

## Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte

Von

ERIKA BÖHM-VITENSE, Kiel

Mit 5 Textabbildungen

(Eingegangen am 5. Juni 1958)

Die Temperatur- und Druckschichtung in den Wasserstoffkonvektionszonen von Sternatmosphären mit effektiven Temperaturen zwischen  $4400^\circ$  und  $8000^\circ$  wird mit Hilfe einer Mischungswegtheorie unter Berücksichtigung des Strahlungsaustausches berechnet. In Abb. 3 sind die relativen Tiefen der Konvektionszonen eingezeichnet. Außerdem werden die zu erwartenden maximalen Geschwindigkeiten (Abb. 4) und Temperaturinhomogenitäten (Tab. 6) angegeben. Bei heißen Sternen und bei Übergiganten mittlerer Temperaturen verhindert der Strahlungsaustausch die Ausbildung einer eigentlichen Konvektionszone. In einigen Schichten dieser Atmosphären wird die Strahlungsbeschleunigung größer als die Gravitationsbeschleunigung. Eine durch die Strahlungsbeschleunigung angefachte Konvektion gibt es — jedenfalls in einer grauen Atmosphäre — trotzdem nicht.

### A. Einleitung

Es hat sich in neuerer Zeit gezeigt, daß für die Klärung sehr verschiedenartiger Probleme der Astrophysik eine relativ genaue Kenntnis der Struktur und Ausdehnung der Wasserstoffkonvektionszone in den Sternen erforderlich ist. F. HOYLE und M. SCHWARZSCHILD (1955) vertreten z. B. die Meinung, daß die Wasserstoffkonvektionszone den Aufbau der roten Riesen stark verändere und damit wesentlichen Einfluß auf die Entwicklungsgeschichte eines Sternes habe. — Von M. RUDKJÖBING (1953) wurde vermutet, daß durch das Einsetzen der Konvektion im Bereich später A- oder früher F-Sterne der Zusammenhang zwischen effektiver Temperatur und Spektraltyp auch bei gleicher Schwerebeschleunigung nicht mehr eindeutig wäre. Er möchte so das Auftreten der Metallliniensterne in diesem Bereich des Hertzsprung-Russell-Diagramms deuten. — Weiterhin sollten nach L. BIERMANN (1955) auch die beobachteten hohen Turbulenzgeschwindigkeiten in heißen Übergiganten [H. H. VOIGT (1952), A. SLETTEBAK (1956)] durch die Wasserstoffkonvektionszone hervorgerufen werden. — Endlich dürfte eine genaue Kenntnis der Struktur der Wasserstoffkonvektionszone auch für das Verständnis der Cepheidenpulsation wichtig sein [A. S. EDDINGTON (1941)].

Leider sind die Grundlagen einer Theorie der turbulenten Konvektion in Atmosphären mit Temperatur- und Dichtegradienten z. Z. noch wenig entwickelt, so daß wir im folgenden auf eine relativ grobe Näherung im Sinne der Mischungswegtheorie angewiesen sind. Das heißt, wir machen die vereinfachende Annahme, daß Turbulenzelemente von der Größe eines Mischungsweges jeweils die Strecke eines Mischungsweges zurücklegen und sich dann momentan auflösen. Dabei geben sie ihre überschüssige Energie an die Umgebung ab. Das Problem liegt dann in der Festlegung des Mischungsweges. Nun hängt die Struktur der Konvektionszone wesentlich davon ab, welcher Bruchteil des gesamten Energietransportes durch die Konvektion bewältigt wird. Die Größe des Mischungsweges muß deshalb so gewählt werden, daß mit der getroffenen Schematisierung der Energietransport möglichst gut wiedergegeben wird. Wir identifizieren daher den Mischungsweg mit der Größe derjenigen Elemente, die die meiste Energie transportieren. Eine Arbeit von A. SKUMANICH (1955) hatte zwar ergeben, daß *ohne* horizontalen Energieaustausch die kleinsten Störungswellenlängen die instabilsten sind und wegen ihrer großen Geschwindigkeiten dann auch die meiste Energie transportieren. (Der Temperaturüberschuß ist bei Vernachlässigung des horizontalen Energieaustausches von der Störungswellenlänge unabhängig.) Trotzdem wählen wir den Mischungsweg nicht so klein, denn die kleinen Elemente tauschen zu viel Energie durch Strahlung aus und tragen deshalb zum konvektiven Energietransport nicht bei. Je größer die Elemente sind, desto unbedeutender ist der Strahlungsaustausch und desto mehr Energie kann durch Konvektion transportiert werden.

Andererseits ist die Größe eines Elementes nach oben hin begrenzt durch die Forderung, daß es noch als einheitliches Gebilde bestehen kann. Die für die Konvektion wichtigen physikalischen Größen wie Druck, Temperatur oder Instabilität — letztere gemessen durch die mittlere Beschleunigung eines auf- oder absteigenden Elementes — dürfen sich also in den verschiedenen Teilen eines solchen Turbulenzelementes nicht zu stark unterscheiden. Der Druck ändert sich aber innerhalb einer Äquivalenthöhe um einen Faktor  $e$  und die Temperatur z. B. bei der Sonne um einen vergleichbaren Faktor. Bedenkt man weiter, daß der Mischungsweg auch etwa *die* Länge angeben soll, die ein Element zurücklegt, ohne seine Identität zu verlieren, so erhält man als obere Begrenzung wieder etwa die Größe einer Äquivalenthöhe, denn nach einer Druckänderung um einen Faktor  $e$  muß das Element seine Struktur schon ganz wesentlich geändert haben.

Neuere Beobachtungen der Sonnengranulation von J. RÖSCH (1957) und insbesondere von M. SCHWARZSCHILD, J. B. ROGERSON jr., J. W. EVANS (1957) zeigen, daß die Granulen im Durchschnitt etwas kleiner

als eine Bogensekunde sind, — die kleinsten sind etwa  $0''.3$ , — also etwa 600 km Durchmesser haben. Da die beobachteten Granulationselemente im Mittel aus Schichten aufgestiegen sind, in denen die Äquivalenthöhe 300—400 km beträgt, so kann man wiederum schließen, daß die für den Energietransport wirksamen Elemente zumindest in den oberen Atmosphärenschichten etwa 1—2 Äquivalenthöhen groß sind\*.

Auch die Rechnungen von M. SCHWARZSCHILD, R. HOWARD and R. HÄRM (1957) über den inneren Aufbau der Sonne, zeigen, daß man ihre Lage im Hertzsprung-Russell-Diagramm gut wiedergeben kann, wenn man den Aufbau der Wasserstoffkonvektionszone mit einem Mischungsweg von  $1\frac{1}{2}$  Äquivalenthöhen berechnet.

Wir haben durchweg mit einem Mischungsweg von *einer* Äquivalenthöhe gerechnet (außer, wenn sich die Instabilität über eine Äquivalenthöhe zu stark ändert, s. Abschnitt IV). Trotzdem müssen wir eine ziemlich große Unsicherheit unserer Ergebnisse zulassen. Wir dürfen aber wohl annehmen, daß die wesentlichen Züge der Konvektionszonen und insbesondere deren Abhängigkeit von Effektivtemperatur und Leuchtkraft richtig wiedergegeben werden.

Ein offenes Problem besteht noch hinsichtlich des Rayleigh-Kriteriums, d. h. der Festlegung der Mindestinstabilität, bei welcher Konvektion trotz Viskosität und Wärmeaustausch noch einsetzen kann. Eine einfache Anwendung des bekannten Rayleigh-Kriteriums, das unter alleiniger Berücksichtigung der Wärmeleitung und ohne die Annahme eines Dichtegradienten abgeleitet wurde [vgl. A. UNSÖLD (1955)] [und wie wir es irrtümlicherweise in der Arbeit über die Wasserstoffkonvektionszone der Sonne (E. VITENSE, 1953) verwendet haben] ist in den Sternatmosphären sicher nicht gestattet, da der wesentliche Energieaustausch durch *Strahlung* erfolgt. Die Ableitung eines Rayleigh-Kriteriums unter Berücksichtigung von Strahlungsaustausch bei Variation von Dichte, Druck und Absorptionskoeffizient steht aber z. Z. noch aus. Wenn die Konvektionszone dünn ist und der Absorptionskoeffizient sich nicht sehr stark ändert — was in Sternatmosphären leider nie gleichzeitig zutrifft — könnte man das bekannte Rayleigh-Kriterium vielleicht in der Weise modifizieren, daß man statt des Wärmeleitungskoeffizienten den entsprechenden Koeffizienten für den Strahlungsaustausch einsetzen würde.

## B. Verfahren zur Berechnung der Temperatur- und Druckschichtung in Sternatmosphären

### I. Die äußere Strahlungsgleichgewichtszone

Um die äußeren Randbedingungen für die Wasserstoffkonvektionszone zu erhalten, muß zunächst die Schichtung der äußeren Strahlungsgleichgewichtszone bekannt sein. Bei ihrer Berechnung knüpfen wir im wesentlichen an die Ergebnisse von K. HUNGER (1955) an, der

---

\* In tiefen Schichten kann der Mischungsweg eventuell kleiner sein. In sehr dicken Konvektionszonen ist aber die Schichtung dort praktisch adiabatisch, so daß es auf die Größe des Mischungsweges nicht mehr ankommt.

gefunden hatte, daß man auch unter Berücksichtigung der „Nichtgrauheit“ der Atmosphäre — abgesehen von den Linien — die Forderung konstanten Strahlungsstromes im Bereich der Effektivtemperaturen  $T_e$  von  $8100^\circ$  bis  $9500^\circ$  sehr gut erfüllen kann durch eine Temperaturschichtung der Form

$$T^4 = 3/4 T_e'^4 (\bar{\tau} + q(\bar{\tau})), \quad (1)$$

wobei für den von K. HUNGER untersuchten Temperaturbereich  $T_e' = T_e + 100^\circ$  ist und für alle Atmosphären

$$q(\bar{\tau}) = 0.727 - 0.1406 \cdot e^{-2.54 \bar{\tau}}. \quad \star$$

Dabei ist  $\bar{\tau}$  die auf den Rosselandschen Mittelwert des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten bezogene optische Tiefe.

Dieses  $q(\bar{\tau})$  wurde anhand von S. CHANDRASEKHARS (1936) Untersuchungen so bestimmt, daß es der Nichtgrauheit des Absorptionskoeffizienten zunächst genähert Rechnung trägt. Exakte Berechnungen des Strahlungsstromes verifizierten nachträglich seine Konstanz in der Atmosphäre bis auf Bruchteile eines Prozentes.

Versucht man, die Temperaturschichtung der Sonne ebenfalls durch einen Ausdruck der Form (1) darzustellen, so findet man, daß dies gut möglich ist mit  $T_e' = T_e + 200^\circ$ . Beim Beginn dieser Arbeit war nur noch ein weiteres Strahlungsgleichgewichtsmodell genau bekannt, nämlich das für  $\tau$  Scorpii von G. TRAVING (1955) berechnete mit  $T_e = 32800^\circ$ . Dessen Temperaturschichtung läßt sich nur schlecht durch eine Gleichung der Form (1) darstellen. Um in  $\bar{\tau} = 0.6$  die richtige Temperatur zu erhalten, müßte man  $T_e' - T_e = 2500^\circ$  wählen.

Dies mag für unsere Zwecke genügen. In Abb. 1 haben wir  $T_e' - T_e$  als Funktion der effektiven Temperatur für die besprochenen Modelle durch Kreuze eingetragen. Die außerdem eingezeichnete Interpolationskurve wird für

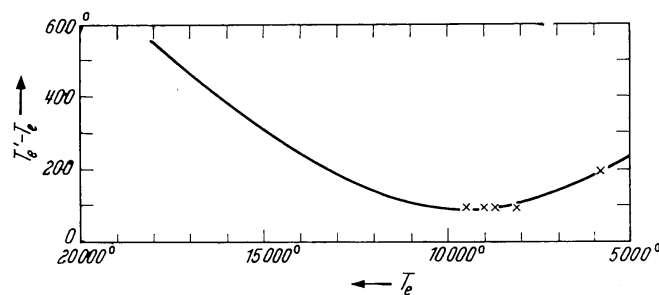


Abb. 1. Die Differenz  $T_e' - T_e$  als Funktion der effektiven Temperatur  $T_e$ . Die eingezeichneten Kreuze entsprechen den theoretischen Modellen von K. HUNGER für A Sterne und von K. H. BÖHM für die Sonne

Temperaturen  $> 15000^\circ$  naturgemäß sehr unsicher; unterhalb  $15000^\circ$  dürfte ihre Unsicherheit aber  $\pm 50^\circ$  kaum übersteigen. Da selbst die besten Sonnenmodelle noch eine Unsicherheit dieser Größenordnung in sich tragen, so können wir für unsere Modelle eine solche Ungenauigkeit ohne weiteres in Kauf nehmen.

$\star$  Die so berechneten  $q(\bar{\tau})$  unterscheiden sich von den bei C. MARK (1947) tabulierten Werten für die graue Atmosphäre im Bereich  $0.01 \leq \bar{\tau} \leq 3$  um weniger als 1%.

Aus Abb. 1 lesen wir nun folgende Werte von  $T'_e - T_e$  ab\*:

Tabelle 1. Die in die Temperaturschichtung (1) eingehenden  $T'_e$  für verschiedene effektive Temperaturen  $T_e$

$T_e$	15000	12000	11000	10000	9000	8000	7000	5800	5000	4400
$T'_e - T_e$	300	110	100	100	100	125	150	200	225	240
$T'_e$	15300	12110	11100	10100	9100	8125	7150	6000	5225	4640

Bei der Berechnung der Temperaturschichtung hatte K. HUNGER den Einfluß der Linien nicht berücksichtigt, da dieser sich (abgesehen vielleicht von den Balmerlinien) nur in den höchsten Schichten bemerkbar macht. Er konnte deshalb die gemessenen Restintensitäten der Balmerlinien nicht richtig wiedergeben. Wir haben hier nun versucht, dem Einfluß der Linien in ganz grober Weise Rechnung zu tragen durch die Annahme eines Temperaturabfalles mit  $Be^{-30\bar{\tau}}$  an der Sternoberfläche. Die Konstante  $B$  haben wir so bestimmt, daß die Grenztemperatur etwa der gemessenen Restintensität von  $H_\gamma$  entspricht. Dabei haben wir für die Restintensitäten  $I_c$  von  $H_\gamma$  die in Tab. 2 angegebenen Werte\*\* eingesetzt und damit die ebenda angegebenen Grenztemperaturen  $T_0$  erhalten\*\*\*:

Tabelle 2. Restintensitäten  $I_c$  von  $H_\gamma$  und daraus ermittelte Grenztemperaturen  $T_0$  für verschiedene effektive Temperaturen  $T_e$

$T_e$	4400	5000	5800	7000	8000	9000	10000	11000	12000	15000
$I_c$			5%	10%	14%	17%	20%	23%	25%	32%
$T_0$	3030	3450	4030	4940	5840	6540	7320	7900	8420	10170

Als Exponenten der  $e$ -Funktion haben wir  $-30\bar{\tau}$  angesetzt, weil sich damit der berechnete Temperaturabfall auf der Sonne [K. H. BÖHM (1954)] unterhalb von  $\bar{\tau} = 0.01$  innerhalb  $\pm 50^\circ$  darstellen ließ.

Wir glauben, so die Temperaturschichtung der Hauptsequenzsterne mit einer Genauigkeit wiederzugeben, die vergleichbar ist mit derjenigen der detaillierten Strahlungsgleichgewichtsrechnungen, auf denen wir aufbauen.

