Symétries, courants et holographie des spins élevés

Elisa Meunier

UNIVERSITÉ FRANÇOIS RABELAIS DE TOURS

École Doctorale Mathématiques, Informatique, Physique Théorique et Ingénierie des Systèmes

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique

THÈSE présentée par :

Elisa MEUNIER

soutenue le : 22 novembre 2012

pour obtenir le grade de : Docteur de l'Université François - Rabelais de Tours

Discipline/ Spécialité : Physique Théorique

Symétries, courants et holographie des spins élevés

THÈSE DIRIGÉE PAR :

BEKAERT Xavier	Maître de conférences HDR, Université François Rabelais de Tours

RAPPORTEURS :

BARNICH Glenn	Directeur de recherche (FNRS), Université Libre de Bruxelles
MOURAD Jihad	Professeur, Université de Paris 7 (Paris Diderot)

JURY :

BARNICH Glenn	Directeur de recherche (FNRS), Université Libre de Bruxelles
BEKAERT Xavier	Maître de conférences HDR, Université François Rabelais de Tours
BOULANGER Nicolas	Chercheur qualifié (FNRS), Université de Mons
HORVATHY Peter	Professeur, Université François Rabelais de Tours

A ma Mère, à mon Père,
Et à ma Grand-mère...

Remerciements

L'aventure de la thèse se termine ici. Ces quelques lignes sont l'occasion pour moi de remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'accomplissement de ce travail, mais également ceux qui ont été présents tout au long de ce chemin : pendant ces huit ans d'études, et plus particulièrement pendant les trois dernières années, en espérant pouvoir continuer à compter sur votre soutien pour la suite de mes choix professionnels. D'ores et déjà, merci à ceux que j'aurai malencontreusement oubliés.

"Le délire c'est la théorie d'un seul, tandis que la théorie est le délire de plusieurs."
François Roustanf

J'exprime la plus grande gratitude à mon directeur de thèse Xavier Bekaert sans qui rien n'aurait été possible. Faire une thèse était un rêve : Merci de m'avoir donner l'opportunité de le réaliser. Merci d'avoir accompagné mes premiers pas dans la recherche, d'avoir balisé ma route et de m'avoir guidée à chaque étape. Merci du temps que tu m'as consacré, de ta patience et de ton enthousiasme. Merci de m'avoir fait partagé ta vaste culture des spins élevés. Merci de tes conseils avisés tant sur les techniques de calcul que sur la rédaction scientifique. Merci, enfin, pour la relecture de ce mémoire.

J'exprime toute ma reconnaissance à mes deux rapporteurs Glenn Barnich et Jihad Mourad qui ont accepté de consacrer une partie de leur temps à relire mon manuscrit et examiner mon travail de thèse.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Nicolas Boulanger, Glenn Barnich et Peter Horvathy qui m'ont fait l'honneur d'accepter de participer à mon jury.

Je tiens à remercier également les directeurs (actuels et passés) du Laboratoire de Mathématiques et Physique théorique : Ahmad El Soufi, Amaury Mouchet, Emmanuel Lesigne et Hector Giacomini ainsi qu'à ceux de la fédération Denis Poisson, Jérome Le Rousseau et Guy Barles pour leur aide dans les démarches administratives mais surtout pour m'avoir permis de m'investir dans la vie du laboratoire. J'exprime mes remerciements à l'ensemble du personnel du laboratoire pour leur accueil et pour l'ambiance chaleureuse et détendue qui règne dans les locaux.

Ma thèse n'a pas seulement comporté un volet recherche, l'enseignement y a joué un rôle important. C'est pourquoi je voudrais remercier l'ensemble des membres du département

de physique ainsi que les directeurs pour m'avoir permis d'enseigner et ainsi de transmettre ma passion pour la physique aux étudiants.

J'ai eu maintes occasions de participer à des événements en dehors des murs du laboratoire : journées des doctorants, de la fédération, salons étudiants, fêtes de la science... Ces moments conviviaux m'ont enrichie, merci aux organisateurs et aux participants.

Aujourd'hui en poste d'ATER, je n'y ai pourtant pas toujours cru : merci à Emmanuel Lesigne, Patrice Limelette et Amaury Mouchet pour le soutien de ma candidature.

De nombreuses personnes ont participé à l'accomplissement de ce travail et ont été présentes au quotidien. Ces trois années n'auraient sûrement pas été aussi faciles sans la précieuse aide des secrétaires Nathalie Doris, Anouchka Lépine, Bernadette Vallée et Anne-Marie Chenais qui contribuent au bon fonctionnement de ces structures et à la sérénité du déroulement des thèses.

En plus de son aide dans la recherche de bouquins introuvables, Sandrine Renaer-Ricetti est surtout devenue, au fil des discussions, plus qu'une simple collègue. Ta formidable amitié me manquera.

Impossible de travailler aujourd'hui sans ordinateurs, et pourtant ils sont souvent capricieux ! Je ne m'en serai jamais sortie sans nos "SUPER" informaticiens : Olivier Thibault et Romain Vallet, toujours dévoués et disponibles, patients et calmes, efficaces et persévérants, et toujours de bonne humeur ! ! ! J'ai pu régulièrement profiter de l'expertise d'Hervé Choplin, Stam Nicolis et Amaury Mouchet pour m'orienter dans l'univers infini que représente LaTeX et dans lequel je me suis souvent perdue. Un énorme merci à vous tous !

Merci à tous les doctorants, ATER et post-docs qui sont passés au labo, pour les bons moments passés ensemble et le partage de nos cultures très variées et en particulier à ceux qui ont séjourné plus ou moins longtemps, dans le bureau E1340 : Ahn, Tai, Hung, Steve, Kévin, Mauricio, Yinna, Asma, Chuong et Masoomeh.

Une mention très spéciale à Masoomeh, ma co-bureau avec qui j'ai (presque) tout partagé durant ces trois années et qui est devenue bien plus : une amie, une confidente, une sœur ;) Un grand merci pour avoir écouté toutes mes péripéties et m'avoir apporté un autre regard, un peu plus sage ;).

Un remerciement particulier va à celui qui sera, longtemps encore, considéré comme un "doctorant" ;) Romain Gicquaud. Pour toutes ces discussions scientifiques, pour la relecture de ce manuscrit et aussi pour tous les jeux de mots autour des parties de billard, merci !

Le quotidien a souvent été fait de pauses déjeuner : merci pour toutes les discussions enrichissantes ... et de pauses café (ou plutôt thé !) : un merci amical et très vif à ceux avec qui je les ai partagées et en particulier Romain, Sandrine, Sylvain, Mauricio, Masoomeh, Chady et Ola : fous rires, discussions pro et persos... que de bons moments resteront gravés à jamais dans ma mémoire !

Le doctorat, c'est également de nombreuses rencontres au sein de l'université, et lors de conférences, d'écoles d'été ou de séjours dans d'autres laboratoires.. !

Réunions et formations de la maison de l'orientation et de l'insertion professionnelle, du centre d'initiation aux métiers de l'enseignement supérieur, et de l'école doctorale ont jalonné mon parcours. Merci aux organisateurs (en particulier à Anne BROUARD) et autres participants croisés à ces occasions.

J'ai eu la chance de collaborer avec Sergey Moroz et d'avoir des discussions très constructives avec Nicolas Boulanger et Mitya Ponomarev. J'adresse un clin d'oeil également aux personnes rencontrées à Modave et particulièrement à Pierre-Henry Lambert. Merci pour ces échanges, ces séjours, ces découvertes.

Merci à mes enseignants de DEUG, de licence et de master des universités de Poitiers, du Mans et de Tours qui m'ont parfois redonné la motivation nécessaire pour poursuivre ces études. Je remercie sincèrement Hector Giacomini pour sa confiance, son attention lors de la réunion de rentrée de master 1, ses cours passionnants de mécanique quantique et de théorie des champs et son soutien tout au long de ces années.

Tout ce travail n'aurait pas été possible sans le soutien de mes proches.

"Le hasard, c'est Dieu qui se promène incognito." Albert Einstein

Mes remerciements les plus profonds s'adressent à une personne extraordinaire : Pascal. Les quelques phrases que je me permets ici de t'adresser ne suffisent pas exprimer tout le respect, l'admiration et l'estime que je te porte. Je ne serai évidemment pas la même si nos routes ne s'étaient pas croisées. Merci pour nos très longues discussions qui m'ont apporté un regard différent sur la vie et sur les sciences, pour les nombreux entraînements qui me permettent de découvrir de nouvelles perceptions, et pour ta fabuleuse amitié ! Mille mercis !

"Le bonheur est une science qui s'apprend quotidiennement." Ken Keyes

La vie m'a amené à faire des belles rencontres : à vous, mes amis merci pour tous les bons moments partagés, les fous rires, les délires, les sorties improvisées ; pour les discussions interminables, les échanges constructifs (respect à ceux qui ont retenu quelques mots voire quelques notions de mon travail de recherche.. !), , tous les moments inoubliables, mais aussi pour votre chaleureuse présence à mes côtés, votre soutien sans faille, votre attentive écoute afin de surmonter les moments plus difficiles. Merci pour l'énergie et le bonheur que je puise dans votre présence ! Chaque relation est unique mais j'aimerai cependant, sans pour autant oublier les autres, en particulariser quatre d'entre elles : Merci Cécile, Pauline, Masoomeh et Sarah pour l'amitié que nous avons pu forger au fil des années, en souhaitant qu'elle dure éternellement. C'est rassurant de savoir que je peux compter sur vous !

"Il faut entretenir la vigueur du corps pour conserver celle de l'esprit." Vauvenargues

Mes journées de travail auraient été inconcevables sans la perspective de me dégourdir les jambes... et les zygomatiques lors des cours et des soirées dansantes (principalement au Paradis Vert) ! Merci à tous les amis danseurs, à tous les profs qui m'ont transmis leur passion et un petit bout de leur technique, aux membres de l'association "Swing on the Rock" non seulement pour leur dynamisme mais surtout pour leur humour et en particulier au quatuor : Babette, Bruno, Charly et Cendrine. Je n'oublierai pas les nombreuses journées que j'ai terminées en votre compagnie.

"Vivre, c'est changer du temps en expérience." Caleb Gattegno

Qu'il me soit également permis de remercier les membres de la grande famille de l'AOKI Bio énergie. A Tours, à Murcia ou ailleurs, nous avons partagé nos parcours si différents qui, pourtant, nous invitent à regarder tous dans la même direction. Vous avez contribué à changer radicalement ma vie et ensemble nous avons fait proliférer nos (gros) grains de folie ! Merci à vous, pour l'amitié qui nous relie.

"L'enfance est le sol sur lequel nous marcherons toute notre vie." Lya Luft

Je n'oublie évidemment pas ma famille : merci pour votre présence bienveillante, votre soutien inestimable et vos encouragements inlassables.

Mes plus belles pensées vont à ma grand mère pour la complicité que nous partageons plus que jamais. A la grande dame que tu es, en espérant avoir un jour ta force de caractère. Je tente d'exprimer ici toute l'estime, le respect, l'admiration que j'ai pour toi.

Mes derniers remerciements s'adressent à ceux qui, depuis le tout début, contribuent à ma réussite : à vous, mes parents pour votre infaillible confiance, votre indéfectible soutien et surtout pour toutes les valeurs que vous m'avez transmises. J'espère que vous voyez dans ce travail le résultat de vos efforts également. Merci pour l'immense amour que vous me témoignez.

Résumé

La théorie des spins élevés est le domaine de la physique théorique au centre de cette thèse.

Outre une introduction présentant le contexte général de la naissance de cette théorie, ce manuscrit de thèse regroupe trois études récentes dans ce domaine. Une attention particulière sera portée aux symétries, aux courants et à l'holographie.

La première partie est axée sur les ingrédients permettant la construction de vertex cubiques entre un champ scalaire de matière et un champ de jauge de spin élevé dans un espace-temps à courbure constante. La méthode de Noether indique comment construire ces interactions à partir des courants conservés, dont on peut condenser l'écriture en utilisant les fonctions génératrices. Le formalisme ambiant est le principal aspect de ce calcul puisqu'il le facilite et en permet la simplification.

Dans un second temps, nous préparons les éléments pour un futur test de la correspondance holographique à l'ordre cubique voire quartique en la constante de couplage. Plus précisément, nous révisons en détail le calcul de certains propagateurs, ce qui nous mène à calculer les fonctions à trois points impliquant deux champs scalaires.

La dernière partie, bien que concernant toujours l'holographie des spins élevés, traite de la physique non-relativiste. Les symétries et les courants d'un gaz parfait/unitaire de Fermi y sont étudiés. En particulier, nous prouvons que l'algèbre maximale de symétrie de l'équation de Schrödinger est l'algèbre de Weyl. Le lien entre physiques relativiste et non-relativiste est obtenu grâce à la réduction dimensionnelle de Bargmann. L'holographie des spins élevés non relativistes est également évoquée.

Mots clés : Symétries, méthode de Noether, courants conservés, espace-temps de courbure constante, formalisme ambiant, holographie, correspondance AdS/CFT, spins élevés, gaz parfait/unitaire de Fermi.

Abstract

The higher spin theory is the field of theoretical physics at the center of this thesis.

Besides an introduction presenting the general context of the birth of this theory, this PhD thesis consists of three recent studies in this area. Particular attention will be paid to symmetries, currents and holography.

The first part focuses on the ingredients for the construction of cubic vertices between a scalar matter field and a higher spin gauge field in a constant curvature space-time. Noether's method describes how to build the interactions from conserved currents, whose writing may be condensed using generating functions. Ambient formalism is the main aspect of this calculation since it allows simplification.

In a second step, we prepare the around for a future test of the holographic correspondence in the cubic or quartic order in the coupling constant. More specifically, we review in detail the computation of some propagators, which leads us to calculate three-point functions involving two scalar fields.

The last part, although always on the higher spin holography, deals with non-relativistic physics. Symmetries and currents of an ideal or unitary Fermi gas are studied. In particular, we prove that the maximal symmetry algebra of Schrödinger equation is the Weyl algebra. The link between relativistic and non-relativistic physics is obtained by Bargmann's dimensional reduction. The higher spin nonrelativistic holography is also discussed.

Keywords : Symmetries, Noether method, conserved currents, spacetime of constant curvature, ambient formalism, holography, AdS/CFT correspondence, higher spin, ideal/ unitary Fermi gas.

Table des matières

Notations

- Φ : champ scalaire dans l'espace ambiant
- ϕ : champ scalaire dans l'intérieur de l'espace-temps de courbure constante (par exemple l'espace d'anti de Sitter AdS)
- ϕ_0 : valeur du champ scalaire au bord d'AdS
- φ : champ scalaire dans la théorie conforme des champs au bord d'AdS

- X^A : coordonnées cartésiennes ambiantes d'un point d'AdS
- x^μ : coordonnées d'un point d'AdS
- $x = (z, \vec{x})$: coordonnées de Poincaré d'un point d'AdS
- X' : coordonnées ambiantes d'un point du bord
- $\vec{x'}$: coordonnées d'un point du bord

- Δ : poids ou dimension conforme (symbole parfois utilisé pour le laplacien)
- n : dimensions d'AdS (pour la première partie de cette thèse)
- $d+1$: dimensions d'AdS (pour la seconde partie de cette thèse)

- $:=$: égalité de définition
- $\approx$: égalité faible (égalité sur la couche de masse, c'est-à-dire utilisée dans une équation qui est vérifiée seulement lorsque les équations de mouvement le sont également)
- $\sim$: équivalence entre deux termes à un terme radial près
- $\longleftrightarrow$: correspondance entre objets de l'espace-temps de courbure constante et objets de l'espace ambiant

- $\mathcal{L}$: densité lagrangienne ou lagrangien
- $\mathcal{L}_0$: lagrangien initial libre (on dit aussi quadratique) dans le couplage champ de matière/champ de jauge
- $\mathcal{L}_1$: lagrangien du couplage minimal (cubique)
- $\mathcal{L}_2$: lagrangien à l'ordre supérieur (quartique)

- $\tilde{\delta}_\zeta$: variation totale (des coordonnées et du champ) de paramètre infinitésimal ζ
- δ_ζ : variation de paramètre infinitésimal ζ soit des coordonnées d'espace-temps soit du champ seulement
- $\mathcal{O}(x^n)$: terme d'ordre n en x

- $\mathbb{S}^n$: sphère à n dimensions
- $\mathcal{M}_n$: variété (ou hypersurface) de dimension n de courbure constante
- $(A)dS_n$: espace-temps de (d'anti) de Sitter de dimension n
- $EAdS_n$: espace d'anti de Sitter euclidien de dimension n
- $\mathbb{H}_n$: espace hyperbolique de dimension n
- $\mathbb{R}^D$: espace plat ambiant à $D = n + 1$ dimensions
- $\mathbb{R}_0^D$: espace plat ambiant à D dimensions, privé de l'origine

- $t_{\mu_1 \dots \mu_r}$: tenseur covariant d'ordre r dans l'espace-temps de courbure constante
- $T_{A_1 \dots A_r}$: tenseur covariant d'ordre r dans l'espace ambiant
- $T_{\mu\nu}$: tenseur énergie-impulsion
- (AB) : symétrie selon ces deux indices de poids 1 ; $T_{(AB)} = \frac{1}{2}(T_{AB} + T_{BA})$
- $[AB]$: antisymétrie selon ces deux indices de poids 1 ; $T_{[AB]} = \frac{1}{2}(T_{AB} - T_{BA})$

- $\eta_{\mu\nu}$: tenseur métrique plat de l'espace-temps de Minkowski
- $g_{\mu\nu}$: tenseur métrique de l'espace-temps de courbure constante
- G_{AB} : représentation du tenseur métrique courbe en espace ambiant
- η_{AB} : tenseur métrique plat de l'espace ambiant et de signature quelconque
- $\mathcal{P}_A^B$: projecteur d'un vecteur de l'espace ambiant sur l'espace-temps de courbure constante

- ∂_μ : dérivée partielle dans l'espace-temps plat minkowskien
- ∂_A : dérivée partielle dans l'espace plat ambiant
- $\phi \overleftrightarrow{\partial_\mu} \phi^* = \phi\, \partial_\mu \phi^* - \partial_\mu \phi\, \phi^*$
- ∇_μ : dérivée covariante en espace-temps de courbure constante
- $\mathcal{D}_A$: représentation de la dérivée covariante en espace ambiant

- $\nabla_n^2 = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$: opérateur d'Alembertien en espace-temps de courbure constante (Dans le cas riemannien, il s'appelle opérateur de Laplace-Beltrami ou laplacien de connexion.)
- $\Box_n = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$: opérateur d'Alembertien en espace-temps plat de Minkowski
- $\Box_D = \eta^{AB} \partial_A \partial_B$: opérateur d'Alembertien en espace plat ambiant
- $\mathcal{D}_D^2 = G^{AB}\, \mathcal{D}_A\, \mathcal{D}_B$: représentation de l'opérateur d'Alembertien dans l'espace ambiant
- $\boxtimes_n$: correspondant en espace-temps de courbure constante de l'opérateur d'Alembertien en espace ambiant

- j : courant dans AdS
- J : courant dans l'espace ambiant
- j_{CFT} : courant dans la CFT bilinéaire en φ
- j_μ^N : courant de Noether conservé
- j_μ : défini par $j_\mu^N(\zeta^a) = \zeta_a\, j_\mu^a$: courant conservé ne tenant pas compte du paramètre constant ζ^a de la transformation globale
- $j^s_{\mu_1 \cdots \mu_r}$: courant symétrique
- j_μ^t : courant trivial
- $j(x, p)$: fonction génératrice des courants dans l'espace-temps de Minkowski ou dans

l'espace-temps de courbure constante
- $J(X, P)$: fonction génératrice des courants dans l'espace ambiant

- h : champ de jauge dans AdS
- H : champ de jauge dans l'ambiant
- h_0 : valeur du champ de jauge au bord d'AdS
- $\mathcal{O}_{(s)}$: opérateur conforme

- k : degré d'homogénéité
- R : rayon de courbure
- $\mathcal{R}$: scalaire de Ricci
- $\mathcal{R}_{\mu\nu}$: tenseur de Ricci
- $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$: tenseur de Riemann

Chapitre 0

Introduction

Ce chapitre introductif décrira de manière très succinte le contexte dans lequel est apparue l'étude des particules de spin élevé, et tentera de motiver les problèmes étudiés dans ma thèse.

Deux précisions préalables semblent fondamentales. D'une part, la complexité de la longue histoire et des résultats techniques dans ce domaine ne m'a pas permis d'approfondir toutes les directions évoquées ci-dessous ; seule une vue d'ensemble est proposée. D'autre part, il m'est évidemment impossible de faire référence à l'ensemble de la vaste littérature sur le domaine. Le domaine des spins élevés a connu un développement particulièrement important lors de la dernière décennie. Seules quelques références à des revues, notes de cours, ou articles originaux seront citées ici afin que le lecteur, qui souhaite explorer un sujet précis, puisse avoir une base de documentation.

On distinguera les spins "bas" ou "usuels" qualifiant ceux inférieurs ou égaux à deux tandis qu'on réservera le terme de spin "élevé" (malgré l'expression anglaise "higher spin" signifiant littéralement spin supérieur") pour les spins supérieurs ou égaux à 5/2.

0.1 Historique et introduction aux particules de spin élevé

Sur le plan expérimental, jusque dans les années 40, seuls l'électron, le proton, le neutron, le muon, leurs antiparticules et le photon étaient observés. Puis le nombre de particules observées commença à augmenter rapidement à partir des années 50. Cependant la plupart de ces particules massives, dont certaines sont précisément de spin élevé, ne sont pas élémentaires ; ce sont des états excités appelés *résonances hadroniques*. La physique des particules repose aujourd'hui sur le modèle standard basé sur le champ de jauge non abélien de Yang-Mills [1]. Les particules élémentaires connues aujourd'hui sont les fermions constituants de la matière et possédant un spin 1/2 tels les leptons et les quarks, et les bosons médiateurs des interactions [1] électromagnétique (photon) et nucléaires (faible : bosons Z, $W^{\pm}$ et forte : gluons). Une particule semblable au boson de Brout-Englert-Higgs (particule de spin 0) semble avoir été découverte très récemment au Large Hadron Collider

1. La théorie des perturbations permet de voir la force entre deux particules comme un échange d'autres particules, appelées bosons médiateurs.

(LHC) de Genève [2, 3]. D'un point de vue théorique, le graviton, particule de masse nulle et de spin 2, serait médiateur de la gravité et représenterait les fluctuations de la métrique autour d'un espace-temps de fond. Bien que l'on ait observé une pléthore de particules composites massives de spin élevé (hadrons), à ce jour aucune particule élémentaire de spin élevé (et même de spin supérieur à un) n'a été observée.

Sur le plan théorique, la naissance des spins élevés remonte aux années 1930 grâce à Majorana [4], dont les travaux passèrent inaperçus pendant plusieurs décennies avant d'être à l'origine de nombreuses avancées en physique théorique et en théorie des groupes [5]. La formulation de l'électromagnétisme par Maxwell en 1865 dans [6] est à l'origine de la relativité restreinte d'Einstein en 1905 [7]. Très tôt après la naissance de la mécanique quantique (explicitée en 1926 par Schrödinger sous la forme d'équation d'onde), les physiciens ont souhaité écrire des équations d'ondes relativistes linéaires et décrivant donc des particules libres. En effet, en théorie quantique des champs, on associe à chaque particule une fonction d'onde (un champ) et la propagation d'une particule libre est décrite par une équation d'onde. Au début, seules les équations d'ondes pour des particules de spin 0 (l'équation de Klein-Gordon décrivant un champ scalaire (massif ou non) date de 1926), de spin 1/2 (massives nommées fermions, comme l'électron, écrites par Dirac en 1928 [8]), de spin 1 (non massives comme le photon, représentées par l'équation de Maxwell et massives décrites par l'équation de Proca en 1929-1930), de spin 2 (baptisées gravitons dont le comportement est décrit par l'équation de Pauli-Fierz en 1939 [9]) et de spin 3/2 (équation de Rarita-Schwinger en 1941 [10]) étaient connues. Dirac en 1936 [11] puis Fierz et Pauli en 1939 [9, 12] (pour ne citer que les plus célèbres) généralisèrent ces équations et introduirent les équations décrivant une particule massive de spin fixé et arbitraire.

Les travaux de Wigner lièrent la physique théorique et la théorie des groupes. En effet, dans un langage moderne, on peut dire qu'il montra que les règles de la mécanique quantique et de la relativité restreinte impliquent la correspondance entre une particule élémentaire libre et une représentation unitaire irréductible (notée UIR pour l'équivalent anglais "unitary irreducible representation") d'un groupe d'isométries de l'espace-temps de fond (supposé stationnaire). Le programme de Wigner se propose d'étudier et de classer toutes les représentations unitaires irréductibles des groupes d'isométries des espaces-temps à symétrie maximale. Wigner dans [13] s'intéressa au groupe de Poincaré (cas particulier, dont l'invariance est celle de la relativité restreinte) dans l'espace-temps de Minkowski à quatre dimensions. Puis vint le programme de Bargmann et Wigner qui vise à associer à chaque UIR, une équation relativiste des champs [14]. Dans les années 60-70, Fronsdal généralisa ces deux programmes aux espaces-temps de (anti) de Sitter à quatre dimensions [17, 18] et ce fut étendu aux dimensions supérieures par Ferrara et Fronsdal au début des années 2000 [19].

Le programme de Fierz-Pauli, visant à écrire les lagrangiens correspondants aux équations d'onde, ne fut achevé qu'en 1974 par Singh et Hagen [20], pour les champs massifs sur Minkowski en dimension quatre, tandis que la limite de masse nulle de leurs lagrangiens fut ensuite étudiée par Fronsdal (pour les bosons) [21] et Fang et Fronsdal (pour les fermions) [22] (dans le formalisme métrique).

Le programme de Fronsdal débuté en 1978 [21] vise à construire une théorie de jauge de champs de spins élevés en interactions. Les conditions d'une théorie de jauge de spin élevé

interactive cohérente est d'avoir une limite correcte pour les champs libres (c'est-à-dire sans fantômes) et une symétrie de jauge de spin élevé non abélienne et non brisée.

Ces dernières conditions sont difficiles à satisfaire puisque, dans la théorie de diffusion (consistant à étudier la collision entre plusieurs particules incidentes), on doit préserver l'unitarité (autrement dit la conservation de la somme des probabilités) de la matrice de diffusion S (exprimant l'amplitude des processus). C'est particulièrement le cas lorsqu'on étudie des particules de masse nulle en espace-temps plat. Par exemple, à partir du lagrangien libre en espace-temps de Minkowski, on souhaite coupler le champ scalaire de matière à un champ de jauge. Le couplage minimal à un champ de jauge vectoriel ne pose pas de problème et redonne "l'électrodynamique scalaire". On peut aussi reconstruire la relativité générale par la méthode de Noether à partir de l'introduction perturbative de vertex d'interactions ordre par ordre en la perturbation de la métrique à partir de l'équation de Pauli-Fierz en espace plat couplée au tenseur-énergie-impulsion d'un champ scalaire, même si ce processus est infini lorsqu'on remplace les dérivées usuelles par des dérivées covariantes dans le lagrangien du champ scalaire [23]. Quant aux spins élevés, différents théorèmes "no-go" suggèrent qu'il n'existe pas de solutions à ce problème en espace-temps plat (cf. [24] et les références de cet article). Un obstacle est le problème d'Aragone-Deser [25, 26] car l'invariance de jauge covariantisée ne reste pas nécessairement une symétrie du lagrangien quadratique covariantisé.

Un autre exemple est le théorème "no-go" de Coleman-Mandula démontré en 1967 [27], qui contraint les symétries d'une matrice S interactive. Un corollaire est qu'il n'existerait pas de symétrie asymptotique de spin élevé.

Différentes solutions ont été envisagées afin de surmonter cette difficulté. D'une part il semble nécessaire d'introduire une infinité de champs (en dimension quatre et plus). D'autre part, le théorème de Coleman-Mandula ne s'applique pas dans un fond vide avec une constante cosmologique non nulle d'où l'intérêt des espaces-temps de (anti) de Sitter où le problème d'Aragone-Deser peut être contourné.

En effet, Fradkin et Vasiliev ont montré, en utilisant la procédure de Noether (qui est une méthode perturbative) qu'à partir du lagrangien quadratique dans AdS, il existe des interactions cohérentes de champ de jauge de spin élevé avec un champ de jauge de spin deux représentant la gravité au premier ordre non trivial cubique [28]. Ceci est loin d'être trivial car il faut rajouter des termes pour compenser le problème apparent d'Aragone-Deser. Ils ont ensuite pu construire des couplages cubiques incluant tous les spins à la fin des années 1980 [29]. Puis Vasiliev est parvenu à écrire des interactions cohérentes à tous les ordres au niveau des équations du mouvement au début des années 1990 en (3+1) dimensions [30–32].

Une des motivations de départ pour l'étude des spins élevés est un des principaux problème actuel en physique théorique : quantifier la gravité. La théorie de Yang-Mills (non abélienne de spin 1) est renormalisable car elle ne contient qu'une dérivée dans le vertex cubique et sa constante de couplage est sans dimension. Ce n'est pas le cas de la relativité générale, pouvant être vue comme une théorie de jauge non-abélienne pour un champ de masse nulle et de spin 2, qui contient deux dérivées dans le vertex cubique et dont la constante de couplage n'est pas adimensionnée (constante de Newton). Pour un spin élevé s, on peut montrer qu'un vertex cubique contient au moins s dérivées, le degré

de divergence ultraviolette augmente donc avec le spin. Cependant lorsqu'on considère la tour infinie de spin, la sommation pourrait amener à une convergence des corrections quantiques. Ainsi Fradkin a spéculé dans [33] que la théorie de jauge des spins élevés puisse être une théorie quantique finie incluant un champ de masse nulle et de spin deux, et donc en ce sens la gravité. De façon similaire, la théorie des cordes fournit un exemple de théorie finie de champs massifs de spin élevé avec des interactions cohérentes. La masse au carré d'une particule y est proportionnelle à la tension de la corde et au spin. La théories des cordes (massive) et celle de Vasiliev (sans masse) sont les seuls exemples connus de théories cohérentes d'interaction de particules de spin élevé (en dimension supérieure ou égale à quatre). La théorie des spins élevés de Vasiliev (non massive) pourrait donc être une limite quand la tension de la corde tend vers zéro. Autrement dit, une supposition est que la masse des champs en théorie des cordes serait générée par une brisure spontanée de la symétrie de jauge associée à un champ non massif de spin élevé. Mieux comprendre la théorie des spins élevés permettrait ainsi de mieux analyser les propriétés quantiques de la théorie des cordes et éventuellement de résoudre le problème de la barrière de spin deux.

Une motivation plus récente provient de la correspondance holographique AdS/CFT qui a été présentée en 1997-1998 par Gubser, Klebanov, Maldacena, Polyakov et Witten. Elle lie une théorie quantique de la gravitation dans l'espace-temps d'anti de Sitter et une théorie quantique ordinaire conforme à une dimension de moins. Un des exemples les plus simples de dualité holographique seraient celui où la théorie "gravitationnelle" serait celle de Vasiliev dans AdS à quatre dimensions duale à une théorie conforme des champs à trois dimensions : le modèle O(N) libre [34] ou critique [35] (ou encore le modèle de Gross-Neveu [36]).

Pour résumer, l'étude de la théorie des spins élevés fut initialement motivée par l'observation de particules massives de spin élevé (même si non élémentaires). Aujourd'hui la question ouverte de la quantification de la gravité motive l'attention portée à cette théorie de jauge de spin élevé qui pourrait contenir la gravitation. Qui plus est, la théorie de jauge des spins élevés pourrait être une limite de la théorie des cordes et sa meilleure compréhension permettrait ainsi de mieux appréhender cette dernière. Par ailleurs, le récent développement de l'holographie relance l'intérêt pour les spins élevés qui est devenu un domaine très actif où il existe de nombreux articles de revue. Dernièrement de nombreuses contributions au volume spécial "Higher Spin Theories and AdS/CFT" de J. Phys. A édité par M. R. Gaberdiel and M. Vasiliev ont été publiées sur Arxiv [37–48]. Les comptes-rendus du colloque Solvay [49] constitue un outil pédagogique utile pour se familiariser avec le sujet. On peut également mentionner, par ordre chronologique, les compte-rendus de conférence, notes de cours ou synthèses suivants [50–74] ainsi que le mémoire d'habilitation à diriger les recherches (en français) de X. Bekaert [75].

0.2 Plan

Ce manuscrit de thèse se divise en trois parties : après une rapide introduction historique à la théorie des spins élevés, je développerai, à partir de mon premier article [76], les interactions de spin élevé avec un champ scalaire de matière dans un espace-temps de courbure constante basées sur l'explicitation des fonctions génératrices des courants conservés

et du couplage cubique. La seconde partie résume des travaux en cours de réalisation dans l'objectif de faire un premier test quantitatif de la correspondance holographique AdS/CFT à l'ordre quartique en la constante de couplage en dimension arbitraire. La dernière partie, bien que concernant toujours l'holographie des spins élevés, est axée sur la physique non-relativiste. Après avoir déterminé les symétries et courants d'un gaz parfait/unitaire de Fermi (issues du troisième article [77]), je rappelerai une proposition du dual gravitationnel d'un gaz de Fermi unitaire [78].

Des annexes viennent compléter ce manuscrit. Tout d'abord, les démonstrations des étapes importantes des résultats présentés dans la première partie sont détaillées. Puis mon premier article associé à ces travaux est présenté. Enfin, mon troisième article développe les idées et les démonstrations décrites dans la troisième partie.

La convention d'Einstein est utilisée ici et tout au long de ce rapport. On pose la célérité de la lumière c égale à l'unité.

Première partie

Interactions de spin élevé avec un champ scalaire de matière dans un espace-temps de courbure constante : fonctions génératrices des courants conservés et du couplage cubique

La première partie de cette thèse est basée sur mon premier article publié avec mon directeur de thèse Xavier Bekaert suite à mon stage de master 2 (voir annexe B).

Le principal objectif de ce travail a été l'obtention de l'infinité de courants conservés (de rang arbitraire), bilinéaires en le champ scalaire libre, en espace-temps de courbure constante à partir des travaux réalisés en espace-temps plat issus de l'étude des symétries et du théorème de Noether. L'écriture de ces courants se simplifie lors de l'utilisation de fonctions génératrices et de l'extension des champs physiques dans un espace plat auxilliaire (dit "ambiant") ayant une dimension en plus. Elle s'effectue grâce à deux outils :

• La construction ambiante, c'est-à-dire celle d'un dictionnaire entre les objets de l'espace plat ambiant et ceux de l'espace-temps de courbure constante, est le fondement de ce calcul original.

• La méthode de Noether indique ensuite comment construire, dans une théorie de jauge, les interactions (qui se traduisent par le terme de couplage minimal) véhiculées par les bosons médiateurs (ici sans masse et de spin entier quelconque). Nous nous sommes restreints à la construction des vertex d'interactions cubiques.

Le plan de la première partie est le suivant : le premier chapitre est une introduction (parfois de niveau élémentaire destinée à des étudiants de master et permettant de fixer les notations) à la méthode de Noether et à la formulation ambiante. Dans le second chapitre, la quantification de Weyl est développée car elle est aussi bien utilisée en physique relativiste que dans un contexte non-relativiste (c.f. la troisième partie). Enfin, le troisième chapitre contient les résultats, à savoir les courants conservés, les calculs des symboles et les vertex cubiques.

Chapitre 1

Boîte à outils

1.1 Méthode de Noether

Le premier théorème de Noether permet, à partir des symétries continues de l'action, de retrouver les grandeurs conservées associées. Bien après la publication de ce théorème, les physiciens élaborèrent une méthode qui porte aussi son nom. Elle indique, par exemple, comment construire, dans une théorie de jauge, des interactions véhiculées par des particules sans masse nommées *bosons médiateurs*. Elle donne également la possibilité de « jauger », c'est-à-dire de faire dépendre des coordonnées d'espace-temps, les symétries rigides de la théorie étudiée. L'interaction entre une particule de matière et le photon de spin 1 en est le plus simple exemple et donne lieu à l'électromagnétisme. Il est possible de faire le même travail pour la gravitation qui est représentée par la particule de spin 2 baptisée graviton. Quant aux cas de spin supérieur à deux et appelés *spins élevés*, le problème reste encore ouvert mais ce domaine a, récemment, connu de nombreux développements. Lorsqu'on étudie le cas du champ scalaire complexe libre, il apparait une infinité de courants conservés de rang arbitraire dans l'espace-temps de Minkowski. Pour plusieurs raisons que nous évoquerons plus loin, un des objectifs de cette thèse est de construire et d'expliciter les courants conservés dans les espaces-temps de courbure constante (mais non nulle) tels que la solution cosmologique dite de (anti) de Sitter.

1.1.1 Pré-requis

Le *premier* théorème de Noether fournit une correspondance univoque entre symétries continues globales et lois de conservation. Lorsqu'on parle de *lois de conservation*, on pense souvent à la conservation de l'énergie au cours du temps. L'invariance d'une théorie par translation dans l'espace implique que la quantité de mouvement (ou impulsion) est conservée et que la position spatiale n'est pas absolue. L'invariance par rotation dans l'espace implique que le moment angulaire est conservé et que l'orientation spatiale n'est pas absolue.

Le *second* théorème de Noether fournit une correspondance entre symétries locales et identités sur les équations du mouvement. A partir de maintenant, quand nous parlerons du « théorème de Noether », nous utiliserons le premier théorème de Noether comme il est

d'usage de le faire en physique.

Nous allons voir comment exprimer les symétries des champs scalaires en terme des variations infinitésimales. Et avant d'énoncer le théorème en question, nous préciserons les différentes symétries (globale/locale, discrète/continue, finie/infinitésimale, interne/d'espace-temps, de spin élevé *etc.*) ainsi que les transformations géométrique/cinématique/d'ordre élevé et les représentations "vraie"/projective/"multiplier".

1.1.1.1 Formalisme lagrangien du champ scalaire : le lagrangien de Klein-Gordon

Le champ scalaire

Pour introduire les notations et la terminologie, nous allons consacrer un paragraphe au formalisme lagrangien du champ scalaire. Le *champ scalaire* (autrement dit une fonction des coordonnées d'espace-temps [1]) $\phi(x)$ décrit des particules de masse m de spin nul et modélise ici la matière [2]. Il possède un nombre infini de degrés de liberté. De plus, s'il est *complexe*, il représente une particule chargée. (Si le champ scalaire était réel, il n'y aurait pas de distinction de charge entre particules et anti-particules.) Lorsqu'il est *libre*, le champ (et l'action du champ) possède un nombre infini de symétries.
Le lagrangien peut dépendre du champ, de ses dérivées et des coordonnées d'espace-temps mais nous considérerons ici qu'il ne dépend pas explicitement de ces dernières pour préserver la symétrie sous les translations : $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, \partial_\mu\partial_\nu\phi, ...)$. L'évolution du champ scalaire est représentée par le *lagrangien de Klein-Gordon* :

$$\mathcal{L}_{KG}(\phi, \partial_\mu\phi) = -\frac{1}{2}|\partial_\mu\phi|^2 - \frac{m^2}{2}|\phi|^2 \tag{1.1}$$

où $|\phi|^2 = \phi^*(x)\,\phi(x)$ est le module au carré du champ scalaire complexe $\phi(x)$.
Sa propagation est décrite par l'*équation d'Euler-Lagrange* :

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{KG}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}_{KG}}{\partial\phi} = 0$$

appelée, dans ce cas, *équation de Klein-Gordon* (1926) :

$$(\Box_n - m^2)\,\phi = 0 \tag{1.2}$$

où $\Box_n = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\,\partial_\nu$ est l'opérateur *d'Alembertien* (on dit aussi *opérateur d'onde*) et on utilise la convention $-+\cdots+$ pour la signature de la métrique plate de Minkowski.

Si une équation est vérifiée seulement lorque les équations du mouvement sont satisfaites (c'est-à-dire que la condition de couche de masse $p^2 = m^2$ est vérifiée), on note cela par une *égalité faible* symbolisée par $\approx$ à la place de l'égalité stricte $=$. Les indices minuscules (grecs

1. On écrira l'argument du champ scalaire seulement lorsqu'il y aura une ambiguïté.
2. En réalité, la matière usuelle est représentée par des champs spinoriels.

et latins) prennent les valeurs de 0 à $n-1$. Afin de simplifier au maximum les formules, nous nous servirons régulièrement de la notation suivante $\phi \overleftrightarrow{\partial_\mu} \phi^* = \phi\, \partial_\mu \phi^* - \partial_\mu \phi\, \phi^*$.

1.1.1.2 Variations finies et infinitésimales

Des coordonnées

Une *transformation finie* des coordonnées d'espace-temps s'exprime par :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = f^\mu(x^\nu) \tag{1.3}$$

où f est une fonction. Par la suite, nous utiliserons x pour désigner les composantes x^μ. Une *transformation infinitésimale* et proche de l'identité est de la forme :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu(x) \tag{1.4}$$

où $\zeta^\mu(x)$ est le paramètre infinitésimal (ou d'ordre 1) de la transformation. La *variation infinitésimale* des coordonnées d'espace-temps peut ainsi être définie par :

$$\delta_\zeta x^\mu := x'^\mu - x^\mu = \zeta^\mu(x)\,. \tag{1.5}$$

Lorsque le paramètre de la transformation ζ^μ ne dépend pas des coordonnées x c'est-à-dire que la même transformation est effectuée en tous les points de l'espace-temps, ce type de symétrie est qualifiée de *rigide*, on dit aussi *globale*.

Il arrive parfois qu'une théorie admette une symétrie bien plus grande et autorise à effectuer des transformations différentes en chaque point de l'espace-temps. Lorsque ce phénomène se produit, la symétrie est dite *de jauge*, ou encore *locale*. Les symétries de jauge jouent un rôle essentiel dans le "modèle standard" et les tentatives actuelles d'unification des différents types d'interactions.

L'électromagnétisme est une *théorie de jauge*. En effet, les équations de Maxwell sont inchangées lorsque le potentiel électrique V est modifié par la dérivée par rapport au temps d'une fonction arbitraire $V - \partial_t f$ et que simultanément le potentiel vecteur $\vec{A}$ est modifié par le gradient de cette même fonction $\vec{A} + \vec{\nabla} f$. Si cette fonction f varie selon le temps et l'espace, alors en chaque point on effectue bien une transformation différente. Pourtant les équations restent inchangées et les conclusions physiques restent les mêmes. L'électromagnétisme est donc un exemple de théorie de jauge.

D'un champ

Appliquons ceci à un champ scalaire. Il est laissé invariant par une transformation "totale" :

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

c'est-à-dire par une transformation du champ combinée à celle d'espace-temps. La *variation totale* est définie par :

$$\widetilde{\delta}_\zeta \phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) = 0\,. \tag{1.6}$$

La *variation du champ seul* [79] correspond à un terme de transport :

$$\delta_\zeta \phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = -\zeta^\nu(x)\, \partial_\nu \phi(x) + \mathcal{O}(\zeta^2)\,. \tag{1.7}$$

1.1.1.3 Différents types de symétries

En toute généralité, une symétrie peut toujours être définie de façon mathématique comme une action de groupe sur un ensemble d'objets [3]. En géométrie, une figure possède une symétrie si elle est laissée invariante par une transformation géométrique. Deux figures géométriques sont *congruentes* si on peut trouver une relation d'équivalence entre les deux. Par exemple, les *isométries* sont des symétries conservant les produits scalaires (et donc les angles et les distances). La *symétrie* en physique englobe une notion plus générale qu'en géométrie classique : c'est une transformation (pas forcément géométrique) qui laisse la forme des lois de la nature (par exemple l'intégrale d'action) invariante. Toute notion de symétrie est fondée sur une hypothèse selon laquelle certaines grandeurs ne sont pas indépendantes de l'observateur.

Les principes d'invariance jouent un rôle crucial dans la recherche des lois régissant des phénomènes nouvellement découverts puisqu'ils en restreignent sévèrement le cadre, voire les suggèrent. D'autres types de charges (que la charge électrique) ont été découvertes dans le monde des particules (leptoniques, baryoniques, *etc.*), qui obéissent aussi à des lois de conservation strictes. Le théorème de Noether peut s'appliquer à l'envers et permet de relier ces lois de conservation à des principes de symétrie.

Symétrie globale/locale
Les symétries globales et locales ont été définies au paragraphe précédent.

Symétrie discrète/continue
Une symétrie est dite *discrète* lorsque l'ensemble des transformations correspondantes constitue un groupe discret. Il existe des symétries de conjugaison de charge, de parité et d'inversion du temps qui permettent d'exprimer le théorème CPT affirmant que toute théorie quantique relativiste doit être invariante sous le produit de ces trois symétries.

De façon intuitive, une symétrie est *continue* lorsque les paramètres qui la déterminent varient de façon continue. C'est seulement dans ce cas que l'on peut parler de variations infinitésimales. De manière précise, une symétrie est dite continue lorsque l'ensemble des transformations correspondantes constitue un groupe infini (c'est-à-dire un ensemble avec un nombre infini d'éléments et une structure de groupe) : un groupe de Lie [80].
Les transformations rigides correspondent à un groupe de Lie de dimension finie au sens où il y a un nombre fini de paramètres, tandis que les symétries locales correspondent à un groupe de Lie de dimension infinie car il faut se donner des fonctions arbitraires des coordonnées de l'espace-temps.

Symétrie finie/infinitésimale
Les symétries finies et infinitésimales ont été définies au paragraphe précédent.

Groupe de symétrie abélien/non abélien

3. Le programme d'Erlangen est un programme de recherche mathématique publié par le mathématicien allemand Felix Klein en 1872 qui a pour clef de voûte, de fonder la géométrie sur les notions d'action de groupe et d'invariant.

Si deux transformations sont appliquées successivement et si le résultat ne dépend pas de leur ordre, ces transformations commutent et le groupe de symétrie est *abélien*. C'est le cas des translations d'espace mais pas celui des rotations (sauf dans $\mathbb{R}^2$). Inversement, si deux transformations successives ne commutent pas, le groupe de symétrie est dit non abélien.

Symétrie interne/d'espace-temps

Une symétrie *interne* (ou non géométrique) est une transformation d'un champ qui n'affecte pas le système de coordonnées d'espace-temps, tout en changeant les variables dynamiques du problème étudié. On peut donc remarquer que les symétries internes et les symétries d'espace-temps commutent. Une symétrie interne fait intervenir des degrés de liberté internes, et n'a pas d'interprétation géométrique (au sens où c'est défini ci-dessous). La symétrie sous les tranformations de phase en est le plus simple exemple. La transformation interne globale finie d'un champ scalaire est de la forme :

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\alpha}\,\phi \tag{1.8}$$

où le paramètre α est fini. La variation du champ par la transformation interne globale mais infinitésimale est de la forme :

$$\delta_\zeta \phi = -i\,\zeta\,\phi \tag{1.9}$$

où le paramètre ζ est infinitésimal. Elle est représentée par le groupe unitaire à une dimension $U(1)$.

Les transformations infinitésimales *d'espace-temps* sur les coordonnées (ou *géométriques*) comportent les *translations* (infinitésimales) :

$$\delta_\zeta \phi = -\zeta^\mu\,\partial_\mu \phi \tag{1.10}$$

dont le groupe est $\mathbb{R}^n$, et les *transformations de Lorentz*, dont le groupe est $SO(n-1,1)$ (groupe unimodulaire et pseudo-orthogonal à n dimensions, de la forme $SO(p,m)$ où p est le nombre de plus et m le nombre de moins de la signature) :

$$\delta_\Lambda \phi = -\Lambda^\mu_\nu\, x^\nu\,\partial_\mu \phi \tag{1.11}$$

où la matrice Λ^μ_ν appartient au groupe $SO(n-1,1)$.
Cet ensemble (1.10) et (1.11) forme le *groupe de Poincaré* ou *groupe de Lorentz inhomogène* noté $ISO(n-1,1)$. On peut écrire la transformation (1.10) en utilisant les opérateurs quantiques notés avec $\hat{}$:

$$\delta_\zeta \phi = -i\,\zeta^\mu\,\hat{p}_\mu \phi \tag{1.12}$$

où $\hat{p}_\mu = -i\,\partial_\mu$ est l'opérateur impulsion.

La transformation *conforme* [81] préserve les angles : cela regroupe les transformations de Poincaré, la transformation d'échelle (non relativiste) : $t \rightarrow \lambda^z\, t$ et $x^i \rightarrow \lambda\, x^i$ où z est appelé l'exposant dynamique (incluant les dilatations (relativistes) : $x^\mu \rightarrow \lambda\, x^\mu$) et

les transformations conformes spéciales, dont le groupe de transformations est isomorphe à $SO(n,2)$ pour $n > 2$. Elle est la propriété que possèdent certains systèmes de paraître semblables à eux-mêmes en changeant l'échelle d'observation. En physique statistique, on observe une grande classe de tels systèmes au cours d'une transition de phase.

Si la théorie possède l'invariance par reparamétrisation de l'espace-temps (ou difféomorphismes), alors il existe une symétrie d'espace-temps locale encore appelée *covariance générale* comme en relativité générale.

Symétrie supérieure (ou de spin élevé)
Pour les théories de champs de spin élevé, il convient de considérer une généralisation des transformations d'espace-temps faisant intervenir des dérivées supérieures. Par exemple, comme l'ont fait Berends, Burgers et Van Dam [82], l'écriture (1.12) permet de généraliser la transformation (1.10) en considérant des puissances supérieures des impulsions $\hat{p}$:

$$\delta_\zeta \phi \,=\, -\,i\,\zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r} \hat{p}_{\mu_1} ... \hat{p}_{\mu_r} \phi \,=\, (-\,i)^{r\,+\,1}\,\zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}\,\partial_{\mu_1} ... \,\partial_{\mu_r} \phi \tag{1.13}$$

où $\zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}$ est un tenseur contravariant symétrique de rang r. Ces transformations infinitésimales sont parfois appelées *"hypertranslations"*. Elles ne sont en général pas des symétries rigides d'un champ de matière en interaction. En revanche, par exemple, si ϕ est solution de l'équation de Klein-Gordon alors $\phi \,+\, \delta_\zeta \phi$ l'est aussi puisque

$$(\Box_n \,-\, m^2)\,\delta_\zeta \phi \,=\, -\,i\,\zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r} \hat{p}_{\mu_1} ... \hat{p}_{\mu_r}\,(\Box_n \,-\, m^2)\,\phi \,\approx\, 0\,.$$

Il s'avère que les hypertranslations sont même des symétries de l'action de Klein-Gordon. Pour calculer la variation de l'action $\delta_\zeta S$, on réalise une succession d'intégrations par parties et seuls des termes au bord restent, $\hat{p}$ étant un opérateur hermitien. Cette transformation est donc bien une symétrie du lagrangien de Klein-Gordon (1.1) mais, en général, elle ne sera plus symétrie du lagrangien d'interactions. Ce type de symétries faisant intervenir des dérivées supérieures est appelée *symétrie supérieure (ou de spin élevé)*.

Transformation géométrique/cinématique/d'ordre élevé
Par définition, les transformations géométriques infinitésimales sont générées par des opérateurs linéaires en les dérivées (cf. équations (1.10) et (1.11)) alors que les transformations *cinématiques* sont générées par des opérateurs différentiels d'ordre un (linéaires et constants en les dérivées) comme par exemple le générateur des boosts galiléens $\hat{K}_i$ (cf. équation (8.10)). On vient de voir qu'il existe également des transformations d'ordre élevé qui sont générées par des opérateurs différentiels d'ordre élevé (cf. (1.13)).

Représentation "vraie"/projective/"multiplier"
Une représentation *projective* (c'est-à-dire à une phase près) d'un groupe (par exemple celui de Galilée) peut être équivalente à une "*vraie*" représentation (ou mieux, un représentation "tout court") d'un groupe plus grand (celui de Bargmann, cf. équation (8.4)). On trouve également des représentations appelées en anglais *"multiplier"* qui sont elles à un facteur près (plus général qu'une phase, c'est le cas des transformations d'échelle du groupe de Schrödinger).

1.1.1.4 Représentation unitaire irréductible

Une particule *élémentaire* (libre) est identifiée à une *représentation unitaire irréductible (UIR)* du groupe d'isométrie de l'espace-temps de fond (supposé stationnaire) autrement dit le groupe de Poincaré pour l'espace-temps de Minkowski.

Toute UIR du groupe de Poincaré est induite par une représentation du petit groupe. En relativité, on appelle *petit groupe*, le sous-groupe des transformations de Lorentz $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ dont les éléments laissent invariant une quadri-impulsion p^{α} donnée, autrement dit qui préserve le quadrivecteur moment.

Le cas simple est le cas massif. Il existe alors un référentiel lorentzien dans lequel cette particule est au repos. Dans ce cas le petit groupe est le groupe des rotations spatiales et est caractérisé par le spin. Il est représenté par un tenseur complètement symétrique de trace nulle.

Dans le cas d'une particule de masse nulle au repos $p^{\alpha} = 0$, le petit groupe est le groupe de Lorentz homogène Dans le cas d'une particule de masse nulle se déplaçant à la vitesse de la lumière, le petit groupe est le groupe des rotations et translations du plan euclidien.

En dimension d'espace-temps $n = 4$, un réel non négatif (le carré de la masse) et un nombre naturel (le double du spin ou de l'hélicité) suffisent à caractériser toutes les représentations à nombre fini de composantes. Cependant, ceci n'est plus vrai en dimension supérieure quelconque car le petit groupe (*court*, dans le cas de masse nulle) est en général un groupe spécial orthogonal dont la théorie des représentations unitaires est plus riche puisqu'elle inclut les champs à symétrie mixte. Par abus de language, pour les représentations à nombre fini de composantes il est d'usage d'appeler "spin" le nombre de colonnes du diagramme de Young caractérisant la représentation (de dimension finie par hypothèse) du petit groupe (court). Bargmann et Wigner furent en réalité concernés dans [14] uniquement par les représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré à quatre dimensions d'espace-temps. Dans ce cas, tous les bosons peuvent donc être représentés par des champs complètement symétriques.

Par convention, une particule de spin élevé entier sera, ici, toujours représentée par un *tenseur complètement symétrique*.

1.1.2 Théorème de Noether

L'énoncé informel du *théorème de Noether* établi en 1918 à Göttingen (Allemagne) est :

« Si un principe variationnel est laissé invariant par un groupe continu de symétries, alors il existe au moins une quantité physique associée qui est conservée. »

La réciproque est vraie sous des hypothèses extrêmement générales (par exemple en formalisme hamiltonien) : si une quantité physique est conservée dans un phénomène physique, alors il existe une symétrie dans les lois régissant ce phénomène.

De manière plus précise, le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi, \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\phi, ..., \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_p}\phi)$$

et $\delta_\zeta\phi$ est une *symétrie infinitésimale de l'action* $S = \int \mathcal{L}$ si et seulement si

$$\delta_\zeta \mathcal{L} = \partial_\mu V^\mu \quad \Longleftrightarrow \quad \delta_\zeta S = \int \delta_\zeta \mathcal{L} = \text{terme au bord}\,.$$

Une symétrie de l'action implique une symétrie des équations de mouvement, mais la réciproque n'est pas vraie.

Si $\delta_\zeta\phi$ est une symétrie infinitésimale de l'action, alors il existe un *courant de Noether* :

$$j^\mu_N(\zeta) := \sum_{k=1}^{k-1}\sum_{l=0}(-1)^l\,\partial_{\nu_{l+1}}...\partial_{\nu_{k-1}}(\delta_\zeta\phi)\,\partial_{\nu_1}...\partial_{\nu_l}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_{\nu_1}...\partial_{\nu_{k-1}}\phi)}\right) - V^\mu \tag{1.14}$$

qui est *conservé* lorsque les équations du mouvement sont satisfaites :

$$\partial_\mu j^\mu_N \approx 0 \tag{1.15}$$

Il est important de remarquer que ϕ peut dénoter plusieurs champs ou un champ ayant plusieurs indices : il y a donc une somme implicite sur les ϕ. La correspondance générale entre symétries et courants de Noether pour une théorie locale est traité en détails dans [83]. Nous verrons un exemple avec le champ scalaire ϕ et son complexe conjugué ϕ^* dans le paragraphe suivant.

De plus, nous noterons j_μ le courant conservé ne tenant pas compte du paramètre de la transformation ζ^a car il est fondamental dans l'utilisation de la méthode de Noether :

$$j^N_\mu(\zeta_a) = \zeta_a\, j^a_\mu \tag{1.16}$$

où l'indice a est quelconque. Pour une transformation de phase, cet indice disparait. Pour une translation, il devient un indice grec et pour une transformation d'espace-temps d'ordre r, il devient $r-1$ indices grecs.

Pour chaque symétrie, une grandeur physique est conservée cependant il existe en un sens une autre grandeur qui, elle, n'est pas observable. Par exemple, l'invariance par translation d'espace implique la conservation de l'impulsion. La position spatiale absolue n'est par contre pas obervable. Pour la symétrie sous les translations temporelles, l'énergie est conservée mais on ne peut pas mesurer le temps absolu. L'invariance sous le changement de phase d'une fonction d'onde implique la conservation de la charge électrique et fait obstacle à la mesure de la phase absolue. Pour certaines symétries, les grandeurs conservées sont moins pertinentes. En effet, pour l'invariance sous les boosts galiléens, la grandeur conservée est la position initiale du centre de masse, ce qui n'apporte pas vraiment d'information pertinente.

1.1.3 Exemples de courants de Noether

Le théorème de Noether [79, 84, 85] permet de calculer les courants conservés pour les champs de spin 1 et 2.

1.1.3.1 Courant de charge

La transformation globale : $\delta_\zeta\phi = -i\,\zeta\,\phi$ est une symétrie interne du lagrangien de Klein-Gordon (1.1). La variation du lagrangien de Klein-Gordon est :

$$\begin{aligned}\delta_\zeta\mathcal{L}_{KG} &= \mathcal{L}'_{KG} - \mathcal{L}_{KG}\\ &= -\frac{1}{2}\big[\partial_\mu\phi^*\,\partial^\mu(\delta_\zeta\phi) + \partial_\mu(\delta_\zeta\phi^*)\,\partial^\mu\phi + \partial_\mu(\delta_\zeta\phi^*)\,\partial^\mu(\delta_\zeta\phi) + m^2\phi^*\delta_\zeta\phi\\ &\quad + m^2\delta_\zeta\phi^*\phi + m^2\delta_\zeta\phi^*\delta_\zeta\phi\big]\,.\end{aligned}$$

Une approximation au premier ordre en ζ permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\delta_\zeta\mathcal{L}_{KG} &= \frac{1}{2}\big(i\,\zeta\,\partial_\mu\phi^*\,\partial^\mu\phi + i\,\zeta\,\partial_\mu\phi^*\,\partial^\mu\phi + m^2\,i\,\zeta\,\phi^*\phi - m^2\,i\,\zeta\,\phi^*\phi\big) + \mathcal{O}(\zeta^2)\\ &= 0\end{aligned}$$

donc V^μ peut être pris égal à zéro. Le courant de Noether devient alors :

$$\begin{aligned}j^N_\mu &= \delta_\zeta\phi\,\frac{\partial\mathcal{L}_{KG}}{\partial(\partial^\mu\phi)} + \delta_\zeta\phi^*\,\frac{\partial\mathcal{L}_{KG}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)} - V_\mu\\ &= \frac{1}{2}\,i\,\zeta\,\phi\,\partial_\mu\phi^* - \frac{1}{2}\,i\,\zeta\,\partial_\mu\phi\,\phi^*\,.\end{aligned}$$

Le courant de Noether s'exprime par :

$$\begin{aligned}j^N_\mu &= \frac{1}{2}\,i\,\zeta\,(\phi\,\partial_\mu\phi^* - \partial_\mu\phi\,\phi^*)\\ &= \frac{1}{2}\,i\,\zeta\,\phi\overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi^*\\ &= \zeta\,j_\mu\end{aligned}\tag{1.17}$$

où $j_\mu = \dfrac{1}{2}\,i\,\phi\overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi^*$. On vérifie facilement que j^N_μ et j_μ sont conservés sur la couche de masse.

Lorsqu'on passe d'une symétrie rigide à une symétrie de jauge, des termes nouveaux apparaissent et l'action de Klein-Gordon n'est plus invariante. Ceci est corrigé lorsqu'on réalise le couplage minimal (paragraphe 1.1.4).

1.1.3.2 Tenseur énergie-impulsion

La transformation globale du champ $\delta_\zeta\phi = -\zeta^\mu\,\partial_\mu\phi$ est une symétrie du lagrangien de Klein-Gordon (1.1). La transformation est induite par la translation $\delta_\zeta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = \zeta^\mu$. La variation infinitésimale nous donne :

$$\begin{aligned}\delta_\zeta\mathcal{L}_{KG} &= -\frac{1}{2}\big[\partial_\mu\phi^*\,\partial^\mu(\delta_\zeta\phi) + \partial_\mu(\delta_\zeta\phi^*)\,\partial^\mu\phi + m^2\,\phi^*\,\delta_\zeta\phi + m^2\,\delta_\zeta\phi^*\phi\big]\\ &= -\frac{1}{2}\left(\zeta^\rho\,\partial_\mu\phi^*\,\partial^\mu\partial_\rho\phi + \zeta^\rho\,\partial_\mu\partial_\rho\phi^*\,\partial^\mu\phi - m^2\,\zeta^\rho\,\phi^*\,\partial_\rho\phi - m^2\,\zeta^\rho\,\partial_\rho\phi^*\,\phi\right).\end{aligned}$$

Le théorème de Noether nous permet d'en déduire :

$$V^\mu \;=\; -\,\frac{1}{2}\,\zeta^\mu\left(|\partial_\rho\phi|^2 \;-\; m^2\,|\phi|^2\right).$$

Cela permet d'exprimer le courant de Noether :

$$\begin{aligned} j^N_\mu &= \delta_\zeta\phi\,\frac{\partial\mathcal{L}_{KG}}{\partial(\partial^\mu\phi)} \;+\; \delta_\zeta\phi\,\overleftrightarrow{\partial^\nu}\,\frac{\partial\mathcal{L}_{KG}}{\partial(\partial^\mu\partial^\nu\phi)} \;+(\phi\;\leftrightarrow\;\phi^*)\;-\;V_\mu \\ &= \zeta^\nu\,T_{\mu\nu_{can}} \end{aligned}$$

où le *tenseur énergie-impulsion "canonique"* (ou *tenseur de Noether*) correspond au courant j^a_μ (avec a représentant ici ν) :

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu_{can}} &:= \frac{\partial\mathcal{L}_{KG}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\,\partial_\nu\phi \;+(\phi\leftrightarrow\phi^*)\;-\;\eta_{\mu\nu}\,\mathcal{L}_{KG} \\ &= \frac{1}{2}\left[\eta_{\mu\nu}\,\left(|\partial_\rho\phi|^2 \;+\; m^2\,|\phi|^2\right) \;-\; 2\,\partial_{(\mu}\phi\,\partial_{\nu)}\phi^*\right] \end{aligned} \tag{1.18}$$

où $(\mu\nu)$ indique une symétrie selon ces deux indices de poids 1. Le tenseur énergie-impulsion représente la répartition de la masse, de l'énergie et des contraintes (pressions et cisaillements) dans l'espace-temps. Il n'est pas automatiquement symétrique, ni invariant de jauge [86].
Il est aisé de vérifier que le courant de Noether et donc le tenseur énergie-impulsion sont conservés.

Une autre manière de définir le tenseur énergie-impulsion est d'améliorer le tenseur canonique afin de le rendre symétrique (et de pouvoir le coupler à la métrique), c'est le *tenseur de Belinfante* qui est plus naturel pour le couplage de spin 2.

En relativité générale (notée parfois RG) et donc en espace-temps de courbure constante, il est défini de la manière suivante [86] :

$$T_{\mu\nu_{RG}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\delta S_{matière}}{\delta g^{\mu\nu}}\,. \tag{1.19}$$

Il est conservé et symétrique :

$$T_{\mu\nu_{RG}} \;=\; T_{\nu\mu_{RG}}\,.$$

En espace-temps plat, il définit le *tenseur de Rosenfeld* $T_{\mu\nu_R}$:

$$T_{\mu\nu_R} \;=\; T_{\mu\nu_{RG}}|_{\,g=\eta}\,. \tag{1.20}$$

Pour le champ scalaire, les tenseurs de Belinfante et de Rosenfeld sont égaux [79,88] ce qui implique $T_{\mu\nu_{can}} \;=\; T_{\mu\nu_R}$.

1.1.4 Méthode de Noether

Dans l'application la plus simple de la *méthode de Noether* [79], il est important de vérifier que l'action libre du champ de matière possède une symétrie rigide. L'objectif [4] est

4. appelé *principe de jauge*

de *« jauger »* cette symétrie c'est-à-dire la faire dépendre des coordonnées. A l'aide du premier théorème de Noether, on calcule le courant conservé j^μ qui est lié au courant de Noether j^μ_N (d'où le nom de cette méthode) à partir du champ de matière ϕ. Nous couplons ensuite, et de manière minimale, ce courant à un champ de jauge. Afin de compenser la variation de jauge du terme de couplage minimal, il est souvent nécessaire d'induire des transformations de jauge sur le champ de matière et par conséquent des symétries rigides du champ de matière (comme cas particuliers). La boucle est donc bouclée (figure 1.1).

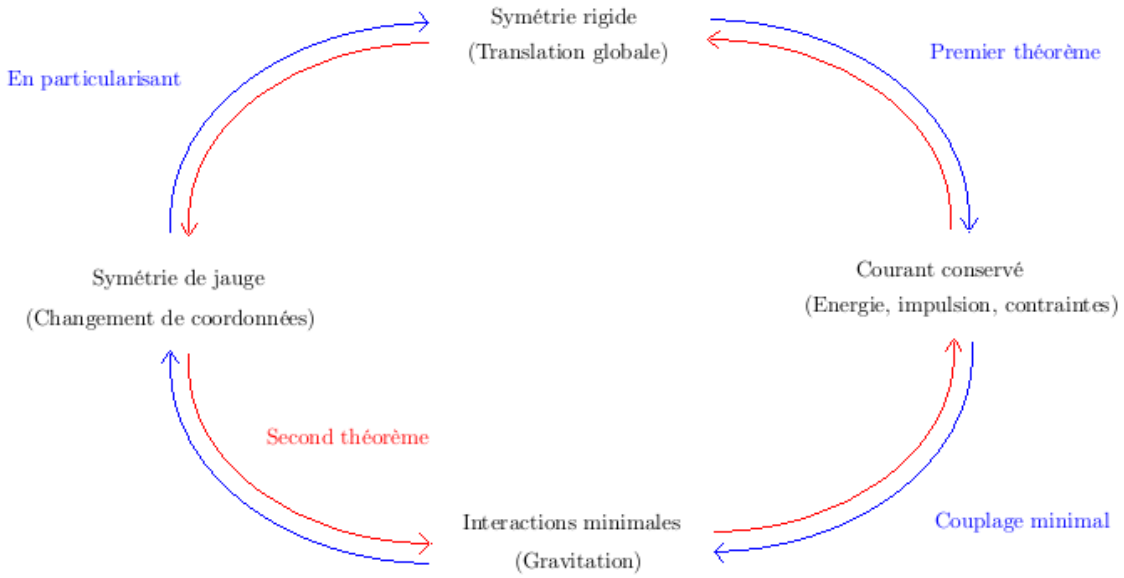

FIGURE 1.1 – Méthode de Noether (en bleu) et méthode réellement utilisée (en rouge) pour le spin 2

Concrètement, on suppose qu'on possède des champs de jauge de spin entier non nul, représentant les bosons de jauge (sans masse), qu'on souhaite coupler à la matière. Le second théorème de Noether permet de trouver l'expression du terme de couplage « minimal » entre champs de matière et de jauge dans le lagrangien à l'ordre le plus bas. Comme le champ de jauge se transforme sous les symétries locales, il faut que le courant associé au champ scalaire soit conservé sur la couche de masse du champ de matière. Nous utilisons à cette fin le courant conservé j^μ (lié au courant de Noether j^μ_N). Des exemples précis sont donnés dans les paragraphes suivants.

Le couplage minimal permet de réinterpréter la méthode de Noether comme une correspondance entre courants conservés et symétries *locales*.

Notons que la méthode de Noether revue ici n'est qu'un cas très particulier de la méthode de Noether (voir par exemple [87] et références ci-dedans). Néanmoins nous n'utiliserons pas ces techniques générales dans cette thèse car nous nous restreindrons au couplage

minimal entre champs scalaires et champs de jauge de spin élevé.

1.1.4.1 Photon de spin 1

L'exemple le plus basique est le photon de spin 1 associé à la conservation de la charge et aux transformations de jauge de l'électromagnétisme. Le but est de coupler un champ de matière, représenté par un champ scalaire complexe ϕ invariant sous la symétrie interne globale (1.8), à un champ (de vecteurs) de jauge électromagnétique A_μ. Le lagrangien de l'électromagnétisme est :

$$\mathcal{L}_{EM} \;=\; -\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu} \;=\; -\frac{1}{4}\, F^2 \tag{1.21}$$

où le tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu} \;=\; 2\,\partial_{[\mu} A_{\nu]}$ (où $[\mu\nu]$ indique une antisymétrie de poids 1 selon ces deux indices) est invariant sous les transformations locales $\delta_\zeta A_\mu \;=\; \partial_\mu \zeta(x)$ et le lagrangien $\mathcal{L}_{EM}$ l'est donc aussi. Le *lagrangien initial libre* (quadratique) est :

$$\mathcal{L}_0 \;=\; \mathcal{L}_{EM} \;+\; \mathcal{L}_{KG}\,.$$

Sa variation par transformation de jauge $\delta_\zeta \phi \;=\; i\, e\, \zeta(x)\, \phi$ est : $\delta_\zeta \mathcal{L}_0 \;=\; -\, e\, \partial_\mu \zeta(x)\, j^\mu$ où e est la *constante de couplage*. La méthode de Noether nous suggère de coupler le courant de charge (1.17) du lagrangien de matière au champ électromagnétique A_μ. On retrouve l'idée que les équations de Maxwell avec sources sont issues du couplage entre le courant j^μ, similaire à un courant électrique, et le champ électromagnétique. En observant la variation du lagrangien modifié, une première correction (ici d'ordre un en la constante de couplage e) est additionnée au lagrangien initial pour donner le *lagrangien du couplage minimal (cubique)* :

$$\mathcal{L}_1 \;=\; \mathcal{L}_0 \;+\; e\, A_\mu\, j^\mu\,.$$

Ce dernier terme compense à l'ordre $\mathcal{O}(e)$ la variation du lagrangien $\mathcal{L}_0$ sous une transformation de jauge : c'est le *terme de couplage minimal*.

A cause de la variation du courant de Noether sur la couche de masse, il génère une variation du lagrangien d'ordre $\mathcal{O}(e^2)$: $\delta_\zeta \mathcal{L}_1 \;=\; e^2\, |\phi|^2\, A_\mu\, \partial^\mu \zeta$. Il faut donc rajouter un autre terme afin de compenser ces modifications. Le lagrangien quartique, dont la variation sera nulle, est :

$$\mathcal{L}_2 \;=\; \mathcal{L}_1 \;-\; \frac{1}{2}\, e^2\, |\phi|^2\, A^2$$

où $|\phi|$ correspond au module de ϕ. On peut le réécrire de manière complète en utilisant la dérivée covariante $\mathcal{D}_\mu \phi \;=\; (\partial_\mu \;-\; ie\, A_\mu)\, \phi$:

$$\mathcal{L}_2 \;\;=\;\; -\frac{1}{4}\, F^2 \;-\; \frac{m^2}{2}\, |\phi|^2 \;-\; \frac{1}{2}\, |\mathcal{D}_\mu \phi|^2\,. \tag{1.22}$$

Nous venons de voir qu'il est nécessaire d'aller à l'ordre 2 en la constante de couplage pour la théorie de spin 1 pour que la nouvelle modification ne contribue plus au courant de Noether. Pour les théories de spin supérieur, il n'est donc pas évident de trouver le courant conservé ! Mais cette méthode fonctionne aussi pour la théorie de Yang-Mills (spin 1 non abélien) et s'arrête également à l'ordre 2.

1.1.4.2 Graviton de spin 2

Le graviton de spin 2 est associé à la conservation de l'énergie-impulsion et aux difféomorphismes de la relativité générale.

Le lagrangien initial est la somme du lagrangien de Klein-Gordon (en espace-temps plat) (1.1) et de celui d'Einstein-Hilbert :

$$\mathcal{L}_0 \,=\, \mathcal{L}_{KG} \,+\, \mathcal{L}_{RG}$$

L'action de Klein-Gordon en espace courbe devient :

$$S_{KG}[\phi,\, g] \,=\, -\int \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi^* \,+\, m^2\,|\phi|^2\right)\sqrt{|g|}\,d^n x \tag{1.23}$$

et le lagrangien de Klein-Gordon en espace courbe correspond au lagrangien final (à tous les ordres) :

$$\mathcal{L}_\infty \,=\, -\,\frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi^* \,+\, m^2\,|\phi|^2\right)\sqrt{|g|} \tag{1.24}$$

La métrique linéarisée s'écrit :

$$g_{\mu\nu} \,=\, \eta_{\mu\nu} \,+\, h_{\mu\nu} \tag{1.25}$$

Le lagrangien du couplage minimal est donc :

$$\mathcal{L}_1 \,=\, \mathcal{L}_0 \,+\, h_{\mu\nu}\,T_R^{\mu\nu}$$

où $T_R^{\mu\nu}$ est le tenseur de Rosenfeld (1.20).

La variation de la métrique représente les difféomorphismes infinitésimaux :

$$\delta_\zeta g_{\mu\nu} \,=\, \mathfrak{L}_\zeta g_{\mu\nu} \tag{1.26}$$

où $\mathfrak{L}$ est la dérivée de Lie. Sa linéarisation donne :

$$\delta_\zeta h_{\mu\nu} \,=\, \mathfrak{L}_\zeta \eta_{\mu\nu} \,=\, \partial_\mu\zeta_\nu \,+\, \partial_\nu\zeta_\mu \tag{1.27}$$

Ceci est la transformation de jauge d'un champ libre de spin 2 sans masse. L'invariance de jauge de $\mathcal{L}_1$ implique la conservation du tenseur de Rosenfeld $\partial_\mu T_R^{\mu\nu} \,\approx\, 0$. Inversement, la méthode de Noether aurait construit le lagrangien de couplage minimal $\mathcal{L}_1$ à partir du tenseur de Noether. Dans le cas de la gravitation, on voit qu'il est nécessaire d'aller à l'ordre infini en la perturbation $h_{\mu\nu}$. Ce processus de reconstruction ne s'arrête donc pas : il faut donc mieux connaitre le résultat final !

1.1.4.3 Bosons de spins élevés

Les bosons sans masse de spin élevé sont associés à la conservation de courants de rang supérieur à deux et à des transformations de jauge encore mystérieuses. La variation du champ tensoriel symétrique de rang r est :

$$\delta_\zeta h_{\mu_1\ldots\mu_r}(x) \,=\, r\,\partial_{(\mu_1}\zeta_{\mu_2\ldots\mu_r)}(x) \,+\, \mathcal{O}(h) \tag{1.28}$$

et généralise les deux cas précédents. Le terme d'interaction ou plus précisément le terme de couplage minimal s'écrit :

$$\mathcal{L}_1 \, - \, \mathcal{L}_0 \, = \, h_{\mu_1 \ldots \mu_r} \, j^{\mu_1 \ldots \mu_r} \, .$$

L'invariance de jauge est garantie à l'ordre le plus bas si j est bien un courant conservé. C'est pourquoi les courants conservés sont importants pour construire des interactions entre matière et bosons de jauge de spin élevé. Remarquons que dans la théorie des spins élevés, il est également nécessaire d'aller à l'ordre infini, comme pour la théorie de spin 2. Mais dans ce cas, le problème reste ouvert au niveau d'un principe variationnel standard car la géométrie sous-jacente aux spins élevés est encore mal connue (voir cependant la proposition [91]). Au niveau des équations du mouvement, le problème a été résolu par Vasiliev autour de l'espace d'anti de Sitter (en (3+1) dimensions, il est parvenu à écrire des interactions cohérentes à tous les ordres au début des années 1990) [30–32] ce qui n'est pas le cas dans l'espace-temps plat de Minkowski et la réponse est probablement inexistante.

1.2 Formulation ambiante

Le tableau 1.1 présente les notations des objets de l'espace plat ambiant et celles de l'espace-temps de courbure constante.

Objet	Espace ambiant $\mathbb{R}_0^D$	Espace-temps de courbure constante $\mathcal{M}_n$
Coordonnées	X^A	x^μ
Scalaire	$\Phi(X)$	$\phi(x)$
Conjugué	$\Phi^\dagger(X)$	$\phi^*(x)$
Vecteur	$T_A(X)$	$t_\mu(x)$
Tenseur	$T_{A_1 \ldots A_r}(X)$	$t_{\mu_1 \ldots \mu_r}(x)$
Metrique	$G_{AB} \, \sim \, \eta_{AB}$	$g_{\mu\nu}$
Dérivée covariante	$\mathcal{D}_A$	∇_μ
D'Alembertien courbe	$\mathcal{D}_D^2 \, = \, G^{AB} \, \mathcal{D}_A \, \mathcal{D}_B$	$\nabla_n^2 \, = \, g^{\mu\nu} \, \nabla_\mu \, \nabla_\nu$
D'Alembertien ambiant	$\Box_D \, = \, \eta^{AB} \, \partial_A \, \partial_B$	$\boxtimes_n = \nabla^2 \, \pm \, \frac{1}{R^2} \, (h \, (h \, + \, n \, - \, 1) - r)$

TABLE 1.1 – Dictionnaire Espace ambiant/Espace-temps de courbure constante

1.2.1 Plongement

L'objectif est de calculer les courants conservés dans un espace-temps de courbure constante. Les espaces-temps de (anti) de Sitter peuvent être réalisés comme des hyperboloïdes plongés dans un espace plat auxiliaire (dit *« ambiant »*) avec une dimension de plus.

Mais comme il est bien plus facile de faire des calculs en espace-temps plat, on cherche à établir un dictionnaire (ou une correspondance), appelé *construction ambiante* entre les quantités de l'espace-temps de courbure constante $(A)dS_n$ et celles de l'espace plat ambiant $\mathbb{R}^D$ avec $D = n + 1$. Ceci autorise la construction explicite des courants conservés dans les espaces-temps courbes de (anti) de Sitter à partir des courants connus dans l'espace de Minkowski.

Pour prendre un exemple simple, la surface d'une sphère est difficile à se représenter comme un espace courbe à deux dimensions mais on la visualise aisément comme un sous-espace de l'espace plat ambiant à 3 dimensions.

Soient deux variétés $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de dimensions m et n $(n > m)$ respectivement avec des systèmes de coordonnées locales x^μ et X^A. Une application lisse $i : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ telle que la matrice jacobienne $\partial X^A/\partial x^\mu$ de la transformation est de rang m est une *immersion*. Elle est un *plongement* si, de plus, l'application i est une injection. Cela signifie qu'une immersion est localement fidèle (c'est-à-dire injective) tandis qu'un plongement l'est globalement. Intuitivement, l'image d'une immersion peut avoir des auto-intersections tandis que l'image $i(\mathcal{M})$ d'un plongement est une authentique variété, appelée *sous-variété* de $\mathcal{N}$. Par abus de notation, on écrit $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. La différence $n - m$ s'appelle la *codimension* de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ et les équations $X^A = X^A(x^\mu)$ sont appelées les *équations paramétriques* de la sous-variété.

Le *théorème de plongement* (respectivement d'immersion) de Hassler Whitney (mathématicien américain) de 1935 [89] dit que toute variété différentielle $\mathcal{M}$ de dimension $m \in \mathbb{N}_0$ peut être plongée (respectivement immergée) de façon lisse dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2m}$ (donc $\mathcal{M}$ est de codimension m) (respectivement dans $\mathbb{R}^{2m-1}$). Bien qu'il soit plus aisé de visualiser la géométrie d'une variété donnée à deux dimensions $(m = 2)$ par plongement dans $\mathbb{R}^3$ $(n = 3)$, ce n'est cependant pas toujours possible et il faut en général recourir à $\mathbb{R}^4(2m = 4)$ si l'on rejette les auto-intersections. La sphère ou le cylindre sont représentables fidèlement en trois dimensions, mais pas la bouteille de Klein, du moins globalement.

Il est néanmoins possible que la codimension soit plus petite que m (par exemple, les sphères $\mathcal{M} = \mathbb{S}^m$ plongées dans $\mathcal{N} = \mathbb{R}^{m+1}$ sont de codimension 1). Quoi qu'il en soit, le théorème de Whitney implique que, quoique la notion de variété « abstraite » soit définie de manière intrinsèque, il n'y a pas de perte de généralité à la concevoir « concrètement » par plongement (malheureusement, de façon générique, dans un espace de dimension double, cependant pour l'exemple de l'espace projectif réel de dimension $m = 2^k$, la dimension de l'espace euclidien $2m$ est optimale.)

Un problème géométrique difficile est celui du plongement *isométrique* (qui « conserve la longueur des courbes ») d'une variété (pseudo-) riemannienne de dimension m donnée dans un espace plat pseudo-euclidien $\mathbb{R}^{p,q}$ muni d'une métrique diagonale de signature (p, q). Un théorème de John Nash [5] (mathématicien et économiste américain) de 1956 [90] affirme que toute vrièiété riemannienne lisse de dimension m peut être plongée de façon lisse et isométrique dans un espace euclidien $\mathbb{R}^n$ de dimension n suffisamment grande. Ce théorème a été généralisé par Michael Gromov (mathématicien russe) en 1972 aux variétés

5. Le film "Un homme d'exception" (titre original en anglais "A Beautiful Mind") a été réalisé en 2001 par Ron Howard et est adapté de la biographie de Nash écrite par Sylvia Nasar.

pseudo-riemanniennes. Lorsqu'elle est munie de la métrique plate, la bouteille de Klein peut être plongée isométriquement en 4D. Le tore peut être plongé en 3D mais pas de manière isométrique ; il est nécessaire d'avoir une quatrième dimension pour cela.

1.2.2 Espaces-temps de courbure constante

Paul Dirac affimait penser géométriquement. Abdus Salam raconte [92] que, à ce sujet, un jour Dirac lui a posé la question suivante : « Comment te représentes-tu l'espace de de Sitter ? » Salam répondit : « J'écris la métrique et alors je réfléchis à propos de la structure des termes dans l'expression. » Dirac conclut : « Précisément comme je l'imaginais. Tu penses algébriquement (...) Je me représente, sans effort, l'espace de de Sitter comme une surface à quatre dimensions dans un espace à cinq dimensions. »

La construction par plongement de l'espace-temps de (anti) de Sitter [93, 94] est semblable à celle de la sphère $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Les espaces-temps dS_n et AdS_n sont à *symétrie maximale* c'est-à-dire que leur groupe d'isométries possède dix paramètres comme le groupe de Poincaré ou encore que leur courbure est (covariantement) constante.

De manière plus générale, l'*espace-temps de courbure constante* est ici une variété $\mathcal{M}_n$ de dimension n et de signature quelconque, plus concrètement définie par $X^2 = \eta_{AB}\, X^A\, X^B = \pm R^2$ avec le *rayon de courbure* $R \neq 0$ et η_{AB} le tenseur métrique plat de l'espace ambiant et de signature quelconque. On la plonge dans un espace plat ambiant privé de l'origine $\mathbb{R}^D_0$ de dimension $D = n+1 : \mathcal{M}_n \subset \mathbb{R}^D_0$. La région $\mathbb{R}^D_0$ contient $\mathcal{M}_n$ et est définie par $X^2 \neq 0$. Ceci implique une bijection entre les deux systèmes de coordonnées :

$$\mathbb{R}^D_0 \quad \longleftrightarrow \quad]0; +\infty[\times \mathcal{M}_n \quad : \quad X^A \quad \longleftrightarrow \quad (\rho,\, x^\mu)$$

où X représente les coordonnées cartésiennes dans l'espace plat ambiant $\mathbb{R}^D_0$, $\rho^2 = |X|^2$ le carré de la coordonnée radiale et x les coordonnées sur l'espace-temps de courbure constante $\mathcal{M}_n$. Cette bijection correspond à un changement de coordonnées entre les cartésiennes et les « sphériques ».

L'*inclusion*, qui est infiniment dérivable,

$$i \,:\, \mathcal{M}_n \,\hookrightarrow\, \mathbb{R}^D_0 \,:\, x^\mu \,\longmapsto\, X^A(x^\mu) \tag{1.29}$$

fournit les équations paramétriques de $\mathcal{M}_n$ pour $X^2 \neq 0$. Elle définit un plongement de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathbb{R}^D$ (paragraphe 1.2.1).
L'inclusion n'est pas inversible. Pour le comprendre, on peut se placer sur une sphère $\mathbb{S}^2$ de rayon donné $\rho = R$. Pour définir un point, il suffit de connaitre deux angles. Inversement, si l'on est dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^3_0$, deux angles définissent une demi-droite et non pas un point.

Le *"pull-back"* (signifiant "tirer en arrière") associé à l'inclusion (1.29) :

$$i^* \,:\, \mathscr{X}_r(\mathbb{R}^D_0) \,\to\, \mathscr{X}_r(\mathcal{M}_n)$$

est tel qu'à un tenseur dans l'espace ambiant correspond un tenseur dans l'espace-temps de courbure constante :

$$T_{A_1\ldots A_r}(X) \longmapsto t_{\mu_1\ldots\mu_r}(x) = \frac{\partial X^{A_1}(x)}{\partial x^{\mu_1}}\ldots\frac{\partial X^{A_r}(x)}{\partial x^{\mu_r}}\, T_{A_1\ldots A_r}(X(x)) \tag{1.30}$$

où

$$\mathscr{X}_r(\mathbb{R}^D_0) = \{T_{A_1\ldots A_r}(X)\}$$

représente l'espace des tenseurs covariants de rang r dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^D_0$ (on note le champ scalaire dans l'espace ambiant Φ) et

$$\mathscr{X}_r(\mathcal{M}_n) = \{t_{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\}$$

représente l'espace des tenseurs covariants de rang r dans l'espace-temps de courbure constante $\mathcal{M}_n$ (on note le champ scalaire dans l'espace-temps de courbure constante ϕ).

Cela revient à garder seulement les composantes du vecteur de l'espace ambiant dépendant des vecteurs de la base de coordonnées de l'espace tangent $T_x\mathcal{M}_n$ au point x à l'espace-temps courbe $\mathcal{M}_n$. Le « pull-back » n'est pas non plus inversible car tout vecteur de l'espace ambiant centré sur l'origine et projeté orthogonalement sur une sphère (également centrée sur l'origine) donne un vecteur nul.

1.2.3 Projection des tenseurs de l'espace plat ambiant sur l'espace-temps de courbure constante

Nous venons de voir qu'il était possible de trouver le tenseur de l'espace-temps de courbure constante à partir de son homologue dans l'espace ambiant en faisant un « pull-back ». Il existe une autre méthode, équivalente mais plus intuitive (et que nous utiliserons dans la suite de ce document) : la *projection* des coordonnées (dans laquelle on ignore la composante radiale ρ) :

$$\text{“}i^{-1}\text{”} : \mathbb{R}^D_0 \to \mathcal{M}_n : X \longmapsto \text{“}x(X)\text{”} \tag{1.31}$$

et la projection orthogonale des vecteurs sur l'espace tangent :

$$\vec{v} \quad \longmapsto \quad \overrightarrow{v_{\backslash\backslash}} \ .$$

Le procédé est le même que lorsqu'on projette orthogonalement un vecteur de l'espace ambiant $\mathbb{R}^3_0$ sur une sphère $\mathbb{S}^2$ centrée à l'origine. La méthode de la projection orthogonale permet de calculer le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\vec{v}\,.\,\vec{w} = \vec{v}\,.\,\overrightarrow{w_{\backslash\backslash}}$$

où $\overrightarrow{w_{\backslash\backslash}}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\vec{w}$ sur la droite portant le vecteur $\vec{v}$ c'est-à-dire que le vecteur $\overrightarrow{w_{\backslash\backslash}}$ est colinéaire au vecteur $\vec{v}$.

