

CERN LIBRARIES, GENEVA

*Archives*



CM-P00058699

Ref.TH.1228-CERN

COURS SUR LA THERMODYNAMIQUE DES INTERACTIONS FORTES

A HAUTES ENERGIES \*)

R. Hagedorn

CERN - Genève

\*)

Notes de cours, 2ème Ecole d'Eté de Physique des Particules, 91 Gif sur Yvette (1970).

Ref.TH.1228-CERN

1 Septembre 1970

TABLE DES MATIERES

	Pages
1.1. - <u>PREMIERE LECON</u> . . . . .	1
1.1.1. - Généralités sur le cadre du modèle . . . . .	1
1.1.2. - La partie thermodynamique pure . . . . .	4
1.2. - <u>PREMIERE DISCUSSION</u> . . . . .	11
1.2.1. - Fragmentation limitée . . . . .	11
1.2.2. - Discussion libre . . . . .	14
2.1. - <u>DEUXIEME LECON</u> . . . . .	15
2.1.1. - La fonction de partition . . . . .	15
2.1.2. - Le bootstrap . . . . .	18
2.1.3. - Discussion des résultats . . . . .	21
2.1.4. - Formules asymptotiques et moins asymptotiques . . . . .	24
2.2. - <u>DEUXIEME DISCUSSION</u> . . . . .	27
2.2.1. - Comment dériver des distributions de probabilité à partir de $Z(V, T)$ ? . . . . .	27
2.2.1.1. - Le spectre des moments linéaires $f_m(p, T)$ . . . . .	28
2.2.1.2. - La distribution de Poisson ; multiplicités . . . . .	31
2.2.1.3. - Lois de conservation . . . . .	38
3.1. - <u>TROISIEME LECON</u> . . . . .	40
3.1.1. - Les spectres des moments linéaires . . . . .	40
3.1.1.1. - Les isobares représentatifs. . . . .	40
3.1.1.2. - Production associée . . . . .	43
3.1.1.3. - Représentation graphique . . . . .	45
3.1.1.4. - Quelques spectres composés . . . . .	47
3.1.1.5. - Les spectres complets ; résultats . . . . .	48
3.1.2. - Relation entre les propositions de Feynman et notre modèle . . . . .	50
3.1.2.1. - Expériences inclusives . . . . .	50
3.1.2.2. - Expériences exclusives . . . . .	54
3.2. - <u>DISCUSSION LIBRE</u> . . . . .	58
4. - Lectures supplémentaires . . . . .	58

Ces notes sont le fil d'Ariane d'un cours de trois leçons plus trois heures de discussion. Il est indispensable d'avoir recours aux articles publiés. Je vais les citer comme suit : pour les trois premiers papiers 1), 2), 3) I, II, III par exemple (I, Sect. 3.3), etc. ; pour les autres [Ref. 5), Eq. (28)], etc. Ceux qui ne suivent pas les cours et lisent seulement ces notes peuvent s'en servir comme guide pour les travaux publiés.

### 1.1. - PREMIERE LECON

#### 1.1.1. - Généralités sur le cadre du modèle

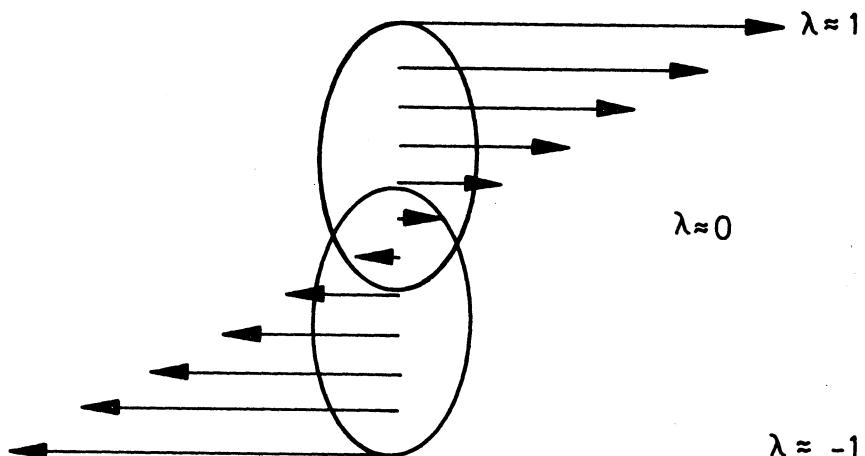
Lecture : "Remarks on the Thermodynamical Model of Strong Interactions" [Ref. 4), Sections 1 et 2].

La thermodynamique statistique décrit des systèmes à un grand nombre de degrés de liberté en cherchant dans l'immense réservoir des états possibles ceux qui sont les plus probables et en les considérant comme représentants de la réalité. On s'attend donc à la plus grande uniformité et en particulier à une distribution isotrope du type Maxwell - Boltzmann - Planck (vitesses, moments linéaires, énergies cinétiques, énergies totales) des "molécules" élémentaires du système. Les distributions angulaires des particules créées dans les collisions hadron-hadron à haute énergie semblent contredire l'isotropie et donc éliminer toute explication thermodynamique. Cependant il faut seulement s'imaginer la collision de deux nuages de gaz dans le vide, telle que la vitesse relative des deux nuages dépasse de loin la vitesse moyenne thermique d'une molécule dans un nuage, pour voir que la distribution angulaire des vitesses des molécules après la collision sera très anisotrope dans l'ensemble, tandis qu'elle peut être isotrope et du type thermodynamique dans le voisinage d'un observateur local en co-mouvement. Pour lui, la vitesse moyenne  $\langle \vec{v} \rangle = 0$  dans son voisinage. Vus du centre de gravité de la collision, différents observateurs en co-mouvement ont différentes vitesses ; ces vitesses représentent la vitesse collective du voisinage de l'observateur local, la vitesse collective d'un élément de volume.

Faisant l'hypothèse que l'observateur en co-mouvement trouve dans son voisinage un équilibre thermodynamique local, il nous suffit de connaître :

- la distribution des paramètres de l'équilibre thermodynamique local (température, densité, composition) ;
- la distribution des vitesses collectives,

pour décrire l'aspect global d'après la collision vue par un seul observateur dans n'importe quel système de coordonnées. Pour les interactions fortes à hautes énergies, nous faisons de même. Nous utilisons les unités  $\hbar = c = k$  (constante de Boltzmann) = 1. A un moment, la collision de deux protons se présente ainsi :



Nous mesurons la vitesse locale par

$$\lambda \equiv \pm \frac{\gamma - 1}{\gamma_0 - 1} \quad (1)$$

$\gamma = \sqrt{1-v^2}$ ,  $\gamma_0 = \sqrt{1-v_0^2}$ ,  $v_0$  = vitesse des particules incidentes vue du système de centre de masse avant la collision. L'énergie sera conservée localement [Ref. 4), Sections 3 et 4] à une bonne approximation : pour la densité d'énergie, il vient :

$$\begin{aligned} \varepsilon \gamma &= \varepsilon_0 \gamma_0 & (2) \\ \varepsilon_0 &= m_p / V_0 \\ V_0 &= \frac{4\pi}{3} m_\pi^{-3} \end{aligned}$$

Donc  $\varepsilon$  est fonction de  $\gamma_0$  et de  $\lambda$ . Soit  $f_m(p', \varepsilon)$  le spectre isotrope des moments linéaires des particules de masse  $m$  créées localement, on a donc dans le système R de coordonnées :

$$W^{(R)}(\vec{p}) d^3 p = \int_{-1}^1 F(\lambda) L^{(R)}(\lambda, \gamma_0) \left\{ f_m(p', \varepsilon(\lambda, \gamma_0)) d^3 p' \right\} d\lambda \quad (3)$$

Ici,  $L^{(R)}(\lambda, \gamma_0)$  est l'opérateur de Lorentz qui transforme le spectre isotrope du système au repos de  $\lambda$  (système  $\Lambda$ ) dans un système de coordonnées R arbitraires.  $F(\lambda)$  est la distribution de vitesses collectives (dans la direction de l'axe de collision) moyennée sur toute l'histoire de la collision, sur toute son extension dans l'espace et sur tous les paramètres d'impact, c'est-à-dire sur un grand ensemble de collisions "identiques". Nous revenons aux fonctions  $F(\lambda)$ . Ici je remarque seulement que :

- il y a une fonction  $F(\lambda)$  pour les particules nouvellement créées ; une autre,  $F_o(\lambda)$  pour les particules "en passant" (les protons) ;
- les deux fonctions sont normalisées

$$\int_{-1}^1 F(\lambda) d\lambda = 2 \quad (4)$$

- en les déterminant à partir d'expériences, on trouve entre 10 et 70 GeV que les deux fonctions semblent être universelles et indépendantes de l'énergie ( $\gamma_0$ ) ;
- on peut calculer des fonctions semblables aux fonctions  $F(\lambda)$  empiriques (à partir du modèle multi-Regge<sup>5)</sup> et de facteurs de forme<sup>6)</sup>) ;
- l'hypothèse que  $F(\lambda)$  est indépendante de l'énergie primaire est équivalente à "l'hypothèse de fragmentation limitée"<sup>7)</sup>.

Nous en discutons dans la suite.

En revenant à (3), nous constatons l'analogie avec notre image de deux nuages en collision : l'observateur en co-mouvement est au repos dans le système  $\lambda$  ; pour chaque  $\lambda$  il y a un autre observateur ayant la "vitesse  $\lambda$ " et  $F(\lambda)$  est le nombre caractérisant l'importance de la vitesse  $\lambda$  dans la description de l'ensemble.  $F(\lambda)$  et  $L(\lambda, \gamma_0)$  n'ont rien à voir avec la thermodynamique et dans le cadre du modèle,  $F(\lambda)$  est une fonction empirique. C'est  $f_m(p', \epsilon)$  qui est la partie thermodynamique et qui sera déterminée complètement par une analyse des interactions fortes, que nous allons entreprendre maintenant.

[Lecture supplémentaire sur  $F(\lambda)$  : II, Sections 1.2, 2.3.]

#### 1.1.2. - La partie thermodynamique pure

Lecture : Ref. 4), Section 3.

La probabilité pour un état final à  $n$  particules s'écrit

$$P(n) = \int | \langle f | S' | i \rangle |^2 \delta(E - \sum \epsilon_i) \delta^3(\sum \vec{p}_i) \prod_{i=1}^n d^3 p_i \quad (5)$$

Nous allons éliminer une partie de l'élément de matrice et l'inclure dans l'espace de phase : prenons deux particules, 1 et 2 ; l'interaction cause un déphasage. Les ondes déphasées ont un comportement asymptotique

$$\psi_\ell(r) \sim \frac{1}{r} \sin\left(p'r - \ell \frac{\pi}{2} + \delta_\ell\right) \quad (6)$$

La condition que l'onde s'annule sur la surface d'un volume sphérique de normalisation et de rayon  $R$  est

$$p'R - \ell \frac{\pi}{2} + \delta_\ell(p') = n_\ell \pi \quad (7)$$

où  $n_\ell$  est un nombre entier,  $p'$  le moment linéaire relatif des particules 1 et 2. Le nombre d'ondes entre  $p'$  et  $p' + dp'$  devient ainsi

$$dp' \frac{dn_\ell}{dp'} = \left( \frac{R}{\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{d\delta_\ell}{dp'} \right) dp' \quad (8)$$

Sans l'interaction ce serait  $(R/\pi)dp'$ ; donc le déphasage  $\delta_\ell(p')$  a ajouté à la densité d'états finaux le terme  $((1/\pi)d\delta_\ell/dp')dp'$ .

Puisque l'ensemble de tous les déphasages (à deux, trois, quatre, ..., corps) est équivalent à la totalité de la matrice  $S$ , on peut espérer éliminer l'élément de matrice en le remplaçant par l'effet de l'ensemble complet de déphasages, c'est-à-dire par la correction totale qu'elle produit sur la densité des états finaux.

Mais si l'ensemble des déphasages équivaut à la matrice  $S$  - inconnue ! - comment connaître tous les déphasages ? Nous y arriverons par un argument un peu philosophique du type "bootstrap" où la seule hypothèse qu'une description thermodynamique est possible suffit à la déterminer presque complètement. Puisqu'il s'agit d'un raisonnement en cercle fermé, nous pouvons partir d'où nous voulons en prenant un fait expérimental. Je prends le fait que, dans l'interaction forte, il existe beaucoup de résonances.

Supposons une résonance entre particules 1 et 2 dans le voisinage de  $p' \approx p^*$ ; alors, dans cette région,  $\delta_\ell(p')$  croît rapidement de  $\pi$ . En idéalisant pour le moment, on peut donc dire que  $(1/\pi)d\delta_\ell/dp' \approx \delta(p' - p^*)$ : cela entraîne que si l'on reporte l'équation (8) dans l'intégrale (5), on obtient :

$$\begin{aligned} P(n) &= \int | \langle f | S'' | i \rangle |^2 dR_m(E, m_1 m_2 m_3 \dots m_n) \\ &+ \int | \langle f | S'' | i \rangle |^2 dR_{m-1}(E, m^* m_3 \dots m_n) \end{aligned} \quad (9)$$

où  $m_1$  et  $m_2$  sont en résonance  $m^*$ . La première intégrale vient du premier membre de (8). Nous écrivons  $S''$  pour indiquer que la partie de  $S$  qui est responsable de la résonance  $m^*$  est éliminée de  $S$  et se retrouve explicitement dans l'espace de phase (pour lequel nous utilisons la notation abrégée  $R_n, R_{n-1}$ , etc.).

Nous voulons calculer le spectre d'impulsion d'un type de particule  $m$ , notre  $f_m(\vec{p}, E)$ . C'est le nombre de particules  $m$  entre  $\vec{p}$  et  $\vec{p} + d\vec{p}$  moyené sur tous les états finaux ; c'est-à-dire sans considérer ce qui se passe par ailleurs. En écrivant  $dR/d\vec{p}$  pour indiquer la suppression de l'intégration sur  $\vec{p}$  dans  $R$ , on voit que dans le cas (9) on a, pour le spectre dans la voie  $n$ ,

$$f_m^{(n)}(\vec{p}, E) = \int | \langle f | S'' | i \rangle |^2 \frac{dR_n}{d\vec{p}}(E, m_1, \dots) \\ + \int | \langle f | S'' | i \rangle |^2 \frac{dR_{n-1}}{d\vec{p}}(E, m^*, \dots) \quad (10)$$

Supposons que nous connaissons toutes, toutes les résonances dans toutes les voies, nous aurions

$$f_m(\vec{p}, E) d^3p = C^{st} d^3p \sum \int \frac{dR}{d\vec{p}}(E, masses) \quad (11)$$

où  $\sum$  s'étend sur toutes les configurations (nombre de particules et de résonances) possibles. Puisque l'ensemble de toutes les résonances est à peu près équivalent à la matrice  $S$  ("saturation par les résonances") nous avons remplacé l'élément de matrice par une constante. Il faut se rappeler que les mouvements collectifs (dus aux interférences des phases et à la conservation du moment angulaire) sont déjà éliminés et mis à part dans  $F(\lambda)$ .

Le nombre de termes en (11) est immense : à 20 GeV d'énergie primaire, ce sont déjà des millions d'intégrales à calculer si l'on prend seulement les résonances connues aujourd'hui - mais il faut les prendre toutes.

C'est ici que la thermodynamique entre en jeu : chaque terme de (11) a la forme de l'espace de phase microcanonique et l'ensemble de tous les termes l'a toujours : c'est l'espace de phase microcanonique d'un gaz à libre création et annihilation de toutes sortes de particules. La thermodynamique nous apprend combien il est plus facile de calculer dans l'ensemble canonique où on prescrit une température  $T$  au lieu de l'énergie  $E$ , pourvu que  $T$  soit choisi tel que  $\langle E(T) \rangle = E$ . Si le nombre de degrés de liberté est infini, les deux descriptions sont toutes équivalentes, sinon elles le sont approximativement. Nous oublions toutes ces finesse et utilisons l'ensemble canonique pour évaluer (11). Puisque  $f_m(p, T)$  est le spectre de moment linéaire des particules  $m$  dans un gaz à libre création (rayonnement du corps noir) de température  $T$ , on sait tout de suite, sans calcul, que

$$f_m(\vec{p}, T) d^3p = C^{ste} \left[ \exp \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{T} \pm 1 \right]^{-1} d^3p \quad (12)$$

(distribution de Planck).

Cette équation semble résoudre tout notre problème, mais elle a encore une lacune :

Nous ne savons pas encore quelle est la fonction  $\langle E \rangle = g(T)$  qui nous permet de calculer  $T$  si  $E$  est donné.

Pour cela il faut savoir sur quelles masses nous avons intégré dans (11) - et pour cela, il faut connaître le spectre de masses, donc toutes les résonances. Le jeu semble avoir échoué, mais c'est ici que notre argument commence à devenir non trivial.

Pour compter toutes les résonances, étroites et larges, y compris même un fond non résonant, nous introduisons une fonction  $\rho(m) dm = \text{nombre d'états entre } m \text{ et } m + dm$  [nous avons incorporé un facteur  $(2I+1)(2J+1)$  et encore un facteur 2 si particule  $\neq$  antiparticule].

