함수 $\tilde{\psi}$ 를 사용했을 때 (17)의 기대값은 분자와 분모가 모두 유한한 값이 되어 잘 정의된다. 이를 $\langle Q \rangle_a$ 라 하자. 이제 $a \rightarrow 0$ 이면 $\tilde{\psi} \rightarrow \psi$ 이므로 이 때 $\langle Q \rangle_a$ 의 극한값으로 기대값 $\langle Q \rangle$ 를 정의할 수 있다. $\langle Q \rangle_a$ 의 계산 과정에서 나타나는 $\int_0^\infty x e^{-a^2 x^2} J_n(x) J_n(x) dx$ 와 $\int_0^\infty x^2 e^{-a^2 x^2} J_n(x) J_{n+1}(x) dx$ 적분은 [19]의 공식 6.633.2와 6.633.5를 이용하여 구할 수 있다.

스핀 및 자기모멘트의 기대값 - 위의 방법을 적용하여 스핀 S_z 의 기대값을 구한 결과는 다음과 같다.

$$\langle S_z \rangle = \frac{E_+}{4E} \left\{ \cos \theta_s + \frac{E_-}{E_+} \cos(2\theta_0 - \theta_s) \right\} \quad (19)$$

스핀 S_z 의 기대값은 ℓ 과는 무관하고 성분파의 운동량 방향 θ_0 와 정지상태 스핀 방향 θ_s 에 의존함을 알 수 있다. 성분파가 나선도 고유상태인 경우는 w 가 $\pm \hat{\mathbf{p}}$ 방향인 $\theta_s = \theta_0, \theta_0 + \pi$ 인 경우이며 기대값은 $\pm \frac{1}{2} \cos \theta_0$ 이다. 비상대론적 극한에서는 $E/m \approx 1$ 이므로 $\langle S_z \rangle \approx \frac{1}{2} \cos \theta_s$ 가 되는데 이는 정지상태에서의 기대값과 같으며 스핀이 운동량의 영향을 거의 받지 않음을 보여준다. 한편 $\theta_s = 0, \pi$ 인 경우는 [14]에서 스핀 w 를 $\pm \hat{\mathbf{z}}$ 방향으로 놓았을 때에 해당 되는데, $\langle S_z \rangle = \pm \frac{1}{2} (1 - \frac{E_-}{E} \sin^2 \theta_0)$ 가 되며 [14]의 결과와 일치한다. 각운동량 L_z 의 기대값은 (9)로부터 $\langle L_z \rangle = \ell + \frac{1}{2} - \langle S_z \rangle$ 로 주어진다.

(19)의 기대값 $\langle S_z \rangle$ 가 가질 수 있는 최대값을 알아보자. 최대값(최소값)일 때의 θ_s 는 $\frac{\partial}{\partial \theta_s} \langle S_z \rangle = 0$ 으로부터 다음과 같이 정해진다.

$$\tan \theta_s = \frac{\frac{E_-}{E_+} \sin(2\theta_0)}{1 + \frac{E_-}{E_+} \cos(2\theta_0)} \quad (20)$$

위 식을 만족하는 θ_s 값은 2개 있으며 최대값은 다음과 같다. (최소값은 $\theta_s + \pi$ 일 때로 $-\langle S_z \rangle_{max}$ 이다.)

$$\langle S_z \rangle_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2}{E^2} \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0} \quad (21)$$

Figure 1에 (20)와 (21)을 그래프로 나타내었다. 비상대론적($E/m \approx 1$)일 때 $\langle S_z \rangle$ 의 값이 최대가 되기 위한 θ_s 는 $\theta_s \approx 0$ 즉 θ_0 와 무관하게 $\hat{\mathbf{z}}$ 방향임을 볼 수 있으며, 이 때 $\langle S_z \rangle_{max} \approx \frac{1}{2}$ 이다. 상대론적 극한($E/m \rightarrow \infty$)일