Donc on en déduit l'expression du vecteur $\overrightarrow{w}_{\backslash\backslash} = \dfrac{(\vec{v}\,.\,\vec{w})}{\vec{v}^2}\vec{v}$. On calcule le compémentaire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w_\perp} &= \vec{w} - \overrightarrow{w_{\backslash\backslash}} \\ &= \vec{w} - \frac{\vec{v}\,.\,\vec{w}}{\vec{v}\,.\,\vec{v}}\vec{v} \\ &= \left(1 - \frac{\vec{v}\ \vec{v}.}{\vec{v}\,.\,\vec{v}}\right)\vec{w} \\ &= \mathcal{P}\,\vec{w}\,.\end{aligned} \tag{1.32}$$

On vient ainsi de construire le projecteur $\mathcal{P} = 1 - \dfrac{\vec{v}\ \vec{v}.}{\vec{v}\,.\,\vec{v}}$.
De manière analogue, l'expression du *projecteur* d'un vecteur de l'espace ambiant donne son équivalent dans l'espace-temps de courbure constante :

$$\mathcal{P}^B_A = \delta^B_A - \frac{X_A X^B}{X^2}$$

où δ^B_A est le delta de Kronecker. Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment utiliser ce projecteur.

1.2.4 Dictionnaire Espace plat ambiant/Espace-temps de courbure constante

La projection des vecteurs (et de manière générale, des tenseurs) impose certaines conditions.

1.2.4.1 Champs scalaires

Comme nous l'avons vu dans la table 1.1, ϕ représente le champ scalaire dans l'espace-temps de courbure constante et Φ le champ scalaire dans l'espace ambiant. Ils sont liés par la définition suivante [6] :

$$\phi(x^\mu) := \Phi(\rho, x^\mu)|_{\rho=R} = \Phi(R,\, x^\mu) = \Phi(X^A)|_{X^2 = \pm R^2}\,. \tag{1.33}$$

Dans notre cas, il y a une correspondance entre les coordonnées cartésiennes X^A et les « sphériques » (ρ, x^μ). Comme on souhaite faire abstraction de la coordonnée radiale ρ, les fonctions Φ doivent être *homogènes* de degré h (pour des polynômes, leurs termes sont des monômes de degré identique h) :

$$\Phi(\lambda X) = \lambda^h\,\Phi(X)\,. \tag{1.34}$$

6. On fait ici un abus de notation : on écrit $\Phi(X^A) = \Phi(\rho,\, x^\mu)$ au lieu de $\Phi(X^A) = \Phi'(\rho,\, x^\mu)$.
De plus, par convention, le signe supérieur se rattachera à l'espace de de Sitter tandis que le signe inférieur sera lié à l'espace d'anti de Sitter.

En effet, on prouve la bijection entre champs ϕ sur $\mathcal{M}_n$ et champs Φ sur $\mathbb{R}^D$ homogènes de degré h en utilisant la définition (1.33) :

$$\begin{aligned}\Phi(\rho,\, x^\mu) &= \Phi\left(\frac{\rho}{R}\, R,\, x^\mu\right) = \Phi\left(\frac{\rho}{R}\, X^A\right) \\ &= \left(\frac{\rho}{R}\right)^h \Phi\left(R,\, \frac{R}{\rho}\, x^\mu\right) = \left(\frac{\rho}{R}\right)^h \Phi(X^A) \\ &= \left(\frac{\rho}{R}\right)^h \phi\left(\frac{R}{\rho}\, x^\mu\right).\end{aligned} \tag{1.35}$$

Il y a donc bien une bijection entre les deux champs scalaires ϕ et Φ pour h fixé (mais quelconque).

L'équation (1.34) implique que $X^A \partial_A \Phi = h\,\Phi$ et $X^A\, X^B\, \partial_A\, \partial_B \Phi = h\,(h-1)\,\Phi$. Enfin, il est important de noter que pour la sphère, h est pris réel mais que pour les espaces-temps dS_n, h sera complexe. Notons que la construction ambiante est aussi appelée *réduction dimensionnelle radiale* en réinterprétant la condition d'homogénéité [95].

1.2.4.2 Champs de vecteurs

Comme nous l'avons déjà dit, projeter un vecteur radial de l'espace ambiant $\mathbb{R}^3_0$ sur une sphère $\mathbb{S}^2$ centrée à l'origine donne un vecteur nul. Il n'est donc pas nécessaire de s'en préoccuper. Pour généraliser cet exemple à un espace-temps quelconque de courbure constante, on définit la *tangentialité*. Soit un scalaire :

$$X^2 = \pm R^2 = X_A\, X^A, \tag{1.36}$$

on dérive par rapport à x^μ :

$$2\, X_A\, \frac{\partial X^A}{\partial x^\mu} = 0\,. \tag{1.37}$$

Les vecteurs de la base de coordonnées de l'espace tangent sont $e^A_\mu = \dfrac{\partial X^A}{\partial x^\mu}$. Ces vecteurs *tangents* (ou « gradients ») sont le long des surfaces $\mathcal{M}_n$ (« équipotentielles ») autrement dit ils sont *« transverses »* (orthogonaux à la direction radiale X_A).

A l'inverse, un vecteur $V_A(X)$ est *radial* (ou *longitudinal*) s'il est proportionnel à X_A c'est-à-dire $V_A(X) = X_A\, U(X)$ où $U(X)$ est un scalaire.

Si le vecteur V_A est radial, alors $V_\mu = \dfrac{\partial X^A}{\partial x^\mu}\, V_A = 0$ en vertu de (1.37).

Les termes $V_A(X) = W_A(X) + X_A\, U(X)$ seront notés par une *relation d'équivalence* $V_A(X) \sim W_A(X)$ ce qui revient à supprimer tous les vecteurs radiaux car leur projection sur l'espace tangent est nulle.

Une manière d'éliminer les termes radiaux, plus précisément de choisir un représentant dans la classe d'équivalence, est de projeter ou alors d'imposer la transversalité : si V_A est transverse alors $X^A\, V_A(X) = 0$ car si $V_A(X) = X_A\, U(X)$ alors $X^2\, U(X) = 0 \;\Rightarrow\; U(X) = 0$

car $X^2 \neq 0$.

Comme les scalaires, les vecteurs doivent être homogènes de degré h :

$$V_A(\lambda X) \,=\, \lambda^h \, V_A(X)$$

afin d'avoir une bijection entre champs de vecteurs $v_\mu(x)$ sur $\mathcal{M}_n$ et champs de vecteurs transverses $V_A(X)$ de degré d'homogénéité fixé h.

1.2.4.3 Champs de tenseurs

Les tenseurs symétriques sont la généralisation du cas des vecteurs.

Les composantes des tenseurs doivent donc être tangentes, et donc transverses :

$$X^{A_i} \, T_{A_1 \ldots A_r}(X) \,=\, 0 \tag{1.38}$$

et ce pour tous les indices i, ce qui revient à projeter (pour chaque indice) le tenseur sur l'espace tangent.

Les tenseurs doivent être homogènes de degré h qui peut dépendre du rang r :

$$T_{A_1 \ldots A_r}(\lambda X) \,=\, \lambda^h \, T_{A_1 \ldots A_r}(X) \,. \tag{1.39}$$

Nous sommes parvenu à une correspondance entre les tenseurs (vecteurs et bien sûr scalaires) de l'espace-temps de courbure constante et ceux de l'espace ambiant.

1.2.4.4 Tenseur métrique

Le tenseur métrique courbe (d'ordre 2, homogène, tangent) de l'espace-temps de courbure constante, noté $g_{\mu\nu}$, est lié à son représentant dans l'espace ambiant, noté G_{AB}, par la relation :

$$g_{\mu\nu} \;\; = \;\; \frac{\partial X^A}{\partial x^\mu} \, \frac{\partial X^B}{\partial x^\nu} \, G_{AB} \,. \tag{1.40}$$

Ce que exprime symboliquement par :

$$g_{\mu\nu} \,\longleftrightarrow\, G_{AB} \,.$$

Il est possible d'exprimer le représentant du tenseur métrique courbe G_{AB} dans l'espace ambiant à partir du tenseur métrique plat de l'espace ambiant (et de signature quelconque) η_{AB} :

$$G_{AB} \,=\, \mathcal{P}^C_A \, \mathcal{P}^D_B \, \eta_{CD} \,.$$

On en déduit facilement l'expression explicite de G_{AB} :

$$G_{AB} \;=\; \eta_{AB} - \frac{X_A X_B}{X^2} \tag{1.41}$$

c'est-à-dire $G_{AB} \sim \eta_{AB}$ en utilisant la relation d'équivalence définie dans le paragraphe 1.2.4.2. De plus, on remarque que $G^B_A = \mathcal{P}^B_A$.
Enfin, les relations (1.40) et (1.41) impliquent :

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial X^A}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial X^B}{\partial x^\nu}\,\eta_{AB}\,.$$

1.2.4.5 Dérivées covariantes

On cherche l'opérateur $\mathcal{D}_A$ dans l'espace ambiant correspondant à la dérivée covariante de l'espace-temps de courbure constante ∇_μ :

$$\nabla_\mu \;\longleftrightarrow\; \mathcal{D}_A\,. \tag{1.42}$$

Nous allons maintenant construire le représentant $\mathcal{D}_A$ de la dérivée covariante ∇_μ à partir de la dérivée partielle ∂_A de l'espace ambiant.

D'un scalaire

Pour un scalaire Φ, les dérivées covariante et partielle sont égales :

$$\mathcal{D}_A\Phi \;=\; \partial_A\Phi\,. \tag{1.43}$$

D'un vecteur

Pour représenter la dérivée covariante d'un vecteur v_μ, on projette son représentant ambiant V_A, on transporte parallèlement le vecteur dans l'espace ambiant (donc avec la dérivée partielle) puis on re-projette :

$$\mathcal{D} \;=\; \mathcal{P}\circ\partial\circ\mathcal{P}\,.$$

De manière explicite, cela donne :

$$\mathcal{D}_A V_B \;:=\; \mathcal{P}^C_A\,\mathcal{P}^D_B\,\partial_C(\mathcal{P}^E_D\,V_E)\,. \tag{1.44}$$

Etant donné le nombre de projecteurs, la difficulté est de faire le « produit » de plusieurs dérivées covariantes.

La dérivée covariante ∇_μ est liée à la *connexion de Levi-Civita* (une connexion affine, métrique, sans torsion et dont ses composantes sont les *symboles de Christoffel*). Comme cette dernière est unique, il suffit de montrer que la dérivée $\mathcal{D}_A$ vérifie les trois axiomes

suivants (vérifiés également par ∇_μ) pour démontrer la formule (1.44) de la dérivée covariante :
- la *règle de Leibniz* ou dérivation : $\mathcal{D}_A(\Phi_1\,\Phi_2) = \mathcal{D}_A(\Phi_1).\Phi_2 + \Phi_1.\mathcal{D}_A(\Phi_2)$
- la préservation du tenseur métrique : $\mathcal{D}_A\,G_{BC} = 0$
- la nullité de la *torsion* : $[\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B]\Phi = 0$

D'un tenseur

On définit la notation suivante permettant de simplifier l'écriture des formules :

$$(\mathcal{P}T)_{A_1\ldots A_r} := \mathcal{P}^{B_1}_{A_1}\ldots\mathcal{P}^{B_r}_{A_r}\,T_{B_1\ldots B_r}\,. \tag{1.45}$$

Pour trouver la dérivée covariante d'un tenseur, on procède de la même façon que pour un vecteur, mais en projetant pour chaque indice et en utilisant (1.45) :

$$\mathcal{D}_A T_{B_1\ldots B_r} := \mathcal{P}^C_A\,\mathcal{P}^{D_1}_{B_1}\ldots\mathcal{P}^{D_r}_{B_r}\,\partial_C\big((\mathcal{P}T)_{D_1\ldots D_r}\big)$$

Il est également possible d'exprimer la dérivée covariante de l'espace courbe ∇_μ en fonction de la dérivée partielle de l'espace courbe ∂_μ comme nous le verrons dans le paragraphe 1.2.5.4.

1.2.4.6 Opérateur d'Alembertien

A partir de (1.42) , il est bon de remarquer la relation d'équivalence entre l'opérateur d'Alembertien de l'espace-temps de courbure constante $\nabla^2_n = g^{\mu\nu}\,\nabla_\mu\,\nabla_\nu$ et son représentant en espace ambiant $\mathcal{D}^2_D = G^{AB}\,\mathcal{D}_A\,\mathcal{D}_B$:

$$\nabla^2_n \longleftrightarrow \mathcal{D}^2_D\,.$$

De plus, il est utile pour la suite de chercher la relation d'équivalence entre l'opérateur d'Alembertien [7] en espace ambiant $\Box_D = \eta^{AB}\,\partial_A\,\partial_B$ et son correspondant en espace-temps de courbure constante $\boxtimes_n$ (démonstration en annexe A.1). Pour les scalaires, l'équivalence est :

$$\nabla^2_n\,\phi \longleftrightarrow \mathcal{D}^2_D\Phi = \left[\Box_D - \frac{1}{X^2}\,h\,(h + D - 2)\right]\,\Phi \tag{1.46}$$

et également

$$\Box_D\,\Phi \longleftrightarrow \boxtimes_n\,\phi = \left[\nabla^2_n \pm \frac{1}{R^2}\,h\,(h + n - 1)\right]\,\phi\,. \tag{1.47}$$

L'opérateur « d'Alembertien » appliqué aux tenseurs symétriques est :

$$\Box_D\;T_{A_1\ldots A_r} \longleftrightarrow \boxtimes_n\,t_{\mu_1\ldots\mu_r} = \left[\nabla^2_n \pm \frac{1}{R^2}\left(h\,(h + n - 1) - r\right)\right]\,t_{\mu_1\ldots\mu_r} \tag{1.48}$$

7. Lorsqu'on travaillera en espace-temps quelconque, la dimension de l'espace-temps dans laquelle on exprime l'opérateur sera notée en indice.

1.2.4.7 Synthèse

Nous venons de détailler la transformation des objets utiles pour la suite. Une synthèse est présentée dans la table 1.2.

Objet	Espace ambiant	Espace-temps de courbure constante
Tenseur métrique	$G_{AB} \sim \eta_{AB}$	$g_{\mu\nu}$
Dérivée covariante	$\mathcal{D}_A$	∇_μ
D'Alembertien « courbe »	$\mathcal{D}_D^2 = G^{AB}\,\mathcal{D}_A\,\mathcal{D}_B$	$\nabla_n^2 = g^{\mu\nu}\,\nabla_\mu\,\nabla_\nu$
D'Alembertien « ambiant »	$\Box_D = \eta^{AB}\,\partial_A\,\partial_B$	$\boxtimes_n = \nabla_n^2 \pm \frac{1}{R^2}\,(h\,(h+n-1)-r)$

TABLE 1.2 – Dictionnaire Espace ambiant/Espace-temps de courbure constante

Ces transformations demandent des conditions strictes. Il faut donc veiller à ce qu'elles soient bien toutes vérifiées lorqu'on fait des calculs.

1.2.5 Quelques applications

Pour illustrer ces outils, nous allons détailler quelques exemples.

1.2.5.1 Harmoniques sphériques $\mathbb{S}^n$

Les *harmoniques sphériques* sont la restriction sur la sphère $\mathbb{S}^n$ de polynômes harmoniques et homogènes (de degré l) sur $\mathbb{R}^D$. L'opérateur d'Alembertien « ambiant » correspondant, dans le cas euclidien, à l'opérateur *laplacien* (appelé aussi *opérateur de Laplace*) $\Box_D = \Delta_D$ est nul et est équivalent à $\boxtimes_{\mathbb{S}^n}$:

$$\boxtimes_{\mathbb{S}^n} Y_l = \left[\Delta_{\mathbb{S}^n} + \frac{1}{R^2}\,l(l+n-1)\right] Y_l = 0 \tag{1.49}$$

$$\Rightarrow \Delta_{\mathbb{S}^n} Y_l = -\frac{1}{R^2}\,l(l+n-1)\,Y_l \tag{1.50}$$

avec $Y_l = \sum_m c_m\,Y_l^m$ et $\Delta_{\mathbb{S}^n} = \nabla^2_{\mathbb{S}^n}$. Cette équation ressemble donc à l'équation de Klein-Gordon (1.2).

Comme nous venons de le voir, les harmoniques sphériques sont faciles à définir mais compliquées à écrire. Dans le paragraphe suivant, nous allons décrire un cas similaire dans un autre espace.

1.2.5.2 Champ scalaire dans $(A)dS_n$

Comme pour les harmoniques sphériques, on souhaite calculer $\nabla^2_{(A)dS_n}\phi$ pour l'espace-temps $(A)dS_n$ en utilisant (1.46). Cependant, il est impératif d'imposer une condition sur la partie réelle du degré d'homogénéité [96] :

$$\Re(h) = \frac{2-D}{2} = 1 - \frac{D}{2} = \frac{1-n}{2}\,. \tag{1.51}$$

La partie imaginaire du degré d'homogénéité h est $\Im(h) = \mu$.

Dans l'espace-temps de de Sitter, l'opérateur d'Alembertien est donc :

$$\Box_D\,\Phi \longleftrightarrow \boxtimes_{dS_n}\phi = \left[\nabla^2_{dS_n} - \frac{1}{R^2}\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \mu^2\right)\right]\phi\,. \tag{1.52}$$

Pour l'espace-temps d'anti de Sitter, il « suffit » de transformer μ en $i\,\mu$. En effet, le signe de μ^2 est important pour l'*unitarité* [97] (car il faut que l'espace des solutions de l'équation d'onde soit un espace de Hilbert) :

$$\Box_D\,\Phi \longleftrightarrow \boxtimes_{AdS_n}\phi = \left[\nabla^2_{AdS_n} + \frac{1}{R^2}\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - \mu^2\right)\right]\phi\,. \tag{1.53}$$

Le terme $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ est un terme purement géométrique alors que μ^2 est le paramètre sans unité ressemblant à la masse. Les conditions d'homogénéité et de transversalité des courants contraindront également le terme de masse à cette valeur.

De façon générale, un champ scalaire « massif » ϕ correspondant à un champ scalaire harmonique Φ obéit à :

$$\boxtimes_n\phi = \nabla^2_{(A)dS_n}\phi \mp \frac{1}{R^2}\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\phi - \frac{\mu^2}{R^2}\,\phi\,. \tag{1.54}$$

Lorsque le rayon de courbure R tend vers l'infini, les espaces-temps de (anti) de Sitter ressemblent à celui de Minkowski. Si on prend la limite de (1.54) où $\mu \to \infty$ et $R \to \infty$ avec $\mu/R = m$ fixé, alors on obtient l'équation d'onde (1.2) d'un champ scalaire de masse m.

1.2.5.3 Commutateur de dérivées covariantes : un exemple détaillé

Ce qui suit est un exemple de calcul employant la méthode utilisée dans toute la suite de ce document. On calcule $\mathcal{D}_{[A}\mathcal{D}_{B]}\Phi$:

$$\mathcal{D}_{[A}\mathcal{D}_{B]}\Phi \,=\, \frac{1}{2}\left[\mathcal{D}_A\mathcal{D}_B\Phi \,-\, \mathcal{D}_B\mathcal{D}_A\Phi\right] \,=\, \frac{1}{2}\left[\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B\right]\Phi\,. \tag{1.55}$$

Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\partial_{[A}\mathcal{D}_{B]}\Phi &= \partial_{[A}\left(\mathcal{P}^C_{B]}\partial_C\Phi\right)\\
&= \partial_{[A}\left(\left(\delta^C_{B]} \,-\, \frac{X_{B]}X^C}{X^2}\right)\partial_C\Phi\right)\\
&= \partial_{[A}\left(\partial_{B]}\Phi \,-\, h\,\frac{X_{B]}}{X^2}\Phi\right)\\
&= \partial_{[A}\partial_{B]}\Phi \,-\, \frac{h}{X^2}\,\eta_{[AB]}\,\Phi + \,2h\,\frac{X_{[A}\,X_{B]}}{(X^2)^2}\,\Phi \,-\, \frac{h}{X^2}\,X_{[B}\partial_{A]}\Phi
\end{aligned}$$

Le premier terme est nul car il est antisymétrique alors que les dérivées partielles commutent. Le second est nul également car la métrique plate doit être symétrique. Le troisième est nul pour une raison similaire. Il reste donc :

$$\partial_{[A}\mathcal{D}_{B]}\Phi \;=\; -\,\frac{h}{X^2}\,X_{[B}\partial_{A]}\Phi\,.$$

Enfin, on projette ce terme proportionnel à X ; il va donc donner zéro. Le commutateur est donc nul. Il faut faire attention. Dans tous les cas, les termes longitudinaux ne sont négligeables qu'à la dernière étape du développement. De plus, on parle de termes longitudinaux seulement lorsqu'ils sont proportionnels au vecteur radial X_A (ayant un indice libre, jamais un indice contracté).

1.2.5.4 Dérivée covariante d'un vecteur en coordonnées sphériques

Afin d'avoir un exemple concret, l'objectif de cette sous-section est de calculer la dérivée covariante d'un vecteur en coordonnées sphériques en utilisant les définitions ci-dessus [98] puis en vérifiant à l'aide de la connexion de Levi-Civita.

En trois dimensions, les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées sphériques sont :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= (X^A) = \left\{\begin{array}{ll} X &= r\,\sin\theta\,\cos\varphi\\ Y &= r\,\sin\theta\,\sin\varphi\\ Z &= r\,\cos\theta\end{array}\right.\\
&= X\,\overrightarrow{1_X} + Y\,\overrightarrow{1_Y} + Z\,\overrightarrow{1_Z}\,.
\end{aligned} \tag{1.56}$$

L'intervalle d'espace-temps est :

$$ds^2_{\mathbb{S}^3} \;=\; dr^2 \;+\; r^2\, d\theta^2 \;+\; r^2\, \sin^2\theta\, d\varphi^2\,.$$

La métrique en coordonnées sphériques $(\rho, x^\mu) = (r,\, \theta, \varphi)$ est :

$$g_{\mu\nu} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\, \sin^2\theta \end{pmatrix}\,.$$

Les vecteurs tangents orthogonaux sont définis par :

$$\left(\frac{\partial X^A}{\partial x^\mu}\right) \;=\; \frac{\partial\, \overrightarrow{OM}}{\partial x^\mu} \;=\; \begin{cases} \overrightarrow{e_r} = & \dfrac{\partial\, \overrightarrow{OM}}{\partial r} \\ \overrightarrow{e_\theta} = & \dfrac{\partial\, \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \\ \overrightarrow{e_\varphi} = & \dfrac{\partial\, \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\,. \end{cases}$$

Les vecteurs orthonormés sont définis par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{1_r} = & g_{rr}^{-1/2}\ \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_r} \\ \overrightarrow{1_\theta} = & g_{\theta\theta}^{-1/2}\ \overrightarrow{e_\theta} = \dfrac{1}{r}\ \overrightarrow{e_\theta} \\ \overrightarrow{1_\varphi} = & g_{\varphi\varphi}^{-1/2}\ \overrightarrow{e_\varphi} = \dfrac{1}{r\, \sin\theta}\ \overrightarrow{e_\varphi}\ . \end{cases}$$

Les vecteurs orthonormés de la base de coordonnées sphériques en fonction des vecteurs de la base de coordonnées cartésiennes sont donc :

$$\begin{cases} \overrightarrow{1_r} = & \sin\theta\, \cos\varphi\ \overrightarrow{1_X} \;+\; \sin\theta\, \sin\varphi\ \overrightarrow{1_Y} \;+\; \cos\theta\ \overrightarrow{1_Z} \\ \overrightarrow{1_\theta} = & \cos\theta\, \cos\varphi\ \overrightarrow{1_X} \;+\; \cos\theta\, \sin\varphi\ \overrightarrow{1_Y} \;-\; \sin\theta\ \overrightarrow{1_Z} \\ \overrightarrow{1_\varphi} = & -\sin\varphi\ \overrightarrow{1_X} \;+\; \cos\varphi\ \overrightarrow{1_Y}\ . \end{cases}$$

On inverse cette base :

$$\begin{cases} \overrightarrow{1_X} = & \sin\theta\, \cos\varphi\ \overrightarrow{1_r} \;+\; \cos\theta\, \cos\varphi\ \overrightarrow{1_\theta} \;-\; \sin\varphi\ \overrightarrow{1_\varphi} \\ \overrightarrow{1_Y} = & \sin\theta\, \sin\varphi\ \overrightarrow{1_r} \;+\; \cos\theta\, \sin\varphi\ \overrightarrow{1_\theta} \;+\; \cos\varphi\ \overrightarrow{1_\varphi} \\ \overrightarrow{1_Z} = & \cos\theta\ \overrightarrow{1_r} \;-\; \sin\theta\ \overrightarrow{1_\theta}\ . \end{cases}$$

Soit un vecteur

$$\vec{V} = V_X \overrightarrow{1_X} + V_Y \overrightarrow{1_Y} + V_Z \overrightarrow{1_Z} = v^r \overrightarrow{e_r} + v^\theta \overrightarrow{e_\theta} + v^\varphi \overrightarrow{e_\varphi},$$

si $\vec{V}$ est transverse ($\vec{V}.\overrightarrow{OM} = 0$), alors $v^r = 0$.

On exprime la dérivée covariante d'un vecteur en coordonnées sur la sphère (lettres grecques) v_ν à partir du vecteur correspondant en coordonnées cartésiennes (lettres latines) V_A grâce à (1.30) et (1.44). Comme le vecteur V_A est transverse, il n'est pas nécessaire de le projeter et la composante radiale v_r est nulle :

$$\begin{aligned} v_\nu &= \vec{e_\nu}.\vec{V} \\ &= \frac{\partial X^A}{\partial x^\nu} V_A \,. \end{aligned}$$

Les composantes de la dérivée covariante sur la sphère sont :

$$\begin{aligned} \nabla_\mu v_\nu &= \frac{\partial X^A}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^B}{\partial x^\nu} \mathcal{D}_A V_B \\ &= \frac{\partial X^B}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} V_B \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial X^B}{\partial x^\nu} V_B \right) - \frac{\partial^2 X^B}{\partial x^\mu \partial x^\nu} V_B \\ &= \frac{\partial v_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial^2 X^B}{\partial x^\mu \partial x^\nu} V_B \,. \end{aligned} \tag{1.57}$$

On en déduit grâce à (1.57) que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla_\theta v_\theta &= \partial_\theta v_\theta \\ \nabla_\varphi v_\varphi &= \partial_\varphi v_\varphi - r \cos\theta \, V_Z \\ \nabla_\varphi v_\theta &= \partial_\varphi v_\theta - r \cos\theta \sin\varphi \, V_X - r \, cos\theta \cos\varphi \, V_Y \\ \nabla_\theta v_\varphi &= \partial_\theta v_\varphi - r \cos\theta \sin\varphi \, V_X - r \cos\theta \cos\varphi \, V_Y \end{array} \right.$$

où l'on a utilisé $X V_X + Y V_Y + Z V_Z = 0$ car $X^A V_A = 0$.

Il faut maintenant exprimer V_X, V_Y et V_Z en fonction de v_r, v_θ et v_φ. Par exemple, calculons $\nabla_\varphi v_\varphi$:

$$\begin{aligned} \nabla_\varphi v_\varphi &= \partial_\varphi v_\varphi - r \cos\theta \, V_Z \\ &= \partial_\varphi v_\varphi - r \cos\theta \ \overrightarrow{V} . \overrightarrow{1_Z} \\ &= \partial_\varphi v_\varphi - r \cos\theta \ \overrightarrow{V} . \left(\cos\theta \ \overrightarrow{1_r} - \sin\theta \ \overrightarrow{1_\theta} \right) \\ &= \partial_\varphi v_\varphi - r \cos^2\theta \, v_r + \cos\theta \sin\theta \, v_\theta \end{aligned}$$

car $v_\theta = \vec{V}.\,\overrightarrow{e_\theta} = r\,\vec{V}.\,\overrightarrow{1_\theta}$.
Or $v_r = 0$, donc :

$$\nabla_\varphi v_\varphi = \partial_\varphi v_\varphi + \cos\theta \sin\theta\, v_\theta\,.$$

Les dérivées covariantes deviennent finalement :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla_\theta v_\theta &=& \partial_\theta v_\theta \\ \nabla_\varphi v_\varphi &=& \partial_\varphi v_\varphi + \cos\theta \sin\theta\, v_\theta \\ \nabla_\varphi v_\theta &=& \partial_\varphi v_\theta - \dfrac{1}{\tan\theta}\, v_\varphi \\ \nabla_\theta v_\varphi &=& \partial_\theta v_\varphi - \dfrac{1}{\tan\theta}\, v_\varphi\,. \end{array}\right.$$

On retrouve ces résultats en calculant la dérivée covariante d'un vecteur à partir de la connexion de Levi-Civita. Les symboles de Christoffel sont définis par

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\lambda}\,(\partial_\rho g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\rho} - \partial_\lambda g_{\rho\nu})$$

c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Gamma^r_{\varphi\varphi} &=& -\,r\,\sin^2\theta \\ \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} &=& -\,\cos\theta\,\sin\theta \\ \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} &=& \dfrac{1}{\tan\theta}\,. \end{array}\right.$$

Il est nécessaire d'utiliser la formule :

$$\nabla_\mu v_\nu = \partial_\mu v_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\, v_\alpha\,.$$

Voici un exemple :

$$\nabla_\varphi\, v_\varphi = \partial_\varphi v_\varphi + \sin\theta\,\cos\theta\, v_\theta\,.$$

On retrouve bien la même expression !

1.2.5.5 Calcul du commutateur des dérivées covariantes d'un vecteur

On souhaite calculer $\nabla_{[\mu}\,\nabla_{\nu]}\,V_\rho$ en utilisant la définition du tenseur de Riemann et de manière explicite.

Si la torsion est nulle, alors

$$\nabla_{[\mu}\,\nabla_{\nu]}\,V_\rho = \frac{1}{2}\,\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\,V^\sigma\,.$$

Or pour un espace-temps de courbure constante, le *tenseur de Riemann* vaut :

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; \pm\,\frac{2}{R^2}\,g_{\rho[\mu}\,g_{\nu]\sigma}\,.$$

En effet, le calcul explicite dans l'espace ambiant (démonstration en annexe A.2) nous donne :

$$[\nabla_\mu,\nabla_\nu]V_\rho \;=\; \pm\,2\,\frac{1}{R^2}\,g_{\rho[\mu}\,V_{\nu]}\,. \tag{1.58}$$

Donc le *tenseur de Ricci* vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mu\rho} \;&:=\; g^{\nu\sigma}\,\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\\ &=\; \pm\frac{n-1}{R^2}\,g_{\mu\rho}\end{aligned}$$

et le *scalaire de Ricci*

$$\begin{aligned}\mathcal{R} \;&:=\; g^{\mu\rho}\,\mathcal{R}_{\mu\rho}\\ &=\; \pm\,\frac{n(n-1)}{R^2}\,.\end{aligned}$$

Chapitre 2

Quantification de Weyl

Ce chapitre est la traduction littérale de mon troisième article se trouvant dans le chapitre 9. En effet, ce formalisme mathématique est utilisé aussi bien en physique relativiste que dans un contexte non-relativiste pour représenter les opérateurs différentiels quelqu'ils soient (même ceux ayant une dépendance temporelle) comme des "polynômes" usuels mais dont les variables ne commutent pas dans la mesure où l'espace de ces polynômes est muni d'un produit (dit "étoilé") non-commutatif.

Le formalisme de Weyl-Wigner-Grönewold-Moyal [99–103] propose une formulation "classique" de la mécanique quantique en utilisant des fonctions de l'espace des phases comme observables et la fonction de Wigner comme un analogue de la fonction de densité de Liouville.

2.1 Algèbres d'Heisenberg et de Weyl

La mécanique classique est basée sur l'algèbre commutative des observables classiques, c'est-à-dire des fonctions réelles $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ sur l'espace des phases $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*}$, doté du crochet de Poisson canonique

$$\{f,g\}_{\mathbf{P.B.}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x^i}\,. \tag{2.1}$$

La mécanique quantique est basée sur l'algèbre non-commutative associative des observables quantiques, c'est-à-dire les opérateurs hermitiens $\hat{F}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}})$ sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de carré intégrable. L'*algèbre de Weyl* $\mathcal{A}_n$ est l'algèbre associative des observables quantiques qui sont des polynômes en les positions et les moments. L'*algèbre d'Heisenberg* $\mathfrak{h}_n$ est l'algèbre de Lie des observables quantiques qui sont des polynômes de degré un en les positions et les moments, il est engendré par $\hat{X}^i$, $\hat{P}_j$ et un élément central $\hbar\,\hat{\mathbb{1}}$ obéissant à des *relations de commutation canoniques*

$$[\,\hat{X}^i\,,\,\hat{P}_j\,] = i\hbar\,\delta^i_j\,\hat{\mathbb{1}}. \tag{2.2}$$

En termes plus abstraits, l'algèbre de Weyl $\mathcal{A}_n$ est l'algèbre enveloppante universelle $\mathcal{U}(\mathfrak{h}_n)$ de l'algèbre de Heisenberg. Le lemme de Schur implique que la valeur propre réelle

(que nous désignons par le même symbole $\hbar$) de l'élément central étiquette les représentations unitaires irréductibles (notées UIR pour l'expression anglaise "unitarity irreducible represantations") de l'algèbre de Heisenberg. Le *théorème de Stone et von Neumann* affirme que, à une équivalence près, il y a une UIR unique de l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}_n$ pour chaque valeur réelle de $\hbar \neq 0$. En outre, la représentation correspondante de $\mathcal{A}_n$ est fidèle, ce qui légitime l'équivalence entre les définitions abstraites et les réalisations concrètes des algèbres de Heisenberg et Weyl [1].

2.2 Symboles de Weyl

L'*application de Weyl*[2] $\mathcal{W} : f(\mathbf{x},\mathbf{p}) \mapsto \hat{F}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}})$ associe à toute fonction f un opérateur ordonné de Weyl (c'est-à-dire symétriquement) $\hat{F}$ défini par

$$\hat{F} := \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int d\,\mathbf{k}\, d\mathbf{v}\ \mathcal{F}(\mathbf{k},\mathbf{v})\, e^{\frac{i}{\hbar}\,(\,k_i\,\hat{X}^i - v^i\,\hat{P}_i)}\,, \tag{2.3}$$

où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier [3] de f sur l'espace de phase *complet* (en d'autres termes, sur l'espace des positions *et* des impulsions)

$$\mathcal{F}(\mathbf{k},\mathbf{v}) := \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int d\mathbf{x}\, d\mathbf{p}\ f(\mathbf{x},\mathbf{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,(\,k_i\,x^i - v^i\,p_i)}\,. \tag{2.4}$$

La fonction $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ est appelé le *symbole de Weyl* de l'opérateur $\hat{F}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}})$, qui n'a pas besoin d'être sous la forme symétriquement ordonnée. Une belle propriété de l'application de Weyl (2.3), est qu'elle relie la conjugaison complexe * des symboles à la conjugaison hermitienne * des opérateurs, $\mathcal{W} : f^*(\mathbf{x},\mathbf{p}) \mapsto \hat{F}^*(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}})$. Par conséquent, l'image d'une fonction réelle (une observable classique) est un opérateur hermitien (une observable quantique). L'inverse $\mathcal{W}^{-1} : \hat{F}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}}) \mapsto f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ de l'application de Weyl est appelé l'*application de Wigner*.

Les relations de commutation canoniques (2.2) entre les opérateurs de position et d'impulsion et la formule de Baker-Campbell-Hausdorff impliquent deux égalités très utiles :

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}\,(\,k_i\,\hat{X}^i - v^i\,\hat{P}_i)} &= e^{-\frac{i}{2\hbar}\,v^i\,\hat{P}_i}\, e^{\frac{i}{\hbar}\,k_i\,\hat{X}^i}\, e^{-\frac{i}{2\hbar}\,v^i\,\hat{P}_i} && (2.5)\\ &= e^{-\frac{i}{2\hbar}\,v^i\,\{\,\hat{P}_i,\,\}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\,k_i\,\hat{X}^i} && (2.6) \end{aligned}$$

où $\{\ ,\ \}$ désigne l'anticommutateur.

D'une part, la combinaison de (2.3) avec (2.6) implique qu'une façon de réaliser explicitement l'application de Weyl se fait par un "ordre anticommutateur" pour la moitié des variables en regard de leurs conjugués. Par exemple, l'image d'un symbole de Weyl qui est

1. Pour $\hbar = 0$, les UIR de $\mathfrak{h}_n$ se réduisent aux UIR unidimensionnelles de l'algèbre commutative $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*}$marquées par les valeurs propres $\mathbf{x}$ et $\mathbf{p}$ des opérateurs $\hat{\mathbf{X}}$ et $\hat{\mathbf{P}}$. Évidemment, quand $\hbar = 0$ l'algèbre $\mathcal{A}_n$ est réalisée comme l'algèbre commutative des polynômes $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ sur l'espace des phases.

2. A ne pas confondre avec la transformation de Weyl au sens de la symétrie (voir le chapitre 3).

3. L'application de Weyl est bien définie pour une classe beaucoup plus grande que les fonctions de carré intégrable, y compris par exemple les fonctions polynomiales, dont les transformées de Fourier, sont des distributions.

une série formelle en les moments,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},\mathbf{p}) &= \sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{r!}\, f^{i_1\dots i_r}(\mathbf{x})\, p_{i_1}\dots p_{i_r} \\ &= f(\mathbf{x}) \,+\, f^i(\mathbf{x})\, p_i \,+\, \frac{1}{2}\, f^{ij}(\mathbf{x})\, p_i p_j \,+\, \mathcal{O}(p^3)\,, \end{aligned} \tag{2.7}$$

peut être écrit comme

$$\begin{aligned} \hat{F}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}}) &= \sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{r!\,2^r}\, \{\cdots \{f^{i_1\dots i_r}(\hat{\mathbf{X}})\,,\, \hat{\mathbf{P}}_{i_1}\}\,,\cdots,\, \hat{\mathbf{P}}_{i_r}\} \\ &= \hat{F}(\hat{\mathbf{X}}) \,+\, \frac{1}{2}\,\big(\, \hat{F}^i(\hat{\mathbf{X}})\, \hat{\mathbf{P}}_i \,+\, \hat{\mathbf{P}}_i\, \hat{F}^i(\hat{\mathbf{X}})\,\big) \\ &\quad + \frac{1}{4}\,\big(\, \hat{F}^{ij}(\hat{\mathbf{X}})\, \hat{\mathbf{P}}_i \hat{\mathbf{P}}_j \,+\, 2\,\hat{\mathbf{P}}_i\, \hat{F}^{ij}(\hat{\mathbf{X}})\, \hat{\mathbf{P}}_j \,+\, \hat{\mathbf{P}}_i \hat{\mathbf{P}}_j\, \hat{F}^{ij}(\hat{\mathbf{X}})\,\big) \,+\, \dots\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

D'autre part, l'équation (2.5) implique qu'une manière d'effectuer explicitement l'application de Wigner est par l'intermédiaire d'une transformation de Fourier du noyau intégral translaté de l'opérateur. Le *noyau intégral* de l'opérateur $\hat{F}$ est l'élément de matrice $\langle\, \mathbf{x} \mid \hat{F} \mid \mathbf{x}' \rangle$ apparaissant dans la représentation de position de l'état $\hat{F} \mid \psi\,\rangle$, comme suit

$$\langle\, \mathbf{x} \mid \hat{F} \mid \psi\,\rangle \,=\, \int d\mathbf{x}'\, \langle\, \mathbf{x} \mid \hat{F} \mid \mathbf{x}'\,\rangle\, \psi(\mathbf{x}')\,, \tag{2.9}$$

où la fonction d'onde dans l'espace des positions est $\psi(\mathbf{x}') := \langle\, \mathbf{x}' \mid \psi\,\rangle$ et la relation de complétude $\int d\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}'\,\rangle\langle\, \mathbf{x}' \mid = \widehat{1}$ a été insérée. La définition (2.3) et la relation (2.5) permettent d'écrire le noyau intégral d'un opérateur en termes du symbole de Weyl,

$$\langle\, \mathbf{x} \mid \hat{F} \mid \mathbf{x}'\,\rangle \,=\, \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^n}\, f\Big(\, \frac{\mathbf{x}+\mathbf{x}'}{2}\,,\, \mathbf{p}\,\Big)\, e^{\frac{i}{\hbar}\,(\,x^i - x'^{\,i})\,p_i}\,. \tag{2.10}$$

A l'inverse, cela donne une forme explicite de l'application de Wigner

$$f(\mathbf{x},\mathbf{p}) \,=\, \int d\mathbf{q}\, \langle\, \mathbf{x}-\mathbf{q}/2 \mid \hat{F} \mid \mathbf{x}+\mathbf{q}/2\,\rangle\, e^{\frac{i}{\hbar}\,q^i\,p_i}\,, \tag{2.11}$$

comme suit à partir de l'expression (2.10). Cela montre qu'en effet, les applications de Weyl et de Wigner sont des bijections entre les espaces vectoriels des observables classiques et quantiques.

2.3 Produit de Moyal

Le *produit de Moyal* $\star$ est le "pull-back" du produit de composition dans l'algèbre des observables quantiques en rapport à l'application de Weyl $\mathcal{W}$, de telle sorte que

$$\mathcal{W}\big[f(\mathbf{x},\mathbf{p}) \,\star\, g(\mathbf{x},\mathbf{p})\big] \,=\, \hat{F}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}})\; \hat{G}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}})\,. \tag{2.12}$$

L'application de Wigner (2.11) permet de vérifier que l'expression explicite suivante du produit de Moyal satisfait la définition (2.12),

$$\begin{aligned} f \star g &= f \, \exp\left[\frac{i\,\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^i}\right)\right] g \\ &= f\,g + \frac{i\,\hbar}{2}\,\{f\,,\,g\}_{\mathbf{P.B.}} + \mathcal{O}(\hbar^2), \end{aligned} \tag{2.13}$$

où les flèches indiquent sur quel facteur les dérivés doivent agir.

Soit $\hat{H}$ un opérateur hamiltonien avec le symbole de Weyl correspondant $h(\mathbf{x},\mathbf{p})$. Dans le formalisme de Heisenberg, l'évolution dans le temps d'une observable quantique $\hat{F}$ (qui ne dépend pas explicitement du temps) est régie par l'équation différentielle

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{1}{i\,\hbar}\,[\hat{F},\hat{H}] \tag{2.14}$$

ou de façon équivalente en termes de symboles

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{i\,\hbar}\,[\,f \stackrel{\star}{,} h\,] \tag{2.15}$$

où $[\ \stackrel{\star}{,}\ ]$ désigne le *commutateur de Moyal* défini par

$$\begin{aligned} [\,f \stackrel{\star}{,} g\,] &:= f \star g \,-\, g \star f \\ &= 2\,i\ f\ \sin\left[\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^i}\right)\right] g \\ &= i\,\hbar\,\{\,f\,,\,g\,\}_{\mathbf{P.B.}} + \mathcal{O}(\hbar^2)\,, \end{aligned} \tag{2.16}$$

comme on peut le voir à partir de (2.13). Le *crochet de Moyal* est lié au commutateur de Moyal par

$$\{\,f\,,\,g\,\}_{\mathbf{M.B.}} := \frac{1}{i\,\hbar}\,[\,f \stackrel{\star}{,} g\,] = \{\,f\,,\,g\,\}_{\mathbf{P.B.}} + \mathcal{O}(\hbar).$$

Notez que le crochet de Moyal $\{\ ,\ \}_{\mathbf{M.B.}}$ est une déformation du crochet de Poisson $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P.B.}}$, et on peut voir que l'équation (2.15) est une perturbation du flux hamiltonien. Si $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ ou $g(\mathbf{x},\mathbf{p})$ est un polynôme de degré deux, alors leur crochet de Moyal se réduit à leur crochet de Poisson. Donc lorsque le hamiltonien est quadratique (libre), l'évolution quantique du symbole de Weyl est identique à son évolution classique.

Chapitre 3

Résultats

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus dans le premier article en annexe B. Dans un souci de simplification, les conventions ici sont légèrement différentes de celles de l'article original.

Les espaces-temps concernés sont ceux de courbure constante, soit nulle c'est-à-dire l'espace-temps plat de Minkowski, soit strictement positive (négative) respectivement appelés espaces-temps de (anti) de Sitter $(A)dS_n$.

3.1 Courants

3.1.1 Dans l'espace-temps de Minkowski

D'après le théorème de Noether, un courant conservé symétrique de rang $r \geqslant 1$ est un tenseur réel contravariant symétrique $j_s^{\mu_1 \cdots \mu_r}(x)$ obéissant à la loi de conservation :

$$\partial_{\mu_1} j_s^{\mu_1 \cdots \mu_r}(x) \approx 0 \,. \tag{3.1}$$

Une *fonction génératrice de courants conservés* [104] dans l'espace-temps de Minkowski est une fonction réelle $j(x,p)$ dans l'espace des phases : l'impulsion p est une variable auxiliaire, qui vérifie

$$\left(\frac{\partial}{\partial p_\mu} . \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) j(x,p) \approx 0 \,, \tag{3.2}$$

et qui peut s'écrire sous forme de série formelle en l'impulsion :

$$j(x,p) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} j_s^{\mu_1 \cdots \mu_r}(x)\, p_{\mu_1} \ldots p_{\mu_r} \,. \tag{3.3}$$

Elle rassemble donc tous les courants, conservés en vertu de (3.2).

Une fonction génératrice peut être écrite pour un champ de Klein-Gordon $\phi(x)$ comme suit :

$$j(x,p) = \phi^* (x - i\,p)\, \phi (x + i\,p) = |\phi (x - i\,p)|^2 \,. \tag{3.4}$$

Elle est manifestement réelle. La condition (3.2) peut être vérifiée dans ce cas précis, en montrant que l'opérateur agissant sur la fonction génératrice des courants correspond à l'opérateur divergence de (3.1) (démonstration en annexe A.3). L'utilisation d'une fonction génératrice permet de simplifier considérablement les calculs ; elle sera particulièrement utile dans le paragraphe suivant.

L'expression (3.4) en séries de Taylor de l'impulsion mène à une expression explicite des courants conservés :

$$j^s_{\mu_1\dots\mu_r}(x) = i^r \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \partial_{(\mu_1}\dots\partial_{\mu_s}\phi^*(x)\,\partial_{\mu_{s+1}}\dots\partial_{\mu_r)}\phi(x) \tag{3.5}$$

$$= i^r\,\phi^*(x)\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1}\dots\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_r}\phi(x)\,. \tag{3.6}$$

Ces courants en espace plat (3.5) sont proportionnels à ceux introduits, il y a longtemps, par Berends, Burgers et van Dam [82]. Divers ensembles explicites de courants conservés (conformes) sur l'espace-temps de Minkowski ont été fournis dans [105–108]. Le courant conservé symétrique (3.5) de rang r est bilinéaire en le champ scalaire et contient exactement r dérivés. Les courants de tous rangs sont réels ; ainsi, si le champ scalaire est réel, alors les courants de rang impair sont absents en raison du facteur devant (3.5).

Le courant symétrique conservé de rang deux :

$$\begin{aligned} j^s_{\mu\nu} &= i^2\left(\phi^*\,\partial_\mu\partial_\nu\phi + \phi\,\partial_\mu\partial_\nu\phi^* - 2\,\partial_{(\mu}\phi^*\,\partial_{\nu)}\phi\right) \\ &= -\phi^*\overleftrightarrow{\partial}_\mu\overleftrightarrow{\partial}_\nu\phi \end{aligned}$$

est, sur la couche de masse, distinct du tenseur énergie-impulsion canonique (1.18) par un courant *trivial* $j^t_{\mu\nu} = (\eta_{\mu\nu}\,\Box_{n-1,1} - \partial_\mu\partial_\nu)\,|\phi|^2$:

$$j^s_{\mu\nu} \approx -4\,T_{\mu\nu_{can}} + (\eta_{\mu\nu}\,\Box_{n-1,1} - \partial_\mu\partial_\nu)\,|\phi|^2\,.$$

Physiquement, ce courant de rang 2 est donc proportionnel au tenseur énergie-impulsion.

Comme nous l'avons fait dans le paragraphe 1.1.3, nous vérifions, pour le rang trois, que la transformation $\delta_\zeta\phi = i\,\zeta^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\partial_\beta\phi$ est une symétrie rigide du lagrangien de Klein-Gordon (1.1). Nous trouvons que :

$$V_\mu = \frac{1}{2}\,\zeta_{\mu\beta}\,(\partial_\rho\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\beta}\partial^\rho\phi - m^2\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\beta}\phi)\,.$$

On explicite le courant de Noether :

$$j^N_\mu = i\,\zeta^{\alpha\beta}\,[\partial_\alpha\partial_\beta\phi\,\partial_\mu\phi^* - \partial_\alpha\partial_\beta\phi^*\partial_\mu\phi - \eta_{\mu\alpha}\,\partial_\nu\phi^*\overleftrightarrow{\partial_\beta}\partial^\nu\phi + m^2\,\eta_{\mu\alpha}\,\phi^*\overleftrightarrow{\partial_\beta}\phi]$$

Comme $j^N_\mu = \zeta^{\alpha\beta}\,j_{\mu(\alpha\beta)}$, alors :

$$j_{\mu(\alpha\beta)} = i\,[\partial_\alpha\partial_\beta\phi\,\partial_\mu\phi^* - \partial_\alpha\partial_\beta\phi^*\partial_\mu\phi - \eta_{\mu\alpha}\,\partial_\nu\phi^*\overleftrightarrow{\partial_\beta}\partial^\nu\phi + m^2\,\eta_{\mu\alpha}\,\phi^*\overleftrightarrow{\partial_\beta}\phi]\,.$$

On peut vérifier que le courant de Noether j^N_μ et le tenseur $j_{\mu(\alpha\beta)}$ sont conservés. A l'aide de la formule (3.5), le courant symétrique conservé s'écrit simplement :

$$j^s_{\mu\alpha\beta} = i^3\,\phi^*\overleftrightarrow{\partial_\mu}\overleftrightarrow{\partial_\alpha}\overleftrightarrow{\partial_\beta}\,\phi\,.$$

On peut relier les deux tenseurs $j_{\mu\alpha\beta}$ et $j^s_{\mu\alpha\beta}$ par un courant trivial $j^t_{\mu(\alpha\beta)}$.

3.1.2 Dans l'espace-temps de (anti) de Sitter

Dans cette partie, nous décrirons très brièvement les calculs originaux que j'ai réalisés, avec Xavier Bekaert, durant la première année de mon doctorat.

3.1.2.1 Fonction génératrice et ses subtilités

Comme nous venons de le voir, la fonction génératrice de l'espace-temps plat de Minkowski génère des courants conservés dans ce même espace-temps. Nous souhaitons faire la même chose pour l'espace-temps de (anti) de Sitter via la construction ambiante. Plus précisément, la fonction génératrice de l'espace plat ambiant génère des courants conservés dans l'espace-temps courbe de (anti) de Sitter.

Grâce au dictionnaire (tables 1.1 et 1.2), la fonction génératrice de courants conservés dans l'espace plat ambiant :

$$J(X,P) \,=\, \Phi^{\dagger}(X-iP)\Phi(X+iP)\,. \tag{3.7}$$

Elle vérifie

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}.\frac{\partial}{\partial P}\right) J(X,P) \,\approx\, 0 \tag{3.8}$$

lorsque le champ scalaire ambiant Φ obéit à l'équation de Klein-Gordon. Si elle était tangente, l'équation (3.8) impliquerait automatiquement $\mathcal{D}^{B_1} J_{B_1\dots B_r} \,\approx\, 0$. Mais ce n'est pas le cas. On se doit donc de calculer la divergence dans l'espace ambiant des courants pour vérifier que la divergence covariante sur l'espace-temps de (anti) de Sitter est bien nulle. La fonction génératrice des courants [1] obéit à

$$\left(X^A\frac{\partial}{\partial X^A} \,+\, P_A\frac{\partial}{\partial P_A} \,+\, D \,-\, 2\right) J(X,P) \,=\, 0$$

pour les champs scalaires ambiants homogènes correspondant à des champs scalaires massifs sur $(A)dS_n$, puisqu'une condition sur la partie réelle du degré d'homogénéité est imposée (voir démonstration en annexe A.4) et apparaît naturellement dans le calcul de l'opérateur d'Alembertien dans les espaces-temps $(A)dS_n$ (paragraphe 1.2.5) [2] :

$$h^{\dagger}_{(A)dS_n} \;=\; 1 \,-\, \frac{D}{2} \,-\, \sqrt{\mp 1}\,\mu \,=\, \frac{1-n}{2} \,-\, \sqrt{\mp 1}\,\mu \tag{3.9}$$

implique

$$h_{(A)dS_n} + h^{\dagger}_{(A)dS_n} \,=\, 2-D\,, \tag{3.10}$$

et donc l'équation précédente (3.8) est équivalente à la loi de conservation covariante

$$\nabla_{\mu_1} j^{\mu_1\cdots\mu_r}(x) \approx 0\,. \tag{3.11}$$

1. Le degré d'homogénéité en X et en P de $J(X,P)$ vaut donc $2-D$ et celui des courants $J_{A_1\cdots A_r}$ vaut $h_r = 2-D-r = 1-n-r$.

2. Rappelons que, par convention, le signe supérieur se rattache à l'espace de de Sitter tandis que le signe inférieur est lié à l'espace d'anti de Sitter.

En d'autres termes, la réduction dimensionnelle radiale de l'interaction de Noether cubique est valable précisément pour le domaine de masse carré de l'unitarité dans $(A)dS_n$.

La fonction génératrice dans l'espace ambiant définit donc une *infinité* de courants conservés pour un champ scalaire libre sur $(A)dS_n$:

$$\begin{aligned} J(X,P) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\, J_s^{A_1..A_r}(X)\, P_{A_1} ... P_{A_r} \\ &= i^r \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \partial_{(A_1} ... \partial_{A_s} \Phi^*(X)\, \partial_{A_{s+1}} ... \partial_{A_r)} \Phi(X) \\ \Rightarrow J^s_{A_1...A_r}(X) &= i^r\, \Phi^\dagger(X) \overleftrightarrow{\partial_{A_1}} ... \overleftrightarrow{\partial_{A_r}} \Phi(X)\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Le principal inconvénient de cette expression explicite pour les courants conservés est qu'ils sont écrits en termes de dérivées partielles ambiantes et qu'il n'est pas facile de la traduire en terme des dérivées covariantes sur l'espace-temps $\mathcal{M}_n$ car elle ne contient que des dérivées partielles. Le but de la section suivante est d'effectuer cette traduction.

3.1.2.2 Formules explicites des dérivées covariantes

Nous allons exprimer les dérivées partielles ambiantes en fonction des dérivées covariantes pour les quatre premiers rangs (démonstration pour les rangs 2 et 3 en annexe A.5) afin de pouvoir, par la suite, exprimer les courants :

$$\begin{aligned} \partial_A \Phi &\sim \mathcal{D}_A\, \Phi \\ \partial_A\, \partial_B \Phi &\sim \mathcal{D}_{(A}\, \mathcal{D}_{B)} \Phi + \frac{h}{X^2}\, \eta_{AB}\, \Phi \\ \partial_A\, \partial_B \partial_C \Phi &\sim \mathcal{D}_{(A}\, \mathcal{D}_B \mathcal{D}_{C)}\, \Phi + \frac{3h-2}{X^2}\, \eta_{(AB}\, \mathcal{D}_{C)} \Phi \\ \partial_A\, \partial_B \partial_C \partial_D \Phi &\sim \mathcal{D}_{(A}\, \mathcal{D}_B \mathcal{D}_D \mathcal{D}_{D)}\, \Phi + \frac{2\,(3h-4)}{X^2}\, \eta_{(AB}\, \mathcal{D}_C \mathcal{D}_{D)} \Phi \\ &\quad + \frac{3h\,(h-2)}{X^4}\, \eta_{(AB}\, \eta_{CD)}\, \Phi \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.13}$$

On a exprimé les dérivées partielles comme des polynômes dépendant des dérivées covariantes et de la métrique plate : $\partial_{A_1} ... \partial_{A_m}\, \Phi = Pol(\eta_{AB}, \mathcal{D}_C)\Phi$.

Pour obtenir une formule générale des dérivées partielles, on note m le nombre de dérivées, et on contracte chaque indice avec le vecteur auxiliaire P :

$$\begin{aligned} P^{A_1} ... P^{A_m}\, \partial_{A_1} ... \partial_{A_m} &= (P.\partial)^m \\ P^{A_1} ... P^{A_m} \mathcal{D}_{A_1} ... \mathcal{D}_{A_m} &= (P.\mathcal{D})^m \\ P^A P^B\, \eta_{AB} &= P^2\,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Toutes les dérivées partielles sont données par la formule générale suivante :

$$\boxed{(P.\partial)^m \;=\; \sum_{r=0}^{[m/2]} c_m^r \left(\frac{P^2}{X^2}\right)^r (P.\mathcal{D})^{m-2r}} \tag{3.15}$$

où $[q]$ est la partie entière du nombre rationnel q et les coefficients c_m^r sont donnés par la formule de récurrence (démonstration en annexe A.6) :

$$\boxed{c_{m+1}^r \;=\; c_m^r \;+\; m\,(h-m+1)\,c_{m-1}^{r-1}} \tag{3.16}$$

et pour m impair, il existe une relation supplémentaire :

$$c_{m+1}^{(m+1)/2} \;=\; m(h-m+1)\,c_{m-1}^{(m-1)/2} \quad\Leftrightarrow\quad c_m^r \;=\; 0 \text{ lorsque } r \;\geqslant\; \frac{m\,+\,1}{2}\,.$$

Le premier coefficient vaut $c_0^0 \;=\; 1$. On peut en déduire que $c_m^0 \;=\; 1$ quelque soit la valeur de m.

3.1.2.3 Courants conservés

Les courants conservés sont exprimés par la formule suivante dans l'espace ambiant :

$$\begin{aligned} P^{A_1}...P^{A_r}\,J_{A_1...A_r} \;&=\; i^r \sum_{s=0}^{r}\sum_{i=0}^{[s/2]}\sum_{j=0}^{[(r-s)/2]} (-1)^s \binom{r}{s} c_s^i\, c_{r-s}^j \;\times \\ &\quad\times \left(\frac{P^2}{X^2}\right)^{i+j} (P.\mathcal{D})^{s-2i}\Phi^\dagger\,(P.\mathcal{D})^{r-s-2j}\Phi \end{aligned} \tag{3.17}$$

et dans l'espace-temps de courbure constante :

$$\boxed{\begin{aligned} p^{\mu_1}...p^{\mu_r}\,j_{\mu_1...\mu_r} \;&=\; i^r \sum_{s=0}^{r}\sum_{i=0}^{[s/2]}\sum_{j=0}^{[(r-s)/2]} (-1)^s \binom{r}{s} c_s^i\, c_{r-s}^j \;\times \\ &\quad\times \left(\frac{p^2}{\pm R^2}\right)^{i+j} (p.\nabla)^{s-2i}\phi^*\,(p.\nabla)^{r-s-2j}\phi\,. \end{aligned}} \tag{3.18}$$

La fonction génératrice ambiante (3.7) de courants conservées $(A)dS_n$ peut être écrite de manière très explicite en termes de la fonction génératrice des coefficients c_m^r :

$$c(x,y;h-r) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{1}{k!}\, c_k^m(h-r)\,x^{k-2m}\,y^m \;=\; (1\,+\,y)^{\frac{h-r}{2}} \exp\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\arctan\sqrt{y}\right) \tag{3.19}$$

avec l'aide de

$$T(X\,+\,t\,P\,,\,P) \;=\; c(t\,P\cdot\mathcal{D}\,,\,t^2\,P^2/X^2\,;\,h-r)\,T(X,P)\,,\qquad \forall t \quad :$$

$$
\begin{aligned}
J(X,P) &= c\left(-iP\cdot\mathcal{D}\,,\frac{P^2}{X^2}\,;\,h^{\dagger}_{(A)dS_n}\right)\,\Phi^{\dagger}(X)\;c\left(iP\cdot\mathcal{D}\,,\frac{P^2}{X^2}\,;\,h_{(A)dS_n}\right)\,\Phi(X)\\
&= \Phi^{\dagger}(X)\,c\left(-iP\cdot\overleftarrow{\mathcal{D}}\,,\frac{P^2}{X^2}\,;\,h^{\dagger}_{(A)dS_n}\right)c\left(i\,P\cdot\overrightarrow{\mathcal{D}}\,,\frac{P^2}{X^2}\,;\,h_{(A)dS_n}\right)\,\Phi(X)\\
&= \Phi^{\dagger}(X)\,c\left(i\,P\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{D}}\,,\frac{P^2}{X^2}\,;\,2-D\right)\,\Phi(X) \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

où la propriété $c(x_1,y\,;h_1)c(x_2,y\,;h_2)=c(x_1+x_2,y\,;h_1+h_2)$ et la formule (3.9) ont été utilisées. La fonction génératrice ambiante (3.20) permet de trouver la fonction génératrice suivante des courants conservés

$$
j\,(x,p)\;=\;\phi^{*}(x)\;c\left(i\,p^{\mu}\overleftrightarrow{\nabla}_{\mu}\,,\pm\frac{g_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu}}{R^2}\,;\,1-n\right)\,\phi(x)\,. \qquad (3.21)
$$

La limite plate est retrouvée lorsque $R^2\to\infty$ puisque $c(x,y)\sim\exp x$ quand $y\to 0$. En raison de (3.19), le développement

$$
j(x,p)\;=\;\sum_{r\geqslant 0}\frac{1}{r!}\,j^{\mu_1\dots\mu_r}(x)\,p_{\mu_1}\dots p_{\mu_r} \qquad (3.22)
$$

de cette fonction génératrice donne le courant conservé suivant de rang r,

$$
j_{\mu_1\dots\mu_r}(x)\;=\;i^{\,r}\sum_{m=0}^{[r/2]}\left(\frac{\pm 1}{R^2}\right)^{m}c_r^m\;g_{(\mu_1\mu_2}\dots g_{\mu_{2m-1}\mu_{2m}}\,\phi^{*}(x)\overleftrightarrow{\nabla}_{\mu_{2m+1}}\dots\overleftrightarrow{\nabla}_{\mu_r)}\phi(x)\,, \qquad (3.23)
$$

où les coefficients c_r^m correspondent à $h=1-n$ (pour un champ scalaire, $r=0$). Il est possible de calculer ces coefficients c_r^m, les dérivées covariantes (3.15) et ces courants venant de (3.23) quel que soit le rang. Les coefficients non-nuls pour $m<(n+1)/2$ peuvent s'écrire explicitement (pour $r=0$) :

$$
\begin{aligned}
c_n^m = \sum_{i_{n\,-\,2m}=0}^{m}\;\sum_{i_{n\,-\,2m\,-1}=0}^{i_{n\,-\,2m}}\dots\sum_{i_1=0}^{i_2}&\frac{1}{(m-i_{n-2m})!}\left(\frac{k}{2}\right)\left(\frac{k}{2}-1\right)\dots\left(\frac{k}{2}-m+i_{n-2m}+1\right)\times\\
&\times\frac{n!}{(n-2m)!}\,\frac{(-1)^{i_{n\,-\,2m}}}{(2\,i_1\,+\,1)\;(2\,(i_2-i_1)+1)\;\dots\;(2\,(i_{n\,-\,2m}-i_{n\,-\,2m\,-1})\,+\,1)}\,.
\end{aligned}
$$

Par exemple, les premiers coefficients sont :

$$
\begin{array}{llll}
c_0^0 = 1\,, & & & \\
c_1^0 = 1\,, & & & \\
c_2^0 = 1\,, & c_2^1 = k\,, & & \\
c_3^0 = 1\,, & c_3^1 = 3k\,-\,2\,, & & \\
c_4^0 = 1\,, & c_4^1 = 2\,(3k\,-\,4)\,, & c_4^2 = 3k\,(k\,-\,2)\,, & \\
\dots & \dots & \dots &
\end{array}
$$

et les premières dérivées s'expriment par :

$$\begin{aligned}
\partial_A\Phi &\longleftrightarrow \nabla_\mu\,\phi \\
\partial_A\,\partial_B\Phi &\longleftrightarrow \nabla_{(\mu}\,\nabla_{\nu)}\phi \pm \frac{k}{R^2}\,g_{\mu\nu}\,\phi \\
\partial_A\,\partial_B\partial_C\Phi &\longleftrightarrow \nabla_{(\mu}\,\nabla_\nu\nabla_{\rho)}\,\phi \pm \frac{3k-2}{R^2}\,g_{(\mu\nu}\,\nabla_{\rho)}\phi \\
\partial_A\,\partial_B\partial_C\partial_D\Phi &\longleftrightarrow \nabla_{(\mu}\,\nabla_\nu\nabla_\rho\nabla_{\sigma)}\,\phi \pm \frac{2\,(3k-4)}{R^2}\,g_{(\mu\nu}\,\nabla_\rho\nabla_{\sigma)}\phi \\
&\qquad + \frac{3k\,(k-2)}{R^4}\,g_{(\mu\nu}\,g_{\rho\sigma)}\,\phi\,. \qquad (3.24)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Comme durant mon stage de master 2, la formule de double récurrence (3.16) n'avait pas pu être résolue explicitement, j'avais entièrement écrit un programme "Maple" joint en annexe A.8 afin de pouvoir calculer numériquement ces coefficients, les dérivées covariantes (3.15) et ainsi trouver les courants à partir de (3.23) quelque soit le rang de manière directe et rapide. On retrouve ainsi les premiers courants calculés classiquement (démonstration en annexe A.7) :

$$\begin{aligned}
j^s_\mu &= i\,\phi^*\overleftrightarrow{\nabla_\mu}\phi \\
j^s_{\mu\nu} &= -\,\phi^*\overleftrightarrow{\nabla_\mu}\overleftrightarrow{\nabla_\nu}\,\phi \pm \frac{1-n}{R^2}\,g_{\mu\nu}\,\phi^*\,\phi \\
j^s_{\mu\nu\rho} &= -i\,\phi^*\overleftrightarrow{\nabla_\mu}\overleftrightarrow{\nabla_\nu}\overleftrightarrow{\nabla_\rho}\,\phi \pm i\frac{1-3n}{R^2}\,g_{(\mu\nu}\,\phi^*\,\overleftrightarrow{\nabla_{\rho)}}\,\phi \\
j^s_{\mu\nu\rho\sigma} &= \phi^*\overleftrightarrow{\nabla_\mu}\overleftrightarrow{\nabla_\nu}\overleftrightarrow{\nabla_\rho}\overleftrightarrow{\nabla_\sigma}\,\phi \pm 2\,\frac{1+3n}{R^2}\,g_{(\mu\nu}\,\phi^*\,\overleftrightarrow{\nabla_\rho}\overleftrightarrow{\nabla_{\sigma)}}\phi \\
&\qquad + 3\,\frac{n^2-1}{R^4}\,g_{(\mu\nu}\,g_{\rho\sigma)}\phi^*\,\phi \qquad (3.25)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ils sont tous conservés par construction. Nous l'avons aussi vérifié explicitement.

Cette infinité de courants conservés permet de construire un vertex cubique d'interaction (cohérent à l'ordre non trivial le plus bas) entre un champ scalaire dans (anti) de Sitter et des champs de jauge de spin entier arbitraire, via le couplage minimal (section 1.1.4.3).

De manière similaire, des courants conservés sur les espaces de courbure constante ont été décrits dans [109–113] mais les résultats présents sont plus généraux : d'une part, les courants (3.12) sont conservés pour tout champ scalaire libre pour n'importe quelle masse et dans n'importe quelle dimension, tandis que seul le scalaire conforme (c'est-à-dire le singleton) a été pris en compte dans [111, 112] et AdS_3 était l'espace-temps de fond dans [109,110] ; d'autre part, l'expression explicite des courants est connue à tous les ordres de la courbure scalaire, tandis que seule la correction du premier ordre pour l'expression plate a été fournie dans [111, 112] ; troisièmement, les courants (3.12) sont conservés sur la couche de masse dans le sens habituel de (3.11) tandis que ceux de [113] obéissent à la loi de conservation plus faible introduite par Fronsdal [114]. Bien sûr, à proprement parler,

la troisième observation ne doit pas être comprise comme une perte de généralité dans les résultats précédents de [113, 115]. Nous voulons simplement souligner que les lois de conservation habituelles pour les courants est une propriété souhaitable, car elle permet un traitement uniforme des champs de jauge (ir)réductibles, par exemple les champs de Fronsdal et les triplets, et il pourrait aussi simplifier l'analyse des amplitudes d'échange de courant.

3.2 Calcul des symboles

Pour commencer, puisque $\mathbb{R}_0^D$ et $(A)dS_n$ sont dotés d'une métrique, leur espace respectivement tangent et cotangent peuvent être identifiés et on peut donc identifier les "impulsions" avec les "vitesses", c'est-à-dire

$$P_A \,=\, \eta_{AB}\, V^B \qquad \text{et} \qquad p_\mu \,=\, g_{\mu\nu} v^\nu \,. \tag{3.26}$$

La fonction génératrice ambiante des champs de jauge $H(X,P)$ est maintenant une fonction réelle sur $T^*\mathbb{R}_0^D$ telle que

$$\left(X^A \frac{\partial}{\partial X^A} \,-\, P_A \frac{\partial}{\partial P_A} \,+\, 2\right) H(X,P) \,=\, 0\,, \qquad \left(X\cdot\frac{\partial}{\partial P}\right) H(X,P) \,=\, 0\,, \tag{3.27}$$

et dont les transformations de jauge sont

$$\delta_\epsilon H(X,P) \,=\, \left(P\cdot\frac{\partial}{\partial X}\right)\epsilon(X,P) \,+\, \mathcal{O}(H)\,, \tag{3.28}$$

où $\epsilon(X,P)$ est tel que

$$\left(X^A \frac{\partial}{\partial X^A} \,-\, P_A \frac{\partial}{\partial P_A}\right)\epsilon(X,P) \,=\, 0\,, \qquad \left(X\cdot\frac{\partial}{\partial P}\right)\epsilon(X,P) \,=\, 0\,. \tag{3.29}$$

Le fibré cotangent $T^*\mathcal{M}_n$ peut être vu comme le sous-fibré de $T^*\mathbb{R}_0^D$ défini par la relation quadrique $X^2 = \pm R^2$ avec la condition de transversalité $X^A P_A = 0$.

Le produit de Moyal ambiant de deux fonctions lisses sur $T^*\mathbb{R}_0^D$ est défini par

$$\epsilon_1(X,P)\star\epsilon_2(X,P) \,=\, \epsilon_1(X,P)\,\exp\left(\frac{1}{2}\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial P_A}\wedge\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial X^A}\right)\epsilon_2(X,P) \tag{3.30}$$

où $\wedge$ est mis pour le produit antisymétrique. Les conditions (3.29) sur $\epsilon(X,P)$ sont équivalentes à

$$[X\cdot P \,\stackrel{\star}{,}\, \epsilon(X,P)] \,=\, 0\,, \qquad [X^2 \,\stackrel{\star}{,}\, \epsilon(X,P)] \,=\, 0 \tag{3.31}$$

où

$$\begin{aligned}[\epsilon_1(X,P) \,\stackrel{\star}{,}\, \epsilon_2(X,P)\,] \;&:=\; \epsilon_1(X,P)\star\epsilon_2(X,P) - \epsilon_2(X,P)\star\epsilon_1(X,P)\\ &=\; \epsilon_1(X,P)\,2\sinh\left(\frac{1}{2}\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial P_A}\wedge\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial X^A}\right)\epsilon_2(X,P)\end{aligned} \tag{3.32}$$

représente le commutateur de Moyal ambiant. Les conditions (3.31) exprimées en terme de l'opérateur hermitien $\hat{\epsilon}$ symbole de Weyl de la fonction $\epsilon(X,P)$ préserve le degré d'homogénéité et commute avec X^2. L'évaluation $\varepsilon(x,p)$ des représentations ambiantes $\epsilon(X,P)$ fournissent un isomorphisme entre l'espace des fonctions lisses sur $T^*\mathcal{M}_n$ et le sous-espace des fonctions lisses sur $T^*\mathbb{R}^D_0$ lesquelles sont soumises à (3.31). En outre, l'espace des symboles obéissant à (3.31) est une sous-algèbre de l'algèbre de Weyl ambiante. Par conséquent, le "pull-back" du produit de Moyal sur $T^*\mathbb{R}^D_0$ induit un produit étoilé $*$ sur le fibré cotangent $T^*\mathcal{M}_n$ tel que l'ancien isomorphisme devient un isomorphisme des algèbres associatives, comme l'a souligné Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz et Sternheimer dans [116]. Notons que l'algèbre de Lie des fonctions lisses sur $T^*\mathcal{M}_n$ dotée du commutateur étoilé correspondant $[\ \stackrel{*}{,}\ ]$ est isomorphe à l'algèbre de Lie des opérateurs hermitiens (pseudo)différentiels sur $\mathcal{M}_n$. L'action adjointe de l'algèbre de Lie préserve l'espace des symboles de Weyl comme (3.27) et les transformations de jauge (3.28) peuvent être écrites comme

$$\delta_\epsilon H(X,P) \,=\, \frac{1}{2}\,[P^2 \stackrel{\bigstar}{,}\, \epsilon(X,P)] \,+\, \mathcal{O}(H)\,. \tag{3.33}$$

Les fonctions génératrices ambiantes des champs de Killing $\overline{\epsilon}(X,P)$ sont les symboles de Weyl commutant avec les trois containtes X^2, $X\cdot P$ et P^2 lesquelles génèrent l'algèbre simplectique $\mathfrak{sp}(2)$. La (sous-)algèbre de Lie de tels symboles est une algèbre de Vasiliev de spin élevé en dehors de la couche de masse [3]. (voir par exemple [56, 117, 118] pour une introduction).

3.3 Vertex cubiques

En utilisant la notation bra-ket pour le champ scalaire $\Phi(X) = \langle\, X \mid \Phi\,\rangle$ et $\Phi^*(X) = \langle\, \Phi \mid X\,\rangle$, la fonction génératrice ambiante $J(X,P)$ des courants (3.7) est la (continuation analytique de la) transformée de Fourier dans l'espace des moments de l'application de Wigner associée à l'opérateur densité $|\,\Phi\,\rangle\langle\,\Phi\,|$, et l'interaction ambiante de Noether

$$\ll H \parallel J \gg \;:=\; \int_{\mathbb{R}^D_0} d^D X\ \exp\left(\frac{\partial}{\partial V^A}\,\frac{\partial}{\partial P_A}\right) H(X,V)\,J(X,P)\,\Big|_{V=P=0} \tag{3.34}$$

peut être réécrite sous une forme compacte comme dans [120] :

$$S_1[\Phi,H] \,=\, \ll H \parallel J \gg \,=\, \langle\,\Phi\,|\,\hat{H}\,|\,\Phi\,\rangle \tag{3.35}$$

où $H(X,P)$ est le symbole de Weyl de l'opérateur $\hat{H}$.

L'action ambiante de Klein-Gordon

$$S_0[\Phi] \;=\; -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^D_0} d^D X\,\left(G^{AB}\partial_A\Phi^*(X)\,\partial_B\Phi(X) \,\pm\, \frac{(mR)^2}{X^2}\,\Phi^*(X)\Phi(X)\right) \tag{3.36}$$

peut être réécrite de la même façon que (3.35) :

$$S_0[\Phi] \,=\, \langle\,\Phi\,|\,\hat{H}_0\,|\,\Phi\,\rangle \tag{3.37}$$

3. L'algèbre de Vasiliev est constituée de toutes les sommes de produits (contrairement aux polynômes, ils ne commutent pas forcément) en les générateurs conformes dans la représentation du singleton c'est-à-dire écrit comme des opérateurs différentiels.

où l'opérateur $\hat{H}_0$ est défini par

$$\hat{H}_0 := \frac{1}{2}\left[\partial^2 \,-\, \frac{1}{X^2}\,(X\cdot\partial)\,(X\cdot\partial \,+\, D \,-\, 2) \mp \frac{(mR)^2}{X^2}\right] \tag{3.38}$$

et est la représentation ambiante de l'opérateur cinétique $\frac{1}{2}(\nabla^2_{AdS_n} - m^2)$. Le symbole de Weyl est égal à

$$H_0(X,P) := \frac{1}{2}\left(G^{AB}P_AP_B \mp \frac{(mR)^2}{X^2}\right) = \frac{1}{2}\left(P^2 - \frac{(X\cdot P)^2}{X^2} \mp \frac{(mR)^2}{X^2}\right) \tag{3.39}$$

où la métrique inverse transverse $G^{AB} := \eta^{AB} - X^AX^B/X^2$ est la représentation ambiante de la métrique inverse $g^{\mu\nu}$ sur $(A)dS_n$. Remarquons que la fonction $H_0(X,P)$ obéit aussi à (3.27).

Par conséquent, la somme

$$S_0[\Phi] \,+\, S_1[\Phi, H] \,=\, \langle\, \Phi \,|\, \hat{H}_0 + \hat{H} \,|\, \Phi \,\rangle \tag{3.40}$$

est manifestement invariante sous l'action suivante du groupe des opérateurs unitaires sur $(A)dS_n$:

$$|\,\Phi\,\rangle \;\longrightarrow\; \hat{U}\,|\,\Phi\,\rangle\;, \qquad \hat{H}_0 + \hat{H} \;\longrightarrow\; \hat{U}\;(\hat{H}_0 + \hat{H})\;\hat{U}^{-1}\,, \tag{3.41}$$

où l'opérateur unitaire $\hat{U}$ est généré par l'opérateur hermitien $\hat{\epsilon}$ et où les scalaires et les champs de jauge se transforment respectivement dans la représentation fondamentale et adjointe du groupe des opérateurs unitaires. Notons que l'action de l'opérateur $\hat{U}$ sur $\Phi(X)$ est en effet compatible avec la réduction dimensionnelle radiale parce que cet opérateur unitaire préserve le degré d'homogénéité comme $\hat{\epsilon}$ le fait. Remarquons que si les dérivées d'ordre élevé sont autorisées, alors la tour infinie de champs de spin élevé devrait être incluse pour la consistence des transformations de jauge (3.41) au delà de l'ordre le plus bas afin que l'algèbre des opérateurs soit fermée. L'action adjointe infinitésimale (3.41) de l'algèbre de Lie des opérateurs hermitiens sur $(A)dS_n$, écrite en terme du symbole de Weyl $H(X,P)$, mène à la déformation suivante (3.33)

$$\delta_\epsilon H(X,P) \,=\, [H_0(X,P) + H(X,P) \;\overset{\star}{,}\; \epsilon(X,P)] \,+\, \mathcal{O}(H^2)\,. \tag{3.42}$$

Une fonction génératrice ambiante des champs de Killing $\overline{\epsilon}(X,P)$ est un symbole de Weyl en $X_{[A}P_{B]}$, dont l'opérateur correspondant est un produit des générateurs des isométries $X_{[A}\partial_{B]}$ de $(A)dS_n$, c'est-à-dire les générateurs de l'algèbre de Vasiliev de spin élevé en dehors de la couche de masse. Lorsque cette algèbre agit sur le module singleton de $\mathfrak{o}(d-1,2)$, les trois contraintes $\mathfrak{sp}(2)$ mentionnées à la fin de la sous-section 3.2 agissent trivialement. Le quotient de l'algèbre de Vasiliev en dehors de la couche de masse par l'idéal bilatéral correspondant (engendré par les éléments qui sont la somme des éléments proportionnels à la contrainte $\mathfrak{sp}(2)$) est l'algèbre de Vasiliev de spin élevé sur la couche de masse (voir par exemple [56, 117, 118] pour plus de détails). La situation est quelque peu différente pour le module du champ scalaire massif engendré par les fonctions homogènes harmoniques sur l'espace ambiant de la sous-section 1.2.4.6, parce que le module n'est pas annihilé par les opérateurs correspondant à X^2 et $X\cdot P$ (voir par exemple la section 3 de [121] pour une discussion sur les algèbres des symétries du champ scalaire massif).

Il est très tentant de conjecturer que l'action complète

$$S\,[\phi, h] \;=\; S_0[\phi] \;+\; S_1[\phi, h] \;+\; S_2[\phi, h^2] \;+\; \mathcal{O}(h^3)$$

devrait être interprétée commme résultat du fait de jauger des symétries rigides de champ de matière scalaire libre, lequel généralise U(1) et les isométries d'$(A)dS_n$, tel que les symétries locales (3.41) généralisent U(1) local et les difféomorphismes (voir [113, 119–122] et les références ci-dedans pour plus de commentaires sur ce point de vue). Dans tous les cas, les équations dépliées (sur la couche de masse [56, 117, 118] et en dehors de la couche de masse [123, 124]) découlent précisément du fait de jauger la même algèbre rigide des symétries (sur/en dehors de la couche de masse) mais un champ scalaire est inclus dans le multiplet du champ de jauge.

Pour terminer avec une remarque périphérique, nous tenons à souligner la possibilité d'avoir un traitement uniforme des champs de jauge et des paramètres de jauge pour lesquels les deux fonctions génératrices ont un degré d'homogénéité égal en X et en P. Cette possibilité pourrait s'avérer utile pour les travaux supplémentaires parce que le traitement permettrait d'utiliser le commutateur étoilé induit sur $\mathcal{M}_n$ [116] afin d'écrire la forme intrinsèque de la transformation de jauge ambiante (3.33). En outre, un traitement uniforme des champs et des paramètres est séduisante dans l'approche du formalisme métrique puisque leurs fonctions génératrices peuvent être interprétées toutes les deux comme les symboles de Weyl des opérateurs hermitiens (pseudo)différentiels sur la variété d'espace-temps. Concrètement, notons que $\mathcal{H}(X, P) := X^2 H(X, P)$ obéit à

$$\left(X^A \frac{\partial}{\partial X^A} \;-\; P_A \frac{\partial}{\partial P_A}\right) \mathcal{H}(X, P) \;=\; 0\,, \qquad \left(X \cdot \frac{\partial}{\partial P}\right) \mathcal{H}(X, P) \;=\; 0\,, \tag{3.43}$$

comme suit à partir de (3.27). La même chose vaut pour

$$\mathcal{H}_0(X, P) \;= \frac{1}{2}\, X^2 \left(G^{AB} P_A P_B \mp \frac{(mR)^2}{X^2}\right) = \frac{1}{2}\left(X^2\, P^2 \;-\; (X \cdot P)^2 \mp (mR)^2\right) \tag{3.44}$$

lequel correspond au symbole de Weyl $\dfrac{\pm R^2}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$. On peut vérifier que

$$[\,\mathcal{H}_0(X, P) \;\stackrel{\bigstar}{,}\; \epsilon(X, P)\,] \;=\; \left(X^2 \;+\; \frac{1}{4}\,\frac{\partial}{\partial P} \cdot \frac{\partial}{\partial P}\right) (P^A \partial_A)\, \epsilon(X, P) \tag{3.45}$$

en utilisant l'identité

$$2\,[\,X^2\, P^2 - (X \cdot P)^2 \;\stackrel{\bigstar}{,}\; \epsilon(X, P)\,] \;=\; X^2 \star [\,P^2 \;\stackrel{\bigstar}{,}\; \epsilon(X, P)\,] \,, + [\,P^2 \;\stackrel{\bigstar}{,}\; \epsilon(X, P)\,] \star X^2\,. \tag{3.46}$$

Par conséquent, le commutateur étoilé entre le champ de fond $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ d'$(A)dS_n$ et toute fonction $\varepsilon(x, p)$ sur le fibré cotangent $T^*(A)dS_n$ ci-dessus est égal à

$$\frac{1}{2}\,[\,g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \stackrel{*}{,}\; \varepsilon(x, p)\,] \;=\; \left(1 \;\pm\; \frac{1}{4\,R^2}\, g_{\mu\nu}\, \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial p_\nu}\right) (p^\mu \nabla_\mu)\, \varepsilon(x, p)\,. \tag{3.47}$$

En redéfinissant les champs

$$h'(x, p) \;\;=\;\; \left(1 \;\pm\; \frac{1}{4\,R^2}\, g_{\mu\nu}\, \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial p_\nu}\right)\; h(x, p)\,, \tag{3.48}$$

l'ordre le plus bas de la transformation de jauge

$$\delta_\varepsilon h(x,v) \;=\; (v^\mu \nabla_\mu)\; \varepsilon(x,v) \;+\; \mathcal{O}(h) \tag{3.49}$$

peut être exprimé directement via le produit étoilé sur $(A)dS_n$

$$\delta_\varepsilon h'(x,p) \quad = \quad \frac{1}{2}\,[\, g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \stackrel{\star}{,}\; \varepsilon(x,p)\,] \;+\; \mathcal{O}(h') \tag{3.50}$$

en analogie avec (3.33).

Deuxième partie

Interactions de spin élevé avec un champ scalaire de matière dans un espace-temps de courbure constante : fonctions à trois points

Chapitre 4

Les espaces-temps de courbure constante

Dans l'ensemble des chapitres de cette deuxième partie, la convention de la dimension de l'espace d'Anti-de Sitter est modifiée par rapport à la première partie afin de faciliter les calculs : nous travaillerons dans l'espace AdS_{d+1}, en d'autres termes $n = d + 1$.

L'univers de (anti) de Sitter (cas particulier d'espace-temps pour lequel la courbure est constante et non nulle) est la solution la plus symétrique des équations d'Einstein avec constante cosmologique Λ respectivement strictement (négative) positive et dans le vide (c'est-à-dire sans matière) : $T_{\mu\nu} = 0$.

Le modèle de de Sitter est fondamental car c'est le prototype des géométries apparaissant dans le cadre de l'inflation cosmique. De plus, les observations ont montré que la constante cosmologique Λ n'est pas nulle et que notre univers entrerait vraisemblablement dans une période inflationnaire. L'espace-temps d'anti de Sitter est utilisé dans certaines théories modernes de la gravitation (telle que la « supergravité ») ainsi que dans la correspondance AdS/CFT.

4.1 Description en dimension supérieure à deux

Les différents espaces-temps à courbure constante de dimension $d + 1$ peuvent être plongés dans un espace-temps plat ambiant à une dimension supplémentaire $D = d + 2$: $\mathcal{M}_{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+2}$. Le lecteur souhaitant approfondir la description de ces espaces pourra se référer, entres autres, aux articles suivants : [97, 125–136]. On classe ici (cf. également l'article en annexe B) les différents espaces-temps à courbure constante en fonction de la signature de la métrique de l'espace ambiant :

- **Signature euclidienne :** Quand le nombre de directions de genre temps (signes négatifs) dans la signature de la métrique ambiante η est égale à zéro ($d + 2$ signes positifs), la quadrique [1] $X^2 = R^2$ est une *hypersphère*, $\mathcal{M}_{d+1} = \mathbb{S}^{d+1}$, laquelle peut

1. Rappellons que les lettres majuscules X sont utilisées pour désigner les coordonnées ambiantes tandis que les lettres minuscules x concernent les coordonnées de l'espace-temps proprement dit.