Donc, avec cette fonction  $\rho(m)$  - encore inconnue ! - on a

$$\sum_{\text{toutes les configurations}} [\dots] \Rightarrow \int [\dots] \rho(m) dm \quad (13)$$

Le membre de droite de (13) symbolise les fonctions thermodynamiques calculées pour un ensemble canonique à température  $T$  avec libre création et annihilation de toutes sortes de particules dont la zoologie s'exprime globalement par  $\rho(m)$ . Ce qui est le plus important :

les particules de ce gaz sont formellement libres, puisque toute interaction a été comprimée dans  $\rho(m)$ .

Ce sont donc formellement des fonctions thermodynamiques d'un gaz parfait à un nombre de composantes entre  $m$  et  $m + dm$  égal à  $\rho(m)dm$ , mais en réalité c'est une très bonne approximation à la dynamique de l'interaction forte - pourvu que nous arrivions à trouver le  $\rho(m)$  complet qui devrait représenter l'interaction forte complète.

La thermodynamique statistique du gaz parfait - même du corps noir - est très simple et, une fois  $\rho(m)$  connu, nous pouvons tout copier dans n'importe quel livre sur la mécanique statistique. Ceci sera le thème de la deuxième leçon.

Pour le moment, nous poursuivons la philosophie générale du modèle.

#### Le bootstrap

Nous sommes arrivés au formalisme thermodynamique du corps noir comprenant des particules de toutes sortes classées dans  $\rho(m)$  et contenant toutes les résonances, y compris les résonances encore inconnues. Le système thermodynamique - le corps noir de température  $T$  - est de la matière hadronique hautement excitée qui tient ensemble pendant  $10^{-23}$  sec par sa propre interaction - comme une résonance - puis se désintègre statistiquement. Nous appelons cela une boule de feu ("fireball"). Et maintenant, notre raisonnement circulaire :

- 1) supposons que la description thermodynamique des interactions fortes à hautes énergies est possible - c'est-à-dire que les objets de cette description, les boules de feu, existent ;
- 2) si les boules de feu existent, elles peuvent avoir n'importe quelle masse avec un spectre  $\Sigma(m)$  continu ;
- 3) plus leur masse est petite, plus les règles de sélection sont importantes pour la désintégration, moins valable est la description statistique. En arrivant dans la région de masse allant de quelques centaines à quelques milliers de MeV, les boules de feu deviennent des résonances ;
- 4) en faisant la somme sur toutes les résonances, la description thermodynamique des boules de feu tient compte des interactions fortes qui se déroulent à l'intérieur ; pour ceci, on se sert de la fonction  $\rho(m)$  ;
- 5) puisque les boules de feu sont des résonances très lourdes (ou les résonances sont de très petites boules de feu), il faut compter dans  $\rho(m)$  non seulement les résonances connues mais aussi toutes les boules de feu ; donc  $\rho(m)$  et  $\Sigma(m)$  doivent être (essentiellement) la même fonction ;
- 6) les boules de feu = résonances sont à la fois :
  - objet de la description thermodynamique,
  - composant élémentaire de cet objet,
  - agent générateur de l'interaction forte, qui est responsable de l'existence de l'objet.  
(cela c'est du bootstrap) ;
- 7) puisque seule la connaissance de  $\rho(m)$  est nécessaire pour calculer les fonctions thermodynamiques d'une boule de feu (et non la fiche personnelle de chaque résonance), la théorie est maintenant déjà fixée par la condition  $\rho(m) \approx \Sigma(m)$  (à préciser plus tard), et qui peut être remplie. Nous sommes donc arrivés à une description thermodynamique des interactions fortes déterminée de façon unique, la supposition 1) est donc valable, le raisonnement circulaire est donc cohérent.

Il nous faut seulement montrer que dans la nature quelque chose correspondant à notre schéma existe ; pour cela nous pouvons prendre n'importe quel fait, soit :

- le succès du modèle thermodynamique,
- l'existence des résonances,
- l'existence d'une température limite (à montrer),
- la forme exponentielle du spectre  $\rho(m)$  (à montrer).

Nous verrons toutes ces conséquences par la suite.

Pour terminer la première leçon, nous formalisons notre raisonnement circulaire en définissant :

une boule de feu est :

→ un équilibre thermodynamique  
(corps noir hadronique) d'un nombre in-  
déterminé de toutes sortes de boules de  
feu, chacune d'elles étant elle-même

(14)

et nous avons déjà constaté que cela implique  $\rho(m) \approx \sigma(m)$ . Puisque les résonances comptées par  $\rho(m)$  ont des nombres quantiques bien déterminés tandis que dans notre description canonique nos boules de feu ne l'ont pas, on ne peut pas exiger  $\rho(m) = \sigma(m)$ . En effet, par application des règles de sélection, on trouve  $\rho(m) < \sigma(m)$  [par exemple  $\sigma(m)$  pourrait compter des résonances "exotiques" qui ne sont peut-être pas contenues dans  $\rho(m)$ ].

En thermodynamique statistique,  $\ln \sigma(E)$  représente l'entropie ; étant donné que  $\rho(m) = \sigma(m)$  est impossible, nous exigeons :

$$\frac{\ln \rho(m)}{\ln \sigma(m)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 1$$

(14a)

comme formulation mathématique de notre définition (14).

Nous en verrons les conséquences dans les leçons suivantes :

- $\rho(m)$  est nécessairement une fonction exponentielle croissante  $\sim \exp(m/T_0)$  ;
- $T_0$  est la température limite universelle ;
- pour  $E_0 \rightarrow \infty$ , le spectre  $f_m(p, T) \rightarrow f_m(p, T_0)$  et rien ne change plus dans la distribution des moments linéaires, sauf par l'effet de  $L(\lambda, \gamma_0)$  dans (3).

## 1.2. - PREMIERE DISCUSSION

### 1.2.1. - Fragmentation limitée

Lecture : Ref. 4), Section 2.1.

Supposons  $F(\lambda)$  et  $F_0(\lambda)$  indépendantes de l'énergie primaire (donc de  $\gamma_0$ ).

Fixons un nombre  $\lambda_0 < 1$  positif et arbitrairement petit. Alors, pour tous les  $\lambda > \lambda_0$  on a

$$\lambda = \frac{\gamma-1}{\gamma_0-1} \approx \frac{\gamma}{\gamma_0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \gamma_0 \lambda_0 \gg 1 \\ \text{donc si } E_{ch} \gg 2m_p/\lambda_0 \end{array} \right\} \quad (15)$$

La partie du spectre total qui est due aux  $\lambda$  entre -1 et  $-\lambda_0$  est donc

$$W_m^{(\lambda_0)}(\vec{p}) = \int_{-1}^{-\lambda_0} F(\lambda) L(\lambda, \gamma_0) \left\{ f_m(\vec{p}', T) \right\} d\lambda \quad (16)$$

où  $T = T(\varepsilon(\lambda, \gamma_0))$ . En effet, selon (2)

$$\varepsilon(\lambda, \gamma_0) \gamma = \varepsilon_0 \gamma_0$$

$$\varepsilon(\lambda, \gamma_0) = \varepsilon_0 \frac{\gamma_0}{\gamma} \approx \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \quad (17)$$

selon (15) ; donc  $T(\varepsilon)$  est fonction de  $\lambda$  seulement et indépendant de  $\gamma_0$ .

Donc, dans (16) seulement  $L(\lambda, \gamma_0)$  dépend de  $\gamma_0$ . Nous avons choisi la partie du spectre qui, dans le centre de masse, est émis vers l'arrière ce qui, par convention, implique qu'elle est liée à la particule cible. Si ce spectre contient les débris de la cible, il devrait être à peu près "au repos" dans le système du laboratoire. Prenons donc la transformation  $L$  comme celle  $(\lambda) \rightarrow \text{lab}$ . Posons

$$\begin{aligned} V_0 &= (\gamma_0, \beta_0 \gamma_0) &= \text{quadrivitesse du CM vue du lab.} \\ V_{CM} &= (\gamma, \beta \gamma) &= \text{quadrivitesse de "}\lambda\text{" vue du CM} \\ V_{lab} &= (\gamma_\lambda, \beta_\lambda \gamma_\lambda) &= \text{quadrivitesse de "}\lambda\text{" vue du lab.} \end{aligned} \quad (18)$$

$v_{\text{lab}}(\lambda)$  est donc la transformée de Lorentz de  $v_{CM}(\lambda)$  :

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda &= \gamma_0 (\gamma - \beta_0 \beta \gamma) = \gamma \gamma_0 (1 - \beta \beta_0) \\ \beta_\lambda \gamma_\lambda &= \gamma_0 (-\beta \gamma + \beta_0 \gamma) = \gamma \gamma_0 (\beta_0 - \beta) \end{aligned} \quad (19)$$

où nous avons déjà tenu compte de  $\lambda$  négatif.

Avec  $\beta^2 \equiv 1 - 1/\gamma^2$  nous avons pour  $\gamma \gg 1$  et  $\gamma \approx \lambda \gamma_0$

$$\beta^2 \beta_0^2 = \left(1 - \frac{1}{\lambda^2 \gamma_0^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_0^2}\right) \approx 1 - \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2 \gamma_0^2}$$

$$\beta \beta_0 \approx 1 - \frac{1 + \lambda^2}{2 \lambda^2 \gamma_0^2} ; \quad 1 - \beta \beta_0 \approx \frac{1 + \lambda^2}{2 \lambda^2 \gamma_0^2}$$

et

$$\beta_0 - \beta \approx 1 - \frac{1}{2 \gamma_0^2} - \left(1 - \frac{1}{2 \lambda^2 \gamma_0^2}\right) = \frac{1 - \lambda^2}{2 \lambda^2 \gamma_0^2}$$

donc à cette approximation pour  $-1 \leq \lambda < -\lambda_0$

$$V_{lab}(\lambda) \approx \left( \frac{1 + \lambda^2}{2 \lambda}, \frac{1 - \lambda^2}{2 \lambda} \right) \quad (20)$$

donc indépendant de  $\gamma_0$ . La transformation  $(\lambda) \rightarrow lab$  se sert de cette quadritesse ; si nous transformons la partie  $-1 \leq \lambda < \lambda_0$  au système lab, nous trouvons

$$W_m^{(\lambda_0, lab)}(\vec{p}) = \int_{-1}^{-\lambda_0} F(\lambda) L^{(lab)}(\lambda) \left\{ f_m(\vec{p}', T(\lambda)) \right\} d\lambda \quad (21)$$

et cette expression ne dépend plus de  $\gamma_0$ .

En d'autres termes, si l'on choisit  $E_{CM}^{(0)} \gg 2m_p/\lambda_0$ , on trouve que la partie du spectre provenant de  $-1 \leq \lambda < -\lambda_0$  et observée dans le lab ne change plus quand l'énergie primaire  $E_{CM}$  continue à augmenter au delà de  $E_{CM}^{(0)}$ . La même chose est vraie dans le système de repos du projectile si l'on considère la partie  $\lambda_0 < \lambda \leq 1$ . La partie  $-\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0$  change toujours ; cet intervalle peut être réduit en choisissant  $E_{CM}^{(0)}$  plus grand. Si  $F(\lambda)$  n'a pas de singularité à  $\lambda = 0$ , cette dernière partie devient négligeable pour  $E \rightarrow \infty$  et les multiplicités tendent vers une constante.

On a donc trois parties du spectre :

- les débris de la cible  $-1 \leq \lambda \leq -\lambda_0$ , faible énergie dans le lab, indépendant de  $E_{\text{prim}}$ ,
- la pionisation  $-\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ , énergie dans le lab  $\approx \sqrt{E_{\text{prim}}}$ ,
- les débris du projectile  $\lambda_0 \leq \lambda \leq 1$ , énergie dans le lab  $\approx E_{\text{prim}}$ .

L'équation (21) peut être interprétée comme suit :

$$\lim_{E_{\text{prim}} \rightarrow \infty} W_m^{(\text{lab})} (\vec{p}, E_{\text{prim}}) = S_m^{(1)} (\vec{p}) \quad \left. \right\} \quad (21')$$

existe pour chaque  $|\vec{p}|$  fini

et sous cette forme, l'hypothèse de "fragmentation limitée" a été proposée par Benecke et al. <sup>7)</sup>

#### 1.2.2. - Discussion libre

2.1. - DEUXIEME LECON : LE CORPS NOIR HADRONIQUE

2.1.1. - La fonction de partition

Lecture : I, Sections 1, 2, 3.

Toutes les quantités thermodynamiques se calculent à partir de la fonction de partition

$$Z(V, T) = \sum_{\psi} \exp\left(-\frac{E_{\psi}}{T}\right) \quad (22)$$

Puisque formellement nous avons affaire à des particules libres, un état  $\psi$  est le produit direct des fonctions d'onde des particules libres présentes dans  $V$ .

Dans un volume  $V$  les fonctions d'ondes remplissant les conditions aux limites constituent un ensemble discret. Choisissant des ondes planes, on a donc des moments linéaires  $\vec{p}_{\alpha}$  discrets ;  $\alpha = 1, 2, \dots, \infty$ . Supposons pour le moment que l'ensemble de toutes les particules et résonances est également discret, dénombré par l'indice  $\gamma = 1, 2, \dots$ . On a donc :

$$\sqrt{p_{\alpha}^2 + m_{\gamma}^2} \equiv \epsilon_{\alpha\gamma} = \text{énergie de l'état } \alpha \text{ d'une particule de masse } m_{\gamma} \quad (23)$$

et

$$\begin{aligned} v_{\alpha\gamma} &\rightarrow 0, 1 && \text{pour les fermions} \\ &\rightarrow 0, 1, 2, \dots, \infty && \text{pour les bosons} \end{aligned} \quad (24)$$

$v_{\alpha\gamma}$  désigne le nombre de particules d'espèce  $\gamma$  se trouvant dans l'état  $\alpha$   
( $v_{\alpha\gamma}$  = nombre d'occupation)

L'état  $\Psi$  du système total est fixé par l'ensemble des nombres  $v_{\alpha\gamma}$  ( $\alpha, \gamma = 0, 1, \dots, \infty$ ) c'est-à-dire par la matrice  $(v)$  d'éléments  $v_{\alpha\gamma}$ . Donc  $\Psi \equiv (v)$ . L'énergie totale est

$$E_\Psi = \sum_{\alpha,\gamma} v_{\alpha\gamma} \epsilon_{\alpha\gamma} \quad (25)$$

d'où il vient

$$Z(v, T) = \sum_{(v)} \exp \left( -\frac{1}{T} \sum_{\alpha,\gamma} v_{\alpha\gamma} \epsilon_{\alpha\gamma} \right) \quad (26)$$

Posons

$$x_{\alpha\gamma} \equiv \exp \left( -\frac{\epsilon_{\alpha\gamma}}{T} \right) \quad (\text{toujours } < 1) \quad (27)$$

alors

$$Z(v, T) = \sum_{(v)} \prod_{\alpha\gamma} x_{\alpha\gamma}^{v_{\alpha\gamma}} = \prod_{\alpha\gamma} \left( \sum_{\alpha\gamma} x_{\alpha\gamma}^{v_{\alpha\gamma}} \right) \quad (28)$$

Nous distinguons les bosons ( $\gamma \Rightarrow \beta$ ) et les fermions ( $\gamma \Rightarrow \varphi$ ) et obtenons avec  $v_{\alpha\beta} = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ,  $v_{\alpha\varphi} = 0, 1$

$$Z(v, T) = \prod_{\alpha\beta} \frac{1}{1 - x_{\alpha\beta}} \prod_{\alpha\varphi} (1 + x_{\alpha\varphi}) \quad (29)$$

$$\ln Z(v, T) = - \sum_{\alpha\beta} \ln (1 - x_{\alpha\beta}) + \sum_{\alpha\varphi} \ln (1 + x_{\alpha\varphi}) \quad (30)$$

Passons au continuum :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\alpha} [\dots] &\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3} [\dots] \\ \sum_{\beta, \varphi} [\dots] &\Rightarrow \int_0^{\infty} \rho_{B,F}(m) dm [\dots] \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\ln Z = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dp p^2 \left[ \int_0^{\infty} dm \left( \rho_F(m) \ln(1+x_{pm}) - \rho_B(m) \ln(1-x_{pm}) \right) \right] \quad (32)$$

En développant les logarithmes, on obtient

$$\left. \begin{aligned} \ln Z(V, T) &= \frac{V}{2\pi^2} \sum_n \frac{1}{n} \int_0^{\infty} dp dm p^2 \rho(m; n) x_{pm}^n \\ x_{pm}^n &= \exp \left( -\frac{n}{T} \sqrt{p^2 + m^2} \right) \\ \rho(m; n) &= \rho_B(m) - (-1)^n \rho_F(m) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

L'intégration sur  $p$  donne

$$\left. \begin{aligned} Z(V, T) &= \\ \exp \left\{ \frac{VT}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\infty} \rho(m; n) m^2 K_2 \left( n \frac{m}{T} \right) dm \right\} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

où  $K_2$  est la fonction modifiée de Hankel bien connue.