Die von uns berechneten Temperaturen  $T$  sind als Funktion der optischen Tiefe  $\bar{\tau}$  in Tab. 3 zusammengestellt.

\* Für  $T_e < 5800^\circ$  erschien es zweckmäßig  $\frac{T'_e - T_e}{T_e}$  anstelle von  $T'_e - T_e$  selbst zu extrapolieren.

\*\* Es kommt uns in diesem Zusammenhang nicht auf große Genauigkeit an.

\*\*\* Für  $T_e < 5800^\circ$  wurde für  $\frac{T_e}{T_0}$  der Wert 1,45 angenommen, da sich für alle anderen  $T_e$ -Werte zwischen 1,36 und 1,50 für  $\frac{T_e}{T_0}$  ergeben.



Die *Druckschichtung* der Atmosphäre wurde in bekannter Weise nach der hydrostatischen Grundgleichung berechnet:

$$dP_g = \frac{g_e}{\bar{\kappa}} d\bar{\tau}. \quad (2)$$

Den Ausgangswert von  $P_g$  für  $\bar{\tau} = 0.001$  haben wir unter der Annahme  $\bar{\kappa} = \text{const}$  für  $\bar{\tau} \leq 0.001$  gewonnen.

Tabelle 3. Die Temperatur  $T$  als Funktion der optischen Tiefe  $\bar{\tau}$  für verschiedene effektive Temperaturen  $T_e$ .

$T_e \backslash \bar{\tau}$	4400	5000	5800	7000	8000	9000	10000	11000	12000	15000
0	3030	3450	4030	4940	5840	6540	7320	7900	8420	10170
0.001	3065	3486	4060	4984	5876	6580	7360	7950	8490	10280
0.01	3310	3750	4330	5265	6123	6860	7650	8310	8945	11030
0.02	3485	3940	4550	5470	6320	7110	7880	8600	9300	11550
0.04	3700	4170	4800	5744	6570	7360	8180	8970	9740	12210
0.06	3810	4300	4940	5904	6730	7540	8370	9190	10000	12590
0.08	3890	4388	5040	6010	6840	7660	8510	9350	10180	12840
0.1	3950	4452	5110	6090	6940	7760	8620	9470	10320	13020
0.2	4140	4657	5345	6380	7240	8110	9000	9890	10790	13630
0.3	4274	4817	5525	6590	7490	8380	9310	10230	11160	14090
0.4	4400	4950	5683	6770	7700	8630	9580	10510	11470	14490
0.5	4506	5080	5828	6950	7900	8840	9810	10780	11760	14860
0.6	4600	5190	5960	7100	8070	9040	10030	11020	12020	15180
0.7	4700	5300	6078	7240	8240	9220	10230	11250	12260	15490
0.8	4790	5395	6190	7380	8380	9390	10410	11450	12490	15770
0.9	4868	5485	6290	7490	8530	9550	10600	11640	12700	16030
1.0	4940	5568	6390	7620	8660	9690	10750	11820	12900	16280
1.2	5080	5725	6575	7830	8900	9970	11060	12160	13270	16760
1.5	5270	5940	6816	8130	9240	10340	11470	12610	13770	17380
2.0	5550	6250	7170	8550	9720	10890	12080	13280	14480	18280

Anmerkung zu Tab. 3: Für die Sonne haben wir das von K. H. BÖHM (1954) berechnete „theoretische Sonnenmodell“ benutzt.

Die  $\bar{\kappa}$ -Werte haben wir den Figuren von E. VITENSE (1951) entnommen.

Bei der Berechnung der *effektiven Schwerebeschleunigung*  $g_e$  wurden die Strahlungs- und Turbulenzbeschleunigung mit berücksichtigt. Es ist  $g_e = g - g_r - g_t$ , wobei  $g$  die Gravitationsbeschleunigung,  $g_r$  die Strahlungsbeschleunigung und  $g_t$  die Turbulenzbeschleunigung bedeuten. Nach A. UNSÖLD (1955 b) ist  $g_r = \frac{1}{c} \bar{\kappa} \pi F_{str}$ . Im Strahlungsgleichgewicht gilt demnach  $g_r = \frac{1}{c} \bar{\kappa} \sigma T_e^4$ . Allgemein ist  $\frac{\pi F_{str}}{\pi F} = \frac{V}{V_{str}}$ , wenn  $\pi F_{str}$  den Strahlungsstrom und  $\pi F$  den gesamten Energiestrom

bedeuten. Weiterhin ist  $\nabla = \frac{d \log T}{d \log P_g}$  der logarithmische Gradient, wie er tatsächlich in der Atmosphäre vorhanden ist und  $\nabla_{Str} = \left( \frac{d \log T}{d \log P_g} \right)_{Str}$  der logarithmische Gradient, wie er bei reinem Strahlungsenergie-transport herrschen würde. Wir erhalten so allgemein:

$$g_r = \frac{\bar{\kappa} \sigma T_e^4}{c} \frac{\nabla}{\nabla_{Str}} \quad (3)$$

Nach A. UNSÖLD (1955c) ist ferner

$$g_r = \frac{1}{\varrho} \frac{d}{dt} (\varrho \bar{\xi}^2) = \frac{1}{\varrho} \frac{d}{dt} \left( \frac{\varrho}{2} \xi_t^2 \right) \quad (4)$$

Dabei wird angenommen, daß die vertikale Geschwindigkeitskomponente  $\xi$  dem Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetz mit der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit  $\xi_t$  entspricht. Wir haben nun  $\xi_t$  mit der weiter unten (siehe Gleichung 23) berechneten Geschwindigkeit der auf- bzw. absteigenden Turbulenzelemente  $\bar{v}$  identifiziert und erhalten dann\*

$$g_t = \frac{1}{\varrho} \frac{d}{dt} \left( \frac{\varrho}{2} \bar{v}^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{d \bar{v}^2}{dt} + \frac{1}{2} \bar{v}^2 \frac{d \ln \varrho}{dt} \quad (4a)$$

Dabei ist  $\varrho$  die Dichte und  $t$  die geometrische Tiefe. Führt man statt der geometrischen Tiefe den Gasdruck als Veränderliche ein, so erhält man mit  $\frac{d \log P_g}{dt} = \log e \cdot \frac{\mu g_e}{RT}$  und  $d \ln \varrho = d \ln P_g - d \ln T + d \ln \mu$

$$\frac{d \log \varrho}{d \log P_g} = \frac{d \ln \varrho}{dt} \frac{dt}{d \ln P_g} = \frac{d \ln \varrho}{dt} \cdot \frac{RT}{\mu g_e} = 1 - \nabla + \frac{d \log \mu}{d \log P_g}$$

und

$$g_t = 0.5 \cdot \log e \frac{\mu g_e}{RT} \frac{d \bar{v}^2}{d \log P_g} + 0.5 \frac{\mu g_e}{RT} \bar{v}^2 \left[ 1 - \nabla + \frac{d \log \mu}{d \log P_g} \right]. \quad (5)$$

Dabei ist  $R$  die Gaskonstante. Bei der numerischen Rechnung haben wir das Glied  $\frac{d \log \mu}{d \log P_g}$  vernachlässigt, d. h. wir haben konstantes Molekulargewicht angenommen, was hier genügen mag, da der zweite Term stets viel kleiner als die Gravitationsbeschleunigung ist.

Unterhalb von  $\bar{\tau} = 2$  ändern sich Temperatur und Druck mit der optischen Tiefe nur langsam. Man berechnet dann die Temperatur- und Druckschichtung im Strahlungsgleichgewicht besser mit Hilfe der Beziehung

$$\nabla_{Str} = \frac{3}{16} \frac{\bar{\kappa} P_g}{g_e} \left( \frac{T_e}{T} \right)^4 \quad (6)$$

(siehe E. VITENSE 1953). Weiterhin ist  $d \log T = \int \nabla_{Str} d \log P_g$ .

\* Wenn die vertikalen Geschwindigkeiten in der Konvektionszone dem Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetz entsprächen, hätte man wohl besser das  $\bar{\xi}$  mit dem  $\bar{v}$  identifiziert. Da das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz aber nicht bekannt ist und außerdem die Mittelung des  $v$  mit einem vereinfachten Verteilungsgesetz vorgenommen wird — vgl. Gl. 21 — soll es uns auf solche Feinheiten nicht ankommen.

Schwierigkeiten ergeben sich bei dieser Rechenmethode, wenn die Strahlungsbeschleunigung  $g_r$  oder die Turbulenzbeschleunigung  $g_t$  oder die Summe aus beiden gleich der Gravitationsbeschleunigung  $g$  wird. Dann geht die effektive Schwerebeschleunigung gegen Null und damit  $\nabla_{Str} \rightarrow \infty$ ; gleichzeitig wird nach der hydrostatischen Grundgleichung  $d \log P_g / dt = 0$ . In der Nähe einer solchen Stelle benutzt man als unabhängige Variable statt des Gasdruckes besser die geometrische Tiefe  $t$ . Es ist in unserer Näherung für  $\bar{\tau} \geq 2$

$$dT^4 = \frac{3}{4} T_e^4 \bar{\kappa} / \text{cm} dt.$$

Da weiterhin

$$\bar{\kappa} / \text{cm} = \bar{\kappa} / g_r \cdot \varrho = \bar{\kappa} \frac{P_g \mu}{RT},$$

so wird

$$\int_{T_0}^{T_0 + \Delta T} \frac{1}{\bar{\kappa} \mu} T^4 dT = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{3}{16} T_e^4 \frac{P_g}{R} dt = K \Delta t. \quad (7)$$

Die Größe  $K$  ist in guter Näherung konstant, da sich ja  $P_g$  in dem hier betrachteten Bereich praktisch nicht ändert. Der Integrand links läßt sich als Funktion von  $T$  berechnen und integrieren. Division durch  $K$  ergibt sofort die zugehörigen geometrischen Tiefen. Nachträglich kann man auch noch die der hydrostatischen Grundgleichung entsprechenden geringen Änderungen des Gasdruckes berechnen nach

$$dt = 1.915 \cdot 10^8 \frac{T}{\mu g_s} d \log P_g. \quad (8)$$

## II. Die Wasserstoffkonvektionszone

Nach dem bekannten Schwarzschildschen Kriterium wird eine Atmosphäre instabil gegen Konvektion, wenn

$$\nabla_{ad} = \left( \frac{d \log T}{d \log P_g} \right)_{ad} < \frac{d \log T}{d \log P_g} = \nabla. \quad (9)$$

Da andererseits  $\nabla \leq \nabla_{Str} = \left( \frac{d \log T}{d \log P_g} \right)_{Str}$  [siehe E. VITENSE (1953)], so ist die Bedingung  $\nabla_{ad} < \nabla$  gleichbedeutend mit  $\nabla_{ad} < \nabla_{Str}$ . Ist diese erfüllt, so muß bei der Berechnung der Temperatur- und Druckschichtung der konvektive Energietransport mit berücksichtigt werden.

Der Gang der Rechnung schließt sich mit nur unwesentlichen Änderungen an die Berechnung der Wasserstoffkonvektionszone der Sonne an [E. VITENSE (1953)]. Wir können uns deshalb kurz fassen. Mit den Bezeichnungen der zitierten Arbeit haben wir folgende Gleichungen zu befriedigen:

### 1. Die Energiegleichung

$$\pi F_k + \pi F_{Str} = \sigma T_e^4 \quad (10)$$



( $F_k$  = konvektiver Energiestrom,  $F_{Str}$  = Strahlungsstrom,  $F$  = gesamter Energiestrom,  $T_e$  = effektive Temperatur), d. h. die Summe aus konvektivem — und Strahlungsenergiestrom muß gleich dem gesamten aus der Sternoberfläche austretenden Energiestrom sein.

$$2. \quad \pi F_{Str} = \frac{16}{3} \frac{\sigma T^4}{\bar{\kappa}/\text{cm} \cdot H} V, \quad (11)$$

wie man aus der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes ableitet. Daraus erhält man speziell für reinen Strahlungsenergietransport

$$V_{Str} = \frac{3}{16} \left( \frac{T_e}{T} \right) \bar{\kappa}/\text{cm} \cdot H \quad (12)$$

mit  $H$  = Äquivalenthöhe =  $\frac{RT}{\mu g_e}$

$$3. \quad \pi F_k = c_p \varrho T \frac{\overline{\Delta T}}{T} \bar{v}. \quad (13)$$

Der konvektive Energiestrom ist gleich der pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit aufsteigenden bzw. absteigenden Materiemenge multipliziert mit dem Energieüber- bzw. -unterschluß. Dabei ist  $c_p$  = spezifische Wärme bei konstantem Druck,  $\varrho$  = Dichte,  $\bar{v}$  = mittlere Geschwindigkeit der auf- oder absteigenden Turbulenzelemente und  $\overline{\Delta T}$  deren mittlerer Temperaturüber- bzw. -unterschluß gegenüber der Umgebung.

Bezeichnen wir mit  $V'$  das  $\frac{d \log T}{d \log P_g}$  für ein auf- oder absteigendes Element, so ergibt sich [vgl. E. VITENSE (1953), Gleichung 7a]

$$\frac{\overline{\Delta T}}{T} \approx (V - V') \cdot \frac{l}{2H}, \quad (14)$$

wenn wir mit  $l$  den Mischungsweg bezeichnen. Für  $l = H$  wird

$$\frac{\overline{\Delta T}}{T} \approx \frac{V - V'}{2}. \quad (14a)$$

Die Geschwindigkeit  $v$  gewinnt man aus der Auftriebskraft  $K$  durch

$$\frac{m}{2} v^2 = \int_0^x K(x) dx, \quad (15)$$

wobei  $x$  die Wegkoordinate bedeutet. Bei konstantem  $g_e$  wird

$$K = -g_e \cdot \Delta \varrho \cdot \text{Volumen des Elementes}. \quad (16)$$

Ist  $g_e$  veränderlich, so gilt

$$K' = \Delta(m g_e) = g_e \cdot \Delta m + m \cdot \Delta g_e = K + \varrho \cdot \Delta g_e \cdot \text{Volumen}, \quad (16a)$$

wobei das  $\Delta g_e$  den Unterschied des  $g_e$  im Element gegenüber der Umgebung bezeichnet. Tatsächlich sind die in der Konvektionszone auftretenden Änderungen des  $g_e$  so gering, daß wir den 2. Term vernachlässigen können.

In der zitierten Arbeit [E. VITENSE (1953)] hatten wir nun  $\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = \frac{\Delta T}{T}$  gesetzt. Das gilt sicher nur, solange sich der Ionisationsgrad der Materie bei Temperatur- und Dichteänderungen nicht ändert. In der Konvektionszone ist aber diese Voraussetzung nicht mehr erfüllt. Bei Änderungen des Ionisationsgrades hat man nach R. v. D. R. WOOLLEY and D. W. N. STIBBS (1953) genauer zu setzen

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = \frac{\Delta T}{T} \cdot Q, \quad (17)$$

wobei

$$Q = 1 - \frac{\partial \log \mu}{\partial \log T} = 1 + \frac{\partial \log \mu}{\partial \log \Theta} \quad (18)$$

ist mit

$$\Theta = \frac{5040}{T}.$$

Den Faktor  $Q$  haben wir sehr grob — als Differenzenquotienten — aus den Tabellen von A. ROSA (1948) bestimmt. Abb. 2 zeigt das so gewonnene Schichtliniendiagramm.

