

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

---

Физический факультет  
Кафедра теоретической физики

На правах рукописи

КУРБАНОВ СЕРДАР ГЕЛЬДИМУРАТОВИЧ

УДК 530.1

ЭФФЕКТЫ НАРУШЕНИЯ КИРАЛЬНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ,  
ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОСТИ И ИЗОТОПИЧЕСКОЙ  
СИММЕТРИИ В МОДЕЛЯХ ГРОССА–НЕВЁ И  
НАМБУ–ЙОНА-ЛАЗИНИО

Научный руководитель  
д. ф.-м. н. Жуковский В. Ч.

Специальность 01.04.02  
Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2012

# Оглавление

1	Введение	4
1.1	Эффективные модели КХД . . . . .	4
1.2	Методы численных расчетов . . . . .	10
1.3	Список опубликованных работ . . . . .	10
2	Трёхмерная модель Гросса–Невё с нарушением лоренц-инвариантности	12
2.1	Возможность нарушения лоренц-инвариантности и ее проявления . . . . .	12
2.2	Исследуемая модель . . . . .	19
2.3	Эффективный потенциал модели $V_{\text{eff}}$ . . . . .	22
2.3.1	Вычисление $V_{\text{eff}}$ в случае действительного $\vec{b}$ . . . . .	23
2.3.2	Вычисление $V_{\text{eff}}$ в случае мнимого $\vec{b}$ . . . . .	24
2.4	Уравнение щели в трехмерной модели . . . . .	27
2.4.1	Уравнение щели в случае действительного $\vec{b}$ . . . . .	27
2.4.2	Уравнение щели в случае мнимого $\vec{b}$ . . . . .	29
2.5	Заключение . . . . .	34
3	Размерная редукция модели Гросса–Невё	36
3.1	Двумерная модель Гросса–Невё . . . . .	36
3.1.1	Лоренц-инвариантная модель . . . . .	37
3.1.2	Модель с нарушением лоренц-инвариантности . . . . .	38
3.2	Размерная редукция . . . . .	41
3.2.1	Размерная редукция лоренц-инвариантной модели . . . . .	42

3.2.2	Размерная редукция модели с нарушением лоренц-инвариантности . . . . .	43
3.3	Заключение . . . . .	48
4	Волны киральной и пионной плотности в плотной кварковой среде	49
4.1	Исследуемая модель . . . . .	49
4.2	Волны киральной плотности . . . . .	52
4.2.1	Термодинамический потенциал модели . . . . .	52
4.2.2	Однородный киральный конденсат, $b = 0$ . . . . .	54
4.2.3	Неоднородный киральный конденсат, $b \neq 0$ . . . . .	57
4.2.4	Киральные волны плотности при ненулевой температуре . . . . .	61
4.3	Волны пионной плотности . . . . .	64
4.3.1	Термодинамический потенциал модели . . . . .	64
4.3.2	Фазовая структура модели . . . . .	69
4.4	Заключение . . . . .	72
5	Заключение	73
	Приложения	77
A	Дополнение к главе 2	77
A.1	Разделение интеграла $I_2$ на мнимую и действительную части	77
A.2	Разделение интеграла $J$ на мнимую и действительную части	78
A.3	Анализ уравнения щели при мнимом $\vec{b}$ и $m \neq 0$ . . . . .	79
B	Дополнение к главе 3	84
B.1	Вычисление ряда вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+n^2}$ . . . . .	84
B.2	Удобное представление величины $Y$ . . . . .	85
C	Дополнение к главе 4	87
C.1	Решение уравнения четвертой степени . . . . .	87

# Глава 1

## Введение

### 1.1 Эффективные модели КХД

Свойства основной модели, описывающей сильные взаимодействия – квантовой хромодинамики (КХД) при конечной температуре и плотности представляют большой интерес и активно изучались последние 25-30 лет. Как известно, КХД обладает асимптотической свободой, т.е. константа связи в модели увеличивается с уменьшением энергии ( $\alpha_{QCD} \sim \frac{1}{\ln(p/\Lambda_{QCD})}$ , где  $\Lambda_{QCD} \simeq 200 \text{ MeV}$ ), поэтому при низких энергиях рассмотрение данной модели в рамках теории возмущений становится невозможным, и для изучения свойств сильного взаимодействия в этом случае требуются непертурбативные методы или моделирование поведения спиноров на решетке, что связано с трудностями при изучении кварковой среды с ненулевой плотностью. Упомянутая величина  $\Lambda_{QCD}$  является естественным масштабом энергии в теории сильного взаимодействия, разделяющим два режима, в котором может находиться кварковая среда: при температурах, значительно превосходящих этот масштаб, она состоит из отдельных частиц - кварков и глюонов (кварк-глюонная плазма), при температурах, значительно меньше него, - связи между кварками становятся настолько сильными, что они конденсируются, образуя мезоны и барионы (преимущественно пионы).

Интерес к изучению фаз кварковой материи является не только теоретическим, но также подогревается ожиданием новых экспериментальных

данных, в частности, ожидаемыми экспериментами по столкновению тяжелых ионов, где барионная материя несимметрична по изоспину, т.е. плотность протонов и нейтронов в среде различна, а также изучением строения компактных звезд, где плотная кварковая среда также может обладать изоспиновой асимметрией. Подробнее о последствиях изоспиновой асимметрии в этих приложениях можно прочесть, например, в [1].

Лагранжиан КХД имеет вид:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}^\alpha (i\gamma^\mu D_\mu^{\alpha\beta} - m\delta^{\alpha\beta})\psi^\alpha - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (1.1)$$

где

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_{\text{QCD}}A_\mu^a T^a, \\ F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + ig_{\text{QCD}}f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.2)$$

Здесь  $\alpha = \overline{1,3}$  – цветовые индексы кварков  $a = \overline{1,8}$  – цветовые индексы глюонов,  $T^a$  – генераторы группы  $SU(3)$ . Константа связи  $g_{\text{QCD}}$  не имеет размерности, и появление в модели параметра  $\Lambda_{\text{QCD}}$ , имеющего размерность массы и возникающего при рассмотрении перенормировки в КХД, носит название размерной трансмутации.

В пределе, когда массами кварков можно пренебречь, лагранжиан КХД обладает киральной симметрией, т.е. симметрией относительно группы  $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$  (преобразование спиноров имеет вид  $\psi_R \rightarrow \omega_R \psi_R$ ,  $\psi_L \rightarrow \omega_L \psi_L$ , где  $\omega_R, \omega_L$  принадлежат алгебрам соответствующих групп). Предполагается, что эта симметрия может динамически нарушаться до диагональной подгруппы  $SU(2)_V$ , и при этом голдстоуновские бозоны, возникающие при этом нарушении (их число равно разнице количества генераторов исходной и остаточной групп симметрии, в данном случае – 3), отождествляются с наблюдаемыми пионами.

Эффективные модели, описывающие свойства кварковой среды, должны, очевидно, учитывать свойства асимптотической свободы и возможность динамического нарушения киральной симметрии для того, чтобы в каком-то пределе иметь те же свойства, что и исходная модель – КХД.

Исторически одной из первых таких моделей была модель Тирринга ([3]), описывающая дираковские фермионы в (1+1)-мерном пространстве, которые могут взаимодействовать посредством четырехфермионного вектор-векторного взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{2} j_\mu j^\mu, \quad j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (1.3)$$

Четырехфермионное взаимодействие кварков означает, что между кварками действуют силы притяжения, и основная идея введения такого типа взаимодействия заключается в том, что эти силы могут дестабилизировать вакуум и привести к нарушению киральной симметрии. Данная модель привлекательна тем, что здесь действительно происходит динамическое нарушение киральной симметрии, а также тем, что в случае нулевой массы и только одного поколения (аромата) спиноров она разрешима, но при введении массы или ароматов это свойство теряется.

Еще одной из пионерских работ в этой области была работа Швингера ([4]), в которой была введена модель, представляющая собой (1+1)-мерную электродинамику с безмассовыми фермионами (что сохраняет киральную симметрию в исходной модели). Данная модель также является разрешимой, кроме того, она описывает конфайнмент кварков. Швингер получил спектр калибровочного поля в данной модели, и оказалось, что калибровочное поле динамически приобретает массу  $m = e/\sqrt{\pi}$ . Данная модель эквивалентна модели с массивным скалярным полем, масса которого совпадает с массой калибровочного поля, образующейся динамически. Возможность представить модель в виде эквивалентной модели, описывающей динамику бозонных полей вместо исходных полей теории известна как бозонизация. Модель Тирринга, упомянутая выше, также может быть сведена к эквивалентной модели при помощи бозонизации - это будет модель синус-Гордона с лагранжианом вида

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{\mu^2}{\beta^2} \cos \beta \phi, \quad (1.4)$$

где  $\beta$  и  $\phi$  - параметры, зависящие от массы и константы связи модели.

В дальнейшем в данной работе тема бозонизации будет раскрыта более полно, но для еще более полного обзора по теме бозонизации для моделей Тирринга и Швингера можно порекомендовать, например, обзор [5].

Следующим шагом в разработке моделей, описывающих кварковую среду, была работа Т'Хоофта ([6]), где впервые было введено понятие  $1/N_c$ -разложения. В своей работе Т'Хоофт, исследуя лагранжиан КХД с цветовой группой симметрии  $SU(N_c)$ , показал, что в пределе большого числа цветов и малой константы связи

$$N_c \rightarrow \infty, \quad g \rightarrow 0, \quad N_c g^2 = g_0^2 = \text{const}, \quad (1.5)$$

лидирующий вклад в амплитуду процесса рассеяния дают планарные диаграммы, не имеющие внутренних фермионных петель и нетривиальную топологию (т.е. не имеющие ручек). Неабелевы модели сильного взаимодействия, аналогичные КХД, но с симметрией  $SU(N_c)$  являются достаточно сложными для исследования даже в пределе  $N_c \rightarrow \infty$ . Однако есть более простые для исследования модели, которые, как и модель Тирринга, являются моделями четырехфермионного точечного взаимодействия: модель Гросса–Невё ([7]) и модель Намбу–Йона-Лазинио ([8]), которые в данный момент являются одними из наиболее популярных для исследования приближенными моделями КХД и исследованию которых посвящена данная работа. В общем виде лагранжианы этих двух моделей можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{L}_{GN,NJL} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)\psi + \frac{G}{N_c}[(\bar{\psi}\psi)^2 + \lambda(\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2], \quad (1.6)$$

где при  $m_0 = 0$ ,  $\lambda = 0$  лагранжиан сводится к лагранжиану в модели Гросса–Невё, при  $m_0 = 0$ ,  $\lambda = 1$  – к модели Намбу–Йона-Лазинио.

Модель Намбу–Йона-Лазинио (НЙЛ) была предложена еще до создания квантовой хромодинамики. В своей статье авторы модели рассматривали возможность возникновения массы у нуклонов за счет динамического нарушения киральной симметрии, и образования пионов как связанных состояний двух нуклонов. Хотя во времена создания данной модели

еще не было известно о существовании кварков и глюонов, авторы отмечали, что по их мнению, пионы не являются наиболее фундаментальными частицами, участвующими в процессах сильного взаимодействия, а представляют собой что-то наподобие коллективных возбуждений атомов кристаллической решетки – фононов. С сегодняшней точки зрения, учитывая современные знания о природе сильного взаимодействия, можно сказать, что они были близки к истине. Схема рассуждений авторов модели восходит к работам по природе сверхпроводимости Бардина, Купера и Шриффера (модель БКШ, [9]), а также Боголюбова ([10]), где между возбужденными состояниями и основным состоянием сверхпроводника образуется массовая щель за счет притяжения между электронами и образования составных частиц, подчиняющихся статистике Бозе–Эйнштейна, – так называемых куперовских пар – коррелированных пар электронов с противоположно направленными спинами.

Сегодня модель НЙЛ рассматривается как низкоэнергетическое приближение квантовой хромодинамики, описывающей возникновение массы кварков за счет образования кварк-антикваркового конденсата  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  и, как следствие, нарушения киральной симметрии. Также широко рассматриваются в настоящее время расширения данной модели, в которых изучается возможность образования дикваркового конденсата  $\langle \psi\psi \rangle$  при низкой температуре и высокой плотности за счет одноглюонного обмена между кварками, что аналогично образованию куперовских пар в сверхпроводнике (см., например, работы [11–15, 17, 18], а также обзор [19]). Разница заключается в том, что данный конденсат несет не только электрический, но и цветовой заряд, и благодаря аналогии с моделью БКШ образование такого конденсата носит название цветовой сверхпроводимости. Еще одно отличие цветовой сверхпроводимости от сверхпроводимости за счет образования куперовских пар электронов заключается в характерных масштабах температур, при которых температурные флуктуации разрушают корреляцию фермион-антифермионных пар: для модели БКШ эта температура составляет порядка  $0.5 MeV$ , тогда как для цвето-



вой сверхпроводимости она порядка  $\Lambda_{QCD} \simeq 100 - 200$  MeV, и плотности (величины химических потенциалов), при которых может возникать цветовая сверхпроводимость по последним оценкам составляют  $\sim 400 - 500$  MeV ([19]). Такие условия могут быть реализованы в будущих экспериментах по столкновению тяжелых ионов, а также в центре нейтронных звезд.

Применение данной модели в настоящее время достаточно обширно: модель НЙЛ используется для изучения свойств материи компактных звезд, в частности, нейтронных звезд ([2]), для описания свойств адронов (см., например, обзоры [20, 21]), фазовых переходов в плотной кварковой материи ([22–24]), многочастичных связанных состояний ([25]), некоторых свойств мезонов ([26–28]).

Особый интерес представляет влияние внешних магнитного и хромоманнитного полей на свойства частиц ([14–16, 29, 30]). Одним из интересных свойств модели НЙЛ в таких внешних полях является магнитный (и, соответственно, хромоманнитный) катализ – влияние внешнего поля на динамическое нарушение киральной симметрии в теории, приводящее к тому, что симметрия может нарушаться при сколь угодно малой константе связи четырехфермионного взаимодействия ([31]), что является следствием эффективного сокращения размерности в присутствии сильного внешнего поля ([15, 32]).

Поскольку модели НЙЛ и ГН претендуют на описание сильных взаимодействий в низкоэнергетическом пределе, важным вопросом является сводимость этих моделей к более фундаментальным теориям. Одним из подходов, описывающих такой переход, является описание системы кварков с двумя ароматами, где наличие инстантонов индуцирует эффективное четырехфермионное взаимодействие ([33, 34]). Также модели такого типа могут реализовываться в струнных теориях на D-бранах, являясь низкоэнергетическими приближениями теории ([35, 36]).

## 1.2 Методы численных расчетов

В работе используются численные расчеты некоторых величин и построения графиков. Для построения графиков использовались системы Matlab (все графики, кроме фазовых диаграмм при ненулевой температуре,  $T \neq 0$  в главе 4), Mathematica. Для существенных численных расчетов (глава 4) использовались собственные программы, написанные на языке C++. Для вычисления интегралов использовался алгоритм Ромберга и двухточечная схема вычисления интеграла. Для нахождения минимумов функций многих аргументов использовался метод градиентного спуска и метод сопряженных градиентов. Поскольку для данных методов может быть существенен выбор начальной точки спуска, использовался набор начальных точек, в случае нахождения близких по глубине минимумов, значения исследуемых функций в данных точках минимумов проверялись отдельно с большей точностью. Подробнее о данных методах компьютерных вычислений см. [37].

## 1.3 Список опубликованных работ

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Жуковский В.Ч., Курбанов С.Г., Трёхмерная модель Гросса–Невё в условиях нарушения лоренц-инвариантности // Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия. — 2009. — № 5.
2. D. Ebert, N.V. Gubina, K.G. Klimenko, S.G. Kurbanov, V.Ch. Zhukovsky, Chiral density waves in the  $NJL_2$  model with quark number and isospin chemical potential // Phys. Rev. D — 2011. — Vol. 84. — P. 025004.
3. Губина Н.В., Жуковский В.Ч., Курбанов С.Г., Волны пионной и киральной плотности в (1+1)-мерной модели Намбу–Йона-Лазинио //

Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия.  
— 2012. — № 1.

4. Губина Н.В., Жуковский В.Ч., Курбанов С.Г., Размерная редукция фермионов в модели Гросса–Невё в условиях нарушенной лоренц-инвариантности // Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия. — 2012. — № 2.

Кроме того, имеются публикации в трудах конференций:

Жуковский В.Ч., Курбанов С.Г., Губина Н.В., Клименко К.Г., Генерация волн плотности пионного конденсата в модели Гросса–Невё // Научная конференция "Ломоносовские чтения", секция физики, подсекция теоретической и математической физики, Москва, МГУ им. Ломоносова, 2010

## Глава 2

# Трёхмерная модель Гросса–Невё с нарушением лоренц-инвариантности

### 2.1 Возможность нарушения лоренц-инвариантности и ее проявления

Лоренц-инвариантность и СРТ-симметрия являются одними из самых проверенных законов природы. Однако, в последние годы стала широко обсуждаться возможность нарушения этих основных законов физики, были высказаны предположения, что эти симметрии являются лишь приближительными. Действительно, современная квантовая теория допускает нарушение лоренц-инвариантности (и как следствие, СРТ - симметрии) как механизм спонтанного нарушения симметрии. То есть, хотя основные законы могут быть и инвариантны относительно этих симметрий, могут существовать вакуумные решения, спонтанно нарушающие их.

Нарушение лоренц-инвариантности может возникать в таких теориях, как теория струн [38, 39]; петлевая квантовая гравитация [40, 41], где рассмотрение одно и двух - петлевых поправок с учетом нарушения лоренц-инвариантности может дать конечный вклад из расходящихся интегралов; некоммутативная теория поля, где координаты являются функциями дифференциальных соотношений некоммутативной алгебры ( $[x^\mu, x^\nu] = \frac{i}{\Lambda_{NC}^2} \theta^{\mu\nu}$ ,  $\Lambda_{NC}$  - характерный для проявления некоммутативно-

сти масштаб энергии) , и эта некоммутативность является источником нарушения лоренц-симметрии [42–44]; суперсимметричные теории [45]; это нарушение может возникать также из-за варьирования связей [46].

В большинстве теорий, исследующих нарушение лоренц-инвариантности, возникают выделенные системы отсчета, в которых уравнения движения принимают наиболее простой вид, однако наряду с этим существуют теории, где выделенных систем отсчета не существует, однако существуют измененные переходы от одной системы отсчета к другой за счет изменения алгебры Пуанкаре (эта теория получила название doubly special relativity, DSR, обзор - [47]).

Существуют кинематические и динамические модели нарушения лоренц-инвариантности, и хотя понятно, что законченная теория должна включать в себя динамику, кинематические модели сейчас также исследуются, к тому же, существует ряд моделей, где динамика еще не до конца ясна (например, упомянутая уже DSR-модель), и таким образом, проверка в таких моделях возможна только на кинематическом уровне.

Примером одной из простейших кинематических моделей нарушения лоренц-инвариантности может служить нарушение стандартных дисперсионных соотношений такого вида:

$$E^2 = m^2 + p^2 + F_i^{(1)} p^i + F_{ij}^{(2)} p^i p^j + F_{ijk}^{(3)} p^i p^j p^k + \dots \quad (2.1)$$

где коэффициенты  $F_i^{(1)}, F_{ij}^{(2)}, F_{ijk}^{(3)}$  и т.д. являются размерными константами, удовлетворяющими условию, что поправка к дисперсионным соотношениям является малой.

Еще одной известной кинематической моделью нарушения лоренц-инвариантности является модель Робертсона–Мансури–Сексла (RMS). В этой модели существует выделенная система отсчета, в которой распространение света изотропно и преобразования Лоренца при переходе в другие системы отсчета выглядят в обобщенном виде так:

$$x'_0 = a^{-1}(x_0 - \vec{\epsilon} \cdot \vec{x})$$

$$\vec{x} = d^{-1}\vec{x} - (d^{-1} - b^{-1})\frac{\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{x})}{v^2} + a^{-1}\vec{v}x_0 \quad (2.2)$$

Здесь  $a$ ,  $b$ ,  $d$  - функции от значения относительной скорости систем отсчета, а вектор  $\vec{\epsilon}$  зависит от типа синхронизации часов. При  $a = b^{-1} = \sqrt{1 - v^2}$  и  $d = 1$  эти преобразования становятся обычными преобразованиями Лоренца. Метрику в этой модели (при движении систем отсчета вдоль оси  $x$ ) можно записать как  $ds^2 = g_0^2 dx_0^2 - g_1^2 dx^2 - g_2^2(dy^2 + dz^2)$ . При малой относительной скорости функции  $g_i(v)$  обычно параметризуют при помощи параметров Мансури-Сексла:

$$\begin{aligned} g_0(v) &= 1 + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)v^2 + \dots \\ \frac{g_0}{g_1} &= 1 + (\alpha - \beta)v^2 + \dots \\ \frac{g_2}{g_1} &= 1 + (\delta - \beta)v^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

При значениях параметров  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\delta = 0$  выполняется лоренц-инвариантность.

Современные опыты, аналогичные опытам Майкельсона–Морли и Кеннеди–Торндайка по измерению скорости света, дают следующие ограничения на параметры Мансури–Сексла:

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta - 1| &< 6.9 \times 10^{-7} \\ |\delta - \beta + \frac{1}{2}| &< 4.5 \times 10^{-9} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Параметр  $g_0$  и связанный с ним параметр  $\alpha$  может быть также оценен благодаря эффекту Допплера, поскольку он влияет на дисперсионное соотношение для частицы и входит в выражение для энергии частицы как  $E = \frac{mc^2}{g_0 \sqrt{1 - v^2}}$ . Благодаря экспериментам с измерением возможного искажения эффекта Допплера, сейчас самые строгие оценки для параметра  $\alpha$  таковы:

$$|\alpha - \frac{1}{2}| < 8 \times 10^{-7} \quad (2.5)$$

Динамические модели, описывающие нарушение лоренц-инвариантности, также весьма разнообразны. К примеру, в работе [48] исследуется многомерная теория, в которой искривленная геометрия в объеме (bulk) предполагает анизотропию, приводящую к нарушению лоренц-инвариантности. В этой модели постоянный вектор  $B^\mu$ , имеющий ненулевое вакуумное среднее и реализующий эту анизотропию, предполагается напрямую связанным с гравитационным полем, т.е. с тензором Ричи в пятимерном пространстве анти-де Ситтера.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{k_{(5)}^2} R - 2\Lambda + \lambda B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - V(B^\mu B_\mu \pm b^2) \quad (2.6)$$

где  $B_{\mu\nu} = \nabla_\mu B_\nu - \nabla_\nu B_\mu$ ,  $k_{(5)}^2 = M_{Pl(5)}^3$ ,  $M_{Pl(5)}$  - пятимерная планковская масса,  $\Lambda = \Lambda_{(5)} + \Lambda_{(4)}$ ,  $\lambda$  - безразмерная константа связи,  $V$  - потенциал, благодаря которому происходит нарушение лоренц-инвариантности, т.к. он имеет минимум при  $B^\mu B_\mu \pm b^2 = 0$ , т.е. таким образом поле имеет ненулевое вакуумное среднее.

Предполагается, что нарушение лоренц-инвариантности может проявляться существенно при энергиях, близких по масштабу к планковской ( $E_p = 1.2 \times 10^{19}$  GeV). Конечно, ввиду того, что максимальные энергии частиц, доступных для наблюдения (транс-GZK лучи порядка  $10^{11}$  GeV, не говоря уже об ускорителях порядка TeV) намного меньше планковской энергии, наблюдение эффектов нарушения лоренц-инвариантности на планковских масштабах невозможно. Однако, если нарушение лоренц-инвариантности происходит при высоких энергиях, то отголоски этого нарушения можно наблюдать и при низких энергиях. Поэтому большинство попыток проверки нарушения лоренц-инвариантности предпринимается в феноменологических аспектах физики элементарных частиц.