### 2.1.2. - Le bootstrap

Maintenant nous préparons l'introduction de notre condition de "bootstrap" (14), (14a) en écrivant

$$Z(V, T) = \int_0^{\infty} \sigma(m, V) e^{-\frac{m}{T}} dm \quad (35)$$

Cette formule résulte de la définition (22) de la fonction de partition si on groupe d'abord l'ensemble de toutes les  $\Psi$  dont l'énergie  $m \leq E \leq m + dm$  et dont le nombre total est  $\sigma(m, V)dm$ .

Pour écrire la quasi-égalité de  $\rho$  et  $\sigma$ , il faut fixer  $V = V_0 =$  volume élémentaire  $4\pi/(3m\pi^3)$  et puis exiger (34) = (35) : dans (35) la boule de feu de volume  $V_0$  et de température  $T$  est interprétée comme un seul objet de densité de niveaux  $\sigma(m, V_0)$  et dans (34) comme un corps noir hadronique composé de particules de spectre de masse  $\rho(m; n)$ . La condition de bootstrap est :

$$\frac{\ln \rho(m; n)}{\ln \sigma(m; V_0)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 1 \quad (36)$$

On voit très aisément ce qui se passe en approchant (36) par itération ; nous partons de l'hypothèse que le spectre hadronique est borné ; la plus mauvaise approximation est de supposer qu'il n'y a que des mésons  $\pi$ . Dans ce cas, et pour  $T$  suffisamment grand ( $T \gg m\pi$ ), on peut négliger la masse  $m\pi$  et on tombe sur les formules du rayonnement du corps noir électromagnétique (à un facteur de poids  $\frac{3}{2}$  près) pour lequel on sait que  $\sigma(m, V_0) \sim \exp(m^{3/4})$ . Pour obéir à la condition (36) il faut donc abandonner l'idée que  $\rho(m; n)$  est borné et admettre que  $\rho(m; n) \sim \exp(m^{3/4})$ . Avec un tel  $\rho$  on trouve que  $\sigma$  croît comme  $\exp[\bar{m}/\ln \bar{m}]$ , donc  $\rho$  doit le faire aussi, etc. Dans cette itération  $\sigma_i$  croît toujours plus vite que  $\rho_i$  et puisque l'équation (36) exige qu'on pose  $\rho_{i+1} \approx \sigma_i$  dans l'itération suivante, il découle que

$\rho_{i+1}$  croît plus vite que  $\rho_i$ . Or, ni  $\rho$  ni  $\sigma$  ne peuvent croître plus vite qu'exponentiellement. Si donc l'itération a une solution, ce sera  $\rho \sim \sigma \sim \exp(m/T_0)$  où  $T_0$  est une constante et où  $\rho$  et  $\sigma$  peuvent différer par un facteur  $f(m)$  non-exponentiel. Dans I, Appendices 3 et 4, j'ai démontré que :

- l'équation (36) n'admet pas de solutions non-exponentielles ;
- la solution exponentielle existe.

Essayons de voir que  $\rho \sim \sigma \sim \exp(m/T_0)$  est une solution. Avec  $\rho \sim \exp(m/T_0)$ , ce sont les grandes masses qui contribuent dans les intégrales de l'équation (34). On peut donc écrire

$$K_2\left(m \frac{m}{T}\right) \underset{m \frac{m}{T} \gg 1}{\Rightarrow} \sqrt{\frac{\pi T}{2m}} \exp\left(-m \frac{m}{T}\right) \quad (37)$$

et constater que, dans (34),

la première intégrale ( $n=1$ ) diverge pour  
 $T > T_0$ , la deuxième pour  $T > 2T_0$ , etc.

Pour  $T \rightarrow T_0$ , il suffit donc de considérer la première intégrale divergente et de négliger tout le reste ( $n \geq 2$ ) qui tend vers une constante finie pour  $T \rightarrow T_0$ .

Avec

$$\begin{aligned} \rho(m) &\Rightarrow f(m) e^{m/T_0} \\ \sigma(m) &\Rightarrow g(m) e^{m/T_0} \end{aligned} \quad (38)$$

On obtient pour  $T \rightarrow T_0$  et un  $M_0 \gg T_0$  arbitraire

$$\begin{aligned} Z(V_0, T) &\stackrel{(34)}{\Rightarrow} \exp \left[ V_0 \left( \frac{T_0}{2\pi} \right)^{3/2} \int_{M_0}^{\infty} f(m) m^{3/2} e^{-mT} dm + C(M_0, V_0, T_0) \right] \\ &\stackrel{(35)}{\Rightarrow} \int_0^{\infty} g(m) e^{-mT} dm \end{aligned} \quad (39)$$

où

$$T \equiv \frac{T_0 - T}{TT_0}$$

et où  $C(M_0, V_0, T_0)$  contient tout le reste.

Les deux intégrales ont la même structure : elles contiennent la même fonction  $\exp(-mT)$  et d'autres fonctions non-exponentielles. Mais la première intégrale se trouve dans l'argument de la fonction exponentielle et la deuxième non. On peut alors choisir  $f(m)$  et  $g(m)$  tels que la première intégrale diverge logarithmiquement pour compenser l'exponentielle :

$$f(m) = \frac{a_0}{m^{5/2}} \quad (40)$$

$$g(m) = b m^{\beta-1}$$

La première intégrale devient pour  $T \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} a_0 \int_{M_0}^{\infty} \frac{dm}{m} e^{-mT} &= a_0 \int_{M_0 T}^{\infty} \frac{dx}{x} e^{-x} \Rightarrow a_0 \ln \left( \frac{T_0}{M_0} \cdot \frac{T_0}{T_0 - T} \right) \\ &= a_0 \ln \left( \frac{T_0}{T_0 - T} \right) + a_0 \ln \left( T_0 / M_0 \right) \end{aligned} \quad (41)$$

et la deuxième

$$b \int_0^{\infty} m^{\beta-1} e^{-mT} dm = \left( \frac{T_0}{T_0 - T} \right)^{\beta} \cdot [b T_0^{\beta} \Gamma(\beta)] \quad (42)$$

On obtient donc de (39), (41), (42) pour  $T \rightarrow T_0$

$$Z(V_0, T) \Rightarrow \left(\frac{T_0}{T_0 - T}\right)^{\alpha_0} \exp C_0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_0}{T_0 - T}\right)^{\beta} \cdot [b T_0^{\beta} \Gamma(\beta)] \quad (43)$$

avec

$$\alpha_0 \equiv a_0 V_0 \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^{3/2} \quad (44)$$

En choisissant  $\beta = \alpha_0$  et  $b T_0^{\beta} \Gamma(\beta) = \exp C_0$  nous avons réalisé la solution. Il faut encore dire que  $C_0 \equiv C(M_0 V_0 T_0) + a_0 \ln(T_0/M_0)$  - voir (41) - et que  $C_0$  ne dépend plus de  $M_0$  pour  $M_0 \gg T_0$ . La fonction  $\sigma(m, V_0)$  ne nous intéresse pas ; notons cependant que l'équation  $b T_0^{\beta} \Gamma(\beta) = \exp C_0$  implique que  $\sigma$  dépend de  $V_0$  exponentiellement (comme il le faut pour assurer l'additivité de l'énergie libre).

#### 2.1.3. - Discussion des résultats

Nous sommes partis de l'hypothèse qu'une description thermodynamique des interactions fortes est possible, c'est-à-dire que l'objet d'une telle description - la boule de feu - existe. L'interaction forte est représentée par les résonances traitées comme particules libres. L'existence des boules de feu nous force à les considérer comme des résonances lourdes, ce qui nous force à poser la condition de bootstrap (14), (14a). Cette condition entraîne

$$\rho(m) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} \frac{a_0}{m^{5/2}} e^{-m/T_0} \quad (45)$$

et, puisque toutes les fonctions thermodynamiques se calculent à partir de la fonction de partition (43) qui diverge pour  $T \rightarrow T_0$ , nous avons le résultat que toutes les fonctions thermodynamiques (énergie, nombre

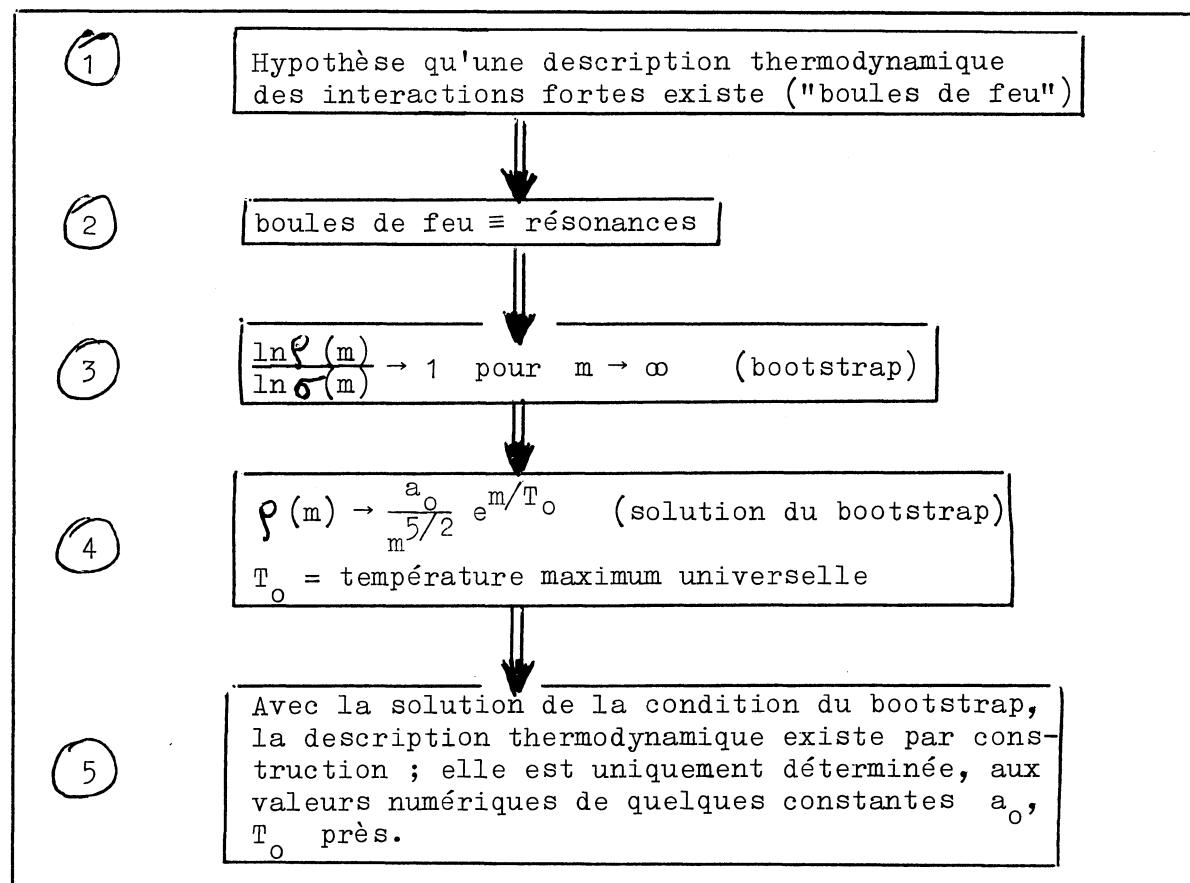
de particules, pression, entropie, etc.) divergent, donc

$T_0$  est la température maximum universelle (46)

L'explication physique de ce phénomène est que, pour  $T \rightarrow T_0$  et avec le spectre exponentiel, il devient plus facile de produire des particules que d'augmenter l'énergie cinétique de celles qui sont présentes.

[lecture : Ref. 8), Section 1]. Cette température est universelle parce qu'on ne peut pas empêcher la production de particules, donc on ne peut pas supprimer le mécanisme qui limite  $T < T_0$  sauf peut-être dans des collisions à si haute énergie que le temps de collision  $\Delta t \approx \Delta t_0 / \gamma$  devient très petit comparé à l'intervalle élémentaire  $\Delta t_0 \approx 1/m \pi$  qui gouverne la production de particules (analogie : liquide surchauffé).

La structure logique de notre raisonnement circulaire est donc :



donc l'hypothèse ① est vraie. Pourtant, cette chaîne ne montre que la cohérence logique de notre théorie. Pour la rendre vraie dans le sens d'une théorie physique, il faut qu'elle corresponde à la réalité. Pour cela, notons :

- le spectre hadronique experimental peut être bien approximé par (voir Fig. 1)

$$\rho(m) \approx \frac{a_0}{(m_0^2 + m^2)^{5/4}} e^{m/T_0} \quad (46)$$

et les valeurs numériques sont

$$\begin{aligned} a_0 &= 2.63 \times 10^4 \text{ [MeV}^{3/2}] \\ T_0 &= 160 \text{ MeV} \quad (1.86 \times 10^{12} \text{ K}) \\ m_0 &= 500 \text{ MeV} \quad (\text{pas de signification physique}) \end{aligned} \quad (47)$$

La prédiction que le spectre hadronique croît exponentiellement était choquante en 1965 ; mais le même comportement a été retrouvé dans d'autres modèles d'interactions fortes, notamment dans le modèle de Veneziano.

- la température limite  $T_0$  entraîne par voie de la loi de Planck [Eq. (12)] une limitation des moments linéaires ; ceci se traduit en limitation des moments transverses  $p_{\perp}$  dans les collisions (où la transformation de Lorentz dans la direction longitudinale laisse  $p_{\perp}$  invariant). On déduit [II, Section 4.4.4.]

$$\langle p_{\perp}(m, T) \rangle \cong \sqrt{\frac{\pi}{2} m T} \frac{K_{5/2}(\frac{m}{T})}{K_2(\frac{m}{T})} \xrightarrow[m \gg T]{} \sqrt{\frac{\pi}{2} m T} \quad (48)$$

et pour les très hautes énergies,  $T \rightarrow T_0$  dans cette formule. La figure 2 montre que c'est vrai.

Ces deux faits - le spectre hadronique exponentiel et l'existence de  $T_0$  entraînant les moments transverses limités - sont les résultats les plus remarquables de cette théorie - théorie qui est déjà déterminée par la seule hypothèse qu'elle existe. Puisque les

résultats (on en verra beaucoup d'autres) sont en accord avec les expériences, ceci signifie que le bootstrap est un principe profond, constructif, hautement non-trivial et probablement vrai.

[Lecture : Section 6 de la Ref. 4.)]

#### 2.1.4. - Formules asymptotiques et moins asymptotiques

Pour la suite de cette leçon, nous regardons la fonction de partition de plus près sans entrer dans les détails du calcul. Nous connaissons maintenant le comportement asymptotique de  $\rho(m)$ ; nous connaissons également par l'expérience sa forme détaillée pour  $m \lesssim 1.2$  GeV. Donc  $\rho(m)$  est suffisamment connue pour calculer numériquement  $Z(v, T)$  [Eq. (34)], même pour des valeurs  $T$  non-asymptotiques. Les détails sont compliqués [II, App. I], mais supposons que  $\ln Z(v, T)$  est calculé comme fonction numérique; on peut alors approximer cette fonction par une expression analytique avec le résultat [Ref. 9), Section 4]

$$\begin{aligned} \ln Z &= \alpha_0 \frac{V}{V_0} \left[ H(t) - \ln \left( \frac{1}{t} - 1 \right) \right] \\ H(t) &= 1.8479 - 3.7433 t - \frac{0.034225}{t - 1.065} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\alpha_0 = \alpha_0 V_0 (T_0 / 2\pi)^{3/2} = 5.38 \quad (\text{sans dimension})$$

$$V_0 = 4\pi / (3m_\pi^3) = 1.59 \times 10^{-6} \text{ MeV}^{-3}; \quad t \equiv T/T_0$$

valable dans  $0.5 < t < 1$  (erreur maximale 0.4 %, erreur moyenne 0.1 %). Pour  $t < 0.5$ , la production de particules devient négligeable puisque cette valeur correspond à une collision centrale de  $p_{0,\text{lab}} \approx 2.5$  GeV/c.

La densité d'énergie  $E = E/V$  se calcule par

$$\langle E(T) \rangle = \frac{T^2}{V} \frac{\partial \ln Z(V, T)}{\partial T} \underset{T \rightarrow T_0}{\Rightarrow} \frac{T_0 \alpha_0}{V_0} \frac{1}{1-t} \quad (50)$$

Ceci permet de calculer  $T = f(E)$  [II, App. II].

Le spectre des moments linéaires [formule de Planck, Eq. (12)] peut être dérivé de  $\ln Z$  [voir Discussion 2] et le nombre total moyen de particules créées (boules de feu dans la boule de feu considérée) devient  $\langle N \rangle \approx \ln Z(v, T)$  [voir Discussion 2].