Mit dem Korrektionsfaktor  $Q$  erhält man dann

$$\frac{m}{2} v^2 = \int m \cdot g_e \cdot Q \frac{\Delta T}{T} dx. \quad (19)$$

Schreibt man noch

$$\Delta T = \int \Delta \left( \frac{dT}{dx} \right) dx = (\nabla - \nabla') \cdot T \cdot \frac{x}{H}, \quad (20)$$

so wird

$$\frac{v^2}{2} = g_e \int_0^x Q \frac{\nabla - \nabla'}{H} x dx. \quad (19a)$$

Unter der Annahme, daß  $Q \frac{\nabla - \nabla'}{H}$  über den Weg eines Turbulenzelementes konstant sei, erhält man

$$v = \sqrt{g_e Q \frac{\nabla - \nabla'}{H} x}. \quad (21)$$

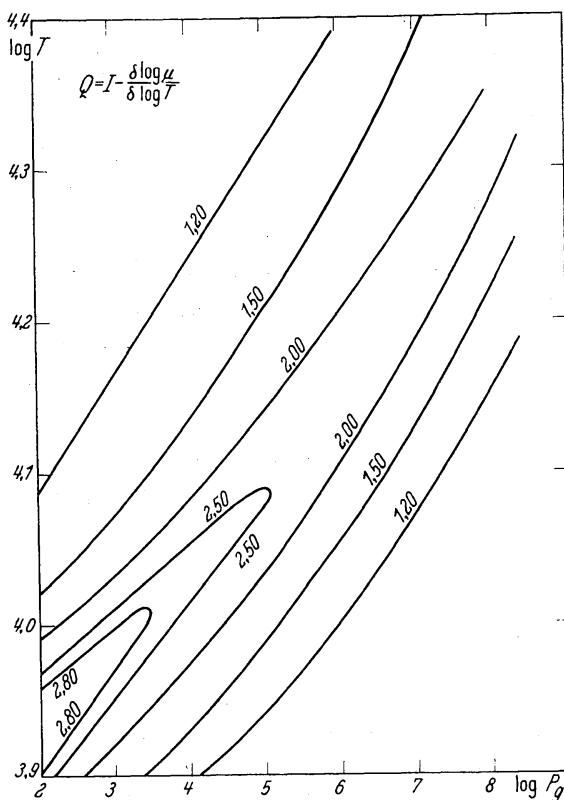


Abb. 2. Das — genäherte — Schichtliniendiagramm für den Korrektionsfaktor  $Q = 1 - \frac{\partial \log \mu}{\partial \log T}$  (siehe Text) als Funktion der Temperatur  $T$  und des Gasdruckes  $P_g$ .

Die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$  (gemittelt über einen Mischungsweg  $l$ ) wird dann

$$\bar{v} = \sqrt{g_e Q \frac{V - V'}{H} \frac{l}{2}} \text{ bzw. } \bar{v}^2 = g_e Q \frac{l^2}{4H} (V - V'). \quad (22)$$

Fügen wir im Nenner mit L. BIERMANN (1948) noch einen Faktor 2 hinzu, um in sehr grober Weise der Bremsung durch Turbulenzreibung Rechnung zu tragen, und setzen wir noch  $l = H$ , so erhalten wir schließlich

$$\bar{v}^2 = \frac{RT}{8\mu} Q (V - V'). \quad (23)$$

(10), (11), (13) und (23) sind nun 4 Bedingungsgleichungen für die 5 Unbekannten  $F_k, F_{Str}, V, V'$ , und  $\bar{v}$ . Alle anderen Größen sind in einem Punkt mit gegebenem  $T$  und  $P_g$  bekannt. Eine fünfte Gleichung erhalten wir durch Verknüpfung der verschiedenen Gradienten: Wenn das auf- oder absteigende Element keinen Energieaustausch mit seiner Umgebung hätte, so würde es adiabatisch aufsteigen, d. h.  $V' = V_{ad}$ . Tatsächlich gleicht sich das  $V'$  desto mehr dem Gradienten der Umgebung an, je größer der Energieaustausch ist, d. h.  $V_{ad} - V'$  wird proportional der auf dem Weg abgegebenen Energie sein. Andererseits ist der auf dem Weg gewonnene Energieüberschuß proportional der Differenz  $V' - V$ . Faßt man diese Überlegungen zusammen, so erhält man also die Beziehung

$$\frac{V' - V}{V_{ad} - V'} = \gamma, \quad (24)$$

wo  $\gamma$  das Verhältnis des überschüssigen Energieinhaltes eines Elementes zu seiner Abstrahlung während der Lebensdauer bezeichnet.

Der beim Auflösen eines Elementes abgegebene überschüssige Energieinhalt ist  $c_p \cdot \rho \cdot \Delta T_{max} \times \text{Volumen}$ . Dabei ist  $\Delta T_{max}$  der am Ende des Weges erreichte Temperaturüberschuß, der in der Konvektionszone selbst praktisch immer gleich dem maximalen Temperaturüberschuß ist.

Für die Abstrahlung pro sec hatten wir in der oben erwähnten Arbeit erhalten

$$\pi F_{Abstrahlung} = \frac{8}{3} \sigma \Delta(T^4) \cdot \frac{1}{\bar{\kappa}/\text{cm} \cdot l} \text{ sofern } \bar{\kappa}/\text{cm} \cdot l \gg 1. \quad (25)$$

Den ohnehin unsicheren Faktor  $8/3$  hatten wir dann fortgelassen, um einen stetigen Anschluß an den anderen Grenzfall  $\bar{\kappa}/\text{cm} \cdot l > 1$  zu bekommen. Da aber für die tatsächlich in Frage kommenden Elemente stets  $\bar{\kappa}/\text{cm} \cdot l \gg 1$  ist, haben wir bei den vorliegenden Rechnungen den Faktor  $8/3$  durch 2 ersetzt\* und mit berücksichtigt. Man erhält dann

$$\gamma = \frac{c_p \cdot \rho \cdot \Delta T_{max} \cdot \bar{\kappa}/\text{cm} \cdot l \cdot \text{Volumen}}{4 \cdot 2 \cdot \sigma T^3 \cdot \Delta T \cdot \text{Oberfläche}} \cdot \frac{\bar{v}}{l} = \frac{1}{24} \frac{c_p \cdot \rho \cdot T \bar{\kappa}/\text{cm} \cdot l}{\sigma T^4} = \bar{v}, \quad (26)$$

wobei wir  $\Delta T = 1/2 \Delta T_{max}$  gesetzt haben. Wir haben außerdem angenommen, daß das Verhältnis Volumen : Oberfläche =  $1/6$  sei wie

\* R. v. D. R. WOOLLEY (1943) erhielt aus detaillierteren Rechnungen  $5/3$

z. B. bei einer Kugel, einem Würfel oder einem Zylinder mit Höhe und Durchmesser 1.

Die Gleichungen (10), (11), (13), (23) und (24) bestimmen nun die fünf Unbekannten  $F_k$ ,  $F_{Str}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\nabla$  und  $\nabla'$ .

Für  $\gamma \ll 1$  erhält man durch Reihenentwicklung

$$\nabla = \nabla_{Str} - \frac{9}{4} \gamma^2 (\nabla_{Str} - \nabla_{ad}) \quad (27)$$

und

$$\bar{v} = \frac{RT}{8\mu} Q \gamma_0 (\nabla_{Str} - \nabla_{ad}), \quad (28)$$

wobei

$$\gamma_0 = \frac{\gamma}{\bar{v}} = \frac{1}{24} \frac{c_p \varrho T \bar{\kappa} / \text{cm} \cdot l}{\sigma T^4}$$

eine bei gegebenem  $T$  und  $P_g$  direkt zu berechnende Hilfsgröße ist. Für  $\gamma \gg 1$  wird

$$\nabla = \nabla_{ad} + \frac{4}{9\gamma} (\nabla_{Str} - \nabla_{ad}) \quad (29)$$

und

$$\bar{v}^3 = \frac{RT}{18\mu} Q \frac{1}{\gamma_0} (\nabla_{Str} - \nabla_{ad}). \quad (30)$$

Ist  $\gamma \approx 1$ , so erhält man zunächst aus den obigen Gleichungen die weitere Beziehung

$$\nabla = \frac{\nabla_{Str} + \beta \nabla'}{1 + \beta} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{9}{4} \gamma \quad (31)$$

und

$$\nabla' = \frac{\nabla_{Str} + \gamma(1 + \beta) \nabla_{ad}}{1 + \gamma(1 + \beta)}. \quad (32)$$

Zu einem angenommenen  $\bar{v}$  berechnet man dann  $\gamma$ , damit nach (31) und (32)  $\nabla'$  und  $\nabla$  und dann nach (23)  $\bar{v}^2$  und  $\bar{v}$ . Mit dem neuen  $\bar{v}$  berechnet man ein neues  $\gamma$  usw. bis die Iteration steht.

Im einzelnen gehen wir bei der Rechnung folgendermaßen vor: In einem bestimmten Punkt der Atmosphäre mit vorgegebenem  $T$  und  $P_g$  berechnen wir  $c_p$  nach A. ROSA und A. UNSÖLD (1948),  $\mu$  nach A. ROSA (1948),  $\bar{\kappa}$  für niedrige und mittlere Temperaturen nach E. VITENSE (1951)\* und für hohe Temperaturen nach G. KELLER und R. E. MEYEROTT (1955) mit deren Elementmischung  $V$ , die der von A. UNSÖLD, A. ROSA und E. VITENSE angenommenen wohl am nächsten kommt,  $\nabla_{ad}$  nach A. UNSÖLD (1948) und  $Q$  nach Abb. 2.  $\nabla_{Str}$  können wir dann aus diesen Werten direkt ermitteln. Mit diesen Größen erhalten wir  $\gamma_0$ ,  $\bar{v}$ ,  $\nabla'$  usw. Tatsächlich sollten aber alle Größen, die in  $\gamma_0$ ,  $\bar{v}$  und  $\nabla'$  eingehen, Mittelwerte über je einen Mischungsweg der auf- bzw. absteigenden Elemente sein. Diese Mittelwerte dürften aber nur dann mit den Werten in dem betrachteten Punkt hinreichend genau übereinstimmen, wenn die

\* Für  $\Theta > 1.2$  und für kleine Elektronendrucke wurde graphisch extrapoliert.

betreffenden Größen im Bereich einer Äquivalenthöhe nicht sehr stark oder jedenfalls nur monoton mit der Tiefe variieren. Den Sternatmosphären mit *dünnen* Konvektionszonen, in denen diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind, werden wir am Schluß einen besonderen Abschnitt D widmen.

Wie bereits bei der Berechnung der Wasserstoffkonvektionszone der Sonne diskutiert wurde, ist diese Rechenmethode nahe der oberen Grenze der Konvektionszone nicht ganz korrekt. Erstens wird die mittlere Geschwindigkeit der auf- und absteigenden Elemente an der oberen Grenze der Konvektionszone nicht verschwinden — wie unsere Rechenmethode ergibt —, sondern die Elemente, die aus etwa einer halben Äquivalenthöhe tiefer aufgestiegen sind, haben auf ihrem Weg eine Beschleunigung erfahren und kommen deshalb mit einer von Null verschiedenen Geschwindigkeit an der oberen Grenze der Konvektionszone an. Sie werden auf Grund ihrer Trägheit in die Strahlungsgleichgewichtszone hineinlaufen. Da sie außerdem an der oberen Grenze der Konvektionszone mit einem Temperaturüberschuß ankommen, werden sie auch in der Strahlungsgleichgewichtszone noch einen geringen Beitrag zum Energietransport liefern, so daß der konvektive Energietransport in den unteren Schichten der Strahlungsgleichgewichtszone wenige Prozente des gesamten Energietransportes ausmachen dürfte. Die dadurch bewirkte Änderung der Temperaturschichtung ist so gering, daß sie gegenüber sonstigen Unsicherheiten der Rechnung wohl kaum ins Gewicht fällt.

Auf einen zweiten von uns vernachlässigten Effekt weisen Untersuchungen von R. V. D. R. WOOLLEY (1941) und R. CAYREL (1951) hin: In einer Atmosphäre gibt z. B. CAYREL den Strahlungsstrom  $\pi F_{str}$  als Funktion der optischen Tiefe  $\tau$  in der Weise vor, daß  $F_{str}(\tau) = F_0$  für  $\tau < \tau_1$  und  $F_{str}(\tau) = F_0 Q_p(\tau) e^{-p\tau}$  für  $\tau > \tau_1$  sei, wobei  $Q_p(\tau)$  ein Polynom 2. Grades ist, das den stetigen Anschluß des  $F_{str}(\tau)$  bei  $\tau = \tau_1$  bis zur 2. Ableitung gewährleistet. Zu diesem vorgegebenen, mit der Tiefe abnehmenden Strahlungsstrom wird die zugehörige Temperaturschichtung berechnet. Es zeigt sich, daß die Temperatur für  $\tau > \tau_1$  zunächst noch über den Werten liegt, die man für Strahlungsgleichgewicht — d. h.  $F_{str} = F_0$  für  $0 < \tau < \infty$  — erhalten würde. Der Wert der Temperaturerhöhung hängt dabei ab von der angenommenen Größe des Parameters  $p$ . Je größer  $p$ , d. h. je steiler der Abfall des  $F_{str}$  ist, desto größer wird die Erhöhung der Temperatur. (Die große Menge der abgeladenen, bis dahin konvektiv transportierten Energie bewirkt eine große Temperaturerhöhung.) Erstreckt sich der Abfall des  $F_{str}$  auf etwa  $0.1 F_0$  über einen Bereich  $\Delta\tau > 2$ , so beträgt die Temperaturerhöhung weniger als etwa 4%.

Genau genommen müßte natürlich diese Temperaturerhöhung bei unseren Rechnungen berücksichtigt werden, denn nur so ist streng genommen der stetige Anschluß des  $F_{str}$  beim Übergang von der Konvektionszone zur Strahlungsgleichgewichtszone gewährleistet\*. Da aber der Abfall des  $F_{str}$  sich entweder über

\* CH. PECKER (1953) fordert den stetigen Anschluß des  $F_{str}$  unter der weiteren Annahme, daß die Konvektionszone bis zu ihrer oberen Grenze hin adiabatisch geschichtet sei. Da in der Konvektionszone überall  $\left(\frac{dT}{dt}\right)_{str} > \left(\frac{dT}{dt}\right)_{ad}$ , so ist damit in den oberen Gebieten der Konvektionszone sicher auch  $T_{str} > T_{ad}$ . Die von CH. PECKER (1953) geforderte Grenzbedingung — Gleichung 49 — daß der Strahlungsstrom gleich  $\frac{\sigma}{\pi} T_e^4$  sei, kann daher an der oberen Konvektionszonengrenze nicht streng befriedigt werden, wenn man gleichzeitig adiabatische Schichtung der Konvektionszone fordert.

optische Tiefen von  $\Delta \tau > 5$  erstreckt, wie z. B. bei der Sonne, oder aber gar nicht auf  $F_{gr} = 0$  herunter geht, so dürfte die zu erwartende Änderung der Temperatur in den oberen Schichten der Konvektionszone weniger als  $50^\circ$  betragen. Fehler dieser Größenordnung müssen wir aber ohnehin in Kauf nehmen.