être vue comme la rotation de Wick ($R \to iR$) de l'espace de de Sitter dS_{d+1} (défini ci-dessous). L'hypersphère est donc parfois appelée *espace de de Sitter euclidien* EdS_{d+1}.

- **Signature lorentzienne :** Quand le nombre de directions de genre temps dans la signature de la métrique ambiante η est égale à un : $(-, \underbrace{+, \cdots +}_{d+1})$, deux quadriques sont possibles :

$$X^2 = -(X^0)^2 + \sum_{i=1}^{d+1}(X^i)^2 = \pm R^2 \,. \tag{4.1}$$

La métrique de ces espaces est induite à partir de la métrique ambiante :

$$ds^2_{\mathbb{R}^{d+1,1}} = -(dX^0)^2 + \sum_{i=1}^{d+1}(dX^i)^2 \tag{4.2}$$

et par construction, leur groupe d'isométries est donc $O(d+1,1)$. Les deux quadriques sont des hyperboloïdes [2] :

– l'*hyperboloïde à une nappe* $X^2 = +R^2$ est l'*espace-temps de de Sitter* (cf. figure [3] 4.1), $\mathcal{M}_{d+1} = dS_{d+1}$,

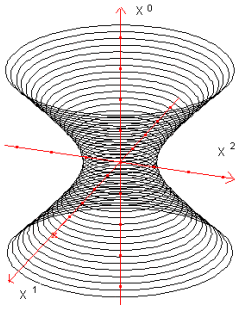

FIGURE 4.1 – L'espace-temps de de Sitter à deux dimensions dS_2 plongé dans l'espace-temps de Minkowski à trois dimensions.

– tandis que l'*hyperboloïde à deux nappes* $X^2 = -R^2$ est (les deux copies de) *l'espace hyperbolique* (cf. figure 4.2), $\mathcal{M}_{d+1} = \mathbb{H}_{d+1}$ également appelé *espace d'anti de Sitter euclidien* $EAdS_{d+1}$ (car la signature a un signe négatif en moins par rapport à la signature de l'espace d'anti de Sitter).

- **Signature conforme :** Quand le nombre de directions de genre temps dans la signature de la métrique ambiante η est égale à deux : $(-, -, \underbrace{+, \cdots +}_{d})$, une seule

2. Un cercle dans l'espace euclidien se transforme (sous une rotation de Wick) en hyperbole dans l'espace-temps de Minkowski. De la même façon, une hypersphère dans l'espace euclidien se transforme en hyperboloïde dans l'espace-temps de Minkowski.

3. A deux dimensions, les représentations des espaces de de Sitter et d'anti de Sitter sont semblables, bien qu'orientées différemment.

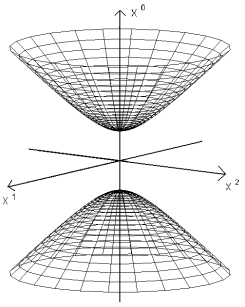

FIGURE 4.2 – L'espace-temps hyperbolique à deux dimensions $\mathbb{H}_2$ plongé dans un espace ambiant à trois dimensions.

quadrique est pertinente :

$$X^2 = -(X^0)^2 - (X^1)^2 + \sum_{i=2}^{d+1}(X^i)^2 = -R^2\,. \tag{4.3}$$

Cette hyperboloïde à une nappe est l'*espace-temps d'anti de Sitter*, $\mathcal{M}_{d+1} = AdS_{d+1}$, dont la rotation de Wick redonne (les deux copies de) l'espace hyperbolique précédent $\mathbb{H}_{d+1}$, c'est-à-dire que les deux nappes sont nécessaires pour correspondre à l'ensemble d'$EAdS_{d+1}$.
La métrique est induite à partir de la métrique ambiante :

$$ds^2_{\mathbb{R}^{d,2}} = -(dX^0)^2 - (dX^1)^2 + \sum_{i=2}^{d+1}(dX^i)^2 \tag{4.4}$$

avec $i = 2, .., d+1$ et, par construction, son groupe d'isométries est $O(d, 2)$.

4.2 Cas particuliers à quatre dimensions

Dans cette section, on considère $n = d+1 = 4$ afin de simplifier les expressions explicites de la paramétrisation et de la métrique des espaces-temps.

4.2.1 Espace-temps de de Sitter dS_4

Pour l'espace de de Sitter à $d+1 = 4$ dimensions, on pose :

$$\begin{cases} X^0 = R \sinh x^0 \\ X^1 = R \cosh x^0 \cos x^1 \\ X^2 = R \cosh x^0 \sin x^1 \cos x^2 \\ X^3 = R \cosh x^0 \sin x^1 \sin x^2 \cos x^3 \\ X^4 = R \cosh x^0 \sin x^1 \sin x^2 \sin x^3 \end{cases}$$

avec X^i les coordonnées cartésiennes dans l'espace-temps plat $\mathbb{R}^{4,1}$ et x^i les coordonnées sur l'hyperboloïde.

Les hypersurfaces d'équation $x^0 = \textit{constante}$ (et en particulier, $x^0 = 0$ ce qui implique $X^0 = 0$) sont des hypersphères $\mathbb{S}^3$. De même, les surfaces d'équations $x^0 = \textit{constante}$ et $x^1 = \textit{constante}$ (en particulier, $x^0 = 0$ et $x^1 = 0$ ce qui implique $X^0 = X^1 = 0$) sont des sphères $\mathbb{S}^2$. Nous avons des cosinus et des sinus hyperboliques dans la première colonne à la place des cosinus et sinus à cause de la signature de x^0.

La métrique à quatre dimensions est :

$$ds^2_{dS_4} = R^2 \left[-(dx^0)^2 + (\cosh x^0)^2\, ds^2_{\mathbb{S}^3}\right]$$

où on retrouve les expressions de la métrique de l'hypersphère unité :

$$ds^2_{\mathbb{S}^3} = (dx^1)^2 + (\sin x^1)^2 ds^2_{\mathbb{S}^2}$$

et de la sphère unité :

$$ds^2_{\mathbb{S}^2} = (dx^2)^2 + (\sin x^2)^2\,(dx^3)^2\,.$$

4.2.2 Espace-temps d'anti de Sitter AdS_4

Pour l'espace-temps d'anti de Sitter à $d+1 = 4$ dimensions, on pose :

$$\begin{cases} X^0 = R \cosh x^0 \cos x^1 \\ X^1 = R \cosh x^0 \sin x^1 \\ X^2 = R \sinh x^0 \cos x^2 \\ X^3 = R \sinh x^0 \sin x^2 \cos x^3 \\ X^4 = R \sinh x^0 \sin x^2 \sin x^3 \end{cases}$$

avec X^i les coordonnées dans l'espace-temps plat et x^i les coordonnées sur l'hyperboloïde. Ce choix de coordonnées est assez différent des coordonnées pour dS_4 puisque $x^0 = \textit{constante}$ décrit maintenant une hypersurface $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$.

La métrique est :

$$ds^2_{AdS_4} = R^2 \left\{(dx^0)^2 - (\cosh x^0)^2\,(dx^1)^2 + (\sinh x^0)^2 \left[(dx^2)^2 + (\sin x^2)^2\,(dx^3)^2\right]\right\}.$$

4.3 Les coordonnées globales et de Poincaré de l'espace hyperbolique

Pour AdS_{d+1}, en plus des coordonnées habituelles x et des coordonnées ambiantes X, il est souvent utile d'utiliser les coordonnées globales (r, θ, Ω_i) :

$$\begin{cases} X^0 = R \cosh r \cos\theta \\ X^i = R \sinh r\, \Omega_i \\ X^{d+1} = R \cosh r \sin\theta \end{cases} \tag{4.5}$$

avec $i = 1, \cdots, d$ et $\sum_{i=1}^{d} \Omega_i^2 = 1$ où Ω_i sont les coordonnées sur l'hypersphère $\mathbb{S}^d$ ($0 \le r$ et $0 \le \theta \le 2\pi$). La métrique en coordonnées globales et en dimension quelconque $d+1$ est :

$$ds^2_{AdS_{d+1}} = R^2 \left(-\cosh^2 r\, d\theta^2 + dr^2 + \sinh^2 r\, ds^2_{\mathbb{S}^{d-1}}\right) \tag{4.6}$$

où $ds^2_{\mathbb{S}^{d-1}}$ est la métrique de l'hypersphère unité de dimension $d-1$.

L'analogue euclidien sont les coordonnées globales (r, Ω) de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_{d+1}$. Sa métrique y prend la forme :

$$ds^2_{\mathbb{H}_{d+1}} = dr^2 + R^2 \sinh^2\left(\frac{r}{R}\right) ds^2_{\mathbb{S}^d} . \tag{4.7}$$

Le déterminant de la métrique vaut $g = \left(R^2 \sinh^2 \frac{r}{R}\right)^d$ et sera utilisé ultérieurement pour calculer le volume d'une boule dans l'espace hyperbolique.

Il est plus facile de visualiser un espace courbe comme l'espace hyperbolique par des sections plates. Nous allons par la suite nous concentrer sur la nappe supérieure de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_{d+1}$ ce qui correspond seulement à une des deux cartes non triviales de l'espace-temps d'anti de Sitter euclidien $EAdS_{d+1}$ [130]. Les coordonnées les plus utilisées sont celles de Poincaré [4] $(z, \vec{x})$ car elles simplifient techniquement les calculs et exhibent des sections plates de l'espace hyperbolique :

$$\begin{cases} z = & \frac{1}{R}\frac{1}{X^-} \\ \vec{x} = & \frac{1}{R}\frac{\vec{X}}{X^-} \end{cases} \tag{4.8}$$

avec $X^\pm = \frac{X^0 \pm X^{d+1}}{R^2}$ les coordonnées du cône de lumière dans l'espace ambiant [5] (cf. figure 4.3). On en déduit alors $X = (X^+, X^-, \vec{X}) = \left(\frac{z^2+\vec{x}^2}{z}, \frac{1}{z}, \frac{\vec{x}}{z}\right)$.

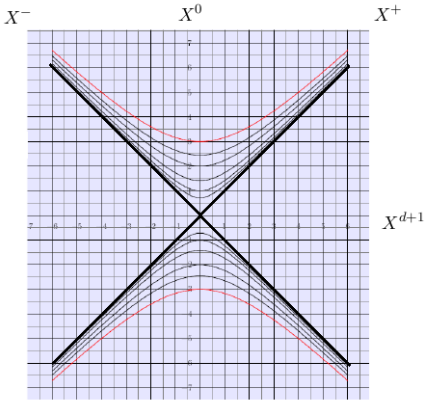

FIGURE 4.3 – Des hyperboles avec les axes X^+ et X^-.

4. D'autres coordonnées sont parfois employées telles que les coordonnées globales conformes ou semi-globales mais nous ne les détaillerons pas ici [125].

5. La quadrique en coordonnées du cône de lumière est $-X^+ X^- + \sum_{i=1}^{d} (X^i)^2 = -R^2$ et la métrique ambiante s'écrit $ds^2 = -dX^+ dX^- + dX^i dX_i$.

La métrique de l'espace hyperbolique dans les coordonnées de Poincaré s'écrit de la manière suivante :

$$ds^2_{\mathbb{H}_{d+1}} = R^2 \left(\frac{dz^2 + (d\vec{x})^2}{z^2} \right) . \tag{4.9}$$

On voit ainsi que $\mathbb{H}_{d+1}$ est conformément plat et que les hypersurfaces $z = constante$ décrivent des sections plates (horosphères) $\mathbb{R}^d$. On remarque que la métrique $g^{\mu\nu} = \left(\frac{z}{R}\right)^2 \delta^{\mu\nu}$ ne dépend pas de x, mais seulement de z et le déterminant est $g = det(g_{\mu\nu}) = \left(\frac{z}{R}\right)^{-2(d+2)}$.

Le demi-espace supérieur de Poincaré ("Upper Half Space" en anglais) $z > 0$ (cf. figure 4.4) représente la nappe supérieure [6] de l'hyperboloïde. Les géodésiques sont les demi-droites (au sens euclidien) verticales : $\vec{x} = cte$ (en rouge) et les demi-cercles (au sens euclidien) perpendiculaires à l'axe des abscisses : $z = 0$ (en bleu).

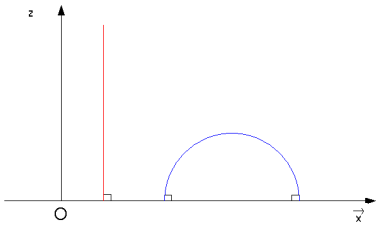

FIGURE 4.4 – Les géodésiques dans le demi-espace supérieur de Poincaré.

Le disque de Poincaré (cf. figure 4.5) est construit à partir du demi-plan supérieur de

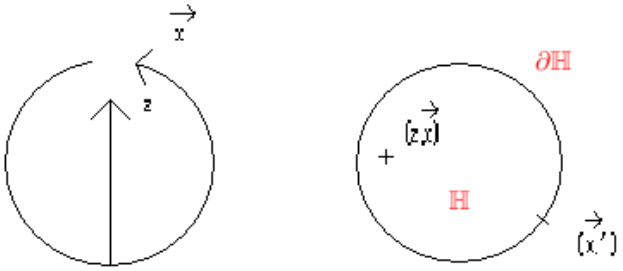

FIGURE 4.5 – Le disque de Poincaré

Poincaré dans lequel on rejoint les deux extrémités de l'axe des $\vec{x}$ (pour $d = 1$), ce qui crée un point à l'infini $p_\infty = (\infty, \infty)$ défini aussi par $X^- = 0$. Le bord du disque de Poincaré (l'hyperplan $z = 0$ du demi-espace supérieur de Poincaré et le point à l'infini) correspond au bord conforme $\partial\mathbb{H}_{d+1}$ de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_{d+1}$.

Cette représentation est également utilisée car même si elle est moins simple à visualiser (elle ne préserve pas les produits scalaires), elle respecte la topologie de l'espace

6. L'espace $EAdS_{d+1}$ correspond aux deux nappes de l'hyperboloïde et donc aux deux demi-espaces de Poincaré.

hyperbolique et donne donc une meilleure intuition globale et qualitative de cet espace (en particulier les subtilités liées au point à l'infini). Topologiquement, l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_{d+1} \cong \mathbb{B}_{d+1}$ est une boule tandis que son bord conforme $\partial\mathbb{H}_{d+1} \cong \mathbb{S}^d$ est une hypersphère. Sur la figure 4.5, on constate que l'intérieur du disque de Poincaré correspond au plan hyperbolique et que le cercle est son bord conforme.

4.4 Distances cordale et géodésique

Dans ces espaces, il est intéressant de calculer différentes grandeurs utilisées dans le chapitre suivant [47, 125, 135, 137].

La distance géodésique entre deux points A et B de l'espace hyperbolique est analogue à celle du cercle (cf. figure 4.6) et est noté d_{AB} ou tout simplement d. Elle correspond à la longueur du segment géodésique reliant A à B.

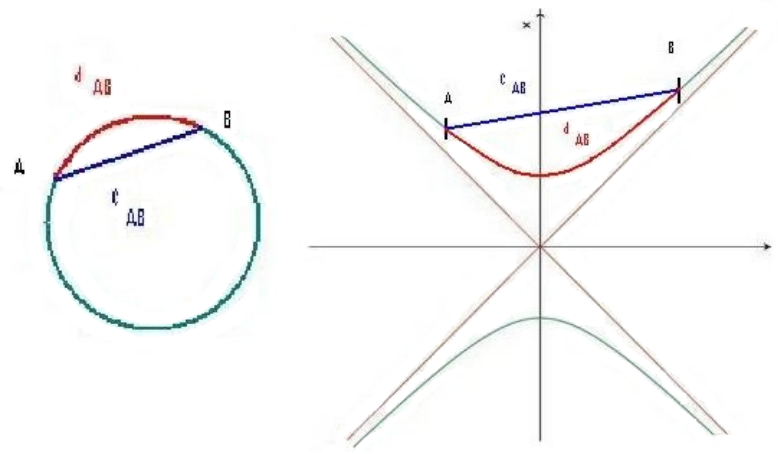

FIGURE 4.6 – Les distances cordales c_{AB} en bleu et géodésiques d_{AB} en rouge sur un cercle et sur une hyperbole.

L'angle hyperbolique α_{AB} entre A et B est défini par analogie avec le cercle :

$$\alpha = \alpha_{AB} = \frac{d_{AB}}{R}\,. \tag{4.10}$$

La distance cordale c_{AB} entre A et B est définie comme la longueur du segment de droite (la corde) reliant A et B dans l'espace ambiant :

$$c = c_{AB} = ||X_A - X_B|| \tag{4.11}$$

où X_A sont les coordonnées ambiantes du point A se situant dans l'espace hyperbolique. Par analogie avec le cercle, on peut facilement voir que $X_A \cdot X_B = -R^2 \cosh \alpha_{AB}$. On en déduit que

$$c^2 = c_{AB}^2 = (X_A - X_B)^2 = 2R^2\,(\cosh \alpha_{AB} - 1) = 2R^2\,(u_{AB} - 1) \tag{4.12}$$

avec

$$u \,=\, u_{AB} \,=\, -\frac{X_A \cdot X_B}{R^2} = \cosh \alpha_{AB} = \frac{1}{R^2}\,\frac{z_A^2 + z_B^2 + (\vec{x_A} - \vec{x_B})^2}{2 z_A z_B}\,. \tag{4.13}$$

On a donc les relations utiles pour l'arc hyperbolique :

$$d_{AB} \,=\, R \operatorname{arcosh} u_{AB} \,=\, \ln\left(u_{AB} + \sqrt{u_{AB}^2 - 1}\right)\,. \tag{4.14}$$

Une autre grandeur (érronément appelée distance cordale dans certaines références) couramment utilisée est le demi-carré de la distance cordale :

$$\xi \,=\, \xi_{AB} \,=\, \frac{1}{2} c_{AB}^2 \,=\, R^2(u_{AB} - 1) \,=\, \frac{1}{2}(X_A - X_B)^2\,. \tag{4.15}$$

Dans la suite des calculs, le rayon de courbure sera fixé égal à l'unité $R = 1$.

Chapitre 5

La correspondance holographique

Ce chapitre fournit une introduction qualitative à la problématique des chapitres suivants : les calculs des propagateurs du champ scalaire et de fonctions à trois points l'incluant. En effet, un objectif futur de cette étude est de tester la correspondance holographique à l'ordre cubique puis quartique dans les cas très particulier de fonctions à trois points entre deux opérateurs primaires scalaires de poids conforme quelconque et un courant conservé de rang arbitraire, et de fonctions à quatre points entre quatre opérateurs scalaires.

Dans la correspondance AdS/CFT de spin élevé, une théorie quantique de la gravitation incluant des spins élevés [15, 16, 34–36, 138] dans l'espace-temps d'anti de Sitter (fortement courbé c'est-à-dire avec un rayon R petit) est duale à une théorie quantique ordinaire conforme (CFT pour "conformal field theory") faiblement couplée [1], à une dimension de moins. Il sera donc nécessaire de comparer notre calcul de la fonction à trois (et quatre) points dans l'espace-temps d'anti de Sitter à $d+1$ dimensions à celui obtenu dans la théorie conforme au bord à d dimensions. Avant de présenter les détails techniques dans les deux chapitres suivants, nous proposons une introduction qualitative en présentant seulement les concepts principaux à l'aide des diagrammes de Witten.

Dans les diagrammes de Witten qui sont un analogue de ceux de Feynman lorsqu'on se trouve dans l'espace-temps d'anti de Sitter, le bord conforme de l'espace AdS est représenté par un cercle tandis que l'espace-temps lui-même est le disque intérieur (figure 5.1) (comme expliqué dans la sous-section 4.3).

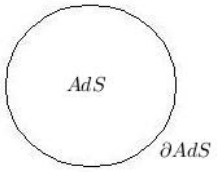

FIGURE 5.1 – L'espace AdS et son bord

1. autrement dit presque libre ce qui implique qu'il y ait une infinité de symétries.

Les points de AdS ont pour coordonnées ambiantes X qui correspondent à $x = (z, \vec{x})$ dans

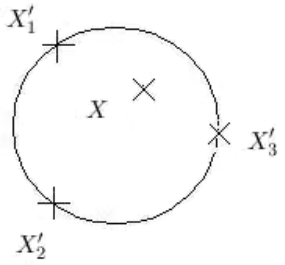

FIGURE 5.2 – Les points dans l'intérieur et au bord

les coordonnées de Poincaré et les coordonnées des points au bord sont notés X'_i en ambiant correspondant à $\vec{x'_i}$ (figure 5.2 et table 5.1).

Points	Espace AdS_{d+1}	Bord conforme : ∂AdS_{d+1}
Coordonnées ambiantes	X	X'_i
Indices (ambiants)	A	M
Coordonnées de Poincaré	$x = (z, \vec{x})$	$\vec{x'_i}$

TABLE 5.1 – Les points et leurs coordonnées

5.1 Théorie dans AdS

Dans l'espace-temps d'anti de Sitter, on s'intéressera à un champ scalaire de masse m noté ϕ et Φ est son représentant ambiant. La propagation libre d'un tel champ scalaire est déterminée par le propagateur de Feynman dans AdS représenté par une ligne fléchée (figure 5.3).

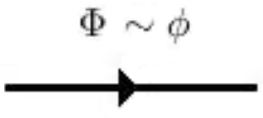

FIGURE 5.3 – Le propagateur du champ scalaire dans l'intérieur

La valeur au bord du champ scalaire est $\phi_0(\vec{x}) = \lim_{z\to 0}(z^{\Delta}\,\phi(z, \vec{x}))$. Le champ ϕ dans l'intérieur se transforme comme un champ scalaire ce qui induit comme valeur au bord une densité conforme ϕ_0 de poids conforme Δ. On peut interpréter la valeur d'un champ scalaire $\phi(z, \vec{x})$ en un point de l'intérieur d'AdS comme le résultat de la propagation de sa

valeur au bord $\phi_0(\vec{x'})$ via ce qui s'appelle un propagateur de Witten qu'on peut représenter par une ligne fléchée joignant un point de l'intérieur et un point du bord comme sur la figure 5.4.

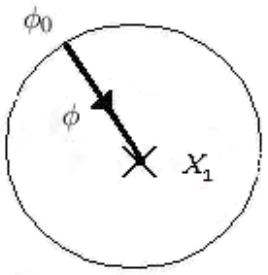

FIGURE 5.4 – Le propagateur de Witten du champ scalaire

La théorie, qui sera considérée par la suite, contiendra des champs tensoriels symétriques dans AdS. Plus précisément, le champ de jauge dans AdS sera noté $h_{\mu_1\cdots\mu_s}$ et $H_{A_1\cdots A_s}$ pour son représentant ambiant. Son propagateur dans AdS sera représenté par une ligne ondulée comme sur la figure 5.5. De la même façon que pour le champ scalaire, sa valeur au bord

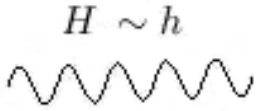

FIGURE 5.5 – Le propagateur d'un champ de jauge dans l'intérieur

est notée h_0 et on peut lui associer un propagateur de Witten.

Le vertex cubique (3.34) entre deux champs scalaires et un champ de jauge est représenté par le diagramme de Feynman sur la figure 5.6.

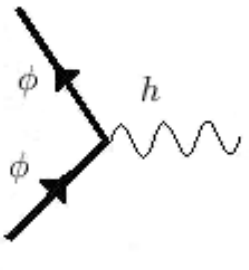

FIGURE 5.6 – Le vertex cubique

5.2 Théorie conforme des champs

Dans la correspondance AdS/CFT, les diagrammes de Witten du côté AdS sont en correspondance univoque avec certains diagrammes de Feynman d'une théorie conforme des champs vivant au bord d'AdS.

Dans la théorie conforme que nous considérons, le seul champ présent est un champ scalaire de masse nulle et de poids conforme Δ noté $\varphi(x')$ vivant au bord et dont le propagateur (entre deux points du bord) est représenté par une ligne fléchée fine (figure 5.7).

FIGURE 5.7 – Le propagateur du champ scalaire au bord

On s'intéressera en particulier aux fonctions de corrélation des courants $\mathcal{O}_{(s)}$ de la théorie conforme (donc les courants seront de trace nulle). Puisque ces courants sont bilinéaires en φ, ils peuvent être représentés comme dans la figure 5.8.

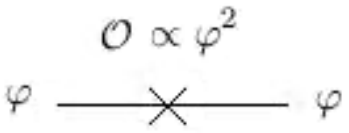

FIGURE 5.8 – Le courant bilinéaire au bord

En effet, dans la correspondance AdS/CFT, l'opérateur primaire conforme $\mathcal{O}_{(0)}(\varphi) = \varphi^2(\vec{x_i'})$ est dual au champ scalaire $\phi(x)$ dans AdS et est couplé avec sa valeur au bord $\phi_0(\vec{x_i'})$. Dans le cas général de rang s, l'opérateur $\mathcal{O}_{(s)}(\varphi) \propto \varphi(\vec{x_i'})\overleftrightarrow{\partial_{\mu_1}}\cdots\overleftrightarrow{\partial_{\mu_s}}\varphi(\vec{x_i'})$ est dual au champ de jauge $h(x)$ dans AdS et est couplé avec sa valeur au bord $h_0^{\mu_1\cdots\mu_s}(\vec{x_i'})$.

Nous considérerons en particulier les fonctions de corrélations à trois points entre deux

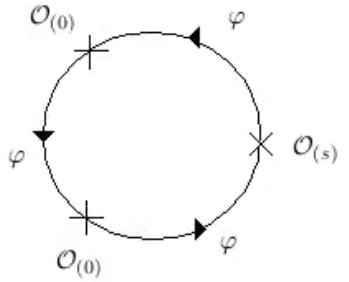

FIGURE 5.9 – Diagramme de Feynman à une boucle de la théorie conforme libre

opérateurs scalaires $\mathcal{O}_{(0)}$ et un courant conforme $\mathcal{O}_{(s)}$ de rang s qui peuvent être représentées par le diagramme de Feynman à une boucle lorsque la théorie conforme est libre (figure 5.9).

Les notations des champs sont résumées dans le tableau 5.2.

Espace	Espace ambiant	Espace intérieur	Valeur au bord	Théorie conforme au bord
Espace	$\mathbb{R}_0^D$	AdS_{d+1}	∂AdS_{d+1}	∂AdS_{d+1}
Coordonnées	X^A	$x^\mu = (z, \vec{x})$	$\vec{x'}$	$\vec{x'}$
Champ scalaire	$\Phi(X)$	$\phi(x)$	$\phi_0(x)$	$\varphi(\vec{x'})$
Champ de jauge	$H(X)$	$h(x)$	$h_0(\vec{x'})$	$\mathcal{O}(\vec{x'})$

TABLE 5.2 – Dictionnaire Espaces ambiant/intérieur/bord

5.3 Fonction de partition

De façon plus technique, la correspondance holographique est exprimée par la relation de Gubser-Klebanov-Polyakov-Witten [126, 141]. Elle relie, dans notre cas, la fonction génératrice des corrélateurs des courants $\mathcal{O}$ au bord à la fonction de partition de la théorie de spin élévé dans l'intérieur AdS pour un problème de Dirichlet. Plus précisément, on a l'égalité des intégrales de chemin suivantes :

$$\int\limits_{\phi|_{\partial AdS}=\phi_0} \mathcal{D}\phi\, e^{-S_{AdS}[\phi]} \;=\; Z[\phi_0] \;=\; \int \mathcal{D}\varphi\, e^{-S_{CFT}[\varphi] + \int \mathcal{O}(\varphi)\cdot\phi_0} \tag{5.1}$$

où S_{AdS} et S_{CFT} sont respectivement les actions des théories dans l'intérieur et au bord. Dans le cas considéré ici, pour le champ scalaire dans AdS, on a à l'ordre quadratique :

$$S_{AdS}[\phi] \;=\; \int\limits_{AdS} d^{d+1}x\,\sqrt{g}\,\left[\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi \;+\; \frac{1}{2}m^2\,\phi^2\right] \tag{5.2}$$

alors que pour le champ scalaire conforme au bord, l'action à l'ordre quadratique s'exprime par :

$$S_{CFT}[\varphi] \;=\; \int\limits_{\partial AdS} d^dx\,\frac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi\,. \tag{5.3}$$

5.4 Perspectives

5.4.1 Fonctions à trois points

Les travaux en cours exposés dans les deux chapitres suivants visent à calculer la fonction à trois points à partir du vertex cubique obtenu dans la partie précédente et des

propagateurs de Witten. Concrètement on voudrait calculer le diagramme de Witten de la figure 5.10 et le comparer au diagramme de la figure 5.9.

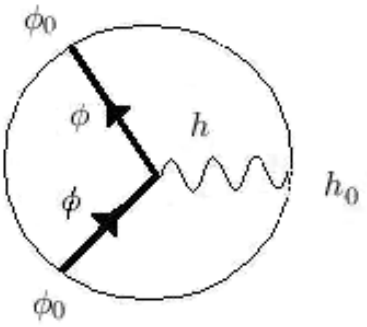

FIGURE 5.10 – La fonction à trois points

Il serait également intéressant de généraliser ces résultats pour des triplets de spin quelconque grâce aux vertex sur la couche de masse [41].

5.4.2 Diagrammes d'échanges

Un objectif plus lointain est de réaliser un test de la correspondance holographique à l'ordre quartique. Pour cela, il sera nécessaire de calculer la fonction à quatre points pour quatre champs scalaires. En particulier, on souhaite calculer le diagramme d'échange

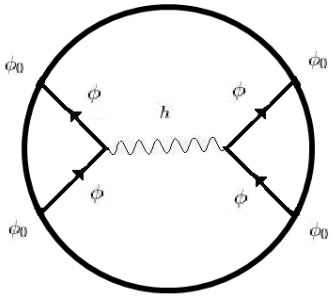

FIGURE 5.11 – Diagramme d'échange

représenté sur la figure 5.11. Il faudra donc connaitre explicitement en formalisme métrique le propagateur pour des champs de jauge de spin arbitraire s. Une piste potentielle est de généraliser les travaux sur le propagateur (voir [140] et références ci-dedans). Enfin, il sera nécessaire de la comparer à la fonction à quatre points de la CFT (cf. figure 5.12).

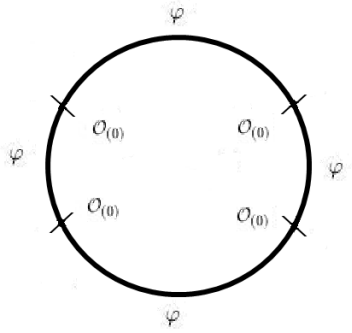

FIGURE 5.12 – Diagramme de Feynman de la CFT

Chapitre 6

Les propagateurs du champ scalaire

Dans l'ensemble de ce chapitre, on travaillera avec des variétés riemanniennes (au sens de signature euclidienne) et uniquement avec des champs scalaires. Les propagateurs sont traités dans différents articles [138, 142–147] mais la présentation qui suit consistera à retrouver tous les résultats indépendamment pas à pas.

6.1 La fonction de Green et le noyau de Poisson

La *fonction de Green* G est définie de la manière suivante :

$$\mathcal{D}\,G = \delta \tag{6.1}$$

où $\mathcal{D}$ est un opérateur différentiel et δ le delta de Dirac. Pour une condition de Dirichlet, on pose $G|_{\partial\mathcal{M}} = 0$. Le *propagateur "intérieur-intérieur"* ("bulk-to-bulk" en anglais) ou "de Feynman" est le pendant lorentzien de la fonction de Green (euclidienne). Nous utiliserons $\mathcal{D} = \Delta - m^2$ comme opérateur différentiel. Dans le cas libre, nous obtenons donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\Delta - m^2)G & = & \delta \\ G|_{\partial\mathcal{M}} & = & 0 \end{array} \right. \tag{6.2}$$

où $\mathcal{M}$ est une variété riemannienne et $\partial\mathcal{M}$ son bord. Dans cette sous-section, le bord est compact tandis que dans la suite de ce chapitre, nous travaillerons avec $\mathcal{M}$ l'espace hyperbolique dont le bord conforme est à l'infini. On parlera donc de comportement asymptotique plutôt que de valeur au bord.

Le *noyau de Poisson* K pour les mathématiciens correspond au *propagateur "intérieur-bord"* ("bulk-to-boundary" en anglais) ou "de Witten", pour les physiciens défini par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\Delta - m^2)K & = & 0 \\ K|_{\partial\mathcal{M}} & = & \delta\,, \end{array} \right. \tag{6.3}$$

encore avec une condition de Dirichlet.

On peut démontrer que le noyau de Poisson est la dérivée normale sur le bord de la fonction de Green :

$$K \;=\; \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\partial\mathcal{M}}\,. \tag{6.4}$$

Considérons un champ scalaire sur $\mathcal{M}$ obéissant à l'*équation de Helmholtz*[1] *avec source* $(\Delta - m^2)\phi = j$. Afin d'avoir un problème bien posé, il est nécessaire de fixer une condition au bord. On utilise ici la condition de Dirichlet, c'est-à-dire qu'on fixe la valeur du champ scalaire au bord[2]

$$\begin{cases} (\Delta - m^2)\phi = j \\ \phi|_{\partial\mathcal{M}} = \phi_0 \end{cases} \tag{6.5}$$

où j est une source et ϕ_0 la valeur au bord du champ scalaire. La solution est unique :

$$\phi(x) = \int_{\mathcal{M}} dy\, G(x-y)\, j(y) + \oint_{\partial\mathcal{M}} K(x;z)\, \phi_0(z)\, dz \tag{6.6}$$

où $x, y \in \mathcal{M}$ et $z \in \partial\mathcal{M}$.

6.2 Le propagateur "intérieur-intérieur"

On cherche à calculer la fonction de Green précédente dans l'espace hyperbolique $\mathcal{M} = \mathbb{H}_{d+1}$.

6.2.1 Equations générales

Le champ scalaire $\phi(x)$ solution de l'équation de Helmholtz avec source et s'annulant sur le bord ($\phi_0 = 0$) est la propagation de la source $j(y)$ en un point x de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_{d+1}$ par le propagateur "intérieur-intérieur" $G(x, y)$

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{H}_{d+1}} G(x,y)\, j(y)\, dV \tag{6.7}$$

où x et y les coordonnées de deux points dans $\mathbb{H}_{d+1}$, et avec un élément de volume $dV = \sqrt{g}\, d^{d+1}y$ où g est la métrique de $\mathbb{H}_{d+1}$. Pour trouver l'expression du propagateur "intérieur-intérieur", on doit résoudre l'équation

$$(\Delta - m^2)G(x,y) = \delta(x,y) := \frac{1}{\sqrt{g}}\delta(x-y) \tag{6.8}$$

où $\delta(x-y)$ est la densité de Dirac "usuelle" dont l'intégrale sur toutes les coordonnées est normalisée à l'unité. Ce choix de normalisation (et l'annulation de G à l'infini) détermine de manière unique la fonction de Green.

1. Le signe devant m^2 provient de l'équation de Klein-Gordon (1.2) après une rotation de Wick. Cependant, ce signe est l'opposé de la forme traditionnelle de l'équation de Helmholtz car seules les valeurs négatives de m^2 sont admissibles pour des solutions normalisables.

2. Il existe également la condition de Neumann qui fixe la valeur de la dérivée du champ scalaire au bord ou encore la condition mixte.

6.2.1.1 Cas de masse nulle

Commençons avec la fonction de Green de l'*équation sans masse de Laplace* :

$$\Delta G(x,y) = \delta(x,y)\,. \tag{6.9}$$

L'intégrale sur une boule de dimension $d+1$, de rayon r et centrée sur le point de coordonnées y est :

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{B}_{d+1}} \Delta G(x,y)\ dV &= \int\limits_{\mathbb{B}_{d+1}} \frac{1}{\sqrt{g}}\,\delta(x-y)\,\sqrt{g}\,d^{d+1}y \\ \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{B}_{d+1}} (\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\nabla})G(x,y)\ dV &= \int\limits_{\mathbb{B}_{d+1}} \delta(x-y)\,d^{d+1}y \,=\, 1 \end{aligned} \tag{6.10}$$

puisque le point y est le centre de la boule. Grâce au théorème de la divergence, le terme de gauche de (6.10) s'écrit :

$$\int\limits_{\mathbb{B}_{d+1}} (\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\nabla})G(x,y)\ dV = \int\limits_{\mathbb{S}^d=\partial(\mathbb{B}_{d+1})} \overrightarrow{\nabla}G(x,y)\cdot\overrightarrow{n}\ dS \tag{6.11}$$

avec l'élément de surface $dS = \sqrt{\gamma}\,d^dx'$, γ étant la métrique sur le bord, x' les coordonnées sur le bord de la boule (une sphère de dimension d), et $\vec{n}$ le vecteur normal à la boule qui correspond donc à $\vec{e_r}$.

Etant donné que l'espace est isotrope, la fonction de Green ne dépend que de la distance entre le point d'observation A de coordonnées x et la source B de coordonnées y, c'est-à-dire de la distance géodésique d_{AB} entre ces deux points. De plus, il est toujours possible de mettre la source à l'origine par symétrie de translation. La fonction de Green ne dépend donc que de la distance géodésique $d_{AB} = r$ donc $\overrightarrow{\nabla}G(x,y)\cdot\overrightarrow{n} = \dfrac{dG(r)}{dr}$. On déduit alors l'équation différentielle ordinaire du premier ordre définissant le propagateur d'un champ scalaire sans masse

$$\frac{dG(r)}{dr}\,A_{\mathbb{S}^d}(r) \,=\, 1 \tag{6.12}$$

où $\int_{\mathbb{S}^d} dS = A_{\mathbb{S}^d}$ est l'aire d'une hypersphère de dimension d et de rayon r et G tend vers 0 à l'infini. Ce type de formulation permet un traitement uniforme des espaces euclidien et hyperbolique dont on donne les formules d'aire dans la sous-section suivante.

6.2.1.2 Aires et volumes

En espace euclidien $\mathbb{R}^{d+1}$, l'"*aire*" (plus précisemment l'hypervolume) du bord d'une boule de dimension $d+1$ (autrement dit une sphère de dimension d) et de rayon r est

$$A_{\mathbb{S}^{d=n-1}}(r) \,=\, 2\,\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\,r^{n-1} \tag{6.13}$$

avec $d > 1$, que l'on peut redémontrer en dérivant le volume : $A = \dfrac{dV}{dr}$. Le volume vaut $V_{\mathbb{S}^d}(r) = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\, r^n$.

En espace hyperbolique $\mathbb{H}_{d+1}$, l'aire d'une hypersphère de dimension d est

$$A_{\mathbb{S}^d}(r) = 2\,\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\,\left(R\,\sinh\left(\frac{r}{R}\right)\right)^{n-1} \tag{6.14}$$

que l'on redérive à partir de son volume $V_{B_{n=d+1}}(r) = 2\dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\, R^n \displaystyle\int_0^{\frac{r}{R}} (\sinh x)^{n-1}\, dx$.

6.2.1.3 Cas massif

Pour trouver la constante de normalisation dans le cas de l'équation de Helmholtz (6.8) (avec une masse non nulle), nous prenons la limite de cette équation avec l'expression explicite du propagateur quand r tend vers zéro, c'est-à-dire se ramener au cas où la masse est nulle. Une autre méthode consisterait à résoudre l'analogue de l'équation (6.12) :

$$\frac{dG(r)}{dr}\, A_{\mathbb{S}^d}(r) - m^2 \int_0^r G(x)\, A_{\mathbb{S}^d}(x) dx = 1 \tag{6.15}$$

avec le propagateur tendant vers zéro à l'infini. Notons que cette équation présente le défaut d'être intégro-différentiel, mais elle a l'avantage de prendre en compte le choix de normalisation de la fonction de Green.

Concrètement on préférera résoudre l'équation homogène c'est-à-dire l'équation (6.8) en $x \neq y$, qui s'appelle l'équation de Helmholtz :

$$(\Delta - m^2) G(x,y) = 0 \tag{6.16}$$

et en tenant compte du comportement limite du propagateur "intérieur-intérieur" G lorsque x et y coïncident et lorsqu'ils sont séparés par une distance infinie.

6.2.2 Solution dans l'espace euclidien plat

Considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}^{d+1}$ et rappelons que le laplacien est défini par $\Delta\phi = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_\mu(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\,\partial_\nu)$. En coordonnées sphériques, l'équation (6.16) devient

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\,\frac{d}{dr} - m^2\right) G(r; m^2) = 0 \tag{6.17}$$

et en tenant compte du comportement limite du propagateur "intérieur-intérieur" G en $r = 0$ et $r = \infty$. A savoir :

- quand la distance r tend vers l'infini, le propagateur s'annule (pour $n > 2$ ou diverge pour $n = 2$)

– quand la distance r tend vers zéro, le propagateur diverge.

Nous allons procéder à la démonstration du cas le plus général, c'est-à-dire dans le cas massif et en dimension quelconque. Pour cela, il est plus pédagogique de s'intéresser dans un premier temps aux cas particuliers.

6.2.2.1 Cas de masse nulle

On pose $m^2 = 0$.

En dimension deux

Lorsque le nombre de dimensions de l'espace euclidien est $n = 2$, l'équation est

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right) G_{n=2}(r;0) = \delta(r)\,. \tag{6.18}$$

La solution s'écrit simplement

$$G_{n=2}(r;0) = K_1 \ln r + K_2 \tag{6.19}$$

où K_1 est la constante de normalisation. En utilisant (6.12), $K_1 = \dfrac{1}{A_{\mathbb{S}^1}(r=1)} = \dfrac{1}{2\pi}$ car $\Gamma(1) = 1$ et on peut poser $K_2 = 0$ ce qui donne

$$G_{n=2}(r;0) = \frac{1}{2\pi} \ln r\,. \tag{6.20}$$

On remarque que cette fonction ne s'annule pas quand r tend vers l'infini. A deux dimensions, la fonction de Green de l'équation de Laplace a donc une "divergence infrarouge".

En dimension supérieure à deux

Dans le cas où la masse est toujours nulle mais pour un nombre de dimensions quelconque $n = d + 1 > 2$, on obtient

$$G_{n>2}(r;0) = K_1 \frac{1}{r^{n-2}} + K_2 \tag{6.21}$$

avec $K_1 = \dfrac{1}{(2-n)A_{\mathbb{S}^d}(r=1)}$ et comme précédemment, $K_2 = 0$ car G s'annule à l'infini :

$$G_{n>2}(r;0) = \frac{1}{(2-n)} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{r^{n-2}}\,. \tag{6.22}$$

6.2.2.2 Cas massif

Dans le cas massif, l'équation (6.17) peut s'écrire :

$$\left(r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (n-1)\, r \frac{d}{dr} - m^2 r^2\right) G(r;m^2) = 0\,. \tag{6.23}$$

Rappels sur les fonctions de Hankel
Cette dernière peut être reliée à l'*équation de Hankel* de première espèce :

$$\left(x^2\,\frac{d^2}{dx^2}\,+\,x\,\frac{d}{dx}\,+\,(x^2\,-\,\nu^2)\right)\,y(x)\,=\,0\,. \tag{6.24}$$

La solution générale est donc

$$y(x)\,=\,C_1\,H_\nu^{(1)}(x)\,+\,C_2\,H_\nu^{(2)}(x) \tag{6.25}$$

avec C_1 et C_2 deux constantes de normalisation et $H_\nu^{(1)}(x)\,=\,J_\nu(x)+iY_\nu(x)$ est la fonction de Hankel avec J_ν et Y_ν respectivement les *fonctions de Bessel* de première et de seconde espèce. La seconde solution oscillant, on pose $C_2 = 0$.
La fonction spéciale de Bessel de première espèce $J_\nu(x$ est solution $y(x)$ de l'équation suivante :

$$\left[x^2\,\frac{d^2}{dx^2}\,+\,x\,\frac{d}{dx}\,+\,(x^2-\nu^2)\right]\,y(x)\,=\,0 \tag{6.26}$$

où ν est un nombre complexe, entier ou demi-entier, et s'exprime explicitement par

$$J_\nu(x)\,=\,\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\,\sum_{p=0}^{\infty}\,\frac{(-1)^p}{2^{2p}\,p!\,(\nu+p)!}\,x^{2p}\,. \tag{6.27}$$

La fonction de Bessel de seconde espèce (appelée aussi fonction de Neumann) s'exprime à partir de J_ν :

$$Y_\nu(x) := \lim_{\lambda\to\nu}\,\frac{J_\lambda(x)\,cos(\lambda\pi)\,-\,J_{-\lambda}(x)}{sin(\lambda\pi)}\,. \tag{6.28}$$

Solution en dimension quelconque
Dans (6.24), on fait le changement de variable $x = imr$:

$$\left(r^2\,\frac{d^2}{dr^2}\,+\,r\,\frac{d}{dr}\,+\,(-m^2r^2\,-\,\nu^2)\right)\,H_\nu^{(1)}(imr)\,=\,0 \tag{6.29}$$

puis on pose

$$H_\nu^{(1)}(imr)\,=\,C\,r^{-\alpha}\,G(imr;m^2) \tag{6.30}$$

d'où

$$\left(r^2\,\frac{d^2}{dr^2}\,+\,(1-2\alpha)r\,\frac{d}{dr}\,+\,(-m^2r^2\,-\,\nu^2\,+\,\alpha^2)\right)\,C\,r^{-\alpha}\,G(r;m^2)\,=\,0\,. \tag{6.31}$$

Pour $r \neq 0$, on identifie les paramètres avec ceux de l'équation (6.23) : $\alpha = 1 - \dfrac{n}{2}$ et on prend $\nu = -\alpha$ pour qu'il soit positif (car n sera toujours supérieur à 2). La solution de l'équation de départ (6.23) est alors

$$G(r;m^2) = \frac{1}{C}\,r^{-\nu}\,H_\nu^{(1)}(imr) \tag{6.32}$$

avec $\frac{1}{C} = -\frac{i}{4}\left(\frac{im}{2\pi}\right)^{\nu}$ car on doit retouver le cas de masse nulle et quand $r \to 0$ on a :

$$r^{-\nu}\, H_{\nu}^{(1)}(r) \to -i\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\,\left(\frac{im}{2}\right)^{-\nu}\, r^{-2\nu}\,.$$

En conclusion,

$$G(r;m^2) = -\frac{i}{4}\left(\frac{im}{2\pi}\right)^{\nu}\, r^{-\nu}\, H_{\nu}^{(1)}(imr)\,. \tag{6.33}$$

Eventuellement, la solution peut être réécrite sans argument imaginaire en utilisant les fonctions de Bessel modifiées de première espèce $I_n(x) = i^{-n}\, J_n(ix)$. De plus, il est possible de trouver une relation de récurrence reliant la solution en dimension n à celle en dimension $n+2$ [125].

Comme nous venons de le voir, le problème en espace plat est relativement direct. Intéressons-nous maintenant à la résolution de cette équation dans l'espace hyperbolique.

6.2.3 Solution dans l'espace hyperbolique

Rappelons que la métrique de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_{d+1}$ est (4.7) :

$$ds^2_{\mathbb{H}_{d+1}} = dr^2 + \sinh^2(r)\, ds^2_{\mathbb{S}^d} \tag{6.34}$$

avec le rayon de courbure égale à l'unité $R = 1$. Le déterminant de la métrique vaut donc ici $g = (\sinh^2 r)^d$.

L'équation de Helmholtz (6.16) s'écrit dans ce cas :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + (n-1)\,\mathrm{cotanh}(r)\,\frac{d}{dr} - m^2\right) G(r;m^2) = 0 \tag{6.35}$$

puis en faisant le changement de variables suivant $u = u_{AB} = \cosh r$ de (4.13), elle devient :

$$\left(-(1-u^2)\,\frac{d^2}{du^2} + n\,u\,\frac{d}{du} - m^2\right)\, G(u;m^2) = 0\,. \tag{6.36}$$

Un second changement de variable $v = \dfrac{1-u}{2}$ nous permet d'obtenir l'équation suivante :

$$-\left(v(1-v)\,\frac{d^2}{dv^2} + \left(\frac{n}{2} - n\,v\right)\,\frac{d}{dv} + m^2\right) G(v;m^2) = 0\,. \tag{6.37}$$

6.2.3.1 En dimension deux

Un cas particulier de cette équation est l'*équation de Legendre* de seconde espèce pour $n = 2$ dimensions :

$$\left((1-u^2)\,\frac{d^2}{du^2} - 2u\,\frac{d}{du} + \nu(\nu+1)\right) Q_{\nu}(u) = 0 \tag{6.38}$$

avec $m^2 = \nu(\nu+1)$, $\nu = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+4m^2}}{2}$ et $Q_\nu(u)$ est la fonction de Legendre de seconde espèce. La solution de ce cas particulier est donc

$$G_{n=2}(r; m^2) = K\, Q_\nu(\cosh r) \tag{6.39}$$

avec $K = -\frac{1}{2\pi}$ [125] :

$$G_{n=2}(r; m^2) = -\frac{1}{2\pi}\, Q_\nu(\cosh r)\,. \tag{6.40}$$

6.2.3.2 En dimension quelconque $d+1$

On cherche maintenant à résoudre l'équation (6.37) dont la forme générale est celle de l'*équation hypergéométrique* :

$$\Big(v(1-v)\,\frac{d^2}{dv^2} + (c-(a+b+1)v)\frac{d}{dv} - ab\Big)\, y(v) = 0\,. \tag{6.41}$$

Par identification des coefficients avec (6.37), on peut choisir $a := \Delta_+ := \Delta = \frac{d+\sqrt{d^2+4m^2}}{2}$, $b = \Delta - d = \Delta_-$ avec $\Delta_\pm$ les *poids conformes* de l'opérateur dual, et $c = \frac{n}{2}$. On remarque donc que la somme des deux poids conformes vaut $\Delta + \Delta_- = d$ et qu'il y a une relation entre la masse au carré, le poids conforme et la dimension de l'espace : $m^2 = \Delta(\Delta - d)$.

Afin de trouver la solution adaptée à notre problème (6.37), on s'intéresse au comportement asymptotique à l'infini : le propagateur G doit s'annuler en $r = \infty$. La solution, en fonction de la variable v, est dans ce cas (formule 15.5.7 de [148]) :

$$G(v) = C_\Delta\, v^{-a}\; {}_2F_1\left(a, a-c+1; a-b+1; \frac{1}{v}\right) \tag{6.42}$$

$$= C_\Delta\, v^{-\Delta}\; {}_2F_1\left(\Delta, \Delta - \frac{d}{2} + \frac{1}{2}\,;\, 2\Delta - d + 1\,;\, \frac{1}{v}\right) \tag{6.43}$$

où C_Δ est une constante de normalisation et ${}_2F_1(a', b'; c'; v')$ est une fonction hypergéométrique définie par :

$${}_2F_1(a', b'; c'; v') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a')_n (b')_n}{(c')_n} \frac{v'^n}{n!} \tag{6.44}$$

où $(a')_n$ est le symbole de Pochhammer $(a')_n = \dfrac{\Gamma(a'+n)}{\Gamma(a')}$:

$${}_2F_1(a', b'; c'; z') = \frac{\Gamma(c')}{\Gamma(a')\,\Gamma(b')} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a'+n)\Gamma(b'+n)}{\Gamma(c'+n)} \frac{z'^n}{n!}\,. \tag{6.45}$$

Afin de trouver la constante de normalisation C_Δ, une identité (15.3.7 de [148]) nous permet de réécrire notre solution (6.43) avec v comme variable :

$$G(v) = C_\Delta v^{-\Delta} \left[\frac{\Gamma(c')\Gamma(b'-a')}{\Gamma(b')\Gamma(c'-a')} \left(-\frac{1}{v}\right)^{-\Delta} {}_2F_1(a', 1-c'+a'; 1-b'+a'; v) \right. \quad (6.46)$$
$$\left. + \frac{\Gamma(c')\Gamma(a'-b')}{\Gamma(a')\Gamma(c'-b')} \left(-\frac{1}{v}\right)^{-\Delta+\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} {}_2F_1(b', 1-c'+b'; 1-a'+b'; v) \right]$$

où $a' = \Delta$, $b' = \Delta - \frac{d}{2} + \frac{1}{2}$ et $c' = 2\Delta - d + 1$ sont les coefficients de (6.43).
Pour expliciter la constante de normalisation C_Δ, on étudie le comportement quand $r \to 0$.La variable $v = \frac{1}{2} - \frac{u}{2}$ tend alors vers $-\frac{r^2}{4}$ car $u = \cosh(r) = 1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \mathcal{O}(r^4)$. Remarquons que ${}_2F_1(a'', b''; c''; z'' = 0) = 1$; on a :

$$\begin{aligned} G(v) &\sim C_\Delta\, v^{-\Delta} \left[\frac{\Gamma(c')\Gamma(b'-a')}{\Gamma(b')\Gamma(c'-a')} \left(-\frac{1}{v}\right)^{-\Delta} + \frac{\Gamma(c')\Gamma(a'-b')}{\Gamma(a')\Gamma(c'-b')} \left(-\frac{1}{v}\right)^{-\Delta+\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} \right] \\ &\sim C_\Delta \frac{\Gamma(c')\Gamma(a'-b')}{\Gamma(a')\Gamma(c'-b')} (-v)^{\frac{1-d}{2}} (-1)^{-\Delta} \\ &\sim C_\Delta \frac{\Gamma(2\Delta-d+1)\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\Delta)\Gamma(\Delta-\frac{d}{2}+\frac{1}{2})} \left(\frac{r^2}{4}\right)^{\frac{1-d}{2}} (-1)^{-\Delta}, \end{aligned}$$

où à la deuxième étape nous avons négligé le terme constant devant l'autre terme.
La solution $G(r)$ doit tendre, pour $r \to 0$ vers celle du cas non massif dans l'espace plat euclidien $G(r) \underset{r\to 0}{\to} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2(2-n)\pi^{n/2}} r^{2-n}$. En utilisant $\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\, \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$, on trouve que la constante de normalisation vaut

$$C_\Delta = \frac{(-1)^{\Delta+1}\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}\, 2^{2\Delta+1}\, (\Delta - \frac{d}{2})\, \Gamma(\Delta - \frac{d}{2})}. \quad (6.47)$$

La solution de (6.37) s'écrit finalement :

$$G(v) = \frac{-\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}\, 2^{\Delta+1}\, (\Delta - \frac{d}{2})\, \Gamma(\Delta - \frac{d}{2})} (-2v)^{-\Delta}\, {}_2F_1\left(\Delta, \Delta - \frac{d}{2} + \frac{1}{2}; 2\Delta - d + 1;\, \frac{1}{v}\right) \quad (6.48)$$

ou encore en fonction du demi-carré de la distance cordale $\xi = -2v$ souvent utilisé :

$$G(\xi) = \frac{-\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}\, 2^{\Delta+1}\, (\Delta - \frac{d}{2})\, \Gamma(\Delta - \frac{d}{2})} \xi^{-\Delta}\, {}_2F_1\left(\Delta, \Delta - \frac{d}{2} + \frac{1}{2}; 2\Delta - d + 1; -\frac{2}{\xi}\right). \quad (6.49)$$

6.2.3.3 Comparaison avec la littérature

Bien entendu, on retrouve ce résultat très souvent dans la littérature mais sous des formes différentes et la similitude des expressions n'est pas toujours triviale au premier abord.

– Dans la référence [135], la seule différence concerne le signe puisque la définition de $G : (\Delta - m^2)G = -\delta$ est différente de celle que nous avons prise :

$$G(\eta) = \frac{2^{-\Delta}\,\Gamma(\Delta)}{(2\Delta - d)\,\pi^{d/2}\,\Gamma(\Delta - \frac{d}{2})}\,\eta^{-\Delta}\;{}_2F_1\left(\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta+1}{2}; \Delta + 1 - \frac{d}{2}; \frac{1}{\eta^2}\right) \quad (6.50)$$

avec $\eta = -2v + 1$. En identifiant $y = \dfrac{1}{\eta^2}$ et en utilisant la relation (15.3.20 de [148])

$${}_2F_1\left(a, a + \frac{1}{2}; c; y\right) = (1 - \sqrt{y})^{-2a}\;{}_2F_1\left(2a, c - \frac{1}{2}; 2c - 1; -\frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{y}}\right), \quad (6.51)$$

puis en posant $z = \dfrac{1}{v}$ dans (6.48) et en utilisant la relation (15.3.16 de [148])

$${}_2F_1(a, b; 2b; z) = \left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-a}\;{}_2F_1\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a; b + \frac{1}{2}; \frac{z^2}{(2-z)^2}\right) \quad (6.52)$$

on retrouve le même résultat.

– Les résultats cités dans d'Hoker et Freedman [137, 149] sont similaires :

$$G(\zeta) = \frac{2^{-\Delta}\,\Gamma(\Delta)}{(2\Delta - d)\,\pi^{d/2}\,\Gamma(\Delta - \frac{d}{2})}\,\zeta^{\Delta}\;{}_2F_1\left(\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta+1}{2}; \Delta + 1 - \frac{d}{2}; \zeta^2\right) \quad (6.53)$$

avec $\zeta = \dfrac{1}{\eta}$.

6.2.4 Solution dans l'espace ambiant

Pour l'espace ambiant, on obtient le résultat suivant à partir de (6.48) :

$$G(X_1, X_2) = \frac{\Gamma(\Delta)}{2\pi^{d/2}\,\Gamma(\Delta - \frac{d}{2} + 1)}\,(c^2)^{-\Delta}\;{}_2F_1\left(\Delta, \frac{2\Delta - d + 1}{2}; 2\Delta + 1 - d; -\frac{4}{c^2}\right) \quad (6.54)$$

avec $c^2 = (X_1 - X_2)^2 = -4v$ provenant de (4.12) et (4.15) et en se rappelant que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

6.3 Le propagateur "intérieur-bord"

6.3.1 Dans l'espace hyperbolique

Intéressons nous maintenant au propagateur "intérieur-bord". Le champ scalaire dans l'intérieur (fonction des coordonnées de Poincaré) $\phi(z, \vec{x})$ solution de l'équation de Helmholtz est la propagation de sa valeur au bord $\phi_0(\vec{x'})$ par le propagateur "intérieur-bord" $K_\Delta(z, x; x')$:

$$\phi(z, \vec{x}) = \int d^n x'\,\phi_0(\vec{x'})\,K_\Delta(z, \vec{x}; \vec{x'})\,. \quad (6.55)$$

Le propagateur "intérieur-bord" est défini, [152], par l'équation de Helmholtz (6.8) et son comportement quand le point se situant à l'intérieur tend vers le bord ($z \to 0$) :

$$\begin{cases} (\Delta - m^2) K_\Delta(z, \vec{x}; \vec{x'}) = & 0 \\ K_\Delta(z, \vec{x}; \vec{x'}) \underset{z \to 0}{\longrightarrow} & z^{d-\Delta}\, \delta(\vec{x} - \vec{x'})\,. \end{cases} \tag{6.56}$$

A partir de (6.4), un choix de normalisation possible [152] pour l'expression du propagateur "intérieur-bord" est le suivant :

$$K_\Delta(z_1, \vec{x_1}; \vec{x_2}) \;=\; \lim_{z_2 \to 0} \frac{2\Delta - d}{z_2^\Delta}\, G(z_1, \vec{x_1}; z_2, \vec{x_2})\,. \tag{6.57}$$

D'après le paragraphe 4.4, la grandeur v peut s'exprimer dans les coordonnées de Poincaré :

$$\frac{1}{v} \;=\; \frac{2}{X_1 \cdot X_2} \;=\; \frac{-4 z_1 z_2}{(z_1 - z_2)^2 + (\vec{x_1} - \vec{x_2})^2} \tag{6.58}$$

où X_1 et X_2 sont les coordonnées ambiantes de deux points de l'intérieur.
On cherche la limite de $\dfrac{1}{v}$ quand un des points est sur le bord $X_2 \to X'$ c'est-à-dire $z_2 \to z' = 0$. On a donc la relation $\dfrac{1}{v} \sim \dfrac{-4 z_1}{z_1^2 + (\vec{x_1} - \vec{x_2})^2}\, z_2$ pour $\vec{x_1} \neq \vec{x_2}$. Quand la coordonnée z_2 tend vers zéro, la fonction hypergéométrique ${}_2F_1$ (dans le propagateur G) tend vers 1 puisque z_1, $\vec{x_1}$ et $\vec{x_2}$ sont fixés.
On obtient donc [137] :

$$K_\Delta(z, \vec{x}; \vec{x'}) \;=\; \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}\, \Gamma(\Delta - \frac{d}{2})} \left(\frac{z}{z^2 \,+\, (\vec{x} - \vec{x'})^2} \right)^\Delta . \tag{6.59}$$

6.3.2 Dans l'espace ambiant

Depuis Dirac [153], il est d'usage d'utiliser le formalisme ambiant également pour décrire le bord conforme de l'espace-temps d'anti de Sitter. Dans le cas de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_{d+1}$, cette construction est connue depuis plus longtemps et consiste à décrire le bord conforme $\mathbb{S}^d$ comme le cône $X'^2 = 0$ projectif c'est-à-dire avec la relation d'équivalence $X' \sim \lambda X'$ avec $\lambda \neq 0$. Une paramétrisation commode est $X' = (X'^+, X'^-, \vec{X'}) = (1, \vec{x'}^2, \vec{x'})$. Rappelons la paramétrisation des coordonnées d'un point de l'intérieur : $X = (X^+, X^-, \vec{X}) = (\dfrac{z^2 + \vec{x}^2}{z}, \dfrac{1}{z}, \dfrac{\vec{x}}{z})$. On calcule $(X - X')^2 = -1 - 2X \cdot X'$ pour en déduire $\dfrac{2}{-X \cdot X'} = \dfrac{4z}{z^2 + (\vec{x} - \vec{x'})^2}$.

On peut écrire le propagateur "intérieur-bord" en coordonnées ambiantes :

$$K_\Delta(X; X') \;=\; \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}\, \Gamma(\Delta - \frac{d}{2})} \frac{1}{(2\, X \cdot X')^\Delta} \tag{6.60}$$

résultat similaire à celui de la référence [140] à un facteur de normalisation près $\frac{1}{(-1)^{\Delta}(2\Delta - d)}$. On peut réécrire l'expression précédente à l'aide de la transformée de Mellin :

$$K_{\Delta}(X, X') \;=\; \frac{1}{\pi^{d/2}\,\Gamma(\Delta - \frac{d}{2})} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t}\, t^{\Delta}\, e^{-2t\, X'\cdot X} \tag{6.61}$$

car $\frac{1}{z^{\Delta}} = \frac{1}{\Gamma(\Delta)} \int \frac{dt}{t}\, t^{\Delta}\, e^{-t\, z}$ comme on peut le vérifier à partir de la forme intégrale de la fonction gamma d'Euler.

La représentation ambiante du propagateur "intérieur-bord" permet d'écrire la forme ambiante de l'équation (6.55) :

$$\Phi(X) \;=\; \int dX'\, K_{\Delta}(X; X')\, \Phi_0(X') \tag{6.62}$$

avec $\Phi_0(X')$ le représentant ambiant de la valeur au bord du champ scalaire.

Chapitre 7

Les fonctions à trois points

Dans ce chapitre, nous travaillerons avec les coordonnées ambiantes afin de faciliter les calculs : celles des points de l'espace AdS sont notées X (pour rappel, on fixe le rayon de courbure de l'espace-temps à l'unité $X^2 = -1$) tandis que celles d'un point du bord ∂AdS sont notées X' (avec $X'^2 = 0$). Les différents points du bord sont différenciés par un indice ${X'}_i$.

Ce chapitre est largement inspiré de l'article [140] mais le calcul des fonctions à trois points pour un vertex cubique dans AdS entre deux champs scalaires de masse quelconque et un champ de jauge de spin entier arbitraire semble original. Il serait intéressant de pouvoir comparer ce résultat avec l'expression d'une telle fonction à trois points en CFT entre trois opérateurs primaires, deux scalaires et un courant conservé, sans trace et de spin quelconque dont la forme est fixée par la symétrie conforme [154].

7.1 Les propagateurs en coordonnées ambiantes pour un tenseur de rang quelconque

Pour la suite, il est nécessaire de connaître l'expression des propagateurs en coordonnées ambiantes pour un tenseur de rang quelconque, ce qui est connu pour les propagateurs "intérieur-bord" [138] mais qui reste un problème ouvert pour les propagateurs "intérieur-intérieur" dans le formalisme de Fronsdal (par contre, pour l'expression du propagateur dans le formalisme de Vasiliev, voir [47]).

7.1.1 Le propagateur "intérieur-bord"

Le progateur "intérieur-bord" pour un champ scalaire a été traité dans la section 6.3.2.

La représentation ambiante du propagateur "intérieur-bord" d'un champ vectoriel (rang $s = 1$) permettrait d'écrire la forme ambiante de la valeur du champ comme la propagation de sa valeur au bord :

$$V^A(X) = \int dX'\, K^{AM}_{\Delta,1}(X;X')\, V_{0\,M}(X') \tag{7.1}$$

avec $V_{0\,M}(X')$ le représentant ambiant de la valeur au bord du champ vectoriel.

Rappelons que le représentant ambiant du champ vectoriel $V^A(X)$ est tangent $X_A\, V^A(X) = 0$, de même pour sa valeur au bord $X'_M\, V_0^M(X') = 0$.

Le progateur "intérieur-bord" du champ vectoriel $K^{MA}_{\Delta,\,1}(X,X')$ peut donc être vu comme la "projection" du progateur "intérieur-bord" d'un champ scalaire (voir par exemple [140]) :

$$K^{AM}_{\Delta,\,1}(X,X') \;=\; \frac{1}{\pi^{d/2}\,\Gamma(\Delta-\frac{d}{2})}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\,t^\Delta\,\mathcal{J}^{MA}\,e^{-2t\,X'\cdot X} \tag{7.2}$$

avec le projecteur $\mathcal{J}^{AM} = \eta^{AM} - \dfrac{X'^A X^M}{X'\cdot X}$ où, de façon contre-intuitive, M est l'indice lié au bord et A celui lié à l'intérieur (voir la table 5.1). On peut le réécrire comme l'action d'un opérateur différentiel du bord sur le propagateur de Witten du champ scalaire [140] :

$$K^{AM}_{\Delta,\,1}(X,X') \;=\; D^{MA}_{1,\Delta}(X',\partial')\,K_{\Delta,\,0}(X,X') \tag{7.3}$$

avec l'opérateur différentiel

$$D^{AM}_{1,\Delta}(X',\partial') \;=\; \eta^{AM} \;+\; \frac{1}{\Delta}X'^A\,\frac{\partial}{\partial X'_M}\,. \tag{7.4}$$

Pour un champ tensoriel de rang $s=2$, le résultat est de la même forme [140] :

$$K^{A_1A_2M_1M_2}_{\Delta,\,2}(X,X') \;=\; D^{A_1A_2M_1M_2}_{2,\Delta}(X',\partial')\,K_{\Delta,\,0}(X,X') \tag{7.5}$$

avec l'opérateur différentiel

$$\begin{aligned} D^{A_1A_2M_1M_2}_{2,\Delta}(X',\partial') \;&=\; \eta^{A_1M_1}\eta^{A_2M_2} \;+\; \frac{1}{\Delta}\left(\eta^{A_1M_1}X'^{A_2}\,\partial'_{M_2} \;+\; 1\leftrightarrow 2\right) \\ &+\; \frac{X'^{A_1}\,X'^{A_2}}{\Delta\,(\Delta+1)}\partial'_{M_1}\partial'_{M_2}\,. \end{aligned} \tag{7.6}$$

A l'aide des fonctions génératrices, nous généralisons ce propagateur "intérieur-bord" en formulation ambiante pour un tenseur de spin s :

$$K_{\Delta,s}(X,U;X',W) \;=\; D_{\Delta,s}(U;X',\partial',W)\,K_{\Delta,0}(X;X') \tag{7.7}$$

où nous définissons le polynôme en les variables auxiliaires U (intérieur) et W (bord)

$$D_{\Delta,s}(U;X',\partial',W) \;=\; W_{M_1}\cdots W_{M_s}\,U_{A_1}\cdots U_{A_s}\,D^{A_1\cdots A_sM_1\cdots M_s}_{\Delta,s}(X',\partial') \tag{7.8}$$

dont le coefficient est l'opérateur différentiel recherché

$$D^{A_1\cdots A_sM_1\cdots M_s}_{\Delta,s}(X',\partial') = \sum_{j=0}^{s-1}\frac{1}{(\Delta)_j}\,\eta^{A_1M_1}\cdots\eta^{A_jM_j}X'^{\,A_{j+1}}\cdots X'^{\,A_s}\,\frac{\partial}{\partial X'_{M_{j+1}}}\cdots\frac{\partial}{\partial X'_{M_s}}. \tag{7.9}$$

Dans la formule précédente, le symbole de Pochhammer est utilisé $(z)_n \;=\; \dfrac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$ et une symétrisation sur les indices A et une autre sur les indices M est implicite. La formule

(7.9) généralise les formules (7.4) et (7.6). Ce résultat a été obtenu par récurrence et peut être résumé sous forme d'un polynôme :

$$\begin{aligned} D_{\Delta,s}(U;X',\partial',W) &= \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{(\Delta)_j} (W\cdot U)^j (X'\cdot U)^{s-j} (W\cdot\partial_{X'})^{s-j} \qquad (7.10)\\ &= \left[(X'\cdot U)(W\cdot\partial_{X'})\right]^s \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{(\Delta)_j} \left[\frac{W\cdot U}{(X'\cdot U)(W\cdot\partial_{X'})}\right]^j . \end{aligned}$$

Définissons la fonction génératrice de ces opérateurs pour chaque spin s par

$$\begin{aligned} D_{\Delta}(U;X',\partial',W) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} D_{\Delta,s}(U;X',\partial',W) \qquad (7.11)\\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{(\Delta(s))_j} (W\cdot U)^j (X'\cdot U)^{s-j} (W\cdot\partial_{X'})^{s-j} \qquad (7.12) \end{aligned}$$

où $\Delta(s)$ indique que le poids conforme dépend du spin s. Par exemple, pour un champ de Fronsdal $\Delta(s) = d+s-2$.

7.1.2 Le propagateur "intérieur-intérieur" pour un tenseur de rang quelconque

D'après [140, 150, 151], on peut réécrire le propagateur "intérieur-intérieur" (6.54) au moyen du produit de deux propagateurs "intérieur-bord" en intégrant sur un point auxiliaire du bord X' ainsi que sur un paramètre auxiliaire c (figure 7.1).

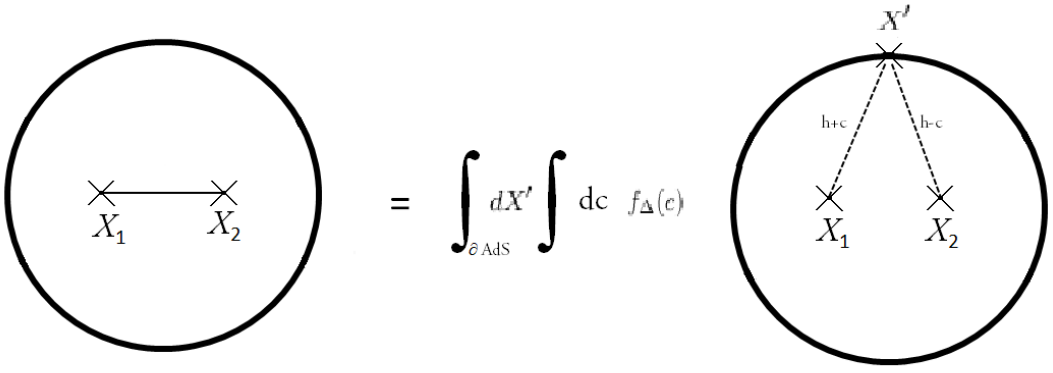

FIGURE 7.1 – Le propagateur "intérieur-intérieur" vu comme une décomposition de deux propagateurs "intérieur-bord"

Pour un champ scalaire :

$$G_{\Delta,0}(X_1,X_2) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dc}{2\pi i} f_{\Delta,0}(c) \int_{\mathbb{S}^d} dX' \int_0^{\infty} (d\tilde{t_c})^2 \, e^{2tX'\cdot X_1 + 2\bar{t}X'\cdot X_2} \qquad (7.13)$$

avec $(d\tilde{t_c})^2 = \frac{dt}{t}\frac{d\bar{t}}{\bar{t}}\, t^{\frac{d}{2}+c}\, \bar{t}^{\frac{d}{2}-c}$ et

$$f_{\Delta,0}(c) = \frac{1}{2\,\pi^d\,\Gamma(c)\Gamma(-c)}\,\frac{1}{(\Delta-\frac{d}{2})^2-c^2}\,.$$

En partant de (7.13), on obtient le propagateur "intérieur-intérieur" pour un vecteur (rang 1) :

$$G^{AB}_{\Delta,1}(X_1,X_2) = \int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dc}{2\pi i}\,f_{\Delta,1}(c)\int_{\partial AdS}dX'\int_0^\infty (d\tilde{t_c})^2\,e^{2tX'\cdot X_1+2\bar{t}X'\cdot X_2}\,D^{MA}_{\frac{d}{2}+c}\,\eta_{MN}\,D^{NB}_{\frac{d}{2}-c} \quad (7.14)$$

avec $f_{\Delta,1}(c) = f_{\Delta,0}(c)\,\dfrac{\left(\frac{d}{2}\right)^2-c^2}{\left(\Delta-\frac{d}{2}\right)^2-c^2}\,.$

De la même façon, pour un tenseur de rang $s=2$, il faut remplacer dans l'équation précédente [140] :

$$\begin{aligned} f_{\Delta,1}(c) &\to f_{\Delta,2}(c) = f_{\Delta,0}(c)\left[\left(\frac{d}{2}+1\right)^2-c^2\right] \\ D^{MA} &\to D^{M_1M_2A_1A_2} \\ \eta_{MN} &\to \epsilon_{M_1M_2N_1N_2} = \frac{1}{2}(\eta_{M_1N_1}\eta_{M_2N_2}+\eta_{M_1N_2}\eta_{M_2N_1})-\frac{1}{d}\eta_{M_1M_2}\eta_{N_1N_2}\,. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Il serait intéressant de pouvoir généraliser ces propriétés pour un spin entier arbitraire. Cela permettrait sans doute de simplifier d'éventuels calculs de diagrammes d'échange.

7.2 Calcul de la fonction à trois points

Nous souhaitons calculer la fonction à trois points (cf. figure 7.2) pour un (ou des) champ(s) de spin s entier.

A partir de la formule (3.34), le vertex cubique se note dans l'espace ambiant :

$$\begin{aligned} \ll H\,\|\,J\gg &:= \int_{\mathbb{H}_{d+1}} dX\,\exp\left(\frac{\partial}{\partial U^A}\,\frac{\partial}{\partial V_A}\right)H(X,U)\,J(X,V)\Big|_{U=V=0} \\ &= \int_{\mathbb{H}_{d+1}} dX\;H(X,\partial_V)\,J(X,V)|_{V=0} \end{aligned} \quad (7.16)$$

avec H la fonction génératrice du champ de jauge et J la fonction génératrice du courant conservé bilinéaire en le champ Φ (U et V des variables auxiliaires ambiantes), et on a remplacé l'intégrale sur l'espace ambiant par l'intégrale sur l'espace hyperbolique.

Toujours dans un souci de simplification, intéressons-nous uniquement à l'expression pour un spin s fixé mais quelconque :

$$S^s_1[\Phi,H] := \int_{\mathbb{H}_{d+1}} dX\;H(X,\partial_V)\,J(X,V)|_{U=V=0} \quad (7.17)$$

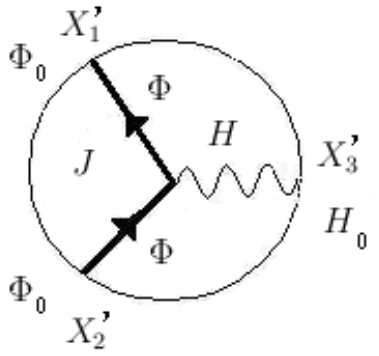

FIGURE 7.2 – Un vertex cubique $0-0-s$

où la seule différence est que le champ de jauge H est maintenant un polynôme homogène en la variable auxiliaire U de degré s.

Rappelons maintenant l'expression de la fonction génératrice du courant ambiant (3.7) :

$$J(X,V) \;=\; \Phi_1(X-V)\,\Phi_2(X+V)\,. \tag{7.18}$$

où Φ_1 et Φ_2 sont les représentants ambiants de deux champs scalaires donnés par (6.55) :

$$\Phi_i(X) \;=\; \int dX_i'\,K_{\Delta_i,0}(X;X'_i)\,\Phi_{0,i}(X'_i) \tag{7.19}$$

avec $\Phi_0(X'_i)$ le représentant ambiant du champ scalaire sur le bord. Par rapport à (3.7), on ne tient pas compte dans l'équation (7.18) du nombre complexe i afin de simplifier les notations, mais le principe des calculs reste bien évidemment le même. Les poids conformes associés aux champs scalaires Φ_1 et Φ_2 sont respectivement $\Delta_1=\Delta_+=\Delta$ et $\Delta_2=\Delta_-=d-\Delta$.

La fonction génératrice du champ de jauge s'exprime par :

$$H(X,U) \;=\; \int\limits_{\mathbb{S}^d} dX'_3\;H_0(X'_3,\partial_W)\,K_{\Delta_3,s}(X,U;X'_3,W)\big|_{W=0} \tag{7.20}$$

où H_0 est la valeur au bord (au point X_3') de la fonction génératrice du champ de jauge, Δ_3 le poids conforme associé au champ en ce point, W est la variable auxiliaire associée au bord $\mathbb{S}^d$ et $K_{\Delta_3,s}$ la fonction génératrice du propagateur "intérieur-bord" (7.7) et (7.11).

L'expression du vertex cubique (7.17) peut s'écrire en terme de la fonction à trois points $0-0-s$:

$$S_1^s[\Phi,H]=\int dX_1'\,dX_2'\,dX_3'\;\Phi_{0,1}(X'_1)\,\Phi_{0,2}(X'_2)\,H_0(X'_3,\partial_W)F(X_i',W)|_{W=0} \tag{7.21}$$

où le représentant ambiant de la fonction à trois points est

$$\begin{aligned} F(X_i',W) \;&=\; D_{\Delta_3,s}\left(\partial_V;X'_3,\partial'_3,W\right)\int_{\mathbb{H}_{d+1}} dX\;K_{\Delta_3,0}(X;X'_3)\,\times \\ &\times\;\; K_{\Delta_1,0}(X-V;X'_1)\,K_{\Delta_2,0}(X+V;X'_2)\big|_{V=0}\,. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Nous avons utilisé les équations (7.18), (7.19) et (7.20) ainsi que (7.7).

Le propagateur "intérieur-bord" en coordonnées ambiantes est donné par (6.61). Ainsi la fonction à trois points s'écrit :

$$\begin{aligned} F(X'_i,W) &= D_{\Delta_3,s}\left(\partial_V; {X'}_3, \partial'_3, W\right) \int_{\mathbb{H}_{d+1}} dX \times \qquad (7.23)\\ &\times \int_0^\infty \prod_{i=1}^3 C_i \frac{dt_i}{t_i} t_i^{\Delta_i} \exp\left\{-2\left[\left(\sum_{i=1}^3 t_i {X'}_i\right)\cdot X - (t_2 {X'}_2 - t_1 {X'}_1)\cdot V\right]\right\}\Bigg|_{V=0} \end{aligned}$$

avec $C_i = \dfrac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\Delta_i - \frac{d}{2})}$ et en utilisant l'expression intégrale du propagateur "intérieur-bord" du champ sclaire (6.61). En regroupant les facteurs en fonction des variables d'intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} F(X'_i,W) &= D_{\Delta_3,s}\left(\partial_V; {X'}_3, \partial'_3, W\right) \prod_{i=1}^3 C_i \int_0^\infty \frac{dt_i}{t_i} t_i^{\Delta_i} \exp\left[-2(t_2 {X'}_2 - t_1 {X'}_1)\cdot V\right] \times\\ &\times \int_{\mathbb{H}_{d+1}} dX \exp\left[-2\left(\sum_{i=1}^3 t_i {X'}_i\right)\cdot X\right]\Bigg|_{V=0}. \qquad (7.24) \end{aligned}$$

On pose $T = -\sum_{i=1}^3 t_i {X'}_i$ et $\Delta_T = \sum_i \Delta_i$. Une autre identité employée dans [140] permet d'effectuer l'intégrale en X :

$$\int_0^{+\infty} \prod_i \left(\frac{dt_i}{t_i} t^{\Delta_i}\right) \int_{\mathbb{H}_{d+1}} dX\, e^{2T\cdot X} = \pi^h \Gamma\left(\frac{\Delta_T - 2h}{2}\right) \int_0^{+\infty} \prod_i \left(\frac{dt_i}{t_i} t^{\Delta_i}\right) e^{T^2} \qquad (7.25)$$

avec $h = \dfrac{d}{2}$. Nous obtenons alors l'expression suivante :

$$F(X'_i,W) = D_{\Delta_3,s}\left(\partial_V; {X'}_3, \partial'_3, W\right) \prod_{i=1}^3 C_i\, \pi^{d/2}\, \Gamma\left(\frac{\Delta_T - d}{2}\right) f(X'_i, t_i, V)\Big|_{V=0} \qquad (7.26)$$

où

$$f(X'_i, t_i, V) = \int_0^\infty \frac{dt_i}{t_i} t_i^{\Delta_i} \exp\left[2(t_2 {X'}_2 - t_1 {X'}_1)\cdot V + T^2\right]. \qquad (7.27)$$

Pour continuer le calcul, deux directions s'offrent à nous.

En calculant l'intégrale sur les paramètres t_i :

Grâce au développement de l'exponentielle en série de puissances, la fonction (7.27) devient :

$$f(X'_i, t_i, V) = \int_0^\infty \frac{dt_i}{t_i}\, t_i^{\Delta_i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[2(t_2 X'_2 \cdot V - t_1 X'_1 \cdot V)\right]^n e^{T^2} \ . \tag{7.28}$$

Le terme de la forme $(A+B)^n$ peut être développé à l'aide du binôme de Newton : $(A+B)^n = A^n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left(\frac{B}{A}\right)^m$, d'où

$$f(X'_i, t_i, V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2^n \int_0^\infty \frac{dt_i}{t_i}\, t_i^{\Delta_i} (t_2 X'_2 \cdot V)^n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left(\frac{-t_1 X'_1 \cdot V}{t_2 X'_2 \cdot V}\right)^m e^{T^2} \tag{7.29}$$

puis en réorganisant les termes, on obtient :

$$f(X'_i, t_i, V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2^n (X'_2 \cdot V)^n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left(\frac{-X'_1 \cdot V}{X'_2 \cdot V}\right)^m \int_0^\infty \frac{dt_i}{t_i}\, t_i^{\Delta_i}\, t_1^m t_2^{n-m}\, e^{T^2} \tag{7.30}$$

On pose

$$\begin{aligned} \Delta'_1 &= \Delta_1 + m \\ \Delta'_2 &= \Delta_2 + n - m \\ \Delta'_3 &= \Delta_3 \end{aligned} \tag{7.31}$$

afin de condenser l'écriture de (7.30) :

$$f(X'_i, t_i, V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2^n (X'_2 \cdot V)^n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left(\frac{-X'_1 \cdot V}{X'_2 \cdot V}\right)^m \int_0^\infty \frac{dt_i}{t_i}\, t_i^{\Delta'_i} e^{T^2} \ . \tag{7.32}$$

L'identité de Symanzik est nécessaire pour calculer les intégrales sur t (cité dans [140]) :

$$\int_0^\infty \frac{dt_i}{t_i}\, t_i^{\Delta'_i}\, e^{T^2} = \frac{1}{2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} \Gamma(\delta'_{ij}) (X'_{ij})^{-\delta'_{ij}} \tag{7.33}$$

où les coefficients valent $\delta'_{ij} = \dfrac{\Delta'_i + \Delta'_j - \Delta'_k}{2}$ avec $k \neq i$ et $k \neq j$, et $X'_{ij} = -2X'_i \cdot X'_j$.

Dans notre cas, on a

$$f(X'_i, t_i, V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2^n (X'_2 \cdot V)^n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left(\frac{-X'_1 \cdot V}{X'_2 \cdot V}\right)^m \frac{1}{2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} \Gamma(\delta'_{ij}) (X'_{ij})^{-\delta'_{ij}} \tag{7.34}$$

avec

$$\begin{aligned}\delta'_{13} &= \delta_{13} + m - \frac{n}{2} \\ \delta'_{12} &= \delta_{12} + \frac{n}{2} \\ \delta'_{23} &= \delta_{23} - m + \frac{n}{2}\,. \end{aligned} \tag{7.35}$$

En factorisant les termes ne dépendant pas des indices de sommation n et m, la fonction f devient

$$\begin{aligned} f(X'_i, t_i, V) &= \frac{1}{2}(X'_{12})^{-\delta_{12}}(X'_{13})^{-\delta_{13}}(X'_{23})^{-\delta_{23}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(2(X'_2 \cdot V) \left(\frac{X'_{13}}{X'_{12}X'_{23}} \right)^{1/2} \right)^n \Gamma(\delta'_{12}) \times \\ &\times \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left(\frac{-X'_1 \cdot V}{X'_2 \cdot V} \frac{X'_{23}}{X'_{13}} \right)^m \Gamma(\delta'_{13})\Gamma(\delta'_{23}) \quad . \end{aligned} \tag{7.36}$$

Enfin, en faisant apparaitre explicitement les indices de somme, la fonction à trois points (7.26) devient

$$\begin{aligned} F(X'_i, W) &= D_{\Delta_3,s}\left(\partial_V; X'_3, \partial'_3, W\right) \prod_{i=1}^{3} C_i\, \pi^{d/2}\, \Gamma\left(\frac{\Delta_T - d}{2} \right) \frac{1}{2}(X'_{12})^{-\delta_{12}}(X'_{13})^{-\delta_{13}}(X'_{23})^{-\delta_{23}} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(2(X'_2 \cdot V) \left(\frac{X'_{13}}{X'_{12}X'_{23}} \right)^{1/2} \right)^n \Gamma\left(\delta_{12} + \frac{n}{2}\right) \times \\ &\times \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left(\frac{-X'_1 \cdot V}{X'_2 \cdot V} \frac{X'_{23}}{X'_{13}} \right)^m \Gamma\left(\delta_{23} - m + \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\delta_{13} + m - \frac{n}{2}\right) \Big|_{V=0} \quad . \end{aligned} \tag{7.37}$$

En principe, pour terminer le calcul, il resterait à appliquer l'opérateur différentiel $D_{\Delta_3,s}\left(\partial_V; X'_3, \partial'_3, W\right)$ défini par (7.11). Une autre voie consiste à l'appliquer avant d'effectuer les intégrales. Quoiqu'il en soit ce n'est pas tant l'expression explicite de la fonction à trois points qui nous intéresse que sa comparaison avec son analogue dans la théorie conforme des champs.