Достаточно много в оценке нарушения лоренц-инвариантности могут предоставить эксперименты по обнаружению возможного нарушения СРТ-симметрии (и как следствие, разные по абсолютной величине масса, заряд, магнитный момент частиц и античастиц). Поскольку СРТ-теорема требует лоренц-инвариантности, то нарушение последней приве-

дет к нарушению СРТ-инвариантности, обратное в общем случае неверно, однако для локальных полевых теорий нарушение СРТ-инвариантности приводит к нарушению лоренц-инвариантности, как показано в [49]. Поэтому проверка следствий СРТ-теоремы может служить проверкой возможности нарушения и лоренц-инвариантности.

Одни из наиболее точных из полученных результатов в этой области были получены при помощи ловушки Пеннинга (в которой заряженная частица удерживается статическими электрическим и магнитным полями). Вводя в ловушку слабое осциллирующее магнитное поле, можно измерить соотношения аномальной частоты электрона  $\omega_a$  (возникающей за счет аномального магнитного момента) и циклотронной частоты  $\omega_c$  и оценить разницу в аномальных магнитных моментах для электрона и позитрона. Согласно оценкам [50] эта величина составляет

$$|\omega_a^+ - \omega_a^-| < 2.4 \times 10^{-21} m_e \quad (2.7)$$

Еще одна оценка нарушения СРТ-симметрии может быть получена из анализа каонных систем. Для нейтральных каонов ( $K^0 = d\bar{s}$ ), было получено (см. [38])

$$\left| \frac{m_K - m_{\bar{K}}}{m_K} \right| < 5 \times 10^{-18} \quad (2.8)$$

Стандартная Модель не располагает механизмами нарушения лоренц-инвариантности, однако это нарушение может быть следствием нарушения в более фундаментальных теориях (таких, как упомянутые выше теория струн, некоммутативные теории). Стандартная Модель с добавлением механизмов, нарушающих лоренц-инвариантность, называется расширенной Стандартной Моделью (SME). Существует достаточно много возможных добавочных членов в лагранжиан. В спинорном секторе Стандартной Модели наиболее полный лагранжиан со всеми возможными поправками, нарушающими лоренц-инвариантность, представлен в [51]:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \Gamma_\mu \partial^\mu \Psi - \bar{\Psi} M \Psi \quad (2.9)$$



где

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + c^{\mu\nu}\gamma_\nu + d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_\nu + e^\mu + if^\mu\gamma_5 + \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\sigma_{\lambda\nu}$$

$$M = m + a_\mu\gamma^\mu + b_\mu\gamma_5\gamma^\mu + \frac{1}{2}H^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$$

Все дополнительные параметры, появившиеся в теории по сравнению с обычным лагранжианом для дираковских фермионов, определяются из средних по вакууму значений нарушающих лоренц-инвариантность тензоров в более фундаментальных теориях. Все введенные параметры нарушают лоренц-инвариантность, и, кроме того, параметры  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $e_\mu$ ,  $f_\mu$ ,  $g_{\lambda\mu\nu}$  нарушают СРТ-симметрию.

Поскольку лагранжиан (2.9) является достаточно общим, обычно рассматривают теории, включающие только некоторые из добавочных членов, в большинстве работ рассматривается влияние членов  $a_\mu$  и  $b_\mu$ . В качестве примера таких работ можно привести работы [52, 53]. Можно провести оценку этих добавок исходя из уже упоминавшихся опытов с ловушкой Пеннинга и анализа каонных систем.

Действительно, возможная разница масс каонов может быть связана с добавкой  $a_\mu$  для s и d кварков. Обозначая  $\Delta a_\mu = r_d a_\mu^d - r_s a_\mu^s$ , где  $r_d$ ,  $r_s$ - коэффициенты, возникающие из-за связанных состояний кварков, можно получить выражение

$$\left| \frac{m_K - m_{\bar{K}}}{m_K} \right| \approx \left| \frac{\beta^\mu \Delta a_\mu}{m_K} \right| \quad (2.10)$$

где  $\beta^\mu$  - 4-скорость каона в системе отсчета наблюдателя. Отсюда можно получить ограничения на  $a_\mu$ :

$$|\Delta a_x|, |\Delta a_y| < 10^{-12} \text{eV}$$

$$|\Delta a_0|, |\Delta a_z| < 10^{-11} \text{eV} \quad (2.11)$$

В экспериментах с ловушками Пеннинга можно получить ограничения на добавку  $b_\mu$ . Измеряемую аномальную частоту можно с учетом добавок записать так:

$$\omega_a^{e^\pm} = \omega_a^{e^0} \mp 2b_Z^e + 2d_{Z0}^e m_e + 2H_{XY}^e \quad (2.12)$$

Здесь  $Z$  - ось прецессии. Тогда, используя упомянутые результаты по измерению частот для электрона и позитрона (2.7), можно оценить  $b_Z$ :

$$b_Z \leq 10^{-21} m_e \quad (2.13)$$

В обзорной статье [54] можно также найти современные ограничения на добавку  $b_\mu$ , полученные, в частности, при исследовании атомных систем:

$$|b_0| < 10^{-2} \text{eV}, |\vec{b}| < 10^{-18} \sim 10^{-20} \text{eV} \quad (2.14)$$

Как видно из этих оценок, ограничения на временную часть  $b_\mu$  сейчас являются наиболее слабыми, поэтому многие авторы уделяют особое внимание рассмотрению именно этого члена (например [55]). Тем не менее, данные оценки показывают, что предполагаемые параметры нарушения лоренц-инвариантности малы, так что экспериментальное обнаружение их сталкивается с проблемой отделения обнаружения нарушения лоренц-инвариантности и сходных по проявлениям эффектов, которые могут возникать как следствие нелинейности эффективного действия электродинамики в сильных внешних магнитных и гравитационных полях ([57, 58]).

В заключение этого раздела можно также сказать несколько слов о введении поправок, нарушающих лоренц-инвариантность, в лагранжиан КЭД: в результате введения поправок, аналогичных уже написанным выше (2.9) в стандартный лагранжиан КЭД:  $\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi - \bar{\Psi}m\Psi$ , в фотонном секторе теории появляются два члена, нарушающие лоренц-инвариантность:

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}(k_F)_{\beta\lambda\mu\nu}F^{\beta\lambda}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(k_{AF})^\beta\epsilon_{\beta\lambda\mu\nu}A^\lambda F_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

Здесь первый член является СРТ-четным, а второй нарушает СРТ-инвариантность. Второй член называется членом Черна–Саймонса и существует ряд работ, посвященных генерации этого члена в расширенной стандартной модели (например, [56, 59, 60]). Однако, в разных работах

существуют разные результаты относительно возникновения этого члена. Так, например, в [56] делается вывод о том, что этот член в теории при введении нарушения лоренц-симметрии добавлением  $b_\mu$  имеет конечное выражение, а в [59] при введении такой же добавки  $b_\mu$  член Черна-Саймонса не образуется. Это говорит о том, что многие аспекты расширенной стандартной модели (SME) изучены еще не до конца, и ее развитие еще не завершено.

## 2.2 Исследуемая модель

В данной работе рассматривается (2+1)- мерная модель Гросса–Невё, лагранжиан которой в пространстве Евклида выглядит так:

$$S[\bar{\Psi}, \Psi] = \int d^3x \left[ \bar{\Psi} \gamma_\mu \partial_\mu \Psi + \bar{\Psi} \gamma_3 \partial_3 \Psi - \frac{G}{2N} (\bar{\Psi} \Psi)^2 \right]. \quad (2.16)$$

$\mu = 1, 2$

Здесь 1-е измерение - пространственное, 2-е - временное, 3-е - дополнительное пространственное. Это модель изначально обладает  $Z(2)$ -симметрией с инверсией третьего измерения, т.е.

$$\begin{aligned} \Psi_L(x_1, x_2, x_3)' &= \pm \Psi_L(x_1, x_2, -x_3), \bar{\Psi}_L(x_1, x_2, x_3)' = \pm \bar{\Psi}_L(x_1, x_2, -x_3) \\ \Psi_R(x_1, x_2, x_3)' &= \mp \Psi_R(x_1, x_2, -x_3), \bar{\Psi}_R(x_1, x_2, x_3)' = \mp \bar{\Psi}_R(x_1, x_2, -x_3) \end{aligned} \quad (2.17)$$

В нашей модели  $\gamma$  - матрицы мы выбрали так:

$$\gamma_2 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \gamma_1 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \gamma_3 = \gamma_5 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Вводя нарушение лоренц-инвариантности путем введения в лагранжиан члена, включающего  $b_\mu$  и массу  $m$ , мы получаем:

$$S[\bar{\Psi}, \Psi] = \int d^3x \left[ \bar{\Psi} \gamma_j (\partial_j - i b_j) \Psi + \bar{\Psi} m \Psi - \frac{G}{2N} (\bar{\Psi} \Psi)^2 \right] \quad (2.19)$$

где  $b = (b_1; b_2; b_3)$  и  $j = 1, 2, 3$

Введем поле  $\Phi(x)$  и воспользуемся следующим соотношением (соотношение Хаббарда-Стратоновича):

$$\begin{aligned} & \int d\Phi \exp \left\{ \int -d^3x \left[ \bar{\Psi}\Phi\Psi - \frac{N}{2G}\Phi^2 \right] \right\} = \\ & = \int d\Phi \exp \left\{ \int d^3x \frac{N}{2G} \left( \left[ \Phi - \frac{G}{N}\bar{\Psi}\Psi \right]^2 - \left( \frac{G}{N} \right)^2 (\bar{\Psi}\Psi)^2 \right) \right\} = \\ & = \text{const} \cdot \exp \left\{ \int -d^3x \frac{G}{2N} (\bar{\Psi}\Psi)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

При больших  $N$  мы можем положить, как это делается в статье [68], поле  $\Phi(x)$  равным не зависящей от координат константе  $\Phi$ . Тогда, вводя зависящее от  $\bar{\Psi}, \Psi, \Phi$  действие и используя соотношение Стратоновича-Хаббарда, получим:

$$S[\bar{\Psi}, \Psi, \Phi] = S[\bar{\Psi}, \Psi] + \int d^3x \left[ -\bar{\Psi}\Phi\Psi + \frac{N}{2G}\Phi^2 - N \cdot m \cdot B_\Lambda \cdot \Phi \right] \quad (2.21)$$

где

$$B_\Lambda = \frac{4}{(2\pi)^3} \cdot \int_0^\Lambda \frac{dE \cdot d^2p}{E^2 + p^2} = \frac{2}{(2\pi)^3} \cdot \int_0^\Lambda \frac{d^3k}{k^2} = \frac{\Lambda}{\pi^2} = \frac{1}{G_c}$$

Последнее слагаемое под интегралом в (2.21) возникло в результате перенормировки действия в однопетлевом приближении, аналогичная перенормировка была проделана в [63].

Переходя в импульсное пространство и интегрируя по всему объему независимые от координат части подынтегрального выражения в (2.21), мы получаем выражение для  $S[\bar{\Psi}, \Psi, \Phi]$  в виде:

$$\begin{aligned} S[\bar{\Psi}, \Psi, \Phi] = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[ \bar{\Psi}(-k) \left( i\gamma_j(k_j - b_j) - \tilde{\Phi} \right) \Psi(k) \right] + \\ & + \frac{N}{2G} V \Phi^2 - NV \cdot \Phi \frac{m}{G_c} \end{aligned} \quad (2.22)$$

здесь  $V$  - это объем трехмерного пространства

Производящий функционал записывается в следующем виде:

$$Z = \int d\bar{\Psi} d\Psi \exp \{-S[\bar{\Psi}, \Psi]\} = \int d\bar{\Psi} d\Psi d\Phi \exp \{-S[\bar{\Psi}, \Psi, \Phi]\} \quad (2.23)$$

Чтобы найти конденсат дираковских полей  $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$  надо рассмотреть следующее выражение:

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = -\langle \Psi\bar{\Psi} \rangle = -\frac{\int d\bar{\Psi} d\Psi (\bar{\Psi}\Psi) e^{-S}}{\int d\bar{\Psi} d\Psi e^{-S}} = \frac{\delta \ln Z}{\delta \Phi} + \frac{N}{G} \langle \Phi - m \rangle \quad (2.24)$$

Видно, что при  $\frac{\delta \ln Z}{\delta \Phi}(\Phi = \Phi_0) = 0$  мы получаем:

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = -\langle \Psi\bar{\Psi} \rangle = \frac{N}{G}(\Phi_0 - m) \quad (2.25)$$

То есть при  $\Phi_0 \neq m$  возникает ненулевое вакуумное среднее:  $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle \neq 0$  и киральная симметрия нарушается.

Подставив в (2.23) выражение (2.22) и взяв континуальный интеграл по  $\bar{\Psi}, \Psi$ , для чего мы используем известное соотношение  $\int d\bar{\Psi} d\Psi \exp \{\bar{\Psi} M \Psi\} = \det M$ , мы получаем окончательное выражение для производящего функционала:

$$Z = \int d\Phi \exp \left\{ -\frac{NV}{2G} \Phi^2 + \frac{NV \cdot m}{G_c} \Phi \right\} \det (\gamma_j(k_j - b_j) - \tilde{\Phi}) \quad (2.26)$$

где  $\tilde{\Phi} = \Phi - m$

Поскольку  $Z = \int d\Phi \exp \{-NV \cdot V_{\text{eff}}\}$ , мы логарифмируем полученное выражение для  $Z$  и далее, воспользовавшись тем, что

$$\ln \text{Det}(\gamma_i(k_i - b_i) - \tilde{\Phi}) = \text{Tr} \ln(\gamma_i(k_i - b_i) - \tilde{\Phi}) = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln((k_i - b_i)^2 + \tilde{\Phi}^2)$$

мы получаем выражение для  $V_{\text{eff}}$ :

$$V_{\text{eff}} = \frac{\Phi^2}{2G} - \frac{m\Phi}{G_c} - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \cdot \ln \left( (\vec{k} - \vec{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right) \quad (2.27)$$

Конденсат дираковских полей будет отсутствовать, и как следствие киральная симметрия не будет нарушена, если эффективный потенциал

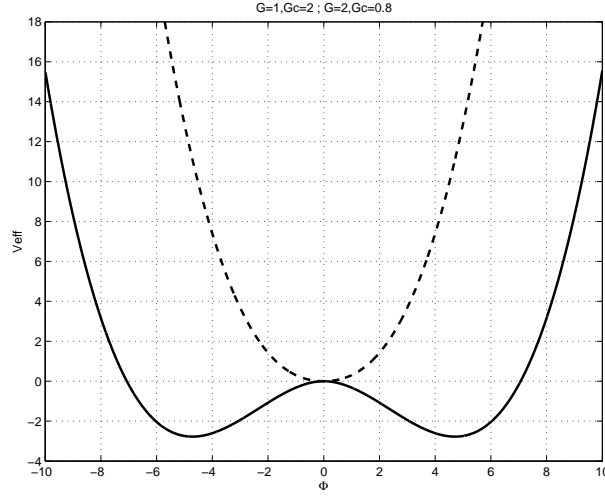


Рис. 2.1: Эффективный потенциал в теории без массы и нарушения лоренц-инвариантности: а) (пунктирная линия)  $G = 1$ ,  $G_c = 2 > G - 1$  минимум б) (сплошная линия)  $G = 2$ ,  $G_c = 0.8 < G - 2$  минимума

будет иметь единственный минимум в точке  $\Phi_0 = m$ , в противном случае киральная симметрия будет нарушаться.

Случай, когда  $m = 0$  и нарушения лоренц-инвариантности нет, рассмотрен в [68], где получено следующее выражение для эффективного потенциала:

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{6\pi} |\Phi|^3 - \frac{\Phi^2}{2} \left( \frac{1}{G_c} - \frac{1}{G} \right) \quad (2.28)$$

В этом случае уравнение щели  $\partial V_{\text{eff}} / \partial \Phi = 0$  принимает следующий вид:

$$|\Phi_0| = 2\pi \left( \frac{1}{G_c} - \frac{1}{G} \right) \quad (2.29)$$

То есть, при  $G < G_c$  симметрия не будет нарушена, а при  $G > G_c$  она нарушается (рис. 2.1).

### 2.3 Эффективный потенциал модели $V_{\text{eff}}$

Вектор  $\vec{b}$  у нас может задаваться комплексным, действительным или смешанным (некоторые компоненты комплексны, некоторые - действи-

тельны). Вычислим значение эффективного потенциала в двух случаях - при действительном и комплексном  $\vec{b}$  в пространстве Евклида .

### 2.3.1 Вычисление $V_{\text{eff}}$ в случае действительного $\vec{b}$

В сферических координатах  $d^3k = 2\pi k^2 \sin \Theta \cdot dk \cdot d\Theta$  , поэтому выражение (2.27) для  $V_{\text{eff}}$  принимает вид:

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= \frac{\Phi^2}{2G} - \frac{m\Phi}{G_c} - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\Lambda \int_0^\pi k^2 \cdot \ln(k^2 - b^2 - 2kb \cdot \cos \Theta + \tilde{\Phi}^2) \sin \Theta \cdot d\Theta \cdot dk = \\ &= \frac{\Phi^2}{2G} - \Phi \frac{m}{G_c} + \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^\Lambda k^2 dk - \frac{1}{8\pi^2 b} \int_0^\Lambda k \left\{ [(k+b)^2 + \tilde{\Phi}^2] \ln((k+b)^2 + \tilde{\Phi}^2) - \right. \\ &\quad \left. - [(k-b)^2 + \tilde{\Phi}^2] \ln((k-b)^2 + \tilde{\Phi}^2) \right\} dk \end{aligned} \quad (2.30)$$

Здесь  $b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$  - модуль вектора  $\vec{b}$

Обозначим:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2b} \int_0^\Lambda k \left\{ [(k+b)^2 + \tilde{\Phi}^2] \ln((k+b)^2 + \tilde{\Phi}^2) - \right. \\ &\quad \left. - [(k-b)^2 + \tilde{\Phi}^2] \ln((k-b)^2 + \tilde{\Phi}^2) \right\} dk \end{aligned} \quad (2.31)$$

Вычисляя этот интеграл, получаем:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2b} \ln((\Lambda + b)^2 + \Phi^2) \left[ \frac{1}{4}(\Phi^4 + \Lambda^4) - \frac{1}{12}b^4 + \frac{1}{2}\Lambda^2\Phi^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2b^2 - \frac{1}{2}b^2\Phi^2 + \frac{2}{3}b\Lambda^3 \right] - \\ &- \frac{1}{2b} \ln((\Lambda - b)^2 + \Phi^2) \left[ \frac{1}{4}(\Phi^4 + \Lambda^4) - \frac{1}{12}b^4 + \frac{1}{2}\Lambda^2\Phi^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2b^2 - \frac{1}{2}b^2\Phi^2 - \frac{2}{3}b\Lambda^3 \right] - \\ &- \frac{2}{3}\Phi^3 \cdot \left[ \arctan\left(\frac{\Lambda + b}{\Phi}\right) + \arctan\left(\frac{\Lambda - b}{\Phi}\right) \right] + \\ &\quad + \frac{5}{6}\Lambda\Phi^2 - \frac{5}{18}\Lambda^3 + \frac{1}{3}\Lambda b^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Подставляя это выражение, окончательно для  $V_{\text{eff}}$  мы получаем:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{eff}} = & \frac{\Phi^2}{2G} - \frac{m\Phi}{G_c} + \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{2}{3} \Phi^3 \cdot \left[ \arctan\left(\frac{\Lambda + b}{\Phi}\right) + \arctan\left(\frac{\Lambda - b}{\Phi}\right) \right] - \\
 & - \frac{1}{8\pi^2 b} \ln((\Lambda + b)^2 + \Phi^2) \left[ \frac{1}{4}(\Phi^4 + \Lambda^4) - \frac{1}{12}b^4 + \frac{1}{2}\Lambda^2\Phi^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2b^2 - \frac{1}{2}b^2\Phi^2 + \frac{2}{3}b\Lambda^3 \right] + \\
 & + \frac{1}{8\pi^2 b} \ln((\Lambda - b)^2 + \Phi^2) \left[ \frac{1}{4}(\Phi^4 + \Lambda^4) - \frac{1}{12}b^4 + \frac{1}{2}\Lambda^2\Phi^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2b^2 - \frac{1}{2}b^2\Phi^2 - \frac{2}{3}b\Lambda^3 \right] - \\
 & - \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \left( \frac{5}{6}\Lambda\Phi^2 + \frac{17}{18}\Lambda^3 + \frac{2}{3}\Lambda b^2 \right) \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

Прямая проверка показывает, что полученное выражение при  $b_i \rightarrow 0$  и  $m \rightarrow 0$  переходит в соответствующее значение для  $V_{\text{eff}}$  без нарушения лоренц-инвариантности (2.28).

При  $\Lambda \gg \Phi; b$  в нашем случае из (2.33) мы имеем

$$V_{\text{eff}} = \frac{\Phi^2}{2G} - \frac{(\Phi - m)^2}{2G_c} + \frac{|\Phi - m|^3}{6\pi} - \frac{b^2}{6G_c} - \frac{m\Phi}{G_c} \quad (2.34)$$

Заметим, что при  $m \rightarrow 0$  полученное выражение для эффективного потенциала будет совпадать с (2.28) с точностью до аддитивной поправки  $\frac{b^2}{6G_c}$ , которая не влияет на расположение минимумов и максимумов  $V_{\text{eff}}$  и поэтому не вносит вклад в вакуумное среднее поля  $\Phi$ .

### 2.3.2 Вычисление $V_{\text{eff}}$ в случае мнимого $\vec{b}$

Второй случай - это чисто мнимый (в Евклиде) вектор  $\vec{b}$ . В этом случае мы можем записать выражение (2.27) в таком виде:

$$V_{\text{eff}} = \frac{\Phi^2}{2G} - \frac{m\Phi}{G_c} - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \cdot \ln\left(\left(\vec{k} - i\vec{b}\right)^2 + \tilde{\Phi}^2\right) \quad (2.35)$$

где  $\vec{b}$  - уже действительный вектор с компонентами  $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3)$ .



В сферических координатах  $d^3k = 2\pi k^2 \sin \Theta \cdot dk \cdot d\Theta$ , поэтому выражение для  $V_{\text{eff}}$  принимает вид:

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= \frac{\Phi^2}{2G} - \frac{m\Phi}{G_c} - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\Lambda \int_0^\pi k^2 \cdot \ln(k^2 - \tilde{b}^2 - 2ik\tilde{b} \cdot \cos \Theta + \tilde{\Phi}^2) \sin \Theta \cdot d\Theta \cdot dk = \\ &= \frac{\Phi^2}{2G} - \frac{m\Phi}{G_c} + \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^\Lambda k^2 \cdot dk - \\ &\quad - \frac{1}{8i\pi^2 \tilde{b}} \int_0^\Lambda k \left\{ \left[ (k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right] \ln \left( (k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left[ (k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right] \ln \left( (k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right) \right\} dk \end{aligned} \quad (2.36)$$

Здесь  $\tilde{b}$  - модуль вектора  $\vec{\tilde{b}}$ .