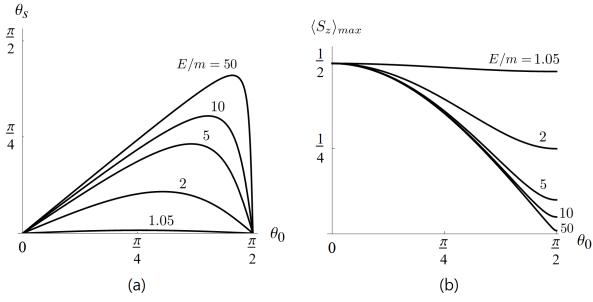


Fig. 1. For the Bessel beams with energies: $E/m = 1.05, 2, 5, 10, 50$, (a) Spin direction θ_s that maximizes $\langle S_z \rangle$ are plotted vs. momentum direction angle θ_0 . (b) Maximum $\langle S_z \rangle$ values are plotted vs. momentum direction angle θ_0 .

때 $\langle S_z \rangle$ 의 값이 최대가 되는 것은 $\theta_s \approx \theta_0$ 즉 스핀이 운동량과 평행한 나선도 고유상태일 때임을 볼 수 있고, 이 때 $\langle S_z \rangle_{max} \approx \frac{1}{2} \cos \theta_0$ 이다. 한편 [14]에서처럼 스핀을 운동량과 무관하게 $\pm \hat{z}$ 방향으로 잡았을 때는 상대론적 극한일 때 $\langle S_z \rangle$ 의 최대값이 약 $\frac{1}{2} \cos^2 \theta_0$ 으로 오히려 이보다 작은 값이다.

(16)의 자기모멘트 밀도의 기대값을 구한 결과는 다음과 같다.

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{e}{2E} \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \quad (22)$$

자기모멘트의 기대값은 J_z 의 고유값 $\ell + \frac{1}{2}$ 에 비례함을 알 수 있다. 또한 θ_s 에 의존하지 않는데 이는 (11), (12)의 j_x 와 j_y 가 θ_s 에 의존하지 않는데서 비롯된 결과이다.

IV. 결과 및 논의

나선도 고유상태인 극상대론적 전자에 전자기 상호작용을 가하여 만들어진 빔에서 각각의 성분파는 나선도 고유상태를 유지(helicity conservation)하고 있다고 볼 수 있다. 본 연구에서는 이러한 특성을 반영하여 스핀이 나선도 고유상태인 성분파의 중첩을 통해 Bessel 빔을 형성하였다. 성분파의 운동량과 스핀의 방향을 빔의 중심축과 각각 일정한 각도를 이루며 원뿔 모양이 되게 분포시키고 궤도각운동량을 위한 위상을 추가하였다. 성분파의 스핀의 방향을 운동량의 방향과 다를 수 있게 한 것은 전체 빔의 스핀 기대값에 미치는 영향을 알아보기 위한 것이다. 구한 해 (6)은 두 개의 Bessel 함수로 표시되며 성분파의 스핀의 각도에 무관하게 총 각운동량 연산자 J_z 의 고유값 $\ell + \frac{1}{2}$ 인 고유상태가 되는 특징이 있다. 규격화가 불가능한 이 해로부터 물리량의 기대값을 구하기 위해 규격화를 위한 가우시안 싸개 함수를 해에 곱하여 기대값을 계산한 뒤 싸개 함수를 1로 접근하게 하는 방법을 사용하였다.

빔 방향 스핀의 기대값 $\langle S_z \rangle$ 를 구한 결과 비상대론적 극한에서는 운동량과 무관하게 성분파의 정지상태 스핀 w 의 기대값과 동일하며 따라서 $\langle S_z \rangle$ 의 최대값은 w 가 \hat{z} 방향일 때 얻어진다. 상대론적 극한일 때는 w 의 방향이 운동량 방향일 때 즉 나선도 상태일 때 기대값이 최대가 된다. 자기모멘트의 기대값 $\langle \mu_z \rangle$ 를 구한 결과 w 의 방향과 무관하며 총 각운동량 J_z 의 고유값 $\ell + \frac{1}{2}$ 에 비례하는 것으로 나타났다.

