Neutrino propagator in medium: algebraic aspects

I. V. Potapova – *5-year student of Physics Faculty of Irkutsk State University.*

Abstract: A convenient γ-matrix basis is built for the problem of a neutrino propagation through a non-polarized medium. The basis consists of eight elements and is founded on using of off-mass-shell projection operators. It has simple multiplicative properties.

Пропагатор нейтрино в среде: алгебраические аспекты

Калошин А.Е.[1], Потапова И.В.[2] Иркутский Государственный Университет

Аннотация

Для задачи распространения нейтрино в движущейся неполяризованной среде построен удобный гамма-матричный базис. Он состоит из восьми элементов, основан на использовании внемассовых проекционных операторов и имеет простые мультипликативные свойства.

1 Введение

Рассмотрим взаимодействие нейтрино и антинейтрино с электронами. Для движущейся неполяризованной материи, состоящей из электронов, получаем уравнение Дирака для волновой функции нейтрино [1]:

$$\begin{aligned} &\{i\gamma_\mu\partial^\mu - \frac{1}{2}\gamma_\mu(1-\gamma^5)f^\mu - m\}\Psi(x) = 0,\\ &f^\mu = \frac{G_f}{\sqrt{2}}(1+4sin^2\theta_w)j^\mu, \quad j^\mu = (n, n\mathbf{u}), \end{aligned} \tag{1}$$

где n - плотность электронов среды, $\mathbf{u}$ - скорость среды.

Уравнение на функцию Грина в импульсном представлении:

$$\{\hat{p} - m - \frac{1}{2}\hat{f}(1-\gamma_5)\}G(p,u) = -1.$$

Пропагатор нейтрино в среде зависит от двух четырехмерных векторов p и u, что приводит к более сложной гамма-матричной структуре и, соответственно, к усложнению его алгебраических свойств.

2 Проекционный и γ-матричный базис

Наиболее естественным базисом для разложения является γ-матричный базис:

$$\begin{aligned} S(p,u) = &s_1 I + s_2\hat{p} + s_3\hat{u} + s_4\sigma^{\mu\nu}p_\mu u_\nu + s_5 i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}u_\lambda p_\rho + \\ &+ s_6\gamma^5 + s_7\hat{p}\gamma^5 + s_8\hat{u}\gamma^5, \end{aligned} \tag{2}$$

[1]kaloshin@physdep.isu.ru
[2]potapova.i.v@gmail.com

где s_i – Лоренц-инвариантные коэффициенты, u^μ – четырехмерная скорость. Всего в разложении имеется восемь независимых компонент с учетом нарушения четности. Известно, что γ-матричный базис является полным, коэффициенты разложения свободны от сингулярностей и связей. Однако, этот базис неудобен при умножении и обращении, так как базисные элементы не ортогональны друг другу.

Построим Λ-базис, который наиболее удобен при умножении и обращении выражений типа $S(p,u)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_1 &= \Lambda^+\ \frac{1+\hat{x}\gamma^5}{2}, & \mathcal{Q}_2 &= \Lambda^-\ \frac{1+\hat{x}\gamma^5}{2},\\
\mathcal{Q}_3 &= \Lambda^+\ \frac{1-\hat{x}\gamma^5}{2}, & \mathcal{Q}_4 &= \Lambda^-\ \frac{1-\hat{x}\gamma^5}{2},\\
\mathcal{Q}_5 &= \Lambda^+\ \frac{\gamma^5+\hat{x}}{2}, & \mathcal{Q}_6 &= \Lambda^-\ \frac{\gamma^5+\hat{x}}{2},\\
\mathcal{Q}_7 &= \Lambda^+\ \frac{\gamma^5-\hat{x}}{2}, & \mathcal{Q}_8 &= \Lambda^-\ \frac{\gamma^5-\hat{x}}{2}.
\end{aligned}$$

Строится он с использованием внемассовых проекционных $(\dfrac{1\pm\hat{x}\gamma^5}{2})$ и нильпотентных $(\dfrac{\gamma^5\pm\hat{x}}{2})$ операторов со следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
\frac{1\pm\hat{x}\gamma^5}{2}\frac{1\pm\hat{x}\gamma^5}{2} &= \frac{1\pm\hat{x}\gamma^5}{2},\\
\frac{\gamma^5\pm\hat{x}}{2}\frac{\gamma^5\mp\hat{x}}{2} &= \frac{1\pm\hat{x}\gamma^5}{2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Основу составляют операторы $\Lambda^\pm = \dfrac{1}{2}(1\pm\dfrac{\hat{p}}{W})$ [2, 3], причем

$$\Lambda^\pm\ \Lambda^\pm = \Lambda^\pm, \quad \Lambda^\pm\ \Lambda^\mp = 0, \quad W = \sqrt{p^2}.$$

