



168



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT-T.008/00

OK

Cosmologia quântica com topologias não-triviais

Sandro Silva e Costa



Orientador:

Prof. Dr. Helio Vasconcelos Fagundes

— Setembro 2000 —

À constante presença conhecida como Deus.

O mais antigo pregador que houve no mundo foi o Céu.
Suposto que o Céu é pregador,
deve de ter sermões e deve de ter palavras.
(...) E quais são estes sermões e estas palavras do Céu?
As palavras são as estrelas, os sermões são a composição,
a ordem, a harmonia e o curso delas.

Padre Antônio Vieira, no 'Sermão da Sexagésima'.

Agradecimentos

- Ao Prof. Helio Vasconcelos Fagundes pela sua paciência e orientação;
- A Ângela, minha tão necessária companheira e âncora emocional;
- A Randall Guedes Teixeira, a quem devo muitas gratidões eternas;
- Aos meus pais e irmãos;
- Às amigas e amigos, que presentes ou distantes, e mesmo sem nomeá-los, não posso deixar de esquecer;
- A Leonardo de Albuquerque Salvi, que fez o inestimável favor de apontar os – muitos – erros de português deste trabalho;
- A todos os funcionários e professores do Instituto de Física Teórica;
- Ao povo anônimo do estado de São Paulo e ao pessoal da FAPESP, que, uns pagando seus impostos, e outros, aceitando meu projeto de doutorado, deram-me suporte financeiro: a esses nunca poderei agradecer o bastante.

Resumo

Neste trabalho é apresentado um modelo particular de cosmologia quântica, onde, após o surgimento quântico de um universo com curvatura positiva, ocorre uma mudança de topologia resultando em um universo de curvatura negativa e topologia não-trivial, o qual evolui posteriormente segundo o modelo do Big Bang. Para tanto, a cosmologia quântica ‘padrão’ é apresentada e então estendida segundo uma proposta de De Lorenci *et al.*; dentro desse contexto discutem-se também brevemente alguns problemas de física matemática associados ao uso de espaços com topologia não-trivial.

Palavras-chave: cosmologia, topologia, cosmologia quântica.

Áreas do conhecimento: 1.05.01.02-9, 1.05.01.03-7.

Abstract

In this work a particular model of quantum cosmology is presented, where, after the quantum creation of an universe with positive curvature, there is a topology change resulting in an universe with negative curvature and non-trivial topology, which later evolves according to the standard Big Bang model. For this, the 'standard' quantum cosmology is presented and then extended following a proposal by De Lorenci *et al.*; in this context are also discussed briefly some problems in mathematical physics associated to the use of spaces with non-trivial topology.

Keywords: cosmology, topology, quantum cosmology.

Sumário

1	Apresentação	3
2	O padrão clássico	6
2.1	Soluções gerais para o fator de escala	8
2.2	Campos escalares e inflação	12
2.3	Parametrizações da solução de <i>de Sitter</i>	17
3	O padrão quântico	22
3.1	Formalismo Hamiltoniano	24
3.2	Quantização	27
3.3	Soluções com matéria	31
4	Problemas topológicos	34
4.1	Noções básicas de topologia	36
4.2	Autovalores da equação de Helmholtz	41
4.3	Integração em espaços compactos	48
5	Um modelo com mudança de topologia	55
5.1	Teoria	57
5.2	Números	65
6	Comentários finais	69

7	Apêndice: relatividade e cosmologia	71
7.1	Resumo de relatividade geral	72
7.2	Obtenção da métrica de FLRW	77
	Bibliografia	84

1

Apresentação

O Coelho Branco pôs seus óculos.

“Por onde devo eu começar,
por favor, vossa Majestade?”,

perguntou ele.

“Comece pelo começo,”

o Rei disse gravemente,

“e continue até que você chegue ao fim;
então pare.”

Lewis Carrol, em 'Alice no País das Maravilhas'.

O livro *“Curso de Física Básica”*, de H. Moisés Nussenzveig, começa seu capítulo introdutório com uma seção intitulada ‘Para que serve a física?’, onde aparece o seguinte texto [1]:

"A motivação básica da ciência sempre tem sido a de entender o mundo. É a mesma curiosidade que leva um menino a desmontar um relógio para saber como funciona. De que são feitas as coisas? Como e por que se movem os corpos celestes? Qual é a natureza da eletricidade e do magnetismo? O que é a luz? Qual a origem do Universo? Estas são algumas das grandes questões que têm sido abordadas pelos físicos."

Este trabalho, cuja proposta principal é expor um estudo do uso de topologias não-triviais na descrição quântica da origem do universo, segue a 'motivação básica da ciência' exposta no parágrafo acima, onde se destaca não a exigência de respostas finais, únicas e definitivas, mas principalmente a formulação de perguntas pertinentes.

De forma bastante simplificada este trabalho pode ser resumido como uma apresentação de um modelo simples e particular de cosmologia quântica, baseado principalmente num formalismo desenvolvido por De Lorenci *et al.* [2], na busca de uma das possíveis respostas para a nem um pouco óbvia questão 'Que tipo de previsão pode-se ter para a topologia global do universo?'. Tal questão não é óbvia por envolver a pouco lembrada preocupação com a topologia global do universo; na cosmologia padrão, de modo geral, quase não se assume que existe tal questão.

No desenvolvimento desta tese alguns assuntos mais básicos serão abordados inicialmente, passo a passo, na intenção de que este trabalho seja compreendido de forma lógica e mais ou menos linear. Os capítulos que se seguem, tratam, portanto, em sequência, dos fundamentos da cosmologia, indo da clássica cosmologia padrão do modelo do Big Bang, no capítulo '**O padrão clássico**', até a sua recente extensão quântica, no capítulo '**O padrão quântico**', passando-se então à descrição topológica de espaços – '**Problemas topológicos**' – para só então mostrar-se, por fim, como a topologia pode aparecer numa particular descrição quântica da origem do universo – '**Mudança de topologia**'; um último capítulo, '**Comentários finais**', serve de epílogo para a linha de raciocínio apresentada.

Além desses capítulos esta tese apresenta um único apêndice ‘introdutório’, **‘Relatividade e Cosmologia’**, cujo propósito é apenas mostrar algumas idéias e cálculos mais elementares que não caberiam no texto principal, já que este deve apresentar certa objetividade, procurando-se assim, ao mesmo tempo, escrever um trabalho algo completo e ‘auto-contido’.

Em todo o texto a notação usada tem índices latinos (a, b, \dots) indo de 1 a 3, e índices gregos (μ, ν, \dots) indo de 0 a 3; as unidades usadas são as unidades ‘naturais’ onde $c = G = 1$, exceto quando tais constantes aparecem explicitamente.

2

O padrão clássico

O Universo não é uma idéia minha.
A minha idéia do Universo é que é uma idéia minha.
A noite não anoitece pelos meus olhos,
A minha idéia da noite é que anoitece por meus olhos.
Fora de eu pensar e de haver quaisquer pensamentos
A noite anoitece concretamente
E o fulgor das estrelas existe como se tivesse peso.

Poema de Alberto Caeiro, um dos 'outros eus' de Fernando Pessoa.

A cosmologia quântica é uma teoria preocupada com os momentos iniciais do universo, usada para quando sua dimensão é pequena; após o início quântico, porém, assume-se que o universo segue o modelo do Big Bang. Por quê? O que há neste modelo do Big Bang que o faz ser o modelo padrão da cosmologia clássica?

O atual status da teoria do Big Bang pode ser avaliado, por exemplo, pela seguinte citação, retirada de um livro de divulgação científica recentemente traduzido para o português, *“As sete maiores descobertas científicas da história”* [3]:

“Este livro identifica as maiores dentre essas descobertas – sete achados tão fundamentais que quase todo o resto do que a humanidade conhece da ciência se baseia neles:

1. A gravidade e as leis básicas da física
2. A estrutura do átomo
3. O Princípio da Relatividade
4. O Big-Bang e a formação do universo
5. A evolução e o Princípio da Seleção Natural
6. A célula e a genética
7. A estrutura da molécula de DNA

Essas são as descobertas do que é (...).”

É claro que nem todos são tão positivistas [4]:

“O universo começou em uma violenta explosão que ocorreu há cerca de 15 bilhões de anos atrás: esta é a moderna hipótese que tomou o lugar dos mitos clássicos da Grécia e de Roma, das antigas China e Índia. (...) Talvez daqui a mil anos no futuro, a teoria do big bang será ela mesma vista como um mito do século vinte.”

Contudo, há ótimas indicações observacionais de que o Big Bang é quase mais que uma teoria, de que ele praticamente representaria “o que é”; tais indicações começaram na década de 1920, quando a teoria não existia de forma organizada, com a descoberta, pelo astrônomo Edwin Hubble, do desvio para o vermelho das galáxias, efeito conhecido hoje pelo nome genérico de lei de Hubble. Outra observação importante para o modelo, a descoberta da radiação cósmica de fundo, ocorreu na década de 60, feita por Arno Penzias e Robert Wilson. Mais recentemente, diversas leituras de quantidades (ou

abundâncias) de elementos químicos leves – 2H , 3He , 4He , Li – aumentaram a confiança na teoria por estarem de acordo com os valores por ela preditos [5]:

“Presentemente há bom acordo entre as abundâncias primordiais preditas de todos esses 4 elementos e suas abundâncias observadas (...). Este é um feito verdadeiramente notável, e forte evidência de que o modelo padrão é válido em tempos tão iniciais quanto 10^{-2} sec após o bang.”

A intenção deste capítulo não é apresentar o modelo cosmológico padrão de forma completa ou atraente, ou mesmo de forma introdutória; esse papel é cumprido muito mais eficientemente do que poderia ser feito aqui em uma infinidade de textos escritos por diversos autores, com diferentes enfoques e profundidades. O que há neste capítulo é apenas um resumo de alguns resultados gerais que serão úteis no desenvolvimento posterior deste trabalho, como, por exemplo, soluções de alguns casos particulares para o fator de escala $a(t)$, destacando-se o resultado conhecido genericamente como solução de de Sitter, de grande importância nos modelos mais simples de cosmologia quântica e que aparece como solução inflacionária mais comum; desse modo, há também aqui uma seção com um resumo do uso de campos escalares na obtenção de soluções inflacionárias simples e, logo após, uma outra seção com uma pequena discussão das parametrizações permitidas pela solução de de Sitter.

2.1 Soluções gerais para o fator de escala

A partir da tradicional métrica ‘padrão’, conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW),

$$ds^2 = dt^2 - [a(t)]^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] , \quad (2.1)$$

onde $k = 0$ ou ± 1 , pode-se escrever a equação de Friedmann como sendo

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi\rho + \Lambda}{3} . \quad (2.2)$$

Estas duas expressões podem ser reescritas usando-se uma nova coordenada temporal η , tal que [6]

$$dt = a d\eta \quad ; \quad (2.3)$$

assim, têm-se uma métrica ‘conforme’,

$$ds^2 = [a(\eta)]^2 \left[d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (2.4)$$

e a equação de Friedmann reescreve-se como

$$\left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi\rho + \Lambda}{3} , \quad (2.5)$$

sendo $' = d/d\eta$; esta forma da equação de Friedmann é interessante para obtenção de soluções cosmológicas genéricas quando $\Lambda = 0$.

Na presença da constante cosmológica, isto é, quando $\Lambda \neq 0$, é mais interessante usar um outro tipo de transformação [7],

$$u = \beta a^{-n} , \quad (2.6)$$

com β sendo uma constante e $n \neq 0$, levando a se escrever a equação de Friedmann como

$$\left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 + \frac{k n^2 \beta^{-2/n}}{u^{-2/n}} = \frac{8\pi\rho + \Lambda}{3} . \quad (2.7)$$

A hipótese final para a obtenção de soluções, seja na presença ou na ausência da constante cosmológica, consiste em supor uma dependência da densidade de matéria do tipo

$$\rho = \lambda a^n ; \quad (2.8)$$

Soluções para o fator de escala com $\Lambda = 0$ a partir da hipótese $\rho = \lambda a^n$		
n	$a(t)$	Comentários
-4	$[2t\alpha - kt^2]^{1/2}$	radiação
-3	$2^{-3/2} (3\alpha)^{2/3} t^{2/3}$	matéria ⁱ
-2	$(\alpha^2 - k)^{1/2} t$	expansão linear ⁱⁱ
-1	$2^{-2} \alpha^2 t^2 + k\alpha^{-2}$	expansão quadrática
0	$(2\alpha)^{-1} [e^{\alpha t} + ke^{-\alpha t}]$	expansão exponencial ⁱⁱⁱ

Tabela 2.1: Resumo de algumas soluções (nem todas físicas) da eq. de Friedmann com $\Lambda = 0$ para o fator de escala $a(t)$; $\alpha^2 \equiv 8\pi\lambda/3$.

ⁱSomente a solução para $k = 0$, conhecida como Einstein-de Sitter, é mostrada aqui; a solução mais geral só pode ser escrita em termos do tempo conforme η .

ⁱⁱExpansão linear é uma característica do modelo de Milne, uma solução de vácuo com $k = -1$ [8].

ⁱⁱⁱA expansão exponencial é característica do modelo de de Sitter, uma solução de vácuo com constante cosmológica.

Soluções para o fator de escala com $\Lambda > 0$ ⁱ a partir da hipótese $\rho = \lambda a^n$		
n	$a(t)$	Comentários
-4	$\beta^{1/4} \gamma^{-1/2} \sinh^{1/2} 2\gamma t$	radiação ⁱⁱ
-3	$\beta^{1/3} \gamma^{-2/3} \sinh^{2/3} 3\gamma t/2$	matéria ⁱⁱⁱ
-2	$\beta^{1/2} \gamma^{-1} [\sinh \gamma t + k\beta e^{-\gamma t}]$	
-1	$\beta \gamma^{-2} [\sinh^2 \gamma t + k\beta^2 \gamma^2 e^{-\gamma t}]$	
0	$(2\gamma)^{-1} [e^{\gamma t} + k e^{-\gamma t}]$	vácuo; de Sitter

Tabela 2.2: Resumo de algumas soluções da eq. de Friedmann (nem todas físicas) com constante cosmológica positiva para o fator de escala $a(t)$; $\beta^{-1} \equiv \alpha^2 \equiv 8\pi\lambda/3$; $\gamma^2 \equiv \Lambda/3$.

ⁱAqui não aparecem as soluções estáticas como, por exemplo, a solução de Einstein, onde $a = 2^{-1}3\alpha = \Lambda^{-1/2}$.

ⁱⁱA única solução mostrada aqui é com $k = 0$; a solução mais geral, dada em termos de funções elípticas, depende dos valores de Λ e λ [8].

ⁱⁱⁱO mesmo dito na nota anterior se aplica aqui.

a partir desta hipótese pode-se obter, por exemplo, da equação (2.5), uma solução geral¹ do fator de escala em termos do tempo conforme η ,

$$a(\eta) = \left(\frac{8\pi\lambda}{3k}\right)^{-1/(n+2)} \sin^{-2/(n+2)} \left[\sqrt{k} \left(-\frac{n+2}{2}\right) \eta \right] , \quad (2.9)$$

de onde se pode, então, obter soluções em termos do tempo cosmológico t a partir da equação (2.3). Assim, soluções do fator de escala, $a(t)$, para alguns valores de n são mostradas nas Tabelas 2.1 e 2.2, uma para soluções sem a constante cosmológica e outra para soluções onde a constante cosmológica está presente, estas últimas obtidas a partir de (2.7).

2.2 Campos escalares e inflação

O tipo mais simples de tensor momento-energia não-nulo que se pode usar nas equações de Einstein é o devido a um campo escalar φ ,

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial^\nu \varphi - \mathcal{L} g^{\mu\nu} , \quad (2.10)$$

onde

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi / 2 - V(\varphi) \quad (2.11)$$

é a densidade Lagrangeana associada a esse campo. Da equação de conservação desse tensor,

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 , \quad (2.12)$$

ou por uso das equações de Euler-Lagrange generalizadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \nabla_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] = 0 , \quad (2.13)$$

¹Note-se que para $n = 2$ a solução é

$$a(\eta) = \exp \left[\pm \left(\frac{8\pi\lambda}{3} - k \right)^{1/2} \eta \right] .$$

junto com a idéia de que o campo escalar em estudo é homogêneo e isotrópico, obtém-se, então, que a equação governando a evolução desse campo é

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} \equiv \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V' = 0 \quad , \quad (2.14)$$

onde usou-se a definição da constante de Hubble, $H \equiv \dot{a}/a$. Essa equação se soma, portanto, à equação de Friedmann, escrita agora, por comparação do tensor momento-energia do campo escalar com aquele de um fluido perfeito, como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \kappa\rho_\varphi = \kappa\left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi)\right] \quad , \quad (2.15)$$

onde $\kappa \equiv 8\pi/3$, para, desse modo, fornecer o comportamento do sistema formado pelo campo escalar num espaço-tempo de FLRW; note-se que as incógnitas deste sistema de duas equações são três: o campo φ , que evolui no tempo, ou seja, $\varphi = \varphi(t)$, o fator de escala a , que também evolui no tempo, isto é, $a = a(t)$, e o potencial do campo escalar, $V = V(\varphi)$, e, assim, alguma hipótese extra deve ser fornecida para a solução do sistema.

As assim chamadas soluções inflacionárias são aquelas em que o fator de escala cresce rapidamente, em alguns casos exponencialmente, com o tempo; um modo simples de obter uma dessas soluções, conhecido como aproximação de *slow-roll*, consiste em desprezar, ao mesmo tempo, os termos com o parâmetro de curvatura e a constante cosmológica na equação de Friedmann, e o termo da segunda derivada do campo escalar na equação do campo, assumindo-se ainda que o termo de energia potencial $V(\varphi)$ do campo escalar é muito mais importante que o termo de energia cinética $\dot{\varphi}^2/2$, de modo que o sistema a se resolver passa a ser

$$\begin{cases} 3H\dot{\varphi} + V' = 0 \\ H^2 = \kappa V \end{cases} \quad . \quad (2.16)$$

A solução obtida para o fator de escala nessa aproximação é

$$a = a_0 \exp\left[(\kappa V)^{1/2} t\right] \quad . \quad (2.17)$$

Outra possibilidade consiste em usar como hipótese extra um determinado tipo de potencial, obedecendo a certos requisitos; assim, vários tipos de potenciais já foram propostos, dentre os quais podem-se destacar alguns tipos encontrados na literatura:

- potencial exponencial [9],

$$V_1 = n^2 e^{-\varphi \sqrt{\frac{q}{2}}} ; \quad (2.18)$$

- potencial na forma de potências de φ [10],

$$V_2 = n^2 \left[\frac{9}{8q} + \varphi^2 - \frac{2}{3q^{\frac{3}{2}}} \varphi^5 + \frac{2q^2}{9} \varphi^6 \right] ; \quad (2.19)$$

- potencial na forma de cosseno [11],

$$V_3 = n^2 \left[1 + \cos \left(\frac{\varphi}{q} \right) \right] . \quad (2.20)$$

Note-se que em todos estes casos, n e q são parâmetros ‘ajustáveis’. Tais potenciais, todos ‘postulados’ para espaços *flat*, em que a curvatura é nula, são plotados de forma comparativa na Figura 2.1, para demonstrar de forma qualitativa o seu comportamento.