En développant l'opérateur différentiel :

Une autre route consiste à partir de l'équation (7.26) et à développer l'expression de T^2 :

$$\begin{aligned} F(X'_i, W) &= D_{\Delta_3,s}\left(\partial_V; X'_3, \partial'_3, W\right) \prod_{i=1}^{3} C_i\, \pi^{d/2}\, \Gamma\left(\frac{\Delta_T - d}{2} \right) \int_0^{\infty} \frac{dt_i}{t_i}\, t_i^{\Delta_i}\, \exp\left[2(t_2 X'_2 - t_1 X'_1) \cdot V\right] \times \\ &\times \exp\left[t_1 t_2 X'_1 X'_2 + t_1 t_3 X'_1 X'_3 + t_2 t_3 X'_2 X'_3\right]\big|_{V=0}\,. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Puisque la dépendance en V et en X'^3 est exponentielle, on peut remplacer dans l'expression de $D_{\Delta_3,s}\left(\partial_V; X'_3, \partial'_3, W\right)$ définie par (7.11)

- ∂_V par $2(t_2 X'_2 - t_1 X'_1)$

• ∂'_3 par $t_3(t_1 X'_1 + t_2 X'_2)$,
et on obtient :

$$F(X'_i, W) = \prod_{i=1}^{3} C_i \, \pi^{d/2} \, \Gamma\left(\frac{\Delta_T - d}{2}\right) \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{(\Delta_3)_j} \int_0^\infty \frac{dt_i}{t_i} \, t_i^{\Delta_i} (W \cdot 2(t_2 X'_2 - t_1 X'_1))^j \times$$
$$\times \quad (X'_3 \cdot 2(t_2 X'_2 - t_1 X'_1))^{s-j} (W \cdot t_3(t_1 X'_1 + t_2 X'_2))^{s-j} e^{T^2} . \quad (7.39)$$

Ici, il reste à effectuer les intégrales sur les paramètres t_i.

Conclusion du calcul :

Nous venons de trouver deux formes explicites de la fonction à trois points entre deux champs scalaires ϕ et un tenseur de rang quelconque s dans l'espace ambiant. On peut évidemment sommer sur les spins via l'usage de la fonction génératrice de la fonction à trois points. La complexité des expressions n'a pas encore permis une comparaison explicite avec les résultats sur les fonctions à trois points entre deux opérateurs primaires scalaires et un courant conforme en CFT [154] qui se trouvent sous une forme complètement différente. Notons que ce résultat s'applique à des dimensions conformes arbitraires pour les deux champs scalaires tandis que les vérifications [155–157] de la correspondance concernent la dimension $d = 3$ et des valeurs bien spécifiques des poids conformes des scalaires. Il serait également intéressant de généraliser ces résultats pour des triplets de spin quelconque grâce aux vertex sur la couche de masse [41] et de comparer alors avec les résultats récents en CFT [158].

Un autre objectif est de calculer le diagramme d'échange entre quatre champs scalaires pour une tour infinie de spins échangés. Pour cela, il nous faut connaitre l'expression explicite ambiante du propagateur "intérieur-intérieur" de ces champs de jauge ou bien on peut espérer simplifier le calcul en utilisant sa décomposition en produits de deux propagateurs "intérieur-bord" comme montré sur la figure 7.3.

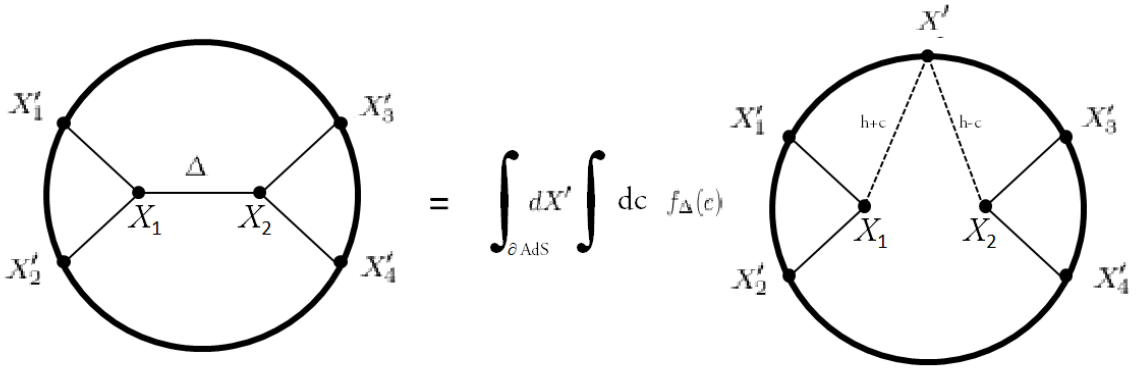

FIGURE 7.3 – Le diagramme d'échange avec la décomposition du propagateur "bord-bord" en deux propagateurs "intérieur-bord" [140]

Troisième partie

Vers un dual gravitationnel d'un gaz de Fermi unitaire ; Symétries et courants d'un gaz parfait/unitaire de Fermi

Chapitre 8

Symétries et holographie : de la physique relativiste à la physique non-relativiste

Dans ce huitième chapitre, je vous exposerai les travaux que j'ai réalisés en collaboration avec Xavier Bekaert et Sergej Moroz sur un problème issu de la matière condensée et le lien entre physiques relativiste et non-relativiste. Je développerai particulièrement les sections auxquelles je me suis consacrée, à savoir les symétries de l'équation de Schrödinger libre et les courants associés (qui sont en majorité issues de la traduction du second article se trouvant dans le chapitre suivant).

8.1 Symétries non-relativistes

8.1.1 Le groupe de Schrödinger des symétries cinématiques

En termes mathématiques, le principe de Galilée de la relativité est codé dans le groupe de Galilée. Pour cette raison, la structure de ce groupe joue un rôle important dans la physique non relativiste [159]. Dans un espace à d dimensions spatiales, le groupe agit sur les coordonnées spatiales $\mathbf{x}$ et le temps t comme

$$(t, \mathbf{x}) \to g(t, \mathbf{x}) = (t + \beta, \mathscr{R}\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}), \tag{8.1}$$

où $\beta \in \mathbb{R}$; $\mathbf{v}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ et $\mathscr{R}$ est une matrice de rotations dans les d dimensions spatiales. En mécanique quantique, le groupe de Galilée agit par des représentations projectives sur l'espace de Hilbert des solutions de l'équation de Schrödinger lorsque le potentiel est invariant par les translations d'espace et de temps [1]. En d'autres termes, dans ce cas, toute solution est transformée en une solution de la forme

$$\psi(t, \mathbf{x}) \to \gamma\big(g(t, \mathbf{x})\big)\, \psi\big(g^{-1}(t, \mathbf{x})\big)\,, \tag{8.2}$$

1. Bien sûr, pour une seule particule, le potentiel doit alors être constant.

où γ est un facteur de phase compatible avec les lois de multiplication du groupe [160]. Par exemple, une fonction d'onde scalaire ψ décrivant une seule particule de masse m se transforme sous un boost galiléen pur $g_{\mathbf{v}}$ comme

$$\psi(t,\mathbf{x}) \to \exp\left[-\frac{im}{2}(\mathbf{v}^2 t - 2\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{x})\right]\psi\big(g_{\mathbf{v}}^{-1}(t,\mathbf{x})\big). \tag{8.3}$$

La présence du facteur de phase dépendant de la masse dans la loi de transformation implique une règle de supersélection interdisant la superposition des états de masses différentes, connues sous le nom de *règle de superselection de Bargmann* [161]. Cette règle limite la dynamique et précise que chaque terme dans le lagrangien de la théorie non-relativiste invariante sous Galilée doit conserver la masse totale. Pour cette raison, la masse joue le rôle d'une charge conservée dans la physique non relativiste.

En élargissant le groupe de Galilée par le biais d'une extension centrale, connue sous le nom d'opérateur de masse (ou bien opérateur du nombre de particules), nous pouvons trouver des représentations unitaires [159,160]. L'extension centrale du groupe de Galilée est parfois appelée le *groupe de Bargmann* [162]. Son algèbre de Lie se compose des générateurs suivants : la masse $\widehat{M}$; une translation temporelle $\widehat{P}_t$; d translations spatiales $\widehat{P}_i$; $\frac{d(d-1)}{2}$ rotations spatiales $\widehat{M}_{ij}$ et d boosts galiléens $\widehat{K}_i$. Les commutateurs non triviaux sont

$$\begin{aligned}
&[\widehat{M}_{ij},\widehat{M}_{kl}] = i(\delta_{ik}\widehat{M}_{jl} - \delta_{jk}\widehat{M}_{il} - \delta_{il}\widehat{M}_{jk} + \delta_{jl}\widehat{M}_{ik})\,,\\
&[\widehat{M}_{ij},\widehat{K}_k] = i(\delta_{ik}\widehat{K}_j - \delta_{jk}\widehat{K}_i)\,, \qquad [\widehat{M}_{ij},\widehat{P}_k] = i(\delta_{ik}\widehat{P}_j - \delta_{jk}\widehat{P}_i)\,,\\
&[\widehat{P}_i,\widehat{K}_j] = -i\delta_{ij}\widehat{M}, \qquad [\widehat{P}_t,\widehat{K}_j] = -i\widehat{P}_j\,.
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Notons que les relations de commutation entre les générateurs de translation et des boosts galiléens sont les relations de commutation canoniques de l'algèbre d'Heisenberg $\mathfrak{h}_d$ en d dimensions spatiales, où les générateurs des boosts galiléens jouent le rôle des opérateurs position tandis que le rôle de la constante de Planck réduite est joué par la masse.

Il est remarquable que le groupe des symétries d'espace-temps de l'équation libre de Schrödinger avec le potentiel chimique nul (c'est-à-dire sans terme constant dans le hamiltonien)

$$i\,\partial_t\psi(t,\mathbf{x}) = -\frac{\Delta}{2m}\,\psi(t,\mathbf{x}) \tag{8.5}$$

est plus grand que le groupe de Bargmann si l'on relâche la restriction de module unitaire ($|\gamma| = 1$) sur le facteur γ apparaissant dans la loi de transformation. D'après Niederer [163], nous appelons *symétrie cinématique de l'équation de Schrödinger* toute transformation de la forme (8.2), où γ est un facteur complexe compatible avec la structure du groupe, qui envoie des solutions vers des solutions [2].

Tout d'abord, rappelons-nous que la masse est juste une charge et a donc une dimension d'échelle nulle. Ainsi, le système sans interaction n'a pas de paramètre avec dimension d'échelle non nulle, ce qui implique une symétrie d'échelle supplémentaire. Dans la physique non relativiste, cette symétrie redimensionne les coordonnées de temps et d'espace

2. Certains mathématiciens appellent ces transformations une représentation "multiplier" (voir paragraphe 1.1.1.3) du groupe de symétrie.

différemment

$$(t, \mathbf{x}) \to \left(\frac{t}{\alpha^2} , \frac{\mathbf{x}}{\alpha} \right), \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{8.6}$$

ce qui correspond à l'exposant critique dynamique $z = 2$, qui détermine l'échelle relative des coordonnées spatiales et temporelles.

Deuxièmement, Niederer trouve dans [163] qu'en plus de la symétrie d'échelle, une transformation d'inversion discrète Σ, qui agit sur l'espace-temps comme [3]

$$(t, \mathbf{x}) \to \Sigma(t, \mathbf{x}) = \left(-\frac{1}{t} , \frac{\mathbf{x}}{t} \right) \tag{8.7}$$

est également une symétrie de l'équation de Schrödinger libre. Par la conjugaison d'une translation temporelle g_β et d'une inversion Σ,

$$(t, \mathbf{x}) \to (\Sigma^{-1} g_\beta \Sigma)(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{t}{1 + \beta t} , \frac{\mathbf{x}}{1 + \beta t} \right) \tag{8.8}$$

une nouvelle symétrie de l'équation de Schrödinger libre est trouvée [163,164]. Cette transformation est connue sous le nom *d'expansion* et est l'analogue non-relativiste des transformations conformes spéciales. Notons qu'un boost galiléen $g_{\mathbf{v}}$ est la conjuguaison d'une translation spatiale $g_{\mathbf{a}}$ et d'une inversion Σ.

L'extension du groupe de Bargmann par les transformations d'échelle et les expansions est connue sous le nom de *groupe de Schrödinger* à d dimensions spatiales, notée $Sch(d)$. Apparemment, cette structure était déjà connue par Jacobi (voir la conclusion de [165]), mais a été retrouvée après l'avènement de la mécanique quantique dans [163, 164]. La structure imbriquée des groupes de Galilée, Bargmann et Schrödinger est illustrée dans la figure 8.1. Le groupe de Schrödinger est la contrepartie non-relativiste du groupe conforme, bien que le premier ne peut pas être obtenu comme la contraction d'Inönu-Wigner de ce dernier.

Le groupe de Schrödinger est simplement généré par les isométries euclidiennes (rotations et translations spatiales), la translation temporelle, la transformation d'échelle et l'inversion [4]. En plus de (8.4), les commutateurs non triviaux de l'algèbre de Schrödinger $\mathfrak{sch}(d)$ à d dimensions spatiales sont

$$\begin{aligned} &[\widehat{P}_i, \widehat{D}] = i\widehat{P}_i \,, \quad [\widehat{P}_i, \widehat{C}] = -i\widehat{K}_i \,, \quad [\widehat{K}_i, \widehat{D}] = -i\widehat{K}_i \,, \\ &[\widehat{D}, \widehat{C}] = 2i\widehat{C} \,, \quad [\widehat{D}, \widehat{P}_t] = -2i\widehat{P}_t \,, \quad [\widehat{C}, \widehat{P}_t] = -i\widehat{D} \,. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Ensemble, le générateur de translation temporelle $\widehat{P}_t$, le générateur d'échelle $\widehat{D}$ et le générateur de l'expansion $\widehat{C}$ forme une sous-algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ de l'algèbre de Schrödinger complète. Ces générateurs commutent avec les générateurs $\widehat{M_{ij}}$ de la sous-algèbre de rotation $\mathfrak{o}(d)$. L'algèbre de Schrödinger a la structure d'une somme semi-directe : $\mathfrak{sch}(d) = \mathfrak{h}_d \ni \big(\mathfrak{o}(d) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \big)$.

3. Elle est l'analogue de la transformation conforme $x^\mu \to \frac{x^\mu}{x^2}$ et elle n'est pas définie pour $t = 0$. Il est nécessaire de compactifier l'espace usuel, c'est-à-dire de tenir compte des points à l'infini.

4. Les boosts galiléens et les expansions apparaissent naturellement (plus précisément, par l'intermédiaire de la conjugaison des translations d'espace-temps et de l'inversion).

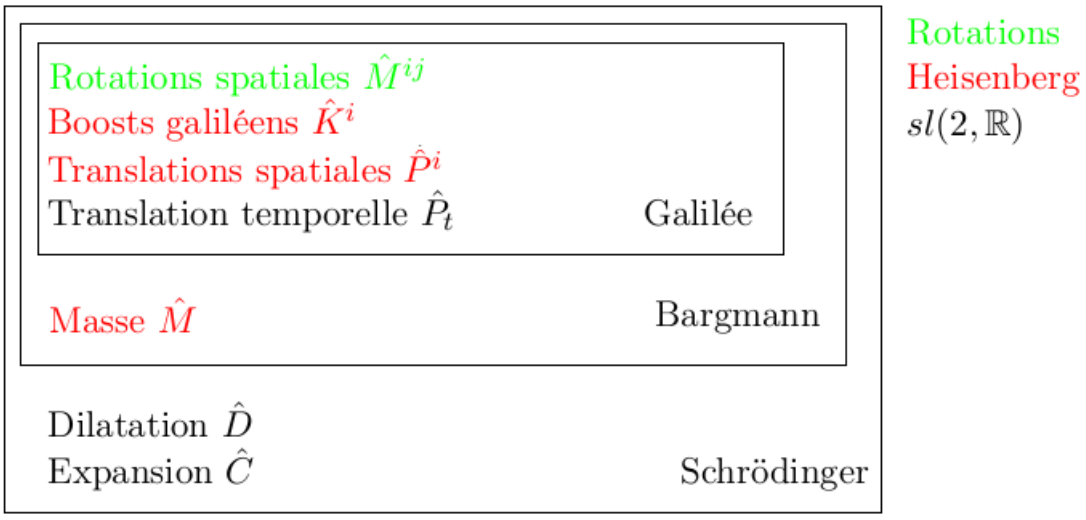

FIGURE 8.1 – L'algèbre de Schrödinger

Enfin, la représentation "standard" de l'algèbre de Schrödinger, comme opérateurs différentiels d'ordre un, agissant sur la fonction d'onde d'une particule $\psi(t,\mathbf{x})$ est

$$\begin{aligned}
&\widehat{P}_i = -i\partial_i, \qquad \widehat{P}_t = i\partial_t, \qquad \widehat{M} = m,\\
&\widehat{M}_{ij} = -i(x_i\partial_j - x_j\partial_i),\\
&\widehat{K}_i = mx_i + it\partial_i,\\
&\widehat{D} = i\left(2\,t\,\partial_t + x^i\partial_i + \frac{d}{2}\right),\\
&\widehat{C} = i\left(t^2\partial_t + t\Big(x^i\partial_i + \frac{d}{2}\Big)\right) + \frac{m}{2}\,x^2.
\end{aligned} \tag{8.10}$$

8.1.2 L'algèbre de Weyl des symétries d'ordre élevé

L'algèbre des symétries d'espace-temps de l'équation de Schrödinger d'une particule libre est en fait beaucoup plus grande que l'algèbre de Schrödinger. Plus précisément, l'algèbre de Weyl est réalisée comme l'algèbre de symétries de dimension infinie de l'équation de Schrödinger libre, comme ca a été souligné dans le travail inspirant [166]. Ici, nous prouvons que l'algèbre de Weyl est l'algèbre *maximale* des symétries d'espace-temps de l'équation de Schrödinger. Dans le contexte actuel, ce résultat peut être utilisé comme la contrepartie non-relativiste du théorème de Eastwood [167] sur l'algèbre de symétrie maximale de l'équation de Klein-Gordon de masse nulle (voir par exemple la section 4 de [122] pour une revue). En conséquence, l'algèbre de Weyl (et, éventuellement, son extension à valeurs matricielles) fournit une algèbre non-relativiste de spin élevé qui est l'analogue précis de l'algèbre de Vasiliev (éventuellement étendue) des spins élevés [168].

8.1.3 L'algèbre de symétrie maximale de l'équation de Schrödinger

Afin de donner des énoncés précis et rigoureux analogues à des résultats connus sur le champ scalaire conforme, nous allons commencer par quelques définitions mimant celles de [122,167]. Une *symétrie de l'équation de Schrödinger* est un opérateur différentiel linéaire $\widehat{A}(t, \widehat{\mathbf{X}}, \widehat{P}_t, \widehat{\mathbf{P}})$ tel qu'il existe un opérateur différentiel linéaire $\widehat{B}$ satisfaisant

$$\widehat{S}\,\widehat{A} \,=\, \widehat{B}\,\widehat{S}\,, \tag{8.11}$$

où $\widehat{S}$ est l'*opérateur de Schrödinger* défini par

$$\widehat{S} \,:=\, \widehat{P}_t \,-\, \widehat{H}\,, \tag{8.12}$$

et $\widehat{H}$ est un hamiltonien d'une particule massive non-relativiste prenant la forme habituelle

$$\widehat{H}(\widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{P}}) = \frac{\widehat{\mathbf{P}}^2}{2m} \,+\, V(\widehat{\mathbf{X}})\,. \tag{8.13}$$

L'equation de Schrödinger se note

$$i\,\partial_t\psi(t,\mathbf{x}) \approx \widehat{H}\psi(t,\mathbf{x}) \quad \Longleftrightarrow \widehat{S}\psi(t,\mathbf{x}) \approx 0, \tag{8.14}$$

où le symbole de l'égalité "faible" $\approx$ représente une égalité valide lorsque l'équation de Schrödinger est satisfaite. Par définition, toute symétrie $\widehat{A}$ préserve l'espace $Ker\widehat{S}$ des solutions de l'équation de Schrödinger (8.14) : il envoie toute solution ψ vers une solution $\psi' = \widehat{A}\psi$. La solution générale de l'équation de Schrödinger (8.14) est bien sûr

$$\psi(t,\mathbf{x}) \,=\, \widehat{U}(t)\,\psi(0,\mathbf{x})\,, \tag{8.15}$$

où

$$\widehat{U}(t) = \exp(-it\widehat{H}) \tag{8.16}$$

est l'opérateur d'évolution temporelle. De toute évidence, l'évolution dans le temps

$$\widehat{F}(t) \,=\, \widehat{U}(t)\,\widehat{F}(\widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{P}})\,\widehat{U}^{-1}(t) \,=\, \widehat{F}\big(\widehat{\mathbf{X}}(t), \widehat{\mathbf{P}}(t)\big)\,, \tag{8.17}$$

de tout opérateur différentiel spatial $\widehat{F}(\widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{P}})$ définit une symétrie de l'équation de Schrödinger dans le sens ci-dessus. Il est clair que $\widehat{F}(t)$ envoie des solutions vers des solutions où les fonctions d'onde initiales sont liées par l'opérateur initial $\widehat{F}(0) = \widehat{F}$. La condition (8.11) est satisfaite avec $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{F}(t)$ puisque $i\partial_t\widehat{F}(t) = [\widehat{H}, \widehat{F}(t)]$, qui découle de (8.17). Notons que (8.17) est l'évolution temporelle inversée ($t \to -t$) de $\widehat{F}(\widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{P}})$ dans la représentation de Heisenberg [5].

Une symétrie $\widehat{A}$ est dite *triviale* si $\widehat{A} = \widehat{O}\widehat{S}$ pour un certain opérateur linéaire $\widehat{O}$, car elle envoie toute solution vers zéro. Une telle symétrie triviale est toujours une symétrie de l'équation de Schrödinger, car elle obéit à (8.11) avec $\widehat{B} = \widehat{S}\widehat{O}$. L'algèbre des symétries

5. Notons que dans [78], l'évolution inversée dans le temps dans la représentation de Heisenberg a été écrite $\widehat{F}(-t)$ afin de souligner ce fait. Ici, nous avons choisi la notation la plus simple $\widehat{F}(t)$ dans le but d'éviter de surcharger les nombreuses formules où apparaissent de telles notations.

triviales forme un idéal à gauche de l'algèbre des opérateurs linéaires dotée de la composition $\circ$ comme la multiplication. En outre, il existe aussi un idéal à droite dans l'algèbre engendrée par toutes les symétries de l'équation de Schrödinger. Deux symétries $\widehat{A}_1$ et $\widehat{A}_2$ sont dites *équivalentes*, si elles diffèrent par une symétrie triviale. La relation d'équivalence correspondante est désignée par une égalité faible

$$\widehat{A}_1 \approx \widehat{A}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 + \widehat{O}\widehat{S}\,. \tag{8.18}$$

L'*algèbre de symétrie maximale de l'équation de Schrödinger* est l'algèbre complexe de toutes les symétries inéquivalentes de l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire l'algèbre de toutes les symétries quotientée par les idéaux à droite et à gauche des symétries triviales. Nous allons montrer que *pour tout hamiltonien indépendant du temps, l'algèbre de symétrie maximale de l'équation de Schrödinger pour une particule est isomorphe à l'algèbre de Weyl des opérateurs différentiels spatiaux*[6].

8.1.4 La sous-algèbre de Schrödinger

Comme il fallait s'y attendre, l'évolution temporelle inversée des observables initiales couvrent toutes les symétries inéquivalentes de *toute* équation de Schrödinger. Mais comment l'algèbre de Schrödinger $\mathfrak{sch}(d)$ s'inscrit dans ce résultat ? Et qu'est-ce qui est si spécial au sujet de l'évolution *libre* ?

Une observation utile est que, lorsque la particule est libre $\left(\widehat{H} = \widehat{H}_{\text{free}} = \dfrac{\widehat{P}^2}{2m}\right)$ tous les les opérateurs différentiels (8.10) sont équivalents à des polynômes de degré au plus deux en les opérateurs d'évolution temporelle des positions et des impulsions. Par exemple, la masse $\widehat{M} = m$ est le cas dégénéré de degré zéro. En outre, le générateur de translation temporelle est équivalent au hamiltonien quadratique $\widehat{P}_t \approx \widehat{H}_{\text{free}} = \dfrac{\widehat{P}^2}{2m}$ et les générateurs de rotation peuvent être écrits comme le moment angulaire $\widehat{M}_{ij} = \widehat{X}_i\widehat{P}_j - \widehat{X}_j\widehat{P}_i$. Pour les autres générateurs, il est plus facile de vérifier d'abord cette propriété au moment $t = 0$. Les générateurs des boosts galiléens évalués à $t = 0$ sont proportionnels aux positions, $\widehat{K}^i\big|_{t=0} = m\widehat{X}^i$, tandis que les générateurs d'échelle et d'expansion peuvent être écrits comme les polynômes quadratiques, $\widehat{D}\big|_{t=0} = -\widehat{X}^i\widehat{P}_i + i\dfrac{d}{2}$ et $\widehat{C}\big|_{t=0} = \dfrac{m}{2}\,\widehat{X}^2$. Tous ensemble, ces opérateurs différentiels à $t = 0$ fournissent une représentation unitaire de l'algèbre de Schrödinger sur l'espace de Hilbert des fonctions d'onde initiales d'une particule. Par conséquent, il en va de même des évolutions temporelles (inversées) de ces observables pour *chaque* hamiltonien. Toutefois, l'opérateur dépendant du temps $\dfrac{\widehat{P}^2(t)}{2m} = \exp(-i\widehat{H}t)\dfrac{\widehat{P}^2}{2m}\exp(+i\widehat{H}t)$ doit être identifié avec le générateur $\widehat{P}_t$ dans cette réalisation particulière de l'algèbre de Schrödinger, mais elle ne correspond pas au véritable hamiltonien $\widehat{H}$ (sauf quand la particule est libre) et donc en général, il ne génère pas l'évolution réelle dans le temps de la fonction

6. Pour une fonction d'onde à n composantes, l'algèbre de symétrie maximale de l'équation de Schrödinger est isomorphe au produit tensoriel entre l'algèbre des matrices carrées $n \times n$ et l'algèbre de Weyl des opérateurs différentiels spatiaux : $M_n \otimes \mathcal{A}_d$.

d'onde. Autrement dit, l'évolution dans le temps inversé mentionnée ci-dessus des générateurs de degré au plus deux sont des symétries (dans le sens de notre définition), ils satisfont aux relations de commutation de l'algèbre de Schrödinger, mais ils n'ont pas une interprétation physique simple pour un hamiltonien générique.

En général, les transformations engendrées par l'évolution dans le temps (inversée) de certaines observables ne sont pas "cinématiques" [169], dans le sens où elles ne génèrent pas des transformations de la forme (8.2). Une transformation cinématique est générée par un opérateur différentiel linéaire du premier ordre (en particulier, un simple changement de coordonnées est généré par un champ de vecteurs). Dans ce qui suit, les symétries de premier ordre de l'équation de Schrödinger seront appelées *symétries cinématiques*, tandis que les symétries d'ordre élevé seront désignées par *symétries supérieures* (suivant l'usage des mathématiciens). Notons qu'un opérateur différentiel linéaire d'ordre supérieur ne génère pas une transformation cinématique. Ceci explique pourquoi les symétries d'ordre supérieur ne sont généralement pas considérées par les physiciens. Cependant, du point de vue mathématique, l'algèbre de Schrödinger est toujours une sous-algèbre des symétries de l'équation de Schrödinger d'une seule particule mais aucune de ses réalisations ne génère une représentation cinématique du groupe de Schrödinger, à l'exception du cas spécial des potentiels déterminés par Niederer [35, 170]. Comme mentionné ci-dessus, le cas le plus simple est le hamiltonien libre, où l'évolution temporelle des opérateurs de position et de moment est $\widehat{\mathbf{X}}(t) = \widehat{\mathbf{X}} - t\,\widehat{\mathbf{P}}/m$ et $\widehat{\mathbf{P}}(t) = \widehat{\mathbf{P}}$. Dans un tel cas, les opérateurs différentiels (8.10) peuvent être réécrits en fonction des positions et des moments dépendant du temps

$$\begin{aligned}
&\widehat{P}_t \approx \frac{\widehat{P}^2(t)}{2m} = \frac{\widehat{P}^2}{2m} = \widehat{H}_{\text{free}}\,, \qquad \widehat{M} = m,\\
&\widehat{M^{ij}} = \widehat{X}^i(t)\widehat{P}^j(t) - \widehat{X}^j(t)\widehat{P}^i(t),\\
&\widehat{K}^i = m\widehat{X}^i(t),\\
&\widehat{D} \approx -\widehat{X}^i(t)\widehat{P}_i(t) + i\frac{d}{2},\\
&\widehat{C} \approx \frac{m}{2}\,\widehat{X}^2(t).
\end{aligned} \tag{8.19}$$

En outre, une bonne observation de [166,171] est que toutes ces symétries sont équivalentes à des polynômes de degré deux en les générateurs des boosts galiléens et des translations (plus précisément, $\widehat{M}$ est de degré zéro, tandis que par définition $\widehat{P}$ et $\widehat{K}$ sont de degré un). En effet, on peut remplacer partout $\widehat{\mathbf{X}}(t) \to \widehat{\mathbf{K}}/m$ et $\widehat{\mathbf{P}}(t) \to \widehat{\mathbf{P}}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\widehat{P}_t \approx \frac{\widehat{P}^2}{2m}\,,\\
&\widehat{M_{ij}} = \frac{\widehat{K}_i\widehat{P}_j - \widehat{K}_j\widehat{P}_i}{m}\,,\\
&\widehat{D} \approx -\frac{\widehat{K}^i\widehat{P}_i}{m} + i\frac{d}{2}\,,\\
&\widehat{C} \approx \frac{\widehat{K}^2}{2m}\,.
\end{aligned} \tag{8.20}$$

Cela implique que *l'algèbre associative des polynômes en les générateurs des boosts galiléens et des translations est isomorphe à l' algèbre de symétrie maximale de l'équation de*

	Symétries cinématiques	$\subset$	Symétries d'ordre élevé
CFT	$\mathfrak{o}(d+2,2)$	$\subset$	Vasiliev (d+2,2)
$\cup$	$\cup$		$\cup$
NRCFT	$\mathfrak{sch}(d)$	$\subset$	Weyl (d)

FIGURE 8.2 – Les symétries cinématiques et d'ordre élevé en théories conformes

Schrödinger libre. En termes plus mathématiques, la réalisation de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}\big(\mathfrak{sch}(d)\big)$ de l'algèbre de Schrödinger sur l'espace des solutions de l'équation de Schrödinger d'une particule libre est isomorphe à l'algèbre de Weyl $\mathcal{A}_d$ des opérateurs différentiels spatiaux.

Du point de vue de l'holographie, l'identification précise de l'algèbre maximale des symétries rigides de la CFT (non-relativiste) est d'une importance primordiale car elle doit correspondre à des transformations de symétrie préservant le vide de la théorie dans l'intérieur, par exemple dans l'habituel AdS/CFT, le groupe d'isométrie d'AdS est isomorphe au groupe conforme au bord. Dans la généralisation de la conjecture holographique de [34,35] en dimension d'espace-temps quelconque, l'algèbre de symétrie maximale de l'action de Klein-Gordon de masse nulle [167] est précisément isomorphe à l'algèbre de spin élevé des équations de Vasiliev [168] qui apparaît comme l'algèbre préservant la solution d'AdS. L'algèbre de symétrie maximale de l'action de Schrödinger pourrait jouer un rôle analogue dans une version non-relativiste de la gravité de spin élevé (cf. figure 8.2). Cette attente est assez naturelle compte tenu du fait que la théorie de Vasiliev est formulée dans un langage dans la formulation "repère"[7] (à la Cartan) avec une connexion 1-forme prenant les valeurs dans l'algèbre relativiste de spin élevé qui peut être remplacée par son analogue non-relativiste (voir la section suivante).

8.2 Réduction dimensionnelle lumière : le cadre de Bargmann

Pour réaliser géométriquement la symétrie de Schrödinger, nous avons d'abord plongé l'algèbre de Schrödinger à d dimensions spatiales $\mathfrak{sch}(d)$ dans l'algèbre conforme relativiste en $d+2$ dimensions spatio-temporelles $O(d+2,2)$. Que l'algèbre de Schrödinger puisse être plongée dans l'algèbre conforme relativiste peut se manifester au niveau des équations du mouvement. Plus concrètement, une technique très utile (le "cadre de Bargmann" [162, 165, 172, 173]) est la dérivation de l'équation libre de Schrödinger à partir de l'équation de Klein-Gordon de masse nulle par le biais d'une réduction de Kaluza-Klein dans une direction nulle.

7. ou "frame-like" en anglais

8.2.1 Les équations du mouvement : de Klein-Gordon à Schrödinger

Considérons l'équation de Klein-Gordon de masse nulle dans l'espace-temps de Minkowski à $d+2$ dimensions [8] :

$$\Box\Psi(x) \equiv -\partial_0^2\Psi(x) + \sum_{i=1}^{d+1}\partial_i^2\Psi(x) = 0. \tag{8.21}$$

Cette équation est invariante conforme. Définissons les coordonnées du cône de lumière,

$$x^{\pm} = \frac{x^0 \pm x^{d+1}}{\sqrt{2}}\,, \tag{8.22}$$

l'équation de Klein-Gordon devient [9]

$$\left(-2\frac{\partial}{\partial x^-}\frac{\partial}{\partial x^+} + \sum_{i=1}^{d}\partial_i^2\right)\Psi(x) = 0. \tag{8.23}$$

Les coordonnées globales $x^\mu = (x^+, x^-, \mathbf{x})$ ont des indices grecs minuscules qui couvrent $d+2$ valeurs, tandis que les coordonnées spatiales $x^i = (\mathbf{x})$ ont des indices latins minuscules convrant d valeurs différentes [10]. Si le champ scalaire relativiste est supposé être de la forme

$$\Psi(x) = e^{-imx^-}\psi(x^+, \mathbf{x})\,, \tag{8.24}$$

on peut faire l'identification [11] $\partial/\partial x^- := \partial_- = -im$. Ensuite, l'équation (8.23) a la forme de l'équation de Schrödinger dans l'espace libre

$$\left(2im\,\partial_+ + \sum_{i=1}^{d}\partial_i^2\right)\Psi(x) = 0. \tag{8.25}$$

La coordonnée du cône de lumière x^+ peut être identifiée avec le temps t ($\partial_+ = \partial_t$ est la dérivée temporelle) et l'opérateur $\sum_{i=1}^{d}\partial_i^2$ est l'opérateur Laplacien Δ dans l'espace plat,

$$(2im\,\partial_t + \Delta)\Psi(x) = 0. \tag{8.26}$$

Grâce à la réduction dimensionnelle (8.24), l'exponentielle peut être factorisée et nous obtenons l'équation du mouvement pour le champ scalaire non-relativiste (8.5). Cette équation est invariante par le groupe de Schrödinger $Sch(d)$ comme cela a été expliqué dans la section précédente. Comme l'équation d'origine de Klein-Gordon a une symétrie conforme, cela signifie que $Sch(d)$ est un sous-groupe de $O(d+2, 2)$.

8. Nous suivons de près [174] (voir par exemple [172, 173] pour plus de détails sur la méthode de réduction dimensionnelle nulle).

9. Les éléments de la métrique sont définis par $\eta_{+-} = \eta_{-+} = -1$; $\eta_{ij} = 1$ et les autres sont nuls.

10. Dans la suite, l'indice sera souvent laissé implicite pour les coordonnés d'espace-temps $x^\mu \equiv x$. Aucune ambiguïté se pose car les coordonnées spatiales sont notées $x^i \equiv \mathbf{x}$.

11. De la même manière, on abrège $\partial/\partial x^+$ en ∂_+.

8.2.2 L'algèbre de symétrie : de l'algèbre conforme à celle de Schrödinger

Parlons maintenant explicitement du plongement de l'algèbre de Schrödinger dans l'algèbre conforme, à la suite de la discussion dans [174]. L'algèbre conforme $\mathfrak{o}(d+2,2)$ peut être définie par les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned}
[\widetilde{M}^{\mu\nu},\, \widetilde{M}^{\alpha\beta}] &= i(\eta^{\mu\alpha}\widetilde{M}^{\nu\beta} + \eta^{\nu\beta}\widetilde{M}^{\mu\alpha} - \eta^{\mu\beta}\widetilde{M}^{\nu\alpha} - \eta^{\nu\alpha}\widetilde{M}^{\mu\beta}),\\
[\widetilde{M}^{\mu\nu},\, \widetilde{P}^{\alpha}] &= i(\eta^{\mu\alpha}\widetilde{P}^{\nu} - \eta^{\nu\alpha}\widetilde{P}^{\mu}),\\
[\widetilde{D},\, \widetilde{P}^{\mu}] &= -i\widetilde{P}^{\mu}, \quad [\widetilde{D},\, \widetilde{K}^{\mu}] = i\widetilde{K}^{\mu},\\
[\widetilde{P}^{\mu},\, \widetilde{K}^{\nu}] &= -2i(\eta^{\mu\nu}\widetilde{D} + \widetilde{M}^{\mu\nu}),
\end{aligned} \tag{8.27}$$

où les indices grecs vont de 0 à $d+1$, et tous les autres commutateurs sont égaux à 0. Les symboles "tilde" $\widetilde{\ }$ désignent les générateurs relativistes, nous réservons les symboles chapeau $\widehat{\ }$ pour les opérateurs non-relativistes. Les générateurs de l'algèbre conforme peuvent être réalisés comme des opérateurs différentiels d'ordre un agissant sur le champ scalaire relativiste $\Psi(x)$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{\mu} = -i\partial_{\mu}, \quad \widetilde{M}_{\mu\nu} = -i(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}),\\
&\widetilde{K}_{\mu} = i\left(2x_{\mu}\left(x^{\nu}\partial_{\nu} + \frac{d}{2}\right) - x^{2}\partial_{\mu}\right), \quad \widetilde{D} = i\left(x^{\mu}\partial_{\mu} + \frac{d}{2}\right).
\end{aligned} \tag{8.28}$$

Nous identifions le moment du cône de lumière $\widetilde{P}^{+} = (\widetilde{P}^{0} + \widetilde{P}^{d+1})/\sqrt{2}$ avec l'opérateur de masse $\widehat{M}$ dans la théorie non relativiste (en accord avec l'identification précédente $\partial_{-} = -im$). Nous sélectionnons maintenant tous les opérateurs de l'algèbre conforme qui commutent avec $\widetilde{P}^{+}$, c'est-à-dire qui préservent l'ansatz de Kaluza-Klein (8.24). Manifestement, ces opérateurs forment une sous-algèbre, et on peut vérifier que c'est l'algèbre de Schrödinger $\mathfrak{sch}(d)$ [175]. L'identification est la suivante :

$$\begin{aligned}
&\widehat{M} = \widetilde{P}^{+}, \quad \widehat{P}_{t} = \widetilde{P}^{-}, \quad \widehat{P}^{i} = \widetilde{P}^{i}, \quad \widehat{M}^{ij} = \widetilde{M}^{ij},\\
&\widehat{K}^{i} = \widetilde{M}^{i+}, \quad \widehat{D} = \widetilde{D} + \widetilde{M}^{+-}, \quad \widehat{C} = \frac{\widetilde{K}^{+}}{2}.
\end{aligned} \tag{8.29}$$

De l'équation (8.27), on constate que les commutateurs entre les opérateurs (8.29) sont exactement les commutateurs de l'algèbre de Schrödinger (8.4) et (8.9). En outre, la réalisation (8.10) résulte de (8.28) par l'identification (8.29).

L'algèbre de symétrie maximale de l'équation de Klein-Gordon de masse nulle (8.21) est l'algèbre des polynômes en les générateurs conformes (8.28) modulo les relations d'équivalence découlant de l'équation de Klein-Gordon [167] [12]. L'algèbre de symétrie maximale de l'équation de Schrödinger libre (8.5) est l'algèbre des polynômes en les générateurs de Schrödinger (8.10) modulo les relations d'équivalence provenant de l'équation de Schrödinger. Le plongement similaire à celui décrit ci-dessus tient effectivement au niveau de l'algèbre de symétrie maximale, comme on pouvait s'y attendre : *L'algèbre de symétrie*

12. L'algèbre de symétrie maximale de l'action de Klein-Gordon sans masse a été notée par $\mathfrak{hu}(1/\mathfrak{sp}(2)[d+2,2])$ par Vasiliev dans [168].

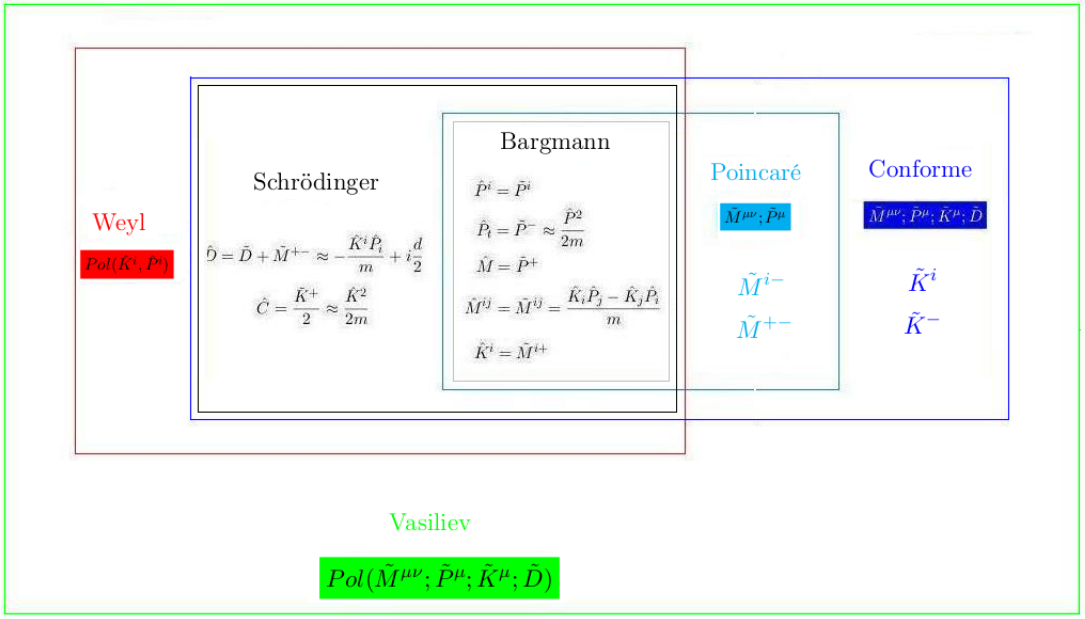

FIGURE 8.3 – L'algèbre de Vasiliev et ses sous-algèbres.

maximale de l'équation libre de Schrödinger est isomorphe à la sous-algèbre de l'algèbre de symétrie maximale de l'équation de Klein-Gordon de masse nulle, qui commute avec un générateur de translation dans une direction fixée de genre lumière.

Sur la figure 8.3, les générateurs surlignés forment de manière complète le groupe de même couleur ; alors que ceux qui ne le sont pas appartiennent au groupe de la même couleur mais celui-ci contient également les générateurs des groupes plus petits. Le symbole *Pol* mis pour "polynômes" est un abus de langage car les générateurs ne commutent pas ; on devrait parler plus précisemment de somme de produits.

En d'autres termes, l'algèbre de symétrie maximale de l'équation libre de Schrödinger est isomorphe au centralisateur d'un générateur de translation de genre lumière donné, à l'intérieur de l'algèbre de symétrie maximale de l'équation de Klein-Gordon de masse nulle. Par conséquent, un polynôme en les générateurs conformes est équivalent à un polynôme en les générateurs de Schrödinger si et seulement s'il commute avec $\widetilde{P}^+$. Des exemples évidents sont les polynômes en les générateurs (8.29) de $\mathfrak{sch}(d)$ qui commutent avec $\widetilde{P}^+$. Un exemple plus intéressant de la propriété précédente est le polynôme $\alpha = \widetilde{K}^i \widetilde{P}_i - 2\widetilde{M}^{+i}\widetilde{M}_{+i}$, quadratique en les générateurs de $\mathfrak{o}(d+2,2)$. Avec l'aide des relations de commutation (8.27), on peut vérifier que α commute avec $\widetilde{P}^+$. En faisant usage de (8.10) et (8.28), on trouve en outre qu'il est équivalent à un polynôme en les générateurs de $\mathfrak{sch}(d)$: $\alpha \approx \widehat{M}^{ij}\widehat{M}_{ij} + id\widehat{D} + d^2/2$, comme il se doit.

Chapitre 9

Résultats

Ce chapitre contient une lettre [78] intitulée “Towards a gravity dual of the unitary Fermi gas” publiée dans *Physical Review D* en 2012 et écrite en collaboration avec Xavier Bekaert et Sergej Moroz. Les idées et les démonstrations ont été développées dans un autre article intitulé “Symmetries and currents of the ideal and unitary Fermi gases” publié dans *JHEP* en annexe C.

PHYSICAL REVIEW D **85,** 106001 (2012)

Towards a gravity dual of the unitary Fermi gas

Xavier Bekaert,[1] Elisa Meunier,[1] and Sergej Moroz[2,3]

[1]*LMPT, Université François Rabelais UMR 7350 CNRS & FdR 2964 Denis Poisson Parc de Grandmont 37200 Tours, France*
[2]*ITP, Universität Heidelberg Philosophenweg 16, D-69120 Heidelberg, Germany*
[3]*Department of Physics, University of Washington Seattle, Washington 98195-1560, USA*

(Received 14 November 2011; published 8 May 2012)

Inspired by the method of null-dimensional reduction and by the holographic correspondence between Vasiliev's higher-spin gravity and the critical $O(N)$ model, a bulk dual of the unitary and the ideal nonrelativistic Fermi gases is proposed.

DOI: 10.1103/PhysRevD.85.106001 PACS numbers: 11.25.Tq, 03.75.Ss

I. INTRODUCTION

The quantum many-body problem of a nonrelativistic two-component Fermi gas with short-range attractive interactions is a long-standing problem in condensed matter physics. At low temperature, the system is known to be superfluid and undergoes a smooth crossover from the Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) to the Bose-Einstein-Condensate (BEC) regime as the two-body attraction is increased (see [1] for reviews). Recent progress in experimental atomic physics has allowed the study of the BCS-to-BEC crossover with unprecedented accuracy. The regime in between BCS and BEC, known as the "unitary Fermi gas," is of special theoretical interest. The unitary Fermi gas is strongly coupled and no obvious small parameter is available precluding the reliable application of a perturbative expansion.

A characteristic of the unitary Fermi gas in vacuum is its invariance under scale transformations and, more generally, under the Schrödinger group of [2]. This nonrelativistic conformal symmetry of the unitary Fermi gas allowed [3] to apply the methods of gauge-gravity duality to this system. While these seminal papers triggered an intensive search for the holographic duals of various nonrelativistic systems originating from condensed matter physics, a holographic description of the unitary fermions still remains tantalizing. In this work, inspired by the conjectured anti-de Sitter (AdS) dual of the critical $O(N)$ model [4], we make a next step towards the gravity dual description of the unitary Fermi gas.

II. UNITARY FERMI GAS AND ITS LARGE-*N* EXTENSION

Experimentally, a dilute two-component Fermi gas can be cooled with lasers to ultralow temperatures close to absolute zero. Theoretically, this system can be very well-described as a Fermi gas with two-body contact interactions governed by the microscopic BCS action

$$S[\psi; c_0] = \int dt \int d\mathbf{x}\Big[\sum_{\alpha=\uparrow,\downarrow} \psi^*_\alpha \Big(i\partial_t + \frac{\Delta}{2m} + \mu\Big)\psi_\alpha - c_0 \psi^*_\downarrow \psi^*_\uparrow \psi_\uparrow \psi_\downarrow\Big], \tag{1}$$

where the two species of fermionic atoms of mass m are represented by the Grassmann fields $\psi_\uparrow$ and $\psi_\downarrow$, the chemical potential by μ, and c_0 measures the strength of the interaction. This model has an internal $U(2)$ symmetry. Because of the contact nature of the interaction term, in three spatial dimensions ($d = 3$) the quantum field theory defined by the action (1) must be renormalized by trading the bare interaction parameter c_0 for a low-energy observable: the s-wave scattering length. Experimentally, the scattering length can be tuned via a Feshbach resonance by applying an external magnetic field. The unitary regime corresponds to an infinite scattering length. Hence, in vacuum (i.e., $\mu = 0$) there is no intrinsic length scale in the unitary regime and the microscopic action (1) is invariant under the Schrödinger symmetry. Most remarkably, the quantum version of this theory is believed to be an example of a strongly interacting nonrelativistic conformal field theory (NRCFT) [5].

Aiming at a semiclassical holographic description, some large-N extension of the unitary Fermi gas is necessary. A sensible construction that preserves the pairing structure of the interaction term was found in [6]. The model with N "flavors" is defined by the action

$$S[\psi; c_0, N] = \int dt \int d\mathbf{x}\Big[\psi^\dagger\Big(i\partial_t + \frac{\Delta}{2m} + \mu\Big)\psi - \frac{c_0}{4N}|\psi^T \mathbb{J} \psi|^2\Big], \tag{2}$$

where ψ denotes a multiplet of $2N$ massive fermions with components $\psi^A = \psi^a_\alpha$ with $\alpha = \uparrow, \downarrow$ and $a = 1, \ldots, N$. The symbol $\mathbb{J}$ represents the symplectic $2N \times 2N$ matrix $\mathbb{J}_{AB} = \epsilon^{\alpha\beta} \otimes \delta_{ab}$. For $N = 1$, one recovers the original model (1). The extended model has $U(1) \times Sp(2N)$ as an internal symmetry group. Its subgroup $U(2) \times O(N)$, where $U(2)$ and $O(N)$ transform independently the "spin" and "flavor" indices (respectively α, β and a, b) will be central in our proposal. Via a Hubbard-Stratonovich transformation in the Cooper channel, both theories (1) and (2) can be reformulated as effective field theories in terms of a complex scalar field (called dimer in the literature on the unitary Fermi gas) associated with the Cooper pair

$\psi^T \mathbb{J} \psi \sim \psi_\uparrow \cdot \psi_\downarrow$. In the large-$N$ limit the quantum partition function of (2) is equivalent to the mean field approximation for (1), as both correspond to the saddle point of the dimer effective theory.

III. UNITARY FERMI GAS VS RELATIVISTIC $U(N)$ MODEL

Relativistic scalar $O(N)$ models and their natural complex $U(N)$ extension are well-understood due to their central role in the physics of critical phenomena. Despite their different space-time symmetries, the relativistic $U(N)$ model in $D = d + 2$-dimensional space-time and the nonrelativistic BCS model in d spatial dimensions have several features in common. Some of the properties of the models are compared in the following table:

Models	$U(N)$	BCS
Space-time	Relativistic	Nonrelativistic
Fundamental fields	Bosons ϕ	Fermions $\psi_\uparrow$, $\psi_\downarrow$
Components	N complex	$2N$ complex
Internal symmetry	$U(N)$	$U(1) \times Sp(2N)$
Quartic interaction	$(\phi^\dagger \cdot \phi)^2$	$\lvert\psi_\uparrow \cdot \psi_\downarrow\rvert^2$
Collective field	Particle density $\phi^\dagger \cdot \phi$	Cooper Pair $\psi_\uparrow \cdot \psi_\downarrow$
Scale-free	$m = 0$	$\mu = 0$
Critical fixed point	Wilson-Fisher	Unitary regime

$U(N)$ and BCS models have a similar renormalization group topology exhibiting a pair of fixed points. Besides the trivial fixed point, both theories can be tuned to criticality: the Wilson-Fisher fixed point for the massless $U(N)$ model and the unitary fixed point for the BCS model at $\mu = 0$. In the large-N limit, the models at the interacting fixed point are simply related to their noninteracting counterparts. In particular, by applying the general observation of [7] to nonrelativistic fermions, one can show that, in the large-N limit, the free energies of the ideal and the unitary Fermi gases are related by a Legendre transformation with respect to the dimer field. Consequently, in this limit the theory at the two fixed points has the same infinite set of conserved currents and symmetries, most of which are broken by $1/N$ corrections in the interacting theory. Analogous observation also holds for the relativistic $U(N)$ model.

One also observes a simple relation between the scaling dimensions of the collective field at the two fixed points for both BCS and $U(N)$ models [3,4]

$$\Delta^{\text{free}} = \begin{cases} d & \text{BCS model} \\ D-2 & U(N)\,\text{model} \end{cases}$$
$$\Delta^{\text{int}} = 2\begin{cases} \text{BCS model (in vacuum)} \\ U(N)\,\text{model}\ (N=\infty\ \text{limit}) \end{cases} \tag{3}$$

In contrast to the relativistic $U(N)$ model, due to the simplicity of the nonrelativistic vacuum, the relation $\Delta^{\text{int}} = 2$ is exact in the theory of nonrelativistic fermions, i.e., it receives no $1/N$ corrections.

The highest of the two scaling dimensions, denoted Δ_+, is always above the unitarity bound and corresponds to an infrared (IR)-stable fixed point on the boundary side and to a standard (Dirichlet) boundary condition on the bulk side. The lowest dimension, Δ_-, corresponds to an ultraviolet (UV)-stable fixed point and to an exotic (Neumann) boundary condition. Thus the holographic dual of the boundary Legendre transformation is a change of boundary conditions on the bulk scalar field. When both dimensions are above the nonrelativistic unitarity bound, $\Delta_+ \geq \Delta_- \geq d/2$, both fixed points are admissible and thus correspond to different choices of boundary conditions for the *same* bulk theory.

The unitary fixed point corresponding to Δ^{int} is physically admissible only for $0 < d < 2$ (IR-stable) and $2 < d < 4$ (UV-stable). Indeed, for $d > 4$ one obtains $\Delta^{\text{int}} = 2 < \frac{d}{2}$ which violates the unitarity bound for dimers. Moreover, in $d = 2$ both fixed points merge together ($\Delta^{\text{free}} = 2 = \Delta^{\text{int}}$) and only the trivial fixed point exists. The situation can be summarized as:

d	Δ_-	Δ_+	Property
$0 < d < 2$	Δ^{free}	Δ^{int}	Asymptotic freedom
$d = 2$	2	2	Triviality
$2 < d < 4$	Δ^{int}	Δ^{free}	Asymptotic safety

IV. NULL-DIMENSIONAL REDUCTION

This is an old trick relating mathematically, relativistic and nonrelativistic theories at tree level (see, e.g., [8]). It is based on the observation that the d'Alembertian of $D = d + 2$-dimensional Minkowski space-time expressed in light-cone coordinates $x^\mu = (x^+, x^-, x^i)$ is proportional to the Schrödinger operator in d spatial dimensions, modulo the identification of the null coordinate x^+ with the nonrelativistic time and of the null momentum $-i\partial_-$ with the mass operator. Indeed, the kinetic operator of a relativistic scalar theory, $\Box - M^2 = -2\partial_+\partial_- + \Delta - M^2$, when acting on eigenmodes of the null momentum,

$$\Psi(x) = e^{-imx^-}\psi(x^+, x^i), \tag{4}$$

is proportional to the kinetic Schrödinger operator of a nonrelativistic theory, $i\partial_t + \Delta/2m + \mu$, via the identification $x^+ = t$ and $M^2 = -\mu/2m$. Hence, any solution $\Psi(x)$ of the free Klein-Gordon equation of the form (4) defines a solution $\psi(t, \mathbf{x})$ of the free Schrödinger equation, and conversely.

By definition, symmetries map solutions on solutions, thus the symmetries of the free Schrödinger equation can be seen as those symmetries of the free Klein-Gordon equation that commute with a fixed null momentum. For instance, the Bargmann group (the central extension of the Galilei group by the mass) and the Schrödinger group (the Bargmann group enlarged by expansions and scale transformations [2]) are, respectively, the kinematical symmetry groups of the free Schrödinger equation with and without chemical potential [9]. They can be viewed as the centralizers of a given null momentum inside, respectively, the Poincaré and the conformal group of kinematical symmetries of the Klein-Gordon equation with and without mass.

The dimensional reduction explains the similarities between the large-N critical $U(N)$ model and the unitary Fermi gas in vacuum. In fact, generally *any* Lagrangian invariant under global $U(1)$ phase and Poincaré (conformal) transformations can be consistently reduced to a Lagrangian preserved by the $U(1)$ and Bargmann (Schrödinger) groups. This universal relationship between relativistic and nonrelativistic field theories in the semiclassical (i.e., mean field) approximation has maybe not yet received the attention that it deserves.

V. NONRELATIVISTIC HIGHER-SPIN SYMMETRIES

A key feature of free conformal field theories (CFTs) is that their symmetries are enhanced to an infinite-dimensional higher-spin symmetry algebra. Following the holographic dictionary, the associated infinite collection of higher-spin conserved currents should be dual to a tower of higher-spin gauge fields in the bulk. In particular, the bilinear singlet sector of a free scalar CFT should be dual to a Vasiliev theory [10]. Consequently, a crucial step towards a bulk dual of the ideal Fermi gas is the identification of symmetries and currents of the nonrelativistic free fermions as well as their relationship to their relativistic parent. This lengthy analysis will be presented in detail in [11] and here we only summarize our main results.

A target is the nonrelativistic counterpart of the theorem of Eastwood [12] identifying the maximal symmetry algebra of the d'Alembert equation in $D = d + 2$ flat space-time. The latter infinite-dimensional algebra is denoted here as "Vasiliev $(d + 2,2)$", since it contains the conformal algebra $\mathfrak{o}(d + 2, 2)$ and is used by Vasiliev as gauge algebra in his bosonic higher-spin theories on AdS_{d+3} [13]. Mimicking the definitions of [12], a symmetry generator of the free Schrödinger equation (with $\mu = 0$ from now on),

$$\left(i\partial_t + \frac{\Delta}{2m}\right)\psi(t,\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \psi(t,\mathbf{x}) = e^{it(\Delta/2m)}\psi(0,\mathbf{x}), \quad (5)$$

is a linear differential operator $\hat{A}$ such that $(i\partial_t + \Delta/2m)\hat{A} = \hat{B}(i\partial_t + \Delta/2m)$ for some linear differential operator $\hat{B}$, because then $\hat{A}$ maps solutions on solutions. Two generators are equivalent if they only differ by a trivial generator of the form $\hat{A} = \hat{C}(i\partial_t + \Delta/2m)$ for some linear operator $\hat{C}$, i.e., $\hat{A}$ then maps solutions on zero. The maximal symmetry algebra of the free single-particle Schrödinger equation is the Lie algebra of all inequivalent symmetry generators and it is [11]:

(i) isomorphic to the Weyl algebra [14], denoted "Weyl (d)," of spatial differential operators (i.e., quantum observables that are polynomials in positions and momenta) evolved in the time-reversed Heisenberg picture

$$\hat{A}(-t) = e^{-it(\Delta/2m)}\hat{A}(0)e^{-it(\Delta/2m)}$$

that manifestly maps any solution (5) to a solution,

(ii) generated algebraically by (taking powers of) the spatial translation and Galilean boost generators, $\hat{P}_i = -i\partial_i = \hat{P}_i(-t)$ and $\hat{K}_i = mx_i + it\partial_i = m\hat{X}_i(-t)$ with canonical commutation relations $[\hat{K}_i, \hat{P}_j] = i\delta_{ij}m$,

(iii) embedded in the Vasiliev algebra as the subalgebra commuting with a given null momentum and contains the Schrödinger algebra $\mathfrak{sch}(d)$, as summarized here:

	Kinematical	$\subset$	Higher symmetries
CFT	$\mathfrak{o}(d + 2, 2)$	$\subset$	Vasiliev $(d + 2, 2)$
$\cup$	$\cup$		$\cup$
NRCFT	$\mathfrak{sch}(d)$	$\subset$	Weyl (d)

where the vertical embedding corresponds to the null-dimensional reduction, and the horizontal embedding arises from the fact that the generators of kinematical symmetries are first-order differential operators while higher symmetries generators can be higher derivatives. Notably [15], the Schrödinger algebra is contained in the Weyl algebra because its generators can be realized as polynomials of degree two in the spatial translation and Galilean boost generators.

For an n-component scalar field, these higher-spin space-time symmetry algebras of the d'Alembert and Schrödinger equations can be tensored with an internal $\mathfrak{u}(n)$ algebra of Hermitian $n \times n$ matrices. The corresponding higher-spin theories then possess $\mathfrak{u}(n)$-valued gauge fields [13] dual to boundary bilinear currents in the adjoint representation of $U(n)$ [4].

VI. FERMION BILINEARS AND COUPLING TO SOURCES

The physical $(N = 1)$ BCS fermions are two-component Grassmann scalars in the fundamental representation of the internal symmetry group $U(2)$. Together with the up and down particle densities, the Cooper pair fits into an adjoint multiplet of $U(2)$, i.e., the 2×2 Hermitian matrix:

$$\begin{pmatrix} -\mathtt{j}_{\uparrow}^{(0)} & \mathtt{k}^{(0)} \\ \mathtt{k}^{(0)*} & \mathtt{j}_{\downarrow}^{(0)} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\psi_{\uparrow}^{*}\cdot\psi_{\uparrow} & \psi_{\uparrow}\cdot\psi_{\downarrow} \\ \psi_{\downarrow}^{*}\cdot\psi_{\uparrow}^{*} & \psi_{\downarrow}^{*}\cdot\psi_{\downarrow} \end{pmatrix}.$$

In the large-N extended theory, these considerations lead us to focus on the sector of flavor-singlet two-fermion composite fields in the adjoint representation of $U(2)$. They are spanned by the $U(1)$-neutral conserved currents [16] (no sum over the index $\alpha = \uparrow, \downarrow$)

$$\mathtt{j}^{(r)}_{\alpha i_1\cdots i_s} = \delta_{ab}\psi^{a*}_{\alpha}\underbrace{\overrightarrow{\partial}_t\cdots\overrightarrow{\partial}_t}_{r}\overrightarrow{\partial}_{i_1}\cdots\overrightarrow{\partial}_{i_s}\psi^{b}_{\alpha} \tag{6}$$

and the $U(1)$-charged symmetric tensors

$$\mathtt{k}^{(r)}_{i_1\cdots i_s} = \delta_{ab}\psi^{a}_{\uparrow}\underbrace{\overrightarrow{\partial}_t\cdots\overrightarrow{\partial}_t}_{r}\overrightarrow{\partial}_{i_1}\cdots\overrightarrow{\partial}_{i_s}\psi^{b}_{\downarrow}. \tag{7}$$

For $s = r = 0$, these composite fields, respectively, reproduce the up and down particle densities $\mathtt{j}^{(0)}_{\alpha} = \psi^{*}_{\alpha}\cdot\psi_{\alpha}$ and the Cooper pair $\mathtt{k}^{(0)} = \psi_{\uparrow}\cdot\psi_{\downarrow}$. In the holographic correspondence, the composite operators (6) and (7) should couple minimally to sources, respectively, denoted by $h^{(r)}_{\alpha i_1\cdots i_s}$ and $\varphi^{(r)}_{i_1\cdots i_s}$, representing the boundary data of $\mathfrak{u}(2)$-valued bulk gauge fields. With the techniques of [17], the difference of the free action $S[\psi; 0, N]$ and of the minimal coupling term,

$$\sum_{r,s\geq 0}\int dtd\mathbf{x}(j^{(r)i_1\cdots i_s}h^{(r)}_{i_1\cdots i_s} + k^{(r)i_1\cdots i_s *}\varphi^{(r)}_{i_1\cdots i_s} + \text{c.c.}),$$

can be rewritten as the quadratic functional [11]

$$\int dtd\mathbf{x}\Psi^{\dagger}\begin{pmatrix} i\partial_t + \frac{\Delta}{2m} - \hat{H}_{\uparrow} & \hat{\varphi} \\ \hat{\varphi}^{\dagger} & i\partial_t - \frac{\Delta}{2m} + \hat{H}^{\tau}_{\downarrow} \end{pmatrix}\Psi,$$

where $\Psi^{T} = (\psi_{\uparrow}, \psi^{*}_{\downarrow})$ defines the two-component Nambu-Gorkov fermion, $\hat{H}^{\tau}_{\alpha}(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{P}}) := \hat{H}_{\alpha}(\hat{\mathbf{X}}, -\hat{\mathbf{P}})$ and the differential operators $\hat{H}_{\alpha}$ and $\hat{\varphi}$ are related to the respective sources h_{α} and φ. This compact rewriting is formally identical to the Nambu-Gorkov formulation of the BCS theory except that the chemical potential and the energy gap are replaced by space-time differential operators. The effective action can be obtained now via a Gaussian integration over the fermionic field and is a trace-log functional of the above 2×2 matrix. These results can be reproduced through the null-dimensional reduction of a free relativistic scalar theory [11].

VII. BULK DUAL

What might be the gravity dual of the unitary Fermi gas? Keeping the above discussion in mind, we approach this question by following these steps: (i) unitary fermions at $N = \infty$ are Legendre conjugate to free fermions, (ii) a key tool for understanding higher-spin symmetries of free nonrelativistic fermions is the null-dimensional reduction of free relativistic Grassmann scalars, (iii) free relativistic scalar theories are expected to be dual to Vasiliev higher-spin theories.

Therefore it is tempting to perform the null reduction on both sides of the relativistic holographic duality, as in [18]. Schematically, our philosophy looks as follows:

$$\begin{array}{ccc} \text{Higher-spins on AdS}_{d+3} & \longleftrightarrow & \text{CFT}_{d+2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Non-relativistic Higher-spins}_{d+1} & \overset{?}{\longleftrightarrow} & \text{NRCFT}_{d} \end{array}$$

with horizontal arrows denoting holographic correspondence and vertical arrows relating relativistic to nonrelativistic theories via the null reduction. The higher-dimensional relativistic parents are mere auxiliary tools in our construction, used at tree level only since they may be sick as quantum field theories *per se*. For instance, the CFT violates the spin-statistics theorem, but this is not a problem since this theorem does not apply to nonrelativistic theories.

We thus propose that a candidate for the holographic description of fermions at unitarity is the null reduction of a Vasiliev higher-spin gravity [19]. More precisely, the $O(N)$-invariant sector of the large-N unitary fermions in d spatial dimensions might be dual to the null reduction of the Vasiliev bosonic theory [13] on AdS_{d+3} with $U(2)$ internal symmetry. Scalar fields on AdS_{d+3} admit two distinct choices of boundary conditions for mass square in the interval $-\left(\frac{d+2}{2}\right)^2 < m^2 < 1 - \left(\frac{d+2}{2}\right)^2$. Since the complex bulk scalar fields in the higher-spin multiplet have $m^2 = -2d$, this possibility arises in the intervals $0 < d < 2$ and $2 < d < 4$. In particular, the gravity dual of the "physical" three-dimensional ($d = 3$) two-component ($N = 1$) UV-stable ($\Delta_{-} = 2$) *unitary Fermi gas should be the null-dimensional reduction of Vasiliev theory describing interacting* $\mathfrak{u}(2)$*-valued higher-spin gauge fields on* AdS_6 *with exotic boundary condition for the bulk scalar field dual to the Cooper pair.* The intimate connection between the unitary and the ideal Fermi gases together with the universality of the null-dimensional reduction method suggest that the holographic dual of the unitary Fermi gas is within our immediate reach.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank C. Duval, S. Golkar, M. Hassaine, P. Horvathy, D. T. Son, J. Unterberger and M. Valenzuela for discussions on related issues. The work of S. M. was supported by U.S. DOE Grant No. DE-FG02-97ER41014.

Annexes

Annexe A

Démonstrations du premier chapitre

A.1 L'expression ambiante du d'Alembertien

A partir des formules de la dérivée covariante pour un scalaire (1.42) et (1.43) :

$$\nabla_\mu \phi \longleftrightarrow \mathcal{D}_A \Phi = \mathcal{P}^C_A \, \partial_C \Phi$$

on cherche l'expression du correspondant en espace ambiant $\boxdot_D = G^{AB} \mathcal{D}_A \mathcal{D}_B$ du d'Alembertien en espace-temps de courbure constante $\nabla^2_{(A)dS_n} = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$:

$$\nabla^2_{(A)dS_n} \phi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \quad \longleftrightarrow \quad \boxdot_D \Phi = G^{AB} \mathcal{D}_A \mathcal{D}_B \Phi \, .$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
\boxdot_D \Phi &= G^{AB} \mathcal{D}_A \mathcal{D}_B \Phi \\
&= G^{AB} \partial_A \mathcal{D}_B \Phi \\
&= G^{AB} \partial_A \left(\mathcal{P}^C_B \, \partial_C \Phi \right) \\
&= G^{AB} \partial_A \left(\partial_B \Phi - \frac{X_B \, X^C}{X^2} \, \partial_C \Phi \right) \\
&= G^{AB} \left(\partial_A \partial_B \Phi - \frac{\eta_{AB}}{X^2} \, X^C \, \partial_C \Phi \right) \\
&= \left(\eta^{AB} - \frac{X^A \, X^B}{X^2} \right) \left(\partial_A \partial_B \Phi - \frac{\eta_{AB}}{X^2} \, h \, \Phi \right) \\
&= \eta^{AB} \partial_A \partial_B \Phi - \frac{\eta^{AB} \eta_{AB}}{X^2} \, h \, \Phi - \frac{X^A \, X^B}{X^2} \, \partial_A \partial_B \Phi + \frac{\eta_{AB} \, X^A \, X^B}{(X^2)^2} \, h \, \Phi \\
&= \Box_D \Phi - \frac{D}{X^2} \, h \, \Phi - \frac{h(h-1)}{X^2} \, \Phi + \frac{1}{X^2} \, h \, \Phi \\
&= \Box_D \Phi + \frac{1}{X^2} \left(-Dh - h \, (h-1) + h \right) \Phi \\
\boxdot_D \Phi &\sim \Box_D \Phi - \frac{1}{X^2} \, h \, (D + h - 2) \, \Phi \, .
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\nabla^2_{(A)dS_n} \, \phi \longleftrightarrow \boxdot_D \Phi = \left[\Box_D - \frac{1}{X^2} \, h \, (D + h - 2) \right] \Phi$$

et également

$$\Box_D\,\Phi \longleftrightarrow \boxtimes_n\,\phi \,=\, \left[\nabla_n^2 \,\pm\, \frac{1}{R^2}\,h\,(h\,+\,n\,-\,1)\right]\,\phi\,.$$

Dans l'espace ambiant, on a pour une fonction harmonique homogène de degré h :

$$\begin{aligned} \Box_D\Phi &= 0 \\ X^A\,\partial_A\Phi &= h\,\Phi \\ &= \left(\frac{2\,-\,D}{2}\,+\,i\,\mu\right)\,\Phi\,. \end{aligned}$$

Dans l'espace-temps de de Sitter, l'opérateur d'Alembertien se note :

$$\begin{aligned} \Box_D\,\Phi \quad\longleftrightarrow\quad \boxtimes_{dS_n}\,\phi &= \left[\nabla^2_{dS_n} \,+\, \frac{1}{R^2}\,h\,(h\,+\,n\,-\,1)\right]\,\phi \\ \Box_D\,\Phi \quad\longleftrightarrow\quad \boxtimes_{dS_n}\,\phi &= \left[\nabla^2_{dS_n} \,+\, \frac{1}{R^2}\,\left(\frac{1\,-\,n}{2}\,+\,i\,\mu\right)\,\left(\frac{1\,-\,n}{2}\,+\,i\,\mu\,+\,n\,-\,1\right)\right]\,\phi \\ \Box_D\,\Phi \quad\longleftrightarrow\quad \boxtimes_{dS_n}\,\phi &= \left[\nabla^2_{dS_n} \,-\, \frac{1}{R^2}\,\left(\frac{n\,-\,1}{2}\,-\,i\,\mu\right)\,\left(\frac{n\,-\,1}{2}\,+\,i\,\mu\right)\right]\,\phi \\ \Box_D\,\Phi \quad\longleftrightarrow\quad \boxtimes_{dS_n}\,\phi &= \left[\nabla^2_{dS_n} \,-\, \frac{1}{R^2}\,\left(\left(\frac{n\,-\,1}{2}\right)^2\,+\,\mu^2\right)\right]\,\phi \end{aligned}$$

$$\boxed{\Box_D\,\Phi \longleftrightarrow \boxtimes_{dS_n}\,\phi \,=\, \left[\nabla^2_{dS_n} \,-\, \frac{1}{R^2}\,\left(\left(\frac{n\,-\,1}{2}\right)^2\,+\,\mu^2\right)\right]\,\phi\,.} \tag{A.1}$$

A.2 Le commutateur des dérivées covariantes

Calculons dans l'espace ambiant :

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu,\,\nabla_\nu]\,V_\rho &= 2\,\nabla_{[\mu}\,\nabla_{\nu]}\,V_\rho \\ &\updownarrow \\ [\mathcal{D}_A\,,\mathcal{D}_B]\;V_C &= 2\,\partial_{[A}\,\left(\mathcal{P}^D_{B]}\,\mathcal{P}^E_C\,\partial_D V_E\right) \\ &\sim 2\,\eta_{[AB]}\,\frac{X^D}{X^2}\,\delta^E_C\,\partial_D V_E \,-\, 2\,\delta^D_{[B}\,\eta_{A]C}\,\frac{X^E}{X^2}\,\partial_D V_E \,+\, 2\,\delta^E_C\,\delta^D_{[B}\,\partial_{A]}\partial_D V_E \\ &= 0 \,-\, 2\,\frac{X^E}{X^2}\,\eta_{C[A}\,\partial_{B]}V_E \,+\, 2\;\partial_{[A}\partial_{B]}V_C \\ &= -\,2\,\frac{X^E}{X^2}\,\eta_{C[A}\,\partial_{B]}V_E \,+\, 0 \\ &= -\,2\,\frac{1}{X^2}\,\eta_{C[A}\,\partial_{B]}(X^E V_E) \,+\, 2\frac{1}{X^2}\,\eta_{C[A}\,\delta^E_{B]}\,V_E \\ &= 0 \,+\, 2\,\frac{1}{X^2}\,\eta_{C[A}\,V_{B]} \\ &\sim 2\,\frac{1}{X^2}\,G_{C[A}\,V_{B]} \end{aligned}$$

$$\boxed{[\nabla_\mu\,,\nabla_\nu]\,V_\rho \;=\; \pm\,2\,\frac{1}{R^2}\,g_{\rho[\mu}\,V_{\nu]}\,.} \tag{A.2}$$

A.3 La conservation des courants

On pose $y_\pm = x \pm v$. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\,[\phi(x-v)\phi^*(x+v)] &= \frac{\partial\phi}{\partial x^\rho}(x-v)\,\phi^*(x+v) + \phi(x-v)\,\frac{\partial\phi^*}{\partial x^\rho}(x+v)\\ &= \frac{\partial\phi}{\partial y_-^\rho}(y_-)\phi^*(y_+) + \phi(y_-)\,\frac{\partial\phi^*}{\partial y_+^\rho}(y_+)\,.\end{aligned}$$

On en déduit donc $\left(\eta^{\nu\rho}\dfrac{\partial}{\partial v^\nu}\dfrac{\partial}{\partial x^\rho}\right)$

$$\begin{aligned}&[\phi(x-v)\,\phi^*(x+v)]\\ &= \eta^{\nu\rho}\left\{\frac{\partial^2\phi}{\partial v^\nu\partial y_-^\rho}(x-v)\,\phi^*(x+v)\right.\\ &\quad +\frac{\partial\phi}{\partial y_-^\rho}(x-v)\,\frac{\partial\phi^*}{\partial v^\nu}(x+v) \;+\; \frac{\partial\phi}{\partial v^\nu}(x-v)\,\frac{\partial\phi^*}{\partial y_+^\rho}(x+v)\\ &\quad \left.+\,\phi(x-v)\,\frac{\partial^2\phi^*}{\partial v^\nu\partial y_+^\rho}(x+v)\right\}\\ &= \eta^{\nu\rho}\left\{-\frac{\partial^2\phi}{\partial y_-^\nu\partial y_-^\rho}(y_-)\,\phi^*(y_+)\right.\\ &\quad +\frac{\partial\phi}{\partial y_-^\rho}(y_-)\,\frac{\partial\phi^*}{\partial y_+^\nu}(y_+) \;-\; \frac{\partial\phi}{\partial y_-^\nu}(y_-)\,\frac{\partial\phi^*}{\partial y_+^\rho}(y_+)\\ &\quad \left.+\,\phi(y_-)\,\frac{\partial^2\phi^*}{\partial y_+^\nu\partial y_+^\rho}\right\}\\ &\approx 0\,.\end{aligned}$$

A.4 La condition sur le degré d'homogénéité pour la fonction génératrice de l'espace ambiant

On souhaite calculer la divergence du courant $\mathcal{D}^{B_1}J_{B_1\ldots B_r}$ en espace ambiant et trouver la condition sur le degré d'homogénéité pour qu'elle soit nulle. Le gradient s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_A J_{B_1\ldots B_r} &\sim \partial_A\left[\mathcal{P}_{B_1}^{C_1}\ldots\mathcal{P}_{B_r}^{C_r}\,J_{C_1\ldots C_r}\right]\\ &\sim \partial_A J_{B_1\ldots B_r} \;-\; r\,\eta_{A(B_1}\,X^C\,\frac{1}{X^2}\,J_{B_2\ldots B_r)C}\,.\end{aligned}$$

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{B_1}J_{B_1\ldots B_r} &= G^{AB_1}\mathcal{D}_A J_{B_1\ldots B_r}\\ &= \left(\eta^{AB_1} - \frac{X^A X^{B_1}}{X^2}\right)\left(\partial_A J_{B_1\ldots B_r} \;-\; r\,\eta_{A(B_1}\,\frac{X^C}{X^2}\,J_{B_2\ldots B_r)C}\right)\,.\end{aligned}$$

On utilise l'identité suivante :

$$r\,\eta_{A(B_1}\,X^C\,J_{B_2\ldots B_r)C} = \eta_{AB_1}\,X^C\,J_{B_2\ldots B_rC} + (r-1)\eta_{A(B_2}\,X^C\,J_{B_3\ldots B_r)B_1C}\,.$$

Donc la divergence covariante est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{B_1} J_{B_1\ldots B_r} &= \left(\eta^{AB_1} - \frac{X^A X^{B_1}}{X^2}\right) \times \\
&\quad \times \left(\partial_A J_{B_1\ldots B_r} - \eta_{AB_1}\frac{X^C}{X^2}\,J_{B_2\ldots B_rC} - (r-1)\,\eta_{A(B_2}\frac{X^C}{X^2}\,J_{B_3\ldots B_r)B_1C}\right) \\
&\sim \partial^{B_1} J_{B_1\ldots B_r} - \eta^{AB_1}\,\eta_{AB_1}\frac{X^C}{X^2}\,J_{B_2\ldots B_rC} \\
&\quad - (r-1)\,\eta^{AB_1}\,\eta_{A(B_2}\frac{X^C}{X^2}\,J_{B_3\ldots B_r)B_1C} \\
&\quad - \frac{X^A X^{B_1}}{X^2}\,\partial_A J_{B_1\ldots B_r} + \frac{X^C}{X^2}\,J_{B_2\ldots B_rC}\,.
\end{aligned}$$

Or on suppose que J est un courant conservé de l'espace plat ambiant, $\partial^{B_1} J_{B_1\ldots B_r} \approx 0$. De plus, les quatre termes restant sont égaux à :

$$\begin{aligned}
& -D\,\frac{X^C}{X^2}\,J_{B_2\ldots B_rC} - (r-1)\,\frac{X^C}{X^2}\,J_{B_3\ldots B_rB_2C} - \frac{X^{B_1}}{X^2}\,h_r\,J_{B_1\ldots B_r} + \frac{X^C}{X^2}\,J_{B_2\ldots B_rC} \\
= \;& \frac{X^C}{X^2}\,J_{B_2\ldots B_rC}[-D - (r-1) - h_r + 1]
\end{aligned}$$

où h_r est le degré d'homogénéité en X du courant J de rang r. Pour la fonction génératrice (3.17),

$$\begin{aligned}
h_r &= h - r + h^\dagger \\
&= 2\Re(h) - r
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{B_1} J_{B_1\ldots B_r} &\approx \frac{X^C}{X^2}\,J_{B_2\ldots\,B_r\,C}\,[-D - (r-1) - (2\Re(h) - r) + 1] \\
&= \frac{X^C}{X^2}\,J_{B_2\ldots\,B_r\,C}\,[-D - 2\Re(h) + 2]\,.
\end{aligned}$$

Pour que la divergence covariante du courant soit bien nulle, on pose

$$-D - 2\Re(h) + 2 = 0\,.$$

Ce qui implique que :

$$\boxed{\Re(h) = \frac{2-D}{2} = 1 - \frac{D}{2} = \frac{1-n}{2}\,.} \tag{A.3}$$

A.5 Les dérivées partielles

Nous allons démontrer les formules des dérivées partielles en fonction des dérivées covariantes dans l'espace ambiant.
Pour le rang 2 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{(A}\,\mathcal{D}_{B)}\,\Phi &= \mathcal{D}_A\,\mathcal{D}_B\,\Phi \\
&= \partial_A\,\mathcal{D}_B\,\Phi \\
&= \partial_A(\mathcal{P}_B^C\,\partial_C\,\Phi) \\
&= \partial_A\left[\left(\delta_B^C - \frac{X_B\,X^C}{X^2}\right)\partial_C\Phi\right] \\
&= \partial_A\left[\partial_B\Phi - \frac{X_B}{X^2}\,h\,\Phi\right] \\
&\sim \partial_A\partial_B\Phi - \frac{h}{X^2}\,\eta_{AB}\,\Phi
\end{aligned}$$

$$\boxed{\partial_A\,\partial_B\Phi \sim \mathcal{D}_{(A}\,\mathcal{D}_{B)}\Phi + \frac{h}{X^2}\,\eta_{AB}\,\Phi\,.} \tag{A.4}$$

Pour le rang 3 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_A\,\mathcal{D}_B\mathcal{D}_C\Phi &\sim \partial_A(\mathcal{P}_B^D\,\mathcal{P}_C^E\,\mathcal{D}_D\,\mathcal{D}_E\Phi) \\
&= \partial_A\left[\left(\delta_B^D - \frac{X_B\,X^D}{X^2}\right)\left(\delta_C^E - \frac{X_C\,X^E}{X^2}\right)\left(\partial_D\partial_E\Phi - \frac{h}{X^2}\eta_{DE}\,\Phi\right)\right] \\
&= \partial_A\left[\partial_B\partial_C\Phi - \frac{h}{X^2}\,\eta_{BC}\,\Phi - \frac{X_C\,X^E}{X^2}\,\delta_B^D\,\partial_D\partial_E\Phi\right. \\
&\quad + \frac{X_C\,X^E}{X^2}\,\frac{h}{X^2}\,\delta_B^D\,\eta_{DE}\Phi - \frac{X_B\,X^D}{X^2}\,\delta_C^E\,\partial_D\partial_E\Phi + \frac{X_B\,X^D}{X^2}\,\frac{h}{X^2}\,\delta_C^E\,\eta_{DE}\,\Phi \\
&\quad \left. + \frac{X_B\,X^D\,X_C\,X^E}{(X^2)^2}\,\partial_D\partial_E\Phi - \frac{X_B\,X^D\,X_C\,X^E}{(X^2)^2}\,\frac{h}{X^2}\,\eta_{DE}\Phi\right] \\
&\sim \partial_A\partial_B\partial_C\Phi - \frac{h}{X^2}\,\eta_{BC}\,\partial_A\Phi - \frac{X^E}{X^2}\,\delta_B^D\,\eta_{AC}\,\partial_D\partial_E\Phi \\
&\quad + \frac{X^E}{X^2}\frac{h}{X^2}\delta_B^D\,\eta_{AC}\,\eta_{DE}\,\Phi - \frac{X^D}{X^2}\,\delta_C^E\,\eta_{AB}\,\partial_D\partial_E\Phi \\
&\quad + \frac{h}{X^2}\,\frac{X^D}{X^2}\,\delta_C^E\,\eta_{AB}\,\eta_{DE}\Phi \\
&\sim \partial_A\partial_B\partial_C\Phi - \frac{h}{X^2}\eta_{BC}\partial_A\Phi - \frac{X^E}{X^2}\,\eta_{AC}\,\partial_B\partial_E\Phi - \frac{X^D}{X^2}\,\eta_{AB}\,\partial_D\partial_C\Phi \\
&\sim \partial_A\partial_B\partial_C\Phi - \frac{h}{X^2}\eta_{BC}\partial_A\Phi - 2\,\frac{h-1}{X^2}\,\eta_{A(C}\partial_{B)}\Phi\,.
\end{aligned}$$

Donc la partie symétrisée vaut :

$$\mathcal{D}_{(A}\,\mathcal{D}_B\mathcal{D}_{C)}\Phi \sim \partial_A\partial_B\partial_C\Phi - \frac{3h-2}{X^2}\eta_{(BC}\partial_{A)}\Phi$$

$$\boxed{\partial_A\partial_B\partial_C\Phi \sim \mathcal{D}_{(A}\mathcal{D}_B\mathcal{D}_{C)} + \frac{3h-2}{X^2}\eta_{(AB}\partial_{C)}\Phi\,.} \tag{A.5}$$

A.6 La formule de récurrence des courants conservés

On a exprimé les dérivées partielles comme un polynôme dépendant des dérivées covariantes et de la métrique ambiante :

$$\partial_{A_1}...\partial_{A_m}\Phi = Pol(\eta_{AB},\mathcal{D}_C)\,\Phi$$

ou encore

$$\begin{aligned}(P.\partial)^m\,\Phi &= Pol_m\left(\frac{P^2}{X^2},\,P.\mathcal{D}\right)\\ &= \sum_{r=0}^{[m/2]} c_m^r\left(\frac{P^2}{X^2}\right)^r(P.\mathcal{D})^{m-2r}\,\Phi\,.\end{aligned} \tag{A.6}$$

Un calcul explicite montre que :

$$\begin{aligned}(P.\mathcal{D})\,(P.\partial)^m\Phi &= P^C\,P^{B_1}...\,P^{B_m}\,\partial_C(\mathcal{P}^{A_1}_{B_1}...\mathcal{P}^{A_m}_{B_m}\,\partial_{A_1}...\partial_{A_m}\,\Phi)\\ &\sim (P.\partial)^{m+1}\,\Phi - m\,P^C\,P^{B_1}...\,P^{B_m}\frac{X^{A_1}\,\eta_{CB_1}}{X^2}\,\partial_{A_1}\,\partial_{B_2}...\partial_{B_m}\,\Phi\\ &\sim (P.\partial)^{m+1}\,\Phi - m\,\frac{P^2}{X^2}\,P^{B_2}...\,P^{B_m}\,X^{A_1}\,\partial_{A_1}\,\partial_{B_2}...\partial_{B_m}\,\Phi\\ &= (P.\partial)^{m+1}\,\Phi - m\,\frac{P^2}{X^2}\,(h-(m-1))\,P^{B_2}...\,P^{B_m}\,\partial_{B_2}...\partial_{B_m}\,\Phi\\ (P.\mathcal{D})\,(P.\partial)^m\,\Phi &= (P.\partial)^{m+1}\,\Phi - m\,\frac{P^2}{X^2}\,(h-(m-1))\,(P.\partial)^{m-1}\,\Phi\,.\end{aligned} \tag{A.7}$$

On va utiliser (A.6) pour évaluer les membres de gauche et de droite de cette identité, ce qui va nous donner une relation de récurrence sur les coefficients c_m^r.