Введенный здесь вектор $x^\mu = b(p^\mu(up) - u^\mu p^2)$ обладает свойствами:

$$x^\mu p_\mu = 0, \qquad x^\mu x_\mu = b^2 p^2 [p^2 - (up)^2],$$

где b – нормировочный множитель. Таким образом, x^μ ортогонален импульсу, а его квадрат зависит от знака квадрата импульса. Если $p^2 > 0$ и среда покоится или движется медленно, то x^μ – пространственноподобный вектор. Тогда, выбирая нормировочный множитель $b^2 = 1/(p^2[(up)^2 - p^2])$, можно положить $x^2 = -1$.

Полученный базис является полным, его элементы независимы и имеют простые свойства относительно умножения (табл. 1).

	$\mathcal{Q}_1$	$\mathcal{Q}_2$	$\mathcal{Q}_3$	$\mathcal{Q}_4$	$\mathcal{Q}_5$	$\mathcal{Q}_6$	$\mathcal{Q}_7$	$\mathcal{Q}_8$
$\mathcal{Q}_1$	$\mathcal{Q}_1$	0	0	0	$\mathcal{Q}_5$	0	0	0
$\mathcal{Q}_2$	0	$\mathcal{Q}_2$	0	0	0	$\mathcal{Q}_6$	0	0
$\mathcal{Q}_3$	0	0	$\mathcal{Q}_3$	0	0	0	$\mathcal{Q}_7$	0
$\mathcal{Q}_4$	0	0	0	$\mathcal{Q}_4$	0	0	0	$\mathcal{Q}_8$
$\mathcal{Q}_5$	0	0	0	$\mathcal{Q}_5$	0	0	0	$\mathcal{Q}_1$
$\mathcal{Q}_6$	0	0	$\mathcal{Q}_6$	0	0	0	$\mathcal{Q}_2$	0
$\mathcal{Q}_7$	0	$\mathcal{Q}_7$	0	0	0	$\mathcal{Q}_3$	0	0
$\mathcal{Q}_8$	$\mathcal{Q}_8$	0	0	0	$\mathcal{Q}_4$	0	0	0

Таблица 1: Мультипликативные свойства операторов базиса.

3 Процедура обращения пропагатора

Уравнение для нахождения значения, обратного данному:

$$(\sum_M \mathcal{Q}_M\overline{S}_M)(\sum_L \mathcal{Q}_L\overline{G}_L) = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_3 + \mathcal{Q}_4 = I.$$

Оно сводится к системе уравнений на коэффициенты $\overline{G}_L$ ($\overline{S}_M$ считаем известными), которая разбивается на четыре:

$$\begin{aligned}
&\overline{S}_5\overline{G}_8 + \overline{S}_1\overline{G}_1 = 1, \quad \overline{S}_8\overline{G}_1 + \overline{S}_4\overline{G}_8 = 0,\\
&\overline{S}_6\overline{G}_7 + \overline{S}_2\overline{G}_2 = 1, \quad \overline{S}_7\overline{G}_2 + \overline{S}_3\overline{G}_7 = 0,\\
&\overline{S}_7\overline{G}_6 + \overline{S}_3\overline{G}_3 = 1, \quad \overline{S}_6\overline{G}_3 + \overline{S}_2\overline{G}_6 = 0,\\
&\overline{S}_8\overline{G}_5 + \overline{S}_4\overline{G}_4 = 1, \quad \overline{S}_5\overline{G}_4 + \overline{S}_1\overline{G}_5 = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда выражения для $\overline{G}_i$:

$$\begin{aligned}
&\overline{G}_1 = -\overline{S}_4/\Delta_1, \overline{G}_2 = -\overline{S}_3/\Delta_2, \overline{G}_3 = -\overline{S}_2/\Delta_2, \overline{G}_4 = -\overline{S}_1/\Delta_1,\\
&\overline{G}_5 = \overline{S}_5/\Delta_1,\ \overline{G}_6 = \overline{S}_6/\Delta_2, \overline{G}_7 = \overline{S}_7/\Delta_2, \overline{G}_8 = \overline{S}_8/\Delta_1.
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\Delta_1 = \overline{S}_8\overline{S}_5 - \overline{S}_4\overline{S}_1, \quad \Delta_2 = \overline{S}_7\overline{S}_6 - \overline{S}_3\overline{S}_2.$$