Soluções inflacionárias simples podem ser obtidas usando como *ansatz* (ou ponto de partida) relações entre as variáveis φ e a e/ou suas derivadas, relações estas sugeridas por análise dimensional. Por exemplo, usando que $\dot{\varphi}^2$ tem dimensão de densidade de energia, ou seja,

$$[\dot{\varphi}^2] = \frac{kg}{m \cdot s^2} , \quad (2.21)$$

e notando-se que a tem dimensão de comprimento, pode-se usar como idéia a relação

$$\dot{\varphi} = \frac{\lambda}{a} , \quad (2.22)$$

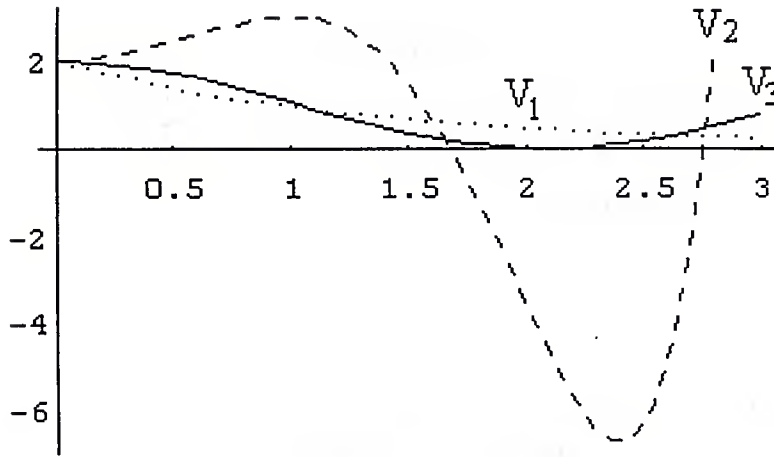


Figura 2.1: Gráfico de diferentes potenciais inflacionários em função do campo escalar φ .

sendo assim que

$$[\lambda^2] = [\dot{\varphi}^2] [a^2] = \frac{kg \cdot m}{s^2} = \left[\frac{c^4}{G} \right] . \quad (2.23)$$

Tal proposta leva a

$$a(t) = \frac{A}{2\alpha} [e^{\alpha t} + r e^{-\alpha t}] , \quad (2.24)$$

como solução do fator de escala², onde agora³

$$\alpha^2 \equiv \frac{8\pi}{3} \left(V_0 + \frac{\Lambda}{3} \right) \quad (2.25)$$

e

$$r \equiv \frac{k - 4\pi\lambda^2}{A^2} , \quad (2.26)$$

²Outras possíveis soluções apresentadas para este ansatz particular são $a(t) = \alpha^{-1}\sqrt{r}$, se $r \geq 0$, e $a(t) = \alpha^{-1} \sin \alpha t$, se $r < 0$ com $\alpha^2 < 0$. Tais soluções não fornecem um universo em expansão.

³Note-se que esta definição de α não deve ser confundida com a que aparece anteriormente no texto.

Resumo		
Ansatz	$a(t)$	Comentários
$\dot{\varphi} = \lambda a^{-2}$	$\frac{A}{2\alpha} [e^{\alpha t} + r e^{-\alpha t}]$	de Sitter
$\dot{\varphi} = \sigma H$	$A (t - t_0)^s$	expansão 'polinomial'
$\dot{\varphi}^2 = \varepsilon \dot{H}^2$	$\pm (-q)^{\frac{1}{2}} (t - t_0)$	expansão linear
	$\frac{A}{2\beta} [e^{\beta t} + q e^{-\beta t}]$	de Sitter

Tabela 2.3: Resumo de relações entre campos escalares e soluções inflacionárias; os parâmetros α , s , q e β se relacionam, respectivamente, com as constantes λ , σ e ε .

sendo A uma constante de integração; tal solução é uma forma genérica das soluções de de Sitter. Resultados similares a este, resumindo as soluções apresentadas na referência [12], são mostrados na Tabela 2.3.

O importante a se perceber aqui, porém, é que a solução inflacionária mais comumente relatada na literatura, do tipo exponencial, é obtida quase que naturalmente, seja por uso de aproximações ou análise dimensional, quando do uso de um campo escalar; tal solução exponencial do fator de escala é característica do modelo de de Sitter, que por isso será visto na próxima seção.

2.3 Parametrizações da solução de *de Sitter*

Uma solução simples das equações de Einstein na ausência de matéria, isto é, no vácuo, e com constante cosmológica Λ positiva⁴, é representada pela expressão do elemento de linha do espaço conhecido como espaço de *de Sitter*,

$$ds^2 = dt^2 - e^{2t\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}} \left[dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] . \quad (2.27)$$

Tal expressão nada mais é que o caso *flat*, isto é, em que $k = 0$, da expressão tradicional

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] , \quad (2.28)$$

com⁵

$$a(t) = \frac{e^{\gamma t} + ke^{-\gamma t}}{2\gamma} \quad (2.29)$$

e $\gamma^2 \equiv \Lambda/3$.

Uma forma comum de representar tal solução é como um **hiperbolóide**, isto é, uma superfície hiperbólica num espaço fictício 5-dimensional, superfície essa dada por um vínculo [14],

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - v^2 = \frac{1}{\gamma^2} , \quad (2.30)$$

sendo que o espaço 5-dimensional possui uma métrica lorentziana, com elemento de linha⁶

$$ds^2 = dv^2 - dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 . \quad (2.31)$$

⁴No caso de uma constante cosmológica negativa a solução é conhecida como *anti-de Sitter*, representada pelo elemento de linha [13]

$$ds^2 = dt^2 - \gamma^{-2} \cos^2 \gamma t \left[d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] ,$$

representando um espaço hiperbólico, de curvatura negativa.

⁵Note-se que se $k = 0$, aparece em $a(t)$ um fator extra $(2\gamma)^{-1}$ não presente na expressão do intervalo. Tal fator pode ser facilmente eliminado por um reescalonamento das coordenadas.

⁶O espaço anti-de Sitter também pode ser embebido num hiperbolóide de 5 dimensões,

As coordenadas (t, r, θ, φ) podem ser introduzidas nesse hiperbolóide através das equações

$$\begin{cases} v = \frac{1}{\gamma} \sinh \gamma t + \frac{\gamma}{2} r^2 e^{\gamma t} \\ w = \frac{1}{\gamma} \cosh \gamma t - \frac{\gamma}{2} r^2 e^{\gamma t} \\ x = e^{\gamma t} r \sin \theta \cos \varphi \\ y = e^{\gamma t} r \sin \theta \sin \varphi \\ z = e^{\gamma t} r \cos \theta \end{cases}, \quad (2.32)$$

dando o elemento de linha da equação (2.27); neste caso a parametrização do hiperbolóide é incompleta, pois $w + v \geq 0$.

Outra parametrização bastante comum é dada pelo elemento de linha

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - \frac{1}{\gamma^2} (\cosh^2 \gamma \bar{t}) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (2.33)$$

que segue as relações

$$\begin{cases} v = \frac{1}{\gamma} \sinh \gamma \bar{t} \\ w = \frac{1}{\gamma} \cosh \gamma \bar{t} \cos \chi \\ x = \frac{1}{\gamma} \cosh \gamma \bar{t} \sin \chi \sin \theta \cos \varphi \\ y = \frac{1}{\gamma} \cosh \gamma \bar{t} \sin \chi \sin \theta \sin \varphi \\ z = \frac{1}{\gamma} \cosh \gamma \bar{t} \sin \chi \cos \theta \end{cases}. \quad (2.34)$$

Tal parametrização possui topologia global $R \times S^3$, ou seja, representa um espaço fechado, esférico, e o seu elemento de linha é obtido das equações (2.28) e (2.29) fazendo-se $k = +1$ e $r = \sin \chi$. Outra parametrização semelhante, mas representando um espaço hiperbólico, de topologia $R \times H^3$, é

só que agora com o vínculo [13]

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 - v^2 = -\gamma^{-2}$$

e o elemento de linha

$$ds^2 = dv^2 + dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

obtida com $k = -1$ e $r = \sinh \chi$:

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - \frac{1}{\gamma^2} (\sinh^2 \gamma \bar{t}) \left[d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] , \quad (2.35)$$

onde

$$\begin{cases} v = \frac{1}{\gamma} \sinh \gamma \bar{t} \cosh \chi \\ w = \frac{1}{\gamma} \cosh \gamma \bar{t} \\ x = \frac{1}{\gamma} \sinh \gamma \bar{t} \sinh \chi \sin \theta \cos \varphi \\ y = \frac{1}{\gamma} \sinh \gamma \bar{t} \sinh \chi \sin \theta \sin \varphi \\ z = \frac{1}{\gamma} \sinh \gamma \bar{t} \sinh \chi \cos \theta \end{cases} . \quad (2.36)$$

É importante citar que originalmente, em 1917, de Sitter [15] apresentou uma forma estática de um universo plano e vazio,

$$ds^2 = \cos^2 \gamma \bar{r} d\hat{t}^2 - d\bar{r}^2 - \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \gamma \bar{r} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) ; \quad (2.37)$$

tal forma aceita a parametrização

$$\begin{cases} v = \frac{1}{\gamma} \sinh \gamma \hat{t} \cos \gamma \bar{r} \\ w = \frac{1}{\gamma} \cosh \gamma \hat{t} \cos \gamma \bar{r} \\ x = \frac{1}{\gamma} \sin \gamma \bar{r} \sin \theta \cos \varphi \\ y = \frac{1}{\gamma} \sin \gamma \bar{r} \sin \theta \sin \varphi \\ z = \frac{1}{\gamma} \sin \gamma \bar{r} \cos \theta \end{cases} . \quad (2.38)$$

Eddington reapresentou esta solução de outro modo,

$$ds^2 = \left(1 - \gamma^2 \hat{r}^2\right) d\hat{t}^2 - \frac{d\hat{r}^2}{1 - \gamma^2 \hat{r}^2} - \hat{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) , \quad (2.39)$$

usando a transformação $\hat{r} = \gamma^{-1} \sin \gamma \bar{r}$, o que possibilita escrever

$$\begin{cases} v = \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 - \gamma^2 \hat{r}^2} \sinh \gamma \hat{t} \\ w = \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 - \gamma^2 \hat{r}^2} \cosh \gamma \hat{t} \\ x = \hat{r} \sin \theta \cos \varphi \\ y = \hat{r} \sin \theta \sin \varphi \\ z = \hat{r} \cos \theta \end{cases} . \quad (2.40)$$

Esta nova parametrização representa um universo estático⁷, e pode ser obtida diretamente de (2.27) ou (2.32) através das transformações

$$\begin{cases} \hat{r} = e^{\gamma t} r \\ \hat{t} = t - \frac{1}{\gamma} \ln \sqrt{1 - \gamma^2 r^2 e^{2\gamma t}} \end{cases}, \quad (2.41)$$

ou de (2.34) e (2.36) por meio das relações

$$\begin{cases} \hat{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\gamma^{-2} - (w^2 - v^2)} \\ \hat{t} = \gamma^{-1} \ln \sqrt{\frac{w+v}{w-v}} \end{cases}, \quad (2.42)$$

aparecendo nela a idéia de um horizonte de eventos cosmológico, idéia essa que fica patente quando se compara a equação (2.39) com a expressão do

⁷Também o espaço anti-de Sitter, hiperbólico, pode ser posto numa forma estática, através das transformações

$$\begin{cases} \bar{s} = \gamma^{-1} \cos \gamma t \sinh \chi \\ u = \gamma^{-1} \arctan [\tan \gamma t \operatorname{sech} \chi] \end{cases}$$

que levam aos elementos de linha

$$ds^2 = (1 + \gamma^2 \bar{s}^2) du^2 - \frac{d\bar{s}^2}{1 + \gamma^2 \bar{s}^2} - \bar{s}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

ou

$$ds^2 = (\cosh^2 \gamma \hat{s}) du^2 - d\hat{s}^2 - \sinh^2 \gamma \hat{s} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

onde usou-se que $\bar{s} = \gamma^{-1} \sinh \gamma \hat{s}$.

intervalo para a solução de buraco negro de Schwarzschild⁸,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad . \quad (2.43)$$

Tal solução representa um espaço com um horizonte de eventos para $r = 2m$; no caso do espaço de de Sitter o horizonte de eventos aparece em $\hat{r} = \gamma^{-1}$.

Observando que o elemento de linha dado pela equação (2.35), de curvatura negativa, pode ser visto como um cone de luz futuro para um evento qualquer num *background* dado pelo espaço de de Sitter plano, pode-se sugerir que há, nesse caso, a possibilidade de geração de bolhas de curvatura negativa que evoluem independentemente como universos isolados, com um horizonte de eventos cosmológico separando-os do universo original. Essa é, basicamente e de forma bastante simples, uma idéia que, apresentada em [16], pode, em princípio, ser descrita num formalismo quântico e estendida para se estudar a possibilidade de surgimento quântico de um universo de curvatura negativa; para tanto, porém, é necessário primeiro estudar o formalismo quântico mais básico que se aplica à cosmologia e, portanto, este será o assunto do próximo capítulo.

⁸Note-se que essa solução é válida para as equações de Einstein sem constante cosmológica. Uma forma mais geral dessa solução, obtida das equações de Einstein com constante cosmológica, e conhecida como solução de Schwarzschild-de Sitter [8], é representada pelo elemento de linha

$$ds^2 = f(m, \gamma) dt^2 - \frac{dr^2}{f(m, \gamma)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad ,$$

onde

$$f(m, \gamma) \equiv 1 - \frac{2m}{r} - \gamma^2 r^2 \quad .$$

3

O padrão quântico

O que é ela? Um espírito? Um corpo?

Uma espécie de espírito ou de corpo?

Se pudéssemos dizer: “um certo nada, que é e não é”

– eis o nome que lhe daria.

Mas tinha de existir de qualquer maneira,
para poder tomar estas formas visíveis e complexas.

Santo Agostinho, em 'Confissões'.

Pode-se especular que a teoria por trás do Big Bang, a relatividade geral, não seja válida para situações envolvendo a escala de Planck¹, e que para sistemas nestas condições a descrição mais adequada seja baseada na mecânica quântica; tal suposição abre caminho para tentativas de uma des-

¹A escala de Planck é aquela cujas dimensões são da ordem das dimensões construídas apenas com as constantes fundamentais c , G , \hbar e k_B ; explicitamente, pode-se ter a massa de Planck, $m_{Pl} = \sqrt{\hbar c/G} \approx 2,2 \times 10^{-5}g$, o comprimento de Planck, $\ell_{Pl} = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1,6 \times 10^{-33}cm$, a temperatura de Planck, $T_{Pl} = k_B^{-1} \sqrt{\hbar c^5/G} \approx 1,4 \times 10^{32}K$, e assim por diante [17].

crição quântica do universo primordial, possibilitando o que se convencionou chamar de cosmologia quântica.

Ao se tentar, porém, descrever o universo de forma quântica surgem alguns problemas formais, tais como decidir qual o processo de quantização a se seguir. Na mecânica quântica há, de forma geral, duas descrições possíveis, uma mais simples, envolvendo apenas equações diferenciais, como a equação de Schroedinger, e outra mais sofisticada, formulada por Richard Feynman, usando integrais de trajetória, ambas, porém, podendo ser obtidas a partir da integral de ação que descreve os sistema a se quantizar; na cosmologia quântica há propostas envolvendo as duas descrições, exemplificadas por linhas de trabalho que podem ser agrupadas, de forma simplificada, sob os nomes de “tunelamento a partir do nada” [18, 19] (do inglês *tunneling from nothing*) e “proposta [da condição de contorno] sem-fronteiras” [20] (do inglês *no-boundary proposal*).

Neste trabalho somente uma visão bastante geral da cosmologia quântica será apresentada², isto é, aquela que possui forte analogia com a equação de Schroedinger e a mecânica quântica mais introdutória, sem haver grande preocupação com a existência (ou não) de problemas inerentes ao formalismo que leva a tal descrição³, com a intenção de mostrar como o problema da forma do universo aparece ou não – ou pode vir a aparecer – em modelos simples de cosmologia quântica. Assim, as duas próximas seções descrevem brevemente o formalismo Hamiltoniano geral⁴ que, seguido por processos de quantização canônicos, leva à equação diferencial de Wheeler-deWitt, análoga a uma equação de Schroedinger independente do tempo; em seguida, numa última seção, são apresentados modos simples de se obter soluções de cosmologia quântica para um universo com matéria, abrindo caminho para a descrição de um modelo particular onde há a possibilidade de mudança de

²A abordagem deste texto segue de perto as referências [5], [21] e [22].

³Sobre críticas às interpretações mais comuns dos modelos usuais de cosmologia quântica veja-se, por exemplo, [23].

⁴Sobre este assunto uma visão mais completa pode ser encontrada em [17], [24] e [25].

topologia.

3.1 Formalismo Hamiltoniano

Na mecânica clássica as equações de movimento de um sistema qualquer podem ser vistas como provenientes das variações da função Lagrangeana L que mantém estacionária a ação S ,

$$S = \int L dt , \quad (3.1)$$

sendo L uma função das coordenadas do sistema e suas derivadas, que representam os graus de liberdade do sistema; uma forma generalizada dessa expressão para um espaço-tempo n -dimensional envolve o uso de uma função densidade Lagrangeana \mathcal{L} ,

$$S = \int d^n x \mathcal{L} = \int d^n x \sqrt{-g} L , \quad (3.2)$$

onde g é o determinante da métrica do espaço-tempo n -dimensional onde a integração deve ser feita. A função densidade Lagrangeana que produz as equações de Einstein da relatividade geral é

$$\mathcal{L}_{grav} = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi} [R + 2\Lambda] , \quad (3.3)$$

onde agora g é o determinante da métrica quadridimensional $g_{\mu\nu}$, e R é o escalar de Ricci; tal função densidade ainda produzirá as mesmas equações se a ela se adicionar uma quadridivergência e, assim, a ação S pode ser reescrita adicionando-se um termo de fronteira, isto é,

$$S = \int_M d^4 x \mathcal{L}_{grav} + 2 \int_{\partial M} d^3 x \sqrt{h} K \quad (3.4)$$

onde K é uma função definida na fronteira tridimensional ∂M , de métrica h_{ij} , do espaço-tempo quadridimensional M ; o fator 2 multiplicando a integral de superfície foi colocado por conveniência.

Esta abordagem permite obter uma expressão alternativa – e equivalente – da função densidade Lagrangeana da relatividade geral a partir de uma forma da métrica onde se explicita a divisão entre espaço e tempo das coordenadas; tal divisão particular da métrica, conhecida como formalismo ADM (Arnowitt-Deser-Misner) [26], é feita através do uso de uma função de retardo (do inglês *lapse function*) N e de uma função de deslocamento (do inglês *shift function*) N^i ,

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= (N dt)^2 - h_{ij} (N^i dt + dx^i) (N^j dt + dx^j) . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Basta agora definir a curvatura extrínseca K_{ij} ,

$$\begin{aligned} K_{ij} &\equiv \frac{1}{2N} \left[N_{i|j} + N_{j|i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right] \\ &= \frac{1}{2N} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x^j} + \frac{\partial N_j}{\partial x^i} - 2\Gamma_{kij} N^k - \dot{h}_{ij} \right] , \end{aligned} \quad (3.6)$$

de traço $K \equiv h^{ij} K_{ij}$, para se reescrever o escalar de Ricci como sendo

$$\begin{aligned} R &= K^2 - K^{ij} K_{ij} - {}^{(3)}R \\ &= (h^{ij} K - K^{ij}) K_{ij} - {}^{(3)}R \\ &= (h_{ij} h_{kl} - h_{ik} h_{jl}) K^{ij} K^{kl} - {}^{(3)}R , \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde ${}^{(3)}R$ é a curvatura da parte espacial da variedade em consideração; como esperado, a única diferença que se obtém entre esta forma do escalar de Ricci e a ‘tradicional’ é uma quadridivergência que não influi na obtenção das equações de movimento. Desse modo, a densidade Lagrangeana da relatividade geral pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}_{grav} = -\frac{N\sqrt{h}}{16\pi} \left[(h^{ij} K - K^{ij}) K_{ij} - {}^{(3)}R + 2\Lambda \right] , \quad (3.8)$$

onde usou-se a igualdade $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$.