Обозначим:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\Lambda k \left\{ \left[ (k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right] \ln \left( (k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left[ (k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right] \ln \left( (k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right) \right\} dk \end{aligned} \quad (2.37)$$

Для того, чтобы вычислить этот интеграл, разделим его на действительную и мнимую части. В результате такого разделения (см. приложение А) этот интеграл сводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} I_2 &= 4i\tilde{b} \cdot \int_0^\Lambda k^2 \ln \left( \sqrt{(k^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{\Phi}^2)^2 - 4\tilde{b}^2 \tilde{\Phi}^2} \right) \cdot dk + \\ &\quad + 2i \cdot \int_0^\Lambda k \cdot (k^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2) \arctan \left( \frac{2k\tilde{b}}{k^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2} \right) \cdot dk \end{aligned} \quad (2.38)$$

Заметим, что действительные части этого интеграла сократились, т.е.  $I_2$  - чисто мнимый, что и должно быть, т.к. выражение для  $V_{\text{eff}}$  должно быть действительным. Взяв этот интеграл, мы получаем следующее

выражение:

$$\begin{aligned}
 I_2 = & \frac{2i\tilde{b}}{3}\Lambda^3 \ln\left((\Lambda^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{\Phi}^2)^2 - 4\tilde{b}^2\tilde{\Phi}^2\right) - i\frac{5}{9}\Lambda^3\tilde{b} - i\Lambda\tilde{b}\left(\frac{1}{3}\tilde{b}^2 - \frac{5}{3}\tilde{\Phi}^2\right) + \\
 & + i\left(\frac{1}{2}\Lambda^4 + \Lambda^2(\tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2)\right) \arctan\left(\frac{2\Lambda\tilde{b}}{\Lambda^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2}\right) + \\
 & + \frac{i}{2}\left[(\tilde{\Phi} - \tilde{b})^3\left(\frac{1}{3}\tilde{b} + \tilde{\Phi}\right) \arctan\frac{\Lambda}{\tilde{\Phi} - \tilde{b}} + (\tilde{\Phi} + \tilde{b})^3\left(\frac{1}{3}\tilde{b} - \tilde{\Phi}\right) \arctan\frac{\Lambda}{\tilde{\Phi} + \tilde{b}}\right]
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Окончательно для  $V_{\text{eff}}$  мы получаем:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{eff}} = & \frac{\Phi^2}{2G} - \frac{m\Phi}{G_c} - \frac{1}{(2\pi)^2} \left[ -\frac{17}{18}\Lambda^3 + \frac{5}{6}\Lambda\tilde{\Phi}^2 - \frac{1}{6}\Lambda\tilde{b}^2 \right] - \\
 & - \frac{1}{3(2\pi)^2} \Lambda^3 \ln\left((\Lambda^2 + \tilde{\Phi}^2 + \tilde{b}^2)^2 - 4\tilde{b}^2\tilde{\Phi}^2\right) - \\
 & - \frac{1}{16\pi^2\tilde{b}} \left[ (\Lambda^4 + 2\Lambda^2(\tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2)) \arctan\left(\frac{2\Lambda\tilde{b}}{\Lambda^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2}\right) \right] - \\
 & - \frac{1}{16\pi^2\tilde{b}} \left[ (\tilde{\Phi} - \tilde{b})^3\left(\frac{1}{3}\tilde{b} + \tilde{\Phi}\right) \arctan\left(\frac{\Lambda}{\tilde{\Phi} - \tilde{b}}\right) + (\tilde{\Phi} + \tilde{b})^3\left(\frac{1}{3}\tilde{b} - \tilde{\Phi}\right) \arctan\left(\frac{\Lambda}{\tilde{\Phi} + \tilde{b}}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Прямая проверка показывает, что как и в случае действительного вектора  $\vec{b}$ , полученное выражение при  $b_i \rightarrow 0$  и  $m \rightarrow 0$  переходит в соответствующее значение для  $V_{\text{eff}}$  без нарушения лоренц-инвариантности (2.28).

Исследуем полученное выражение:

При  $\Lambda \gg \Phi; b$  мы имеем

1) Если  $|\Phi - m| > \tilde{b}$ , то

$$V_{\text{eff}} = \frac{\Phi^2}{2G} - \frac{(\Phi - m)^2}{2G} + \frac{|\Phi - m|^3}{6\pi} - \frac{m\Phi}{G_c} \tag{2.41}$$

2) Если  $|\Phi - m| < \tilde{b}$ , то

$$V_{\text{eff}} = \frac{\Phi^2}{2G} - \frac{(\Phi - m)^2}{2G_c} - \frac{m\Phi}{G_c} - \frac{1}{32\pi\tilde{b}} \left[ \frac{2}{3}\tilde{b}^4 - 4\tilde{b}^2(\Phi - m)^2 - 2(\Phi - m)^4 \right] \quad (2.42)$$

## 2.4 Уравнение щели в трехмерной модели

Уравнение щели можно сразу найти в приближении  $\Lambda \gg \Phi; b$ , исходя из полученного выражения для эффективного потенциала, однако в данной работе оно было получено сначала из выражения (2.27), что служит дополнительной проверкой правильности вычисления  $V_{\text{eff}}$ .

### 2.4.1 Уравнение щели в случае действительного $\tilde{b}$

В этом случае мы, дифференцируя выражение (2.27) по  $\Phi$  и приравняв его нулю, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{G} - \frac{m}{G_c} &= -\frac{\tilde{\Phi}}{4\pi^2 b} \int_0^\Lambda k \cdot \ln \left[ \frac{(k-b)^2 + \tilde{\Phi}^2}{(k+b)^2 + \tilde{\Phi}^2} \right] \cdot dk = \\ &= -\frac{\tilde{\Phi}}{4\pi^2 b} \int_0^\Lambda k \cdot \left[ \ln((k-b)^2 + \tilde{\Phi}^2) - \ln((k+b)^2 + \tilde{\Phi}^2) \right] \cdot dk \end{aligned} \quad (2.43)$$

Вычисляя этот интеграл, мы получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{G} - \frac{m}{G_c} &= -\frac{\tilde{\Phi}}{4\pi^2 b} \cdot \left\{ \frac{1}{2}(\Lambda^2 + \tilde{\Phi}^2) \left[ \ln((\Lambda-b)^2 + \tilde{\Phi}^2) - \ln((\Lambda+b)^2 + \tilde{\Phi}^2) \right] - \right. \\ &\quad \left. - 2\Lambda b + 2b\tilde{\Phi} \left( \arctan\left(\frac{\Lambda-b}{\tilde{\Phi}}\right) + \arctan\left(\frac{\Lambda+b}{\tilde{\Phi}}\right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Прямая проверка показывает, что это выражение при  $b_i \rightarrow 0$  и  $m \rightarrow 0$  переходит в соответствующее выражение для уравнения щели без нарушения лоренц-инвариантности (2.29).

При  $\Lambda \gg \Phi; b$  мы имеем:

$$\frac{(\Phi - m) \cdot |\Phi - m|}{2\pi} + \Phi \left( \frac{1}{G} - \frac{1}{G_c} \right) = 0 \quad (2.45)$$

Можно привести это выражение к виду:

$$\frac{(\Phi - m) (|\Phi - m| - M)}{2\pi} - \frac{mM}{2\pi} = 0 \quad (2.46)$$

где  $M = 2\pi \left( \frac{1}{G_c} - \frac{1}{G} \right)$ . Это с точностью до коэффициента 2 совпадает с результатами статьи [63].

Заметим, что полученный нами результат (2.45) также получается напрямую из полученного выше вида эффективного потенциала при действительном  $\vec{b}$  (2.34), что подтверждает правильность выполненных расчетов.

Исследуем нули (2.46):

Анализ показывает, что при  $M > 0$ , т.е.  $G > G_c$ , экстремумы эффективного потенциала могут быть в точках

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= m + \frac{1}{2}M + \sqrt{\frac{1}{4}M^2 + Mm}; \\ \Phi_2 &= m - \frac{1}{2}M + \sqrt{\frac{1}{4}M^2 - Mm}; \\ \Phi_3 &= m - \frac{1}{2}M - \sqrt{\frac{1}{4}M^2 - Mm} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Причем, в первом случае в  $V_{\text{eff}}$  реализуется минимум при любых  $M > 0, m > 0$ ; во втором - максимум и в третьем - минимум при  $M > 4m$ .

При  $M < 0$ , т.е.  $G < G_c$  эффективный потенциал имеет минимум в точке

$$\Phi_4 = m + \frac{1}{2}|M| - \sqrt{\frac{1}{4}M^2 + m|M|} \quad (2.48)$$

Таким образом, при  $M < 0$   $V_{\text{eff}}$  имеет один минимум в точке  $\Phi_4$  (рис. 2.2(а)), при  $0 < M < 4m$  - также только один минимум в точке  $\Phi_1$  (рис.

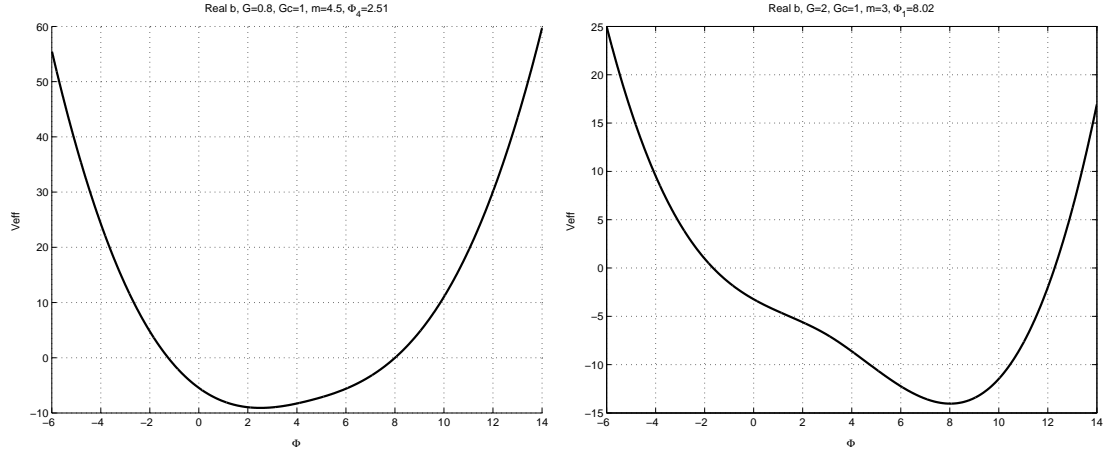


Рис. 2.2: Эффективный потенциал при действительном  $b$ : а)  $G = 0.8$ ,  $G_c = 1$ ,  $m = 4.5$ , график имеет 1 минимум при  $\Phi_4 = 2.51$ , б)  $G = 2$ ,  $G_c = 1$ ,  $m = 3$ , график имеет 1 минимум при  $\Phi_1 = 8.02$

2.2(б)), а при  $M > 4m$  он будет иметь минимумы в точках  $\Phi_1$ ,  $\Phi_3$  и максимум в точке  $\Phi_2$  (рис. 2.2). Симметрия будет восстановлена, только если эффективный потенциал имеет единственный минимум в точке  $\Phi_0 = m$ . Здесь этот случай не реализуется при любых параметрах  $M, m, b$  (за исключением, конечно, случая  $m = 0$ , когда эффективный потенциал в точности соответствует  $V_{\text{eff}}$  случаю без нарушения лоренц-инвариантности (2.28) с лишь аддитивной добавкой  $-\frac{b^2}{6G_c}$ ). Поэтому в случае действительного  $\vec{b}$  киральная симметрия нарушена при любой величине введенной поправки  $\vec{b}$ , которая проявляется только в общем сдвиге эффективного потенциала.

#### 2.4.2 Уравнение щели в случае мнимого $\vec{b}$

Взяв производную выражения (2.27) по  $\Phi$  и приравняв ее нулю, мы получаем:

$$\frac{\Phi}{G} - \frac{m}{G_c} = \frac{i\tilde{\Phi}}{4\pi^2\tilde{b}} \int_0^\Lambda k \cdot \ln \left[ \frac{(k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2}{(k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2} \right] \cdot dk =$$

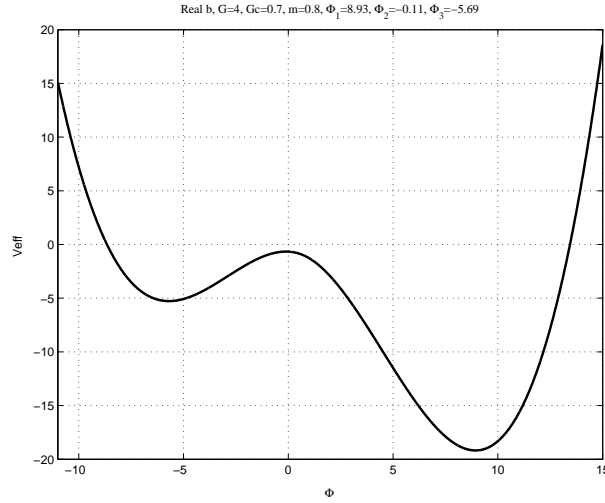


Рис. 2.3: Эффективный потенциал при действительном  $b$ :  $G = 4$ ,  $G_c = 0.7$ ,  $m = 0.8$ , график имеет 2 минимума при  $\Phi_1 = 8.93$ ,  $\Phi_3 = -5.69$  и максимум при  $\Phi_2 = -0.11$

$$= \frac{i\tilde{\Phi}}{4\pi^2\tilde{b}} \int_0^\Lambda k \cdot \left[ \ln((k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2) - \ln((k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2) \right] \cdot dk \quad (2.49)$$

Обозначим:

$$J = \int_0^\Lambda k \cdot \left[ \ln((k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2) - \ln((k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2) \right] \cdot dk \quad (2.50)$$

Для вычисления этого интеграла мы, как и в случае с вычислением  $V_{\text{eff}}$  при мнимом  $\vec{b}$ , разложим его на действительную и мнимую части. В результате (подробнее см. приложение А) мы получаем следующее выражение для  $J$ :

$$J = -2i \int_0^\Lambda k \cdot \arctan\left(\frac{2k\tilde{b}}{k^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2}\right) \cdot dk \quad (2.51)$$

Как мы видим, действительная часть интеграла  $J$  равна нулю, остается только мнимая часть.

Вычисляя этот интеграл, мы приходим к следующему выражению:

$$J = -i\Lambda^2 \arctan\left(\frac{2\Lambda\tilde{b}}{\Lambda^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2}\right) - 2i\Lambda\tilde{b} + \\ + i \cdot \left[ (\tilde{\Phi} + \tilde{b})^2 \arctan\left(\frac{\Lambda}{\tilde{\Phi} + \tilde{b}}\right) - (\tilde{\Phi} - \tilde{b})^2 \arctan\left(\frac{\Lambda}{\tilde{\Phi} - \tilde{b}}\right) \right] \quad (2.52)$$

Отсюда мы получаем окончательное выражение для уравнения щели в трехмерии:

$$\frac{\Phi}{G} - \frac{m}{G_c} = \frac{\tilde{\Phi}}{4\pi^2\tilde{b}} \left[ \Lambda^2 \arctan\left(\frac{2\Lambda\tilde{b}}{\Lambda^2 + \tilde{\Phi}^2\tilde{b}^2}\right) + 2\Lambda\tilde{b} + \right. \\ \left. + (\tilde{\Phi} - \tilde{b})^2 \arctan\left(\frac{\Lambda}{\tilde{\Phi} - \tilde{b}}\right) - (\tilde{\Phi} + \tilde{b})^2 \arctan\left(\frac{\Lambda}{\tilde{\Phi} + \tilde{b}}\right) \right] \quad (2.53)$$

Прямая проверка показывает, что это выражение, так же как и (2.44) при  $b_i \rightarrow 0$  и  $m \rightarrow 0$  переходит в соответствующее выражение для уравнения щели без нарушения лоренц-инвариантности (2.29). Кроме того, из полученного выражения для эффективного потенциала (2.40) также получается это выражение. Исследуем полученное нами выражение.

При  $\Lambda \gg \Phi; b$  мы имеем (обозначая как и прежде  $M = 2\pi\left(\frac{1}{G_c} - \frac{1}{G}\right)$ ):

1) Если  $|\Phi - m| > \tilde{b}$ , то

$$\frac{(\Phi - m)(|\Phi - m| - M)}{2\pi} - \frac{mM}{2\pi} = 0 \quad (2.54)$$

то есть в этом случае решения будут совпадать с решениями уравнения щели при действительном векторе  $\vec{b}$

2) Если  $|\Phi - m| < \tilde{b}$ , то

$$\frac{(\Phi - m)^3}{4\pi\tilde{b}} + \frac{(\Phi - m)\tilde{b}}{4\pi} + \Phi\left(\frac{1}{G} - \frac{1}{G_c}\right) = 0$$

То есть

$$\Phi^3 - 3\Phi m + \Phi(3m^2 + \tilde{b}^2 - 2M\tilde{b}) - \tilde{b}^2 m - m^3 = 0 \quad (2.55)$$

Рассмотрим сначала для простоты случай, когда  $m = 0$ .

В области  $|\Phi - m| < \tilde{b}$  уравнение щели примет вид:

$$\Phi^3 + \Phi(\tilde{b}^2 - 2M\tilde{b}) = 0 \quad (2.56)$$

Поэтому при  $M < 0$ , т.е.  $G < G_c$ , в этой области будет единственный минимум в нуле. При  $M > 0$ , т.е.  $G > G_c$ , и  $\tilde{b} < 2M$  экстремумы будут в точках (с учетом, конечно, что эти экстремумы укладываются в исходную область, т.е.  $\tilde{b} > M$ )

$$\begin{aligned} \Phi &= 0; \\ \Phi &= \pm \sqrt{2M\tilde{b} - \tilde{b}^2} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Причем в нуле в этом случае будет максимум.

При  $M > 0$  и  $\tilde{b} > 2M$  в этой области будет только минимум в нуле.

При  $|\Phi - m| > \tilde{b}$  уравнение щели перейдет в (2.29), и минимумы эффективного потенциала в этой области будут при  $\Phi_0 = 0$ , если  $G < G_c$  и  $\Phi_0 = \pm M$ , если  $G > G_c$  (при условии, что эти минимумы укладываются в исходную область, т.е.  $\tilde{b} < M$ ).

В итоге мы получаем следующую картину:

- 1) при  $G < G_c$  реализуется, как и в теории без добавки  $\tilde{b}$ , глобальный минимум при  $\Phi_0 = 0$ , т.е. теория кирально симметрична (рис. 2.4(а))
- 2) при  $G > G_c, \tilde{b} < M$   $V_{\text{эф}}$  имеет 2 минимума при  $\Phi_0 = \pm M$ , т.е. поле  $\Phi$  имеет ненулевое вакуумное среднее и киральная симметрия нарушается (рис. 2.4(б))
- 3) при  $G > G_c, M < \tilde{b} < 2M$  киральная симметрия также нарушена и вакуумное среднее равно  $\Phi_0 = \pm \sqrt{2M\tilde{b} - \tilde{b}^2}$  (рис. 2.5(а))
- 4) и наконец при  $G > G_c$  и  $\tilde{b} > 2M$ , т.е. при достаточно больших  $\tilde{b}$ , киральная симметрия восстанавливается, и снова вакуумное среднее равно нулю. (рис. 2.5(б)) В общем случае при ненулевой массе  $m$  анализ уравнения щели затрудняется тем, что нам необходимо найти нули кубического уравнения (2.55), что можно сделать в общем виде, но приводит к громоздким результатам. Детальнее эта ситуация разобрана в приложении



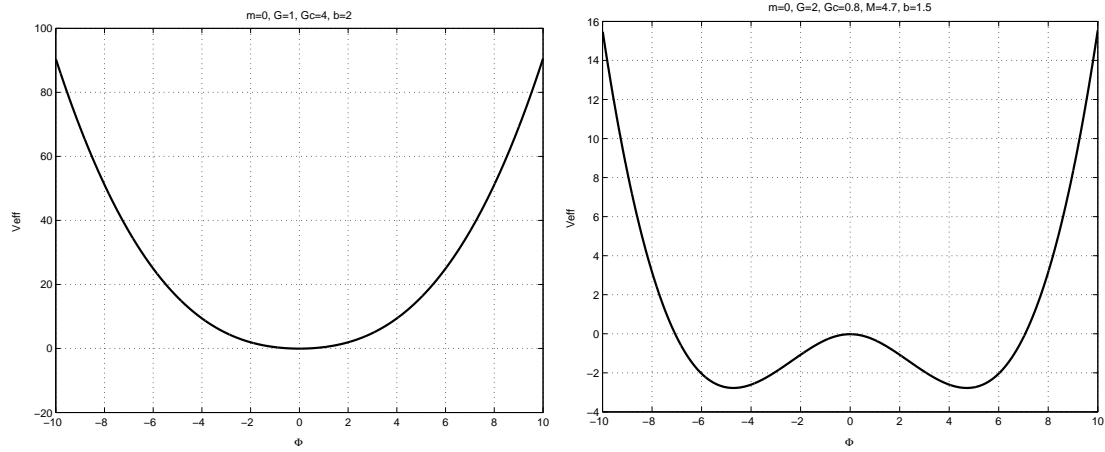


Рис. 2.4: Эффективный потенциал при мнимом  $b$ : а)  $m = 0$ ,  $G = 1$ ,  $G_c = 4$ ,  $\tilde{b} = 2$ , график имеет единственный минимум в нуле, б)  $m = 0$ ,  $G = 2$ ,  $G_c = 0.8$ ,  $M = 4.71$ ,  $\tilde{b} = 1.5 < M$  график имеет минимум при  $\Phi_0 = \pm M$

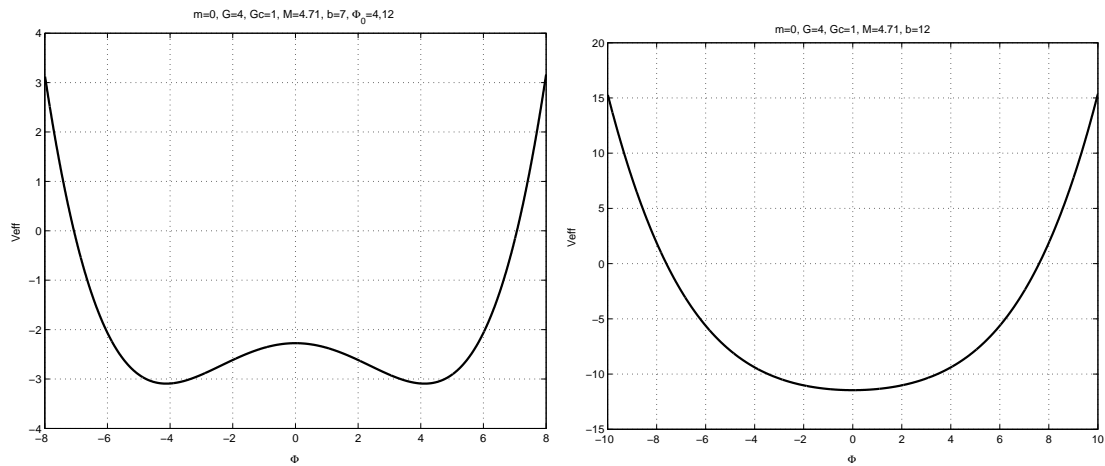


Рис. 2.5: Эффективный потенциал при мнимом  $b$ : а)  $m = 0$ ,  $G = 4$ ,  $G_c = 1$ ,  $M = 4.71$ ,  $\tilde{b} = 7$ ,  $M < \tilde{b} < 2M$ , график имеет минимум при  $\Phi_0 = \pm \sqrt{2M\tilde{b} - \tilde{b}^2} = \pm 4.12$ , б)  $m = 0$ ,  $G = 4$ ,  $G_c = 1$ ,  $M = 4.71$ ,  $\tilde{b} = 12 > 2M$ , график имеет единственный минимум в нуле

А. В результате анализа уравнения щели в этом случае получаются следующие условия, при которых киральная симметрия восстанавливается:

а)

$$\begin{cases} M < 0 \\ \tilde{b} > \sqrt{\frac{1}{4}M^2 + m|M|} - \frac{1}{2}|M| \\ \tilde{b}(\tilde{b} - 2M)^3 \geq -m^2 M^2 \\ \Phi_4 = \Phi_0 = m \end{cases} \quad (2.58)$$

б)

$$\begin{cases} M > 0 \\ \tilde{b} > \sqrt{\frac{1}{4}M^2 + mM} + \frac{1}{2}M \\ \tilde{b}(\tilde{b} - 2M)^3 \geq -m^2 M^2 \\ \Phi_4 = \Phi_0 = m \end{cases} \quad (2.59)$$

где

$$\Phi_4 = m + \text{sign}(M) \left[ A + \frac{1}{3} \cdot \frac{\tilde{b}(2M - \tilde{b})}{A} \right]$$

$$\text{и } A = \left( \tilde{b}m|M| + \sqrt{\tilde{b}^2 M^2 m^2 - \frac{\tilde{b}^3}{27}(2M - \tilde{b})^3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Из выражений (2.58), (2.59) видно, что при зафиксированных параметрах  $M, m$  восстановление киральной симметрии происходит при  $\Phi_4 = m$ , т.е. при некоторых дискретных значениях  $\tilde{b}$ . Поэтому можно сказать, что восстановление симметрии не носит системного характера, в отличие от безмассового случая, где симметрия восстанавливается при всех  $\tilde{b} > 2M$ .

