



EDUCACIÓN **CON**
RESPONSABILIDAD
SOCIAL

Facultad de Ciencias

Construcción de la cuña causal en el espacio-tiempo Shchwarzschild-AdS₄₊₁

Tesis que para obtener el título de licenciado en física

Presenta:

Diego Allan Reyna Rodríguez

No. de cuenta: 2013-7780

Asesor:

Dra. Elena Caceres

Colima, Col. Mayo del 2017

Agradecimientos

A mis padres, por la confianza y el apoyo incondicional en esta aventura. A mis profesores, particularmente a César Terrero, Elena Cáceres, Paolo Amore y Alfredo Aranda por los consejos, los regaños, y por no haber desistido de mí... Gracias.

Índice

1. Introducción	4
2. Revisión de la correspondencia AdS/CFT	6
2.1. Espacio anti-de Sitter y sus simetrías	6
2.2. Variables en la SYM y en el bulto	8
2.3. Grados de libertad y los límites UV-IR	10
2.3.1. Dp-branas	10
3. La métrica de Schwarzschild	13
3.1. La constante r_h y geodésicas de Schwarzschild	18
3.1.1. Geodésicas Radiales	18
3.2. Schwarzschild, la solución del agujero negro	22
3.2.1. El radio de Schwarzschild r_s	22
3.2.2. Coordenadas y Singularidades	23
3.2.3. Coordenadas Eddington-Finkelstein	24
3.2.4. Coordenadas de Kruskal	26
3.2.5. Diagrama conforme	30
3.2.6. Solución en más dimensiones	31
3.3. Distribución uniforme de cargas	32
4. Agujeros negros en AdS	36
4.1. Propiedades termodinámicas de agujeros negros	36
4.1.1. Solución de Schwarzschild	36
4.1.2. Agujero negro en una caja	37
4.2. Solución Schwarzschild-AdS	38
4.2.1. Diagrama Conforme	40
4.2.2. Al fin, el agujero negro en AdS	41
5. Causalidad	44
5.1. Definiciones, resultados básicos y la Cuña Causal	44
5.1.1. Dominio de Influencia	45
5.1.2. Dominio de Dependencia	46
5.1.3. Cuña Causal	48

6. Cuña Causal en Schwarzschild-AdS	50
6.1. Shwarzschild-AdS ₄₊₁ en coordenadas globales	50
6.2. Geodésicas Nulas	51
6.3. Caracterización de las Geodésicas	54
6.4. Construcción	56
6.5. Procedimiento	57
6.6. Resultados	59
6.7. Conclusiones	62
Apéndices	63
A. Diagramas Conformes	63
A.1. Transformaciones Conformes	63
A.2. Diagrama Conforme para el espaciotiempo de Minkowski	64
Referencias	68

1. Introducción

La correspondencia AdS/CFT es una realización del principio holográfico que provee un marco teórico preciso con el cual podemos mapear propiedades de una teoría de campos conforme en un espacio de dimensión d a una teoría de gravedad en un espacio anti-de Sitter de dimensión D (donde $D > d$). Han pasado casi 20 años desde el descubrimiento de la correspondencia AdS/CFT por Juan Maldacena [20] y los esfuerzos por develar el diccionario que nos permite hacer este mapeo han sido fructíferos. Sin embargo, aún no se sabe exactamente cómo funciona este mapeo. La respuesta a esta pregunta nos permitiría entender los fundamentos del principio holográfico y esto contribuiría a la búsqueda del entendimiento de gravedad cuántica.

Una de las líneas de trabajo en esta dirección ha sido tratar de comprender cómo es que el espacio-tiempo de mayor dimensión emerge de la teoría de campos en menor dimensión. Dado que el espacio donde vive la teoría cuántica es el mismo espacio de la frontera de AdS, es común referirnos al espacio de menor dimensión como la “frontera” y a AdS (el espacio de mayor dimensión) como el “bulto”. Entonces la pregunta es ¿cómo es que la teoría cuántica de campos en la frontera contiene la información sobre el espacio-tiempo en el bulto? Para entenderlo, uno se puede preguntar qué tanto del bulto se puede reconstruir conociendo solo una región \mathcal{A} de la frontera [7]. No se conoce la respuesta a esta pregunta pero una posibilidad es asociar una región \mathcal{A} en la frontera a una parte del bulto que este relacionada con \mathcal{A} solo por relaciones causales, esta región del bulto es la llamada cuña causal $\blacklozenge_{\mathcal{A}}$. Una manera intuitiva de entender la cuña causal es preguntándose: ¿si disparo luz hacia el bulto desde el diamante causal asociado a una región \mathcal{A} en la frontera, qué región del bulto puedo cubrir? A esta región es a la que llamamos cuña causal. A la cuña causal le podemos asociar una superficie especial llamada superficie de holográfica causal, el área de esta superficie es una medida de la información contenida en la cuña causal, y es por esto que se le denomina como información holográfica causal $\chi_{\mathcal{A}}$ [18].

El estudio de cuñas causales es interesante porque al ser definido por relaciones puramente causales se espera que juegue un papel importante en la teoría de campos en la frontera. Además, sus propiedades geométricas son no triviales: en particular se sabe que puede tener partes desconectadas. En el lado de gravedad,

se puede estudiar para qué valores de los parámetros sucede la transición entre cuña causal conexa y desconexa [19].

El objetivo de la presente tesis es entender la cuña causal en un espacio tiempo Schwarzschild-AdS en 4+1 dimensiones y reproducir los resultados en [19]. En particular queremos estudiar (dado un radio del horizonte) ¿cuál es el tamaño crítico en la frontera para el cual la cuña causal se vuelve desconexa? Esto debe ser dual a una transición de fase en la teoría de campos. Pero ya que el dual de la cuña causal no está establecido, el estudio de la transición de fase en la teoría de campos está fuera del alcance del presente trabajo. Para poder definir y motivar la cuña causal primero revisaremos brevemente qué es la correspondencia AdS/CFT y propiedades de agujeros negros en AdS. Luego definiremos los conceptos necesarios para motivar y construir la cuña causal. Después, en la parte principal de esta tesis, presentaremos los cálculos realizados para reproducir las figuras 2, 4 y 5 del artículo [19]. Por último, en las conclusiones resumiremos lo aprendido en el presente trabajo.

2. Revisión de la correspondencia AdS/CFT

La correspondencia AdS/CFT relaciona una teoría de gauge con una teoría gravitacional. Esto es posible sólo para una teoría de campo unificada como teoría de cuerdas. El ejemplo más estudiado de esta dualidad es la equivalencia entre una teoría de cuerdas tipo IIB compactificada en $AdS_5 \times S^5$ y una teoría de Yang-Mills con $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías la cual es una teoría conforme (de aquí la abreviación CFT). Por su parte, la abreviación AdS se refiere a un espacio-tiempo anti-de Sitter en 5 dimensiones, mientras que S^5 se refiere a la esfera cinco dimensional. Aún y cuando existen otros ejemplos de dualidades entre teorías de norma y teorías de gravedad, este trabajo se centrará en el ejemplo anterior.

2.1. Espacio anti-de Sitter y sus simetrías

Los espacios anti-de Sitter son soluciones a la ecuación de Einstein con constante cosmológica negativa. AdS_2 puede ser incrustado en un espacio-tiempo plano con 2 direcciones tipo-tiempo:

$$ds^2 = -dZ^2 - dX^2 + dY^2 \quad (1)$$

con la siguiente restricción:

$$-Z^2 - X^2 + Y^2 = -L^2. \quad (2)$$

L recibe el nombre de radio de AdS. Para resolver la restricción anterior tomamos un sistema de coordenadas un poco diferente a las coordenadas esféricas:

$$X = L \sinh \rho \cos \phi, \quad Y = L \sinh \rho \sin \phi, \quad Z = L \cosh \rho \quad (3)$$

con lo cual la métrica de AdS_2 puede ser escrita como

$$ds^2 = L^2(-\cosh^2 \rho d\tilde{t}^2 + d\rho^2) \quad (4)$$

Al sistema coordenado (t, ρ) se le conoce como coordenadas globales, donde la coordenada \tilde{t} tiene periodicidad 2π , es decir, es cíclica. Esto representa un problema ya que podríamos tener geodésicas tipo-tiempo cerradas donde las

curvas causales también serían cerradas [23]. Para desenvolver esta coordenada cíclica, consideramos la cubierta de AdS_2 donde \tilde{t} va de $-\infty$ a ∞ .

En la correspondencia consideraremos el espacio-tiempo anti-de Sitter 5-dimensional como la bola espacial producto con el eje temporal infinito. Describiremos su geometría con las coordenadas t, r, Ω donde t es el tiempo, r es la coordenada radial, $0 \leq r \leq 1$, y Ω parametriza a la esfera unitaria en 3 dimensiones. La métrica está dada por:

$$d\tau^2 = \frac{L^2}{(1-r)^2} (-(1+r)^2 dt^2 + 4dr^2 + 4r^2 d\Omega^2). \quad (5)$$

Podemos ver que el punto $r = 0$ es el centro del espacio anti-de Sitter y que una geodésica nula radial debe satisfacer $(1+r)^2 dt^2 = 4dr^2$, es decir, no se mantendrán constantes las coordenadas t y r . Además, cerca de $r = 1$ la métrica tiene una singularidad en todas sus componentes, acotando así su coordenada radial.

Para construir el espacio $\text{AdS}_5 \times S^5$ debemos definir 5 coordenadas ω_i que describan a la esfera unitaria 5-dimensional y agregar un término a la métrica de AdS_5 . Si escribimos la métrica en coordenadas de Poincaré

$$d\tau^2 = \frac{L^2}{y^2} (-dt^2 + dx^i dx^i + dy^2) \quad (6)$$

con i de 1 a 3, se puede observar que la métrica es invariante bajo las transformaciones de Poincaré de las coordenadas 4-dimensionales t, x^i del espacio de Minkowski. Esta invarianza se da bajo el grupo de transformaciones $ISO(1, 3)$ en $x^\mu = (t, x^i)$, donde el elemento x^μ es interpretado como las coordenadas espacio temporales de la teoría gauge dual. En coordenadas de Poincaré una simetría extra se hace evidente, la invarianza 4-dimensional de la escala o invarianza bajo transformaciones conformes

$$x^\mu \rightarrow ax^\mu, \quad r \rightarrow \frac{1}{a}r. \quad (7)$$

De acuerdo con el principio holográfico podríamos describir la física en el bulto con una teoría con grados de libertad en la frontera [17][3], por este motivo debemos preguntarnos por las simetrías en la frontera de AdS. Existe un grupo de simetrías $O(5)$ asociadas con las rotaciones de la 5-esfera, mientras que el grupo completo de simetrías de AdS_5 es $O(4, 2)$ el cual es idéntico al grupo

conforme 4-dimensional, que actuando en la frontera es el grupo conforme del espacio de Minkowski $SO(4,2)$. Lo anterior sugiere que la teoría dual en la frontera debe ser una teoría conforme. Sin embargo, existe otra simetría además del grupo conforme y el grupo $O(6)$, esta simetría es la $\mathcal{N} = 4$ supersimetría. Conociendo las simetrías uno llega al tipo de sistemas con $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías como candidatos a sistema dual, estos son las teorías de Yang-Mills(SYM) con grupo de simetría $SU(N)$.

2.2. Variables en la SYM y en el bulto

Se sabe que las teorías de Super Yang-Mills son conformes, no tienen parámetros dimensionales, y para los propósitos de la correspondencia nos gustaría que la SYM viviera en la frontera (de $AdS_5 \times S^5$) parametrizada por las coordenadas t, Ω o t, x , mientras que la teoría de gravedad en el bulto mantenga sus dimensiones usuales.

Para transformar las coordenadas de la SYM a coordenadas del bulto necesitamos emplear como factor de conversión a L , el radio de curvatura. Es decir, si E_{SYM} y M representan la energía de la SYM y del bulto respectivamente, el factor de conversión estará dado por

$$E_{SYM} = ML. \quad (8)$$

La teoría 10-dimensional en el bulto tiene dos parámetros adimensionales: el radio de curvatura de AdS en unidades L/l_s y la constante de acoplo de la cuerda g .

Estas constantes están relacionadas con la longitud de Planck y la constante de Newton:

$$l_p^8 = g^2 l_s = G \quad (9)$$

donde l_p^8 la longitud de Planck 10-dimensional.

Por su parte la teoría gauge tiene también dos constantes: el rango N del grupo de gauge y la constante de acoplo del grupo de gauge g_{ym} .

La relación entre los parámetros de ambas teorías, originalmente obtenida por Juan Maldacena [20], es la siguiente:

$$\frac{L}{l_s} = (N g_{ym}^2)^{\frac{1}{4}}, \quad g = g_{ym}^2. \quad (10)$$

En este punto existen dos límites interesantes. La correspondencia AdS/CFT ha sido usada como herramienta para el estudio de teorías gauge en el límite de 't Hooft fuertemente acoplado. En la teoría gauge este límite se define como $g_{ym} \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ tal que $g_{ym}^2 N = cte$. En el bulto, este límite está dado por $g \rightarrow 0$ con $\frac{L}{l_s} = cte$.

Con esto vemos que el límite de 't Hooft fija la curvatura de AdS. Con la constante de acoplo nula nos posicionamos en límite clásico de teoría de cuerdas. El otro límite interesante es aquel en el cual el radio de AdS crece pero los parámetros del mundo microscópico se mantienen:

$$g = cte, \quad \frac{L}{l_s} \rightarrow \infty. \quad (11)$$

El mismo límite pero del lado de la teoría gauge es

$$g_{ym} = cte, \quad N \rightarrow \infty. \quad (12)$$

En el límite $N \rightarrow \infty$ de la teoría gauge nos gustaría mostrar que el número de grados de libertad satisfacen la cota impuesta por el principio holográfico [9].

2.3. Grados de libertad y los límites UV-IR

De acuerdo con el principio holográfico, la teoría en la frontera no debe contener más de 1 grado de libertad por área de Planck [29]. En particular, el número de estados cuánticos no debe exceder $\exp(\frac{A}{4G_D})$, donde A es el área d-1 dimensional en un espacio-tiempo d+1 dimensional, mientras G_D es la constante de Newton en D dimensiones. Se ha especulado que la teoría en la frontera está acotada de tal manera que la densidad de información también está acotada [31]. Para poder contar el número de grados de libertad en $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ suponemos que colocamos a las 9 dimensiones espaciales de una rejilla. A pesar de que no es posible tener una rejilla regular, sí es posible que nuestra rejilla tenga un espaciado promedio de una longitud de Planck l_p , además de incrustar la rejilla también se debe regular el área en la frontera de AdS (la cual diverge en $r = 1$), para conseguirlo le agregamos el regulador $r = 1 - \delta$. Podemos calcular el volumen de esta rejilla con radio $1 - \delta$ a partir de la métrica

$$d\tau^2 = \frac{L^2}{y^2}(-dt^2 + dx^i dx^i + dy^2)$$

Para curar la divergencia en $r = 1$ se agrega una superficie R en $r = 1 - \delta$, esta superficie es 9-dimensional y el volumen en su interior es proporcional a $\frac{L^9}{\delta^3}$. Por lo tanto, el número de espacios con longitud de Planck en la rejilla equivalentes al número de grados de libertad es

$$\frac{V_9}{l_p^9} = \frac{1}{\delta^3} \frac{L^9}{l_p^9}. \quad (13)$$

2.3.1. Dp-branas

Antes de relacionar el regulador IR con el regulador UV debemos entender el papel de las D-branas en la correspondencia. En teoría de cuerdas, las cuerdas abiertas pueden tener dos tipos de condiciones de frontera: de Neumann y de Dirichlet. Las condiciones de Neumann son aquellas donde los extremos de la cuerda están libres, mientras que en el caso de Dirichlet los extremos de la cuerda están fijos. Las condiciones de frontera se consideran independientes para cada coordenada, para el caso de Neumann podemos escoger $p + 1$ condiciones para p dimensiones espaciales y una temporal. En el caso de condiciones de Dirichlet

consideramos $d - p - 1$ condiciones. Así, los extremos de la cuerda deben existir en un plano $p + 1$ dimensional o una Dp -brana. Las cuerdas abiertas tienen una tensión finita y su centro de masa no se puede poner arbitrariamente lejos de la D-brana, como consecuencia los grados de libertad de la cuerda abierta solo se pueden propagar en la dirección paralela a la brana, es decir, los grados de libertad viven en la brana. Si se tienen N_c D-branas coincidentes las cuerdas abiertas pueden tener sus extremos en diferentes branas o en una sola. En el primer caso los nuevos grados de libertad corresponden a los grados de libertad de $SU(N_c)$. En el caso de la correspondencia AdS/CFT empezamos con un empaquetamiento de D3-branas incrustadas en 10 dimensiones, es decir branas que llenan 3 dimensiones espaciales y la temporal. Llamaremos z^m a las otras 6 coordenadas y definiremos a $z \equiv \sqrt{z^m z^m}$. Al empaquetamiento lo colocaremos en $z = 0$, y como la posición en z es un grado de libertad para la brana, podemos pensarlo como un campo escalar en la D-brana. La solución de la D3-brana que corresponde al empaquetamiento de N branas coincidentes es de la forma

$$ds^2 = H^{-\frac{1}{2}}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + H^{-\frac{1}{2}}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \quad (14)$$

La función $H(r)$ es el factor de envoltura

$$H = 1 + \frac{L^4}{r^4} \quad (15)$$

La geometría de esta solución es asintóticamente Minkowski con una garganta de longitud infinita en la cual podemos tomar $r \ll 1$ para obtener el límite cercano al horizonte

$$H \approx 1 + \frac{L^4}{r^4}$$

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{L^2}{r^2}dr^2 + L^2 d\Omega_5^2 \quad (16)$$

en este punto con un cambio de variable $r = \frac{L}{y}$ recuperamos la métrica de $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$

$$ds^2 = \frac{L^2}{y^2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dy^2) + L^2 d\Omega_5^2 \quad (17)$$

Por otra parte, la teoría de las fluctuaciones sobre la coordenada z en la cual se coloca el empaquetamiento de las D3-branas es $\mathcal{N} = 4$ SYM donde todos los campos en esta teoría forman un supermultiplete que pertenece a la representación adjunta (matrices $N \times N$) de $SU(N)$. Mientras que las coordenadas z^m

en la SYM están representadas por 6 campos escalares que viven en el volumen de mundo de la brana, es decir en las 3+1 dimensiones que llena la brana.