Desta densidade Lagrangeana, e usando a definição da curvatura extrínseca, pode obter-se momentos conjugados às ‘coordenadas’ N , N^i e h_{ij} ,

$$\pi = \frac{\delta \mathcal{L}_{grav}}{\delta \dot{N}} = 0 \quad , \quad \pi^i = \frac{\delta \mathcal{L}_{grav}}{\delta \dot{N}^i} = 0 \quad , \quad (3.9)$$

e

$$\pi^{ij} = \frac{\delta \mathcal{L}_{grav}}{\delta \dot{h}_{ij}} = \frac{\sqrt{h}}{16\pi} (h^{ij} K - K^{ij}) \quad ; \quad (3.10)$$

as duas primeiras equações são os vínculos ‘primários’ do sistema, enquanto a terceira permite a montagem dos escalares

$$\pi^{ij} \pi_{ij} = \frac{h}{(16\pi)^2} (K^2 + K^{ij} K_{ij}) \quad (3.11)$$

e

$$\pi^{ij} h_{ij} = \frac{2\sqrt{h}}{16\pi} K \quad , \quad (3.12)$$

de modo que se pode escrever

$$\mathcal{L}_{grav} = \frac{16\pi N}{\sqrt{h}} \left[\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{(\pi^{ij} h_{ij})^2}{2} \right] + \frac{N\sqrt{h}}{16\pi} [{}^{(3)}R - 2\Lambda] \quad . \quad (3.13)$$

Com as quantidades apresentadas até agora uma densidade Hamiltoniana, \mathcal{H}_{grav} , pode ser construída a partir da relação

$$\mathcal{H}_{grav} = \pi^{ij} \dot{h}_{ij} - \mathcal{L}_{grav} \quad , \quad (3.14)$$

podendo-se mostrar que ela se divide em duas partes,

$$\mathcal{H}_{grav} = N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i \quad , \quad (3.15)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{16\pi}{\sqrt{h}} \left[\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{(\pi^{ij} h_{ij})^2}{2} \right] + \frac{\sqrt{h}}{16\pi} [2\Lambda - {}^{(3)}R] \\ &= \frac{16\pi}{2\sqrt{h}} (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{ij} h_{kl}) \pi^{ij} \pi^{kl} + \frac{\sqrt{h}}{16\pi} [2\Lambda - {}^{(3)}R] \\ &\equiv 16\pi G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} + \frac{\sqrt{h}}{16\pi} [2\Lambda - {}^{(3)}R] \end{aligned} \quad (3.16)$$

é a super-Hamiltoniana do sistema, e

$$\mathcal{H}^i = -2\pi_{|j}^{ij} \quad (3.17)$$

é o supermomento; a divisão da densidade Hamiltoniana nestas quantidades permite a observação de dois vínculos secundários do sistema, já que pode se escrever as igualdades

$$\dot{\pi} = \{\pi, H\} = \frac{\delta H}{\delta N} = \mathcal{H} = 0 \quad (3.18)$$

e

$$\dot{\pi}^i = \{\pi^i, H\} = \frac{\delta H}{\delta N_i} = \mathcal{H}^i = 0, \quad (3.19)$$

onde $H = \int_M d^3x \mathcal{H}_{grav}$, e $\{u, v\}$ é o parênteses de Poisson das quantidades u e v .

3.2 Quantização

Identificando os momentos π^{ij} obtidos na seção anterior com os operadores diferenciais $\hat{\pi}^{ij}$ dados pela relação⁵

$$\hat{\pi}^{ij} = -i\hbar \frac{\delta}{\delta h_{ij}}, \quad (3.20)$$

e usando que as equações dos vínculos primários e secundários obtidas anteriormente podem ser interpretadas como condições impostas por operadores quânticos sobre uma função de onda dependente das 3-métricas, $\Psi[h_{ij}]$, pode-se escrever a partir do vínculo da super-Hamiltoniana a equação diferencial

$$\left[G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} - \frac{\sqrt{h}}{(16\pi)^2} \left(2\Lambda - {}^{(3)}R \right) \right] \Psi[h_{ij}] = 0, \quad (3.21)$$

⁵Note-se que aqui poderia aparecer um fator $(16\pi)^{-1}$ colocado arbitrariamente na formulação do operador de momento para fazer a equação de Wheeler-deWitt obtida coincidir com a forma mais comumente apresentada na literatura, isto é, aquela que aparece, por exemplo, nas referências [21] e [24]; em [5] o fator usado é $(16\pi)^{-3/2}$ enquanto que em [2] e [27] não há fator algum.

conhecida como equação de Wheeler-deWitt; tal equação, obtida desconsiderando-se a possibilidade da presença de matéria, pode ser facilmente generalizada para incluir um termo devido a um tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$,

$$\left[G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} - \frac{\sqrt{\hbar}}{(16\pi)^2} (2\Lambda - {}^{(3)}R - 16\pi T_{00}) \right] \Psi[h_{ij}] = 0. \quad (3.22)$$

Como a equação de Wheeler-deWitt envolve derivadas funcionais feitas sobre uma função de onda definida no espaço 6-dimensional das 3-métricas h_{ij} , espaço esse conhecido como superespaço, são usadas algumas simplificações que levam a equações diferenciais ordinárias, tais como a restrição a soluções válidas apenas em um mini ou midisuperespaço, que é um subespaço do superespaço original. Outra simplificação, presente já no processo geral de quantização mostrado até agora, consiste em ignorar completamente possíveis ambigüidades na ordenação dos termos $\pi^{ij} \dot{h}_{ij}$ presentes na Hamiltoniana; tal problema pode ser contornado usando-se como procedimento padrão a identificação

$$\pi^2 \rightarrow -\hbar^2 q^{-p} \left[\frac{\partial}{\partial q} q^p \frac{\partial}{\partial q} \right], \quad (3.23)$$

onde π é o momento associado à coordenada generalizada q , e p é uma constante numérica.

Estes procedimentos simplificadores fornecem, para um universo sem matéria, descrito pelo elemento de linha de FLRW, a equação diferencial

$$\frac{d^2 \Psi}{da^2} + \frac{p}{a} \frac{d\Psi}{da} - \frac{9v_k^2 a^4}{16\pi^2 \hbar^2} \left(\frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} \right) \Psi = 0, \quad (3.24)$$

onde a é o fator de escala, e $v_k = \int_M \sqrt{h} d^3x$ é o volume do espaço considerado; no caso mais simples, em que $p = 0$, essa equação se resume a

$$\frac{d^2 \Psi}{da^2} - \frac{9v_k^2 a^4}{16\pi^2 \hbar^2} \left(\frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} \right) \Psi = 0, \quad (3.25)$$

totalmente análoga a uma equação de Schroedinger independente do tempo para uma partícula sujeita ao potencial

$$U(a) = \frac{9v_k^2 a^4}{16\pi^2 \hbar^2} \left(\frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} \right) = \frac{9v_k^2}{16\pi^2 \gamma^2 \hbar^2} \left[a^2 \gamma^2 \left(k - a^2 \gamma^2 \right) \right] , \quad (3.26)$$

onde $\gamma^2 \equiv \Lambda/3$; este potencial tem sua forma bastante dependente do parâmetro de curvatura k , tal como aparece na Figura 3.1, levando ao aparecimento de uma região classicamente proibida e outra classicamente permitida apenas no caso de curvatura positiva $k = +1$, sendo este, então, o único caso em que há uma probabilidade fisicamente bem-definida de se ter a criação do universo por “tunelamento a partir do nada”⁶.

Deve-se notar que a equação (3.25) não tem solução analítica, podendo-se, contudo, buscar soluções ‘semiclássicas’ do tipo

$$\Psi = \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(a) \right] ; \quad (3.27)$$

a substituição dessa hipótese na equação (3.25) leva a

$$\frac{i}{\hbar} \frac{d^2 S}{da^2} - \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{dS}{da} \right)^2 - \frac{9v_k^2 a^4}{16\pi^2 \hbar^2} \left(\frac{k}{a^2} - \gamma^2 \right) = 0 , \quad (3.28)$$

⁶Como, neste modelo, há o aparecimento de uma barreira de potencial apenas no caso em que $k = +1$, pode-se até pensar que um universo com curvatura positiva é o único modelo permitido pela cosmologia quântica, como fica claro em outras citações [28]:

“Uma conclusão fundamental de nossa investigação é que apenas um universo espacialmente compacto pode se originar como um evento de tunelamento quântico. (...) O estado inicial de nosso universo tem uma geometria $k = 1$ compacta, e a questão surge: De onde isto veio?”

e [29]

“(...) é claro que um universo aberto não pode surgir via tunelamento quântico.”

Do mesmo modo, diversos textos com exemplos básicos de soluções de cosmologia quântica só apresentam funções de onda obtidas para universos com curvatura positiva [5, 21, 22, 27].

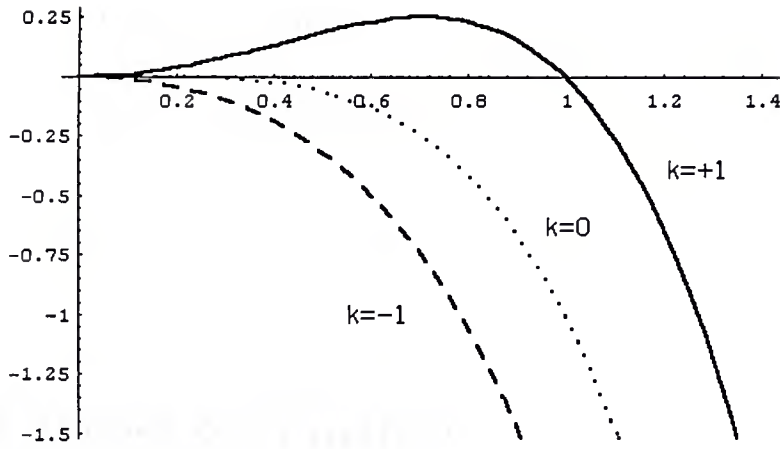


Figura 3.1: Comportamento qualitativo do potencial $U(a)$.

ou, após reagrupamento dos termos,

$$i\hbar \frac{d^2 S}{da^2} - \left[\left(\frac{dS}{da} \right)^2 + \frac{9v_k^2 a^4}{16\pi^2} \left(\frac{k}{a^2} - \gamma^2 \right) \right] = 0 ; \quad (3.29)$$

desconsiderando-se o termo contendo \hbar a solução dessa equação é

$$S(a) = \frac{3v_k}{4\pi} \int a \sqrt{k - \gamma^2 a^2} da = -\frac{v_k}{4\pi\gamma^2} (k - \gamma^2 a^2)^{3/2} \quad (3.30)$$

e, assim,

$$\Psi(a) = \exp \left[-\frac{iv_k}{4\pi\hbar\gamma^2} (k - \gamma^2 a^2)^{3/2} \right] ; \quad (3.31)$$

note-se que essa solução bastante simples, sem matéria, apresenta uma dependência no volume v_k do espaço considerado, sem espaço para outro tipo de invariante topológico.

A solução representada pela equação (3.31) é similar àquelas obtidas pelo método WKB⁷, que têm sua validade bem definida para o caso de curvatura positiva, quando há uma barreira de potencial dividindo o sistema em duas

⁷Ver, por exemplo, [22].

regiões permitindo escrever a solução completa como sendo composta de duas partes,

$$\Psi_I (0 < a < \gamma^{-1}) \propto \exp \left[-\frac{i\pi}{2\hbar\gamma^2} (1 - \gamma^2 a^2)^{3/2} \right] \quad (3.32)$$

e

$$\Psi_{II} (a > \gamma^{-1}) \propto \exp \left[-\frac{\pi}{2\hbar\gamma^2} (\gamma^2 a^2 - 1)^{3/2} \right] , \quad (3.33)$$

onde usou-se que $v_{+1} = 2\pi^2$.

3.3 Soluções com matéria

Como exemplo mais simples de modelo de cosmologia quântica onde se leva em conta a existência de matéria pode-se, por exemplo, usar um campo escalar, bastando escrever uma densidade Lagrangeana,

$$\mathcal{L}_\phi = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] , \quad (3.34)$$

extrair dela o momento associado ao campo,

$$\pi_\phi \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = v_k a^3 \dot{\phi} , \quad (3.35)$$

e, a partir daí, obter a Hamiltoniana

$$H = \pi_a \dot{a} + \pi_\phi \dot{\phi} - L , \quad (3.36)$$

procedendo-se então a quantização usual

$$\hat{\pi}_\phi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.37)$$

que leva à equação

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{p}{a\hbar} \frac{\partial}{\partial a} - \frac{3}{4\pi a^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{9v_k^2 a^4}{16\pi^2 \hbar^2} \left(\frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} - \frac{8\pi}{3} V \right) \right] \Psi(a, \phi) = 0 . \quad (3.38)$$

Outros tipos de matéria podem ser adicionados analogamente.

É importante reafirmar que as equações diferenciais obtidas nos modelos mais simples de cosmologia quântica são sempre análogas a equações de Schroedinger *independentes* do tempo, ou seja, nesses modelos mais básicos há o problema da ausência de definição de uma variável temporal, o que é, na verdade, não um problema desses modelos, mas sim um problema fundamental, intrínseco, da cosmologia quântica: de forma simplificada, pode-se dizer que se na mecânica quântica tradicional há sempre um observador externo ao sistema quantizado e em relação ao qual podem ser definidas medidas de tempo, na cosmologia quântica o sistema quantizado é o universo todo, incluindo *todos* os observadores – assim, neste último caso, como se pode definir uma variável temporal intrínseca?

Uma das propostas para se contornar esse problema consiste em usar como ‘relógio’ interno do sistema um campo de ‘poeira’ representando uma distribuição irrotacional de matéria, conhecido como fluido de referência gaussiano [30], que pode ser descrito pela densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L}_\xi = \sqrt{-g} \left[\frac{n}{2m} \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu \xi \partial_\nu \xi + m^2 \right) - V(\xi) \right] \quad (3.39)$$

e pelas equações

$$u^\mu = -\frac{g^{\mu\nu} \xi_{,\nu}}{m} \quad (3.40)$$

e

$$u^\nu u_\nu = 1 \Rightarrow \dot{\xi}^2 - \xi^i \xi_{,i} = m^2 \quad (3.41)$$

onde u^μ é a quadrivelocidade do campo ξ de partículas de massa m , densidade de número de partículas n e energia potencial V ; tais características deste fluido fazem com que o momento associado a ele apareça de forma linear na formulação Hamiltoniana, o que corresponde a uma derivada de primeira ordem na equação diferencial obtida após o processo de quantização, e a um termo que, na função de onda do universo, faz uma perfeita analogia com

uma variável temporal. Tal tipo de campo é, assim, útil quando se quer analisar algum comportamento evolutivo da função de onda do universo, tal como a mudança de topologia que será vista no penúltimo capítulo desta tese⁸.

⁸Sobre o uso de um fluido de referência como relógio interno do sistema há duas citações interessantes, a primeira contida no artigo "*Tempo na gravidade quântica: uma hipótese*", de C. Rovelli [31]

"O tempo não existe por si mesmo. O tempo toma seu sentido dos objetos: do fato que eventos estão no passado, ou que eles estão aqui agora, ou que irão se seguir no futuro. Não é possível que se meça o tempo por ele mesmo; ele pode somente ser medido por observar-se o movimento dos objetos, ou a sua pacífica quietude."

e a outra presente num artigo mais específico, "*Fluido de referência gaussiano e interpretação da geometrodinâmica quântica*", de Kuchar e Torre [30]

"Muito antes das pessoas descobrirem como tratar a gravidade como um sistema dinâmico e se preocuparem com a sua quantização, elas inventaram um aparato conceitual para o reconhecimento de eventos: a noção de um fluido de referência. As partículas do fluido identificam pontos do espaço, e relógios carregados por elas identificam instantes de tempo."

Uma das pessoas a ter essa idéia foi Einstein [32]:

"(...) a marcha dos relógios é influenciada pelos campos gravitacionais, de tal forma que uma definição física do tempo que seja feita diretamente com o auxílio de relógios não possui de forma alguma o mesmo grau de evidência que na Teoria da Relatividade Especial.

Por isso utilizamos corpos de referência não rígidos, que não apenas têm um movimento arbitrário, mas que também, durante o movimento, passam por mudanças arbitrárias de forma. (...) Este corpo de referência não rígido, que não sem razão poderíamos denominar 'molusco de referência', equivale no essencial a um sistema de coordenadas gaussiano quadridimensional qualquer."

4

Problemas topológicos

O universo (que outros chamam a Biblioteca) compõe-se
de um número indefinido, e talvez infinito, de galerias hexagonais,
com vastos postos de ventilação no centro,
cercados por balaustradas baixíssimas.
De qualquer hexágono, vêem-se os andares inferiores e superiores:
interminavelmente.

Jorge Luís Borges, em 'A Biblioteca de Babel'.

A pergunta ‘Qual é a forma do espaço?’ foi recentemente trazida à tona por várias publicações destinadas à popularização da ciência, por causa dos resultados de medidas da radiação cósmica de fundo, feitas com balões, e batizadas como *Boomerang*¹ e *Maxima*. A revista brasileira *Superinteressante*,

¹Os resultados do experimento Boomerang indicam um universo com $0.88 < \Omega_0 < 1.12$ [33], ou seja, um universo com curvatura *quase* nula, algo previsto pela teoria inflacionária, e que em princípio *não exclui* a hipótese de um universo hiperbólico ou esférico, pois o período inflacionário não muda a curvatura anterior do universo, apenas a diminui em valor absoluto: em modelos ‘bem-sucedidos’ de inflação o valor atual de ômega, Ω_0 , se relaciona, aproximadamente, com o valor de ômega antes do período de inflação, Ω_i , por

por exemplo, no mês de julho de 2000 [34] traz impressa em sua capa, entre outras, a manchete “A forma do universo: astrônomos descobrem que o Cosmo é plano”. A revista francesa *Science et Vie* de junho [35] traz uma sequência de artigos² onde o físico italiano Paolo de Bernardis afirma que “podemos dizer com uma grande certeza que o Universo é plano”³.

Na descrição cosmológica permitida pela relatividade geral, vista no segundo capítulo desta tese, a dinâmica (ou evolução temporal) do universo é dada, basicamente, por equações que, a partir do conteúdo de matéria expresso no tensor momento-energia e da constante cosmológica, fornecem o fator de escala $a(t)$ em função do tempo e do parâmetro de curvatura k ; contudo, estas equações determinam apenas a geometria local do universo, não sua forma global ou, melhor dizendo, sua topologia [37]:

“Qual é a forma do espaço? É plana, ou é curva? Ele é belamente esparramado, ou é dobrado e amassado? É finito, ou é infinito? Qual dos seguintes se parece mais com o espaço: (a) uma folha de papel, (b) um deserto infinito, (c) uma bolha de sabão, (d) uma rosquinha, (e) um desenho de Escher, (f) um cone de sorvete, (g) os ramos de uma árvore, ou (h) um corpo humano?”

O objetivo deste capítulo, que quebra um pouco a sequência até agora apresentada neste trabalho, é mostrar que a pergunta ‘Qual é a forma do espaço?’ pode ter muitas diferentes respostas, mesmo para um único valor do

meio da expressão [5]

$$|\Omega_0 - 1| \simeq \exp[-2N_{TOT}] |\Omega_i - 1| ,$$

sendo N_{TOT} a quantidade total de inflação do modelo. Além disso, durante sua evolução clássica o universo não pode mudar de topologia.

²Num desses artigos há uma grande ilustração onde se rotula como excluída a hipótese de um universo curvo; leia-se a nota anterior.