Enfin, on constate que la masse moyenne  $\bar{m}$  des "boules de feu dans la boule de feu" diverge pour  $T \rightarrow T_0$ . Sous cette condition on peut négliger toutes les masses  $m < \mu$  où  $\mu \gg T_0$  et les formules exactes pour le "gaz partiel des masses  $m > \mu$ " deviennent des formules asymptotiques pour notre système [Ref. 9), Section 5.6] :

$$\bar{m}(T) \Rightarrow \frac{T T_0}{T_0 - T} \frac{\exp\left[-\frac{\mu}{T_0} \cdot \frac{T_0 - T}{T}\right]}{E_1\left[\frac{\mu}{T_0} \cdot \frac{T_0 - T}{T}\right]} = \left\{ \begin{array}{l} \text{valeur moyenne des} \\ \text{masses } m > \mu \end{array} \right\}^*) \quad (51)$$

$$E(T, V) \Rightarrow a_0 V (T/2\pi)^{3/2} \left\{ \frac{3}{2} T E_1\left[\frac{\mu}{T_0} \cdot \frac{T_0 - T}{T}\right] + \frac{T T_0}{T_0 - T} \exp\left[-\frac{\mu}{T_0} \cdot \frac{T_0 - T}{T}\right] \right\} \quad (52)$$

$$N(V, T) \Rightarrow \ln Z(V, T) \Rightarrow a_0 V \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{3/2} E_1\left[\frac{\mu}{T_0} \cdot \frac{T_0 - T}{T}\right] \quad (53)$$

d'où vient la formule

$$E(V, T) \Rightarrow N(V, T) \cdot \left( \frac{3}{2} T + \bar{m} \right) \quad (54)$$

et, avec  $P(\text{pression}) = (T/V) \ln Z$

$$PV \Rightarrow N(V, T) \cdot T \quad (55)$$

---

\*)  $E_1(x)$  est l'intégrale exponentielle  $\int_x^\infty e^{-y} dy/y$ .

A première vue, c'est l'équation du gaz parfait de  $N$  particules ; cependant ici  $N$  n'est pas un paramètre donné, mais une fonction de  $T$  et  $V$ .

Dans la même approximation, nous avons

$$f_m(p, T) d^3 p \Rightarrow \frac{V z_m}{8\pi^3} \exp\left(-\frac{1}{T} \sqrt{p^2 + m^2}\right) d^3 p \quad (56)$$

$$\bar{\nu}(m, T) \equiv \int f_m(p, T) d^3 p \Rightarrow V z_m \left(\frac{m T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m/T} \quad (57)$$

Ceci est le nombre de particules de masse  $m$  discrète et de multiplicité  $z_m = (2I+1)(2J+1)$  présentes à la température  $T$ , si aucune règle de sélection ne limite la production de la particule  $m$ .

Enfin, le nombre de particules entre  $m$  et  $m+dm$  devient  $\bar{n}(m, T) dm = \bar{\nu}(m, T) \rho(m) dm$  donc

$$\bar{n}(m, T) dm \Rightarrow a_0 V \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{m} \exp\left(-\frac{m \cdot T_0 - T}{T_0}\right) dm \quad (58)$$

et

$$N(T) = \int_0^\infty \bar{n}(m, T) dm \quad (59)$$

ce qui entraîne par comparaison de (58) avec (39) où  $f(m) = a_0 m^{-5/2}$  (40), que  $N(T \rightarrow T_0) = \ln z(V, T \rightarrow T_0)$ .

Comment est-il possible que la probabilité de trouver une particule lourde soit exponentiellement petite (57) et que, en même temps, la masse moyenne  $\bar{m}$  et le nombre total soient divergents ? Parce que le grand nombre  $\rho(m) dm$  de particules différentes compense la décroissance du facteur de Boltzmann : on calcule toujours des intégrales du type

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} F(m, T, \dots) \rho(m) e^{-m/T} dm \\ &= \int_0^{\infty} G(m, T, \dots) \exp\left(-\frac{m}{T_0} \cdot \frac{T_0-T}{T}\right) dm \end{aligned} \quad (60)$$

qui divergent pour  $T \rightarrow T_0$ . Par exemple, si vous observez la circulation autour de l'Arc de Triomphe à Paris, la probabilité de voir une certaine voiture bien définie - disons 111 AA 75 - est minime, et cela est vrai pour chaque voiture parisienne (sauf pour quelques unes) ; néanmoins, il y en a assez, même trop.

[Lecture complémentaire : II, Introduction, App. I et II, Ref. 9) et III Section 2.]

## 2.2. - DEUXIÈME DISCUSSION

### 2.2.1. - Comment dériver des distributions de probabilité à partir de $Z(v, T)$ ?

Supposons dès maintenant que  $\ln Z(v, T)$  est une fonction donnée. Nous avons

$$Z(v, T) = \sum_{(\nu)} \prod_{\alpha\gamma} \pi_{\alpha\gamma}^{v_{\alpha\gamma}} \quad (61)$$

La probabilité de trouver actuellement un état  $(\nu')$  bien défini est donnée par

$$W(v') = \frac{\prod_{\alpha\gamma} \pi_{\alpha\gamma}^{v'_{\alpha\gamma}}}{Z} \quad (62)$$

évidemment  $\sum_{(\nu)} W(\nu) = 1$ .

Si  $S$  est un ensemble quelconque d'états, la probabilité de trouver un état ( $v$ ) quelconque appartenant à  $S$  est :

$$W(S) = \sum_{(v)}^{(S)} \prod_{\alpha\gamma} x_{\alpha\gamma}^{v_{\alpha\gamma}} / Z \quad (63)$$

$\sum^{(S)}$  ≡ somme sur tous  $(v) \in S$ .

On obtient toutes les distributions de probabilité en spécialisant  $S$ .

#### 2.2.1.1. - Le spectre des moments linéaires $f_m(p, T)$

$f_m(\vec{p}, T)$  est le nombre de particules de masse  $m$  ayant un moment linéaire  $\vec{p}$  dans  $d^3 p$ ; retraduit en langage d'états discrets, c'est le nombre moyen de particules d'espèce  $k$  ayant un moment linéaire  $\vec{p}_i$ , c'est donc le nombre  $v_{ik}$  que nous devons calculer. Nous commençons par calculer  $W(v_{ik})$  c'est-à-dire la probabilité de trouver  $v_{ik}$  particules (espèce  $k$ , moment  $\vec{p}_i$ ) quel que soit ce qui se passe avec les autres.  $S$  est donc alors l'ensemble de tous les états dans lesquels  $v_{ik}$  a une valeur fixe, tous les autres  $v_{\alpha\gamma}$  étant libres. Donc on doit sommer sur tous les  $v_{\alpha\gamma}$  sauf sur  $v_{ik}$ .

$$\sum_{(v)}^{(S)} \prod_{\alpha\gamma} x_{\alpha\gamma}^{v_{\alpha\gamma}} = Z \cdot \frac{x_{ik}^{v_{ik}}}{\sum_{iR} x_{ik}^{v_{ik}}} \quad (64)$$

d'où il vient

$$W(v_{ik}) = \frac{1}{Z} \sum_{(v)}^{(S)} \prod_{\alpha\gamma} x_{\alpha\gamma}^{v_{\alpha\gamma}} = x_{ik}^{v_{ik}} \begin{cases} 1 - x_{ik} & (\text{bosons}) \\ \frac{1}{1 + x_{ik}} & (\text{fermions}) \end{cases} \quad (65)$$

La valeur  $\bar{V}_{ik}$  est obtenue par

$$\bar{V}_{ik} = \sum_{ik} v_{ik} W(v_{ik}) = \begin{cases} (1-x_{ik}) \sum_v v x_{ik}^v & v=1,2\dots\infty \\ \frac{1}{1+x_{ik}} \sum_v v x_{ik}^v & v=1,0 \end{cases} \quad (66)$$

alors

$$\bar{V}_{ik} = \frac{x_{ik}}{1+x_{ik}} \quad \left( \begin{array}{l} - \text{bosons} \\ + \text{fermions} \end{array} \right); \quad x_{ik} = \exp\left(\frac{\sqrt{p_i^2+m_R^2}}{T}\right) \quad (67)$$

Il est évident que cette même formule peut aussi être dérivée de

$$\bar{V}_{ik} = x_{ik} \frac{\partial}{\partial x_{ik}} \ln Z = \frac{1}{Z} \sum_{ik} v_{ik} \prod_{\alpha\gamma} x_{\alpha\gamma}^{v_{\alpha\gamma}} \quad (68)$$

Pour passer aux moments linéaires continus, il faut multiplier par le nombre de moments  $\vec{p}_i$  dans  $d^3 p$ , c'est-à-dire par [pour  $z_m$  voir (70)]

$$\frac{z_m V d^3 p}{h^3} = \frac{V z_m}{2\pi^2} p^2 dp; \quad (69)$$

On trouve

$$f_m(p, T) d^3 p = \frac{V z_m}{2\pi^2} \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{\sqrt{p^2+m^2}}{T}\right) + 1} \quad (70)$$

$\left( \begin{array}{l} - \text{bosons} \\ + \text{fermions} \end{array} \right)$

$$z_m = \begin{cases} 1 & \text{si la charge et la polarisation sont observées ;} \\ 2J+1 & \text{si seulement la charge est observée ;} \\ 2I+1 & \text{si seulement la polarisation est observée ;} \\ (2I+1)(2J+1) & \text{si ni la polarisation ni la charge ne sont observées.} \end{cases} \quad (70')$$

Cette formule s'applique seulement aux particules qui peuvent être créées sans limitation par des règles de sélection. Tandis que cette formule est la base de calcul pour tous les spectres, elle subit encore des modifications dans les applications concrètes.

En revenant à l'équation (65) nous remarquons que  $x_{ik} \ll 1$  pour  $\sqrt{p^2 + m^2} \gg T_0$ , ce qui est garanti pour  $m \gg T_0$ . Dans ce cas

$$\left. \begin{aligned} W(v_{ik}) &\approx x_{ik}^{v_{ik}} \approx [W(v_{ik}=1)]^{v_{ik}} \\ \bar{v}_{ik} &\approx x_{ik} \approx W(v_{ik}=1) \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

ce qui veut dire que, pour  $m \gg T_0$ , la probabilité de trouver une particule  $m_k$  avec le moment linéaire  $\vec{p}_i$  est  $\ll 1$  et égale au nombre moyen  $\bar{v}_{ik}$  de particules  $(i,k)$ ; la probabilité d'en trouver  $n$  est égale à la  $n^{\text{ième}}$  puissance d'en trouver une.

Cette remarque sera utile pour le cas où une loi de conservation exige la production d'une paire : la probabilité de création d'une paire est le carré de la probabilité de création d'une même particule sans restrictions.

[Lecture sur ce dernier point : III, Sect. 3  
et App. I.]

#### 2.2.1.2. - La distribution de Poisson ; multiplicité

Nous considérons la probabilité  $W(n)$  de trouver exactement  $n$  particules (boules de feu dans la boule de feu) de n'importe quelle espèce et dans n'importe quel état  $\alpha$ . L'ensemble S s'écrit dans ce cas

$$S(n) = \left\{ (v) : \sum_{\alpha\gamma} v_{\alpha\gamma} = n \right\} \quad (72)$$

et on a

$$W(n) = \frac{1}{Z} \sum_{(v)} (S(n)) \prod_{\alpha\gamma} x_{\alpha\gamma}^{v_{\alpha\gamma}} \quad (73)$$

La somme  $\sum(S(n))$  est la somme sur l'ensemble de tous les termes homogènes de degré  $n$  dans les variables  $x_{\alpha\gamma}$ . Pour les trouver on se sert d'une variable auxiliaire  $z$  par laquelle on multiplie toutes les  $x_{\alpha\gamma}$ . C'est-à-dire que l'on définit une nouvelle fonction

$$Z(V, T, z) = \sum_{(v)} \prod_{\alpha\gamma} (zx_{\alpha\gamma})^{v_{\alpha\gamma}} \quad (74)$$

Pour  $z = 1$ , on retrouve  $Z(V, T)$ . On développe  $Z(V, T, z)$  en série par rapport à  $z$  et le coefficient de  $z^n$  est homogène de degré  $n$  dans les  $x_{\alpha\gamma}$ , donc égal à  $\sum(S(n))$  :

$$Z(V, T, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left( \sum_{(v)} (S(n)) \prod_{\alpha\gamma} x_{\alpha\gamma}^{v_{\alpha\gamma}} \right) \quad (75)$$

et, avec (73)

$$Z(V, T, z) = Z(V, T) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n W(n) \quad (76)$$

Pour évaluer  $Z(V, T, z)$  nous revenons à l'équation (33) qui prend maintenant la forme

$$\ln Z = \frac{V}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \int_0^{\infty} p(u; n) \times_{pm}^n p^2 du \quad (77)$$

d'où vient pour (34) la nouvelle forme

$$Z(V, T, z) = \exp \left\{ \frac{VT}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \int_0^{\infty} p(u; n) u^2 K_2(n \frac{u}{T}) du \right\} \quad (78)$$

Il est difficile d'en tirer le coefficient de  $z^n$  parce que la somme se trouve encore dans l'argument de l'exponentielle. L'analyse numérique (pour  $z = 1$ ) montre cependant que, étant donné que

$m_{\pi}$  est la plus petite masse hadronique,

$T < T_0 \approx m_{\pi}$ , et

$K_2(n \frac{u}{T})$  décroît exponentiellement,

le premier terme ( $n = 1$ ) contribue déjà  $> 98 \%$  de toute la somme sur  $n$ .

La contribution est  $\approx 98 \%$  pour des valeurs de  $T \approx 120$  MeV ; si  $T$  est plus petit,  $K_2(n \frac{u}{T})$  décroît encore plus rapidement et le premier terme est le seul important ; si  $T \rightarrow T_0$ , le premier terme diverge (les autres non) et devient de nouveau le seul important. Dans ces circonstances, on peut négliger les termes  $n \geq 2$  et on trouve

$$Z(V, T, z) \cong \exp \left\{ z \frac{VT}{2\pi^2} \int_0^{\infty} p(u) u^2 K_2(\frac{u}{T}) du \right\} \quad (79)$$

à (au maximum) 2 % près.

Donc (toujours à la même approximation)

$$Z(V, T, z) = \exp \{ z \ln Z(V, T) \} \quad (79a)$$

Le développement en  $z$  donne

$$Z(V, T, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (\ln Z)^n \quad (80)$$

d'où il vient, par comparaison avec (76)

$$W(n) = e^{-\ln Z} \cdot \frac{(\ln Z)^n}{n!} \quad (81)$$

ce qui est une distribution de Poisson avec

$$N = \bar{n} = \ln Z(V, T) \quad (82)$$

Ce dernier résultat  $N = \ln Z$  est très important. C'est pourquoi nous le dérivons encore une fois d'une autre manière. En partant de l'équation (68), nous écrivons

$$N = \sum_{\alpha\gamma} \bar{v}_{\alpha\gamma} = \sum_{\alpha\gamma} x_{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\gamma}} \ln Z \quad (83)$$

Si  $\ln Z$  était homogène de premier ordre en  $x_{\alpha\gamma}$ , le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes donnerait immédiatement (82). En effet,  $\ln Z$  ne l'est pas, et c'est seulement le fait que  $T_0$  est de l'ordre de  $m_\pi$  - la plus petite masse hadronique - qui entraîne que la relation (82) soit presque correcte (2%).

Une troisième dérivation du même résultat a déjà été donnée dans la considération du gaz partiel des masses  $m > \gg T_0$  [Eqs. (58), (59)].

Applications

Notre résultat (81), (82) n'est qu'une bonne approximation. De plus, il ne s'applique pas immédiatement aux particules observées, puisque  $W$  est la distribution de "boules de feu dans la boule de feu" qui, elles-mêmes, se désintègrent selon la même distribution (avec un autre  $N$ ), etc., jusqu'à ce que, après toute une séquence de générations, on arrive aux particules observées. Cependant, notre résultat peut être toujours une bonne approximation si l'on applique aux petits "éléments de volume"  $V_0 \cdot F(\lambda)$  de  $\lambda$  qui n'ont, en général, pas une très grande énergie et, par conséquent, peu de générations de désintégration. En fait, la distribution de Poisson des mésons  $\pi^-$  ou, mieux, de paires  $(\pi^+ \pi^-)$  a été beaucoup discutée ces dernières années<sup>10)</sup> et elle semble être vraie à une approximation satisfaisante.