Finalmente, resulta interesante relacionar las escalas en ambas teorías. A partir del factor L^2/y^2 en la métrica de AdS observamos que la distancia propia en el bulto d y la distancia d_{YM} en el espacio de Minkowski en la frontera de AdS están relacionadas por

$$d = \frac{L}{y} d_{YM} \quad (18)$$

Y debido a que $[E] = [L]^{-1}$ en unidades naturales, la relación entre las energías es

$$E = \frac{y}{L} E_{YM} \quad (19)$$

De la ultima relación podemos ver que el límite de altas energías (UV) en la SYM se obtiene cuando $y \rightarrow 0$ es decir cerca de la frontera ($r \rightarrow 1$), mientras que el límite de bajas energías (IR) se recupera cuando $y \rightarrow \infty$.

3. La métrica de Schwarzschild

En física, la simetría esférica respecto a un punto central es de particular interés ya que un gran número de problemas se simplifican cuando la presentan. En el caso del campo gravitacional nos gustaría que la teoría pudiera describir un campo esféricamente simétrico. En este capítulo describiremos una solución a las ecuaciones de Einstein con simetría esférica, la solución de Schwarzschild. Tal solución es asintóticamente plana (Minkowski), además de ser temporalmente estática y variante bajo traslaciones espaciales.

$$ds^2 \xrightarrow{\text{asintóticamente}} -dt^2 + dx^i dx^i \quad (20)$$

Bajo rotaciones, es decir bajo la acción de $O \in SO(3)$, la coordenada \mathbf{x} transforma como

$$x^i \mapsto O_j^i x^j, \quad dx^i \mapsto O_j^i dx^j \quad (21)$$

Mientras que $\sum_i x^i x^i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ transforma como

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \mapsto (O\mathbf{x}) \cdot (O\mathbf{x}) = \mathbf{x} O^T O \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \quad (22)$$

Definiremos como estática a la métrica si ninguno de sus componentes es dependiente del tiempo, y además de que no haya términos cruzados entre las componentes temporales y espaciales, por ejemplo $dt dx^i$. Tomando en cuenta estas condiciones propondremos el siguiente ansatz para la métrica

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + D(r)\mathbf{x}^2 d\mathbf{x}^2 + C(r)d\mathbf{x}^2 \quad (23)$$

donde $\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = r$. Introduciremos las coordenadas esféricas

$$x^1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x^3 = r \cos \theta \quad (24)$$

donde $d\mathbf{x}$ esta dado por

$$\begin{aligned} dx^1 &= \sin \theta \cos \phi dr - r \sin \theta \sin \phi d\phi + r \cos \phi \cos \theta d\theta \\ dx^2 &= \sin \theta \sin \phi dr + r \sin \theta \cos \phi d\phi + r \sin \phi \cos \theta d\theta \\ dx^3 &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Sustituyendo $d\mathbf{x}$ en el ansatz obtenemos

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + r^2 D(r)dr^2 + C(r)(r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (25)$$

Debido a la naturaleza covariante de la teoría podemos hacer el cambio de variable $r'^2 \equiv C(r)r^2$, cuya derivada total está dada por

$$dr^2 \frac{4r'^2 dr'^2}{2C(r)r + r^2 C'(r)} \quad (26)$$

Si sustituimos la ecuación anterior en el término $r^2 D(r) dr^2 + C dr^2$ del ansatz, llegamos a un nuevo término

$$(r^2 D(r) + C(r)) dr^2 = \frac{r^2 D(r)/C(r) + 1}{(1 + r/2C'(r))^2} dr'^2 \equiv A(r') dr'^2 \quad (27)$$

lo mismo sucede para los otros 2 términos después del cambio de variable

$$C(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$F(r) \equiv B(r')$$

Con lo anterior, la métrica se simplifica de la siguiente manera

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (28)$$

Para facilitar los cálculos asumiremos que $A(r) = B(r)^{-1}$ sin razón física o matemática de fondo.

Con el ansatz listo, lo que sigue es introducirlo en la ecuación de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (29)$$

la cual por estética se reescribe como

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \quad (30)$$

Recordando que asumimos un espacio vacío, el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ debe ser nulo y por lo tanto la ecuación de Einstein se reduce a

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (31)$$

El tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ está dado por la conexión de Christoffel

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (32)$$

donde

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (33)$$

A partir del Ansatz podemos calcular las estradas de $g_{\mu\nu}$

$$g_{tt} = -B, \quad g_{rr} = \frac{1}{B}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta \quad (34)$$

donde los coeficientes de $\Gamma_{\mu\nu}^t$ están dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^t = \frac{-1}{2B} \begin{pmatrix} \partial_t g_{tt} & \partial_r g_{tt} & \partial_\theta g_{tt} & \partial_\phi g_{tt} \\ \partial_r g_{tt} & -\partial_t g_{rr} & 0 & 0 \\ \partial_\theta g_{tt} & 0 & -\partial_t g_{\theta\theta} & 0 \\ \partial_\phi g_{tt} & 0 & 0 & -\partial_t g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \frac{-1}{2B} \begin{pmatrix} 0 & -B' & 0 & 0 \\ -B' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

todas las derivadas temporales ∂_t se anulan bajo la suposición de invarianza temporal. Los otros componentes de $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ se calculan de manera similar

$$\Gamma_{\mu\nu}^r = \frac{1}{2}B \begin{pmatrix} -\partial_r g_{tt} & \partial_t g_{rr} & 0 & 0 \\ \partial_t g_{rr} & \partial_r g_{rr} & \partial_\theta g_{rr} & \partial_\phi g_{rr} \\ 0 & \partial_\theta g_{rr} & -\partial_r g_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & \partial_\phi g_{rr} & 0 & -\partial_r g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} B' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-B'}{B^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2r \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\theta = \frac{1}{2r^2} \begin{pmatrix} -\partial_\theta g_{tt} & 0 & \partial_t g_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & \partial_\theta g_{rr} & \partial_r g_{\theta\theta} & 0 \\ \partial_t g_{\theta\theta} & \partial_r g_{\theta\theta} & \partial_\theta g_{\theta\theta} & \partial_\phi g_{\theta\theta} \\ 0 & 0 & \partial_\phi g_{\theta\theta} & -\partial_\theta g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2r^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2r & 0 \\ 0 & 2r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\phi} &= \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} -\partial_{\phi} g_{tt} & 0 & 0 & \partial_t g_{\phi\phi} \\ 0 & -\partial_{\phi} g_{rr} & 0 & \partial_r g_{\phi\phi} \\ 0 & 0 & -\partial_{\phi} g_{\theta\theta} & \partial_{\theta} g_{\phi\phi} \\ \partial_t g_{\phi\phi} & \partial_r g_{\phi\phi} & \partial_{\theta} g_{\phi\phi} & -\partial_{\phi} g_{\phi\phi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2r \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & 0 & 2r^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 2r \sin^2 \theta & 2r^2 \sin \theta \cos \theta & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Entonces procedemos a calcular el tensor de curvatura $R_{\mu\nu}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}B(\frac{2B'}{r} + B'') & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2B}(\frac{2B'}{r} + B'') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-B - rB' + 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2(\theta)(-B - rB' + 1) \end{pmatrix}$$

En el régimen del vacío para la Ecuación de Einstein, la igualdad $R_{\mu\nu} = 0$ debe mantenerse después de introducir el ansatz, observamos claramente que lo anterior se cumple si las siguientes igualdades son satisfechas

$$0 = \frac{2B'}{r} + B'' \quad (35)$$

$$0 = -B - rB' + 1 \quad (36)$$

la segunda igualdad (36) es una ecuación diferencial de primer orden y por lo tanto es una restricción sobre la ecuación de segundo orden (35). Para encontrar una solución a (35) notamos que la derivada de (36) respecto de r es precisamente la ecuación de segundo orden que queremos resolver

$$\frac{d}{dr}(rB' + B - 1) = rB'' + 2B' \quad (37)$$

Por lo tanto es suficiente con encontrar una solución para la ecuación de primer orden.

El caso trivial $B(r) = 1$ que resuelve a (35) nos lleva a la métrica de Minkowski escrita en coordenadas polares

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (38)$$

Por lo tanto la solución trivial no rompe la invarianza traslacional. Otra solución para (35) es $B(r) = -\frac{1}{r}r_h + r_c$, que al momento de sustituirla en (36) se observa que $r_c = 1$, en cambio r_h no tiene restricción alguna, sin embargo la asumiremos como positiva. Sustituyendo $B(r)$ finalmente llegamos a la métrica Schwarzschild

$$ds^2 = -(1 - \frac{r_h}{r})dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_h}{r}}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (39)$$

3.1. La constante r_h y geodésicas de Schwarzschild

Como mencionamos al principio de este capítulo, nos gustaría tener una teoría de gravedad que reprodujera un campo gravitacional esféricamente simétrico, por lo tanto la métrica de Schwarzschild debería reproducir la física Newtoniana para objetos masivos. Para comprobar lo anterior debemos estudiar la dinámica de la solución de Schwarzschild.

3.1.1. Geodésicas Radiales

La dinámica de una partícula está dada por las soluciones a la siguiente ecuación

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (40)$$

Las soluciones que buscamos en este caso son de la forma $x^\mu = (\lambda, r(\lambda), \pi/2, 0)$ donde λ es el parámetro de la trayectoria, y en el caso de una partícula masiva se toma como el tiempo propio τ . La coordenada θ se fija en $\pi/2$ para confinar la trayectoria de la partícula al plano ecuatorial lo cual es permitido por la isotropía del campo.

Para resolver la ecuación geodésica necesitamos los coeficientes de $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ que ya tenemos calculados

$$\begin{aligned} \Gamma_{rt}^t &= \frac{B'}{2B} & \Gamma_{tr}^t &= \frac{B'}{2B} \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2}B'B & \Gamma_{rr}^r &= \frac{-B'}{2B} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -rB & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -rB \sin^2 \theta \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\cos \theta \sin \theta \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot \theta & \Gamma_{\phi r}^\phi &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \cot \theta \end{aligned}$$

por lo tanto para las coordenadas temporal y radial obtenemos respectivamente

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{t} + \Gamma_{\rho\sigma}^t \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma = \ddot{t} + \Gamma_{rt}^t \dot{x}^0 \dot{x}^1 + \Gamma_{tr}^t \dot{x}^1 \dot{x}^0 \\ &= \ddot{t} + \frac{B'}{2B} \dot{r} \dot{t} + \frac{B'}{2B} \dot{t} \dot{r} = \ddot{t} + \frac{B'}{B} \dot{r} \dot{t} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{r} + \Gamma_{\rho\sigma}^r \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma \\ &= \ddot{r} + \Gamma_{tt}^r \dot{x}^0 \dot{x}^0 + \Gamma_{rr}^r \dot{x}^1 \dot{x}^1 + \Gamma_{\theta\theta}^r \dot{x}^2 \dot{x}^2 + \Gamma_{\phi\phi}^r \dot{x}^3 \dot{x}^3 \\ &= \ddot{r} + \frac{1}{2}B'B \dot{t}^2 + \frac{-B'}{2B} \dot{r}^2 - rB \dot{\theta}^2 - rB \sin^2 \theta \dot{\phi}^2. \end{aligned}$$

Debido a que nos interesa solo el comportamiento radial respecto del tiempo, podemos simplificar la ecuación geodésica para r

$$0 = \ddot{r} + \frac{1}{2}B'\dot{t}^2 + \frac{-B'}{2B}\dot{r}^2 \quad (41)$$

donde $B = 1 - r_h/r$ y $B' = r_h/r^2$. Para poder resolver las ecuaciones anteriores hacemos el siguiente cambio de variable $(\dot{t}, \dot{r}) \rightarrow (u^0, u^1)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{u}^0 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{r_h}{1 - \frac{r_h}{r}} \right) u^0 u^1 \\ 0 &= \dot{u}^1 + \frac{r_h}{2r^2} \left(1 - \frac{r_h}{r} \right) u^0 u^0 - \frac{1}{2r^2} \left(\frac{r_h}{1 - \frac{r_h}{r}} \right) u^1 u^1 \end{aligned}$$

De la primera ecuación podemos resolver para u^0 . Dividiendo primero entre u^0 y después integrando se obtienen lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\dot{u}^0}{u^0} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{r_h}{1 - \frac{r_h}{r}} \right) u^0 u^1 \\ 0 &= \frac{du^0}{u^0} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{r_h}{1 - \frac{r_h}{r}} \right) dr = \ln u^0 + \int \frac{r_h}{r(r - r_h)} dr \\ &= \ln u^0 + \int \left(\frac{-1}{r} + \frac{1}{r - r_h} \right) dr = \ln u^0 - \ln r + \ln(r - r_h) - \ln(b) \end{aligned}$$

donde b es una constante de integración

$$\left(1 - \frac{r_h}{r} \right) u^0 = b \quad (42)$$

Para poder fijar la constante r_h que aparece en la métrica de Schwarzschild necesitamos considerar la aceleración de una partícula que parte del reposo, para la cual el cuadvivector de la velocidad inicial es

$$\begin{aligned} u_0^\mu &= (u^0, u^1, u^2, u^3) = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \\ &= (\dot{t}, 0, 0, 0) = u^0(1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

sustituyendo estos valores en las ecuaciones geodésicas se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{u}^0|_{t=0} &= -2\Gamma_{tr}^t u_0^0 u_0^1 = 0 \\ \dot{u}^1|_{t=0} &= -\Gamma_{tt}^r u_0^0 u_0^0 \neq 0 \\ \dot{u}^2|_{t=0} &= 0 \\ \dot{u}^3|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

Aquí observamos que la aceleración inicial existe sólo en la dirección radial. Para encontrar u_0^0 sustituimos los valores iniciales de la velocidad en el elemento de

línea de la métrica recordando que las partículas masivas siguen geodésicas tipo-tiempo para las cuales $ds^2 = -1$

$$\begin{aligned} -1 &= ds^2 = g_{\mu\nu} u_0^\mu u_0^\nu \\ &= -\left(1 - \frac{r_h}{r}\right)(u_0^0)^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_h}{r}}(u_0^1)^2 + r^2((u_0^2)^2 + \sin^2 \theta (u_0^3)^2) \\ &= -\left(1 - \frac{r_h}{r}\right)(u_0^0)^2 \end{aligned}$$

despejando para u_0^0 obtenemos

$$u_0^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_h}{r}}} \quad (43)$$

Sustituyendo u_0^0 en la ecuación geodésica para u_0^1 , se encuentra la aceleración radial inicial

$$\begin{aligned} \dot{u}^1|_{t=0} &= -\Gamma_{tt}^r u_0^0 u_0^0 \\ &= -\frac{r_h}{2r_0^2} \left(1 - \frac{r_h}{r_0}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_h}{r_0}}}\right)^2 \\ &= -\frac{r_h}{2r_0^2} \end{aligned}$$

Por último, para un radio inicial suficientemente grande ($r_0 \gg r_h$) podemos tomar $\frac{dt}{d\lambda} = u_0^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_h}{r}}} \approx 1$. Lo cual nos permite reemplazar $d\lambda \approx dt$ y por lo tanto $\frac{du^1}{d\lambda} \approx \frac{d^2 r}{dt^2}$. Este último término se puede comparar con la aceleración gravitacional Newtoniana

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= -\frac{GM}{r_0^2} \\ -\frac{r_h}{2r_0^2} &= -\frac{GM}{r_0^2} \\ \boxed{r_h} &= 2GM \end{aligned} \quad (44)$$

Donde M es la masa del objeto. Para un potencial Newtoniano la velocidad de escape está dada por

$$\begin{aligned} 0 &= E = \frac{1}{2} m v_{esc}^2 - \frac{GMm}{r} \\ v_{esc}^2 &= \frac{2GM}{r} \end{aligned}$$

Es decir que el término $(1 - \frac{r_h}{r})$ que aparece en la métrica de Schwarzschild equivale a $(1 - v_{esc}^2)$ donde v_{esc} es la velocidad de escape Newtoniana.

Para la masa de un sistema solar v_{esc} es mucho menor que la velocidad de la luz.

Por último sustituyendo r_h encontramos la métrica de Schwarzschild, con la cual podemos describir el campo gravitacional de objetos como la luna, estrellas o agujeros negros.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (45)$$

Una vez especificada la constante r_h podemos volver al estudio de las geodésicas radiales, definiendo a la constante de integración b de la siguiente manera

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)u^0 = b \quad (46)$$

donde al sustituir la condición inicial $u_0^0 = (1 - 2GM/r_0)^{-\frac{1}{2}}$ encontramos el valor de b en función de r_0

$$\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0}} = b \quad (47)$$

Ahora podemos encontrar u^1 a partir de la sustitución de u^0 en el elemento de línea

$$\begin{aligned} -1 &= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(u^0)^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}}(u^1)^2 \\ -1 &= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{b}{1 - \frac{2GM}{r}}\right)^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}}(u^1)^2 \\ u^1 &= \sqrt{b^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_0}} \end{aligned}$$

Recordemos que u^1 es la velocidad en la dirección radial causada por un objeto masivo en $r=0$, sería de esperarse que \dot{u}^1 coincida con la aceleración Newtoniana o lo que llamamos g para el planeta Tierra. Esta aceleración emerge de la ecuación geodésica para u^1 a orden más bajo como ya lo observamos anteriormente cuando encontramos que $r_h = 2GM$.