³A publicação americana *Astronomy* de agosto [36], um pouco mais cuidadosa, tem como cabeçalho para o artigo ‘Desvendando o universo plano’ a frase “Novas observações da radiação cósmica de fundo *sugerem* que o universo é plano e irá se expandir para sempre numa taxa acelerada” (o *itálico* é meu).

parâmetro de curvatura k ; a idéia de se estudar problemas topológicos é determinar quais invariantes ou quais medidas podem determinar as diferenças entre essas possíveis respostas. Um exemplo simples de um desses problemas é a determinação de autovalores da equação de Helmholtz em espaços com topologias não-triviais⁴; mais fundamental, porém, é a busca por uma classificação matemática desses espaços não-triviais: assim, mesmo com o risco de uso de um excesso de didatismo, a primeira seção deste capítulo descreve brevemente a classificação e representação de espaços bi e tridimensionais de topologia não-trivial, passando-se depois, então, a duas seções descrevendo estudos de problemas práticos relacionados a espaços compactos de topologia não-trivial, a primeira delas não diretamente ligada ao assunto que é título desta tese, a cosmologia quântica, mas a um problema matemático que aparece na cosmologia clássica⁵, enquanto a segunda mostra um problema cuja solução terá utilidade no modelo de cosmologia quântica apresentado no próximo capítulo.

4.1 Noções básicas de topologia

Um dos mais simples espaços de topologia não-trivial é o bitoro plano, formado pela identificação (ou colagem) dos lados opostos de um retângulo (sem inversão de sentido), e conhecido como T^2 ; tal espaço é finito, mas sem fronteiras, e pode ser representado de forma equivalente pela colagem das faces opostas de um hexágono, ambas as representações (retangular e hexagonal) podendo ser obtidas pelo ‘corte’ da superfície bidimensional de um toro real⁶, que é uma superfície fechada ao redor de uma perfuração central (uma câmara-de-ar).

⁴Ver, por exemplo, [38] e as referências lá contidas.

⁵Ver [39, 40].

⁶A equivalência entre as duas representações do bitoro plano pode ser vista através do cálculo de um invariante conhecido como número de Euler, χ , definido para uma superfície S através dos números F de faces (ou polígonos), E de arestas (ou lados), e V de vértices,

Tanto um retângulo quanto um hexágono servem para, através do uso de infinitas cópias, preencher sem falhas o espaço Euclideano infinito E^2 ; este processo de recobrimento ilustra, intuitivamente, o primeiro passo no processo de classificação de um espaço compacto, de topologia não-trivial: o que se faz é usar – como ladrilhos numa parede – infinitas cópias de um polígono fundamental, dividindo assim adequadamente o espaço infinito que é recoberto (chamado então de espaço de recobrimento); cada polígono fundamental, com as devidas identificações de *pares* de lados, representa o espaço fechado, de topologia não-trivial, em estudo.

Na representação poligonal de um espaço de topologia não-trivial pode-se ter curvas fechadas (ou *loops*) que só voltam ao ponto de partida ao atravessar um ou mais dos lados do polígono; se uma destas curvas, começando num ponto x do polígono fundamental, ao invés de voltar para dentro do polígono inicial, é estendida pelas cópias presentes no espaço de recobrimento, vai terminar num ponto x' numa das cópias. Há desse modo uma identificação possível entre os pontos x e x' , por deslocamentos dentro do espaço de recobrimento; são estes deslocamentos (ou isometrias) que, formando um grupo, Γ (dito grupo de holonomia), caracterizam a divisão do espaço de recobrimento em polígonos fundamentais, ou seja, caracterizam, em última instância, o espaço de topologia não-trivial representado pelo polígono fundamental.

Dito isso, pode-se resumir o processo de classificação das topologias de uma determinada variedade em três passos [41]:

- determinação do espaço de recobrimento;

constituintes da superfície:

$$\chi(S) \equiv F - E + V$$

O bitoro, quando formado pela colagem de um retângulo, possui uma face (o próprio retângulo), duas arestas (dois lados distintos) e um único vértice (os quatro vértices do retângulo são identificados no processo de colagem); assim, neste caso, $\chi = 1 - 2 + 1 = 0$. Já no caso do bitoro hexágono há uma face (o hexágono), três arestas (os lados são identificados em pares) e dois vértices (neste caso os vértices são identificados em grupos de três); logo, de novo, $\chi = 1 - 2 + 1 = 0$, confirmando o resultado $\chi(T^2) = 0$.

- determinação do poliedro fundamental;
- cálculo do grupo de holonomia Γ .

O bitoro plano tem a mesma topologia da superfície do toro real, só que com curvatura constante, nula. A superfície de uma esfera, que é finita e sem perfurações, representa, por sua vez, um espaço bidimensional de curvatura positiva constante⁷, o S^2 , que também pode ser dividido por um ‘polígono fundamental’; a linha do equador, por exemplo, divide a esfera em duas calotas iguais, com cada ponto de uma calota podendo ser ligado – e identificado – a um outro ponto na outra calota por uma linha que passa no centro da esfera (um diâmetro). Desse modo, a esfera passa a ter duas cópias do espaço conhecido como espaço projetivo, ou P^2 , que é multiplamente conexo e *não-orientável*; pode-se ver que o grupo dos movimentos que identificam os pontos nas duas cópias do espaço projetivo possui apenas dois elementos, a identidade e o elemento que leva de um ponto x ao seu homólogo x' , caracterizando o grupo cíclico⁸ isomorfo ao grupo Z_2 , o que, por sua vez, permite escrever P^2 como um espaço quociente: $P^2 \equiv S^2/Z_2$. Enquanto a área da esfera unitária é 4π , a área do plano projetivo é 2π ; na esfera a maior distância entre dois pontos (dois polos) é π , e no plano projetivo é $\pi/2$.

⁷Para calcular o número de Euler de uma esfera é interessante notar que ele pode ser calculado dividindo-se a superfície em estudo em pedaços poligonais menores. O bitoro retangular, por exemplo, pode ser dividido em dois retângulos por um segmento de reta vertical; a superfície do bitoro passa então a ter duas faces (dois retângulos), quatro arestas (a única horizontal agora dividida em duas, mais duas verticais) e dois vértices (o novo vértice é o que aparece nas duas extremidades do segmento de reta); assim, $\chi(T^2) = 2 - 4 + 2 = 0$. Tal processo de divisão da superfície (triangulação) permite o cálculo do número de Euler da esfera por sua divisão em oito triângulos, usando-se o equador e dois meridianos, criando doze arestas e seis vértices (dois nos pólos e quatro no equador): $\chi(S^2) = 8 - 12 + 6 = 2$.

⁸O grupo cíclico de ordem p (ou seja, é um grupo finito com p elementos), C_p , com $p \geq 2$, é formado por potências de um único elemento: $C_p = (a^0, a^1, a^2, \dots, a^{p-1})$. Tal grupo é isomorfo (isto é, tem uma correspondência elemento a elemento) ao grupo de inteiros modulo p , conhecido como Z_p , isto é, $a^r \in C_p \leftrightarrow r \in Z_p$ [42].

No caso de curvatura negativa, o espaço de topologia não-trivial mais simples, finito e sem fronteiras, é formado pela identificação de pares de lados de um octágono⁹; tal espaço representa a superfície de um toro duplo¹⁰ (um ‘oitó’ ou ‘rosquinha dupla’). Seguindo a idéia de divisão do espaço de recobrimento, o espaço hiperbólico bidimensional H^2 , infinito, pode ser recoberto por infinitos destes octágonos, notando-se, porém, que enquanto no espaço Euclidiano os lados de um polígono fundamental são formados por retas, no espaço hiperbólico os lados devem ser formados por hipérbolés. Vale a pena citar que diferentes espaços hiperbólicos compactos bidimensionais podem ser construídos com polígonos de $4g$ lados, com $g \geq 2$, todos representando g toros unidos¹¹; pode-se mostrar, pelo teorema de Gauss-Bonnet [44], que a área de cada um desses espaços é dada pela expressão simples $A_g = 4\pi(g - 1)$, o que, em princípio, permite classificar as superfícies bidimensionais hiperbólicas por área.

É importante ressaltar que, ao contrário do que ocorre com um espaço plano bidimensional E^2 , ou mesmo com o espaço S^2 , o espaço hiperbólico H^2 não pode ser posto (ou imerso) no espaço Euclidiano tridimensional E^3 ; seu ‘lugar natural’ é um espaço Lorentziano tridimensional (um espaço de Minkowski) e, assim, é interessante, para visualização, projetar o espaço H^2 no espaço Euclidiano E^2 , num processo totalmente análogo ao de criação de mapas planos da superfície esférica da Terra, destacando-se, em particular, os modelos de Klein e Poincaré, onde todo o espaço H^2 é projetado num

⁹Há pelos menos dois modos distintos de se fazer a identificação dos lados, ambos oriundos do mesmo toro duplo [43]; o mais simples é identificar os lados opostos.

¹⁰Só por curiosidade: o número de Euler deste espaço é $\chi = 1 - 4 + 1 = -2$. O importante a se notar aqui é que pode-se ter, imersas no espaço Euclidiano tridimensional, superfícies bidimensionais fechadas com g furos ($g = 0, 1, 2, \dots$): o número de Euler de cada uma dessas superfícies é $\chi = 2 - 2g$; o número g é conhecido como *genus* da superfície, e cada superfície é um ‘toro g -uplo’.

¹¹Tal resultado indica que o invariante g mede o número de ‘perfurações’ de uma superfície bidimensional orientável.

disco aberto de raio unitário¹².

As idéias apresentadas aqui para espaços bidimensionais podem ser generalizadas para espaços tridimensionais com poucas modificações; por exemplo, ao invés de polígonos fundamentais o que se tem em três dimensões são poliedros fundamentais. Em perfeita analogia com o bitoro plano, pode-se construir por identificação das faces opostas de um paralelepípedo, o tritoro plano T^3 (também conhecido como E_1), além de outros 5 espaços compactos planos orientáveis. Igualmente, a tri-esfera S^3 pode ser dividida em duas cópias do espaço projetivo $P^3 \equiv S^3/Z_2$, podendo-se obter também por divisão da tri-esfera outros espaços fechados de curvatura positiva, tais como os espaços lente¹³ $L_{p,q}$ e o espaço dodecaédrico de Poincaré¹⁴; o volume de cada um desses espaços compactos de curvatura positiva é, obviamente, sem-

¹²Uma superfície bidimensional de curvatura constante $k = 0, \pm 1$ pode ser descrita pela métrica $g_{ij} = \text{diag}[1, 1, k^{-1}]$, com o vínculo $z^2 + k(x^2 + y^2) = 1$, o que permite a parametrização

$$x = k^{-1/2} \sin k^{1/2} \rho \cos \varphi, \quad y = k^{-1/2} \sin k^{1/2} \rho \sin \varphi, \quad z = \cos k^{1/2} \rho.$$

Um novo sistema de coordenadas, $u_K \equiv x/z$ e $v_K \equiv y/z$, pode ser usado para definir uma projeção generalizada, que, no caso hiperbólico, é conhecida como projeção (ou representação) de Klein, bastante útil por 'reduzir' todo o espaço hiperbólico H^2 a um círculo de raio unitário. Nesta projeção as hipérbolas do espaço H^2 são transformadas em retas e, assim, o octágono que representa o toro duplo passa a ser visto como um octágono com lados retos. A projeção de Poincaré pode ser definida analogamente, com $u_P \equiv x/(1+z)$ e $v_P \equiv y/(1+z)$; nesse caso as hipérbolas do espaço H^2 são transformadas em arcos de circunferência.

¹³Para construir um espaço lente colam-se as *superfícies* dos dois hemisférios idênticos de uma esfera tridimensional maciça, com uma rotação horária de um ângulo $2\pi q/p$, sendo q e p dois números primos entre si [45]; alternativamente, pode-se colar pela base poligonal de p -lados dois prismas piramidais, identificando-se as *faces triangulares* de um prisma com as do outro após a rotação de um ângulo $2\pi q/p$. São necessárias p cópias de um espaço lente $L_{p,q}$ para preencher a esfera S^3 .

¹⁴O espaço dodecaédrico de Poincaré é formado pela identificação das faces opostas de um dodecaedro com ângulos diedros de 120° , com um giro de 30° ; neste caso tem-se $M_{\text{Poincaré}} \equiv S^3/I$, onde I é o grupo de simetria do icosaedro, de ordem 60 [41].

pre uma fração daquele da esfera S^3 , isto é, $vol(M \equiv S^3/\Gamma) = 2\pi^2/|\Gamma|$, sendo $|\Gamma|$ a ordem do grupo Γ . Ainda, os modelos de Klein e Poincaré do espaço hiperbólico tridimensional infinito H^3 projetam tal espaço no interior de uma esfera de raio unitário, também em analogia com o caso bidimensional. Contudo, enquanto a classificação dos espaços bidimensionais compactos é completa, a dos espaços tridimensionais compactos não o é: os espaços hiperbólicos compactos tridimensionais, por exemplo, podem ser classificados por meio de seus volumes, mas não se tem certeza de qual é o menor volume possível para tal tipo de espaços – o menor conhecido é a variedade de Weeks-Matveev-Fomenko, com $vol_{Weeks} = 0,942707$; assim, e devido ainda à imensa complexidade dos poliedros fundamentais possíveis, no caso hiperbólico tridimensional é bastante conveniente ter-se um catálogo de espaços, tal como o apresentado no *software* SnapPea [46].

4.2 Autovalores da equação de Helmholtz

Como um exemplo dos problemas teóricos que surgem no uso de espaços compactos em física pode-se examinar a determinação dos autovalores¹⁵ k da equação de Helmholtz¹⁶

$$\nabla^2\Psi + k^2\Psi = 0 \quad (4.1)$$

num desses espaços; tal problema aparece relacionado, por exemplo, à determinação dos harmônicos produzidos por um tambor formado por uma superfície de topologia não-trivial ou, mais realisticamente, à análise dos modos fundamentais possivelmente observáveis na radiação cósmica de fundo no caso do universo ser multiplamente conexo. Já que a equação de Helmholtz

¹⁵Não se deve confundir este k com o parâmetro de curvatura da cosmologia.

¹⁶É importante declarar que o texto deste capítulo fundamenta-se quase que integralmente num estudo *paralelo* desenvolvido por mim – e ainda sob análise para publicação – [47] durante o período de elaboração desta tese.

é uma equação de autovalores do operador de Laplace-Beltrami [44]

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu [\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu] \quad (4.2)$$

definido para um espaço n -dimensional com métrica $g_{\mu\nu}$ e onde $g = |\det [g_{\mu\nu}]|$, um primeiro passo no sentido de se resolver o problema da obtenção dos autovalores consiste em definir as coordenadas a se usar, para daí então obter soluções analíticas genéricas; a não-trivialidade do espaço é posta nas condições de contorno que as soluções devem obedecer, condições estas que, de forma geral, envolvem algum tipo de periodicidade no espaço de recobrimento, periodicidade esta claramente relacionada às isometrias do espaço compacto em estudo.

No espaço Euclideano a equação de Helmholtz é facilmente resolvida em termos de funções trigonométricas das coordenadas cartesianas comuns; as condições periódicas que tais soluções devem obedecer num espaço compacto de curvatura nula estão ligadas, nos casos mais simples, a translações simples, isto é, como exemplo pode-se escrever

$$\Psi(x, y) = \Psi(x + L_1, y + L_2) \quad , \quad (4.3)$$

sendo L_1 e L_2 as distâncias características do quadrilátero fundamental, no caso bidimensional; tal tipo de condição de contorno vai produzir autovalores discretos calculáveis analiticamente.

No espaço hiperbólico também não é difícil obter soluções analíticas da equação de Helmholtz; a maior dificuldade a se enfrentar envolve as condições de contorno presentes nos espaços hiperbólicos compactos, que, nos casos mais simples, estão relacionadas à invariância das soluções por transformações de Lorentz, G , isto é, a identificação entre dois pontos x e x' é feita de modo que

$$\Psi(x) = \Psi(x' = Gx) \quad . \quad (4.4)$$

Como tal exigência não é facilmente satisfeita por qualquer tipo de função, certos sistemas de coordenadas mostram-se mais adequados à obtenção de

soluções gerais do que outros. Infelizmente, mesmo assim obtém-se como resultado geral que não é possível expressar os autovalores em formas analíticas fechadas e, desse modo, o uso de métodos numéricos se torna interessante; contudo, os resultados obtidos por métodos numéricos devem ser confirmados nas soluções gerais encontradas.

Como exemplo deste processo de busca por soluções da equação de Helmholtz pode-se usar o caso bidimensional do toro duplo: o espaço hiperbólico H^2 pode ser representado em pelo menos duas parametrizações diferentes¹⁷, uma ‘circular’ com as coordenadas (χ, φ) e outra ‘hiperbólica’ com as coordenadas (ρ, ω) ,

$$\begin{cases} x = \sinh \chi \cos \varphi = \sinh \rho \\ y = \sinh \chi \sin \varphi = \cosh \rho \sinh \omega \\ z = \cosh \chi = \cosh \rho \cosh \omega \end{cases}, \quad (4.5)$$

ambas obedecendo ao vínculo

$$x^i x_i = -1 \quad (4.6)$$

num espaço tridimensional com a métrica

$$g_{ij} = \text{diag}[1, 1, -1] \quad (4.7)$$

Partindo-se dessas parametrizações pode-se obter, em ambos os casos, soluções da equação de Helmholtz em termos de produtos de funções trigonométricas – da coordenada φ , num caso, e da coordenada ω no outro – e funções associadas de Legendre (ver Tabela 4.1).

¹⁷O nome parametrização circular vem da expressão

$$x^2 + y^2 = \sinh^2 \chi,$$

que é a equação de um círculo de raio $\sinh \chi$, mostrando que a coordenada χ pode ser vista como uma coordenada radial no plano xy . Já o nome parametrização hiperbólica vem da expressão

$$y^2 \sinh^{-2} \omega - x^2 = 1,$$

válida para $\omega \neq 0$, que representa uma hipérbole no plano xy .

Problema bidimensional: $\Psi(x_1, x_2) = A(x_1) B(x_2)$ $p^2 \equiv k^2 - \frac{1}{4}$		
	'circular'	'hiperbólica'
(x_1, x_2)	(φ, χ)	(ω, ρ)
x	$\sinh \chi \cos \varphi$	$\sinh \rho$
y	$\sinh \chi \sin \varphi$	$\cosh \rho \sinh \omega$
z	$\cosh \chi$	$\cosh \rho \cosh \omega$
$A(x_1)$	$\Phi = a_1 \cos \delta \varphi + a_2 \sin \delta \varphi$	$\Omega = a_3 \cos \lambda \omega + a_4 \sin \lambda \omega$
$B(x_2)$	$X = b_1 P_{-\frac{1}{2}+ip}^\delta (\cosh \chi)$ $+ b_2 Q_{-\frac{1}{2}+ip}^\delta (\cosh \chi)$	$R = b_3 P_{-\frac{1}{2}+ip}^{i\lambda} (i \sinh \rho)$ $+ b_4 Q_{-\frac{1}{2}+ip}^{i\lambda} (i \sinh \rho)$
	$X = (1 - \tanh^2 \chi)^{1/4} \times$ $\left[b'_1 P_{-\frac{1}{2}+\delta}^{ip} (\tanh \chi) \right.$ $\left. + b'_2 Q_{-\frac{1}{2}+\delta}^{ip} (\tanh \chi) \right]$	$R = (1 - \tanh^2 \rho)^{1/4} \times$ $\left[b'_3 P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{ip} (\tanh \rho) \right.$ $\left. + b'_4 Q_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{ip} (\tanh \rho) \right]$

Tabela 4.1: Resumo do estudo da equação de Helmholtz em um espaço hiperbólico bidimensional.

Dois pontos P e P' , cada um em uma diferente cópia adjacente do octágono que representa o toro duplo, são identificados pela relação [43]

$$P' = \Lambda_{j\pi/4} P, \quad (4.8)$$

onde

$$\Lambda_{j\pi/4} = R_{j\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \eta & \sinh \eta \\ 0 & \sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix} R_{j\pi/4}^{-1} \quad (4.9)$$

é uma combinação de um boost de Lorentz de rapidez¹⁸ η na direção y com rotações de um ângulo $j\pi/4$ no plano xy ,

$$R_{j\pi/4} = \begin{pmatrix} \cos(j\pi/4) & -\sin(j\pi/4) & 0 \\ \sin(j\pi/4) & \cos(j\pi/4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

com $0 \leq j \leq 3$, cada valor de j correspondendo a uma diferente ‘cunha’ do octágono.