## C. Ergebnisse

### I. Die Modelle

In Tab. 4 haben wir die von uns berechneten Temperatur- und Druckschichtungen zusammengestellt. Die Atmosphärenschichten, deren Temperaturschichtung durch Konvektion beeinflusst wird, sind durch fett gedruckte Gasdruckwerte eingeschlossen\*. Für die gesamte Instabilitätszone werden die geometrischen Tiefen  $t$  angegeben, gerechnet von der oberen Grenze der Konvektionszone aus. Die gesamte Instabilitätszone besteht aus der Wasserstoffkonvektionszone und der He II Konvektionszone, die bei den heißen Sternen und den Übergiganten durch eine unter Umständen sehr ausgedehnte stabile Zone getrennt sind. Diese stabile Zone wurde nicht besonders gekennzeichnet. Während die Temperatur- und Druckschichtung in den oberen Bereichen der H-Konvektionszone erheblich von der Strahlungsgleichgewichtsschichtung abweicht, herrscht in den unteren Gebieten der H-Konvektionszone und in der He III-Konvektionszone Strahlungsgleichgewicht wie in der dazwischenliegenden Stabilitätszone, so daß sich der Energietransport in dieser Zone nicht von den benachbarten Schichten der Konvektionszonen unterscheidet.

Für die Sternatmosphären, in denen der von der Konvektion beeinflusste Bereich merklich dünner als eine Äquivalenthöhe ist, wurde neben der konvektiven Schichtung auch noch die Strahlungsgleichgewichtsschichtung angegeben, da sich in solchen Atmosphären wohl keine Konvektion ausbilden kann (siehe Abschnitt D).

### II. Die Ausdehnung der Konvektionszonen

Man sieht bereits in Tab. 4, daß sowohl die Ausdehnung der Instabilitätszone — ausgenommen für  $T_e = 7000^\circ$  und  $8000^\circ$ , wo sie fast ausschließlich durch die He II-Konvektionszone bestimmt wird — als auch ganz besonders die Dicke der von der Konvektion beeinflussten Schicht — gemessen in Einheiten des Sternradius — mit zunehmender Temperatur und zunehmender Leuchtkraft, d. h. abnehmender Schwerebeschleunigung, sehr stark abnimmt.

In Abb. 3 haben wir die Tiefe der gesamten Instabilitätszone und die Dicke der vom Strahlungsgleichgewicht abweichenden Zone in Einheiten

\* In diesen Schichten wird auch die Geschwindigkeit von der Größenordnung einiger km/sec.



Tabelle 4. Die optischen Tiefen  $\bar{\tau}^*$ , die Gasdrucke  $P_g^{**}$  und die geometrischen Tiefen  $t(\text{cm})^{***}$  als Funktion der Temperatur  $T$  in Atmosphären mit verschiedenen Effektivtemperaturen  $T_e$  und Gravitationsbeschleunigungen  $g$ .  
 $T_e = 4400^\circ$

$\bar{\tau}$	$\log g$ $\log T$	0.9			1.5		2.5	
		$\log P_g$	$\log t$	$\log P_{g, Str}$	$\log P_g$	$\log t$	$\log P_g$	$\log t$
0	3.481	1.76			1.85		2.15	
0.001	3.487	2.02			2.35		2.91	
0.01	3.520	2.48			2.85		3.39	
0.02	3.542	2.58			2.94		3.50	
0.04	3.568	2.67			3.03		3.60	
0.06	3.581	2.72			3.08		3.66	
0.08	3.590	2.76			3.12		3.71	
0.1	3.597	2.79			3.15		3.74	
0.2	3.617	2.88			3.25		3.84	
0.3	3.643	2.99			3.35		3.94	
0.4	3.663	3.05			3.42		4.01	
0.5	3.680	3.15			3.47		4.05	
0.6	3.694	3.14			3.50		4.09	
0.7	3.706	3.18			3.54		4.13	
0.8	3.722	3.22			3.58		4.17	
0.9	3.744	3.27			3.63		4.23	
1.0	3.778	3.35	9.77		3.71	8.38	4.30	— $\infty$
1.2	3.793	3.37	9.90		3.73	8.92	4.33	7.95
1.5	3.836	<b>3.40</b>	10.06	3.40	<b>3.77</b>	9.23	<b>4.39</b>	8.35
2.0	3.876	3.41	10.09	3.40	3.79	9.36	4.41	8.46
	3.90	3.42	10.17	3.40	3.80	9.42	4.42	8.51
	3.93	3.43	10.27	3.40	3.81	9.50	4.44	8.60
	3.96	3.45	10.47	3.40	3.84	9.60	4.48	8.73
	4.00	3.49	10.81	3.40	3.89	9.81	4.59	9.00
	4.05	3.55	11.06	3.40	3.99	10.09	4.72	9.23
	4.10	3.57	11.09	3.41	4.07	10.24	4.93	9.48
	4.15	3.59	11.11	3.42	4.13	10.38	5.16	9.67
	4.20	3.61	11.14	3.43	4.19	10.48	5.39	9.81
	4.25	<b>3.64</b>	11.19	3.46	4.24	10.58	5.61	9.95
	4.30	3.68	11.26	3.53	4.29	10.66	5.83	10.08
	4.35	3.75	11.38	3.67	4.33	10.72	6.05	10.20
	4.40	3.87	11.54	3.84	4.38	10.80	6.25	10.28
	4.45	4.01	11.68	4.00	<b>4.47</b>	10.93	6.43	10.36
	4.50	4.18	11.82	4.18	4.59	11.07	6.60	10.42
	4.55	4.35	11.95		4.75	11.22	6.75	10.48
	4.60	4.53	12.06		4.91	11.34	6.89	10.54
	4.65	4.70	12.15		5.05	11.44	7.04	10.58
	4.70	4.86	12.24		5.18	11.52	7.20	10.64
	4.75	5.02	12.32		5.34	11.62	7.37	10.70
	4.80				5.56	11.72	7.53	10.75
	5.00						8.21	10.94
	5.20						8.71	11.08
	5.40						9.21	11.20
	5.60						<b>9.72</b>	<b>11.32</b>

Tabelle 4 (*Fortsetzung*)  
 $T_e = 5000^\circ$

$\bar{\tau}$	$\log g$ $\log T$	1.5			3.0		4.45	
		$\log P_g$	$\log t$	$\log P_{g\,str}$	$\log P_g$	$\log t$	$\log P_g$	$\log t$
0	3.538							
0.001	3.542	1.82			2.75		3.65	
0.01	3.579	2.58			3.47		4.39	
0.02	3.595	2.69			3.59		4.49	
0.04	3.620	2.80			3.71		4.60	
0.06	3.633	2.86			3.77		4.66	
0.08	3.642	2.91			3.81		4.70	
0.1	3.649	2.95			3.85		4.74	
0.2	3.668	3.08			3.97		4.85	
0.3	3.683	3.16			4.05		4.92	
0.4	3.695	3.23			4.12		4.98	
0.5	3.706	3.27			4.16		5.02	
0.6	3.715	3.32			4.20		5.06	
0.7	3.724	3.35			4.29		5.10	
0.8	3.732	3.38			4.27		5.13	
0.9	3.739	3.40			4.29		5.15	
1.0	3.746	3.42			4.32		5.17	
1.2	3.758	3.46	— $\infty$	3.46	4.35		5.20	
1.5	3.774	3.48	8.95	3.49	4.39	— $\infty$	5.25	— $\infty$
2.0	3.796	<b>3.50</b>	9.24	3.53	4.44	7.55	<b>5.30</b>	6.14
	3.85	3.52	9.51	3.58	<b>4.51</b>	7.98	5.40	6.64
	3.90	3.53	9.58	3.59	4.54	8.10	5.45	6.77
	3.95	3.55	9.68	3.60	4.58	8.23	5.53	6.76
	4.00	3.58	9.80	3.60	4.65	8.42	5.64	7.15
	4.05	3.60	9.88	3.60	4.79	8.68	5.82	7.37
	4.10	3.63	9.99	3.60	4.96	8.92	6.05	7.57
	4.15	3.64	10.03	3.61	5.18	9.14	6.37	7.77
	4.20	3.65	10.08	3.62	5.40	9.32	6.73	7.95
	4.25	<b>3.69</b>	10.25	3.66	5.61	9.46	7.06	8.10
	4.30	3.77	10.50	3.75	5.80	9.56	7.39	8.22
	4.35	3.88	10.72	3.87	5.98	9.66	7.71	8.32
	4.40	4.05	10.94	4.05	6.16	9.74	8.04	8.42
	4.50	4.40	10.23	4.40	6.48	9.89	8.58	8.58
	4.60	4.76	11.46	4.76	6.77	10.02	9.03	8.71
	4.70	5.08	11.62	5.08	7.03	10.12	9.42	8.83
	4.80	5.47	11.77	5.47	7.41	10.26	9.79	8.93
	4.90				7.73	10.38	10.11	9.03
	5.00				8.02	10.48	10.41	9.12
	5.20				8.54	10.67	11.00	9.29
	5.40				<b>9.04</b>	10.84	11.51	9.44
	5.60						12.03	9.60
	5.80						12.54	9.78
	6.00						<b>13.05</b>	9.94
	6.20						13.57	10.11

Tabelle 4 (*Fortsetzung*)

$$T_{\bullet} = 5800^{\circ}$$

$\bar{\tau}$	$\log g$ $\log T$	1.5			3.0		4.45 Sonne	
		$\log P_g^+$	$\log t$	$\log P_g \text{ str}$	$\log P_g$	$\log t$	$\log P_g$	$\log t$
0	3.605							
0.001	3.609	1.40			2.50		3.80	
0.01	3.637	2.26			3.29		4.03	
0.02	3.658	2.46			3.42		4.16	
0.04	3.681	2.62			3.55		4.36	
0.06	3.694	2.71			3.63		4.51	
0.08	3.703	2.77			3.69		4.58	
0.1	3.708	2.83			3.74		4.61	
0.2	3.728	2.99			3.90		4.76	
0.3	3.742	3.09			3.99		4.85	
0.4	3.755	3.14			4.05		4.91	
0.5	3.766	3.17			4.10		4.95	
0.6	3.775	3.20	— $\infty$		4.13		4.98	
0.7	3.784	3.22	8.67		4.16		5.01	
0.8	3.792	3.24	9.00		4.18	— $\infty$	5.04	— $\infty$
0.9	3.799	3.25	9.09		4.20	7.20	5.05	5.20
1.0	3.806	3.26	9.17		4.21	7.38	5.08	6.07
1.2	3.818	3.27	9.26		4.23	7.60	5.10	6.25
1.5	3.834	3.29	9.34		4.25	7.78	5.14	6.48
2.0	3.856	3.31	9.44		4.28	7.90	5.17	6.60
	3.90	3.32	9.51		4.30	8.01	5.21	6.73
	3.95	3.33	9.56	3.33	4.33	8.14	5.26	6.86
	4.00	3.35	9.65	3.33	4.36	8.25	5.33	7.02
	4.05	3.37	9.78	3.33	4.44	8.50	5.47	7.25
	4.10	3.38	9.86	3.33	4.54	8.75	5.66	7.48
	4.15	3.39	9.96	3.33	4.62	8.91	5.91	7.70
	4.20	3.40	10.09	3.35	4.68	9.01	6.21	7.91
	4.25	3.45	10.33	3.40	4.74	9.11	6.51	8.07
	4.30	3.55	10.59	3.53	4.79	9.19	6.80	8.19
	4.35	3.69	10.80	3.70	4.84	9.26	7.08	8.31
	4.40	3.89	11.04		4.90	9.34	7.34	8.40
	4.45	4.08	11.19		4.98	9.43	7.59	8.49
	4.50	4.26	11.31		5.11	9.57	7.91	8.60
	4.60	4.60	11.51		5.41	9.81	8.19	8.69
	4.70	4.93	11.68		5.74	10.01	8.52	8.80
	4.80	5.28	11.83		6.13	10.21	8.83	8.90
	4.90						9.12	8.98
	5.00						9.42	9.08
	5.10						9.74	9.18
	5.20						10.04	9.28
	5.40						10.56	9.45
	5.60						11.07	9.62
	5.80						11.57	9.80
	6.00						12.07	9.98

Tabelle 4 (Fortsetzung)  
 $T_e = 7000^\circ$

$\bar{\tau}$	$\log g$ $\log T$	2.0		3.5			4.45	
		$\log P_g$	$\log t$	$\log P_g$	$\log t$	$\log P_{g \text{ Str}}$	$\log P_g$	$\log t$
0	3.694							
0.001	3.697	1.80		2.70			3.32	
0.01	3.721	2.54		3.42				
0.02	3.738	2.69		3.59			4.17	
0.04	3.759	2.83		3.74			4.29	
0.06	3.771	2.90		3.81			4.37	
0.08	3.779	2.95		3.88			4.43	
0.1	3.784	2.98		3.92			4.47	
0.2	3.804	3.06	8.36	4.03			4.59	
0.3	3.819	3.10	8.78	4.08	— $\infty$		4.66	
0.4	3.831	3.13	8.92	4.12	6.95		4.69	— $\infty$
0.5	3.842	3.15	8.98	4.15	7.20		4.73	5.89
0.6	3.851	3.16	9.02	4.17	7.32		4.75	6.15
0.7	3.860	3.17	9.05	4.18	7.40		4.77	6.31
0.8	3.868	3.18	9.10	4.20	7.45		4.78	6.38
0.9	3.874	3.19	9.12	4.20	7.49		4.79	6.42
1.0	3.882	3.19	9.14	4.21	7.52		4.79	6.46
1.2	3.894	3.20	9.16	4.22	7.55		4.81	6.58
1.5	3.910	3.21	9.19	4.23	7.59		4.82	6.59
2.0	3.932	3.21	9.20	4.24	7.63		4.84	6.66
	3.95	3.21	9.21	4.25	7.67	4.25	4.85	6.70
	3.97	3.21	9.22	4.26	7.70	4.26	4.86	6.76
	4.00	3.22	9.23	4.28	7.75	4.26	4.88	6.82
	4.05	3.22	9.26	4.30	7.82	4.27	4.96	7.02
	4.10	3.22	9.30	4.33	7.94	4.27	5.08	7.28
	4.15	3.25	9.49	4.36	8.06	4.28	5.22	7.49
	4.20	3.30	9.76	4.38	8.15	4.31	5.34	7.65
	4.25	3.41	10.03	4.43	8.30	4.37	5.45	7.78
	4.30	3.57	10.29	4.52	8.52	4.48	5.56	7.88
	4.35	3.76	10.48	4.65	8.75	4.62	5.67	7.98
	4.40	3.96	10.64	4.81	8.93	4.80	5.77	8.07
	4.45	4.16	10.76	4.99	9.09	4.99	5.86	8.15
	4.50	4.34	10.87	5.17	9.23	5.17	5.95	8.21
	4.55	4.51	10.96	5.35	9.34	5.35	6.03	8.27
	4.60	4.68	11.04	5.51	9.43	5.51	6.13	8.34
	4.65	4.85	11.12	5.67	9.51	5.67	6.25	8.42
	4.70	5.01	11.19	5.86	9.60	5.86	6.41	8.52
	4.75	5.21	11.27	6.05	9.68	6.05	6.58	8.62
	4.80						6.78	8.71