Pour écrire une formule pratique, il faut encore exprimer  $\ln Z(V, T)$  comme fonction non de  $T$  mais de la densité d'énergie  $\mathcal{E}(T)$ ; puisque  $\mathcal{E}(T)$  est une fonction connue [voir Eq. (50)], c'est simple :

$$\ln Z(V, T) \Rightarrow \frac{V}{V_0} \alpha_0 \left[ H(t) - \ln \left( \frac{1}{t} - 1 \right) \right]$$

[voir Eq. (49)] ; de (50), on a

$$1-t \Rightarrow \frac{T_0 \alpha_0}{\mathcal{E} V_0}$$

ceci, pour  $t \rightarrow 1$ , conduit à

$$\ln Z(V, \mathcal{E}) \Rightarrow \frac{V \alpha_0}{V_0} \left[ H(1) + \ln \left( \frac{\mathcal{E} V_0}{\alpha_0 T_0} \right) \right]$$

donc pour  $\mathcal{E}$  large

$$N(V, \mathcal{E}) \Rightarrow \frac{V \alpha_0}{V_0} \left[ -1.37 + \ln \left( \frac{\mathcal{E} V_0}{\alpha_0 T_0} \right) \right] \quad (84)$$

$$\alpha_0 T_0 = \eta_0 V_0 \text{ (définition de } \eta_0 \text{)} = 860 \text{ MeV}$$

Si  $\epsilon$  est une densité d'énergie locale,  $\epsilon V_0$  est l'énergie totale d'un volume de nucléon de densité  $\epsilon$  constante. Si  $\epsilon$  désigne par exemple la densité centrale  $[\epsilon(\lambda = 0)]$  d'une collision,  $\epsilon V_0 \approx E_{CM}$ . Il faut encore tenir compte du fait que très souvent certains nombres quantiques  $Q = \{q_1, \dots, q_r\}$  du système en désintégration ou du sous-système en considération [par exemple  $F(\lambda)d\lambda$ ] sont prescrits. Dans ce cas, le spectre hadronique à disposition est limité et  $\alpha_0$  devait être remplacé par  $\alpha$  :

$$\alpha_0 = a_0 V_0 \left( \frac{T_0}{2\pi} \right)^{3/2} \text{ remplacé par } \alpha = \frac{a}{a_0} \alpha_0 \quad (85)$$

où  $a$  est la constante remplaçant  $a_0$  dans le spectre de masses  $[f_Q(m) = a m^{-5/2} \exp(-m/T_0)]$  pour tenir compte de l'élimination de toutes les particules ayant des nombres quantiques  $\neq Q$ . [Voir III, Sect. 4.5.]

L'effet d'une telle élimination dépend de la masse totale de la boule de feu avec des nombres quantiques  $Q$  ; plus elle est lourde, plus elle est indifférente aux règles de sélection, donc

$$\frac{a(Q, E)}{a_0} \begin{cases} 1 & \text{pour } E \rightarrow \infty \text{ et n'importe quel } Q \\ & \text{entre 0 et 1 pour } E \text{ d'ordre de 1 GeV} \\ & \text{et dépendant de façon critique de } Q. \end{cases} \quad (86)$$

Nous ne changeons pas  $\alpha_0$  en  $\alpha$  sous le logarithme. Par contre, nous obtenons une meilleure formule en négligeant la constante -1.37 pour la raison suivante : quand  $\epsilon \rightarrow \infty$ , -1.37 est négligeable. Donc asymptotiquement, -1.37 n'a pas d'importance. Si l'on prend  $\epsilon$  petit, disons  $\epsilon V_0 \rightarrow 860 \text{ MeV}$ , le logarithme devient nul et  $N$  devient négatif. En négligeant -1.37, on trouve  $N \rightarrow 0$  pour  $\epsilon \rightarrow \eta_0 \equiv \alpha_0 T_0$ , ce qui est raisonnable. En négligeant -1.37 nous obtenons donc une formule qui n'est pas seulement "correcte" pour la région asymptotique  $\epsilon \rightarrow \infty$  mais aussi pour  $\epsilon \rightarrow \eta_0$ .

$$N(\epsilon, V, Q) \cong \frac{V}{V_0} \frac{a(Q, \epsilon V)}{a_0} \alpha_0 \ln \left( \frac{\epsilon V_0}{\eta_0 V_0} \right) \quad (87)$$

$$\alpha_0 = 5.38 \text{ (sans dimension)}$$

$$V_0 \gamma_0 = 860 \text{ MeV} \approx m_p \text{ (sous le logarithme)}$$

$$a/a_0 \quad \text{voir Eq. (86).}$$

$$\underline{\text{Exemple}} : \bar{pp} \text{ au repos : } V \approx V_0 ; a/a_0 \approx 1 ; \mathcal{E} V_0 = 1870 \text{ MeV}$$

$$N(pp) \approx 5.37 \ln 2.18 = 4.2$$

Etant donné que  $N$  est le nombre total des particules, y compris les résonances qui se désintègrent ensuite, ce résultat est très raisonnable. Notez qu'il n'y a aucun paramètre libre.

Exemple : Collisions  $pp$  à très haute énergie. Dans ce cas, il faut appliquer (87) à chaque élément  $V_0 F(\lambda) d\lambda$  (voir première leçon) et ensuite faire la somme. La loi de composition de distributions de Poisson donne, à cause de l'indépendance des émissions,

$$W(n) = \frac{(\int dN)^n}{n!} \exp(-\int dN) \quad (88)$$

où  $\int dN$  est la somme sur toutes les  $\lambda$ . Pour cela, nous remplaçons dans (87)

$$\begin{aligned} V &\text{ par } V_0 F(\lambda) d\lambda \\ \mathcal{E} V \text{ (dans a)} &\text{ par } \mathcal{E}(\lambda) \Delta V \equiv \Delta E(\lambda) \\ \mathcal{E} V_0 \text{ dans le logarithme} &\text{ par } \mathcal{E}(\lambda) V_0 - m_p \end{aligned} \quad (89)$$

où la soustraction de  $m_p$  tient compte de la conservation des baryons, c'est-à-dire du fait que seul le surplus d'énergie peut être utilisé pour la création de particules (c'est une manière grossière de faire ce qui a été fait plus proprement dans II, App. I). Nous arrivons à

$$N = \int dN = \alpha_0 \int_{-1}^1 F(\lambda) \frac{\alpha(Q, \Delta E(\lambda))}{\alpha_0} \ln \left( \frac{\mathcal{E}(\lambda) V_0 - m_p}{\gamma_0 V_0} \right) \quad (90)$$

(où  $\ln(0) < 0$ , le remplacer par zéro)

De notre première discussion (17), nous nous rappelons  $\Sigma(\lambda) = \Sigma_0 / \lambda$  où  $\Sigma_0 = m_p / V_0$ . Donc, sauf pour  $\lambda$  très petit,  $\Sigma(\lambda)V_0 - m_p = m_p(1/\lambda - 1)$ . Le logarithme s'annule donc pour  $m_p(1/\lambda - 1) = \gamma_0 V_0$ , c'est-à-dire pour  $\lambda \approx \frac{1}{\gamma_0}$ . Puisque  $F(\lambda)$  décroît très vite, ainsi que le logarithme et  $a(Q, \Delta E(\lambda))$ , nous prenons la valeur  $(a/a_0) \ln(\dots)$  à  $\lambda = 0$  et estimons que l'intégration revient à multiplier cette valeur par un facteur 0.1 à 0.2 [on retrouve le même ordre de 0.1 à 0.2 pour le rapport  $\Delta V/V_0$  où  $\Delta V$  est le volume de recouvrement moyen et pour  $\bar{\lambda} = \int_0^1 \lambda F(\lambda) d\lambda$ ]. On a alors

$$N_{pp}(E_{CM}) \approx (0.1 \text{ à } 0.2) \propto_{pp} \frac{a(Q, \Delta E(0))}{a_0} \ln \left( \frac{E_{CM} - m_p}{\gamma_0} \right) \quad (91)$$

Ici on peut, pour grandes énergies, supposer que  $a/a_0 \approx 1$  et négliger  $m_p$  contre  $E_{CM}$ . Dans ce cas,

$$N_{pp}(E_{CM}) \approx (0.5 \text{ à } 1.2) \ln \left( \frac{E_{CM} [\text{MeV}]}{860 \text{ MeV}} \right) \quad (92)$$

Cette formule s'accorde bien avec la formule empirique de la Ref. 11), Eq. (8)

$$\bar{n}_{\text{charged}} = 0.89 \ln \left( \frac{E_{CM}}{m_p} \right) + 1.1 \quad (93)$$

Pour  $E_{CM} = 8.6 \text{ GeV}$  (quelques 30 GeV d'énergie primaire) on trouve  $1.2 \lesssim N \lesssim 2.8$ . Puisque la plupart de ces  $N$  particules sont des résonances, la multiplicité chargée observée sera de deux à quatre fois plus grande, ce qui tombe dans les limites expérimentales. Notons que notre approximation grossière ne contient aucun paramètre libre.

2.2.1.3. - Lois de conservation

[Lecture : III, Section 3 et App. I.]

Nous ne discutons pas les détails du calcul. Il y a deux situations à considérer :

- création libre limitée aux paires ( $p\bar{p}$  où  $KY$ , etc.),
- conservation des particules incidentes.

Pour la première situation, nous avons déjà remarqué le résultat plausible [Eq. (71)] que la probabilité de création d'une paire  $A, B$  est le produit des probabilités :  $W(AB) = W(A)W(B)$ . Une démonstration formelle se trouve dans (III, App. I). Nous ne la répétons pas ici. Cependant, corrigéons une erreur d'écriture dans cette démonstration :

dans III, la formule au-dessus de l'équation (A-I.5)  
devait être

$$\left\{ \begin{array}{l} (V)_1 \\ (V)_2 \end{array} \right\} = \begin{array}{c} \alpha \rightarrow \\ \boxed{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & 1 & & & \\ \hline & & & & 1 & \\ \hline \end{array}} \end{array} \text{ or } = \left\{ \begin{array}{l} \text{zéro} \\ \text{zéro} \end{array} \right\} \quad (94)$$

ensuite, remplacer l'équation (A-I.5) par

$$Z = Z' \left[ 1 + \left( \sum x_{\alpha_1} \right) \left( \sum x_{\alpha_2} \right) \right] \quad (95)$$

et le dénominateur de l'équation (A-I.7) par la même expression que (95).

Si l'on veut alors calculer le spectre de l'anti-proton par exemple, où il faut créer un nucléon quelconque (même excité), ce spectre devient, par multiplication de probabilités :

$$f_{\vec{p}}(\vec{p}, T) = N_B(T) \cdot f_{m_p}(\vec{p}, T)$$

$$N_B(T) = \sum^* \int f_{m^*}(\vec{p}, T) d^3 p \quad (96)$$

où  $N_B(T)$  est le nombre total de tous les baryons qui seraient présents sans loi de conservation ( $\sum^*$  = somme sur toutes les résonances baryoniques, y compris le nucléon) ; étant donné que seule la présence est exigée par la loi de conservation, et non un moment linéaire ou une résonance spécifiée, le facteur  $N_B(T)$  suffit.

La seconde situation est l'inverse de la première : si une particule - disons un baryon - est conservée (sauf pour un changement d'état d'excitation  $m \rightarrow m^*$ ), et si cette particule se trouve dans l'état initial de la collision, elle doit aussi sortir. La somme sur  $d^3 p$  de son spectre doit être égale à 1 si les états excités sont aussi compris ; donc

$$\sum^* \int f_{m^*}^{(B, \text{conservé})}(\vec{p}, T) d^3 p = 1 \quad (97)$$

d'où vient

$$f_m^{(B, \text{conservé})}(\vec{p}, T) = \frac{1}{N_B(T)} f_m(\vec{p}, T) \quad (98)$$

avec le même  $N_B(T)$  que dans (96). Il est satisfaisant que cette formule (98) puisse être dérivée à partir de la fonction de partition si l'on prescrit que seuls des états avec au moins un baryon doivent être comptés. La démonstration, ainsi que la fonction  $N_B(T)$  (et autres pour  $K$ , etc.) se trouvent dans II, App.I.

Les équations (96) et (98) permettent une interprétation évidente ; nous appelons

$$\left. \begin{aligned} N_F(T) &= \text{facteur de création libre d'une particule } F \\ \frac{1}{N_F(T)} &= \text{facteur d'absorption libre d'une particule } F \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

où "libre" veut dire : "sans restrictions par règles de sélection", et où  $F$  désigne toute une famille (par exemple  $B$  = famille de tous les baryons). Avec cette notation, l'équation (96) décrit la création (libre) de deux particules, l'une dans l'état  $(m, \vec{p})$ , l'autre dans un état quelconque mais appartenant à une famille bien déterminée ; l'équation (98) décrit l'absorption libre (dans un état quelconque) de la particule incidente et la recréation (libre) dans l'état  $(m, \vec{p})$ .

### 3.1. - TROISIEME LECON

#### 3.1.1. - Les spectres d'impulsion linéaire

##### 3.1.1.1. - Les isobares représentatifs

Lecture : II, Section 2.8 et App. IV.

Pour vraiment suivre l'esprit du modèle, on devrait, par exemple, calculer le spectre des mésons  $\pi$  comme suit :

$$\begin{aligned} f_\pi(\vec{p}, T) &= \sum^* f_{\pi, m^*}^*(\vec{p}, T) \\ &= f_{m_\pi}(\vec{p}, T) + f_{\pi, p}^*(\vec{p}, T) + \dots \end{aligned} \quad (100)$$

où  $\sum^*$  est la somme sur toutes les particules et résonances ( $\pi, \rho \dots \Delta \dots$ ) qui en désintégration produisent au moins un méson  $\pi$  avec un spectre  $f^*$ , qui devrait se calculer à partir du spectre thermodynamique de la particule  $m^*$ . C'est simple pour la désintégration en deux corps,  $m^* \rightarrow m_1 + m_2$ , où l'on peut calculer analytiquement

les spectres  $f_{1,2}^*(\vec{p}, T)$  des particules 1 et 2 à partir de  $f_m^*(\vec{p}, T)$ . Ce qu'il faut faire, c'est trouver toutes les combinaisons des moments linéaires de  $m^*$  et des angles de désintégration  $m^* \rightarrow m_1 + m_2$  afin que  $m_1$  (ou  $m_2$ ) ait un moment linéaire donné. Nous supprimons ici cet exercice en cinématique relativiste [voir II, App. IV] et notons seulement que

$$f_{\ell, m}^*(p, T) = \boxed{\text{II, Eq.(A IV.10)}} = \text{spectre des moments linéaires de la particule } m_\ell \text{ produite dans la désintégration } m^* \rightarrow m_j + m_\ell \quad (101)$$

(où le spectre de  $m^*$  est thermodynamique)

est une expression analytique connue.

Ce n'est plus le cas pour le spectre de  $m_\ell$  dans  $m^* \rightarrow m_\ell + m_j + m_k$  et la situation devient rapidement plus compliquée si le nombre de particules croît. Même si l'on égale l'élément de matrice de la désintégration à une constante, il est impossible de calculer le spectre  $f^*$  analytiquement. Cependant, on peut égaler l'élément de matrice à une constante, si, selon notre philosophie générale, on permet que, dans la désintégration de  $m^*$ , apparaissent de nouveau des résonances  $\mu^*$ , dont la désintégration s'ajoute encore à la somme dans l'équation (100). Et ainsi ad infinitum. Or, plus la situation devient complexe, plus nous nous réjouissons ; puisque, à la fin, tout cela revient à dire que seuls les premiers termes (désintégration à deux et trois corps) sont à calculer explicitement, tandis que tout le reste donne une contribution thermodynamique (précisément à cause de sa complexité) qui, en effet, peut être incorporée dans le premier terme  $f_m(\vec{p}, T)$  en le multipliant par un facteur de normalisation  $Q_\pi(T(E))$ .

De notre analyse de la distribution des multiplicités [2.2.1.2.] nous estimons que, pour toutes sortes de particules, on aura des facteurs de l'ordre

$$Q(E) \sim O \left[ \ln \left( \frac{E_{CM}}{m} \right) \right]^\beta ; \quad \beta \sim O[1] \quad (102)$$

[A noter :  $\ln\left(\frac{E_{CM}}{m}\right)^\beta$  et  $A\sqrt{E_{CM}/m}$ , avec  $\beta$  et  $A$  bien choisis, sont pratiquement - c'est-à-dire expérimentalement en mesurant des multiplicités - indiscernables dans des intervalles aussi grands que  $20 \text{ GeV}/c \leq p_0 \leq 800 \text{ GeV}/c$  !]

Il reste la désintégration en deux et trois corps. Ici l'expérience pratique nous a appris que la désintégration en trois corps peut être négligée (parce que même l'espace de phase  $dR_3/dp$  ressemble encore à un spectre thermodynamique) et que la désintégration en deux corps a un effet remarquable seulement si la particule qui se désintègre a elle-même déjà un spectre un peu particulier. Ceci est le cas pour les particules "en passant", c'est-à-dire des particules incidentes qui gardent la plus grande partie de leur mouvement longitudinal (partageant le mouvement transverse thermique avec toutes les autres) et qui sont excitées en résonance  $m^*$ . Dans ce cas, le spectre des mésons  $\pi$  devient

$$f_\pi^{(total)}(\vec{p}, T) = Q_\pi(E) f_{m_\pi}(\vec{p}, T) + \sum_{m^*} A(m^*) f_{\pi, m^*}^*(\vec{p}, T) \quad (103)$$

où  $f^*$  est le spectre donné par (101) et où  $A(m^*)$  sont des facteurs de poids ; la somme s'étend sur les quelques résonances ayant une désintégration dominante en deux corps. On peut interpréter le deuxième terme - la somme - comme une approximation

$$\int_0^{M^*} \rho_2(m^*) f_{\pi, m^*}^*(\vec{p}, T) dm^* \Rightarrow \sum_{m^*} A(m^*) f_{\pi, m^*}^*(\vec{p}, T) \quad (104)$$

où  $\rho_2(m^*)$  compte toutes les résonances à désintégration en deux corps et où  $M^*$  est une masse (de l'ordre de 1 GeV pour les bosons et de 2 GeV pour les baryons) au delà de laquelle la désintégration en deux corps devient rare. Puisque l'on suppose que  $\rho_2(m^*)$  croît exponentiellement à peu près comme  $\exp(m^*/T_0)$ , on s'attend à ce que les  $A(m^*)$  en fassent autant. En les traitant comme des paramètres

libres, on les voit s'arranger comme prévu [voir II, Fig. 7].