## 2.5 Заключение

В данной работе рассмотрена трехмерная модель Гросса–Невё с введением массы, а также нарушающего лоренц-инвариантность члена и исследовано влияние этой добавки на киральную симметрию теории.

Показано, что появление действительного  $\vec{b}$  в лагранжиане теории дает лишь аддитивную поправку в эффективный потенциал, не влияющую на то, где находится минимум потенциала. Поэтому в присутствии массы киральная симметрия нарушается при любом  $\vec{b}$ . Если положить массу равной нулю, то в этом случае условия для нарушения киральной симметрии будут такими же, как и в статье [68], т.е. симметрия будет нарушена при  $G > G_c$ .

В случае введения комплексного  $\vec{b}$  ( $\vec{b} = i\tilde{b}$ ) эффективный потенциал будет иметь существенно другие свойства. Так, при нулевой массе  $m$ , эффективный потенциал будет иметь единственный минимум при  $G < G_c$ , как и в теории без нарушения лоренц-инвариантности. При  $G > G_c$  и  $0 < \tilde{b} < 2M$  он будет иметь два минимума, что соответствует нарушению киральной симметрии и наблюдается также в модели без нарушения лоренц-инвариантности. И при  $G > G_c$  и  $\tilde{b} > 2M$ , эффективный потенциал снова имеет один минимум при  $\Phi = 0$ , т.е. при достаточно больших значениях  $\tilde{b}$  киральная симметрия восстанавливается.

В случае, если масса ненулевая, то условия восстановления симметрии оказываются сложнее, они получены и имеют вид (2.58), (2.59). Однако, в этом случае, восстановление симметрии происходит только при каких-то определенных значениях параметров  $m$ ,  $M$ ,  $\tilde{b}$  и не носит системного характера.

## Глава 3

# Размерная редукция модели Гросса–Невё

### 3.1 Двумерная модель Гросса–Невё

Свойства трехмерной модели Гросса–Невё подробно обсуждались в предыдущей главе. В двумерии, однако, условия нарушения киральной симметрии отличаются от описанного выше случая, они будут кратко описаны далее в этой главе, для более детального их описания см. [67]. Запишем двумерное евклидово действие модели с учетом члена, нарушающего лоренц-инвариантность, в следующем виде (здесь спиноры и константа связи обозначаются маленькими буквами, чтобы отличать эту модель от трехмерной):

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int d^2x [\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu - \gamma_\mu b_\mu \gamma_3)\psi - \frac{g}{2N}(\bar{\psi}\psi)^2], \quad (3.1)$$

где  $\mu = 1, 2$ , и  $b_\mu$  – постоянный вектор, а  $\gamma$ -матрицы представлены в виде:

$$\gamma_2 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \gamma_1 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \gamma_3 = \gamma_5 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где  $\sigma_i$  – матрицы Паули.

В данном случае модель в отсутствие членов, нарушающих лоренц-инвариантность, обладает глобальной цветовой симметрией  $U(N)$ , а также симметрией относительно группы  $\mathbb{Z}(2)$ , т.е. относительно преобразо-

ваний вида:

$$\begin{aligned}\psi'_L(x) &= \pm\psi_L(x), & \bar{\psi}'_L(x) &= \mp\bar{\psi}_L(x), \\ \psi'_R(x) &= \mp\psi_R(x), & \bar{\psi}'_R(x) &= \pm\bar{\psi}_R(x),\end{aligned}\tag{3.3}$$

где

$$\psi_{R,L}(x) = \frac{1 \pm \gamma_3}{2}\psi(x), \quad \bar{\psi}_{R,L}(x) = \bar{\psi}(x)\frac{1 \mp \gamma_3}{2}.\tag{3.4}$$

### 3.1.1 Лоренц-инвариантная модель

Рассмотрим сначала свойства двумерной модели ГН в отсутствие членов, содержащих  $b_\mu$ , в лагранжиане. Проводя бозонизацию модели, используя преобразование Хаббарда–Стратоновича, аналогично преобразованию, использовавшемуся в главе 1, можно получить линейризованное действие для данной модели:

$$S[\bar{\psi}, \psi, \Phi] = \int d^2x \left[ \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi} \psi \Phi + \frac{N}{2g} \Phi^2 \right],\tag{3.5}$$

причем вакуумное ожидание  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$  предполагается ненулевым и независимым от координат:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{\delta \ln Z}{\delta \Phi} + \frac{N}{g} \langle \Phi \rangle = \frac{N}{g} \Phi_0.\tag{3.6}$$

Производящий функционал для данной модели определен, как и раньше, соотношением (2.23) с соответствующей заменой  $\Psi \rightarrow \psi$ . Вспоминая, что  $Z = \exp(-NVV_{\text{eff}}(\Phi))$ , можно, полагая поле  $\Phi$  независимой от координат константой в приближении  $N \rightarrow \infty$ , окончательно найти эффективный потенциал модели в следующем виде:

$$V_{\text{eff}}(\Phi) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \ln(k^2 + \Phi^2) + \frac{1}{2g} \Phi^2.\tag{3.7}$$

Как видно, интеграл в (3.7) логарифмически расходится. Для устранения этой расходимости вводится обрезание  $\Lambda_2$  в двумерном пространстве

импульсов. После введения обрезания мы можем получить уравнение на минимум эффективного потенциала  $\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \Phi} = 0$  в следующем виде:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{k^2 \leq \Lambda_2} d^2 k \frac{2}{k^2 + \Phi_0^2} = \frac{1}{g}. \quad (3.8)$$

В ультрафиолетовом пределе  $\Lambda_2 \gg \Phi_0$  это уравнение может быть сведено к виду:

$$\Phi_0 = m = \Lambda_2 \exp\left(-\frac{\pi}{g(\Lambda_2)}\right). \quad (3.9)$$

Данное решение уравнения щели показывает, что в  $(1+1)$ -мерной модели ГН нарушение киральной симметрии происходит при любых условиях (что отличает ее от  $(2+1)$ -мерной модели, рассмотренной в прошлой главе, где киральная симметрия нарушалась только при константе связи больше некоторого критического значения). Кроме того, такой вид  $\Phi_0$  указывает на асимптотическую свободу данной модели: для фиксированного значения  $\Phi_0$ :  $g(\Lambda_2) \rightarrow 0$  при  $\Lambda_2 \rightarrow \infty$ .

После подстановки константы связи, заданной в (3.8), в формулу для эффективного потенциала (3.7), можно получить его в следующем виде:

$$V_{\text{eff}}(\Phi) = \frac{\Phi^2}{4\pi} \left( \ln \frac{\Phi^2}{\Phi_0^2} - 1 \right). \quad (3.10)$$

Как видно, данное выражение не зависит от безразмерной константы связи  $g$ , изначально присутствовавшей в модели, однако теперь в модели появился параметр  $\Phi_0$ , имеющий размерность массы и равный массе, которую динамически приобретают фермионы. Таким образом, данная модель демонстрирует явление размерной трансмутации. Вид данного эффективного потенциала показан на рисунке 3.1.

### 3.1.2 Модель с нарушением лоренц-инвариантности

Рассмотрим данную модель в случае ненулевого значения  $b_{m\mathbf{u}}$ . Исходя из определения лагранжиана (3.1) и проводя бозонизацию так же,

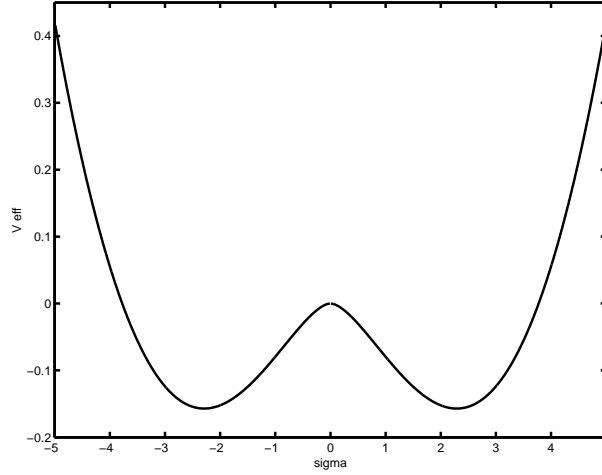


Рис. 3.1: График эффективного потенциала двумерной модели Гросса–Невё в случае ненарушенной лоренц-симметрии

как и в случае без нарушения лоренц-инвариантности, можно получить следующее выражение для производящего функционала модели:

$$Z = \int d\Phi \text{Det}(i\gamma_\mu k_\mu - \Phi - \gamma_\mu b_\mu \gamma_3) e^{-\frac{NV}{2g}\Phi^2}. \quad (3.11)$$

Снова используя соотношение  $Z = \exp(-NVV_{\text{eff}}(\Phi))$  и переходя в пространство Минковского (т.е. применяя замену  $k_1 = k^1$ ,  $k_2 = ik^0$ ,  $b_1 = -ib^1$ ,  $b_2 = b^0$ ), выражение для эффективного потенциала модели можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= -\frac{i}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \int_{-\infty}^{+\infty} dk^1 \ln(\Phi^2 + (k^1 + b^0)^2 - (k^0 + b^1)^2) + \frac{\Phi^2}{2g} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dk^1 \left( |b^1 - \sqrt{\Phi^2 + (k^1 + b^0)^2}| + |b^1 + \sqrt{\Phi^2 + (k^1 + b^0)^2}| \right) + \frac{\Phi^2}{2g}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Как и в случае лоренц-инвариантной модели, данный интеграл является логарифмически расходящимся. Для проведения регуляризации мы снова вводим параметр обрезания  $\Lambda_2$ . Продифференцировав выражение (3.12) по  $\Phi$ , можно получить условие на минимум  $V_{\text{eff}}$ :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\Lambda_2/2}^{\Lambda_2/2} \frac{dk^1}{\sqrt{\Phi^2 + (k^1 + b^0)^2}} \left( \frac{\sqrt{\Phi^2 + (k^1 + b^0)^2} - |b^1|}{||b^1| - \sqrt{\Phi^2 + (k^1 + b^0)^2}|} + 1 \right) + \frac{1}{g} = 0. \quad (3.13)$$

Анализируя подынтегральное выражение в (3.13), можно видеть, что область интегрирования разбивается на части в зависимости от значения  $b_\mu$ :

- 1) Если  $b^1 > \sqrt{\Phi^2 + (k^1 + b^0)^2}$  вклад в интеграл (3.13) равен нулю;
- 2) Если  $b^1 < \sqrt{\Phi^2 + (k^1 + b^0)^2}$ , то в пределе  $\Lambda_2 \gg b^0$ ,  $b^1$  уравнение щели примет вид:

$$\ln \frac{|b^1| - \sqrt{(b^1)^2 - \Phi^2}}{\sqrt{(\Lambda_2/2)^2 + \Phi^2} - \Lambda_2/2} - \frac{\pi}{g} = 0. \quad (3.14)$$

С учетом этого после вычислений эффективный потенциал принимает следующий вид:

$$V_{\text{eff}} = \frac{\Phi^2}{2g} - \frac{1}{2\pi} \left( |b^1| \sqrt{(b^1)^2 - \Phi^2} + \frac{\Lambda_2^2}{4} + \frac{\Phi^2}{2} + (b^0)^2 + \Phi^2 \ln(|b^1| \sqrt{(b^1)^2 - \Phi^2}) - \Phi^2 \ln \frac{\Phi^2}{\Lambda_2} \right), \quad (3.15)$$

Решение для уравнения щели (3.13) было найдено в следующем виде:

$$\bar{\Phi}^2 = 2|b^1|\Lambda_2 \exp\left(-\frac{\pi}{g}\right) - \Lambda_2^2 \exp\left(-\frac{2\pi}{g}\right) = 2b^1\Phi_0 - \Phi_0^2, \quad (3.16)$$

где  $\Phi_0$  – решение уравнения щели в лоренц-инвариантном случае (3.9). Изучение свойств функции эффективного потенциала приводит к следующим выводам:

- 1) При любом  $b^1$  уравнение на экстремум  $\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \Phi} = 0$  имеет тривиальное решение  $\bar{\Phi} = 0$ . Однако, этот экстремум может быть как максимумом, так и минимумом.
- 2) Из уравнения (3.16) можно получить условие:

$$\sqrt{(b^1)^2 - \bar{\Phi}^2} = \Phi_0 - b^1, \quad (3.17)$$

которое определяет граничное значение для величины компоненты  $b^1$  вектора, нарушающего лоренц-инвариантность:

$$|b_1| = \Phi_0. \quad (3.18)$$



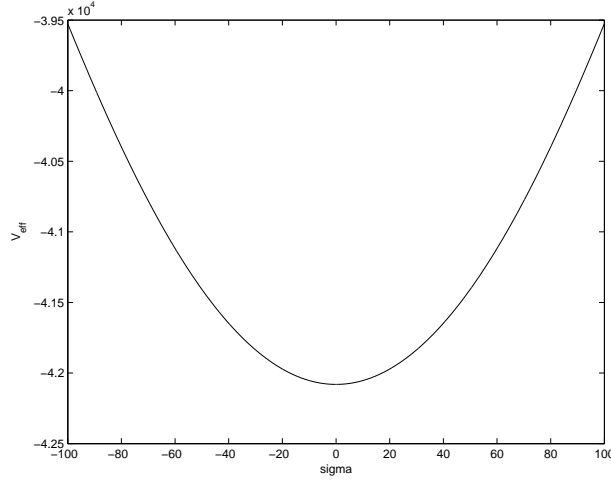


Рис. 3.2: График эффективного потенциала двумерной модели Гросса–Невё с нарушением лоренц-симметрии для значения параметра нарушения  $b^1 > \Phi_0$ , при котором наблюдается восстановление киральной симметрии

При величинах  $|b_1| < \Phi_0$  наблюдается нарушение киральной симметрии (см. рис. 3.2), при величинах  $|b_1| > \Phi_0$  – киральная симметрия восстанавливается.

Таким образом, свойства двумерной модели ГН с нарушением лоренц-инвариантности оказываются сходными со свойствами аналогичной трехмерной модели: существует критическая величина масштаба нарушения лоренц-симметрии, при котором происходит восстановление киральной симметрии. Естественным образом возникает задача о проведении размерной редукции из трех измерений в два.

### 3.2 Размерная редукция

Для проведения операции сокращения размерности, мы будем исходить из безмассовой трехмерной модели Гросса–Невё, свойства которой обсуждались в главе 2, и переходить к двумерной модели, обсужденной вкратце выше. Все обозначения для трехмерной модели взяты из главы 2 для единообразия.

### 3.2.1 Размерная редукция лоренц-инвариантной модели

Для проведения компактификации третьего измерения необходимо наложить условие, ограничивающее размер пространства вдоль него:  $x_3 \in [0, \beta]$ , что приводит к тому, что компонента импульса вдоль третьего измерения вместо непрерывной становится дискретной:

$$k_3 = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad (3.19)$$

где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Уравнение щели для трехмерной модели ГН при  $m = 0$  и без членов в лагранжиане, нарушающих лоренц-инвариантность, получаемое дифференцированием эффективного потенциала (2.27), можно записать в виде:

$$\frac{1}{G} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_1 dk_2 dk_3}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \Phi^2}. \quad (3.20)$$

После ограничения третьей координаты и дискретизации импульса получим:

$$\frac{1}{G} = \frac{2}{(2\pi)^2 \beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk_1 dk_2}{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \Phi^2}. \quad (3.21)$$

При вычислении этого выражения могут быть использованы два подхода: суммирование до взятия интеграла, как в работе [68], или в обратной последовательности. В данном случае используется первый способ. Для вычисления данной суммы можно использовать формулу суммирования Пуассона, результат вычисления записывается в виде (подробное вычисление ряда дано в приложении В):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \Phi^2} = \frac{\beta \coth\left(\frac{\beta}{2} \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \Phi^2}\right)}{2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \Phi^2}}. \quad (3.22)$$

Используя это соотношение, получим:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{4\pi} \int d(k^2) \frac{\coth\left(\frac{\beta}{2} \sqrt{k^2 + \Phi^2}\right)}{\sqrt{k^2 + \Phi^2}},$$

где  $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  берется из интервала  $k \in [0, \Lambda_2]$ , где  $\Lambda_2$  – параметр обрезания в двумерном импульсном пространстве, фигурировавший ранее. Результат интегрирования записывается в виде:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{\pi\beta} \ln \left( \frac{\sinh \frac{\beta}{2} \sqrt{\Lambda_2^2 + \Phi^2}}{\sinh \frac{\beta|\Phi|}{2}} \right). \quad (3.23)$$

Полагая, что все параметры модели значительно меньше масштаба обрезания –  $\Lambda_2 \gg \Phi$ , можно получить следующее приближение для уравнения щели:

$$\sinh \frac{\beta|\Phi|}{2} = \frac{1}{2} \exp \left[ \pi\beta \left( \frac{\Lambda_2}{2\pi} - \frac{1}{G} \right) \right]. \quad (3.24)$$

Последнее выражение в случае  $\beta \rightarrow \infty$  дает соответствие между  $\Lambda_2$  и  $\frac{1}{G_c}$ :

$$\frac{\Lambda_2}{2\pi} = \frac{\Lambda_3}{\pi^2} = \frac{1}{G_c}. \quad (3.25)$$

При условии  $\beta\Phi \ll 1$ , выражение (3.24) приобретает вид:

$$|\Phi| = \frac{1}{\beta} \exp \left[ \pi\beta \left( \frac{1}{G_c} - \frac{1}{G} \right) \right]. \quad (3.26)$$

При отождествлении  $\frac{1}{\beta}$  с импульсом обрезания  $\Lambda_2$  это выражение соответствует решению уравнения щели в двумерии (3.9), где константа связи  $g$  принимает вид:

$$g = \left[ \beta \left( \frac{1}{G} - \frac{1}{G_c} \right) \right]^{-1} \quad (3.27)$$

### 3.2.2 Размерная редукция модели с нарушением лоренц-инвариантности

Рассмотрим уравнение щели трехмерной модели, полагая  $m = 0$  и  $b_3 = 0$ :

$$\frac{1}{G} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{(k_1 - b_1)^2 + (k_2 - b_2)^2 + k_3^2 + \Phi^2}. \quad (3.28)$$

Для установления соответствия с двумерным случаем необходимо положить:

$$\begin{aligned} b_1^{(3d)} &= -b_2^{(2d)} = -b^0; \\ b_2^{(3d)} &= b_1^{(2d)} = -ib^1, \end{aligned} \quad (3.29)$$

здесь  $b^0, b^1 \in Re$ .

Проводя компактификацию по третьему измерению так же, как это было сделано для случая без нарушения лоренц-инвариантности, получим:

$$\frac{1}{G} = \frac{2}{(2\pi)^2\beta} \sum_n K_n, \quad (3.30)$$

где

$$K_n = \int \frac{dk_1 dk_2}{(k_1 + b^0)^2 + (k_2 + ib^1)^2 + (\frac{2\pi n}{\beta})^2 + \Phi^2}. \quad (3.31)$$

Для взятия интеграла по  $k_2$  мы замыкаем сверху путь интегрирования в комплексной плоскости переменной  $k_2$ , в результате мы получаем:

1) Если  $\beta|b^1| < \sqrt{f^2 + H_n^2}$

$$K_n = \pi \int_{-\frac{\Lambda}{2} + b^0}^{\frac{\Lambda}{2} + b^0} \frac{d\tilde{k}_1}{\sqrt{\Phi^2 + \tilde{k}_1^2 + \frac{2\pi n}{\beta}}}. \quad (3.32)$$

2) Если  $\beta|b^1| > \sqrt{f^2 + H_n^2}$

$$K_n = \pi \left[ \int_{-\frac{\Lambda}{2} + b^0}^{\sqrt{(b^1)^2 - \Phi^2 - (\frac{H_n}{\beta})^2}} \frac{d\tilde{k}_1}{\sqrt{\Phi^2 + \tilde{k}_1^2 + (\frac{H_n}{\beta})^2}} - \int_{-\sqrt{(b^1)^2 - \Phi^2 - (\frac{H_n}{\beta})^2}}^{\frac{\Lambda}{2} + b^0} \frac{d\tilde{k}_1}{\sqrt{\Phi^2 + \tilde{k}_1^2 + (\frac{H_n}{\beta})^2}} \right]. \quad (3.33)$$

Здесь  $f = \beta\Phi$ ,  $H_n = 2\pi n$ ,  $\tilde{k}_1 = k_1 + b^0$  и  $\Lambda$  – обрезание по импульсам, которое, в общем случае, не равно  $\Lambda_2$ .

После вычислений уравнение щели принимает вид:

1) При  $|b^1| < |\Phi|$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi\beta} \sum_n A_n, \quad (3.34)$$

2) При  $|b^1| > |\Phi|$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi\beta} \left[ \sum_{|n| \leq n_{max}} B_n + \sum_{|n| > n_{max}} A_n \right]. \quad (3.35)$$

Здесь

$$A_n = -\ln(f^2 + H_n^2) + \ln \left( \beta \left( \frac{\Lambda}{2} - b^0 \right) + \sqrt{\beta^2 \left( \frac{\Lambda}{2} - b^0 \right)^2 + (H_n)^2 + f^2} \right) + \\ \ln \left( \beta \left( \frac{\Lambda}{2} + b^0 \right) + \sqrt{\beta^2 \left( \frac{\Lambda}{2} + b^0 \right)^2 + (H_n)^2 + f^2} \right), \quad (3.36)$$

$$B_n = \ln \left( \beta \left( \frac{\Lambda}{2} - b^0 \right) + \sqrt{\beta^2 \left( \frac{\Lambda}{2} - b^0 \right)^2 + (H_n)^2 + f^2} \right) + \\ + \ln \left( \beta \left( \frac{\Lambda}{2} + b^0 \right) + \sqrt{\beta^2 \left( \frac{\Lambda}{2} + b^0 \right)^2 + (H_n)^2 + f^2} \right) - 2 \ln \left( \beta |b^1| + \sqrt{(\beta b^1)^2 - f^2 - H_n^2} \right) \quad (3.37)$$

и  $n_{max}$  возникает из условия  $|b^1| < \sqrt{\Phi^2 + \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2}$ , то есть  $n \leq n_{max}$ .

Существующие строгие экспериментальные ограничения на величины компонент  $b_\mu$ , приводят к естественному соотношению:  $\beta|b^1| \ll 2\pi$ , так что условие, приведенное выше, нарушается уже при  $n = 1$ , следовательно,  $n_{max} = 0$ .

Отметим, что для установления соответствия с лоренц-инвариантной моделью в выражениях (3.34), (3.35), необходимо выбрать подходящие конечные пределы суммирования. Это связано с тем, что при нахождении уравнения щели для  $b = 0$  мы полагали, что оба импульса ограничены параметром обрезания  $\Lambda_2$  ( $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \in [0, \Lambda_2]$ ), в то время как при  $b \neq 0$  интеграл по  $k_2$  брался замыканием контура интегрирования в комплексной плоскости, т.е. пределы интегрирования брались бесконечными.

Кроме того, для того, чтобы упростить дальнейшие вычисления, заметим, что в выражениях для  $A_n$  и  $B_n$  параметр  $b^0$  всегда встречается рядом с параметром обрезания  $\Lambda$ , который значительно больше. Таким образом, можно ожидать, что  $b^0$  даст исчезающе малый вклад в конечное выражение для уравнения щели. Действительно, разложим оба логарифма в выражениях (3.36) и (3.37), которые содержат  $b^0$ , по малому параметру  $\frac{b^0}{\Lambda}$ :

$$\begin{aligned} & \ln \left( \beta \left( \frac{\Lambda}{2} - b^0 \right) + \sqrt{\beta^2 \left( \frac{\Lambda}{2} - b^0 \right)^2 + H_n^2 + f^2} \right) + \\ & + \ln \left( \beta \left( \frac{\Lambda}{2} + b^0 \right) + \sqrt{\beta^2 \left( \frac{\Lambda}{2} + b^0 \right)^2 + H_n^2 + f^2} \right) = \\ & = 2 \ln \left( \frac{\beta \Lambda}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2 \Lambda^2}{4} + f^2 + H_n^2} \right) + Q_n + o \left( \left( \frac{b^0}{\Lambda} \right)^4 \right), \end{aligned} \quad (3.38)$$

где

$$\begin{aligned} Q_n &= - \frac{(b^0)^2 \Lambda \beta^3}{2 \sqrt{\frac{\beta^2 \Lambda^2}{4} + f^2 + H_n^2}} \left( 1 + \frac{\beta \Lambda}{\sqrt{\frac{\beta^2 \Lambda^2}{4} + f^2 + H_n^2}} \right) \left( 3 + \frac{\beta \Lambda}{\sqrt{\frac{\beta^2 \Lambda^2}{4} + f^2 + H_n^2}} \right) = \\ &= o \left( \left( \frac{b^0}{\Lambda} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

При суммировании в конечных пределах вкладами  $Q$  и членов более высокого порядка по  $\frac{b^0}{\Lambda}$  можно пренебречь, таким образом в результирующее выражение для уравнения щели величина  $b^0$  входить не будет.