3.2. Schwarzschild, la solución del agujero negro

3.2.1. El radio de Schwarzschild r_s

Para poder describir la geometría del espacio-tiempo de Schwarzschild también debemos explorar la región $r < 2GM$, las singularidades en $r = 0$ y en la hipersuperficie $r = 2GM$ a la cual se le conoce como el radio de Schwarzschild (r_s). Aquí debemos recordar que derivamos la solución de Schwarzschild resolviendo las ecuaciones de Einstein en el vacío y por lo tanto todo lo que mencionemos es válido solamente para distribuciones esféricas de materia, incluido el cálculo del radio de Schwarzschild que para un objeto como el Sol es del orden de un par de kilómetros, el cual es mucho menor que el radio del sol. De igual manera se podría considerar el radio de Schwarzschild para un protón ($r_s = 10^{-52}m$) el cual también es mucho menor que el radio del mismo ($R_p = 10^{-15}m$). De hecho, para la mayoría de los objetos, su radio de Schwarzschild se encuentra muy por debajo de su radio donde las ecuaciones de Einstein que consideramos al inicio no aplican, por lo cual resulta interesante preguntarnos ¿si existe un objeto tan compacto tal que su radio sea menor que su radio de Schwarzschild?

Consideremos un objeto para el cual r sea menor que r_s , en tal caso, e ignorando que en $r = r_s$ existe una singularidad, se pueden considerar dos regiones para la solución de Schwarzschild, la región **I**: $r > r_s$ y la región **II**: $r < r_s$.

Región I: Por inspección podemos ver que para $r > r_s$ los coeficientes del elemento de línea mantienen su signo, es decir que g_{00} se mantiene negativo mientras que g_{ii} se mantienen positivos, lo que implica que la coordenada t se mantiene como una coordenada tipo-tiempo y r, θ, ϕ se mantienen como coordenadas tipo-espacio. Agregando algo de sentido físico a esta oración podemos decir que t es el tiempo propio medido por un observador en reposo ubicado en el infinito, y que r por ejemplo es una coordenada radial tal que el área superficial de una 2-esfera con t y r constantes es $4\pi r^2$.

Región II: En esta región ($r < r_s$) los signos de g_{00} y g_{11} se intercambian, por lo tanto t pasa a ser una coordenada tipo-espacio y r una coordenada tipo-tiempo. Pero ¿qué significa este cambio en la naturaleza de estas coordenadas cuando pasamos de $r > r_s$ a $r < r_s$? y más importante aún, ¿qué significado físico tiene?. Para responder lo anterior estudiaremos las singularidades en $r = 0$ y $r = r_s$.

3.2.2. Coordenadas y Singularidades

Las coordenadas son una forma de etiquetar eventos en el espacio-tiempo, las cantidades geométricas físicamente útiles son los 4-tensores definidos en cualquier punto del espacio. El tensor de Ricci y sus contracciones describen la curvatura del espacio tiempo de manera covariante, por ejemplo, el escalar de Kretschmann definido como $R_{abcd}R^{abcd}$ para la métrica de Schwarzschild es $12(GM)^2/r^6$ y evaluado en $r = r_s$ es finito, por lo tanto, la singularidad en r_s es una singularidad debida a la forma en la que estamos etiquetando los eventos, mientras que $r = 0$ sí es una singularidad intrínseca de la geometría de Schwarzschild.

La singularidad debida a la elección de las coordenadas desaparece con una transformación apropiada, sin embargo, antes de proponer cualquier transformación de coordenadas seguiremos investigando la geometría de Schwarzschild en coordenadas (t, r, θ, ϕ) . En nuestra exploración no hemos hablado sobre la estructura causal del espacio-tiempo, para poder considerarla debemos estudiar las geodésicas radiales y nulas, es decir aquellas para las cuales las coordenadas θ, ϕ son constantes y el elemento de línea (ds^2) es nulo.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}}dr^2 = 0 \quad (48)$$

despejando para dt/dr :

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} \quad (49)$$

donde dt/dr es la pendiente de los conos de luz en el plano t - r , el signo positivo corresponde a un fotón saliente (r crece en función del tiempo para la región $r > 2GM$) y el negativo a un fotón entrante (r decrece en función del tiempo para la región $r > 2GM$). En límite de r muy grande la pendiente es ± 1 , como en el caso del espacio-tiempo de Minkowski, comprobando así que la propiedad

asintóticamente plana se mantiene. Pero cuando nos acercamos a la hipersuperficie en $r = 2GM$ la pendiente tiende a $\pm\infty$, y los conos de luz se cierran, lo cual nos dice que un rayo de luz que se acerca a $r = 2GM$ parece nunca llegar a la hipersuperficie ya que el progreso en la coordenada r se hace más lento respecto del progreso en la coordenada temporal, sin embargo al igual que con la singularidad debida a las coordenadas, este comportamiento podría ser resultado de nuestra elección de coordenadas. Para comprobarlo intentaremos arreglar el problema de la inhabilidad de acercarnos a $r = 2GM$ en un tiempo finito. Primero remplazaremos t con una coordenada que se mueva más lento sobre las coordenadas nulas.

Integramos dt/dr para encontrar t en función de r

$$t = \pm r \pm 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) + c \quad (50)$$

los signos \pm indican la región **I** y **II** respectivamente. De la solución anterior para t definimos r^* como

$$r^* = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \quad (51)$$

tal que $t = \pm r^* + cte$.

A r^* se le conoce como coordenada tortuga, podemos observar por el signo positivo que r^* solo está relacionada con la región **II**, es decir, con $r \geq 2GM$.

En términos de la coordenada tortuga podemos reescribir la métrica de Schwarzschild usando $dr^* = (r)/(r - 2GM)dr$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dr^{*2} + r^2 d\Omega^2 \quad (52)$$

Se observa que la singularidad en $r = 2GM$ ha desaparecido, sin embargo $r = 2GM$ se encuentra en el infinito de la coordenada tortuga ya que r^* evaluado en $r = 2GM$ es proporcional a $\ln(0)$.

3.2.3. Coordenadas Eddington-Finkelstein

Usando la libertad de elegir la constante en la relación $t = \pm r^* + cte$, realizamos un nuevo cambio de coordenadas:

$$v_{\pm} \equiv t \mp r^* \quad (53)$$

donde v_- caracteriza a la geodésica radial entrante y v_+ a la geodésica radial saliente. A tales coordenadas se les denomina como avanzadas v_- y retardadas v_+ . Podemos usar v_- como la coordenada tipo tiempo en la solución de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dv_-^2 + dv_-dr + drdv_- + r^2d\Omega^2 \quad (54)$$

donde las componentes de $g_{\mu\nu}$ son

$$\begin{pmatrix} -(1 - \frac{2GM}{r}) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (55)$$

en las coordenadas de Eddington-Finkelstein las componentes de la métrica no tienen singularidades para $r > 0$, en particular la hipersuperficie en $r = 2GM$ está bien definida a pesar de que g_{00} sea nulo, además, el determinante de la métrica $g = -r^4 \sin^2\theta$ es no degenerado, es decir, no se anula para $r > 0$ lo que implica que la inversa de la métrica está bien definida. Recordemos que la solución original de Schwarzschild era regular en la región $2GM < r < \infty$ mientras que en estas nuevas coordenadas es regular en $0 < r < \infty$ por lo tanto en la región de traslape ambas formas están relacionadas por la transformación (53) y representan a la misma solución.

Como uno podría esperar, las nuevas coordenadas son particularmente útiles para las geodésicas nulas. En el caso de las coordenadas avanzadas v_- las geodésicas radiales nulas están dadas por las soluciones a la ecuación

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dv_-}{dr}\right)^2 - 2\frac{dv_-}{dr} = 0 \quad (56)$$

con dos soluciones

$$\begin{aligned} \frac{dv_-}{dr} &= 0 \\ \frac{dv_-}{dr} &= 2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \end{aligned}$$

la primera solución corresponde a una geodésica radial entrante $v_- = cte$ la cual es válida por construcción, mientras que la segunda solución corresponde a una geodésica radial nula saliente. Nota que esta última es discontinua ya

que una geodésica que comienza en $r < 2GM$ no puede escapar a la región $r > 2GM$, por lo tanto $r = 2GM$ define un horizonte de eventos, o una frontera de no retorno. Y dado que hablamos de geodésicas nulas, lo mismo será cierto para partículas masivas (geodésicas tipo-tiempo). Por último, a partir de las trayectorias de las geodésicas salientes podemos ver que cualquier fotón emitido por una partícula en la región **II** no llegará a un observador en la región **I**. Es por esto que a la solución de Schwarzschild se le conoce como solución del agujero negro.

En el caso de las coordenadas retardadas (usando $v_+ = t - r^*$) la métrica toma la siguiente forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dv_-^2 - dv_+dr - drdv_+ + r^2d\Omega^2 \quad (57)$$

Y de manera análoga, a partir de las condiciones para las geodésicas radiales nulas, para las coordenadas retardadas v_+ se encuentra que las geodésicas entrantes son discontinuas y la región $r = 2GM$ está vez sí deja escapar geodésicas pero no permite que entren, de hecho las partículas se deben alejar de la singularidad en $r = 0$ forzosamente, a tal objeto se le conoce como agujero blanco. Uno se puede preguntar cómo es que un cambio de coordenadas nos lleve a un proceso físico diferente si hemos argumentado que las coordenadas no son más que una etiqueta de los eventos en el espacio-tiempo. Para resolver este dilema se deben introducir las coordenadas de Kruskal.

3.2.4. Coordenadas de Kruskal

En la sección anterior se encontró que ni las coordenadas avanzadas o las retardadas nos eran del todo satisfactorias, en el primer caso las geodésicas radiales nulas salientes eran discontinuas, mientras que en el segundo caso las geodésicas radiales nulas entrantes eran discontinuas. Y no fue hasta 1961 que Martin Kruskal encontró un sistema de coordenadas donde todas las geodésicas radiales eran continuas y rectas, lo cual también sirvió para devisar al fin la geometría completa de la solución de Schwarzschild.

El paso inicial para eliminar las discontinuidades, es usar las dos coordenadas de Eddington-Finkelstein a la vez

$$ds^2 = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(dv_- du_+ + dv_+ dv_-) + r^2 d\Omega^2 \quad (58)$$

donde r está definido por la siguiente relación entre v_- y v_+

$$\frac{1}{2}(v_- - v_+) = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \quad (59)$$

A partir de la métrica se puede observar que el espacio 2-dimensional definido por $\Omega(\theta, \phi) = \text{cte}$ tiene la métrica simplificada

$$ds^2 = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(dv_- du_+ + dv_+ dv_-) \quad (60)$$

Usando (53), (50) y $r^*(r)$ (51) se puede regresar a las coordenadas t y r^*

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}(v_- + v_+) \\ r^* &= \frac{1}{2}(v_- - v_+) \end{aligned}$$

Con este cambio de variable la métrica del espacio 2-dimensional toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(dt^2 - dr^{*2}) \\ &= \omega^2(x) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

donde $x^0 = t$ y $x^1 = r^*$. Este elemento de línea no es mas que Minkowski 2-dimensional multiplicado por un factor conforme de escala $\omega^2(x)$ que solo depende de la posición (ver apéndice A), y a pesar de que la métrica en sí es curva, es claro que es conformemente plana. Una consecuencia de lo anterior resalta cuando estudiamos fotones moviéndose radialmente debido a que el factor $\omega^2(x)$ solo es una escala, por lo cual, la estructura del cono de luz no se modifica y por lo tanto se ve igual al cono de luz del espacio de Minkowski. Es decir, en el plano (t, r^*) , las geodésicas radiales nulas entrantes y salientes son líneas rectas con pendiente ± 1 .

Todo bien hasta este punto, sin embargo de nuevo hemos empujado la región en $r = 2GM$ hasta el infinito con el cambio de coordenadas (sustituir $r = 2GM$ en 59). Sin embargo el análisis anterior sugiere que en lugar de usar v_- y v_+ se debe buscar una transformación de coordenadas que preserve la naturaleza

conforme del espacio 2-dimensional que encontramos, y a la vez se debe eliminar el factor $(1-2GM/r)$ que nos ha resultado problemático. Aquí fue donde Kruskal sugirió usar las siguientes funciones $p(v_-)$ y $q(v_+)$

$$p = \exp\left(\frac{v_-}{4GM}\right), \quad p = -\exp\left(\frac{-v_+}{4GM}\right) \quad (61)$$

para las cuales encontramos que

$$ds^2 = -\frac{16G^3M^3}{r}e^{-r/2GM}(dpdq + dqdp) + r^2d\Omega^2 \quad (62)$$

Finalmente $r = 2GM$ ya no presenta problema alguno para ninguno de los coeficientes de la métrica. Por último, las coordenadas p y q son coordenadas nulas, para trabajar con una coordenada tipo-tiempo y otra tipo-espacio definimos T y R de la siguiente manera

$$T = \frac{1}{2}(p + q) = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2}e^{r/4GM} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right) \quad (63)$$

$$R = \frac{1}{2}(p - q) = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2}e^{r/4GM} \cosh\left(\frac{t}{4GM}\right) \quad (64)$$

sustituyéndolos en la métrica llegamos a

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r}e^{-r/2GM}(-dT^2 + dR^2) + r^2d\Omega^2 \quad (65)$$

donde r de nuevo está definido implícitamente como

$$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right)e^{r/2GM} \quad (66)$$

En estas nuevas coordenadas las geodésicas radiales están dadas por $T = \pm R + cte$, lo que representa líneas rectas a 45 grados de los ejes, por lo tanto, el cono de luz es el mismo que en Minkowski. También es instructivo encontrar las líneas a $T = cte$ y $R = cte$. Las líneas a $R = cte$ están dadas por la condición $T^2 - R^2 = cte$ lo que significa que son hipérbolas en el plano $R - T$. Por otra parte, las líneas a $T = cte$ están dadas por $T/R = \tanh(t/4GM)$ que define líneas rectas que pasan por el origen.

Las coordenadas usuales de Schwarzschild definidas en la región $-\infty < t < \infty$, $0 < r < \infty$ son mapeadas a las regiones I y II (ver figura 1) por lo tanto se requerirían 2 cubiertas (I,II) y (I',II') para cubrir toda la geometría. Sin embargo, en el caso de Kruskal sólo se necesita un único sistema coordenado.

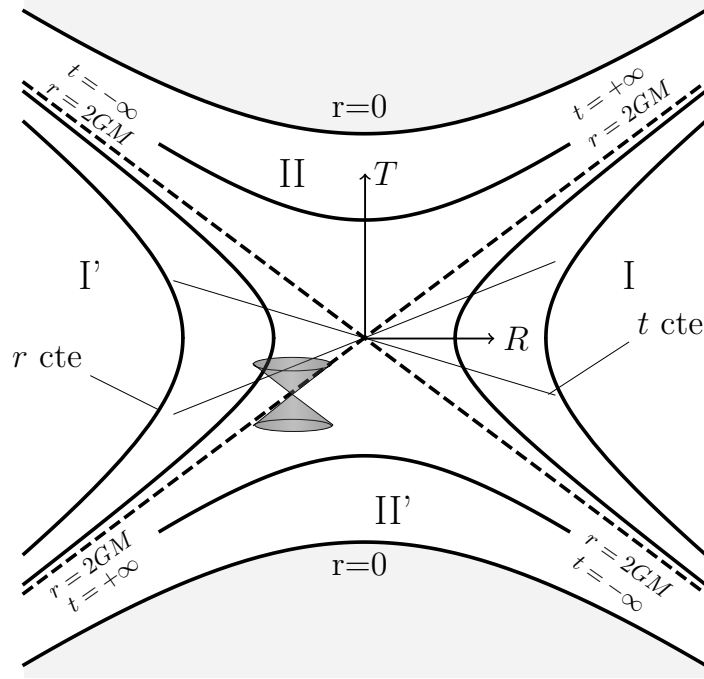


Figura 1: Diagrama de la geometría de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal. Diagrama basado en la figura 11.6 en [16]

Las diagonales en $r = 2GM$, $t = \pm\infty$ definen los horizontes de eventos separando las regiones II y II' de las regiones I y I'. Las regiones I y I' tipo Minkowski, podemos identificar I como la región del espacio-tiempo fuera del agujero negro de Schwarzschild y la región II como el interior del horizonte de eventos del agujero negro. Cualquier partícula que viaja de la región I a la región II no puede regresar y eventualmente llegará a la singularidad en $r = 0$. Las regiones I' y II' son inaccesibles para las regiones I y II. La región II' es similar a II, pero con la particularidad de ser una parte del espacio-tiempo donde las partículas pueden salir (hacia las regiones I' y I) pero no entrar. Por lo tanto la singularidad $r = 0$ en el pasado es un agujero blanco (ver 3.2.3) del cual las partículas pueden emanar. Con el análisis anterior ya podemos entender mejor las coordenadas avanzadas y retardadas de Eddington-Finkelstein: las avanzadas describen la geometría de Schwarzschild en I y II, mientras que las retardadas cubren las regiones I' y II'. De hecho, los universos I y I' están conectados por un agujero de gusano (puente de Einstein-Rosen) ubicado en el origen del diagrama, aunque

ya se demostró que ninguna partícula puede viajar entre estas dos regiones [10]. Con la introducción de las coordenadas de Kruskal hemos podido extender la solución de Schwarzschild y encontrar su geometría completa.