En utilisant deux fois (A.6) pour calculer $(P.\partial)^{m+1}$ et $(P.\partial)^{m-1}$:

$$\begin{aligned}
(P.\mathcal{D})\,(P.\partial)^m\,\Phi &= \sum_{r=0}^{[(m+1)/2]} c_{m+1}^r \left(\frac{P^2}{X^2}\right)^r (P.\mathcal{D})^{m+1-2r}\,\Phi \\
&\quad - m\frac{P^2}{X^2}\,(h-m+1) \sum_{r=0}^{[(m-1)/2]} c_{m-1}^r \left(\frac{P^2}{X^2}\right)^r (P.\mathcal{D})^{m-1-2r}\,\Phi \\
&= \sum_{r=0}^{[(m+1)/2]} c_{m+1}^r \left(\frac{P^2}{X^2}\right)^r (P.\mathcal{D})^{m+1-2r}\,\Phi \\
&\quad - m\,(h-m+1) \sum_{r=0}^{[(m-1)/2]} c_{m-1}^r \left(\frac{P^2}{X^2}\right)^{r+1} (P.\mathcal{D})^{m-1-2r}\,\Phi \\
&= \sum_{r=0}^{[(m+1)/2]} c_{n+1}^r \left(\frac{P^2}{X^2}\right)^r (P.\mathcal{D})^{m+1-2r}\,\Phi \\
&\quad - m\,(h-m+1) \sum_{q=r+1=1}^{[(m+1)/2]} c_{m-1}^{q-1} \left(\frac{P^2}{X^2}\right)^q (P.\mathcal{D})^{m-1-2(q-1)}\,\Phi \\
&= c_m^0\,(P.\mathcal{D})^{m+1}\,\Phi \\
&\quad + \sum_{r=1}^{[(m+1)/2]} \left(\frac{P^2}{X^2}\right)^r (P.\mathcal{D})^{m+1-2r}\,[c_{m+1}^r - m(h-m+1)\,c_{m-1}^{r-1}]\,\Phi\,.
\end{aligned}$$

En repartant de (A.6) pour calculer $(P.\partial)^n$, cet opérateur s'exprime aussi par :

$$\begin{aligned}
(P.\mathcal{D})\,(P.\partial)^m\,\Phi &= (P.\mathcal{D}) \sum_{r=0}^{[m/2]} c_m^r \left(\frac{P^2}{X^2}\right)^r (P.\mathcal{D})^{m-2r}\,\Phi \\
&= \sum_{r=0}^{[m/2]} c_m^r \left(\frac{P^2}{X^2}\right)^r (P.\mathcal{D})^{m-2r+1}\,\Phi \\
&= c_m^0\,(P.\mathcal{D})^{m+1} + \sum_{r=1}^{[m/2]} c_n^r \left(\frac{P^2}{X^2}\right)^r (P.\mathcal{D})^{m-2r+1}\,\Phi\,.
\end{aligned}$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{[(m+1)/2]} [c_{m+1}^r - m(h-m+1)\,c_{m-1}^{r-1}] \left(\frac{P^2}{X^2}\right)^r (P.\mathcal{D})^{m+1-2r}\,\Phi \\
&= \sum_{r=1}^{[m/2]} c_n^r \left(\frac{P^2}{X^2}\right)^r (P.\mathcal{D})^{m-2r+1}\,\Phi\,.
\end{aligned}$$

Les bornes supérieures diffèrent mais une relation de récurrence découle de cette égalité :

$$c_m^r = c_{m+1}^r - m(h-m+1)\,c_{m-1}^{r-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\; c^r_{m+1} \,=\, c^r_m \,+\, m(h-m+1)\, c^{r-1}_{m-1}\,. \;} \tag{A.8}$$

Pour n impair, une relation supplémentaire apparait :

$$c^{(m+1)/2}_{m+1} \,=\, m(h-m+1)\, c^{(m-1)/2}_{m-1} \quad \Leftrightarrow \quad c^r_m \,=\, 0 \text{ lorsque } r \,\geqslant\, \frac{m\,+\,1}{2}\,.$$

A.7 Les courants conservés dans l'espace-temps $(A)dS_n$

Nous allons, à partir des formules des dérivées partielles, calculer les courants conservés dans l'espace-temps $(A)dS_n$.
Pour le rang 2 :

$$\begin{aligned}
J^s_{AB} &= \Phi \overleftrightarrow{\partial_A}\overleftrightarrow{\partial_B}\Phi^\dagger \\
&= \Phi\,\partial_A\partial_B\Phi^\dagger \,+\, \partial_A\partial_B\Phi\,\Phi^\dagger \,-\, 2\,\partial_{(A}\Phi\,\partial_{B)}\Phi^\dagger \\
&= \Phi\,\mathcal{D}_A\mathcal{D}_B\Phi^\dagger \,+\, \frac{h^\dagger}{X^2}\,\eta_{AB}\,\Phi\,\Phi^\dagger \,+\, \mathcal{D}_A\mathcal{D}_B\Phi\,\Phi^\dagger \,+\, \frac{h}{X^2}\,\eta_{AB}\,\Phi\,\Phi^\dagger \\
&\quad - 2\,\mathcal{D}_{(A}\Phi\,\mathcal{D}_{B)}\Phi^\dagger \\
&= \Phi\,\overleftrightarrow{\mathcal{D}_A}\overleftrightarrow{\mathcal{D}_B}\Phi^\dagger \,+\, \frac{2\,\Re(h)}{X^2}\,\eta_{AB}\,\Phi\,\Phi^\dagger \\
&\sim \Phi\,\overleftrightarrow{\mathcal{D}_A}\overleftrightarrow{\mathcal{D}_B}\Phi^\dagger \,+\, \frac{2\,\Re(h)}{X^2}\,G_{AB}\,\Phi\,\Phi^\dagger
\end{aligned}$$

$$\boxed{\; j^s_{\mu\nu} \,=\, \phi\,\overleftrightarrow{\nabla_\mu}\overleftrightarrow{\nabla_\nu}\,\phi^* \,\pm\, \frac{2\,\Re(h)}{R^2}\,g_{\mu\nu}\,\phi\,\phi^*\,. \;} \tag{A.9}$$

Pour le rang 3 :

$$\begin{aligned}
J^s_{ABC} &= \Phi \overleftrightarrow{\partial_A}\overleftrightarrow{\partial_B}\overleftrightarrow{\partial_C}\Phi^\dagger \\
&= \Phi\partial_A\partial_B\partial_C\Phi^\dagger \,-\, 3\,\partial_{(A}\Phi\,\partial_B\partial_{C)}\Phi^\dagger \,+\, 3\,\partial_{(A}\partial_B\Phi\,\partial_{C)}\Phi^\dagger \,-\, \partial_A\partial_B\partial_C\Phi\,\Phi^\dagger \\
&= \Phi\,\mathcal{D}_{(A}\,\mathcal{D}_B\mathcal{D}_{C)}\Phi^\dagger \,+\, \frac{3h^\dagger-2}{X^2}\,\eta_{(AB}\,\Phi\,\mathcal{D}_{C)}\Phi^\dagger \,-\, 3\,\mathcal{D}_{(A}\Phi\,\mathcal{D}_B\mathcal{D}_{C)}\Phi^\dagger \\
&\quad - 3\,\frac{h^\dagger}{X^2}\,\eta_{(BC}\,\mathcal{D}_{A)}\Phi\,\Phi^\dagger \,+\, 3\,\mathcal{D}_{(A}\mathcal{D}_B\Phi\,\mathcal{D}_{C)}\Phi^\dagger \,+\, 3\,\frac{h}{X^2}\,\eta_{(AB}\,\Phi\,\mathcal{D}_{C)}\Phi^\dagger \\
&\quad - \mathcal{D}_{(A}\mathcal{D}_B\mathcal{D}_{C)}\Phi\,\Phi^\dagger \,-\, \frac{3h-2}{X^2}\,\eta_{(AB}\mathcal{D}_{C)}\Phi\,\Phi^\dagger \\
&= \Phi\,\mathcal{D}_{(A}\mathcal{D}_B\mathcal{D}_{C)}\Phi^\dagger \,-\, \mathcal{D}_{(A}\mathcal{D}_B\mathcal{D}_{C)}\Phi\,\Phi^\dagger \,-\, 3\,\mathcal{D}_{(A}\Phi\,\mathcal{D}_B\mathcal{D}_{C)}\Phi^\dagger \\
&\quad + 3\,\mathcal{D}_{(A}\mathcal{D}_B\Phi\mathcal{D}_{C)}\Phi^\dagger \,+\, \frac{6\,\Re(h)-2}{X^2}\,\eta_{(AB}\,\Phi\,\mathcal{D}_{C)}\Phi^\dagger \,-\, \frac{6\,\Re(h)-2}{X^2}\,\eta_{(AB}\,\mathcal{D}_{C)}\Phi\,\Phi^\dagger \\
&= \Phi\,\overleftrightarrow{\mathcal{D}_{(A}}\overleftrightarrow{\mathcal{D}_B}\overleftrightarrow{\mathcal{D}_{C)}}\Phi^\dagger \,+\, \frac{6\,\Re(h)-2}{X^2}\,\eta_{(AB}\,\Phi\,\overleftrightarrow{\mathcal{D}_{C)}}\Phi^\dagger \\
&\sim \Phi\,\overleftrightarrow{\mathcal{D}_{(A}}\overleftrightarrow{\mathcal{D}_B}\overleftrightarrow{\mathcal{D}_{C)}}\Phi^\dagger \,+\, \frac{6\,\Re(h)-2}{X^2}\,G_{(AB}\,\Phi\,\overleftrightarrow{\mathcal{D}_{C)}}\Phi^\dagger
\end{aligned}$$

$$\boxed{\; j^s_{\mu\nu\rho} \,=\, \phi\,\overleftrightarrow{\nabla_{(\mu}}\overleftrightarrow{\nabla_\nu}\overleftrightarrow{\nabla_{\rho)}}\phi^* \,\pm\, \frac{6\,\Re(h)-2}{R^2}\,g_{(\mu\nu}\,\phi\,\overleftrightarrow{\nabla_{\rho)}}\phi^*\,. \;} \tag{A.10}$$

A.8 Le programme « Maple » pour calculer les courants de rang élevé

Le programme « Maple » nommé « courant » (pages suivantes) calcule les courants symétriques conservés à un rang quelconque. En utilisant les notations suivantes : $J(r)$ désigne le courant de rang r, $\overline{\phi}$ équivaut à ϕ^* et $(P.(D(dg)))^m$ signifie $\overleftrightarrow{(P.\mathcal{D})}^m$, nous pouvons ainsi voir que les résultats des quatre premiers courants sont identiques à ceux calculés manuellement. Nous avons explicité les calculs jusqu'au rang 8 mais il est bien sûr possible d'aller à un rang plus élevé, les seules contraintes étant celles de la mémoire et du temps nécessaire à l'ordinateur pour faire le calcul.

```
> # Calcul du courant conservé dans l'espace-temps à courbure
constante (de Sitter : X²=R² ; anti-de Sitter : X²=-R²)
 # pour un champ de spin r quelconque courant:=proc(r);
    #Calcul des coefficients c(m,r)
     rec:=proc(R); # R correspond ici à r
      if R>1 then
         for A from 2 to R do
           f(m):=m*(h-m+1);
           init:=c(1)=0;
           eqn(1):=c(n+1)=c(m)+f(m);
           soln(1):=collect(rsolve({eqn(1),init},c(m)),m);
           eqn(A):=c(m+2)=c(m+1)+(m+1)*(h-m)*soln(A-1);
           soln(A):=collect(rsolve({eqn(A),init},c(m)),m);
         end do;
       elif R=1 then
         init:=c(1)=0;
         eqn(1):=c(m+1)=c(m)+f(m);
         soln(1):=collect(rsolve({eqn(1),init},c(m)),m);
       else
         soln(0):=1;
       fi;
     end proc ;

Z:=0;

# Calcul du produit des deux coefficients et d'autres termes
utiles par la suite
for s from 0 to r do
  for i from 0 to floor(s/2) do
    for j from 0 to floor((r-s)/2) do
      Z:=Z+1;
      cc(s,i,j):=eval(rec(i),m=s)*eval(rec(j),m=(r-s));  # produit
des deux coefficients
      Vcc[Z]:=cc(s,i,j);                                 # vecteur
contenant le produit des deux coefficients
      Vdphi[Z]:=s-2*i;                                   # vecteur
contenant la puissance des dérivées de phi
      Vdphiet[Z]:=r-s-2*j;                                #
vecteur contenant la puissance des dérivées de phi étoile
      Vbinom[Z]:=r!/(s!*(r-s)!);                         # vecteur
contenant les coefficients binomiaux
      Vmetriq[Z]:=i+j;                                   # vecteur
contenant la puissance de la métrique

     # suppression des entiers dans le vecteur contenant le
produit des deux coefficients car ils interviendront seulement
dans le premier terme du courant
     if type(Vcc[Z],integer) then
       Vcc[Z]:=0;
     fi;

    end do;
  end do;
```

```
end do;

for B from 1 to Z do

# vecteur contenant le produit des coefficients binomiaux par le
produit deux coefficients
Vccxbinom[B]:=Vcc[B]*Vbinom[B];

 for E from B+1 to Z do

  # vecteur rassemblant les coefficients liés aux mêmes puissances
des dérivées de phi et phi étoile
  if Vdphi[E]=Vdphi[B] and Vdphiet[E]=Vdphiet[B] then
    Vccxbinom[B]:=Vccxbinom[B]+Vbinom[E]*collect(Vcc[E],h);
    Vcc[E]:=0;
  fi;

 end do;

Vcc[B]:=0;

end do;

# rassemblement des termes ayant la même puissance de la métrique
for F from 1 to Z do
  for E from (F+1) to Z do
    if Vmetriq[F]=Vmetriq[E] then
      Vccxbinom[E]:=0;
    fi;
  end do;
end do;

# calcul du premier terme du courant n'ayant pas de coefficients
J:='phi'*(Q.D(dg))^r*conjugate('phi');

# calcul du courant en additionnant les termes un par un
for G from 1 to Z do

J:=J+Vccxbinom[G]*(Q^2/X^2)^Vmetriq[G]*'phi'*(Q.D(dg))^Vdphiet[G]*
conjugate('phi');
end do;

#affichage du courant
print('J(r)'=J);
end;
```

Annexe B

Premier article

Dans l'article [76] ci-après, deux fautes de frappe (parenthèses manquantes) se sont glissées dans les équations (3.27) et (3.28) :

$$\nabla^2 t_{\mu_1\ldots\mu_r}(x) \longleftrightarrow G^{BC}\,\mathcal{D}_B\,\mathcal{D}_C T_{A_1\ldots A_r}(X) \sim$$
$$\sim \left[\partial^2 - \frac{1}{X^2}\left((X\cdot\partial)\left(X\cdot\partial + D - 2\right) - r\right)\right] T_{A_1\ldots A_r}(X)$$

$$\partial^2\, T_{A_1\ldots A_r}(X) \longleftrightarrow \left[\nabla^2 \pm \frac{1}{R^2}\left(k\,(k + d - 1) - r\right)\right] t_{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\,.$$

Published for SISSA by Springer

Received: *August 27, 2010*
Revised: *November 5, 2010*
Accepted: *November 10, 2010*
Published: *November 24, 2010*

Higher spin interactions with scalar matter on constant curvature spacetimes: conserved current and cubic coupling generating functions

Xavier Bekaert and Elisa Meunier

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, Unité Mixte de Recherche 6083 *du CNRS, Fédération de Recherche* 2964 *Denis Poisson, Université François Rabelais, Parc de Grandmount, 37200 Tours, France*

E-mail: bekaert@lmpt.univ-tours.fr, elisa.meunier@lmpt.univ-tours.fr

Abstract: Cubic couplings between a complex scalar field and a tower of symmetric tensor gauge fields of all ranks are investigated on any constant curvature spacetime of dimension $d \geqslant 3$. Following Noether's method, the gauge fields interact with the scalar field via minimal coupling to the conserved currents. A symmetric conserved current, bilinear in the scalar field and containing up to r derivatives, is obtained for any rank $r \geqslant 1$ from its flat spacetime counterpart in dimension $d+1$, via a radial dimensional reduction valid precisely for the mass-square domain of unitarity in (anti) de Sitter spacetime of dimension d. The infinite collection of conserved currents and cubic vertices are summarized in a compact form by making use of generating functions and of the Weyl/Wigner quantization on constant curvature spaces.

Keywords: Gauge Symmetry, AdS-CFT Correspondence

ArXiv ePrint: 1007.4384

doi:10.1007/JHEP11(2010)116

JHEP11(2010)116

Contents

JHEP11(2010)116

1 Introduction

Principal bundles and Riemannian manifolds provide the right geometrical frameworks for describing the interactions between gauge fields with respective spin one and two. However, despite remarkable results on the interactions between higher spin gauge fields their underlying geometrical and physical first principles remain elusive. Although a higher-spin generalization of gravity is available through the frame-like formulation of Vasiliev (see e.g. [1–3] for some reviews) extending the Cartan-Weyl formulation of general relativity, the first principles analogous to the parallel transport and to the local affine covariance on the geometrical side, or to the gauge and equivalence principles on the physical side, still remain mysterious. The latter physical principles, underlying the low-spin interactions, are best displayed in the minimal couplings between matter and gauge fields, so higher-spin generalizations thereof might be a proper place to look for inspiration. Specifically, one will concentrate here on a toy model where matter is represented by a complex scalar field. This simplest example already proved to highlight most of the key features of the more intricate general couplings between fields of non-vanishing spins.

The Noether (i.e. minimal) cubic couplings between a complex scalar matter field and a collection of higher-spin tensor gauge fields have already been investigated in the metric-like formulation on Minkowski [4–7] and anti de Sitter [7–10] spacetimes (see also the recent work [11] in the frame-like formulation). The Noether cubic interaction between a complex scalar field and a tensor gauge field takes place through a symmetric current, quadratic in the scalar field and conserved at linearized level. By construction, such models are consistent from quadratic order in the gauge and matter fields up to cubic couplings of two scalar and the gauge fields. The present paper may be thought as a first step towards a complete generalization to any constant curvature spacetime of the results obtained in [6] on Minkowski spacetime. Our strategy is to derive the non-zero curvature formulas from the flat spacetime results by performing a so-called "radial dimensional reduction" [12] also called "ambient space formulation", i.e. by making use of the usual isometric embedding of (anti) de Sitter spacetime as a codimension one hyperboloid inside a flat auxilliary space. The basic idea goes back to an early work of Dirac [13]. In the late seventies, the ambient formulation had already been used by Fronsdal [14] in the context of higher-spin gauge theories and, by now, this technique has become standard and has found a large number of applications in this area (see e.g. [15–24]).

The plan of the paper is as follows: In order to be self contained, the framework presented in [6] (i.e. the various generating functions relevant for the Noether method in the case of gauge/matter couplings) is reviewed in section 2, but from a slightly more general viewpoint (allowing for curved background) suited to the present analysis. In the section 3, a dictionary between two formulations (the intrinsic and the ambient ones) of fields on non-zero constant-curvature spacetimes is provided. The treatment is uniform with respect to the signature and to the sign of the scalar curvature, in order to incorporate both (anti) de Sitter spacetimes and their Euclidean counterpart, i.e. hyperspheres (hyperbolic spaces). The infinite set of conserved currents bilinear in a free complex scalar field are presented in section 4. The corresponding Noether cubic vertex is given in section 5 and is written in a compact form by making use of Weyl/Wigner symbol calculus, which enables the explicit computation of the non-Abelian gauge symmetry deformation. In the last section 6, our main results are summarized. Some possible extensions thereof are also suggested and motivated. Eventually, the paper ends with an appendix where a technical proof is presented in details.

2 Noether method

Let $\mathcal{M}_d$ be a (pseudo) Riemannian manifold of dimension d endowed with a metric $g_{\mu\nu}$ (Minuscule Greek indices $\mu, \nu, \ldots$ will take d values and they will be lowered or raised via the metric or its inverse) and its associated Levi-Civita connection ∇_μ.

A *symmetric conserved current* of rank $r \geqslant 1$ is a real contravariant symmetric tensor field $j^{\mu_1 \cdots \mu_r}(x)$ on $\mathcal{M}_d$ obeying to the conservation law

$$\nabla_{\mu_1} j^{\mu_1 \cdots \mu_r}(x) \approx 0\,. \tag{2.1}$$

where the "weak equality" symbol $\approx$ stands for "equal on-mass-shell," i.e. modulo terms proportional to the Euler-Lagrange equations. A *generating function of conserved currents* is a real function $j(x,p)$ on the phase space $T^*\mathcal{M}_d$ which is (i) a formal power series in the momenta and (ii) such that

$$\left(\nabla_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu}\right) j(x,p) \approx 0\,. \tag{2.2}$$

This terminology follows from the fact that all the coefficients of order $r \geqslant 1$ in the power expansion of the generating function

$$j(x,p) \;=\; \sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{r!}\, j^{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\, p_{\mu_1}\ldots p_{\mu_r} \tag{2.3}$$

are all symmetric conserved currents by means of (2.2).

A *symmetric tensor gauge field* of rank $r \geqslant 1$ is a real covariant symmetric tensor field $h_{\mu_1\ldots\mu_r}(x)$ on $\mathcal{M}_d$ whose gauge transformations are of the form [14]

$$\delta_\varepsilon h_{\mu_1\ldots\mu_r}(x) \;=\; r\,\nabla_{(\mu_1}\varepsilon_{\mu_2\ldots\mu_r)}(x) \;+\; \mathcal{O}(h)\,, \tag{2.4}$$

where the gauge parameter $\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_{r-1}}(x)$ is a covariant symmetric tensor field of rank $r-1$, the round bracket denotes complete symmetrization with weight one, i.e. $h_{(\mu_1\ldots\mu_r)} = h_{\mu_1\ldots\mu_r}$ (remark: the tensor is symmetric by hypothesis) and $\mathcal{O}(h)$ stands for terms of order one or more in the gauge fields. For lower ranks $r = 1$ or 2, the transformation (2.4) either corresponds to the U(1) gauge transformation of the vector ($r = 1$) gauge field or to the linearized diffeomorphisms of the metric ($r = 2$). By comparison with the spin-two case, this formulation of higher-spin gauge fields is often called "metric-like" (in order to draw the distinction with the "frame-like" version where the gauge field is not completely symmetric). A *generating function of gauge fields* is a real function $h(x,v)$ on the configuration space $T\mathcal{M}_d$ (i) which is a formal power series in the velocities and (ii) whose gauge transformations are

$$\delta_\varepsilon h(x,v) \;=\; (v^\mu\nabla_\mu)\,\varepsilon(x,v) \;+\; \mathcal{O}(h)\,, \tag{2.5}$$

where $\varepsilon(x,v)$ is also a formal power series in the velocities. The nomenclature follows from the fact that all the coefficients of order $r \geqslant 1$ in the power expansion of the generating function

$$h(x,v) \;=\; \sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{r!}\, h_{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\, v^{\mu_1}\ldots v^{\mu_r} \tag{2.6}$$

are all symmetric tensor gauge fields due to (2.5) with

$$\varepsilon(x,v) \;=\; \sum_{t\geqslant 0} \frac{1}{t!}\, \varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_t}(x)\, v^{\mu_1}\ldots v^{\mu_t}\,. \tag{2.7}$$

In the context of Noether couplings, the "velocities" v^μ and "momenta" p_ν are interpreted as mere auxiliary variables and can be assumed to be dimensionless. Let us

introduce a non-degenerate bilinear pairing $\ll \| \gg$ between smooth functions $h(x,v)$ and $j(x,p)$ on the configuration and phase spaces respectively,

$$\ll h \,\|\, j \gg := \int_{\mathcal{M}_d} d^d x \,\sqrt{|\,g|}\, \exp\left(\frac{\partial}{\partial v^\mu}\,\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right) h(x,v)\, j(x,p)\Big|_{v=p=0} . \tag{2.8}$$

If j and h are (formal) power series of the form (2.3) and (2.6) then the pairing (2.8) can be interpreted as the series

$$\ll h \,\|\, j \gg = \sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{r!} \int_{\mathcal{M}_d} d^d x \,\sqrt{|\,g|}\; h_{\mu_1\dots\mu_r}(x)\, j^{\,\mu_1\dots\mu_r}(x)\,. \tag{2.9}$$

Let us denote by $\ddagger$ the adjoint operation for the pairing (2.8) in the sense that

$$\ll \hat{O}\, h \,\|\, j \gg = \ll h \,\|\, \hat{O}^\ddagger\, j \gg , \tag{2.10}$$

where $\hat{\hat{O}}$ is an operator acting on the vector space of functions on configuration space (the double hat stands for "second quantization" in the sense that the operator acts on symbols of "first quantized" observables). Notice that $(v^\mu)^\ddagger = \partial/\partial p_\mu$ and $\nabla_\mu^\ddagger = -\nabla_\mu$ imply the useful relation

$$(v^\mu\, \nabla_\mu)^\ddagger \;=\; -\left(\nabla_\mu\, \frac{\partial}{\partial p_\mu}\right). \tag{2.11}$$

The *matter action* is a functional $S_0[\phi]$ of some matter fields collectively denoted by ϕ. The Euler-Lagrange equations of these matter fields is such that there exists some conserved current $j^{\mu_1\dots\mu_r}[\,\phi(x)\,]$. The Noether method for introducing interactions is essentially the "minimal" coupling between a gauge field $h_{\mu_1\dots\mu_r}(x)$ and a conserved current $j^{\mu_1\dots\mu_r}[\,\phi(x)\,]$ of the same rank. Accordingly, the *Noether interaction* between gauge fields and conserved currents is the functional defined as the pairing between their generating functions

$$S_1[\phi,h] \;:=\; \ll h \,\|\, j \gg \;=\; \sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{r!} \int_{\mathcal{M}_d} d^d x \,\sqrt{|\,g|}\; h_{\mu_1\dots\mu_r}(x)\, j^{\mu_1\dots\mu_r}(x)\,, \tag{2.12}$$

where (2.9) has been used. Let us assume that there exists a gauge invariant action $S[\phi,h]$ whose power expansion in the gauge fields starts as follows

$$S\,[\phi,h] \;=\; S_0[\phi] \;+\; S_1[\phi,h] \;+\; S_2[\phi,h] \;+\; \mathcal{O}(h^3)\,. \tag{2.13}$$

The gauge variation of the Noether interaction (2.12) under (2.5),

$$\delta_\varepsilon S_1[\phi,h] \;=\ll \delta_\varepsilon h \,\|\, j \gg \;+\mathcal{O}(h)\,, \tag{2.14}$$

is at least of order one in the gauge fields when the equations of motion for the matter sector are obeyed,

$$\delta_\varepsilon S_1[\phi,h] \;\approx\; \mathcal{O}(h)\,, \tag{2.15}$$

because the properties (2.2) and (2.11) imply that

$$\ll \left(v^\mu \nabla_\mu\right) \varepsilon \,\|\, j \gg = \;-\; \ll \varepsilon \,\|\, \left(\nabla_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu}\right) j \gg \;\approx\; 0\,. \tag{2.16}$$

Actually, the crucial property (2.15) works term by term since

$$\int_{\mathcal{M}_d} d^dx\,\sqrt{|\,g|}\;\nabla_{\mu_1}\varepsilon_{\mu_2\ldots\mu_r}(x)\,j^{\mu_1\ldots\mu_r}(x)$$
$$= -\int_{\mathcal{M}_d} d^dx\,\sqrt{|\,g|}\;\varepsilon_{\mu_2\ldots\mu_r}(x)\,\nabla_{\mu_1}j^{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\;\approx\;0\,. \tag{2.17}$$

The equation (2.15) implies that the action (2.13) might indeed be gauge-invariant at lowest order in the gauge fields because the terms in $\delta_\varepsilon S_1[\phi,h]$ that are proportional to the Euler-Lagrange equations $\delta S_0/\delta\phi$ of the matter sector could be compensated by the variation $\delta_\varepsilon S_0[\phi]$ of the matter action under a gauge transformation $\delta_\varepsilon\phi$ of the matter fields, independent of the gauge fields h and linear in the matter fields ϕ, such that

$$\delta_\varepsilon\Big(\,S_0[\phi]+S_1[\phi,h]\,\Big)\;=\;\mathcal{O}(h)\,. \tag{2.18}$$

This possibility will be assumed from now on.

A *Killing tensor field* of rank $r-1\geqslant 0$ on $\mathcal{M}_d$ is a real covariant symmetric tensor field $\overline{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_{r-1}}(x)$ solution of the generalized Killing equation

$$\nabla_{(\mu_1}\overline{\varepsilon}_{\mu_2\ldots\mu_r)}(x)=0\,. \tag{2.19}$$

A *generating function of Killing fields* is a function $\overline{\varepsilon}(x,v)$ on the configuration space $T\mathcal{M}_d$ which is (i) a formal power series in the velocities and (ii) such that $(v^\mu\nabla_\mu)\overline{\varepsilon}(x,v)=0$. Then the coefficients in the power series

$$\overline{\varepsilon}(x,v)\;=\;\sum_{t\geqslant 0}\frac{1}{t!}\,\overline{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_t}(x)\,v^{\mu_1}\ldots v^{\mu_t} \tag{2.20}$$

are all Killing tensor fields on $\mathcal{M}_d$. The variation (2.4) of the gauge field vanishes at lowest order if the gauge parameter is a Killing tensor field. Therefore the corresponding transformation $\delta_{\overline{\varepsilon}}\phi$ of the matter fields is a rigid symmetry of the matter action $S_0[\phi]$:

$$\delta_{\overline{\varepsilon}}S_0[\phi]=-\,\delta_{\overline{\varepsilon}}S_1[\phi,h]\,\big|_{h=0}=0\,, \tag{2.21}$$

due to (2.18) and the fact that $\delta_\varepsilon\phi$ is independent of the gauge fields. In turn, this shows that the conserved current $j^{\mu_1\ldots\mu_r}[\,\phi(x)\,]$ must be equal, on-shell and modulo a trivial conserved current (sometimes called an "improvement"), to the Noether current associated with the latter rigid symmetry $\delta_{\overline{\varepsilon}}\phi$ of the matter action $S_0[\phi]$. Killing tensor fields on constant curvature spacetimes and their link with higher-spin gauge theories were discussed in more details in [25, 26] and references therein.

3 Ambient *versus* intrinsic formulations

3.1 Constant curvature manifolds

Let $\mathbb{R}^D$ be the flat space of dimension $D\geqslant 4$ parametrized by Cartesian coordinates X^A (Capital Latin indices $A,B,\ldots$ will span D values) and endowed with a non-degenerate

diagonal metric η_{AB} that will be used to raise and lower Capital Latin indices. It will be called the *ambient* space. The inner product will be denoted as $X \cdot Y := \eta_{AB} X^A Y^B$ (and $X^2 := \eta_{AB} X^A X^B$). Let $\mathcal{M}_d$ be the non-degenerate quadric of dimension $d := D - 1$ defined by the equation $X^2 = \pm R^2$, where $R \neq 0$ is its curvature radius. The sign is fixed in the previous expression, but the $\pm$ has been included to deal with both cases at once. From now on, the $\pm$ and $\mp$ symbols in the subsequent formulae will always correspond to this respective choice of sign. For instance, the (pseudo) Riemannian manifold $\mathcal{M}_d$ has constant scalar curvature equal to $\mathcal{R} = \pm d(d-1)/R^2$.

Let us denote by x^μ a set of coordinates on $\mathcal{M}_d$ with length dimension (in the sense that they scale in the same way as the Cartesian coordinates X^A). They will be called *intrinsic* coordinates. One considers an isometric smooth embedding

$$i : \mathcal{M}_d \hookrightarrow \mathbb{R}_0^D : x^\mu \longmapsto X^A(x^\mu) \tag{3.1}$$

of the codimension-one quadric $\mathcal{M}_d$ inside the open submanifold $\mathbb{R}_0^D \subset \mathbb{R}^D$ defined by

$$\mathbb{R}_0^D := \{ X^A \in \mathbb{R}^D : \pm X^2 > 0 \}. \tag{3.2}$$

The (pseudo) "spherical" coordinates (ρ, y^μ) collect the "radial" coordinate $\rho := \sqrt{\pm X^2}$ together with the dimensionless "angular" coordinates $y^\mu (:= x^\mu/R)$ of the radial projection of the given point of $\mathbb{R}_0^D$ on $X^2 = \pm 1$. This coordinate system covers the manifold $\mathbb{R}_0^D$. The submanifold $\mathcal{M}_d \subset \mathbb{R}_0^D$ is simply the locus such that $\rho = R$.

3.2 Tensor fields

Let $\mathcal{X}_r(\mathcal{M}_d)$ denote the space of smooth rank-r covariant tensor fields $t_{\mu_1 \ldots \mu_r}(x)$ on $\mathcal{M}_d$ and $\mathcal{X}_r(\mathbb{R}_0^D)$ the space of smooth rank-r covariant tensor fields $T_{A_1 \ldots A_r}(X)$ on $\mathbb{R}_0^D$, both with values in $\mathbb{R}$ (or $\mathbb{C}$ in general). The pull-back

$$\begin{aligned} i^* : \quad & \mathcal{X}_r(\mathbb{R}_0^D) \to \mathcal{X}_r(\mathcal{M}_d) \\ : \quad & T_{A_1 \ldots A_r}(X) \longmapsto t_{\mu_1 \ldots \mu_r}(x) = \frac{\partial X^{A_1}(x)}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial X^{A_r}(x)}{\partial x^{\mu_r}} T_{A_1 \ldots A_r}(X(x)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

is surjective but not injective. However, there exists a nice isomorphism between the space $\mathcal{X}_r(\mathcal{M}_d)$ of rank-r tensor fields on $\mathcal{M}_d$ and the subspace of rank-r tensor on $\mathbb{R}_0^D$ that are:

(i) *homogeneous* of fixed non-zero homogeneity degree (say $k \in \mathbb{C}_0$),

$$T_{A_1 \ldots A_r}(\lambda X) = \lambda^k T_{A_1 \ldots A_r}(X), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}_0. \tag{3.4}$$

(ii) *tangent* to the constant ρ submanifolds, i.e.

$$X^{A_i} T_{A_1 \ldots A_i \ldots A_r}(X) = 0 \tag{3.5}$$

This isomorphism was explained in details by Fronsdal in [14] but one may review the construction as follows:

The condition (i) is best understood for scalar fields ($r = 0$) since the condition (ii) is absent. On the one hand, the restriction to $\mathcal{M}_d$ maps any function $\Phi(X)$ on $\mathbb{R}^D_0$ to the function on $\mathcal{M}_d$ given by[1]

$$\phi(y^\mu) \,=\, \Phi(\rho, y^\mu)|_{\rho=R} \,=\, \Phi(R,\, y^\mu) \,=\, \Phi(X^A)|_{X^2=R^2}\,. \tag{3.6}$$

On the other hand, to any function $\phi(x)$ on $\mathcal{M}_d$ one may associate a homogeneous function $\Phi(X)$ of degree k on $\mathbb{R}^D_0$ given by

$$\Phi(X^A) \,=\, \Phi(\rho,\, y^\mu) \,=\, \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \Phi\,(R,\, y^\mu) \,=\, \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \phi\,(y^\mu)\,, \tag{3.7}$$

whose restriction on $\mathcal{M}_d$ reproduces $\phi(y)$ as in (3.6). This function $\Phi(X)$ is indeed of homogeneity degree k in X (or in ρ),

$$\Phi(\lambda X) \,=\, \lambda^k\, \Phi(X)\,, \tag{3.8}$$

since $X'^A \,=\, \lambda X^A$ is equivalent to $\rho' \,=\, \lambda\rho$ and $y'^\mu \,=\, y^\mu$ (because the dimensionless angular coordinates do not scale with respect to the Cartesian coordinates X^A). The fancy terminology "radial dimenional reduction" [12] comes from the analogy of (3.7) with a usual dimensional reduction ansatz along the direction parametrized by $z := \log(\rho/R)$ since then $\Phi(X^A) \,=\, \exp(kz)\,\phi(y^\mu)$ looks like a Fourier mode ansatz (when k is pure imaginary). More comments on this point will be made further below.

The condition (ii) takes into account the projection of the components of the ambient tensor $T_{A_1\ldots A_r}(X)$ on the coordinate basis $\partial/\partial x^\mu$ on each tangent space through the pull-back formula (3.3). The standard condition

$$\frac{\partial X}{\partial x^\mu} \,\cdot\, X \,=\, 0 \tag{3.9}$$

implies that the kernel of the pull-back (3.3) for ambient vector fields $V^A(X)$ is spanned by the radial vector fields, i.e. such that $V^A(X) = X^A\Phi(X)$. Therefore, the space of tangent tensors $t_{\mu_1\ldots\mu_r}(x) \in T^*_q\mathcal{M}_d$ at a point $q \in \mathcal{M}_d$ of Cartesian coordinates X^A is isomorphic to the space of ambient tensors $T_{A_1\ldots A_r}(X) \in T^*_q\mathbb{R}^D_0$ that are tangent to $\mathcal{M}_d$ at the same point $q \in \mathcal{M}_d \subset \mathbb{R}^D_0$ or, equivalently, that are are normal to the radial direction, i.e. they satisfy to (3.5).

The operator of orthogonal projection of ambient vectors on the tangent bundle $T\mathcal{M}_d$ is equal to

$$\mathcal{P}^B_A \,=\, \delta^B_A \,-\, \frac{X_A X^B}{X^2} \tag{3.10}$$

where δ^B_A is the Kronecker delta. Indeed,

$$(\mathcal{P}V)^A \,=\, V^A \,-\, \frac{X\cdot V}{X^2}\, X^A\,, \qquad X\cdot(\mathcal{P}V) = 0\,. \tag{3.11}$$

[1] With a slight abuse of notation, we denote by $\Phi(\rho, x^\mu)$ the pull-back $\Phi\left(X^A(\rho, x^\mu)\right)$. Moreover, in the sequel we will also frequently denote by $\phi(x^\mu)$ the function $\phi\left(y^\mu(x)\right)$.

More generally,

$$(\mathcal{P}T)_{A_1\dots A_r} := \mathcal{P}^{B_1}_{A_1}\,\dots\,\mathcal{P}^{B_r}_{A_r}\,T_{B_1\dots B_r}\,, \qquad X^{A_i}(\mathcal{P}T)_{A_1\dots A_i\dots A_r} = 0 \tag{3.12}$$

From now, all tensors will always be completely symmetric under the permutations of indices. The leitmotiv of the present paper is to realize the space of symmetric tensor fields on $\mathcal{M}_d$ as a (sub)space of homogeneous symmetric tensor fields on $\mathbb{R}^D_0$. However, three distinct but equivalent realizations prove to be useful: either the ambient tensors are

1. required to fulfill the condition $X^{A_1}\,T_{A_1\dots A_r}(X) = 0$, or
2. projected by hand via the projector $\mathcal{P}$, or
3. seen as equivalence classes of the relation

$$T_{A_1\dots A_r} \sim T_{A_1\dots A_r} + X_{(A_1}U_{A_2\dots A_r)}\,. \tag{3.13}$$

Obviously, the first and second realization are equivalent to each other. The third realization is equivalent to the previous ones because the latter merely correspond to a particular choice of representative.

An important example is the induced metric, i.e. the pull-back of the flat metric η_{AB} which reads in intrinsic coordinates as

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial X^A}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial X^B}{\partial x^\nu}\,\eta_{AB} = \frac{\partial X}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial X}{\partial x^\nu}\,, \tag{3.14}$$

which will be used to raise and lower the minuscule Greek indices. The induced metric can be represented by the ambient tensor

$$G_{AB} = \mathcal{P}^C_A\,\mathcal{P}^D_B\,\eta_{CD} = \eta_{AB} - \frac{X_A X_B}{X^2} \tag{3.15}$$

which is in the image of the projection operator $\mathcal{P}$ and obeys to the transversality condition $X^A G_{AB} = 0$. Notice that the ambient tensor G_{AB} representing the induced metric $g_{\mu\nu}$ is in the same equivalence class as the ambient metric, $G_{AB} \sim \eta_{AB}$, as it should. Moreover, $G^B_A = \mathcal{P}^B_A$.

3.3 Covariant derivatives

The main technical difficulty in the ambient formulation is the translation of ambient partial derivatives ∂_A in terms of intrinsic covariant derivatives. In order to overcome this obstacle, a generating function performing the translation rule is provided in this subsection.

Let ∇_μ be the covariant derivative corresponding to the Levi-Civita connection on the (pseudo) Riemannian manifold $\mathcal{M}_d$. Its representative $\mathcal{D}$ in the ambient space $\mathbb{R}^D_0$ is the operator

$$\mathcal{D} = \mathcal{P}\circ\partial\circ\mathcal{P}\,. \tag{3.16}$$

A similar formulation of the covariant derivative in terms of the ambient partial derivative has been used in [15, 16]. For instance, the covariant derivative $\nabla_\mu v_\nu$ of a vector field v_μ on $\mathcal{M}_d \subset \mathbb{R}^D_0$ is represented in ambient space as

$$\mathcal{D}_A V_B := \mathcal{P}^C_A\,\mathcal{P}^D_B\,\partial_C(\mathcal{P}^E_D\,V_E) \tag{3.17}$$

JHEP11(2010)116

Geometrically, the definition (3.17) means that the infinitesimal parallel transportation of a vector field v_μ on $\mathcal{M}_d$ can be performed in ambient space in three steps as follows: firstly, project on the tangent bundle $T\mathcal{M}_d$ its ambient representative V_A; secondly, infinitesimal parallel transport the resulting vector with respect to the ambient space metric; finally, project again the result on $T\mathcal{M}_d$. Algebraically, the first step is the projection (3.11), the second step is the mere partial derivation ∂_C, so that the third step indeed gives (3.17). One may prove algebraically that the definition (3.16) indeed implements the unique Levi-Civita connection ∇ on $\mathcal{M}_d$ by checking that $\mathcal{D}$ verifies the following three axioms:

- Leibnitz rule:

$$\mathcal{D}_A(\Phi_1\,\Phi_2) \;=\; (\mathcal{D}_A\Phi_1)\Phi_2 + \Phi_1\mathcal{D}_A\Phi_2 \;\leftrightarrow\; \nabla_\mu(\phi_1\phi_2) = (\nabla_\mu\phi_1)\phi_2 + \phi_1\nabla_\mu\phi_2\,, \tag{3.18}$$

- Metricity: $\mathcal{D}_A\,G_{BC} \;=\; 0 \;\leftrightarrow\; \nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0\,,$

- Torsionlessness: $[\mathcal{D}_A,\mathcal{D}_B]\Phi \;=\; 0 \;\leftrightarrow\; [\nabla_\mu,\nabla_\nu]\phi = 0\,.$

More concretely, the definition (3.16) reads in components as

$$\mathcal{D}_A T_{B_1\ldots B_r} \;:=\; \mathcal{P}_A^C\,\mathcal{P}_{B_1}^{D_1}\ldots\mathcal{P}_{B_r}^{D_r}\,\partial_C\big(\mathcal{P}_{D_1}^{E_1}\,\ldots\,\mathcal{P}_{D_r}^{E_r}\,T_{E_1\ldots E_r}\big) \tag{3.19}$$

where the definition (3.12) of the projector $\mathcal{P}$ was used. Although this formula provides a nice way to compute covariant derivatives via mere partial derivations in ambient space, the intermediate projections quickly become cumbersome when the rank of the tensor or the number of derivatives becomes large. Fortunately, it is possible to obtain an explicit formula relating the usual partial derivatives in ambient space to the symmetrized covariant derivatives.

In order to express general formulae in compact terms, a standard trick is to contract every index with an auxiliary vector, say P^A:

$$\begin{aligned} T(X,P) \;&=\; P^{A_1}\ldots P^{A_r}\,T_{A_1\ldots A_r}(X)\,,\\ (P\cdot\partial)^n \;&=\; P^{A_1}\ldots P^{A_n}\,\partial_{A_1}\ldots\partial_{A_n}\,,\\ (P\cdot\mathcal{D})^n \;&=\; P^{A_1}\ldots P^{A_n}\mathcal{D}_{(A_1}\ldots\mathcal{D}_{A_n)}\,,\\ P^2 \;&=\; P^A P^B\,\eta_{AB}\,. \end{aligned} \tag{3.20}$$

One may express recursively the powers of ambient partial derivatives ∂ like polynomials of the covariant derivatives $\mathcal{D}$ and the flat metric:

$$(P\cdot\partial)^n\,T(X,P) \;=\; \sum_{m=0}^{[n/2]} c_n^m\left(\frac{P^2}{X^2}\right)^m\,(P\cdot\mathcal{D})^{n-2m}\,T(X,P) \tag{3.21}$$

where $[q]$ is the integer part of the rational number q and the coefficients c_n^m should be determined. The dependence of these coefficients c_n^m on the homogeneity degree k in X and r in P will be left implicit for not overloading the formulae. Notice that, by hypothesis, $c_n^m \;=\; 0$ when $m \;\geqslant\; (n+1)/2$ and $c_n^0 \;=\; 1$ for all $n \in \mathbb{N}$. The equation (3.21) amounts

to the following dictionary between ambient partial derivatives and intrinsic symmetrized covariant derivatives

$$\partial_{(A_1}\dots\partial_{A_n}T_{A_{n+1}\dots A_{r+n})}\;\longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow\;\sum_{m=0}^{[n/2]}c_n^m\left(\frac{\pm1}{R^2}\right)^m g_{(\mu_1\mu_2}\dots g_{\mu_{2m-1}\mu_{2m}}\,\nabla_{\mu_{2m+1}}\dots\nabla_{\mu_n}\,t_{\mu_{n+1}\dots\mu_{r+n})}\,. \qquad (3.22)$$

In appendix, one shows that the function (analytic near the origin)

$$c(x,y;k-r)\;=\;\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{1}{n!}\,c_n^m\,x^{n-2m}\,y^m\;=\;(1\,+\,y)^{\frac{k-r}{2}}\,\exp\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\,\arctan\sqrt{y}\right) \qquad (3.23)$$

is a generating function for the c_n^m coefficients. The non-vanishing coefficients for $m < (n+1)/2$ can be written explicitly by identifying the relevant coefficients in the power expansion (given for $r=0$):

$$c_n^m\;=\;\sum_{i_{n-2m}=0}^{m}\;\sum_{i_{n-2m-1}=0}^{i_{n-2m}}\dots\sum_{i_1=0}^{i_2}\frac{1}{(m-i_{n-2m})!}\left(\frac{k}{2}\right)\left(\frac{k}{2}-1\right)\dots\left(\frac{k}{2}-m+i_{n-2m}+1\right)\times$$
$$\times\frac{n!}{(n-2m)!}\,\frac{(-1)^{i_{n-2m}}}{(2\,i_1\,+\,1)\;(2\,(i_2-i_1)+1)\;\dots\;(2\,(i_{n-2m}-i_{n-2m-1})\,+\,1)}\,.$$

For instance, the first coefficients are

$$\begin{array}{llll} c_0^0\,=\,1\,, & & & \\ c_1^0\,=\,1\,, & & & \\ c_2^0\,=\,1\,, & c_2^1\,=\,k\,, & & \\ c_3^0\,=\,1\,, & c_3^1\,=\,3k\,-\,2\,, & & \\ c_4^0\,=\,1\,, & c_4^1\,=\,2\,(3k\,-\,4)\,, & c_4^2\,=\,3k\,(k\,-\,2)\,, & \\ \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

Therefore (3.22) provides, for instance, the following translation rules:

$$\begin{aligned} \partial_A\Phi\;&\longleftrightarrow\;\nabla_\mu\,\phi \\ \partial_A\,\partial_B\Phi\;&\longleftrightarrow\;\nabla_{(\mu}\,\nabla_{\nu)}\phi\,\pm\,\frac{k}{R^2}\,g_{\mu\nu}\,\phi \\ \partial_A\,\partial_B\partial_C\Phi\;&\longleftrightarrow\;\nabla_{(\mu}\,\nabla_\nu\nabla_{\rho)}\,\phi\,\pm\,\frac{3k-2}{R^2}\,g_{(\mu\nu}\,\nabla_{\rho)}\phi \\ \partial_A\,\partial_B\partial_C\partial_D\Phi\;&\longleftrightarrow\;\nabla_{(\mu}\,\nabla_\nu\nabla_\rho\nabla_{\sigma)}\,\phi\;\pm\,\frac{2\,(3k-4)}{R^2}\,g_{(\mu\nu}\,\nabla_\rho\nabla_{\sigma)}\phi \\ &\qquad\qquad+\,\frac{3k\,(k-2)}{R^4}\,g_{(\mu\nu}\,g_{\rho\sigma)}\,\phi \\ &\qquad\vdots \end{aligned} \qquad (3.24)$$

Notice that a most compact and useful way to summarize (3.21) is as

$$T(X\,+\,t\,P\,,\,P)\;=\;c(t\,P\cdot\mathcal{D}\,,\,t^2\,P^2/X^2\,;\,k-r)\,T(X,P)\,,\qquad\forall t\,, \qquad (3.25)$$

as can be seen from the Taylor expansion of

$$T(X+tP,P) = \exp(t\,P\cdot\partial)T(X,P) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\,(P\cdot\partial)^n T(X,P) \tag{3.26}$$

in power series of t.

3.4 Laplace-Beltrami operators

Combining the definitions (3.15) and (3.16) of the last two subsections, one finds that the Laplace-Beltrami operator $\nabla^2 \;=\; g^{\mu\nu}\,\nabla_\mu\,\nabla_\nu$ is represented in ambient space by $G^{AB}\,\mathcal{D}_A\,\mathcal{D}_B$. On rank-$r$ symmetric tensor fields, it acts as follows

$$\begin{aligned}\nabla^2 t_{\mu_1\ldots\mu_r}(x) \longleftrightarrow\; & G^{BC}\,\mathcal{D}_B\,\mathcal{D}_C T_{A_1\ldots A_r}(X) \sim \\ & \sim \left[\partial^2 \;-\; \frac{1}{X^2}\,(X\cdot\partial)\,(X\cdot\partial \;+\; D \;-\; 2 \;-\; r)\right] T_{A_1\ldots A_r}(X)\end{aligned} \tag{3.27}$$

as can be checked explicitly. Therefore, the action of the ambient Laplace-Beltrami operator $\partial^2 = \eta^{AB}\partial_A\partial_B$ on ambient symmetric tensor fields of homogeneity degree k is translated in intrinsic components as follows

$$\partial^2\,T_{A_1\ldots A_r}(X) \;\longleftrightarrow\; \left[\nabla^2 \;\pm\; \frac{1}{R^2}\,k\,(k \;+\; d \;-\; 1 \;-\; r)\right] t_{\mu_1\ldots\mu_r}(x)\,. \tag{3.28}$$

For scalar fields ($r = 0$), one recovers the standard formulae for the eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator for the "spherical" harmonics in any dimension. In particular, when the number of timelike directions in the signature of the ambient metric η is equal to:

- Zero (Euclidean), the quadric $X^2 = R^2$ is a hypersphere, $\mathcal{M}_d = S^d$, which can be seen as the Wick rotation of the de Sitter spacetime space dS_d. A textbook material on group theory is the fact that the genuine spherical harmonics with fixed homogeneity,

$$k_{S^d} = \ell \in \mathbb{N}\,, \tag{3.29}$$

  span unitary irreducible representations of $\mathfrak{o}\,(d{+}1)$. These spherical harmonics are the evaluation $\phi(x)$ on S^d of homogeneous harmonic polynomials $\Phi(X)$ such that (3.7),

$$\partial^2\,\Phi(X) \;=\; 0 \;\longleftrightarrow\; \left[\Delta_{S^d} \;+\; \frac{1}{R^2}\,\ell\,(\ell \;+\; d \;-\; 1)\right] \phi(x) \;=\; 0\,. \tag{3.30}$$

- One (Lorentzian), the one-sheeted hyperboloid $X^2 = +R^2$ is the de Sitter spacetime, $\mathcal{M}_d \;=\; dS_d$, while the two-sheeted hyperboloid $X^2 \;=\; -R^2$ is (two copies of) the hyperbolic space, $\mathcal{M}_d = H^d$. The unitary irreducible representations of $\mathfrak{o}\,(1,d)$ corresponding to massive scalar fields have been studied a while ago in [27] and belong to the principal continuous series. They can be realized as the evaluation $\phi(x)$ on dS_d of homogeneous harmonic functions $\Phi(X)$ of complex homogeneity degree $k_{dS_d} \in \mathbb{C}$ such that

$$\mathrm{Re}(k_{dS_d}) \;=\; 1 \;-\; \frac{D}{2} \;=\; \frac{1-d}{2}\,, \qquad \mathrm{Im}\,(k_{dS_d}) \;=\; \mu\,, \tag{3.31}$$

where μ is a parameter with mass dimension. This implies that the wave equation reads as

$$\partial^2 \Phi(X) \,=\, 0 \longleftrightarrow \left[\nabla^2_{dS_d} \,-\, \frac{1}{R^2}\left(\left(\frac{d\,-\,1}{2}\right)^2 \,+\, \mu^2\right)\right] \phi(x) \,=\, 0\,. \qquad (3.32)$$

- Two (Conformal), the one-sheeted hyperboloid $X^2 = -R^2$ is the anti de Sitter space-time, $\mathcal{M}_d = AdS_d$, whose Wick rotation is the previous (two copies of the) hyperbolic space H^d. The lowest weight unitary irreducible representations of $\mathfrak{o}\,(2, d-1)$ corresponding to massive scalar fields on (the universal covering of) AdS_d with energy bounded from below are well known (see e.g. [28] for a nice review). They can be realized as the evaluation $\phi(x)$ on AdS_d of homogeneous harmonic functions $\Phi(X)$ of real homogeneity degree $k_{AdS_d} \in \mathbb{R}$ such that

$$k_{AdS_d} \,=\, 1 \,-\, \frac{D}{2} \,+\mu \,=\, \frac{1-d}{2} \,+\, \mu\,. \qquad (3.33)$$

In any case, the corresponding wave equation is

$$\partial^2 \Phi(X) \,=\, 0 \longleftrightarrow \left[\nabla^2_{AdS_d} \,+\, \frac{1}{R^2}\left(\left(\frac{d\,-\,1}{2}\right)^2 \,-\, \mu^2\right)\right] \phi(x) \,=\, 0\,. \qquad (3.34)$$

To summarize, the wave equation for a unitary massive scalar field on $(A)dS_d$ is

$$\nabla^2_{(A)dS_d}\phi(x) \,=\, \frac{1}{R^2}\left(\pm\left(\frac{d\,-\,1}{2}\right)^2 \,+\, \mu^2\right) \phi(x) \,=\, m^2\,\phi(x)\,, \qquad (3.35)$$

where, as mentioned before the $\pm$ symbol refers to the corresponding equation $X^2 = \pm R^2$. Thus the unitary bound on the "mass square" (or, better, the eigenvalue of the quadratic Casimir operator of the isometry algebra) of a scalar field on $(A)dS_d$ is determined by the inequality

$$(mR)^2 \,:=\, \pm\left(\frac{d\,-\,1}{2}\right)^2 \,+\, \mu^2 \,\geqslant\, \pm\left(\frac{d\,-\,1}{2}\right)^2\,, \qquad (3.36)$$

which reproduces the Breitenlohner-Freedman bound [29] in the AdS_d case where (naive) "tachyonic" fields may be unitary and stable. As one can see, the massive scalar field on AdS_d may be obtained as the analytic continuation of the massive scalar fields on dS_d where μ (and R) is replaced by $-i\mu$ (and $-iR$).

For later purpose, let us denote the ambient scalar field $\Phi^\dagger(X)$ as being the function on $\mathbb{R}^D_0$ whose homogeneity degree $k^\dagger_{(A)dS_d}$ is equal to $k_{(A)dS_d}$ up to the substitution of μ by $-\mu$ in (3.31) or (3.33) respectively, and whose evaluation on $(A)dS_d$ is equal to $\phi^*(y)$, i.e.

$$\Phi^\dagger(X^A) \,=\, \Phi^\dagger(\rho,\, y^\mu) \,=\, \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k^\dagger} \phi^*(y^\mu)\,. \qquad (3.37)$$

This homogeneous function $\Phi^\dagger(X)$ is also harmonic and the complex conjugate $\phi^*(x)$ satisfies to the same wave equation (3.35). A compact way to summarize the respective

Object	Ambient space $\mathbb{R}_0^D$	Constant-curvature spacetime $\mathcal{M}_d$
Coordinates	X^A	x^μ
Scalar	$\Phi(X)$	$\phi(x)$
Conjugate	$\Phi^\dagger(X)$	$\phi^*(x)$
Vector	$T_A(X)$	$t_\mu(x)$
Tensor	$T_{A_1\dots A_r}(X)$	$t_{\mu_1\dots\mu_r}(x)$
Metric	$G_{AB} \sim \eta_{AB}$	$g_{\mu\nu}$
Covariant derivative	$\mathcal{D}_A$	∇_μ
Spacetime Laplacian	$\mathcal{D}^2 = G^{AB}\mathcal{D}_A\mathcal{D}_B$	$\nabla^2 = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$
Ambient Laplacian	$\partial^2 = \eta^{AB}\partial_A\partial_B$	$\nabla^2 \pm \frac{1}{R^2}k\,(k+d-1)$

Table 1. Dictionary Ambient space/Constant-curvature spacetime.

homogeneity degrees on $(A)dS_d$ is as follows:

$$\begin{aligned} k_{(A)dS_d} &= 1 - \frac{D}{2} + \sqrt{\mp 1}\,\mu = \frac{1-d}{2} + \sqrt{\mp 1}\,\mu\,, \\ k^\dagger_{(A)dS_d} &= 1 - \frac{D}{2} - \sqrt{\mp 1}\,\mu = \frac{1-d}{2} - \sqrt{\mp 1}\,\mu\,, \end{aligned} \tag{3.38}$$

where, once again, the $\pm$ symbol refers to the corresponding equation $X^2 = \pm R^2$. Notice also the useful identities

$$\begin{aligned} \pm\,(mR)^2 &= -\,k_{(A)dS_d}(k_{(A)dS_d} + d - 1) \\ &= -\,k^\dagger_{(A)dS_d}(k^\dagger_{(A)dS_d} + d - 1)\,, \\ &= k^\dagger_{(A)dS_d}k_{(A)dS_d}\,. \end{aligned} \tag{3.39}$$

In the AdS/CFT litterature, the opposite of k_{AdS_d} and $k^\dagger_{AdS_d}$ are usually denoted by Δ_+ and Δ_-.

Various ambient/spacetime notations that have been introduced so far are summarized in the table 1.

3.5 Klein-Gordon action

The quadratic action of a complex massive scalar field on $(A)dS_d$ reads, modulo a boundary term, as

$$S_0[\phi] = -\frac{1}{2}\int_{(A)dS_d} d^dx\,\sqrt{|\,g|}\,\left(\,g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^*(x)\partial_\nu\phi(x) + m^2\,|\,\phi(x)|^2\,\right). \tag{3.40}$$

It can be rewritten in the ambient formulation where the covariance under all isometries is manifest,

$$\begin{aligned} S_0[\phi] = -\int_{\mathbb{R}_0^D} d^DX\,|\,X^2|^{\frac{1}{2}}\,\delta(X^2 \mp R^2)\,\times \\ \times\left(\,G^{AB}\partial_A\Phi^\dagger(X)\,\partial_B\Phi(X) \pm \frac{(mR)^2}{X^2}\,\Phi^\dagger(X)\Phi(X)\,\right). \end{aligned} \tag{3.41}$$

In (pseudo) spherical coordinates, the volume form reads as

$$d^D X \,=\, d\rho \left(\frac{\rho}{R}\right)^d \, d^d x \, \sqrt{|\, g(x)|}\,, \tag{3.42}$$

In order to check the equality (3.41), one should rewrite the integral over $\mathbb{R}_0^D$ in (pseudo) spherical coordinates, insert the homogeneity conditions (3.7) and (3.37) as well as the following relation on the Dirac delta function,

$$|\, X^2|^{\frac{1}{2}}\, \delta(X^2 \mp R^2) \,=\, \rho\, \delta(\rho^2 \mp R^2) \,=\, \frac{\rho}{|\rho + R|}\, \delta(\rho \,-\, R) \,=\, \frac{1}{2}\, \delta(\rho \,-\, R)\,, \tag{3.43}$$

and, finally, integrate over the radial coordinate ρ from zero to infinity.

There is also an alternative way to obtain the spacetime integral (3.40) in a form where the covariance under all isometries is manifest: along the lines of the radial dimensional reduction from massless to massive fields and from flat to curved spacetimes [12], one may instead remove the Dirac delta $\delta(\rho - R)$ in the integral over the ambient space. With the help of (3.39) and

$$G^{AB}\partial_A\Phi^\dagger(X)\,\partial_B\Phi(X) \,=\, \eta^{AB}\partial_A\Phi^\dagger(X)\,\partial_B\Phi(X) \,-\, \frac{1}{X^2}\,(X\cdot\partial)\Phi^\dagger(X)\,(X\cdot\partial)\Phi(X)\,, \tag{3.44}$$

together with (3.42), one can show that

$$\begin{aligned} S_0[\Phi] \,&:=\, -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_0^D} d^D X\, \eta^{AB}\partial_A\Phi^\dagger(X)\,\partial_B\Phi(X) \\ &=\, -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_0^D} d^D X\, \left(G^{AB}\partial_A\Phi^\dagger(X)\,\partial_B\Phi(X) \,\pm\, \frac{(mR)^2}{X^2}\,\Phi^\dagger(X)\Phi(X) \right) \\ &=\, R\int_0^\infty dz \,\times\, S_0[\phi] \end{aligned} \tag{3.45}$$

where the integral over z on the right-hand-side is simply a constant factor (albeit infinite) Remember that $z = \log(\rho/R)$ and $(\rho/R)^k = \exp(k\, z)$. The analogy of (3.45) with a dimensional reduction along a (non-compact) direction further justified the choice of terminology "radial dimensional reduction" in [12]. This interpretation is somewhat more natural in dS_d where the radial direction is spacelike (though non-compact) as it should and where $\Phi^\dagger$ is simply the complex conjugate of Φ. In this analogy, the parameter μ plays the usual role of the mass for the Fourier factor $\exp(i\,\mu\, z)$. The basis of the radial dimensional reduction technique is the observation that, since the kinetic operator for massless fields on flat spacetime is scale invariant, the homogeneity condition on the fields is a consistent ansatz. Moreover, the homogeneity degree must be chosen such that the action on the flat ambient space is also scale invariant.

3.6 Noether method

The ambient formalism developed above should also be applied to the whole content of the section 2. In this subsequent, one introduces various definitions dedicated to an ambient reformulation of section 2, preparing the ground for the next two sections.

JHEP11(2010)116

The *ambient representative of a symmetric conserved current* of rank $r \geqslant 1$, say $j^{\mu_1 \cdots \mu_r}$, is an equivalence class $J^{A_1 \cdots A_r} \sim J^{A_1 \cdots A_r} + X^{(A_1} U^{A_2 \cdots A_r)}$ of real contravariant homogeneous symmetric tensor fields on $\mathbb{R}^D_0$ of homogeneity degree equal to $2 - D - r$ where one of the representative obeys to the strict conservation law

$$\partial_{A_1} J^{A_1 \cdots A_r}(X) \approx 0 \,. \tag{3.46}$$

The homogeneity degree,

$$(X^A \partial_A + D - 2 + r) J^{A_1 \cdots A_r}(X) = 0 \,, \tag{3.47}$$

is chosen such that the equation (3.46) is preserved by the equivalence relation, as can be checked directly and as will be shown later in a more economical way. This property implies the covariant conservation law

$$\mathcal{D}_{A_1} J^{A_1 \cdots A_r}(X) \approx 0 \,. \tag{3.48}$$

corresponding to (2.1), even though the representative $J^{A_1 \cdots A_r}(X)$ satisfying (3.46) may not be tangent. An *ambient generating function of conserved currents* is an equivalence class

$$J(X,P) \sim J(X,P) + (X \cdot P) U(X,P) \iff J^{A_1 \ldots A_r} \sim J^{A_1 \ldots A_r} + r\, X^{(A_1} U^{A_2 \ldots A_r)} \,. \tag{3.49}$$

of real functions on the phase space $T^*\mathbb{R}^D_0$ which are (i) formal power series in the momenta, (ii) such that

$$\left(X^A \frac{\partial}{\partial X^A} + P_A \frac{\partial}{\partial P_A} + D - 2 \right) J(X,P) = 0 \,, \tag{3.50}$$

$$\left(X^A \frac{\partial}{\partial X^A} + P_A \frac{\partial}{\partial P_A} + D \right) U(X,P) = 0 \,, \tag{3.51}$$

and (iii) where one of the representatives obeys to

$$\left(\frac{\partial}{\partial X^A} \frac{\partial}{\partial P_A} \right) J(X,P) \approx 0 \,. \tag{3.52}$$

The commutation relation

$$\left[\frac{\partial}{\partial X^A} \frac{\partial}{\partial P_A} \,,\, X^B P_B \right] = X^A \frac{\partial}{\partial X^A} + P_A \frac{\partial}{\partial P_A} + D \tag{3.53}$$

implies that, provided the homogeneity condition (3.50) is satisfied (which is consistent with the radial reduction ansatz), the ambient divergence is well defined on equivalence classes of currents, i.e.

$$J_1 \sim J_2 \Longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial X^A} \frac{\partial}{\partial P_A} \right) J_1 \sim \left(\frac{\partial}{\partial X^A} \frac{\partial}{\partial P_A} \right) J_2 \,, \tag{3.54}$$

because $[\partial_X \cdot \partial_P \,,\, X \cdot P] U = 0$ due to (3.51). Therefore, the current is covariantly divergenceless

$$\left(\mathcal{D}_A \frac{\partial}{\partial P_A} \right) J(X,P) \approx 0 \tag{3.55}$$

when (3.50) holds since (3.52) and (3.54) imply (3.55). Thus all the coefficients of order $r \geqslant 1$ in the power expansion of the generating function

$$J(X,P) \,=\, \sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{r!}\, J^{A_1\dots A_r}(X)\, P_{A_1}\dots P_{A_r} \tag{3.56}$$

are all ambient representative of conserved currents by means of (3.55).

The *ambient representative of a symmetric tensor gauge field* of rank $r \geqslant 1$, say $h_{\mu_1\dots\mu_r}(x)$, is a real covariant homogeneous symmetric tangent tensor field $H_{A_1\dots A_r}(X)$ on $\mathbb{R}^D_0$ of homogeneity degree equal to $r-2$ whose gauge transformations are of the form

$$\delta_\epsilon H_{A_1\dots A_r}(X) \,=\, r\,\partial_{(A_1}\epsilon_{A_2\dots A_r)}(X) \,+\, \mathcal{O}(H) \,=\, r\,\mathcal{D}_{(A_1}\epsilon_{A_2\dots A_r)}(X) \,+\, \mathcal{O}(H)\,, \tag{3.57}$$

where the gauge parameter $\epsilon_{A_1\dots A_{r-1}}(X)$ is a covariant homogeneous symmetric tangent tensor field on $\mathbb{R}^D_0$ of rank $r-1$ and of homogeneity degree $r-1$. The homogeneity degrees are such that the symmetrized gradient of ϵ is tangent, as can be checked by direct computation, so that $\partial_{(A_1}\epsilon_{A_2\dots A_r)}(X) = \mathcal{D}_{(A_1}\epsilon_{A_2\dots A_r)}(X)$. An *ambient generating function of gauge fields* is a real function $H(X,V)$ on the configuration space $T\mathbb{R}^D_0$ (i) which is a formal power series in the velocities, (ii) such that

$$\left(X^A\frac{\partial}{\partial X^A} \,-\, V^A\frac{\partial}{\partial V^A} \,+\, 2\right) H(X,V) \,=\, 0\,, \qquad \left(X^A\frac{\partial}{\partial V^A}\right) H(X,V) \,=\, 0\,, \tag{3.58}$$

and (iii) whose gauge transformations are

$$\delta_\epsilon H(X,V) \,=\, \big(V^A\partial_A\big)\,\epsilon(X,V) \,+\, \mathcal{O}(H) \,=\, \big(V^A\mathcal{D}_A\big)\,\epsilon(X,V) \,+\, \mathcal{O}(H)\,, \tag{3.59}$$

where $\epsilon(X,V)$ is a formal power series in the velocities such that

$$\left(X^A\frac{\partial}{\partial X^A} \,-\, V^A\frac{\partial}{\partial V^A}\right)\epsilon(X,V) \,=\, 0\,, \qquad \left(X^A\frac{\partial}{\partial V^A}\right)\epsilon(X,V) \,=\, 0\,. \tag{3.60}$$

The commutation relation

$$\left[X^A\frac{\partial}{\partial V^A}\,,\, V^B\frac{\partial}{\partial X^B}\right] \,=\, X^A\frac{\partial}{\partial X^A} \,-\, V^A\frac{\partial}{\partial V^A}\,, \tag{3.61}$$

implies that, provided (3.60) is satisfied, then $(X\cdot\partial_V)\delta_\epsilon H(X,V) = \mathcal{O}(H)$. The coefficients of order $r \geqslant 1$ in the power expansion of the generating function

$$H(X,V) \,=\, \sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{r!}\, H_{A_1\dots A_r}(x)\, V^{A_1}\dots V^{A_r} \tag{3.62}$$

are all ambient representatives of symmetric tensor gauge fields due to (2.5) with

$$\epsilon(X,V) \,=\, \sum_{t\geqslant 0} \frac{1}{t!}\, \epsilon_{A_1\dots A_t}(X)\, V^{A_1}\dots V^{A_t}\,. \tag{3.63}$$

The non-degenerate bilinear pairing (2.8) between smooth functions $h(x,v)$ and $j(x,p)$ on the configuration and phase spaces respectively, can be written in terms of the ambient representatives in a similar fashion to (3.41):

$$\begin{aligned} \ll h \,\|\, j \gg &:= 2\int_{\mathbb{R}^D_0} d^D X |X^2|^{\frac{1}{2}}\, \delta(X^2 \mp R^2)\, \exp\left(\frac{\partial}{\partial V^A}\,\frac{\partial}{\partial P_A}\right) H(X,V)\, J(X,P)\Big|_{V=P=0} \\ &= 2\sum_{r\geqslant 0}\frac{1}{r!}\int_{\mathbb{R}^D_0} d^D X\, |\, X^2|^{\frac{1}{2}}\, \delta(X^2 \mp R^2)\; H_{A_1\dots A_r}(X)\, J^{\,A_1\dots A_r}(X)\,. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Another option is to follow the philosophy of the radial dimensional reduction, as in (3.45),

$$\begin{aligned} \ll H \,\|\, J \gg \;&:= \int_{\mathbb{R}^D_0} d^D X\; \exp\left(\frac{\partial}{\partial V^A}\,\frac{\partial}{\partial P_A}\right) H(X,V)\, J(X,P)\Big|_{V=P=0} \\ &= \sum_{r\geqslant 0}\frac{1}{r!}\int_{\mathbb{R}^D_0} d^D X\; H_{A_1\dots A_r}(X)\, J^{\,A_1\dots A_r}(X) \\ &= R\int_0^\infty dz\; \ll h \,\|\, j \gg \end{aligned} \tag{3.65}$$

where the integrand of the integral over $\mathbb{R}^D_0$ on the second line is of homogeneity degree equal to $-D$ as it should. This shows that if the conserved currents of the matter fields on a flat spacetime define ambient representatives with the right properties (such as their degree of homogeneity) then the radial dimensional reduction of the Noether interaction can be applied:

$$\begin{aligned} S_1[\Phi, H] &:= \ll H \,\|\, J \gg \\ &= R\int_0^\infty dz\; \times S_1[\phi, h] \end{aligned} \tag{3.66}$$

The *ambient representative of a Killing tensor field* of rank $r-1 \geqslant 0$ on $\mathcal{M}_d$ is a covariant homogeneous symmetric tangent tensor field $\overline{\epsilon}_{A_1\dots A_{r-1}}(X)$ on $\mathbb{R}^D_0$ of degree $r-1$ solution of the generalized Killing equation

$$\partial_{(A_1}\overline{\epsilon}_{A_2\dots A_r)}(X) = 0\,. \tag{3.67}$$

An *ambient generating function of Killing fields* is a function $\overline{\epsilon}(X,V)$ on the configuration space $T\mathbb{R}^D_0$ which is a formal power series in $X^{[A}V^{B]} := X^AV^B - X^BV^A$. Then the coefficients in the power series

$$\overline{\epsilon}(X,V) \;=\; \overline{\epsilon}\left(X^{[A}V^{B]}\right) \;=\; \sum_{t\geqslant 0}\frac{1}{t!}\,\overline{\epsilon}_{A_1\dots A_t}(X)\, V^{A_1}\dots V^{A_t} \tag{3.68}$$

provide the most general ambient representatives of Killing tensor fields on $\mathcal{M}_d$ (see e.g. [25, 26, 30] for reviews and refs therein).

In the next two sections, these general facts will be applied to the case of a free complex scalar field.

JHEP11(2010)116

4 Conserved currents

The generating function of conserved currents on the flat ambient space [6] is equal to

$$J(X,P) \;=\; \Phi^\dagger\,(X \,-\, i\,P)\;\Phi\,(X \,+\, i\,P) \tag{4.1}$$

so that the corresponding ambient conserved currents take the explicit form

$$\begin{aligned} J_{A_1\ldots A_r}(X) \;&=\; i^{\,r}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\,\partial_{(A_1}\ldots\,\partial_{A_s}\Phi^\dagger(X)\,\partial_{A_{s+1}}\ldots\,\partial_{A_r)}\Phi(X) \\ &=\; i^{\,r}\,\Phi^\dagger(X)\overleftrightarrow{\partial}_{A_1}\ldots\overleftrightarrow{\partial}_{A_r}\Phi(X) \end{aligned} \tag{4.2}$$

where the usual double arrow $\overleftrightarrow{\partial}$ is defined by

$$\Phi\overleftrightarrow{\partial}_A\Psi \;:=\; \Phi(\partial_A\Psi) \;-\; (\partial_A\Phi)\Psi\,. \tag{4.3}$$

These flat space currents (4.2) are proportional to the ones introduced by Berends, Burgers and van Dam a long time ago [4]. Various explicit sets of (conformal) conserved currents on Minkowski spacetime were provided in [31–34]. The symmetric conserved current (4.2) of rank r is bilinear in the scalar field and contains exactly r derivatives. The currents of any rank are real thus, if the scalar field is real then the odd rank currents are absent due to the factor in front of (4.2). The generating function (4.1) verifies (3.52) when the ambient scalar field Φ obeys to the Klein-Gordon equation. Although the ambient currents (4.2) are not tangent in general, they obey to (3.50) for homogeneous ambient scalar fields corresponding to massive scalar fields on $(A)dS_d$, since (3.38) implies

$$k_{(A)dS_d} + k^\dagger_{(A)dS_d} \;=\; 2 - D\,, \tag{4.4}$$

and therefore the previous equation (3.52) is equivalent to the covariant conservation law (2.1). In other words, the radial dimensional reduction of the cubic Noether interaction is valid precisely for the mass-square domain of unitarity in $(A)dS_d$.

The main drawback of the explicit expressions (4.2) for the conserved currents is that it is written in terms of ambient partial derivatives instead of covariant derivatives, but the ambient generating function (4.1) of $(A)dS_d$ conserved currents can be written very explicitly in terms of (3.23) with the help of (3.25)

$$\begin{aligned} J(X,P) \;&=\; c\left(-\,i\,P\cdot\mathcal{D}\,,-\frac{P^2}{X^2}\,;\,k^\dagger_{(A)dS_d}\right)\;\Phi^\dagger(X)\;c\left(i\,P\cdot\mathcal{D}\,,-\frac{P^2}{X^2}\,;\,k_{(A)dS_d}\right)\;\Phi(X) \\ &=\; \Phi^\dagger(X)\,c\left(-\,i\,P\cdot\overleftarrow{\mathcal{D}}\,,-\frac{P^2}{X^2}\,;\,k^\dagger_{(A)dS_d}\right)c\left(i\,P\cdot\overrightarrow{\mathcal{D}}\,,-\frac{P^2}{X^2}\,;\,k_{(A)dS_d}\right)\;\Phi(X) \\ &=\; \Phi^\dagger(X)\,c\left(i\,P\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{D}}\,,-\frac{P^2}{X^2}\,;\,2-D\right)\;\Phi(X) \end{aligned} \tag{4.5}$$

where the property $c(x_1,y\,;k_1)c(x_2,y\,;k_2) \,=\, c(x_1+x_2,y\,;k_1+k_2)$ and (3.38) were used. The ambient generating function (4.5) translates into the following generating function of conserved currents

$$j\,(x,p) \;=\; \phi^*(x)\;c\left(i\,p^\mu\overleftrightarrow{\nabla}_\mu\,,\mp\frac{g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu}{R^2}\,;\,1-d\right)\;\phi(x) \tag{4.6}$$

The flat limit is recovered for $R^2 \to \infty$ since $c(x,y) \sim \exp x$ when $y \to 0$. Due to (3.23), the development (2.3) of this generating function gives the following conserved current of rank r,

$$j_{\mu_1 \dots \mu_r}(x) \;=\; i^{\,r} \sum_{m=0}^{[r/2]} \left(\frac{\mp 1}{R^2}\right)^m c_r^m \; g_{(\mu_1\mu_2} \cdots g_{\mu_{2m-1}\mu_{2m}} \, \phi^*(x) \overleftrightarrow{\nabla}_{\mu_{2m+1}} \cdots \overleftrightarrow{\nabla}_{\mu_r)} \phi(x) \,, \quad (4.7)$$

where the coefficients c_r^m correspond to $k = 1 - d$. It is possible to compute numerically these coefficients c_r^m, the covariant derivatives (3.25) and these currents from (4.7) whatever the rank. For example, we therefore find the first currents, which are all preserved by construction and which was also verified explicitly, calculated classically:

$$\begin{aligned}
j_\mu &= i \; \phi^* \overleftrightarrow{\nabla}_\mu \phi \\
j_{\mu\nu} &= -\, \phi^* \overleftrightarrow{\nabla}_\mu \overleftrightarrow{\nabla}_\nu \, \phi \pm \frac{1-d}{R^2} \, g_{\mu\nu} \, \phi^* \, \phi \\
j_{\mu\nu\rho} &= -\, i \; \phi^* \overleftrightarrow{\nabla}_{(\mu} \overleftrightarrow{\nabla}_\nu \overleftrightarrow{\nabla}_{\rho)} \, \phi \pm i \, \frac{1-3d}{R^2} \, g_{(\mu\nu} \, \phi^* \overleftrightarrow{\nabla}_{\rho)} \, \phi \\
j_{\mu\nu\rho\sigma} &= \phi^* \overleftrightarrow{\nabla}_{(\mu} \overleftrightarrow{\nabla}_\nu \overleftrightarrow{\nabla}_\rho \overleftrightarrow{\nabla}_{\sigma)} \, \phi \pm 2 \, \frac{1+3d}{R^2} \, g_{(\mu\nu} \, \phi^* \overleftrightarrow{\nabla}_\rho \overleftrightarrow{\nabla}_{\sigma)} \phi \\
&\quad + 3 \, \frac{d^2-1}{R^4} \, g_{(\mu\nu} \, g_{\rho\sigma)} \phi^* \, \phi \\
&\;\; \vdots
\end{aligned}$$

Similar conserved currents on constant-curvature spaces were described in [7–9, 35, 36] but the present results are somewhat more general: firstly, the currents (4.2) are conserved for any free massive scalar field in any dimension, while only the conformal scalar (i.e. the singleton) was considered in [8, 9] and AdS_3 was the background spacetime in [35, 36]; secondly, the explicit expression of the currents is known at all orders in the scalar curvature, while only the first order correction to the flat expression was provided in [8, 9]; thirdly, the currents (4.2) are conserved on-shell in the usual sense of (2.1) while the ones of [7] obey to the weaker conservation law introduced by Fronsdal [14]. Of course, strictly speaking the third comment should not be understood as a loss of generality in the previous results of [7, 10]. We simply want to stress that usual conservation laws for the currents is a desirable property because it allows a uniform treatment of (ir)reducible gauge fields, e.g. of triplet and Fronsdal fields, and it might also simplify the analysis of current exchange amplitudes.

5 Noether interactions

As explained in the previous section, the function (4.1) obeys to all properties for an ambient generating function of conserved currents, as defined in subsection 3.6. Therefore, the radial dimensional reduction of the corresponding ambient Noether interaction (3.65) is consistent and provides the Noether interaction (2.9) on $(A)dS_d$ where the conserved currents are given by (4.7). An important consequence of this fact is that one can import

JHEP11(2010)116

from flat spacetime all relationships (observed in [6]) between the Noether interactions of a complex scalar field with a collection of symmetric tensor gauge fields. In other words, the consistency of the radial dimensional reduction implies that one can induce the Weyl/Wigner technology used in [6] from the flat ambient space $\mathbb{R}^D_0$ onto the spacetime $(A)dS_d$. In this way, one reproduces the ambient approach to the Weyl/Wigner quantization of the cotangent bundle $T^*\mathcal{M}_d$ of a constant-curvature manifold, which was first introduced in the seminal papers on deformation quantisation with humor under the name "a star product is born" [37, 38]. The relevance of the latter approach to higher-spin gauge theory on (anti) de Sitter spacetime was argued in [30].

5.1 Symbol calculus

Let us become more explicit. To start with, since $\mathbb{R}^D_0$ and $(A)dS_d$ are endowed with a metric, their respective tangent and cotangent spaces may be identified and thus one can identify "momenta" with "velocities", e.g.

$$P_A \,=\, \eta_{AB}\, V^B \qquad \text{and} \qquad p_\mu \,=\, g_{\mu\nu} v^\nu \,. \tag{5.1}$$

The ambient generating function of gauge fields $H(X,P)$ is now a real function on $T^*\mathbb{R}^D_0$ such that

$$\left(X^A \frac{\partial}{\partial X^A} \,-\, P_A \frac{\partial}{\partial P_A} \,+\, 2\right) H(X,P) \,=\, 0\,, \qquad \left(X\cdot\frac{\partial}{\partial P}\right) H(X,P) \,=\, 0\,, \tag{5.2}$$

and whose gauge transformations are

$$\delta_\epsilon H(X,P) \,=\, \left(P\cdot\frac{\partial}{\partial X}\right)\epsilon(X,P) \,+\, \mathcal{O}(H)\,, \tag{5.3}$$

where $\epsilon(X,P)$ is such that

$$\left(X^A \frac{\partial}{\partial X^A} \,-\, P_A \frac{\partial}{\partial P_A}\right) \epsilon(X,P) \,=\, 0\,, \qquad \left(X\cdot\frac{\partial}{\partial P}\right)\epsilon(X,P) \,=\, 0\,. \tag{5.4}$$

The cotangent bundle $T^*\mathcal{M}_d$ can be seen as the sub-bundle of $\mathbb{R}^D_0$ defined by the quadric definition $X^2 = \pm R^2$ together with the transversality condition $X^A P_A = 0$. As symplectic manifolds, this embedding corresponds to a reduction with respect to the previous two constraints.

The ambient Moyal product of two smooth functions on $T^*\mathbb{R}^D_0$ is defined by

$$\epsilon_1(X,P) \star \epsilon_2(X,P) \,=\, \epsilon_1(X,P)\, \exp\left(\frac{1}{2}\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial P_A} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial X^A}\right) \epsilon_2(X,P) \tag{5.5}$$

where $\wedge$ stands for the antisymmetric product. The conditions (5.4) on $\epsilon(X,P)$ are equivalent to

$$[X\cdot P \,\stackrel{\star}{,}\, \epsilon(X,P)] \,=\, 0\,, \qquad [X^2 \,\stackrel{\star}{,}\, \epsilon(X,P)] \,=\, 0\,. \tag{5.6}$$

where

$$[\epsilon_1(X,P) \overset{\star}{,} \epsilon_2(X,P)] := \epsilon_1(X,P) \star \epsilon_2(X,P) - \epsilon_2(X,P) \star \epsilon_1(X,P)$$
$$= \epsilon_1(X,P)\, 2\sinh\left(\frac{1}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial P_A} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial X^A}\right) \epsilon_2(X,P) \qquad (5.7)$$

denotes the ambient Moyal commutator. The conditions (5.6) expressed in terms of the Hermitian operator $\hat{\epsilon}$ the Weyl symbol of which is $\epsilon(X,P)$ state that this operator preserves the homogeneity degree and commutes with X^2. The evaluation $\varepsilon(x,p)$ of the ambient representatives $\epsilon(X,P)$ provides an isomorphism between the space of smooth functions on $T^*\mathcal{M}_d$ and the (sub)space of smooth functions on $T^*\mathbb{R}^D_0$ which are subject to (5.6). Moreover, the space of symbols obeying to (5.6) is a subalgebra of the ambient Weyl algebra. Therefore the pull-back of the Moyal product on $T^*\mathbb{R}^D_0$ induces a star product $*$ on the cotangent bundle $T^*\mathcal{M}_d$ such that the former isomorphism becomes an isomorphism of associative algebras, as pointed out by Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz and Sternheimer in [37, 38]. Notice that the Lie algebra of smooth functions on $T^*\mathcal{M}_d$ endowed with the corresponding star commutator $[\overset{*}{,}]$ is isomorphic to the Lie algebra of Hermitian (pseudo)differential operators on $\mathcal{M}_d$. The adjoint action of this Lie algebra preserves the space of Weyl symbols such that (5.2) and the gauge transformations (5.3) can be written as

$$\delta_\epsilon H(X,P) = \frac{1}{2}[P^2 \overset{\star}{,} \epsilon(X,P)] + \mathcal{O}(H)\,. \qquad (5.8)$$

The ambient generating functions of Killing fields $\overline{\epsilon}(X,P)$ are Weyl symbols commuting with the three constraints X^2, $X\cdot P$ and P^2 which generate an $\mathfrak{sp}(2)$ algebra. The Lie (sub)algebra of such symbols is the off-shell higher-spin algebra of Vasiliev (see e.g. [1–3] for reviews).

5.2 Cubic vertex

Using the bra-ket notation for the scalar field $\Phi(X) = \langle\, X \mid \Phi\,\rangle$ and $\Phi^\dagger(X) = \langle\, \Phi \mid X\,\rangle$, the ambient generating function $J(X,P)$ of currents (4.1) is the (analytic continuation of the) Fourier transform over momentum space of the Wigner function associated to the density operator $|\,\Phi\,\rangle\langle\,\Phi\,|$ and the ambient Noether interaction (3.65) can be rewritten in a compact form as [6]

$$S_1[\Phi,H] = \ll H \,\|\, J \gg = \langle\, \Phi \,|\, \hat{H} \,|\, \Phi\,\rangle \qquad (5.9)$$

where $H(X,P)$ is the Weyl symbol of the operator $\hat{H}$.

The ambient Klein-Gordon action (3.45) can be rewritten along the same lines as

$$S_0[\Phi] = \langle\, \Phi \,|\, \hat{H}_0 \,|\, \Phi\,\rangle \qquad (5.10)$$

where the operator $\hat{H}_0$ is defined by

$$\hat{H}_0 := \frac{1}{2}\left[\partial^2 - \frac{1}{X^2}(X\cdot\partial)(X\cdot\partial + D - 2) \mp \frac{(mR)^2}{X^2}\right] \qquad (5.11)$$

and is the ambient representative of the kinetic operator $\frac{1}{2}(\nabla^2_{AdS_d} - m^2)$. It has Weyl symbol equal to

$$H_0(X,P) := \frac{1}{2}\left(G^{AB}P_AP_B \mp \frac{(mR)^2}{X^2}\right) = \frac{1}{2}\left(P^2 - \frac{(X\cdot P)^2}{X^2} \mp \frac{(mR)^2}{X^2}\right) \tag{5.12}$$

where the transverse inverse metric $G^{AB} := \eta^{AB} - X^AX^B/X^2$ is the ambient representative of the inverse metric $g^{\mu\nu}$ on $(A)dS_d$. Remark that the function $H_0(X,P)$ also obeys to (5.2).