Tabelle 4 (Fortsetzung)

$$T_e = 8000^\circ$$

$\bar{\tau}$	$\log g$ $\log T$	2.5		3.5		4.45		
		$\log P_g$	$\log t$	$\log P_g$	$\log t$	$\log P_g$	$\log t$	$\log P_{g\,str}$
0	3.766							
0.001	3.769	1.55				3.11		
0.01	3.782	2.39				3.65		
0.02	3.801	2.53				3.84		
0.04	3.818	2.65				3.96		
0.06	3.828	2.72				4.03		
0.08	3.835	2.76				4.07		
0.1	3.841	2.79				4.11		
0.2	3.860	2.89	8.08	3.66	— $\infty$	4.22	6.11	
0.3	3.874	2.94	8.44	3.71	7.20	4.28	6.54	
0.4	3.886	2.97	8.55	3.74	7.40	4.32	6.67	
0.5	3.898	2.98	8.63	3.76	7.49	4.34	6.75	
0.6	3.907	3.00	8.67	3.77	7.55	4.37	6.80	
0.7	3.916	3.01	8.69	3.78	7.59	4.39	6.85	
0.8	3.923	3.01	8.72	3.79	7.62	4.40	6.88	
0.9	3.931	3.02	8.74	3.80	7.65	4.40	6.90	
1.0	3.937	3.02	8.75	3.80	7.67	4.41	6.91	
1.2	3.949	3.03	8.77	3.81	7.70	4.43	6.93	
1.5	3.965	3.04	8.80	3.82	7.72	4.44	6.97	
2.0	3.988	3.05	8.84	3.83	7.75	4.45	7.00	4.44
	4.00	3.05	8.85	3.83	7.76	4.46	7.01	4.45
	4.02	3.05	8.88	3.83	7.79	4.47	7.03	4.46
	4.05	3.06	8.92	3.84	7.82	4.49	7.07	4.47
	4.10	3.10	9.07	3.85	7.89	4.53	7.16	4.48
	4.15	3.17	9.31	3.88	8.03	4.56	7.25	4.51
	4.20	3.30	9.57	3.96	8.31	4.60	7.36	4.56
	4.25	3.47	9.79	4.09	8.56	4.69	7.54	4.65
	4.30	3.69	9.98	4.28	8.80	4.81	7.74	4.79
	4.35	3.90	10.13	4.47	8.99	4.98	7.94	4.96
	4.40	4.10	10.25	4.67	9.13	5.17	8.10	5.16
	4.45	4.30	10.35	4.85	9.24	5.36	8.24	5.35
	4.50	4.49	10.43	5.04	9.34	5.53	8.34	5.53
	4.55	4.66	10.51	5.21	9.43	5.70	8.43	5.10
	4.60	4.84	10.58	5.38	9.50	5.86	8.51	5.86
	4.65	5.00	10.65	5.56	9.58	6.03	8.59	6.03
	4.70	5.18	10.72	5.75	9.66	6.20	8.66	6.20
	4.75	5.38	10.75	5.94	9.73	6.38	8.74	6.38

Anmerkungen zu Tabelle 4:

\* Die in Spalte 1 angegebenen optischen Tiefen  $\bar{\tau}$  beziehen sich auf den Rosse-landschen Mittelwert des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten.

\*\* Die mit  $P_g$  bezeichneten Gasdrucke wurden unter Berücksichtigung des konvektiven Energietransportes berechnet. Bei Atmosphären mit dünnen Konvektionszonen wurden außerdem die Gasdrucke  $P_{g\,str}$  angegeben, die man für reines Strahlungsgleichgewicht erhält.

\*\*\* Die geometrischen Tiefen  $t$  wurden auf die obere Grenze der Instabilitätszone als Nullpunkt bezogen.

+ Wurden ohne Berücksichtigung der Turbulenzbeschleunigung  $g$ , berechnet. Siehe Abschnitt IV.

Die in der Tabelle fett gedruckten Werte für den Gasdruck schließen die Bereiche ein, in denen sich der mit Berücksichtigung der Konvektion berechnete Gradient  $\frac{d \log T}{d \log P_g}$  merkbar, d. h. etwa um mindestens 1%, von demjenigen unterscheidet, den man für reines Strahlungsgleichgewicht erhalten würde.

Die tabulierten Modelle enden jeweils an der unteren Grenze der Instabilitätszone.

des jeweiligen Sternradius als Funktion der Gravitationsbeschleunigung dargestellt. Wir haben dabei die in Tab. 5 angegebenen Radien — in Einheiten des Sonnenradius — angenommen.

Sie wurden teils nach W. BECKER (1950) bestimmt und teils nach W. W. MORGAN (1951) aus den angegebenen Helligkeiten und Temperaturen berechnet. Die Zuordnung von  $\log g$  Werten zu Leuchtklassen erfolgte dann innerhalb der Unsicherheitsgrenzen so, daß bei einer graphischen Darstellung von  $\log R/R_\odot$  als Funktion von  $\log g$  mit  $T$  als Parameter die Kurven für verschiedene Temperaturen etwa parallel liefen.

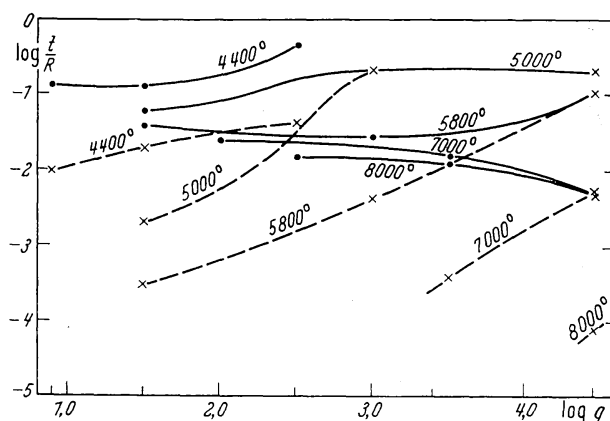


Abb. 3. zeigt die Tiefen — in Einheiten des Sternradius — der Zonen, in denen der Temperaturgradient  $\frac{d \log T}{d \log P_g}$  sich von demjenigen für reines Strahlungsgleichgewicht um mehr als 1% unterscheidet (— — —), und außerdem die Tiefen der gesamten Instabilitätszone (einschließlich der He II Instabilitätszone) und der bei einigen Sternen zwischen der H und der He II Instabilitätszone liegenden stabilen Zone (—) als Funktion der Gravitationsbeschleunigung. Parameter ist die Effektive Temperatur  $T_e$ .

Man sieht aus Abb. 3, daß die Schichten, die erheblich durch den konvektiven Energietransport beeinflusst werden, stets nur einen kleinen Teil des gesamten Sternradius ausmachen. Die größte Ausdehnung von  $\sim 21\%$  erhalten wir für einen Hauptsequenzstern mit  $T_e = 5000^\circ$  [Für Hauptsequenzsterne mit kleineren  $T_e$  würde man wohl größere Tiefen erhalten, siehe hierzu D. E. OSTERBROOK (1953). Wegen der Unsicherheit hinsichtlich der Molekülbildung und -absorption wurde jedoch ein Hauptsequenzstern mit  $T_e = 4400^\circ$  nicht mehr durchgerechnet.] Für Giganten und Übergiganten werden die Ausdehnungen dieser Zonen noch geringer. Man erhält keinesfalls die von HOYLE und SCHWARZSCHILD (1955) angegebenen großen Tiefen der Konvektionszonen, z. B. 93% des Sternradius für  $T_e = 5500^\circ$  und  $\log g = 2.2$ , es sei



denn, man nimmt einen bisher völlig unbekannten Konvektionsmechanismus an\*. Es sei außerdem darauf hingewiesen, daß auch in den konvektiven Schichten der adiabatische Temperaturgradient nur für

Tabelle 5  
*Angenommene Sternradien in Einheiten des Sonnenradius*

$\log g$ $T_e$	0.9	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.45
4400	225	49	18	7.1	3.0	1.3	0.4
5000	630	115	36	12	4.8	2.0	0.7
5800		219	62	19	6.6	2.9	1.0
7000			100	32	10	4.2	1.3
8000				50	16	5.5	1.5

Giganten mit  $T_e \leq 5000^\circ$  bzw. Hauptsequenzsterne mit  $T_e \leq 6000^\circ$  einigermaßen erreicht wird.

### *III. Optische Tiefen, unterhalb derer der konvektive Energietransport wichtig wird*

Aus Tab. 4 ersieht man, daß Abweichungen vom Strahlungsgleichgewicht nie in optischen Tiefen  $\bar{\tau} < 2$  auftreten. Für  $T < 5000^\circ$  treten bei Hauptsequenzsternen sogar erst Abweichungen um  $\bar{\tau} \approx 10$  auf. Es ist deshalb von vornherein zu erwarten, daß man Änderungen der Temperatur- und Druckschichtung durch die Konvektion bei Hauptsequenzsternen mit  $T_e \leq 5000^\circ$  überhaupt nicht und sonst höchstens mittels Linien großer Anregungsspannung feststellen kann. Dagegen wird man sicher die Turbulenzgeschwindigkeiten und Temperaturinhomogenitäten bemerken können.

### *IV. Die Turbulenzgeschwindigkeiten*

Die beobachtbaren Turbulenzgeschwindigkeiten dürften etwa mit den maximal in der Konvektionszone auftretenden Geschwindigkeiten übereinstimmen, da diese stets in der Nähe der oberen Grenze der Konvektionszone erreicht werden. Bessere Werte erhält man sicher, wenn man die berechneten  $\bar{v}$ , die ihrer Ableitung nach (siehe Abschnitt B II) ein Maß für die Beschleunigung in einem gegebenen Punkt darstellen, über eine Äquivalenthöhe mittelt. Bei sehr dünnen Konvektionszonen ergeben sich durch diese Mittelung merklich niedrigere Werte. Die Maximalwerte

\* In den von HOYLE und SCHWARZSCHILD angegebenen großen Tiefen ist aber  $\nabla_{ad} > \nabla_{str}$ , d. h. Konvektion könnte nur durch äußere Arbeit aufrecht erhalten werden. Die Energie würde dann nicht wie in der Wasserstoffkonvektionszone nach außen, sondern nach innen transportiert.

der gemittelten Geschwindigkeiten haben wir in der Abb. 4 wiedergegeben. Die Punkte bzw. Kreuze oder Kreise entsprechen den tatsächlich berechneten Werten. Wenn auch der Verlauf der eingezeichneten Interpolationskurven im einzelnen nicht genau festgelegt ist (insbesondere ist der Verlauf der gestrichelt angegebenen, absteigenden Äste sehr unsicher, — sie entsprechen aber Atmosphären, in denen sich wahrscheinlich keine Konvektion mehr ausbilden kann —), so läßt sich aus der

bildung doch folgendes ablesen: Die zu erwartenden Turbulenzgeschwindigkeiten nehmen mit zunehmender effektiver Temperatur der Sterne und abnehmender Schwerebeschleunigung zunächst zu, bis sie abrupt Null werden, wenn die Ausdehnung der Instabilitätszone so klein wird, daß sich keine Konvektion mehr entwickeln kann. Auf der Hauptsequenz hat man die größten Turbulenzgeschwindigkeiten, etwa 3.5—4 km/sec bei effektiven Temperaturen von etwa

7200° bis 7500° zu erwarten, d. h. bei frühen F-Sternen. Bei den Giganten sind die größten Geschwindigkeiten etwas über 4 km/sec für Sterne von etwa 6500°, bei den Übergiganten etwa 4.5 km/sec für Sterne mit  $T_e \leq 5000^\circ$ . Man sieht so, daß man durch die thermische Instabilität der Wasserstoffkonvektionszonen sicher nicht die beobachteten hohen Turbulenzgeschwindigkeiten in den frühen Übergiganten mit  $T_e \geq 6000^\circ$  erklären kann. Für kältere Übergiganten könnte man eventuell die Erzeugung von Stoßwellen aus der Granulation mit in Betracht ziehen. — Auf der Sonne erhalten wir ja durch diesen Mechanismus etwa 20 km/sec in der Chromosphäre ausgehend von 1 bis 2 km/sec Turbulenzgeschwindigkeit der Granulationselemente. —

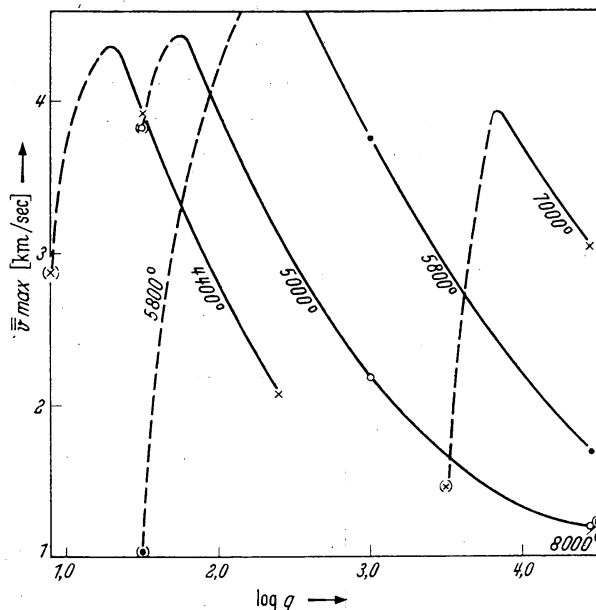


Abb. 4. Die Maximalwerte der über eine Äquivalenthöhe gemittelten Geschwindigkeiten als Funktion der Gravitationsbeschleunigung mit  $T_e$  als Parameter. Die gestrichelt eingezeichneten absteigenden Äste entsprechen Atmosphären, in denen sich wahrscheinlich keine Konvektion mehr ausbilden kann. Die eingezeichneten Punkte, Kreuze und Kreise entsprechen den tatsächlich berechneten Werten

### V. Die Temperaturinhomogenitäten

Über die Größe der Temperaturinhomogenitäten läßt sich nur auf dem Umweg über die Turbulenzgeschwindigkeiten etwas aussagen. Es

war nach (22)  $\bar{v} = \sqrt{g_e Q \frac{V - V'}{H} \frac{l}{2}}$ , wobei nach (20)  $V - V' = \frac{\Delta T}{T}$  ist, wenn der zurückgelegte Weg des Turbulenzelementes eine Äquivalenzhöhe beträgt. Es wird damit  $\bar{v} = \sqrt{g_e Q \frac{V T}{T} \frac{1}{H} \frac{l}{2}}$  und  $\frac{V T}{T} = \frac{4 \bar{v}^2}{g_e \cdot 2} \frac{H}{l^2}$ . Mit  $l = H = \frac{RT}{\mu g_e}$  wird  $\frac{\Delta T}{T} = \frac{4 \bar{v}^2 \mu}{Q R T}$ . Wenn wir hier in das maximale  $\bar{v}$

und ein mittleres  $Q$ ,  $\mu$  und  $T$  einsetzen, erhalten wir einen groben Einblick in die Größe der maximal auftretenden Temperaturhomogenitäten (bezogen auf gleiche geometrische Tiefe). Als mittleren Wert für  $Q$  nehmen wir  $Q = 1.80$  und für  $\mu$  ein  $\bar{\mu} = 1.35$ . Das entspricht bei der Sonne etwa den Verhältnissen in  $\log P_g = 5.40$ , also etwa einer halben Äquivalenzhöhe tiefer als der oberen Begrenzung der Beschleunigungszone.

Tabelle 6. Die relativen Temperaturinhomogenitäten  $\frac{\Delta T}{T}$  für verschiedene Effektivtemperaturen  $T_e$  und Schwerebeschleunigungen  $g$

$T_e$	4400°	5000°	5800°	7000°
$\log g$				
1.5	0.50			
2.5	0.16			
3.0		0.16	0.42	
4.45		0.06	0.10	0.27

Als mittlere Temperatur  $T$  nehmen wir ebenfalls jeweils das  $T$  aus einer Schicht, die um eine halbe Äquivalenzhöhe tiefer liegt als die obere Begrenzung der Beschleunigungszone.