3.2.5. Diagrama conforme

Las coordenadas de Kruskal cubren todo el espacio-tiempo, pero estas no están acotadas, lo cual nos gustaría cuando estudiamos la estructura causal de un espacio-tiempo (ver apéndice A). Siguiendo un procedimiento similar al de caso de Minkowski podemos compactificar las coordenadas nulas de Kruskal p y q

$$p' = \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{2GM}}\right), \quad q' = \arctan\left(\frac{q}{\sqrt{2GM}}\right) \quad (67)$$

entonces las coordenadas p' , q' y $p' + q'$ ya están acotadas entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Con este cambio de coordenadas las singularidades en $r = 0$ son líneas rectas desde el infinito tipo-tiempo de una región al infinito tipo-tiempo de la otra región, las líneas diagonales del horizonte de eventos se mantienen mientras que el infinito tipo-espacio se hace visible en los extremos del diagrama.

Los puntos i^+ , i^- representan los infinitos tipo-tiempo futuro y pasado, mientras que i^0 es el infinito tipo-espacio. \mathscr{I}^+ y \mathscr{I}^- son el infinito nulo futuro y el infinito nulo pasado. Las geodésicas radiales nulas se mantienen a 45 grados. Todas las geodésicas tipo-tiempo comienzan en i^- y terminan en i^+ , las geodésicas tipo-espacio comienzan y terminan en i^0 . El diagrama conforme de Schwarzschild posiciona todo el espaciotiempo en una región finita, y muestra su naturaleza asintóticamente Minkowski.

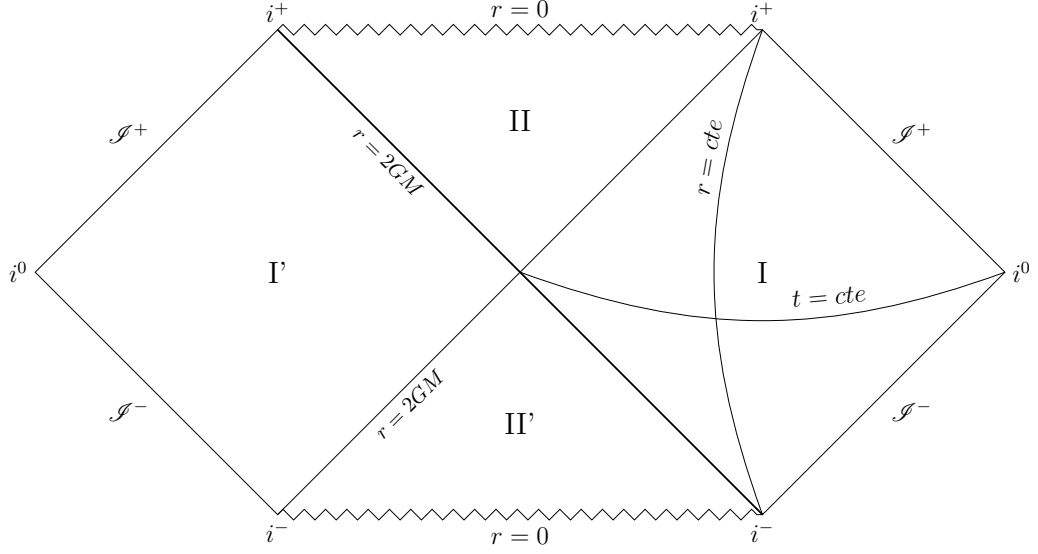


Figura 2: Diagrama conforme de Schwarzschild

3.2.6. Solución en más dimensiones

La solución de Schwarzschild se puede generalizar para espacios n -dimensionales con los siguientes elementos de línea

$$ds_n = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{n-2}^2 \quad (68)$$

con $f(r)$, $d\Omega_n^2$ (el elemento de línea para S^n) y Ω_n el área en términos de la función Gamma están definidos como

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-3} = 1 - \frac{16\pi G_n}{(n-2)\Omega_{n-2}} \frac{M}{r^{n-3}}$$

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

donde G_n es la constante de Newton en un espaciotiempo n -dimensional. El comportamiento de la función $f(r)$ se debe al potencial Newtoniano en un espacio n -dimensional: $1/r^{n-3}$.

3.3. Distribución uniforme de cargas

Consideremos ahora la forma que tomaría la métrica para una distribución uniforme de cargas. El exterior de un objeto masivo y cargado no es el vacío debido a la presencia del campo eléctrico. Es por esto que no tomaremos la solución de Schwarzschild para modificarla, en cambio debemos resolver las ecuaciones de Einstein pero ahora con un tensor de momento-energía $T_{\mu\nu}$ no nulo. Sin embargo, la simetría esférica y la invarianza temporal del objeto siguen presentes por lo tanto podemos conservar las funciones $A(r)$, $B(r)$ usadas en (28) y reescribir el Ansatz para el elemento de línea de la siguiente manera

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (69)$$

Por otra parte, el tensor electromagnético de momento-energía esta dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}(F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}) \quad (70)$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío y $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético en función del vector potencial A_μ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (71)$$

Antes de sustituir el tensor electromagnético en la ecuaciones de Einstein notemos que la traza de $T_{\mu\nu}$ se anula

$$T \equiv T^\mu_\mu = \frac{1}{\mu_0}(F_{\mu\rho}F^{\mu\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\mu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}) = 0 \quad (72)$$

Y por lo tanto las ecuaciones de Einstein toman la siguiente forma

$$R_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (73)$$

La solución que buscamos, además de satisfacer la ecuación anterior, debe satisfacer las ecuaciones de Maxwell con densidad de corriente nula

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu F_{\nu\sigma} = \mu_0 J^\sigma$$

$$= 0$$

$$\nabla_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0$$

El vector potencial en coordenadas (t, r, θ, ϕ) toma la forma

$$[A^\mu] = (\phi(r), a(r), 0, 0) \quad (74)$$

donde $\phi(r)$ es el potencial electrostático y $a(r)$ es la componente radial del vector potencial, con este Ansatz, podemos encontrar la forma del vector potencial

$$F_{\mu\nu} = E(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (75)$$

Las componentes temporales se anulan debido a la invarianza temporal. $E(r)$ es una función arbitraria que solo depende de r . Además de $E(r)$, también debemos encontrar las funciones $A(r)$ y $B(r)$, y para ello usaremos primero las ecuaciones de Maxwell.

Usando la anti-simetría en $F^{\mu\nu}$ podemos reescribir la divergencia covariante en la primera ecuación de Maxwell [16] como

$$0 = \nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) \quad (76)$$

Debido a la forma de $F^{\mu\nu}$ la ecuación anterior se puede simplificar a un solo término, además sustituyendo g (el determinante del elemento de línea, que en nuestro caso está dado por $g = -A(r)B(r)r^4 \sin^2\theta$) obtenemos la siguiente relación

$$\partial_1 (\sqrt{AB} r^2 F^{10}) = 0 \quad (77)$$

donde $F^{10} = g^{1\mu} g^{1\nu} F_{\mu\nu} = g^{11} g^{00} F_{10} = -E/(AB)$, por lo tanto tenemos que

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 E}{\sqrt{AB}} \right) = 0 \quad (78)$$

Integramos para encontrar $E(r)$

$$E(r) = \frac{k \sqrt{A(r)B(r)}}{r^2} \quad (79)$$

La constante k resulta de la integración. Si la métrica es asintóticamente plana, entonces cuando $r \rightarrow \infty$, $A(r) \rightarrow 1$ y $B(r) \rightarrow 1$. En este régimen identificamos a $E(r)$ como la componente radial del campo eléctrico cuando $r \rightarrow \infty$, por lo tanto k está dado por Q la carga eléctrica total del objeto

$$E(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} = \frac{Q}{r^2} \quad (80)$$

Por otra parte, ya podemos calcular las componentes del tensor momento-energía, donde los únicos elementos no nulos de $F_{\mu\nu}$ son F_{01} y F_{10} :

$$\begin{aligned}
T_{00} &= F_{01}F_0^1 = F_{01}g^{11}F_{01} = \frac{E^2}{B} \\
T_{11} &= F_{10}F_1^0 = F_{10}g^{00}F_{10} = -\frac{E^2}{A} \\
T_{22} &= -\frac{1}{4}(g_{22}[F_{01}F^{01} + F_{10}F^{10}]) \\
&= -\frac{g_{22}}{4}(F_{01}g^{00}g^{11}F_{01} + F_{10}g^{00}g^{11}F_{10}) = \frac{r^2E^2}{2AB} \\
T_{33} &= -\frac{1}{4}(g_{33}[F_{01}F^{01} + F_{10}F^{10}]) \\
&= -\frac{g_{33}}{4}(F_{01}g^{00}g^{11}F_{01} + F_{10}g^{00}g^{11}F_{10}) = T_{22}\sin^2\theta
\end{aligned}$$

donde hemos usado unidades naturales para μ_0 . De las ecuaciones de Einstein ($R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$) encontramos la relación entre las componentes del tensor de Ricci y las componentes de $T_{\mu\nu}$. $R_{\mu\nu}$ se encuentra a partir de las conexiones $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ y la métrica $g_{\mu\nu}$ que propusimos como ansatz. Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de Schwarzschild llegamos a

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rB} \\
R_{11} &= -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{B'}{rB} \\
R_{22} &= -\frac{1}{B} + 1 - \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) \\
R_{33} &= R_{22}\sin^2\theta
\end{aligned}$$

Ahora ya tenemos ambos lados de las ecuaciones de Einstein, el lado geométrico $R_{\mu\nu}$ y el lado de la materia $T_{\mu\nu}$

$$R_{00} = \frac{E^2}{B}, \quad R_{11} = -\frac{E^2}{A}, \quad R_{22} = \frac{r^2E^2}{2AB}, \quad R_{33} = \frac{r^2E^2}{2AB}\sin^2\theta$$

podemos encontrar relaciones entre A y B . Observemos que una primer relación entre R_{00} y R_{11} es trivial:

$$BR_{00} + AR_{11} = 0 \tag{81}$$

sustituyendo los valores que encontramos para R_{00} y R_{11} llegamos a la siguiente relación explícita

$$A'B + AB' = 0 \tag{82}$$

Por lo tanto el producto AB es constante (ya que $\partial_r(AB) = 0$). Podemos fijar esta constante con el requerimiento de que la métrica debe ser plana cuando

$r \rightarrow \infty$, y entonces $A(r)B(r) = 1$. Sustituimos esta relación en R_{22} e igualamos a T_{22}

$$\begin{aligned}\frac{r^2 E^2}{2AB} &= -\frac{1}{B} + 1 - \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) \\ \frac{r^2 E^2}{2} &= -A + 1 - \frac{A}{2} \left(\frac{2A'}{A} \right) \\ \frac{r^2}{2} \left(\frac{Q}{r^2} \right) &= -A - A'r + 1\end{aligned}$$

despejando para $A + rA'$

$$A + rA' = \partial_r(rA) = 1 - \frac{Q^2}{r^2} \quad (83)$$

integrados para encontrar $A(r)$

$$\begin{aligned}Ar &= \int dr - \int \frac{Q^2}{r^2} dr \\ A(r) &= 1 + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{cte}{r}\end{aligned}$$

Para encontrar la constante de integración debemos recordar que en el caso $Q = 0$ se debe recuperar la solución de Schwarzschild por ende $A(r)|_{Q=0} = 1 - 2GM/r$ y por lo tanto la constante es $-2GM$. La forma explícita de $B(r)$ y $E(r)$ resultan triviales a partir de este punto. Finalmente, el elemento de línea para el espacio-tiempo fuera de un cuerpo de masa M y con una carga Q está dado por

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}$$

(84)

A tal solución se le conoce como la métrica de Reissner-Nordström, y el campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ del objeto masivo está dado por la ecuación familiar $E(r) = Q/r^2$. Al igual que con la solución de Schwarzschild sin carga, se debe considerar la geometría completa para llegar al agujero negro con carga, sin embargo la presente no abordaremos la exploración de esta geometría, para tener un tratado general se puede dirigir a los siguientes trabajos [16] [28] [4].

4. Agujeros negros en AdS

Hemos hablado sobre agujeros que son asintóticamente planos. Sin embargo, los agujeros negros en un espacio asintóticamente anti-de Sitter han sido de mucho interés, especialmente en el marco de la correspondencia AdS/CFT. Históricamente, con el descubrimiento de las propiedades termodinámicas exhibidas por agujeros negros, se encontró que el agujero negro de Schwarzschild en un espacio asintóticamente plano tiene un calor específico negativo y por lo tanto es inestable termodinámicamente, caso contrario a un agujero negro de Schwarzschild en un espacio asintóticamente AdS (para radios del horizonte suficientemente grandes [26]). En esta sección exploraremos algunas propiedades de los agujeros negros en AdS, comenzando con resultados sobre la termodinámica de agujeros negros para después introducir la geometría del espacio Shcwarzschild-AdS.

4.1. Propiedades termodinámicas de agujeros negros

Como lo mencionamos en 2, Hawking y Bekenstein encontraron que los agujeros negros tienen una temperatura y entropía dadas por

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad S_{BH} = \frac{A}{4}$$

donde κ y A son la constante de gravedad de superficie y el área del agujero negro respectivamente. Ambas relaciones dependen de cantidades en la frontera y por lo tanto son una manifestación del principio holográfico. A partir de entonces se inicia la exploración de las propiedades termodinámicas para diferentes tipos de agujeros negros.

4.1.1. Solución de Schwarzschild

En la sección anterior estudiamos la solución del agujero de Schwarzschild. Su temperatura T_H es

$$T_H = \frac{1}{8\pi M} \quad (85)$$

El valor de κ en el caso de Schwarzschild es de $1/4M$ [24]. Por lo tanto, su calor específico está dado por $\frac{\partial T_H}{\partial M}$

$$T' = \frac{-1}{8\pi M^2} \quad (86)$$

Consideremos entonces tal agujero negro en equilibrio con una reserva de calor infinita, cualquier fluctuación positiva en la temperatura ocasionaría que este irradiara masa, mientras la temperatura continuara subiendo hasta que el agujero negro se evapora. Una fluctuación negativa en la temperatura haría que el agujero negro absorbiera más radiación de la que radia incrementando así su masa. Entonces, el agujero negro se enfría, absorbe masa a una tasa de cambio mayor y crece indefinidamente.

4.1.2. Agujero negro en una caja

Para curar está inestabilidad termodinámica, se consideró poner agujero negro de Schwarzschild en una caja de volumen infinito y capacidad calorífica finita [13]. Así fue como Hawking encontró que el agujero negro puede estar en equilibrio termodinámico si la energía de radiación satisface $E_{rad} < \frac{1}{4}M$. A continuación resumiremos una derivación rápida de esta condición:

Sabemos que un sistema está en equilibrio termodinámico si se cumple que

$$S = S_{rad} + S_{BH} \quad (87)$$

sea un máximo sujeto a la restricción de la energía total, $E = E_{rad} + M$, donde S es la entropía total. Esto se traduce a las siguientes condiciones:

1. $d(S - \lambda E) = 0$, donde λ es el multiplicador de Lagrange.
2. $\frac{\partial^2 S_{rad}}{\partial E_{rad}^2} + \frac{\partial^2 S_{BH}}{\partial M^2} < 0$

De la primera condición obtenemos

$$\frac{\partial S_{rad}}{\partial E_{rad}} dE_{rad} + \frac{\partial S_{BH}}{\partial M} dM - \lambda dE_{rad} - \lambda dM = 0, \quad o\lambda = \frac{\partial S_{rad}}{\partial E_{rad}} = \frac{\partial S_{BH}}{\partial M} \quad (88)$$

Lo cual nos dice que el agujero negro está en equilibrio con la radiación: $T_{rad} = T_{BH}$. La segunda condición implica que

$$\frac{\partial^2 S_{rad}}{\partial E_{rad}^2} + \frac{\partial^2 S_{BH}}{\partial M^2} < 0, \quad o - T_{rad}^{-2} \frac{\partial T_{rad}}{\partial E_{rad}} - T_{BH}^{-2} \frac{\partial T_{BH}}{\partial M} < 0 \quad (89)$$

y debido a que la energía irradiada por el agujero negro es proporcional a la cuarta potencia de temperatura, tenemos que

$$\frac{\partial T_{rad}}{\partial E_{rad}} = \frac{1}{4} \frac{T_{rad}}{E_{rad}} \quad (90)$$

Por lo tanto, la segunda condición se reduce a $E_{rad} < \frac{1}{4}M$.

4.2. Solución Schwarzschild-AdS

A pesar de que poner el agujero negro en una caja con las condiciones antes mencionadas nos lleva a una solución termodinámicamente estable, la situación planteada no es para nada una situación física. Así que una construcción más natural fue poner el agujero negro en un espacio-tiempo que no es asintóticamente plano. En 2.1 introducimos un espacio-tiempo con constante cosmológica negativa, el cual se puede pensar como un espacio con una barrera de potencial que aparece cuando uno se acerca asintóticamente al infinito, por lo tanto también puede ser usado como una caja “natural”. En esta sección retomaremos y generalizaremos la solución encontrada para AdS_2 , después introduciremos el espacio-tiempo que usaremos para la construcción de la cuña causal, es decir Schwarzschild-AdS.

El espacio AdS es una solución a las ecuaciones de Einstein con la siguiente constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}, \quad \Lambda = -\frac{3}{b^2} < 0 \quad (91)$$

También lo podemos pensar como una subvariedad de $\mathbb{R}^{2,n-1}$. A su vez, la métrica para $\mathbb{R}^{2,n-1}$ es

$$ds^2 = -(dx^0)^2 - (dx^n)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (dx^i)^2 \quad (92)$$

El espacio AdS n -dimensional (AdS_n), está definido como el conjunto de puntos a una distancia b del origen:

$$\left\{ (x^0, \dots, x^n) \mid -(x^0)^2 - (x^n)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x^i)^2 = -b^2 \right\} \quad (93)$$

Por construcción este espacio tiene grupo de isometría $SO(2, n-1)$, análogo al grupo de Lorentz $SO(1, n)$ asociado al espacio de Minkowski. Este hecho fue importante en el establecimiento de la correspondencia.