(6)의 해는 [14]와 비교할 때 정지계의 스핀 w 만 다르게 잡은 것이므로 일반적으로는 (7)과 같이 [14]의 해들의 중첩으로 표현된다. 스핀 w 의 방향이 $\pm \hat{z}$ 즉 $\theta_s = 0, \pi$ 인 경우는 (8)에 나타난 것처럼 [14]의 해와 동일해진다. 따라서 이 동일한 해에 대해서는 물리량들의 기대값을 [14]의 결과와 비교해 볼 수 있다.

빔의 스핀 기대값 $\langle S_z \rangle$ 는 앞서 보았듯이 [14]의 결과와 일치한다. 그러나, 자기모멘트 $\langle \mu_z \rangle$ 의 기대값 (22)은 [14]의 결과인

$$\langle \mu_z^B \rangle = \frac{e}{2E} (\ell + 2s - \Delta s), \quad (s = \pm \frac{1}{2}, \Delta = \frac{E_-}{E} \sin^2 \theta_0) \quad (23)$$

와 일치하지 않는다. 예를 들어 (8)의 파동함수 $\psi_{\ell, \theta_s=0} = \psi_{\ell\uparrow}^B$ 에 대해 (22)과 (23)에 의한 기대값을 비교해 보면 $\frac{e}{2E} (\ell + \frac{1}{2}) \neq \frac{e}{2E} (\ell + 1 - \frac{\Delta}{2})$ 로 일치하지 않는다.

기대값에 차이가 나는 이유에 대해서는 좀 더 논의가 필요할 것으로 보인다. 먼저 자기모멘트 밀도 μ_z 는 (16)과 같이 흐름밀도 j_x, j_y 로 정해지므로 동일한 흐름밀도를 주는 상태를 살펴보자. 다음의 두 상태 $\psi_{\ell, \theta_s=0} = \psi_{\ell\uparrow}^B$ 와 $\psi_{\ell, \theta_s=\pi} = \psi_{\ell+1\downarrow}^B$ 에 대해 j_x, j_y 를 계산해 보면 동일하게 나타난다. 따라서 물리적으로 볼 때 이들로부터 얻어지는 자기모멘트 기대값 $\langle \mu_z \rangle$ 도 동일할 것으로 예상된다. 본 논문의 (22)는 이러한 결과를 보여주고 있다. 그러나 (23)의 $\langle \mu_z^B \rangle$ 는 동일한 값을 주지 않는다.

이러한 기대값 계산 결과상의 차이는 규격화 불가능한 파동함수로부터 기대값을 얻어내는 수학적 과정상의 차이에서 발생한다고 생각된다. [14]에서는 먼저 FW 변환으로 연산자와 파동함수를 변환한 뒤 양의 에너지 파동함수 공간으로의 투영을 통해 연산자를 재정의하여 기대값을 구하였다. 본 논문에서는 양의 에너지의 파동함수를 사용하였는데, 기대값 계산에 양의 에너지의 파동함수만 사용한다면 투영에 의한 파동함수의 변화는 없고, 연산자가 작용하는 대상 공간도 자동적으로 양의 에너지의 파동함수의 공간으로 한정되기 때문에 같은 효과를 가진다. 즉 재정의로 인한 차이는 없다고 할 수 있다.