Аналогичным образом, логарифмы в тех же выражениях (3.36) и (3.37) можно разложить по малой величине  $\frac{\Phi}{\Lambda}$ , поскольку  $|f| \ll \beta \Lambda$ . Проводя это разложение, получим:

$$\begin{aligned} & \ln \left( \beta \left( \frac{\Lambda}{2} - b^0 \right) + \sqrt{\beta^2 \left( \frac{\Lambda}{2} - b^0 \right)^2 + (H_n)^2 + f^2} \right) + \\ & + \ln \left( \beta \left( \frac{\Lambda}{2} + b^0 \right) + \sqrt{\beta^2 \left( \frac{\Lambda}{2} + b^0 \right)^2 + (H_n)^2 + f^2} \right) = \\ & = 2 \ln \left( \frac{\beta \Lambda}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2 \Lambda^2}{4} + H_n^2} \right) + o \left( \left( \frac{b^0}{\Lambda} \right)^2 \right) + o \left( \left( \frac{\Phi}{\Lambda} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Теперь рассмотрим первый член в выражении для  $A_n$  (3.36). Поскольку величина  $b_\mu$  мала, разумно предположить следующее приближение для величины  $f$ :  $f = \beta\Phi \ll 1$ . Поэтому можно разложить (3.36) по малой величине  $f$ , что даст (при  $n \neq 0$ ):

$$\ln(f^2 + H_n^2) = \ln H_n^2 + \frac{f^2}{H_n^2} + \frac{f^4}{H_n^4} + \dots \quad (3.41)$$

Выражение вида  $\sum_{n \neq 0} \frac{1}{H_n^{2k}}$  конечно даже при бесконечных пределах суммирования и тем более конечно, если эти пределы ограничены.

В итоге уравнения щели в описанном приближении:  $b_0 \ll \Lambda$ ,  $f = \beta\Phi \ll 1$ ,  $|f| \ll \beta\Lambda$ , имеют вид:

1) Если  $|b^1| < |\Phi|$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{\pi\beta} \left( Y - \frac{1}{2} \ln f^2 \right), \quad (3.42)$$

2) Если  $|b^1| > |\Phi|$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{\pi\beta} \left( Y - \ln(\beta|b^1| + \sqrt{(\beta b^1)^2 - f^2}) \right), \quad (3.43)$$

где

$$Y = \sum_n^{|n| \leq N} \ln \left( \frac{\beta\Lambda}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2\Lambda^2}{4} + H_n^2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0}^{|n| \leq N} \ln H_n^2 + o\left(\left(\frac{b^0}{\Lambda}\right)^2\right) + o\left(\left(\frac{\Phi}{\Lambda}\right)^2\right) + o(f^2). \quad (3.44)$$

При подходящем выборе предела суммирования данное уравнение должно перейти в уравнение щели, полученное для лоренц-инвариантного случая (2.29) при  $b^1 = 0$ . Для этого параметры  $N$  и  $\Lambda$  должны быть выбраны так, чтобы выполнялось условие:

$$Y = \frac{\beta\Lambda_2}{2}, \quad (3.45)$$

где  $\Lambda_2$  соответствует параметру обрезания в двумерной модели Гросса–Невё. В приложении В показаны вычисления для более удобного выбора этих параметров.

Для решения уравнения щели получим (как и прежде мы используем соотношения  $\frac{\Lambda_2}{2\pi} = \frac{\Lambda_3}{\pi^2} = \frac{1}{G_c}$ , и для константы связи используем выражение (3.27)):

1) Если  $|b^1| < |\Phi|$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{\pi\beta} \left( \frac{\beta\Lambda_2}{2} - \frac{1}{2} \ln f^2 \right),$$

откуда следует:

$$|\Phi| = \frac{1}{\beta} \exp \left[ \pi\beta \left( \frac{1}{G_c} - \frac{1}{G} \right) \right] = \frac{1}{\beta} \exp \left( -\frac{\pi}{g} \right). \quad (3.46)$$

2) Если  $|b^1| > |\Phi|$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{\pi\beta} \left( \frac{\beta\Lambda_2}{2} - \ln (\beta|b^1| + \sqrt{(\beta b^1)^2 - f^2}) \right),$$

откуда следует:

$$|\Phi|^2 = \frac{2|b^1|}{\beta} \exp \left( -\frac{\pi}{g} \right) - \frac{1}{\beta^2} \exp \left( -\frac{2\pi}{g} \right) \quad (3.47)$$

Видно, что (3.46), (3.47) совпадают с решением двумерного уравнения щели модели с нарушенной лоренц-инвариантностью (3.16), где  $\frac{1}{\beta}$  — играет роль обрезания по импульсам, так же как и в лоренц-инвариантном случае.

### 3.3 Заключение

В данной главе были обсуждены основные свойства двумерной модели Гросса–Невё в присутствии членов, нарушающих лоренц-инвариантность, а также без них. Показаны основные сходства и различия этой модели и трехмерной модели. Одним из сходств является наличие критического масштаба нарушения лоренц-инвариантности, при котором киральная симметрия модели восстанавливается. Путем компактификации по третьему измерению, установлено соответствие между результатами, полученными для разного числа измерений, найдены требуемые для этого соотношения между параметрами моделей.



## Глава 4

# Волны киральной и пионной плотности в плотной кварковой среде

### 4.1 Исследуемая модель

В данной главе исследуется  $(1+1)$ -мерная модель Намбу–Йона-Лазинию с двумя ароматами кварков ( $u$  и  $d$  - кварки, которые считаются безмассовыми) с лагранжианом вида:

$$\mathcal{L} = \bar{q}[\gamma^\rho i\partial_\rho + \mu\gamma^0 + \frac{\mu_I}{2}\tau_3\gamma^0]q + \frac{G}{N_c}[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma^5\vec{\tau}q)^2]. \quad (4.1)$$

Здесь  $\gamma$ -матрицы являются матрицами  $2 \times 2$  и выбраны следующим образом:  $\gamma^0 = \sigma_2, \gamma^1 = i\sigma_1, \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_3$ , а спинор  $q$  является дублетом по аромату и  $N_c$ -плетом по цветам ( $q = q_{i,\alpha}$ , где  $i = 1, 2$  или  $i = u, d$ , и  $\alpha = 1, \dots, N_c$ ). Матрицы Паули  $\tau_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) действуют в пространстве ароматов. В (4.1) подразумевается сумма по индексам цвета и аромата, а также по спинорным индексам. Присутствие в лагранжиане химического потенциала  $\mu$  отвечает за ненулевую барионную плотность кварковой материи, а введение изотопического химического потенциала  $\mu_I$  позволяет исследовать кварковую материю с различной плотностью  $u$  и  $d$  - кварков (т.е. материю с изотопической асимметрией). В дальнейшем рассмотрении мы будем для удобства использовать величину  $\nu = \frac{\mu_I}{2}$  вместо исходного изотопического химпотенциала.

Данную модель можно рассматривать как обобщение  $(1+1)$ -мерной

модели Гросса–Невё [7] с наличием дополнительного типа взаимодействия вида  $(\bar{q}i\gamma^5\vec{\tau}q)^2$ , химических потенциалов и с двумя ароматами кварков. Лагранжиан (4.1) обладает симметрией относительно преобразований четности, и благодаря этим добавкам по сравнению с обычной моделью ГН данная модель (4.1) обладает более сложной группой киральной симметрии – ее лагранжиан симметричен относительно глобальной группы  $SU(N_c)$ , а также при  $\mu_I = 0$  он обладает симметрией относительно киральной группы  $SU_L(2) \times SU_R(2)$ , но при  $\mu_I \neq 0$  она сокращается до  $U_{I_3L}(1) \times U_{I_3R}(1)$ , где  $I_3 = \tau_3/2$ , а символы  $R, L$  означают действие только на левые и правые спиноры соответственно. Данная симметрия эквивалентна симметрии относительно группы  $U_{I_3}(1) \times U_{AI_3}(1)$ , где  $U_{I_3}(1)$ ,  $U_{AI_3}(1)$  означают изоспиновую и аксиально изоспиновую группы соответственно. Под действием этих групп спиноры преобразуются следующим образом:

$$U_{I_3}(1) : q \rightarrow \exp(i\alpha\tau_3)q; \quad U_{AI_3}(1) : q \rightarrow \exp(i\alpha\gamma^5\tau_3)q. \quad (4.2)$$

Также отметим, что при разложении в ряд Тейлора данных экспонент легко получить:

$$\exp(i\alpha\tau_3) = \cos \alpha + i\tau_3 \sin \alpha; \quad \exp(i\alpha\gamma^5\tau_3) = \cos \alpha + i\gamma^5\tau_3 \sin \alpha. \quad (4.3)$$

Бозонизация данной модели может быть сделана таким же образом, как это было сделано для случая трехмерной модели ГН (см. формулу (2.20) в главе 2). Отличие заключается в том, что в данном случае потребуются введение нескольких бозонных полей, которые можно определить следующим образом:

$$\sigma(x) = -2\frac{G}{N_c}(\bar{q}q); \quad \pi_a(x) = -2\frac{G}{N_c}(\bar{q}i\gamma^5\tau_a q). \quad (4.4)$$

С введением этих полей лагранжиан модели (4.1) запишется в виде:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \bar{q}[\gamma^\rho i\partial_\rho + \mu\gamma^0 + \nu\tau_3\gamma^0 - \sigma - i\gamma^5\pi_a\tau_a]q - \frac{N_c}{4G}[\sigma^2 + \pi_a^2]. \quad (4.5)$$

Из (4.4) и (4.3) можно получить, что преобразование введенных бозонных полей относительно группы симметрий  $U_{I_3L}(1) \times U_{I_3R}(1)$  запишется в

виде:

$$\begin{aligned}
 U_{I_3}(1) : \quad & \sigma \rightarrow \sigma; \quad \pi_3 \rightarrow \pi_3; \\
 & \pi_1 \rightarrow \cos(2\alpha)\pi_1 + \sin(2\alpha)\pi_2; \quad \pi_2 \rightarrow \cos(2\alpha)\pi_2 - \sin(2\alpha)\pi_1, \\
 U_{AI_3}(1) : \quad & \sigma \rightarrow \cos(2\alpha)\sigma + \sin(2\alpha)\pi_3; \quad \pi_3 \rightarrow \cos(2\alpha)\pi_3 - \sin(2\alpha)\sigma; \\
 & \pi_1 \rightarrow \pi_1; \quad \pi_2 \rightarrow \pi_2.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Из лагранжиана в форме (4.5) можно получить эффективное действие модели  $\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma, \pi_a)$  в приближении одной фермионной петли (что соответствует приближению больших  $N_c$ , см. [6] и обсуждение в главе 1).

$$\exp(i\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma, \pi_a)) = N' \int [d\bar{q}][dq] \exp\left(i \int \tilde{L} d^2x\right), \tag{4.7}$$

где  $N'$  – нормировочная константа.

В данном выражении можно отделить вклад в эффективное действие от кварков и от введенных бозонных полей:

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma, \pi_a) = -N_c \int d^2x \left[ \frac{\sigma^2 + \pi_a^2}{4G} \right] + \tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}, \tag{4.8}$$

где  $\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}$  – вклад кварков, остальная часть – вклад только бозонных полей, и упомянутая величина  $\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}$  задается выражением:

$$\exp(i\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}) = N' \int [d\bar{q}][dq] \exp\left(i \int \left\{ \bar{q}[\gamma^\rho i\partial_\rho + \mu\gamma^0 + \nu\tau_3\gamma^0 - \sigma - i\gamma^5\pi_a\tau_a]q \right\} d^2x\right). \tag{4.9}$$

Как и ранее в главах 2 и 3, средние по вакууму величины  $\sigma(x)$  и  $\pi_a(x)$  определяются исходя из условий экстремума эффективного действия:

$$\frac{\delta\mathcal{S}_{\text{eff}}}{\delta\sigma(x)} = 0, \quad \frac{\delta\mathcal{S}_{\text{eff}}}{\delta\pi_a(x)} = 0, \tag{4.10}$$

где  $a = 1, 2, 3$ . В случае, если описывается среда с нулевой плотностью частиц, вакуумные средние  $\sigma(x)$  и  $\pi_a(x)$  не должны зависеть от координат, однако в присутствии химических потенциалов  $\mu$  и  $\mu_I$ , т.е. в моделях, описывающих плотную кварковую среду – такая зависимость может проявиться.

## 4.2 Волны киральной плотности

### 4.2.1 Термодинамический потенциал модели

В данном разделе будет исследован один из типов зависимости конденсатов от координат – анзац для кварк-кварковых конденсатов будет выбран в виде, который допускает возникновение киральных волн плотности (КВП):

$$\sigma(x) = M \cos(2bx), \quad \pi_3(x) = M \sin(2bx), \quad \pi_1(x) = \Delta, \quad \pi_2(x) = 0, \quad (4.11)$$

где  $M, b$  и  $\Delta$  – постоянные величины. Они являются точками глобального минимума функции термодинамического потенциала  $\Omega(M, b, \Delta)$  (ТДП), который является аналогом эффективного потенциала  $V_{\text{eff}}$  в моделях, описывающих среду с нулевой плотностью кварков. Как и  $V_{\text{eff}}$ , ТДП определяется следующим образом:

$$\int d^2x \Omega(M, b, \Delta) = -\frac{1}{N_c} \mathcal{S}_{\text{eff}}\{\sigma(x), \pi_a(x)\} \Big|_{\sigma(x)=\sigma(x), \pi_a(x)=\pi_a(x)}. \quad (4.12)$$

Подставляя сюда выражение для эффективного действия (4.8), получим:

$$i \int d^2x \Omega(M, b, \Delta) = i \int d^2x \frac{M^2 + \Delta^2}{4G} - \frac{1}{N_c} \ln \left( \int [d\bar{q}][dq] \exp \left( i \int d^2x \bar{q} \mathcal{D} q \right) \right), \quad (4.13)$$

где

$$\mathcal{D} = \gamma^\rho i \partial_\rho + \mu \gamma^0 + \nu \tau_3 \gamma^0 - M \exp(2i\gamma^5 \tau_3 bx) - i\gamma^5 \tau_1 \Delta. \quad (4.14)$$

Как видно, в выражении для  $\mathcal{D}$  присутствуют члены, зависящие от координат, что усложняет вычисления. Эти сложности можно обойти, сделав поворот спиноров (так называемое преобразование Вайнберга):

$$q_w = \exp(i\gamma^5 \tau_3 bx) q; \quad \bar{q}_w = \bar{q} \exp(i\gamma^5 \tau_3 bx). \quad (4.15)$$

После введения определенных таким образом новых спинорных полей, мы получим:

$$\bar{q} \mathcal{D} q = \bar{q}_w \left[ \gamma^\rho i \partial_\rho + \mu \gamma^0 + (b + \nu) \tau_3 \gamma^0 - M - i\gamma^5 \tau_1 \Delta \right] q_w \equiv \bar{q}_w D q_w, \quad (4.16)$$

где  $D$  – новый оператор, не зависящий от координат:

$$D = \gamma^\rho i \partial_\rho + \mu \gamma^0 + (b + \nu) \tau_3 \gamma^0 - M - i \gamma^5 \tau_1 \Delta. \quad (4.17)$$

Данное преобразование требует небольшого комментария: в работе Фуджикавы [69] показано, что при наличии калибровочного поля, взаимодействующего со спинорами, преобразования такого рода могут изменить меру в континуальном интеграле, однако, если калибровочное поле равно 0, т.е. отсутствует (как в исследуемой модели), такого изменения не происходит. Поэтому выражение (4.13) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Omega(M, b, \Delta) &= \frac{M^2 + \Delta^2}{4G} + i \frac{\text{Tr}_{sfx} \ln D}{N_c \int d^2x} = \\ &= \frac{M^2 + \Delta^2}{4G} + i \text{Tr}_{sf} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln \left( \not{p} + \mu \gamma^0 + (b + \nu) \tau_3 \gamma^0 - M - i \gamma^5 \Delta \tau_1 \right), \end{aligned} \quad (4.18)$$

где оператор  $\text{Tr}_{sfx}$  подразумевает взятие следа по спинорным индексам, индексам ароматов и взятие интеграла в пространстве координат  $x$ , а оператор  $\text{Tr}_{sf}$  – взятие следа только по спинорным индексам и индексам ароматов. Ход дальнейших вычислений достаточно стандартен, его можно найти, например в [70–72]. Спектр энергий кварков находится из условия  $\det D = 0$ :

$$E_\Delta^\pm = \sqrt{(E^\pm)^2 + \Delta^2}, \quad E^\pm = E \pm (b + \nu), \quad E = \sqrt{p_1^2 + M^2}. \quad (4.19)$$

Используя этот результат можно прийти к следующему выражению для ТДП:

$$\begin{aligned} \Omega(M, b, \Delta) &= \frac{M^2 + \Delta^2}{4G} + \\ &+ i \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln \left\{ \left( (p_0 + \mu)^2 - (E_\Delta^+)^2 \right) \left( (p_0 + \mu)^2 - (E_\Delta^-)^2 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

В выражении (4.21) можно без ограничений общности положить  $\mu \geq 0$ ,  $(b + \nu) \geq 0$ , т.к. оно симметрично относительно замены  $\mu \rightarrow -\mu$  и  $(b + \nu) \rightarrow$

$-(b + \nu)$ . Вычисляя интеграл по  $p_0$  в выражении (4.21), мы получаем выражение для термодинамического потенциала в виде:

$$\begin{aligned} \Omega(M, b, \Delta) = & \frac{M^2 + \Delta^2}{4G} - \int_0^\infty \frac{dp_1}{\pi} \{E_\Delta^+ + E_\Delta^- \\ & + (\mu - E_\Delta^+) \theta(\mu - E_\Delta^+) + (\mu - E_\Delta^-) \theta(\mu - E_\Delta^-)\}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

здесь  $\theta(x)$  – функция Хевисайда.

#### 4.2.2 Однородный киральный конденсат, $b = 0$

Рассмотрим сначала модель в отсутствие химических потенциалов (вакуумный случай). При  $\mu = 0, \mu_I = 0$  четность в КХД не нарушена, и такое же требование должно быть наложено на все модели, описывающие процессы с участием сильного взаимодействия, в том числе и исследуемая модель. Поэтому мы можем также положить  $\Delta = 0$ . Наложим также дополнительное условие однородности для кирального конденсата ( $b = 0$ ), что также является естественным предположением для вакуумного случая. В таких приближениях исследуемая модель совпадает с исходной моделью НЙЛ в (1+1)-мерии, а эффективный потенциал для нее может быть получен из (4.21), полагая  $\Delta = 0, b = 0, \mu = 0, \mu_I = 0$ :

$$V_0(M) = \frac{M^2}{4G} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dp_1 \sqrt{p_1^2 + M^2}. \quad (4.22)$$

Интеграл в 4.22 является расходящимся в ультрафиолетовой области и нуждается в перенормировке. Для того, чтобы перенормировать  $V_0(M)$ , сначала надо провести его регуляризацию, т.е. выделить явно расходимость данного выражения. Мы делаем это как и прежде при помощи обрезания области интегрирования по импульсам:  $p_1 < \Lambda$ . Далее, мы полагаем, что голая константа связи  $G$  в выражении (4.22) зависит от параметра обрезания  $\Lambda$  ( $G \equiv G(\Lambda)$ ) таким образом, что при устремлении  $\Lambda$  к бесконечности выражение 4.22 становится конечным. Для того, чтобы найти вид зависимости  $G(\Lambda)$ , предположим, что уравнение  $\partial V_0(M)/\partial M = 0$  имеет нетривиальное решение  $M_0$  (то есть что  $V_0(M)$

имеет экстремум в точке  $M_0$ ), тогда исходя из этого условия получим:

$$\frac{1}{2G(\Lambda)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\Lambda dp_1 \frac{1}{\sqrt{M_0^2 + p_1^2}} = \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{\Lambda + \sqrt{M_0^2 + \Lambda^2}}{M_0} \right). \quad (4.23)$$

Подставляя полученное выражение для  $G(\Lambda)$  в (4.22), добавляя туда константу  $\Lambda^2/\pi$ , которая не вносит зависимости от  $M$  в выражение для эффективного потенциала, а потому не меняет его физического смысла, а также используя предел  $\Lambda \rightarrow \infty$ , получим:

$$\begin{aligned} V_0(M) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \frac{M^2}{4G(\Lambda)} - \frac{2}{\pi} \int_0^\Lambda dp_1 \sqrt{p_1^2 + M^2} + \frac{\Lambda^2}{\pi} \right\} = \\ &= \frac{M^2}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{M^2}{M_0^2} \right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Поскольку  $M_0$  можно рассматривать как свободный параметр теории, то из конечного вида для эффективного потенциала (4.24) можно заключить, что перенормировка данной модели сопровождается размерной трансмутацией, так же как было в двумерной модели Гросса–Невё (см. главу 3). Таким образом после перенормировки данная модель характеризуется не безразмерной константой связи  $G$ , которая была свободным параметром изначально, но массивным параметром  $M_0$ . Из вида эффективного потенциала (4.24) следует, что величина  $M = M_0$  реализует минимум  $V_0(M)$ , и, таким образом, киральная симметрия  $SU_L(2) \times SU_R(2)$  всегда нарушена, а  $M_0$  является динамической массой кварков.

Если рассмотреть другой частный случай модели –  $\mu \neq 0, \mu_I = 0$  – то есть плотная кварковая среда с изоспиновой симметрией, то при  $\mu > M_0/\sqrt{2}$  будет наблюдаться кирально-симметричная фаза с ненулевой плотностью кварковой материи, при  $\mu < M_0/\sqrt{2}$  киральная симметрия нарушается, и кварки приобретают массу, при этом барионная плотность становится равной 0. Данные результаты получены в работах [73–77].