No caso $j = 0$, que corresponde à cunha

$$\tan \frac{3\pi}{8} \leq \frac{y}{x} \leq \tan \frac{5\pi}{8}, \quad (4.11)$$

tem-se, na parametrização hiperbólica,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sinh \rho' \\ \cosh \rho' \sinh \omega' \\ \cosh \rho' \cosh \omega' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \eta & \sinh \eta \\ 0 & \sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh \rho \\ \cosh \rho \sinh \omega \\ \cosh \rho \cosh \omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sinh \rho \\ \cosh \rho \sinh (\omega + \eta) \\ \cosh \rho \cosh (\omega + \eta) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

¹⁸O valor $\eta = 2 \operatorname{arccosh} [1 + \sqrt{2}]$ vem do diâmetro do círculo inscrito no octágono que representa o toro duplo, e *não deve* ser confundido com o tempo conforme η que apareceu no capítulo anterior.

ou seja, sob a mais simples transformação do toro duplo, tem-se $\omega \rightarrow \omega + \eta$, uma condição de periodicidade adequada para soluções contendo funções trigonométricas da coordenada ω . A outra parametrização, 'circular', mostra-se mais adequada para condições de contorno envolvendo periodicidade angular ou radial.

A análise do problema tridimensional é similar já que o espaço H^3 pode ser visto como uma superfície dada pelo vínculo

$$x^\mu x_\mu = -1 \quad (4.13)$$

num espaço de Minkowski quadridimensional com a métrica

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}[1, 1, 1, -1] \quad (4.14)$$

Isto permite uma generalização quase óbvia das parametrizações circular e hiperbólica

$$\begin{cases} w = \sinh \chi \sin \varphi \sin \theta = \sinh \rho \sin \varphi \\ x = \sinh \chi \cos \varphi \sin \theta = \sinh \rho \cos \varphi \\ y = \sinh \chi \cos \theta = \cosh \rho \sinh \omega \\ z = \cosh \chi = \cosh \rho \cosh \omega \end{cases}, \quad (4.15)$$

ligadas agora pelas relações trigonométricas

$$\begin{cases} \sinh \chi \sin \theta = \sinh \rho \\ \cosh \chi = \cosh \rho \cosh \omega \end{cases}, \quad (4.16)$$

que podem ser escritas na forma mais geral

$$\begin{cases} \sin \sqrt{k} \chi \sin \theta = \sin \sqrt{k} \rho \\ \cos \sqrt{k} \chi = \cos \sqrt{k} \rho \cos \sqrt{k} \omega \end{cases}. \quad (4.17)$$

Contudo, as soluções da equação de Helmholtz obtidas destas parametrizações envolvem ao menos uma função bastante complicada e, assim, é interes-

Problema tridimensional: $\Psi(x_1, x_2, x_3) = A(x_1) B(x_2) C(x_3)$ $q^2 \equiv 1 - k^2$			
	'circular'	'hiperbólica'	'bi-hiperbólica'
(x_1, x_2, x_3)	(φ, θ, χ)	(φ, ω, ρ)	(ω, ρ, ξ)
w	$\sinh \chi \sin \varphi \sin \theta$	$\sinh \rho \sin \varphi$	$\sinh \xi$
x	$\sinh \chi \cos \varphi \sin \theta$	$\sinh \rho \cos \varphi$	$\cosh \xi \sinh \rho$
y	$\sinh \chi \cos \theta$	$\cosh \rho \sinh \omega$	$\cosh \xi \cosh \rho \sinh \omega$
z	$\cosh \chi$	$\cosh \rho \cosh \omega$	$\cosh \xi \cosh \rho \cosh \omega$
$A(x_1)$	$\Phi = a_1 \cos \delta \varphi$ $+ a_2 \sin \delta \varphi$	$\Phi = a_3 \cos \delta \varphi$ $+ a_4 \sin \delta \varphi$	$\Omega = a_5 \cos \lambda \omega$ $+ a_6 \sin \lambda \omega$
$B(x_2)$	$\Theta = b_1 P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{\delta}(\cos \theta)$ $+ b_2 Q_{-\frac{1}{2}+\mu}^{\delta}(\cos \theta)$	$\Omega = b_3 \cos \lambda \omega$ $+ b_4 \sin \lambda \omega$	$R = \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}} \rho \times$ $\left[b_5 P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\nu}(\tanh \rho) \right.$ $\quad +$ $\left. b_6 Q_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\nu}(\tanh \rho) \right]$
$C(x_3)$	$X = -i \sinh^{-\frac{1}{2}} \chi \times$ $\left[c_1 P_{-\frac{1}{2}+q}^{\mu}(\cosh \chi) \right.$ $\quad +$ $\left. c_2 Q_{-\frac{1}{2}+q}^{\mu}(\cosh \chi) \right]$	$S =$ $c_3 F[\alpha, \beta; \gamma; \sigma]$ $\quad +$ $c_4 \frac{F[\alpha+q, \beta+q; 2-\gamma; \sigma]}{\cosh^{2p} \rho}$ $\alpha \equiv \frac{\gamma+i\delta \pm \lambda}{2}$ $\beta \equiv \frac{\gamma-i\delta \pm \lambda}{2}$ $\gamma \equiv 1 \pm q$ $\sigma \equiv \operatorname{sech}^2 \rho$	$\Xi = \cosh^{\frac{1}{2}} \xi \times$ $\left[c_5 P_{-\frac{1}{2}+\nu}^q(\tanh \xi) \right.$ $\quad +$ $\left. c_6 Q_{-\frac{1}{2}+\nu}^q(\tanh \xi) \right]$

Tabela 4.2: Resumo do estudo da equação de Helmholtz em um espaço hiperbólico tridimensional.

sante introduzir uma terceira parametrização,

$$\begin{cases} w = \sinh \xi \\ x = \cosh \xi \sinh \rho \\ y = \cosh \xi \cosh \rho \sinh \omega \\ z = \cosh \xi \cosh \rho \cosh \omega \end{cases}, \quad (4.18)$$

chamada ‘bi-hiperbólica’, que fornece soluções em termos de produtos de funções trigonométricas da coordenada ω e funções associadas de Legendre das coordenadas ξ e ρ (ver Tabela 4.2).

4.3 Integração em espaços compactos

Outro problema que surge no uso de espaços compactos é o cálculo de integrais de funções dentro desses espaços¹⁹; a grande dificuldade que surge quando se usa um espaço fechado de topologia não-trivial consiste na determinação dos limites de integração dados pelo poliedro fundamental, dificuldade essa que pode ser superada através do emprego de parametrizações adequadas. No caso específico de variedades tridimensionais hiperbólicas tal problema é, em princípio, mais básico, pois tais variedades são classificadas através de seus volumes; na prática, o que se usam são volumes tabelados, ou então fórmulas já algo padronizadas para o cálculo dos volumes, o que pouco auxilia no cálculo de integrais genéricas.

Um exemplo de como o cálculo de integrais em espaços compactos não é trivial pode ser visto no cálculo da aparentemente simples integral

$$I_k = \int_{V^3} \cos 2\sqrt{k}\chi d\chi d\Omega, \quad (4.19)$$

onde $k = 0, \pm 1$, χ é uma coordenada radial medida a partir do centro do poliedro fundamental, $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, e V^3 é um espaço compacto tridimensional genérico. Em geral tem-se $\chi = \chi(\theta, \varphi)$ e, assim, pode-se escrever,

¹⁹Esta seção descreve um estudo meu apresentado na referência [48].

num primeiro passo,

$$I_k = \int_{V^3} \frac{\sin 2\sqrt{k}\chi_0(\theta, \varphi; V^3)}{2\sqrt{k}} d\Omega, \quad (4.20)$$

o que exige a determinação dos limites dados pela função $\chi_0(\theta, \varphi; V^3)$, específicos para cada variedade V^3 ; como não é simples determinar a forma exata dessa função – dependendo da forma do poliedro fundamental, é quase impossível – pode-se, então, estabelecer os limites

$$4\pi \frac{\sin 2\sqrt{k}\chi_{\min}}{2\sqrt{k}} \leq I_k \leq 4\pi \frac{\sin 2\sqrt{k}\chi_{\max}}{2\sqrt{k}}, \quad (4.21)$$

sendo χ_{\min} e χ_{\max} , respectivamente, os raios da esfera inscrita e circunscrita ao poliedro fundamental que representa a variedade V^3 .

Um modo de se conseguir resultados mais precisos da integral I_k consiste em reescrevê-la em termos do conjunto de coordenadas cilíndricas (ρ, φ, ω) da parametrização hiperbólica tridimensional, a partir das relações dadas pela equação (4.17), representadas também por uma relação entre elementos de linha,

$$d\chi^2 + \frac{\sin^2 \sqrt{k}\chi}{k} [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] = d\rho^2 + \cos^2 \sqrt{k}\rho d\omega^2 + \frac{\sin^2 \sqrt{k}\rho}{k} d\varphi^2. \quad (4.22)$$

Tal reformulação do problema em termos de novas coordenadas é vantajosa porque *qualquer* poliedro fundamental pode ser dividido por geodésicas do espaço em estudo em n tetraedros²⁰ $ABCD$ formados por quatro triângulos

²⁰A construção desses tetraedros obedece a três passos:

- para cada face do poliedro fundamental desenha-se uma geodésica perpendicular ao plano dessa face conectando-o ao centro A do poliedro, e perfurando esse plano num ponto B ;
- para cada aresta do poliedro fundamental desenha-se uma geodésica perpendicular a ela ou ao seu prolongamento e conectando-a ao ponto B relativo à face à qual esta aresta pertence, cruzando esta aresta ou seu prolongamento num ponto C ;

retângulos, com um deles, BCD , por exemplo, servindo então como base do tetraedro, que vai ter assim altura $\omega_0 = d_{AB}$; tal divisão em tetraedros permite, portanto, por uso de simples identidades trigonométricas no plano, a obtenção dos limites de integração para cada tetraedro, limites estes dados pelas relações

$$0 \leq \omega \leq \omega_0 = d_{AB}, \quad 0 \leq \varphi \leq \widehat{C B D} \quad (4.23)$$

e

$$0 \leq \rho \leq \rho_0(\varphi, \omega) = \frac{1}{\sqrt{k}} \arctan \left[\tan \widehat{B A C} \frac{\sin \sqrt{k} \omega}{\cos \varphi} \right] . \quad (4.24)$$

O passo seguinte no cálculo de I_k consiste em notar que

$$I_k = \int_{V^3} [\cos^2 \sqrt{k} \chi - \sin^2 \sqrt{k} \chi] d\chi d\Omega = k \int_{V^3} \frac{\cos^2 \sqrt{k} \chi - \sin^2 \sqrt{k} \chi}{\sin^2 \sqrt{k} \chi} dV \quad (4.25)$$

ou

$$I_k = k \int_{V^3} [\cot^2 \sqrt{k} \chi - 1] dV = k \int_{V^3} [\csc^2 \sqrt{k} \chi - 2] dV , \quad (4.26)$$

onde

$$dV = k^{-1} \sin^2 \sqrt{k} \chi d\chi d\Omega , \quad (4.27)$$

ou, em coordenadas cilíndricas,

$$dV = k^{-1/2} \sin \sqrt{k} \rho \cos \sqrt{k} \rho d\rho d\omega d\varphi . \quad (4.28)$$

Agora, a partir da equação (4.26) pode-se seguir dois caminhos; o primeiro consiste em usar a identidade

$$\csc^2 \sqrt{k} \chi = \frac{1}{1 - \cos^2 \sqrt{k} \rho \cos^2 \sqrt{k} \omega} = \frac{\sec^2 \sqrt{k} \omega}{\sin^2 \sqrt{k} \rho + \tan^2 \sqrt{k} \omega} \quad (4.29)$$

-
- finalização do tetraedro por ligação com um dos dois vértices D da aresta usada no passo anterior.

Alguns dos tetraedros formados neste procedimento vão ser ‘negativos’, isto é, cobrem regiões fora do poliedro fundamental; uma integração no poliedro fundamental consiste na diferença entre as integrais feitas nos tetraedros ‘positivos’ e as feitas nos tetraedros ‘negativos’. É importante notar que por essa construção a base BCD de cada tetraedro pertence ao plano de uma face do poliedro fundamental.

e daí escrever

$$I_{k,n} = k \left\{ \int_0^{C\hat{B}D} d\varphi \int_0^{d_{AB}} \frac{d\omega}{2 \cos^2 \sqrt{k}\omega} \ln [\sin^2 \sqrt{k}\rho_0 + \tan^2 \sqrt{k}\omega] - 2v_n \right\} , \quad (4.30)$$

onde v_n é o volume do tetraedro em consideração; embora se possa ainda continuar com a integração para obter uma integral simples ao invés de uma integral dupla, o valor final de I_k já pode ser obtido desta expressão pela soma das n integrações numéricas destas funções $I_{k,n}$ feitas para cada um dos tetraedros que compõem o poliedro fundamental a partir dos dados da variedade V^3 .

Contudo, alternativamente, pode-se voltar a (4.26) e notar que pode-se escrever

$$I_k = k \int_{V^3} [\cot^2 \sqrt{k}\chi - 1] dV = \int_{V^3} \nabla_i V^i dV - kv , \quad (4.31)$$

onde

$$\nabla_i V^i = k \cot^2 \sqrt{k}\chi \quad (4.32)$$

é uma equação que, em princípio, admite várias soluções para o trivetor V^i ; escolhendo arbitrariamente uma solução que só contenha, em coordenadas esféricas, uma única componente radial, V^x , encontra-se que

$$V^x = \frac{1}{2} [\sqrt{k} \cot \sqrt{k}\chi + k\chi \csc^2 \sqrt{k}\chi] = \frac{1}{\chi} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{k^2 \chi^3}{(k\chi^2 - \pi^2 \ell^2)^2} , \quad (4.33)$$

onde a última igualdade mostra claramente o comportamento desta solução quando $k = 0$. Tal resultado permite o uso do teorema de Stokes para fazer-se

$$\int_{V^3} \nabla_i V^i dV = \int_{V^3} k \cot^2 \sqrt{k}\chi dV = \int_{S=\partial V^3} g_{ij} V^i n^j dA , \quad (4.34)$$

onde $S = \partial V^3$ é a fronteira formada pelas faces de cada tetraedro componente do poliedro fundamental, $g_{ij} = \text{diag} [1, \cos^2 \sqrt{k}\rho, k^{-1} \sin^2 \sqrt{k}\rho]$, n^j é um vetor normal à fronteira obedecendo ao vínculo $n^j n_j = 1$, ou seja, $n^j = n^\omega = \sec \sqrt{k}\rho$, e $dA = k^{-1/2} \sin \sqrt{k}\rho d\rho d\varphi$; note-se que agora, em coordenadas cilíndricas, somente a componente $V^\omega = V^x \partial_\chi \omega$, normal às faces do poliedro fundamental, é importante.

Integração da função $f = \cosh 2\chi$ em alguns espaços hiperbólicos				
Variedade	volume	I_{-1}	$2\pi \sinh 2\chi_{min}$	$2\pi \sinh 2\chi_{max}$
Weeks	0,942707	9,284737	7,76109	13,4518
Thurston	0,981369	9,48385	8,09029	13,3355
$m036(-3, 2)$	2,029883	13,48972	11,3208	23,4987
$m016(-4, 3)$	2,343017	14,55261	11,7314	18,3142
$m036(-2, 3)$	2,568971	15,316705	12,6901	20,6181
Best	4,68594	21,4948	17,2847	49,6976
$v3469(+3, 1)$	5,137941	22,541799	15,2178	57,1996

Tabela 4.3: Resumo dos resultados obtidos na integração da função $f = \cosh 2\chi$ em algumas variedades hiperbólicas; os dados de cada poliedro fundamental foram obtidos no programa SnapPea, assim como os volumes e os raios das circunferências inscrita e circunscrita que dão os valores dos limites estimados para cada integral.

Como exemplo dos resultados que podem ser obtidos com os métodos acima foram escolhidas algumas variedades hiperbólicas compactas para o cálculo da integral I_k , listando-se os valores obtidos na Tabela 4.3, ao lado dos quais aparecem os volumes e os valores dos limites estimados para cada uma das variedades; o ‘esqueleto’ do poliedro fundamental de seis dessas variedades aparece nas Figuras 4.1 a 4.6. Embora as variedades usadas possuam um certo grau de simetria que facilita os cálculos por gerar um menor número de tipos de tetraedros na divisão do poliedro fundamental, o procedimento apresentado aqui é válido, em princípio, para qualquer variedade compacta.

Como ‘subproduto’ do procedimento apresentado acima pode-se obter expressões para o cálculo do volume de um espaço compacto a partir dos dados de seu poliedro fundamental; para o caso de espaços hiperbólicos tem-

se, para cada tetraedro componente do poliedro fundamental,

$$v = \int_0^{C\hat{B}D} \frac{d\varphi}{2} \left\{ \frac{\operatorname{arctanh} \left[\tanh \omega_0 \sqrt{1 + \sec^2 \varphi \tan^2 B \hat{A} C} \right]}{\sqrt{1 + \sec^2 \varphi \tan^2 B \hat{A} C}} - \omega \right\} \quad (4.35)$$

e

$$v = \int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{2} \left\{ \frac{\operatorname{arctanh} \left[\tan C \hat{B} D \left(\cot^2 B \hat{A} C \operatorname{csch}^2 \omega - 1 \right)^{-1/2} \right]}{\sqrt{\cot^2 B \hat{A} C \operatorname{csch}^2 \omega - 1}} \right\}, \quad (4.36)$$

onde $\omega_0 = d_{AB}$; os resultados obtidos com estas expressões podem ser comparados com os obtidos pelas fórmulas tradicionais apresentadas, por exemplo, em [49, 50, 51], ou com os resultados tabelados apresentados na literatura para alguns espaços compactos.

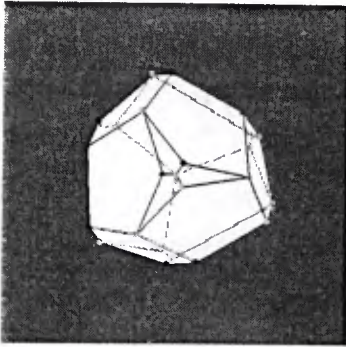


Figura 4.1: Variedade de Weeks.

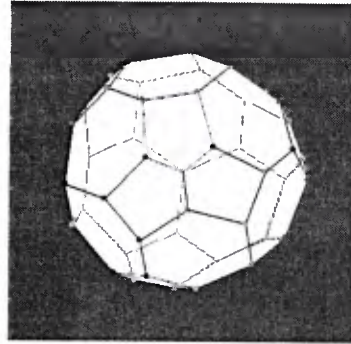


Figura 4.4: $m036(-2,3)$.

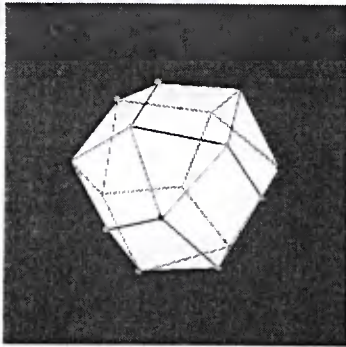


Figura 4.2: Variedade de Thurston.

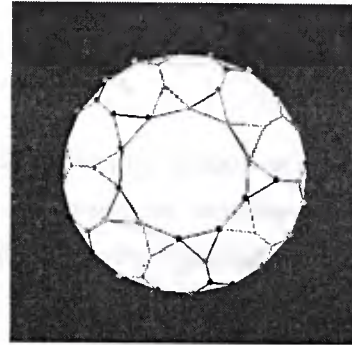


Figura 4.5: $m016(-4,3)$.