Existen 4 conjuntos de coordenadas generalmente usados para describir AdS. Primero tenemos las coordenadas globales

$$x_0 = b \cosh \rho \cos \tau, \quad x_n = b \cosh \rho \sin \tau, \quad x_i = R \sinh \rho \Omega_i \quad (94)$$

donde $\tau \in [0, 2\pi)$, $\rho \geq 0$, $i = 1, \dots, n-1$ y $\sum_i \Omega_i^2 = 1$. Sustituyendo en la métrica obtenemos

$$ds^2 = b^2(-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{n-2}^2) \quad (95)$$

donde $d\Omega_{n-2}^2$ es la métrica de S^{n-2} . Las coordenadas (τ, ρ, Ω) son las mismas coordenadas usadas en 2.1, éstas cubren todo el espacio. Recordemos también que existe la posibilidad de tener curvas tipo-tiempo que sean cerradas. La manera de evadir esto es desenvolviendo la coordenada τ para que abarque de $-\infty < \tau < \infty$. La topología de AdS se puede observar mejor si se compacta la métrica usando $\tan \theta = \cosh \rho$.

$$ds^2 = \frac{b^2}{\cos \theta}(-d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{n-2}^2) \quad (96)$$

Esta métrica es conforme a la métrica del espacio de Minkowski también conocida como el universo estático de Einstein $d\hat{s}^2 = -d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{n-2}^2$. Por lo tanto, AdS es conforme a la mitad de el universo estático de Einstein. En el caso de AdS_2 , θ toma valores entre $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, para cualquier otro caso θ va de 0 a $\frac{\pi}{2}$.

Otras coordenadas que también son usadas son las coordenadas de Poincaré, (t, \hat{x}_i, z) para $i = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{1}{2z}(z^2 + b^2 + \sum_i (\hat{x}^i)^2 - t^2), & x^i &= \frac{R\hat{x}^i}{z} \\ x^{n-1} &= \frac{1}{2z}(z^2 - b^2 + \sum_i (\hat{x}^i)^2 - t^2), & x^n &= \frac{bt}{z} \end{aligned}$$

sustituyendo estas nuevas coordenadas en la métrica obtenemos

$$ds^2 = \frac{b^2}{z^2}(-dt^2 + \sum_i (\hat{x}^i)^2 + dz^2). \quad (97)$$

Sin embargo, para la discusión de la estabilidad termodinámica del agujero negro de Schwarzschild-AdS trabajaremos en las coordenadas estáticas (t, r, θ, ϕ) , donde $t = b\tau$, $r = b \sinh \rho$. A continuación nos restringiremos a el caso AdS_4 . En coordenadas estáticas la métrica toma la siguiente forma

$$ds^2 = -(1 + \frac{r^2}{b^2})dt^2 + (1 + \frac{r^2}{b^2})^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (98)$$

Cualquier métrica que tienda asintóticamente a (98) se le denomina asintóticamente AdS.

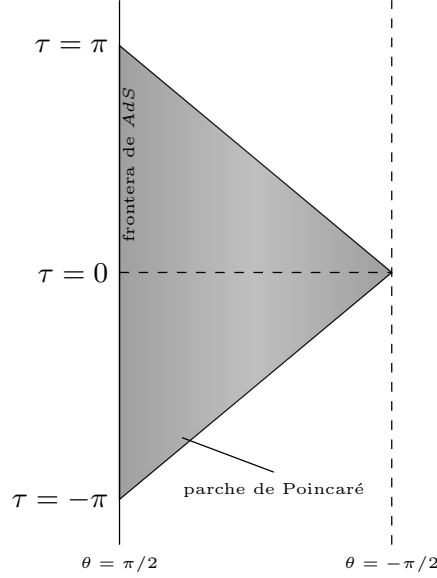
Como ya lo adelantamos, la métrica de AdS tiene una barrera de potencial infinita ubicada en el infinito asintótico. Para confirmar lo anterior usaremos la ley de Tolman la cual establece que la energía medida en el infinito asintótico está corrida al rojo comparada con la energía medida localmente [27]. Consideremos una partícula con un cuádrimomento $P^\mu = (-E, p^i)$, y un observador estático en el infinito con una cuádrivelocidad $U^\mu = k^\mu / \sqrt{-k^2}$, donde $k = \partial/\partial t$. La energía medida por el observador local esta dada por

$$E = -g_{\mu\nu} U^\mu P^\nu = \frac{E_\infty}{\sqrt{-k^2}} = \frac{E_\infty}{\sqrt{-g_{00}}} \quad (99)$$

Por lo tanto, E está corrida al rojo por un factor $\sqrt{-g_{00}}$ de E_∞ . En el caso de la métrica de AdS, el elemento $-g_{00}$ está dado por $(1 + \frac{r^2}{b^2})$, lo cual indica que E está corrida al rojo hasta el valor 0 cuando $r \rightarrow \infty$. Por ende, la temperatura T también estará corrida al rojo por el mismo factor, mostrando así la barrera infinita de potencial ubicada en el infinito asintótico de AdS.

4.2.1. Diagrama Conforme

De la métrica de AdS en coordenadas de Poincaré (97) podemos ver que se trata de la métrica de Minkowski multiplicada por un factor conforme, por lo tanto el diagrama conforme también estará formado por un triángulo. Lo cuál resulta contradictorio ya que dos espacios-tiempo distintos no pueden tener el mismo diagrama. Lo que sucede aquí es que las coordenadas de Poincaré no cubren por completo al espacio AdS, sólo cubren una parte (un periodo en la coordenada τ) que se denomina el "parche" de Poincaré. Así pues el diagrama triangular tipo Minkowski es solo para el parche de Poincaré. Por otra parte, a partir de la métrica en coordenadas globales (96) se puede observar que el diagrama conforme para AdS_2 es una cinta infinita (debido al rango infinito de la coordenada τ) que va de $\theta = -\pi/2$ hasta $\theta = \pi/2$, donde el parche de Poincaré triangular comparte frontera con la frontera de AdS_2 .

Figura 3: Diagrama conforme para AdS_2

El diagrama conforme para AdS_n (ahora $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) es un cilindro obtenido por la revolución de la cinta infinita al rededor del eje $\theta = 0$, este círculo de revolución representa una esfera $n - 2$ dimensional, y por ende la frontera de AdS_n es $\mathbb{R}_\tau \times S_{n-2}$.

4.2.2. Al fin, el agujero negro en AdS

En este punto, por inspección podemos proponer una métrica que se vea tipo Schwarzschild para r pequeño y tipo AdS para r asintótico, a esta métrica se le conoce como Schwarzschild-AdS

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\phi^2 + \sin^2\phi d\Omega_2^2) \quad (100)$$

tal métrica satisface las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica negativa. El agujero negro tiene el horizonte de eventos en $r = r_+$, tal valor es la raíz más grande del polinomio $f(r) = r^2 + 1 - \frac{r_h^2(r_h^2+1)}{r^2}$. Para calcular su temperatura (y posteriormente probar su estabilidad termodinámica) podríamos primero encontrar su gravedad de superficie o bien realizar una rotación de Wick $\tau = it$ y observar la métrica cerca del horizonte de eventos [15]:

Sea $r = r_+ + \rho^2$ con $\rho \ll 1$, expandiendo $f(r)$ en ρ a primer orden obtenemos

$$f(r) = \frac{b^2 \rho^2 + 3r_+^2 \rho^2 + 3r_+^2 \rho^4 + \rho^6}{b^2(r_+ + \rho^2)} \approx \frac{b^2 + 2r_+^2}{b^2 r_+}$$

sustituyéndolo en la métrica para encontrar su forma cerca del horizonte obtenemos

$$ds^2 = \frac{4b^2 r_+}{b^2 + 3r_+^2} \left(\left(\frac{b^2 + 3r_+^2}{2b^2 r_+} \right) \rho^2 d\tau^2 + d\rho^2 \right) + r_+^2 d\Omega^2$$

el término dentro de los paréntesis se parece a las coordenadas polares $ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$, si θ tuviera periodo 2π entonces sería la métrica del plano, cualquier otro valor de θ resultaría en una singularidad cónica en $r = r_+$ que para evitarla el periodo de τ debe ser $\beta_0 = \frac{4\pi b^2 r_+}{b^2 + 3r_+^2}$. Se sabe que la temperatura de un agujero negro es el inverso de su periodo [15], por lo tanto

$$T_{BH} = \beta_0^{-1} = \frac{b^2 + 3r_+^2}{4\pi b^2 r_+} \quad (101)$$

Podemos observar que la temperatura no decrece de manera monótona, a diferencia del agujero negro de Schwarzschild, en AdS este adquiere una temperatura mínima ($T = \sqrt{3}/(2\pi b)$). Para cualquier temperatura mayor que la mínima existen 2 soluciones del agujero negro en equilibrio ($r < r_0$ y $r > r_0$), el primero tiene calor específico negativo y por lo tanto es termodinámicamente inestable mientras que el segundo ($r > r_0$) sí tiene calor específico positivo. Poner al agujero negro en un espacio asintóticamente AdS le otorgó estabilidad termodinámica. Para cualquier temperatura menor a la mínima no existe una solución de agujero negro, lo que se tiene es radiación térmica. Hawking y Page encontraron que a pesar de que los agujeros negros pueden estar en equilibrio térmico con radiación, estos no son un estado preferido debajo de una cierta temperatura. Una vez alcanzada esta temperatura ocurre una transición de fase en la cual los agujeros negros se convierten en un estado preferido [15]. Esta transición sería reinterpretada posteriormente por Witten en el marco de la correspondencia AdS/CFT como una transición de fase en la teoría gauge entre los estados confinado y no confinado [35]. La termodinámica de agujeros negros en AdS es mucho más rica que la de sus primos asintóticamente planos, y con la aparición de la correspondencia se encontró una conexión entre estos y las propiedades termodinámicas de las teorías gauge. Desde entonces se ha trabajado en agujeros negros en AdS con las propiedades de masa, carga y rotación.

A continuación mostramos la métrica de Reissner-Nordstrom, pero antes generalizaremos la solución Schwarzschild-AdS a dimensiones más altas.

La métrica en coordenadas globales del agujero negro en un espacio AdS $d + 1$ -dimensional con un radio de curvatura b está dado por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\phi^2 + \sin^2\phi d\Omega_{d-2}^2), \quad f(r) = \frac{r^2}{b^2} + 1 - \frac{2\mu}{r^{d-2}} \quad (102)$$

donde μ tiene la forma

$$\mu = \frac{8\pi GM}{(d-1)\text{Vol}(S^{d-1})} \quad (103)$$

con M como la masa del agujero negro. El horizonte de eventos se encuentra en $r = r_h$ tal que $f(r_h) = 0$, mientras que la temperatura de Hawking es

$$T_H = \frac{dr_h^2 + (d-2)b^2}{4\pi b^2 r_h} \quad (104)$$

Uno también podría poner un agujero negro de Reissner-Nordstrom dentro del espacio anti-de Sitter agregando el parámetro Q a la función $f(r)$ [5]

$$f(r) = \frac{r^2}{b^2} + 1 - \frac{2\mu}{r^{d-2}} + \frac{q^2}{r^{2d-4}} \quad (105)$$

q es un parámetro en función de la carga $Q = \sqrt{2(d-1)(d-2)}(\text{Vol}(S^{d-1}))q$ del potencial vectorial (parte eléctrica)

$$A = \left(-\frac{1}{c} \frac{q}{r^{d-2}} + \Phi\right) dt \quad (106)$$

donde $c = (2(d-2)/(d-1))^{1/2}$ y Φ es una constante que se fija tal que $A_t(r_+ = 0)$. r_+ es la raíz positiva más grande del polinomio $f(r)$, el cual debe satisfacer la siguiente relación

$$\left(\frac{d}{d-2}\right)r_+^{2d-2} + b^2 r_+^{2d-4} \geq q^2 b^2 \quad (107)$$

con tal de que la métrica describa un agujero negro cargado con un horizonte sin singularidad en $r = r_+$. Por último, el valor de Φ está dado por $q/(cr_+^{d-2})$.

Las soluciones para el agujero negro de Kerr en AdS fueron estudiadas por primera vez en el contexto de la correspondencia AdS/CFT en [2] donde estudian la solución Kerr-AdS en 4 y 5 dimensiones. Los únicos parámetros que se le pueden agregar al agujero negro son Q , M y J , así lo establecen los teoremas de no pelo[21].

5. Causalidad

El concepto de causalidad, es decir, que un evento A no pueda ser afectado por un evento B si este no se encuentra en el pasado de su cono de luz, o que un evento B no pueda afectar a un evento A si este no se encuentra en el futuro de su cono de luz, es esencial en una teoría de la física, y en relatividad juega un papel fundamental. En el caso de un espacio-tiempo plano, para a un evento p se tiene la definición anterior de causalidad (en términos de eventos en el cono de luz), mientras que en un espacio-tiempo curvo la estructura causal varía globalmente a pesar de que localmente es de la misma naturaleza que en el caso anterior. A continuación motivaremos la construcción de la cuña causal introduciendo algunos conceptos usados en el estudio de la estructura causal de un espacio-tiempo. Los conceptos asociadas a la estructura causal (como dominios de dependencia y de influencia) son los ingredientes para la construcción de la cuña causal.

5.1. Definiciones, resultados básicos y la Cuña Causal

Sea M un espacio-tiempo con una métrica asociada g_{ab} . En cada punto $p \in M$ tenemos un espacio tangente a p , T_p , cuyo origen es el cono de luz de p , por lo tanto el cono de luz es un subconjunto de T_p y no de M . Para definir el futuro y el pasado de p en el cono de luz es necesario que M sea orientable en el tiempo, es decir, que sea posible hacer una designación continua del futuro y el pasado mientras que p varía en M . En tal caso, una curva tipo-tiempo o nula ubicada en el futuro del cono de luz será una curva dirigida hacia el futuro. Todo espacio-tiempo es orientable en el tiempo si contiene un campo vectorial (una función continua sobre M) tipo-tiempo que no sea nulo en ningún punto. De aquí en adelante supondremos que el espacio-tiempo es siempre orientable en el tiempo.

Definición 1: Una curva causal γ por definición es una curva que no es tipo-espacio, es decir, puede ser nula o tipo-tiempo.

5.1.1. Dominio de Influencia

Definición 2: $\forall p \in M$, el futuro causal de p o dominio de influencia de p , denotado como $J^+(p)$, se define como

$$J^+(p) \equiv \{q \in M \mid \exists \text{ una curva causal } \gamma \text{ dirigida hacia el futuro que va de } p \text{ a } q\}$$

De manera similar, el pasado causal de p , $J^-(p)$, se define en términos de las curvas causales dirigidas hacia el pasado.

Las definiciones para $J^\pm(p)$ se pueden extender de un punto p una región \mathcal{S}

Definición 3: El dominio de influencia de una región \mathcal{S} , $J[\mathcal{S}]$ es la unión de los dominios de influencia $\forall p \in \mathcal{S}$

$$J^\pm[\mathcal{S}] = \bigcup_{p \in \mathcal{S}} J^\pm(p)$$

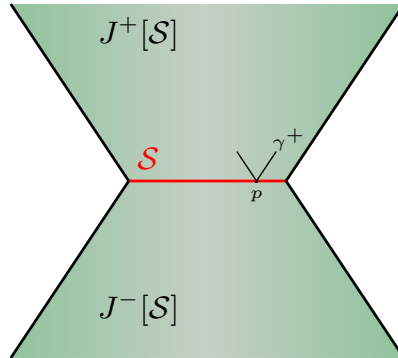


Figura 4: Dominio de influencia para una región \mathcal{S}

En la sección 4 nos aseguramos de usar coordenadas que evitaran curvas tipo-tiempo cerradas en Schwarzschild-AdS debido a que estas violaban la condición de causalidad del espacio-tiempo al conducirnos a paradojas como la siguiente: considera a un observador que viaja sobre una de estas curvas S^1 , en algún momento este observador llegaría al punto justo antes de su propia partida pudiendo influenciar su salida inicial. Para ubicar las regiones donde se viola la causalidad se hace uso de las siguientes definiciones

Definición 4: Una región de un espacio-tiempo M donde se viola la causalidad es aquella para la cual un conjunto de puntos x se encuentran conectados consigo mismos por una curva causal γ

En un espacio-tiempo causal, la región anterior es el conjunto vacío. Por lo tanto, para un punto p en una región donde se viola la causalidad, la intersección entre el pasado y el futuro causal es diferente del vacío, lo cual nos lleva a la siguiente definición

Definición 5: La región asociada a un punto p donde se viola la causalidad está definida como

$$J^0(p) \equiv J^+(p) \cap J^-(p)$$

Al promover p a una región \mathcal{S} obtenemos lo siguiente

Definición 6: La región donde se viola la causalidad está definida como

$$J^0[\mathcal{S}] \equiv \bigcup_{p \in \mathcal{S}} J^0(p)$$

Por lo tanto para que un espacio-tiempo sea causal la región $J^0(M)$ debe ser el conjunto vacío.