Для изучения фазового портрета модели в общем случае – при  $\mu \neq 0, \mu_I \neq 0$  – рассмотрим ТДП, найденный для общего случая (4.21), и

положим в нем  $b = 0$ . Кроме того, заметим, что при  $\mu_I \neq 0$  возможно образование заряженного пионного конденсата, поэтому мы должны рассмотреть случай  $\Delta \neq 0$ . В выражении (4.21) введем также обрезание по импульсам  $\Lambda$ , т.к. интеграл, содержащийся в нем расходится в ультрафиолетовой области. С учетом сказанного выше, ТДП запишется в виде:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{reg}}(M, b = 0, \Delta) = & \frac{M^2 + \Delta^2}{4G} - \int_0^\Lambda \frac{dp_1}{\pi} \{ \mathcal{E}_\Delta^+ + \mathcal{E}_\Delta^- \} - \\ & - \int_0^\infty \frac{dp_1}{\pi} \{ (\mu - \mathcal{E}_\Delta^+) \theta(\mu - \mathcal{E}_\Delta^+) + (\mu - \mathcal{E}_\Delta^-) \theta(\mu - \mathcal{E}_\Delta^-) \}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где

$$\mathcal{E}_\Delta^\pm = E_\Delta^\pm|_{b=0}. \quad (4.26)$$

Благодаря наличию  $\theta$ -функций второй интеграл в (4.25) имеет конечную область интегрирования, поэтому он конечен и не нуждается в регуляризации. Аналогично вакуумному случаю, для проведения перенормировки в данном случае требуется ввести зависимость константы связи от масштаба обрезания:  $G \rightarrow G(\Lambda)$ , данное выражение дано в (4.23). Проводя такую замену и устремляя  $\Lambda$  к бесконечности, получим:

$$\Omega(M, \Delta) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \Omega_{\text{reg}}(M, b = 0, \Delta) \Big|_{G \rightarrow G(\Lambda)} + \frac{\Lambda^2}{\pi} \right\}. \quad (4.27)$$

Данное выражение можно переписать, используя определение для эффективного потенциала в вакууме (4.24):

$$\begin{aligned} \Omega(M, \Delta) = & V_0(\sqrt{M^2 + \Delta^2}) - \int_0^\infty \frac{dp_1}{\pi} \{ \mathcal{E}_\Delta^+ + \mathcal{E}_\Delta^- - 2\sqrt{p_1^2 + M^2 + \Delta^2} \} \\ & - \int_0^\infty \frac{dp_1}{\pi} \{ (\mu - \mathcal{E}_\Delta^+) \theta(\mu - \mathcal{E}_\Delta^+) + (\mu - \mathcal{E}_\Delta^-) \theta(\mu - \mathcal{E}_\Delta^-) \}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

где функция  $V_0(x)$  определена по формуле (4.24)). Оба интеграла в выражении (4.28) являются сходящимися. Сходимость второго интеграла



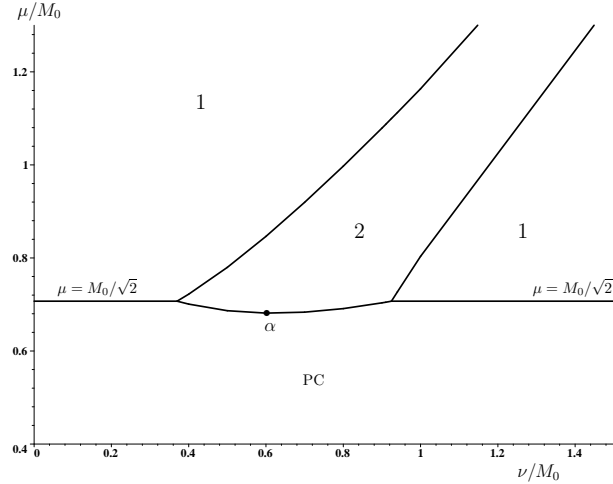


Рис. 4.1: Фазовый портрет (1+1)-мерной модели НЙЛ в координатах  $(\mu, \nu)$  при  $T = 0$  и  $\nu > 0$ . Конденсаты предполагаются однородными. Здесь  $\nu = \frac{\mu}{2}$  и  $M_0$  – динамическая масса кварков в вакууме. Фаза 1 – кирально симметричная фаза, масса кварков равна 0; Фаза 2 – фаза нормальной кварковой материи с массивными кварками; РС – фаза заряженной однородной пионной конденсации. Точка  $\alpha$  – низшая точка фазы 2 ( $\mu_\alpha \approx 0.68M_0$ ,  $\nu_\alpha \approx 0.6M_0$ )

обсуждалась сразу после формулы (4.25)), а первый интеграл также сходится и по определению равен:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dp_1 \left[ \mathcal{E}_\Delta^+ + \mathcal{E}_\Delta^- - 2\sqrt{p_1^2 + M^2 + \Delta^2} \right] = \\ & = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^\Lambda dp_1 \left[ \mathcal{E}_\Delta^+ + \mathcal{E}_\Delta^- - 2\sqrt{p_1^2 + M^2 + \Delta^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Фазовая структура модели с заданными таким образом термодинамическими потенциалами исследовалась в статье [78], где был получен фазовый портрет модели, отображенный на рисунке 4.1.

### 4.2.3 Неоднородный киральный конденсат, $b \neq 0$

Начнем рассмотрение данного более общего случая с анализа наиболее общего выражения для ТДП (4.21). Как и ранее, проведем регуляризацию данного выражения с помощью обрезания области интегрирования

по импульсам:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{reg}}(M, b, \Delta) = & \frac{M^2 + \Delta^2}{4G} - \int_0^\Lambda \frac{dp_1}{\pi} \{E_\Delta^+ + E_\Delta^-\} \\ & - \int_0^\infty \frac{dp_1}{\pi} \{(\mu - E_\Delta^+) \theta(\mu - E_\Delta^+) + (\mu - E_\Delta^-) \theta(\mu - E_\Delta^-)\}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

где  $E_\Delta^\pm$  определены по формуле (4.19). Выражение для перенормированного термодинамического потенциала определяется следующим образом:

$$\Omega(M, b, \Delta) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \Omega_{\text{reg}}(M, b, \Delta) \Big|_{G \rightarrow G(\Lambda)} + \frac{\Lambda^2}{\pi} \right\}, \quad (4.31)$$

где  $G(\Lambda)$  представлено в (4.23). Таким образом, для ТДП получим:

$$\begin{aligned} \Omega(M, b, \Delta) = & V_0(\sqrt{M^2 + \Delta^2}) - \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^\Lambda \frac{dp_1}{\pi} \left[ E_\Delta^+ + E_\Delta^- - 2\sqrt{p_1^2 + M^2 + \Delta^2} \right] \right\} \\ & - \int_0^\infty \frac{dp_1}{\pi} \{(\mu - E_\Delta^+) \theta(\mu - E_\Delta^+) + (\mu - E_\Delta^-) \theta(\mu - E_\Delta^-)\}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где  $V_0(x)$ , как и раньше, определено по формуле (4.24). Однако, хотя интегралы в выражении (4.32) являются сходящимися, данное выражение нельзя рассматривать как физически значимый термодинамический потенциал модели. Это связано с двумя особенностями данного выражения:

1) ТДП (4.32) не ограничен снизу по переменной  $b$ . Поскольку значение неоднородности  $b$  кирального конденсата  $M$  определяется динамически, т.е. исходя из условия минимума ТДП, такая зависимость от  $b$  указывает на нефизичность данного выражения. Формально можно предположить, что динамически генерируемая величина  $b$  определяется из условия экстремума, независимо от того, максимум это, минимум или седловая точка, однако это не удовлетворяет физической интуиции, подсказывающей, что для реализации устойчивой конфигурации полей, термодинамический потенциал должен минимизироваться.

2) При  $M = 0$  выражение (4.32) может быть записано в виде:

$$\Omega(M = 0, b, \Delta) = V_0(\Delta) - \frac{(b + \nu)^2}{\pi} + \frac{\theta(\mu - \Delta)}{\pi} \left[ \Delta^2 \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}}{\Delta} \right) - \mu \sqrt{\mu^2 - \Delta^2} \right], \quad (4.33)$$

эта формула демонстрирует зависимость от переменной  $b$ , что неправильно. Действительно,  $b$  входит в фазу волны киральной плотности, тогда как  $M$  – её амплитуда, и при нулевой амплитуде волны физически значимые величины не должны зависеть от фазы.

Для получения физического ТДП модели, следует вычести из (4.33) часть, вносящую нефизичную зависимость от  $b$  и ответственную за неограниченность ТДП снизу по переменной  $b$  – т.е. член  $-\frac{(b+\nu)^2}{\pi}$ .

$$\Omega^{\text{phys}}(M, b, \Delta) = \Omega(M, b, \Delta) + \frac{(b + \nu)^2}{\pi}. \quad (4.34)$$

Общий вид этой функции показан на рисунке 4.2, где взят достаточно большой масштаб переменной  $b$ , чтобы показать, что ТДП, определенный по выражению (4.34) действительно ограничен снизу по переменной  $b$ .

Отметим, что данная схема получения физически обоснованной величины для ТДП является только эффективным приближением и не показывает более глубоких причин возникновения таких особенностей ТДП для данной модели. Настоящие же причины заключаются в том, что при выводе выражения (4.31) для термодинамического потенциала было использовано обрезание, симметричное по импульсам. То есть для каждой квазичастицы с энергиями  $E_{\Delta}^{\pm}$  интегрирование по импульсу  $p_1$  в (4.31) производилось в одинаковых пределах  $0 < p_1 < \Lambda$ . Поэтому при таком выборе схемы регуляризации возникает асимметрия в значении энергий квазичастиц  $E_{\Delta}^{\pm}$ , вносящих вклад в ТДП  $\Omega_{\text{reg}}(M, b, \Delta)$ , поскольку если  $p_1 < \Lambda$ , то  $E_{\Delta}^{\pm} < \sqrt{(\sqrt{\Lambda^2 + M^2} \pm (b + \nu))^2 + \Delta^2}$ , т.е. для разных квазичастиц доступны разные области энергий. Однако, как показано в [79, 80], более правильной схемой регуляризации для модели НЙЛ будет

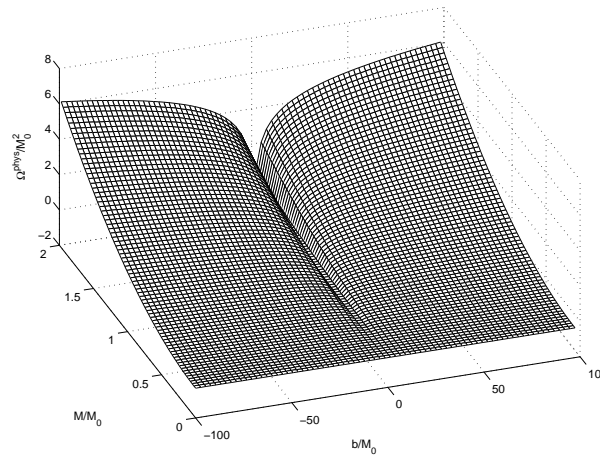


Рис. 4.2: График зависимости физического ТДП модели от переменных  $b$ ,  $M$  (переменная  $\Delta$ , а также параметры  $\mu, \nu$  – фиксированы). График показывает, что ТДП ограничен снизу по переменной  $b$ , а также что при  $M = 0$  отсутствует нефизическая зависимость ТДП от величины  $b$ .

выбор обрезания, симметричного по энергиям, когда обрезание выбирается таким образом, чтобы для каждого типа квазичастиц ограничения по энергии были одинаковы.

Отметим также, что подобная схема регуляризации была использована в недавней статье [81], где изучалась (3+1)-мерная модель НЙЛ, а также в статье [82], где изучалась (1+1)-мерная модель НЙЛ при одном аромате кварков. Более подробно проведение симметричной по энергиям регуляризации для изучаемой модели можно найти в опубликованной статье [83].

К сожалению, в аналитическом виде найти условия минимума ТДП (4.34) не представляется возможным, поэтому дальнейшее исследование условий возникновения кирального и пионного конденсатов велось численно. Были получены графики поведения конденсатов, а также фазовый портрет данной модели с учетом возможности образования киральных волн плотности. Эти результаты и их обсуждение представлены в статье [83], в данной главе мы не будем акцентировать на них внимание.

#### 4.2.4 Киральные волны плотности при ненулевой температуре

Исследование влияния температуры на свойства модели НЙЛ интересно, прежде всего, тем, что это позволяет оценить физическую значимость данной модели. Поскольку модель претендует на описание свойств сильного взаимодействия, поведение кварковых конденсатов, образующихся в ней, должно быть соответствовать реально наблюдаемым физическим явлениям – т.е. при высоких энергиях (температурах) образование скоррелированных состояний кварков должно быть подавлено за счет высоких энергий взаимодействия кварков между собой, и вместо связанных состояний должны преобладать свободные кварки. Также представляет интерес изучение свойств фазовых переходов между фазами на температурной фазовой диаграмме.

В случае пространственно однородных конденсатов влияние ненулевой температуры  $T \neq 0$  на фазовую структуру (1+1)-мерной модели НЙЛ, обладающей группой симметрий  $S U_L(2) \times S U_R(2)$ , с двумя химическими потенциалами  $\mu$  и  $\nu \equiv \mu_I/2$  было исследовано в [78]. Для нахождения ТДП модели с учетом температуры и возможности образования неоднородного кирального конденсата в виде волны киральной плотности (4.11) рассмотрим  $\Omega_T(M, b, \Delta)$  рассмотрим выражение для ТДП без учета температуры (4.21).

Техника введения температуры в квантовой теории поля хорошо известна и заключается в замене интегрирования по энергии  $p_0$  на бесконечную сумму по матсубаровским частотам  $\omega_n$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} (\dots) \rightarrow iT \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\dots),$$

$$p_0 \rightarrow p_{0n} \equiv i\omega_n \equiv i\pi T(2n + 1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.35)$$

По сути, эта техника очень схожа с техникой компактификации пространственных измерений, которая была представлена в главе 3, с той разницей, что в данном случае происходит компактификация временного измерения, и обратная длина компактифицированного временного

измерения играет роль температуры:  $\frac{1}{\beta} = T$ .

Проводя суммирование по частотам  $\omega_n$  мы получаем выражение для ТДП с учетом температуры (аналогичные вычисления можно найти, например, в статьях [84]):

$$\Omega_r(M, b, \Delta) = \frac{M^2 + \Delta^2}{4G} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} \{ E_{\Delta}^+ + E_{\Delta}^- + T \ln [1 + e^{-\beta(E_{\Delta}^+ - \mu)}] + T \ln [1 + e^{-\beta(E_{\Delta}^+ + \mu)}] + T \ln [1 + e^{-\beta(E_{\Delta}^- - \mu)}] + T \ln [1 + e^{-\beta(E_{\Delta}^- + \mu)}] \}, \quad (4.36)$$

где  $E_{\Delta}^{\pm}$  – энергии квазичастиц, данные в (4.19). Первые два члена, содержащие  $E_{\Delta}^{\pm}$ , являются расходящимися в ультрафиолетовом пределе интегралами, так же как и в случае  $T = 0$ . Проводя процедуру регуляризации и перенормировки так же, как это было сделано в (?), и заменяя константу связи  $G \rightarrow G(\Lambda)$  по формуле (4.23), мы в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$  получаем конечное физически значимое выражение для ТДП с учетом температуры  $\Omega_r^{\text{phys}}(M, b, \Delta)$ . Оно является обобщением ТДП  $\Omega^{\text{phys}}(M, b, \Delta)$ , определенного в (4.34) на случай  $T \neq 0$ . Численные расчеты показывают, что все возможные минимумы полученного ТДП  $\Omega_r^{\text{phys}}(M, b, \Delta)$  лежат в плоскости  $M = 0$  или  $\Delta = 0$  (т.е. таким образом, нейтральный киральный и заряженный пионный конденсаты не смешиваются). Функцию  $\Omega_r^{\text{phys}}(M, b, \Delta)$ , ограниченную этими двумя случаями, можно записать в виде:

$$\Omega_r^{\text{phys}}(M = 0, b, \Delta) = V_0(\Delta) - \frac{2T}{\pi} \int_0^{\infty} dp_1 \ln \{ [1 + e^{-\beta(\mathcal{E} - \mu)}] [1 + e^{-\beta(\mathcal{E} + \mu)}] \}, \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \Omega_r^{\text{phys}}(M, b, \Delta = 0) = & V_0(M) - \frac{(v + b)^2}{\pi} - \\ & - \frac{T}{\pi} \int_0^{\infty} dp_1 \ln \{ [1 + e^{-\beta(E + v + b - \mu)}] [1 + e^{-\beta(E + v + b + \mu)}] \} - \\ & - \frac{T}{\pi} \int_0^{\infty} dp_1 \ln \{ [1 + e^{-\beta(E - v - b - \mu)}] [1 + e^{-\beta(E - v - b + \mu)}] \}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

где  $V_0(x)$  – эффективный потенциал для вакуумного случая, определенный в (4.24),  $E = \sqrt{p_1^2 + M^2}$ , а  $\mathcal{E} = \sqrt{p_1^2 + \Delta^2}$ . Сравнивая глобальные

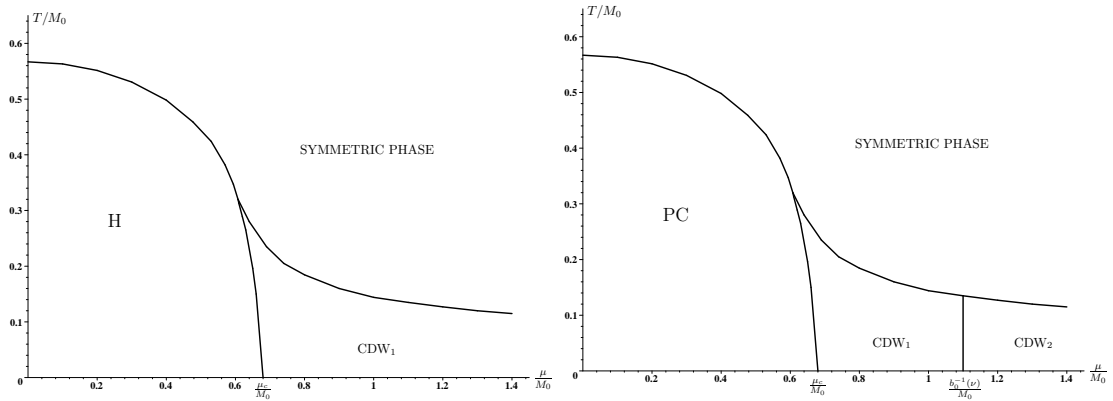


Рис. 4.3: Фазовые портреты модели НЙЛ с химическими потенциалами в  $(1+1)$ -мерии в координатах  $(\mu, T)$ . а) (слева) Фазовый портрет при  $0 \leq \mu_I < 2\nu_\alpha$ . б) (справа) Фазовый портрет при  $2\nu_\alpha < \mu_I$ . Здесь  $\nu_\alpha \approx 0.6M_0$ ,  $\mu_c = \mu_\alpha \approx 0.68M_0$ . При  $\nu = 0$  фаза  $H$  означает фазу однородной киральной конденсации:  $M = M_0, b = 0, \Delta = 0$ ; при  $0 < \nu < \nu_\alpha$   $H$  означает фазу однородной пионной конденсации:  $M = 0, b = 0, \Delta = M_0$ . В симметричной фазе конденсаты отсутствуют:  $M = 0, b = 0, \Delta = 0$ . Фазы  $CDW_1$  и  $CDW_2$  – фазы кирального конденсата в виде волн киральной плотности  $M \neq 0, b \neq 0, \Delta = 0$ , причем в  $CDW_1$ :  $b > 0$ , в  $CDW_2$ :  $b < 0$ .

минимумы функций (4.38) и (4.38), можно найти общий глобальный минимум термодинамического потенциала  $\Omega_T^{\text{phys}}(M, b, \Delta)$ . Значения  $M, \Delta, b$  в точках минимума в зависимости от параметров  $T, \mu, \nu$  определяют фазовую структуру модели при ненулевой температуре.

Проводя численные исследования полученных выражений (4.38) и (4.38) для ТДП, можно получить два типа фазовых портретов модели в плоскости  $(\mu, T)$  – один тип получен при  $0 \leq \mu_I < 2\nu_\alpha$ , второй – при  $2\nu_\alpha < \mu_I$  (где  $\nu_\alpha \approx 0.6M_0$  – значение  $\nu$  в точке  $\alpha$  на фазовом портрете 4.1). Данные портреты изображены на рисунках 4.3(а) и 4.3(б) соответственно. Заметим, что, как показывают численные расчеты, между фазами  $CDW_1$  (киральной волной плотности с положительным коэффициентом  $b$  в фазе) и фазой однородной пионной конденсации  $PC$  – фазовый переход первого рода. Остальные фазовые переходы на фазовых портретах 4.3(а) и 4.3(б) – являются фазовыми переходами второго рода.

Рассмотрим также предел  $\mu_I = 0$  (фазовый портрет модели в этом

случае отображен на рисунке 4.3(а)) и сравним термодинамические свойства (1+1)-мерной модели НЙЛ со свойствами (3+1)-модели, обладающей симметрией  $SU_L(2) \times SU_R(2)$  и рассмотренной в [80], в этом случае. В случае размерности пространства-времени (3+1), в отличие от (1+1)-мерного случая, наблюдается фазовый переход второго рода между фазами однородного кирального конденсата и фазой волны киральной плотности. Кроме того, в зависимости от величины динамически генерируемой массы кварков, в (3+1)-мерном случае фаза неоднородного кирального конденсата может занимать как ограниченную область на плоскости  $(\mu, T)$ , так и неограниченную область, в то время как в рассматриваемой в этой главе (1+1)-мерной модели эта область всегда неограничена (см. расположение фазы  $CDW_1$  на фазовой диаграмме 4.3(а)).

### 4.3 Волны пионной плотности

#### 4.3.1 Термодинамический потенциал модели

Еще одна возможность для существования неоднородных кварковых конденсатов, близкая к тому, что было рассмотрено в предыдущем разделе – это конденсация кварков в виде так называемой пионной волны плотности (ПВП). В отличие от рассмотренного выше случая, здесь заряженный пионный конденсат может образовывать пространственно неоднородные структуры в виде волны, тогда как киральный конденсат однороден. Анзац для данного вида конденсации кварков может быть записан в виде (сравни с 4.11):

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= M, \quad \pi_3(x) = 0, \\ \pi_+ &= \pi_1(x) + i\pi_2(x) = \Delta e^{2i\vec{b}\vec{x}}, \\ \pi_- &= \pi_1(x) - i\pi_2(x) = \Delta e^{-2i\vec{b}\vec{x}},\end{aligned}\tag{4.39}$$



В пределе больших  $N_c$  можно определить ТДП данной модели аналогично тому, как он определялся ранее:

$$\int d^2x \Omega(M, b, \Delta) = -\frac{1}{N_c} \mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma(x), \pi_a(x)) \Big|_{\sigma(x)=\sigma(x), \pi_a(x)=\pi_a(x)}, \quad (4.40)$$

что, учитывая принятый анзац (4.39) приводит нас к следующему выражению для ТДП:

$$\int d^2x \Omega(M, b, \Delta) = \int d^2x \frac{M^2 + \Delta^2}{4G} + \frac{i}{N_c} \ln \left( \int [d\bar{q}][dq] \exp \left( i \int d^2x \bar{q} \mathcal{D} q \right) \right), \quad (4.41)$$

где

$$\bar{q} \mathcal{D} q = \bar{q} (\gamma^\rho i \partial_\rho + \mu \gamma^0 + \nu \tau_3 \gamma^0 - M) q - \Delta (\bar{q}_u i \gamma^5 q_d) e^{-2ibx} - \Delta (\bar{q}_d i \gamma^5 q_u) e^{2ibx}. \quad (4.42)$$

В данном случае выражение для  $\mathcal{D}$  пространственно неоднородно, так же как и выражение (4.14) для анзаца, учитывающего киральные волны плотности (4.11), и здесь также требуется поворот спиноров (преобразование Вайнберга) для того, чтобы избавиться от координатной зависимости, однако в данном случае вид этого преобразования будет другой:

$$\psi = \exp(i\tau_3 bx) q; \quad \bar{\psi} = \bar{q} \exp(-i\tau_3 bx) q. \quad (4.43)$$

В результате этого преобразования (которое, как и преобразование (4.15), не меняет меры в континуальном интеграле) мы приходим к следующему выражению для ТДП:

$$\int d^2x \Omega(M, b, \Delta) = \int d^2x \frac{M^2 + \Delta^2}{4G} + \frac{i}{N_c} \ln \left( \int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp \left( i \int d^2x \bar{\psi} D \psi \right) \right), \quad (4.44)$$

где  $D$  – оператор Дирака, уже не зависящий от координат:

$$D = \gamma^\nu i \partial_\nu - M + \mu \gamma^0 + \tau_3 \gamma^1 b + \nu \tau_3 \gamma^0 - i \Delta \tau_1 \gamma^5. \quad (4.45)$$

После взятия континуального интеграла в выражении (4.44) мы приходим к следующему выражению для ТДП:

$$\Omega(M, b, \Delta) \equiv \Omega^{\text{un}}(M, b, \Delta) = \frac{M^2 + \Delta^2}{4G} + i \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln \det \bar{D}(p), \quad (4.46)$$

где индекс “un” подчеркивает то, что данное выражение для ТДП является неперенормированным, и

$$\begin{aligned} \det \bar{D}(p) = & \Delta^4 + 2\Delta^2(M^2 + p_1^2 + v^2 - b^2 - \eta^2) \\ & + (M^2 + (p_1 - b)^2 - (\eta + v)^2)(M^2 + (p_1 + b)^2 - (\eta - v)^2) \end{aligned} \quad (4.47)$$

и  $\eta = p_0 + \mu$ . (Выражение (4.47) симметрично относительно замен:  $\Delta \rightarrow -\Delta$ ,  $M \rightarrow -M$ ,  $b \rightarrow -b$ ,  $\mu \rightarrow -\mu$ ,  $v \rightarrow -v$ , поэтому можно положить все эти величины большими нуля без ограничений общности.)