Remarque : dans le calcul des rapports de branchement dans la désintégration [II, Section 2.8.2.] se trouvent des erreurs qui ont été corrigées dans Ref. 12).

### 3.1.1.2. - Production associée

Lecture : II, Section 2.7 et App. III.

Dans la première leçon nous avons appris que le spectre thermodynamique s'applique seulement à la situation où les mouvements collectifs dans la direction de l'axe de collision n'existent plus, c'est-à-dire dans les systèmes de coordonnées locales ( $\lambda$ ). La contribution venant de "l'élément de volume  $V_0 F(\lambda) d\lambda$ " au spectre dans le système du centre de masse (CM) de la collision devient donc [voir (3)]

$$dW^{(CM)}(\vec{p}) = F(\lambda) d\lambda L^{(CM)}(\lambda, \gamma_0) \left\{ f_m(\vec{p}', T(\lambda)) \right\} \quad (105)$$

Pour calculer le spectre d'une particule b qui, par une loi de conservation, est produite nécessairement en association avec une autre particule a, nous nous rappelons le résultat (96) :

$$f_b(\vec{p}, T) = N_A(T) f_{m_b}(\vec{p}, T) \quad (106)$$

où, dans ce cas général, A signifie la famille de toutes les particules {a, a'...} dont les nombres quantiques permettent la production en association avec b [exemple : b = K<sup>+</sup>, A = {K<sup>-</sup> et ces résonances, tous les hypérons, excités ou non}].

Maintenant, il faut faire attention : pour calculer le spectre  $w^{(CM)}$  de b, on doit a priori admettre qu'il est possible que, si b vient de ( $\lambda$ ), a pourrait venir d'un autre élément de volume ( $\lambda'$ ). La contribution totale différentielle sera alors

$$d^2 W_b^{(CM)}(\vec{p}) = K(\lambda, \lambda') \left[ N_A(\tau(\lambda')) F(\lambda') d\lambda' \right] \times \\ \times F(\lambda) d\lambda L_{(\lambda, \gamma_0)}^{(CM)} \left\{ f_{m_q}(\vec{p}', \tau(\lambda)) \right\} \quad (107)$$

où  $K(\lambda, \lambda')$  est une fonction de corrélation mesurant la "non-localité" de la conservation (nombre baryonique, étrangeté, spin isotopique, etc.). Dans cette formule, le premier facteur  $[N_A(\lambda') F(\lambda') d\lambda']$  est donc le facteur de création libre d'une particule quelconque de la famille A venant de  $(\lambda')$  (pas de transformation de Lorentz puisqu'un nombre est invariant) et le reste est le spectre de création libre d'une particule  $(b, \vec{p})$  venant de  $(\lambda)$ .

Nous avons montré dans II, par une analyse des spectres expérimentaux et de l'annihilation  $p\bar{p} \rightarrow K + \bar{K} + \text{autres particules}$  [II, App. III], que la loi de conservation d'étrangeté et celle des baryons agissent très localement, comme si

$$K(\lambda, \lambda') \approx K \delta(\lambda - \lambda') \\ K \approx 1 \quad (108)$$

Les résultats que l'on obtient en analysant les distributions de multiplicités des mésons  $\pi$  en les comparant avec la distribution de Poisson suggèrent que cette distribution est valable pour le nombre des paires  $(\pi^+ \pi^-)$  plutôt que pour le nombre de mésons  $\pi$  simplement [voir Ref. 10]. On peut interpréter ce fait comme indiquant que la charge (le spin isotopique) est également conservée localement. Dans ces propositions, "localement" veut dire "à des distances petites, même comparées avec l'extension spatiale  $m_\pi^{-1}$  de la région d'interaction". Dans le langage des modèles multi-Regge ou multi-périmétriques, cela revient à dire que les mêmes nombres quantiques ne passent que rarement plus loin qu'au prochain vertex.

Avec (108) nous obtenons ( $K = 1$ )

$$W_b^{(CM)} = \int_{-1}^1 [F(\lambda)]^2 N_A(T(\lambda)) L^{(CM)}_{(\lambda, \gamma_0)} \left\{ f_m(\vec{p}, T(\lambda)) \right\} d\lambda \quad (109)$$

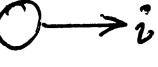
La généralisation est évidente.

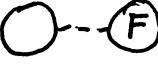
### 3.1.1.3. - Représentation graphique

Lecture : II, Section 2.7.3.

Il est utile d'introduire une représentation graphique (qui n'a rien à voir avec les graphes de Feynman)

 représente une "boule de feu locale" ( $\lambda$ )" (110)

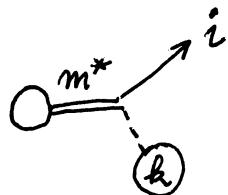
  $= F(\lambda)L(\lambda, \gamma_0)\{f_i(\vec{p}, T(\lambda))\}$  indique le spectre le plus simple (sans règle de sélection) [voir (105)]. (111)

  $= N_F(T(\lambda))F(\lambda)$  indique le facteur de création d'une particule quelconque de la famille  $F$  [voir (96), (109)] venant de ( $\lambda$ ) ; (112)

  $= 1/N_F(T(\lambda))$  indique le facteur d'absorption d'une particule incidente de la famille  $F$  [voir (98)] absorbée à ( $\lambda$ ) \*). (113)

---

\*) On aurait pu écrire  $[N_F(T(\lambda))F(\lambda)]^{-1}$  par analogie avec le facteur de création, et cela aurait été même plus logique. Mais, dans II, nous l'avons défini comme ici et nous ne voulons pas changer la définition. Puisque la particule "en passant", qui est d'abord absorbée par le facteur  $1/N_F$  et puis recréée, doit être décrite en tout cas par une fonction  $F_o(\lambda)$  différente de  $F(\lambda)$ , on peut définir le facteur d'absorption avec ou sans  $F(\lambda)$  incorporée : c'est la fonction empirique  $F_o(\lambda)$  qui va être modifiée.



$$= F(\lambda) L(\lambda, \gamma_0) \left\{ f_{i,m^*}^*(\vec{p}, T(\lambda)) \right\} \text{ représente le spectre de la particule } i \text{ créée dans la désintégration } m^* \rightarrow i + k \quad [\text{voir (100), (101), (103)}]. \quad (114)$$

Le spectre total d'une particule s'obtient maintenant en combinant ces symboles selon les règles de sélection.

Il est évident qu'un spectre thermodynamique est toujours défini comme valeur moyenne par rapport à toutes les variables autres que celles qui apparaissent dans la formule du spectre ; le spectre décrit donc ce que fait une espèce de particules, quels que soient le nombre et le comportement des autres particules. Dans la combinaison des graphes, il ne faut alors dessiner explicitement que des lignes nécessaires : celle du spectre qu'on veut représenter et toutes celles qui sont exigées par les lois de conservation. Tout le reste est supprimé dans les symboles, mais sa présence physique est incluse, puisque c'est précisément "ce qui reste" qui a déterminé la structure thermodynamique des spectres. Après ces remarques, il devrait être trivial de voir que :

cette théorie ne s'applique jamais à un seul canal de réaction (où à un sous-ensemble de canaux finaux) mais toujours et seulement à des quantités moyennées sur tous les canaux.

Si, en dépit de cela, on l'applique à un seul canal [comme je l'ai fait dans Ref. 4), Section 4.1] on ne doit s'attendre qu'à des résultats qualitatifs.

### 3.1.1.4. - Quelques spectres composés

Nous combinons maintenant quelques symboles pour obtenir des spectres obéissant aux lois de conservation.

#### Exemples

$$\text{O} \rightarrow \pi = F(\lambda)L(\lambda, \gamma_0) \left\{ f_{m_\pi}(\vec{p}', T) \right\} \quad (115)$$

méson  $\pi$  ; pas de loi de conservation.

$$= N_K(\lambda) \bar{F}(\lambda) L^2(\lambda, \gamma_0) \left\{ f_{m_K}(\vec{p}', T) \right\} \quad (116)$$

production d'un  $K^-$  ; conservation d'étrangeté.

Si, par exemple, on veut essayer l'hypothèse que les mésons  $\pi$  chargés sont créés en paires  $(\pi^+ \pi^-)$  seulement, on peut l'écrire comme dans le cas de  $K^-$ , naturellement avec  $m_K$  remplacée par  $m_\pi$ , et  $N_K$  par  $N_\pi$ .

$$= \frac{F_o(\lambda)}{N_B(T(\lambda))} L(\lambda, \gamma_0) \left\{ f_{m_p}(\vec{p}', T) \right\} \quad (117)$$

proton "en passant"

$$= \frac{F_o(\lambda)}{N_B(T(\lambda))} L(\lambda, \gamma_0) \left\{ f_{p, m_\Delta}^*(\vec{p}', T) \right\} \quad (118)$$

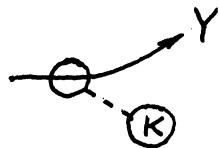
proton venant de  $p$  (incident)  $\rightarrow \Delta \rightarrow p + \pi$

$$= F(\lambda)L(\lambda, \gamma_0) \left\{ f_{\pi, m_p}^*(\vec{p}', T) \right\} \quad (119)$$

méson  $\pi$  créé dans la désintégration d'un  $\chi$  nouvellement créé.

$$= \frac{N_Y(T(\lambda))}{N_B(T(\lambda))} F(\lambda) F_o(\lambda) L(\lambda, \gamma_0) \left\{ f_{m_K}(\vec{p}', T) \right\} \quad (120)$$

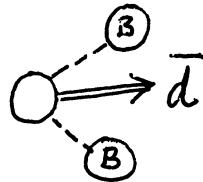
production d'un  $K^+$  en association avec la transformation du proton incident en hyperon.



$$= \frac{N_K(T(\lambda))}{N_B(T(\lambda))} F(\lambda) F_0(\lambda) L(\lambda, \gamma_0) \left\{ f_{m_Y}(\vec{p}', T) \right\}$$

transformation d'un proton incident en hypéron avec création d'un K. [Notez la différence entre (116), (120), (121).]

(121)



$$= \bar{N}_B(T(\lambda)) \bar{\Gamma}^2 \cdot \bar{F}(\lambda) \bar{\Gamma}^3 L(\lambda, \gamma_0) \left\{ f_{m_d}(\vec{p}', T) \right\}$$

production d'un antideutéron avec deux baryons. (122)

### 3.1.1.5. - Les spectres complets ; résultats

Les spectres des particules observées sont encore des combinaisons de mécanismes différents. Dans ces combinaisons, il faut tenir compte de tous les graphes qui donnent une contribution non négligeable. En général, on obtient de bons résultats avec un vrai minimum, mais on peut toujours ajouter d'autres graphes représentant des mécanismes de production non considérés auparavant. Il faut cependant dire que le spectre total d'une particule d'espèce  $i$  résulte d'une intégration sur  $\lambda$  :

$$w_i^{(CM)}(\vec{p}) = \int d\lambda \quad [\text{tous les graphes contribuant à "i"}]$$

et que cette intégration est nécessairement numérique. Or, chaque fois qu'on inclut un nouveau graphe, les fonctions empiriques  $F(\lambda)$  et  $F_0(\lambda)$  vont changer puisque maintenant quelque chose se trouve explicitement dans un graphe qui devrait être simulé par  $F(\lambda)$  ou  $F_0(\lambda)$  auparavant. On ne peut donc pas simplement ajouter ça et là un graphe ; il faut aussi redéterminer  $F(\lambda)$  et  $F_0(\lambda)$  à partir des données expérimentales et, surtout, il ne faut pas ajouter dans un spectre seulement ; il faut que tous les spectres soient calculés à peu près à la même précision. Une fois que l'on estime avoir un ensemble raisonnable de graphes, on met tout dans l'ordinateur pour déterminer les fonctions  $F(\lambda)$ ,  $F_0(\lambda)$  à partir des spectres  $w(\vec{p})$  expérimentaux. Tous nos calculs jusqu'ici ont été faits avec un

vrai minimum de graphes, négligeant par exemple tout mécanisme du type  $\varphi \rightarrow \pi^+ \pi^-$ , négligeant aussi le proton venant de la création d'une paire et négligeant encore beaucoup d'autres choses. Cela peut et doit être amélioré.

Les résultats et prédictions de la théorie sont présentés dans dans "Particle Spectra" <sup>12)</sup>. Nous en reproduisons trois figures montrant tous les graphes utilisés dans le programme (Fig. 3), et deux spectres (Fig. 4 : protons ; Fig. 5 : mésons  $\pi^-$ ).

Il se trouve que les fonctions empiriques  $F(\lambda)$  et  $F_0(\lambda)$  sont très simples et permettent une représentation analytique avec un seul paramètre pour  $F(\lambda)$  et trois paramètres pour  $F_0(\lambda)$ . Ce sont donc quatre constantes - les mêmes pour toutes les énergies (au moins dans l'intervalle  $12 \text{ GeV}/c \leq p_0 \leq 70 \text{ GeV}/c$ ) et pour toutes les particules - auxquelles est ainsi réduite une immense quantité de données expérimentales. Pour être franc, il y a encore beaucoup d'autres paramètres libres dans nos programmes d'ordinateur, mais, soit ils sont éliminables par un calcul complet, soit ils sont déjà fixés à quelques pourcents (parfois 50) près par des arguments a priori. Puisqu'ici nous voulons discuter la physique du modèle, je n'entre pas dans ces détails qui sont tous expliqués dans les articles cités :

$F(\lambda)$ ,  $F_0(\lambda)$  :

II, Sections 2 (en particulier 2.4), et 3.2.

les limites cinématiques des spectres :

II, Section 2.5.

la détermination des paramètres du modèle :

II, Section 3.

comparaison avec les expériences :

II, Section 4 et Ref. 12).

prédictions jusqu'à  $p_0 = 800 \text{ GeV}/c$  : Ref. 12.

Pour une récapitulation des résultats les plus importants :  
Ref. 4), Section 5.

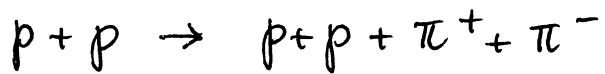
### 3.1.2. - Relation entre les propositions de Feynman et notre modèle

Feynman<sup>13)</sup> propose d'abord de distinguer deux classes d'expériences de collision :

- expériences exclusives ;
- expériences inclusives.

Dans la première classe se trouvent toutes les expériences où l'on regarde un seul canal à l'exclusion de tous les autres.

Exemples :



La deuxième classe est constituée de toutes les expériences où l'intérêt se concentre sur une particule (ou même sur un ensemble bien défini de particules) en négligeant ce qui se passe par ailleurs. Après ce que nous avons appris sur le modèle thermodynamique, il est clair que c'est à la classe des expériences inclusives qu'il s'applique.

#### 3.1.2.1. - Expériences inclusives

Considérons donc le spectre d'une espèce  $i$  de particules nouvellement créées :

$$W_i^{(CM)}(\vec{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) L^{(CM)}(\lambda, \gamma_0) \left\{ f_{ni}(\vec{p}', T) \right\} d\lambda \quad (123)$$

Les moments linéaires  $|\vec{p}'|$  dans le système  $(\lambda)$  sont thermodynamiques avec  $T < T_0$ , donc petits et de l'ordre de quelques 100 MeV seulement. La transformation de Lorentz  $(\lambda) \rightarrow CM$  est

$$\begin{aligned} p_{||}^{CM} &= \gamma (p_{||}' + \beta E') \\ p_{\perp}^{CM} &= p_{\perp}' \end{aligned} \quad (124)$$

où  $E' = \sqrt{p_1^2 + m^2} = \sqrt{p_{\parallel}^2 + \mu^2}$

avec  $\mu^2 = p_{\perp}^2 + m^2$ .

Regardons maintenant des valeurs de  $|\lambda| > \lambda_0$  comme dans la première discussion. On a, pour  $\lambda_0 \gg 1/\gamma_0$  - disons  $5/\gamma_0$  -

$$\lambda = \frac{\gamma - 1}{\gamma_0 - 1} \approx \frac{\gamma}{\gamma_0} \text{ pour } \lambda > \lambda_0 = \frac{5}{\gamma_0} \quad (125)$$

Dans ce cas,  $\gamma \approx \lambda \gamma_0$ ,  $\beta \approx 1$  et la transformation devient

$$p_{\parallel}^{CM} = \lambda \gamma_0 (p_{\parallel}' + E') \quad (126)$$

Introduisons la variable  $x$  de Feynmann :

$$x \equiv \frac{p_{\parallel}^{CM}}{E^{CM}} = \frac{p_{\parallel}^{CM}}{2m_p \gamma_0} = \frac{\lambda}{2m_p} (p_{\parallel}' + E') \quad (127)$$

Ici,  $E'$  et  $p'$  sont limités par  $f_m \sim \exp(-E'/T)$  ; on a  $E' \approx m + p'^2/2m \approx m + \frac{3}{2}T$ , alors

$$\langle |p_{\parallel}'| \rangle \approx \sqrt{mT} \text{ et } \langle p_{\parallel}' \rangle = 0$$

Il y a donc à chaque  $x$  toute une distribution de contributions venant de différents  $\lambda$  et avec différents  $p_{\parallel}'$ ,  $E'$  ; mais cette distribution est symétrique autour de  $p_{\parallel}' = 0$  et elle a une largeur d'ordre  $\sqrt{mT}$  seulement.