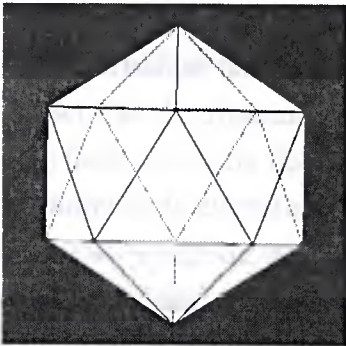


Figura 4.3: Variedade de Best.

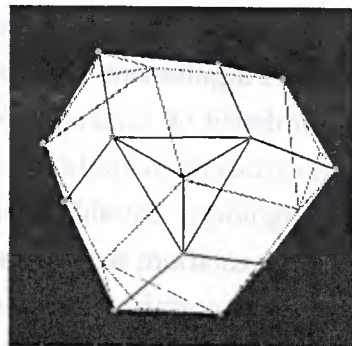


Figura 4.6: $v3469(+3,1)$.

5

Um modelo com mudança de topologia

Mudam-se os tempos, mudam-se as vontades.

Muda-se o ser, muda-se a confiança.

Todo o mundo é composto de mudança.

Tomando sempre novas qualidades.

Início de soneto de Camões.

Nos capítulos anteriores tentou-se apresentar, numa sequência lógica, algumas características básicas do modelo padrão da cosmologia clássica, tais como a descrição da dinâmica do universo pela equação de Friedmann, relacionando o fator de escala do universo e a sua densidade de matéria com o uso de um parâmetro de curvatura, a existência de problemas topológicos dentro dessa descrição, e algo da fundação teórica por trás dos modelos mais simples que tentam fazer uma extensão quântica desse padrão clássico. Este capítulo, que pretende ser o desfecho dessa sequência, tem por intenção mostrar um modelo cosmológico particular, que busca unir esses estudos descritos anteriormente, já que um modelo mais completo do universo deve, partindo

da relatividade geral, ir além dela, enfrentando a necessidade de prever de alguma forma qual pode ser a topologia global do universo, previsão essa que possivelmente só pode ser formulada numa teoria que inclua a mecânica quântica.

Não é difícil argumentar que um modelo que inclua a cosmologia quântica deva levar em conta a existência de possíveis mudanças quânticas de topologia [52]:

“A questão de se a topologia do espaço pode mudar é básica na busca por uma teoria de gravitação quântica. Os teoremas de Geroch [1] e Tipler [2] são largamente entendidos como mostrando que não há mudança de topologia na relatividade geral clássica, de modo que nós devemos olhar para a teoria quântica para vê-la, se ela ocorrer. Embora a afirmação definitiva sobre a ocorrência de mudança de topologia poder muito bem ter que esperar até que nós tenhamos uma teoria de gravitação quântica completamente desenvolvida é entretanto geralmente acreditado que uma mudança de topologia *realmente* ocorre. (...) [1] Geroch, R.P. – J. Math. Phys. 8, 782 (1967). [2] Tipler, F.J. – Ann. Phys. 108, 1 (1970).”

O modelo aqui apresentado é interessante por aceitar tal possibilidade, tentando quantizá-la por meio de regras de seleção para as transições quânticas entre as diferentes possíveis topologias do universo. Como resultado, há nesse modelo a demonstração da existência de possíveis mecanismos teóricos que permitiriam o surgimento quântico de um universo fechado com curvatura negativa.

Seguem-se, então, duas seções: na primeira, ‘Teoria’, a base teórica do modelo é apresentada, enquanto na segunda, ‘Números’, são mostrados alguns resultados numéricos.

5.1 Teoria

No capítulo ‘O padrão clássico’ mostrou-se que, usando o elemento de linha de FLRW, há uma solução exponencial da equação de Friedmann, com três possíveis valores do parâmetro de curvatura, $k = 0$ ou ± 1 ; os elementos de linha representando tais soluções podem ser vistos como sendo obtidos por diferentes parametrizações de regiões de um hiperbolóide 5-dimensional, mostrando-se também que tais soluções apresentam um horizonte de eventos similar ao de buracos negros.

Tais características levam a se poder sugerir um modelo de criação do universo envolvendo uma mudança de topologia entre duas destas soluções com diferentes curvaturas: o universo inicial possuiria curvatura positiva e em algum de seus pontos ocorreria o surgimento quântico de um universo de curvatura negativa, possivelmente separado do universo inicial por um horizonte de eventos; tal universo de curvatura negativa, visto como uma solução de vácuo ou de densidade de matéria constante, evoluiria até se tornar um universo de curvatura negativa dominado por matéria.

Este modelo, originalmente proposto para espaços com topologia trivial, pode ser ‘estendido’ para incluir topologias diferentes da trivial, através de uma sequência de quatro passos [53]:

- criação quântica, a partir de um ‘instanton’¹, de um universo com geometria da solução de de Sitter de curvatura positiva e topologia não-trivial;
- mudança quântica de topologia do universo para um espaço de de Sitter de curvatura negativa e topologia não-trivial;
- inflação deste universo de de Sitter hiperbólico;

¹Um instanton é uma solução clássica das equações de campo euclideanizadas de um determinado sistema, de caráter local no tempo e análoga a um sóliton [54].

- transição de fase do universo de de Sitter hiperbólico, por meio de decaimento do campo inflacionário (reaquecimento), levando à criação de matéria, com conseqüente início da evolução de um universo hiperbólico segundo a cosmologia padrão (modelo do Big Bang).

O primeiro passo envolve a ‘transformação’ de um instanton de topologia S^4/Γ em um espaço-tempo de topologia $R \times S^3/\Gamma$: se Γ é o grupo trivial, formado apenas pela identidade, o processo envolve a passagem de uma esfera S^4 , dada pelo vínculo $x^\mu x_\mu + x^4 x_4 = 1$, e obtida como solução das equações de Einstein euclideanizadas, para um espaço-tempo com seção espacial esférica; contudo, em geral Γ pode ser um grupo qualquer de isometrias de ação livre – sem pontos fixos – e propriamente descontínua² em S^3 . Nem todo o instanton, representado simbolicamente como $\mathcal{M}_R = S^4/\Gamma$, é usado na solução; o seu ‘hemisfério’ inferior, no qual $x^0 \leq 0$, possui como fronteira uma esfera equatorial, onde $x^0 = 0$, representada como $\Sigma = \partial\mathcal{M}_R$, onde ocorre a ‘criação’ do espaço-tempo de estrutura lorentziana $\mathcal{M}_L = R \times S^3/\Gamma$, podendo-se, portanto, descrever a solução completa como sendo dada pela união $\mathcal{M} = \mathcal{M}_R \cup_\Sigma \mathcal{M}_L$.

A parte da solução representada pelo instanton tem a métrica dada pelo elemento de linha

$$ds^2 = dt_E^2 + \gamma^{-2} \cos^2 \gamma t_E \left[d\chi^2 + \sin^2 \chi \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \right] , \quad (5.1)$$

com um tempo t_E sendo um tempo euclidianizado, enquanto a parte com topologia esférica pode ser descrita pelo elemento de linha

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma^{-2} \cosh^2 \gamma t \left[d\chi^2 + \sin^2 \chi \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \right] . \quad (5.2)$$

²A extensão da ação de Γ de S^3 para S^4 é feita ‘naturalmente’ vendo-se S^4 como sendo formado por infinitas esferas S^3 paralelas à uma esfera equatorial, já que *toda* esfera S^n pode ser vista como formada por infinitas esferas S^{n-1} , com $n \geq 2$. As esferas paralelas presentes nos polos de S^4 são, na verdade, pontos, o que faria do espaço quociente S^4/Γ não uma variedade, mas sim um *orbifold*, pois nessas esferas a ação de Γ não será mais livre.

A mudança quântica de topologia desse universo esférico para um universo hiperbólico pode ser analisada partindo-se do formalismo da cosmologia quântica descrito brevemente no capítulo ‘O padrão quântico’; o *ansatz* deste modelo particular, desenvolvido por De Lorenci *et al.*, e apresentado em detalhe em [2], consiste da métrica presente no elemento de linha

$$ds^2 = \left[N^2(\chi, t) - \frac{N_\chi^2(\chi, t)}{a^2(\chi, t)} \right] dt^2 - 2N_\chi(\chi, t) d\chi dt - a^2(\chi, t) \left[d\chi^2 + \sigma^2(\chi, t) d\Omega^2(\theta, \varphi) \right] , \quad (5.3)$$

com $d\Omega^2(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta d\theta d\varphi$, e da densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{grav} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\xi \quad (5.4)$$

representando a gravitação, um campo escalar ϕ e um campo de poeira³ ξ , de onde pode-se buscar, como soluções de primeira ordem, funções de onda do universo do tipo

$$\Psi = \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(\alpha, \beta, \xi, \phi) \right] , \quad (5.5)$$

onde S é a ação do sistema, e α e β são variáveis canônicas apropriadas construídas a partir do conjunto formado pelo fator de escala a e pela função σ das coordenadas esférica radial χ , do escalar de curvatura k e do tempo cosmológico t ,

$$\alpha \equiv \ln a , \quad \beta \equiv -2 \ln(\sigma a) . \quad (5.6)$$

Tais funções de onda, quando substituídas nos vínculos da super-Hamiltoniana e do supermomento,

$$\mathcal{H}\Psi = 0 \quad (5.7)$$

e

$$\mathcal{H}^i \Psi = 0 , \quad (5.8)$$

³Ver seção 3.3.

levam às equações diferenciais funcionais

$$e^{\alpha+\beta} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{\delta S}{\delta \alpha} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta S}{\delta \alpha} \right) \left(\frac{\delta S}{\delta \beta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta S}{\delta \phi} \right)^2 \right] - e^{\alpha+\beta} i \hbar \left[\frac{1}{8} \frac{\delta^2 S}{\delta \alpha^2} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta \alpha \delta \beta} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta \phi^2} - \left(\frac{3}{8} \frac{\delta S}{\delta \alpha} - \frac{1}{4} \frac{\delta S}{\delta \alpha} \right) \delta(0) \right] + e^{\alpha-\beta} V + \sqrt{e^{-2\alpha} \xi'^2 + m^2} \frac{\delta S}{\delta \xi} = 0 \quad (5.9)$$

e

$$e^{-2\alpha} \left[\alpha' \frac{\delta S}{\delta \alpha} + \beta' \frac{\delta S}{\delta \beta} + \phi' \frac{\delta S}{\delta \phi} + \xi' \frac{\delta S}{\delta \xi} - \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\delta S}{\delta \alpha} \right) \right] = 0, \quad (5.10)$$

onde \mathcal{V} é um 'superpotencial' dado pela expressão

$$\mathcal{V} = -^3R + \frac{\phi'^2}{2a^2} + U(\phi) + V(\xi), \quad (5.11)$$

e onde o sinal ' significa derivação em relação à variável χ . Em [2] aparecem algumas soluções WKB destas equações válidas no midisuperespaço onde

$$a' = 0, \quad \phi' = 0, \quad \xi' = 0, \quad \sigma = \frac{\sin \sqrt{k} \chi}{\sqrt{k}}. \quad (5.12)$$

Duas destas soluções são as funções⁴ e

$$S_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{V^3} d\tau \left\{ -\frac{C}{m} f' \xi + \beta' e^{-\beta} \left[\phi \sqrt{\frac{3-C}{2}} - \sqrt{6+2C} \ln(-e^{-\alpha} \beta') \right] \right\} \quad (5.13)$$

e

$$S_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{V^3} d\tau \left\{ -\frac{C}{m} f' \xi + 4i\sqrt{3+C} e^{\alpha-\beta/2} + i\phi\sqrt{3+2C} \beta' e^{-\beta} \right\}, \quad (5.14)$$

onde

$$f = f(\alpha, \beta) \equiv \beta' e^{-\alpha-\beta} \quad (5.15)$$

⁴Eqs. (48) e (49) da ref. [2].

e

$$d\tau \equiv d\chi d\theta \sin \theta d\varphi . \quad (5.16)$$

Das definições das coordenadas α e β nota-se que

$$\begin{aligned} \beta' e^{-\alpha-\beta} &= \frac{\partial [-2 \ln (\sigma a)]}{\partial \chi} e^{-\ln a - [-2 \ln (\sigma a)]} \\ &= \left[-2 \frac{1}{\sigma a} \left(a \frac{\partial \sigma}{\partial \chi} + \sigma \frac{\partial a}{\partial \chi} \right) \right] \frac{(\sigma a)^2}{a} \\ &= -2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{a'}{a} \right) \sigma^2 a \end{aligned} \quad (5.17)$$

e, então,

$$f' = (\beta' e^{-\alpha-\beta})' = \frac{\partial}{\partial \chi} \left[-2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{a'}{a} \right) \sigma^2 a \right] , \quad (5.18)$$

o que, após alguns passos, se escreve como

$$(\beta' e^{-\alpha-\beta})' = -2\sigma^2 a \left\{ \frac{\sigma''}{\sigma} + \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 + 3 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right) \left(\frac{a'}{a} \right) + \frac{a''}{a} \right\} . \quad (5.19)$$

Analogamente,

$$\beta' e^{-\beta} = -2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{a'}{a} \right) \sigma^2 a^2 , \quad (5.20)$$

$$\alpha - \ln (-\beta') = \ln a - \ln \left[2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{a'}{a} \right) \right] = \ln \frac{a}{2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{a'}{a} \right)} \quad (5.21)$$

e

$$e^{\alpha-\beta/2} = \sigma a^2 . \quad (5.22)$$

Substituindo esses resultados nas expressões de S_1 e S_2 o que se obtêm é

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_V d\tau \left\{ \frac{C}{ma} \left[\frac{\sigma''}{\sigma} + \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 + 3 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right) \left(\frac{a'}{a} \right) + \frac{a''}{a} \right] \xi \right\} a^2 \sigma^2 \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_V d\tau \left\{ \left(\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{a'}{a} \right) \left[\phi \sqrt{\frac{3-C}{2}} + \sqrt{6+2C} \ln \frac{a}{2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)} \right] \right\} a^2 \sigma^2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

e

$$\begin{aligned}
 S_2 = & \frac{1}{2\pi} \int_V d\tau \left\{ \frac{C}{ma} \left[\frac{\sigma''}{\sigma} + \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 + 3 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right) \left(\frac{a'}{a} \right) + \frac{a''}{a} \right] \xi \right\} a^2 \sigma^2 \\
 & + \frac{i}{2\pi} \int_V d\tau \left\{ \left(\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{a'}{a} \right) \left[\frac{2}{\sigma'} \sqrt{3+C} - \phi \sqrt{3+2C} \right] \right\} a^2 \sigma^2 .
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Usando agora a ‘simplificação’⁵

$$a' = 0 \tag{5.25}$$

tais expressões se resumem a

$$S_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{V^3} d\tau \left\{ \frac{C}{ma} s(\sigma) \xi - \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right) \left[\phi \sqrt{\frac{3-C}{2}} + \sqrt{6+2C} \ln \frac{a}{2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)} \right] \right\} a^2 \sigma^2 \tag{5.26}$$

e

$$S_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{V^3} d\tau \left\{ \frac{C}{ma} s(\sigma) \xi + i \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right) \left[\frac{2}{\sigma'} \sqrt{3+C} - \phi \sqrt{3+2C} \right] \right\} a^2 \sigma^2 , \tag{5.27}$$

onde definiu-se

$$s(\sigma) \equiv \frac{\sigma''}{\sigma} + \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 . \tag{5.28}$$

Pondo⁶

$$\sigma = \frac{\sin \sqrt{k} \chi}{\sqrt{k}} \tag{5.29}$$

nota-se que

$$s(\sigma) = \frac{k}{\sin^2 \sqrt{k} \chi} [\cos^2 \sqrt{k} \chi - \sin^2 \sqrt{k} \chi] = \frac{1}{\sigma^2} (1 - 2k\sigma^2) . \tag{5.30}$$

⁵Equação (47) da referência [2].

⁶Equação (47) de [2].

Desse modo, pode-se definir duas funções de onda do universo,

$$\Psi_1 \equiv \exp \left[\frac{iS_1}{\hbar} \right] \quad (5.31)$$

e

$$\Psi_2 \equiv \exp \left[\frac{iS_2}{\hbar} \right] , \quad (5.32)$$

que, assumindo, ainda como em [2], que $C = -i$, podem ser escritas como

$$\Psi_1 = \exp \left\{ F_k \xi - \frac{i}{2\pi\hbar} \int_{V^3} d\tau \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right) \left[\phi \sqrt{\frac{3+i}{2}} + \sqrt{6-2i} \ln \frac{a}{2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)} \right] a^2 \sigma^2 \right\} \quad (5.33)$$

e

$$\Psi_2 = \exp \left\{ F_k \xi - \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{V^3} d\tau \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right) \left[\frac{2}{\sigma'} \sqrt{3-i} - \phi \sqrt{3-2i} \right] a^2 \sigma^2 \right\} , \quad (5.34)$$

onde

$$F_k \equiv -\frac{a}{2\pi\hbar m} \int_{V^3} \left[2k \left(\frac{\sin \sqrt{k}\chi}{\sqrt{k}} \right)^2 - 1 \right] d\chi d\theta \sin \theta d\varphi \quad (5.35)$$

ou seja,

$$F_k = -\frac{a}{2\pi\hbar m} \int_{V^3} \left[\sin^2 \sqrt{k}\chi - \cos^2 \sqrt{k}\chi \right] d\chi d\theta \sin \theta d\varphi , \quad (5.36)$$

o que permite a integração em χ , fornecendo

$$F_k = \frac{a}{2\pi\hbar m} \int_{V^3} \left[\frac{\sin \sqrt{k}\chi \cos \sqrt{k}\chi}{\sqrt{k}} \right]_0^{\chi_0(\theta, \varphi; V^3)} d\theta \sin \theta d\varphi \quad (5.37)$$

ou, simplesmente⁷,

$$F_k = \frac{a}{2\pi\hbar m} \int_{V^3} \frac{\sin 2\sqrt{k}\chi_0(\theta, \varphi; V^3)}{2\sqrt{k}} d\theta \sin \theta d\varphi . \quad (5.38)$$

Esta ‘função’ F_k é basicamente um coeficiente numérico obtido por integração no volume 3-dimensional V^3 da variedade de curvatura k considerada,

⁷Comparar com as equações (70), (71) e (72) de [2].

cujo papel nas funções de onda Ψ_1 e Ψ_2 pode ser visto mais claramente se elas são escritas como sendo

$$\Psi = A_k(a, \phi) e^{\xi F_k} ,$$

onde $A_k(a, \phi)$ é um fator de normalização da função de onda; *ignorando-se* o problema da normalização pode-se propor que a possível mudança de topologia ocorreria para um determinado valor ξ do campo de poeira, quando $a = \bar{a}$ e $\phi = \bar{\phi}$, de modo que a *probabilidade condicional* de ter-se $k = -1, 0$ ou $+1$ seria

$$\begin{aligned} P_c(k|\bar{a}, \bar{\phi}) &= \frac{|\Psi(k, \bar{a}, \bar{\phi})|^2}{\sum_{k=0, \pm 1} |\Psi(k, \bar{a}, \bar{\phi})|^2} \\ &= \frac{A_k^2(\bar{a}, \bar{\phi}) e^{2\xi F_k}}{\sum_{k=0, \pm 1} A_k^2(\bar{a}, \bar{\phi}) e^{2\xi F_k}} . \end{aligned} \quad (5.39)$$

Assim, quando $\xi \rightarrow \pm\infty$ tem-se um dos $P_c(k|\bar{a}, \bar{\phi})$ igual a um e os outros dois iguais a zero, dependendo do valor de F_k .