Выражение для обратного пропагатора (4.47) можно переписать в следующем виде:

$$\det \bar{D}(p) \equiv \eta^4 + A\eta^2 + B\eta + C, \quad (4.48)$$

где под  $A, B, C$  понимаются величины:

$$\begin{aligned} A &= -2(M^2 + b^2 + p_1^2 + v^2 + \Delta^2), \\ B &= -8p_1bv, \\ C &= (M^2 + b^2 + p_1^2 + v^2 + \Delta^2)^2 - 4(p_1^2v^2 + b^2v^2 + \Delta^2b^2 + M^2v^2 + p_1^2b^2). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Решения уравнения  $\det \bar{D}(p) = 0$  дают спектр энергий квазичастиц в данной модели. Уравнение четвертой степени, которое при этом надо решить, является разрешимым аналитически, его решения представлены в приложении С. Мы обозначим эти решения  $\eta_k^\alpha$ , где  $\alpha = +, -$ ,  $k = 1, 2$ , и соответствие для решений задается следующим образом:  $\eta_1^+ = \eta_1$ ,  $\eta_2^+ = \eta_2$ ,  $\eta_1^- = \eta_3$ ,  $\eta_2^- = \eta_4$ . Вычисления по формулам из приложения С могут дать результат с ненулевой мнимой частью, в то время как энергия частиц не может быть мнимой, поэтому необходима проверка, имеют ли эти решения физический смысл. При численном расчете эта проверка проводилась, и было показано, что мнимые части  $\eta_{1,2}^\pm$  много меньше действительных частей для всех значений использовавшихся в расчетах параметров. К сожалению, эти решения являются слишком громоздкими для того, чтобы писать их каждый раз, когда они используются, и слишком сложными для аналитических вычислений.

Используя данные решения, можно записать ТДП в виде:

$$\Omega^{un}(M, b, \Delta) = \frac{M^2 + \Delta^2}{4G} + i \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln [(\eta - \eta_1^+)(\eta - \eta_1^-)(\eta - \eta_2^+)(\eta - \eta_2^-)], \quad (4.50)$$

и далее, используя соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \ln(p_0 - a) = i\pi|a|, \quad (4.51)$$

можно прийти к следующей форме записи термодинамического потенциала модели:

$$\Omega^{un}(M, b, \Delta) = \frac{M^2 + \Delta^2}{4G} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{4\pi} [|\mu - \eta_1^+| + |\mu - \eta_1^-| + |\mu - \eta_2^+| + |\mu - \eta_2^-|]. \quad (4.52)$$

Для проведения процедуры перенормировки ТДП, введем следующее соотношение:

$$\Omega^{un}(M, b, \Delta) = \Omega^{un}(M, b, \Delta) - \Omega^{un}(M, b, \Delta)|_{b=0, \mu=0, \nu=0} + \Omega^{un}(M, b, \Delta)|_{b=0, \mu=0, \nu=0} \quad (4.53)$$

Поскольку при  $b = 0, \mu = 0, \nu = 0$  величины  $\eta_k^\alpha$  подчиняются соотношению  $|\eta_{1,2}^\pm| = \sqrt{p_1^2 + M^2 + \Delta^2}$ , можно записать:

$$\Omega^{un}(M, b, \Delta)|_{b=0, \mu=0, \nu=0} = \frac{M^2 + \Delta^2}{4G} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{\pi} \sqrt{p_1^2 + M^2 + \Delta^2}, \quad (4.54)$$

тогда

$$\begin{aligned} & \Omega^{un}(M, b, \Delta) - \Omega^{un}(M, b, \Delta)|_{b=0, \mu=0, \nu=0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{4\pi} \left[ 4 \sqrt{p_1^2 + M^2 + \Delta^2} - |\mu - \eta_1^+| - |\mu - \eta_1^-| - |\mu - \eta_2^+| - |\mu - \eta_2^-| \right] \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dp_1}{4\pi} \left[ 4 \sqrt{p_1^2 + M^2 + \Delta^2} - |\mu - \eta_1^+| - |\mu - \eta_1^-| - |\mu - \eta_2^+| - |\mu - \eta_2^-| \right]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Поскольку интеграл в (4.55) сходится, в выражении (4.53) вся ультрафиолетовая расходимость заключена в последнем слагаемом, т.е. в перенормированном ТДП (4.54). Таким образом, для перенормировки всего термодинамического потенциала  $\Omega^{un}(M, b, \Delta)$  достаточно перенормировать только его вакуумный вклад (4.54). Сделаем это, как и прежде, проводя в выражении (4.54) замену  $G \equiv G(\Lambda)$  (величина  $G(\Lambda)$  определена в (4.23)). В результате мы получим:

$$\Omega^{un}(M, b, \Delta) \Big|_{b=0, \mu=0, \nu=0} \longrightarrow \Omega^{ren}(M, b, \Delta) \Big|_{b=0, \mu=0, \nu=0} = V_0(M, \Delta), \quad (4.56)$$

где  $V_0(M, \Delta) = V_0(\sqrt{M^2 + \Delta^2})$  и функция  $V_0(x)$  определена в (4.24).

Таким образом происходит регуляризация термодинамического потенциала:

$$\begin{aligned} \Omega^{un}(M, b, \Delta) \longrightarrow \Omega^{ren}(M, b, \Delta) = & V_0(M, \Delta) - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{4\pi} \left[ |\mu - \eta_1^+| + |\mu - \eta_1^-| + |\mu - \eta_2^+| + |\mu - \eta_2^-| - 4 \sqrt{p_1^2 + M^2 + \Delta^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Однако, как и в случае с рассмотрением киральных волн плотности, данное выражение не может считаться физически значимым выражением для ТДП (о причинах этого см. предыдущий раздел о киральных волнах плотности). Для того, чтобы получить физический термодинамический потенциал, нужно избавиться от нефизичной зависимости от величины неоднородности  $b$  в выражении (4.58), проведя регуляризацию по правильной схеме – с симметричным обрезанием по энергиям – или, что эквивалентно, провести нужное вычитание. Такое вычитание, приводящее к физически обоснованному результату, может быть представлено в виде (данный вид вычитания использовался также в статьях [85, 86]):

$$\Omega^{phys}(M, b, \Delta) = \Omega^{ren}(M, b, \Delta) - \Omega^{ren}(M, b, \Delta = 0) + \Omega^{ren}(M, b = 0, \Delta = 0), \quad (4.58)$$

Именно данное выражение является физическим значением ТДП и используется в дальнейшем для исследования фазовых свойств модели.

### 4.3.2 Фазовая структура модели

К сожалению, выражение (4.58) слишком сложно (во многом благодаря наличию в нем решений уравнения четвертой степени) для аналитического исследования, поэтому фазовый портрет модели и поведение в ней конденсатов могут быть исследованы только численно.

Зависимость конденсатов от химических потенциалов модели показана на рисунке 4.4, фазовая диаграмма модели показана на рисунке 4.5. Из представленных графиков видно, что почти всю область, которую при рассмотрении образования однородных конденсатов занимала фаза нормальной кварковой материи или конденсаты отсутствовали (фазы 1, 2 на рис. 4.1), теперь занимает фаза пионной волны плотности. Кроме того, видно, что если в первом случае верхняя граница фазы однородной пионной конденсации (РС) по переменной  $\mu$  была  $\mu_c = \frac{1}{\sqrt{2}}M_0 \approx 0.71M_0$ , то при рассмотрении конденсатов в виде пионной волны плотности она изменилась:  $\mu_c \approx 0.69M_0$ . Это говорит о том, что рядом с границей фазы однородной пионной конденсации (РС) есть область  $\mu \in [0.69, 0.71]M_0$ , где фаза пионной волны плотности более предпочтительна, чем отсутствие конденсации кварков, однородный пионный конденсат и фаза нормальной кварковой материи.

Ширина полосы фазы нормальной кварковой материи, разделяющей фазу пионной волны плотности на две части, составляет  $\sim 0.03M_0$ , причем знак в фазе волны (т.е. знак  $b$ ), как видно из рис. 4.4, одинаков для обеих частей, что отличается от случая киральной волны плотности, где знак менялся (см. рисунок 4.3 и подписи к нему).

Интересным вопросом является сравнение предпочтительности образования кваркового конденсата в виде киральной или пионной волны плотности. К сожалению, исследовать анзац, описывающий образование обоих типов конденсатов, одновременно, не удастся из-за сложности вычислений и невозможности подобрать правильный поворот в пространстве спиноров, который бы избавлял от координатной зависимости в опе-

раторе Дирака (см. соотношения 4.15, 4.43 для соответствующих преобразований в случае киральных и пионных волн плотности). Однако можно сравнить глубины абсолютных минимумов термодинамических потенциалов данной модели, полученных с использованием этих двух анзацев. Кроме того, учитывая, что полученные данные указывают на то, что не существует смешанных пионных и барионных конденсатов, логично предположить, что при рассмотрении анзаца, объединяющего два типа волн плотности, это правило также будет действовать. В этом случае сравнение глубин минимумов ТДП в двух исследуемых случаях будет достаточно для определения, какой тип конденсации является предпочтительным также и для общего случая.

В результате численного сравнения глубин минимумов ТДП получено, что ни один из двух данных типов конденсатов не имеет преимущества перед другим, т.е. глубины минимумов ТДП в точках глобального минимума равны. Это нетривиальный факт, который не был ожидаем до прямых вычислений. Следует отметить, что это было проверено с большой точностью для разных точек на плоскости  $(\mu, \nu)$ , а также что этот результат является тем более нетривиальным, что для разных анзацев итоговые способы вычислений ТДП и его минимумов были разными – в частности, для получения термодинамического потенциала для анзаца в виде пионной волны плотности требуются решения уравнений четвертой степени, которые не требуются в случае киральной волны плотности.

Таким образом можно, говорить о скрытой симметрии образования киральной и пионной волн плотности, которая не видна напрямую из лагранжиана модели. Как следствие этой симметрии, в плотной кварковой среде возможно образование пространственно разделенных областей, в которых будет образовываться конденсат кварков в виде либо пионной, либо киральной волны плотности (либо в виде однородного пионного конденсата, если величина химического потенциала меньше  $\mu_c \approx 0.69M_0$ ).

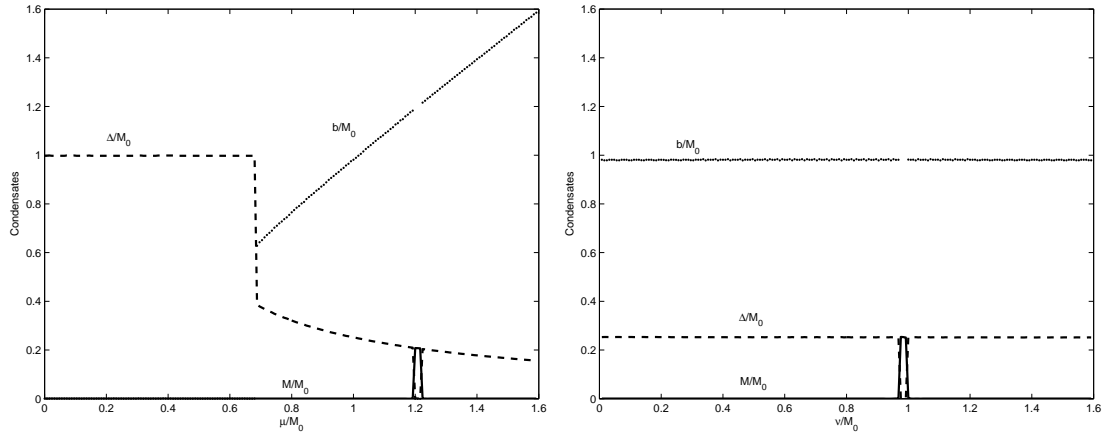


Рис. 4.4: Зависимость конденсатов в (1+1)-мерной модели НЙЛ с учетом возможности образования пионных волн плотности от химических потенциалов  $\mu, \nu$ . а) (слева) Зависимость конденсатов  $M, \Delta, b$  от химического потенциала  $\mu$  при фиксированном изотопическом химическом потенциале  $\nu = 1.2M_0$ . б) (справа) Зависимость конденсатов  $M, \Delta, b$  от изотопического химического потенциала  $\nu$  при фиксированном химическом потенциале  $\mu = M_0$ .

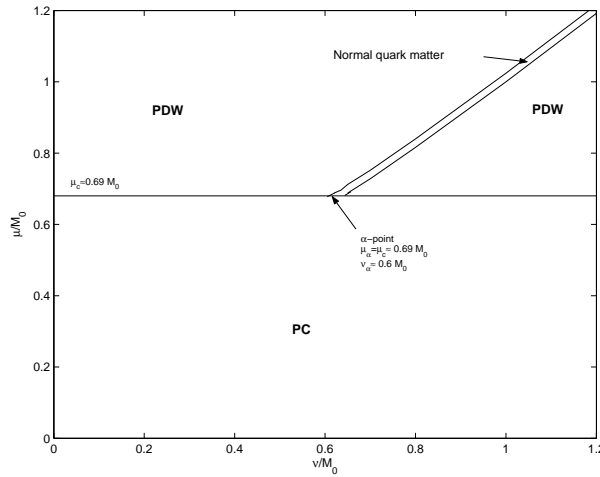


Рис. 4.5: Фазовая структура модели в плоскости  $\mu, \nu$ . PDW – фаза волны пионной плотности. PC – фаза однородного пионного конденсата. Фаза нормальной кварковой материи ( $\Delta = 0, M \neq 0$ ) представлена тонкой полосой, разделяющей фазу PDW на две части.

#### 4.4 Заключение

В данной главе исследована  $(1+1)$ -мерная модель Намбу–Йона-Лазинио с введением химического потенциала  $\mu$  и с явным нарушением изотопической симметрии за счет введения изотопического химического потенциала  $\mu_I$ . Была рассмотрена возможность образования неоднородных кварковых конденсатов в виде волны киральной плотности или пионной плотности.

Для обоих случаев численно было показано, что пионный и киральный конденсаты образуются отдельно друг от друга и не смешиваются.

Для случая киральной волны плотности были построены фазовые диаграммы на плоскости  $(T, \mu)$ , показывающие, что фаза неоднородного кирального конденсата занимает неограниченную область на диаграмме, что отличается от  $(3+1)$ -мерного случая той же модели. Кроме того, в отличие от  $(3+1)$ -мерной модели, между фазой киральной волны плотности и фазой однородной пионной конденсации существует фазовый переход первого рода.

Для случая пионной волны плотности показано, что фаза пионной волны плотности более предпочтительна, чем фаза вакуума (отсутствия конденсатов) и фаза однородного кирального конденсата.

Проведено сравнение предпочтительности образования киральной и пионной волны плотности, в результате которой выяснилось, что термодинамический потенциал имеет одинаковую глубину для обеих фаз, т.е. ни одна из них не является более предпочтительной, чем другая. Это говорит о том, что существует скрытая симметрия между этими двумя фазами. Поскольку кварки могут конденсироваться в каждую из фаз равновероятно, и, как было выяснено, что пионный и кварковый конденсат не смешиваются, то делается вывод, что могут существовать отдельные области пространства, в которых существуют отдельно конденсат в виде пионной или кварковой волны плотности в случае если  $\mu > \mu_c \approx 0.69M_0$  или в виде однородного пионного конденсата в противном случае.



## Глава 5

### Заключение

В представленной работе исследованы модели четырехфермионного взаимодействия Гросса–Невё (ГН) и Намбу–Йона-Лазинио (НЙЛ) с дополнительными условиями, такими как введение в лагранжиан модели члена, нарушающего лоренц-инвариантность, а также введение химического и изотопического химического потенциалов. Получены следующие основные результаты:

1. При исследовании модели ГН с членом  $b_\mu$ , нарушающим лоренц-инвариантность модели, показано, что наличие достаточно большой величины  $b_\mu$  приводит к восстановлению киральной инвариантности модели в том числе в режимах, в которых без нарушения лоренц-инвариантности киральная симметрия нарушается.
2. Проведена размерная редукция из трёх измерений в два при помощи явной компактификации одного из пространственных измерений в модели ГН с нарушением лоренц-инвариантности. Получены соотношения между параметрами трёхмерной и двумерной моделей, путем размерной редукции получено уравнение на экстремумы эффективного потенциала в двумерной модели (уравнение щели).
3. Исследована  $(1+1)$ -мерная модель НЙЛ, описывающая плотную кварковую среду с введением изоспиновой асимметрии. Построен термодинамический потенциал (ТДП) для данной модели в предполо-

жении, что возможно образование фазы киральных волн плотности. Исследовано влияние ненулевой температуры на образование конденсатов. Получены фазовые диаграммы модели в координатах  $(T, \mu)$ . Показано, что фаза волн киральной плотности более предпочтительна, чем однородный киральный конденсат.

4. Построена процедура обрезания, симметричного по энергиям, приводящая к физически правильному результату для термодинамического потенциала.
5. Исследована возможность образования пионных волн плотности в  $(1+1)$ -мерной модели НЙЛ. Построен термодинамический потенциал модели с учетом возможности образования пионных волн плотности. Показано, что пионные волны плотности более предпочтительны, чем однородный киральный конденсат. Построен фазовый портрет модели в координатах  $(\mu, \mu_I)$ , исследовано поведение конденсатов в зависимости от величин химических потенциалов.
6. Показано отсутствие фаз смешения пионного и кирального конденсатов.
7. Численно показано наличие скрытой симметрии образования неоднородных кирального и пионного конденсатов. Это выражено в том, что фазы киральной волны плотности и пионной волны плотности одинаково предпочтительно, и могут существовать отдельные области пространства, заполненные одним из этих типов конденсатов.

## Благодарности

Я выражаю благодарность своему научному руководителю В. Ч. Жуковскому за постановку задач и активное руководство в поиске решений. Я также благодарен К. Г. Клименко (ИФВЭ, Протвино), за участие и плодотворные обсуждения тем, изложенных в диссертации, а также

Д. Эберту (университет им. Гумбольдта, Берлин) за неоценимый научный опыт и теплый прием в Берлине. Хотелось бы также поблагодарить всех участников научного семинара, проводимого на кафедре теоретической физики под руководством В. Ч. Жуковского, на котором неоднократно докладывались течение и результаты работ, вошедших в состав данной диссертации. Обсуждения, проводившиеся на семинаре, помогли расширить понимание изучаемой темы, и интерес к исследованиям, проявленный участниками семинара, всегда служил хорошей мотивацией для продолжения исследований. Особо я хотел бы поблагодарить А. В. Борисова, А. Е. Лобанова и О. Г. Харланова, часто слушавших доклады по теме диссертации на семинаре и особенно активно участвовавших в их обсуждении.

Я благодарю всех преподавателей и сотрудников кафедры, а также преподавателей других кафедр, за прекрасные лекции и семинары, а также за создание дружественной научной атмосферы.

## Приложения

## Приложение А

### Дополнение к главе 2

#### А.1 Разделение интеграла $I_2$ на мнимую и действительную части

$$I_2 = \int_0^{\Lambda} k \left\{ \left[ (k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right] \ln \left( (k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right) - \right. \\ \left. - \left[ (k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right] \ln \left( (k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right) \right\} dk = A_1 - A_2$$

Введем величину  $\varphi = \arg \left( (k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right) = \arctan \left( \frac{2k\tilde{b}}{k^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2} \right)$ , тогда

$$A_1 = \int_0^{\Lambda} k \cdot \left[ (k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right] \ln \left( (k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right) \cdot dk = \\ = \int_0^{\Lambda} k \cdot (k^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2 - 2ik\tilde{b}) \cdot \left[ \ln |(k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2| + i\varphi \right] \cdot dk = \\ = \int_0^{\Lambda} k \cdot (k^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2) \ln |(k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2| \cdot dk - 2\tilde{b} \int_0^{\Lambda} k^2 \cdot \varphi \cdot dk + \\ + i \int_0^{\Lambda} k \cdot (k^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2) \varphi \cdot dk + 2i\tilde{b} \int_0^{\Lambda} k^2 \cdot \ln |(k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2| \cdot dk \\ A_2 = \quad (\text{аналогично } I_1 \text{ с заменой } \tilde{b} \text{ на } -\tilde{b} \text{ и } \varphi \text{ на } -\varphi) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\Lambda} k \cdot (k^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2) \ln |(k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2| \cdot dk - 2\tilde{b} \int_0^{\Lambda} k^2 \cdot \varphi \cdot dk - \\
&- i \int_0^{\Lambda} k \cdot (k^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2) \varphi \cdot dk - 2i\tilde{b} \int_0^{\Lambda} k^2 \cdot \ln |(k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2| \cdot dk
\end{aligned}$$

Поскольку  $\ln |(k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2| = \ln |(k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2| = \ln \left( \sqrt{(k^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2)^2 + 4k^2\tilde{b}^2} \right) = \ln \left( \sqrt{(k^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{\Phi}^2)^2 - 4\tilde{b}^2\tilde{\Phi}^2} \right)$ , то

$$\begin{aligned}
I_2 &= 4i\tilde{b} \cdot \int_0^{\Lambda} k^2 \ln \left( \sqrt{(k^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{\Phi}^2)^2 - 4\tilde{b}^2\tilde{\Phi}^2} \right) \cdot dk + \\
&+ 2i \cdot \int_0^{\Lambda} k \cdot (k^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2) \arctan \left( \frac{2k\tilde{b}}{k^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2} \right) \cdot dk
\end{aligned}$$

А.2 Разделение интеграла  $J$  на мнимую и действительную части

$$J = \int_0^{\Lambda} k \cdot \left[ \ln \left( (k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right) - \ln \left( (k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right) \right] \cdot dk = J_1 - J_2$$

Введем как и в случае с  $I_2$  величину  $\varphi = \arg \left( (k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right) = \arctan \left( \frac{2k\tilde{b}}{k^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2} \right)$ , тогда

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^{\Lambda} k \cdot \ln \left( (k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2 \right) \cdot dk = \int_0^{\Lambda} k \cdot \left[ \ln |(k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2| - i\varphi \right] \cdot dk = \\
&= \int_0^{\Lambda} k \cdot \ln |(k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2| \cdot dk - i \int_0^{\Lambda} k \cdot \varphi \cdot dk
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= \quad (\text{аналогично } J_1 \text{ с заменой } \tilde{b} \text{ на } -\tilde{b} \text{ и } \varphi \text{ на } -\varphi) = \\
&= \int_0^\Lambda k \cdot \ln |(k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2| \cdot dk + i \int_0^\Lambda k \cdot \varphi \cdot dk
\end{aligned}$$

Поскольку  $\ln |(k - i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2| = \ln |(k + i\tilde{b})^2 + \tilde{\Phi}^2|$ , то

$$J = J_1 - J_2 = -2i \int_0^\Lambda k \cdot \arctan \left( \frac{2k\tilde{b}}{k^2 + \tilde{\Phi}^2 - \tilde{b}^2} \right) \cdot dk$$

### А.3 Анализ уравнения щели при мнимом $\vec{b}$ и $m \neq 0$

Сложность нахождения минимумов и максимумов  $V_{\text{eff}}$  при мнимом  $\vec{b}$ , как уже говорилось, связана с тем, что для этого необходимо решить кубическое уравнение (2.55). При этом решения получаются громоздкими и плохо поддающимися анализу. Поэтому вместо того, чтобы полностью вычислять точки минимумов и условия, при которых они возникают, ограничимся введением условий, при которых в эффективном потенциале может возникнуть единственный минимум при  $\Phi_0 = m$ .