On peut donc remplacer en approximation grossière

$$p'_\parallel + E' \text{ par } \approx m + \frac{3}{2} T \quad (128)$$

et dire que

$$x \approx \frac{\lambda}{2m_p} \left( m + \frac{3}{2} T \right) \quad (129)$$

Nous avons ainsi tenu compte de la décroissance exponentielle de  $f_m(p', T)$ ; ce que nous venons de faire est simplement de considérer les particules créées comme presque au repos dans ( $\lambda$ ). La particule moyenne, venant de ( $\lambda$ ), aura donc un moment  $p_\parallel^{\text{CM}} = x E^{\text{CM}}$  de l'ordre donné par (129) et le nombre de ces particules sera proportionnel à  $F(\lambda) d\lambda$  avec un poids  $\exp(-\sqrt{p_\perp^2 + m^2}/T)$  pour les moments transverses. En somme, l'équation (123) devient dans cette approximation tout à fait qualitative :

$$W^{(\text{CM})}(p_\perp p_\parallel) dp_\parallel \approx \exp\left(-\frac{\sqrt{p_\perp^2 + m^2}}{T}\right) F\left(\frac{2m_p}{m + \frac{3}{2}T} \cdot x\right) \frac{d\lambda}{dp_\parallel} dp_\parallel .$$

$$\frac{d\lambda}{dp_\parallel} = \frac{d\lambda}{dx} \frac{dx}{dp_\parallel} \approx \frac{2m_p}{m + \frac{3}{2}T} \cdot \frac{1}{E_{\text{CM}}}$$

donne encore

$$W^{(\text{CM})}(p_\perp p_\parallel) dx \approx \exp\left(-\frac{\sqrt{p_\perp^2 + m^2}}{T}\right) F\left(\frac{2m_p}{m + \frac{3}{2}T} \cdot x\right) \frac{2m_p}{m + \frac{3}{2}T} dx \quad (130)$$

Il faut noter que ceci est une fonction de  $p_\perp$  et de  $x$  seulement et non de  $E_{\text{CM}}$ . Feynman propose une forme semblable avec  $F(2m_p x/m) \approx 1/x$  où cette dépendance de  $1/x$  est la conséquence du modèle de "partons" (V. Weisskopf a remarqué que ce n'est pas une invitation à partir mais un mot anglais inventé par Feynman) : l'émission des partons est du type

"Bremsstrahlung" et donc  $\sim 1/x$ . C'est vrai seulement pour des  $x$  pas trop petits, parce que l'intégrale sur  $W(\vec{p})$  ne peut pas diverger puisque c'est le nombre total des particules. Feynman introduit un  $x_0$  très petit et appelle les  $x < x_0$  "wee" - c'est-à-dire minuscule. Puisque  $x$  est proportionnel à  $\lambda$ , on peut définir

$$x_0 \approx \lambda_0 \frac{m}{2m_p} = \frac{5m}{2\lambda_0 m_p} = 5 \frac{m}{E_{CM}}$$

(le nombre 5 dans cette définition est un peu arbitraire).

Notre  $x$  de l'équation (129) ne peut dépasser  $(m + \frac{3}{2}T)/2m_p$  ce qui vient de nos approximations, tandis que le  $x$  de Feynman (127) peut atteindre presque 1. Le nombre total de particules de l'espèce i devient donc

$$\int W_i(\vec{p}) d^3p \approx e^{-\frac{m}{T}} \cdot 2 \int_{x_0}^1 \frac{dx}{x} = 2e^{-\frac{m}{T}} \ln\left(\frac{E_{CM}}{5m}\right)$$

Le nombre total de particules est la somme sur toutes les espèces i, mais la plus grande partie est représentée par des mésons  $\pi$ ; donc

$$N(E) \approx 0.8 \ln\left(\frac{E_{CM} [\text{MeV}]}{700 \text{ MeV}}\right)$$

ce qui est du même ordre que notre estimation (93). A ceci s'ajoute encore une contribution venant de  $-x_0 \leq x \leq x_0$  et de la production d'autres particules. Mais le résultat est qualitativement le même que le nôtre. Remarquons que notre représentation ici est un mélange entre le modèle thermodynamique qui conduit à la formule qualitative (130) et du modèle de Feynman d'où nous avons pris le  $dx/x$ . Cependant notre fonction  $F(\lambda) \approx F(x_0 2m_p / (m + \frac{3}{2}T))$  décroît à peu près comme  $1/\lambda$  - en accord avec le résultat de Feynman (Fig. 6). Chez nous, le  $F(\lambda)$  est une fonction empirique, chez lui le  $1/x$  est une conséquence du modèle du type "Bremsstrahlung". Toute cette considération est

grossièrement qualitative, elle devait seulement donner une idée de la relation entre les deux modèles. Ce parallèle dépend d'ailleurs de l'hypothèse que  $F(\lambda)$  ne dépend pas de l'énergie primaire. Puisque nous avons vu que cette hypothèse entraîne aussi la validité du principe de la "fragmentation limitée", nous avons le résultat suivant :

les trois propositions

$$\left. \begin{array}{l} - w^{CM}(\vec{p}) d^3 p \approx w(p_\perp, x) \frac{dx}{x} \\ - F(\lambda) \text{ indépendant de } \gamma_0 \\ - \text{"fragmentation limitée" valable} \end{array} \right\} \text{ sont équivalentes} \quad (131)$$

[Dans la première équation, il est supposé que  $w(p_\perp, x)$  ne dépend que faiblement de  $x$  tel que  $1/x$  domine.]

### 3.1.2.2. - Expériences exclusives

J'ai averti le lecteur de ne jamais appliquer le modèle thermodynamique à des canaux sélectionnés. Je vais le faire quand même. En effet, le modèle nous permet de faire quelques remarques qualitatives sur la classe des expériences exclusives. C'est parce qu'au moins une formule, celle pour la distribution de Poisson des multiplicités, fait des prédictions concernant certains canaux à l'exclusion d'autres :

$$W(n) = \frac{N^n}{n!} e^{-N} ; \quad N = \int dN(\lambda) \quad [\text{voir (88), (90)}]$$

$W(n)$  est la probabilité de trouver  $n$  particules (plus précisément de la première génération) dans l'état final à l'exclusion de tout autre nombre de particules. Puisque  $N$  est approximativement proportionnel au logarithme de l'énergie dans le centre de masse, il vient

$$W(n) \approx \frac{1}{n!} \left[ A \ln \left( \frac{E_{CM}}{m_p} \right) \right]^n \cdot \left( \frac{E_{CM}}{m_p} \right)^{-A} \quad (132)$$

La section efficace pour la production de  $n$  particules est donc

$$\sigma(n) = \sigma_{\text{inel.}} \cdot W(n) \quad (133)$$

et puisque  $\sigma_{\text{inel.}}$  semble être constant pour  $E \rightarrow \infty$ , nous voyons que

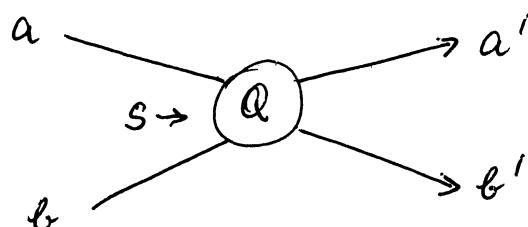
les sections efficaces pour des réactions exclusives décroissent comme  $(E_{\text{CM}})^{-A}$  où  $A$  est une constante de l'ordre 0 à 1. (134)  
 [voir (91), (92)]

Ceci est valable pour les réactions non élastiques. Il est clair que Feynman doit arriver à la même conclusion, étant donné que son spectre  $\sim dx/x$  conduit à une multiplicité  $\sim \ln E_{\text{CM}}$  et que son mécanisme de production (type Bremsstrahlung) implique également une distribution de Poisson.

Cependant, notre modèle nous permet de dire plus : nous connaissons l'origine de la constante  $A$  dans (132). Elle vient de (91) où

$$A = (0.1 \text{ à } 0.2) \cdot \alpha_0 \cdot \frac{\alpha(Q, \Delta E)}{\alpha_0} \quad (135)$$

Sans entrer dans des détails qui sont expliqués dans Ref. 4), Section 4.1, on voit que  $A$  est petit ou même nul, si les nombres quantiques  $Q$  sont tels qu'il n'existe pas de résonances ayant ces nombres quantiques pour des énergies d'ordre  $\Delta E$ . Si l'on prend pour  $Q$  les nombres quantiques du canal  $s$  dans la réaction  $a + b \rightarrow a' + b'$ ,



on voit que  $A$  est de l'ordre de 0.5 à 1 si tout un spectre de résonances ayant  $Q$  existe [voir (86)], tandis que  $A$  peut être nul si un tel spectre n'existe pas - au moins à des  $E_{CM}$  pas trop élevés. Ceci est le cas dans quelques réactions ( $p + p, K^+ + p\dots$ ) où les nombres  $Q$  sont ce qu'on appelle exotiques.

Résultat :

La décroissance d'une section efficace exclusive est faible si le nombre quantique  $Q_s$  est "exotique". (136)

Selon notre analyse suivant (85), on s'attend à voir que  $a/a_0 \rightarrow 1$  pour  $\Delta E \rightarrow \infty$ , indépendamment de  $Q$ . Ceci revient à faire l'hypothèse que, dans la région de hautes masses, on trouvera des résonances exotiques. Dans ce cas, toutes les sections efficaces exclusives devraient, pour  $E \rightarrow \infty$ , décroître de la même manière  $\sim E_{CM}^{-A}$  avec  $A \sim 0.5$  à 1, et la différence exprimée en (136) disparaîtra. On ne sait pas encore si cela est vrai.

Nous pouvons encore dire quelque chose sur les moments transverses dans les expériences exclusives. Si  $w(n)$  définit un canal à  $n$  particules, ces  $n$  particules sont néanmoins passées par un état intermédiaire dans lequel le nombre de particules était indéfini (radiation du corps noir hadronique) ; en effet,  $w(n)$  est la probabilité pour que, de tous les états possibles, celui avec  $n$  particules soit réalisé à la fin. Mais, en traversant l'état intermédiaire, les particules ont senti l'agissement thermique des autres et en conservent un souvenir : leur moment transverse [le moment longitudinal est caché sous la transformation de Lorentz  $L(\lambda, \gamma_0)$ ]. Elles sortent donc de la réaction avec une distribution  $w(p_\perp)$  :

$$w(p_\perp) \approx \exp\left(-\frac{\sqrt{p_\perp^2 + m^2}}{T}\right) (137)$$

et ce facteur devrait encore multiplier  $W(n)$ . Il est intéressant de voir que [avec  $t = (p_a, -p_a)^2$ ]

$$\exp\left(-\frac{\sqrt{P_i^2 + m^2}}{T}\right) \begin{cases} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} e^{-\frac{m}{T}} \exp\left(-\frac{t}{2mT}\right) \\ \xrightarrow{P_i \rightarrow \frac{E_{CM}}{2}} e^{-\frac{P_i}{T}} \approx e^{-\frac{E_{CM}}{2T}} \end{cases} \quad (138)$$

On obtient donc un comportement du type diffractif dans la direction en avant et du type exponentiel pour les angles autour de  $90^\circ$ . Les détails sont discutés dans Ref. 4), Section 4.1.

A première vue, il est surprenant qu'un facteur du type Boltzmann puisse engendrer un maximum diffractif. Mais, comme je viens de le dire, ce facteur tient compte du passage des particules observées par l'enfer des états intermédiaires ; c'est semblable à l'effet de la relation d'unitarité où le maximum diffractif est le résultat de la somme sur tous les états intermédiaires. Dans notre cas comme dans la relation d'unitarité, c'est la totalité de tous les canaux inélastiques qui détermine presque complètement les réactions à deux corps.

3.2. - DISCUSSION LIBRE

4. - LECTURES SUPPLEMENTAIRES

Dans ce cours, seules les choses essentielles ont été traitées. Pour les études complémentaires, je propose l'ordre suivant.

- 1 - "Remarks on the Thermodynamical Model of Strong Interactions" Ref. 4), à lire complètement.
- 2 - "Hadronic Matter near the Boiling Point" Ref. 8), à lire complètement.
- 3 - "Thermodynamics of Strong Interactions at High Energies"
  - II - Sections 1, 2, 5 et Appendices I à V.
  - III - complètement.
  - I - Section 5.
- 4 - "Thermodynamics of Strong Interactions and its Consequences for Astrophysics" Ref. 9), à lire complètement.
- 5 - "Particle Spectra" Ref. 12), contient des prédictions pour collisions pp entre 12.5 et 800 GeV/c.

REFERENCES

- 1) R. Hagedorn - Suppl.Nuovo Cimento 3, 147 (1965), cité comme (I).
- 2) R. Hagedorn et J. Ranft - Suppl.Nuovo Cimento 6, 169 (1968), cité comme (II).
- 3) R. Hagedorn - Suppl.Nuovo Cimento 6, 311 (1968), cité comme (III).
- 4) R. Hagedorn - CERN Preprint TH. 1174 (1970), à paraître dans Nuclear Physics B.
- 5) G. Ranft et J. Ranft - Phys.Letters 32B, 207 (1970).
- 6) F. Cérulus - Papier invité pour le "Colloquium on High Multiplicity Hadronic Interactions", Ecole Polytechnique, Paris (1970).
- 7) J. Benecke, T.T. Chou, C.N. Yang et E. Yen - Phys.Rev. 188, 2159 (1969).
- 8) R. Hagedorn - Nuovo Cimento 56A, 1027 (1968).
- 9) R. Hagedorn - Astron. and Astrophys. 5, 184 (1970).
- 10) Voir, par exemple :  
C.P. Wang - Phys.Rev. 180, 1463 (1969) ; Nuovo Cimento 64A, 546 (1969) ; Phys.Letters 30B, 115 (1969).  
D. Horn et R. Silver - CALT 68-263 (1970), à paraître dans Phys.Rev.
- 11) N.F. Bali, L.S. Brown, R.D. Peccei et A. Pignotti - Phys.Rev.Letters 25, 557 (1970).
- 12) H. Grote, R. Hagedorn et J. Ranft - "Particle Spectra", CERN Report à paraître (1970).
- 13) R.P. Feynman - Phys.Rev.Letters 23, 1415 (1969).

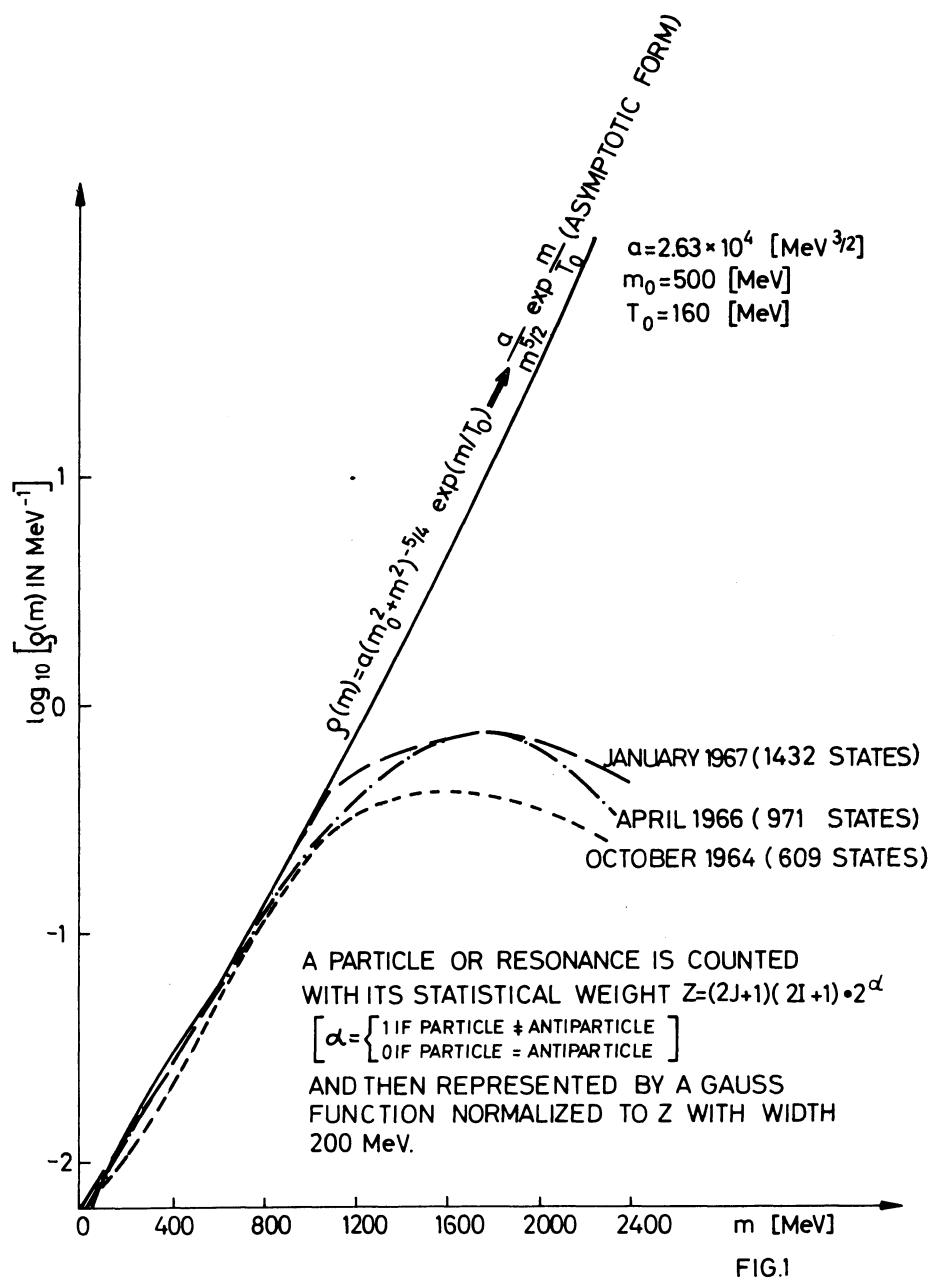


Figure 1 Le spectre de masse hadronique expérimental et la fonction  $\mathfrak{g}(m) = a(m_0^2 + m^2)^{-5/4} \exp(m/T_0)$  ayant le comportement asymptotique exigé par la théorie.