5.1.2. Dominio de Dependencia

Hemos descrito los dominios de influencia en los cuales nos apoyamos para definir a un espacio-tiempo como causal, particularmente sabemos que $J^+[\mathcal{S}]$ contiene la colección de eventos que podrían ser influenciados por el conjunto de eventos que conforman a la región \mathcal{S} . Sin embargo, los eventos $p \in J^+[\mathcal{S}]$ no están determinados por \mathcal{S} . Y debido que todos los puntos en \mathcal{S} están conectados por una curva causal con todos los eventos en $J^+[\mathcal{S}]$, existe una región $D \subset J$ que estaría completamente determinada por los eventos en \mathcal{S} , a tal región se le conoce como *desarrollo futuro de Cauchy* o *dominio de dependencia* de \mathcal{S} .

Definición 7: El dominio de dependencia futura de \mathcal{S} , denotado $D^+[\mathcal{S}]$, es

$$D^+[\mathcal{S}] \equiv \{p \in M \mid \text{Toda curva causal pasada } \gamma^- \text{ a través de } p \text{ intersecta a } \mathcal{S}\}$$

De manera similar, el *dominio de dependencia pasada* de \mathcal{S} , $D^-[\mathcal{S}]$ se define intercambiando a $p \in J^+[\mathcal{S}]$ y a las curvas causales dirigidas hacia el pasado γ^-

por $p \in J^-[\mathcal{S}]$ con curvas causales dirigidas hacia el futuro γ^+ . Así, el dominio completo de dependencia de \mathcal{S} , $D[\mathcal{S}]$, es el conjunto definido por

$$D[\mathcal{S}] = D^+[\mathcal{S}] \cup D^-[\mathcal{S}] \quad (108)$$

Para que la definición anterior se mantenga es necesario que las curvas causales γ^\mp no tengan como punto final a un punto q en el pasado (para el caso de γ^-) o a un punto q en el futuro (para el caso de γ^+). $D[\mathcal{S}]$ representa el conjunto completo de eventos cuyas condiciones deben estar determinadas si conociéramos las condiciones en \mathcal{S} .

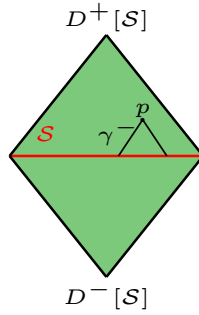


Figura 5: Dominio de influencia para una región \mathcal{S}

Cercanamente relacionado con el dominio de dependencia, tenemos al concepto de *hiperbolicidad global*. Se dice que un espacio-tiempo es globalmente hiperbólico si posee una *superficie de Cauchy*. Una superficie de Cauchy es un conjunto cerrado, Σ , *acronal* (donde dos puntos cualesquiera no pueden ser unidos por una curva causal) tal que $D[\Sigma] = M$. Por lo tanto, en un espacio-tiempo globalmente hiperbólico el futuro (o pasado) del universo puede ser predicho (o retrocedido) a partir de la evolución de la información contenida en Σ . Así, podríamos pensar a la superficie de Cauchy como un mismo instante de tiempo a través de todo el espacio-tiempo M .

Esta sección está basada en las siguientes referencias [14], [33], [32] y [11].

5.1.3. Cuña Causal

Consideremos un espacio-tiempo causal asintóticamente anti-de Sitter, $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M}$, donde \mathcal{M} es el bulto y $\partial\mathcal{M}$ su frontera (tipo-tiempo) ubicada en el infinito conforme \mathcal{B} que a su vez es un espacio d -dimensional con una métrica Lorentziana fija. Supongamos que \mathcal{B} admite una foliación en superficies de Cauchy, $\Sigma_{\mathcal{B}}$ y tomemos una subregión \mathcal{A} de $\Sigma_{\mathcal{B}}$ con frontera $\partial\mathcal{A}$.

Sabemos que el dominio completo de dependencia de \mathcal{A} , que denotaremos $\diamond_{\mathcal{A}}$, está dado por

$$\diamond_{\mathcal{A}} = D_{\mathcal{B}}^+[\mathcal{A}] \cup D_{\mathcal{B}}^-[\mathcal{A}] \quad (109)$$

Entonces, la cuña causal, $\blacklozenge_{\mathcal{A}}$, es el conjunto de puntos $p \in \mathcal{M}$ que se encuentran en la intersección de los dominios de influencia futura y pasada de $\diamond_{\mathcal{A}}$

$$\blacklozenge_{\mathcal{A}} = J^-[\diamond_{\mathcal{A}}] \cap J^+[\diamond_{\mathcal{A}}] \quad (110)$$

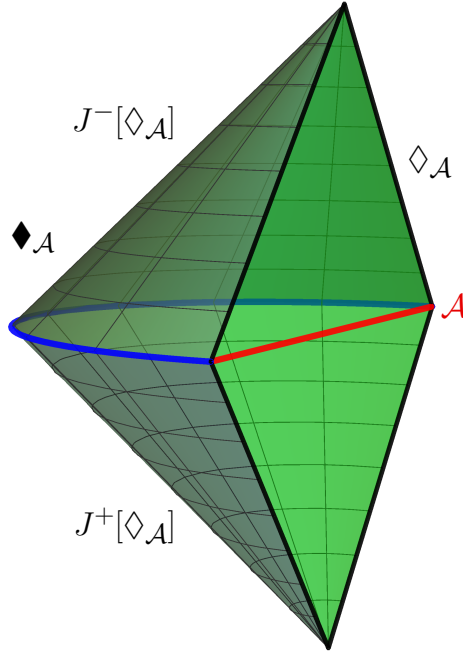


Figura 6: Cuña Causal $\blacklozenge_{\mathcal{A}}$ en AdS planar

La construcción de la cuña causal está motivada por el problema de la reconstrucción holográfica del espacio-tiempo en el marco de la correspondencia

AdS/CFT, se propuso en [18] como un medio para encontrar la información contenida en una región en el bulto que se puede cuantificar a partir de una región, \mathcal{A} , en la frontera, haciendo uso de relaciones causales. A continuación construiremos la cuña causal para un agujero negro en un espacio-tiempo asintóticamente anti-de Sitter para estudiar como cambia su estructura en función del radio del agujero negro y de la medida de la región \mathcal{A} , lo cual representa la parte principal de esta tesis.

6. Cuña Causal en Schwarzschild-AdS

En la sección anterior encontramos que la cuña causal está compuesta por curvas causales en el bulto del espacio-tiempo, es por esto que su frontera está compuesta por geodésicas nulas. Por lo tanto, es necesario encontrar las geodésicas nulas del espacio-tiempo en el cual construiremos la cuña causal $\blacklozenge_{\mathcal{A}}$. El espacio-tiempo que usaremos será el agujero negro de Schwarzschild-AdS $_{d+1}$, en particular, el caso $d = 4$ en coordenadas globales.

6.1. Shwarzschild-AdS $_{4+1}$ en coordenadas globales

Consideremos el agujero negro Schwarzschild-AdS $_{d+1}$ con radio de curvatura b igual a la unidad. El agujero negro estará caracterizado por su radio del horizonte, r_h , en unidades de AdS, donde $r_h \in (0, \infty)$. Así, la función $f(r)$ y el elemento de línea tendrán la siguiente forma

$$f(r) = r^2 + 1 - \frac{r_h^2(r_h^2 + 1)}{r^2}, \quad ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\phi^2 + \sin^2\phi d\Omega_2^2)$$

En el caso de $d=4$, podemos simplificar el problema a uno 3-dimensional reduciendo la geometría S^{d-1} en la métrica a un solo ángulo no trivial $\phi \in [0, \pi]$ el cuál también caracterizará a la región \mathcal{A} , $\phi_{\mathcal{A}}$, en la frontera. Con está reducción es conveniente compactar la coordenada radial, $r = \tan \rho$, tal que $\rho \in [0, \pi/2)$ y usar las coordenadas globales (t, ρ, ϕ) . Después del cambio de variable tenemos que $dr^2 = \sec^2 \rho d\rho^2$, además si introducimos la constante $\mu = r_h^2(r_h^2 + 1)$, $f(r)$ toma la forma

$$\begin{aligned} f(r) &= \tan^2 \rho + 1 - \frac{\mu}{\tan^2 \rho} = \sec^2 \rho - \frac{\mu}{\tan^2 \rho} \\ &= \sec^2 \rho - \mu \frac{\cos^2 \rho}{\sin^2 \rho} \times \frac{\cos^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} - \mu \frac{\cos^4 \rho}{\cos^2 \rho \sin^2 \rho} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \rho} \left(1 - \mu \frac{\cos^4 \rho}{\sin^2 \rho}\right). \end{aligned}$$

realizaremos una sustitución más en $f(r)$ para introducir una función $g(\rho)$,

$$f(r) = \frac{g(\rho)}{\cos^2 \rho}, \quad \text{donde} \quad g(\rho) = 1 - \mu \frac{\cos^4 \rho}{\sin^2 \rho}$$

ahora sustituimos dr y $f(r)$ en el elemento de línea

$$ds^2 = -\frac{g(\rho)}{\cos^2 \rho} dt^2 + \frac{\cos^2}{g(\rho)} \sec^4 \rho d\rho^2 + \tan^2 \rho d\phi^2$$

para finalmente obtener la métrica de Schwarzschild-AdS₄₊₁ reducida a un problema efectivo en solo tres coordenadas

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \rho} (-g(\rho) dt^2 + \frac{d\rho^2}{g(\rho)} + \sin^2 \rho d\phi^2) \quad (111)$$

6.2. Geodésicas Nulas

Usaremos el principio variacional sobre el elemento de línea para caracterizar a las geodésicas nulas en función de las coordenadas (t, ρ, ϕ) .

$$I = \frac{1}{2} \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda$$

Sustituimos los términos del elemento de línea $g_{\mu\nu}$ y aplicamos la variación

$$I = \frac{1}{2} \int \left[-\frac{g(\rho)}{\cos^2 \rho} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{g(\rho) \cos^2 \rho} \left(\frac{d\rho}{d\lambda} \right)^2 + \tan^2 \rho \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \right] d\lambda \quad (112)$$

Para encontrar como cambia una coordenada respecto de un parámetro afín λ , se tiene que considerar la variación únicamente en esa coordenada, $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$. Comenzaremos con la coordenada t , en tal caso el único término que sobrevive a la variación es el siguiente:

$$\delta \left[-\frac{g(\rho)}{\cos^2 \rho} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \right] = -\frac{2g(\rho)}{\cos^2 \rho} \frac{dt}{d\lambda} \frac{d(\delta t)}{d\lambda} \quad (113)$$

Por lo tanto, para encontrar la ecuación geodésica se debe resolver la siguiente integral

$$\delta I = - \int \left[\frac{g(\rho)}{\cos^2 \rho} \frac{dt}{d\lambda} \frac{d(\delta t)}{d\lambda} \right] d\lambda \quad (114)$$

Procedemos a integrar por partes, usando $\int u dv = vu - \int v du$, tomando u y dv de la siguiente manera

$$u = \frac{g(\rho)}{\cos^2 \rho} \cdot \frac{dt}{d\lambda}, \quad dv = \frac{d(\delta t)}{d\lambda} \cdot d\lambda$$

tal que

$$du = \frac{g(\rho)}{\cos^2 \rho} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{dt}{d\lambda} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{g(\rho)}{\cos^2 \rho} \right), \quad v = \delta t$$

La derivada del término $(g(\rho)/\cos^2 \rho)$ respecto de λ la calculamos a continuación

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{g(\rho)}{\cos^2 \rho} \right) = \frac{g'(\rho) \cos^2 \rho \frac{d\rho}{d\lambda} + 2g(\rho) \cos \rho \sin \rho \frac{d\rho}{d\lambda}}{\cos^4 \rho}$$

Una vez derivado el término lo agregamos a du

$$\begin{aligned} du &= \frac{g(\rho)}{\cos^2 \rho} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{dt}{d\lambda} \cdot \frac{\dot{g}(\rho) \cos^2 \rho \frac{d\rho}{d\lambda} + 2g(\rho) \cos \rho \sin \rho \frac{d\rho}{d\lambda}}{\cos^4 \rho} \\ &= \frac{g(\rho)}{\cos^2 \rho} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \left[\frac{\dot{g}(\rho) \cos^2 \rho + 2g(\rho) \cos \rho \sin \rho}{\cos^4 \rho} \right] \frac{dt}{d\lambda} \frac{d\rho}{d\lambda} \end{aligned}$$

Antes de regresar el término du a la formula para la integración por partes, hay que recordar el producto vu se anula ya que $v = \delta t$, y por definición δt se anula en los extremos de la integral δI . Así que solo nos queda

$$\delta I = \int u dv = - \int du \cdot \delta t d\lambda \quad (115)$$

Debido que se buscan puntos estacionarios, queremos que $\delta I \rightarrow 0$ para cualquier δt , por lo tanto buscamos soluciones a la ecuación $du = 0$, la cuál es equivalente a la ecuación geodésica

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{g(\rho)}{\cos^2 \rho} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \left[\frac{\dot{g}(\rho) \cos^2 \rho + 2g(\rho) \cos \rho \sin \rho}{\cos^4 \rho} \right] \frac{dt}{d\lambda} \frac{d\rho}{d\lambda} \\ &= \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{\cos^2 \rho}{g(\rho)} \left[\frac{\dot{g}(\rho) \cos^2 \rho + 2g(\rho) \cos \rho \sin \rho}{\cos^4 \rho} \right] \frac{dt}{d\lambda} \frac{d\rho}{d\lambda} \end{aligned}$$

Haciendo las simplificaciones necesarias tenemos

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \left(\frac{\dot{g}(\rho)}{g(\rho)} + 2 \tan \rho \right) \frac{dt}{d\lambda} \frac{d\rho}{d\lambda} = 0 \quad (116)$$

Aquí se observa que la ecuación es de la forma 40 con la siguiente conexión de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{\dot{g}(\rho)}{g(\rho)} + 2 \tan \rho \quad (117)$$

Antes de resolver la ecuación (116), encontraremos la ecuación para la coordenada ϕ realizando el mismo procedimiento. En este caso el término que sobrevive a la variación $\delta\phi$ es

$$\delta \left[\tan^2 \rho \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \right] = \tan^2 \rho \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d(\delta\phi)}{d\lambda} \quad (118)$$

Por lo tanto la integral a resolver δI a resolver es la siguiente

$$\delta I = \frac{1}{2} \int \left[\tan^2 \rho \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d(\delta\phi)}{d\lambda} \right] d\lambda \quad (119)$$

De nuevo integramos por partes con u y dv como sigue

$$u = \tan^2 \rho \cdot \frac{d\phi}{d\lambda}, \quad dv = \frac{d(\delta\phi)}{d\lambda} \cdot d\lambda$$

tal que

$$du = 2 \tan \rho \sec^2 \rho \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\rho}{d\lambda} + \tan^2 \rho \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2}, \quad v = \delta t$$

Por lo tanto la ecuación geodésica estará dada por $du = 0$ (ver derivación de ecuación geodésica para t)

$$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + \frac{2\sec^2\rho}{\tan\rho} \cdot \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\rho}{d\lambda} = 0 \quad (120)$$

Ahora solo falta la ecuación geodésica para la coordenada ρ , la cual puede ser encontrada una vez que encontremos \dot{t} y $\dot{\phi}$ y las sustituimos en el elemento de línea para después despejar a $\dot{\rho}$. A continuación resolveremos para \dot{t} .