Therefore the sum

$$S_0[\Phi] \,+\, S_1[\Phi,H] \,=\, \langle\, \Phi \,|\, \hat{H}_0 + \hat{H} \,|\, \Phi \,\rangle \tag{5.13}$$

is manifestly invariant under the following action of the group of unitary operators on $(A)dS_d$:

$$|\,\Phi\,\rangle \;\longrightarrow\; \hat{U}\,|\,\Phi\,\rangle\,, \qquad \hat{H}_0 + \hat{H} \;\longrightarrow\; \hat{U}\,(\hat{H}_0+\hat{H})\,\hat{U}^{-1}\,, \tag{5.14}$$

where the unitary operator $\hat{U}$ is generated by the Hermitian operator $\hat{\epsilon}$ and where the scalar and gauge fields respectively transform in the fundamental and adjoint representation of the group of unitary operators. Notice that the action of the operator $\hat{U}$ on $\Phi(X)$ is indeed consistent with the radial dimensional reduction because this unitary operator preserves the homogeneity degree as $\hat{\epsilon}$ does. Notice that as long as higher-derivative transformations are allowed then the infinite tower of higher-spin fields should be included for consistency of the gauge transformations (5.14) beyond the lowest order. The infinitesimal adjoint action (5.14) of the Lie algebra of Hermitian operators on $(A)dS_d$, written in terms of the Weyl symbol $H(X,P)$, leads to the following deformation of (5.8)

$$\delta_\epsilon H(X,P) \,=\, [H_0(X,P) + H(X,P) \,\overset{\star}{,}\, \epsilon(X,P)] \,+\, \mathcal{O}(H^2)\,. \tag{5.15}$$

The ambient generating functions of Killing fields $\overline{\epsilon}(X,P)$ are Weyl symbols that are product of $X_{[A}P_{B]}$, whose corresponding operators are products of the isometry generators $X_{[A}\partial_{B]}$ of $(A)dS_d$, i.e. generators of the Vasiliev off-shell higher-spin algebra. When the latter algebra acts on the singleton module of $\mathfrak{o}(d-1,2)$, the three $\mathfrak{sp}(2)$-constraints mentioned at the end of subsection 5.1 act trivially. The quotient of the Vasiliev off-shell algebra by the corresponding two-sided ideal (spanned by elements that are sum of elements proportional to a $\mathfrak{sp}(2)$-constraint) is the Vasiliev on-shell higher-spin algebra (see e.g. [1–3] for more details). The situation is somewhat different for the massive scalar field module spanned by the harmonic homogeneous functions on the ambient space of subsection 3.4, because this module is not annihilated by the operators corresponding to X^2 and $X\cdot P$ (see e.g. the section 3 of [30] for some discussion on the algebra of symmetries of the massive scalar field).

It is very tempting to conjecture that the full action (2.13) should be interpreted as arising from the gauging of the rigid symmetries of the free scalar matter field, which generalize the U(1) and isometries of $(A)dS_d$, so that the local symmetries (5.14) generalize the local U(1) and diffeomorphisms (see [5–7, 30] and refs therein for more comments on this point of view). In any case, the unfolded equations (on-shell [1–3] and off-shell [39, 40])

JHEP11(2010)116

precisely arise from the gauging of the same rigid algebra of (on/off shell) symmetries but the scalar field is included in the gauge field multiplet.

To end up with a side remark, we would like to point out the possibility to have a uniform treatment of the gauge fields and parameters where both generating functions have equal homogeneity degree in X and in P. This possibility might prove to be useful for further works because this treatment allows to make use of the star commutator induced on $\mathcal{M}_d$ [37, 38] in order to write down the intrinsic form of the gauge transformation (5.8). Moreover a uniform treatment of fields and parameters is appealing in the metric-like approach since their generating functions can both be interpreted as Weyl symbols of Hermitian (pseudo)differential operators on the spacetime manifold. Concretely, notice that $\mathcal{H}(X,P) := X^2 H(X,P)$ obeys to

$$\left(X^A \frac{\partial}{\partial X^A} - P_A \frac{\partial}{\partial P_A}\right) \mathcal{H}(X,P) = 0\,, \qquad \left(X \cdot \frac{\partial}{\partial P}\right) \mathcal{H}(X,P) = 0\,, \tag{5.16}$$

as follows from (5.2). The same holds for

$$\mathcal{H}_0(X,P) = \frac{1}{2} X^2 \left(G^{AB} P_A P_B \mp \frac{(mR)^2}{X^2}\right) = \frac{1}{2}\left(X^2 P^2 - (X\cdot P)^2 \mp (mR)^2\right) \tag{5.17}$$

which corresponds to the Weyl symbol $\frac{\pm R^2}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$. One can check that

$$[\, \mathcal{H}_0(X,P) \stackrel{\star}{,} \epsilon(X,P)\,] = \left(X^2 + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial P}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\right)(P^A\partial_A)\,\epsilon(X,P) \tag{5.18}$$

by making use of the identity

$$2\,[\, X^2 P^2 - (X\cdot P)^2 \stackrel{\star}{,} \epsilon(X,P)\,] = X^2 \star [\, P^2 \stackrel{\star}{,} \epsilon(X,P)\,] + [\, P^2 \stackrel{\star}{,} \epsilon(X,P)\,] \star X^2\,. \tag{5.19}$$

Therefore the star commutator between the $(A)dS_d$ background field $g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu$ and any function $\varepsilon(x,p)$ on the cotangent bundle $T^*(A)dS_n$ above is equal to

$$\frac{1}{2}\,[\, g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \stackrel{*}{,} \varepsilon(x,p)\,] = \left(1 \pm \frac{1}{4R^2}\, g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\frac{\partial}{\partial p_\nu}\right)(p^\mu \nabla_\mu)\,\varepsilon(x,p)\,. \tag{5.20}$$

Therefore, modulo the field redefinition,

$$h'(x,p) = \left(1 \pm \frac{1}{4R^2}\, g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\frac{\partial}{\partial p_\nu}\right)\, h(x,p)\,, \tag{5.21}$$

the lowest order of the gauge transformation (2.5) can be expressed directly via the star product on $(A)dS_d$

$$\delta_\varepsilon h'(x,p) = \frac{1}{2}\,[\, g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \stackrel{\star}{,} \varepsilon(x,p)\,] + \mathcal{O}(h') \tag{5.22}$$

in analogy with (5.8).

6 Conclusion and outlook

The present paper may be thought as a first step towards a generalization to any constant-curvature spacetime of the results obtained in [6] for a complex scalar field around Minkowski spacetime, such as the generating functions of conserved currents, of interaction vertices, of gauge symmetry deformations and of four-point exchange amplitudes. Besides the exchange amplitudes, all these results have been generalized here to the case of non-vanishing curvature. Recently, the results of [6] were considerably extended via string-based computations by Sagnotti and Taronna [41, 42] and it would be interesting to investigate the possibility of a radial dimensional reduction of their elegant results, looking for the analogue of their generating functions to (anti) de Sitter spacetimes. We plan to return to these issues in the future.

The generating function of the infinite set of conserved currents for a free complex scalar field on $(A)dS_d$ have been obtained from the flat one [6] through a radial dimensional reduction. For this purpose, an efficient translation rule between ambient partial derivatives and intrinsic (i.e. spacetime) covariant derivatives was developed. The form of the current generating function on ambient space is identical to the bilocal function introduced by Fronsdal [14] in order to provide a manifestly covariant realization of the theorem [43] asserting that the tensor product of two scalar singleton on the conformal boundary decomposes as an infinite tower of bulk gauge fields. This similarity is by no mean accidental since the Flato-Fronsdal theorem is known to be instrumental in the holographic correspondence between free conformal field theories on the boundary and higher-spin gauge field theories in the bulk but it might deserve to be investigated further in the ambient formulation.

Through the Noether method, the current generating function allows to write a generating function of cubic minimal couplings and to determine the corresponding gauge symmetry deformations. Our results confirm some previous expectations on the non-Abelian deformation of the metric-like gauge symmetry as being the group of unitary operators on the spacetime manifold, thereby generalizing the group of diffeomorphisms. It was extremely convenient to remove trace constraints on the gauge parameters when reflecting on the non-Abelian symmetries in the metric-like formulation of higher-spin gauge fields (see e.g. [30] for an extended discussion of this point). As far as the non-Abelian frame-like formulation is concerned, the analogue of Vasiliev's unfolded equations in the unconstrained case are also of interest for studying the off-shell gauge symmetry structure [39, 40]. Moreover, a slight refinement of the on-shell unfolded equations has been proposed in [44] following the spirit of the unconstrained approach. The recent frame-like formalism with weaker trace constraints [45] might also shed some light in these directions.

Notice that, at the order where we worked (at most quadratic dependence in the gauge fields), it is perfectly consistent to make use of traceful currents in the "minimal" coupling between gauge fields and currents. However, the quadratic action for the gauge fields will determine the genuine physical interactions between the matter and gauge fields. Indeed, the gauge fields may also couple to other fields, dynamical or not (e.g. auxilliary and pure gauge fields), and these couplings will affect the on-shell structure of the interactions. For instance, if the quadratic gauge field action is the Fronsdal action [14] then the double-

JHEP11(2010)116

trace of the current is automatically extracted out off-shell and the single-trace further decouples on-shell. It is known since the seminal works of Francia and Sagnotti that the trace constraints may consistently be removed off-shell from the metric-like quadratic action in several ways for irreducible gauge fields (see e.g. [46, 47] for some reviews and [24, 48] for some recent developments). Nevertheless, the trace of the current still decouples on-shell as it should [24]. For the so-called "triplet" arising from the open string leading Regge trajectory [46, 47, 49–53] (see also [10, 23]), the situation is more subtle: although traceful conserved currents can indeed source the symmetric tensor field, only the traceless component of the currents studied here leads to genuine minimal interactions.[2] The kth trace of the current of rank r is a current of rank $r-2k$ (lower than r) and contains r derivatives. However, any non-trivial rank-s conserved current built from a scalar field is known to contain up to s derivatives. Therefore, any trace component of the current is equal on-shell either to zero or to an "improvement", i.e. a trivially conserved (or, equivalently, co-exact) current. Such on-shell trivial currents give rise to non-minimal interactions, quadratic in the scalar fields and linear in the gauge-invariant higher-spin fieldstrengths.

Finally, the toy model [6] has been used to calculate tree level exchange amplitudes for the elastic scattering of two scalar particles mediated by an infinite tower of tensor gauge fields. The AdS_d counterparts of Feynman diagrams with four external scalar particles should be Witten diagrams associated with the four-point correlation function of a singlet ("single trace") scalar operator, bilinear in some large component massless scalar field living on the conformal boundary, as in [54, 55]. The exact summation of the corresponding exchange amplitudes for an infinite tower of intermediate tensor gauge fields is possible in flat spacetime [6] and one might hope to reproduce the analogue of this result in AdS_d since all ingredients are now available in the unconstrained formalism for irreducible gauge fields: the bulk-to-bulk propagators of symmetric tensor fields can be extracted from [24] and the relevant cubic vertices have been presented here.[3] Moreover, the CFT_{d-1} dual results are known in closed form, even for the interacting $O(N)$ model in the large N limit [56]. Computing explicitly the AdS_d exchange Witten diagram could therefore provide a first quantitative test of the AdS_4/CFT_3 conjecture of Klebanov and Polyakov [55] at quartic level, i.e. for four-point correlation functions. Indeed, while impressive quantitative checks of the correspondence have been performed at the interacting level [57–60], to our knowledge all of them were restricted yet to three-point correlation functions where symmetries are known to highly constrain the set of possibilities.

Acknowledgments

We thank N. Boulanger, E. Joung, J. Mourad, A. Sagnotti, P. Sundell, M. Taronna and especially S. Nicolis for useful exchanges.

[2] We are grateful to the referee for calling this fact to our attention.

[3] The analogue of these cubic vertices were obtained in the *constrained* formalism by Fotopoulos, Irges, Petkou and Tsulaia [7]. However, we believe that, as suggested by the case of flat spacetime, the unconstrained formalism could be technically more handy for Feynmann/Witten diagram computations.

JHEP11(2010)116

A Technical appendix

Let us consider a homogeneous symmetric tensor of rank r such that $(X^B\partial_B - k)\,T_{A_1\ldots A_r}(X) = 0$ and $X^{A_1}\,T_{A_1\ldots A_r}(X) = 0$. These last two properties together with the definitions of the projector (3.10) and the equivalence relation (3.13) imply that

$$\begin{aligned}
\partial_A\Big(\mathcal{P}^{D_1}_{B_1}\ldots\mathcal{P}^{D_n}_{B_n}\mathcal{P}^{E_1}_{C_1}\ldots\mathcal{P}^{E_r}_{C_r}\partial_{D_1}\ldots\partial_{D_n}T_{E_1\ldots E_r}\Big) \sim \\
\sim\ \partial_A\partial_{B_1}\ldots\partial_{B_n}T_{C_1\ldots C_r} \;-\; \frac{1}{X^2}\,n\,(X^D\partial_D)\,\eta_{A(B_1}\,\partial_{B_2}\ldots\partial_{B_n)}T_{C_1\ldots C_r} \;- \\
-\,\frac{1}{X^2}\,r\,X^E\,\partial_{B_1}\ldots\partial_{B_n}T_{E(C_2\ldots C_r}\eta_{C_1)A} \\
=\ \partial_A\partial_{B_1}\ldots\partial_{B_n}T_{C_1\ldots C_r} \;-\; \frac{1}{X^2}\,n\,\big(k-(n-1)\big)\,\eta_{A(B_1}\,\partial_{B_2}\ldots\partial_{B_n)}T_{C_1\ldots C_r} \;+ \\
+\,\frac{1}{X^2}\,r\,n\,\partial_{(B_2}\ldots\partial_{B_n}T_{B_1)(C_2\ldots C_r}\eta_{C_1)A}
\end{aligned}$$

Contracting all indices with an auxiliary vector P and making use of the notations (3.19) and (3.20), one gets that

$$(P\cdot\mathcal{D})\,(P\cdot\partial)^n T \;=\; (P\cdot\partial)^{n+1}\,T \;-\; n\,\frac{P^2}{X^2}\,\big(k-r-(n-1)\big)\,(P\cdot\partial)^{n-1}\,T \qquad \text{(A.1)}$$

The left-hand-side of (A.1) can be expressed by

$$\begin{aligned}
(P\cdot\mathcal{D})\,(P\cdot\partial)^n\,T &= (P\cdot\mathcal{D})\sum_{m=0}^{[n/2]} c_n^m\,\left(\frac{P^2}{X^2}\right)^r\,(P\cdot\mathcal{D})^{n-2r}\,T \\
&= c_n^0\,(P\cdot\mathcal{D})^{n+1} \;+\; \sum_{m=1}^{[n/2]} c_n^m\,\left(\frac{P^2}{X^2}\right)^m\,(P\cdot\mathcal{D})^{n-2m+1}\,T\,.
\end{aligned}$$

where (3.21) has been inserted in order to compute $(P\cdot\partial)^n$. The right-hand-side of (A.1) can also be reexpressed as follows

$$\begin{aligned}
&(P\cdot\partial)^{n+1}\,T \;-\; n\,\frac{P^2}{X^2}\,(k-r-(n-1))\,(P\cdot\partial)^{n-1}\,T \\
&\quad= c_n^0\,(P\cdot\mathcal{D})^{n+1}\,T \;+\; \sum_{m=1}^{[(n+1)/2]}\left(\frac{P^2}{X^2}\right)^m\,(P\cdot\mathcal{D})^{n+1-2m}\,[c_{n+1}^m \;-\; n(k-r-n+1)\,c_{n-1}^{m-1}]\,T\,.
\end{aligned}$$

by making use twice of (3.21) in order to calculate $(P\cdot\partial)^{n+1}$ and $(P\cdot\partial)^{n-1}$. These equations imply that the coefficients c_n^m are given by the recurrence formula:

$$c_{n+1}^m \;=\; c_n^m \;+\; n\,(k-r-n+1)\,c_{n-1}^{m-1} \qquad \text{(A.2)}$$

and for n odd, there is an additional relation:

$$c_{n+1}^{(n+1)/2} \;=\; n(k-r-n+1)\,c_{n-1}^{(n-1)/2}\,. \qquad \text{(A.3)}$$

If one considers the c_n^m as the coefficients of a power (*a priori* formal) series

$$f(x;y) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,c_n^m\,x^n\,y^m\,, \qquad \text{(A.4)}$$

JHEP11(2010)116

one can rewrite the recursion formula (A.2) as an ordinary differential equation (parametrized by the "constant" y) for the unkown function $f(x,y)$ depending on the single variable x

$$(1 + x^2\,y)\,\frac{d}{dx}\,f(x,y) - \big(1 + (k-r)\,xy\big)\,f(x,y) = 0 \tag{A.5}$$

with the initial condition $f(0,y) = 1$. The solution of this Cauchy problem is:

$$f(x,y) = (1 + y\,x^2)^{\frac{k-r}{2}}\,\exp\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\,\arctan\left(\sqrt{y}\,x\right)\right). \tag{A.6}$$

The generating function $c(x,y;k)$ is equal to $f(x,y/x^2)$.

References

[1] M.A. Vasiliev, *Higher spin gauge theories in various dimensions*, *Fortsch. Phys.* **52** (2004) 702 [hep-th/0401177] [SPIRES].

[2] M.A. Vasiliev, *Higher spin gauge theories in any dimension*, *Comptes Rendus Physique* **5** (2004) 1101 [hep-th/0409260] [SPIRES].

[3] X. Bekaert, S. Cnockaert, C. Iazeolla and M.A. Vasiliev, *Nonlinear higher spin theories in various dimensions*, hep-th/0503128 [SPIRES].

[4] F.A. Berends, G.J.H. Burgers and H. van Dam, *Explicit construction of conserved currents for massless fields of arbitrary spin*, *Nucl. Phys.* **B 271** (1986) 42 [SPIRES].

[5] X. Bekaert, *Higher spin algebras as higher symmetries*, arXiv:0704.0898 [SPIRES].

[6] X. Bekaert, E. Joung and J. Mourad, *On higher spin interactions with matter*, *JHEP* **05** (2009) 126 [arXiv:0903.3338] [SPIRES].

[7] A. Fotopoulos, N. Irges, A.C. Petkou and M. Tsulaia, *Higher-Spin Gauge Fields Interacting with Scalars: The Lagrangian Cubic Vertex*, *JHEP* **10** (2007) 021 [arXiv:0708.1399] [SPIRES].

[8] R. Manvelyan and W. Rühl, *Conformal coupling of higher spin gauge fields to a scalar field in AdS_4 and generalized Weyl invariance*, *Phys. Lett.* **B 593** (2004) 253 [hep-th/0403241] [SPIRES].

[9] R. Manvelyan and K. Mkrtchyan, *Conformal invariant interaction of a scalar field with the higher spin field in AdS_d*, *Mod. Phys. Lett.* **A 25** (2010) 1333 [arXiv:0903.0058] [SPIRES].

[10] A. Fotopoulos and M. Tsulaia, *Current Exchanges for Reducible Higher Spin Modes on AdS*, arXiv:1007.0747 [SPIRES].

[11] Y.M. Zinoviev, *Spin 3 cubic vertices in a frame-like formalism*, *JHEP* **08** (2010) 084 [arXiv:1007.0158] [SPIRES].

[12] T. Biswas and W. Siegel, *Radial dimensional reduction: (Anti) de Sitter theories from flat*, *JHEP* **07** (2002) 005 [hep-th/0203115] [SPIRES].

JHEP11(2010)116

[13] P.A.M. Dirac, *The Electron Wave Equation in De-Sitter Space*, *Annals Math.* **36** (1935) 657 [SPIRES].

[14] C. Fronsdal, *Singletons and Massless, Integral Spin Fields on de Sitter Space (Elementary Particles in a Curved Space. 7*, *Phys. Rev.* **D 20** (1979) 848 [SPIRES].

[15] R.R. Metsaev, *Massless mixed symmetry bosonic free fields in d-dimensional anti-de Sitter space-time*, *Phys. Lett.* **B 354** (1995) 78 [SPIRES].

[16] R.R. Metsaev, *Arbitrary spin massless bosonic fields in d-dimensional anti-de Sitter space*, hep-th/9810231 [SPIRES].

[17] X. Bekaert, I.L. Buchbinder, A. Pashnev and M. Tsulaia, *On higher spin theory: Strings, BRST, dimensional reductions*, *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) S1457 [hep-th/0312252] [SPIRES].

[18] K. Hallowell and A. Waldron, *Constant curvature algebras and higher spin action generating functions*, *Nucl. Phys.* **B 724** (2005) 453 [hep-th/0505255] [SPIRES].

[19] G. Barnich and M. Grigoriev, *Parent form for higher spin fields on anti-de Sitter space*, *JHEP* **08** (2006) 013 [hep-th/0602166] [SPIRES].

[20] N. Boulanger, C. Iazeolla and P. Sundell, *Unfolding Mixed-Symmetry Fields in AdS and the BMV Conjecture: I. General Formalism*, *JHEP* **07** (2009) 013 [arXiv:0812.3615] [SPIRES].

[21] N. Boulanger, C. Iazeolla and P. Sundell, *Unfolding Mixed-Symmetry Fields in AdS and the BMV Conjecture: II. Oscillator Realization*, *JHEP* **07** (2009) 014 [arXiv:0812.4438] [SPIRES].

[22] K.B. Alkalaev and M. Grigoriev, *Unified BRST description of AdS gauge fields*, *Nucl. Phys.* **B 835** (2010) 197 [arXiv:0910.2690] [SPIRES].

[23] A. Fotopoulos, K.L. Panigrahi and M. Tsulaia, *Lagrangian formulation of higher spin theories on AdS space*, *Phys. Rev.* **D 74** (2006) 085029 [hep-th/0607248] [SPIRES].

[24] D. Francia, J. Mourad and A. Sagnotti, *(A)dS exchanges and partially-massless higher spins*, *Nucl. Phys.* **B 804** (2008) 383 [arXiv:0803.3832] [SPIRES].

[25] X. Bekaert and N. Boulanger, *Gauge invariants and Killing tensors in higher-spin gauge theories*, *Nucl. Phys.* **B 722** (2005) 225 [hep-th/0505068] [SPIRES].

[26] G. Barnich, N. Bouatta and M. Grigoriev, *Surface charges and dynamical Killing tensors for higher spin gauge fields in constant curvature spaces*, *JHEP* **10** (2005) 010 [hep-th/0507138] [SPIRES].

[27] J. Mickelsson and J. Niederle, *Contractions of representations of de Sitter groups*, *Commun. Math. Phys.* **27** (1972) 167 [SPIRES].

[28] B. de Wit and I. Herger, *Anti-de Sitter supersymmetry*, *Lect. Notes Phys.* **541** (2000) 79 [hep-th/9908005] [SPIRES].

[29] P. Breitenlohner and D.Z. Freedman, *Stability in Gauged Extended Supergravity*, *Ann. Phys.* **144** (1982) 249 [SPIRES].

[30] X. Bekaert, *Comments on higher-spin symmetries*, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **6** (2009) 285 [arXiv:0807.4223] [SPIRES].

[31] D. Anselmi, *Higher-spin current multiplets in operator-product expansions*, *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 1383 [hep-th/9906167] [SPIRES].

JHEP11(2010)116

[32] M.A. Vasiliev, *Higher spin gauge theories: Star-product and AdS space*, hep-th/9910096 [SPIRES].

[33] S.E. Konstein, M.A. Vasiliev and V.N. Zaikin, *Conformal higher spin currents in any dimension and AdS/CFT correspondence*, *JHEP* **12** (2000) 018 [hep-th/0010239] [SPIRES].

[34] O.A. Gelfond, E.D. Skvortsov and M.A. Vasiliev, *Higher spin conformal currents in Minkowski space*, *Theor. Math. Phys.* **154** (2008) 294 [hep-th/0601106] [SPIRES].

[35] S.F. Prokushkin and M.A. Vasiliev, *Currents of arbitrary spin in AdS_3*, *Phys. Lett.* **B 464** (1999) 53 [hep-th/9906149] [SPIRES].

[36] S.F. Prokushkin and M.A. Vasiliev, *Cohomology of arbitrary spin currents in AdS_3*, *Theor. Math. Phys.* **123** (2000) 415 [hep-th/9907020] [SPIRES].

[37] F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer, *Deformation Theory and Quantization. 1. Deformations of Symplectic Structures*, *Ann. Phys.* **111** (1978) 61 [SPIRES] [SPIRES].

[38] F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer, *Deformation Theory and Quantization. 2. Physical Applications*, *Ann. Phys.* **111** (1978) 111 [SPIRES].

[39] M.A. Vasiliev, *Actions, charges and off-shell fields in the unfolded dynamics approach*, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **3** (2006) 37 [hep-th/0504090] [SPIRES].

[40] M. Grigoriev, *Off-shell gauge fields from BRST quantization*, hep-th/0605089 [SPIRES].

[41] M. Taronna, *Higher Spins and String Interactions*, MSc Thesis, University of Pisa, Pisa Italy (2009) arXiv:1005.3061 [SPIRES].

[42] A. Sagnotti and M. Taronna, *String Lessons for Higher-Spin Interactions*, *Nucl. Phys.* **B 842** (2011) 299 [arXiv:1006.5242] [SPIRES].

[43] M. Flato and C. Frønsdal, *One Massless Particle Equals Two Dirac Singletons: Elementary Particles in a Curved Space. 6*, *Lett. Math. Phys.* **2** (1978) 421 [SPIRES].

[44] A. Sagnotti, E. Sezgin and P. Sundell, *On higher spins with a strong $Sp(2,\mathbb{R})$ condition*, in the proceedings of the *First Solvay Workshop on Higher-Spin Gauge Theories*, Brussels Belgium (2004) hep-th/0501156 [SPIRES].

[45] D.P. Sorokin and M.A. Vasiliev, *Reducible higher-spin multiplets in flat and AdS spaces and their geometric frame-like formulation*, *Nucl. Phys.* **B 809** (2009) 110 [arXiv:0807.0206] [SPIRES].

[46] D. Francia and A. Sagnotti, *On the geometry of higher-spin gauge fields*, *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) S473 [hep-th/0212185] [SPIRES].

[47] D. Francia and A. Sagnotti, *Higher-spin geometry and string theory*, *J. Phys. Conf. Ser.* **33** (2006) 57 [hep-th/0601199] [SPIRES].

[48] I.L. Buchbinder, A.V. Galajinsky and V.A. Krykhtin, *Quartet unconstrained formulation for massless higher spin fields*, *Nucl. Phys.* **B 779** (2007) 155 [hep-th/0702161] [SPIRES].

[49] A. Sagnotti and M. Tsulaia, *On higher spins and the tensionless limit of string theory*, *Nucl. Phys.* **B 682** (2004) 83 [hep-th/0311257] [SPIRES].

[50] I.L. Buchbinder, A. Fotopoulos, A.C. Petkou and M. Tsulaia, *Constructing the cubic interaction vertex of higher spin gauge fields*, *Phys. Rev.* **D 74** (2006) 105018 [hep-th/0609082] [SPIRES].

JHEP11(2010)116

[51] A. Fotopoulos and M. Tsulaia, *Interacting Higher Spins and the High Energy Limit of the Bosonic String*, *Phys. Rev.* **D 76** (2007) 025014 [arXiv:0705.2939] [SPIRES].

[52] A. Fotopoulos and M. Tsulaia, *Current Exchanges for Reducible Higher Spin Multiplets and Gauge Fixing*, *JHEP* **10** (2009) 050 [arXiv:0907.4061] [SPIRES].

[53] D. Francia, *String theory triplets and higher-spin curvatures*, *Phys. Lett.* **B 690** (2010) 90 [arXiv:1001.5003] [SPIRES].

[54] E. Sezgin and P. Sundell, *Massless higher spins and holography*, *Nucl. Phys.* **B 644** (2002) 303 [*Erratum ibid.* **B 660** (2003) 403] [hep-th/0205131] [SPIRES].

[55] I.R. Klebanov and A.M. Polyakov, *AdS dual of the critical $O(N)$ vector model*, *Phys. Lett.* **B 550** (2002) 213 [hep-th/0210114] [SPIRES].

[56] T. Leonhardt, A. Meziane and W. Rühl, *On the proposed AdS dual of the critical $O(N)$ σ-model for any dimension $2 < d < 4$*, *Phys. Lett.* **B 555** (2003) 271 [hep-th/0211092] [SPIRES].

[57] A.C. Petkou, *Evaluating the AdS dual of the critical $O(N)$ vector model*, *JHEP* **03** (2003) 049 [hep-th/0302063] [SPIRES].

[58] E. Sezgin and P. Sundell, *Holography in 4D (super) higher spin theories and a test via cubic scalar couplings*, *JHEP* **07** (2005) 044 [hep-th/0305040] [SPIRES].

[59] S. Giombi and X. Yin, *Higher Spin Gauge Theory and Holography: The Three-Point Functions*, *JHEP* **09** (2010) 115 [arXiv:0912.3462] [SPIRES].

[60] S. Giombi and X. Yin, *Higher Spins in AdS and Twistorial Holography*, arXiv:1004.3736 [SPIRES].

JHEP11(2010)116

Annexe C

Troisième article

Ce chapitre contient l'article [77] intitulé "Symmetries and currents of the ideal and unitary Fermi gases" publié dans *JHEP* en 2012 et écrit en collaboration avec Xavier Bekaert et Sergej Moroz.

Published for SISSA by Springer

Received: *November 26, 2011*
Revised: *February 4, 2012*
Accepted: *February 5, 2012*
Published: *February 22, 2012*

Symmetries and currents of the ideal and unitary Fermi gases

Xavier Bekaert,[a] **Elisa Meunier**[a] **and Sergej Moroz**[b,c]

[a] *Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, Unité Mixte de Recherche* 7350 *du CNRS, Fédération de Recherche* 2964 *Denis Poisson, Université François Rabelais, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France*

[b] *Institut für Theoretische Physik, Philosophenweg 16, D-69120 Heidelberg, Germany*

[c] *Department of Physics, University of Washington, Seattle, WA 98195-1560, U.S.A.*

E-mail: xavier.bekaert@lmpt.univ-tours.fr, elisa.meunier@lmpt.univ-tours.fr, morozs@uw.edu

Abstract: The maximal algebra of symmetries of the free single-particle Schrödinger equation is determined and its relevance for the holographic duality in non-relativistic Fermi systems is investigated. This algebra of symmetries is an infinite dimensional extension of the Schrödinger algebra, it is isomorphic to the Weyl algebra of quantum observables, and it may be interpreted as a non-relativistic higher-spin algebra. The associated infinite collection of Noether currents bilinear in the fermions are derived from their relativistic counterparts via a light-like dimensional reduction. The minimal coupling of these currents to background sources is rewritten in a compact way by making use of Weyl quantisation. Pushing forward the similarities with the holographic correspondence between the minimal higher-spin gravity and the critical $O(N)$ model, a putative bulk dual of the unitary and the ideal Fermi gases is briefly discussed.

Keywords: Holography and condensed matter physics (AdS/CMT), AdS-CFT Correspondence, Space-Time Symmetries

ArXiv ePrint: 1111.3656

JHEP02(2012)113

Contents

JHEP02(2012)113

1 Introduction

The quantum many-body problem of a non-relativistic two-component Fermi gas with short-range attractive interactions is a longstanding problem in condensed matter physics. At low temperature, the system is known to be superfluid and undergoes a smooth crossover from the Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) to the Bose-Einstein-Condensate (BEC) regime as the two-body attraction is increased (see [1–4] for recent reviews). Considerable progress in atomic physics in the two last decades allowed to study the BCS to BEC crossover with unprecedented accuracy. Of special theoretical interest is the regime in between BCS and BEC known as the unitary Fermi gas.[1] In three spatial dimensions, the unitary Fermi gas is intrinsically strongly coupled and no obvious small parameter is available, precluding the reliable application of a perturbative expansion. In this way, the unitary Fermi gas provides a great theoretical challenge and requires the development and subsequent applications of advanced non-perturbative many-body methods.

A special property of the unitary Fermi gas in vacuum (describing few-body physics) is the invariance of the action under the scale transformations and more generally under the Schrödinger group of Niederer and Hagen [5, 6]. This group of space-time symmetries provides a direct non-relativistic analogue of the conformal group. Although the general proof is still lacking, it is believed that for the unitary Fermi gas there is no conformal anomaly and thus that the Schrödinger symmetry survives quantisation [7–10]. Motivated by this, Nishida and Son extended the general methods of conformal field theory (CFT) to the realm of non-relativistic physics and applied them to the unitary Fermi gas [11, 12].

Due to the non-relativistic conformal symmetry of the unitary Fermi gas in vacuum, Son, Balasubramanian and McGreevy [13, 14] recently have initiated an attempt to apply the methods of the gauge-gravity duality to this system. While their seminal papers revived the interest of mathematical and high-energy physicists toward non-relativistic symmetries, they mostly triggered an intensive body of research for the putative holographic duals of various non-relativistic systems originating from condensed matter theory. However the initial target, *i.e.* a holographic description of the unitary Fermi gas, remains tantalising despite several steps forward [15–17]. As mentioned by Son in [13], a possible direction of investigation is the unitary Fermi gas with $\mathrm{U}(1) \times Sp\,(2N)$ symmetry introduced in [18, 19] (see also [20]) whose gravity dual might be a classical theory in the large-N limit. Notably, this gravity theory would have an infinite tower of fields with unbounded spin, similar to the conjectured anti de Sitter (AdS) dual of the critical $O(N)$ model [21]. Interestingly, an impressive check of this latter conjecture has recently been performed for three-point correlation functions [22, 23]. These encouraging results strengthen the natural expectation that this AdS/O(N) model correspondence provides a proper source of inspiration for an AdS/unitary-fermions correspondence. Our recent letter [24] aims to represent a further step towards a precise conjecture along these lines. The goal of the present work is to present in detail some findings about the free and unitary fermions that support our proposal. Some of these results were already announced in [24] without a proof. Although

[1] In this regime the two-body low-energy cross section saturates the maximal bound originating from the unitarity of the S-matrix. This property gives rise to the term "unitary" Fermi gas.

JHEP02(2012)113

the body of our paper focuses on the CFT (boundary) side, some comments on the gravity (bulk) side and the holographic correspondence are in order.

The AdS/O(N) correspondence proposed by Klebanov and Polyakov [21] pursuing earlier insights of Sezgin and Sundell [25] involves, on the boundary, a multiplet of N massless scalar fields in the fundamental representation of $O(N)$ with a quartic $O(N)$-invariant interaction and, in the bulk, an infinite tower of symmetric tensor gauge fields with interactions governed by Vasiliev equations [26] (see [27–31] for introduction). The crucial point in this correspondence is that there is an infinite collection of $O(N)$-singlet symmetric currents of all even ranks, bilinear in the boundary scalar field, that precisely matches the spectrum of the higher-spin gauge theory. These boundary currents are conformal primary fields and are exactly conserved for the free theory (while only at leading order in $1/N$ for the interacting theory) so their bulk duals should indeed be gauge fields. They are actually the Noether currents of the maximal symmetry algebra of the massless Klein-Gordon equation [32], that is the infinite-dimensional symmetry algebra of a free conformal scalar field. This algebra of rigid symmetries is isomorphic to the algebra which is gauged in the bulk higher-spin theory [26]. A precise statement of the correspondence is that the generating functional of the connected correlators of the boundary currents is given, in the large-N limit, by the on-shell classical action of the bulk fields expressed in terms of the boundary data. In the large-N limit, the generating functionals of the critical theory and of the free theory are related by a Legendre transformation, which should be dual to a mere change of boundary conditions for the same bulk theory, as follows from the general analysis of [33, 34].

So what could be an educated guess for a gravity dual of unitary fermions? We will turn back to this cardinal issue in the conclusion but, before, let us start by looking for the non-relativistic analogue of the above-mentioned construction. As was found in [18, 19], a sensible large-N extension of the unitary Fermi gas has $\mathrm{U}(1) \times Sp\,(2N)$ symmetry[2] and involves a multiplet of $2N$ non-relativistic massive fermions transforming in the fundamental representation of $Sp\,(2N)$. The general arguments of [34] imply that, in the large-N limit, the Helmholtz free energies of unitary fermions and of non-interacting fermions are related by a Legendre transformation. Thus, in this limit the results obtained from the free theory are of direct interest for the theoretically more challenging critical regime at the unitarity point. This important observation motivated us to focus in this paper on a collection of free non-relativistic massive fermions in the fundamental representation of $Sp\,(2N)$ and to study its symmetries and currents.

The summary of our main results and the plan of the paper are as follows: In section 2, we start with an introduction to the unitary Fermi gas and its large-N extension. We also present the general arguments of [34] and demonstrate that, in the large-N limit, the generating functionals of the unitary Fermi gas and of the ideal Fermi gas are related by a Legendre transformation. In section 3, the maximal symmetry algebra of the free Schrödinger equation is identified and shown to be isomorphic to the Weyl algebra

[2]Note that we are following the physicist convention here and define the compact symplectic group as $Sp\,(2N) := \mathrm{U}(2N) \cap Sp\,(2N, \mathbb{C})$. Alternatively, physicists also frequently use the notation $USp\,(2N)$ while mathematicians usually refer to this group as $Sp\,(N)$.

of quantum observables in the time-reversed Heisenberg picture. It provides an infinite-dimensional extension of the Schrödinger algebra, as was recognised in [35]. In section 4, an infinite collection of $Sp(2N)$ or $O(N)$ singlet symmetric tensors of all ranks, bilinear in the fermionic field is obtained from the corresponding relativistic currents through a dimensional reduction along a light-like direction. In section 5, the coupling of these bilinears to external sources is considered and written in a compact form by making use of the Weyl quantisation. This allows us to identify the algebra of gauge symmetries with the algebra of quantum observables with arbitrary time dependence. These symmetries can be thought as the higher-spin generalisations of the non-relativistic general coordinate and Weyl symmetries discussed in [36]. In section 6, we summarise our results and review our proposal [24] of a possible gravity dual of the unitary and the ideal Fermi gases: the $O(N)$-singlet bilinear sector of the large-N extension of the free or unitary fermions in d space dimensions should be dual to the null-reduction of classical Vasiliev theory on AdS_{d+3} with $\mathfrak{u}(2)$-valued tensor gauge fields of all integer ranks and suitable boundary conditions. In particular, the bulk dual of the "physical" (i.e. $N = 1$, $d = 3$) unitary UV-stable Fermi gas would be the null dimensional reduction of the $\mathfrak{u}(2)$ higher-spin gauge theory on AdS_6 with the exotic boundary condition for the complex scalar field dual to the Cooper-pair field.

Wherever possible, we will stick to the notations and conventions of [13]. Except in appendix A, we set $\hbar = 1$.

2 Unitary Fermi gas and its large-N extension

2.1 Action and symmetries

Nowadays a dilute two-component Fermi gas near a broad Feshbach resonance can be cooled with the help of lasers to ultra-low temperatures $\sim 10^{-9}$K, and is studied extensively in experiments with ultracold atoms. In three spatial dimensions ($d = 3$) at low densities it can be very well described by the microscopic action

$$S[\,\psi\,;c_0] = \int dt \int d\mathbf{x} \left[\sum_{\alpha=\uparrow,\downarrow} \psi^*_\alpha \left(i\partial_t + \frac{\Delta}{2m} + \mu \right) \psi_\alpha \;-\; c_0\, \psi^*_\downarrow \psi^*_\uparrow \psi_\uparrow \psi_\downarrow \right], \qquad (2.1)$$

where the two species of fermionic atoms of mass m are represented by the Grassmann-odd fields $\psi_\uparrow$ and $\psi_\downarrow$, while μ stands for the chemical potential, and c_0 measures the microscopic interaction strength. In actual experiments with ultracold gases the two different components denote different hyperfine eigenstates which we denote here for simplicity by $\uparrow$ and $\downarrow$ but which have nothing to do with genuine spins "up" and "down".[3] This action has an internal U(2) symmetry. Due to the contact nature of the interaction term, the non-relativistic quantum field theory defined by the action (2.1) must be regularised. This can be achieved, for example, by introducing a sharp ultraviolet cutoff. Subsequently, the bare interaction parameter c_0 is related via renormalisation to a low-energy observable: the

[3] Note that due to the lack of the spin-statistics theorem for non-relativistic quantum field theories, the spin of fermions (and thus the number of components) is not constrained [37, 38]. For example, we can have spinless one-component fermions.

JHEP02(2012)113

s-wave scattering length a. The concrete functional relation between c_0 and a depends on the regularisation scheme and will not be presented here. In this paper we will be mainly interested in excitations above the vacuum state, i.e. a system at zero temperature and zero density. For $a \leqslant 0$ there are no bound states in the two-component Fermi gas and in this range the vacuum corresponds to $\mu = 0$ (see e.g. [18] for a detailed explanation). Due to the presence of a universal two-body dimer bound state for $a > 0$, the chemical potential in vacuum is negative and is related to the scattering length via $\mu = -\frac{1}{2ma^2}$. In any case, the only length scale in the renormalised theory in vacuum is given by the scattering length a.

The non-interacting Fermi gas is obtained for $a = 0$ which translates into $c_0 = 0$. In vacuum it is obviously scale invariant. Another theoretically interesting regime is the strongly interacting unitary Fermi gas, where $a^{-1} = 0$. The only length scale defined by the scattering length drops out in this regime. Hence the classical theory for the unitary Fermi gas is scale invariant. Although there is no general proof yet, there are numerous theoretical and experimental evidences collected by now that the quantum unitary Fermi gas in vacuum is also scale invariant.[4] More precisely, the action of the unitary Fermi gas is invariant under the Schrödinger symmetry, which will be introduced in section 3, and the theory is believed to be an example of a strongly interacting non-relativistic CFT [7, 11].

A sensible large-N extension of the unitary Fermi gas that preserves the pairing structure of the interaction term was found in [18, 19]. The model with N "flavors" is defined by the action

$$S[\,\psi\,;c_0,N] = \int dt \int d\mathbf{x} \left[\psi^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\Delta}{2m} + \mu\right)\psi - \frac{c_0}{4N}\left|\psi^T \mathbb{J}\,\psi\right|^2\right], \tag{2.2}$$

where ψ denotes a multiplet of $2N$ massive fermions with components $\psi^A = \psi^{\alpha,a}$ with $\alpha = \uparrow,\downarrow$ and $a = 1,\ldots,N$. The symbol $\mathbb{J}$ represents the symplectic $2N \times 2N$ matrix $\mathbb{J}_{AB} = \epsilon_{\alpha\beta} \otimes \delta_{ab}$ which has the block form $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. For $N = 1$, one recovers the original model (2.1), i.e. $S[\,\psi\,;c_0,N=1] = S[\,\psi\,;c_0]$. As far as internal symmetries are concerned, the kinetic term in eq. (2.2) is invariant under $\mathrm{U}(2N)$, while the quartic interaction is invariant under $\mathrm{U}(1) \times Sp\,(2N,\mathbb{C})$. As a result, the full interacting theory is invariant under the intersection of $\mathrm{U}(2N)$ with $\mathrm{U}(1) \times Sp\,(2N,\mathbb{C})$, which happens to be $\mathrm{U}(1) \times Sp\,(2N)$ (see the footnote in section 1). For $N = 1$, one finds as mentioned above $\mathrm{U}(1) \times Sp\,(2) \cong \mathrm{U}(2)$ as the internal symmetry group, since $Sp\,(2) \cong \mathrm{SU}(2)$.

The preceding construction introduces a new integer parameter into the theory and resembles in various respects the structure of the relativistic linear $O(N)$ models. While the analogy is suggestive, there is an important difference which is worth to be emphasised already here. On the one hand, in the relativistic $O(N)$ model the internal symmetries of the free and of the critical theory happen to be the same. On the other hand, the internal

[4] In other words there is no quantum anomaly associated with the scale transformation. Interestingly, the unitary Bose gas suffers from a quantum scale anomaly, known in the nuclear and atomic physics as the Efimov effect. Presence of this anomaly hinders an experimental realisation of a stable unitary Bose gas in experiments with ultracold quantum gases.

JHEP02(2012)113

symmetry of the kinetic part of the action (2.2) is larger than the internal symmetry of the full action. Thus, the $N > 1$ extensions of the ideal and of the unitary Fermi gas have different internal symmetries. This makes the relation between these two theories more subtle than in the relativistic $O(N)$ case.

Let us finally note that for general N flavors, $\mathrm{U}(2) \times O(N)$ is a subgroup of $\mathrm{U}(1) \times Sp\,(2N)$. Mathematically, the subgroups $\mathrm{U}(2)$ and $O(N)$ are centralisers[5] of each other inside $\mathrm{U}(1) \times Sp\,(2N)$,[6] as they transform independently spin and flavor indices. In the following, $\mathrm{U}(2) \times O(N)$ symmetry subgroup will play a central role in the suggestion of the putative holographic dual of the unitary Fermi gas.

2.2 Ideal and unitary gases as Legendre conjugates

The celebrated BCS theory has taught us that the physical phenomena of superfluidity and superconductivity have their origin in the condensation of particle-particle Cooper pairs at low temperature. From this insight, it becomes clear that a proper understanding of physics of these Cooper pairs is of a central importance for quantum Fermi systems. By applying the general observation of Gubser and Klebanov on the double trace deformations of conformal field theories [34] to the large-N extension of the unitary Fermi gas, we show here that the generating functionals of Cooper pair connected correlators in the non-interacting and in the unitary Fermi gases are related by a Legendre transformation in the large N limit (or, similarly, in the mean field approximation).

The following discussion will closely parallel the derivation of Gubser and Klebanov that was introduced for an infrared relevant double trace deformation of a conformal field theory like, for example, the relativistic linear $O(N)$ model in three space-time dimensions. There is one important difference between the relativistic and the non-relativistic problems of interest that we would like to emphasize here. In the $O(N)$ model , the quartic interaction term is an infrared relevant perturbation of a free CFT triggering the renormalisation group flow to approach the infrared stable Wilson-Fisher fixed point. Due to a distinct power counting in the non-relativistic physics, the four-fermion contact interaction in (2.1) is infrared irrelevant in the most physically interesting case of three spatial dimensions. This implies that the Gaussian fixed point is infrared stable and the unitarity fixed point (in vacuum) is in fact approached in the ultraviolet of the renormalisation group flow.

With a slight abuse of terminology, by "Cooper pair" we mean here the $Sp\,(2N)$-singlet bilinear

$$k(t,\mathbf{x}) \;:=\; \frac{1}{2}\,\psi^T \mathbb{J}\,\psi \;=\; \frac{1}{2}\,\psi^A\,\mathbb{J}_{AB}\,\psi^B \;=\; \sum_{a=1}^{N} \psi_{\uparrow,\,a}\,\psi_{\downarrow,\,a}\,, \tag{2.3}$$

[5] Let G_1 and G_2 be two subgroups of G. The subgroup G_1 is the centraliser of $G_2 \subseteq G$ if and only if G_1 is the largest subgroup of G such that all its elements commute with all elements of G_2. Usually, the centraliser of $G_2 \subseteq G$ is denoted by $C(G_2)$ $(= G_1$ here). Such a pair of subgroups G_1 and G_2 is sometimes called a Howe dual pair by mathematicians.

[6] This follows from the fact that $Sp\,(2) \times O(N)$ is a subgroup of $Sp\,(2N)$ where the subgroups $Sp\,(2)$ and $O(N)$ are centralisers of each other. This property plays an important role (though for a different reason) in the construction of higher-spin algebras [27–31].

JHEP02(2012)113

which reproduces the genuine Cooper pair $\psi_\uparrow\psi_\downarrow$ when $N = 1$. The generating functional $W[\,\varphi\,;c_0,N]$ of Cooper-pair connected correlators in the Fermi gas described by (2.2) is defined by the path integral

$$\exp i\,W[\,\varphi\,;c_0,N] \;=\; \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi^\dagger \;\exp i\,S[\,\psi\,,\varphi\,;c_0,N]\,, \tag{2.4}$$

where

$$S[\,\psi\,,\varphi\,;c_0,N] \;:=\; S[\,\psi\,;c_0,N] \;-\; \int dt\,d\mathbf{x}\,\big(\,k\,\varphi^* + k^*\varphi\,\big) \tag{2.5}$$

is the action in the presence of an external charged scalar field φ coupled to the Cooper pair k.

In particular, the free ($c_0 = 0$, infrared fixed point in $d = 3$) action in the presence of the source φ reads

$$S_{\rm free}[\,\psi\,,\varphi] \;:=\; S[\,\psi\,,\varphi\,;0,N] \;=\; \int dt\,d\mathbf{x}\left[\psi^\dagger\left(i\partial_t + \frac{\Delta}{2m} + \mu\right)\psi \;-\; \big(\,k\,\varphi^* + k^*\varphi\,\big)\right], \tag{2.6}$$

and is quadratic in the dynamical field ψ (since the kinetic term and the Cooper pair k are). This quadratic functional is usually rewritten in a more elegant form by making use of the Nambu-Gor'kov field

$$\Psi \;=\; \begin{pmatrix}\psi_\uparrow\\ \psi_\downarrow^*\end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Notice that ψ and Ψ are not related by a unitary transformation (not even by a linear or anti-linear transformation) but the canonical anti-commutation relations are preserved. In terms of the Nambu-Gor'kov field, the quadratic action (2.6) takes the form

$$S_{\rm free}[\,\Psi\,,\varphi] \;=\; \int dt\,d\mathbf{x}\,\Psi^\dagger\begin{pmatrix} i\partial_t + (\frac{\Delta}{2m}+\mu) & \varphi\\ \varphi^* & i\partial_t - (\frac{\Delta}{2m}+\mu)\end{pmatrix}\Psi\,. \tag{2.8}$$

The generating functional of connected correlators of Cooper pairs in the ideal Fermi gas is $W_{\rm free}[\,\varphi\,;N] \;:=\; W[\,\varphi\,;0,N]$. It can easily be evaluated formally since the path integral (2.4) is Gaussian in such case:

$$W_{\rm free}[\,\varphi\,;N] \;=\; -iN\,{\rm Tr}\log\begin{pmatrix} i\partial_t + (\frac{\Delta}{2m}+\mu) & \varphi\\ \varphi^* & i\partial_t - (\frac{\Delta}{2m}+\mu)\end{pmatrix} \;=:\; N\,W_{\rm free}[\,\varphi\,] \tag{2.9}$$

providing an explicit solution of the infrared stable conformal field theory in $d = 3$. In order to prepare the ground for the later discussion, let us already here introduce the field

$$\pi \;:=\; \frac{\delta W_{\rm free}[\varphi]}{\delta\varphi^*}\,. \tag{2.10}$$

conjugate to the free field φ, and the Legendre transformation

$$\Gamma_{\rm free}[\,\pi\,] \;:=\; W_{\rm free}[\,\varphi] \;-\; \int dt\,d\mathbf{x}\,\big(\,\varphi\,\pi^* + \varphi^*\,\pi\,\big)\,, \tag{2.11}$$

of the free connected correlator generating functional $W_{\rm free}[\varphi]$.

In order to relate this to the interacting theory, we use a standard trick: the Hubbard-Stratonovich transformation which reformulates any system of particles with a two-body interaction equivalently as a system of particles interacting only via a fluctuating auxiliary field. More precisely, here one transforms the path integral over the fundamental fermionic field Ψ with quartic vertex into a Gaussian path integral via the introduction of an auxiliary complex scalar field ϕ mediating the interaction in the particle-particle channel. This auxiliary field is called "dimer" in the literature on the unitary Fermi gas. More concretely, on the right-hand-side of (2.4) one can introduce a Gaussian path integral over the auxiliary field ϕ to get

$$\exp i\, W[\,\varphi\,;c_0,N] \;\propto\; \int \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\Psi^\dagger\,\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^*\;\exp i\, S_{\rm HS}[\,\Psi\,,\phi\,,\varphi\,;c_0,N]\,, \tag{2.12}$$

where $S_{\rm HS}[\,\Psi\,,\phi\,,\varphi\,;c_0,N]$ is the Hubbard-Stratonovich transformation of the action (2.5). It is equal to the sum of a chemical-potential like term for the dimer plus the free action in presence of the source φ shifted by the dimer ϕ,

$$S_{\rm HS}[\,\Psi\,,\phi\,,\varphi\,;c_0,N] \;:=\; \frac{4N}{c_0}\int dt\,d\mathbf{x}\,|\phi|^2 \;+\; S_{\rm free}[\,\Psi\,,\varphi+\phi]\,. \tag{2.13}$$

In the following, it is convenient to work directly with the shifted dimer field $\phi=\phi+\varphi$. The integral over the dynamical field Ψ in (2.12) can now be evaluated and gives as a result

$$\exp i\, W[\,\varphi\,;c_0,N] \;\propto\; \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^*\;\exp i\, S_{\rm eff}[\phi\,,\varphi\,;c_0,N]\,, \tag{2.14}$$

where the effective action for the dimer field depends linearly on the number N of flavors: $S_{\rm eff}[\,\phi\,,\varphi\,;c_0,N] \;=\; N\,S_{\rm eff}[\,\phi\,,\varphi\,;c_0]$ and is the sum of the chemical-potential like term plus the free effective action for the auxiliary field (2.9)

$$S_{\rm eff}[\phi\,,\varphi\,;c_0] \;:=\; \frac{4}{c_0}\int dt\,d\mathbf{x}\,|\,\phi-\varphi|^2 \;+\; W_{\rm free}[\phi]\,. \tag{2.15}$$

The linear dependence of the effective action on the parameter N means that $1/N$ controls the loop expansion of the dimer effective theory. The large-N limit allows for a saddle point approximation of the integral (2.14) over the dimer field:

$$W[\,\varphi\,;c_0,N] \;=\; N\,W_{\rm mean}[\,\varphi\,;c_0] \;+\; \mathcal{O}(1)\,, \tag{2.16}$$

where

$$W_{\rm mean}[\,\varphi\,;c_0] \;:=\; S_{\rm eff}[\,\phi(\varphi)\,,\varphi\,;c_0] \tag{2.17}$$

is the celebrated "mean field" approximation of the generating functional of connected correlators. Notice that in the physically relevant $N=1$ case, this term is *a priori* of the same order as the $1/N$ corrections. Nevertheless, the mean field approximation becomes exact at $N=\infty$, providing an explicit relation between the generating functionals of the free and interacting theory:

$$W_{\rm mean}[\,\varphi\,;c_0] \;=\; \frac{4}{c_0}\int dt\,d\mathbf{x}\,|\,\phi(\varphi)-\varphi|^2 \;+\; W_{\rm free}[\phi(\varphi)]\,. \tag{2.18}$$

JHEP02(2012)113

On the right-hand-side of (2.17) and (2.18), the field ϕ depends on the source φ because it should be understood as the solution of the classical equation of motion

$$\frac{\delta S_{\rm eff}[\phi\,,\varphi\,;c_0]}{\delta\phi^*}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\delta W_{\rm free}[\phi]}{\delta\phi^*} \;=\; \frac{4}{c_0}\,(\varphi-\phi)\,. \tag{2.19}$$

Sometimes in this paper, the large-N limit and the mean field approximation will be loosely said to be equivalent. By this, we mean that the equations (2.18)–(2.19) provide an approximation for the interacting generating functional which can either be understood as the leading-order approximation in the large-N limit analogous to the 't Hooft limit in gauge theories (that is $N\to\infty$ at fixed c_0) or as the mean field approximation at fixed N (say $N=1$).

Now, two distinct limits of the approximated generating functional (2.18)–(2.19) can be considered: either a large-c_0 limit in which case the coefficient c_0/N of the quartic term in the bare action (2.2) might be kept finite (though possibly small, e.g. in the ultraviolet) or instead a small-c_0 limit in which case the coefficient c_0/N goes to zero, even if N is kept finite (though possibly large for the validity of the saddle point approximation). In both cases, one finds that the generating functionals are Legendre conjugates, but expressed in terms of different rescaled fields in the distinct limits. First, let us consider the limit $c_0\to\infty$. If one rescales the source $\varphi:=\frac{4}{c_0}\varphi$, then the equation of motion (2.19) becomes

$$\frac{\delta W_{\rm free}[\phi]}{\delta\phi^*} \;=\; \varphi+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{c_0}\Big)\,, \tag{2.20}$$

which means that the shifted dimer field and the rescaled source are exact Legendre conjugates at $c_0=\infty$. Moreover, the approximated generating functional (2.18) takes the suggestive form

$$W_{\rm mean}\Big[\,\frac{c_0\varphi}{4}\,;c_0\Big]=-\int dt\,d\mathbf{x}\big(\,\varphi\,\phi^*+\varphi^*\phi\,\big)+\frac{c_0}{4}\int dt\,d\mathbf{x}\,|\varphi|^2\;+\;W_{\rm free}[\phi(\varphi)]+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{c_0}\Big)\,. \tag{2.21}$$

Comparing with the definitions (2.10)–(2.11), one is lead to the relation

$$\lim_{c_0\to\infty}\left\{W_{\rm mean}\Big[\,\frac{c_0\varphi}{4}\,;c_0\Big]-\frac{c_0}{4}\int dt\,d\mathbf{x}\,|\,\varphi\,|^2\right\}\;=\;\Gamma_{\rm free}[\varphi]\,. \tag{2.22}$$

This result is very similar to the calculation performed in [34], the interpretation of which is very natural in the $O(N)$ model where the infrared stable Wilson-Fisher fixed point corresponds to an infinitely large dimensionful coupling. In the non-relativistic Fermi gas the above derivation is applicable to the spatial dimension $d<2$, where the unitary fixed point is infrared stable.

In $d>2$ the unitarity fixed point is ultraviolet stable which in regularisation with a sharp cutoff corresponds to the limit $c_0\to 0$. It appears therefore that the limit $c_0\to 0$ is necessary in $d>2$ for the unitary Fermi gas.[7] So let us now consider the limit $c_0\to 0$ and

[7] Note, however, that $c_0\to\infty$ in any spatial dimension for the unitary Fermi gas in dimensional regularisation [12].

rescale the shifted dimer field $\tilde{\phi} := \frac{4}{c_0}\phi$. If we express the generating functional of the free theory in terms of the rescaled dimer field,

$$\tilde{W}_{\text{free}}[\,\tilde{\phi}\,] \;:=\; W_{\text{free}}\left[\frac{c_0}{4}\tilde{\phi}\right], \tag{2.23}$$

then the equation of motion (2.19) reads

$$\frac{\delta \tilde{W}_{\text{free}}[\tilde{\phi}]}{\delta \tilde{\phi}^*} \;=\; \varphi + \mathcal{O}\Big(c_0\Big)\,. \tag{2.24}$$

Thus the source φ and the rescaled dimer $\tilde{\phi}$ form a Legendre conjugate pair in the limit $c_0 \to 0$. In addition, if we express the generating functional of the mean field theory in terms of the rescaled dimer field,

$$\tilde{W}_{\text{mean}}[\,\tilde{\phi}\,;c_0\,] \;:=\; W_{\text{mean}}\left[\frac{c_0}{4}\tilde{\phi}\,;c_0\right], \tag{2.25}$$

then the relation (2.18) can be written as

$$\tilde{W}_{\text{mean}}\Big[\tilde{\phi}\,;c_0\Big] = -\int dt\,d\mathbf{x}\,\big(\,\varphi\,\tilde{\phi}^* + \varphi^*\tilde{\phi}\,\big) + \frac{4}{c_0}\int dt\,d\mathbf{x}\,|\varphi|^2 \;+\; \tilde{W}_{\text{free}}[\tilde{\phi}(\varphi)] \;+\; \mathcal{O}\Big(c_0\Big)\,. \tag{2.26}$$

Therefore,

$$\lim_{c_0\to 0}\left\{\tilde{W}_{\text{mean}}\left[\,\tilde{\phi}(\varphi)\;;c_0\right] \;-\; \frac{4}{c_0}\int dt\,d\mathbf{x}\,|\,\varphi\,|^2\right\} \;=\; \tilde{\Gamma}_{\text{free}}[\varphi]\,, \tag{2.27}$$

with

$$\tilde{\Gamma}_{\text{free}}[\varphi] \;:=\; \tilde{W}_{\text{free}}[\tilde{\phi}] - \int dt\,d\mathbf{x}\,\big(\,\varphi\,\tilde{\phi}^* + \varphi^*\tilde{\phi}\,\big)\,, \qquad \frac{\delta \tilde{W}_{\text{free}}[\phi]}{\delta \tilde{\phi}^*} \;=\; \varphi. \tag{2.28}$$

Thus, we just demonstrated that, up to a divergent contact term, the unitary Fermi gas in $d > 2$ is related to the ideal Fermi gas via a Legendre transformation in the large-N limit or, equivalently, in the mean field approximation.

We remark that the intimate relation between the free and unitary fermions in the large N limit gives rise to a simple relation between the scaling dimensions of the dimer field at the two fixed points

$$\Delta_\phi^{\text{free}} + \Delta_\phi^{\text{int}} = d + 2. \tag{2.29}$$

Since in the free theory $\Delta_\phi^{\text{free}} = 2\Delta_\psi = d$, this implies $\Delta_\phi^{\text{int}} = 2$. The non-trivial fixed point is physically admissible only for $0 < d < 2$ and $2 < d < 4$. Indeed, for $d > 4$ one obtains $\Delta_\phi^{\text{int}} = 2 < \frac{d}{2}$ which violates the unitarity bound. Moreover, in $d = 2$ both fixed points merge together ($\Delta_\phi^{\text{free}} = 2 = \Delta_\phi^{\text{int}}$), and only the trivial fixed point exists. Remarkably, due to simplicity of the non-relativistic vacuum, the relation (2.29) receives no $1/N$ corrections in the theory of non-relativistic fermions and thus is exact.

From the point of view of the holographic duality, the Legendre transformation corresponds to a change of the boundary condition for the bulk scalar dual to the Cooper-pair

JHEP02(2012)113

field in the same theory in the bulk [33], in agreement with the comments in [13]. More precisely, the highest of the two scaling dimensions ($\Delta_\phi^{\text{free}} = d$ and $\Delta_\phi^{\text{int}} = 2$) is denoted Δ_+ and corresponds to an infrared (IR) stable fixed point on the boundary side and to a standard (Dirichlet-like) boundary condition on the bulk side, while the lowest dimension, Δ_-, corresponds to an ultraviolet (UV) stable fixed point and to an exotic (Neumann-like) boundary condition.

We conclude that, in the large-N limit, the dimer effective theory of the ideal and the unitary Fermi gases for $0 < d < 4$ are related via a Legendre transformation and should thus share the same set of conserved currents and symmetries.[8] For this reason, although we are primarily interested in the unitary Fermi gas in the large N limit, it is sufficient from now on to focus on the theory of the ideal Fermi gas.

3 Higher symmetries of the Schrödinger equation

3.1 The Schrödinger group of kinematical symmetries

In mathematical terms, the Galilei principle of relativity is encoded in the Galilei group. For this reason the structure of this group plays an important role in non-relativistic physics [39]. In d spatial dimensions the group acts on the spatial coordinates $\mathbf{x}$ and time t as

$$(t, \mathbf{x}) \to g(t, \mathbf{x}) = (t + \beta, \mathcal{R}\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}), \tag{3.1}$$

where $\beta \in \mathbb{R}$; $\mathbf{v}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ and $\mathcal{R}$ is a rotation matrix in d spatial dimensions. In quantum mechanics, the Galilei group acts by projective representations on the Hilbert space of solutions to the Schrödinger equation when the potential is space and time translation invariant.[9] In other words, in such case any solution is transformed to a solution of the form

$$\psi(t, \mathbf{x}) \to \gamma\big(g(t, \mathbf{x})\big)\, \psi\big(g^{-1}(t, \mathbf{x})\big)\,, \tag{3.2}$$

where γ is a phase factor compatible with the group multiplication laws [40]. For example, a scalar wave function ψ describing a single particle of mass m transforms under a pure Galilei boost $g_{\mathbf{v}}$ as

$$\psi(t, \mathbf{x}) \to \exp\left[-\frac{im}{2}(\mathbf{v}^2 t - 2\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{x})\right] \psi\big(g_{\mathbf{v}}^{-1}(t, \mathbf{x})\big). \tag{3.3}$$

The presence of the mass-dependent phase factor in the transformation law implies a superselection rule forbidding the superposition of states of different masses, known as the *Bargmann superselection rule* [41]. This rule constrains the dynamics and states that every term in the Lagrangian of a non-relativistic Galilei-invariant theory must conserve the total mass. For this reason, the mass plays the role of a conserved charge in non-relativistic physics.

[8] For the interacting system, however, most of these symmetries are expected to be broken by $1/N$ corrections.

[9] Of course, for a single particle such a potential must be constant.

JHEP02(2012)113

By enlarging the Galilei group through a central extension, known as the mass operator (or alternatively the particle number operator), we can make the representations unitary [39, 40]. The centrally extended Galilean group is sometimes referred to as the *Bargmann group* [42]. Its Lie algebra consists of the following generators: the mass $\hat{M}$; one time translation $\hat{P}_t$; d spatial translations $\hat{P}_i$; $\frac{d(d-1)}{2}$ spatial rotations $\hat{M}_{ij}$ and d Galilean boosts $\hat{K}_i$. The non-trivial commutators are

$$\begin{aligned}
[\hat{M}_{ij}, \hat{M}_{kl}] &= i(\delta_{ik}\hat{M}_{jl} - \delta_{jk}\hat{M}_{il} - \delta_{il}\hat{M}_{jk} + \delta_{jl}\hat{M}_{ik})\,, \\
[\hat{M}_{ij}, \hat{K}_k] &= i(\delta_{ik}\hat{K}_j - \delta_{jk}\hat{K}_i)\,, & [\hat{M}_{ij}, \hat{P}_k] &= i(\delta_{ik}\hat{P}_j - \delta_{jk}\hat{P}_i)\,, \\
[\hat{P}_i, \hat{K}_j] &= -i\delta_{ij}\hat{M}, & [\hat{P}_t, \hat{K}_j] &= -i\hat{P}_j\,.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Notice that the commutation relations between the translation and Galilean boost generators are the canonical commutation relations of the Heisenberg algebra $\mathfrak{h}_d$ in d space dimensions (see appendix A for the definition), where the Galilean boost generators play the role of the position operators while the role of the reduced Planck constant is played by the mass.

It is remarkable that the group of space-time symmetries of the free Schrödinger equation with vanishing chemical potential

$$i\,\partial_t\psi(t,\mathbf{x}) = -\frac{\Delta}{2m}\,\psi(t,\mathbf{x}) \tag{3.5}$$

is larger than the Bargmann group if one relaxes the restriction of unit module on the factor appearing in the transformation law. Following Niederer [5], we call *kinematical symmetry of the Schrödinger equation* any transformation of the form (3.2), where γ is a complex factor compatible with the group structure, that maps solutions to solutions.[10]

First, remember that the mass is just a charge and so it has scaling dimension zero. Thus, the non-interacting system has no parameter with non-vanishing scaling dimension, which implies an additional scale symmetry. In non-relativistic physics, this symmetry scales the time and spatial coordinates differently

$$(t,\mathbf{x}) \to \left(\frac{t}{\alpha^2}\,, \frac{\mathbf{x}}{\alpha}\right), \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

This corresponds to the dynamical critical exponent $z = 2$, which determines the relative scaling of time and space coordinates.

Second, Niederer found in [5] that, in addition to the scale symmetry, a discrete inversion transformation Σ which acts on space-time as

$$(t,\mathbf{x}) \to \Sigma(t,\mathbf{x}) = \left(-\frac{1}{t}\,, \frac{\mathbf{x}}{t}\right) \tag{3.7}$$

is also a symmetry of the free Schrödinger equation. By conjugating a time translation g_β via the inversion Σ,

$$(t,\mathbf{x}) \to (\Sigma^{-1} g_\beta \Sigma)(t,\mathbf{x}) = \left(\frac{t}{1+\beta t}\,, \frac{\mathbf{x}}{1+\beta t}\right) \tag{3.8}$$

[10] Mathematicians would call such transformations a "multiplier" representation of the symmetry group.

JHEP02(2012)113

a new symmetry of the free Schrödinger equation is found [5, 6]. This transformation is known as *expansion* and is a non-relativistic analogue of the special conformal transformations. Note that a Galilean boost $g_{\mathbf{v}}$ is conjugate to a spatial translation $g_{\mathbf{a}}$ via the inversion Σ.

The extension of the Bargmann group by scale transformations and expansions is known as the *Schrödinger group* in d spatial dimensions, denoted by $Sch(d)$. Apparently this structure was known already to Jacobi (see the conclusion of [43]), but was rediscovered after the advent of quantum mechanics in [5, 6]. The Schrödinger group is the non-relativistic counterpart of the conformal group, though the former cannot be obtained as an Inönu-Wigner contraction from the latter. The Schrödinger group is simply generated by the Euclidean isometries (rotations and spatial translations), the time translations, the scale transformations and the inversion.[11] In addition to (3.4), the non-trivial commutators of the Schrödinger algebra $\mathfrak{sch}(d)$ in d spatial dimensions are

$$\begin{aligned} &[\hat{P}_i, \hat{D}] = i\hat{P}_i\,, \qquad [\hat{P}_i, \hat{C}] = -i\hat{K}_i\,, \qquad [\hat{K}_i, \hat{D}] = -i\hat{K}_i\,, \\ &[\hat{D}, \hat{C}] = 2i\hat{C}\,, \qquad [\hat{D}, \hat{P}_t] = -2i\hat{P}_t\,, \qquad [\hat{C}, \hat{P}_t] = -i\hat{D}\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Together, the time translation generator $\hat{P}_t$, the scale generator $\hat{D}$ and the expansion generator $\hat{C}$ span a subalgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ of the full Schrödinger algebra. These generators commute with the generators $\hat{M}_{ij}$ of the rotation subalgebra $\mathfrak{o}(d)$. The Schrödinger algebra has the structure of a semi-direct sum: $\mathfrak{sch}(d) = \mathfrak{h}_d \ni \big(\mathfrak{o}(d) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\big)$.

Finally, the "standard" representation of the Schrödinger algebra as differential operators of order one acting on the one-particle wave function $\psi(t,\mathbf{x})$ is

$$\begin{aligned} &\hat{P}_i = -i\partial_i, \qquad \hat{P}_t = i\partial_t, \qquad \hat{M} = m, \\ &\hat{M}_{ij} = -i(x_i\partial_j - x_j\partial_i), \\ &\hat{K}_i = mx_i + it\partial_i, \\ &\hat{D} = i\left(2\,t\,\partial_t + x^i\partial_i + \frac{d}{2}\right), \\ &\hat{C} = i\left(t^2\partial_t + t\Big(x^i\partial_i + \frac{d}{2}\Big)\right) + \frac{m}{2}\,x^2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.2 The Weyl algebra of higher symmetries

The algebra of space-time symmetries of the free single-particle Schrödinger equation is actually much larger than the Schrödinger algebra. More precisely, the Weyl algebra (see appendix A for the definition) is realised as an infinite-dimensional symmetry algebra of the free Schrödinger equation, as was pointed out in the inspiring work [35]. Here, we further prove that the Weyl algebra is the *maximal* algebra of space-time symmetries of the Schrödinger equation. In the present context, this result can be used as the non-relativistic counterpart of the theorem of Eastwood [32] on the maximal symmetry algebra of the

[11] The Galilean boosts and the expansions come "for free" (more precisely, via conjugation of the space-time translations by the inversion).

JHEP02(2012)113

massless Klein-Gordon equation (see e.g. section 4 of [44] for a review). Accordingly, the Weyl algebra (and, possibly, its proper matrix-valued extension) provides a non-relativistic higher-spin algebra which is the precise analogue of Vasiliev's (possibly extended) higher-spin algebras [26].

3.2.1 The maximal symmetry algebra of the Schrödinger equation

In order to make precise and rigorous statements analogous to the known results on the conformal scalar field, let us start with some definitions mimicking the ones of [32, 44]. A *symmetry of the Schrödinger equation* is a linear differential operator $\hat{A}(t, \hat{\mathbf{X}}, \hat{P}_t, \hat{\mathbf{P}})$ obeying to the condition

$$\widehat{S}\,\hat{A} \;=\; \hat{B}\,\widehat{S}\,, \tag{3.11}$$

for some linear differential operator $\hat{B}$, where $\widehat{S}$ is the *Schrödinger operator* defined by

$$\widehat{S} \;:=\; \hat{P}_t \;-\; \hat{H}\,, \tag{3.12}$$

and $\hat{H}$ is a Hamiltonian of a massive non-relativistic particle taking the usual form

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{P}}) = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} \;+\; V(\hat{\mathbf{X}})\,. \tag{3.13}$$

The Schrödinger equation reads

$$i\,\partial_t\psi(t,\mathbf{x}) \approx \hat{H}\psi(t,\mathbf{x}) \quad \Longleftrightarrow \widehat{S}\psi(t,\mathbf{x}) \approx 0, \tag{3.14}$$

where the "weak equality" symbol $\approx$ stands for an equality valid when the Schrödinger equation is satisfied. By definition, any symmetry $\hat{A}$ preserves the space $\mathrm{Ker}\widehat{S}$ of solutions to the Schrödinger equation (3.14): it maps any solution ψ to a solution $\psi' = \hat{A}\psi$. The general solution of the Schrödinger equation (3.14) is of course

$$\psi(t,\mathbf{x}) \;=\; \hat{U}(t)\,\psi(0,\mathbf{x})\,, \tag{3.15}$$

where

$$\hat{U}(t) = \exp(-it\hat{H}) \tag{3.16}$$

is the time evolution operator. Obviously, the time evolution

$$\hat{F}(t) \;=\; \hat{U}(t)\,\hat{F}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}})\,\hat{U}^{-1}(t) \;=\; \hat{F}\big(\hat{\mathbf{X}}(t),\hat{\mathbf{P}}(t)\big)\,, \tag{3.17}$$

of any spatial differential operator $\hat{F}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}})$ defines a symmetry of the Schrödinger equation in the above sense. It is clear that $\hat{F}(t)$ maps solutions to solutions, where the initial wave functions are related by the initial operator $\hat{F}(0) = \hat{F}$. The condition (3.11) is satisfied with $\hat{A} = \hat{B} = \hat{F}(t)$ since $i\partial_t\hat{F}(t) = [\hat{H}, \hat{F}(t)]$, which follows from (3.17). Note that (3.17) is the inversed $(t \to -t)$ time evolution of $\hat{F}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}})$ in the Heisenberg picture.[12]

[12] Notice that in [24], the inversed time evolution in the Heisenberg picture was written $\hat{F}(-t)$ in order to emphasise this fact. Here, we chose the simpler notation $\hat{F}(t)$ in order to avoid overloading the many formulas where such notations appear.

JHEP02(2012)113

A symmetry $\hat{A}$ is said to be *trivial* if $\hat{A} = \hat{O}\widehat{S}$ for some linear operator $\hat{O}$ because it maps any solution to zero. Such a trivial symmetry is always a symmetry of the Schrödinger equation, since it obeys (3.11) with $\hat{B} = \widehat{S}\hat{O}$. The algebra of trivial symmetries forms a left ideal in the algebra of linear operators endowed with the composition $\circ$ as multiplication. Furthermore, it is also a right ideal in the algebra spanned by all the symmetries of the Schrödinger equation. Two symmetries $\hat{A}_1$ and $\hat{A}_2$ are said to be *equivalent* if they differ by a trivial symmetry. The corresponding equivalence relation is denoted by a weak equality

$$\hat{A}_1 \approx \hat{A}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{A}_1 = \hat{A}_2 + \hat{O}\widehat{S}\,. \tag{3.18}$$

The *maximal symmetry algebra of the Schrödinger equation* is the complex algebra of all inequivalent symmetries of the Schrödinger equation, i.e. the algebra of all symmetries quotiented by the two-sided ideal of trivial symmetries. Let us show that *for any time-independent Hamiltonian the maximal symmetry algebra of the single-particle Schrödinger equation is isomorphic to the Weyl algebra of spatial differential operators.*[13]

The proof goes in three steps: Let $\hat{A}(t, \hat{\mathbf{X}}, \hat{P}_t, \hat{\mathbf{P}})$ be a symmetry of the Schrödinger equation. Firstly, one remarks that it is equivalent to a representative independent of the time translation generator:

$$\hat{A}(t, \hat{\mathbf{X}}, \hat{P}_t, \hat{\mathbf{P}}) \approx \hat{A}'(t, \hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{P}})\,, \tag{3.19}$$

because one may assume that the operator $\hat{A}$ has been ordered in such a way that all the operators $\hat{P}_t$ are on the right. Thus each $\hat{P}_t$ can be traded for $\hat{H}$ since $\hat{P}_t \approx \hat{H}$. Secondly, one observes that the representative $\hat{A}'$ must commute with the Schrödinger operator $\widehat{S}$. Indeed, the representative $\hat{A}'$ is also a symmetry, so it must obey to the condition $\widehat{S}\,\hat{A}' = \hat{B}'\,\widehat{S}$ which is equivalent to

$$[\widehat{S}, \hat{A}'] = (\hat{B}' - \hat{A}')\,\widehat{S}. \tag{3.20}$$

As follows from the definition (3.12) of the Schrödinger operator, the left-hand-side of this equation is equal to

$$[\widehat{S}, \hat{A}'] = i\partial_t \hat{A}' - [\hat{H}, \hat{A}'] \tag{3.21}$$

where the time derivative acts on the explicit time dependence of the operator $\hat{A}'(t, \hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{P}})$. In order to compare the left and right hand sides of eq. (3.20), let us assume that each side is ordered as before. On the one hand, the left-hand-side of eq. (3.20) is given by the expression (3.21) which does not depend on $\hat{P}_t$ since both the Hamiltonian $\hat{H}$ and the representative $\hat{A}'$ do not. On the other hand, the right-hand-side of eq. (3.20) explicitly depends on $\hat{P}_t$ due to the presence of the Schrödinger operator $\widehat{S} = \hat{P}_t - \hat{H}$. Therefore each side must vanish separately, which means that the commutator between $\hat{A}'$ and $\widehat{S}$ is zero. Thirdly, this commutation relation implies that the representative $\hat{A}'$ is the (inversed) time evolution of a spatial differential operator

$$\hat{A}'(t, \hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{P}}) \;=\; \hat{U}(t)\,\hat{A}'(0, \hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{P}})\,\hat{U}^{-1}(t)\,. \tag{3.22}$$

This becomes clear from the commutation relation (3.21) which is the Schrödinger equation in the (time reversed) Heisenberg picture. □

[13] For an n-component wave function, the maximal symmetry algebra of the Schrödinger equation is isomorphic to the tensor product between the algebra of $n \times n$ square matrices and the Weyl algebra of spatial differential operators: $M_n \otimes \mathcal{A}_d$.

3.2.2 The Schrödinger subalgebra

As should be expected, the reversed time evolution of the initial observables span all the inequivalent symmetries of *any* Schrödinger equation. But how does the Schrödinger algebra $\mathfrak{sch}(d)$ fits into this result? And what is so special about the *free* evolution?

A useful observation is that, when the particle is free ($\hat{H} = \hat{H}_{\text{free}} = \frac{\hat{P}^2}{2m}$) all the differential operators (3.10) are equivalent to polynomials at most of degree two in the time-evolved operators of positions and momenta. For instance, the mass $\hat{M} = m$ is the degenerate case of degree zero. Moreover, the time translation generator is equivalent to the quadratic Hamiltonian $\hat{P}_t \approx \hat{H}_{\text{free}} = \frac{\hat{P}^2}{2m}$ and the rotation generators can be written as the angular momentum $\hat{M}_{ij} = \hat{X}_i\hat{P}_j - \hat{X}_j\hat{P}_i$. For the other generators, it is easier to first verify this property at time $t = 0$. The Galilean boost generators evaluated at $t = 0$ are proportional to the positions, $\hat{K}^i\big|_{t=0} = m\hat{X}^i$ while the scale and expansion generators can be written as the quadratic polynomials, $\hat{D}\big|_{t=0} = -\hat{X}^i\hat{P}_i + id/2$ and $\hat{C}\big|_{t=0} = \frac{m}{2}\,\hat{X}^2$. All together, these differential operators at $t = 0$ provide a unitary representation of the Schrödinger algebra on the Hilbert space of initial one-particle wave functions. Therefore, so does the (reversed) time evolutions of these observables for *any* Hamiltonian. However, the time-dependent operator $\frac{\hat{P}^2(t)}{2m} = \exp(-i\hat{H}t)\frac{\hat{P}^2}{2m}\exp(+i\hat{H}t)$ must be identified with the generator $\hat{P}_t$ in this particular realisation of the Schrödinger algebra, but it does not correspond to the genuine Hamiltonian $\hat{H}$ (except when the particle is free) and thus in general it will not generate the genuine time evolution of the wave function. In other words, the reversed time evolution of the above-mentioned generators of degree at most two are symmetries (in the sense of our definition), they satisfy to the commutation relations of the Schrödinger algebra, but they do not have any simple physical interpretation for a generic Hamiltonian.

In general, the transformations generated by the (reversed) time evolution of some observables are not "kinematical" [45], in the sense that they do not generate transformations of the form (3.2). A kinematical transformation is generated by a first-order linear differential operator (in particular, a mere change of coordinates is generated by a vector field). In the following, the first-order symmetries of the Schrödinger equation will be called *kinematical symmetries*, while the higher-order symmetries will be denoted by *higher symmetries* (following the usage of mathematicians). Note that a higher-order linear differential operator does not generate a kinematical transformation. This explains why higher symmetries are usually not considered by physicists. Nevertheless from the mathematical perspective, the Schrödinger algebra is always a subalgebra of symmetries of any one-particle Schrödinger equation but none of its realisation generate a kinematical representation of the Schrödinger group, except for the special cases of potentials determined by Niederer [46]. As mentioned above, the simplest case is the free Hamiltonian, where the time evolution of the position and momentum operators is $\hat{\mathbf{X}}(t) = \hat{\mathbf{X}} - t\,\hat{\mathbf{P}}/m$ and $\hat{\mathbf{P}}(t) = \hat{\mathbf{P}}$. In such case, the differential operators (3.10) can be rewritten in terms of the time evolved positions and momenta,

$$\hat{P}_t \approx \frac{\hat{P}^2(t)}{2m} = \frac{\hat{P}^2}{2m} = \hat{H}_{\text{free}}\,, \qquad \hat{M} = m,$$

$$\begin{aligned}
\hat{M}^{ij} &= \hat{X}^i(t)\hat{P}^j(t) - \hat{X}^j(t)\hat{P}^i(t),\\
\hat{K}^i &= m\hat{X}^i(t),\\
\hat{D} &\approx -\hat{X}^i(t)\hat{P}_i(t) + i\frac{d}{2},\\
\hat{C} &\approx \frac{m}{2}\,\hat{X}^2(t).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Furthermore, a nice observation of [35, 47] is that all these symmetries are equivalent to polynomials of degree two in the Galilean boost and translation generators (more precisely, $\hat{M}$ is of degree zero while by definition $\hat{P}$ and $\hat{K}$ are of degree one). Indeed, one may replace everywhere $\hat{\mathbf{X}}(t) \to \hat{\mathbf{K}}/m$ and $\hat{\mathbf{P}}(t) \to \hat{\mathbf{P}}$ to get

$$\begin{aligned}
\hat{P}_t &\approx \frac{\hat{P}^2}{2m}\,,\\
\hat{M}_{ij} &= \frac{\hat{K}_i\hat{P}_j - \hat{K}_j\hat{P}_i}{m}\,,\\
\hat{D} &\approx -\frac{\hat{K}^i\hat{P}_i}{m} + i\frac{d}{2}\,,\\
\hat{C} &\approx \frac{\hat{K}^2}{2m}\,.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

This implies that *the associative algebra of polynomials in the Galilean boost and translation generators is isomorphic to the maximal symmetry algebra of the free single-particle Schrödinger equation.* In more mathematical terms, the realisation of the enveloping algebra $\mathcal{U}\big(\mathfrak{sch}(d)\big)$ of the Schrödinger algebra on the space of solutions to the free one-particle Schrödinger equation is isomorphic to the Weyl algebra $\mathcal{A}_d$ of spatial differential operators.

The proof is straightforward: As was already observed, the Galilean boost and translation generators play in the Schrödinger algebra a role equivalent to the positions and momenta in the Heisenberg algebra. Therefore, by themselves they generate algebraically the whole Weyl algebra $\mathcal{A}_d$ which has been shown to be isomorphic to the maximal symmetry algebra of the Schrödinger equation. The other generators of the Schrödinger algebra are functions of the Galilean boost and translation generators, so they cannot produce anything extra. □

3.2.3 The maximal symmetry algebra of the Schrödinger action

One should scrutinise the issue of Hermiticity of the symmetries. This is important at the level of the action principle and also for the unitarity of the representations. Let † stands for the *spatial Hermitian conjugation* with respect to the spatial Hermitian form

$$\langle\, \psi_1 \mid \psi_2 \,\rangle := \int d\mathbf{x}\, \psi_1^*(t,\mathbf{x})\, \psi_2(t,\mathbf{x})\,, \tag{3.25}$$

on the Hilbert space $L^2(\mathbb{R}^d)$ of square-integrable functions, e.g. $(\hat{X}^i)^\dagger = \hat{X}^i$ and $(\hat{P}_i)^\dagger = \hat{P}_i$. As usual, the scalar product (3.25) is time-independent for wave functions ψ_1 and ψ_2 which are solutions of the Schrödinger equation, as in (3.15). The Weyl algebra of quantum

observables is the real form of the complex Weyl algebra spanned by the spatial differential operators that are Hermitian. All Schrödinger algebra generators (3.24) at time $t = 0$ are quantum observables. However, notice that the generators (3.10) containing a time derivative (i.e. the generators of time translations, scale transformations and expansions) are, in general, not Hermitian with respect to the spatial conjugation. Actually, the spatial conjugate of the time derivative is not well defined since one is not allowed to integrate it by part in (3.25). The apparent paradox can be solved if one restricts the domain of definition of the generators to wave functions which are solutions of the Schrödinger operator, because then the generators are equivalent to the observables (3.23).

The spatial Hermitian conjugation can be extend to space-time differential operators. The *space-time Hermitian conjugation* will be denoted by the same symbol † although it is the Hermitian conjugation with respect to the space-time Hermitian form

$$(\psi_1 \mid \psi_2) = \int dt \, \langle \psi_1 \mid \psi_2 \rangle := \int dt \, d\mathbf{x} \, \psi_1^*(t,\mathbf{x}) \, \psi_2(t,\mathbf{x}) \,, \tag{3.26}$$

such that $t^\dagger = t$ and $(\hat{P}_t)^\dagger = \hat{P}_t$. However, the scale and expansion generators in the standard representation (3.10) are not Hermitian with respect to the space-time conjugation, $\hat{D}^\dagger = \hat{D} + 2i$ and $\hat{C}^\dagger = \hat{C} + 2it\partial_t$. Nevertheless, all the generators are equivalent to Hermitian operators (with respect to both conjugations), when the Schrödinger equation is satisfied, as can be seen from (3.23).