Mit den in der Abb. 4 wiedergegebenen Turbulenzgeschwindigkeiten erhalten wir so die  $\frac{\Delta T}{T}$  Werte der Tab. 6\*.

Die relativen Temperaturinhomogenitäten nehmen offensichtlich genau wie die Turbulenzgeschwindigkeiten mit abnehmender Schwerebeschleunigung und zunehmender Temperatur zunächst zu, bis sie bei zu geringer Ausdehnung der Instabilitätszone abrupt auf Null heruntergehen.

#### D. Sternatmosphären mit dünnen Konvektionszonen

In den vorhergehenden Abschnitten war verschiedentlich von Sternatmosphären die Rede, in deren Konvektionszonen sich Druck und Temperatur oder auch der Grad der Instabilität innerhalb einer Äquivalenzhöhe beträchtlich änderte. Wir hatten eingangs erläutert, daß man die Mischungswegtheorie mit  $l = H$  unter Benutzung von Mittelwerten der physikalischen Zustandsgrößen — gemittelt über eine Äquivalenzhöhe — unter diesen Umständen nicht mehr sinnvoll anwenden kann. Trotzdem hatten wir behauptet, daß sich in diesen Atmosphären wahrscheinlich keine Konvektion ausbilden kann. In der folgenden Diskussion wollen wir die Begründung dafür geben.

\* Die Atmosphären, bei denen das Auftreten von Konvektionsströmen fraglich ist, haben wir hier weggelassen.

Im vorhergehenden Abschnitt hatten wir gesehen, daß die Dicke der Zone, in der Abweichungen von der Strahlungsgleichgewichtsschichtung auftreten — das ist auch die Zone, in der merkliche Beschleunigungen auftreten — abnimmt bei Atmosphären mit höherer Temperatur und mit geringerem Druck, d. h. geringerer Schwerebeschleunigung. Das hat im wesentlichen zwei Gründe: Die Instabilität gegen Konvektion ist *dort* besonders groß, wo der Wasserstoff ionisiert wird. Aus der Sahagleichung folgt aber, daß sich bei hohen Drucken die Ionisation des Wasserstoffs über einen großen Druck- und Temperaturbereich erstreckt, während sie bei niedrigen Drucken nur in einem geringen Druck- und Temperaturbereich stattfindet. Eine geringe Änderung des Druckes oder der Temperatur bewirkt schon den Übergang vom völlig neutralen Zustand des Wasserstoffs zum völlig ionisierten. Deshalb wird in Atmosphären mit geringem Druck die Instabilität — wegen der plötzlichen Ionisation des Wasserstoffs — sehr groß, man erhält große Turbulenzgeschwindigkeiten, aber die Dicke der Zone wird sehr klein. Dieser Effekt ist sowohl bei kleinen Schwerebeschleunigungen als auch bei hohen Effektivtemperaturen wirksam: Bei höheren Temperaturen findet die Ionisation des Wasserstoffs bereits in höheren Atmosphärenschichten, d. h. bei niedrigeren Drucken statt. Andererseits wird der konvektive Energietransport  $\pi F_k \sim \rho \bar{v}$  kleiner, da die Zunahme der Geschwindigkeit durch die Abnahme der Dichte mehr als ausgeglichen wird.

Eine ganz wesentliche Rolle spielt bei der Berechnung des  $\pi F_k$  sodann die Abstrahlung, die wir durch die Einführung des  $\gamma$  berücksichtigt hatten. Der Energieverlust der Elemente durch Abstrahlung war nach (25) proportional  $\frac{T^3 \cdot \Delta T}{\bar{\kappa} \cdot l}$ . Mit abnehmendem Druck wird  $\bar{\kappa}$  kleiner; deshalb wird der Energieausgleich durch Abstrahlung größer und die Konvektionsströme transportieren relativ weniger Energie. Das heißt aber, der Temperaturgradient nähert sich dem Zustand des Strahlungsgleichgewichtes, wird also größer. Die Temperatur steigt mit zunehmendem Druck rascher an. Die Ionisation des Wasserstoffs ist schon nach einer geringen Druckdifferenz wegen der stark zunehmenden Temperatur abgeschlossen, d. h. die Konvektionszone wird durch die zunehmende Abstrahlung noch dünner\*. Dieser Effekt wirkt ebenfalls in der Richtung daß mit zunehmender Effektivtemperatur des Sternes die Konvektionszone dünner wird, denn die Abstrahlung nimmt  $\sim T^3$  zu.

Nach Tab. 6 nehmen die  $\frac{\Delta T}{T}$  bis zu den größten angegebenen  $T_e$  hin noch nicht ab (bei noch größeren  $T_e$  werden sie tatsächlich kleiner). Für den sich einstellenden Temperaturgradienten  $\nabla$  kommt es aber auf das Verhältnis Energietransport zu Abstrahlung =  $\gamma$  an (siehe Gleichung 28 und 29), und dieses ist von  $\nabla T$  unabhängig,

\* In der gleichen Weise wirkt natürlich die Verkleinerung des  $\pi F_k$  durch die abnehmende Dichte  $\rho$ , s. o.

da Nenner und Zähler  $\sim \Delta T$  sind. Es bleibt  $\gamma \sim \frac{c_p \varrho T_{\infty} \cdot l}{\sigma T^4} \bar{v}$  und dieses nimmt wegen des  $T^3$  im Nenner mit zunehmender Temperatur stark ab.

Wie müßte man nun sinnvoller Weise bei der Berechnung einer Konvektionszone vorgehen, wenn deren Ausdehnung vergleichbar wird mit der Äquivalenthöhe? Behalten wir zunächst versuchsweise die Mischungswegtheorie bei, so hätte man wohl den Mischungsweg höchstens gleich der halben Dicke der eigentlichen Beschleunigungszone zu wählen. Man würde also mit  $l = H$  als erster Näherung die Dicke der Instabilitätszone ausrechnen, danach ein neues  $l$  bestimmen, die neue Dicke ausrechnen, wieder ein neues  $l$  bestimmen usw. bis die Iteration steht. Da aber nach (25) die Abstrahlung  $\sim \frac{1}{l}$  geht, so wird mit kleinerem  $l$  die Abstrahlung größer und die Dicke der Instabilitätszone kleiner. Wir zeigen das am Beispiel einer Atmosphäre mit  $T_e = 5800^\circ$  und  $\log g = 1.50$ , für die wir die Konvektionszone einmal unter der Annahme  $l = H$  und sodann mit  $l = \frac{H}{2}$  berechnet haben. — Dabei wurde die Turbulenzbeschleunigung nicht berücksichtigt —.

Für  $l = H$  erstreckt sich die Zone, in der man Geschwindigkeiten von der Größenordnung 1 km/sec ausrechnet, d. h. die eigentliche Beschleunigungszone, über ein  $\Delta \log P_g = 0.09$ , für  $l = \frac{H}{2}$  erhält man merkliche Beschleunigungen nur noch über ein  $\Delta \log P_g = 0.03$ . Mit verändertem Mischungsweg nimmt also die Größe der Instabilitätszone schneller ab als der Mischungsweg selbst, d. h. aber, das oben beschriebene Iterationsverfahren zur Bestimmung der Größe des Mischungsweges und der Beschleunigungszone führt auf  $l =$  halbe Dicke der Beschleunigungszone für die im Strahlungsgleichgewicht befindliche Atmosphäre bei einem verschwindenden konvektiven Energietransport. Physikalisch bedeutet das, daß die Konvektionszone zu dünn ist, als daß sich noch genügend große Turbulenzelemente für einen leistungsfähigen konvektiven Energietransport ausbilden können. Die kleineren Elemente aber tauschen ihren beim Aufstieg gewonnenen Temperaturüberschuß durch Abstrahlung so schnell mit der Umgebung aus, daß sie keinen merklichen Auftrieb erfahren und wieder zur Ruhe kommen. Wir müssen deshalb erwarten, daß es keine Konvektion mehr gibt, sobald die Rechnung mit  $l = H$  eine Dicke der Beschleunigungszone ergibt, die kleiner ist als die Äquivalenthöhe\*.

\* Diese Bedingung, daß für das Einsetzen von Konvektion die Ausdehnung der Beschleunigungszone größer sein muß als der Mischungsweg stellt einen Ersatz dar für das Rayleigh-Kriterium. Dabei ist interessant zu bemerken, daß auch in dem Rayleighschen Fall die Konvektion aufhört, wenn die für das Problem charakteristische Länge — dort die Dicke der instabilen Schicht — zu klein wird im Verhältnis zur freien Weglänge der Moleküle.



Wir haben bisher bei der Berechnung des konvektiven Energietransportes und der Beschleunigung in einem Punkt noch außer acht gelassen, daß wir eigentlich nicht mit den zu diesem Punkt gehörenden  $\bar{\kappa}$ ,  $c_p$ ,  $\mu$  usw. rechnen dürften, sondern diese Größen über einen Mischungsweg mitteln müßten. Das ließe sich auch durch eine Iteration bewerkstelligen. Wichtig wird diese Iteration bei der Berechnung des  $g_t$ , da das

Tabelle 7. Modelle für  $T_e = 5800^\circ$  und  $\log g = 1.50$ 

$l = H$			$l = \frac{H}{2}$	
$\log P_g$	$\log T$	$\bar{v}$ [km/sec]	$\log T$	$\bar{v}$ [km/sec]
3.32	3.89	1.18	3.89	1.24
3.33	3.94	5.78	3.96	4.20
3.34	3.98	6.78	4.03	5.85
3.35	4.01	7.04	4.14	0.43
3.36	4.02	8.00	4.18	
3.37	4.06	8.60	4.20	
3.38	4.12	5.10	4.21	
3.39	4.17	1.48	4.22	
3.41	4.21	0.37	4.24	
3.45	4.25		4.26	

Die Modelle wurden einmal mit einem Mischungsweg  $l = \text{\AA} \text{Äquivalenthöhe } H$  und das andere Mal mit  $l = \text{halbe \AA} \text{Äquivalenthöhe}$  berechnet.

zunächst berechnete  $\bar{v}$  sehr rasch mit  $\log P_g$  variiert, was den tatsächlichen Gegebenheiten natürlich nicht entspricht. Man beginnt die Rechnung am besten ohne Berücksichtigung des  $g_t$ .

Anhand des so gewonnenen Modelles kann man dann  $\bar{v}$  über einen Mischungsweg mitteln und erhält ein  $\bar{\bar{v}}$ , mit dem man dann das  $g_t$  bestimmen kann, das nun nur noch eine unwesentliche Korrektur zum  $g$  ausmacht. Die Mittelung der übrigen Größen würde zwar die Struktur und wohl auch die Ausdehnung der Konvektionszone etwas beeinflussen. Kontrollrechnungen zeigten aber, daß die Änderungen nicht wesentlich sind. Unser obiger Schluß, daß die Konvektion aufhört, wenn die Ausdehnung der Beschleunigungszone kleiner wird als der Mischungsweg, wird dadurch sicher nicht beeinträchtigt. Lediglich die berechneten Temperaturen und Schwerebeschleunigungen, bei denen das eintritt, werden unwesentlich geändert.

Wir erhalten dann also folgendes Bild: Mit zunehmender Effektivtemperatur und abnehmender Schwerebeschleunigung nehmen die durch die Konvektion erzeugten Turbulenzgeschwindigkeiten und Temperaturinhomogenitäten zunächst zu, wobei gleichzeitig die Dicke der Konvektionszonen abnimmt. Bei Hauptsequenzsternen mit effektiven

10\*



Temperaturen von etwa  $7500^\circ$ , bei Giganten von etwa  $6500^\circ$  und bei Übergiganten von etwa  $5000^\circ$  bzw. Ia Übergiganten von etwa  $4000^\circ$  wird dann die Dicke der Beschleunigungszone gleich der Größe des Mischungsweges\*. In Sternen mit jeweils größeren Effektivtemperaturen kann sich keine Konvektion mehr entwickeln. Beim Durchlaufen des Hertzsprung-Russel Diagramm ist der Übergang von heftig brodelnder Konvektion mit hohen Turbulenzgeschwindigkeiten und Temperaturinhomogenitäten zu ruhigen Atmosphären im Strahlungsgleichgewicht abrupt.

### E. Die Atmosphären der Übergiganten

In dem vorhergehenden Abschnitt hatten wir gesehen, daß in den Atmosphären, deren Beschleunigungszone — diese ist nahezu identisch mit der in Tab. 4 durch Querstriche gekennzeichneten Zone — kleiner wird als eine Äquivalenthöhe, mit großer Wahrscheinlichkeit keine Konvektion mehr zustande kommen kann. Dies trifft für alle von uns berechneten Übergigantenmodelle zu. Wir haben deshalb die Schichtung in diesen Atmosphären noch einmal für reines Strahlungsgleichgewicht berechnet und in Tab. 8 angegeben. Man kann hieraus einige interessante Schlüsse ziehen.

#### I. Die Abnahme der Dichte mit zunehmender geometrischer Tiefe

Zunächst ersieht man aus Tab. 8 mit einiger Überraschung, daß mit zunehmender Tiefe in der Atmosphäre die Dichte  $\rho$  nicht notwendig zunimmt, sondern stellenweise sogar abnimmt. Dies erscheint jedoch bei genauerem Hinsehen gar nicht so verwunderlich. Bedenkt man, daß  $\rho = \frac{P_g \mu}{RT}$  ( $R$  = Gaskonstante,  $\mu$  = Molekulargewicht  $\approx \text{const}$ ) und damit  $\Delta \log \rho = \Delta \log P_g - \Delta \log T$ , so ist ersichtlich, daß  $\Delta \log \rho$  immer dann kleiner als 0 wird, wenn

$$\nabla = \frac{d \log T}{d \log P_g} > 1. \quad (33)$$

Im allgemeinen herrscht an solchen Stellen Konvektion, die meistens das  $\nabla$  unter den kritischen Wert von 1 herunterdrückt, jedoch ist auch bei konvektiven Atmosphären in der Nähe der oberen Konvektionszongrenze der konvektive Energietransport noch gering, so daß  $\nabla$  im allgemeinen größer als 1 bleibt und zunächst eine Dichteabnahme eintritt. Bei Atmosphären mit schwacher Konvektion oder bei solchen Atmosphären mit schwacher Konvektion oder bei solchen Atmosphären, in

\* Die berechneten Temperaturen und Schwerbeschleunigungen, bei denen die Dicke der Beschleunigungszone gleich der Größe des Mischungsweges wird, hängt nicht sehr stark von der angenommenen Größe des Mischungsweges ab, da mit größerem Mischungsweg auch die Dicke der Konvektionszone zunimmt.

denen die Konvektion durch Abstrahlung und zu geringe Ausdehnung der Instabilitätszone unterdrückt wird, wie in den hier untersuchten Atmosphären der Übergiganten, tritt dieser Effekt besonders stark zutage. Die Dichteabnahme infolge des steilen Temperaturgradienten wird noch unterstützt durch das gleichzeitige Abnehmen des Molekulargewichtes infolge Ionisation. Auf diese Weise kann die Dichte durchaus um Faktoren von 4 und mehr abnehmen, wie man am Beispiel der Atmosphäre mit  $T_e=4400^\circ$  und  $\log g = 0.90$  sieht. Die Dichteabnahme hat aber auf die Struktur der Sterne wohl keinen wesentlichen Einfluß, da der Bereich abnehmender Dichte stets weniger als 1 % des Sternradius ausmacht.

