

ZUR KONFORMINVARIANZ EINER METRISCHEN FELDTHEORIE MIT EINEM SKALAREN FELD

On the Conformal Invariance of a Metric Field-Theory with a Scalar Field

VON G. MACHELEIDT

Pädagogische Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“, Erfurt/Mühlhausen*

(Eingegangen am 2. Februar 1970)

Die Konforminvarianz einer metrischen Feldtheorie mit einem zusätzlichen skalaren Feld wird auf Grund des dazugehörigen Variationsprinzips untersucht. Die Überlegungen werden auf einige Beispiele — insbesondere auf die Vakuumfeldgleichungen der vierdimensional formulierten projektiven Relativitätstheorie — angewandt.

Wir betrachten einen N -dimensionalen Riemannschen Raum mit der Metrik g_{mn} und einem Skalarfeld s .

Der Integrand des Variationsproblem (es m, n von 1 bis N)

$$\delta \int s^a \left(R + b \frac{s_{,m} s^{,m}}{s^2} \right) \sqrt{g} d\tau = 0 \quad (1)$$

entspricht den üblichen Forderungen bezüglich Grad und Ordnung der Feldvariablen g_{mn} und s . Darüberhinaus ist er homogen in s und enthält somit keine dimensionsbehafteten Naturkonstanten als Ausdruck eines Skeptizismus hinsichtlich ihrer Konstanz.

Bei Konformtransformationen

$$g_{mn}^* = s^p g_{mn}, \quad g^{*mn} = s^{-p} g^{mn}, \quad \sqrt{g^*} = s^{\frac{1}{2} N p} \sqrt{g} \quad (2)$$

transformiert er sich

$$\begin{aligned} & s^a \left(R + b \frac{s_{,m} s^{,m}}{s^2} \right) \sqrt{g} \\ &= s^{a - (\frac{1}{2} N - 1)p} \left[R^* + \left\{ (N-1)(N-2) \frac{p^2}{4} + p(N-1) \left(s - p \frac{N-2}{2} \right) + b \right\} \frac{s_{*,m} s^{*,m}}{s^2} \right] \sqrt{g^*}, \quad (3) \end{aligned}$$

wobei ein Glied mit $s_{*,m}^{*,m}$ (*, bedeutet kovariante Ableitung mit der Metrik g_{mn}^*) in einen Ausdruck mit $s_{*,m} s^{*,m}$ und eine für die Variation bedeutungslose Divergenz umgeformt wurde.

* Adresse des Verfassers: Pädagogische Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“, 501 Erfurt, Postschließfach 307, DDR.

Die Homogenität des Integranden wurde nicht zerstört. Wir erhalten dasselbe Problem mit transformierten Koeffizienten

$$a^* = a - \left(\frac{1}{2} N - 1 \right) p \quad (4)$$

$$b^* = b - (N-1)(N-2) \frac{p^2}{4} + ap(N-1). \quad (5)$$

Gemäß (4), (5) ist es immer möglich, a^* oder b^* zu Null zu machen, während simultanes Verschwinden von a^* und b^* nur für besondere Werte von a und b in Abhängigkeit von der Dimensionszahl möglich ist.

Für $a \neq 0$ kann man durch eine Änderung der Bezeichnungsweise ($s^a = s'$) erreichen, daß $a' = 1$ wird mit $b' = ba^{-2}$. Von dieser durch die Homogenität des Integranden ermöglichten Vereinfachung wollen wir Gebrauch machen und die Fälle $a = 1$ und $a = 0$ unterscheiden.

Die Variationsgleichungen für $a = 1$ lauten

$$R - b \left(2 \frac{s_{;l}^l}{s} - \frac{s_{;l} s_{;l}^l}{s^2} \right) = 0 \quad (6a)$$

$$R_{mn} - \frac{1}{2} R g_{mn} + \frac{s_{;m;n}}{s} - \frac{s_{;l}^l}{s} g_{mn} + b \left(\frac{s_{;m} s_{;n}}{s^2} - \frac{1}{2} \frac{s_{;l} s_{;l}^l}{s^2} g_{mn} \right) = 0. \quad (6b)$$