The *Schrödinger action* for a non-relativistic massive field described by the Schrödinger equation (3.14) can be written as the quadratic form

$$S[\psi] = (\psi \mid \widehat{S} \mid \psi) \,, \tag{3.27}$$

where the Schrödinger operator (3.12) is Hermitian with respect to the space-time conjugation, $\widehat{S}^\dagger = \widehat{S}$. The Euler-Lagrange equation extremising the quadratic action is of course the Schrödinger equation (3.14). A *symmetry of the Schrödinger action* is an invertible linear operator $\hat{\mathcal{U}}$ preserving the quadratic form (3.27). In other words,

$$\hat{\mathcal{U}}^\dagger \, \widehat{S} \, \hat{\mathcal{U}} = \widehat{S} \,. \tag{3.28}$$

A *symmetry generator of the Schrödinger action* is a linear differential operator $\hat{A}$ which is self-adjoint with respect to the quadratic form (3.27) in the sense that $(\psi \mid \widehat{S} \mid \hat{A}\psi) = (\hat{A}\psi \mid \widehat{S} \mid \psi)$. More concretely,

$$\widehat{S} \, \hat{A} = \hat{A}^\dagger \widehat{S} \,. \tag{3.29}$$

Any symmetry generator $\hat{A}$ defines a symmetry $\hat{\mathcal{U}} = e^{i\hat{A}}$ of the Schrödinger action. The *maximal algebra of symmetries of Schrödinger action* is the real Lie algebra of symmetry generators of the quadratic action endowed with i times the commutator as Lie bracket, quotiented by the ideal of trivial symmetries. One can show that *the Weyl algebra of quantum observables is the maximal symmetry algebra of the Schrödinger action.*[14]

[14] For an n-component wave function, the maximal symmetry algebra of the Schrödinger action is isomorphic to the tensor product of the algebra of Hermitian $n \times n$ matrices with the Weyl algebra of quantum observables: $\mathfrak{u}(n) \otimes \mathcal{A}_d(\mathbb{R})$.

The proof goes as follows: Firstly, any symmetry generator $\hat{A}$ of the Schrödinger action is a symmetry of the Schrödinger equation with $\hat{B} = \hat{A}^\dagger$ in the condition (3.11), due to (3.29). Secondly, we have seen previously that any symmetry of the Schrödinger equation is equivalent to a representative which is function only of the translation and Galilean boost generators. Such a representative automatically commutes with the Schrödinger operator $\widehat{S}$. Thirdly, any symmetry of the quadratic action that commutes with $\widehat{S}$ must be Hermitian with respect to the space-time conjugation, $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, as can be seen from (3.29). Consequently, the representative must be Hermitian, i.e. a quantum observable. □

From the point of view of holography, the precise identification of the maximal algebra of rigid symmetries of the (non-relativistic) CFT is of prime importance since it should correspond to the symmetry transformations preserving the vacuum of the bulk theory, e.g. in the usual AdS/CFT the isometry group of AdS is isomorphic to the conformal group of the boundary. In the generalisation of the holography conjecture of [21, 25] to any spacetime dimension, the maximal symmetry algebra of the massless Klein-Gordon action [32] is precisely isomorphic to the higher-spin algebra of Vasiliev equations [26] which appears as the algebra preserving the AdS solution. The maximal symmetry algebra of the Schrödinger action could play an analogous role in a non-relativistic version of higher-spin gravity. This expectation is rather natural given the fact that Vasiliev theory is formulated in a frame-like language (à la Cartan) with a connection one-form taking values in the relativistic higher-spin algebra which can be replaced by its non-relativistic analogue (see next section).

4 Light-like dimensional reduction of currents

4.1 Bargmann framework

To realise geometrically the Schrödinger symmetry, we first embed the Schrödinger algebra in d spatial dimensions $\mathfrak{sch}(d)$ into the relativistic conformal algebra in $d+2$ space-time dimensions $O(d+2,2)$. That the Schrödinger algebra can be embedded into the relativistic conformal algebra can be made manifest at the level of the equations of motion. More concretely, an old trick (the so-called "Bargmann framework" [42, 43, 48, 49]) is the derivation of the free Schrödinger equation from the massless Klein-Gordon equation via a Kaluza-Klein reduction along a null direction.

4.1.1 Equations of motion: from Klein-Gordon to Schrödinger

Consider the massless Klein-Gordon equation in $d+2$-dimensional Minkowski space-time,[15]

$$\Box\Psi(x) \equiv -\partial_0^2\Psi(x) + \sum_{i=1}^{d+1}\partial_i^2\Psi(x) = 0. \tag{4.1}$$

This equation is conformally invariant. Defining the light-cone coordinates,

$$x^\pm = \frac{x^0 \pm x^{d+1}}{\sqrt{2}}\,, \tag{4.2}$$

[15] We follow closely [13] (see e.g. [48, 49] for more details on the method of null dimensional reduction).

JHEP02(2012)113

the Klein-Gordon equation becomes[16]

$$\left(-2\frac{\partial}{\partial x^-}\frac{\partial}{\partial x^+}+\sum_{i=1}^{d}\partial_i^2\right)\Psi(x)=0. \tag{4.3}$$

The global coordinates $x^\mu=(x^+,x^-,\mathbf{x})$ have minuscule Greek indices which will span $d+2$ values while the spatial coordinates $x^i=(\mathbf{x})$ have minuscule latin indices which will span d different values.[17] If the relativistic scalar field is assumed to be of the form

$$\Psi(x)=e^{-imx^-}\psi(x^+,\mathbf{x})\,, \tag{4.4}$$

one can make the identification[18] $\partial/\partial x^- := \partial_- = -im$. Then the equation (4.3) has the form of the Schrödinger equation in free space

$$\left(2im\,\partial_+ +\sum_{i=1}^{d}\partial_i^2\right)\Psi(x)=0. \tag{4.5}$$

The light-cone coordinate x^+ can be identified with the time t ($\partial_+ = \partial_t$ is the time derivative) and the operator $\sum_{i=1}^{d}\partial_i^2$ is the Laplacian operator Δ in flat space,

$$(2im\,\partial_t\,+\Delta)\Psi(x)=0. \tag{4.6}$$

Thanks to the dimensional reduction (4.4), the exponential can be factorised and we obtain the equation of motion for the non-relativistic scalar field (3.5). This equation is invariant under the Schrödinger group $Sch(d)$ as was explained in the previous section. Since the original Klein-Gordon equation has conformal symmetry, this means that $Sch(d)$ is a subgroup of $O(d+2,2)$.

4.1.2 Symmetry algebra: from conformal to Schrödinger

Let us now discuss the embedding of the Schrödinger algebra into the conformal algebra explicitly, following the discussion in [13]. The conformal algebra $\mathfrak{o}(d+2,2)$ can be defined by the following commutation relations:

$$\begin{aligned}
[\tilde{M}^{\mu\nu},\,\tilde{M}^{\alpha\beta}] &= i(\eta^{\mu\alpha}\tilde{M}^{\nu\beta}+\eta^{\nu\beta}\tilde{M}^{\mu\alpha}-\eta^{\mu\beta}\tilde{M}^{\nu\alpha}-\eta^{\nu\alpha}\tilde{M}^{\mu\beta}),\\
[\tilde{M}^{\mu\nu},\,\tilde{P}^{\alpha}] &= i(\eta^{\mu\alpha}\tilde{P}^{\nu}-\eta^{\nu\alpha}\tilde{P}^{\mu}),\\
[\tilde{D},\,\tilde{P}^{\mu}] &= -i\tilde{P}^{\mu},\quad [\tilde{D},\,\tilde{K}^{\mu}] = i\tilde{K}^{\mu},\\
[\tilde{P}^{\mu},\,\tilde{K}^{\nu}] &= -2i(\eta^{\mu\nu}\tilde{D}+\tilde{M}^{\mu\nu}),
\end{aligned} \tag{4.7}$$

where Greek indices run from 0 to $d+1$, and all other commutators are equal to 0. The tilde symbols denote relativistic generators; we reserve hatted symbols for the non-relativistic

[16] The elements of the metric are defined by $\eta_{+-}=\eta_{-+}=-1$; $\eta_{ij}=1$ and the others are zero.

[17] In the sequel, the index will often be left implicit for the space-time coordinates $x^\mu\equiv x$. No ambiguity arises since the spatial coordinates are written $x^i\equiv\mathbf{x}$.

[18] In the same way, we denote $\partial/\partial x^+$ by ∂_+.

operators. The conformal algebra generators can be realised as differential operators of order one acting on the relativistic scalar field $\Psi(x)$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\mu &= -i\partial_\mu, & \tilde{M}_{\mu\nu} &= -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu), \\ \tilde{K}_\mu &= i\left(2x_\mu\left(x^\nu\partial_\nu + \frac{d}{2}\right) - x^2\partial_\mu\right), & \tilde{D} &= i\left(x^\mu\partial_\mu + \frac{d}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

We identify the light-cone momentum $\tilde{P}^+ = (\tilde{P}^0 + \tilde{P}^{d+1})/\sqrt{2}$ with the mass operator $\hat{M}$ in the non-relativistic theory (in agreement with the previous identification $\partial_- = -im$). We now select all operators in the conformal algebra that commute with $\tilde{P}^+$, i.e. which preserve the Kaluza-Klein ansatz (4.4). Clearly these operators form a subalgebra, and one may check that it is the Schrödinger algebra $\mathfrak{sch}(d)$ [50]. The identification is as follows:

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \tilde{P}^+, & \hat{P}_t &= \tilde{P}^-, & \hat{P}^i &= \tilde{P}^i, & \hat{M}^{ij} &= \tilde{M}^{ij}, \\ \hat{K}^i &= \tilde{M}^{i+}, & \hat{D} &= \tilde{D} + \tilde{M}^{+-}, & \hat{C} &= \frac{\tilde{K}^+}{2}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

From eq. (4.7), one finds that the commutators between the operators (4.9) are exactly the Schrödinger algebra commutators (3.4) and (3.9). Furthermore, the realisation (3.10) follows from (4.8) via the identification (4.9). The maximal symmetry algebra of the massless Klein-Gordon equation (4.1) is the algebra of polynomials in the conformal generators (4.8) modulo the equivalence relations following from the Klein-Gordon equation [32].[19] The maximal symmetry algebra of the free Schrödinger equation (3.5) is the algebra of polynomials in the Schrödinger generators (3.10) modulo the equivalence relations following from the Schrödinger equation. The embedding similar to the one described above actually holds at the level of maximal symmetry algebra, as could be expected: *The maximal symmetry algebra of the free Schrödinger equation is isomorphic to the subalgebra of the maximal symmetry algebra of the massless Klein-Gordon equation, that commutes with a translation generator in a fixed light-like direction.*

The proof is direct: The free Schrödinger equation is equivalent to a system of two equations: the massless Klein-Gordon equation $\Box\Psi = 0$ and the null reduction $\tilde{P}^+\Psi = m\Psi$. Therefore, the maximal symmetry algebra of the Schrödinger equation is isomorphic to the maximal symmetry algebra of the previous system of equations. □

In other words, the maximal symmetry algebra of the free Schrödinger equation is isomorphic to the centraliser of a given light-like translation generator inside the maximal symmetry algebra of the massless Klein-Gordon equation. Therefore, a polynomial in the conformal generators is equivalent to a polynomial in the Schrödinger generators if and only if it commutes with $\tilde{P}^+$. Obvious examples are the polynomial in the generators (4.9) of $\mathfrak{sch}(d)$ which do commute with $\tilde{P}^+$. A more interesting example of the previous property is the polynomial $\alpha = \tilde{K}^i\tilde{P}_i - 2\tilde{M}^{+i}\tilde{M}_{+i}$, quadratic in the generators of $\mathfrak{o}(d+2,2)$. With the help of the commutation relations (4.7), one can check that α commutes with $\tilde{P}^+$. By making use of (3.10) and (4.8), one further finds that it is equivalent to a polynomial in the generators of $\mathfrak{sch}(d)$: $\alpha \approx \hat{M}^{ij}\hat{M}_{ij} + id\hat{D} + d^2/2$.

[19] The maximal symmetry algebra of the massless Klein-Gordon action was denoted by $\mathfrak{hu}(1/\mathfrak{sp}(2)[d+2,2])$ by Vasiliev in [26].

JHEP02(2012)113

4.2 Generalities on the currents

4.2.1 Currents: from relativistic to non-relativistic ones

A *relativistic symmetric conserved current* of rank $r \geqslant 1$ is a real contravariant symmetric tensor field $C^{\mu_1 \cdots \mu_r}(x)$ obeying to the conservation law

$$\partial_{\mu_1} C^{\mu_1 \cdots \mu_r}(x) \approx 0 \,, \tag{4.10}$$

where the "weak equality" symbol $\approx$ stands for "equal on-mass-shell," i.e. modulo terms proportional to the equations of motion. A *generating function of relativistic conserved currents* [51] is a real function $C(x;p)$ on space-time phase-space which is (i) a formal power series in the "momenta" p_μ

$$C(x;p) \,=\, \sum_{r \geqslant 0} \frac{1}{r!}\, C^{\mu_1 \cdots \mu_r}(x)\, p_{\mu_1} \ldots p_{\mu_r} \,, \tag{4.11}$$

and which is (ii) such that

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\, \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right) C(x;p) \approx 0 \,. \tag{4.12}$$

The terminology follows from the fact that all the coefficients of order $r \geqslant 1$ in the power expansion (4.11) of the generating function are symmetric tensors which are all conserved, since (4.10) follows from expanding eq. (4.12) in power series. In flat space-time, the indices of the "momenta" p_μ can be raised with the Minkowski metric. Hence, one may define the bilocal function

$$C(x;p) \,=\, \Psi_1 \left(x + \frac{i}{2}\, p \right) \, \Psi_2 \left(x - \frac{i}{2}\, p \right) \,, \tag{4.13}$$

which is a generating function of relativistic conserved currents for any pair of functions Ψ_1 and Ψ_2 satisfying the Klein-Gordon equation, as can be checked by direct computation (*c.f.* [51] for more details).

In order to look for the proper implementation of the Bargmann framework in the case of conserved currents, one should write the conservation law (4.10) of the relativistic conserved currents $C^{\mu_1 \cdots \mu_r}(x)$ in the light-cone coordinates,

$$\partial_+ C^{+\mu_1 \cdots \mu_{r-1}} + \partial_- C^{-\mu_1 \cdots \mu_{r-1}} + \partial_i C^{i \mu_1 \cdots \mu_{r-1}} \approx 0 \,. \tag{4.14}$$

If the components $C^{-\mu_1 \cdots \mu_{r-1}}$ of the relativistic currents are independent of x^- or even vanish, then the relativistic conservation law (4.14) embodies a collection of non-relativistic conservation laws of the type (with $s \geqslant r$)

$$\partial_t C^{+ i_1 \cdots i_{s-1} + \cdots + - \cdots -} + \partial_i C^{i\, i_1 \cdots i_{s-1} + \cdots + - \cdots -} \approx 0 \,. \tag{4.15}$$

since ∂_+ is identified with ∂_t. As one can see, the extra light-cone directions with respect to the spatial ones imply that a single relativistic current actually generates a collection of (not necessarily independent) non-relativistic currents.

JHEP02(2012)113

By analogy with the relativistic definitions, one will call the following function on space-time phase-space

$$c(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) \;:=\; C(x^+=t,x^-=0,\mathbf{x}\,;p^+=-p_t,p^-=0,\mathbf{p}) \tag{4.16}$$

the *generating function of non-relativistic "currents"* obtained from the generating function $C(x,p)$ of relativistic currents. For the bilocal generating function (4.13), the expression (4.16) together with the dimensional reduction ansatz (4.4) lead to the following generating function of non-relativistic symmetric "currents"

$$c(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) \;=\; \psi_1\left(t-\frac{i}{2}\,p_t,\mathbf{x}+\frac{i}{2}\,\mathbf{p}\right)\,\psi_2\left(t+\frac{i}{2}\,p_t,\mathbf{x}-\frac{i}{2}\,\mathbf{p}\right)\,. \tag{4.17}$$

The non-relativistic symmetric "currents" $c^{(a)\,i_1\cdots i_b}$ can now be defined from

$$c(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) \;=\; \sum_{r,s}\frac{1}{r!\,s!}\,c^{(r)\,i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x})\,p_{i_1}\cdots p_{i_s}\,(p_t)^r\,. \tag{4.18}$$

The word "current" is a slight abuse of terminology here since these symmetric tensors $c^{(a)\,i_1\cdots i_b}$ may not be conserved, even if the tensors $C^{\mu_1\cdots\mu_r}(x)$ are.[20] For instance, thanks to the dimensional reduction ansatz,

$$\Psi_1(x)=e^{-im_1x^-}\psi_1(x^+,\mathbf{x})\,,\quad \Psi_2(x)=e^{-im_2x^-}\psi_2(x^+,\mathbf{x})\,, \tag{4.19}$$

the generating function of relativistic currents can be written as

$$C(x;p) \;=\; e^{-i(m_1+m_2)x^-+\frac{1}{2}(m_1-m_2)p^-}\,C(x^+,x^-=0,\mathbf{x}\,;p^+,p^-=0,\mathbf{p})\,, \tag{4.20}$$

which is independent of x^- if and only if $m_1+m_2=0$. Notably the non-relativistic "currents" generated by (4.17) will thus only be conserved when $m_1+m_2=0$. The explicit expressions of these currents will be given in the next subsection for the cases which are relevant for the present paper.

The symmetric tensor $c^{(r)\,i_1\cdots i_s}$ of rank s is said to be of level r. As explained below in detail on some specific examples, the bilinears of non-vanishing level $r\neq 0$ generated by (4.17) are not genuinely independent. Indeed, these bilinears contain time derivatives of the field which can be traded for spatial derivatives via the equation of motion. Consequently, one might scrutinise on the generating function

$$c(t,\mathbf{x}\,;p_t=0,\mathbf{p}) \;=\; \psi_1\left(t,\mathbf{x}+\frac{i}{2}\,\mathbf{p}\right)\,\psi_2\left(t,\mathbf{x}-\frac{i}{2}\,\mathbf{p}\right)\,, \tag{4.21}$$

of non-relativistic "currents", $c^{(0)\,i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x})$, of vanishing level as can be seen from evaluating (4.18) at $p_t=0$. The function (4.21) is local in time but bilocal in space. When $|m_1|=|m_2|$, it can be interpreted physically as a composite field, at instant t, made of two particles with the same mass, described respectively by $\psi_1(t,\mathbf{x}_1)$ and $\psi_2(t,\mathbf{x}_2)$. Accordingly, in (4.21) the coordinate $\mathbf{x}$ correspond to the center of mass position. For $\mathbf{x}_1\neq\mathbf{x}_2\neq\mathbf{x}$,

[20] For this reason, to avoid confusion in the following we will call them bilinears.

the two bodies have a non-vanishing relative orbital angular momentum which may be reinterpreted as the spin of the two-body composite. More technically, this reinterpretation corresponds to the decomposition of the generating function in terms of tensor fields $c^{(0)\,i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x})$ of "spin" s. In fact, considering bilinears of any spin is very natural in the study of general pairing.

4.2.2 Singlet bilinears

By analogy with the simplest prescription of Klebanov and Polyakov in [21], one might focus on the bilinears in the ψ which are singlets of the internal symmetry group, i.e. $\mathrm{U}(1) \times Sp\,(2N)$ here. For the unitary Fermi gas, however, the Cooper pair is the main object of interest and it is charged under U(1), so one prefers to slightly relax the previous requirement.

One option is to consider all the bilinears which are singlets of $Sp\,(2N)$. Remember that $\psi^A = \psi^{\alpha,a}$ where the indices take values as $\alpha = \uparrow, \downarrow$ and $a = 1, \ldots, N$ while the orthogonal and symplectic metrics are $\delta_{AB} = \delta_{\alpha\beta} \otimes \delta_{ab}$ and $\mathbb{J}_{AB} = \epsilon_{\alpha\beta} \otimes \delta_{ab}$. Essentially, there are only two independent ways to construct $Sp\,(2N)$-singlets out of two multiplets ψ_1 and ψ_2 transforming in the fundamental representation of $Sp\,(2N)$: either as the Hermitian form $\psi_1^\dagger \psi_2 = \psi_1^{*A} \delta_{AB} \psi_2^B$ of $\mathrm{U}(2N)$ or as the symplectic form $\psi_1 \mathbb{J} \psi_2 = \psi_1^A \mathbb{J}_{AB} \psi_2^B$ of $Sp\,(2N, \mathbb{C})$. Only the Hermitian form is invariant under U(1).

The restriction to the $Sp\,(2N)$-invariant sector appears natural for the large-N extension of the Fermi gas but is questionable for the physical ($N = 1$) Fermi gas with internal symmetry group $\mathrm{U}(2) \cong \mathrm{U}(1) \times Sp\,(2)$. Motivated by this remark and the existence of the embedding $\mathrm{U}(2) \times O(N) \subset \mathrm{U}(1) \times Sp\,(2N)$, one may consider instead the larger sector of flavor (i.e. $O(N)$) singlet bilinears. Essentially, there is only one way to construct $O(N)$-singlets out of multiplets transforming in the fundamental representation of $O(N)$: via the scalar product. However, this provides three independent $O(N)$-singlets since the multiplets ψ^α are complex: either as the two (up or down) Hermitian forms $\psi_1^{\alpha\dagger} \psi_2^\alpha = \psi_1^{*\alpha,\,a} \delta_{ab} \psi_2^{\alpha,\,b}$ (no sum on the index α) or as the symplectic form $\psi_1 \mathbb{J} \psi_2 = \psi_1^{\alpha,\,a} \epsilon_{\alpha\beta} \delta_{ab} \psi_2^{\beta,\,b}$. Again, only the Hermitian forms are invariant under U(1). Notice that the two Hermitian forms and the symplectic form together reconstruct the Hermitian form of U(2). This is in agreement with the analogue of the generalised prescription of Klebanov and Polyakov in [21] since one focuses on the bilinears in ψ which are in the adjoint representation of the unitary group U(2), the internal symmetry of the physical unitary Fermi gas.

In both cases, there exists two types of singlet generating functions: the corresponding bilinears are either neutral or charged with respect to the U(1) group associated with mass conservation. The charged bilinears transform in massive representations (of mass $2m$) of the Schrödinger algebra, while the neutral bilinears carry massless representations. We refer the reader to appendix B for a detailed discussion devoted to the unitary irreducible representations (UIRs) of the Schrödinger algebra.

4.3 Singlet bilinears of the symplectic subgroup

4.3.1 Neutral bilinears

Following the above discussion, we impose that[21]

$$\Psi_1 = \Psi^\dagger \quad ; \quad \Psi_2 = \Psi \tag{4.22}$$

in (4.13) such that $m_1 = -m$ and $m_2 = m$ in order to construct a real current generating function denoted by J:

$$\begin{aligned} J(x;p) \;&=\; \Psi^\dagger\left(x+\frac{i}{2}\,p\right)\,\Psi\left(x-\frac{i}{2}\,p\right) = \Psi^{A*}\left(x+\frac{i}{2}\,p\right)\,\delta_{AB}\Psi^B\left(x-\frac{i}{2}\,p\right) \\ &=\; \left[\Psi\left(x-\frac{i}{2}\,p\right)\right]^\dagger\,\Psi\left(x-\frac{i}{2}\,p\right) = J^*(x;p)\,. \end{aligned} \tag{4.23}$$

This relativistic parent obeys the law of conservation (4.12). The corresponding conserved currents, satisfying (4.10) and (4.14), were introduced by Berends, Burgers and vanDam [52] long time ago and more recently were summarised in a generating function in [51]. Using (4.11), one sees that they take the explicit form:

$$\begin{aligned} J_{\mu_1\ldots\mu_r}(x) \;&=\; \left(-\frac{i}{2}\right)^r \sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\,\partial_{(\mu_1}\ldots\partial_{\mu_s}\Psi^\dagger(x)\,\partial_{\mu_{s+1}}\ldots\partial_{\mu_r)}\Psi(x) \\ &=\; \left(-\frac{i}{2}\right)^r \Psi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1}\ldots\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_r}\Psi(x) \end{aligned} \tag{4.24}$$

where the usual notation $\overleftrightarrow{\partial}$ is defined by

$$\Phi\overleftrightarrow{\partial_\mu}\Psi \;:=\; \Phi(\partial_\mu\Psi) \;-\; (\partial_\mu\Phi)\Psi\,.$$

The symmetric conserved current (4.24) of rank r is bilinear in the scalar field and contains exactly r derivatives. The currents of odd rank are absent if the field is a real Grassmann-even scalar.

After expressing the corresponding currents in terms of the non-relativistic field by making use of the dimensional reduction ansatz (4.4),

$$J_{\underbrace{+\ldots+}_{r}i_1\ldots i_s\underbrace{-\ldots-}_{q}}(x) = (-m)^q\left(-\frac{i}{2}\right)^{r+s}\psi^\dagger(t,\mathbf{x})\,\underbrace{\overleftrightarrow{\partial_t}\ldots\overleftrightarrow{\partial_t}}_{r}\overleftrightarrow{\partial_{i_1}}\ldots\overleftrightarrow{\partial_{i_s}}\psi(t,\mathbf{x})\,, \tag{4.25}$$

one can check that they *do not depend* on x^-: $J_{\mu_1\cdots\mu_r}(x) = J_{\mu_1\cdots\mu_r}(t,\mathbf{x})$. In addition, there is a relation of recurrence $J_{-\mu_1\cdots\mu_r} = -m\,J_{\mu_1\cdots\mu_r}$. From the last remark and the equation (4.14), the conservation law of neutral currents becomes:

$$\begin{aligned} &-\partial_+ J_{-\mu_1\ldots\mu_{r-1}}(x) + \partial^i J_{i\mu_1\ldots\mu_{r-1}}(x) \approx 0 \\ \Rightarrow\quad &m\,\partial_+ J_{\mu_1\ldots\mu_{r-1}}(x) + \partial^i J_{i\mu_1\ldots\mu_{r-1}}(x) \approx 0\,. \end{aligned} \tag{4.26}$$

[21] The auxiliary relativistic scalar field Ψ that we use here is Grassmann-odd and $(\Psi_1\,\Psi_2)^\dagger = \Psi_2^\dagger\,\Psi_1^\dagger$.

One can check even more simply all these properties in terms of the generating function. Due to the definitions (4.23) and (4.4), one obtains:

$$J(x;p) = e^{-mp^-}\, j(t,\mathbf{x};p_t,\mathbf{p}) \tag{4.27}$$

where the generating function of non-relativistic neutral currents is

$$j(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) = \psi^\dagger\left(t-\frac{i}{2}\,p_t,\mathbf{x}+\frac{i}{2}\,\mathbf{p}\right)\,\psi\left(t+\frac{i}{2}\,p_t,\mathbf{x}-\frac{i}{2}\,\mathbf{p}\right). \tag{4.28}$$

since $p_t = p_- = -p^+$. The conservation law is

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial p^-}+\delta^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p^j}\right)J(x;p)\approx 0 \tag{4.29}$$

since $J(x;p)$ does not depend on x^-, which becomes

$$\left(m\,\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)j(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})\approx 0 \tag{4.30}$$

when expressed in terms of the generating function of non-relativistic neutral currents via (4.27). The neutral non-relativistic conserved currents which are generated as in (4.18) read

$$j^{(r)}_{i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x}) = (-1)^r\left(-\frac{i}{2}\right)^{r+s}\psi^\dagger(t,\mathbf{x})\underbrace{\overleftrightarrow{\partial_t}\cdots\overleftrightarrow{\partial_t}}_{r}\overleftrightarrow{\partial_{i_1}}\cdots\overleftrightarrow{\partial_{i_s}}\psi(t,\mathbf{x}) \tag{4.31}$$

and are related to the relativisitic neutral currents as follows:

$$J_{\underbrace{+\ldots+}_{r}\,i_1\ldots i_s\,\underbrace{-\ldots-}_{q}}(x) = (-1)^{r+q}m^q\, j^{(r)}_{i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x})\,. \tag{4.32}$$

Let us give few examples in order to make contact with the standard conserved currents of low rank. The "current" of rank zero is the number density n

$$J = j^{(0)} = \psi^\dagger(t,\mathbf{x})\psi(t,\mathbf{x}) = n\,. \tag{4.33}$$

For rank one, the relativistic current is expressed by

$$J_\mu(x) = -\frac{i}{2}\Psi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial_\mu}\Psi(x) \tag{4.34}$$

and it leads to the mass density ρ, the energy density

$$\epsilon = \frac{1}{2m}\,\partial_i\psi^\dagger\partial^i\psi \tag{4.35}$$

and the momentum density j_i (our notations and conventions are as in [11, 13]):

$$\begin{cases} J^+ &= m\,j^{(0)} = m\,\psi^\dagger(t,\mathbf{x})\,\psi(t,\mathbf{x}) = m\,n = \rho \\ J^- &= j^{(1)} = \frac{i}{2}\,\psi^\dagger(t,\mathbf{x})\overleftrightarrow{\partial_t}\,\psi(t,\mathbf{x}) \approx \epsilon - \frac{1}{4m}\Delta n \\ J_i = j^{(0)}_i &= -\frac{i}{2}\,\psi^\dagger(t,\mathbf{x})\overleftrightarrow{\partial_i}\,\psi(t,\mathbf{x}) = j_i\,. \end{cases} \tag{4.36}$$

JHEP02(2012)113

The relevant law of conservation is the continuity equation: $\partial_t \rho + \partial_i j^i \approx 0$. Notice that the total energy is given by

$$E = \int d\mathbf{x}\, \epsilon \approx \int d\mathbf{x}\, j^{(1)} \tag{4.37}$$

modulo a boundary term. For rank two, one obtains:

$$J_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{4}\Psi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial_\mu}\overleftrightarrow{\partial_\nu}\Psi(x) \tag{4.38}$$

which leads to

$$\begin{cases} J^{++} = m^2 j^{(0)} = m^2\, \psi^\dagger(t,\mathbf{x})\, \psi(t,\mathbf{x}) = m^2\, n = m\, \rho \\ J^{+-} = m\, j^{(1)} = \frac{i}{2}\, m\, \psi^\dagger(t,\mathbf{x})\, \overleftrightarrow{\partial_t}\, \psi(t,\mathbf{x}) \approx m\, \epsilon - \frac{1}{4m}\Delta n \\ J_i^+ = m\, j_i^{(0)} = -\frac{i}{2} m\, \psi^\dagger(t,\mathbf{x})\, \overleftrightarrow{\partial_i}\, \psi(t,\mathbf{x}) = m\, j_i \\ J^{--} = j^{(2)} = -\frac{1}{4}\psi^\dagger(t,\mathbf{x}) \overleftrightarrow{\partial_t}\overleftrightarrow{\partial_t}\psi(t,\mathbf{x}) \\ J_i^- = j_i^{(1)} = \frac{1}{4}\psi^\dagger(t,\mathbf{x})\, \overleftrightarrow{\partial_t}\overleftrightarrow{\partial_i}\, \psi(t,\mathbf{x}) = m\, j_i^\epsilon + \frac{1}{4}\partial_i\partial_t n \\ J_{ij} = j_{ij}^{(0)} = -\frac{1}{4}\psi^\dagger(t,\mathbf{x})\, \overleftrightarrow{\partial_i}\overleftrightarrow{\partial_j}\, \psi(t,\mathbf{x}) = m\, \Pi_{ij} - \frac{1}{4}(\,\partial_i\partial_j - \delta_{ij}\,\Delta)n \end{cases} \tag{4.39}$$

where

$$j_i^\epsilon = -\frac{1}{2m}(\partial_t\psi^\dagger\partial_i\psi + \partial_i\psi^\dagger\partial_t\psi) \tag{4.40}$$

is the energy current and

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{2m}(\partial_i\psi^\dagger\,\partial_j\psi + \partial_j\psi^\dagger\,\partial_i\psi) - \frac{1}{4m}\,\delta_{ij}\,\Delta n \tag{4.41}$$

is the stress tensor in the conventions of [11, 13]. The conserved currents $j_{ij}^{(0)}$ and Π_{ij} are physically equivalent since they differ only by a trivially conserved current. The supplementary laws of conservation are:

$$\begin{cases} \partial_t\epsilon + \partial_i j^{\epsilon\, i} \approx 0\,, \\ \partial_t j^i + \partial_j \Pi^{ij} \approx 0\,. \end{cases} \tag{4.42}$$

4.3.2 Charged bilinears

In order to construct the second type of currents which are singlets bilinears of $Sp\,(2N)$, one chooses

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi \tag{4.43}$$

and the components are contracted by the symplectic matrix $\mathbb{J}/2$. The generating function of such charged currents is denoted by K and given by

$$\begin{aligned} K(x;p) &= \frac{1}{2}\,\Psi^A\left(x + \frac{i}{2}\,p\right)\,\mathbb{J}_{AB}\,\Psi^B\left(x - \frac{i}{2}\,p\right) \\ &= \sum_{r\geqslant 0}\frac{1}{r!}\,K^{\mu_1\cdots\mu_r}(x)\,p_{\mu_1}\ldots p_{\mu_r}\,. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Notice that it is an even function in the momenta, $K(x;p) = K(x,-p)$, thus only relativistic charged currents of even rank are non-vanishing. It leads to the relativistic charged currents

$$\begin{aligned} K_{\mu_1\dots\mu_r}(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{i}{2}\right)^r \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \mathbb{J}_{AB}\, \partial_{(\mu_1}\dots\partial_{\mu_s}\Psi^A(x)\,\partial_{\mu_{s+1}}\dots\partial_{\mu_r)}\Psi^B(x) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{i}{2}\right)^r \mathbb{J}_{AB}\,\Psi^A(x)\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1}\dots\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_r}\Psi^B(x)\,. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Like the neutral currents, the relativistic charged currents are conserved. However, the corresponding charged non-relativistic bilinears are not conserved, because the relativistic ones depend on x^-. Indeed,

$$K(x;p) \;=\; e^{-2imx^-}\, k(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})\,. \tag{4.46}$$

As one can see, the generating function in this case does not depend on p^-. Therefore the conservation law becomes

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x^-}\frac{\partial}{\partial p^+} + \delta^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p^j}\right) K(x;p) \approx 0\,. \tag{4.47}$$

The generating function of non-relativistic charged bilinears is:

$$k(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) \;=\; \frac{1}{2}\,\psi^A\left(t-\frac{i}{2}p_t,\mathbf{x}+\frac{i}{2}\mathbf{p}\right)\mathbb{J}_{AB}\,\psi^B\left(t+\frac{i}{2}\,p_t,\mathbf{x}-\frac{i}{2}\,\mathbf{p}\right)\,. \tag{4.48}$$

It is not conserved but nevertheless satisfies

$$\left(-2im\,\frac{\partial}{\partial p_t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right) k(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) \approx 0\,, \tag{4.49}$$

as follows from (4.46)–(4.47). The non-relativistic charged bilinears read

$$k^{(r)}_{i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x}) = \frac{(-1)^r}{2}\left(-\frac{i}{2}\right)^{r+s} \mathbb{J}_{AB}\,\psi^A(t,\mathbf{x})\underbrace{\overleftrightarrow{\partial_t}\cdots\overleftrightarrow{\partial_t}}_{r}\overleftrightarrow{\partial}_{i_1}\cdots\overleftrightarrow{\partial}_{i_s}\psi^B(t,\mathbf{x}) \tag{4.50}$$

and are related to the relativistic charged currents as follows:

$$K_{\underbrace{+\dots+}_{r}\,i_1\dots i_s}(x) = (-1)^r e^{-2imx^-}\, k^{(r)}_{i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x})\,. \tag{4.51}$$

The non-relativistic charged bilinears satisfy

$$2im\, k^{(r+1)}_{i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x}) \;+\; \partial^j k^{(r)}_{ji_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x}) \approx 0\,. \tag{4.52}$$

For rank zero, one gets the Cooper pair (2.3)

$$K(x^-=0) \;=\; k^{(0)} \;=\; \frac{1}{2}\,\psi^A(t,\mathbf{x})\,\mathbb{J}_{AB}\,\psi^B(t,\mathbf{x}) = k\,. \tag{4.53}$$

For charged bilinears of rank two, one finds:

$$\begin{cases} K^{++}(x^-=0) &= 0 \\ K^{+-}(x^-=0) &= 0 \\ K^{+i}(x^-=0) &= 0 \\ K^{--}(x^-=0) &= k^{(2)}(t,\mathbf{x}) = -\frac{1}{8}\mathbb{J}_{AB}\,\psi^A(t,\mathbf{x})\overleftrightarrow{\partial_t}\overleftrightarrow{\partial_t}\psi^B(t,\mathbf{x}) \\ K^-_i(x^-=0) &= k^{(1)}_i(t,\mathbf{x}) = +\frac{1}{8}\,\mathbb{J}_{AB}\,\psi^A(t,\mathbf{x})\overleftrightarrow{\partial_t}\overleftrightarrow{\partial_i}\psi^B(t,\mathbf{x}) \\ K_{ij}(x^-=0) &= k^{(0)}_{ij}(t,\mathbf{x}) = -\frac{1}{8}\,\mathbb{J}_{AB}\,\psi^A(t,\mathbf{x})\overleftrightarrow{\partial_i}\overleftrightarrow{\partial_j}\psi^B(t,\mathbf{x})\,. \end{cases} \tag{4.54}$$

These bilinears are not conserved but instead obey:

$$\begin{cases} \partial_i k^{(1)i} \approx 2im\,k^{(2)} \\ \partial_i k^{(0)ij} \approx 2im\,k^{(1)j}\,. \end{cases} \tag{4.55}$$

4.3.3 Traceless condition

Since the massless scalar fields are conformally symmetric, one may expect to get infinitely many *traceless* conserved currents, while the Berends-Burgers-vanDam currents generated from (4.13) are not traceless, even on-shell: $\partial_p^2\,C(x;p) \not\approx 0$. From the representation point of view, it is important that the relativistic currents are traceless in order to have irreducible conformal primary fields. The massless Klein-Gordon equations for Ψ_1 and Ψ_2 imply the conservation condition, $(\partial_x\cdot\partial_p)\,C(x;p)\approx 0$ for the bilocal generating function (4.13), as well as another on-shell condition:

$$\left(-\partial_p^2+\frac{1}{4}\,\partial_x^2\right)C(x;p)\approx 0\,, \tag{4.56}$$

which relates trace of the Berends-Burgers-vanDam currents to their d'Alembertian. For example, eq. (4.56) at $p=0$ for the generating function of neutral currents reads

$$\eta_{\mu\nu}J^{\mu\nu} = 2\eta_{+-}J^{+-}+\delta_{ij}J^{ij}\approx\frac{1}{4}\,\Box J\,, \tag{4.57}$$

which relates the trace of the rank-two current $J^{\mu\nu}$ to the d'Alembertian of the scalar J. The relativistic eq. (4.57) leads to the non-relativistic relation

$$-2mj^{(1)}+\delta_{ij}j^{(0)ij}\approx\frac{1}{4}\,\Box j^{(0)}\,, \tag{4.58}$$

which, in turn, gives

$$-2\epsilon+\delta_{ij}\Pi^{ij}\approx-\frac{d}{4m}\,\Delta\,n\,, \tag{4.59}$$

due to (4.33), (4.39) and (4.41). This implies the standard relationship between the total energy and the pressure valid both for ideal and unitary Fermi gases [11, 13]:

$$\int d\mathbf{x}\,\Pi^i{}_i\;\approx\;2\,E\,, \tag{4.60}$$

JHEP02(2012)113

modulo a boundary term. Notice that the analogue of the relativistic eq. (4.57) for the charged currents leads to the non-relativistic relation

$$\delta_{ij} k^{(0)ij} \approx \frac{1}{4} (4m\, i\partial_t + \Delta)\, k\,, \tag{4.61}$$

as can be checked using (4.54).

Due to the second on-shell condition (4.56), one can construct a generating function $\bar{C}(x;p)$ of relativistic currents that are conserved and traceless on-shell [53]:

$$\partial_p^2\, \bar{C}(x;p) \approx 0\,, \qquad (\partial_x \cdot \partial_p)\, \bar{C}(x;p) \approx 0\,. \tag{4.62}$$

This can be achieved by acting with a differential operator $\mathcal{P}_{d+2}(p,\partial_x)$ on the generating function of currents

$$\bar{C}(x;p) = \mathcal{P}_{d+2}(p,\partial_x)\, C(x;p)\,. \tag{4.63}$$

The conservation of both $\bar{C}$ and C requires that $\mathcal{P}_{d+2}$ commutes with $\partial_x \cdot \partial_p$ on-shell. If we construct $\mathcal{P}_{d+2}$ as a power series in the transversal projector $\pi(p,\partial_x) := [p^2\, \partial_x^2 - (p\cdot\partial_x)^2]/4$, then the conservation condition is satisfied since $\partial_x \cdot \partial_p\, \pi = \pi\, \partial_x \cdot \partial_p$. The tracelessness condition, $\partial_p^2\, \mathcal{P}_{d+2}(p,\partial_x)\, C(x;p) \approx 0$ can be solved recursively and the operator $\mathcal{P}_{d+2}$ is determined by these conditions (up to a constant factor) [53]:

$$\mathcal{P}_{d+2}(p,\partial_x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(-p\cdot\partial_p - \frac{d-3}{2})_n} \left(\frac{1}{4}\,\pi(p,\partial_x)\right)^n\,, \tag{4.64}$$

where $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ is the Pochhammer symbol. More concretely, if one applies this formula to the currents of spin two, it leads to the traceless current:

$$\bar{C}_{\mu\nu}(x) = C_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{4(d+1)} (\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\Box) C(x)\,. \tag{4.65}$$

Due to (4.27), one can express the action of the two operators $p\cdot\partial_p$ and π on the neutral current generating function as

$$(p\cdot\partial_p) J(x;p) = \left(p^+ \frac{\partial}{\partial p^+} - m\, p^- + p^i \frac{\partial}{\partial p^i}\right) J(x;p)\,, \tag{4.66}$$

$$\pi J(x;p) = \frac{1}{4}\left[\Big(p_i p^i - 2p_- p_+\Big)\Delta - \left(p^+ \frac{\partial}{\partial x^+} + p^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2\right] J(x;p)\,, \tag{4.67}$$

since $J(x;p)$ does not depend on x^-. This is helpful for writing the neutral traceless current generating function J leading, after evaluating at $p^- = 0$, to the non-relativistic generating function

$$\bar{j}(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, 4^{2n} (-p_t \frac{\partial}{\partial p_t} - p^i \frac{\partial}{\partial p^i} - \frac{d-3}{2})_n} \times \\ \times \Big((p_i p^i)\Delta - \big(-p_t\, \partial_t + p^i\, \partial_i\big)^2\Big)^n\, j(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})\,. \tag{4.68}$$

Notably, this function generates currents which satisfy the non-relativistic version of the traceless condition

$$\left(-2m\frac{\partial}{\partial p_t} + \delta^{ij}\frac{\partial}{\partial p^i}\frac{\partial}{\partial p^j}\right)\bar{j}(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) \approx 0\,. \tag{4.69}$$

For instance, for rank two we get a simple relation

$$-2m\bar{j}^{(1)} + \delta_{ij}\bar{j}^{(0)}_{ij} \approx 0 \tag{4.70}$$

to be contrasted with (4.58). Notice that this shows that the higher-level $r > 0$ neutral currents $\bar{j}^{(r)}_{\cdots}$ are proportional to traces of currents of level zero $\bar{j}^{(0)}_{\cdots}$.

The formula analogous to (4.68) for the charged bilinears is very similar

$$\bar{k}(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,4^{2n}(-p_t\frac{\partial}{\partial p_t} - p^i\frac{\partial}{\partial p^i} - \frac{d-3}{2})_n}\times \tag{4.71}$$
$$\times\left((p_ip^i)(-4im\,\partial_t+\Delta) - \left(-p_t\,\partial_t + p^i\,\partial_i\right)^2\right)^n k(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})\,.$$

Notice that, since all the components $K^{+\cdots}$ vanish, the charged non-relativistic bilinears are spatially traceless: $\delta_{ij}\bar{k}^{(a)ij\cdots} \approx 0$ to be contrasted with e.g. (4.61). Remarkably, the generating function $\bar{k}$ gives rise to the non-relativistic spatially traceless tensors $\bar{k}^{(0)}_{i_1\ldots i_r}$ which are actually non-relativistic conformal primary fields[22] (such as the scalar Cooper-pair field) while the higher-level ones $k^{(r)}_{i_1\ldots i_r}$ for $r > 0$ are their descendants as can be seen from eq. (4.52).

4.4 Singlet bilinears of the orthogonal subgroup

Since the $Sp\,(2N)$-singlet bilinears have been investigated above in much detail and the $O(N)$-singlet bilinears are their natural extension, the presentation of the latter bilinears will be brief.

The neutral relativistic currents are now split in up and down ones, as one chooses in (4.13)

$$\Psi_1 = (\Psi^\alpha)^\dagger\,,\quad \Psi_2 = \Psi^\alpha \tag{4.72}$$

with $\alpha = \uparrow,\downarrow$ and the $O(N)$-flavor components are contracted by the identity matrix. The generating functions of such neutral relativistic currents are denoted by $\mathcal{J}^\alpha$,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^\alpha(x;p) &= \Psi^{\alpha\dagger}\left(x+\frac{i}{2}\,p\right)\Psi^\alpha\left(x-\frac{i}{2}\,p\right) = \Psi^{\alpha,a*}\left(x+\frac{i}{2}\,p\right)\delta_{ab}\Psi^{\alpha,b}\left(x-\frac{i}{2}\,p\right)\\ &= \left[\Psi^\alpha\left(x-\frac{i}{2}\,p\right)\right]^\dagger\Psi^\alpha\left(x-\frac{i}{2}\,p\right) = \mathcal{J}^{\alpha*}(x;p)\,,\end{aligned} \tag{4.73}$$

where there is no sum over the index α.

For the charged currents, one chooses

$$\Psi_1 = -\Psi_\downarrow\,,\quad \Psi_2 = \Psi_\uparrow \tag{4.74}$$

[22] For a definition of a non-relativistic conformal primary field see appendix B.

and the $O(N)$-vector components are again contracted by the identity matrix. The generating function of such charged relativistic currents will be denoted by $\mathcal{K}$, e.g.

$$\mathcal{K}(x;p) = -\Psi^a_\downarrow\left(x+\frac{i}{2}\,p\right)\,\delta_{ab}\,\Psi^b_\uparrow\left(x-\frac{i}{2}\,p\right) = \Psi^a_\uparrow\left(x-\frac{i}{2}\,p\right)\,\delta_{ab}\,\Psi^b_\downarrow\left(x+\frac{i}{2}\,p\right)\,. \quad (4.75)$$

Notice that the analogous generating function with up and down subscripts exchanged is not independent, more precisely it is equal to $-\mathcal{K}(x;-p)$.

We will not write explicitly the corresponding non-relativistic bilinears and generating functions $\mathtt{j}_\alpha(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})$ and $\mathtt{k}(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})$, since all the corresponding formulas are the straightforward analogues of the ones in the previous subsections. We just notice that the scalar bilinears $\mathtt{j}_\alpha(t,\mathbf{x}\,;p_t=0,\mathbf{p}=\mathbf{0}) = n_\alpha(t,\mathbf{x})$ are the density fields of the up and down fermions, while $\mathtt{k}(t,\mathbf{x}\,;p_t=0,\mathbf{p}=\mathbf{0}) = k(t,\mathbf{x})$ denotes the complex Cooper-pair field. Two real fields and one complex field precisely match the entries of a 2×2 Hermitian matrix. For instance, at rank and level zero

$$\begin{pmatrix} -\mathtt{j}^{(0)}_\uparrow & \mathtt{k}^{(0)} \\ \mathtt{k}^{(0)*} & \mathtt{j}^{(0)}_\downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi^*_\uparrow\cdot\psi_\uparrow & \psi_\uparrow\cdot\psi_\downarrow \\ \psi^*_\downarrow\cdot\psi^*_\uparrow & \psi^*_\downarrow\cdot\psi_\downarrow \end{pmatrix} = \Psi^\alpha\cdot\Psi^{*\beta}\,. \quad (4.76)$$

This collection of $O(N)$-singlet bilinears of all ranks and levels appears to be very natural for our proposal of the gravity dual of the unitary Fermi gas [24].

5 Coupling to background fields

The generating functional $W_{\text{free}}[\,h,\varphi\,;N]$ of connected correlators of $Sp\,(2N)$-singlet bilinears in the non-interacting Fermi gas described by the quadratic action

$$S_{\text{free}}[\,\psi\,;N] := S[\,\psi\,;c_0=0,N] = \int dt\,d\mathbf{x}\,\psi^\dagger\left(i\partial_t+\frac{\Delta}{2m}+\mu\right)\psi\,, \quad (5.1)$$

is defined by the path integral

$$\exp i\,W_{\text{free}}[\,h\,,\varphi\,;N] \;=\; \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi^\dagger\;\exp i\,S_{\text{free}}[\,\psi\,,h\,,\varphi\,;N]\,, \quad (5.2)$$

where

$$\begin{aligned} S_{\text{free}}[\,\psi\,,h\,,\varphi\,;N] &:= S_{\text{free}}[\,\psi\,;N] \quad (5.3)\\ &- \sum_{r,s\geqslant 0}\frac{1}{r!\,s!}\int dt\,d\mathbf{x}\,\big(j^{(r)i_1\cdots i_s}\,h^{(r)}_{i_1\cdots i_s} + k^{(r)i_1\cdots i_s*}\varphi^{(r)}_{i_1\cdots i_s} + k^{(r)i_1\cdots i_s}\varphi^{(r)*}_{i_1\cdots i_s}\big) \end{aligned}$$

is the free action in the presence of $Sp\,(2N)$-invariant external tensor fields, $h^{(r)}_{i_1\cdots i_s}$ and $\varphi^{(r)}_{i_1\cdots i_s}$, coupled respectively to the neutral and charged bilinears, $j^{(r)i_1\cdots i_s}$ and $k^{(r)i_1\cdots i_s}$. In other words, the $Sp\,(2N)$-invariant bilinears are minimally coupled to the background fields which share the same properties, i.e. all $h^{(r)}_{i_1\cdots i_s}$ are real and $\varphi^{(r)}_{i_1\cdots i_s}$ are complex and vanish for odd rank s. Here and below, we will refrain from writing explicitly the similar formulas for the $O(N)$-singlet bilinears $\mathtt{j}^{(r)i_1\cdots i_s}_\alpha$ and $\mathtt{k}^{(r)i_1\cdots i_s}$ coupling respectively to the

JHEP02(2012)113

background fields $h^{(r)\alpha}_{i_1\cdots i_s}$ and $\varphi^{(r)}_{i_1\cdots i_s}$ for all ranks. The collection of such fields will also be referred to as h and φ for short in order to cover the general case at once. The $Sp\,(2N)$-invariant background correspond to the particular case: $h_\uparrow = h_\downarrow$ and momentum-even φ generating functions.

The functional (5.3) is quadratic in the dynamical field ψ (since the kinetic term and the bilinears are), therefore the path integral (5.2) can easily be evaluated formally since it is a Gaussian integral. In order to write the generating functional of connected correlators in a compact form, one should start by writing (5.3) manifestly as a quadratic form. This can be done elegantly via the Weyl quantisation (reviewed in appendix A) performed on the space-time phase-space, following the same procedure as in the relativistic case [51, 53]. In other words, the canonical commutation relations (A.2) must be supplemented by $[\,\hat{P}_t\,,\,\hat{T}\,]\,=\,i$, where $\hat{T}$ denotes the operators corresponding to multiplication by the time coordinate t.[23]

Let us stress that all the steps performed in the subsection 2.2 can be adapted to apply in the presence of background tensor fields as well, because the external fields of non-vanishing rank do not play any role in these specific manipulations (only the scalar fields such as the Cooper pair and the dimer are pertinent in that case). In other words, the interacting and the non-interacting Fermi gases in the presence of background fields are still related, in the mean field approximation, by a Legendre transformation over the (properly shifted and/or rescaled) scalar charged dimer field.

5.1 Quadratic functional

The free action (5.1) in the absence of background can of course be written as a Schrödinger action (3.27)

$$S_{\text{free}}[\,\psi\,;N] \;=\; (\,\psi\,\mid\,\hat{S}_{\text{free}}\,\mid\,\psi\,) \;=\; \delta_{AB}\,(\,\psi^A\,\mid\,\hat{S}_{\text{free}}\,\mid\,\psi^B\,)\,, \tag{5.4}$$

where the operator

$$\hat{S} = \hat{P}_t - \hat{H}_{\text{free}}\,, \tag{5.5}$$

is the Schrödinger operator (3.12) for the free Hamiltonian $\hat{H}_{\text{free}} = \hat{\mathbf{P}}^2/2m$. The crucial observation of this section is that even the minimal coupling terms in (5.3) can be explicitly written as a quadratic functional via integrations by part. Let us perform this rewriting in the generic case, i.e. let us consider the following minimal coupling

$$\sum_{r,s\geqslant 0}\frac{1}{r!\,s!}\int dt\,d\mathbf{x}\,c^{(r)}_{i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x})\,f^{(r)i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x}) \tag{5.6}$$

between a collection of external symmetric tensor fields $f^{(r)}_{i_1\cdots i_s}$ and the non-relativistic bilinears

$$\begin{aligned} c^{(r)}_{i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x}) \;&=\; (-1)^r\left(-\frac{i}{2}\right)^{r+s}\psi_1(t,\mathbf{x})\,\underbrace{\overleftrightarrow{\partial_t}\cdots\overleftrightarrow{\partial_t}}_{r}\,\overleftrightarrow{\partial_{i_1}}\cdots\overleftrightarrow{\partial_{i_s}}\psi_2(t,\mathbf{x}) \\ &=\; \frac{1}{2^{r+s}}\,\psi_1(t,\mathbf{x})\,\underbrace{\overleftrightarrow{\hat{P}_t}\cdots\overleftrightarrow{\hat{P}_t}}_{r}\,\overleftrightarrow{\hat{\mathbf{P}}_{i_1}}\cdots\overleftrightarrow{\hat{\mathbf{P}}_{i_s}}\psi_2(t,\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{5.7}$$

[23] If not specified, the notations and definitions in this section are the straightforward extension of the ones in appendix A.

JHEP02(2012)113

defined by (4.17)–(4.18). The main idea is to integrate by parts all momentum operators acting on ψ_1 inside (5.6), in order to have all operators acting on ψ_2. One may convince oneself that taking into account the ordering and the change of signs will result in the equality

$$\int dt\, d\mathbf{x}\, c^{(r)}_{i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x})\, f^{(r)i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x}) \tag{5.8}$$
$$= \frac{1}{2^{r+s}} \int dt\, d\mathbf{x}\; \psi_1(t,\mathbf{x})\, \{\cdots \{f^{(r)i_1\ldots i_s}(\hat{\mathbf{T}},\hat{\mathbf{X}})\,,\, \hat{P}_t\}\,,\cdots,\, \hat{P}_t\}\,,\, \hat{\mathbf{P}}_{i_1}\}\,,\cdots,\, \hat{\mathbf{P}}_{i_s}\}\, \psi_2(t,\mathbf{x})$$

where $\{\ ,\ \}$ denotes the anticommutator and implicitly r operators $\hat{P}_t$ appear in the above formula. Therefore, the minimal coupling (5.6) can be rewritten in a compact form as the quadratic functional

$$\sum_{r,s\geqslant 0} \frac{1}{r!\, s!} \int dt\, d\mathbf{x}\, c^{(r)}_{i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x})\, f^{(r)i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x}) \;=\; (\psi_1^* \mid \hat{F} \mid \psi_2) \tag{5.9}$$

where the curly bra-ket notation for the space-time Hermitian form has been introduced in (3.26) and the space-time differential operator $\hat{F}$ is given by

$$\hat{F}(\hat{T},\hat{\mathbf{X}};\hat{P}_t,\hat{\mathbf{P}}) \;=\; \sum_{r,s\geqslant 0} \frac{1}{r!\, s!\, 2^{r+s}} \{\cdots \{f^{(r)i_1\ldots i_s}(\hat{\mathbf{T}},\hat{\mathbf{X}})\,,\, \hat{P}_t\}\,,\cdots,\, \hat{P}_t\}\,,\, \hat{\mathbf{P}}_{i_1}\}\,,\cdots,\, \hat{\mathbf{P}}_{i_s}\}\,. \tag{5.10}$$

As explained in appendix A, this means that the generating function

$$f(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) \;=\; \sum_{r,s} \frac{1}{r!\, s!}\, f^{(r)\,i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x})\, p_{i_1}\cdots p_{i_s}\, (p_t)^r \tag{5.11}$$

of symmetric tensor fields is the Weyl symbol of the operator (5.10).

Therefore, one finds that the free action in the presence of $Sp\,(2N)$-invariant background fields, i.e. (5.3), can be written manifestly as a quadratic form

$$S_{\rm free}[\,\psi\,,h\,,\varphi\,;N] \;=\; \delta_{AB}\,(\psi^A \mid \hat{S} \mid \psi^B) \;+\; \frac{1}{2}\,\mathbb{J}_{AB}\,\Big[\,(\psi^A \mid \hat{\varphi} \mid \psi^{B*}) \;-\; (\psi^{A*} \mid \hat{\varphi}^\dagger \mid \psi^B)\,\Big]\,, \tag{5.12}$$

where the operator $\hat{S}$ is the Schrödinger operator (3.12)

$$\hat{S} = \hat{P}_t - \hat{H} = \hat{S}_{\rm free} - \hat{H}_{\rm int}\,, \tag{5.13}$$

defined in terms of the Hamiltonian

$$\hat{H} = \hat{H}_{\rm free} + \hat{H}_{\rm int}\,. \tag{5.14}$$

The operators $\hat{H}_{\rm int}$ and $\hat{\varphi}$ are the images under the Weyl map of the generating functions of the background fields $h(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})$ and $\varphi(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})$ respectively.

More generally, the free action in the presence of $O(N)$-invariant background fields can be written as follows:

$$\begin{aligned} S_{\rm free}[\,\psi\,,h\,,\varphi\,;N] \;=\; &(\psi_\uparrow \mid \hat{S}_\uparrow \mid \psi_\uparrow) + (\psi_\downarrow \mid \hat{S}_\downarrow \mid \psi_\downarrow) \\ &+ (\psi_\uparrow \mid \hat{\varphi} \mid \psi_\downarrow^*) + (\psi_\downarrow^* \mid \hat{\varphi}^\dagger \mid \psi_\uparrow)\,, \end{aligned} \tag{5.15}$$

where the flavor indices have been left implicit and the two (up and down) Schrödinger operators $\hat{S}_\alpha$ are built from the corresponding interaction Hamiltonians $h_\alpha(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})$.

Let us elaborate on some physical interpretations of this rewriting by concentrating first on the simplest case where there is no coupling to the charged fields ($\varphi = 0$). As can be seen from (5.12), the free action in the presence of only $\mathrm{U}(1) \times Sp\,(2N)$-invariant background fields can be rewritten as a Schrödinger action (3.27) where the Hamiltonian is of the form (5.14), i.e. the usual potential term $V(t,\mathbf{x})$ is replaced by a general function on space-time phase-space $h(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})$. In particular, a scalar background field $h(t,\mathbf{x})$ coupling to the particle density $n(t,\mathbf{x})$ can obviously be interpreted as a position- and time-dependent external potential term in a standard Schrödinger action.

In the more general case where the charged sources are present, another suggestive way of interpreting (5.12)–(5.15) is by casting it in the Nambu-Gor'kov form. In order to write (5.12) in terms of the Nambu-Gor'kov field (2.7), it is necessary to perform integrations by part in the term $(\psi_\downarrow \mid \hat{S}_\downarrow \mid \psi_\downarrow)$ of (5.15). This can be formalised by introducing the operation $^\tau$ defined by $\hat{F}^\tau(\hat{T},\hat{\mathbf{X}};\hat{P}_t,\hat{\mathbf{P}}) := \hat{F}(\hat{T},\hat{\mathbf{X}};-\hat{P}_t,-\hat{\mathbf{P}})$ such that

$$(\,\psi_1 \mid \hat{F} \mid \psi_2\,) \;=\; -\,(\,\psi_2^* \mid \hat{F}^\tau \mid \psi_1^*\,)\,. \tag{5.16}$$

Notice that the minus sign in (5.16) arises because the fundamental fields are Grassmann odd and the complex conjugation appears in accordance to the definition of the space-time Hermitian form (3.26).[24] The fact that the neutral (charged) $Sp\,(2N)$-invariant generating function is a real (respectively, momentum-even) function translates into the fact that the operator H_{int} (resp. $\hat{\varphi}$) is Hermitian: $\hat{H}^\dagger_{\mathrm{int}} = \hat{H}_{\mathrm{int}}$ (resp. τ-symmetric: $\hat{\varphi}^\tau = \hat{\varphi}$). The latter properties together with (5.16) imply the following relations

$$\delta_{AB}\,(\psi^A \mid \hat{S} \mid \psi^B) \;=\; \delta_{ab}\,(\psi^a_\uparrow \mid \hat{S} \mid \psi^b_\uparrow) \;-\; \delta_{ab}\,(\psi^{a*}_\downarrow \mid \hat{S}^\tau \mid \psi^{b*}_\downarrow)\,, \tag{5.17}$$

$$\mathbb{J}_{AB}\,(\psi^A \mid \hat{\varphi} \mid \psi^{B*}) \;=\; 2\,\delta_{ab}\,(\,\psi^a_\uparrow \mid \hat{\varphi} \mid \psi^{b*}_\downarrow)\,, \tag{5.18}$$

$$\mathbb{J}_{AB}\,(\psi^{A*} \mid \hat{\varphi}^\dagger \mid \psi^B) \;=\; -\,2\,\delta_{ab}\,(\,\psi^{a*}_\downarrow \mid \hat{\varphi}^\dagger \mid \psi^b_\uparrow)\,. \tag{5.19}$$

The relations (5.18)–(5.19) show that (5.12) is indeed a particular case of (5.15) (remember that for the $Sp\,(2N)$-invariant background $\hat{S}_\uparrow = \hat{S}_\downarrow = \hat{S}$). More generally, the properties of the $O(N)$-invariant generating functions translate into $H^\dagger_\alpha = H_\alpha$. The relation (5.17) allows to rewrite the quadratic functional (5.15) in the compact form of a Schrödinger action in terms of the Nambu-Gor'kov field (2.7)

$$S_{\mathrm{free}}[\,\Psi\,,h\,,\varphi\,;N] \;=\; (\,\Psi \mid \hat{\mathcal{S}} \mid \Psi\,) \;=\; \int dt\,d\mathbf{x}\,\Psi^\dagger \begin{pmatrix} \hat{S}_\uparrow & \hat{\varphi} \\ \hat{\varphi}^\dagger & -\hat{S}^\tau_\downarrow \end{pmatrix} \Psi\,, \tag{5.20}$$

where the Schrödinger operator is the 2×2 matrix

$$\hat{\mathcal{S}} \;=\; \begin{pmatrix} \hat{S}_\uparrow & \hat{\varphi} \\ \hat{\varphi}^\dagger & -\hat{S}^\tau_\downarrow \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

[24] Mathematically, the operation $^\tau$ is a linear antiautomorphism of the Weyl algebra. The operation $^\tau$ must be contrasted with the Hermitian conjugation † which is an antilinear antiautomorphism obeying to $(\psi_1 \mid \hat{F} \mid \psi_2) \;=\; (\psi_2 \mid \hat{F}^\dagger \mid \psi_1)^*$.

JHEP02(2012)113

This suggestive rewriting is one of the main results of this section, because it allows many further insights. The Schrödinger matrix-operator $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}}_{\rm free} - \hat{\mathcal{H}}_{\rm int}$ is the difference of the free Schrödinger 2×2 matrix-operator

$$\hat{\mathcal{S}}_{\rm free} \,=\, \begin{pmatrix} \hat{P}_t \,-\, \frac{\hat{P}^2}{2m} & 0 \\ 0 & \hat{P}_t \,+\, \frac{\hat{P}^2}{2m} \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

and the interaction Hamiltonian

$$\hat{\mathcal{H}}_{\rm int} \,=\, \begin{pmatrix} \hat{H}_{\uparrow \rm int} & \hat{\varphi} \\ \hat{\varphi}^\dagger & -\hat{H}^\tau_{\downarrow \rm int} \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

containing the background fields. As one can see, the free action in the presence of general background fields can be rewritten in a form which generalises (2.8) in the sense that, in the 2×2 matrix, the free Schrödinger operators $i\partial_t \pm (\frac{\Delta}{2m} + \mu)$ on the diagonal are replaced by the most general ones and the field φ is replaced by a general differential operator $\hat{\varphi}$. Notice that the Schrödinger matrix-operator (5.21) is Hermitian with respect to the simultaneous combination of matrix and space-time Hermitan conjugations. For notational simplicity, this operation will also be denoted by † since no ambiguity arises. This Hermiticity property of (5.21) can be made manifest in terms of Pauli matrices:

$$\hat{\mathcal{S}} \,=\, i\partial_t\, \sigma_0 - \hat{\mathcal{H}}\,, \qquad \hat{\mathcal{H}} = \hat{H}_0\, \sigma_0 + \hat{H}_1\, \sigma_1 + \hat{H}_2\, \sigma_2 + \hat{H}_3\, \sigma_3\,, \tag{5.24}$$

since the coefficients

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}(\hat{H}_\uparrow - \hat{H}^\tau_\downarrow)\,, \quad \hat{H}_1 = -\frac{1}{2}(\hat{\varphi} + \hat{\varphi}^\dagger)\,, \quad \hat{H}_2 = -\frac{i}{2}(\hat{\varphi} - \hat{\varphi}^\dagger)\,, \quad \hat{H}_3 = \frac{1}{2}(\hat{H}_\uparrow + \hat{H}^\tau_\downarrow)\,, \tag{5.25}$$

are all space-time Hermitian operators. It is important to stress that in the particular case of a $Sp\,(2N)$-invariant background the operators $\hat{H}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ are τ-symmetric while $\hat{H}_0$ is a τ-antisymmetric operator:

$$\hat{H}^\tau_0 = -\hat{H}_0\,, \quad \hat{H}^\tau_i = \hat{H}_i\,, \quad (i = 1, 2, 3)\,. \tag{5.26}$$

More generally, in the presence of an $O(N)$-invariant background the free action takes the form of a Schrödinger action with the most general 2×2 Hermitian matrix-operator. As we demonstrate in the following, these differences between $Sp\,(2N)$- and $O(N)$-invariant backgrounds play an important role in the correct identification of the gauge symmetry algebra and of a putative dual bulk spectrum.

The generating functional (5.2) of connected correlators of singlet bilinears in the non-interacting Fermi gas can now be evaluated formally due to the quadratic form of (5.20):

$$W_{\rm free}[\,h, \varphi\,; N] \,=\, -iN\, {\rm Tr} \log \hat{\mathcal{S}} \,=:\, N\, W_{\rm free}[\,h, \varphi\,] \tag{5.27}$$

where $\hat{\mathcal{S}}$ is given by (5.21). A crude but standard (BCS theory) approximation of such a complicated object would be to evaluate it in the case where the background fields are constant in space-time and momentum coordinates (in which case only the correlators of the number-density and of the Cooper-pair are evaluated). Another possible approximation

is the assumption that the background fields are weak in which case one might start a perturbative expansion in powers of the background fields along the lines of [53]. Notice that the trace in the functional (5.27) corresponds to an integral over the energy and momentum flowing along the fermion loop. This functional can be obtained as a light-like dimensional reduction from its higher-dimensional relativistic counterpart by fixing, in the integral over the corresponding relativistic momentum, one of the light-like component to be equal to m instead of integrating over it.

Finally, since the Schrödinger matrix-operator $\hat{\mathcal{S}}$ is Hermitian, it is formally diagonalisable via a generalised unitary Bogolioubov transformation $\Psi \mapsto \Psi' = \hat{\mathcal{U}}^{-1}\Psi$, in the sense that $\hat{\mathcal{S}}' = \hat{\mathcal{U}}^{\dagger}\hat{\mathcal{S}}\hat{\mathcal{U}} = (i\partial_t + \hat{H}'_0)\,\sigma_0 + \hat{H}'_3\,\sigma_3$. In general, the operators $\hat{H}'_0$ and $\hat{H}'_3$ depend on both background fields h and φ. In terms of the new quasi-particle field Ψ', the quadratic form (5.20) can be written as a sum of two Schrödinger actions:

$$S_{\text{free}}[\,\psi'\,,h\,,\varphi\,;N] \;=\; \sum_{\alpha=\uparrow,\downarrow} (\Psi^{\alpha\prime} \mid \hat{S}'_{\alpha} \mid \Psi^{\alpha\prime})\,. \tag{5.28}$$

Physically, this means that the free action in the presence of background fields describes (up and down) quasi-particles governed respectively by two Hamiltonian operators depending on both background fields h and φ. Again, this is nothing but a natural generalisation of the BCS theory.

5.2 Gauge and rigid symmetries

This subsection is devoted to the analysis of the gauge symmetries of the free classical action (in the presence of background fields) and of the corresponding effective action. Due to the simple expression of these actions (respectively, "quadratic form" and "trace-log"), their symmetries are manifest. These symmetries are important because, as usual, the gauge invariance of the effective action encodes the Ward-Takahashi identities (here, on the connected correlators of bilinears). The algebraic structure and physical interpretation of these symmetries will be addressed in more details in the next subsection.

Note that any quadratic functional such as (5.20) is formally invariant if a transformation,

$$\Psi \longrightarrow \hat{\mathcal{U}}^{-1}\,\Psi\,, \tag{5.29}$$

of the field Ψ in the fundamental representation of *invertible* matrix-operators $\hat{\mathcal{U}}^{-1}$ is compensated by a suitable transformation,

$$\hat{\mathcal{S}} \longrightarrow \hat{\mathcal{U}}^{\dagger}\hat{\mathcal{S}}\,\hat{\mathcal{U}}\,, \tag{5.30}$$

of the Hermitian Schrödinger matrix-operator (5.21). These finite transformations of $\hat{\mathcal{S}}$ correspond to gauge transformations of the background fields, as will be shown explicitly below. Physically, this means that the group of invertible 2×2 matrix-operators can be interpreted as the group of gauge symmetries of the free classical action $S_{\text{free}}[\,\psi\,,h\,,\varphi\,;N]$ in the presence of a general $O(N)$-invariant background. The corresponding infinitesimal transformations span the Lie algebra of 2×2 matrix-operators. This Lie algebra of infinitesimal gauge symmetries is nothing else but the complex algebra $M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}_{d+1}(\mathbb{C})$,

JHEP02(2012)113

i.e. the tensor product of the algebra M_2 of 2×2 matrices and the Weyl algebra $\mathcal{A}_{d+1}$ of space-time operators (both algebras are over $\mathbb{C}$).

On the other hand, any trace functional such as (5.27) is formally invariant under the subgroup of *unitary* matrix-operators ($\hat{\mathcal{U}}^\dagger = \hat{\mathcal{U}}^{-1}$), because the Schrödinger matrix-operator $\hat{\mathcal{S}}$ transforms in the adjoint representation

$$\hat{\mathcal{S}} \longrightarrow \hat{\mathcal{U}}^{-1} \hat{\mathcal{S}} \hat{\mathcal{U}} \,, \tag{5.31}$$

of this subgroup. The generating functional $W_{\text{free}}[\,h, \varphi\,; N]$ of connected correlators arises from integrating out the fundamental fields Ψ. More precisely, it arises from one-loop diagrams for the fermions and it can be interpreted as the background effective action of the free theory. Physically, the symmetries (5.31) of the $O(N)$-invariant background effective action $W_{\text{free}}[\,h, \varphi\,; N]$ can be interpreted as the subset of gauge symmetries of the classical action which remain manifestly preserved at quantum level. The other transformations are in general anomalous because the trace in (5.27) is only invariant under the adjoint transformation (5.31), hence not always under (5.30).[25] As one can see, formally the group of unitary matrix-operators may always be preserved at quantum level in the present construction. The corresponding algebra of infinitesimal transformations is the real Lie algebra of Hermitian 2×2 matrix-operators. As was explicitly shown in eq. (5.24), this real algebra is spanned by the linear combinations of sigma matrices with coefficients in the real Weyl algebra, hence it isomorphic to $\mathfrak{u}(2) \otimes \mathcal{A}_{d+1}(\mathbb{R})$, i.e. the tensor product of the algebra $\mathfrak{u}(2)$ of Hermitian 2×2 matrices and the Weyl algebra of Hermitian operators (both algebras are over $\mathbb{R}$).[26]

In order to describe the gauge symmetries (5.30) more explicitly, let us consider infinitesimal transformations near the identity: $\hat{\mathcal{U}} = \hat{1} + i\hat{A}$ where the infinitesimal generator $\hat{A}$ is a general 2×2 matrix-operator expressed in the form

$$\hat{A} \,=\, \begin{pmatrix} \hat{a}_\uparrow & \hat{b} \\ \hat{c} & -\hat{a}_\downarrow^\top \end{pmatrix} . \tag{5.32}$$

The space-time operators $\hat{a}_\uparrow$, $\hat{a}_\downarrow$, $\hat{b}$ and $\hat{c}$ are infinitesimal gauge parameters. The infinitesimal version of (5.30) now reads

$$\delta\hat{\mathcal{S}} \,=\, i\,(\,\hat{\mathcal{S}}\,\hat{A} \,-\, \hat{A}^\dagger\,\hat{\mathcal{S}}\,) \,. \tag{5.33}$$

Since the free Schrödinger matrix-operator $\hat{\mathcal{S}}_{\text{free}}$ is kept fixed in the variation of the total Schrödinger matrix-operator $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}}_{\text{free}} - \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$, one obtains $\delta\,\hat{\mathcal{S}} \,=\, -\,\delta\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} \,=\, i\,(\,\hat{\mathcal{S}}\,\hat{A} \,-\, \hat{A}^\dagger\,\hat{\mathcal{S}}\,)$ which decomposes as

$$\delta\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} \,=\, i\,(\,\hat{A}^\dagger\,\hat{S}_{\text{free}} \,-\, \hat{S}_{\text{free}}\,\hat{A}\,) \,+\, i\,(\,\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}\,\hat{A} \,-\, \hat{A}^\dagger\,\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}\,) \,. \tag{5.34}$$

[25] However, since the trace in (5.20) implicitly requires a regularisation in order to be well defined, notice that its finite or its logarithmically divergent parts may admit more symmetries than the full regularised effective action (*c.f.* [53] for more comments in the relativistic case).

[26] In more abstract terms, the algebra $M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}_{d+1}(\mathbb{C})$ is $\mathbb{Z}_2$-graded with respect to the eigenvalues ± 1 of the Hermitian conjugation †. A real form of this complex algebra is the subalgebra of Hermitian 2×2 matrix-operators (elements of eigenvalue $+1$).

Although the term of degree one in $\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ in eq. (5.34) is crucial for having exact symmetries of the action, for the sake of simplicity in the following subsection we will concentrate on the term of degree zero in order to discuss the interpretation of the gauge symmetries.

In terms of the corresponding Weyl symbols, the transformation (5.34) reads

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{H}(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) = i\Big(\mathcal{A}^*(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})\star\mathcal{S}_{\text{free}} - \mathcal{S}_{\text{free}}\star\mathcal{A}(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})\Big)\\ + i\Big(\mathcal{H}(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})\star\mathcal{A}(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) - \mathcal{A}^*(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})\star\mathcal{H}(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})\Big)\,,\end{aligned} \tag{5.35}$$

where

$$\mathcal{H}(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} h_\uparrow(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) & \varphi(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) \\ \varphi(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) & -h_\downarrow(t,\mathbf{x}\,;-p_t,-\mathbf{p})\end{pmatrix} \tag{5.36}$$

is the Weyl symbol of the interaction Hamiltonian matrix-operator $\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$,

$$\mathcal{A}(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} a_\uparrow(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) & b(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) \\ c(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) & -a_\downarrow(t,\mathbf{x}\,;-p_t,-\mathbf{p})\end{pmatrix} \tag{5.37}$$

is the Weyl symbol of the infinitesimal matrix-operator $\hat{A}$, and $\star$ stands for the Moyal product on the space-time phase-space (*c.f.* appendix A) defined by

$$\star = \exp\left[\frac{i}{2}\left(-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_t} + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_t}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial t} + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^i}\right)\right], \tag{5.38}$$

where the left and right arrows indicate on which side the corresponding derivative acts. The above Weyl symbols (5.36)–(5.37) should be interpreted as generating functions of symmetric tensor fields via the corresponding analogue of the power series expansion in momenta (5.11). In other words, the infinitesimal gauge transformation (5.35) can be written explicitly in terms of tensor fields only but the resulting expression would be rather complicated in complete generality. For the sake of simplicity, in the following subsection this will be done only to the lowest zeroth order in the background fields.

What is the relation of the gauge symmetries of the free action in the presence of background fields and the rigid symmetries of the Schrödinger action investigated in section 3? As can be seen from the conditions (3.28) and (3.29) defining, respectively, the symmetries of the Schrödinger action and their generators, they can be seen as gauge symmetries of the free action preserving the background fields, e.g. $\delta\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = 0$. In the absence of any background field ($h = \varphi = 0 \leftrightarrow \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = 0$), the classical action (5.3) reduces to the free Schrödinger action (5.1). Therefore the symmetries of the free Schrödinger action can be seen as the subalgebra of gauge symmetries that preserve the absence of background fields. The maximal symmetry algebra of the free Schrödinger action for two-component wave functions has been identified in subsection 3.2.3 with the real Lie algebra $\mathfrak{u}(2)\otimes\mathcal{A}_d(\mathbb{R})$ of quantum observables. Physically, this means that the algebra $\mathfrak{u}(2)\otimes\mathcal{A}_{d+1}$ of 2×2 Hermitian space-time operators can be seen as arising from gauging the algebra $\mathfrak{u}(2)\otimes\mathcal{A}_d$ of rigid symmetries via the Noether procedure, *c.f.* the minimal coupling (5.3). As usual in non-relativistic physics, the gauging amounts to an arbitrary dependence on the time

JHEP02(2012)113

coordinate t. Here, one adds an arbitrary dependence on the time momentum $\hat{P}_t = i\partial_t$ of the transformation parameters. However, only the arbitrary time dependence is genuinely non-trivial because, on-shell, any time derivative can be traded for the Laplacian. A related subtlety is that the charged non-relativistic bilinears are not Noether currents since they are not conserved. Thus, strictly speaking, the coupling (5.3) to external fields is not a pure minimal coupling *à la* Noether. As will be seen in the next subsection, the pseudo "conservation laws" of the charged bilinears are thus not associated with genuine rigid symmetries. Their related local symmetries simply allow to get rid of the charged background fields $\varphi^{(r)}$ with level $r > 0$, as is consistent with the fact that the bilinears $k^{(r)}$ with $r > 0$ are descendants. A somewhat similar result is actually true even for the neutral background fields and currents.

As a side remark, let us notice that the restriction to the $Sp\,(2N)$-invariant background fields subsector is a consistent truncation. However, it seems that the corresponding non-relativistic higher-spin algebra has no relativistic parent algebra. Let us describe in some details the subalgebra of symmetries related to the restriction to the $Sp\,(2N)$-invariant subsector. In order to describe this subtle subalgebra, some algebraic technology is needed. More precisely the operation $^\tau$, defined on the algebra of space-time operators in subsection 5.1, can be extended to a linear antiautomorphism of the algebra of matrix-operators by defining

$$\sigma_0^\tau = \sigma_0\,, \quad \sigma_i^\tau = -\sigma_i\,, \quad (i = 1, 2, 3)\,. \tag{5.39}$$

The algebras of 2×2 matrices and of space-time operators are $\mathbb{Z}_2$-graded with respect to the eigenvalues ± 1 of $^\tau$ and decompose as: $\mathfrak{u}(2) \cong \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{sp}(2)$ (since σ_0 is of eigenvalue $+1$ and the Pauli matrices σ_i are of eigenvalues -1) and $\mathcal{A}_{d+1} = \mathcal{A}_{d+1}^{\text{even}} \oplus \mathcal{A}_{d+1}^{\text{odd}}$ (where even/odd refer to the momentum parity). The eigenvalue -1 of this antiautomorphism correspond to the property (5.26). The corresponding real subalgebra of 2×2 matrix-operators is isomorphic to $\big(\mathfrak{u}(1) \otimes \mathcal{A}_{d+1}^{\text{odd}}\big) \oplus \big(\mathfrak{sp}(2) \otimes \mathcal{A}_{d+1}^{\text{even}}\big)$. As one can clearly see, this subalgebra for the $Sp\,(2N)$-invariant subsector is much more complicated than the corresponding algebra of infinitesimal gauge transformations, $\mathfrak{u}(2) \otimes \mathcal{A}_{d+1}$, for the $O(N)$-invariant sector. Moreover, the operation $^\tau$ seems to have no counterpart in the relativistic construction of Vasiliev [26]. This provides a strong motivation for focusing on the flavor-invariant (i.e. $O(N)$-invariant) bilinears when looking for a bulk dual.

5.3 Gauge symmetries to lowest order

Since, as any operator, the infinitesimal gauge parameter $\hat{A}$ in eq. (5.32) is the sum of a Hermitian and an anti-Hermitian operator, it is enough to consider these two cases of gauge parameters separately.

If the operator-matrix $\hat{A}$ is Hermitian, it becomes

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_\uparrow & \hat{b} \\ \hat{b}^\dagger & -\hat{a}_\downarrow^\tau \end{pmatrix} = \hat{A}^\dagger \tag{5.40}$$

where the operators $\hat{a}_\uparrow$ and $\hat{a}_\downarrow$ are Hermitian. Then we obtain that (5.34) can be written as

$$\begin{pmatrix} \delta\hat{H}_{\uparrow\,\mathrm{int}} & \delta\hat{\varphi} \\ \delta\hat{\varphi}^\dagger & -\delta\hat{H}^\tau_{\downarrow\,\mathrm{int}} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} [\hat{P}_t - \frac{\hat{P}^2}{2m}\,,\,\hat{a}_\uparrow] & [\hat{P}_t\,,\hat{b}] - \frac{1}{2m}\{\hat{P}^2\,,\hat{b}\} \\ [\hat{P}_t\,,\hat{b}^\dagger] + \frac{1}{2m}\{\hat{P}^2\,,\hat{b}^\dagger\} & -[\hat{P}_t + \frac{\hat{P}^2}{2m}\,,\,\hat{a}^\tau_\downarrow] \end{pmatrix}, \tag{5.41}$$

modulo the linear term in the backgrounds which will always be dropped from now on. This transformation is equivalent to the following infinitesimal transformation:

$$\delta\hat{H}^\alpha_{\mathrm{int}} = -i\left[\hat{P}_t - \frac{\hat{P}^2}{2m}\,,\,\hat{a}^\alpha\right] \tag{5.42}$$

for the (up and down) interaction Hamiltonians, and

$$\delta\hat{\varphi} = -i\,[\hat{P}_t\,,\hat{b}] + \frac{i}{2m}\,\{\hat{P}^2\,,\hat{b}\} \tag{5.43}$$

for the off-diagonal term. The transformation (5.42) reads in terms of the corresponding Weyl symbols

$$\delta h^\alpha(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) = -i\left[p_t - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\,\stackrel{\star}{,}\,a^\alpha(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})\right] = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}\,p^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}\right) a^\alpha(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) \tag{5.44}$$

where $\star$ stands for the Moyal product (5.38) on the space-time phase space. The above Weyl symbols should be interpreted as generating functions of symmetric tensor fields via the corresponding analogue of the power series expansion in momenta (5.11). This leads to the following gauge transformations at order zero in the neutral background fields

$$\delta h^{(r)\,\alpha}_{i_1\cdots i_s} = \partial_t a^{(r)\,\alpha}_{i_1\cdots i_s} + \frac{s}{m}\,\partial_{(i_1} a^{(r)\,\alpha}_{i_2\cdots i_s)} \tag{5.45}$$

where the round bracket stands for the symmetrisation over all indices with weight one, e.g. $h_{(i_1\cdots i_s)} = h_{i_1\cdots i_s}$. These gauge symmetries of the neutral background fields are thus the pendant of the conservation laws of the neutral currents encoded in (4.30). These symmetries indeed leave invariant the minimal coupling terms on-shell, as can be checked explicitly by integrating by parts and making use of the conservation laws. The gauge symmetries, in the case of neutral background field such that $h_\uparrow = h_\downarrow$, generalise to higher spins the non-relativistic general-coordinate symmetries discussed in [13].[27] Similarly, the infinitesimal transformations corresponding to (5.43) can also be written in terms of the Weyl symbols as

$$\begin{aligned} \delta\varphi(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}) &= -i\left[p_t\,\stackrel{\star}{,}\,b(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})\right] + \frac{i}{2m}\left\{\mathbf{p}^2\,\stackrel{\star}{,}\,b(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p})\right\} \\ &= \left(\partial_t + \frac{i}{m}\left(\mathbf{p}^2 - \frac{\Delta}{4}\right)\right) b(t,\mathbf{x}\,;p_t,\mathbf{p}). \end{aligned} \tag{5.46}$$

[27] Explicitly, the dictionary between notations of [13] and ours is: $A_0 = -\frac{1}{m}h^{(0)} + \frac{1}{8m}(\partial_i\partial_j - \delta_{ij}\Delta)h^{(0)ij} + \frac{1}{4m}\Delta h^{(1)} - \frac{1}{4m}\partial_t\partial_i h^{(1)i}$, $A_i = -h^{(0)}_i$, $\Phi = -h^{(1)}$, $B_i = -m\,h^{(1)}_i$, $h_{ij} = -m\,h^{(0)}_{ij}$ and $\xi^- = -\frac{1}{m}\,a^{(0)}$, $\xi_i = a^{(0)}_i$, $\xi^t = -a^{(1)}$. Employing these identifications we recover the gauge transformations of [13] to zeroth order in the background fields. More precisely, we find a higher-spin generalisation of transformations of [13] since only transformations which originate from the relativistic spin one and two gauge transformations were considered in [13].

JHEP02(2012)113

This leads to the following gauge transformations at order zero in the charged background fields

$$\delta\varphi^{(r)}_{i_1\cdots i_s} = \left(\partial_t - \frac{i}{4m}\,\Delta\right) b^{(r)}_{i_1\cdots i_s} + \frac{i\,s(s-1)}{m}\,\delta_{(i_1 i_2} b^{(r)}_{i_3\cdots i_s)}\,. \tag{5.47}$$

These transformations actually correspond to the tracelessness-like condition for the charged currents k, i.e. of the type (4.61). If we instead had made use of the traceless currents $\bar{k}$, then the above transformation would take the simpler form of a Weyl transformation $\delta\bar{\varphi}^{(r)}_{i_1\cdots i_s} = \frac{i\,s(s-1)}{m}\delta_{(i_1 i_2}\bar{b}^{(r)}_{i_3\cdots i_s)}$. Such kind of higher-spin generalisations of linearised Weyl transformations appear in conformal higher-spin gravity [54].