A la ecuación (116) le aplicamos el cambio de variable $u = \frac{dt}{d\lambda}$ tal que

$$\frac{du}{d\lambda} + \left(\frac{\dot{g}(\rho)}{g(\rho)} + 2\tan\rho\right) \cdot u \frac{d\rho}{d\lambda} = 0 \quad (121)$$

La anterior es una ecuación diferencial de primer orden y por lo tanto la podemos resolver de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u} &= - \int \left(\frac{\dot{g}(\rho)}{g(\rho)} + 2\tan\rho\right) \cdot d\rho \\ \ln u &= -\ln g(\rho) + 2\ln \cos\rho \\ &= \ln \frac{\cos^2\rho}{g(\rho)} \end{aligned}$$

Entonces, $dt/d\lambda = u$ estará dado por la siguiente ecuación

$$\dot{t} = \frac{\cos^2\rho}{g(\rho)} \quad (122)$$

Para encontrar $d\phi/d\lambda$ tomaremos un atajo, en lugar de resolver la ecuación diferencial (120) observamos que la coordenada ϕ es una coordenada cíclica ya que no aparece explícitamente en el elemento de línea (111) por lo tanto existe una constante de movimiento asociada a ϕ que en este caso se trata del momento angular ℓ

$$\frac{\sin^2\rho}{\cos^2\rho} \dot{\phi} = \tan^2\rho = \ell$$

La constante ℓ caracterizará a cada geodésica y puede tomar valores entre $(0, 1)$ (hay que recordar que ρ toma valores entre 0 y $\frac{\pi}{2}$). De la ecuación anterior despejamos para $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \ell \tan^2\rho \quad (123)$$

Por último tenemos que encontrar $\dot{\rho}$, lo cual es relativamente simple debido a que ya conocemos \dot{t} y $\dot{\phi}$ a los cuales podemos sustituir en la condición de nulidad

para una geodésica: $g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \\
&= -\frac{g(\rho)}{\cos^2 \rho} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \frac{\sec^2 \rho}{g(\rho)} \left(\frac{d\rho}{d\lambda}\right)^2 + \tan^2 \rho \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \\
&= -\frac{g(\rho)}{\cos^2 \rho} \cdot \frac{\cos^4 \rho}{g^2(\rho)} + \frac{\sec^2 \rho}{g(\rho)} \cdot \dot{\rho}^2 + \tan^2 \rho \cdot \frac{\ell^2}{\tan^4 \rho} \\
&= -\frac{\cos^2 \rho}{g(\rho)} + \frac{\sec^2 \rho}{g(\rho)} \dot{\rho}^2 + \frac{\cos^2 \rho}{\sin^2 \rho} \cdot \ell^2
\end{aligned}$$

De la ecuación anterior ya podemos despejar para $\frac{d\rho}{d\lambda}$

$$\dot{\rho} = \cos^2 \rho \sqrt{1 - \ell^2 \frac{g(\rho)}{\sin^2 \rho}}$$

Recordemos que ρ es la coordenada radial, entonces, si $\frac{d\rho}{d\lambda} > 0$ las geodésicas se están alejando de la singularidad en $\rho = 0$, y si $\frac{d\rho}{d\lambda} < 0$ las geodésicas están acercándose a la singularidad. Por lo tanto podemos agregar un parámetro $\eta = \pm 1$ a la ecuación para $\dot{\rho}$ para etiquetar a las geodésicas salientes ($\eta = +1$) y a las geodésicas entrantes ($\eta = -1$). Por lo tanto la ecuación diferencial para ρ en términos del parámetro afín es la siguiente

$$\dot{\rho} = \eta \cos^2 \rho \sqrt{1 - \ell^2 \frac{g(\rho)}{\sin^2 \rho}} \quad (124)$$

6.3. Caracterización de las Geodésicas

Hemos encontrado las ecuaciones diferenciales (116, 123 y 124) para las coordenadas de las geodésicas en el espacio-tiempo Schwarzschild-AdS 3-dimensional, donde cada geodésica está caracterizada por su momento angular ℓ . Sólo las geodésicas con un momento angular suficientemente grande tienen un punto de retorno $\dot{\rho} = 0$ en el cual la función $\rho(\lambda)$ cambia de decreciente a creciente o dicho de otra manera, el punto donde las geodésicas pasan de ser entrantes ($\eta = -1$) a salientes ($\eta = 1$). Estos puntos de retorno están dados por las raíces reales del polinomio $\dot{\rho} = 0$, las cuales existen para momentos angulares ℓ en el rango $(\ell_0, \frac{\pi}{2})$, donde

$$\ell_0 = \sqrt{\frac{4\mu}{1 + 4\mu}} \quad (125)$$

El cual corresponde a la órbita circular nula. Por otra parte, la raíz más grande del polinomio, la cual es la posición radial del punto de retorno está dada por

$$\rho_0 = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\ell^2}{2(1-\ell^2)} \left[1 + \sqrt{1 - 4\mu\left(\frac{1-\ell^2}{\ell^2}\right)} \right]} \quad (126)$$

Las geodésicas con $\ell < \ell_0$ no tienen punto de retorno por lo cual terminan en la singularidad en $r = 0$. Hay que aclarar que en los puntos de retorno la geodésica no se encuentra estática ya que $\dot{\phi}(\rho_0) \neq 0$ por lo tanto sí habrá desplazamiento angular a pesar de que no existe desplazamiento radial. Una vez determinados los puntos de retorno debemos encontrar las integrales para las trayectorias.

Observamos que t y ϕ dependen de ρ por lo tanto definiremos sus integrales en términos de una función $h(\rho)$. Sean $J(\rho)$ y $h(\rho)$ de la siguiente forma

$$J(\rho) = \sqrt{1 - \ell^2 \frac{g(\rho)}{\sin^2 \rho}}, \quad \text{tal que} \quad \frac{d\rho}{d\lambda} = \eta \cos^2 \rho \cdot J(\rho)$$

y

$$h(\rho) = \frac{1}{J(\rho)}, \quad \text{tal que} \quad \cos^2 \rho \cdot d\lambda = \frac{h(\rho)d\rho}{\eta}$$

Podemos sustituir el término $\cos^2 \rho \cdot d\lambda$ en función de $h(\rho)$ en la ecuación diferencia (116)

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{\cos^2 \rho}{g(\rho)}, \quad \text{tal que} \quad dt = \frac{1}{g(\rho)} (\cos^2 \rho \cdot d\lambda) = \frac{1}{g(\rho)} \cdot \frac{h(\rho)}{\eta} d\rho$$

Integramos la ecuación anterior recordando que las coordenadas están caracterizadas por la geodésica con momento angular ℓ

$$t_\ell(\rho) = t_i + \int_{\rho_i}^{\rho_f} \frac{h_\ell(\tilde{\rho})}{\eta \cdot g(\tilde{\rho})} d\tilde{\rho} \quad (127)$$

De manera similar encontramos la coordenada $\phi_\ell(\rho)$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\lambda} &= \frac{\ell}{\sin^2 \rho} \frac{\cos^2 \rho}{g(\rho)}, \quad \text{tal que} \quad d\phi = \frac{\ell}{\sin^2 \rho} (\cos^2 \rho \cdot d\lambda) = \frac{\ell}{\sin^2 \rho} \cdot \frac{h(\rho)}{\eta} d\rho \\ \phi_\ell(\rho) &= \phi_i + \ell \int_{\rho_i}^{\rho_f} \frac{h_\ell(\tilde{\rho})}{\eta \cdot \sin^2 \tilde{\rho}} d\tilde{\rho} \end{aligned} \quad (128)$$

Ahora sí podemos integrar numéricamente para encontrar las coordenadas $(t_\ell(\rho), \rho, \phi_\ell(\rho))$ para cada geodésica con momento angular ℓ .

6.4. Construcción

Para construir la cuña causal $\blacklozenge_{\mathcal{A}}$ en este espacio-tiempo primero hay que construir el dominio de dependencia $\diamond_{\mathcal{A}}$ en su frontera. Etiquetaremos con $t = 0$ a la superficie de Cauchy Σ en donde colocaremos a la región \mathcal{A} en la frontera. Haciendo uso de la simetría angular, el centro de la región \mathcal{A} comenzará en $\phi = 0$ y terminará en $\phi = \phi_{\mathcal{A}}$, así la región en la frontera tendrá una longitud total de $2\phi_{\mathcal{A}}$ con el otro extremo ubicado en la coordenada angular $\phi = -\phi_{\mathcal{A}}$. Con las consideraciones anteriores, el dominio de dependencia en frontera estará dado por

$$\diamond_{\mathcal{A}} = J^+[q^\vee] \cap J^-[q^\wedge]$$

Donde los puntos $q^{\wedge, \vee}$ son los orígenes de los dominios de dependencia $D^+[\mathcal{A}]$ y $D^-[\mathcal{A}]$ respectivamente. En coordenadas (t, ρ, ϕ) estos puntos están ubicados en $(\phi_{\mathcal{A}}, \frac{\pi}{2}, 0)$ y $(-\phi_{\mathcal{A}}, \frac{\pi}{2}, 0)$.

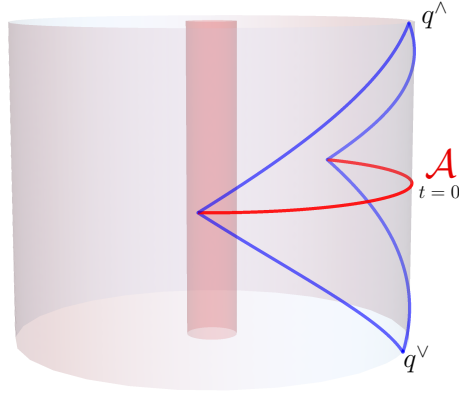


Figura 7: $\diamond_{\mathcal{A}}$ en la frontera

La cuña causal $\blacklozenge_{\mathcal{A}}$ está delimitada por las geodésicas nulas en el bulto, las cuales salen de los puntos $q^{\wedge, \vee}$. Sin embargo, en lugar de graficar las trayectorias completas de las geodésicas, graficaremos la superficie holográfica causal, $\Xi_{\mathcal{A}}$, tal superficie está definida como la intersección entre las geodésicas que vienen de q^\vee y q^\wedge [18], por ende es la región de la cuña causal que llega más lejos en el bulto del espacio-tiempo. Las coordenadas de la superficie holográfica causal $\Xi_{\mathcal{A}}$ son $(t = 0, \rho_{t=0}, \phi_{t=0})$ para cada geodésica con momento angular $\ell \in (0, 1)$, tomando en cuenta que se tienen 2 tipos de geodésicas, aquellas que tienen punto

de retorno y las que terminan en la singularidad. A continuación haremos un esbozo del algoritmo necesario para encontrar la superficie holográfica causal, y presentaremos los gráficos obtenidos.

6.5. Procedimiento

Iniciaremos con las geodésicas con momento angular $\ell > \ell_0$, es decir aquellas que tienen punto de retorno, el cual se calcula usando (125). Notemos que ρ_0 solo dependerá del radio del horizonte del agujero negro y del momento angular. Una vez encontrado ρ_0 , podemos calcular el tiempo que tarda la geodésica en llegar desde la frontera en q^\vee hasta su punto de retorno usando (127)

$$t_\ell(\rho_0) = -\phi_{\mathcal{A}} - \int_{\pi/2}^{\rho_0} \frac{h_\ell(\tilde{\rho})}{g(\tilde{\rho})} d\tilde{\rho} = -\phi_{\mathcal{A}} + \int_{\rho_0}^{\pi/2} \frac{h_\ell(\tilde{\rho})}{g(\tilde{\rho})} d\tilde{\rho} \quad (129)$$

El signo negativo en la integral viene de $\eta = -1$ ya que la geodésica es entrante, mientras que la inversión en los límites de integración es para facilitar la integración numérica. El punto de retorno podría estar antes o después de $t = 0$, es decir en $t_\ell(\rho_0) < 0$ o en $t_\ell(\rho_0) > 0$, su ubicación temporal dependerá de la longitud de la región \mathcal{A} y de r_h , en el primer caso, debemos seguir integrando $t(\rho)$ sobre ρ hasta que lleguemos a un ρ_f tal que $t(\rho_f) > 0$ (nota que ahora la geodésica es saliente, $\eta = 1$)

$$t_\ell(\rho_f) = t_\ell(\rho_0) + \int_{\rho_0}^{\rho_f} \frac{h_\ell(\tilde{\rho})}{g(\tilde{\rho})} d\tilde{\rho} > 0 \quad (130)$$

Por lo tanto $\rho_{t=0}$ estaría en la región (ρ_0, ρ_f) , así la coordenada radial en la superficie holográfica causal para un geodésica con momento angular ℓ será la raíz de la función $t_\ell(\rho)$. Evidentemente en el caso $t_\ell(\rho_0) > 0$ no sería necesario seguir integrando para encontrar la raíz de $t_\ell(\rho)$.

De manera similar pero ahora usando (128) encontramos la coordenada angular en $\Xi_{\mathcal{A}}$, $\phi_{t=0}$, de nuevo separando entre los casos donde $t_\ell(\rho_0) < 0$ y $t_\ell(\rho_0) > 0$. En el primer caso, $\phi_\ell(\rho_{t=0})$ estará dado por la siguiente integral

$$\phi_\ell(\rho_{t=0}) = \phi_i + \ell \int_{\rho_0}^{\rho_{t=0}} \frac{h_\ell(\tilde{\rho})}{\sin^2 \tilde{\rho}} d\tilde{\rho} \quad (131)$$

donde ϕ_i es la coordenada angular desde el punto de retorno ρ_0 hasta la frontera en $\pi/2$. Por otra parte, en el segundo caso, $\phi_\ell(\rho_{t=0})$ estaría dado por la integral desde $\rho_{t=0}$ hasta la frontera.

Para las geodésicas sin punto de retorno ($\ell < \ell_0$), es decir aquellas que terminan en la singularidad, el cálculo es un poco más sencillo. Iniciamos calculando el tiempo que las geodésicas tardan en llegar desde la frontera hasta el horizonte del agujero negro

$$t_\ell(\rho_h) = -\phi_{\mathcal{A}} + \int_{\rho_h}^{\pi/2} \frac{h_\ell(\tilde{\rho})}{g(\tilde{\rho})} d\tilde{\rho} \quad (132)$$

De nuevo nos preguntamos si la geodésica ℓ llega al horizonte del agujero negro antes o después de $t = 0$. Si llega antes, $\phi_\ell(\rho_{t=0})$ y $\rho_{t=0}$ estarán dados por

$$\phi_\ell(\rho_{t=0}) = \ell \int_{\rho_h}^{\pi/2} \frac{h_\ell(\tilde{\rho})}{\sin^2 \tilde{\rho}} d\tilde{\rho}, \quad \rho_{t=0} = \rho_h \quad (133)$$

En caso contrario, se debe encontrar la raíz de la función $t_\ell(\rho)$, $\rho_{t=0}$, para después poder calcular $\phi_\ell(\rho_{t=0})$ de manera inmediata. Con la descripción anterior ya podemos calcular los puntos de la superficie holográfica causal para cada geodésica. Debido a la simetría angular, solo calcularemos la $\Xi_{\mathcal{A}}$ para los momentos angulares entre 0 y 1 e invertiremos la coordenada angular al momento de graficar para obtener las geodésicas con momentos angulares entre 0 y -1.

6.6. Resultados

Para un radio del horizonte $r_h = 0,5$ y una longitud $\phi_{\mathcal{A}} = 2,5$ la superficie holográfica causal $\Xi_{\mathcal{A}}$ presenta la siguiente estructura

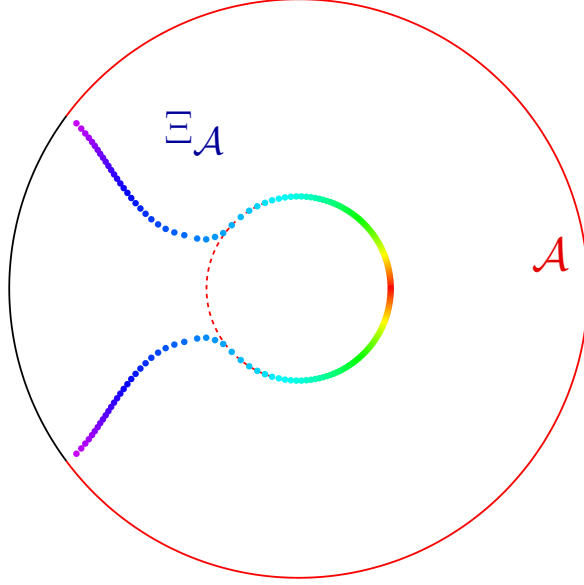


Figura 8: Superficie holográfica causal en el disco de Poincaré, con $r_h = 0,5$ y $\phi_{\mathcal{A}} = 2,5$, el color va de rojo (para $\ell = 0$) hasta el violeta (para $\ell = 1$)

Como podemos observar la cuña causal consta de una sola pieza, caso contrario a lo que sucede si mantenemos la misma longitud de la región $\phi_{\mathcal{A}}$ pero disminuimos el radio del horizonte del agujero negro. A continuación mostramos el gráfico para $r_h = 0,2$ y $\phi_{\mathcal{A}} = 2,5$, y notamos que la superficie holográfica causal ahora está compuesta por dos partes desconectadas, una enrollada en el agujero negro y la otra conectada a $\partial\mathcal{A}$, lo que significa que la cuña causal presenta un hoyo en la parte trasera del agujero negro.

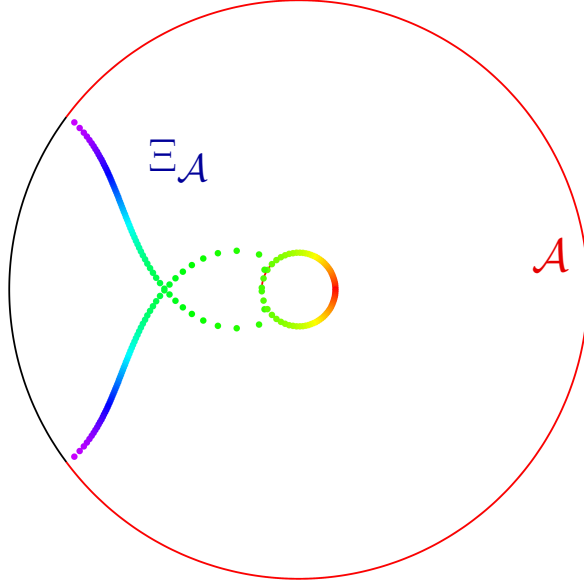


Figura 9: Superficie holográfica causal en el disco de Poincaré, con $r_h = 0,2$ y $\phi_{\mathcal{A}} = 2,5$.

Para el caso $r_h = 0,2$ hemos calculado la superficie holográfica causal variando la longitud en la frontera $\phi_{\mathcal{A}}$ desde 0.1 hasta 3 (ver Figura 10), y observamos que existe una transición entre las cuñas causales de una sola pieza a cuñas causales compuestas por dos partes. Existe una longitud crítica $\phi_{\mathcal{A}}^*$ para cada radio del horizonte en la cual la cuña se parte. Para encontrarla basta con realizar una iteración sobre la longitud $\phi_{\mathcal{A}}$ con $\rho_h = cte$, y en cada ciclo se evaluar la coordenada $\phi_{\ell}(\rho_{t=0})$ para cada geodésica. El ciclo se romperá cuando $\phi_{\ell}(\rho_{t=0}) > \pi$ y en ese momento se recoge la longitud de \mathcal{A} donde esto pasa. En este trabajo presentamos un gráfico que recoge 9 parejas $(\rho_h, \phi_{\mathcal{A}}^*)$.