Рассмотрим кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{A.1})$$

В нашем случае  $a = -3m$ ,  $b = 3m^2 + \tilde{b}^2 - 2\tilde{b}M$ ,  $c = -m^3 - \tilde{b}^2m$ . Для нахождения его решений сначала вычисляются параметры  $Q$  и  $R$ :

$$Q = \frac{a^2 - 3b}{9}; R = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{54} \quad (\text{A.2})$$

В нашем случае

$$Q = \frac{1}{3}\tilde{b}(2M - \tilde{b}); R = -\tilde{b}mM \quad (\text{A.3})$$

Далее, при  $R^2 < Q^3$  или иначе говоря,  $\tilde{b}(\tilde{b} - 2M)^3 < -m^2M^2$ , наше урав-

нение имеет 3 действительных корня:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= m - 2\sqrt{Q}\cos t \\ \Phi_2 &= m - 2\sqrt{Q}\cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \Phi_3 &= m - 2\sqrt{Q}\cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned}\tag{A.4}$$

где  $t = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right)$

Как видно, эти выражения весьма сложны для анализа. Но из того, как меняются знаки первой производной  $V_{\text{eff}}$  можно сказать, что при наибольшем и наименьшем из этих значений  $\Phi$  будет минимум, при среднем - минимум (пока не будем учитывать, что уравнение щели в виде (2.55) верно только при  $|\Phi - m| < \tilde{b}$ ).

В случае, если  $R^2 \geq Q^3$ , т.е.  $\tilde{b}(\tilde{b} - 2M)^3 \geq -m^2M^2$ , то действительных корней будет 1 или 2 (при  $\tilde{b}(\tilde{b} - 2M)^3 = -m^2M^2$ ). Определяться эти корни будут так:

$$\begin{aligned}\Phi_4 &= m + \text{sign}(M) \left[ A + \frac{1}{3} \cdot \frac{\tilde{b}(2M - \tilde{b})}{A} \right] \\ \Phi_5 &= m + (\tilde{b}mM)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}\tag{A.5}$$

где  $A = \left( \tilde{b}m|M| + \sqrt{\tilde{b}^2M^2m^2 - \frac{\tilde{b}^3}{27}(2M - \tilde{b})^3} \right)^{\frac{1}{3}}$

В первом из этих корней  $V_{\text{eff}}$  имеет минимум, а второй корень, возникающий только при  $\tilde{b}(\tilde{b} - 2M)^3 = -m^2M^2$  - седловая точка.

Для существования единственного минимума в пределах  $|\Phi - m| < \tilde{b}$  при  $\Phi_0 = m$  может быть несколько возможностей: например, может реализовываться случай, когда  $R^2 > Q^3$  и корень равен  $\Phi_4 = \Phi_0 = m$  или может быть противоположный случай и только один из корней (наибольший или наименьший) лежит в заданных пределах. Но при этом в любом из этих случаев вне этих пределов не должно быть дополнительных минимумов.

Теперь рассмотрим (2.54) - уравнение щели при  $|\Phi - m| > \tilde{b}$ . При  $M < 0$  это уравнение (как показывалось при рассмотрении уравнения щели при



действительном  $\vec{b}$ ) имеет один корень, при  $M > 0$  может иметь один или три корня (2 из которых обеспечивают минимум  $V_{\text{eff}}$ ). Но при этом ни один из этих корней не равен  $\Phi_0 = m$  при любых  $M$ . Поэтому для того, чтобы существовал единственный минимум при  $\Phi_0 = m$ , эти корни должны оказаться за границами рассматриваемой области. Для этого мы должны потребовать:

При  $M < 0$ :

$$\tilde{b} > \sqrt{\frac{1}{4}M^2 + m|M|} - \frac{1}{2}|M| \quad (\text{A.6})$$

При  $M > 0$ :

$$\tilde{b} > \sqrt{\frac{1}{4}M^2 + mM} + \frac{1}{2}M \quad (\text{A.7})$$

(при этом заметим следующее: если в пределах  $|\Phi - m| > \tilde{b}$  нет минимума, то это сразу означает, что внутри интервала  $|\Phi - m| < \tilde{b}$  может быть либо максимум и 2 минимума, либо только 1 максимум, поэтому для существования единственного минимума внутри этого интервала при наличии трех вещественных корней (2.55) мы должны потребовать, чтобы только 1 из этих корней, максимальный или минимальный, вышел за пределы интервала, а выход среднего корня, отвечающего за максимум  $V_{\text{eff}}$ , за эти пределы будет уже обеспечен условиями, гарантирующими отсутствие вне этого интервала минимумов функции, т.е. условиями (A.6) и (A.7))

Итак, обобщим полученное: единственный минимум эффективного потенциала при  $\Phi_0 = m$  может существовать при следующих условиях:

$$1) \text{ Если } M < 0 \text{ и } \tilde{b} > \sqrt{\frac{1}{4}M^2 + m|M|} - \frac{1}{2}|M|$$

$$\text{а) } \begin{cases} \tilde{b}(\tilde{b} - 2M)^3 \geq -m^2M^2 \\ \Phi_4 = \Phi_0 = m \end{cases}$$

$$\text{б)} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{b}(\tilde{b} - 2M)^3 < -m^2 M^2 \\ \max(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) > \tilde{b} \\ \min(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \Phi_0 = m \end{array} \right.$$

$$\text{в)} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{b}(\tilde{b} - 2M)^3 < -m^2 M^2 \\ \min(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) < -\tilde{b} \\ \max(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \Phi_0 = m \end{array} \right.$$

2) Если  $M > 0$  и  $\tilde{b} > \sqrt{\frac{1}{4}M^2 + mM} + \frac{1}{2}M$  -абсолютно такие же условия

$$\text{а)} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{b}(\tilde{b} - 2M)^3 \geq -m^2 M^2 \\ \Phi_4 = \Phi_0 = m \end{array} \right.$$

$$\text{б)} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{b}(\tilde{b} - 2M)^3 < -m^2 M^2 \\ \max(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) > \tilde{b} \\ \min(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \Phi_0 = m \end{array} \right.$$

$$\text{в)} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{b}(\tilde{b} - 2M)^3 < -m^2 M^2 \\ \min(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) < -\tilde{b} \\ \max(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \Phi_0 = m \end{array} \right.$$

Рассмотрим случай, если кубическое уравнение (2.55) имеет 3 корня и экстремум в точке  $\Phi_0 = m$ , реализуется, например, при  $\Phi = \Phi_1$ , тогда из 5.4 следует, что  $\cos(t) = 0$ , (т.к. если  $Q = 0$ , то  $R^2 > Q^3$ , т.е. не выполнено условие существования трех экстремумов). Тогда  $\cos(t \pm \frac{2\pi}{3}) = \pm \frac{1}{2}$ . Но тогда мы получаем, что  $\Phi_3 < \Phi_1 < \Phi_2$ , что означает, что в точке  $\Phi = \Phi_1$  находится минимум. Аналогичные рассуждения можно сделать относительно точек  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . Это означает, что в случае, если кубическое уравнение (2.55) имеет 3 действительных корня, то ни один из этих корней не может обеспечивать минимум эффективного потенциала в точке

$\Phi_0 = m$ . Поэтому из написанных выше шести условий для возможности восстановления киральной симметрии остаются всего 2:

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{l} M < 0 \\ \tilde{b} > \sqrt{\frac{1}{4}M^2 + m|M|} - \frac{1}{2}|M| \\ \tilde{b}(\tilde{b} - 2M)^3 \geq -m^2M^2 \\ \Phi_4 = \Phi_0 = m \end{array} \right.$$

$$\text{б)} \left\{ \begin{array}{l} M > 0 \\ \tilde{b} > \sqrt{\frac{1}{4}M^2 + mM} + \frac{1}{2}M \\ \tilde{b}(\tilde{b} - 2M)^3 \geq -m^2M^2 \\ \Phi_4 = \Phi_0 = m \end{array} \right.$$

## Приложение В

### Дополнение к главе 3

#### В.1 Вычисление ряда вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}$

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}$ . Ряд является абсолютно сходящимся. Для его вычисления можно воспользоваться правилом суммирования Пуассона:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\alpha n) = \frac{1}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi m}{\alpha}\right), \quad (\text{В.1})$$

где  $f(t)$  – интегрируемая функция,  $F(\omega)$  – ее Фурье-образ, и преобразования Фурье заданы как:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \end{aligned} \quad (\text{В.2})$$

В данном случае нам надо вычислить Фурье-образ функции  $f(t) = \frac{1}{\alpha^2 + t^2}$ :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\alpha^2 + t^2} dt. \quad (\text{В.3})$$

Для вычисления интеграла (В.3) замкнем контур интегрирования в комплексном пространстве в зависимости от знака  $t$  (при  $\omega > 0$  контур замыкается сверху, при  $\omega < 0$  – снизу) и вычислим его по теореме о вычетах.

Интеграл по дуге замыкания равен 0, поэтому:

$$F(\omega) = \oint_C \frac{e^{i\omega t}}{\alpha^2 + t^2} dt = 2\pi i \operatorname{Res}(t = i\alpha \operatorname{sign}(\omega)) = \frac{\pi}{\alpha} e^{-|\omega|\alpha}. \quad (\text{B.4})$$

Используя формулу (B.1) получим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2} &= \frac{\pi}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|m|\alpha} = \frac{\pi}{\alpha} \left( \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2\pi m\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\pi m\alpha} \right) = \\ &= \frac{\pi}{\alpha} \left( \frac{1}{1 - e^{-2\pi\alpha}} - \frac{1}{1 - e^{-2\pi\alpha}} \right) = \frac{\pi}{\alpha} \left( \frac{e^{2\pi\alpha} - e^{-2\pi\alpha}}{e^{2\pi\alpha} + e^{-2\pi\alpha}} \right) = \frac{\pi}{\alpha} \coth(2\pi\alpha). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Применяя эту формулу для выражения, использовавшегося в главе 3, получим искомое:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \Phi^2} = \frac{\beta \coth\left(\frac{\beta}{2} \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \Phi^2}\right)}{2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \Phi^2}}. \quad (\text{B.6})$$

## B.2 Удобное представление величины $Y$

Поскольку формула для величины  $Y$  (3.44) является суммой логарифмов, основной вклад которых будет дан при больших  $n$ , можно заменить эту сумму на соответствующий интеграл для упрощения вычислений:

$$\begin{aligned} Y &= \sum_n^{|n| \leq N} \ln \left( \frac{\beta\Lambda}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2\Lambda^2}{4} + H_n^2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0}^{|n| \leq N} \ln H_n^2 + o\left(\left(\frac{b^0}{\Lambda}\right)^2\right) + o\left(\left(\frac{\Phi}{\Lambda}\right)^2\right) + o(f^2) = \\ &= \ln \beta\Lambda + 2 \sum_{n>0}^N \left\{ \ln \left( \frac{\beta\Lambda}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2\Lambda^2}{4} + H_n^2} \right) - \ln H_n \right\} + o\left(\left(\frac{b^0}{\Lambda}\right)^2\right) + o\left(\left(\frac{\Phi}{\Lambda}\right)^2\right) + o(f^2) = \\ &= \ln \beta\Lambda + 2 \int_1^N dn \left\{ \ln \left( \frac{\beta\Lambda}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2\Lambda^2}{4} + H_n^2} \right) - \ln H_n \right\} + o\left(\left(\frac{b^0}{\Lambda}\right)^2\right) + o\left(\left(\frac{\Phi}{\Lambda}\right)^2\right) + o(f^2) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Вычисляя это выражение, мы получаем (используя обозначения  $M = \frac{\beta\Lambda}{2}$ ,  $L = H_N = 2\pi N$ ):

$$\begin{aligned}
 Y = & \ln \beta \Lambda + 2 \ln 2\pi - 2 \ln \left( M + \sqrt{M^2 + (2\pi)^2} \right) + \\
 & + \frac{2}{\pi} \left\{ L \ln \frac{M^2}{L^2} + (M + L) \ln \left( \frac{L}{M} + \sqrt{\left(\frac{L}{M}\right)^2 + 1} \right) - M \ln \left( \frac{2\pi}{M} + \sqrt{\left(\frac{2\pi}{M}\right)^2 + 1} \right) \right\} \quad (\text{B.8}) \\
 & + o\left(\left(\frac{b^0}{\Lambda}\right)^2\right) + o\left(\left(\frac{\Phi}{\Lambda}\right)^2\right) + o\left(f^2\right).
 \end{aligned}$$

Данное выражение более удобно для рассмотрения из-за отсутствия суммирования.

## Приложение С

### Дополнение к главе 4

#### С.1 Решение уравнения четвертой степени

В главе 4 требуется решить уравнение четвертой степени вида:

$$\eta^4 + A\eta^2 + B\eta + C = 0 \quad (\text{C.1})$$

где  $\eta = p_0 + \mu$ .

Данное уравнение можно решить аналитически. Для более простой записи решений введем обозначения:

$$\begin{aligned} F &= A^2 + 12C, \\ R &= 2A^3 + 27B^2 - 72AC + \sqrt{-4F^3 + (2A^3 + 27B^2 - 72AC)^2}, \\ Q &= \left( -\frac{2A}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}} F}{3R^{\frac{1}{3}}} + \frac{R^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Тогда решения уравнения будут:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2}Q^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left( -\frac{4A}{3} - \frac{2^{\frac{1}{3}} F}{3R^{\frac{1}{3}}} - \frac{R^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} - \frac{2B}{Q^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \eta_2 &= \frac{1}{2}Q^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left( -\frac{4A}{3} - \frac{2^{\frac{1}{3}} F}{3R^{\frac{1}{3}}} - \frac{R^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} - \frac{2B}{Q^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \eta_3 &= -\frac{1}{2}Q^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left( -\frac{4A}{3} - \frac{2^{\frac{1}{3}} F}{3R^{\frac{1}{3}}} - \frac{R^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} + \frac{2B}{Q^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \eta_4 &= -\frac{1}{2}Q^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left( -\frac{4A}{3} - \frac{2^{\frac{1}{3}} F}{3R^{\frac{1}{3}}} - \frac{R^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} + \frac{2B}{Q^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

## Литература

- [1] A. W. Steiner et al., Phys. Rept. 411, 325 (2005).
- [2] M. Alford, G. Good, S. Reddy, Phys. Rev. C 72, 055801 (2005).
- [3] W. E. Thirring, Ann. Phys. 3, 91 (1958).
- [4] J. Schwinger, Phys. Rev. 128, 2425 (1962).
- [5] Y. Frishman, J. Sonnenschein, Phys. Rept. 223, 309 (1993).
- [6] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B72, 461 (1974).
- [7] D. J. Gross, A. Neveu, Phys. Rev. D 10, 3235 (1974).
- [8] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122, 345 (1961).
- [9] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, Phys. Rev. 106, 162 (1957).
- [10] Н. Н. Боголюбов, ЖЭТФ 34, 41 (1958).
- [11] B. C. Barrois, Nucl. Phys. B 129, 390 (1977).
- [12] S. C. Frautschi, "Asymptotic freedom and color superconductivity in dense quark matter Proceedings of Workshop on Hadronic Matter at Extrim Energy Density, Ed., N. Cabibbo, Erice, Italy (1978).
- [13] D. Bailin, A. Love, Phys. Rep. 107, 325 (1984).
- [14] D. Ebert, K. G. Klimenko, H. Toki, Phys. Rev. D 64, 014038 (2001)
- [15] D. Ebert, K. G. Klimenko, H. Toki, V. Ch. Zhukovsky, Prog. Theor. Phys. 106, 835 (2001).



- 
- [16] А. В. Борисов, А. С. Вшивцев, В. Ч. Жуковский, П. А. Эминов, УФН, 167, 241-267 (1997).
  - [17] D. Ebert, A. V. Tyukov, V. Ch. Zhukovsky, Phys. Rev. D 80, 085019 (2009).
  - [18] D. Ebert, A. V. Tyukov, V. Ch. Zhukovsky, Phys. Rev. D 76, 064029 (2007).
  - [19] M. G. Alford, A. Schmitt, K. Rajagopal, T. Schäffer, Rev. Mod. Phys. 80, 1455 (2008).
  - [20] U. Vogl, W. Weise, Prog. Part. Nucl. Phys. 27, 195 (1991).
  - [21] S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. 64, 649 (1992).
  - [22] К. Г. Клименко, А. С. Вшивцев, ЖЭТФ 84, 1057 (1997).
  - [23] T. M. Schwarz, S. P. Klevansky, G. Rapp, Phys. Rev. C 60, 055205 (1999).
  - [24] I. N. Mishustin, L. M. Satarov, H. Stöcker, W. Greiner, Phys. Atom. Nucl. 64, 802 (2001).
  - [25] M. Buballa, Nucl. Phys. A 611, 393 (1996).
  - [26] D. Ebert, M. K. Volkov, Yad. Fiz. 36 1265 (1982).
  - [27] D. Ebert, H. Reinhardt, Nucl. Phys. B 271 188 (1986).
  - [28] D. Ebert, H. Reinhardt, M. K. Volkov, Progr. Part. Nucl. Phys. 33, 1 (1994).
  - [29] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, Phys. Lett. B 349, 477 (1995).
  - [30] А. С. Вшивцев, В. Ч. Жуковский, К. Г. Клименко, ЖЭТФ 111, 1921 (1997).

- 
- [31] K. G. Klimenko, Teor. Mat. Fiz. 89, 211 (1991).
  - [32] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, Phys. Rev. Lett. 73, 3499 (1994).
  - [33] G. 't Hooft, Phys. Rev. D 14, 3432 (1976).
  - [34] G. 't Hooft, Phys. Rep. 142, 357 (1986).
  - [35] A. Basu, A. Maharana, Phys. Rev. D 75, 065005 (2007).
  - [36] E. Antonyan, J. A. Harvey, S. Jensen, D. Kutasov, arXiv: hep-th/0604017v1 3 Apr 2006.
  - [37] В. А. Ильина, П. К. Силаев, "Численные методы для физиков-теоретиков Т.1,2, Институт Компьютерных исследований, Москва, 2003.
  - [38] V. A. Kostelecky, R. Potting, Phys. Rev. D 51, 3923 (1985).
  - [39] V. A. Kostelecky, S. Samuel, Phys. Rev. D 39, N2 15 Jan 1989.
  - [40] R. Gambini, J. Pullin, Phys. Rev. D 59, 124021 (1999).
  - [41] J. Alfaro, H. A. Morales-Tecotl, L. F. Urrutia, Phys. Rev. Lett 84, 2318 (2000).
  - [42] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, Phys. Rev. Lett 87, 141601 (2001).
  - [43] O. Bertolami, L. Guisado, Phys.Rev. D 67, 025001 (2003).
  - [44] N. Seiberg, E. Witten, JHEP 9909, 032 (1999).
  - [45] S. G. Nibbelink, P. A. Bolokhov, M. Pospelov, Phys. Rev. D 72, 015013 (2005).
  - [46] R. Lehnert, EURESCO conference, Portoroz, Slovenia, July 2003, arXiv: hep-ph/0312093v1.

- [47] J. Kowalski-Glikman, Lect. Notes Phys. 669, 131 (2005).
- [48] O. Bertolami, C. Carvalho, Phys. Rev. D 74, 084020 (2006).
- [49] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. 89, 231602 (2002).
- [50] H. Dehmelt, R. Mittleman, R. S. Van Dyck, Jr., P. Schwinberg, arXiv: hep-ph/9906262v3.
- [51] D. Colladay, V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D 55, 6760 (1997); 58, 116002 (1998).
- [52] V. Ch. Zhukovsky, A. E. Lobanov, E. M. Murchikova Phys. Rev. D 73, 065016 (2006).
- [53] I. E. Frolov, V. Ch. Zhukovsky, J. Phys. A 40, 10625 (2007).
- [54] A. A. Andrianov, P. Giacconi, R. Soldati, Grav. Cosmol. Suppl. 8N1, 41 (2002).
- [55] O. G. Kharlanov, V. Ch. Zhukovsky, J. Math. Phys. 48, 092302 (2007).
- [56] R. Jackiw, V. A. Kostelecky, Phys. Rev. Lett., Vol. 82, N. 18, 3 MAY 1999.
- [57] V. I. Denisov, S. I. Svertilov, Phys. Rev. D, Vol. 71, 063002 (2005).
- [58] В. И. Денисов, И. П. Денисова, В. Г. Жотиков, ЖЭТФ, Vol. 128, 233-242 (2005).
- [59] Yu. A. Sitenko, K. Yu. Rulik, Eur. Phys. J. C 28, 405–414 (2003).
- [60] D. Ebert, V. Ch. Zhukovsky, A. S. Razumovsky, Phys. Rev. D 70, 025003 (2004).
- [61] И. В. Криве, А. С. Рожавский, Успехи Физических Наук, Том 152, вып. 1, Май 1987 г.
- [62] B. Rosenstein, B. J. Warr, S.H. Park, Phys. Rev. Lett. Vol 62 N 16, 27 Mar 1989.

- 
- [63] B. Rosenstein, B. J. Warr, S. H. Park, Phys. Rev. D 39, N 10, 15 May 1989.
- [64] H. R. Christiansen, A. C. Petkou, M. B. Silva Neto, N. D. Vlachos, Phys. Rev. D, Vol. 62, 025018.
- [65] D. Mattingly, Living Rev. Rel. 8, 5 (2005).
- [66] H. Vucetich, arXiv: gr-qc/0502093v1 22 Feb 2005.
- [67] Н. В. Губина, В. Ч. Жуковский, Вестник Московского Университета, серия 3 (физика, астрономия), 5, 16 (2009).
- [68] W. Bietenholz, A. Gfeller, U.-J. Wiese, JHEP 0310. P. 018 (2003).
- [69] K. Fujikawa, Phys. Rev. D 21, 2848 (1980).
- [70] D. Ebert, K. G. Klimenko, A. V. Tyukov, V. Ch. Zhukovsky, Phys. Rev. D 78, 045008 (2008);
- [71] D. Ebert, K. G. Klimenko, Phys. Rev. D 80, 125013 (2009);
- [72] В. Ч. Жуковский, К. Г. Клименко, Т. Г. Хунджа, Вестник Московского Университета, серия 3 (физика, астрономия) 65, 21 (2010).
- [73] U. Wolff, Phys. Lett. B 157, 303 (1985);
- [74] K. G. Klimenko, Theor. Math. Phys. 75, 487 (1988);
- [75] T. Inagaki, T. Kouno, T. Muta, Int. J. Mod. Phys. A 10, 2241 (1995);
- [76] S. Kanemura, H.-T. Sato, Mod. Phys. Lett. A 10, 1777 (1995);
- [77] D. Fernandez-Fraile, Phys. Rev. D 83, 065001 (2011).
- [78] D. Ebert, K. G. Klimenko, arXiv:0902.1861.
- [79] E. Nakano, T. Tatsumi, Phys. Rev. D 71, 114006 (2005).
- [80] D. Nickel, Phys. Rev. D 80, 074025 (2009); S. Carignano, D. Nickel, M. Buballa, Phys. Rev. D 82, 054009 (2010).

- 
- [81] I. E. Frolov, K. G. Klimenko, V. Ch. Zhukovsky, Phys. Rev. D 82, 076002 (2010).
- [82] K. Ohwa, Phys. Rev. D 65, 085040 (2002).
- [83] D. Ebert, N. V. Gubina, S. G. Kurbanov, V. Ch. Zhukovsky, Phys.Rev. D 84, 025004 (2011).
- [84] L. Jacobs, Phys. Rev. D 10, 3956 (1974); W. Dittrich, B.-G. Englert, Nucl. Phys. B 179, 85 (1981); K. G. Klimenko, Theor. Math. Phys. 70, 87 (1987).
- [85] C. f. Mu, L. y. He, Y. x. Liu, Phys. Rev. D 82, 056006 (2010).
- [86] E. V. Gorbar, M. Hashimoto, V. A. Miransky, Phys. Rev. Lett. 96, 022005 (2006); J. O. Andersen, T. Brauner, Phys. Rev. D 81, 096004 (2010).