한편, FW 변환은 유니타리(unitary) 변환인데 [15]의 eq.(20)에서 보듯이 비국소적 변환이다. 즉 FW 변환된 파동함수의 한 점에서의 값은 그 점 주변의 점들에서의 변

환전 파동함수 값들로부터 얻어진다 [15]. 다시 말해 FW 변환 하에서 파동함수의 값들은 공간상에서 주변으로 퍼져 위치의 변동과 같은 효과를 준다고 볼 수 있다. Bessel 빔에 대한 기대값 계산 과정에는 무한한 영역에 대한 적분값을 구하는 과정이 있는데 이는 무한급수의 합을 구해나가는 것으로 볼 수 있다. 여기에 FW 변환을 적용하는 것은 누적되는 항들의 순서를 바꾸는 것으로 볼 수 있다. 항들의 부호가 교대로 나타나는 수열같은 경우에는 항들의 재배치 (rearrangement)에 의해 극한값이 달라질 수 있는데 [20], (16)의 μ_z 의 함수 모양을 보면 $rJ_\ell(p_\perp r)J_{\ell+1}(p_\perp r)$ 로서 r 이 증가함에 따라 양의 값과 음의 값이 교대로 나타나고 있다. 따라서 FW 변환을 가함으로써 기대값에 차이가 생긴 것으로 추정되는데, FW 변환의 문제이기 보다는 현실에 존재할 수 없는 무한한 공간 위의 이상적인 Bessel 빔을 다루는데서 온 문제라고 생각된다. 실제 실험실에서 만들어지는 유한한 공간 위의 근사적 Bessel 빔에 대해서는 FW 변환이 사용되더라도 이러한 문제가 없을 것이다.

감사의 글

본 연구는 우석대학교 학술연구비 지원에 의해 이루어졌습니다.

REFERENCES

- [1] K. Y. Bliokh *et al.*, *Phys. Rep.* **690**, 24 (2017).
- [2] S. M. Lloyd, M. Babiker, G. Thirunavukkarasu and J. Yuan, *Rev. Mod. Phys.* **89**, 035004 (2017).
- [3] T. D. Lee, S. -R. Ryu, Y. C. Kim and I. T. Han, *New Phys.: Sae Mulli* **65**, 234 (2015).
- [4] S. K. Nam, T. H. Kim, *New Phys.: Sae Mulli* **68**, 1162 (2018).
- [5] L. Allen, S. M. Barnett and M. J. Padgett, *Optical Angular Momentum*(Institute of Physics Publishing, Bristol, 2003).
- [6] D. L. Andrews, M. Babiker, *The Angular Momentum of Light* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).
- [7] I. Bialynicki-Birula and Z. Bialynicka-Birula, *Phys. Rev. A* **65**, 014101 (2001).
- [8] I. Bialynicki-Birula, Z. Bialynicka-Birula and C. Śliwa (2000), *Phys. Rev. A* **61**, 032110 (2000).
- [9] I. Bialynicki-Birula, T. Młoduchowski, T. Radozycki and C. Śliwa (2001), *Acta Physica Polonica A* **100** (Supplement), 29–41 (2001).
- [10] K. Y. Bliokh, Y. P. Bliokh, S. Savel'ev and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 190404 (2007).
- [11] M. Uchida and A. Tonomura, *Nature (London)* **464**, 737 (2010).
- [12] J. Verbeeck, H. Tian, and P. Schattschneider, *Nature (London)* **467**, 301 (2010).
- [13] B. J. McMorran, A. Agrawal, I. M. Anderson, A. A. Herzing, H. J. Lezec *et al.*, *Science* **331**, 192 (2011).
- [14] K. Y. Bliokh, M. R. Dennis and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 174802 (2011).
- [15] L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, *Phys. Rev.* **78**, 29 (1950).
- [16] I. Bialynicki-Birula and Z. Bialynicka-Birula, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 114801 (2017).
- [17] S. M. Barnett, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 114802 (2017).
- [18] D. H. Perkins, *Introduction to High Energy Physics(4th)* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000). p. 20.
- [19] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products(8th)* (Academic Press, Amsterdam, 2015).
- [20] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis(3rd)* (McGraw-Hill, New York, 1976). p. 76.