If the matrix-operator $\hat{A}$ is anti-Hermitian, it is of the form

$$\hat{A} \,=\, i\begin{pmatrix} \hat{c}_\uparrow & \hat{d} \\ \hat{d}^\dagger & -\hat{c}^\tau_\downarrow \end{pmatrix}. \tag{5.48}$$

where the operators $\hat{c}_\uparrow$ and $\hat{c}_\downarrow$ are Hermitian. Then we obtain that (5.34) can be written as

$$\begin{pmatrix} \delta\hat{H}_{\uparrow\mathrm{int}} & \delta\hat{\varphi} \\ \delta\hat{\varphi}^\dagger & -\delta\hat{H}^\tau_{\downarrow\mathrm{int}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\hat{P}_t \,-\, \frac{\hat{P}^2}{2m},\, \hat{c}_\uparrow\} & \{\hat{P}_t, \hat{d}\} - \frac{1}{2m}\,[\hat{P}^2, \hat{d}\,] \\ \{\hat{P}_t, \hat{d}^\dagger\} \,+\, \frac{1}{2m}[\hat{P}^2, \hat{d}^\dagger] & -\{\hat{P}_t \,+\, \frac{\hat{P}^2}{2m},\, \hat{c}^\tau_\downarrow\} \end{pmatrix}, \tag{5.49}$$

which is equivalent to the following infinitesimal transformation:

$$\delta\hat{H}^\alpha_{\mathrm{int}} = \left\{\hat{P}_t \,-\, \frac{\hat{P}^2}{2m}\,,\, \hat{c}^\alpha\right\} \tag{5.50}$$

for the (up and down) interaction Hamiltonians, and

$$\delta\hat{\varphi} = \{\hat{P}_t\,,\hat{d}\} - \frac{1}{2m}\,[\hat{P}^2\,,\hat{d}\,]\,. \tag{5.51}$$

This leads to the following gauge transformations at order zero in the background fields

$$\delta h^{(r)\,\alpha}_{i_1\cdots i_s} \;=\; 2\,r\,c^{(r-1)\,\alpha}_{i_1\cdots i_s} + \frac{1}{m}\left(\frac{1}{4}\,\Delta\,c^{(r)\,\alpha}_{i_1\cdots i_s} - s(s-1)\delta_{(i_1 i_2}c^{(r)\,\alpha}_{i_3\cdots i_s)}\right) \tag{5.52}$$

and

$$\delta\varphi^{(r)}_{i_1\cdots i_s} \;=\; 2\,r\,d^{(r-1)}_{i_1\cdots i_s} + \frac{i\,s}{m}\,\partial_{(i_1}\,d^{(r)}_{i_2\cdots i_s)}\,. \tag{5.53}$$

The first important observation to be made is that the first term in these transformations for level $r \neq 0$ is of Stuckelberg type and therefore allows to get rid (at this order in the background expansion) of all tensor fields of non-vanishing level $r > 0$. This is natural since the bilinears to which they couple are not independent: the neutral (respectively, charged) bilinears of the non-vanishing level $r > 0$ are traces (respectively, descendants) of the ones with $r = 0$. One should be careful that it is not clear whether this gauge choice is accessible at non-linear level. In addition, the non-vanishing levels are useful for the closure of the non-Abelian gauge algebra. Moreover, these Stuckelberg-like transformations might be anomalous at quantum level. In any case, the second terms in the transformations (5.52)–(5.53) are more familiar: they correspond respectively to Weyl-like (Fradkin-Tseytlin's) transformations of the neutral tensor fields and to Maxwell-like (Fronsdal's)

transformations of the charged tensor fields. They correspond respectively to the trace-like (or pseudo-conservation) conditions on the neutral (or charged) bilinears (4.69) (or (4.49)). The gauge symmetries (5.52), in the case of neutral background field such that $h_\uparrow = h_\downarrow$, generalise to higher spins the non-relativistic Weyl symmetries discussed in [36].

Let us stress that it is very useful to make use of the traceless currents $\bar{k}$, because the transformations $\delta\bar{\varphi}^{(r)}_{i_1\cdots i_s}$ take a simpler form for the part independent of the background fields. However, the explicit form of the non-linear completion would be much more complicated, which is why we refrained from making direct use of them in this section. Nevertheless, one should observe that the scalar charged background field at level zero, i.e. the dimer $\varphi = \bar{\varphi}^{(0)}$ coupling to the Cooper pair, transforms linearly under the symmetries. More precisely, $\delta\bar{\varphi}^{(0)}$ is linear in the background field. This property should be useful to write the symmetry transformations of the Legendre transform $\Gamma[\,h\,,\varphi\,;N]$ of the background effective action $W_{\rm free}[\,h\,,\varphi\,;N]$ with respect to the dimer. Anyway, at leading order in $1/N$, the bulk dual of the ideal and of the unitary Fermi gases has the same symmetries. Only the $1/N$ corrections are expected to break the higher-spin symmetries [55].

6 Conclusion and outlook

Recent advances in holographic duality motivated us to investigate the symmetries and the currents of non-relativistic free fermions. Since in the large-N limit the unitary and free Fermi gases are Legendre conjugate of each other, our studies might be useful for a better understanding of the strongly-coupled many-body problem of unitary fermions. We identified the maximal symmetry algebra of the free single-particle Schrödinger equation with the Weyl algebra of quantum observables. This higher-spin algebra is an infinite-dimensional extension of the well-studied Schrödinger algebra. Further, by applying the light-like dimensional reduction to relativistic Noether currents we constructed the infinite collection of non-relativistic "currents" bilinear in the elementary fermions. In addition, the formalism of Weyl quantisation allowed us to express the minimal coupling of these bilinears to background sources in a compact way. The final result is formally identical to the Nambu-Gor'kov formulation of the BCS theory except that the chemical potential and the Cooper-pair source are replaced by space-time differential operators.

One of the leitmotives behind our work is the null reduction method, advocated as "Bargmann framework" in [42, 43, 48, 49], which allows to obtain non-relativistic structures from given relativistic ones. The other way around, i.e. a null lift (or "oxydation") of a given non-relativistic structure to its higher-dimensional relativistic counterpart, is sometimes called an "Eisenhart lift". One should stress that the higher-dimensional counterpart of a consistent non-relativistic field theory may be sick as a relativistic quantum field theory *per se*. For instance, the spin-statistics theorem does not apply to non-relativistic theories so it may be violated in the Eisenhart lift. Therefore, in general the relativistic higher-dimensional theory should be understood as an auxiliary tool.[28] The results of

[28] In any case, *a priori* the Eisenhart lift should not be trusted beyond tree level. Nevertheless, this restriction might be overcome by working with the quantum effective action since then all Feynman diagrams become trees (written in terms of full propagators and of proper vertices).

JHEP02(2012)113

the present paper demonstrate the usefulness of the Eisenhart lift for the free and the unitary Fermi gases.

The Bargmann framework might also apply to the holographic duality in the sense that the AdS/CFT correspondence might lead to the AdS/unitary fermions correspondence upon null reduction, along the lines of [56–58] and as proposed in [24]. In these proposals, the background bulk geometry is an asymptotically AdS space-time (rather than the Schrödinger manifold, as proposed in [13, 14]) possessing a nowhere vanishing covariantly constant null vector field.[29] The isometry group of AdS is broken to the Schrödinger subgroup by the dimensional reduction itself. A nice property of this approach is that if the dimensional reduction is performed on both sides of the correspondence, then the validity of the holographic duality between the pair of relativistic parent theories would ensure the duality between the pair of reduced non-relativistic theories, at least in the large-N limit. Notice that, in this picture, the reduced holographic duality should be between a non-relativistic conformal field theory living on the boundary of a Newton-Cartan space-time and a non-relativistic gravity theory in its interior. Indeed, the reduction of vacuum Einstein equations along a non-vanishing covariantly-constant (or at least Killing) null vector field leads to the Newton-Cartan equations describing in a geometric fashion the non-relativistic gravity theory of Newton [42, 59].

So, with these various results in mind, let us come back to our original question: *What is an educated guess for a gravity dual of unitary and free fermions?* On the boundary side, the Bargmann framework allowed us to understand the higher-spin symmetries of the free fermions and to obtain from the relativistic massless Grassmann-odd scalar free theory the corresponding currents and couplings to background sources. Our results closely resemble the boundary data in the AdS/O(N) correspondence mentioned in the introduction.[30] On the bulk side, one might thus speculate that the null reduction of a higher-spin gauge theory would be a natural candidate. Assuming that the Bargmann framework can be applied to both sides of the correspondence, the gravity dual of the ideal and unitary Fermi gases should be a non-relativistic higher-spin gravity theory obtained directly from Vasiliev equations upon light-like reduction.[31] Looking in the catalogue of Vasiliev theories in any dimension [26], one can see that the flavor-singlet bilinear sector of the large-N extension of the unitary fermions in d space dimension should be dual to the null-reduction of classical Vasiliev theory on AdS_{d+3} with $\mathfrak{u}(2)$-valued tensor gauge fields of all integer ranks.[32] Therefore, one is led to speculate that the bulk dual of the "physical" (i.e. $N = 1$, $d = 3$) unitary UV-stable Fermi gas might be *the null dimensional reduction of the* $\mathfrak{u}(2)$ *higher-spin gauge theory on* AdS_6 *with the exotic* ($\Delta_- = 2$) *boundary condition for the complex scalar field dual to the Cooper-pair field* [24].

[29] Such space-times would be called asymptotically AdS Bargmann manifolds in the terminology of [42]. They can somehow be interpreted physically as gravitational waves propagating in AdS with parallel rays.

[30] Interestingly, an Euclidean $Sp(2N)$ vector model with anticommuting scalars has recently been conjectured to be dual to Vasiliev's higher-spin gravity on de Sitter space [60].

[31] An alternative, more along the lines of [13, 14], would be to look for a natural embedding of the Schrödinger manifold as a natural background for some (possibly modified) version of Vasiliev equations.

[32] The corresponding higher-spin algebra was denoted by $\mathfrak{hu}(2/\mathfrak{sp}(2)[d+2,2])$ in [26]. It is isomorphic to the product between $\mathfrak{u}(2)$ and the higher-spin algebra $\mathfrak{hu}(1/\mathfrak{sp}(2)[d+2,2])$.

JHEP02(2012)113

These speculations are supported by our results on the large-N extension of the ideal and the unitary Fermi gases, so let us summarise them with emphasis on their relevance for the above proposal: In section 2, it was demonstrated that, in the large-N limit, the generating functionals of the unitary Fermi gas and of the ideal Fermi gas are related by a Legendre transformation. Therefore the corresponding Fermi gases can be dual to the same bulk theory for two distinct choices of boundary conditions, as in the conjecture [21] (and its generalisation to higher dimensions). The corresponding scaling dimensions of the Cooper-pair field was found to be precisely in agreement with the mass-square $m^2 = -2\,d$ of the AdS_{d+3} scalar field in Vasiliev higher-spin multiplet [26]. The holographic degeneracy is admissible in the range $0 < d < 4$ in agreement with the field theory prediction. In section 3 the maximal symmetry algebra of the free Schrödinger action was identified and in section 4 it was shown that it originates from the maximal symmetry algebra of the free massless Klein-Gordon action via light-like dimensional reduction. Since the identification of the proper higher-spin algebras is a crucial step in the construction of higher-spin gravities of Vasiliev, the embedding of the non-relativistic higher-spin algebra into its relativistic parent (as the centraliser of a given light-like momentum) provides a strong evidence for the consistency of the dimensional reduction of Vasiliev equations. More precisely, we believe that the techniques of the light-like dimensional reduction for Einstein gravity in the frame formalism, developed in [59], must have a natural higher-spin extension since Vasiliev gravity is based on a frame-like formalism à la Cartan where, in the fiber, the AdS isometry algebra for usual gravity is replaced by the higher-spin algebra. For the relativistic conjecture [21, 25], the validity of the holographic dictionary at the kinematical level (i.e. two-point functions) between bilinear boundary currents and bulk gauge fields in any dimension and for any integer spin is actually a corollary of the Flato-Fronsdal theorem and its generalisation [61, 62]. The above embedding of the non-relativistic higher-spin algebra into its relativistic parent combined with the Flato-Fronsdal theorem automatically validates the holographic dictionary proposed above between $O(N)$-singlet bilinears in the non-relativistic fields on the boundary, constructed in section 4, and $\mathfrak{u}(2)$-valued symmetric tensor gauge fields of all integer spins in the bulk. In section 5, the generating functional of connected correlators of $O(N)$-singlet bilinears for the non-interacting Fermi gas was computed explicitly together with the non-relativistic conformal higher-spin Ward identities. According to the Gubser-Klebanov-Polyakov-Witten prescription, the generating functional should be equal to the on-shell bulk higher-spin action with prescribed boundary conditions while the Ward identities should be dual to the asymptotic remnant of bulk higher-spin gauge transformations. In the large-N limit, these properties would follow directly from the light-like dimensional reduction if the parent relativistic duality [21, 25] is valid.

In order to test these ideas explicitly in the bulk, various issues need to be investigated: Firstly, one should clarify how concretely the higher-spin unitary representations of the Schrödinger group also describe free higher-spin fields in the bulk. Secondly, the non-relativistic analogues of the Flato-Fronsdal theorem [61, 62] and of the Vasiliev equations [26] should be spelled out. These interesting open problems may prove to be challenging exercises to perform explicitly but one should stress that they are ensured to be

JHEP02(2012)113

well posed problems because their answers have to follow from their known relativistic counterparts via the light-like dimensional reduction, since the latter is well defined and consistent. Both at the kinematical and dynamical level, this consistency is ensured by our embedding of the non-relativistic higher-spin algebra into its relativistic parent as the centraliser of a given light-like momentum.

Endowed with these results, one could try to perform non-trivial tests of the conjecture, presumably along the lines of the encouraging results of Giombi and Yin in AdS_4 [22, 23]. So far most tests of the higher-spin AdS/CFT correspondence have been restricted to bulk dimensions $D \leqslant 4$, because Vasiliev theory is technically simpler in these dimensions (due to the use of twistors, see e.g. [63] for a review). For this reason, technically it might be easier to check whether the null reduction of $\mathfrak{u}(2)$ Vasiliev theory around AdS_4 with the standard ($\Delta_+ = 2$) boundary condition is dual to the $d = 1$ scale-invariant "unitary" IR-stable two-component Fermi gas. Remarkably, the latter is well-understood as it corresponds to an infinite repulsion between "up" and "down" fermions and thus is equivalent to the non-interacting one-component Fermi gas with the same density (see e.g. [64] and references therein).

A possible angle of attack toward a derivation of the holographic duality would be to parallel the strategy of Douglas, Mazzucato and Razamat [65]. More precisely, one might consider the exact renormalisation group equation for the regularised generating functional describing free fermions in the presence of a higher-spin background. The corresponding higher-spin sources flow under the renormalisation group and one may look for a suggestive rewriting of their scale evolution as a radial evolution of higher-spin bulk fields.

The relative simplicity of the non-relativistic higher-spin algebra and of the null reduction method supports the optimistic view that the holographic dual of unitary fermions is an accessible goal worth investigating.

Note added.[33] After the present work was completed and submitted to arXiv, we were informed that it has some overlap with results obtained in the context of the $Sp(2d, \mathbb{R})$-covariant unfolded equations initiated in [66]. In particular, the isomorphism between the maximal symmetry algebra of the free Schrödinger equation and the Weyl algebra of spatial differential operators follows as a corollary[34] from the general results on global symmetries of unfolded equations upon the identification of the spatial coordinates with the twistor variables of [66] and of the time[35] coordinate with the trace of the matrix coordinates of [66]. Moreover, the structure (4.21) of the generating function of non-relativistic bilinear currents of vanishing level is a particular instance of the "generalised stress tensor" of [67]. Bilinear current generating functions constructed in terms of two different solutions with opposite signs of the Planck constant, identified with the mass here, were presented before in [69].

[33] We are grateful to M.A. Vasiliev for calling these points to our attention and for his useful explanations.

[34] See e.g. the subsection 2.1 of [67] for a review of the general argument and its application to the case relevant here.

[35] Notice that the latter identification of a "time" coordinate among the $\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{R})$ matrix coordinates was motivated in [68] (see e.g. the subsection 2.2 of [67] for a concise review of this point).

JHEP02(2012)113

Acknowledgments

We thank C. Duval, S. Golkar, M. Hassaine, P. Horvathy, D.T. Son, J. Unterberger and M. Valenzuela for discussions on related issues. X.B. and S.M. are grateful to the Institut für Theoretische Physik (Heidelberg) and to the Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique (Tours) for respective hospitality. X.B. also acknowledges the Instituto de Matemática y Fisica (Talca) for kind hospitality while the paper was near completion.

A Weyl quantisation

The Weyl-Wigner-Grönewold-Moyal formalism [70–74] offers a classical-like formulation of quantum mechanics using phase space functions as observables and the Wigner function as an analogue of the Liouville density function.

Classical mechanics is based on the commutative algebra of classical observables, i.e. real functions $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ on the phase space $T^*\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d*}$, endowed with the canonical Poisson bracket

$$\{f,g\}_{\mathbf{P.B.}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x^i}\,. \tag{A.1}$$

Quantum mechanics is based on the non-commutative associative algebra of quantum observables, i.e. Hermitian operators $\hat{F}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}})$ on the Hilbert space $L^2(\mathbb{R}^d)$ of square-integrable functions. The *Weyl algebra* $\mathcal{A}_d$ is the associative algebra of quantum observables that are polynomials in the positions and momenta. The *Heisenberg algebra* $\mathfrak{h}_d$ is the Lie algebra of quantum observables that are polynomials of degree one in the positions and momenta, it is spanned by $\hat{X}^i$, $\hat{P}_j$ and a central element $\hbar$ obeying to the *canonical commutation relations*

$$[\,\hat{X}^i\,,\,\hat{P}_j\,] = i\hbar\,\delta^i_j\,. \tag{A.2}$$

In more abstract terms, the Weyl algebra $\mathcal{A}_d$ is the universal enveloping algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{h}_d)$ of the Heisenberg algebra. The Schur lemma implies that the real eigenvalue (which we denote by the same symbol $\hbar$) of the central element labels the UIRs of the Heisenberg algebra. The *theorem of Stone and von Neumann* asserts that, up to equivalence, there is a unique UIR of the Heisenberg algebra $\mathfrak{h}_d$ for each real value of $\hbar \neq 0$. Moreover, the corresponding representation of $\mathcal{A}_d$ is faithful, which legitimates the equivalence between the abstract definitions and the concrete realisations of the Heisenberg and Weyl algebras.[36]

The *Weyl map* $\mathcal{W} : f(\mathbf{x},\mathbf{p}) \mapsto \hat{F}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}})$ associates to any function f a Weyl(i.e. symmetric)-ordered operator $\hat{F}$ defined by

$$\hat{F} := \frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\int d\,\mathbf{k}\,d\mathbf{v}\;\mathcal{F}(\mathbf{k},\mathbf{v})\,e^{\frac{i}{\hbar}\,(\,k_i\,\hat{X}^i - v^i\,\hat{P}_i)}\,, \tag{A.3}$$

[36] For $\hbar = 0$, the UIRs of $\mathfrak{h}_d$ reduce to the one-dimensional UIRs of the commutative algebra $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d*}$ labeled by the eigenvalues $\mathbf{x}$ and $\mathbf{p}$ of the operators $\hat{\mathbf{X}}$ and $\hat{\mathbf{P}}$. Obviously, when $\hbar = 0$ the algebra $\mathcal{A}_d$ is realised as the commutative algebra of polynomials $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ on phase space.

JHEP02(2012)113

where $\mathcal{F}$ is the Fourier transform[37] of f over the *whole* phase space (in other words, over position *and* momentum spaces)

$$\mathcal{F}(\mathbf{k},\mathbf{v}) := \frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\int d\mathbf{x}\, d\mathbf{p}\; f(\mathbf{x},\mathbf{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,(\,k_i\,x^i - v^i\,p_i)}\,. \tag{A.4}$$

The function $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ is called the *Weyl symbol* of the operator $\hat{F}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}})$ which need not be in the symmetric-ordered form. A nice property of the Weyl map (A.3) is that it relates the complex conjugation * of symbols to the Hermitian conjugation † of operators, $\mathcal{W}: f^*(\mathbf{x},\mathbf{p}) \mapsto \hat{F}^\dagger(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}})$. Consequently, the image of a real function (a classical observable) is a Hermitian operator (a quantum observable). The inverse $\mathcal{W}^{-1}: \hat{F}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}}) \mapsto f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ of the Weyl map is called the *Wigner map*.

The canonical commutation relations (A.2) between the position and momentum operators and the Baker-Campbell-Hausdorff formula imply two very useful equalities:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\,(\,k_i\,\hat{X}^i - v^i\,\hat{P}_i)} = e^{-\frac{i}{2\hbar}\,v^i\,\hat{P}_i}\, e^{\frac{i}{\hbar}\,k_i\,\hat{X}^i}\, e^{-\frac{i}{2\hbar}\,v^i\,\hat{P}_i} \tag{A.5}$$

$$= e^{-\frac{i}{2\hbar}\,v^i\,\{\,\hat{P}_i,\;\}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\,k_i\,\hat{X}^i} \tag{A.6}$$

where $\{\ ,\ \}$ denotes the anticommutator.

On the one hand, combining (A.3) with (A.6) implies that one way to explicitly perform the Weyl map is via some "anticommutator ordering" for half of the variables with respect to their conjugates. For instance, the image of a Weyl symbol which is a formal power series in the momenta,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},\mathbf{p}) &= \sum_{r\geqslant 0}\frac{1}{r!}\, f^{i_1\ldots i_r}(\mathbf{x})\, p_{i_1}\ldots p_{i_r} \\ &= f(\mathbf{x}) \,+\, f^i(\mathbf{x})\, p_i \,+\, \frac{1}{2}\, f^{ij}(\mathbf{x})\, p_i p_j \,+\, \mathcal{O}(p^3)\,, \end{aligned} \tag{A.7}$$

can be written as

$$\begin{aligned} \hat{F}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}}) &= \sum_{r\geqslant 0}\frac{1}{r!\,2^r}\,\{\cdots\{f^{i_1\ldots i_r}(\hat{\mathbf{X}})\,,\,\hat{\mathbf{P}}_{i_1}\}\,,\cdots,\,\hat{\mathbf{P}}_{i_r}\} \\ &= \hat{F}(\hat{\mathbf{X}}) \,+\, \frac{1}{2}\,\big(\,\hat{F}^i(\hat{\mathbf{X}})\,\hat{\mathbf{P}}_i \,+\, \hat{\mathbf{P}}_i\,\hat{F}^i(\hat{\mathbf{X}})\,\big) \\ &\quad + \frac{1}{4}\,\big(\,\hat{F}^{ij}(\hat{\mathbf{X}})\,\hat{\mathbf{P}}_i\hat{\mathbf{P}}_j \,+\, 2\,\hat{\mathbf{P}}_i\,\hat{F}^{ij}(\hat{\mathbf{X}})\,\hat{\mathbf{P}}_j \,+\, \hat{\mathbf{P}}_i\hat{\mathbf{P}}_j\,\hat{F}^{ij}(\hat{\mathbf{X}})\,\big) \,+\,\ldots \end{aligned} \tag{A.8}$$

On the other hand, eq. (A.5) implies that one way to explicitly perform the Wigner map is via a Fourier transformation of the "point shifted" integral kernel of the operator. The *integral kernel* of an operator $\hat{F}$ is the matrix element $\langle\,\mathbf{x}\mid\hat{F}\mid\mathbf{x}'\,\rangle$ appearing in the position representation of the state $\hat{F}\mid\psi\,\rangle$ as follows

$$\langle\,\mathbf{x}\mid\hat{F}\mid\psi\,\rangle \;=\; \int d\mathbf{x}'\;\langle\,\mathbf{x}\mid\hat{F}\mid\mathbf{x}'\,\rangle\;\psi(\mathbf{x}')\,, \tag{A.9}$$

[37] The Weyl map is well defined for a much larger class than square integrable functions, including for instance the polynomial functions, Fourier transforms of which are distributions.

where the wave function in position space is $\psi(\mathbf{x}') := \langle\, \mathbf{x}' \mid \psi \,\rangle$ and the completeness relation $\int d\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}' \,\rangle\, \langle\, \mathbf{x}' \mid = \widehat{1}$ has been inserted. The definition (A.3) and the relation (A.5) enable to write the integral kernel of an operator in terms of its Weyl symbol,

$$\langle\, \mathbf{x} \mid \hat{F} \mid \mathbf{x}' \,\rangle \;=\; \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^d}\; f\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{x}'}{2}\,,\,\mathbf{p}\right)\, e^{\frac{i}{\hbar}\,(\,x^i - x'^{\,i}\,)\,p_i}\,. \tag{A.10}$$

Conversely, this provides an explicit form of the Wigner map

$$f(\mathbf{x},\mathbf{p}) \;=\; \int d\mathbf{q}\; \langle\, \mathbf{x}-\mathbf{q}/2 \mid \hat{F} \mid \mathbf{x}+\mathbf{q}/2 \,\rangle\; e^{\frac{i}{\hbar}\,q^i\,p_i}\,, \tag{A.11}$$

as follows from the expression (A.10). This shows that indeed the Weyl and Wigner maps are bijections between the vector spaces of classical and quantum observables.

The *Moyal product* $\star$ is the pull-back of the composition product in the algebra of quantum observables with respect to the Weyl map $\mathcal{W}$, such that

$$\mathcal{W}\big[f(\mathbf{x},\mathbf{p}) \star g(\mathbf{x},\mathbf{p})\big] \;=\; \hat{F}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}})\; \hat{G}(\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{P}})\,. \tag{A.12}$$

The Wigner map (A.11) allows to check that the following explicit expression of the Moyal product satisfies the definition (A.12),

$$\begin{aligned} f \star g &= f\;\exp\left[\frac{i\,\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^i}\,\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_i}\,\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^i}\right)\right] g \\ &= f\,g + \frac{i\,\hbar}{2}\,\{f\,,\,g\}_{\mathbf{P.B.}} + \mathcal{O}(\hbar^2), \end{aligned} \tag{A.13}$$

where the arrows indicate on which factor the derivatives should act.

Let $\hat{H}$ be a Hamiltonian operator with the corresponding Weyl symbol $h(\mathbf{x},\mathbf{p})$. In the Heisenberg picture, the time evolution of a quantum observable $\hat{F}$ (which does not depend explicitly on time) is governed by the differential equation

$$\frac{d\hat{F}}{dt} \;=\; \frac{1}{i\,\hbar}\,[\hat{F},\hat{H}] \tag{A.14}$$

or equivalently in terms of symbols

$$\frac{df}{dt} \;=\; \frac{1}{i\,\hbar}\,[\,f\,\stackrel{\star}{;}\,h\,] \tag{A.15}$$

where $[\ \stackrel{\star}{;}\ ]$ denotes the *Moyal commutator* defined by

$$\begin{aligned} [\,f\,\stackrel{\star}{;}\,g\,] &:= f\star g \;-\; g\star f \\ &=\; 2\,i\;f\;\sin\left[\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^i}\,\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_i}\,\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^i}\right)\right] g \\ &=\; i\,\hbar\,\{\,f\,,\,g\,\}_{\mathbf{P.B.}} \;+\; \mathcal{O}(\hbar^2)\,, \end{aligned} \tag{A.16}$$

as can be seen from (A.13). The *Moyal bracket* is related to the Moyal commutator by

$$\{\,f\,,\,g\,\}_{\mathbf{M.B.}} := \frac{1}{i\,\hbar}\,[\,f\,\stackrel{\star}{;}\,g\,] = \{\,f\,,\,g\,\}_{\mathbf{P.B.}} + \mathcal{O}(\hbar).$$

JHEP02(2012)113

Note that the Moyal bracket $\{\ ,\ \}_{\mathbf{M.B.}}$ is a deformation of the Poisson bracket $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P.B.}}$, and one can see that the equation (A.15) is a perturbation of the Hamiltonian flow. If either $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ or $g(\mathbf{x},\mathbf{p})$ is a polynomial of degree two, then their Moyal bracket reduces to their Poisson bracket. So when the Hamiltonian is quadratic (free) the quantum evolution of a Weyl symbol is identical to its classical evolution.

B Representations of the Schrödinger algebra

Besides the free Schrödinger theory, there are known examples of interacting theories which preserve the Schrödinger symmetry at quantum level. Nishida and Son called them "non-relativistic conformal field theories" (NRCFT) and made an important step towards a systematic understanding of this class of theories [11, 12].[38] In this appendix, we review their basic results and investigate the structure of the unitary irreducible representations (UIR) of the Schrödinger algebra.

In close analogy with relativistic conformal field theories, it is useful to introduce primary operators[39] in NRCFT [11]. A local *primary operator* $\hat{\mathcal{O}}(t,\mathbf{x})$ has a well defined "spin" $s_{\hat{\mathcal{O}}}$, scaling dimension $\Delta_{\hat{\mathcal{O}}}$ and mass number $M_{\hat{\mathcal{O}}}$. In other words, it carries an irreducible representation of the rotation algebra $\mathfrak{o}(d)$ and it is an eigenvector of the scaling and mass operators.[40] For a scalar primary $\hat{\mathcal{O}}$ with $s_{\hat{\mathcal{O}}} = 0$ (to which we restrict our attention here for the sake of simplicity), this means

$$[\hat{D},\hat{\mathcal{O}}] = -i\Delta_{\hat{\mathcal{O}}}\hat{\mathcal{O}}, \quad [\hat{M},\hat{\mathcal{O}}] = M_{\hat{\mathcal{O}}}\hat{\mathcal{O}}, \tag{B.1}$$

where $\hat{\mathcal{O}} \equiv \hat{\mathcal{O}}(t=0,\mathbf{x}=\mathbf{0})$. By definition, a primary operator $\hat{\mathcal{O}}$ must also commute with $\hat{K}_i$ and $\hat{C}$

$$[\hat{K}_i,\hat{\mathcal{O}}] = 0, \qquad [\hat{C},\hat{\mathcal{O}}] = 0. \tag{B.2}$$

Most importantly, from the primary operator $\hat{\mathcal{O}}$ one can build a representation[41] of the Schrödinger algebra. Specifically, the primary operator is the lowest weight operator as it has the lowest scaling dimension in the representation. The *descendants* are constructed by taking spatial and temporal derivatives of the primary operator $\hat{\mathcal{O}}$. Using the Schrödinger algebra it is possible to show that the generators $\hat{P}_i$ and $\hat{H}$ form a pair of canonical creation operators which increase the scaling dimension by one and two units respectively.

The commutation relation

$$[\hat{P}_i,\hat{K}_j] = -i\delta_{ij}\hat{M} \tag{B.3}$$

suggests that $-i\hat{K}_j$ plays the role of a canonical annihilation operator as it decreases the scaling dimension by one unit. Actually, this is only true for the massive representations (with $M_{\hat{\mathcal{O}}} \neq 0$). The descendants are thus higher weight operators in a massive representation. The massless case is special since $[\hat{P}_i,\hat{K}_j] = 0$, and thus all Galilean boost generators

[38] See also earlier important works of Henkel and Unterberger [75, 76] on this subject.

[39] or quasiprimary in the language of [75, 76]

[40] For $d > 3$, the irreducible representations of the rotation algebra $\mathfrak{o}(d)$ are characterised by Young diagrams rather than a single half-integer. By "spin", one should understand the collection of labels characterising uniquely the representation.

[41] more precisely, a "Verma module" in mathematical jargon

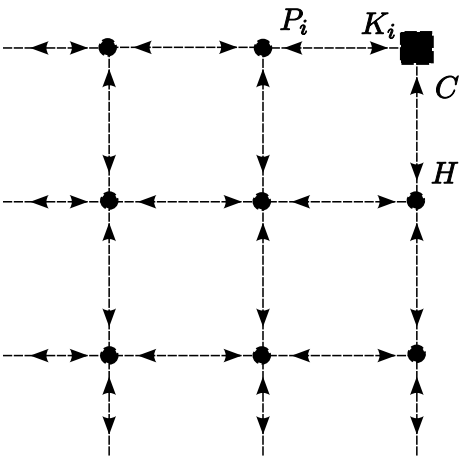

Figure 1. Massive unitary irreducible representation of the Schrödinger algebra: The primary is represented by a full square, while descendants are depicted as solid circles.

$\hat{K}_j$ commute with all "descendants" generated by $\hat{P}_i$. Notably, there are operators in the massless representation which are both descendants and primaries. This implies that the structures of the massive and massless representations are very different and they will be discussed separately in the following.

In a similar fashion, the commutation relation

$$[\hat{H}, \hat{C}] = i\hat{D} \tag{B.4}$$

hints that $i\hat{C}$ plays the role of an annihilation operator as it always decreases the scaling dimension by two units.[42] Indeed, due to the unitarity bound ($\Delta_{\hat{\mathcal{O}}} > \frac{d}{2} > 0$) the right-hand-side of eq. (B.4) is never zero. Thus, for the pair $\hat{H}$ and $\hat{C}$ there is no analogous subtlety which we encountered for the pair $\hat{P}_i$ and $\hat{K}_j$ in the particular case of $M_{\hat{\mathcal{O}}} = 0$.

After this general discussion we are ready to construct explicitly a massive UIR of the Schrödinger algebra on the basis of a primary $\hat{\mathcal{O}}$. In general, the representation is characterised by the scaling dimension $\Delta_{\hat{\mathcal{O}}}$, spin $s_{\hat{\mathcal{O}}}$ and mass number $M_{\hat{\mathcal{O}}} \neq 0$. Its structure is schematically illustrated in figure 1 which makes the irreducibility of the representation manifest. We must mention that figure 1 is in fact oversimplified since $\hat{P}_i$ and $\hat{K}_i$ do not commute with $\hat{H}$ and $\hat{C}$ and thus some arrows corresponding to the action of $\hat{K}_i$ and C on descendants are not shown explicitly.

The operator/state correspondence of [11, 12][43] provides a very interesting alternative viewpoint on the massive representations. According to this correspondence the operators (the primary and descendants) of a NRCFT are mapped onto energy states of the same system placed in an external harmonic potential (with some frequency ω). In particular, the primary operator corresponds to the ground state of the system of mass $M_{\hat{\mathcal{O}}}$ (i.e. with particle number $N_{\hat{\mathcal{O}}} = \frac{M_{\hat{\mathcal{O}}}}{m}$) with the internal angular momentum $s_{\hat{\mathcal{O}}}$. The ground

[42] In order to obtain the canonical commutation relation, the operators $\hat{H}$ and $i\hat{C}$ must be properly renormalised (see [8–10] for details).

[43] See also [8–10, 77] for the earlier quantum-mechanical formulation of this correspondence.

state in the trap reads $\left|\,\psi_{\hat{\mathcal{O}}}\,\right\rangle = e^{-\hat{H}/\omega}\hat{\mathcal{O}}\,|\,0\,\rangle$ and has the energy related to the scaling dimension of the primary via $E = \omega\Delta_{\hat{\mathcal{O}}}$. In this picture, descendants of the NRCFT simply correspond to the excited states. Specifically, the towers generated by $\hat{P}_i$ (see horizontal lines in figure 1) are mapped into excitations of the center-of-mass motion in the harmonic trap. Indeed the oscillator energy spectrum is equidistant with the spacing ω which matches precisely with the NRCFT result mentioned above. Explicitly, the center-of-mass excitations of the trapped system are constructed by acting repeatedly with the creation operators $\hat{Q}_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{P}_i}{\sqrt{\omega}} + i\sqrt{\omega}\hat{K}_i\right)$ on the ground state $\left|\,\psi_{\hat{\mathcal{O}}}\,\right\rangle$. On the other hand, one can also excite the internal motion (so called breathing modes) in the harmonic potential which is mapped into the towers generated by $\hat{H}$ in the NRCFT (see vertical lines in figure 1). Due to scale invariance the energy spectrum of breathing modes is also equidistant with the spacing 2ω [8–10]. The proper operator that excites the breathing modes turns out to be $\hat{B}^\dagger = \hat{L}^\dagger - \frac{\hat{Q}_i^\dagger\hat{Q}_i^\dagger}{2m_{\hat{\mathcal{O}}}}$, where $\hat{L}^\dagger = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{H}}{\omega} - \omega\hat{C} - i\hat{D}\right)$. Note that the pairs of operators $\hat{Q}_i^\dagger$, $\hat{Q}_i$ and $\hat{B}^\dagger$, $\hat{B}$ commute with each other, since they act on different degrees of freedom. Finally, we mention that the operator/state correspondence makes the unitarity of the massive representation manifest, because it maps the representation onto a Hilbert space of the $N_{\hat{\mathcal{O}}}$-particle problem in a harmonic trap.

The light-like dimensional reduction method also provides a complementary perspective on the massive representations. Indeed, the restriction of relativistic conformal primaries to some proper subset of components leads to non-relativistic conformal primaries (with the other components being descendants). To clarify this, let us remind the definition of a primary operator in a relativistic CFT: a local primary operator $\tilde{\mathcal{O}}(x)$ has a well defined "spin" $s_{\tilde{\mathcal{O}}}$ and scaling dimension $\Delta_{\tilde{\mathcal{O}}}$. In other words, it carries an irreducible representation of the Lorentz algebra $\mathfrak{o}(d+1,1)$ spanned by the generators $\tilde{M}^{\mu\nu}$ and it is an eigenvector of the dilatation operator $\tilde{D}$: $[\tilde{D},\tilde{\mathcal{O}}] = -i\Delta_{\tilde{\mathcal{O}}}\tilde{\mathcal{O}}$ where $\tilde{\mathcal{O}} = \tilde{\mathcal{O}}(x=0)$. By definition, a relativistic primary operator $\hat{\mathcal{O}}$ must also commute with the conformal boost generators $\tilde{K}_\mu$: $[\tilde{K}_\mu,\tilde{\mathcal{O}}] = 0$. Furthermore, the dimensional reduction ansatz requires to consider an eigenvector of a null translation operator: $[\tilde{P}^+,\tilde{\mathcal{O}}] = M_{\tilde{\mathcal{O}}}\tilde{\mathcal{O}}$. This ansatz implies that the non-relativistic operator $\hat{\mathcal{O}}(t,\mathbf{x}) := \tilde{\mathcal{O}}(x^+ = t, x^- = 0, \mathbf{x})$ has mass $M_{\hat{\mathcal{O}}} = M_{\tilde{\mathcal{O}}}$. Moreover, the identification (4.9) together with the fact that $\tilde{\mathcal{O}}$ commutes with all conformal boost generators implies that $\hat{\mathcal{O}}$ commutes with the expansion generator $\hat{C}$. Now comes a crucial additional ansatz: let us assume that $\tilde{\mathcal{O}}$ further commutes with the generators $\tilde{M}^{\mu-}$ which is equivalent to the fact that all the components $\tilde{\mathcal{O}}^{+\cdots}$ vanish. As the result, the purely spatial components $\hat{\mathcal{O}}^{i_1 i_2\cdots}(t,\mathbf{x})$ span a non-relativistic primary with spin $s_{\hat{\mathcal{O}}} = s_{\tilde{\mathcal{O}}}$ and scaling dimension $\Delta_{\hat{\mathcal{O}}} = \Delta_{\tilde{\mathcal{O}}}$, while the other components $\hat{\mathcal{O}}^{-\cdots-i_1 i_2\cdots}(t,\mathbf{x})$ are descendants. This can be verified via the identification (4.9), the previously stated commutations and the branching rules for the restriction of $\mathfrak{o}(d+1,1)$ to $\mathfrak{o}(d)$. As a corollary, this property ensures that the charged bilinears $k^{(0)i_1\cdots i_s}(t,\mathbf{x})$ (see section 4 for their definition) are local non-relativistic primary operators.

Another useful perspective on the massive representations of the Schrödinger algebra is the so-called "standard" realisation of the generators. Actually, for spinning massive particles, the space-time differential operators (3.10) correspond to the "orbital" part of

JHEP02(2012)113

the generators which must be supplemented by a "spinning" (or "internal") part spanning an irreducible representation of the subalgebra $\mathfrak{o}(d) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. As was mentioned in the subsection 3.1, the translation and Galilean boost generators $\hat{P}_i$ and $\hat{K}^j$ together with the mass operator span the Heisenberg subalgebra $\mathfrak{h}_d \subset \mathfrak{sch}(d)$. The theorem of Stone and von Neumann (see appendix A) implies that, given the mass m, there is a unique UIR of the Heisenberg subalgebra. The authors of [47] proved that any massive representation of the Schrödinger algebra is equivalent to the following realisation of the remaining generators

$$\begin{aligned}
\hat{P}_t &= \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{L}_- \,, \\
\hat{M}_{ij} &= \frac{\hat{K}_i\hat{P}_j - \hat{K}_j\hat{P}_i}{m} + \hat{L}_{ij} \,, \\
\hat{D} &= -\frac{\hat{K}^i\hat{P}_i}{m} + i\frac{d}{2} + \hat{L}_0 \,, \\
\hat{C} &= \frac{\hat{K}^2}{2m} + \hat{L}_+ \,,
\end{aligned} \tag{B.5}$$

where the operators $\hat{L}_{ij}$, $\hat{L}_\pm$ and $\hat{L}_0$ commute with all the other generators and provide a representation of $\mathfrak{o}(d) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ with usual notations. In a sense, the latter operators correspond to the "spinning" or "internal" part of the generators while the "orbital" part is entirely built out of the translation and boost generators. In order to have an irreducible representation of $\mathfrak{sch}(d)$, the internal part of the representation of $\mathfrak{o}(d) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ should be irreducible, so it is characterised by spin and scaling dimension (for lowest weight representations). Therefore, one recovers in a different way the results obtained from the non-relativistic conformal field theory techniques.

Let us now turn to massless representations of the Schrödinger algebra. As emphasized above, they have a distinct structure and are not so well understood. The representation containing e.g. the non-relativistic currents $j^{(0)}_{i_1\ldots i_n}$ (see section 4 for their definition) has a form of a pyramid and is illustrated in figure 2.[44] The density operator $j^{(0)} = n$ is a non-relativistic primary, but not a descendant. On the other hand, the operators $\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_n} j^{(0)}$ are both primaries and descendants. The spatial currents $j^{(0)}_{i_1\ldots i_n}$ are neither primaries nor descendants. As is clear from figure 2, this representation is not irreducible. Formally, one can generate the full representation starting from the current $j^{(0)}_{i_1\ldots i_n}$ with $n \to \infty$. The operator/state correspondence cannot be applied in a straightforward fashion to the normal-ordered neutral currents as they act trivially on the vacuum state.

In the AdS/CFT correspondence, a special role is played by the very exceptional irreducible representations of the Poincaré group that can be lifted to representations of the conformal group. They are called "singletons" and describe dynamical elementary fields living on the conformal boundary of AdS. So an important question is: which UIRs of the Bargmann group can be extended to representations of the Schrödinger group? The massive (sometimes called "physical") representations of the Bargmann group are

[44] We are thankful to S. Golkar and D.T. Son for presenting this to us.

JHEP02(2012)113

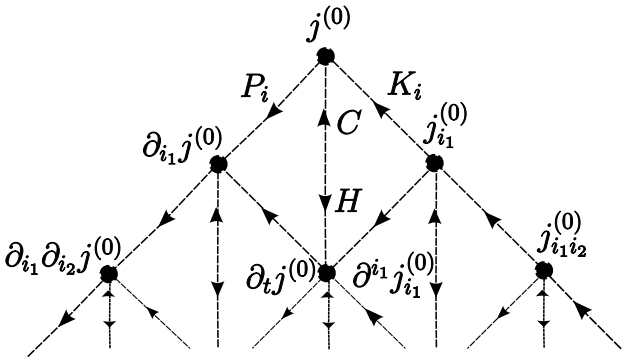

Figure 2. Massless representation of the Schrödinger algebra: The operators are depicted as solid circles.

classified (see e.g. [37, 38]) by the mass, the "spin" and the so-called internal energy[45] corresponding to the fact that in non-relativistic physics there is no privileged zero of the energy. One can see that *all the massive representations of the Bargmann group with vanishing internal energy can be extended to representations of the Schrödinger group.* Indeed, conformal invariance requires that the internal energy must vanish because it is not preserved by scale transformations. Physically the internal energy may always be put to zero.[46] In order to complete the proof, one simply verifies that one may associate, to any representation of zero internal energy, a representation of the Schrödinger group (as follows from the above discussion). The only massive representations of the Schrödinger algebra with vanishing internal energy are those for which the UIR of the $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ subalgebra on the internal (i.e. spinning) degrees of freedom is trivial. Furthermore, looking at the classification of the UIRs of the Schrödinger group [45], one can see that *the massive representations are the only non-trivial unitary irreducible representations of the Bargmann group that can be obtained as restrictions of the Schrödinger group.* In a sense, the analogue of the singleton representations of the Poincaré and conformal groups is identified with the massive representations (with zero internal energy) of the Bargmann and Schrödinger groups.

References

[1] I. Bloch, J. Dalibard and W. Zwerger, *Many-body physics with ultracold gases*, *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008) 885 [arXiv:0704.3011] [INSPIRE].

[45] The internal energy is the eigenvalue of the operator $\hat{L}_-$ in (B.5) and is equal to the opposite of the chemical potential μ in the free Schrödinger equation.

[46] Mathematically, two massive representations of the Galilei group which only differ by the value of their internal energy are equivalent as projective representations [37, 38].

[2] S. Giorgini, L.P. Pitaevskii and S. Stringari, *Theory of ultracold atomic Fermi gases*, *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008) 1215 [arXiv:0706.3360] [INSPIRE].

[3] W. Ketterle and M.W. Zwierlein, *Making, probing and understanding ultracold Fermi gases*, *Nuovo Cim.* **31** (2008) 247 [arXiv:0801.2500].

[4] W. Zwerger, *The BCS-BEC crossover and the unitary Fermi gas*, Springer, U.S.A. (2011).

[5] U. Niederer, *The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation.*, *Helv. Phys. Acta* **45** (1972) 802 [INSPIRE].

[6] C. Hagen, *Scale and conformal transformations in galilean-covariant field theory*, *Phys. Rev.* **D 5** (1972) 377 [INSPIRE].

[7] T. Mehen, I.W. Stewart and M.B. Wise, *Conformal invariance for nonrelativistic field theory*, *Phys. Lett.* **B 474** (2000) 145 [hep-th/9910025] [INSPIRE].

[8] F. Werner and Y. Castin, *The unitary three-body problem in a trap*, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 150401 [cond-mat/0507399] [INSPIRE]

[9] F. Werner and Y. Castin, *Unitary gas in an isotropic harmonic trap: symmetry properties and applications*, *Phys. Rev.* **A 74** (2006) 053604.

[10] Y. Castin and F. Werner, *The unitary gas and its symmetry properties*, arXiv:1103.2851.

[11] Y. Nishida and D.T. Son, *Nonrelativistic conformal field theories*, *Phys. Rev.* **D 76** (2007) 086004 [arXiv:0706.3746] [INSPIRE].

[12] Y. Nishida and D.T. Son, *Unitary Fermi gas, ϵ-expansion and nonrelativistic conformal field theories*, arXiv:1004.3597 [INSPIRE].

[13] D. Son, *Toward an AdS/cold atoms correspondence: A Geometric realization of the Schrödinger symmetry*, *Phys. Rev.* **D 78** (2008) 046003 [arXiv:0804.3972] [INSPIRE].

[14] K. Balasubramanian and J. McGreevy, *Gravity duals for non-relativistic CFTs*, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 061601 [arXiv:0804.4053] [INSPIRE].

[15] J.-W. Chen and W.-Y. Wen, *Shear viscosity of a non-relativistic conformal gas in two dimensions*, arXiv:0808.0399 [INSPIRE].

[16] P. Kovtun and D. Nickel, *Black holes and non-relativistic quantum systems*, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 011602 [arXiv:0809.2020] [INSPIRE].

[17] C.A. Fuertes and S. Moroz, *Correlation functions in the non-relativistic AdS/CFT correspondence*, *Phys. Rev.* **D 79** (2009) 106004 [arXiv:0903.1844] [INSPIRE].

[18] P. Nikolic and S. Sachdev, *Renormalization-group fixed points, universal phase diagram and $1/N$ expansion for quantum liquids with interactions near the unitarity limit*, *Phys. Rev.* **A 75** (2007) 033608 [cond-mat/0609106] [INSPIRE].

[19] M.Y. Veillette, D.E. Sheehy and L. Radzihovsky, *Large-N expansion for unitary superfluid Fermi gases*, *Phys. Rev.* **A 75** (2007) 043614 [cond-mat/0610798] [INSPIRE].

[20] H. Abuki and T. Brauner, *Strongly interacting Fermi systems in $1/N$ expansion: From cold atoms to color superconductivity*, *Phys. Rev.* **D 78** (2008) 125010 [arXiv:0810.0400] [INSPIRE].

[21] I. Klebanov and A. Polyakov, *AdS dual of the critical $O(N)$ vector model*, *Phys. Lett.* **B 550** (2002) 213 [hep-th/0210114] [INSPIRE].

JHEP02(2012)113

[22] S. Giombi and X. Yin, *Higher spin gauge theory and holography: the three-point functions*, *JHEP* **09** (2010) 115 [arXiv:0912.3462] [INSPIRE].

[23] S. Giombi and X. Yin, *Higher spins in AdS and twistorial holography*, *JHEP* **04** (2011) 086 [arXiv:1004.3736] [INSPIRE].

[24] X. Bekaert, E. Meunier and S. Moroz, *Towards a gravity dual of the unitary Fermi gas*, arXiv:1111.1082 [INSPIRE].

[25] E. Sezgin and P. Sundell, *Massless higher spins and holography*, *Nucl. Phys.* **B 644** (2002) 303 [*Erratum ibid.* **B 660** (2003) 403] [hep-th/0205131] [INSPIRE].

[26] M. Vasiliev, *Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in (A)dS(d)*, *Phys. Lett.* **B 567** (2003) 139 [hep-th/0304049] [INSPIRE].

[27] M. Vasiliev, *Higher spin gauge theories in various dimensions*, *Fortsch. Phys.* **52** (2004) 702 [hep-th/0401177] [INSPIRE].

[28] M. Vasiliev, *Higher spin gauge theories in any dimension*, *Comptes Rendus Physique* **5** (2004) 1101 [hep-th/0409260] [INSPIRE].

[29] X. Bekaert, S. Cnockaert, C. Iazeolla and M. Vasiliev, *Nonlinear higher spin theories in various dimensions*, in the proceedings of the *First Solvay workshop on higher-spin gauge theories*, May 12–14, Brussels, Belgium (2004), hep-th/0503128 [INSPIRE].

[30] C. Iazeolla, *On the algebraic structure of higher-spin field equations and new exact solutions*, arXiv:0807.0406 [INSPIRE].

[31] X. Bekaert, N. Boulanger and P. Sundell, *How higher-spin gravity surpasses the spin two barrier: no-go theorems versus yes-go examples*, accepted for publication in *Rev. Mod. Phys.*, arXiv:1007.0435 [INSPIRE].

[32] M.G. Eastwood, *Higher symmetries of the Laplacian*, *Annals Math.* **161** (2005) 1645 [hep-th/0206233] [INSPIRE].

[33] I.R. Klebanov and E. Witten, *AdS/CFT correspondence and symmetry breaking*, *Nucl. Phys.* **B 556** (1999) 89 [hep-th/9905104] [INSPIRE].

[34] S.S. Gubser and I.R. Klebanov, *A universal result on central charges in the presence of double trace deformations*, *Nucl. Phys.* **B 656** (2003) 23 [hep-th/0212138] [INSPIRE].

[35] M. Valenzuela, *Higher-spin symmetries of the free Schrödinger equation*, arXiv:0912.0789 [INSPIRE].

[36] D. Son and M. Wingate, *General coordinate invariance and conformal invariance in nonrelativistic physics: unitary Fermi gas*, *Annals Phys.* **321** (2006) 197 [cond-mat/0509786] [INSPIRE].

[37] J.-M. Levy-Leblond, *Galilei group and nonrelativistic quantum mechanics*, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 776.

[38] J.-M. Levy-Leblond, *Galilean quantum field theories and a ghostless Lee model*, *Commun. Math. Phys.* **4** (1967) 157.

[39] J.-M. Levy-Leblond, *Galilei group and galilean invariance,*, in *Group theory and applications II*, E.M. Loebl ed., Academic Press, U.S.A. (1968).

[40] S. Weinberg, *The quantum theory of fields. Volume 1: foundations*, Cambridge University Press, Cambridge U.K. (1995), section 2.7.

JHEP02(2012)113

[41] V. Bargmann, *On Unitary ray representations of continuous groups*, *Annals Math.* **59** (1954) 1.

[42] C. Duval, G. Burdet, H. Kunzle and M. Perrin, *Bargmann structures and Newton-Cartan theory*, *Phys. Rev.* **D 31** (1985) 1841 [INSPIRE].

[43] C. Duval and P.A. Horvathy, *Non-relativistic conformal symmetries and Newton-Cartan structures*, *J. Phys.* **A 42** (2009) 465206 [arXiv:0904.0531] [INSPIRE].

[44] X. Bekaert, *Higher spin algebras as higher symmetries*, *Physics AUC* **16** (2006) 58 [arXiv:0704.0898] [INSPIRE].

[45] M. Perroud, *Projective Representations of the Schrödinger Group*, *Helv. Phys. Acta* **50** (1977) 233 [INSPIRE].

[46] U. Niederer, *The maximal kinematical invariance groups of schroedinger equations with arbitrary potentials*, *Helv. Phys. Acta* **47** (1974) 167 [INSPIRE].

[47] P. Feinsilver, J. Kocik and R. Schott, *Representations of the Schrödinger algebra and Appell systems*, *Fortschr. Phys.* **52** (2004) 343.

[48] C. Duval, G.W. Gibbons and P. Horvathy, *Celestial mechanics, conformal structures and gravitational waves*, *Phys. Rev.* **D 43** (1991) 3907 [hep-th/0512188] [INSPIRE].

[49] C. Duval, M. Hassaine and P. Horvathy, *The geometry of Schrödinger symmetry in gravity background/non-relativistic CFT*, *Annals Phys.* **324** (2009) 1158 [arXiv:0809.3128] [INSPIRE].

[50] G. Burdet, M. Perrin and P. Sorba, *About the non-relativistic structure of the conformal algebra*, *Comm. Math. Phys.* **34** (1973) 85.

[51] X. Bekaert, E. Joung and J. Mourad, *On higher spin interactions with matter*, *JHEP* **05** (2009) 126 [arXiv:0903.3338] [INSPIRE].

[52] F.A. Berends, G.J.H. Burgers and H. van Dam, *Explicit construction of conserved currents for massless fields of arbitrary spin*, *Nucl. Phys.* **B 271** (1986) 42.

[53] X. Bekaert, E. Joung and J. Mourad, *Effective action in a higher-spin background*, *JHEP* **02** (2011) 048 [arXiv:1012.2103] [INSPIRE].

[54] E. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Conformal supergravity*, *Phys. Rept.* **119** (1985) 233 [INSPIRE].

[55] L. Girardello, M. Porrati and A. Zaffaroni, *3D interacting CFTs and generalized Higgs phenomenon in higher spin theories on AdS*, *Phys. Lett.* **B 561** (2003) 289 [hep-th/0212181] [INSPIRE].

[56] W.D. Goldberger, *AdS/CFT duality for non-relativistic field theory*, *JHEP* **03** (2009) 069 [arXiv:0806.2867] [INSPIRE].

[57] J.L. Barbon and C.A. Fuertes, *On the spectrum of nonrelativistic AdS/CFT*, *JHEP* **09** (2008) 030 [arXiv:0806.3244] [INSPIRE].

[58] F.-L. Lin and S.-Y. Wu, *Non-relativistic holography and singular black hole*, *Phys. Lett.* **B 679** (2009) 65 [arXiv:0810.0227] [INSPIRE].

[59] B. Julia and H. Nicolai, *Null Killing vector dimensional reduction and galilean geometrodynamics*, *Nucl. Phys.* **B 439** (1995) 291 [hep-th/9412002] [INSPIRE].

JHEP02(2012)113

[60] D. Anninos, T. Hartman and A. Strominger, *Higher spin realization of the dS/CFT correspondence*, arXiv:1108.5735 [INSPIRE].

[61] M. Flato and C. Fronsdal, *One massless particle equals two dirac singletons: elementary particles in a curved space.* 6, *Lett. Math. Phys.* **2** (1978) 421 [INSPIRE].

[62] M. Vasiliev, *Higher spin superalgebras in any dimension and their representations*, *JHEP* **12** (2004) 046 [hep-th/0404124] [INSPIRE].

[63] M.A. Vasiliev, *Higher spin gauge theories in four-dimensions, three-dimensions and two-dimensions*, *Int. J. Mod. Phys.* **D 5** (1996) 763 [hep-th/9611024] [INSPIRE].

[64] M. Barth and W. Zwerger, *Tan relations in one dimension*, *Annals of Physics* **326** (2011) 2544 [arXiv:1101.5594].

[65] M.R. Douglas, L. Mazzucato and S.S. Razamat, *Holographic dual of free field theory*, *Phys. Rev.* **D 83** (2011) 071701 [arXiv:1011.4926] [INSPIRE].

[66] M. Vasiliev, *Conformal higher spin symmetries of* $4D$ *massless supermultiplets and* $\mathrm{OSp}(L, 2M)$ *invariant equations in generalized (super)space*, *Phys. Rev.* **D 66** (2002) 066006 [hep-th/0106149] [INSPIRE].

[67] O. Gelfond and M. Vasiliev, *Higher spin fields in siegel space, currents and theta functions*, *JHEP* **03** (2009) 125 [arXiv:0801.2191] [INSPIRE].

[68] M. Vasiliev, *Relativity, causality, locality, quantization and duality in the* $\mathrm{Sp}(2M)$ *invariant generalized space-time*, hep-th/0111119 [INSPIRE].

[69] O. Gelfond and M. Vasiliev, *Higher rank conformal fields in the* $\mathrm{Sp}(2M)$ *symmetric generalized space-time*, *Theor. Math. Phys.* **145** (2005) 1400 [*Teor. Mat. Fiz.* **145** (2005) 35] [hep-th/0304020] [INSPIRE].

[70] H. Weyl, *Quantum mechanics and group theory*, *Z. Phys.* **46** (1927) 1 [INSPIRE].

[71] E.P. Wigner, *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*, *Phys. Rev.* **40** (1932) 749 [INSPIRE].

[72] H. Groenewold, *On the principles of elementary quantum mechanics*, *Physica* **12** (1946) 405 [INSPIRE].

[73] J.E. Moyal, *Quantum mechanics as a statistical theory*, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **45** (1949) 99.

[74] M. Hillery, R. O'Connell, M. Scully and E.P. Wigner, *Distribution functions in physics: fundamentals*, *Phys. Rept.* **106** (1984) 121 [INSPIRE].

[75] R. Cherniha and M. Henkel, *On nonlinear partial differential equations with an infinite dimensional conditional symmetry*, *J. Stat. Phys* **75** (1994) 1023 [math-ph/0402059] [INSPIRE].

[76] M. Henkel and J. Unterberger, *Schrödinger invariance and space-time symmetries*, *Nucl. Phys.* **B 660** (2003) 407 [hep-th/0302187] [INSPIRE].

[77] S. Tan, *Short range scaling laws of quantum gases with contact interactions*, cond-mat/0412764.

JHEP02(2012)113

Bibliographie

[1] C. -N. Yang and R. L. Mills, "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance," Phys. Rev. **96** (1954) 191.

[2] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], "Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC," Phys. Lett. B **716** (2012) 1 [arXiv :1207.7214 [hep-ex]].

[3] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], "Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC," Phys. Lett. B **716** (2012) 30 [arXiv :1207.7235 [hep-ex]].

[4] E. Majorana, "Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario," *Nuovo Cim.* **9** (1932) 335 [en Italien].

[5] D. M. Fradkin, "Comments on a paper by Majorana concerning elementary particles," *Am. J. Phys.* **53** (1965) 314.

[6] J. C. Maxwell, "A dynamical theory of the electromagnetic field," Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. **155** (1865) 459.

[7] A. Einstein, "On the electrodynamics of moving bodies," Annalen Phys. **17** (1905) 891 [Annalen Phys. **14** (2005) 194].

[8] P. A. M. Dirac, "The Quantum theory of electron," Proc. Roy. Soc. Lond. A **117** (1928) 610.

[9] M. Fierz and W. Pauli, "On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field," Proc. Roy. Soc. Lond. A **173** (1939) 211.

[10] W. Rarita and J. Schwinger, "On a theory of particles with half integral spin," *Phys. Rev.* **60** (1941) 61.

[11] P. A. M. Dirac, "Relativistic wave equations," *Proc. Roy. Soc. Lond.* **155A** (1936) 447.

[12] M. Fierz, "Force-free par ticles with any spin," *Helv. Phys. Acta* **12** (1939) 3.

[13] E. P. Wigner, "On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group," *Annals Math.* **40** (1939) 149.

[14] V. Bargmann and E. P. Wigner, "Group theoretical discussion of relativistic wave equations," *Proc. Nat. Acad. Sci.* **34** (1948) 211.

[15] S. E. Konstein, M. A. Vasiliev and V. N. Zaikin, "Conformal higher spin currents in any dimension and AdS / CFT correspondence,' JHEP **0012** (2000) 018 [hep-th/0010239].

[16] E. Witten, "Spacetime reconstruction,". http ://theory.caltech.edu/jhs60/witten/1.html. talk given at J.H. Schwarz 60th Birthday Conference, Cal Tech, Nov 2-3, 2001.

[17] C. Fronsdal, "Elementary particles in a curved space," *Rev. Mod. Phys.* **37** (1965) 221.

[18] C. Fronsdal, "Elementary particles in a curved space. 2," *Phys. Rev.* **D10** (1974) 589.

[19] S. Ferrara and C. Fronsdal, "Conformal fields in higher dimensions," in *Quantization, gauge theory, and strings (vol. 1)*, A. Semikhatov, M. A. Vasiliev and V. Zaikin eds. (Scientific World, 2001) pp. 405–426 ; `arXiv:hep-th/0006009`.

[20] L. P. S. Singh and C. R. Hagen, "Lagrangian formulation for arbitrary spin," *Phys. Rev.* **D9** (1974) 898 & 910.

[21] C. Fronsdal, "Massless Fields with Integer Spin," Phys. Rev. D **18** (1978) 3624.

[22] J. Fang and C. Fronsdal, "Massless Fields with Half Integral Spin," Phys. Rev. D **18** (1978) 3630.

[23] N. Boulanger, T. Damour, L. Gualtieri and M. Henneaux, "Inconsistency of interacting, multigraviton theories," Nucl. Phys. B **597** (2001) 127 [hep-th/0007220].

[24] X. Bekaert, N. Boulanger and P. Sundell, "How higher-spin gravity surpasses the spin two barrier : no-go theorems versus yes-go examples," arXiv :1007.0435 [hep-th].

[25] C. Aragone and S. Deser, "Consistency problems of hypergravity," *Phys. Lett.* **B86** (1979) 161.

[26] C. Aragone and S. Deser, "Higher spin vierbein gauge fermions and hypergravities," *Nucl. Phys.* **B170** (1980) 329.

[27] S. R. Coleman and J. Mandula, "All Possible Symmetries Of The S Matrix,' Phys. Rev. **159** (1967) 1251.

[28] N. Boulanger, S. Leclercq and P. Sundell, "On The Uniqueness of Minimal Coupling in Higher-Spin Gauge Theory," JHEP **0808** (2008) 056 [arXiv :0805.2764 [hep-th]].

[29] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev, "Cubic interaction in extended theories of massless higher spin fields," *Nucl. Phys.* **B291** (1987) 141.

[30] M. A. Vasiliev, "Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions," *Phys. Lett.* **B243** (1990) 378.

[31] M. A. Vasiliev, "Properties of equations of motion of interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions," *Class. Quant. Grav.* **8** (1991) 1387.

[32] M. A. Vasiliev, "More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions," *Phys. Lett.* **B285** (1992) 225.

[33] E. S. Fradkin, "The problem of unification of all interactions and self-consistency," preprint Lebedev 90-0193. Discours pour la réception de la médaille Dirac (Trieste, 1989).

[34] E. Sezgin and P. Sundell, "Massless higher spins and holography," Nucl. Phys. B **644** (2002) 303 [Erratum-ibid. B **660** (2003) 403] [hep-th/0205131].

[35] I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, "AdS dual of the critical O(N) vector model," Phys. Lett. B **550** (2002) 213 [hep-th/0210114].

[36] E. Sezgin and P. Sundell, "Holography in 4D (super) higher spin theories and a test via cubic scalar couplings," JHEP **0507** (2005) 044 [hep-th/0305040].

[37] A. Sagnotti, "Notes on Strings and Higher Spins," arXiv :1112.4285 [hep-th].

[38] N. Boulanger and D. Ponomarev, "Frame-like off-shell dualisation for mixed-symmetry gauge fields," arXiv :1206.2052 [hep-th].

[39] C. Bunster, M. Henneaux and S. Hortner, "Gravitational Electric-Magnetic Duality, Gauge Invariance and Twisted Self-Duality," arXiv :1207.1840 [hep-th].

[40] X. Bekaert and M. Grigoriev, "Notes on the ambient approach to boundary values of AdS gauge fields," arXiv :1207.3439 [hep-th].

[41] E. Joung, L. Lopez and M. Taronna, "Solving the Noether procedure for cubic interactions of higher spins in (A)dS," arXiv :1207.5520 [hep-th].

[42] I. L. Buchbinder, T. V. Snegirev and Y. .M. Zinoviev, "On gravitational interactions for massive higher spins in AdS_3," arXiv :1208.0183 [hep-th].

[43] S. Giombi and X. Yin, "The Higher Spin/Vector Model Duality," arXiv :1208.4036 [hep-th].

[44] C. Iazeolla and P. Sundell, "Biaxially symmetric solutions to 4D higher-spin gravity," arXiv :1208.4077 [hep-th].

[45] M. Ammon, M. Gutperle, P. Kraus and E. Perlmutter, "Black holes in three dimensional higher spin gravity : A review," arXiv :1208.5182 [hep-th].

[46] M. R. Gaberdiel and R. Gopakumar, "Minimal Model Holography," arXiv :1207.6697 [hep-th].

[47] V. E. Didenko and E. D. Skvortsov, "Towards higher-spin holography in ambient space of any dimension," arXiv :1207.6786 [hep-th].

[48] E. Sezgin and P. Sundell, "Supersymmetric Higher Spin Theories," arXiv :1208.6019 [hep-th].

[49] Comptes-rendus du colloque Solvay "Higher Spin gauge theories", (2004), édité par R. Argurio, G. Barnich, G. Bonelli and M. Grigoriev. Disponible à : www.ulb.ac.be/sciences/ptm/pmif/Solvay1proc.pdf

[50] M. A. Vasiliev, "Higher spin gauge theories in four-dimensions, three-dimensions, and two-dimensions," Int. J. Mod. Phys. D **5** (1996) 763 [hep-th/9611024].

[51] M. A. Vasiliev, "Higher spin gauge theories : Star product and AdS space," In *Shifman, M.A. (ed.) : The many faces of the superworld* 533-610 [hep-th/9910096].

[52] M. A. Vasiliev, "Progress in higher spin gauge theories," hep-th/0104246.

[53] X. Bekaert and N. Boulanger, "Massless spin-two field S-duality," *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) S417, `arXiv:hep-th/0212131`.

[54] X. Bekaert and N. Boulanger, "Mixed symmetry gauge fields in a flat background," in the proceedings of the conference "Supersymmetries and Quantum Symmetries SQS'03", Dubna (Russie) 24-29 juillet 2003, `arXiv:hep-th/0310209`.

[55] X. Bekaert, I. L. Buchbinder, A. Pashnev, and M. Tsulaia, "On higher spin theory : Strings, BRST, dimensional reductions," *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) S1457, `arXiv:hep-th/0312252`.

[56] M. A. Vasiliev, "Higher spin gauge theories in various dimensions," Fortsch. Phys. **52** (2004) 702 [hep-th/0401177].

[57] D. Sorokin, "Introduction to the classical theory of higher spins," *AIP Conf. Proc.* **767** (2005) 172, arXiv:hep-th/0405069.

[58] N. Bouatta, G. Compere, and A. Sagnotti, "An introduction to free higher-spin fields," arXiv:hep-th/0409068.

[59] M. A. Vasiliev, "Higher spin gauge theories in any dimension," *Comptes Rendus Physique* **5** (2004) 1101, arXiv:hep-th/0409260.

[60] A. C. Petkou, "Holography, duality and higher-spin theories," arXiv:hep-th/0410116.

[61] S. de Buyl and A. Kleinschmidt, "Higher spin fields from indefinite Kac-Moody algebras," arXiv:hep-th/0410274.

[62] A. Sagnotti, E. Sezgin, and P. Sundell, "On higher spins with a strong $Sp(2,\mathbb{R})$ condition," arXiv:hep-th/0501156.

[63] D. Francia and C. M. Hull, "Higher-spin gauge fields and duality," arXiv:hep-th/0501236.

[64] M. Bianchi and V. Didenko, "'Massive' higher spin multiplets and holography," arXiv:hep-th/0502220.

[65] G. Barnich, G. Bonelli and M. Grigoriev, "From BRST to light-cone description of higher spin gauge fields," *Physics AUC* **15** (2005) 1, arXiv:hep-th/0502232.

[66] X. Bekaert, S. Cnockaert, C. Iazeolla, and M. A. Vasiliev, "Nonlinear higher spin theories in various dimensions," arXiv:hep-th/0503128.

[67] G. Barnich and M. Grigoriev, "BRST extension of the non-linear unfolded formalism," in the proceedings of the conference "Rencontres Mathématiques de Glanon", July 2004, Glanon (France) arXiv:hep-th/0504119.

[68] D. Francia and A. Sagnotti, "Higher-spin geometry and string theory," *J. Phys. Conf. Ser.* **33** (2006) 57, arXiv:hep-th/0601199.

[69] X. Bekaert, N. Boulanger, S. Cnockaert, and S. Leclercq, "On Killing tensors and cubic vertices in higher-spin gauge theories," *Fortsch. Phys.* **54** (2006) 282, arXiv:hep-th/0602092.

[70] X. Bekaert and N. Boulanger, "The unitary representations of the Poincaré group in any spacetime dimension," in the proceedings of the "Deuxièmes rencontres de physique mathématique à Modave", Modave (Belgique) 6-12 Août 2006, arXiv:hep-th/0611263.

[71] A. K. H. Bengtsson, "Towards unifying structures in higher spin gauge symmetry," *SIGMA* **4** (2008) 013, arXiv:0802.0479 [hep-th].

[72] M. Henneaux, "N-complexes and higher spin gauge fields," *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **5** (2008) 1255, arXiv:0808.1975 [hep-th].

[73] A. Fotopoulos and M. Tsulaia, "Gauge invariant Lagrangians for free and interacting higher spin fields. A review of the BRST formulation," *Int. J. Mod. Phys.* **A24** (2009) 1,

[74] X. Bekaert, E. Joung and J. Mourad, "Comments on higher-spin holography," Fortsch. Phys. **60** (2012) 882 [arXiv :1202.0543 [hep-th]].

[75] X. Bekaert, "Particules de masse nulle dans les représentations exotiques du groupe de Poincaré," Mémoire d'habilitation à diriger les recherches [en français], [tel-00495431].

[76] X. Bekaert and E. Meunier, "Higher spin interactions with scalar matter on constant curvature spacetimes : conserved current and cubic coupling generating functions," JHEP **1011** (2010) 116 [arXiv :1007.4384 [hep-th]].

[77] X. Bekaert, E. Meunier and S. Moroz, "Symmetries and currents of the ideal and unitary Fermi gases," JHEP **1202** (2012) 113 [arXiv :1111.3656 [hep-th]].

[78] X. Bekaert, E. Meunier and S. Moroz, "Towards a gravity dual of the unitary Fermi gas," Phys. Rev. D **85** (2012) 106001 [arXiv :1111.1082 [hep-th]].

[79] T. Ortin, "Gravity and strings," Cambridge University, Cambridge University Press, 2004.

[80] H. Bacry, "Leçons sur la théorie des groupes et les symétries des particules élémentaires," Gordon and Breach, Dunod, Paris, 1967.

[81] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, "Conformal field theory," New York, USA : Springer (1997) 890p.

[82] F. A. Berends, G. J. H. Burgers and H. van Dam, "Explicit construction of conserved currents for massless fields of arbitrary spin," Nucl. Phys. B **271** (1986) 42.

[83] G. Barnich and F. Brandt, "Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charges," Nucl. Phys. B **633** (2002) 3 [hep-th/0111246].

[84] J.-P. Derendinger, "Théorie quantique des champs," Presses Polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2001.

[85] L. H. Ryder, "Quantum Field Theory," Cambridge, Uk : Univ. Pr. (1985) 443p.

[86] S. M. Carroll, "Lecture notes on general relativity," gr-qc/9712019.

[87] G. Barnich and M. Henneaux, "Consistent couplings between fields with a gauge freedom and deformations of the master equation," Phys. Lett. B **311** (1993) 123 [hep-th/9304057].

[88] R. Hakim, "Gravitation relativiste," Paris : InterEditions : CNRS Editions, 1994.

[89] H. Whitney, "Differentiable Manifolds in Euclidean Space," Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **21(7)** (1935) 462-464.

[90] J.F. Nash, "The imbedding problem for Riemannian manifolds," Annals Math. **63** (1955) 20.

[91] N. Boulanger and P. Sundell, "An action principle for Vasiliev's four-dimensional higher-spin gravity," J. Phys. A **44** (2011) 495402 [arXiv :1102.2219 [hep-th]].

[92] A. Salam, "Dirac And Finite Field Theories," In *Kursunoglu, B.N. (ed.), Wigner, E.P. (ed.) : Paul Adrien Maurice Dirac*, 262-275. (see Book Index).

[93] M. Henneaux, "Cours : Solutions de de Sitter et Anti-de Sitter",Université libre de Bruxelles.

[94] R. d'Inverno, "Introducing Einstein's relativity," Oxford, UK : Clarendon (1992) 383p.

[95] T. Biswas and W. Siegel, "Radial dimensional reduction : Anti-de Sitter theories from flat," JHEP **0207** (2002) 005 [hep-th/0203115].

[96] J. Mickelsson and J. Niederle, "Contractions of representations of de sitter groups," Commun. Math. Phys. **27** (1972) 167.

[97] B. de Wit and I. Herger, "Anti-de Sitter supersymmetry," Lect. Notes Phys. **541** (2000) 79 [hep-th/9908005].

[98] P. Boulanger, "Cours de Mécanique analytique ; Cinématique," Presses universitaires de Bruxelles (1994).

[99] H. Weyl, "Quantum mechanics and group theory," Z. Phys. **46** (1927) 1.

[100] E. P. Wigner, "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium," Phys. Rev. **40** (1932) 749.

[101] H. J. Groenewold, "On the Principles of elementary quantum mechanics," Physica **12** (1946) 405.

[102] J. E. Moyal, "Quantum mechanics as a statistical theory," Proc. Cambridge Phil. Soc. **45** (1949) 99.

[103] For a review see *e. g.* M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully and E. P. Wigner, "Distribution functions in physics : Fundamentals," Phys. Rept. **106** (1984) 121.

[104] X. Bekaert, E. Joung and J. Mourad, "Weyl calculus and Noether currents : An application to cubic interactions," Acte de la conférence « 6th international spring school and work-shop on quantum field theory and Hamiltonian systems (Calimanesti & Caciulata, Romania ; May 2008) » publié dans Physics Annals of the University of Craiova **18** (2008) 26 [hal-00360707].

[105] D. Anselmi, "Higher-spin current multiplets in operator-product expansions," Class. Quant. Grav. **17** (2000) 1383 [arXiv:hep-th/9906167].

[106] M. A. Vasiliev, "Higher spin gauge theories : Star-product and AdS space" in M. Shifman ed., *The many faces of the superworld* (World Scientific, 2000) [arXiv:hep-th/9910096].

[107] S. E. Konstein, M. A. Vasiliev and V. N. Zaikin, "Conformal higher spin currents in any dimension and AdS/CFT correspondence," JHEP **0012** (2000) 018 [arXiv:hep-th/0010239].

[108] O. A. Gelfond, E. D. Skvortsov and M. A. Vasiliev, "Higher spin conformal currents in Minkowski space," Theor. Math. Phys. **154** (2008) 294 [arXiv:hep-th/0601106].

[109] S. F. Prokushkin and M. A. Vasiliev, "Currents of arbitrary spin in AdS_3," Phys. Lett. B **464** (1999) 53 [arXiv:hep-th/9906149].

[110] S. F. Prokushkin and M. A. Vasiliev, "Cohomology of arbitrary spin currents in AdS(3)," Theor. Math. Phys. **123** (2000) 415 [Teor. Mat. Fiz. **123** (2000) 3] [hep-th/9907020].

[111] R. Manvelyan and W. Ruhl, "Conformal coupling of higher spin gauge fields to a scalar field in AdS_4 and generalized Weyl invariance," Phys. Lett. B **593** (2004) 253 [arXiv:hep-th/0403241].

[112] R. Manvelyan and K. Mkrtchyan, "Conformal invariant interaction of a scalar field with the higher spin field in AdS_d," Mod. Phys. Lett. A **25** (2010) 1333 [arXiv:0903.0058 [hep-th]].

[113] A. Fotopoulos, N. Irges, A. C. Petkou and M. Tsulaia, "Higher-spin gauge fields interacting with scalars : The Lagrangian cubic vertex," JHEP **0710** (2007) 021 [arXiv:0708.1399 [hep-th]].

[114] C. Fronsdal, "Singletons and massless, integral spin fields on de Sitter space ," Phys. Rev. D **20** (1979) 848.

[115] A. Fotopoulos and M. Tsulaia, "Current exchanges for reducible higher spin modes on AdS," arXiv:1007.0747 [hep-th].

[116] F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer, "Deformation Theory And Quantization. 1. Deformations Of Symplectic Structures," Annals Phys. **111** (1978) 61 & 111.

[117] M. A. Vasiliev, "Higher spin gauge theories in any dimension," Comptes Rendus Physique **5** (2004) 1101 [hep-th/0409260].

[118] X. Bekaert, S. Cnockaert, C. Iazeolla and M.A. Vasiliev, "Nonlinear higher spin theories in various dimensions," in the proceedings of the First Solvay Workshop on Higher-Spin Gauge Theories (Brussels, Belgium, May 2004) [arXiv:hep-th/0503128].

[119] X. Bekaert and N. Boulanger, "Gauge invariants and Killing tensors in higher-spin gauge theories," Nucl. Phys. B **722** (2005) 225 [hep-th/0505068].

[120] X. Bekaert, E. Joung and J. Mourad, "On higher spin interactions with matter," JHEP **0905** (2009) 126 [arXiv:0903.3338 [hep-th]].

[121] X. Bekaert, "Comments on higher-spin symmetries," Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **6** (2009) 285 [arXiv:0807.4223 [hep-th]].

[122] X. Bekaert, "Higher spin algebras as higher derivative symmetries," Physics AUC **16** (2006) 58 [arXiv:0704.0898 [hep-th]].

[123] M. A. Vasiliev, "Actions, charges and off-shell fields in the unfolded dynamics approach," Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **3** (2006) 37 [arXiv:hep-th/0504090].

[124] M. Grigoriev, "Off-shell gauge fields from BRST quantization," arXiv:hep-th/0605089.

[125] I. Bengtsson, "Anti-de Sitter space", (1998)

[126] E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography," Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 253 [hep-th/9802150].

[127] J. L. Petersen, "Introduction to the Maldacena conjecture on AdS / CFT," Int. J. Mod. Phys. A **14** (1999) 3597 [hep-th/9902131].

[128] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, "Large N field theories, string theory and gravity," Phys. Rept. **323** (2000) 183 [hep-th/9905111].

[129] E. Alvarez, J. Conde and L. Hernandez, "Rudiments of holography," Int. J. Mod. Phys. D **12** (2003) 543 [hep-th/0205075].

[130] C. A. Bayona and N. R. F. Braga, "Anti-de Sitter boundary in Poincare coordinates," Gen. Rel. Grav. **39** (2007) 1367 [hep-th/0512182].

[131] U. Moschella, "The de Sitter and anti-de Sitter Sightseeing Tour," Séminaire Poincaré 1 (2005) 1 – 12.

[132] G. T. Horowitz and J. Polchinski, "Gauge/gravity duality," In *Oriti, D. (ed.) : Approaches to quantum gravity* 169-186 [gr-qc/0602037].

[133] J. Polchinski, "Introduction to Gauge/Gravity Duality," arXiv :1010.6134 [hep-th].

[134] G. W. Gibbons, "Anti-de-Sitter spacetime and its uses," arXiv :1110.1206 [hep-th].

[135] J. McGreevy, Notes de cours du MIT, (2008), disponible à : http ://web.mit.edu/ mcgreevy/www/fall08/lecture_notes.html.

[136] M. Taronna, "Higher-Spin Interactions : three-point functions and beyond," arXiv :1209.5755 [hep-th].

[137] E. D'Hoker and D. Z. Freedman, "Supersymmetric gauge theories and the AdS / CFT correspondence," hep-th/0201253.

[138] A. Mikhailov, "Notes on higher spin symmetries," hep-th/0201019.

[139] S. Cnockaert, "Higher spin gauge field theories : Aspects of dualities and interactions," hep-th/0606121.

[140] M. F. Paulos, "Towards Feynman rules for Mellin amplitudes," JHEP **1110** (2011) 074 [arXiv :1107.1504 [hep-th]].

[141] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, "Gauge theory correlators from noncritical string theory," Phys. Lett. B **428** (1998) 105 [hep-th/9802109].

[142] B. Allen and T. Jacobson, "Vector Two Point Functions In Maximally Symmetric Spaces," Commun. Math. Phys. **103** (1986) 669.

[143] C. Gabriel and P. Spindel, "Massive spin-2 propagators on de Sitter space," J. Math. Phys. **38** (1997) 622 [hep-th/9912054].

[144] E. D'Hoker, D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis and L. Rastelli, "Graviton and gauge boson propagators in AdS(d+1)," Nucl. Phys. B **562** (1999) 330 [hep-th/9902042].

[145] T. Leonhardt, R. Manvelyan and W. Ruhl, "The Group approach to AdS space propagators," Nucl. Phys. B **667** (2003) 413 [hep-th/0305235].

[146] N. C. Tsamis and R. P. Woodard, "A Maximally symmetric vector propagator," J. Math. Phys. **48** (2007) 052306 [gr-qc/0608069].

[147] J. McGreevy, "Holographic duality with a view toward many-body physics," Adv. High Energy Phys. **2010** (2010) 723105 [arXiv :0909.0518 [hep-th]].

[148] M Abramowitz and I.A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables."

[149] C. J. C. Burges, D. Z. Freedman, S. Davis and G. W. Gibbons, "Supersymmetry In Anti-de Sitter Space," Annals Phys. **167** (1986) 285.

[150] J. Penedones, "High Energy Scattering in the AdS/CFT Correspondence," arXiv :0712.0802 [hep-th].

[151] J. Penedones, "Writing CFT correlation functions as AdS scattering amplitudes," JHEP **1103** (2011) 025 [arXiv :1011.1485 [hep-th]].

[152] I. R. Klebanov and E. Witten, "AdS / CFT correspondence and symmetry breaking," Nucl. Phys. B **556** (1999) 89 [hep-th/9905104].

[153] P. A. M. Dirac, "Wave equations in conformal space," Annals Math. **37** (1936) 429.

[154] G. Mack, "D-independent representation of Conformal Field Theories in D dimensions via transformation to auxiliary Dual Resonance Models. Scalar amplitudes," arXiv :0907.2407 [hep-th].

[155] S. Giombi and X. Yin, "Higher Spin Gauge Theory and Holography : The Three-Point Functions," JHEP **1009** (2010) 115 [arXiv :0912.3462 [hep-th]].

[156] S. Giombi and X. Yin, "Higher Spins in AdS and Twistorial Holography," JHEP **1104** (2011) 086 [arXiv :1004.3736 [hep-th]].

[157] N. Colombo and P. Sundell, "Higher Spin Gravity Amplitudes From Zero-form Charges," arXiv :1208.3880 [hep-th].

[158] J. Maldacena and A. Zhiboedov, "Constraining conformal field theories with a slightly broken higher spin symmetry," arXiv :1204.3882 [hep-th].

[159] J.-M. Levy-Leblond, in E. M. Loebl (ed), *Group theory and applications II* (Academic Press, 1968).

[160] S. Weinberg, *The Quantum theory of fields. Vol. 1 : Foundations* (Cambridge, 1995) Section 2.7.

[161] V. Bargmann, "On Unitary ray representations of continuous groups," Annals Math. **59** (1954) 1.

[162] C. Duval, G. Burdet, H. P. Kunzle and M. Perrin, "Bargmann structures and Newton-Cartan theory," Phys. Rev. D **31** (1985) 1841.

[163] U. Niederer, "The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation," Helv. Phys. Acta **45** (1972) 802.

[164] C. R. Hagen, "Scale and conformal transformations in Galilean-covariant field theory," Phys. Rev. D **5** (1972) 377.

[165] C. Duval and P. A. Horvathy, "Non-relativistic conformal symmetries and Newton-Cartan structures," J. Phys. A **42** (2009) 465206 [arXiv :0904.0531 [math-ph]].

[166] M. Valenzuela, "Higher-spin symmetries of the free Schrödinger equation," arXiv :0912.0789 [hep-th].

[167] M. G. Eastwood, "Higher symmetries of the Laplacian," Annals Math. **161** (2005) 1645 [arXiv :hep-th/0206233].

[168] M. A. Vasiliev, "Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in (A)dS(d)," Phys. Lett. B **567** (2003) 139 [arXiv :hep-th/0304049].

[169] M. Perroud, "Projective Representations of the Schrodinger Group," Helv. Phys. Acta **50** (1977) 233.

[170] U. Niederer, "The maximal kinematical invariance groups of schroedinger equations with Helv. Phys. Acta **47** (1974) 167.

[171] P. Feinsilver, J. Kocik and R. Schott, "Representations of the Schrödinger algebra and Appell systems," Fortschr. Phys. **52** (2004) 343.

[172] C. Duval, G. W. Gibbons and P. Horvathy, "Celestial mechanics, conformal structures and gravitational waves," Phys. Rev. D **43** (1991) 3907 [arXiv :hep-th/0512188].

[173] C. Duval, M. Hassaine and P. A. Horvathy, "The Geometry of Schrodinger symmetry in gravity background/non-relativistic CFT," Annals Phys. **324** (2009) 1158 [arXiv :0809.3128 [hep-th]].

[174] D. T. Son, "Toward an AdS/cold atoms correspondence : A Geometric realization of the Schrodinger symmetry," Phys. Rev. D **78** (2008) 046003 [arXiv :0804.3972 [hep-th]].

[175] G. Burdet, M. Perrin and P. Sorba, "About the non-relativistic structure of the conformal algebra," Comm. Math. Phys. **34** (1973) 85.

Résumé :

La théorie des spins élevés est le domaine de la physique théorique au centre de cette thèse. Le contexte général de la naissance de cette théorie est présentée dans l'introduction.

La première partie est axée sur les ingrédients (méthode de Noether, fonctions génératrices et formalisme ambiant) permettant la construction de vertex cubiques entre un champ scalaire de matière et un champ de jauge de spin élevé dans un espace-temps à courbure constante à partir des courants conservés en espace-temps plat.

Dans un second temps, nous préparons les éléments pour un futur test de la correspondance holographique à l'ordre cubique voire quartique en la constante de couplage. Plus précisément, nous révisons en détail le calcul de certains propagateurs, ce qui nous mène à calculer les fonctions à trois points impliquant deux scalaires.

La dernière partie, bien que concernant toujours l'holographie des spins élevés, traite de la physique non-relativiste. Les symétries et les courants d'un gaz parfait/unitaire de Fermi y sont étudiés. Le lien entre physiques relativiste et non-relativiste est obtenue grâce à la réduction dimensionnelle de Bargmann.

Mots clés :

Symétries, méthode de Noether, courants conservés, espace-temps de courbure constante, formalisme ambiant, holographie, correspondance AdS/CFT, spins élevés, gaz unitaire de Fermi

Abstract :

The higher spin theory is the field of theoretical physics at the center of this thesis. The general context of the birth of this theory is presenting in the introduction.

The first part focuses on the ingredients (Noether method, generating functions and ambient formalism) for the construction of cubic vertices between a scalar matter field and a higher spin gauge field in a constant curvature space-time from conserved currents in flat space-time.

In a second step, we prepare the around for a future test of the holographic correspondence in the cubic or quartic order in the coupling constant. More specifically, we review in detail the computation of some propagators, which leads us to calculate three-point functions involving two scalars.

The last part, although always on the higher spin holography, deals with non-relativistic physics. Symmetries and currents of an ideal or unitary Fermi gas are studied. The link between relativistic and non-relativistic physics is obtained by Bargmann dimensional reduction.

Keywords :

Symmetries, Noether method, conserved currents, spacetime of constant curvature, ambient formalism, holography, AdS/CFT correspondence, higher spin, unitary Fermi gas