4 Частные случаи. Отсутствие среды

Положим коэффициенты при $\hat{u}$ в γ-матричном базисе (2) равными нулю (отсутствие среды), тогда коэффициенты в проекционном базисе будут иметь следующий вид:

$$\overline{S}_1 = s_1 + s_2W,\ \overline{S}_2 = s_1 - s_2W,\ \overline{S}_3 = s_1 + s_2W,\ \overline{S}_4 = s_1 - s_2W,$$
$$\overline{S}_5 = s_6 + s_7W,\ \overline{S}_6 = s_6 - s_7W,\ \overline{S}_7 = s_6 + s_7W,\ \overline{S}_8 = s_6 - s_7W. \tag{5}$$

Коэффициенты в γ-матричном базисе для обратного пропагатора:

$$\overline{G}_1 = \frac{s_1}{s_7^2W^2 - s_6^2 - s_2^2W^2 + s_1^2},$$
$$\overline{G}_2 = \frac{-s_2}{s_7^2W^2 - s_6^2 - s_2^2W^2 + s_1^2},$$
$$\overline{G}_3 = \overline{G}_4 = \overline{G}_5 = 0,$$
$$\overline{G}_6 = \frac{-s_6}{s_7^2W^2 - s_6^2 - s_2^2W^2 + s_1^2},$$
$$\overline{G}_7 = \frac{-s_7}{s_7^2W^2 - s_6^2 - s_2^2W^2 + s_1^2},$$
$$\overline{G}_8 = \frac{-s_7}{s_7^2W^2 - s_6^2 - s_2^2W^2 + s_1^2}.$$

5 Частные случаи. Сохранение четности

В случае сохранения четности коэффициенты при членах, содержащих γ^5, будут равняться нулю. Тогда коэффициенты в γ-базисе обратного пропагатора имеют вид:

$$\overline{G}_1 = \frac{s_3(pu) + s_2W^2 + s_1W}{W},$$
$$\overline{G}_2 = \frac{-s_3(pu) - s_2W^2 + s_1W}{W},$$
$$\overline{G}_3 = \frac{s_3(pu) + s_2W^2 + s_1W}{W},$$
$$\overline{G}_4 = \frac{-s_3(pu) - s_2W^2 + s_1W}{w},$$
$$\overline{G}_5 = \frac{-s_4W - s_3}{bW^2},$$
$$\overline{G}_6 = \frac{s_4W - s_3}{bW^2},$$
$$\overline{G}_7 = \frac{s_4W + s_3}{bW^2},$$
$$\overline{G}_8 = \frac{-s_4W + s_3}{bW^2}.$$

6 Пропагатор нейтрино: явный вид

Используя проекционный базис и данную процедуру обращения легко записать выражение для функции Грина в веществе [4]:

$$G_{matt} = \frac{-(p^2 - m^2)(\hat{p} + m) + \hat{f}(\hat{p} - m)P_L(\hat{p} + m) - f^2\hat{p}P_L + 2(fp)P_R(\hat{p} + m)}{(p^2 - m^2)^2 - 2(fp)(p^2 - m^2) + f^2p^2},$$
$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5).$$

7 Заключение

Так, получен наиболее удобный базис на основе внемасовых проекционных операторов с максимально простыми мультипликативными свойствами для изотропной неполяризованной среды, учитывая ее движение и нарушение четности. Использованные внемассовые проекционные операторы имеют достаточно широкое применение в других задачах (например, пропагатор поля спина 3/2 в вакууме или среде, смешивание фермионов). Предложенный базис и найденную процедуру обращения в дальнейшем возможно применить для рассмотрения нейтринных осцилляций в среде.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 гг.)» (проект РНП.2.2.1.1/1483, 2.1.1/1539).

Литература

[1] Grigoriev A., Studenikin A.,Ternov A.// Phys. Atom. Nucl.-2006.-69.-C.1940-1945.

[2] Kaloshin A. E., Lomov V. P.//Phys.Atom.Nucl.-2006.-69.-C.541-551.

[3] Korpa C. L., Dieperink A. E. L. // Phys.Rev.-2004.-C.70:015207.

[4] Studenikin A.//J.Phys.-2006.-A39.-C.6769-6776.