II. Atmosphärenschichten mit negativer effektiver Gravitation

Als weitere wichtige Besonderheit der in Tab. 8 wiedergegebenen Modelle fällt die stellenweise Abnahme der effektiven Schwerebeschleunigung mit zunehmender geometrischer Tiefe auf, die sogar zu negativen effektiven Schwerebeschleunigungen führen kann. Diese Abnahme von  $g_e$  wird hervorgerufen durch die Zunahme der nach außen wirkenden

Tabelle 8. Atmosphärenmodelle für Übergiganten  
 $T_e=4400^\circ, \log g = 0.90,$   
 $R = 1.6 \cdot 10^{13} \text{cm}$   
 $T_e=5000^\circ, \log g = 1.5$   
 $R = 8.0 \cdot 10^{12} \text{cm}$

$T$	$\log P_g$	$t \cdot 10^{-11} \text{cm}$	$g_e$	$q \cdot 10^9$	$T$	$\log P_g$	$t \cdot 10^{-10} \text{cm}$	$g_e$	$q \cdot 10^9$
3030	1.76	0	+7.94	0.34	3490	1.82	0	+31.6	0.34
3310	2.48	0.36	+7.94	1.63	3750	2.58	1.10	+31.6	1.83
3700	2.67	0.46	+7.94	2.26	4170	2.80	1.45	+31.6	2.75
4140	2.88	0.60	+7.94	3.34	4450	2.95	1.71	+31.6	3.63
4600	3.05	0.72	+7.93	4.45	4950	3.23	2.23	+31.6	6.18
5270	3.22	0.85	+7.93	5.67	5570	3.42	2.62	+31.6	8.59
6000	3.35	0.94	+7.91	6.76	5940	3.49	2.78	+31.5	9.52
6850	3.40	1.02	+7.80	6.57	6530	3.55	2.93	+31.5	9.85
7500	3.41	1.04	+7.51	6.05	7270	3.58	3.02	+31.2	8.79
8000	3.42	1.04	+6.96	5.71	8340	3.59	3.05	+27.9	8.09
9000	3.42	1.05	+3.47	4.62	9160	3.60	3.10	+22.5	6.86
10000	3.42	1.05	−3.02	3.51	10000	3.60	3.11	+11.3	5.12
11000	3.42	1.05	−6.18	2.73	11000	3.60	3.12	− 7.7	4.27
12000	3.42	1.06	−3.81	2.29	12000	3.60	3.13	+ 5.0	3.51
13000	3.42	1.07	0	1.99	13000	3.60	3.15	+13.8	3.09
14000	3.42	1.08	+1.34	1.81	14000	3.61	3.21	+18.7	2.81
15000	3.43	1.12	+3.67	1.70	15660	3.62	3.33	+23.7	2.53
17640	3.45	1.45	+5.90	1.52	17360	3.65	3.81	+26.2	2.35
19140	3.50	1.79	+6.28	1.53	18940	3.70	4.67	+27.4	2.39
21360	3.60	2.56	+6.68	1.71	20080	3.75	5.57	+27.9	2.52
24600	3.80	4.22	+6.79	2.33	24480	4.00	10.63	+28.7	3.69

nigung mit zunehmender geometrischer Tiefe auf, die sogar zu negativen effektiven Schwerebeschleunigungen führen kann. Diese Abnahme von  $g_e$  wird hervorgerufen durch die Zunahme der nach außen wirkenden

Tabelle 8 (Fortsetzung)

$T_e = 5800^\circ$ ,  $\log g = 1.5$ ,  
 $R = 1.5 \cdot 10^{13} \text{ cm}$

$T_e = 7000^\circ$ ,  $\log g = 2.0$ ,  
 $R = 7.0 \cdot 10^{12} \text{ cm}$

$T$	$\log P_g$	$t \cdot 10^{-10} \text{ cm}$	$g_e$	$\varrho \cdot 10^9$	$T$	$\log P_g$	$t \cdot 10^{-10} \text{ cm}$	$g_e$	$\varrho \cdot 10^9$
4060	1.40	0	+31.6	0.11	4980	1.80	0	100	0.23
4330	2.26	1.44	+31.6	0.77	5265	2.54	0.48	100	1.19
4800	2.62	2.10	+31.6	1.57	5740	2.83	0.68	100	2.11
5110	2.83	2.52	+31.6	2.37	6090	2.98	0.79	99.8	2.83
5680	3.14	3.13	+31.6	3.13	6380	3.06	0.86	99.7	3.05
6190	3.24	3.40	+31.5	5.04	6770	3.13	0.92	99.3	3.58
6820	3.29	3.55	+31.2	5.11	7110	3.16	0.94	98.8	3.63
7810	3.32	3.64	+29.4	4.56	7490	3.19	0.97	97.7	3.61
8400	3.33	3.66	+26.4	4.29	7830	3.20	0.98	95.9	3.50
9000	3.33	3.67	+20.1	3.71	8550	3.21	0.99	86.2	3.13
9400	3.33	3.68	+13.8	3.33	9000	3.22	0.99	77.1	2.87
10000	3.33	3.69	+ 0.7	2.80	10000	3.22	1.00	43.8	2.21
11000	3.33	3.70	-13.1	3.70	11000	3.22	1.02	19.7	1.66
12000	3.33	3.72	- 2.3	1.83	12000	3.22	1.04	42.4	1.42
13000	3.33	3.76	+ 9.2	1.62	13000	3.22	1.08	63.3	1.26
14000	3.33	3.85	+15.7	1.47	14000	3.24	1.14	75.2	1.20
15000	3.33	4.02	+20.4	1.35	15760	3.30	1.39	83.4	1.19
17770	3.40	5.23	+25.7	1.31	17640	3.40	1.87	87.3	1.32
19540	3.50	6.98	+27.2	1.49	19050	3.50	2.39	89.0	1.54
22360	3.70	10.77	+27.7	2.05	21600	3.70	3.52	90.0	2.13
26780	4.00	17.49	+27.7	3.37	25600	4.00	5.49	90.4	3.53

Anmerkungen zu Tab. 8:

$T$  = Temperatur,  $P_g$  = Gasdruck,  $t$  = geometrische Tiefe, gerechnet von  $\bar{\tau} = 0.001$  an,  $g_e$  = effektive Schwerebeschleunigung,  $\varrho$  = Dichte,  $R$  = Sternradius,  $g$  = Gravitationsbeschleunigung.

Strahlungsbeschleunigung  $g_r$ . Nach Gleichung (3) ist diese im Strahlungsgleichgewicht gegeben durch

$$g_r = \frac{\bar{\kappa} \sigma T_e^4}{c}.$$

Mit zunehmender Tiefe nimmt das  $\bar{\kappa}$  infolge von Druck- und Temperaturzunahme zunächst stark zu, bis es infolge der Ionisation des Wasserstoffs bei Temperaturen von mehr als  $10000^\circ$  wieder abnimmt. Während also die Strahlungsbeschleunigung unmittelbar an der Oberfläche noch bedeutungslos ist, kann sie — solange der Strahlungsstrom nicht durch konvektiven Energietransport erheblich herabgesetzt wird — bei Temperaturen um  $10000^\circ$  durchaus größer als die Gravitationsbeschleunigung werden. Da weiterhin  $g_e = g - g_r - g_t$  ist, kann so die effektive Schwerebeschleunigung negativ, d. h. nach außen

gerichtet werden. Das braucht nicht zu einer Instabilität des Sternes zu führen. Da nämlich

$$\frac{dP_g}{dt} = \varrho \cdot g_e, \quad (34)$$

so bedeutet ein negatives  $g_e$  nur, daß der Gasdruck nach größeren Tiefen hin abnimmt. Bliebe  $g_e$  über größere Bereiche negativ, so müßte eine Schalenbildung um den eigentlichen Stern herum auftreten. Schematisch würde also die Druckverteilung als Funktion des Radius etwa der Abb. 5 entsprechen.

Negative Schwerebeschleunigung wird erst dann zu einer Instabilität des gesamten Sternes führen, wenn sie über so große Teile des Sternradius erhalten bleibt, daß Gleichung (34) an *einem* Punkt auf einen negativen Druck führt.

Für unsere Modelle besteht in dieser Hinsicht keine Gefahr. Wir erhalten zwar in den Bereichen negativer Schwerebeschleunigung eine Druckabnahme; diese bleibt aber so gering, daß sie sich in der zweiten Stelle des  $\log P_g$  noch nicht bemerkbar macht. In Tab. 8 erhalten wir deshalb scheinbar konstanten Gasdruck. Die Frage, ob es Sterne mit sehr geringer Gravitationsbeschleunigung gibt, bei

denen die Strahlungsbeschleunigung zu einer ausgeprägten „shell“-Bildung oder unter dem Einfluß von Rotation zu einer Ringbildung führen kann, soll hier nicht untersucht werden. Es erscheint nicht ausgeschlossen, daß die obere Begrenzung der Hauptsequenz dadurch bestimmt ist, daß ein Stern mit größerer als der größten beobachteten Masse in seiner Kontraktionsphase durch ein Stadium hindurch müßte, in dem er durch die Strahlungsbeschleunigung instabil wird.

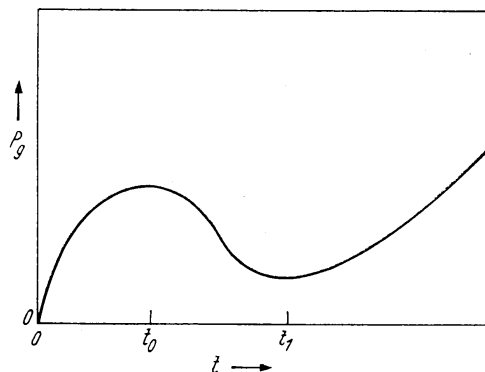


Abb. 5. Schematische Darstellung der Druckverteilung in einem Stern mit negativer Effektivbeschleunigung zwischen den geometrischen Tiefen  $t_0$  und  $t_1$  als Funktion der geometrischen Tiefe  $t$

### III. In welchen Sternatmosphären kann die effektive Schwerebeschleunigung negativ werden?

Aus der Tab. 8 ersieht man, daß für die Übergiganten mit zunehmender Effektivtemperatur die Strahlungsbeschleunigung an Bedeutung verliert, da gleichzeitig die Gravitationsbeschleunigung zunimmt. Wenn wir die Konstante  $\frac{\sigma}{c}$  fortlassen, wird

$$\frac{g_r}{g} \approx \frac{\bar{\kappa} T_e^4}{g}. \quad (35)$$

Wir wollen dieses Verhältnis zunächst *entlang der Übergigantensequenz* untersuchen. Den Zusammenhang von  $g$  und  $T_e$  entlang dieser Sequenz approximieren wir durch  $g \sim T_e^\alpha$ , dann ist  $T_e^4 \sim g^{4/\alpha}$ . Um die in einer Atmosphäre maximal auftretende Strahlungsbeschleunigung zu erhalten, müssen wir in (35) das größte vorkommende  $\bar{\kappa}$  einsetzen. Trägt man die  $\bar{\kappa}$  für konstanten Gasdruck als Funktion der Temperatur auf, so sieht man, daß  $\bar{\kappa}_{max} \sim P_g^{1/2}$ . Aus unserer Tab. 8 liest man ab, daß in den verschiedenen Atmosphären der Gasdruck, bei dem die maximale Strahlungsbeschleunigung erreicht wird, nahezu unabhängig von der effektiven Temperatur und der damit gegebenen Gravitationsbeschleunigung ist. — Genau genommen ergibt sich  $P_g(\bar{\kappa}_{max}) \sim g^{-1/5.5}$  und also  $\bar{\kappa}_{max} \sim P_g^{1/2} g^{-1/11}$ . — Nehmen wir in erster Näherung an, daß  $\bar{\kappa}_{max}$  in allen Atmosphären den gleichen Wert hat, so erhalten wir

$$\frac{g_r}{g} \approx g^{4/\alpha - 1}. \quad (36)$$

Für  $\alpha > 4$  nimmt danach  $\frac{g_r}{g}$  entlang der Übergigantensequenz mit zunehmendem  $g$  und  $T_e$  ab,

für  $\alpha = 4$  bleibt es konstant

für  $\alpha < 4$  nimmt es zu.

Wollte man die Abhängigkeit des  $\bar{\kappa}_{max}$  von  $T_e$  und  $g$  berücksichtigen, so hätte man überall anstatt 4 die Zahl  $\frac{44}{12}$  einzusetzen.

Für die von uns durchgerechneten Übergigantenmodelle erhalten wir aus  $T_e = 7000^\circ$  bei  $\log g = 2.0$  und  $T_e = 4400^\circ$  bei  $\log g = 0.90$  einen Zusammenhang  $g \sim T_e^{5.4}$ , d. h.  $\alpha = 5.4$ . Das Verhältnis  $g_r/g$  nimmt deshalb *entlang der Übergigantensequenz* mit zunehmender Effektivtemperatur ab.

$\alpha = 4$  ergibt sich z. B. für Modelle mit konstanter Masse und konstanter Helligkeit, also etwa für einen Stern, der sich bei konstanter Helligkeit zusammenzieht. Unter diesen Voraussetzungen ist  $g \sim \frac{m}{R^2}$ , die Strahlungsintensität  $I \sim T_e^4 \times$

$\times R^2 = K$  und damit  $g \sim \frac{m}{K} T_e^4 \sim T_e^4$ . — Unter Berücksichtigung der Abhängigkeit des  $\kappa_{max}$  von  $T_e$  würde bei einem solchen Stern in den frühen Kontraktionsstadien die Strahlungsbeschleunigung relativ größer sein als in den späten.

Bisher haben wir das Verhältnis  $g_r/g$  entlang der Überriesensequenz, d. h. bei gegebenem Zusammenhang  $g(T_e)$  für Überriesen untersucht. Wir wollen nun das Verhältnis  $g_r/g$  für Sterne *konstanter Effektivtemperatur* in Abhängigkeit von der Gravitationsbeschleunigung betrachten. Für  $T_e = \text{const}$  wird nach E. VITENSE (1951) für gleiche optische Tiefe, d. h. gleiche Temperatur  $P_g \sim g^{1/2}$ . Das maximale  $\kappa$  tritt in den verschiedenen Atmosphären auch bei verschiedenen Drucken immer etwa bei der gleichen Temperatur auf, so daß wir in ausreichender Näherung schreiben

können  $\bar{\kappa}_{max} \sim P_g^{1/2} \sim g^{1/4}$  und damit für  $T_e = \text{const}$

$$\frac{g_r}{g} \sim g^{-3/4}. \quad (37)$$

Bei *konstant gehaltener Effektivtemperatur* der Sterne nimmt also mit zunehmender Gravitationsbeschleunigung die relative Bedeutung der Strahlungsbeschleunigung sehr rasch ab.

Für  $T_e = 5800^\circ$  und  $\log g = 1.50$  ist nach Tab. 8 das  $\frac{g_{rmax}}{g} \sim 1.5$ . Nach (37) ist andererseits  $\Delta \log \frac{g_r}{g} = -\frac{3}{4} \Delta \log g$ . Für  $T_e = 5800^\circ$  wird danach  $\frac{g_{rmax}}{g} \sim 0.5$  bei  $\log g = 2.14$ .