Para o cálculo das funções F_k é interessante voltar um passo atrás, para notar que

$$F_k = \frac{a}{2\pi\hbar m} \int_{V^3} \cos 2\sqrt{k}\chi d\chi d\theta \sin \theta d\varphi \quad (5.40)$$

e, assim,

$$F_k = \frac{a}{2\pi\hbar m} I_k , \quad (5.41)$$

onde

$$I_k = \int_{V^3} \cos 2\sqrt{k}\chi d\chi d\theta \sin \theta d\varphi \quad (5.42)$$

é a função que aparece no capítulo 'Problemas topológicos'; logo, o maior problema a se enfrentar consiste em calcular essa função para diferentes variedades, podendo-se assim obter regras de seleção para a transição entre essas diferentes variedades.

Por fim, é importante notar que a solução cosmológica obtida deve prever uma fase inflacionária do universo; tal fase deve aparecer, por exemplo, no

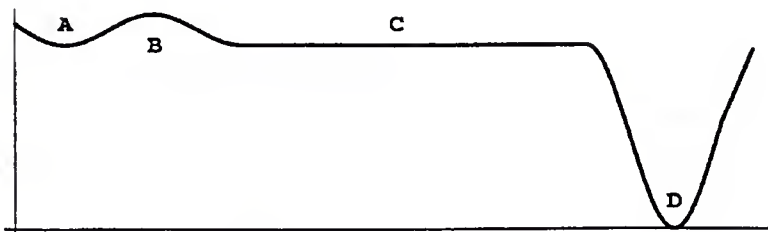


Figura 5.1: Desenho qualitativo do potencial $U(\phi)$; A é a região de topologia esférica S^3/Γ , B é onde o tunelamento para o espaço hiperbólico ocorre, C é a região de inflação, e D é a região de aquecimento. Pode-se comparar a forma deste potencial com a forma dos potenciais apresentados no capítulo ‘O padrão clássico’.

potencial do campo escalar presente. Neste caso particular em estudo as soluções apresentadas têm

$$U(\phi) = V(\xi) = 0, \quad (5.43)$$

o que restringe um pouco a liberdade de ‘escolha’ do potencial $U(\phi)$; contudo, pode-se propor, sem perda de generalidade, que, como os potenciais $U(\phi)$ e $V(\xi)$ entram como uma soma na expressão do superpotencial \mathcal{V} , é possível propor que

$$U(\phi) + V(\xi) = 0, \quad (5.44)$$

e, assim, sugerir uma forma *qualitativa* do potencial $U(\phi)$ como a apresentada na Figura 5.1.

5.2 Números

Para obter resultados numéricos onde verifica-se a possibilidade da mudança de topologia pode-se escolher duas ou mais dentre a infinidade de seções espaciais possíveis, com qualquer curvatura, e calcular as funções F_k para essas seções espaciais que representam diferentes espaços, a fim de obter-se

as probabilidades condicionais para cada espaço. Em [2], onde as funções F_k foram apenas estimadas, escolheu-se o tritoro T^3 , de curvatura nula, a esfera S^3 e o espaço dodecaédrico de Poincaré D^3 , de curvatura positiva, e o espaço de Best I^3 , de curvatura negativa; já em [53] escolheu-se o espaço lente $L(50,1)$, de curvatura positiva, e a variedade de Weeks, de curvatura negativa, com $I_{+1}^{L(50,1)} = 0$ e $I_{-1}^{Weeks} = 9,284737$, de modo que

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} P_c(k = +1) = \quad (5.45)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{A_{+1}^{L(50,1)}(\bar{a}, \bar{\phi}) \exp[\xi F_{+1}^{L(50,1)}]}{A_{-1}^{Weeks}(\bar{a}, \bar{\phi}) \exp[\xi F_{-1}^{Weeks}] + A_{+1}^{L(50,1)}(\bar{a}, \bar{\phi}) \exp[\xi F_{+1}^{L(50,1)}]} = 1$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} P_c(k = -1) = \quad (5.46)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{A_{-1}^{Weeks}(\bar{a}, \bar{\phi}) \exp[\xi F_{-1}^{Weeks}]}{A_{-1}^{Weeks}(\bar{a}, \bar{\phi}) \exp[\xi F_{-1}^{Weeks}] + A_{+1}^{L(50,1)}(\bar{a}, \bar{\phi}) \exp[\xi F_{+1}^{L(50,1)}]} = 1 ,$$

ou seja, neste caso específico o universo começaria com uma função de onda representando um espaço lente para depois passar a um espaço hiperbólico.

Pode-se considerar [55] que o universo permanece na fase transiente de curvatura esférica por um tempo t_f , e que após a mudança de topologia o universo hiperbólico tem o seu tempo começando com o valor τ_i , valor esse que pode ser obtido, por exemplo, exigindo-se que o raio da circunferência circunscrita à célula fundamental do universo hiperbólico, que para o caso da variedade de Weeks é $r_{\max} = 0,752470$, seja menor que o raio do horizonte de partículas desse universo, definido como

$$r_H(\tau) \equiv \int_{\tau_i}^{\tau} \frac{d\tau'}{a(\tau')} = \int_{\tau_i}^{\tau} \frac{\gamma d\tau'}{\sinh \gamma \tau'} = \ln \left[\frac{\tanh \frac{\gamma \tau}{2}}{\tanh \frac{\gamma \tau_i}{2}} \right] , \quad (5.47)$$

onde $\tau \geq \tau_i$; assim, se $r_H(\tau) > r_{\max}$ tem-se

$$\exp(r_{\max}) \tanh \frac{\gamma \tau_i}{2} > \tanh \frac{\gamma \tau}{2} ; \quad (5.48)$$

contudo, $\tanh \frac{\gamma}{2} < 1$ e, portanto, deve-se ter

$$\exp(r_{\max}) \tanh \frac{\gamma \tau_i}{2} < 1, \quad (5.49)$$

ou seja,

$$\tau_i < \frac{2}{\gamma} \operatorname{arctanh} [\exp(-r_{\max})] \quad (5.50)$$

o que, usando números, é

$$\tau_i < 1,02323\gamma^{-1}. \quad (5.51)$$

Usando agora este número como valor de τ_i , isto é, $\tau_i = 1,02323\gamma^{-1}$, pode-se, então, estimar o valor de t_f exigindo-se a continuidade do fator de escala na mudança de topologia; assim,

$$\cosh \gamma t_f = \sinh 1,02323, \quad (5.52)$$

e daí $t_f = 0,639233\gamma^{-1}$, um valor que corrobora a idéia de que a fase esférica do universo se encontraria dentro da escala de Planck [53].

A quantidade de inflação sofrida pelo universo hiperbólico, ou seu número de *e-foldings*, dado como [5]

$$N = \ln \frac{a(\tau_1)}{a(\tau_i)} = \ln \frac{\sinh \gamma \tau_1}{\sinh \gamma \tau_i}, \quad (5.53)$$

onde τ_1 é o momento final da fase inflacionária, é outra estimativa interessante a se fazer; para tal cálculo pode-se supor que no instante τ_1 , quando o universo passa da equação de estado $\rho = -p$ para $\rho = p/3$, há uma continuidade do fator de escala, valendo então a relação

$$\frac{1}{\gamma} \sinh \gamma \tau_1 = a(\tau_1), \quad (5.54)$$

onde $a(\tau) = \sqrt{2\tau\alpha + \tau^2}$ é a solução do fator de escala para um universo de curvatura negativa dominado por radiação e sem constante cosmológica, com $\alpha = (8\pi G \rho_{rad,0}/3c^2)^{1/2} a_0^2$, sendo $\rho_{rad,0} = 4,6477 \times 10^{-34} \text{ g cm}^{-3}$ a densidade

de radiação atual, e $a_0 \simeq 4,5 \times 10^{26} \text{ m}$ o valor presente do fator de escala⁸. Assim,

$$\tau_1 \simeq 72\gamma^{-1} , \quad (5.55)$$

e a quantidade de inflação seria $N \simeq 71$, um resultado maior, por exemplo, que os valores mínimos de e-foldings necessários para resolver o problema de excesso de entropia do universo, $24 \leq N_{\min} \leq 68$, tal como apresentado em [5].

⁸O valor do fator de escala é obtido das quantidades $H_0 = 65 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ e $\Omega_0 = 0,9$ pela relação $a_0 = H_0^{-1}/\sqrt{1-\Omega_0}$.

6

Comentários finais

Há ruídos que não se ouvem mais (...)
ruídos que apenas rompiam o silêncio.
E hoje o que mais se precisa é de silêncios
que interrompam o ruído.

Mário Quintana, 'No princípio do fim'.

Pretendeu-se mostrar num dos capítulos deste trabalho que, supondo-se que a teoria por trás do Big Bang, a relatividade geral, não seja válida para situações envolvendo a escala de Planck, pode-se tentar construir uma descrição quântica do universo primordial; tal campo de especulação constitui uma nova disciplina da física, a cosmologia quântica, que, contudo, não é livre de problemas básicos, sendo um deles a interpretação de seus resultados¹, e outro a sua testabilidade. A cosmologia padrão, entretanto, não fornece previsões para a topologia global do universo; neste trabalho, viu-se que a cosmologia quântica, ainda que bastante provisoriamente, traz

¹Sobre a interpretação de soluções da cosmologia quântica veja-se, por exemplo, o artigo [56].

em si uma possível abordagem deste problema, talvez a única presente na física moderna. Assim, seria interessante prosseguir no estudo de soluções de cosmologia quântica que permitam quantificar previsões sobre a topologia do universo.

Entretanto, deve-se notar que pode-se ver esta tese não apenas como a apresentação de um estudo em cosmologia quântica, mas como fazendo parte de uma linha de pesquisa mais geral, cujo tema é o estudo das propriedades de soluções cosmológicas com topologias não-triviais, sejam elas soluções clássicas ou quânticas²; tais soluções são pouco conhecidas e estudadas, haja visto o exemplo dado da equação de Helmholtz em espaços hiperbólicos, um problema ainda em aberto que pode servir de assunto para futuros trabalhos.

De qualquer modo, os prognósticos envolvendo o prosseguimento dos estudos dos temas envolvidos nesta tese são animadores, já que há ainda muito trabalho teórico e/ou observacional a ser feito envolvendo o uso de topologias não-triviais em cosmologia, lembrando-se sempre que para obter respostas é importante, em primeiro lugar, refletir sobre quais seriam as perguntas adequadas a se fazer, nunca se afastando daquela motivação básica da ciência apresentada no primeiro capítulo.

²Há uma tese ‘irmã’ desta [57] que trata da busca de previsões observacionais.

7

Apêndice: relatividade e cosmologia

Se você quiser descobrir qualquer coisa dos físicos teóricos
acerca dos métodos que eles usam,
eu o aconselho a se aferrar firmemente a um princípio:
não ouça suas palavras,
fixe a atenção em suas obras.

Albert Einstein, em "Como eu vejo o mundo".

Uma tese de doutorado exige em seu texto principal um estilo sintético e resumido no qual, em geral, se espera uma ênfase na linguagem técnica do assunto abordado; aqui, neste apêndice, porém, pretende-se fugir um pouco desta norma, mostrando-se por exemplo, citações que, embora nem um pouco fundamentais para o desenvolvimento básico do tema central da tese, têm por objetivo apresentar, de modo quase informal, algumas das idéias da cosmologia clássica e o uso, nela, de topologias não-triviais¹.

¹É claro que com isso há a possibilidade de entediar ou até mesmo ofender alguns

Além disso, cabe dizer que o propósito de se ter neste trabalho um breve resumo da teoria envolvida na cosmologia padrão está na suposição – talvez algo pretensiosa – de que o todo deste texto tenha uma certa completeza. Assim, aqui é resumida a teoria da relatividade geral e, como exemplo básico de seu uso em cosmologia, é mostrada uma forma algo incomum de obtenção da solução padrão da cosmologia, conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (nome substituído por sua abreviação FLRW, em todo o texto).

7.1 Resumo de relatividade geral

Num artigo em que expõe a teoria da relatividade geral, “*A base da teoria da relatividade geral*”, de 1916, Albert Einstein escreve [61]:

“(...) a teoria da relatividade especial não sai da mecânica clássica através do postulado da relatividade, mas através do postulado da constância da velocidade da luz *no vácuo*, de onde, em combinação com o princípio da relatividade especial, segue, do modo bem conhecido, a relatividade da simultaneidade, a transformação de Lorentz, e as leis relacionadas ao comportamento de corpos em movimento e relógios.”

Um conceito fundamental para a compreensão da relatividade especial é a de invariantes, quantidades independentes do sistema de coordenadas escolhido para se tomarem medidas físicas. Um desses invariantes, explicitado no parágrafo acima, é a velocidade da luz no vácuo, c ; outro, o intervalo ou elemento de linha,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 , \quad (7.1)$$

leitores da banca: a esses leitores peço desculpas, e que esqueçam esse apêndice; contudo, se houver outros leitores que queiram conhecer textos mais informais e introdutórios sobre os assuntos centrais desta tese posso sugerir as referências [58, 59, 60].

pode ser naturalmente obtido das transformações de Lorentz. É importante notar, tal como fez Hermann Minkowski, em 1908, numa citação bastante conhecida [61, 62],

“Os pontos de vista sobre o espaço e o tempo que pretendo apresentar-lhes provieram do terreno da física experimental, e aí reside sua força. São radicais. Daqui em diante, o espaço, por si só, e o tempo, por si só, estão condenados a desvanecer-se em meras sombras, e apenas um tipo de união dos dois conservará uma realidade independente.”

que há na relatividade a definição do espaço-tempo como uma entidade matemática quadridimensional, com as coordenadas do tempo e do espaço podendo ser representadas por uma matriz linha ou coluna que representa um tensor de primeira ordem, x^μ , onde o índice grego μ pode ter valores de 0 a 3; assim, de forma mais genérica, e usando-se o sistema de unidades naturais em que $c \equiv 1$, o intervalo se escreve como

$$ds^2 = dx^0 - dx^1 - dx^2 - dx^3 . \quad (7.2)$$

A relatividade geral amplia este conceito de intervalo pelo uso da geometria Riemanniana, expressa pela introdução, na expressão do intervalo, de um tensor de segunda ordem, $g_{\mu\nu}$, chamado por Einstein de ‘tensor fundamental’. Tal objeto de caráter geométrico, que pode ser representado por uma matriz quadrada 4×4 com componentes que são funções das coordenadas, hoje recebe o nome mais simples de tensor métrico ou métrica; na notação atual,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (7.3)$$

onde se usa a convenção de soma: índices repetidos indicam uma soma em todo o espectro de valores possíveis daqueles índices. A importância da métrica está na informação que ela contém, pois² [61]

²Deve ser ressaltado aqui que pode-se, nesse ponto, fazer uma pergunta simples – por que a métrica representa o campo gravitacional? – cuja resposta pode ser apenas que é a

“(...) as quantidades $g_{\sigma\tau}$ devem ser vistas do ponto de vista físico como sendo as quantidades que descrevem o campo gravitacional em relação ao sistema de referência escolhido.”

A idéia básica por trás da descrição de mundo dada pela relatividade geral está em que a geometria do espaço-tempo é moldada pela matéria e energia presentes, tal como uma folha de borracha pode ser moldada por pesos colocados sobre ela; as dificuldades matemáticas da teoria vêm do uso da geometria Riemanniana para descrição do espaço-tempo [64]:

“Já que o espaço-tempo é um espaço riemanniano, possui as suas propriedades geométricas, isto é, a sua curvatura, que varia em função da distribuição e do movimento da matéria: no espaço-tempo einsteniano, os corpos não se deslocam mais em linha reta, como no espaço usual, mas segundo geodésicas.”

Toda a parte matemática da teoria pode ser, portanto, estruturada a partir da métrica e de conceitos da geometria Riemanniana: com a métrica e suas primeira e segunda derivadas parciais podem ser construídas diversas quantidades geométricas, tensoriais, tais como o símbolo de Christoffel (ou conexão métrica),

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho} \left[\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right] \equiv \frac{1}{2}g^{\sigma\rho} [g_{\rho\nu,\mu} + g_{\mu\rho,\nu} - g_{\mu\nu,\rho}] \quad , \quad (7.4)$$

que permite a definição de uma derivada generalizada ou covariante

$$T_{\beta\dots;\mu}^{\alpha\dots} \equiv \nabla_{\mu} T_{\beta\dots}^{\alpha\dots} \equiv \partial_{\mu} T_{\beta\dots}^{\alpha\dots} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T_{\beta\dots}^{\nu\dots} + \dots - \Gamma_{\mu\beta}^{\nu} T_{\nu\dots}^{\alpha\dots} \quad , \quad (7.5)$$

os tensores de Ricci, $R_{\mu\nu}$, e Riemann (ou de curvatura), $R^{\sigma}{}_{\mu\rho\nu}$, tais que

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\rho} g_{\alpha\sigma} R^{\sigma}{}_{\mu\rho\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} \quad , \quad (7.6)$$

métrica que tem tal característica nesta descrição geométrica da gravitação, que é só uma das descrições possíveis. Sobre tal discussão é interessante ler o prefácio do livro de Steven Weinberg, ‘*Gravitation and Cosmology*’ [63], e ver descrições alternativas da gravitação, como o teleparalelismo, que é uma teoria de gauge equivalente à relatividade geral.

o escalar de curvatura, R , que nada mais é que o tensor de Ricci com seus dois índices contraídos,

$$R_{\rho}{}^{\rho} = R_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} , \quad (7.7)$$

e o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} . \quad (7.8)$$

Uma propriedade deste último tensor que o torna interessante é sua divergência nula,

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} \equiv 0 , \quad (7.9)$$

propriedade esta que, na relatividade geral, também é satisfeita pela métrica,

$$\nabla_{\mu} g_{\alpha\beta} = 0 , \quad (7.10)$$

e pelo tensor momento-energia $T^{\mu\nu}$, que representa o conteúdo de matéria e energia em consideração,

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} \equiv 0 . \quad (7.11)$$

Assim, pode-se considerar a igualdade relativa entre as duas quantidades $G^{\mu\nu}$ e $T^{\mu\nu}$, de modo que

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} , \quad (7.12)$$

sendo κ e Λ duas constantes, a primeira chamada constante de acoplamento e a segunda constante cosmológica. Tal equação, conhecida como Equação de Einstein, é, na verdade, um conjunto de equações diferenciais parciais acopladas, similar à equação de Poisson modificada

$$\nabla^2 \phi - \lambda \phi = 4\pi\kappa\rho , \quad (7.13)$$

tal como apontado pelo próprio Einstein.

Agora, de posse deste instrumental os próximos passos necessários neste processo para a obtenção de soluções cosmológicas são a ‘escolha’ de um tensor momento-energia adequado e de uma hipótese inicial para a métrica;

no caso cosmológico a métrica, como foi dito, deve ter sua parte espacial isotrópica e homogênea, em cada momento de tempo, o que em outras palavras, significa que ela deve ter curvatura espacial constante, restringindo, assim, as possibilidades de escolha.

A cosmologia padrão usa, além disso, o postulado de Weyl, que estabelece que o universo além de ser homogêneo e isotrópico possui matéria que pode ser representada por meio de um tensor de energia-momento bastante simples, descrevendo um fluido perfeito,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} , \quad (7.14)$$

onde ρ é a densidade da matéria presente no fluido, p é a pressão desse fluido, u_μ é a 4-velocidade (extensão da velocidade comum para o espaço-tempo 4-dimensional) desse fluido e $g_{\mu\nu}$ é, novamente, a métrica do espaço-tempo.

Portanto, a cosmologia moderna usa três ingredientes básicos na sua receita de evolução do universo [7]:

- a relatividade geral, que diz que a matéria curva o espaço-tempo, idéia que pode ser ‘traduzida’ matematicamente na equação de Einstein;
- o princípio cosmológico, que diz que o universo é isotrópico e homogêneo;
- o princípio de Weyl, que diz que a matéria no universo se distribui como num fluido perfeito.