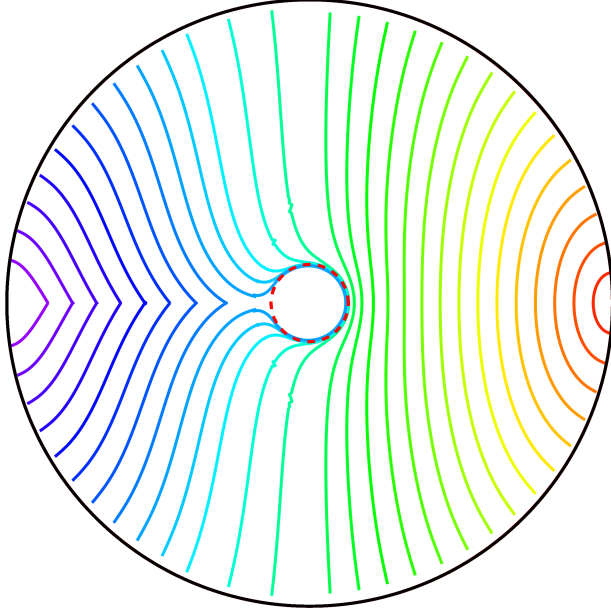


Figura 10: Superficies holográficas causales en el disco de Poincaré, con $r_h = 0,2$ y distintos valores para $\phi_{\mathcal{A}}$.

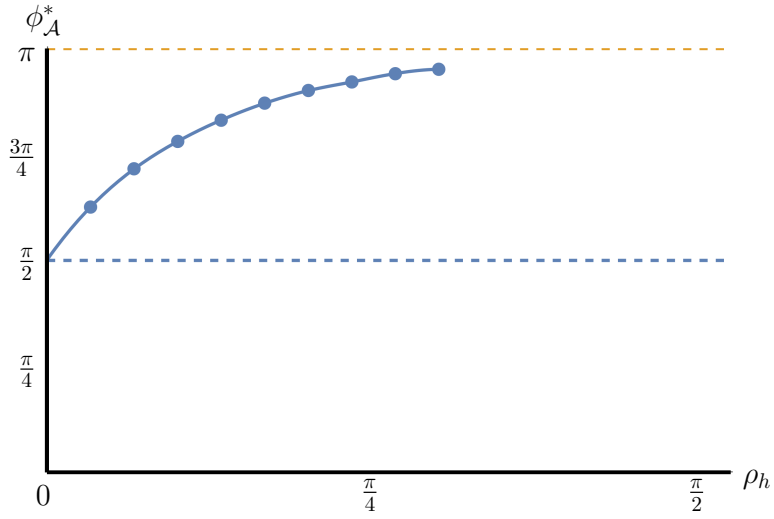


Figura 11: Longitudes críticas $\phi_{\mathcal{A}}^*$ en función de ρ_h

Para reproducir los gráficos anteriores hicimos uso de *Mathematica 10*.

La cuña causal puede tener hoyos para regiones simples de \mathcal{A} en AdS global, para otras geometrías se ha encontrado como un requerimiento el que se admitan geodésicas circulares nulas (en el caso de espacios-tiempo esféricamente simétricos) para que la cuña causal presente hoyos [19]. Aun no se sabe cual es dual en el lado de teoría de campos para la cuña causal, así como lo que representa esta transición de fase en su estructura, sin embargo, mientras se escribía este trabajo de tesis apareció una propuesta donde se argumenta que la matriz de densidad reducida causal es un dual natural a la cuña causal [8].

6.7. Conclusiones

Con la finalidad de construir la cuña causal y reproducir los gráficos en la sección de resultados, se hizo una revisión del marco teórico necesario. Se comenzó con una introducción a la correspondencia AdS/CFT donde también se introdujo el espacio-tiempo anti de-Sitter, así como el diccionario entre variables en el bulto y la frontera. En la sección 2 hablamos sobre el concepto de agujero negro y las distintas soluciones a las ecuaciones de Einstein que derivan en diferentes tipos de agujeros negros incluyendo sus diagramas conformes. Después se habló sobre las propiedades termodinámicas de estos objetos así como la necesidad de introducir el concepto de agujero negro en un espacio anti de-Sitter. En la sección 5 se trató el concepto de causalidad y se describieron los dominios de influencia y dependencia, claves en la construcción de la cuña causal. Finalmente procedimos a construir la cuña causal en un espacio-tiempo Schwarzschild-AdS en coordenadas globales, donde encontramos que, para una longitud de la región \mathcal{A} suficientemente grande, la cuña causal presenta una estructura no-trivial. En la sección de resultados presentamos la reproducción de los gráficos incluidos originalmente en [19], con lo cual se cumple el objetivo principal de este trabajo de tesis.

Apéndices

A. Diagramas Conformes

En relatividad general emerge la posibilidad de tener diferentes tipos de espaciotiempo como soluciones a las ecuaciones de Einstein. Por lo tanto, sería muy útil tener una imagen informativa de la geometría completa inducida por una métrica en particular. En principio tal imagen sería infinita, así que se debe encontrar la manera de poner el espaciotiempo completo en una imagen finita. Para resolver lo anterior se hace uso de las transformaciones conformes.

A.1. Transformaciones Conformes

Una transformación conforme es un cambio en la escala generado por el producto de la métrica con una función no nula de las coordenadas del espaciotiempo

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \omega^2(x) g_{\mu\nu} \quad (134)$$

$$\tilde{ds}^2 = \omega^2(x) ds^2 \quad (135)$$

donde el inverso de esta transformación está dado por

$$g_{\mu\nu} = \omega^{-2}(x) \tilde{g}_{\mu\nu} \quad (136)$$

Como propiedad general de las transformaciones conformes se encuentra que ante una transformación conforme las curvas nulas permanecen invariantes, es decir, si $x^\mu(\lambda)$ es una geodésica nula respecto de $g_{\mu\nu}$, se mantendrá nula respecto de $\tilde{g}_{\mu\nu}$, para mostrarlo recordemos la condición de nulidad para una curva

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 0 \quad (137)$$

donde $V^\mu = dx^\mu/d\lambda$ es el vector tangencial. Observemos que la condición se mantiene después de realizar una transformación conforme sobre $g_{\mu\nu}$

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \omega^2(x) g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (138)$$

Debido a que los conos de luz están dados por las geodésicas nulas, podemos asegurar que bajo transformaciones conformes los conos de luz permanecen invariantes. Esta característica es compartida con las transformaciones conformes

en análisis complejo, donde el ángulo entre dos vectores cualesquiera permanece invariante. Lo anterior no significa que las geodésicas tengan la misma geometría en $g_{\mu\nu}$ y $\tilde{g}_{\mu\nu}$ como lo confirmaremos más adelante.

A.2. Diagrama Conforme para el espaciotiempo de Minkowski

Una vez asegurada la invarianza de los conos de luz bajo transformaciones conformes, debemos encontrar una transformación con la particularidad que respecto de las nuevas coordenadas tipo-tiempo y tipo-espacio los bordes de los conos de luz siempre estén a 45 grados. Matemáticamente esto se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{dT}{dR} = \pm 1 \quad (139)$$

± 1 representan los valores para la pendiente de las curvas radiales nulas. Por otra parte, para obtener el diagrama de Penrose (o conforme) del espaciotiempo de Minkowski primero analizamos su métrica antes de cualquier transformación

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (140)$$

donde $r^2 d\Omega^2 = r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2]$ es la métrica para una esfera de radio r (la 2-esfera, o S^2). Podemos notar que las coordenadas t y r no están acotadas ($-\infty < t < \infty, 0 < r < \infty$) y por lo tanto no existe manera de realizar un diagrama finito bajo estas coordenadas. De alguna manera debemos compactificarlas para después confirmar que preservan los valores ± 1 para la pendiente de los bordes en los conos de luz.

Comenzaremos por introducir coordenadas nulas

$$u = t - r \quad (141)$$

$$v = t + r \quad (142)$$

así cualquier vector dentro del cono de luz puede ser escrito como una combinación lineal de u y v . En la figura 12 solo se muestra la parte derecha del plano $t - r$ ya que $r > 0$ como especificamos notamos anteriormente. Nota que cualquier punto en 12 representa una 2-esfera de radio r .

Podemos resolver para la coordenada tipo-espacio en función de u y v

$$r = \frac{1}{2}(v - u) > 0 \quad (143)$$

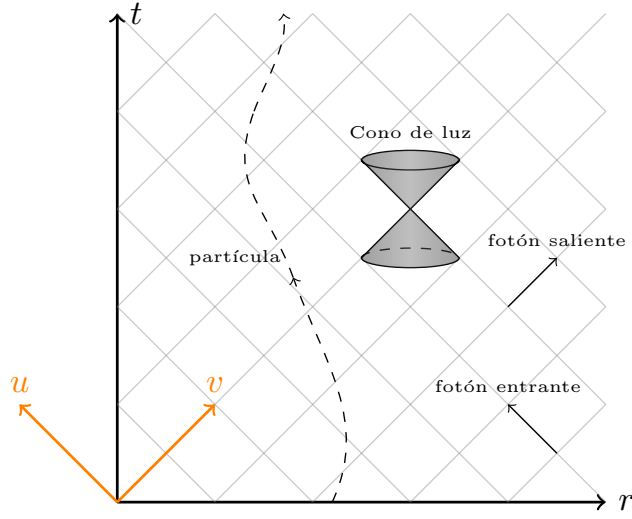


Figura 12: Minkowski en coordenadas nulas

por lo tanto $v > u$. En coordenadas nulas la métrica de Minkowski toma la siguiente forma

$$ds^2 = -\frac{1}{2}(dudv + dvdu) + \frac{1}{4}(v - u)d\Omega^2 \quad (144)$$

en este punto, el rango de t y r siguen sin ser acotados, para cambiar esto haremos una compactificación sobre las coordenadas nulas u and v tomando como función compactificadora (es decir, cualquier función que mapee la recta real a un intervalo, $f: \mathbb{R} \rightarrow [a, b]$) a $\arctan(x)$.

Sean U y V las coordenadas compactificadas

$$U = \arctan(u) \quad (145)$$

$$V = \arctan(v) \quad (146)$$

Con los nuevos rangos $-\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2}$, con $V > U$. Si sustituimos U y V en ds^2 para Minkowski en coordenadas nulas obtenemos

$$ds^2 = -\frac{1}{4\cos^2 U \cos^2 V} [-2(dUdV + dVdU) + \sin^2(V - U)d\Omega^2] \quad (147)$$

Si regresamos a las coordenadas tipo-tiempo y tipo-espacio $T = V + U$ y $R = V - U$ la métrica anterior se revela como el inverso de una métrica relacionada de manera conforme

$$ds^2 = \omega^{-2}(T, R)[-dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2] \quad (148)$$

donde $\omega(T, R) = \cos T + \cos R$, entonces ya podemos escribir la métrica \tilde{ds}^2 la cual está relacionada conformemente con la métrica de Minkowski's ds^2

$$\tilde{ds}^2 = \omega^2(T, R)ds^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2 \quad (149)$$

\tilde{ds}^2 describe una variedad $\mathfrak{R} \times S^3$ conocida como el universo Estático de Einstein, una solución estática a las ecuaciones de Einstein para un fluido perfecto y una constante cosmológica positiva. El espacio completo de Minkowski es conforme a una región dentro del universo estático de Einstein. La estructura de los infinitos conformes de la métrica anterior nos permite visualizar el espacio de Minkowski de la siguiente manera

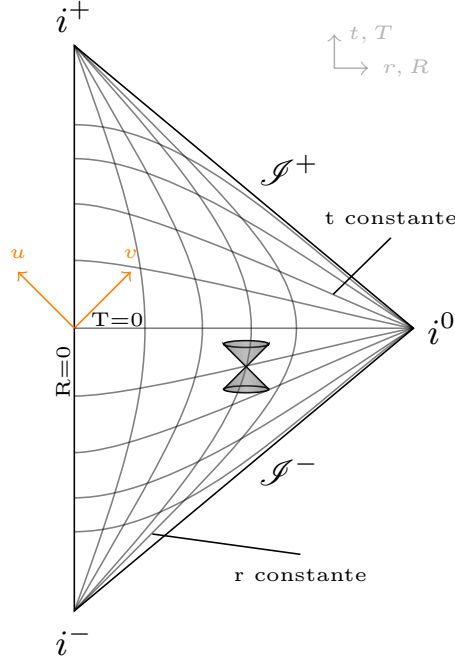


Figura 13: Diagrama conforme del espacio de Minkowski

Donde los puntos i^+ , i^- representan los infinitos tipo-tiempo futuro y pasado ubicados en $(T = \pi, R = 0)$ y $(T = -\pi, R = 0)$ respectivamente, mientras que i^0 en $(T = 0, R = \pi)$ es el infinito espacial. \mathcal{I}^+ y \mathcal{I}^- son el el infinito nulo futuro $(T = \pi - R, 0 < R < \pi)$ y el infinito nulo pasado $(T = -\pi + R, 0 < R < \pi)$.

Como era de esperarse las geodésicas radiales nulas se mantienen a 45 grados en el diagrama. Todas las geodésicas tipo-tiempo comienzan en i^- y terminan en i^+ , las geodésicas tipo-espacio comienzan y terminan en i^0 . En el caso de las geodésicas nulas, estas comienzan en \mathscr{I}^- y terminan en \mathscr{I}^+ .

Los diagramas conformes nos dan una idea de la estructura causal del espacio-tiempo, pero en el caso de Minkowski no nos muestra mucho más de lo que ya sabíamos, sin embargo en casos más complicados, por ejemplo para espacios-tiempos curvos o con agujero negro, estos se vuelven muy útiles.

Referencias

- [1] Martin Ammon and Johanna Erdmenger. *Gauge/gravity duality: foundations and applications*. Cambridge University Press, 2015.
- [2] Adel M Awad and Clifford V Johnson. Holographic stress tensors for kerr-ads black holes. *Physical Review D*, 61(8):084025, 2000.
- [3] Raphael Bousso. The holographic principle. *Reviews of Modern Physics*, 74(3):825, 2002.
- [4] Sean M Carroll. An introduction to general relativity. *Spacetime and Geometry*. Addison Wesley, 2004.
- [5] Andrew Chamblin, Roberto Emparan, Clifford V Johnson, and Robert C Myers. Charged ads black holes and catastrophic holography. *Physical Review D*, 60(6):064018, 1999.
- [6] J. de Boer. Introduction to the AdS/CFT correspondence. In *Supersymmetry and unification of fundamental interactions. Proceedings, 10th International Conference, SUSY'02, Hamburg, Germany, June 17-23, 2002*, pages 512–527, 2002.
- [7] Sebastian de Haro, Kostas Skenderis, and Sergey N Solodukhin. Holographic reconstruction of spacetime and renormalization in the ads/cft correspondence. *Communications in Mathematical Physics*, 217(3):595–622, 2001.
- [8] Netta Engelhardt and Sebastian Fischetti. Causal density matrices. *arXiv preprint arXiv:1703.05328*, 2017.
- [9] Willy Fischler and Leonard Susskind. Holography and cosmology. *arXiv preprint hep-th/9806039*, 11, 1998.
- [10] Robert W Fuller and John A Wheeler. Causality and multiply connected space-time. *Physical Review*, 128(2):919, 1962.
- [11] Robert Geroch. Domain of dependence. *Journal of Mathematical Physics*, 11(2):437–449, 1970.

- [12] Øyvind Grøn and Sigbjørn Hervik. *Einstein's general theory of relativity: with modern applications in cosmology*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [13] Stephen W Hawking. Black holes and thermodynamics. *Physical Review D*, 13(2):191, 1976.
- [14] Stephen W Hawking, George Francis Rayner Ellis, and RK Sachs. The large scale structure of space-time, 1974.
- [15] Stephen W Hawking and Don N Page. Thermodynamics of black holes in anti-de sitter space. *Communications in Mathematical Physics*, 87(4):577–588, 1983.
- [16] Michael Paul Hobson, George P Efstathiou, and Anthony N Lasenby. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [17] Gerard't Hooft. Dimensional reduction in quantum gravity. *arXiv preprint gr-qc/9310026*, 1993.
- [18] Veronika E Hubeny and Mukund Rangamani. Causal holographic information. *Journal of High Energy Physics*, 2012(6):1–35, 2012.
- [19] Veronika E Hubeny, Mukund Rangamani, and Erik Tonni. Global properties of causal wedges in asymptotically ads spacetimes. *arXiv preprint arXiv:1306.4324*, 2013.
- [20] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int.J.Theor.Phys.*, 38:1113–1133, 1999.
- [21] Charles W Misner, Kip S Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. Macmillan, 1973.
- [22] Horatiu Nastase. Introduction to ads-cft. *arXiv preprint arXiv:0712.0689*, 2007.
- [23] Makoto Natsuume. *AdS/CFT duality user guide*, volume 903. Springer, 2015.

- [24] Derek J Raine and Edwin George Thomas. *Black holes: an introduction*. Imperial College Press, 2010.
- [25] Alfonso V. Ramallo. Introduction to the AdS/CFT correspondence. *Springer Proc. Phys.*, 161:411–474, 2015.
- [26] Simon F Ross. Black hole thermodynamics. *arXiv preprint hep-th/0502195*, 2005.
- [27] A Sandoval-Villalbazo, AL Garcia-Perciante, and D Brun-Battistini. Tolman’s law in linear irreversible thermodynamics: A kinetic theory approach. *Physical Review D*, 86(8):084015, 2012.
- [28] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [29] Leonard Susskind. The World as a hologram. *J. Math. Phys.*, 36:6377–6396, 1995.
- [30] Leonard Susskind and James Lindesay. *An introduction to black holes, information and the string theory revolution: The holographic universe*. World Scientific, 2004.
- [31] Leonard Susskind and Edward Witten. The holographic bound in anti-de sitter space. *arXiv preprint hep-th/9805114*, 1998.
- [32] Matt Visser. Lorentzian wormholes. *From Einstein to Hawking*, 412 pp.. *AIP Press*, 1996.
- [33] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [34] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, volume 67. Wiley New York, 1972.
- [35] Edward Witten. Anti de sitter space and holography. *arXiv preprint hep-th/9802150*, 1998.
- [36] A. Zaffaroni. Introduction to the AdS-CFT correspondence. *Class. Quant. Grav.*, 17:3571–3597, 2000.