Ist $b = -\frac{N-1}{N-2}$, sind die Feldgleichungen (6a) und (6b) nicht unabhängig: (6a) entsteht aus (6b) durch Verjüngen. Andernfalls können wir die Gleichungen umschreiben

$$s_{;l}^l = 0 \quad (7a)$$

$$R_{mn} + \frac{s_{;m;n}}{s} + b \frac{s_{;m} s_{;n}}{s^2} = 0. \quad (7b)$$

Im Falle $a = 0$ haben wir als Euler-Lagrange-Gleichungen

$$(\ln s)_{;l}^l = 0 \quad (8a)$$

$$R_{mn} + b \frac{s_{;m} s_{;n}}{s^2} = 0. \quad (8b)$$

Auf Grund der Bianchi-Identität ist (8a) eine Folge von (8b) und damit keine selbständige Feldgleichung.

Aus $a \neq 0$ (o. B. d. A. $a = 1$) können wir aber durch eine Konformtransformation a^* zu Null machen. Somit sind die $\frac{1}{2} N(N+1) + 1$ Feldgleichungen (7a) und (7b) folgenden $\frac{1}{2} N(N+1)$ Gleichungen

$$R_{mn}^* + b^* \frac{s_{;m} s_{;n}}{s^2} = 0 \quad (9)$$

— sie entsprechen genau den Einsteinschen mit Energietensor des s -Feldes — äquivalent. Wir sehen, daß neben der Lösung g_{mn}^* , $\ln s$ auch g_{mn}^* , $-\ln s$ möglich ist.

Wir untersuchen noch den Fall

$$b = 0, a \neq 0 \text{ (o. B. d. A. } a = 1\text{)}. \quad (10)$$

Fordern wir Forminvarianz dieser Struktur bei Konformtransformationen — also $b^* = 0$ — folgt aus (4), (5)

$$p = \frac{4}{N-2}, a^* = -1. \quad (11)$$

Andernfalls ist durch $b = 0$ die allgemeine Konforminvarianz — in Analogie zu einer speziellen Koordinatenwahl bei allgemeiner Kovarianz — gestört.

Setzt man noch $s' = s^{-1}$, d. h. $a^{*'} = 1$, haben die zu (10), (11) gehörigen Feldgleichungen und das Variationsprinzip ($g_{mn}^* = s^{\frac{4}{N-2}} g_{mn} = s'^{-\frac{4}{N-2}} g_{mn}$):

$$\delta \int s' \sqrt{g^*} R^* d\tau = 0, R_{mn}^* + \frac{s'_{,m;n}}{s} = 0, s'^{*,l}_{,l} = 0 \quad (12)$$

genau dieselbe Form wie die zu (10) gehörigen Grundrelationen:

$$\delta \int s \sqrt{g} R d\tau = 0, R_{mn} + \frac{s_{,m;n}}{s} = 0, s^l_{,l} = 0. \quad (13)$$

Das hat folgende Konsequenz:

Besitzt man eine Lösung von (13): $s(x^m)$, $g_{ik}(x^m)$, so erfüllen dieselben Funktionen als s' , g_{ik}^* das System (12). Das ist aber wegen $s' = s^{-1}$, $g_{ik}^* = s^{\frac{4}{N-2}} g_{ik}$ nur für $s = 1$ möglich. Durch die Forderung der Konforminvarianz im Falle $b = 0$, d. h. $b^* = 0$ wird also die Lösung $s = \text{const.}$ ausgesondert.

Die bisherigen Überlegungen wollen wir auf einige Beispiele anwenden:

1) Zerfällt die Metrik in folgender Weise (statische, kugelsymmetrische, zylindersymmetrische Metrik, Klein-Kaluza-Theorie mit $g_{m5} = 0$)

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = f^2(x^\gamma) dx^2 + g_{\alpha\beta}(x^\gamma) dx^\alpha dx^\beta \quad \alpha, \beta, \gamma = 1 \dots (N-1) \quad (14)$$

ergibt sich für die Krümmungsdichte

$$\sqrt{g^{(N)}} R^{(N)} = f \sqrt{g^{(N-1)}} \left(R^{(N-1)} + 2 \frac{f_{,;\alpha}{}^\alpha}{f} \right) = f \sqrt{g^{(N-1)}} R^{(N-1)} + 2 (\sqrt{g^{(N-1)}} f_{,;\alpha}{}^\alpha). \quad (15)$$