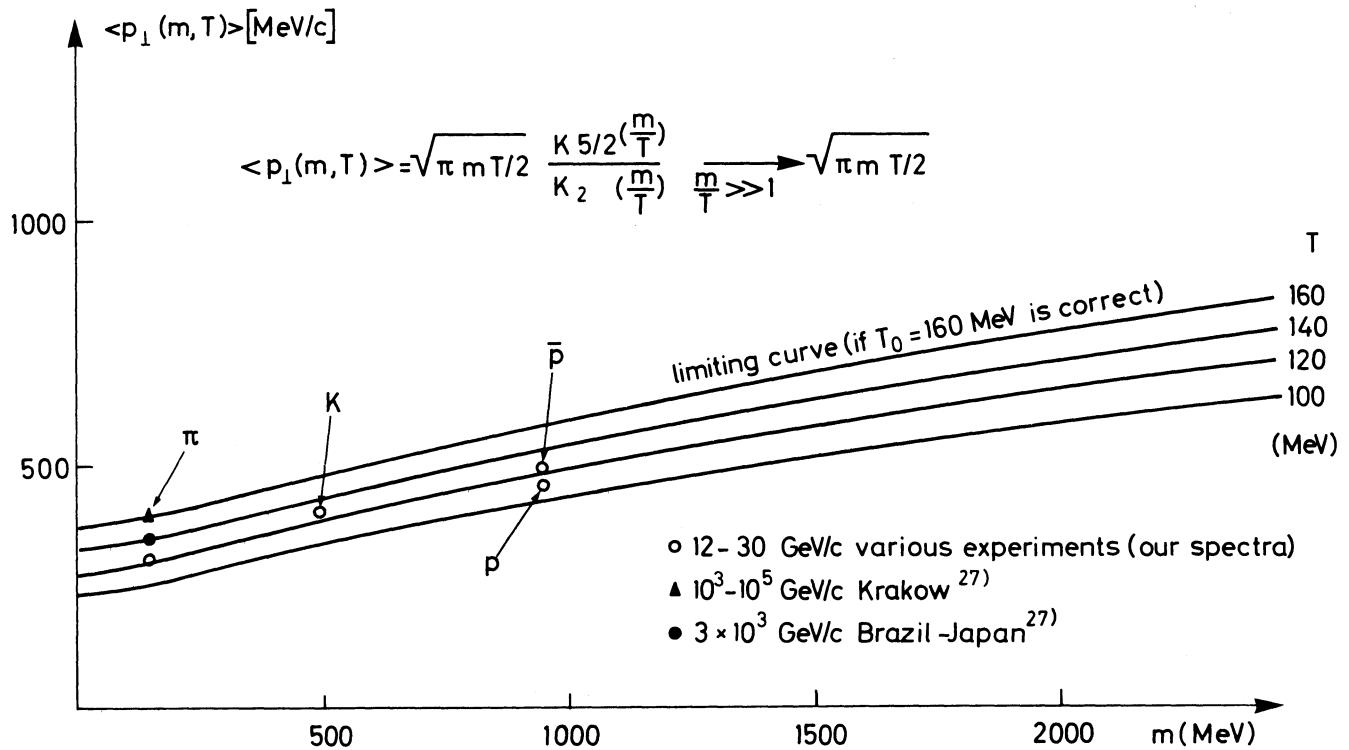


Figure 2 Moment transverse moyen comme fonction de la masse, pour différentes températures. Les antiprotons viennent du centre de la collision (haute température) tandis que les protons passent souvent par les régions périphériques, donc froides. Les mésons  $\pi$  créés dans des collisions à très haute énergie ont des moments transverses correspondant à  $T \approx T_0 = 160$  MeV.

$\pi^-$	$Q_{\pi}^- \rightarrow \pi^- + C_{\pi}^- \sum A(m^*) \rightarrow \pi^- + N$
$\pi^+$	$Q_{\pi}^+ \rightarrow \pi^+ + \sum A(m^*) \rightarrow \pi^+ + N$
$K^-$	$Q_K^- \rightarrow K^- + K$
$K^+$	$Q_K^+ \rightarrow K^+ + Y + \sum A_K(m^*) \rightarrow K^+ + Y$
$\bar{p}$	$Q_{\bar{p}} \rightarrow \bar{p} + B$
$p$	$\rightarrow p + C_p \sum A(m^*) \rightarrow p + \pi$
$\Lambda$	$\rightarrow Y + \sum A_K(m^*) \rightarrow Y + K$
$\Sigma$	$\rightarrow Y + K$
$\Xi$	$\rightarrow \Xi$
$\bar{d}$	$Q \cdot \frac{V_0}{V_d} \rightarrow \bar{d} + B$

Figure 3 Tableau des spectres "complets" en notation graphique.

La plupart des spectres consiste en plusieurs contributions ayant des formes très différentes. Avec ces formules, tous les spectres de Ref. 12) ont été calculés en utilisant toujours les mêmes fonctions  $F(\lambda)$  et  $F_0(\lambda)$ . Comme exemple, voir Figs. 4 et 5.

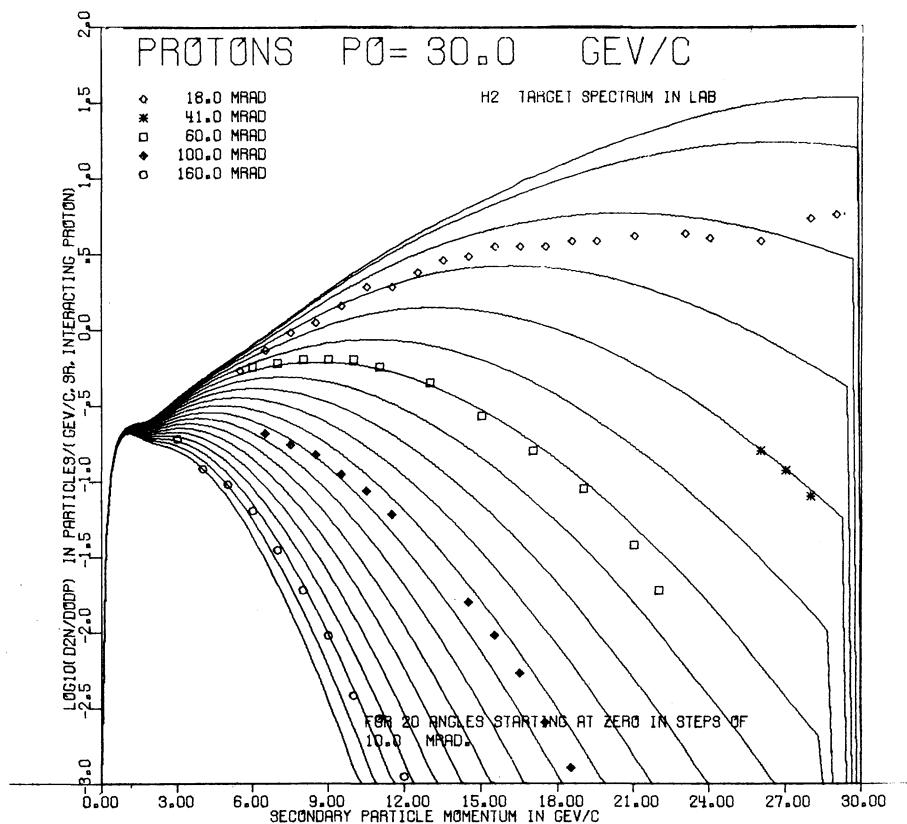


Figure 4 Spectre des protons venant d'une collision pp à 30 GeV/c (figure tirée de la Référence 12). A comparer avec la Figure 5.

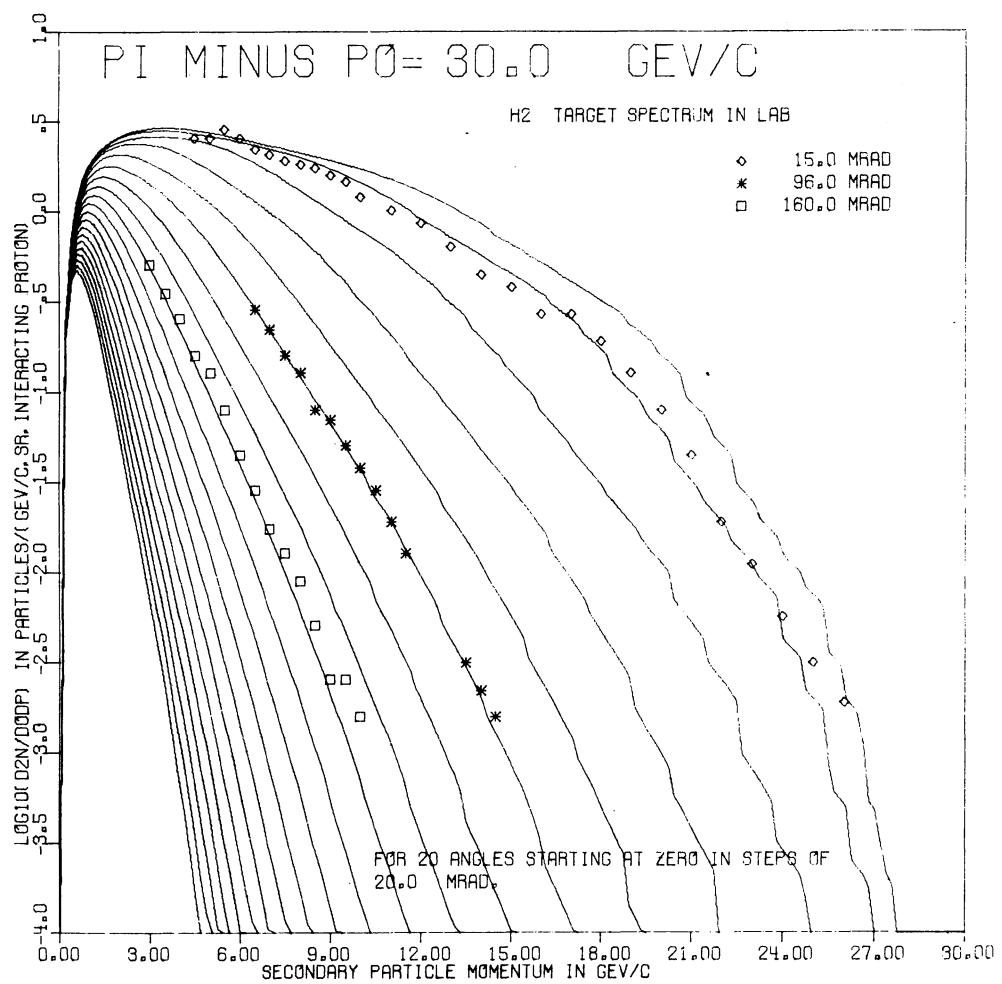


Figure 5 Spectre des mésons  $\pi^-$  venant d'une collision pp à 30 GeV/c (figure tirée de la Référence 12). A comparer avec la Figure 4.

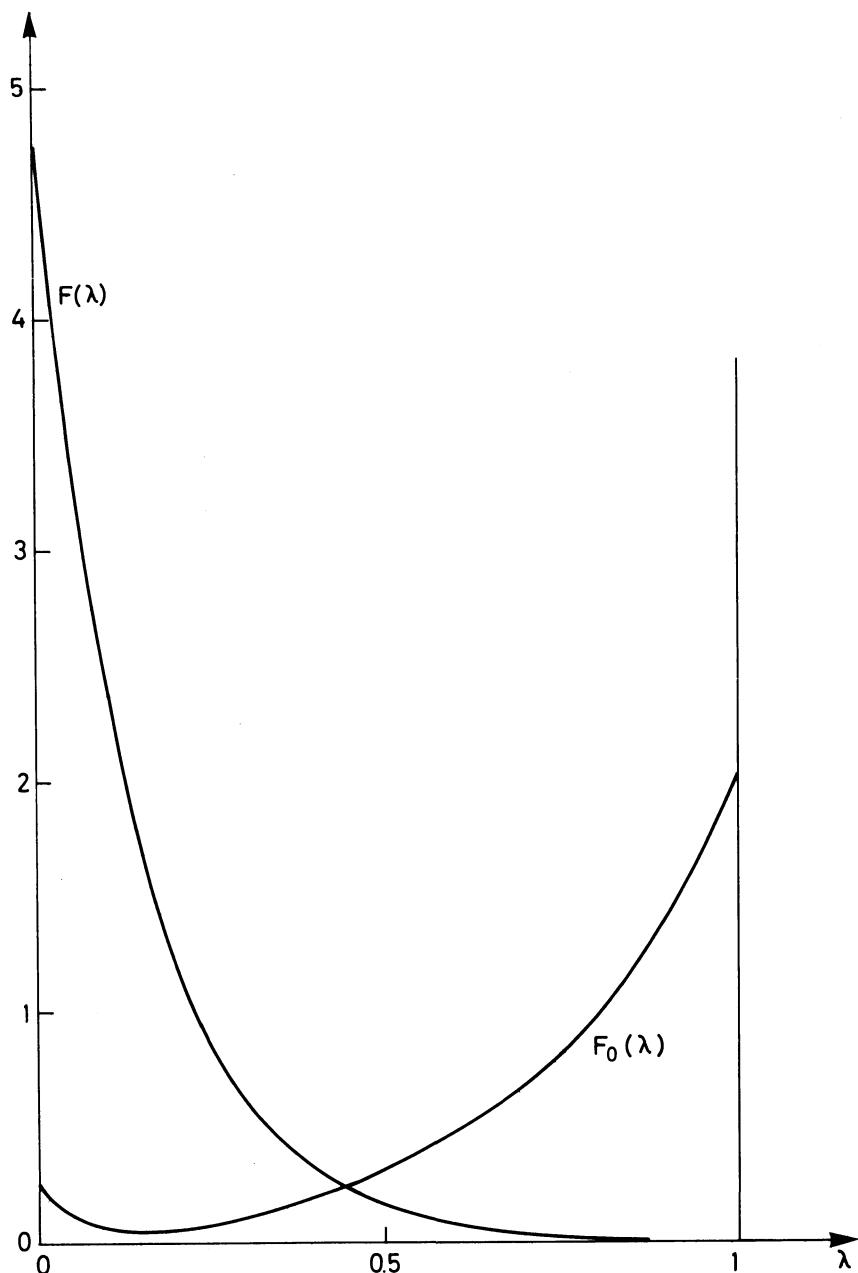


Figure 6 Les fonctions de poids pour les mouvements collectifs ;  $F(\lambda)$  pour les particules nouvellement créées ;  $F_0(\lambda)$  pour les particules "en passant".  $F(\lambda)$  est centrée autour des petites vitesses (partie centrale de la collision),  $F_0(\lambda)$  autour des grandes vitesses (partie périphérique de la collision). Pour déterminer ces fonctions à partir des spectres expérimentaux, nous les avons laissées assez libres, permettant même une dépendance de l'énergie  $E_{CM}$  et de l'espèce de la particule. Il se trouve que ni  $F(\lambda)$  ni  $F_0(\lambda)$  ne semblent dépendre de l'énergie et que ces deux fonctions sont suffisantes pour décrire toutes les particules.