Misturar esses ingredientes corretamente não é difícil; é apenas uma questão de técnica matemática, e não é nada que exija a presença de um *chef* muitíssimo talentoso.

7.2 Obtenção da métrica de FLRW

Como exemplo de uso da relatividade geral pode-se obter a métrica de FLRW a partir da métrica de Minkowski,

$$ds^2 = dt^2 - [dx^2 + dy^2 + dz^2] , \quad (7.15)$$

que é a que serve de base para a relatividade restrita; em coordenadas esféricas tal métrica se escreve

$$ds^2 = dt^2 - [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] . \quad (7.16)$$

Este simples exemplo de expressão de intervalo pode ser reescrito ainda uma outra vez, pondo-se

$$d\omega = \frac{dr}{r} , \quad (7.17)$$

de modo que

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\omega} [d\omega^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] . \quad (7.18)$$

Note-se que como $0 < r < \infty$, então $-\infty < \omega < \infty$. De acordo com o apresentado no início deste resumo de relatividade geral, pode-se tentar uma possível generalização dessa expressão fazendo-se uma substituição ‘especial’,

$$e^\omega \rightarrow a(t) b(\omega) , \quad (7.19)$$

de forma que

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) b^2(\omega) [d\omega^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] . \quad (7.20)$$

Para verificar que tipo de solução tal generalização irá produzir nas Equações de Einstein tem-se que calcular um punhado de componentes do tensor de Riemann; uma forma mais simples de obter tais componentes consiste em usar o método de Cartan [25, 26, 65], onde

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu} \omega^\mu \omega^\nu , \quad (7.21)$$

sendo ω^μ um conjunto de 1-formas tal que

$$\gamma_{\mu\nu} = \text{diag}[1, -1, -1, -1] , \quad (7.22)$$

isto é,

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^i)^2 . \quad (7.23)$$

Neste método o grupo de formas é manipulado de modo a obter-se no primeiro passo sua derivada exterior, $d\omega^\nu$, de onde retiram-se os 'coeficientes de rotação' ω^ν_μ :

$$d\omega^\nu = -\omega^\nu_\mu \wedge \omega^\mu . \quad (7.24)$$

Tais coeficientes de rotação são eles próprios também 'derivados', para obter-se os coeficientes θ^ν_μ que se relacionam diretamente com as componentes do tensor de Riemann:

$$\theta^\nu_\mu = d\omega^\nu_\mu + \omega^\nu_\rho \wedge \omega^\rho_\mu = \frac{1}{2} R^\nu_{\mu\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta . \quad (7.25)$$

A partir deste ponto tem-se tudo que se necessita para resolver as equações de Einstein.

No caso particular em estudo pode-se usar o grupo de tetradas

$$\omega^\mu = (dt, abd\omega, abd\theta, ab \sin \theta d\varphi) \quad (7.26)$$

e, assim,

$$d\omega^0 = 0 , \quad (7.27)$$

$$d\omega^1 = \frac{\dot{a}}{a} \omega^0 \wedge \omega^1 , \quad (7.28)$$

$$d\omega^2 = \left[\frac{\dot{a}}{a} \omega^0 + \frac{b'}{ab^2} \omega^1 \right] \wedge \omega^2 \quad (7.29)$$

e

$$d\omega^3 = \left[\frac{\dot{a}}{a} \omega^0 + \frac{b'}{ab^2} \omega^1 + \frac{\cot \theta}{ab} \omega^2 \right] \wedge \omega^3 , \quad (7.30)$$

de onde sai que

$$\omega^\mu_\nu = \begin{bmatrix} 0 & H\omega^1 & H\omega^2 & H\omega^3 \\ H\omega^1 & 0 & -a^{-1}b^{-1}B\omega^2 & -a^{-1}b^{-1}B\omega^3 \\ H\omega^2 & a^{-1}b^{-1}B\omega^2 & 0 & -\cot\theta a^{-1}b^{-1}\omega^3 \\ H\omega^3 & a^{-1}b^{-1}B\omega^3 & \cot\theta a^{-1}b^{-1}\omega^3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.31)$$

sendo que $H \equiv \dot{a} a^{-1}$, $B \equiv b'b^{-1}$, $\cdot \equiv \partial/\partial t$ e $' \equiv \partial/\partial\omega$.

O próximo passo lógico consiste em obter as derivadas externas dos componentes dessa forma:

$$d\omega^0_1 = \frac{\ddot{a}}{a}\omega^0 \wedge \omega^1, \quad (7.32)$$

$$d\omega^0_2 = \left(\frac{\ddot{a}}{a}\omega^0 + \frac{\dot{a} b'}{a^2 b^2}\omega^1 \right) \wedge \omega^2, \quad (7.33)$$

$$d\omega^0_3 = \left(\frac{\ddot{a}}{a}\omega^0 + \frac{\dot{a} b'}{a^2 b^2}\omega^1 + \frac{\dot{a} \cot\theta}{a^2 b}\omega^2 \right) \wedge \omega^3, \quad (7.34)$$

$$d\omega^2_1 = \frac{1}{a^2 b^2} \left[\frac{b''}{b} - \left(\frac{b'}{b} \right)^2 \right] \omega^1 \wedge \omega^2, \quad (7.35)$$

$$d\omega^3_1 = \frac{1}{a^2 b^2} \left\{ \left[\frac{b''}{b} - \left(\frac{b'}{b} \right)^2 \right] \omega^1 + \frac{b'}{b} \cot\theta \omega^2 \right\} \wedge \omega^3, \quad (7.36)$$

$$d\omega^3_2 = -\frac{1}{a^2 b^2} \omega^2 \wedge \omega^3, \quad (7.37)$$

e daí obter as componentes do tensor de Riemann,

$$R^0_{101} = R^0_{202} = R^0_{303} = \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (7.38)$$

$$R^1_{212} = R^1_{313} = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{1}{a^2 b^2} \left[\frac{b''}{b} - \left(\frac{b'}{b} \right)^2 \right], \quad (7.39)$$

$$R^2_{323} = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{a^2 b^2} \left[1 - \left(\frac{b'}{b} \right)^2 \right], \quad (7.40)$$

as componentes do tensor de Ricci,

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (7.41)$$

$$R_{11} = \frac{\ddot{a}}{a} - 2 \left\{ \frac{1}{a^2 b^2} \left[\frac{b''}{b} - \left(\frac{b'}{b} \right)^2 \right] - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right\}, \quad (7.42)$$

$$R_{22} = R_{33} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left[\frac{1}{a^2 b^2} \left(\frac{b''}{b} - 1 \right) - 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right], \quad (7.43)$$

e o escalar de curvatura

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] + \frac{2}{a^2 b^2} \left[2 \frac{b''}{b} - 1 - \left(\frac{b'}{b} \right)^2 \right]. \quad (7.44)$$

Tais resultados podem ser substituídos nas equações de Einstein sem problema, considerando-se que o referencial cosmológico é aquele próprio do fluido perfeito, em que $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e, neste caso, tem-se também $g_{00} = 1$, de modo que

$$T_{00} = \rho \quad (7.45)$$

e

$$T_{ii} = -p g_{ii}. \quad (7.46)$$

Além disso, da igualdade entre g_{11} e g_{22} sai que $T_{11} = T_{22}$ ou $G_{11} = G_{22}$, isto é,

$$2 \left[\frac{b''}{b} - \left(\frac{b'}{b} \right)^2 \right] = \left(\frac{b''}{b} - 1 \right), \quad (7.47)$$

enquanto que de $G_{00} = 8\pi\rho$ obtém-se

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{1}{a^2 b^2} \left[2 \frac{b''}{b} - 1 - \left(\frac{b'}{b} \right)^2 \right] = 8\pi\rho + \Lambda. \quad (7.48)$$

Estas duas equações fornecem tudo que se pode esperar de $a(t)$ e $b(\omega)$.

Uma solução simples é obtida pondo-se uma constante de ‘separação’, k ,

$$\left[3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 8\pi\rho - \Lambda \right] a^2 = \frac{1}{b^2} \left[2 \frac{b''}{b} - 1 - \left(\frac{b'}{b} \right)^2 \right] = -3k . \quad (7.49)$$

Assim, as equações diferenciais a se resolver são a equação de Friedmann,

$$\left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{8\pi\rho + \Lambda}{3} \right] a^2 = -k , \quad (7.50)$$

e o sistema dado pelas equações

$$\frac{b''}{b} - \left(\frac{b'}{b} \right)^2 = 1 - \frac{b''}{b} - 3kb^2 \quad (7.51)$$

e

$$\frac{b''}{b} - \left(\frac{b'}{b} \right)^2 = \left(\frac{b'}{b} \right)^2 - 1 . \quad (7.52)$$

Notando-se a igualdade

$$\left(\frac{b'}{b} \right)' = \frac{b''}{b} - \left(\frac{b'}{b} \right)^2 \quad (7.53)$$

reescreve-se a equação (7.52) como

$$\left(\frac{b'}{b} \right)' = \left(\frac{b'}{b} \right)^2 - 1 , \quad (7.54)$$

uma equação diferencial cujo resultado é

$$\frac{b'}{b} = \frac{1 + a_0 e^{2\omega}}{1 - a_0 e^{2\omega}} . \quad (7.55)$$

Assim,

$$b = \frac{b_0 e^{\omega}}{1 - a_0 e^{2\omega}} . \quad (7.56)$$

Substituindo essa solução na equação do sistema original que envolve k , equação (7.51), ou na equivalente

$$\left(\frac{b'}{b}\right)^2 = 1 - kb^2 \quad (7.57)$$

obtida por soma de (7.51) com (7.52) multiplicada por -2 , pode-se ver que

$$a_0 = -k \left(\frac{b_0}{2}\right)^2, \quad (7.58)$$

ou seja,

$$b = \frac{4b_0 e^\omega}{4 + k(b_0 e^\omega)^2}. \quad (7.59)$$

Usando agora que $r = b(\omega) - e$, conseqüentemente,

$$dr = b' d\omega = b\sqrt{1 - kb^2} d\omega \quad (7.60)$$

– reobtem-se a expressão tradicional de FLRW em termos da coordenada radial r ,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (7.61)$$

Note-se que essa solução só especifica a geometria do espaço, e não a sua topologia. Assim, espaços com topologias diferentes da trivial, finitos e sem fronteiras, mesmo que inomogêneos³, também se encaixam nessa solução de FLRW, algo que é mencionado em poucos textos básicos de relatividade e cosmologia⁴.

A idéia do uso de espaços compactos, com topologia não-trivial, em cosmologia, foi 'pressentida' pelo próprio Albert Einstein, em um artigo de 1917, "*Considerações cosmológicas sobre a teoria da relatividade geral*"⁵, em que ele

³Uma interessante discussão sobre este assunto é apresentada em [66].

⁴O assunto é mencionado, por exemplo, nas referências [8, 26, 67]

⁵É nesse artigo que Einstein introduz a constante cosmológica para manter o seu modelo de universo estático.

se preocupa com o bom comportamento da relatividade geral em condições que incluem como fronteiras do universo o infinito [61]:

“(...) eu não consegui formular condições de fronteira para a infinitude espacial [do universo]. Contudo, há ainda uma possível escapatória (...). Pois se fosse possível ver o universo como um contínuo que é finito (fechado) com respeito às suas dimensões espaciais, nós não teríamos necessidade nenhuma de tais condições de fronteira.”

Em um texto de divulgação científica [32] Einstein volta a esta idéia:

“(...) é possível imaginar espaços fechados que não possuem limites. Entre estes, o espaço esférico (ou o elíptico) destaca-se por sua simplicidade, já que todos os seus pontos são equivalentes. Coloca-se então, a astrônomos e físicos, a interessantíssima questão de saber se o Universo em que vivemos é infinito ou, à maneira do mundo esférico, finito.”

Muito embora Einstein em ambos os textos estivesse defendendo sua predileção por um universo fechado esférico, a questão final desta última citação ainda hoje é válida⁶.

⁶Um histórico do uso de topologias não-triviais em cosmologia é dado em [68].

Bibliografia

- [1] Nussenzveig, H.M. – “*Curso de Física Básica*”, vol. 1, Edgard-Blucher, São Paulo, 1981.
- [2] De Lorenci, V.A.; Martin, J.; Pinto-Neto, N.; Soares, I.D. – *Phys. Rev. D* **56** (2), 3329 (1997); gr-qc 9701024 (1997).
- [3] Brody, D.E.; Brody, A.R. – “*As sete maiores descobertas científicas da história*”, Companhia das Letras, São Paulo, 2000.
- [4] Silk, J. – “*A Short History of the Universe*”, Scientific American Library, 1994.
- [5] Kolb, E.W.; Turner, M.S. – “*The Early Universe*”, Addison-Wesley, 1993.
- [6] Landau, L.; Lifshitz, E.M. – “*The classical theory of fields*”, Pergamon Press, 1983.
- [7] D’Inverno, R. – “*Introducing Einstein’s Relativity*”, Oxford University Press, 1992.
- [8] Rindler, W. – “*Essential Relativity*”, Springer-Verlag, Berlim, 1977.
- [9] Ratra, B.; Peebles, P.J.E. – *Phys. Rev. D* **37**, 3406 (1998).
- [10] Islam, J.N. – “*An introduction to mathematical cosmology*”, Cambridge, 1991.

- [11] Adams, F.C. *et alli* – *Phys. Rev.* **D47**, (1993) 426.
- [12] Ellis, G.F.R.; Madsen, M.S. – *Class. Quant. Grav.* **8**, 667 (1991).
- [13] Hawking, S.W.; Ellis, G.F.R. – “*The large scale structure of space-time*”, Cambridge, 1973.
- [14] Birrell, N.D.; Davies, P.C.W. – “*Quantum Field Theory in Curved Space*”, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [15] Gron, O.; Eriksen, E. – *Int. J. Mod. Phys.* **D4**, 115 (1991).
- [16] Gott III, J.R. – *Nature* **295**, 304 (1982).
- [17] Wald, R.M. – “*General Relativity*”, Chicago University Press, 1980.
- [18] Vilenkin, A. – *Phys. Lett.* **B117**, 25 (1982).
- [19] Vilenkin, A. – *Phys. Rev.* **D27**, 2848 (1983).
- [20] Hartle, J.B.; Hawking, S.W. – *Phys. Rev.* **D28**, 2960 (1983).
- [21] Elbaz, E. – “*Quantum: the quantum theory of particles, fields and particles*”, Springer, 1998.
- [22] Atkatz, D. – *Am. J. Phys.* **62**, 619 (1994).
- [23] Gott, J.R.; Li, Li-Xin – *Phys. Rev.* **D58**, 023501 (1998).
- [24] DeWitt, B.S. – *Phys. Rev.* **160** (5), 1113 (1967).
- [25] Ryan, M.P; Shepley, L.C. – “*Homogeneous relativistic cosmologies*”, Princeton, New Jersey, 1975.
- [26] Misner, C.W.; Thorne, K.S.; Wheeler, J.A. – “*Gravitation*”, Freeman, San Francisco, 1973.

- [27] Hartle, J.B. – “*The Quantum Mechanics of Cosmology*”, in Coleman, S. (ed.) – “*Quantum cosmology and baby universes*”, World Scientific, 1991.
- [28] Atkatz, D.; Pagels, H. – *Phys. Rev.* **D25**, 2065 (1982).
- [29] Norbury, J.W. – *Eur. Jour. Phys.* **19**, 143 (1998).
- [30] Kuchar, K.V.; Torre, C.G. – *Phys. Rev.* **D43** (2), 419 (1991).
- [31] Titus Lucretius Caro, in Rovelli, C. – *Phys. Rev.* **D43** (2), 442 (1991).
- [32] Einstein, A. – “*A teoria da relatividade especial e geral*”, Contraponto, Rio de Janeiro, 1999.
- [33] de Bernardis, P. – astro-ph 0004404 (2000).
- [34] *Superinteressante* 154, Ed. Abril, São Paulo, 2000.
- [35] *Science et Vie* 993, Excelsior Publications, Paris, 2000.
- [36] *Astronomy* 28 (8), Kalmbach Publishing Co., Waukesha, 2000.
- [37] Rucker, R. – “*The fourth dimension and how to get there*”, Penguin, Londres, 1986.
- [38] Gutiérrez, G.; Yáñez, J.M. – *Am. J. Phys.* **65** (8), 739 (1997).
- [39] Cornish, N.J.; Spergel, D.N. – math.DG 9906017 (1999).
- [40] Cornish, N.J.; Spergel, D.; Starkman, G. – astro-ph 9708225 (1997).
- [41] Lachièze-Rey, M.; Luminet, J.P. – *Phys. Rep.* **254**, 135 (1995).
- [42] Jones, H.F. – “*Groups, representations and physics*”, Institute of Physics Publishing, 1994.
- [43] Balazs, N.L.; Voros, A. – *Phys. Rep.* **143**, 109 (1986).

- [44] Frankel, T. – “*The geometry of physics: an introduction*”, Cambridge University Press, 1997.
- [45] Thurston, W.P. – “*Three-dimensional geometry and topology*”, vol. 1, Princeton University Press, 1997.
- [46] *SnapPea*, software obtido gratuitamente de www.northnet.org/weeks.
- [47] e Costa, S.S. – “*Study of the Helmholtz equation in compact hyperbolic spaces*”, não-publicado (2000).
- [48] e Costa, S.S. – *Phys. Rev. D* **62** (4), 047303 (2000).
- [49] Coxeter, H.S.M. – “*Non-euclidean geometry*”, 5ª ed., University of Toronto Press, 1965.
- [50] Coxeter, H.S.M. – “*Twelve geometric essays*”, Southern Illinois University Press, 1968.
- [51] Coolidge, J.L. – “*The elements of non-euclidean geometry*”, Oxford University Press, 1927.
- [52] Dowker, H.F.; Garcia, R.S. – *Class. Quant. Grav.* **15**, 1859 (1998).
- [53] e Costa, S.S.; Fagundes, H.V. – gr-qc 9911110 (1999).
- [54] Itzykson, C.; Zuber, J.B. – “*Quantum Field Theory*”, McGraw-Hill, 1985.
- [55] e Costa, S.S.; Fagundes, H.V. – *Gen. Rel. Grav.* **31**, 863 (1999).
- [56] Santini, E.S. – gr-qc 005092 (2000).
- [57] Gaussmann, E. – “*Polarização da luz e outros efeitos em universos múltiplamente conexos*”, IFT-T.005/00 (2000).
- [58] Thurston, W.P.; Weeks, J.P. – *Sci. Am.* **251** (1), 94 (1984).

- [59] Halliwell, J.J. – *Sci. Am.* **265** (6), 28 (1991).
- [60] Luminet, J.P.; Starkman, G.D.; Weeks, J.R. – *Sci. Am.* **280** (4), 68 (1999).
- [61] Einstein, A.; Lorentz, H. A.; Weyl, H.; Minkowski, H. – “*The principle of relativity*”, Dover, New York, 1952.
- [62] Pais, A. – “*Sutil é o Senhor...: a ciência e a vida de Albert Einstein*”, Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 1995.
- [63] Weinberg, S. – “*Gravitation and Cosmology*”, John Wiley and Sons, New York, 1972.
- [64] Rival, M. – “*Os grandes experimentos científicos*”, Jorge Zahar Ed., Rio de Janeiro, 1997.
- [65] Hughston, L.P.; Tod, K.P. – “*An Introduction to General Relativity*”, Cambridge University Press, 1990.
- [66] Fagundes, H. – *Gen. Rel. Grav.* **24** (2), 199 (1992).
- [67] Ellis, G.F.R.; Williams, R.M. – “*Flat and curved spacetimes*”, Oxford University Press, Oxford, 1988.
- [68] Luminet, J.P. – gr-qc 9804006 (1998).