Die Divergenz fällt im Variationsproblem weg, und es bleibt der Typ mit $a = 1$, $b = 0$, $s \equiv f$, und die Feldgleichungen lauten:

$$R_{\alpha\beta}^{(N-1)} + \frac{f_{,;\alpha;\beta}}{f} = 0, \quad f_{,;\alpha}{}^\alpha = 0 \quad (16)$$

bzw. nach der Konformtransformation $g_{mn}^* = f^2 g_{mn}$, $N = 3$:

$$R_{\alpha\beta}^{(2)} + 2 \frac{f_{,;\alpha} f_{,;\beta}}{f^2} = 0. \quad (17)$$

Diese Gleichung gestattet nach J. Ehlers eine einfache Herleitung der Schwarzschild-Lösung für die Einsteinschen Gleichungen [1].

2) Die Jordanschen Vakuumfeldgleichungen der Theorie einer variablen Gravitationszahl κ sollen aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int \kappa \left(R^{(4)} - \xi \frac{\kappa_{,l} \kappa^{,l}}{\kappa^2} \right) \sqrt{g^{(4)}} d\tau = 0 \quad (18)$$

folgen und sind durch (7a), (7b) gegeben ($\kappa \equiv s$, $a = 1$, $b \equiv -\xi$). Bei der Konformtransformation $g_{ik}^* = \kappa g_{ik}$ reduzieren sie sich (4), (5), (9) auf (Schückingsche Konforminvarianz [1])

$$R_{ik}^* = \left(\xi - \frac{3}{2} \right) \frac{\kappa_{,i} \kappa_{,k}}{\kappa^2}. \quad (19)$$

Durch das $-\xi \equiv b \neq 0$ ist die Konforminvarianz der Vakuumfeldgleichungen gesichert, und es hat außerdem den Vorteil, daß die Feldgleichungen des materieverfüllten Raumes für $\xi \gg 1$ die Einsteinschen Gleichungen als Grenzfall enthalten.

3) Die Schmutzerschen Vakuumfeldgleichungen der projektiven Relativitätstheorie folgen aus [2]

$$\delta \int \sqrt{g^{(5)}} \cdot R^{(5)} d\tau = 0, \quad (20)$$

und gemäß dem Projektionsformalismus entspricht dem im maxwellfeldfreien Fall

$$\delta \int \sqrt{g^{(4)}} \cdot S \cdot R^{(4)} d\tau = 0 \quad (21)$$

mit den dazugehörigen Feldgleichungen

$$R_{ik} + \frac{S_{,i;k}}{S} = 0, S_{;l}^l = 0. \quad (22)$$

Die skalare Funktion s von (1) ist hier mit dem Skalarfeld S der projektiven Theorie zu identifizieren.

Bei der Konformtransformation $g_{ik}^* = S g_{ik}$ wird $a^* = 0$, und die Feldgleichungen enthalten keine zweiten kovarianten Ableitungen von S :

$$R_{ik}^* + \frac{3}{2} \frac{S_{,i} S_{,k}}{S^2} = 0. \quad (23)$$

In der grundlegenden Beziehung (21) ist $b = 0$. Bei allgemeinen Konformtransformationen wird $b^* \neq 0$. (21) ist also nicht allgemein-konforminvariant. Lassen wir gemäß den Überlegungen (10) bis (13) nur die Transformation (11) zu, bleibt zwar (21) forminvariant, wir beschränken uns aber auf konstantes S , d. h. im wesentlichen haben wir es mit der Kleinkaluzaschen Theorie zu tun.

Andererseits bringt die Invarianz gegen Konformtransformationen der Art (2), (4), (5) das Problem mit sich, wie g_{ik} und s^a physikalisch zu deuten sind, da man genauso gut g_{ik}^* und s^{a*} als physikalische Größen ansprechen kann. Eine solche Mehrdeutigkeit besteht in der durch (21) charakterisierten Theorie nicht.

LITERATUR

- [1] P. Jordan, *Schwerkraft und Weltall*, Braunschweig 1955.
- [2] E. Schmutzer, *Relativistische Physik*, Leipzig 1968.