Man erhält danach nur einen schmalen Bereich von  $T_e$  und  $g$ , — etwa entsprechend den Übergiganten mit  $4400^\circ < T_e < 8000^\circ$  — für den die Strahlungsbeschleunigung vergleichbar wird mit der Gravitationsbeschleunigung. Bei kleineren Temperaturen erhält man in den in Frage kommenden Atmosphärenschichten eine wirksame Konvektion. Dadurch wird der Strahlungsstrom herabgesetzt. Da nun  $g_r = \frac{\bar{\kappa}}{c} \sigma T_e^4 \times \frac{\pi F_{Str}}{\pi F}$  ist, so wird damit auch  $g_r$  kleiner.

Da die Cepheiden\* Übergiganten mit Strahlungstemperaturen von  $6000^\circ \pm 1000^\circ$  sind [vgl. z. B. W. BECKER (1950) Tab. 32, S. 107], so müssen wir hieraus folgern, daß sie 1. wahrscheinlich keine Konvektionszone haben und 2. dann in ihren Atmosphären die Strahlungsbeschleunigung von der Größenordnung der Gravitationsbeschleunigung ist.

Ob diese merkwürdigen Zusammenhänge etwas mit der Aufrechterhaltung der Pulsation zu tun haben, konnte bisher noch nicht geklärt werden.

#### IV. Turbulenz durch Strahlungsbeschleunigung?

Es erhebt sich die weitere Frage, ob eventuell die Strahlungsbeschleunigung als Ursache für die Turbulenz in Übergiganten in Frage kommen könnte. Nehmen wir z. B. an, wir hätten in einem Gasballen eine geringe Druckerhöhung\*\*, dann wäre das  $\bar{\kappa}$  in diesem Gasballen größer als

\* Trotz der wahrscheinlich geringeren Metallhäufigkeit der Pop. II Sterne erhält man für diese die gleichen Ergebnisse wie für Pop. I Sterne, da die Opazität durch H und H<sup>-</sup> bestimmt wird. In der Wasserstoffkonvektionszone werden die Elektronen vom Wasserstoff geliefert. Lediglich in den höchsten Atmosphärenschichten wird die Opazität infolge des geringen Metallgehaltes herabgesetzt und deshalb bei gleicher Temperatur der Druck heraufgesetzt. Dadurch könnten sich die Effektivtemperaturen und Schwerebeschleunigungen, bei denen die Konvektion aufhört, ein wenig ändern.

\*\* Der Einfluß einer erhöhten Temperatur wurde bei den obigen Untersuchungen der Wasserstoffkonvektionszone bereits mit berücksichtigt.



in seiner Umgebung. Blicke der Strahlungsstrom  $F$  dabei ungeändert\*, so würde die auf den Gasballen wirkende Strahlungsbeschleunigung größer sein als die auf die Umgebung wirkende, und der Gasballen würde einen Auftrieb erfahren. Andererseits wird durch den größeren Druck die Masse des Gasballens und damit seine Schwere größer. Die resultierende Kraft, bezogen auf den Kubikzentimeter, ist  $\Delta(\varrho \cdot g_e)$ .

Nun gilt

$$d(\varrho \cdot g_e) = d\varrho \cdot g_e + \varrho \cdot dg_e. \quad (38)$$

Mit  $\varrho = \frac{P_g \mu}{RT}$ ,  $g_e = g - g_r$  und  $g_r = \frac{\bar{\kappa}}{c} \sigma T_e^4$  erhält man also

$$\frac{d(\varrho \cdot g_e)}{dP_g} = \frac{\varrho}{P_g} [g_e - g_r \cdot b]. \quad (39)$$

Dabei haben wir  $\bar{\kappa} \sim P_g^b$  gesetzt und  $\frac{d \log \mu}{d \log P_g}$  gegen 1 vernachlässigt. Man erhält einen Auftrieb, wenn  $d(\varrho \cdot g_e)$  negativ, d. h. also  $g_r \cdot b > g_e$  wird. Wegen  $g_e = g - g_r$  heißt dies

$$g_r(1 + b) > g. \quad (40)$$

In der Nähe des in einer Atmosphäre maximal auftretenden  $\bar{\kappa}$  ist  $b \sim 1/2$ . Hier muß also  $g_r > 2/3 g$  sein.

Die Bedingung (40) ist das Analogon zu dem bekannten Schwarzschildschen Kriterium für *thermische Instabilität*. Ob diese dann wirklich zur Konvektion führt, hängt wesentlich davon ab, wie schnell ein aufsteigendes Element seine Temperaturerhöhung gegenüber der Umgebung ausgleicht. Bei der hier diskutierten *Druckinstabilität* kommt es an auf das Verhältnis von Druckausgleich zu Druckerhöhung für ein aufsteigendes Element.

Der Druckausgleich findet etwa mit Schallgeschwindigkeit statt. Er erstreckt sich demnach über eine Zeitdauer  $s = \frac{L}{C}$ , wenn  $L$  den Durchmesser des Gasballens und  $C$  die Schallgeschwindigkeit bedeuten. Während dieser Zeit erhält man durch den — als konstant angenommen — Auftrieb (39) eine Geschwindigkeit

$$v = \frac{L}{C} (g_e - g_r b) \left( \frac{a - 1}{a} \right), \quad (41)$$

wenn  $P_g = a P_{g0}$  ist, wobei  $a > 1$  ist, da wir von einem Überdruck ausgingen.

Aus der Theorie der schwachen Stoßwellen folgt [siehe z. B. COURANT-FRIEDRICHs (1948), Gleichungen 67.10 und 71.04], daß bei einer Strömungsgeschwindigkeit  $v$  hinter der Stoßfront die relative Druckänderung

\* Durch ein größeres  $\bar{\kappa}$  kann  $F$  nur verkleinert werden. Setzen wir  $\pi F = \sigma T_e^4$ , so machen wir die Strahlungsbeschleunigung höchstens zu groß, schätzen also den Auftrieb eventuell zu groß ab.

von der Größenordnung  $\frac{v}{C}$  ist. Diese müßte nun also größer sein als das ursprüngliche  $\Delta P_g/P_{g0}$  der Störung, wenn der Gasballen über eine längere Zeit einen merklichen Auftrieb erfahren soll, d. h. es müßte sein

$$(a - 1) = \frac{\Delta P_g}{P_{g0}} \leq \left| \frac{v}{C} \right| = \left| \frac{L}{C^2} (g_e - g_r \cdot b) \frac{a - 1}{a} \right|. \quad (42)$$

Für  $L$  können wir maximal die Dicke der Zone mit  $g_e < \frac{1}{3} g$  einsetzen. Die günstigsten Verhältnisse erhält man für  $T_e = 4400^\circ$  und  $\log g = 0.9$ . Mit den numerischen Werten aus diesem Modell ergibt sich aus (42)  $\frac{13 \cdot 10^{-2}}{a} > 1$  als Bedingung für das Auftreten von Konvektion infolge von Druckinstabilität. Mit  $a > 1$ , wie vorausgesetzt, ist diese Bedingung nicht zu erfüllen. Wir erhalten also für die hier betrachteten — grauen — Atmosphären keine Konvektion durch die Strahlungsbeschleunigung\*.

### F. Schluß

In der Einleitung hatten wir vier wesentliche Probleme herausgestellt, für die eine genaue Kenntnis des Aufbaus der Konvektionszonen erforderlich ist. 1. Die Ausdehnung der Konvektionszonen in roten Riesen, 2. die Spektren der Metalllinien-Sterne, 3. die großen Turbulenzgeschwindigkeiten in heißen Übergiganten und schließlich 4. das Problem der Cepheidenpulsation.

Auf die Ausdehnung der Konvektionszonen in roten Riesen sind wir bereits im Abschnitt CII eingegangen. Die Konvektionszonen für Riesen und Überriesen erstrecken sich stets nur über wenige Prozente des Sternradius, wenn man nicht einen neuen, noch völlig unbekannten Konvektionsmechanismus annehmen will. Es erhebt sich die Frage, wie weit das Entwicklungsdiagramm für Population II Sterne, das HOYLE und SCHWARZSCHILD (1955) unter der Annahme sehr ausgedehnter Konvektionszonen berechnet haben, durch eine geringe Ausdehnung der Konvektionszonen verändert wird. Da diese Frage eingehend in einer Arbeit von R. KIPPENHAHN, ST. TEMESVARY und L. BIERMANN (1958) behandelt wird, wollen wir an dieser Stelle nicht näher darauf eingehen.

Über die Spektren der Metalllinien-Sterne können wir im Rahmen dieser Untersuchungen noch nichts Endgültiges sagen. Nach den Untersuchungen des Abschnittes D liegen die Metalllinien-Sterne in dem Bereich des Hertzsprung-Russell-Diagramms, in dem plötzlich die Konvektion in Erscheinung tritt. Bei den Sternen, die noch gerade eine Konvektionszone haben, kann man nach der Abb. 4 Turbulenzgeschwindigkeiten von etwa 4 km/sec erwarten, wie sie von J. GREENSTEIN (1948)

\* Die bei frequenzabhängigem  $\kappa$  durch Dopplerverschiebung hervorgerufenen Effekte blieben hier unberücksichtigt

aus den Spektren der Metalllinien-Sterne bestimmt wurde. Man darf dementsprechend auch relativ große Temperaturinhomogenitäten erwarten, — nach Tab. 6 etwa 30% der mittleren Temperatur —. Die Entscheidung darüber, ob man mit diesen Temperaturinhomogenitäten eventuell die Unterschiede zwischen den Metalllinien-Spektren und den normalen Spektren verstehen kann, muß einer gesonderten Untersuchung vorbehalten bleiben.

Auf das Problem der hohen Turbulenzgeschwindigkeiten bei den heißen Übergiganten waren wir im Abschnitt CIV bereits kurz eingegangen. Da die thermische Instabilität der Wasserstoffkonvektionszone nicht mehr ausreicht, um eine merkliche Konvektion in Gang zu setzen, können wir die hohen Turbulenzgeschwindigkeiten dieser Sterne sicher nicht durch eine sehr aktive Wasserstoffkonvektionszone erklären. Die Ursache für die beobachteten großen Linienbreiten müssen wir noch als offenes Problem betrachten.

Im Abschnitt D hatten wir gezeigt, daß sich die Atmosphären der  $\delta$  Cephei-Sterne im Strahlungsgleichgewicht befinden müssen. Daraus ergibt sich (siehe Abschnitt E) daß in einigen Schichten die Strahlungsbeschleunigung von der Größenordnung der Gravitationsbeschleunigung ist. Auf das Problem der Cepheidenpulsation können wir im Rahmen dieser Untersuchungen nicht näher eingehen.

Nicht erwähnt wurde bisher die nach R. WILDT (1957) in Sternen, später Spektraltypen durch die Dissoziation der Wasserstoffmoleküle hervorgerufene Konvektionszone. Sie tritt bei den von uns untersuchten Sternen nicht auf, da auch bei  $T_e = 4400^\circ$  und  $\log g = 2.5$  nirgends in der Atmosphäre Moleküle in merklicher Anzahl vorhanden sind. Bei Hauptsequenzsternen mit  $T_e \leq 4400^\circ$  liegt diese „Molekülkonvektionszone“ zunächst auch noch in so hohen Schichten der Atmosphäre, daß der Strahlungsaustausch eine effektive Konvektion verhindern dürfte. Erst bei sehr kühlen Sternen könnte die neue Konvektionszone wichtig werden.

Herrn Professor A. UNSÖLD möchte ich für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit herzlich danken. Dem Deutschen Wissenschaftlichen Komitee der Research Corporation New York gebührt mein Dank für die Bereitstellung der finanziellen Mittel, die mir die Durchführung dieser Untersuchungen gestatteten und die es ermöglichten, eine automatische Tischrechenmaschine zu beschaffen.

### Literatur

BECKER, W.: Sterne und Sternsysteme. 2. Auflage, S. 66. Dresden und Leipzig: Theodor Steinkopff 1950. — BIERMANN, L.: Z. Astrophysik **25**, 135 (1948). — BIERMANN, L.: Transactions of the International Astronomical Union **9**, 750 (1955). — BÖHM, K. H.: Z. Astrophysik **34**, 182 (1954). — CAYREL, R.: Ann. d'Astrophysique **14**, 1 (1951). — CHANDRASEKHAR, S.: Monthly Notices **96**, 21 (1936). — COURANT, R., and KO. FRIEDRICHS: Supersonic Flow and Shock Waves. New York: Interscience Publishers 1948. — EDDINGTON, A. S.: Monthly Notices **101**,

182 (1941). — GREENSTEIN, J. L.: *Astrophysic. J.* **107**, 151 (1948). — HOYLE, F., and M. SCHWARZSCHILD: *Astrophysic. J. Suppl.* **13** (1955). — HUNGER, K.: *Z. Astrophysik* **36**, 42 (1955). — KELLER, G., and R. E. MEYEROTT: *Astrophysic. J.* **122**, 32 (1955). — KIPPENHAHN, R., ST. TEMESVARY u. L. BIERMANN: *Z. Astrophysik* (1958) (noch nicht erschienen). — MARK, C.: *Phys. Rev.* **72**, 558 (1947). — MORGAN, W. W.: In Hynek: *Astrophysics*, p. 20. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Comp., Inc. 1951. — OSTERBROCK, D. E.: *Astrophysic. J.* **118**, 529 (1953). — PECKER, CH: *Ann. d'Astrophysique* **16**, 321 (1953). — ROSA, A.: *Z. Astrophysik* **25**, 1 (1948). — ROSA, A., u. A. UNSÖLD: *Z. Astrophysik* **25**, 20 (1948). — RÖSCH, J.: *l'Astronomie* **1957**, 129. — RUDKJÖBING, M.: *Principes Fondamentaux de Classification stellaire*. Paris 1953, p. 81. — SCHWARZSCHILD, M., R. HOWARD and R. HÄRM: *Astrophysic. J.* **125**, 233 (1957). — SCHWARZSCHILD, M., J. B. ROGERSON jr. and J. W. EVANS: Vortrag auf der 99. Tagung der American Astronomical Society, Dec. 27–30, 1957. — SKUMANICH, A. (1955): *Astrophysic. J.* **121**, 408 (1955). — SLETTEBAK, A.: *Astrophysic. J.* **124**, 173 (1956). — TRAVING, G.: *Z. Astrophysik* **36**, 1 (1955). — UNSÖLD, A.: *Z. Astrophysik* **21**, 229 (1942). — UNSÖLD, A.: *Z. Astrophysik* **25**, 11 (1948). — UNSÖLD, A.: *Physik der Sternatmosphären*, 2. Auflage, S. 218. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955a. — UNSÖLD, A.: *Physik der Sternatmosphären*, 2. Auflage, S. 202. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955b,c. — VITENSE, E.: *Z. Astrophysik* **28**, 81 (1951). — VITENSE, E.: *Z. Astrophysik* **29**, 73 (1951). — VITENSE, E.: *Z. Astrophysik* **32**, 135 (1953). — VOIGT, H. H.: *Z. Astrophysik* **31**, 48 (1952). — WILDT, R.: *Les Molecules dans les Astres*. p. 319. Institut d'Astrophysique, Cointe-Sclessin, Belgique. — WOOLLEY, R. v. D. R.: *Monthly Notices* **101**, 52 (1941). — WOOLLEY, R. v. D. R.: *Monthly Notices* **103**, 1, 91 (1943). — WOOLLEY, R. v. D. R., and D. W. N. STIBBS: *The Outer Layers of a Star*, p. 212. Oxford: Clarendon Press 1953.

Dr. ERIKA BÖHM-VITENSE, Kiel  
 Institut für Theoretische Physik, Neue Universität, Bau C 4